

Collision de trous noirs de Kerr en rapport de masse extrême

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade académique de Master [120] en sciences physiques, finalité approfondie.

UCLouvain, Faculté des Sciences, École de physique

Loïc Sablon

Superviseur : Prof. Christophe Ringeval

Lecteurs : Prof. Jean-Marc Gérard

Prof. Giacomo Bruno

Année académique 2019-2020

Table des matières

1	Introduction	1
2	Théorie	3
2.1	Les trous noirs en relativité générale	3
2.1.1	Classification des hypersurfaces	4
2.1.2	Complétion conforme	5
2.1.3	Trou noir	5
2.1.4	Horizon des événements	6
2.2	Vecteur et tenseur de Killing	6
2.2.1	Vecteur de Killing	6
2.2.2	Tenseur de Killing	7
2.2.3	Quantités conservées	7
2.3	Solution de Kerr	7
2.3.1	Généralités	7
2.3.2	Expression de la métrique en coordonnées de Boyer-Lindquist	8
2.3.3	Propriétés	9
2.3.4	Espace-temps de Kerr	10
2.3.5	Vecteurs et tenseurs de Killing	10
3	Collision de trous noirs de Kerr en rapport de masse extrême	13
3.1	Méthodologie	13
3.2	Métrique du binaire de trous noirs	13
3.3	Équations et sélection des géodésiques	16
3.3.1	Équations différentielles des géodésiques	16
3.3.2	Conditions asymptotiques et sélections des géodésiques	18
3.4	Solution numérique	20
3.5	Solution analytique	20
4	Résultats	25
4.1	Construction de l'horizon	25
4.2	Collision alignée	26
4.3	Collision perpendiculaire	31
4.4	Orientation quelconque	35
5	Conclusion	43
	Bibliographie	46
A	Dérivée de la métrique inverse	47
A.1	Selon r	47
A.2	Selon θ	48
B	Cas spécifique de la solution analytique	49
B.1	$r(\tau)$	49
B.2	$\theta(\tau)$	50
B.3	$\phi(\tau)$ et $t(\tau)$	51
B.4	Conclusion	52

C	Développements en séries	53
D	Aire d'un trou noir de Kerr	57

Chapitre 1

Introduction

Les collisions de trous noirs sont parmi les processus astrophysiques les plus complexes régis par les équations d'Einstein du vide $R_{\mu\nu} = 0$ car exploitant la non-linéarité de ces dernières à leur paroxysme. Dans la suite de ce travail, nous verrons que ce n'est heureusement pas toujours un phénomène aussi complexe qu'il n'y paraît.

Dans ce mémoire, nous allons utiliser l'hypothèse de rapport de masse extrême décrite par Emparan et Martinez [1][2] afin d'étudier plus particulièrement l'évolution de l'horizon des événements lors de la fusion de deux trous noirs de Kerr, et ce sans exploiter de super-ordinateur. Cette hypothèse consiste à imposer $m/M \rightarrow 0$ en gardant m non nul. Dans une telle configuration, il est possible d'étudier précisément l'horizon, situé sur une échelle $\sim m$, sans se soucier de la zone de radiation gravitationnelle, repoussée à des distances $\sim M$.

Le but est de décrire de façon simple, précise et générique un processus signature de la relativité générale se produisant partout dans l'univers, et dans une limite *réaliste*.

Pour ce faire, nous débuterons par introduire la notion de trou noir selon la théorie de la relativité générale dans le formalisme de Roger Penrose et par passer brièvement en revue les principales caractéristiques de la métrique de Kerr. Le choix de cette métrique est motivé par l'explication suivante : la plupart des trous noirs observables dans l'univers sont supposés naître de l'effondrement gravitationnel d'étoiles massives. Or, ces étoiles sont généralement en rotation sur elles-mêmes, rotation qui subsiste alors même après effondrement. La solution aux équations d'Einstein décrivant de tels trous noirs n'est pas la célèbre solution de Schwarzschild, largement étudiée dans tout cours introductif à la relativité générale, mais la solution de Kerr, plus complexe.

Suite à cela, nous utiliserons l'hypothèse sur le rapport de masse ainsi que le principe d'équivalence afin de déduire la métrique du binaire de trou noir dans cette approximation, ce qui nécessiterait de longs et fastidieux calculs en relativité numérique sans la condition $m/M \rightarrow 0$. On en déduira que dans cette limite, la géométrie de l'espace-temps autour du système de trous noirs est la métrique de Kerr.

L'étape suivante consistera à tirer profit des propriétés de l'espace-temps précédemment étudié afin d'obtenir le système d'équations différentielles régissant les géodésiques lumières qui génèrent l'horizon des événements du binaire.

Finalement, nous intégrerons (principalement à l'aide de méthodes numériques) ces EDOs puis nous présenterons et discuterons plusieurs résultats et lois obtenus en considérant divers paramètres intervenant dans la collision.

Il est important de noter que ce travail fait directement suite à un mémoire précédent étudiant analytiquement la collision de deux trous noirs de Schwarzschild en rapport de masse extrême [3]. Une solution analytique des géodésiques lumières existe également pour la géométrie de Kerr. Cependant, celle-ci ne se prête pas à l'étude d'un grand nombre de géodésiques, comme nous l'expliquerons dans une section spécifique.

Chapitre 2

Théorie

Dans cette section seront rappelés les éléments de théorie nécessaires à la compréhension de ce qu'est un trou noir en relativité générale, ainsi que les outils utilisés dans ce mémoire afin d'en analyser les propriétés principales. Il convient également de présenter plus en détail la géométrie de Kerr, qui est une solution analytique exacte des équations d'Einstein dans le vide, à l'instar de la géométrie de Schwarzschild, et qui est supposée décrire l'espace-temps à proximité de la majorité des trous noirs de l'univers.

Dans les calculs qui suivent, la dimension de l'espace-temps est fixée à 4 et la convention de signe pour la métrique de Minkowski est majoritairement positive :

$$\eta_{\alpha\beta} = \text{diag}(-, +, +, +) \quad (2.1)$$

2.1 Les trous noirs en relativité générale

En relativité générale, toute l'information sur la gravitation peut être obtenue en résolvant les équations d'Einstein afin d'obtenir la métrique et ainsi en déduire la géométrie de l'espace temps.

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu} \quad (2.2)$$

Dans la suite, nous ne considérerons que les solutions du vide, sans champ électromagnétique, pour lesquelles le tenseur énergie-impulsion est identiquement nul :

$$T_{\mu\nu} = 0$$

Dans ce cas, le système 2.2 possède une forme plus simple, obtenue en en prenant la trace pour ensuite l'y substituer :

$$R_{\mu\nu} = \Lambda g_{\mu\nu} \quad (2.3)$$

Il existe de nombreuses solutions exactes à ce système¹. Cependant, seules quelques-unes exhibent les propriétés requises afin d'être catégorisées comme possédant un trou noir.

Communément, un trou noir est associé à une région localisée de l'espace à partir de laquelle aucune particule, massive ou non, ne peut réchapper. Par contre, ces particules restent libres d'y pénétrer.

Dans cette définition intuitive, il est question d'une surface qui ne semble perméable à toute particule que dans une direction et séparant l'espace-temps en deux régions distinctes. Il s'agit de l'*horizon des événements*, frontière du *trou noir*.

En suivant comme principale référence les notes d'Éricourgoulhon [5], nous allons dans la suite établir les définitions formelles et modernes de toutes ces notions plus ou moins abstraites.

1. Voir par exemple le livre de Stephani H. sur le sujet [4].

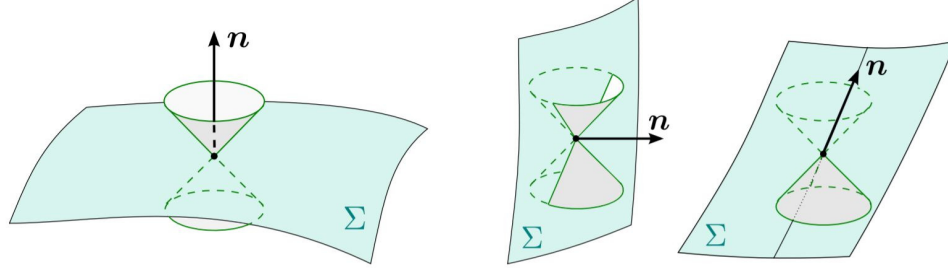


FIGURE 2.1 – De gauche à droite : hypersurface de type espace, de type temps et nulle. Une ligne d’univers dirigée vers le futur, i.e. venant du bas et allant vers le haut, est restreinte à l’intérieur du cône de lumière. Dès lors on remarque que seule une hypersurface de type temps permet une traversée des deux sens.

2.1.1 Classification des hypersurfaces

Afin de comprendre au mieux ce qu’est l’horizon des événements, il convient d’introduire les différents types d’hypersurfaces existants dans un espace-temps.

Sur une variété lorentzienne (\mathcal{M}, g) , une hypersurface Σ de normale \mathbf{n} est localement :

- de type *espace* si et seulement si $g|_{\Sigma}$ est définie positive, i.e. $\text{sign } g|_{\Sigma} = (+, +, +) \Leftrightarrow g|_{\Sigma}$ est une variété riemannienne $\Leftrightarrow \mathbf{n}$ est de type temps
- de type *temps* si et seulement si $g|_{\Sigma}$ est une métrique de Lorentz, i.e. $\text{sign } g|_{\Sigma} = (-, +, +) \Leftrightarrow g|_{\Sigma}$ est une variété lorentzienne $\Leftrightarrow \mathbf{n}$ est de type espace
- *nulle*, ou de type *lumière*, si et seulement si $g|_{\Sigma}$ est dégénérée, i.e. $\text{sign } g|_{\Sigma} = (0, +, +) \Leftrightarrow \mathbf{n}$ est de type lumière. Dans ce cas, \mathbf{n} est également vecteur tangent à la surface.

Il est important de noter que ces notions sont définies *localement*. En effet, une hypersurface quelconque peut être de différents types en différents points. Afin de déterminer si ces surfaces ne sont perméables que dans un sens, il convient alors de considérer la notion de *direction*.

Soit (\mathcal{M}, g) un espace temps orientable et \mathbf{u}, \mathbf{v} deux vecteurs causals². Si l’on suppose que \mathbf{u} est dirigé vers le futur alors

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) < 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \text{ est dirigé vers le futur}$$

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \text{ et } \mathbf{u} \text{ sont colinéaires}$$

$$g(\mathbf{u}, \mathbf{v}) > 0 \Leftrightarrow \mathbf{v} \text{ est dirigé vers le passé}$$

On rappelle également que les lignes d’univers sont définies comme étant des courbes causales dirigées vers le futur. Soit \mathbf{p} le quadrivecteur énergie-impulsion, tangent à la ligne d’univers, alors la masse de la particule associée à cette ligne d’univers est donnée par :

$$m := \sqrt{-g(\mathbf{p}, \mathbf{p})}$$

Si seule la force de gravitation agit sur la particule, alors la ligne d’univers est une géodésique de l’espace-temps, i.e. l’équation différentielle suivante est satisfaite :

$$\nabla_{\mathbf{p}} \mathbf{p} = 0 \Leftrightarrow p^{\mu} \nabla_{\mu} p^{\alpha} = 0$$

Sachant cela, on déduit graphiquement (c.f. figure 2.1, issue des notes [5]) que seule une hypersurface de type temps est perméable dans les deux sens.

2. On rappelle qu’un vecteur causal est soit de type temps ou lumière, i.e. il se situe à l’intérieur du cône de lumière au point considéré. Une courbe causale est une courbe qui n’est nulle part de type espace.

2.1.2 Complétion conforme

Un espace-temps (\mathcal{M}, g) admet une *complétion conforme* si et seulement s'il existe une variété lorentzienne fermée $(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{g})$ équipée d'un champ scalaire lisse non négatif $\Omega : \widetilde{\mathcal{M}} \rightarrow \mathbb{R}^+$ tel que :

1. $\widetilde{\mathcal{M}} = \mathcal{M} \cup \mathcal{I}$, avec $\mathcal{I} := \partial\widetilde{\mathcal{M}}$ appelée *frontière conforme* de (\mathcal{M}, g)
2. $\widetilde{g} = \Omega^2 g$, sur \mathcal{M}
3. $\Omega = 0$, sur \mathcal{I}
4. $d\Omega \neq 0$, sur \mathcal{I}

Le point 1 signifie que \mathcal{M} a été doté d'une frontière. Les points 2 et 3 nous disent que la frontière de \mathcal{M} , localisée à une distance infinie par rapport à g , se situe maintenant à une distance finie par rapport à \widetilde{g} . Dernièrement, le point 4 stipule que \mathcal{I} est une hypersurface régulière de $\widetilde{\mathcal{M}}$.

Il est également possible de démontrer que dans le vide, le caractère de \mathcal{I} ne dépend que du signe de la constante cosmologique. Dès lors, pour $\Lambda = 0$, $\Lambda > 0$ ou $\Lambda < 0$ on a respectivement que \mathcal{I} est nulle, de type espace ou de type temps.

Avant d'en venir à la définition d'un trou noir, il est nécessaire d'introduire une sous catégorie de complétion conforme.

Soit (\mathcal{M}, g) un espace-temps orientable possédant une complétion conforme $(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{g})$. On dit que $(\widetilde{\mathcal{M}}, \widetilde{g})$ est une *complétion conforme à l'infini null* de (\mathcal{M}, g) si et seulement si la frontière \mathcal{I} est telle que :

$$\mathcal{I} = \mathcal{I}^+ \cup \mathcal{I}^-$$

où \mathcal{I}^+ (respectivement \mathcal{I}^-) n'est jamais intersectée par une quelconque courbe causale dirigée vers le passé (respectivement vers le futur) originaire de \mathcal{M} .

2.1.3 Trou noir

Structure causale

Soit (\mathcal{M}, g) un espace-temps orientable. Pour tout sous-ensemble S de \mathcal{M} , on définit les objets suivants :

- le *futur chronologique* de S comme étant l'ensemble $I^+(S)$ de tous les points de \mathcal{M} qui peuvent être atteints d'un point de S via une courbe de type temps dirigée vers le futur ;
- le *futur causal* de S comme étant l'ensemble $J^+(S)$ de tous les points qui, soit sont dans S , soit peuvent être atteints d'un point de S via une courbe causale dirigée vers le futur ;
- le *passé chronologique* de S comme étant l'ensemble $I^-(S)$ de tous les points de \mathcal{M} qui peuvent être atteints d'un point de S via une courbe de type temps dirigée vers le passé ;
- le *passé causal* de S comme étant l'ensemble $J^-(S)$ de tous les points qui, soit sont dans S , soit peuvent être atteints d'un point de S via une courbe causale dirigée vers le passé.

Définition

Soit (\mathcal{M}, g) un espace-temps possédant une complétion conforme à l'infini nul telle que l'hyper-surface \mathcal{I}^+ soit complète³. Un *trou noir* \mathcal{B} est défini comme l'ensemble des points qui ne sont pas dans le passé causal du futur asymptotique \mathcal{I}^+ :

$$\mathcal{B} := \mathcal{M} \setminus (J^-(\mathcal{I}^+) \cap \mathcal{M}) \tag{2.4}$$

3. Pour une hypersurface nulle, cela signifie être générée par une famille de géodésiques dont le paramètre affiné parcourt \mathbb{R} entier. Cette condition est requise afin d'éviter les "faux" trous noirs ; par exemple, sans cette condition, il en existerait dans l'espace-temps de Minkowski.

Trou blanc

De manière équivalente, on définit un *trou blanc* \mathcal{W} comme l'ensemble des points qui ne sont pas dans le futur causal du passé asymptotique \mathcal{I}^- :

$$\mathcal{W} := \mathcal{M} \setminus (J^+(\mathcal{I}^-) \cap \mathcal{M}) \quad (2.5)$$

En d'autres termes, il s'agit d'une région de l'espace dans laquelle aucune particule ne peut pénétrer. Un trou blanc reste purement théorique. A l'heure actuelle, il n'existe aucun processus astrophysique connu pouvant engendrer une telle structure.

On définit également *le domaine de communication extérieur* $\langle\langle \mathcal{M} \rangle\rangle$ comme étant l'ensemble des points de \mathcal{M} ne se situant ni dans le trou noir ni dans le trou blanc :

$$\langle\langle \mathcal{M} \rangle\rangle := \mathcal{M} \setminus (\mathcal{B} \cup \mathcal{W})$$

Il s'agit de l'ensemble des points depuis lesquels il est possible d'envoyer un signal vers, et recevoir un signal de, régions arbitrairement lointaines.

2.1.4 Horizon des événements

Définition

Soit (\mathcal{M}, g) un espace-temps possédant un trou noir \mathcal{B} . L'*horizon des événements* \mathcal{H} est défini comme étant l'hypersurface formant la frontière du trou noir :

$$\mathcal{H} := \partial\mathcal{B} \quad (2.6)$$

En terme de la structure causale, on a également les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \partial J^-(\mathcal{I}^+) \cap \mathcal{M} \\ &= \partial I^-(\mathcal{I}^+) \cap \mathcal{M} \end{aligned}$$

Propriétés principales

1. \mathcal{H} est un ensemble *achrone*, i.e. il n'existe aucune paire de points de \mathcal{H} pouvant être joints par une courbe de type temps de \mathcal{M} ;
2. \mathcal{H} est une variété topologique de dimension 3 (ou plus généralement $\dim \mathcal{M} - 1$);
3. (**Penrose, 1968**) \mathcal{H} est formé d'une famille de géodésiques nulles, appelées génératrices, qui soit sont entièrement contenues dedans soit ne le quittent jamais une fois entrées, et qui n'ont pas de point finaux dans le futur. De plus, il y a exactement une unique géodésique nulle au travers de chaque point de \mathcal{H} sauf en certains points appelés *points de croisement* où une géodésique entre en contact avec \mathcal{H} . Un cas spécial de ses points sont les *points caustiques* où un voisinage de géodésiques nulles se rassemble et converge en entrant dans l'horizon des événements;
4. \mathcal{H} est une hypersurface nulle là où elle est lisse.

2.2 Vecteur et tenseur de Killing

2.2.1 Vecteur de Killing

Un groupe de Lie G de dimension 1 est un groupe de symétrie de l'espace-temps (\mathcal{M}, g) si et seulement si la dérivée de Lie du tenseur métrique le long d'un générateur ξ de G s'annule identiquement :

$$\mathcal{L}_\xi g = 0 \Leftrightarrow \xi^\alpha g_{\mu\nu,\alpha} + \xi^\alpha_{,\mu} g_{\alpha\nu} + \xi^\alpha_{,\nu} g_{\mu\alpha} = 0 \quad (2.7)$$

Dans ce cas, le champ vectoriel ξ est appelé *vecteur de Killing* de (\mathcal{M}, g) . L'équation 2.7 est équivalente à l'*équation de Killing* :

$$\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0 \quad (2.8)$$

2.2.2 Tenseur de Killing

Un *tenseur de Killing* de rang $p \geq 1$ sur une variété pseudo-riemannienne (\mathcal{M}, g) est un champ tensoriel K de type $(0, p)$, totalement symétrique⁴ et obéissant à l'*équation de Killing tensorielle* :

$$\nabla_{(\alpha_1} K_{\alpha_2 \dots \alpha_{p+1})} = 0 \quad (2.9)$$

Pour $p > 1$, K n'est pas directement associé à une isométrie de l'espace-temps.

2.2.3 Quantités conservées

Dans la suite, nous utiliserons une manifestation du théorème de Noether en utilisant le fait que l'existence de vecteurs, et plus généralement de tenseurs, de Killing impliquent que des quantités soient conservées le long des géodésiques.

Si K est un tenseur de Killing de rang p sur la variété pseudo-riemannienne (\mathcal{M}, g) , alors le long de chaque géodésique ayant comme vecteur tangent $\mathbf{p} = \frac{d\mathbf{x}}{d\lambda}$, associé à un paramètre affín λ , le scalaire $K(\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p})$ est constant :

$$\frac{d}{d\lambda} K(\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}) = 0 \quad (2.10)$$

Preuve :

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} K(\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}) &= \nabla_{\mathbf{p}} K(\mathbf{p}, \dots, \mathbf{p}) = p^\mu \nabla_\mu (K_{\nu_1 \dots \nu_p} p^{\nu_1} \dots p^{\nu_p}) \\ &= (\nabla_\mu K_{\nu_1 \dots \nu_p}) p^\mu p^{\nu_1} \dots p^{\nu_p} \\ &\quad + K_{\nu_1 \dots \nu_p} p^\mu (\nabla_\mu p^{\nu_1}) \dots p^{\nu_p} + \dots + K_{\nu_1 \dots \nu_p} p^{\nu_1} \dots p^\mu (\nabla_\mu p^{\nu_p}) \\ &= \underbrace{(\nabla_{(\mu} K_{\nu_1 \dots \nu_p)})}_0 p^\mu p^{\nu_1} \dots p^{\nu_p} \\ &\quad + K_{\nu_1 \dots \nu_p} \underbrace{p^\mu (\nabla_\mu p^{\nu_1})}_0 \dots p^{\nu_p} + \dots + K_{\nu_1 \dots \nu_p} p^{\nu_1} \dots \underbrace{p^\mu (\nabla_\mu p^{\nu_p})}_0 \\ &= 0 \end{aligned}$$

où l'on a successivement utilisé la définition de la dérivée le long d'une géodésique selon le paramètre affín⁵, les propriétés de symétrie et antisymétrie de tenseurs et le fait que K soit totalement symétrique, l'équation de Killing tensorielle pour le premier 0 ainsi que l'équation des géodésiques pour les suivants.

2.3 Solution de Kerr

2.3.1 Généralités

Les deux plus célèbres solutions aux équations d'Einstein du vide sans constante cosmologique ($\Lambda = 0$), et admettant un trou noir, sont la solution publiée par Karl Schwarzschild en 1916 [6] ainsi

4. On rappelle qu'un tenseur totalement symétrique est invariant sous une quelconque permutation de ses indices. Il convient également d'introduire la notation en parenthèses pour le symétriseur :

$$T_{(i_1 \dots i_k)} = \frac{1}{k!} \sum_{\sigma \in S_k} T_{i_{\sigma_1} \dots i_{\sigma_k}}$$

où S_k est le groupe de permutation sur k éléments.

5. Lorsque agissant sur un scalaire, la dérivée covariante est égale à la dérivée partielle.

que celle publiée par Roy Kerr en 1963 [7]. La première ne dépend que d'un paramètre et décrit la géométrie exacte à l'extérieur de toute distribution de masse à symétrie sphérique, selon le théorème de Birkhoff. Cette solution étant largement étudiée durant le cours de relativité générale ainsi que dans le travail précédant portant sur la collision de trous noirs de Schwarzschild en rapport de masse extrême, nous n'allons pas la développer dans ce mémoire.

La solution de Schwarzschild décrit un trou noir statique et stationnaire uniquement caractérisé par sa masse. Or, en pratique, cette solution est loin d'être suffisante. En effet, les étoiles sont en rotations et possèdent un moment angulaire non nul qui doit être également présent passé l'effondrement gravitationnel. Une telle métrique dépendante de deux paramètres, interprétés comme la masse grave m et le moment cinétique J , fut rapidement trouvée dans l'approximation de champ faible, alors suffisante pour les tests de la relativité générale sur le système solaire mais difficilement applicable aux objets astrophysiques plus massifs tels que les étoiles à neutrons ou l'objet de ce mémoire, les trous noirs, pour lesquels une métrique de champ fort est nécessaire.

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left[1 - \frac{2m}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}) \right] dt^2 - \left[\frac{4J \sin^2 \theta}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}) \right] d\phi dt \\ & + \left[1 + \frac{2m}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}) \right] (dr^2 + r^2 d\Omega^2) \end{aligned} \quad (2.11)$$

Il aura fallu 48 ans aux mathématiciens et physiciens pour trouver une telle métrique. Alors qu'il cherchait une solution *algébriquement spéciale*, i.e. dont le tenseur de Weyl possède certaines propriétés spécifiques liées à une rotation non nulle, le mathématicien néo-zélandais Roy P. Kerr formula la métrique exacte portant aujourd'hui son nom [7].

Contrairement à la solution de Schwarzschild, il n'existe pas d'équivalent au théorème de Birkhoff pour la solution de Kerr. Dès lors, il est inexacte que la géométrie de l'espace-temps à l'extérieur d'une distribution de masse sphérique en rotation soit la géométrie de Kerr. Cependant, elles sont asymptotiquement identiques. Cette métrique décrit donc uniquement les trous noirs stationnaires, de charge nulle, en rotation, dans le vide, et ce de manière exacte.

2.3.2 Expression de la métrique en coordonnées de Boyer-Lindquist

La solution est complètement décrite à l'aide de deux réels constants : le paramètre de masse m (positif) et le paramètre de spin $a := J/m$ que l'on interprète respectivement comme la masse grave du trou noir et son moment angulaire total réduit.

Historiquement, le système de coordonnées de Boyer-Lindquist [8] n'est pas le système dans lequel la solution fut initialement découverte. Cependant, il permet de reproduire exactement la métrique de Schwarzschild dans la limite $a \rightarrow 0$, dans ses coordonnées homonymes, ainsi que la métrique de Minkowski dans la limite $m \rightarrow 0$, en coordonnées sphéroïdes oblates.

Soit $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$ les coordonnées de Boyer-Lindquist telles que :

$$\begin{aligned} t & \in \mathbb{R} \\ r & \in \mathbb{R} \\ \theta & \in [0, \pi] \\ \phi & \in [0, 2\pi) \end{aligned}$$

la métrique de Kerr est alors donnée par l'équation suivante :

$$\begin{aligned} g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = & - \left(1 - \frac{2mr}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4amr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 \\ & + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2mr \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 \end{aligned} \quad (2.12)$$

avec :

$$\Sigma := r^2 + a^2 \cos^2 \theta \quad (2.13)$$

$$\Delta := r^2 - 2mr + a^2 \quad (2.14)$$

On note que g est solution des équations d'Einstein du vide sans constante cosmologique. De plus, on retrouve la métrique de champ faible 2.11 dans la limite $r \gg m$.

2.3.3 Propriétés

Singularités de courbure

La métrique 2.12 diverge lorsque Σ ou Δ tendent vers 0. Il est alors nécessaire de calculer certaines quantités afin de déterminer s'il s'agit de singularités de courbure ou de coordonnées.

En coordonnées de Boyer-Lindquist, la métrique de Kerr possède pas moins de 20 symboles de Christoffel non nuls différents. Le calcul du tenseur de Riemann $R^\mu_{\nu\rho\sigma}$ ainsi que sa contraction avec lui-même, le scalaire de Kretschmann K , sont parfaitement adaptés à l'utilisation d'un logiciel de calcul symbolique. Le résultat obtenu est alors :

$$K := R_{\mu\nu\rho\sigma}R^{\mu\nu\rho\sigma} = 48 \frac{m^2}{\Sigma^6} (r^6 - 15r^4a^2 \cos^2 \theta + 15r^2a^4 \cos^4 \theta - a^6 \cos^6 \theta) \quad (2.15)$$

On note que la valeur de K diverge uniquement pour $\theta = \pi/2$, $r \rightarrow 0$. Il s'agit là d'une singularité de courbure appelée *singularité en anneau* \mathcal{R} de l'espace-temps de Kerr. La dénomination devient explicite en regardant la représentation graphique de O'Neill (c.f. figure 2.2) du trou noir.

Horizons des événements

La seconde divergence apparaît lorsque $\Delta \rightarrow 0$. N'étant pas impliquée dans la divergence du scalaire précédent, on en déduit qu'il s'agit alors d'une singularité de coordonnées. Les racines de ce polynôme du second degré sont :

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2} \quad (2.16)$$

On admettra que les sections de l'espace-temps en $r = r_+$ et $r = r_-$ sont respectivement l'horizon des événements \mathcal{H} et l'horizon interne de Cauchy \mathcal{H}_{in} du trou noir de Kerr. La preuve formelle que les définitions 2.4 et 2.6 s'appliquent à \mathcal{H} peut être trouvée dans les notes théoriques [5].

Afin d'obtenir un trou noir, il est nécessaire que les racines de Δ soient réelles. Autrement, nous serions en présence d'une singularité nue, i.e. sans horizon des événements, ce qui est impossible selon la conjecture de censure cosmique de Penrose [9], stipulant qu'il n'existe aucun phénomène astrophysique résultant en une telle singularité. Dès lors, le paramètre de spin doit satisfaire l'inégalité :

$$|a| \leq m \quad (2.17)$$

De par leurs particularités, deux valeurs du paramètre de rotation sont particulièrement étudiées :

1. lorsque $a = 0$, on retrouve la solution de Schwarzschild, avec un horizon des événements en $r = r_S = 2m$;

2. lorsque $|a| = m$, on parle de trou noir de Kerr *extrême*, qui ne possède également qu'un seul horizon en $r = r_{\pm} = m$, et exhibe des propriétés d'intérêt notamment en théorie des cordes.

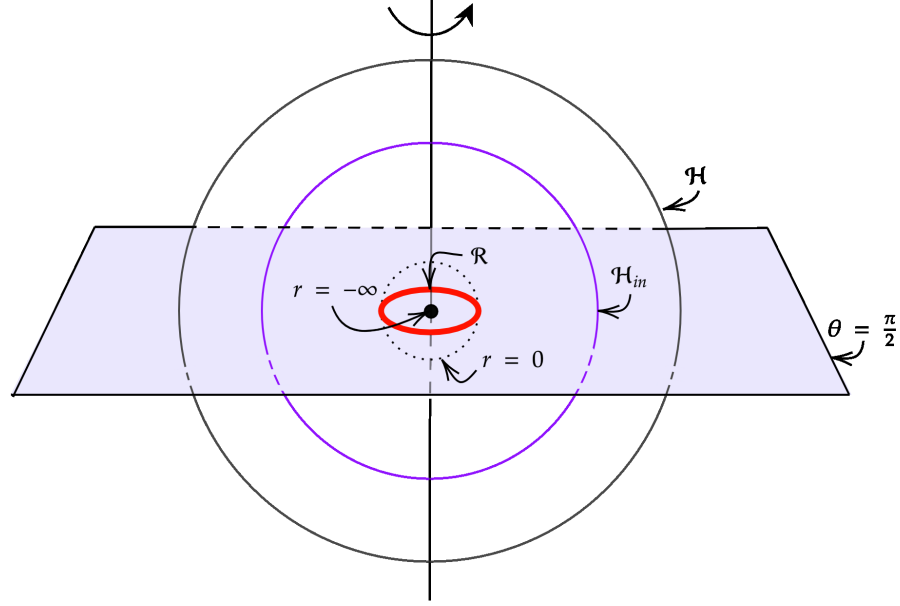


FIGURE 2.2 – Section à temps constant de l'espace-temps de Kerr en terme des coordonnées sphériques (R, θ, ϕ) , où $R = e^r$, introduites par O'Neill afin d'apercevoir graphiquement la singularité en anneau (en rouge) et réduire la région $r \rightarrow -\infty$ en un point central.

2.3.4 Espace-temps de Kerr

L'espace-temps de Kerr en coordonnées de Boyer-Lindquist est défini comme étant la paire (\mathcal{M}_{BL}, g) où la variété est exemptée des singularités :

$$\mathcal{M}_{BL} := \mathcal{M}_I \cup \mathcal{M}_{II} \cup \mathcal{M}_{III} \quad (2.18)$$

$$\mathcal{M}_I := \mathbb{R} \times (r_+, +\infty) \times \mathbb{S}^2$$

$$\mathcal{M}_{II} := \mathbb{R} \times (r_-, r_+) \times \mathbb{S}^2$$

$$\mathcal{M}_{III} := \mathbb{R} \times (-\infty, r_-) \times \mathbb{S}^2 \setminus \mathcal{R}$$

avec \mathcal{R} la singularité en anneau :

$$\mathcal{R} = \left\{ x^\mu \in \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^2 \mid x^1 = 0 \text{ et } x^3 = \frac{\pi}{2} \right\}$$

2.3.5 Vecteurs et tenseurs de Killing

Les composantes de la métrique sont indépendantes des variables t et ϕ . L'espace-temps (\mathcal{M}_{BL}, g) possède dès lors au moins deux isométries générées par les vecteurs de Killing suivants :

$$\xi_t := -\partial_t \quad (2.19)$$

$$\xi_\phi := \partial_\phi \quad (2.20)$$

Le premier vecteur est associé au groupe $(\mathbb{R}, +)$ des translations dans le temps et le second au groupe $SO(2) \cong U(1)$ des rotations. Dans ce cas, on dit que l'espace-temps de Kerr est stationnaire et axisymétrique. Le groupe de symétrie est plus faible que dans le cas Schwarzschild où il existe une symétrie sphérique $SO(3)$ supplémentaire. C'est l'absence de cette dernière symétrie qui complexifie grandement le calcul des solutions analytiques des géodésiques.

Les deux champs vectoriels de Killing nous permettent d'identifier deux quantités conservées le long des géodésiques. A l'aide de deux tenseurs de Killing de rang 2, nous en disposeront suffisamment que pour résoudre les équations des géodésiques.

Le premier tenseur est trivial, et commun à tout espace-temps : le tenseur métrique g .

Le second, bien moins évident, n'a été trouvé qu'en 1970 par Walker et Penrose [10]. Il est défini par l'équation suivante :

$$K^{\mu\nu} := 2\Sigma l^{(\mu} n^{\nu)} + r^2 g^{\mu\nu} \quad (2.21)$$

où l et n sont des quadrivecteurs de type lumière apparaissant dans la *classification de Petrov* :

$$l^\mu := \left(\frac{r^2 + a^2}{\Delta}, 1, 0, \frac{a}{\Delta} \right)$$

$$n^\nu := \left(\frac{r^2 + a^2}{2\Sigma}, \frac{-\Delta}{2\Sigma}, 0, \frac{a}{2\Sigma} \right)$$

On admettra que K satisfait l'équation de Killing tensorielle 2.9.

Chapitre 3

Collision de trous noirs de Kerr en rapport de masse extrême

3.1 Méthodologie

Dans la suite, nous allons nous atteler au calcul de l'horizon des événements du binaire de trous noirs. Pour ce faire, il est nécessaire de déterminer les équations des géodésiques de type lumière et ensuite de sélectionner spécifiquement les génératrices afin de retrouver deux surfaces distinctes pour $t < t_*$ (où t_* est défini comme étant l'instant du "contact"), et une unique pour $t \geq t_*$, tendant asymptotiquement vers un trou noir de Kerr régulier de masse $\mathcal{O}(m + M)$.

Cependant, du fait de la haute non linéarité des équations d'Einstein, il n'existe pas à l'heure actuelle de solution analytique exacte caractérisant la géométrie de l'espace-temps autour d'un binaire de trous noirs de Kerr de masses et paramètres de spin arbitraires en collision¹. Une possibilité serait alors de résoudre le tout de manière numérique. Bien que relativement précise, cette méthodologie requiert une énorme puissance de calcul, hors de portée de n'importe quel ordinateur personnel. Contrairement à un binaire de Schwarzschild, l'orientation respective des axes de rotations est non négligeable et complexifie également grandement la tâche.

Dans la suite, nous verrons que l'hypothèse de rapport de masse extrême telle qu'énoncée dans l'introduction permet de résoudre le problème du calcul de la métrique, seule persistera alors la dérivation des EDOs des géodésiques génératrices de l'horizon, suivie de leur intégration.

3.2 Métrique du binaire de trous noirs avec $m/M \rightarrow 0$

Dans cette section, nous utiliserons l'hypothèse sur le rapport des masses afin de démontrer que l'horizon du grand trou noir peut être vu comme un horizon de Rindler d'accélération constante. Pour ce faire, nous allons étudier la métrique sur un point fixe de l'horizon en transformant la coordonnée radiale r en θ fixe et en ϕ corotatif, pour montrer qu'il s'agit bien de la métrique de Rindler. Ensuite, nous appliquerons le principe d'équivalence afin d'en déduire la métrique de l'espace-temps du binaire.

Horizon d'un trou noir de Kerr de masse infinie

Nous nous intéressons donc à la géométrie de l'espace-temps externe proche de l'horizon \mathcal{H} du trou noir de masse $M \rightarrow +\infty$, situé en $r_+ = M + \sqrt{M^2 - a^2}$. A cette fin, il convient de développer la métrique de Kerr en suivant la démarche présentée dans la section 1.1 de [11], ainsi que dans [12].

Dans un voisinage proche de l'horizon, il est utile de définir une nouvelle coordonnée radiale ρ telle que :

$$r = r_+ + \beta\rho^2$$

1. Il existe cependant des *multi-black holes solutions* où les trous noirs sont maintenant à une distance fixe par une "tige" de masse nulle.

avec β une fonction quelconque à déterminer. Nous allons montrer que la partie radiale-temporelle de la métrique de Kerr s'approxime par une métrique de Rindler 1+1 dans un voisinage externe de \mathcal{H} en développant en série autour de $\rho = 0$.

Pour ce faire, on commence par réécrire la métrique 2.12 sous une autre forme :

$$ds_{\text{Kerr}}^2 = \underbrace{-\frac{\Delta}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2}_{\text{IV}} + \underbrace{\frac{\Sigma}{\Delta} dr^2}_{\text{III}} + \underbrace{\Sigma d\theta^2}_{\text{II}} + \underbrace{\frac{(r^2 + a^2)^2}{\Sigma} \sin^2 \theta \left(d\phi - \frac{a}{r^2 + a^2} dt \right)^2}_{\text{I}}$$

En anticipant la suite, on définit également les deux constantes :

$$\kappa_+ := \frac{r_+ - r_-}{2(r_+^2 + a^2)}$$

$$\Sigma_+ := r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

de telle sorte que :

$$\begin{aligned} \Delta &= (r - r_-)(r - r_+) \\ &= 2\beta\kappa_+(r_+^2 + a^2)\rho^2 + \mathcal{O}(\rho^4) \\ \Sigma &= \Sigma_+ + 2r_+\beta\rho^2 + \mathcal{O}(\rho^4) \end{aligned}$$

La suite consiste à développer en série chaque terme de la métrique.

I. On définit la vitesse angulaire d'emportement de l'espace-temps ω , dépendante du rayon et de la colatitude, par :

$$\omega := -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}$$

La limite $M \rightarrow +\infty$ de la vitesse angulaire est nulle, empêchant l'horizon de se mouvoir à une vitesse supraluminique.

En évaluant et en simplifiant cette expression en $r = r_+$, on trouve :

$$\omega_+ := \frac{a}{r_+^2 + a^2}$$

qui est la vitesse angulaire de \mathcal{H} . On se place alors dans un référentiel corotatif en définissant une nouvelle coordonnée angulaire :

$$\begin{aligned} \tilde{\phi} &:= \phi - \omega_+ t \\ \Rightarrow d\phi + \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} dt &= d\tilde{\phi} + \frac{2ar_+}{(a^2 + r_+^2)^2} \beta \rho^2 dt + \mathcal{O}(\rho^4) \end{aligned}$$

Étant donné que l'on ne s'intéresse uniquement qu'à la partie radiale-temporelle de la métrique, on utilise $\tilde{\phi} = c^{\text{ste}}$. Dû au carré, l'expression **I** est alors négligeable au second ordre en ρ .

II. Le terme s'annule car on se place également en $\theta = c^{\text{ste}}$.

III.

$$\frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 = \frac{4\beta\Sigma_+}{r_+ - r_-} d\rho^2 + \mathcal{O}(\rho^4)$$

IV.

$$-\frac{\Delta}{\Sigma} = -\frac{r_+ - r_-}{\Sigma_+} \beta \rho^2 + \mathcal{O}(\rho^4)$$

$$\begin{aligned}
 dt - a \sin^2 \theta d\phi &= dt - a \sin^2 \theta (d\tilde{\phi} + \omega_+ dt) \\
 &= \left(1 - \frac{a^2 \sin^2 \theta}{r_+^2 + a^2} \right) dt \\
 &= \frac{\Sigma_+}{r_+^2 + a^2} dt \\
 \Rightarrow -\frac{\Delta}{\Sigma} (dt - a \sin^2 \theta d\phi)^2 &= -\frac{4\Sigma\beta}{r_+ - r_-} (\kappa_+ \rho)^2 dt^2
 \end{aligned}$$

En posant que :

$$\beta = \frac{r_+ - r_-}{4\Sigma_+} > 0$$

on obtient :

$$ds^2 \Big|_{\theta, \tilde{\phi} \text{ constants}} = -(\kappa_+ \rho)^2 dt^2 + d\rho^2 \quad (3.1)$$

que l'on reconnaît comme étant la métrique de Rindler 1+1 d'accélération propre constante κ_+ . Une étude théorique plus poussée de la solution de Kerr nous aurait permis de calculer *la gravité de surface* sur \mathcal{H} , la valeur trouvée serait alors exactement κ_+ , en accord total avec l'accélération de l'horizon de Rindler.

La géométrie complète dans la zone de validité de l'approximation est donc le produit entre l'espace-temps de Rindler plat et la 2-sphère. Il est également important de noter que dans le cas $M \rightarrow +\infty$, cette approximation s'avère exacte.

Dès lors, le mouvement de rotation du large trou noir n'influence pas la géométrie de l'espace-temps et est de ce fait équivalent à ce que le petit trou noir possède une vitesse non nulle parallèle à l'horizon. Or, un boost de Lorentz dans une direction parallèle à l'horizon de Rindler est équivalent à une rotation dans le plan généré par cette direction et l'axe de collision, voir notamment la section 6 de l'article d'Empanan et Martinez [1] pour plus de détail sur les calculs. Dans la suite, nous ne considérerons donc pas la rotation du large horizon ni de mouvement relatif autre qu'une chute libre radiale.

Principe d'équivalence

Le résultat précédemment obtenu n'est en réalité qu'une manifestation du principe d'équivalence en relativité générale. En effet, ce dernier stipule qu'il est toujours possible de trouver un système de coordonnées afin d'obtenir localement un espace de Minkowski ; un observateur en chute libre ne ressent pas (localement) la gravitation.

Dès lors, en se localisant dans le référentiel du petit trou noir chutant librement dans le plus large, la métrique de l'espace-temps du système binaire est très bien approximée par celle du petit trou noir sur des échelles $r \ll M$, et cette approximation est exacte en rapport de masse extrême. Le grand trou noir n'influence pas sur la géométrie de l'espace-temps et son action ne se manifeste que via un choix spécifique sur les conditions frontières des équations différentielles des géodésiques de type lumière générant l'horizon afin que celles-ci tendent asymptotiquement vers un plan en coordonnées de Minkowski cartésiennes.

3.3 Équations et sélection des géodésiques

3.3.1 Système d'équations différentielles ordinaires des géodésiques nulles en coordonnées de Boyer-Lindquist

Afin de tracer l'horizon des événements, il est nécessaire de calculer les géodésiques d'une particule test de masse nulle dans l'espace-temps de Kerr. Afin d'obtenir le système d'EDOs, nous allons déduire les équations d'Hamilton sur le lagrangien \mathcal{L} en coordonnées de Boyer-Lindquist $x^\mu = (t, r, \theta, \phi)$:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \quad (3.2)$$

où l'opérateur *dot* correspond à la dérivée totale selon le paramètre affine λ . On définit les moments conjugués p_μ par :

$$p_\mu := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \Rightarrow \dot{x}^\mu = g^{\mu\nu} p_\nu \quad (3.3)$$

L'hamiltonien \mathcal{H} est donné par la transformée de Legendre du lagrangien :

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \dot{x}^\mu p_\mu - \mathcal{L} \\ &= \frac{1}{2} g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \end{aligned} \quad (3.4)$$

On peut alors dériver les équations canoniques d'Hamilton régissant la dynamique de la particule test :

$$\dot{x}^\mu = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p_\mu} \quad \dot{p}_\mu = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial x^\mu} \quad (3.5)$$

On note cependant le système de gauche est redondant avec la définition du moment conjugué.

Avant de poursuivre les calculs, il est nécessaire de calculer la métrique inverse $g^{\mu\nu}$, dont l'hamiltonien dépend explicitement. Pour ce faire, il faut inverser la matrice suivante :

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} g_{tt} & 0 & 0 & g_{t\phi} \\ 0 & g_{rr} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & g_{\theta\theta} & 0 \\ g_{t\phi} & 0 & 0 & g_{\phi\phi} \end{bmatrix}$$

Après permutation sur les lignes et colonnes, la matrice est bloc-diagonale et constituée de deux blocs 1×1 ainsi que d'un bloc 2×2 :

$$\begin{aligned} \tilde{g}_{ab} &= \begin{bmatrix} g_{tt} & g_{t\phi} \\ g_{t\phi} & g_{\phi\phi} \end{bmatrix} \\ \Rightarrow \tilde{g}^{ab} &= \frac{1}{g_{tt}g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2} \begin{bmatrix} g_{\phi\phi} & -g_{t\phi} \\ -g_{t\phi} & g_{tt} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

En utilisant l'expression 2.12 pour les éléments de matrice, on trouve les résultats suivants après simplification :

$$\begin{aligned} g_{tt}g_{\phi\phi} - g_{t\phi}^2 &= -\Delta \sin^2 \theta \\ \Rightarrow g^{\mu\nu} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Delta} \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2}{\Sigma} \sin^2 \theta \right) & 0 & 0 & -\frac{2mra}{\Sigma\Delta} \\ 0 & \frac{\Delta}{\Sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Sigma} & 0 \\ -\frac{2mra}{\Sigma\Delta} & 0 & 0 & \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma\Delta \sin^2 \theta} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

Ensuite, nous allons utiliser les deux vecteurs et les deux tenseurs de Killing de l'espace-temps de Kerr afin d'en déduire des constantes du mouvement. Selon l'équation 2.10, on en déduit que les quatre quantités suivantes sont conservées le long des géodésiques :

$$E := \xi_t^\mu p_\mu \Rightarrow p_t = -E \quad (3.7)$$

$$L := \xi_\phi^\mu p_\mu \Rightarrow p_\phi = L \quad (3.8)$$

$$m_p := \sqrt{-g^{\mu\nu} p_\mu p_\nu} \quad (3.9)$$

$$K := K^{\mu\nu} p_\mu p_\nu \quad (3.10)$$

où E est l'énergie à l'infini de la particule test, L son moment angulaire par rapport à l'axe de rotation et m_p sa masse, alors égale à 0 étant donné que nous recherchons les géodésiques de type lumière. A l'aide des trois premières relations, il est possible de grandement simplifier la dernière. Après calcul, on trouve :

$$K = Q + (L - aE)^2 \quad (3.11)$$

où Q est la célèbre constante de Carter :

$$Q := p_\theta^2 - \cos^2 \theta (a^2 E - L \csc^2 \theta) \quad (3.12)$$

qui peut être interprétée comme étant le moment angulaire total plus une partie quadratique en p , voir par exemple le papier [13] pour plus de détails sur le sujet.

En utilisant partiellement ces relations, on peut développer les équations d'Hamilton :

$$\begin{aligned} \dot{t} &= -g^{tt} E + g^{t\phi} L & \dot{p}_t &= 0 \\ \dot{r} &= g^{rr} p_r & \dot{p}_r &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial r} p_\mu p_\nu \\ \dot{\theta} &= g^{\theta\theta} p_\theta & \dot{p}_\theta &= -\frac{1}{2} \frac{\partial g^{\mu\nu}}{\partial \theta} p_\mu p_\nu \\ \dot{\phi} &= g^{\phi\phi} L - g^{t\phi} E & \dot{p}_\phi &= 0 \end{aligned} \quad \text{et} \quad (3.13)$$

Le calcul de la dérivée de la métrique inverse est détaillé dans l'annexe A. On peut ensuite utiliser 3.9 afin d'éliminer p_r^2 en fonction de x^μ , E , L et p_θ^2 ainsi que Q pour substituer p_θ^2 par une fonction de x^μ , E et L . Une fois ces simplifications effectuées, on obtient un système d'équations différentielles ordinaires couplées du premier degré décrivant les géodésiques nulles de l'espace-temps de Kerr pour une particule-test de paramètres $\{E, L, Q, m_p = 0\}$ en coordonnées de Boyer-Lindquist :

$$\dot{t} = \frac{4mr (a^2 E - aL + Er^2)}{[a^2 + r(r - 2m)] [a^2 \cos(2\theta) + a^2 + 2r^2]} + E \quad (3.14)$$

$$\dot{r} = \frac{a^2 + r(r - 2m)}{a^2 \cos^2 \theta + r^2} p_r \quad (3.15)$$

$$\dot{\theta} = \frac{1}{a^2 \cos^2 \theta + r^2} p_\theta \quad (3.16)$$

$$\dot{\phi} = 2 \frac{a^2 L \cot^2 \theta + 2aEmr + Lr(r - 2m) \csc^2 \theta}{[a^2 + r(r - 2m)] [a^2 \cos(2\theta) + a^2 + 2r^2]} \quad (3.17)$$

$$\dot{p}_r = \frac{c_0 + c_1 r + c_2 r^2 + c_3 r^3 + c_4 r^4}{[a^2 + r(r - 2m)]^2 [a^2 \cos(2\theta) + a^2 + 2r^2]} \quad (3.18)$$

$$\dot{p}_\theta = \frac{2L^2 \cot \theta \csc^2 \theta - a^2 E^2 \sin(2\theta)}{a^2 \cos(2\theta) + a^2 + 2r^2} \quad (3.19)$$

avec :

$$\begin{aligned}
 c_0 &= 2a^2m \left[(L - aE)^2 - Q \right] \\
 c_1 &= 2 \left[a^4E^2 - 4aELm^2 + 2m^2(L^2 + Q) + a^2(-L^2 + 2E^2m^2 + Q) \right] \\
 c_2 &= -6m \left[(L - aE)^2 + Q \right] \\
 c_3 &= 2 \left(a^2E^2 + L^2 + Q \right) \\
 c_4 &= -4E^2m
 \end{aligned}$$

Il est également possible d'éliminer les deux équations différentielles liées aux moments conjugués de r et θ en utilisant $p_{r,\theta} = \pm_{r,\theta} \sqrt{p_{r,\theta}^2}$ et les constantes du problème. Dans ce cas, les équations pour t et ϕ restent inchangées tandis que les deux autres deviennent :

$$\dot{r} = \frac{\pm_r \sqrt{\mathcal{R}}}{\Sigma} \quad (3.20)$$

$$\mathcal{R}(r) := [E(r^2 + a^2) - aL]^2 - \Delta [Q + (L - aE)^2]$$

$$\dot{\theta} = \frac{\pm_\theta \sqrt{\Theta}}{\Sigma} \quad (3.21)$$

$$\Theta(\theta) := Q + \cos^2 \theta (a^2E^2 - L^2 \csc^2 \theta)$$

Cette version alternative du système à quatre variables sera préférée pour l'obtention de solutions analytiques. En effet, les symboles $\pm_{r,\theta}$ indiquant le signe du moment associé s'inversent aux extremum des potentiels \mathcal{R} et Θ , rendant le système plus difficilement solvable de façon numérique. Alors que ce problème n'apparaît pas dans la première version à six variables.

Il est également important de signaler que la valeur de E , pour autant qu'elle soit strictement positive², n'a aucune incidence physique. En effet, il est possible de factoriser le paramètre dans les équations de \dot{x}^μ et ensuite de l'absorber dans le paramètre affiné en substituant L et Q respectivement par El et E^2q . Dès lors, sans perte de généralité, nous allons fixer sa valeur à l'unité dans la suite des calculs et ainsi éviter d'utiliser les quantités redimensionnées l et q .

$$E = 1$$

3.3.2 Conditions asymptotiques et sélections des géodésiques

Afin de sélectionner la famille de géodésiques générant l'horizon des événements recherché, il est nécessaire de préciser les conditions de bord correctes.

Pour ce faire, on développe les équations 3.14, 3.20³, 3.21 et 3.17 pour $r \gg m, a$ et $\lambda \rightarrow \infty$:

$$\frac{dr}{d\lambda} \stackrel{\infty}{\approx} 1 + \mathcal{O}(r^{-2}) \Rightarrow r(\lambda) \approx \lambda + r_\infty + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \quad (3.22)$$

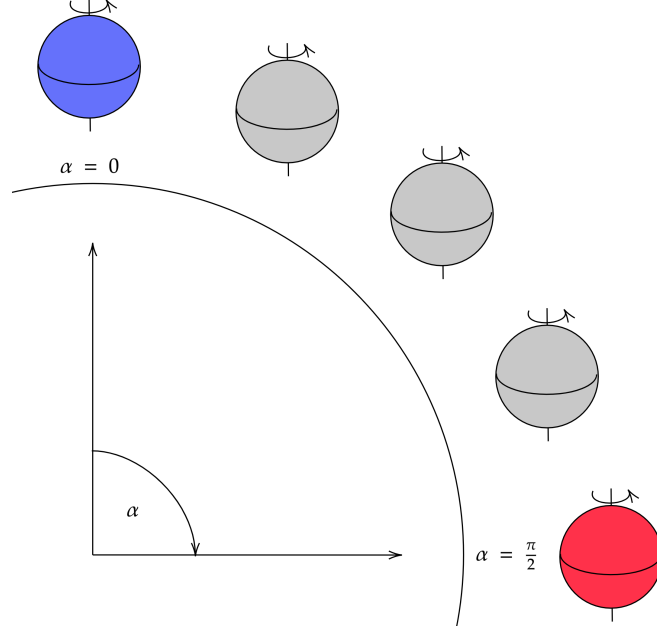
$$\frac{dt}{d\lambda} \stackrel{\infty}{\approx} 1 + \frac{2m}{r} + \mathcal{O}(r^{-2}) \Rightarrow t(\lambda) \approx \lambda + 2m \ln \lambda + t_\infty + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \quad (3.23)$$

$$\frac{d\theta}{d\lambda} \stackrel{\infty}{\approx} 0 + \mathcal{O}(r^{-2}) \Rightarrow \theta(\lambda) \approx \theta_\infty + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \quad (3.24)$$

$$\frac{d\phi}{d\lambda} \stackrel{\infty}{\approx} 0 + \mathcal{O}(r^{-2}) \Rightarrow \phi(\lambda) \approx \phi_\infty + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \quad (3.25)$$

2. Les géodésiques associées à $E < 0$ sont celles impliquées dans le processus d'extraction d'énergie de Penrose et ne peuvent exister hors de l'ergorégion. Les géodésiques ayant $E = 0$ ne peuvent atteindre les régions asymptotiques $r \rightarrow \mp\infty$.

3. On prendra le signe positif car on s'attend à ce que r ne soit pas décroissant.


 FIGURE 3.1 – Illustration de l'angle α .

Un tel développement constitue déjà un choix de conditions de bords. En effet, il implique que nous ignorons toutes les géodésiques pour lesquelles la valeur de r est bornée.

Les équations étant invariantes sous translation du paramètre affín, on peut utiliser cette liberté afin de fixer r_∞ à une valeur arbitraire. De plus, la géométrie de Kerr est elle-même également invariante sous translation dans le temps en plus d'être axisymétrique, et donc les valeurs de t_∞ et ϕ_∞ sont également arbitraires. Par simplicité, nous choisirons de toutes les éгалer à 0 :

$$r_\infty = 0, \quad t_\infty = 0, \quad \phi_\infty = 0 \quad (3.26)$$

La valeur asymptotique de la colatitude est le seul paramètre ayant des répercussions sur les résultats physique et correspond à l'angle entre l'axe de rotation et la normale de l'horizon de Rindler (c.f. figure 3.1) :

$$\theta_\infty = \alpha \quad (3.27)$$

En utilisant $p_r = g_{rr}\dot{r}$, la constante de Carter Q ainsi que les relations précédentes, on trouve les conditions asymptotiques suivantes sur les deux moments conjugués :

$$\begin{aligned} p_r &\approx 1 + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \\ p_\theta &\approx \pm_\theta \sqrt{Q + \cos^2 \alpha (a^2 - L^2 \csc^2 \alpha)} + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \end{aligned}$$

Afin de simplifier les expressions, on utilisera la notation de l'article [2] dans la suite :

$$P_\alpha := \pm_\theta \sqrt{Q + \cos^2 \alpha (a^2 - L^2 \csc^2 \alpha)} \quad (3.28)$$

Le fait que ces conditions de bord spécifiques sur les coordonnées et moments conjugués forment effectivement un plan pour $t \rightarrow \infty$, et constant, n'est pas explicite en coordonnées de Boyer-Lindquist mais le sera lorsque les coordonnées pseudo-cartésiennes xyz seront introduites.

La construction détaillée de l'horizon des événements sera également expliquée ultérieurement, dans la section 4.1.

3.4 Solution numérique

L'implémentation des six équations différentielles requiert une légère modification afin d'obtenir un résultat stable et précis. En effet, sans modification, il serait nécessaire d'arrêter l'intégration soit une fois un point caustique atteint, soit lorsque $r \rightarrow r_+$ par la droite. Cependant, dû à un facteur Δ^{-2} dans certaines équations, le comportement proche de l'horizon est extrêmement raide et les résultats obtenus ne peuvent être suffisamment précis car requérant alors un pas d'intégration inférieur à l'épsilon machine.

La solution est d'éliminer ces divergences proches de l'horizon. Pour ce faire, on utilise la liberté du paramètre λ afin de définir un *temps spécial* τ satisfaisant :

$$\begin{aligned} \frac{df}{d\tau} &= \frac{\Delta^2}{\Sigma^2} \frac{df}{d\lambda} \\ \Rightarrow \frac{df}{d\tau} &\stackrel{r \rightarrow \infty}{\cong} (1 + \mathcal{O}(r^{-1})) \frac{df}{d\lambda} \end{aligned} \quad (3.29)$$

Si $\lambda \in (\lambda_{\mathcal{H}}, \infty)$, avec $r(\lambda_{\mathcal{H}}) = r_+$, alors $\tau \in \mathbb{R}$ et $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} r(\tau) = r_+$. Avec ce changement de variable, il est possible d'approcher arbitrairement près de l'horizon des événements, par l'extérieur, sans problème numérique.

Dans le but d'obtenir des graphiques visuellement lisses, il faut calculer un grand nombre de géodésiques, donc on a besoin d'un langage de programmation rapide et si possible simple d'utilisation. Pour ce travail, le choix s'est porté sur `Julia`⁴, un langage open-source récent originaire du MIT. Très proche du `Python`, sa principale différence réside dans le fait qu'il n'est pas interprété mais compilé, le rendant presque aussi rapide que du `C`. De plus, la librairie `DifferentialEquations.jl`⁵ dédiée à la résolution d'équations différentielles est très développée et permet une implémentation claire et efficace du problème. Cette librairie rend également possible le choix du solveur. Dans ce mémoire, il s'est porté sur les méthodes de Runge-Kutta-Verner avec pas adaptatif, qui convergent rapidement à petites tolérances.

3.5 Solution analytique

Une solution analytique complète du système d'équations différentielles des géodésiques existe en terme des fonctions elliptiques de Jacobi. Elle est disponible complètement détaillée dans le récent article rédigé par Gralla et Lupsasca [14].

Ce papier fourni l'expression exacte pour r et θ en fonction du temps de Mino⁶ τ et de conditions initiales. Les solutions pour t et ϕ sont obtenues à partir de ces dernières. Dès lors, afin de comparer les solutions numérique et analytique, il est suffisant d'analyser la courbe $\theta(r)$ pour différentes géodésiques.

Les différentes expressions sont classifiées selon les valeurs de Q et L . Pour $\theta(\tau)$, il existe deux solutions : les géodésiques *ordinaires* et *vorticales*. Les premières sont associées à $Q > 0$ et oscillent autour du plan équatorial entre θ_0 et $\pi - \theta_0$. Les secondes, pour lesquelles $Q < 0$, n'existent que lorsque $a \neq 0$ et ne traversent jamais le plan équatorial.

4. <https://julialang.org/>

5. <https://docs.sciml.ai/stable/>

6. Il s'agit d'un paramètre non affiné (excepté sur le plan équatorial) introduit afin de simplifier les équations et satisfaisant

$$d\tau = \frac{d\lambda}{r(\lambda)^2 + a^2 \cos^2 \theta(\lambda)}$$

Concernant $r(\tau)$, il existe cette fois quatre types de géodésiques, classifiées selon la nature des racines r_i du polynôme quartique $\mathcal{R}(r)$:

$$\mathcal{R}(r) = [E(r^2 + a^2) - aL]^2 - \Delta [Q + (L - aE)^2]$$

1. Les quatre racines sont réelles et deux sont situées hors du trou noir $r_1 < r_2 < r_- < r_+ < r_3 < r_4$. Dans ce cas, la géodésique peut-être bornée $r_2 < r < r_3$ ou non $r_4 < r < \infty$ indépendamment des valeurs de L et Q , et les expressions analytiques sont différentes.
2. Les quatre racines sont réelles et situées avant l'horizon $r_1 < r_2 < r_3 < r_4 < r_- < r_+$. On a alors $r_4 < r < \infty$, et son expression est identique au cas non borné du point précédent.
3. Deux racines sont complexes et les deux autres sont dans le trou noir $r_1 < r_2 < r_- < r_+$ et $\bar{r}_3 = r_4$. Dans ce cas, on a $r_2 < r < \infty$.
4. Les quatre racines sont complexes $\bar{r}_1 = r_2$ et $\bar{r}_3 = r_4$. Il s'agit également d'une géodésique non bornée $\text{Re}\{r_2\} < r < \infty$.

La figure 3.2 représente ces différents cas dans le plan (L, Q) . Il est important de noter que toutes les valeurs de Q ne sont pas autorisées car il est nécessaire que les potentiels $\mathcal{R}(r)$ et $\Theta(\theta)$ soient toujours positifs afin de se restreindre à des valeurs réelles. On a donc la condition additionnelle suivante sur les valeurs autorisées de la constante de Carter :

$$Q \geq \begin{cases} 0 & |L| \geq |a| \\ -(|L| - |a|)^2 & |L| \leq |a| \end{cases}$$

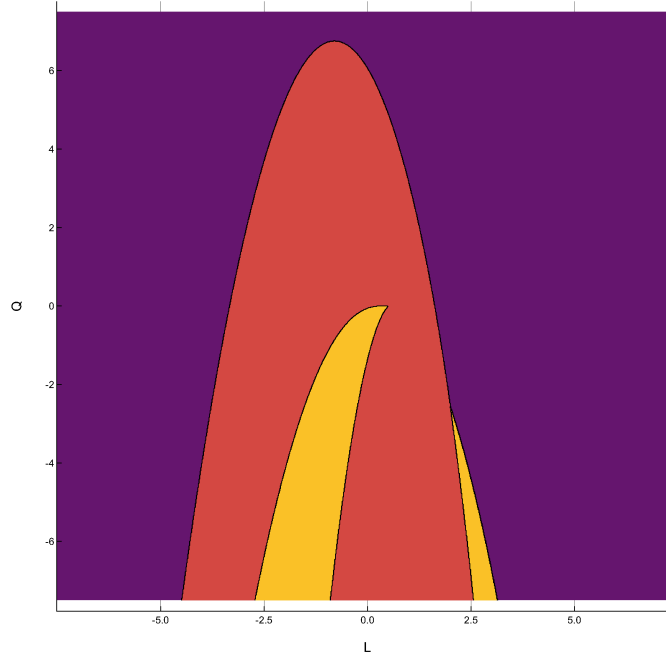


FIGURE 3.2 – Classification des racines du polynôme $\mathcal{R}(r)$ pour $m = 0.5$ et $a/m = 0.8$. La zone mauve représente les valeurs pour lesquelles les racines sont toutes réelles, la zone rouge deux complexes et deux réelles, la zone jaune quatre complexes.

Les géodésiques azimutales et temporelles, qui dépendent des deux potentiels, suivent cette même classification.

En omettant la solution de variable radiale bornée, qui ne nous intéresse pas, il y a donc $2 \times 3 = 6$ cas possibles et donc 24 fonctions. En y ajoutant le fait que ces solutions sont définies en termes des conditions initiales et non finales, complexifiant alors la tâche, on conclut qu'elles ne sont absolument pas adaptées à la construction de l'horizon, nécessitant le calcul d'un grand nombre de géodésiques. Cependant, elles restent parfaitement adaptées à l'étude de quelques cas notamment afin de quantifier l'erreur de l'intégration numérique. A titre d'exemple, la géodésique $L = 1.0$ et $P_{\pi/2} = 1.0$ pour $m = 0.5$ et $a/m = 0.8$ est détaillée dans l'annexe B.

Dans le but de vérifier l'exactitude de la solution numérique, la figure 3.3 compare la fonction obtenue avec le résultat numérique. On remarque que les deux courbes se superposent presque parfaitement.

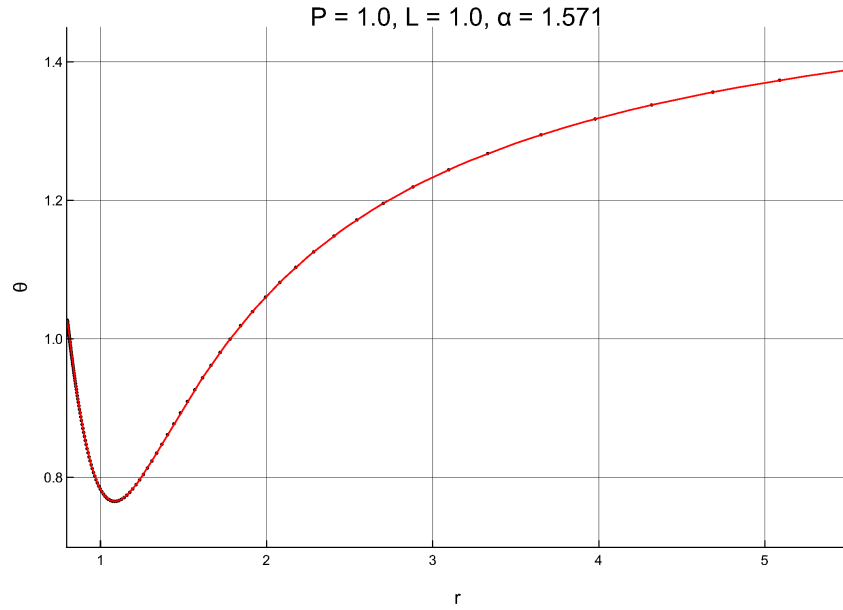


FIGURE 3.3 – La courbe rouge représente la solution analytique et les points noirs la solution numérique.

Pour quantifier l'erreur, il convient de définir une procédure. La solution numérique fournit un ensemble fini de paires (r_i, θ_i) . Pour chacune de ces valeurs, on résout l'équation $r(\tau_i) = r_i$ pour τ_i , notamment à l'aide d'une méthode de Newton-Raphson⁷. Ensuite, on définit une *erreur locale* par

$$\epsilon_i := \left| \frac{\theta(\tau_i) - \theta_i}{\theta(\tau_i)} \right|$$

et une *erreur globale* comme la moyenne arithmétique des erreurs locales.

Pour la géodésique associée à la figure 3.3, on obtient les résultats suivants :

$$\begin{aligned} \bar{\epsilon} &= 4.696712804458351 \times 10^{-13} \\ \max_i \epsilon_i &= 7.994629530336415 \times 10^{-13} \end{aligned}$$

Même si elle n'atteint pas l'epsilon machine $\text{eps}(1.0) \approx 10^{-16}$, la précision de l'intégration numérique est largement acceptable, et les deux méthodes concordent presque parfaitement. Il est

⁷. On prend également soin de vérifier que l'erreur numérique soit au maximum de l'ordre de l'epsilon machine durant cette étape.

également pertinent de noter la présence obligatoire de méthodes numériques dans la construction même de la solution analytique (telles que le calcul de racines d'un polynômes du quatrième degré, l'évaluation de fonctions de Jacobi, etc.). On peut ensuite répéter la procédure pour d'autres géodésiques, on trouvera que les erreurs seront toujours du même ordre de grandeur. Par exemple, pour $L = -2.0$ et $P_{\pi/2} = -0.5$, on obtient :

$$\bar{\epsilon} = 1.0633916897365742 \times 10^{-13}$$

$$\max_i \epsilon_i = 2.661227726908346 \times 10^{-13}$$

Finalement, on se convainc que la solution numérique est d'une précision largement suffisante que pour ne pas avoir à se soucier de la propagation des erreurs.

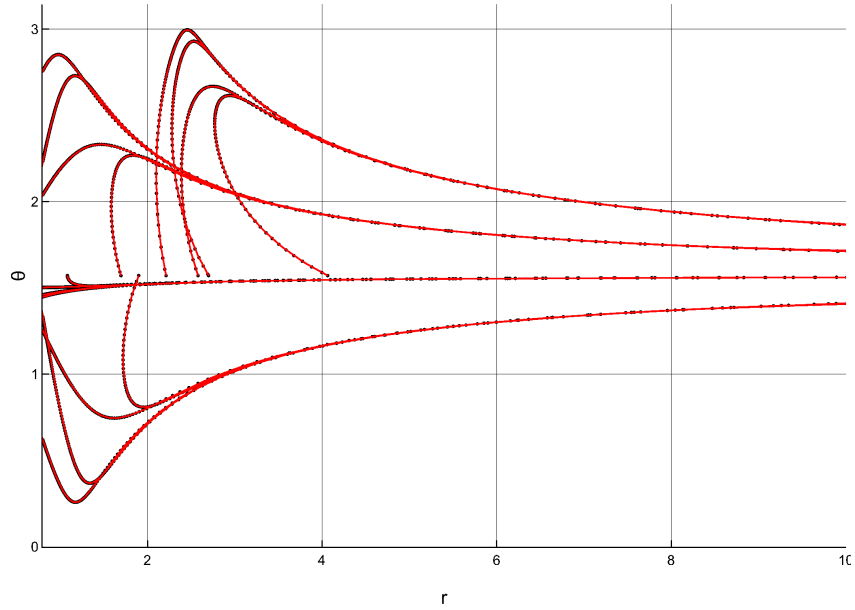


FIGURE 3.4 – Solutions pour diverses valeurs de L et Q telles que les racines de \mathcal{R} soient soit toutes réelles, soit deux complexes. Les géodésiques ne démarrant pas en $r = r_+$ sur la figure sont les caustiques. Les points noirs représentent les solutions numériques et les courbes rouges, analytiques.

Chapitre 4

Résultats

A l'instar de l'article d'Empanan [2], et pour permettre une visualisation plus intuitive des résultats ainsi qu'une interprétation simple de P_α , nous utiliserons les coordonnées pseudo-cartésiennes, associées aux coordonnées de Boyer-Lindquist via les relations :

$$x = \sqrt{r^2 + a^2 + \frac{2ma^2r \sin^2 \theta}{\Sigma}} \sin \theta \cos \phi \quad (4.1)$$

$$y = \sqrt{r^2 + a^2 + \frac{2ma^2r \sin^2 \theta}{\Sigma}} \sin \theta \sin \phi \quad (4.2)$$

$$z = r \cos \theta \quad (4.3)$$

Les développements en série à l'infini sont obtenus à partir des calculs de l'annexe C :

$$x \approx \lambda \sin \alpha - P_\alpha \cos \alpha + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \quad (4.4)$$

$$y \approx -L \csc \alpha + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \quad (4.5)$$

$$z \approx \lambda \cos \alpha + P_\alpha \sin \alpha + \mathcal{O}(\lambda^{-1}) \quad (4.6)$$

Sauf contre-indication, tous les résultats graphiques sont obtenus pour $m = 0.5$ et $a/m = 0.8$.

4.1 Construction de l'horizon

L'horizon des événements du système binaire est construit à l'aide d'un ensemble de géodésiques de type lumière dont nous avons déduit les équations différentielles ainsi que les conditions de bord. Chacune des ces géodésiques est une courbe de dimension 1, l'horizon des événements est quant à lui de dimension 3. Il ne peut donc être généré par ces courbes qu'en variant deux paramètres continus¹ : P_α et L .

En utilisant les développements asymptotiques des coordonnées xyz précédemment définies, on remarque que chaque géodésique, alors identifiée par une paire (P_α, L) , *heurte* l'infini sur un grillage. Afin que ce grillage génère comme requis l'horizon de Rindler, qui rappelons le est infiniment grand, les paires (P_α, L) prennent leur valeur dans \mathbb{R}^2 entier. Par exemple, pour $\alpha = \pi/2$, l'horizon devient, quand $t \rightarrow \infty$, le plan défini par $(y, z) = (-L, P_{\pi/2}) \in \mathbb{R}^2$ en $x = +\infty$. L'intégrations des EDOs permet d'obtenir l'évolution dans le temps de cette surface bidimensionnelle, et ainsi donc un objet de dimension 3.

Afin de satisfaire les quatre propriétés principales d'un horizon, énoncées plus tôt dans la section 2.1.4, il ne faut pas considérer l'entièreté de toutes les géodésiques calculées. On définit alors deux familles distinctes selon le vocabulaire de Penrose :

- les *caustiques* sont les géodésiques émergeant de points caustiques de l'horizon. C'est à dire que ces géodésiques, de paires (P_α, L) différentes, se croisent au moins par couple en un point de l'espace-temps. Dans la construction de l'horizon, il ne faut considérer que la partie post-émergence du point caustique, sans quoi la propriété 3 ne serait pas satisfaite ;
- les géodésiques non-caustiques sont alors celles dont on considère l'entièreté.

1. On verra dans la suite que le cas spécifique $\alpha = 0$ requiert $L = 0$ mais est sauvé par l'existence d'une symétrie continue.

Dans les visuels à venir, les géodésiques caustiques seront généralement représentées en noir et les autres en rouge. On remarquera rapidement qu'infiniment tôt, bien avant la fusion, le petit trou noir de Kerr est entièrement rouge et l'horizon de Rindler entièrement noir. Cela peut facilement s'expliquer. En effet, chacune des géodésiques peut s'interpréter comme la trajectoire d'un photon remontant le temps, issu de l'infini et passant à proximité d'un trou noir de Kerr. Deux cas sont alors possibles : soit le photon est attrapé par le trou noir et tombe dans celui-ci pendant un temps infini sans jamais parvenir à échapper à l'attraction gravitationnelle, soit il passe suffisamment loin que pour pouvoir s'éloigner après tout de même avoir été dévié. Asymptotiquement, les photons du premier cas forment l'horizon des événements du trou noir de Kerr, leurs trajectoires sont donc spécifiquement déterminées par les géodésiques non-caustiques. Les photons du deuxième cas subissent quand à eux l'effet de *lentille gravitationnelle*, qui les fait converger un peu à la manière d'une lentille classique. Dès lors, les trajectoires suivies par ces photons sont nécessairement les géodésiques caustiques.

Le dessin 4.1 détaille les deux types de géodésiques pour $\alpha = \pi/2$, ainsi que le sens de l'intégration numérique et la flèche du temps, du paramètre affín, opposée au sens d'intégration.

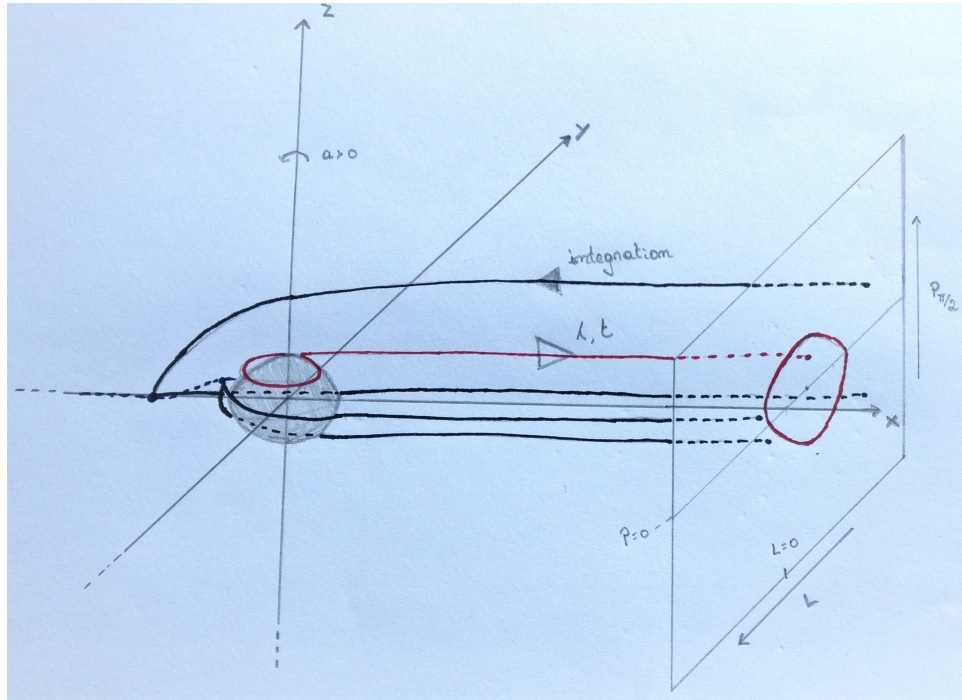


FIGURE 4.1 – Projection temporelle de géodésiques dans l'espace xyz et visualisation du plan $(P_{\pi/2}, L)$ pour $t \gg t_*$. Les caustiques sont représentées en noir formant des paires possédant le même point de croisement, représenté en bleu et situé en $z = 0$. La géodésique non-caustique, en rouge, s'enroule autour du trou noir dans le plan de colatitude θ constante. Toutes les géodésiques n'ayant aucun point de croisement sont issues de l'intérieur du cercle rouge, et les caustiques sont issues de l'entièreté du plan exempt du disque. La flèche pleine indique le sens de l'intégration et la flèche creuse le sens du paramètre affín ainsi que du temps. Le petit trou noir de Kerr, présent en $t \rightarrow -\infty$, est en gris.

4.2 Collision alignée, $\alpha = 0$

Dans cette configuration, le spin du plus petit trou noir est parallèle à la normale de l'horizon de Rindler. On remarque aisément à l'aide de la figure 3.1 que le système est axisymétrique, i.e. il

possède une symétrie $U(1)$. Également, afin que les conditions asymptotiques soient non divergentes, il est nécessaire que L soit égal à 0. Ceci s'explique notamment par le fait que L est le moment angulaire asymptotique associé à ϕ . Or, les plans de rotation selon ϕ sont asymptotiquement parallèles à l'horizon du grand trou noir et donc perpendiculaires aux géodésiques, d'où $L = 0$.

L'horizon est complètement construit en intégrant les équations différentielles pour $P_0 \in \mathbb{R}$, $L = 0$ ainsi qu'en utilisant la symétrie $U(1)$ ². Dû à la symétrie de la configuration, l'ensemble des points de croisement, aussi appelé le *crease set*, se situe sur la courbe définie par $\theta = \pm\pi$.

La figure 4.2 représente l'horizon des événements complet projeté sur l'espace xzt . Comme discuté précédemment, on visualise deux types de génératrices différentes, en noir et en rouge. Les premières entrent dans l'horizon des événements au travers des points caustiques et les secondes ne sont pas caustiques et forment asymptotiquement tôt le petit trou noir de Kerr. On remarque que le crease set, représenté en bleu, est une courbe unidimensionnelle de type espace, à l'instar du cas Schwarzschild $a = 0$.

La figure 4.3 exhibe les sections à temps constant en coordonnées pseudo-cartésiennes du binaire de trous noirs. Chaque courbe est obtenue en faisant varier P_0 dans \mathbb{R} , et la structure tridimensionnelle est issue d'une rotation autour de l'axe \hat{z} . L'image 4.3a nous montre bien qu'avant la collision, le système est formé de deux surfaces distinctes : le trou noir de Kerr et l'horizon de Rindler. Ce dernier exhibe notamment une structure en pointe se dirigeant vers l'horizon de Kerr, il s'agit du point caustique comme stipulé par Penrose. En $t = t_*$, les deux horizons entrent en contact et fusionnent, formant alors une unique surface dont le visuel est donné par la figure 4.3b. Après la fusion, les caractéristiques sphéroïdes du trou noir ainsi que sa rotation s'effacent petit à petit afin de laisser place à un plan exempt de mouvement rotatif, voir figures 4.3c et 4.3d.

Effets de la rotation

En mécanique des trous noirs, il existe un théorème démontré par Hawking [15] stipulant que l'aire de l'horizon des événements ne peut qu'augmenter au cours du temps. Soit \mathcal{H} un horizon ayant comme topologie $\mathcal{H} \cong \mathbb{R} \times \mathcal{L}$, où \mathbb{R} est le domaine de la coordonnée temporelle et \mathcal{L} est une variété de dimension $d - 2$. Dans ce cas, son aire est donnée par [5] :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}} = \int_{\mathcal{L}} \sqrt{\det\{q_{\mu\nu}\}} dx^2 \dots dx^{d-1}$$

avec $q := g|_{\mathcal{L}}$, la métrique restreinte sur \mathcal{L} .

En appliquant cette formule à la solution de Kerr (voir annexe D pour le détail), on trouve :

$$\mathcal{A}_{\text{Kerr}} = 8\pi m r_+ \quad (4.7)$$

Dans la suite, on définit le rayon aérien r_A comme le rayon d'une sphère fictive ayant pour aire $\mathcal{A}_{\text{Kerr}}$:

$$r_A := \sqrt{\frac{\mathcal{A}_{\text{Kerr}}}{4\pi}} = \sqrt{2m r_+}$$

On définit également \mathcal{A}_{∞} comme étant l'aire du disque formé par les géodésiques non-caustiques pour $t \rightarrow \infty$ (disque rouge sur la figure 4.3d). En appliquant le théorème de l'aire, on doit avoir :

$$F_A := \frac{\mathcal{A}_{\infty}}{\mathcal{A}_{\text{Kerr}}} \geq 1 \quad (4.8)$$

Pour $a = 0$, on connaît déjà la valeur $F_A \approx 1.24$ grâce à la solution analytique décrite par Emparan [1], et dérivée à nouveau dans le travail précédent [3]. En observant les développements à l'infini des

2. Équivalente dans ce cas à modifier la valeur de ϕ_{∞} .

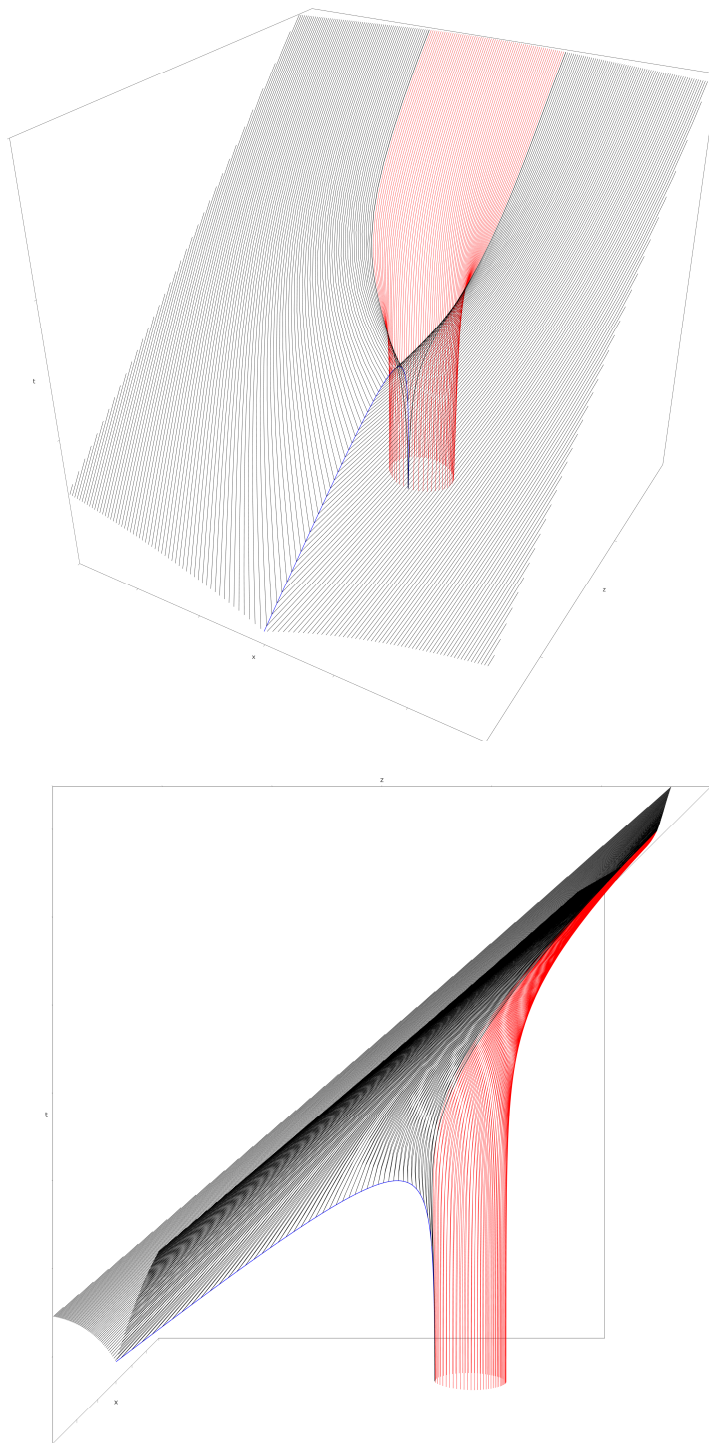


FIGURE 4.2 – Projection de l’horizon des événements sur l’hyperplan xzt pour $\alpha = 0$. En rouge sont représentées les géodésiques formant initialement du petit trou noir et en noir celles émergeant des points caustiques, qui sont représentés en bleu.

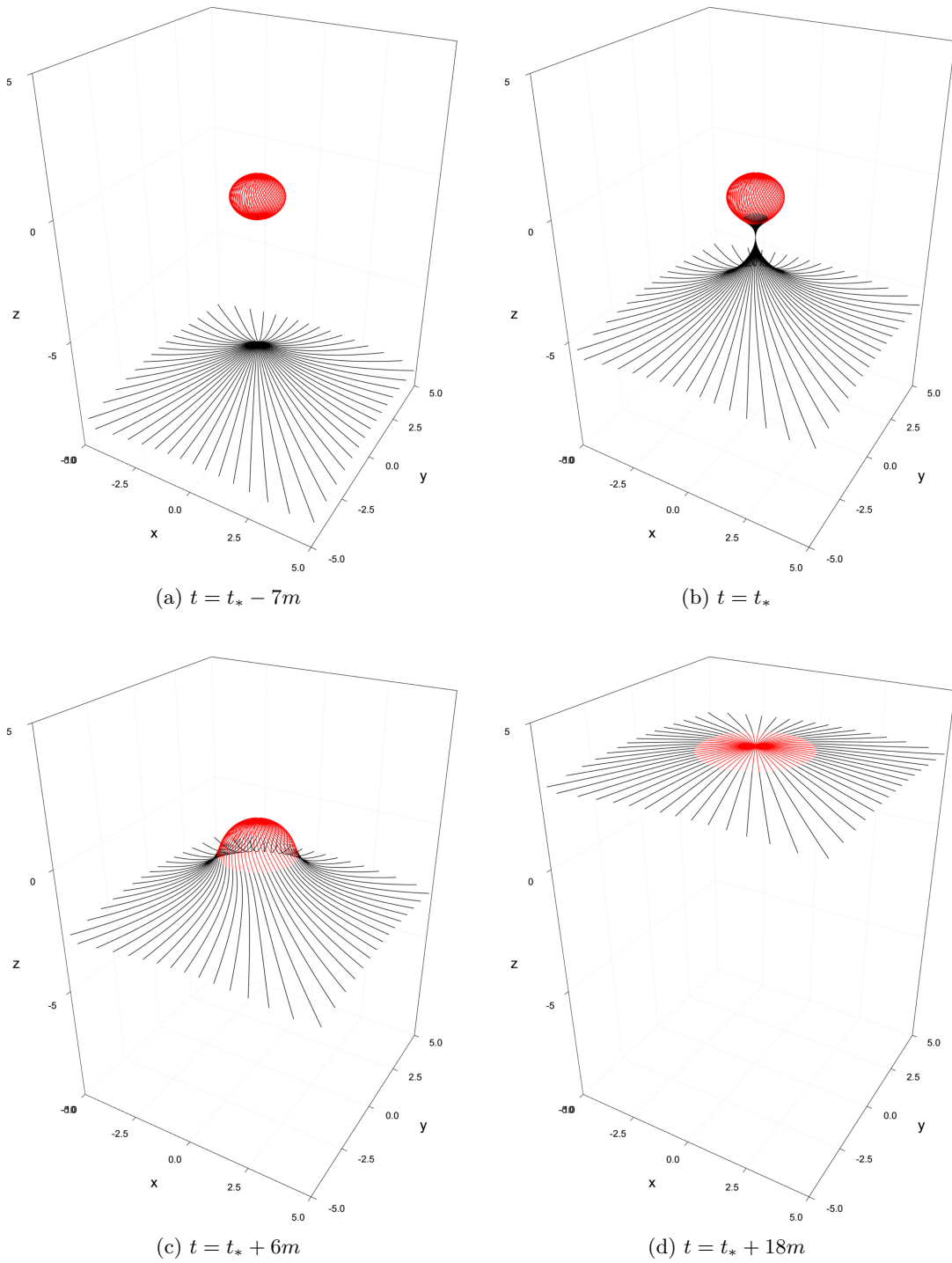


FIGURE 4.3 – Sections à temps constant en coordonnées pseudo-cartésiennes pour $\alpha = 0$.

coordonnées pseudo-cartésiennes, on déduit que le disque formé des géodésiques non caustiques est de rayon P_0^c , c'est à dire la première valeur de P_0 pour laquelle la géodésique associée est caustique.

$$\Rightarrow F_{\mathcal{A}} = \left(\frac{P_0^c}{2r_A} \right)^2$$

La figure 4.4b nous permet de déduire que l'on a bien $F_{\mathcal{A}} > 1$ pour toute valeur de a autorisée. La légère augmentation de \mathcal{A}_∞ pour des trous noirs presque extrêmes pourrait s'expliquer par une masse nécessaire plus importante afin de conserver la même aire, et donc plus de générateurs seraient attirés par le trou noir. La variation très légère du rapport d'aires indique que le paramètre critique P_0^c doit être bien approximé par une constante multipliant le rayon aérien r_A . En effet, les points bleus sur la figure 4.4a représentent les valeurs obtenues de P_0^c en gardant m constante, et la courbe rouge est directement proportionnelle à la fonction $r_A(a)$.

$$\frac{r_A}{m} = \sqrt{2 \left(1 + \sqrt{1 - \frac{a^2}{m^2}} \right)}$$

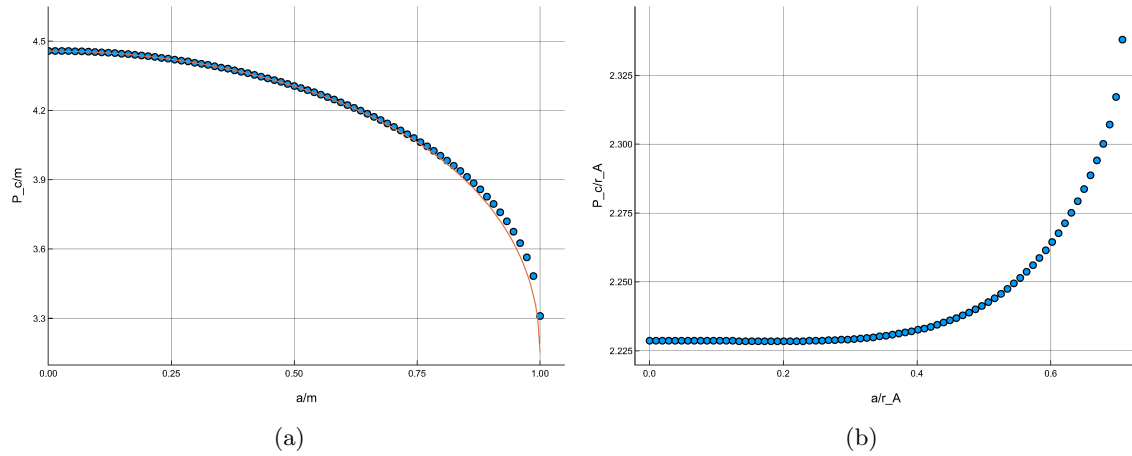


FIGURE 4.4 – Variation du paramètre critique P_0^c en fonction du paramètre de rotation a , respectivement pour m et r_A constants.

Ensuite, on peut effectuer des mesures similaires sur l'instant de fusion $t_* = t_*(a)$ du système. La valeur de t_* est surtout un indicateur du temps de relaxation. En effet, comme on débute l'intégration en remontant le temps à partir de configurations asymptotiques égales, plus la fusion a lieu tôt et plus le système met du temps à se relaxer en un plan. Comme l'origine du temps a arbitrairement été fixée via t_∞ , et ce indépendamment de a , il est logique de comparer les variations $t_*^0 - t_*$ où $t_*^0 := t_*|_{a=0}$ est l'instant de fusion de trous noirs de Schwarzschild. A l'instar du paramètre critique, on effectue la comparaison d'un coté en gardant la masse constante et de l'autre l'aire de l'horizon. La figure 4.5a indique que pour un trou noir de masse fixe, la fusion est retardée pour a augmentant. Tandis que sur la figure 4.5b, la conclusion est opposée : à aire constante, la fusion a lieu plus tôt lorsque la rotation est plus importante. Le premier résultat peut s'expliquer par le fait que le système à aire fixe voit sa masse augmenter avec le paramètre de rotation et prend plus de temps à se relaxer. On s'attend donc à ce que la croissance de t_* soit proportionnelle à la fonction $m(a)$, r_A constant. Cette dernière fonction est représentée en rouge, et le facteur multiplicatif a simplement été choisi afin de réduire l'erreur aux moindres carrés. A contrario, lorsque la masse est constante, le nombre de générateurs réduit lorsque a augmente et le système peut donc se relaxer plus rapidement.

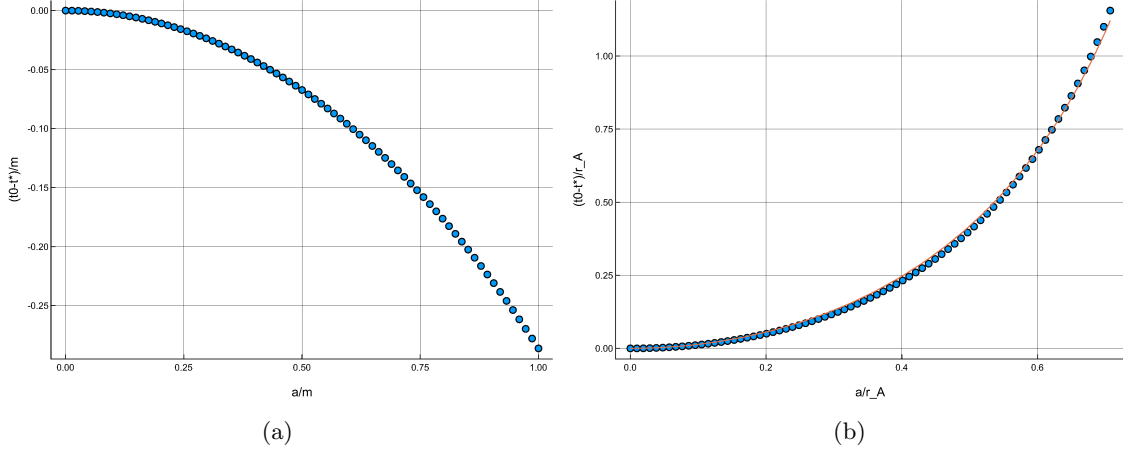


FIGURE 4.5 – Variation de l’instant de la fusion $t_*^0 - t_*$ en fonction du paramètre de rotation, respectivement pour m et r_A constants.

4.3 Collision perpendiculaire, $\alpha = \pi/2$

Dans cette configuration, le spin du plus petit trou noir est perpendiculaire à la normale de l’horizon de Rindler. A l’aide de la figure 3.1, on remarque que la symétrie continue $U(1)$ est brisée dès que $\alpha > 0$. Cependant, il subsiste une symétrie discrète \mathbb{Z}_2 dont le plan de réflexion est $z = 0$ lorsque $\alpha = \pi/2$. Cette symétrie discrète met en relation les géodésiques labellisées par $(P_{\pi/2}, L)$ et $(-P_{\pi/2}, L)$.

L’horizon est donc complètement construit en intégrant les équations différentielles pour $L \in \mathbb{R}$, $P_{\pi/2} \in \mathbb{R}^+$ et la symétrie \mathbb{Z}_2 , ou $P_{\pi/2} \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, le crease set se situe en $z = 0$, équivalent à $\theta = \pi/2$.

La figure 4.6 représente l’horizon des événements complet projeté sur l’espace xyt . On peut également interpréter ces projections comme une coupe selon le plan $z = 0$ du système quadri-dimensionnel. Comme précédemment, les géodésiques issues de points caustiques sont représentées en noir et celles générant initialement le trou noir de Kerr en rouge. Dans ce système de coordonnées, le crease set (qui semble être mais n’est en réalité pas une courbe) s’enroule autour du trou noir. La figure 4.7 montre quelques sections à temps constant de l’hypersurface précédente, en gardant la même convention de couleurs.

La figure 4.8 exhibe les sections à temps constant en coordonnées pseudo-cartésiennes du binaire de trous noirs. Chaque point est associé à une paire $(P_{\pi/2}, L)$ dans \mathbb{R}^2 . Outre le fait que le trou noir semble être aspiré latéralement, les conclusions sont similaires à celles de la configuration alignée. Cependant, il existe une différence fondamentale, non visible sur cette figure : l’existence d’une structure toroïdale présente dans un voisinage très proche de t_* et qui est cependant spatialement trop petite que pour être résolue sur la figure 4.8b.

Crease set et structure toroïdale

Comme mentionné précédemment, l’ensemble des points caustiques n’est plus une courbe unidimensionnelle mais une étroite bande en deux dimensions dont la largeur est nulle dans le passé infini et maximale en t_* , et dont la frontière est formée des deux courbes caustiques associées à $P_{\pi/2} = 0$. Une vue rapprochée de cet ensemble dans un proche voisinage de t_* est visible sur la figure 4.9a.

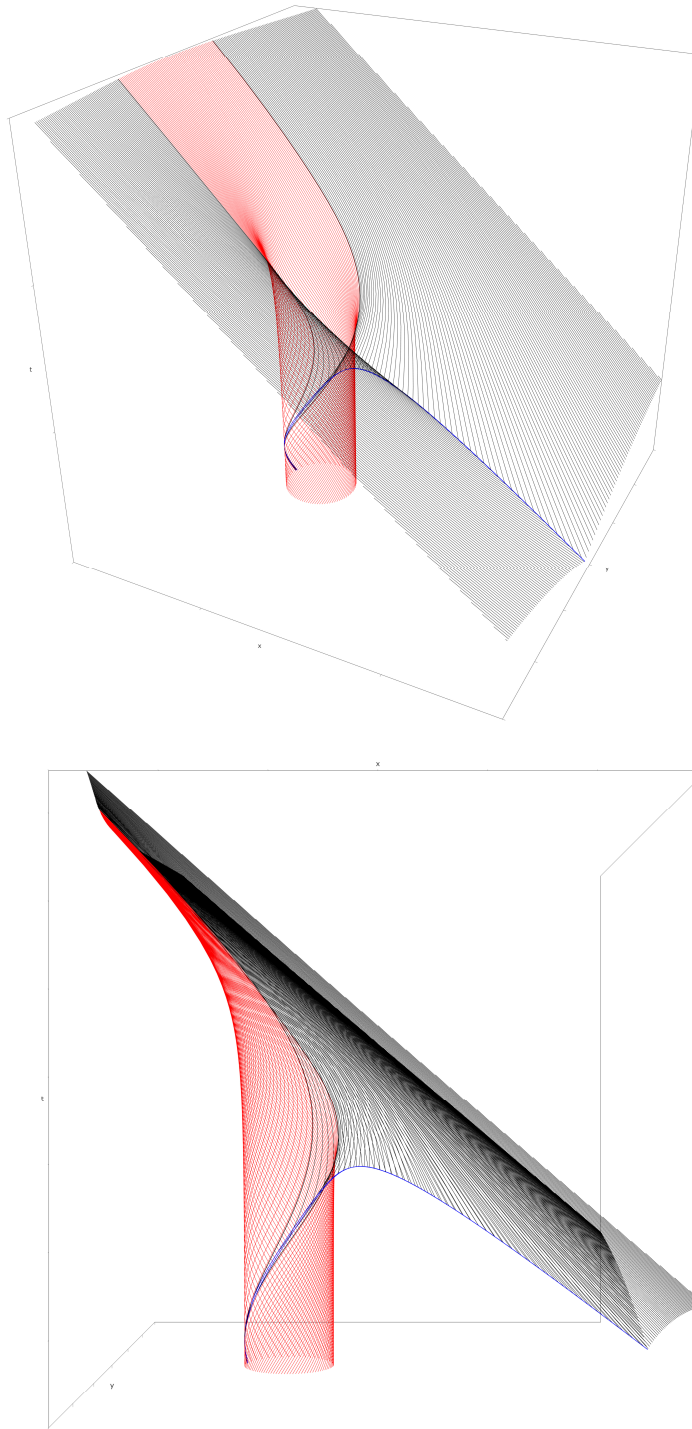


FIGURE 4.6 – Projection de l’horizon des événements sur l’hyperplan xyt pour $\alpha = \pi/2$. En rouge sont représentées les géodésiques formant initialement du petit trou noir et en noir celles émergeant des points caustiques, qui sont représentés en bleu.

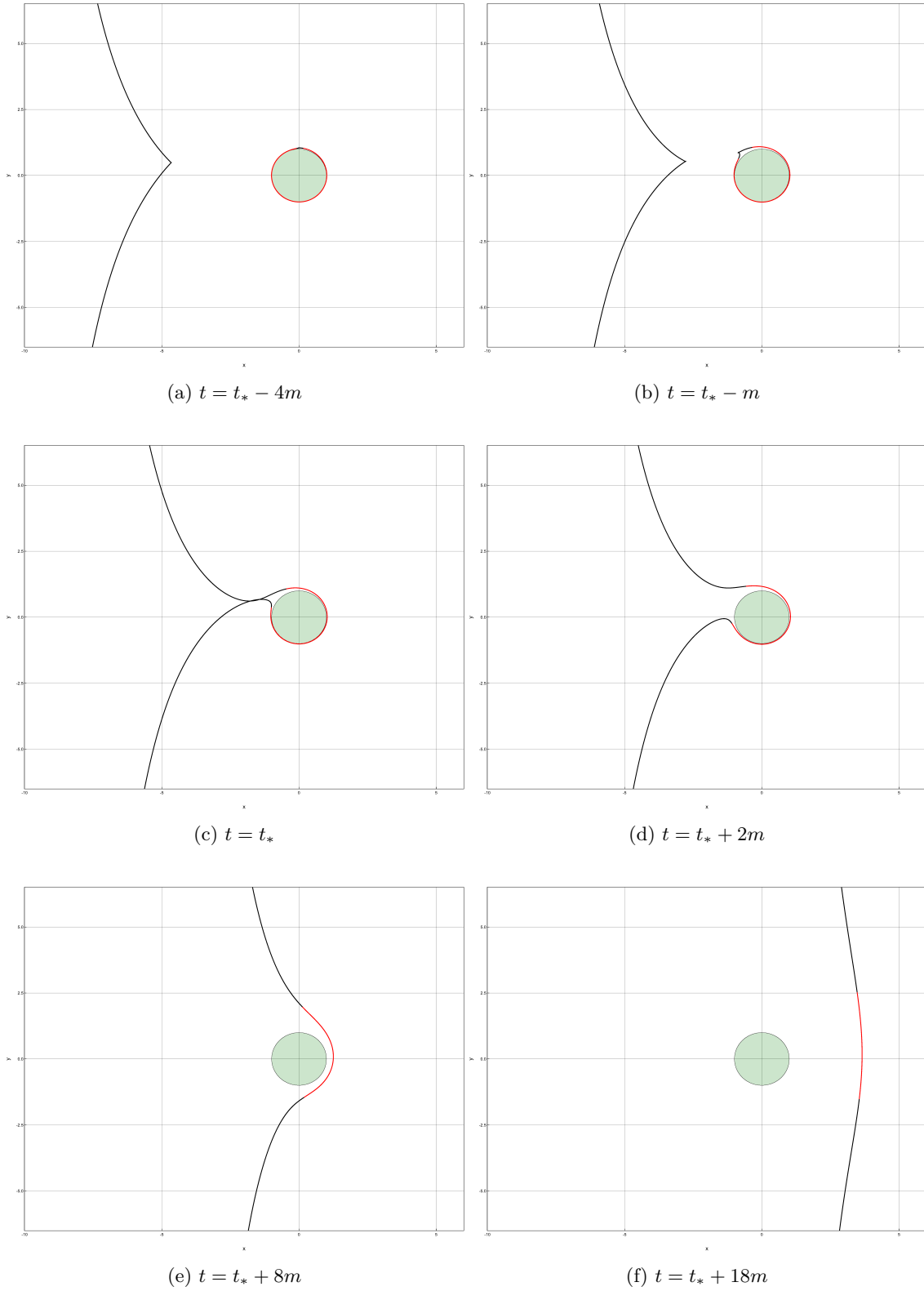


FIGURE 4.7 – Projection sur le plan xy des sections à temps constant pour $\alpha = \pi/2$. Le disque vert représente le petit trou noir pour $t \rightarrow -\infty$, la courbe rouge représente les géodésiques qui lui sont issues tandis que la noire représente les géodésiques caustiques.

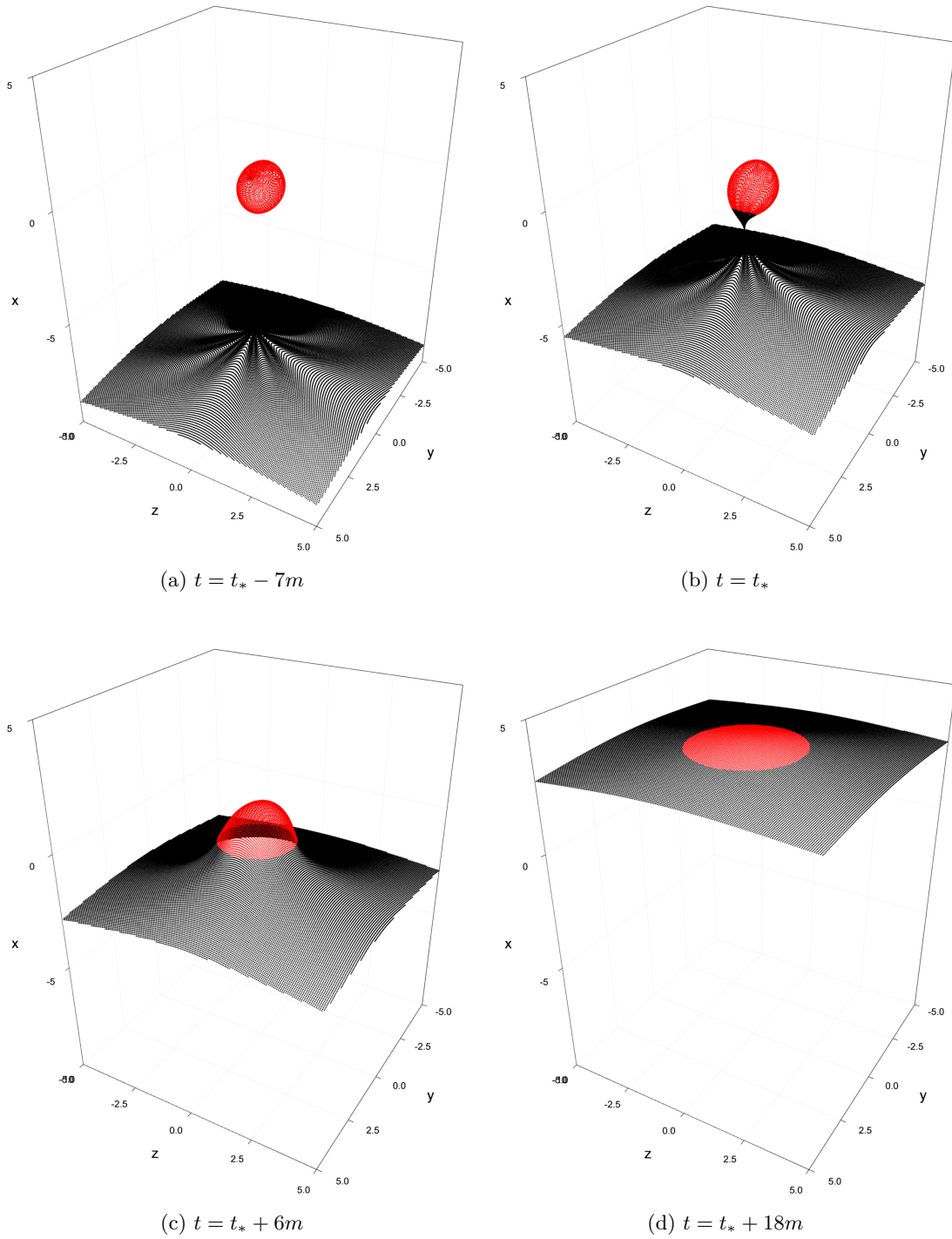


FIGURE 4.8 – Sections à temps constant en coordonnées pseudo-cartésiennes pour $\alpha = \pi/2$.

Un tel ensemble de points caustiques entraîne l'existence d'une structure toroïdale très fine à l'instant de la fusion, visible en coordonnées pseudo-cartésiennes sur la figure 4.9b. Cependant, cette petite topologie n'existe que durant un court instant, elle disparaît en fait plus rapidement que le temps que prendrait la lumière pour la traverser, en accord avec le théorème de censure topologique [16]. Comme mentionné dans l'article d'Empanan [2], cette structure est en réalité dépendante du choix de jauge. Il est en effet toujours possible d'effectuer un choix particulier de sections spatiales afin que la topologie transite de deux sphères $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ vers une seule \mathbb{S}^2 , et ce sans tore, comme explicité plus en détail dans l'article de Bohn [17]. A contrario, le caractère bidimensionnel du crease set est indépendant du choix de jauge.

4.4 Orientation quelconque

Afin de couvrir tous les angles possibles, il n'est nécessaire que de considérer $0 \leq \alpha \leq \pi/2$. En effet, toute configuration pour α hors du premier quadrant peut y être ramenée via une rotation et/ou une inversion de l'axe y , équivalente à modifier le signe du paramètre de spin a .

Pour tout $\alpha \neq 0$, la symétrie continue $U(1)$ est brisée. On a cependant remarqué que lorsque $\alpha = \pi/2$, il subsistait une symétrie discrète \mathbb{Z}_2 en coordonnées pseudo-cartésiennes. A première vue, cette symétrie semble absente pour $0 < \alpha < \pi/2$, mais une analyse des géodésiques telles que représentées sur la figure 4.10 nous permet de constater qu'elles émergent toujours par paires du crease set. La symétrie \mathbb{Z}_2 subsiste donc par le fait qu'une géodésique de paire (P_α, L) est associée au même point d'émergence que $(-P_\alpha, L)$, et ce pour toute valeur de α .

Grâce à l'existence de la symétrie \mathbb{Z}_2 , on déduit que le crease set se situe sur la surface définie par $\theta = \pi - \alpha$. Cependant, il n'est généralement pas correct d'arrêter l'intégration des EDOs une fois cette valeur atteinte. En effet, on remarque sur la figure 4.10 que les géodésiques ont tendance à s'enrouler autour du trou noir dans le plan xy et donc à traverser plusieurs fois la surface $\theta = \pi - \alpha$ au cours du temps, problème qui n'était pas présent lors de l'étude de la collision perpendiculaire. La solution réside dans la symétrie discrète, et consiste en l'arrêt de l'intégration lorsque (P_α, L) et $(-P_\alpha, L)$ convergent en un même point. Cependant, cette solution est complexe à implémenter numériquement car elle nécessite la recherche d'un ensemble de mesure nulle. En analysant plus profondément le comportement de $\theta(t)$, en observant par exemple la figure 4.11, on remarque deux cas distincts :

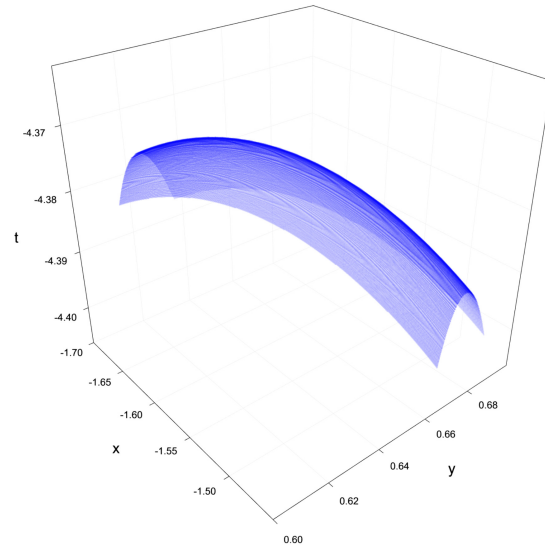
- si l'on suit une géodésique $(|P_\alpha|, L)$ en remontant le temps, le point caustique se situe lorsque $\theta = \pi - \alpha$ la première fois \Leftrightarrow lorsque $\pi - \alpha$ est franchi par le bas ;
- concernant la géodésique associée $(-|P_\alpha|, L)$, le point caustique se situe quand θ prend la valeur $\pi - \alpha$ pour la seconde fois \Leftrightarrow lorsque $\pi - \alpha$ est franchi par le haut.

Numériquement, un tel comportement est aisément détecté en connaissant le signe de P_α ainsi que celui de p_θ .

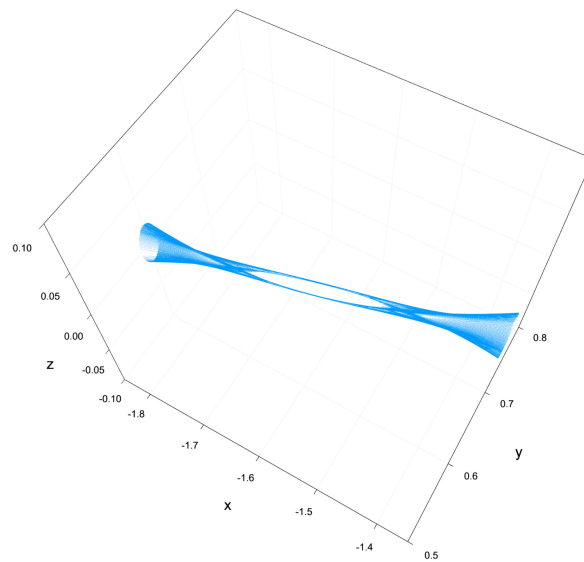
A l'instar de la collision perpendiculaire, le crease set est une surface bidimensionnelle dont la largeur décroît jusqu'à devenir une courbe à une dimension dans la limite $\alpha = 0$. Le comportement de la structure toroïdale est similaire, sa taille est maximale quand $\alpha = \pi/2$ et décroît de façon presque monotone avec α pour disparaître dans la limite $\alpha = 0$, où la symétrie $U(1)$ n'autorise plus son existence.

Ensuite, la figure 4.12 montre quelques sections à temps constant en coordonnées pseudo-cartésiennes pour $\alpha = \pi/3$. Le comportement est similaire à la collision perpendiculaire 4.8, ce qui explique pourquoi les deux cas limites sont plus profondément étudiés.

Pour terminer, on peut se demander quel est l'effet de l'angle α sur le temps de relaxation de l'horizon ainsi que sur F_A , le rapport d'aires. Le résultat est que le temps de relaxation est invariant



(a) Crease set pour $\alpha = \pi/2$.



(b) $t = t_* - \epsilon$ - Zoom sur la structure toroïdale pour $\alpha = \pi/2$.

FIGURE 4.9

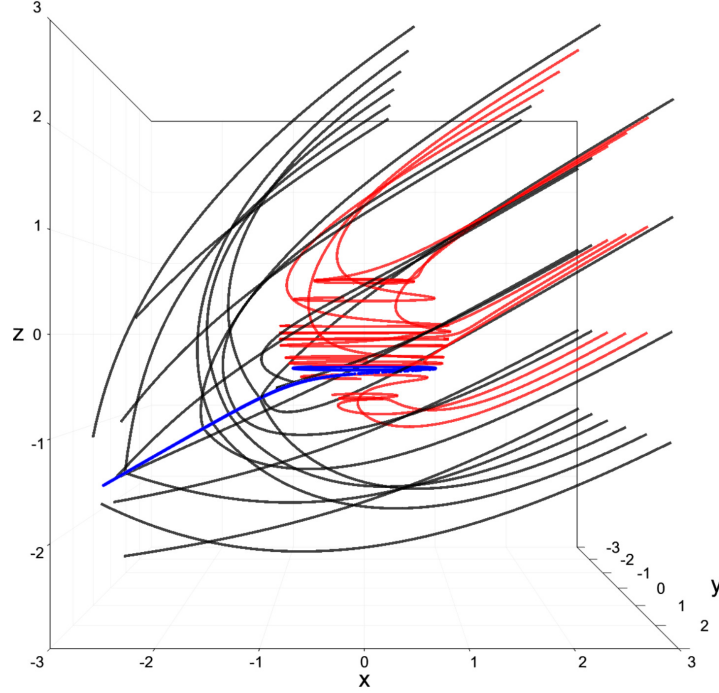


FIGURE 4.10 – Projection des géodésiques en coordonnées pseudo-cartésiennes pour $\alpha = \pi/3$. En noir (resp. rouge) sont représentées les géodésiques caustiques (resp. non-caustiques). Le crease set est visible en bleu, cependant sa structure bidimensionnelle est trop étroite que pour être résolue sur cette figure.

de l'angle de la collision, confortant ainsi l'idée que t_* dépend principalement de la masse m et du paramètre de spin a déterminant le nombre de géodésiques générant le trou noir. Concernant le facteur d'aire, on obtient un comportement semblable à un sinus, améliorant quelque peu le résultat de l'article [2] décrivant une croissance monotone de F_A en α . Comme ce facteur est important en thermodynamique des trous noirs, notamment via le théorème de l'aire, l'explication d'Empanan et Martinez est que son augmentation reflète le caractère irréversible du système croissant avec l'angle α . La figure 4.13 contient sous forme graphique ces deux résultats.

Effet de la rotation sur le disque non-caustique

Comme on a pu le voir sur les différents visuels précédents, à t constant et tendant vers $+\infty$, les géodésiques non-caustiques forment apparemment un disque sur le plan asymptotique. On rappelle que pour une orientation quelconque, le plan est asymptotiquement généré par $(P_\alpha, L \csc \alpha) \in \mathbb{R}^2$, où la cosécante de α intervient afin d'avoir une représentation isométrique.

Lorsque $\alpha = 0$ ou $a = 0$, la symétrie continue $U(1)$ impose que la forme des géodésiques non-caustiques soit exactement un disque. Cependant, cette symétrie est brisée dès que $\alpha \neq 0$ et $a \neq 0$ et il se peut que le disque soit déformé en ovoïde. Afin de mesurer cette déformation, nous nous intéressons au rapport :

$$R := \frac{\max_{n-c} P_\alpha - \min_{n-c} P_\alpha}{\max_{n-c} L - \min_{n-c} L} \sin \alpha \quad (4.9)$$

pour différents angles et paramètres de spin.

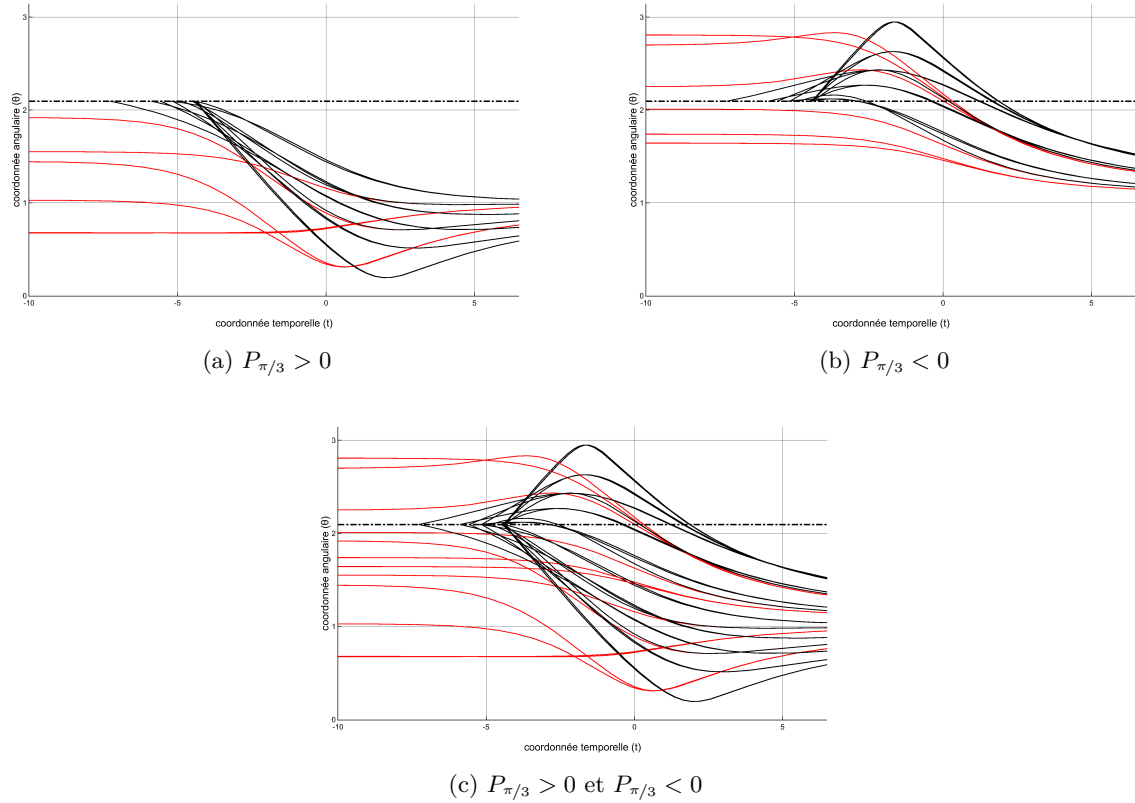


FIGURE 4.11 – Colatitude des géodésiques générant la figure 4.10 en fonction du temps t . En rouge sont représentées les génératrices du trou noir de Kerr asymptotique, et en noir les géodésiques caustiques. La valeur $\pi - \alpha$ est représentée en pointillés.

On note que le disque n'est pas centré en $(0, 0)$ mais en $(0, \tilde{L})$, où \tilde{L} dépend de α et a , résultat déjà visible sur les figures de l'article d'Empanan et Martinez [2]. A contrario, le comportement du rapport R , que l'on peut observer sur les graphiques 4.14a et 4.14b, est un résultat nouveau. Le fait que $R \neq 1$ est la seule indication visuelle en $t \rightarrow \infty$ que la géométrie du petit trou noir était Kerr et non Schwarzschild.

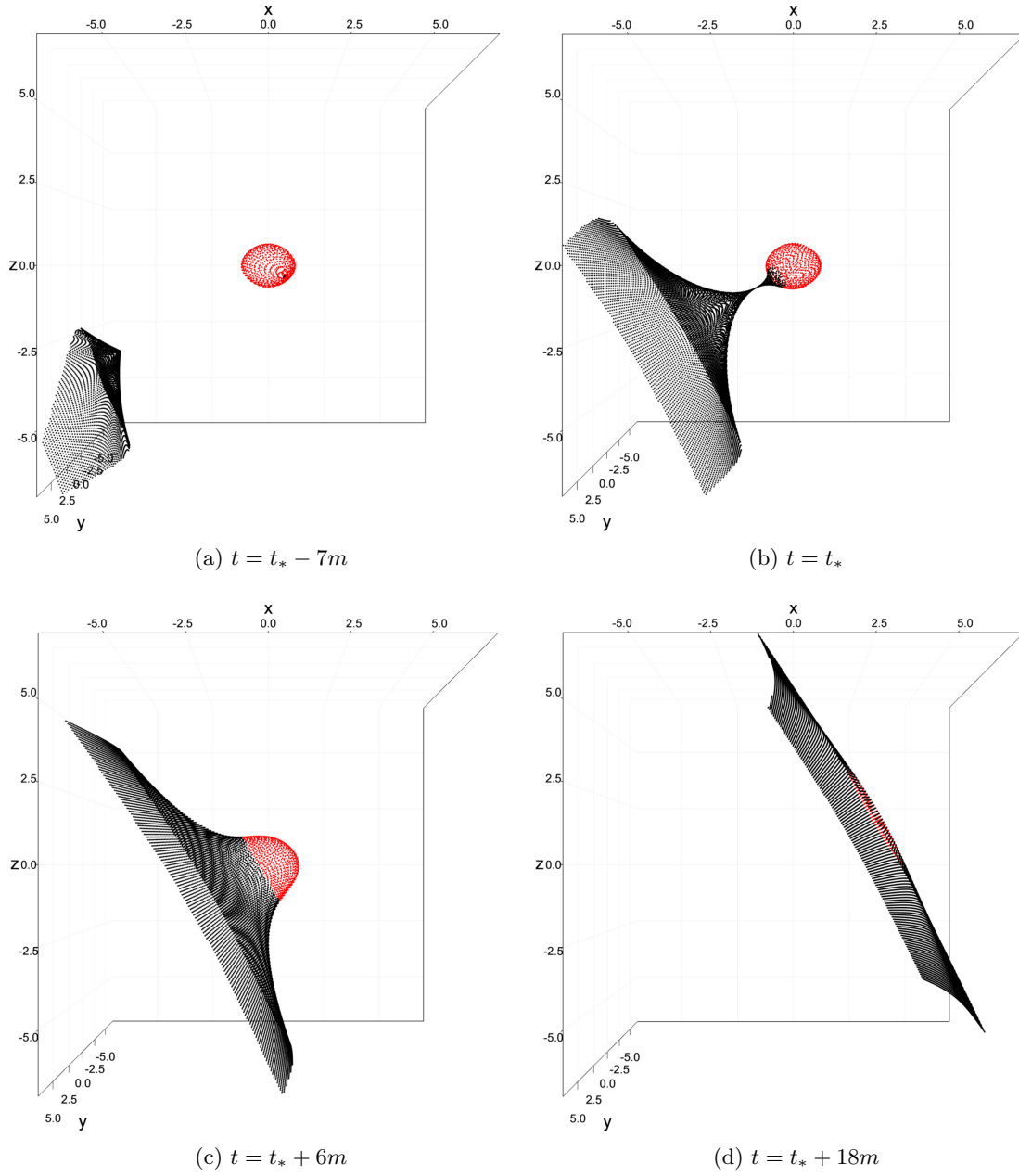
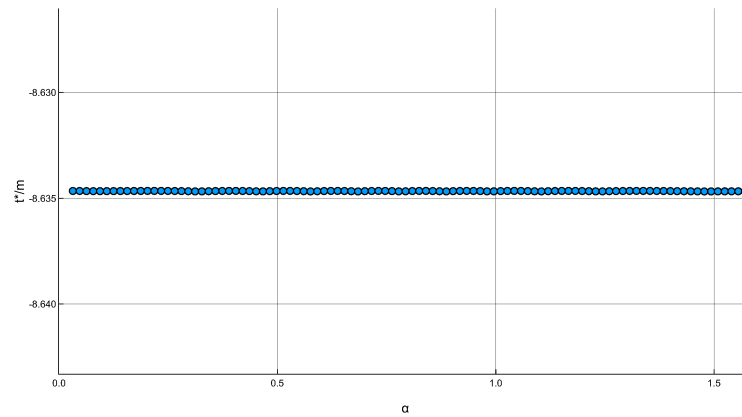
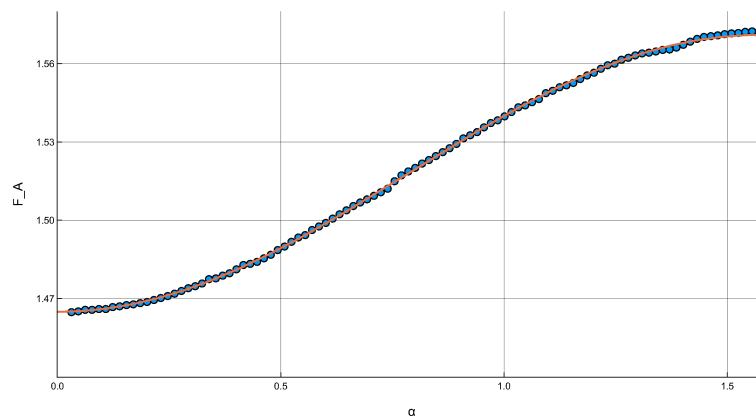
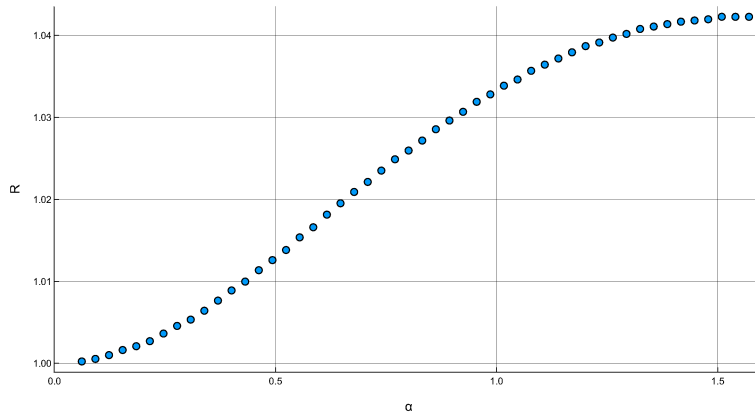
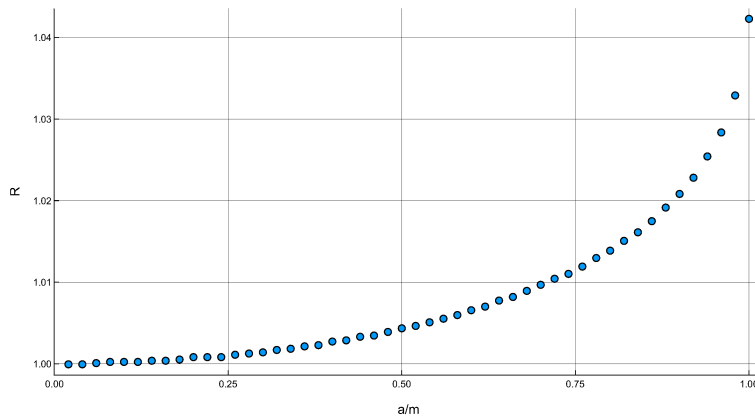


FIGURE 4.12 – Sections à temps constant en coordonnées pseudo-cartésiennes pour $\alpha = \pi/3$.

(a) Variation de t_* selon α (b) Variation de F_A selon α . La courbe rouge correspond à la fonction $f(\alpha) = 0.106 \sin^2 \alpha + 1.464$.FIGURE 4.13 – Résultats obtenus pour $a = m$, $m = 1/2$.



(a) Variation du rapport R en fonction de l'angle de la collision pour $a = m$.



(b) Variation du rapport R en fonction du paramètre de spin pour $\alpha = \pi/2$.

FIGURE 4.14 – Les déviations de l'unité lorsque la symétrie $U(1)$ est présente s'expliquent. On remarque que R est suffisamment différent de 1 pour en conclure qu'il s'agit bien d'un ovoïde, même si la déviation reste très légère.

Chapitre 5

Conclusion

Sur base d'une seule hypothèse reformulée par Emparan et Martinez, il est donc possible de résoudre très précisément et relativement simplement l'horizon des événements d'un binaire de trous noirs entrant en collision. La construction étudiée est suffisante pour décrire n'importe quelle collision de deux trous noirs non chargé ayant $m/M \rightarrow 0$, de spins arbitraires, d'orientations relatives arbitraire, de trajectoires et vitesse relative arbitraires. De plus, selon le théorème d'absence de chevelure, si un trou noir est neutre, sa géométrie est nécessairement donnée par la solution de Kerr. Ensuite, l'hypothèse du rapport de masse et le principe d'équivalence permet de déduire que la géométrie exacte (uniquement en rapport de masse extrême) du système binaire est également la géométrie de Kerr. Les symétries de l'espace-temps, et plus précisément les intégrales premières associées aux vecteurs et tenseurs de Killing, permettent d'établir le système d'équations différentielles régissant les géodésiques de type lumière. Il suffit ensuite d'intégrer ces équations en choisissant spécifiquement les degrés de liberté afin d'obtenir un plan dans le futur nul asymptotique ; et si la géodésique est caustique, il n'est nécessaire que de considérer la partie postérieure à l'émergence du point de croisement. La construction peut également être adaptée à une classe plus large de trous noirs, par exemple de charge non-nulle, en remplaçant la métrique de Kerr par celle de Kerr–Newman.

Comme stipulé dans l'introduction, il s'agit d'une description simple, précise et générique d'un processus *fréquent* dans l'univers. L'hypothèse de rapport de masse est restrictive mais il n'est pas impossible que l'on observe un jour des systèmes l'approchant, par exemple à proximité d'un trou noir super-massif au centre d'une galaxie. En plus de permettre la compréhension d'un phénomène important de la relativité générale, la construction de l'horizon peut être utilisée comme l'ordre 0 d'un développement en série selon m/M , m donné.

Cependant, obtenir un tel développement n'est pas chose aisée. La construction explicitée dans ce mémoire se base principalement sur le fait qu'un des horizons est un plan en accélération n'affectant aucunement la géométrie induite par le petit trou noir. Introduire des corrections d'ordre M finies implique donc nécessairement que l'horizon doit se relaxer en un sphéroïde et non un plan, modifiant dès lors les conditions de bord ainsi que le type de géodésiques lumières à calculer. De plus, la métrique de l'espace-temps ne serait plus celle de Kerr car la courbure $1/R \sim 1/M$ est non-négligeable dès le premier ordre. Dans le rapport de masse extrême pris avec $m \rightarrow 0$, les corrections à la métrique sont introduites via la théorie des perturbations ainsi qu'un terme proportionnel à un delta de Dirac dans le tenseur énergie-impulsion, c.f. formalisme de Zerilli [18]. Cependant, dans notre cas, la perturbation n'est pas due à un objet sans dimension mais à un horizon de taille non négligeable se mouvant dans le temps. Une solution pourrait être d'écrire une perturbation plus générale et de la faire coïncider à grande distance avec des développements $\mathcal{O}(m/M)$ issu de $m \rightarrow 0$ connu [19]. La construction de l'horizon serait alors naturellement beaucoup plus complexe et très différente de celle présentée, certaines symétries seraient également brisées, mais il serait possible d'apercevoir l'effet de l'existence d'ondes gravitationnelles sur la dynamique de l'horizon du binaire, au premier ordre.

Jusqu'à il y a peu, les diverses expériences gravitationnelles ne semblaient détecter que des collisions pour lesquelles les deux trous noirs étaient de masses égales. Un récent article [20], datant du 18 avril 2020, indiquerait que les expériences LIGO et Virgo aurait détecté en avril 2019 la fusion d'un binaire dont le rapport de masse serait approximativement de 3.75. Le faible nombre d'événements de ce type s'explique de deux manières. D'une part, un binaire de trous noirs d'un rapport de masse élevé a très peu de chance d'être issu de l'effondrement gravitationnel d'étoiles

couplées car les simulations de la genèse de systèmes binaires montrent un pic de probabilité pour un rapport de masse de 1. De tels trous noirs doivent donc se former séparément pour ensuite se rencontrer, par chance, lors de leur voyage au travers de l'univers. Une telle rencontre est évidemment plus rare que l'effondrement d'un système binaire. D'une autre part, le schéma des ondes gravitationnelles émises est d'autant plus complexe que le rapport de masse est élevé, un rapport de masse déviant de l'unité excite un plus grand nombre de longueurs d'onde. Au vu de l'avancement des diverses techniques de détection et d'analyse de données, il n'est pas impossible que soient détectés dans un futur proche des fusions dont le rapport de masse est encore plus élevé.

Bibliographie

- [1] Roberto EMPARAN et Marina MARTÍNEZ. “Exact event horizon of a black hole merger”. In : *Classical and Quantum Gravity* 33.15 (juin 2016), p. 155003. ISSN : 1361-6382. DOI : 10.1088/0264-9381/33/15/155003. URL : <http://dx.doi.org/10.1088/0264-9381/33/15/155003>.
- [2] Roberto EMPARAN, Marina MARTÍNEZ et Miguel ZILHÃO. “Black hole fusion in the extreme mass ratio limit”. In : *Physical Review D* 97.4 (fév. 2018). ISSN : 2470-0029. DOI : 10.1103/physrevd.97.044004. URL : <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.97.044004>.
- [3] Antoine DEPASSE. “Collision de trous noirs de rapport de masse extrême”. Mémoire présenté en vue de l’obtention du grade académique de Master [120] en sciences physiques, finalité approfondie. UCLouvain, 2019.
- [4] Hans STEPHANI et al. *Exact Solutions of Einstein’s Field Equations*. 2nd ed. Cambridge monographs on mathematical physics. Cambridge University Press, 2003. ISBN : 9780521461368.
- [5] Éric GOURGOULHON. *Geometry and physics of black holes*. Advanced Lectures of Institut d’Astrophysique de Paris. 2018. URL : <https://luth.obspm.fr/~luthier/gourgoulhon/bh16/>.
- [6] K. SCHWARZSCHILD. “On the Gravitational Field of a Mass Point According to Einstein’s Theory”. In : *Abh. Konigl. Preuss. Akad. Wissenschaften Jahre 1906,92, Berlin,1907* (jan. 1916), p. 189-196.
- [7] Roy P. KERR. “Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics”. In : *Phys. Rev. Lett.* 11 (5 sept. 1963), p. 237-238. DOI : 10.1103/PhysRevLett.11.237. URL : <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.11.237>.
- [8] Robert H. BOYER et Richard W. LINDQUIST. “Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric”. In : *Journal of Mathematical Physics* 8.2 (1967), p. 265-281. DOI : 10.1063/1.1705193.
- [9] R. PENROSE. “Naked singularities”. In : *Annals N. Y. Acad. Sci.* 224 (1973), p. 125-134. DOI : 10.1111/j.1749-6632.1973.tb41447.x.
- [10] Martin WALKER et Roger PENROSE. “On quadratic first integrals of the geodesic equations for type {2,2} spacetimes”. In : *Comm. Math. Phys.* 18.4 (1970), p. 265-274. URL : <https://projecteuclid.org:443/euclid.cmp/1103842577>.
- [11] Atish DABHOLKAR et Suresh NAMPURI. “Quantum Black Holes”. In : *Lecture Notes in Physics* (2012), p. 165-232. ISSN : 1616-6361. DOI : 10.1007/978-3-642-25947-0_5. URL : http://dx.doi.org/10.1007/978-3-642-25947-0_5.
- [12] H. A. CAMARGO et M. SOCOLOVSKY. *Rindler approximation to Kerr black hole*. 2014. arXiv : 1405.5261 [gr-qc].
- [13] K. ROSQUIST, T. BYLUND et L. SAMUELSSON. “Carter’s constant revealed”. In : *International Journal of Modern Physics D* 18.03 (mar. 2009), p. 429-434. ISSN : 1793-6594. DOI : 10.1142/S0218271809014546. URL : <http://dx.doi.org/10.1142/S0218271809014546>.
- [14] Samuel E. GRALLA et Alexandru LUPSASCA. “Null geodesics of the Kerr exterior”. In : *Physical Review D* 101.4 (fév. 2020). ISSN : 2470-0029. DOI : 10.1103/physrevd.101.044032. URL : <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.101.044032>.
- [15] J.M. BARDEEN, B. CARTER et S.W HAWKING. “The four laws of black hole mechanics”. In : *Communications in Mathematical Physics* 31 (1973), p. 161-170. DOI : 10.1007/BF01645742.
- [16] John L. FRIEDMAN, Kristin SCHLEICH et Donald M. WITT. “Topological Censorship”. In : *Physical Review Letters* 75.9 (août 1995), p. 1872-1872. ISSN : 1079-7114. DOI : 10.1103/physrevlett.75.1872. URL : <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevLett.75.1872>.

- [17] Andy BOHN, Lawrence E. KIDDER et Saul A. TEUKOLSKY. “Toroidal horizons in binary black hole mergers”. In : *Physical Review D* 94.6 (sept. 2016). ISSN : 2470-0029. DOI : 10.1103/physrevd.94.064009. URL : <http://dx.doi.org/10.1103/PhysRevD.94.064009>.
- [18] F.J. ZERILLI. “Gravitational field of a particle falling in a schwarzschild geometry analyzed in tensor harmonics”. In : *Phys. Rev. D* 2 (1970), p. 2141-2160. DOI : 10.1103/PhysRevD.2.2141.
- [19] Uzair HUSSAIN et Ivan BOOTH. “Deformation of horizons during a merger”. In : *Classical and Quantum Gravity* 35.1 (déc. 2017), p. 015013. ISSN : 1361-6382. DOI : 10.1088/1361-6382/aa9959. URL : <http://dx.doi.org/10.1088/1361-6382/aa9959>.
- [20] Adrian CHO. “Gravitational waves reveal unprecedented collision of heavy and light black holes”. In : *Science* (2020). ISSN : 0193-4511. DOI : 10.1126/science.abc3212.
- [21] Paul F. BYRD. *Handbook of elliptic integrals for engineers and scientists (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen)*. 2nd. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen. Springer-Verlag, 1971. ISBN : 0387053182,9780387053189.
- [22] Sean M. CARROLL. *Lecture Notes on General Relativity*. 1997. arXiv : [gr-qc/9712019](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019) [[gr-qc](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9712019)].
- [23] Frank W. J. OLVER et al. *NIST handbook of mathematical functions*. Cambridge University Press, 2010. ISBN : 0521140633,9780521140638,9780521192255,0521192250.
- [24] Milton ABRAMOWITZ et Irene A. STEGUN. *Handbook of Mathematical Functions : with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables*. National Bureau of Standards, 1970. ISBN : 0486612724,9780486612720.
- [25] Geoffrey COMPÈRE. *Advanced Lectures on General Relativity*. Springer Nature, 2019. ISBN : 9783030042592,3030042596.
- [26] B. P. ABBOTT et al. “The basic physics of the binary black hole merger GW150914”. In : *Annalen der Physik* 529.1-2 (oct. 2016), p. 1600209. ISSN : 0003-3804. DOI : 10.1002/andp.201600209. URL : <http://dx.doi.org/10.1002/andp.201600209>.

Annexe A

Dérivée de la métrique inverse

Dans cette annexe, nous nous intéressons au calcul des dérivées selon r et θ de la métrique inverse donnée par l'équation 3.6 :

$$g^{\mu\nu} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{\Delta} \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2}{\Sigma} \sin^2 \theta \right) & 0 & 0 & -\frac{2mra}{\Sigma\Delta} \\ 0 & \frac{\Delta}{\Sigma} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\Sigma} & 0 \\ -\frac{2mra}{\Sigma\Delta} & 0 & 0 & \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma\Delta \sin^2 \theta} \end{bmatrix}$$

avec :

$$\Delta = r^2 - 2mr + a^2, \quad \Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta$$

A.1 Selon r

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\Delta} &= -\frac{\partial_r \Delta}{\Delta^2} \\ &= 2 \frac{m-r}{\Delta^2} \\ \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\Sigma} &= -\frac{\partial_r \Sigma}{\Sigma^2} \\ &= -2 \frac{r}{\Sigma^2} \\ \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\Sigma\Delta} &= -\frac{\Sigma \partial_r \Delta + \Delta \partial_r \Sigma}{(\Sigma\Delta)^2} \\ &= -2 \frac{\Sigma(r-m) + r\Delta}{(\Sigma\Delta)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} g^{tt} &= -\left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2}{\Sigma} \sin^2 \theta \right) \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\Delta} - \frac{1}{\Delta} \left(2r + \frac{\partial}{\partial r} \frac{2mra^2}{\Sigma} \sin^2 \theta \right) \\ &= -2 \left(r^2 + a^2 + \frac{2mra^2}{\Sigma} \sin^2 \theta \right) \frac{m-r}{\Delta^2} - 2 \frac{1}{\Delta} \left(r + ma^2 \frac{\Sigma - 2r^2}{\Sigma^2} \sin^2 \theta \right) \\ &= 2m \frac{[-\Delta\Sigma - 2mr\Sigma + 2r^2(\Delta + \Sigma)] a^2 \sin^2 \theta + \Sigma^2 (r^2 - a^2)}{(\Sigma\Delta)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} g^{t\phi} &= -\frac{2ma}{\Sigma\Delta} - 2mra \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\Sigma\Delta} \\ &= -\frac{2ma}{\Sigma\Delta} + 4mra \frac{\Sigma(r-m) + r\Delta}{(\Sigma\Delta)^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} g^{rr} = 2 \frac{r-m}{\Sigma} - 2 \frac{r\Delta}{\Sigma^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial r} g^{\theta\theta} = -2 \frac{r}{\Sigma^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial r} g^{\phi\phi} &= 2 \frac{r-m}{\Sigma \Delta \sin^2 \theta} + \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\partial}{\partial r} \frac{1}{\Sigma \Delta} \\ &= 2 \frac{r-m}{\Sigma \Delta \sin^2 \theta} - 2 \frac{\Delta - a^2 \sin^2 \theta}{\sin^2 \theta} \frac{\Sigma(r-m) + r\Delta}{(\Sigma \Delta)^2} \\ &= \frac{-2(2mr - r^2 + \Delta) [m\Sigma - r(\Delta + \Sigma)] - 2r\Delta^2 \csc^2 \theta}{(\Sigma \Delta)^2} \end{aligned}$$

A.2 Selon θ

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\Delta} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\Sigma} &= -\frac{\partial_\theta \Sigma}{\Sigma^2} \\ &= \frac{a^2 \sin 2\theta}{\Sigma^2} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} g^{tt} = -\frac{2mra^2}{\Delta} \left(\frac{a^2 \sin^2 \theta}{\Sigma^2} - \frac{1}{\Sigma} \right) \sin 2\theta$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} g^{t\phi} = -\frac{2mra}{\Delta} \frac{a^2 \sin 2\theta}{\Sigma^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} g^{rr} = \frac{a^2 \Delta \sin 2\theta}{\Sigma^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \theta} g^{\theta\theta} = \frac{a^2 \sin 2\theta}{\Sigma^2}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \theta} g^{\phi\phi} &= \frac{\partial_\theta (\Delta - a^2 \sin^2 \theta) \Sigma \Delta \sin^2 \theta - (\Delta - a^2 \sin^2 \theta) \partial_\theta (\Sigma \Delta \sin^2 \theta)}{(\Sigma \Delta \sin^2 \theta)} \\ &= \frac{a^2 \Sigma \Delta \sin^2 \theta \sin 2\theta - \Delta (\Sigma - a^2 \sin^2 \theta) (\Delta - a^2 \sin^2 \theta) \sin 2\theta}{(\Sigma \Delta \sin^2 \theta)} \\ &= \frac{2\Delta \cot \theta (a^2 - \Sigma \csc^2 \theta) - a^4 \sin 2\theta}{\Delta \Sigma^2} \end{aligned}$$

Annexe B

Cas spécifique de la solution analytique

Exemple de la solution analytique pour la géodésique ayant comme paramètres $E = 1$, $L = 1$, $P_{\pi/2} = 1$ dans une géométrie de Kerr de masse $m = 0.5$ et paramètre de spin $a/m = 0.8$.

Comme $\alpha = \pi/2$, on a que la constante de Carter vaut :

$$\begin{aligned} Q &= P_{\pi/2}^2 \\ &= 1 > 0 \end{aligned}$$

B.1 $r(\tau)$

Les quatre racines du polynôme $\mathcal{R}(r)$ sont les suivantes :

$$\begin{aligned} r_1 &= -1.6501 \\ r_2 &= 0.1462 \\ r_3 &= 0.7519 - 0.3123i \\ r_4 &= 0.7519 + 0.3123i \end{aligned}$$

Dans le cas de deux racines réelles et deux complexes, la solution dérivée dans l'article [14] est :

$$r(\tau) = \frac{(Br_2 - Ar_1) + (Br_2 + Ar_1) \operatorname{cn}(X(\tau)|k)}{(B - A) + (B + A) \operatorname{cn}(X(\tau)|k)} \quad (\text{B.1})$$

avec :

$$\begin{aligned} A &= \sqrt{r_{32}r_{42}} > 0, & r_{ij} &= r_i - r_j \\ B &= \sqrt{r_{31}r_{41}} > A \\ k &= \frac{(A + B)^2 - r_{21}^2}{4AB} \\ X(\tau) &= \sqrt{AB}(\tau + \nu_r \mathcal{I}_r^s) \end{aligned}$$

ainsi que ν_r et \mathcal{I}_r^s les conditions initiales, telles que :

$$\begin{aligned} r(0) &= r_s, & \operatorname{sign} r'(0) &= \nu_r \\ \mathcal{I}_r^s &= \frac{1}{\sqrt{AB}} \operatorname{F} \left(\operatorname{acos} \frac{A(r_s - r_1) - B(r_s - r_2)}{A(r_s - r_1) + B(r_s - r_2)} \middle| k \right) \end{aligned}$$

Cependant, comme les conditions de bord du problème sont définies asymptotiquement, la valeur r_s est inconnue. On peut alors interpréter le produit $\nu_r \mathcal{I}_r^s$ comme étant un paramètre libre. A nouveau, les équations différentielles sont invariantes sous translation de la variable τ , on fixe donc $\nu_r \mathcal{I}_r^s = 0$ sans perte de généralité.

Cependant, la solution ainsi obtenue n'est pas encore correcte. En effet, comme on le remarque sur la figure B.1, la fonction $r(\tau)$ est périodique et prend également des valeurs négatives. Il est

donc nécessaire de restreindre le domaine à l'intervalle $(-\tau_\infty, \tau_\infty)$ afin que l'ensemble image soit $[r_2, \infty)$ et englobe les valeurs d'intérêt.

$$\begin{aligned}\tau_\infty &= \frac{1}{\sqrt{AB}} \operatorname{cn}^{-1} \left(\frac{A-B}{A+B} \middle| k \right) \\ &= 4.0069\end{aligned}\tag{B.2}$$

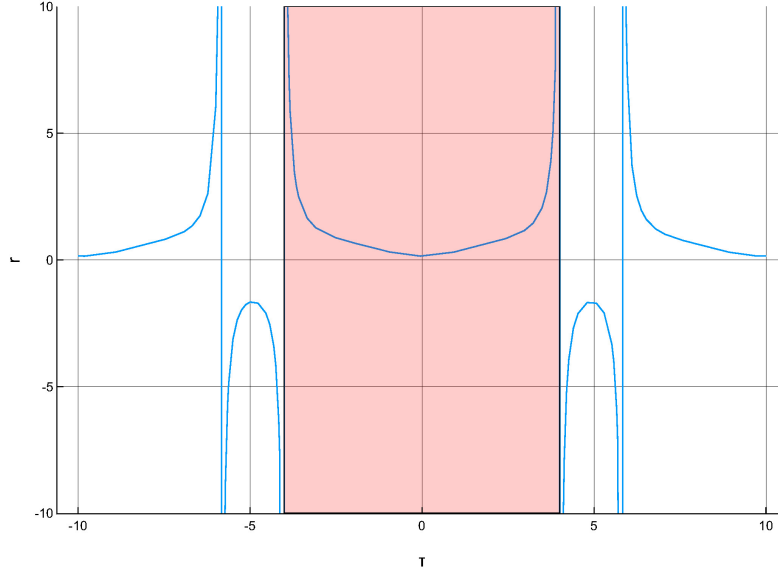


FIGURE B.1 – Fonction $r(\tau)$. L'intervalle $(-\tau_\infty, \tau_\infty)$ est coloré en rouge. Les fonctions trigonométriques inverses de Jacobi (par exemple cn^{-1}) ne sont généralement pas implémentées de base, la valeur de τ_∞ est donc obtenue à l'aide d'une méthode de Newton-Raphson en ajustant correctement le point de départ afin de converger vers la bonne valeur.

B.2 $\theta(\tau)$

De $Q > 0$, on déduit que la géodésique est *ordinaire*. Selon l'article [14], la fonction $\theta(\tau)$ est donnée par l'expression suivante :

$$\frac{\cos \theta(\tau)}{\sqrt{u_+}} = -\nu_\theta \operatorname{sn} \left(\sqrt{-u_- a^2} (\tau + \nu_\theta \mathcal{G}_\theta^s) \middle| \frac{u_+}{u_-} \right)\tag{B.3}$$

avec :

$$u_\pm = \Delta_\theta \pm \sqrt{\Delta_\theta^2 + \frac{Q}{a^2}}, \quad \Delta_\theta = \frac{1}{2} \left(1 - \frac{Q + L^2}{a^2} \right)$$

ainsi que les conditions initiales ν_θ et \mathcal{G}_θ^s :

$$\theta(0) = \theta_s, \quad \operatorname{sign} \theta'(0) = \nu_\theta$$

$$\mathcal{G}_\theta^s = -\frac{1}{\sqrt{-u_- a^2}} \operatorname{F} \left(\operatorname{asin} \frac{\cos \theta_s}{\sqrt{u_+}} \middle| \frac{u_+}{u_-} \right)$$

Encore une fois, les valeurs de θ et sa dérivée à la source sont inconnues et doivent être déterminées. Cependant, on connaît la valeur asymptotique de θ qui est $\alpha = \pi/2$, on doit donc résoudre l'équation suivante (en négligeant ν_θ) afin de trouver $\tau_\alpha = \mathcal{G}_\theta^s$:

$$\begin{aligned}\theta(\tau_\infty) &= \alpha \\ \Leftrightarrow \tau_\alpha &= -\tau_\infty - \frac{1}{\sqrt{-u_- a^2}} \operatorname{sn}^{-1} \left(\frac{\cos \alpha}{\sqrt{u_+}} \left| \frac{u_+}{u_-} \right. \right)\end{aligned}$$

On ré-instaura ν_θ en imposant que le signe de la dérivée en τ_∞ soit le signe de P_α :

$$\theta(\tau) = \operatorname{acos} \left[\operatorname{sign}(P_\alpha) \left| \operatorname{sn} \left(\sqrt{-u_- a^2} (\tau + \tau_\alpha) \left| \frac{u_+}{u_-} \right. \right) \right| \right] \quad (\text{B.4})$$

Le domaine de définition $(-\tau_\infty, \tau_\infty)$ n'est pas le domaine que l'on souhaite lors de la construction de l'horizon. En effet, nous ne sommes intéressé qu'à un sous domaine $[\tau_c, \tau_\infty)$ où, si la géodésique est caustique, τ_c est la valeur (différente de $\pm\tau_\infty$) telle que $\theta(\tau_c) = \pi - \alpha$, i.e. coordonnée du point caustique. Si la géodésique ne l'est pas, alors τ_c satisfait $r(\tau_c) = r_+$, afin que la géodésique n'existe qu'à l'extérieur du trou noir de Kerr. Dans cet exemple, la géodésique est non-caustique et la fonction $\theta(r)$ est dessinée sur la figure 3.3.

B.3 $\phi(\tau)$ et $t(\tau)$

$$\phi - \phi_s = I_\phi + L G_\phi \quad (\text{B.5})$$

$$t - t_s = I_t + a^2 G_t \quad (\text{B.6})$$

où les termes de droites dépendent du type de la géodésique considérée et ϕ_s et t_s sont les valeurs sources, i.e. en $\tau = 0$.

Pour une géodésique ordinaire, on a les expressions suivantes :

$$G_\phi = \frac{1}{\sqrt{-u_- a^2}} \Pi \left(u_+; \Psi_\tau \left| \frac{u_+}{u_-} \right. \right) - \nu_\theta \mathcal{G}_\phi^s \quad (\text{B.7})$$

$$G_t = -\frac{2u_+}{\sqrt{-u_- a^2}} \operatorname{E}' \left(\Psi_\tau \left| \frac{u_+}{u_-} \right. \right) - \nu_\theta \mathcal{G}_t^s \quad (\text{B.8})$$

où \mathcal{G}_ϕ^s et \mathcal{G}_t^s sont des constantes dépendantes de $\theta(0) = \theta_s$:

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_\phi^s &= -\frac{1}{\sqrt{-u_- a^2}} \Pi \left(u_+; \operatorname{asin} \frac{\cos \theta_s}{\sqrt{u_+}} \left| \frac{u_+}{u_-} \right. \right) \\ \mathcal{G}_t^s &= \frac{2u_+}{\sqrt{-u_- a^2}} \operatorname{E}' \left(\operatorname{asin} \frac{\cos \theta_s}{\sqrt{u_+}} \left| \frac{u_+}{u_-} \right. \right)\end{aligned}$$

L'amplitude Ψ_τ dépendante de τ est donnée par :

$$\Psi_\tau = \operatorname{am} \left(\sqrt{-u_- a^2} (\tau + \nu_\theta \mathcal{G}_\theta^s) \left| \frac{u_+}{u_-} \right. \right)$$

Concernant la partie radiale, on peut réécrire les intégrales I_ϕ et I_t comme :

$$I_\phi = \frac{2ma}{r_+ - r_-} \left[\left(r_+ - \frac{aL}{2m} \right) I_+ - \left(r_- - \frac{aL}{2m} \right) I_- \right] \quad (\text{B.9})$$

$$I_t = \frac{4m^2}{r_+ - r_-} \left[r_+ \left(r_+ - \frac{aL}{2m} \right) I_+ - r_- \left(r_- - \frac{aL}{2m} \right) I_- \right] + 4m^2 I_0 + 2m I_1 + I_2 \quad (\text{B.10})$$

La géodésique étudiée n'atteint jamais le minimum du potentiel $\mathcal{R}(r)$ en dehors du trou noir de Kerr, on note donc $I_i = \mathcal{I}_i - \mathcal{I}_i^s$, où le s indique que la primitive est évaluée aux points sources $\tau = 0$. Dans le cas de deux racines réelles et deux complexes, on a les expressions suivantes (avec $r = r(\tau)$) :

$$\mathcal{I}_0 = \frac{1}{\sqrt{AB}} \text{F} \left(\text{acos} \frac{A(r-r_1) - B(r-r_2)}{A(r-r_1) + B(r-r_2)} \middle| k \right) \quad (\text{B.11})$$

$$\mathcal{I}_1 = \frac{Br_2 + Ar_1}{B+A} \mathcal{I}_0 + \tilde{\Pi}_1(r) \quad (\text{B.12})$$

$$\mathcal{I}_2 = \left(\frac{Br_2 + Ar_1}{B+A} \right)^2 \mathcal{I}_0 + 2 \frac{Br_2 + Ar_1}{B+A} \tilde{\Pi}_1(r) + \sqrt{AB} \tilde{\Pi}_2(r) \quad (\text{B.13})$$

$$\mathcal{I}_\pm = -\frac{1}{Br_{\pm 2} + Ar_{\pm 1}} \left[(B+A) \mathcal{I}_0 + \frac{2r_{21}\sqrt{AB}}{Br_{\pm 2} - Ar_{\pm 1}} \text{R}_1 \left(\alpha_\pm; \text{acos} \frac{A(r-r_1) - B(r-r_2)}{A(r-r_1) + B(r-r_2)} \middle| k \right) \right] \quad (\text{B.14})$$

avec :

$$\alpha_\pm = \frac{Br_{\pm 2} + Ar_{\pm 1}}{Br_{\pm 2} - Ar_{\pm 1}}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\Pi}_n(r) &= \left(\frac{2r_{21}\sqrt{AB}}{B^2 - A^2} \right)^n \text{R}_n \left(\frac{B+A}{B-A}; \text{acos} \frac{A(r-r_1) - B(r-r_2)}{A(r-r_1) + B(r-r_2)} \middle| k \right) \\ \text{R}_1(\beta; \varphi|j) &= \frac{1}{1-\beta^2} \left[\Pi \left(\frac{\beta^2}{\beta^2-1}; \varphi \middle| j \right) - \beta f_1 + 2\text{H} \left(\varphi - \frac{\pi}{2} \right) \Pi \left(\frac{\beta^2}{\beta^2-1} \middle| j \right) \right] \\ \text{R}_2(\beta; \varphi|j) &= \frac{1}{\beta^2-1} \left[\text{F}(\varphi|j) - \frac{\beta^2}{j+(1-j)\beta^2} \left(\text{E}(\varphi|j) - \frac{\beta \sin \varphi \sqrt{1-j \sin^2 \varphi}}{1+\beta \cos \varphi} \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{j+(1-j)\beta^2} \left(2j - \frac{\beta^2}{\beta^2-1} \right) \text{R}_1(\beta; \varphi|j) \\ f_1 &= \frac{p_1}{2} \log \left| \frac{p_1 \sqrt{1-j \sin^2 \varphi} + \sin \varphi}{p_1 \sqrt{1-j \sin^2 \varphi} - \sin \varphi} \right|, \quad p_1 = \sqrt{\frac{\beta^2-1}{j+(1-j)\beta^2}} \end{aligned}$$

où $\text{H}(x)$ désigne la fonction de Heaviside habituelle.

Sachant que θ_s , ν_θ et r_s peuvent être connus à partir des résultats précédents, que t_s et ϕ_s peuvent être arbitrairement égaux à 0 par les symétries de Kerr, on obtient que la solution analytique est complètement définie.

B.4 Conclusion

N'est explicité ici qu'un seul des cinq types de géodésiques présentes dans la construction de l'horizon. Pour chacun des autres, la méthodologie est similaire mais les expressions sont différentes. Elles restent néanmoins semblables et sont très bien détaillées dans l'article de Gralla [14].

Construire l'horizon complètement requerrait alors d'analyser chacun des cas, et ce un grand nombre de fois. Cependant, dans la construction même de la fonction, il est nécessaire d'effectuer à plusieurs reprises un *fine-tuning* afin d'ajuster certaines méthodes de résolution numériques utilisées pour pallier l'absence des fonctions trigonométriques inverses de Jacobi. A ce premier défaut, on ajoute que les fonctions $t(\tau)$ et $\phi(\tau)$ sont d'une complexité relativement élevée. Dès lors, on conclut qu'il n'est absolument pas pratique de recourir à cette solution analytique afin de représenter l'horizon complet. Cependant, elle reste parfaitement adaptée à l'étude d'une géodésique unique ainsi qu'à la mesure de l'erreur effectuée lors de l'intégration numériques des EDOs.

Annexe C

Développements en séries

L'objectif de cette annexe est de calculer le développement à l'infini des coordonnées pseudo-cartésiennes au premier ordre en λ . Pour ce faire, il est nécessaire d'avoir en sa possession le développement au moins au second ordre des géodésiques en coordonnées de Boyer-Lindquist.

En utilisant les équations 3.20 et 3.21, il est possible d'éliminer le paramètre affín :

$$d\lambda = \frac{\Sigma(r, \theta)}{\sqrt{\mathcal{R}(r)}} dr \text{ et } d\lambda = \frac{\pm_\theta \Sigma(r, \theta)}{\sqrt{\Theta(\theta)}} d\theta$$

$$\Rightarrow \frac{dr}{\sqrt{[E(r^2 + a^2) - aL]^2 - \Delta [Q + (L - aE)^2]}} = \frac{\pm_\theta d\theta}{\sqrt{Q + \cos^2 \theta (a^2 E^2 - L^2 \csc^2 \theta)}} \quad (\text{C.1})$$

On fixe ensuite E à l'unité et on développe chacun des termes en $r \rightarrow +\infty$, $\theta \rightarrow \alpha$.

Terme de gauche :

$$\left([(r^2 + a^2) - aL]^2 - (r^2 - 2mr + a^2) [Q + (L - a)^2] \right)^{-1/2} = r^{-2} + \mathcal{O}(r^{-4})$$

Terme de droite :

$$\pm_\theta [Q + \cos^2 \theta (a^2 - L^2 \csc^2 \theta)]^{-1/2} = \frac{1}{P_\alpha} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha (a^2 - L^2 \csc^4 \alpha)}{P_\alpha^3} (\theta - \alpha) + \mathcal{O}((\theta - \alpha)^2)$$

où on a utilisé :

$$P_\alpha = \pm_\theta \sqrt{Q + \cos^2 \alpha (a^2 - L^2 \csc^2 \alpha)}$$

A l'aide de ces approximations, on peut facilement intégrer l'équation C.1 :

$$\int dr \frac{1}{r^2} \approx \int d\theta \left[\frac{1}{P_\alpha} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha (a^2 - L^2 \csc^4 \alpha)}{P_\alpha^3} (\theta - \alpha) \right]$$

$$\Leftrightarrow -\frac{1}{r} + C \approx \frac{\theta}{P_\alpha} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha (a^2 - L^2 \csc^4 \alpha)}{P_\alpha^3} \left(\frac{\theta^2}{2} - \alpha\theta \right)$$

La constante d'intégration C est ensuite spécifiquement choisie afin que $r \rightarrow \infty$ lorsque $\theta \rightarrow \alpha$, et inversement :

$$C = \frac{\alpha}{P_\alpha} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha (a^2 - L^2 \csc^4 \alpha) \alpha^2}{P_\alpha^3 \cdot 2}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{r} \approx -\frac{\theta - \alpha}{P_\alpha} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha (a^2 - L^2 \csc^4 \alpha)}{2P_\alpha^3} (\theta - \alpha)^2 \quad (\text{C.2})$$

Il est ensuite nécessaire d'inverser la série afin d'obtenir la fonction $r(\theta)$. Pour ce faire, on rappelle que si $f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots$, alors :

$$\frac{1}{f(z)} = \frac{1}{a_0} - \frac{a_1}{a_0^2} z + \frac{a_1^2 - a_0 a_2}{a_0^3} z^2 + \dots$$

En appliquant cette formule avec $z \equiv \theta - \alpha$ et $f \equiv zr$, on trouve :

$$r(\theta) = -\frac{P_\alpha}{\theta - \alpha} + \frac{\sin \alpha \cos \alpha (a^2 - L^2 \csc^4 \alpha)}{2P_\alpha} + \mathcal{O}(\theta - \alpha) \quad (\text{C.3})$$

La fonction $\theta(r)$ peut s'obtenir en appliquant le théorème d'inversion de Lagrange [23] à l'équation C.2.

Théorème C.0.1 (Lagrange, 1768). *Supposons que $f(z)$ est analytique en $z = z_0$, $f'(z_0) \neq 0$, et $f(z_0) = w_0$. Alors l'équation :*

$$f(z) = w$$

possède une solution unique $z = F(w)$ analytique en $w = w_0$, et :

$$F(w) = z_0 + \sum_{n=1}^{\infty} F_n (w - w_0)^n$$

dans un voisinage de w_0 , où nF_n est le résidu de $(f(z) - f(z_0))^{-n}$ en $z = z_0$.

En posant $w \equiv r^{-1}$, $z \equiv \theta$, $z_0 \equiv \alpha$ alors les hypothèses sont vérifiées et le théorème s'applique. On trouve :

$$\theta = \alpha + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{F_n}{r^n}$$

où les coefficients F_n sont donnés par :

$$\begin{aligned} F_n &= \frac{1}{n} \text{Res}_\alpha \left[\frac{1}{\left(a_1(\theta - \alpha) + a_2(\theta - \alpha)^2 \right)^n} \right] \\ \Rightarrow F_1 &= \frac{1}{a_1} \\ F_2 &= -\frac{a_2}{a_1^3} \end{aligned}$$

où on a posé a_1 et a_2 afin de simplifier l'écriture :

$$\begin{aligned} a_1 &= -\frac{1}{P_\alpha} \\ a_2 &= -\frac{\sin \alpha \cos \alpha (a^2 - L^2 \csc^4 \alpha)}{2P_\alpha^3} \end{aligned}$$

En se limitant au second ordre, on obtient :

$$\theta(r) = \alpha - \frac{P_\alpha}{r} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha (a^2 - L^2 \csc^4 \alpha)}{2r^2} + \mathcal{O}(r^{-3}) \quad (\text{C.4})$$

Afin d'obtenir les approximations de $r(\lambda)$ et $\theta(\lambda)$ à partir des formules C.3 et C.4, nous allons à nouveau utiliser les équations différentielles 3.20 et 3.21.

$$\begin{aligned} d\lambda &= \frac{\Sigma(r, \theta(r))}{\sqrt{\mathcal{R}(r)}} dr \\ &= \left[1 + \frac{c_2}{r^2} + \frac{c_3}{r^3} \mathcal{O}(r^{-4}) \right] dr \\ \Rightarrow \lambda + C &\approx r - \frac{c_2}{r} - \frac{c_3}{2r^2} \end{aligned}$$

avec :

$$c_2 = \frac{P_\alpha^2 - a^2 \sin^2 \alpha + L^2 \csc^2 \alpha}{2}$$

$$c_3 = a^2 m \cos^2 \alpha - m (a^2 - 2aL + P_\alpha^2 + L^2 \csc^2 \alpha) + a^2 P_\alpha \sin(2\alpha)$$

La constante d'intégration C est nulle étant donné que l'on a déjà choisi $r_\infty = 0$. Après inversion de la série¹, on obtient la fonction recherchée :

$$r(\lambda) = \lambda + \frac{P_\alpha^2 - a^2 \sin^2 \alpha + L^2 \csc^2 \alpha}{2\lambda}$$

$$+ \frac{a^2 m \cos^2 \alpha - m (a^2 - 2aL + P_\alpha^2 + L^2 \csc^2 \alpha) + a^2 P_\alpha \sin(2\alpha)}{2\lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^{-3}) \quad (\text{C.5})$$

La procédure pour $\theta(\lambda)$ est directe en utilisant le résultat précédent et en considérant le développement de $\theta(r(\lambda))$. Après calculs et simplifications, on obtient :

$$\theta(\lambda) = \alpha - \frac{P_\alpha}{\lambda} - \frac{\sin \alpha \cos \alpha (a^2 - L^2 \csc^4 \alpha)}{2\lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^{-3}) \quad (\text{C.6})$$

En injectant les équations C.5 et C.6 dans les diverses équations différentielles, en développant, intégrant et en ne considérant que les premiers ordres, par simplicité à l'aide d'un logiciel de calcul symbolique, on trouve les résultats suivants, en adéquation avec ceux de l'article [2] :

$$t(\lambda) = \lambda + 2m \log \lambda - \frac{4m^2}{\lambda}$$

$$+ \frac{m (3a^2 \cos^2 \alpha - a^2 + 2aL + L^2 \csc^2 \alpha - 8m^2 + P_\alpha^2)}{2\lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^{-3}) \quad (\text{C.7})$$

$$\phi(\lambda) = -\frac{L \csc^2 \alpha}{\lambda} - \frac{P_\alpha L \cot \alpha \csc^2 \alpha + am}{\lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^{-3}) \quad (\text{C.8})$$

$$p_r(\lambda) = 1 + \frac{2m}{\lambda} - \frac{P_\alpha^2 + a^2 \sin^2 \alpha + L^2 \csc^2 \alpha - 8m^2}{2\lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^{-3}) \quad (\text{C.9})$$

$$p_\theta(\lambda) = P_\alpha + \frac{a^2 \sin \alpha \cos \alpha - L^2 \cot \alpha \csc^2 \alpha}{\lambda}$$

$$- \frac{P_\alpha (a^2 \cos(2\alpha) + L^2 [\cos(2\alpha) + 2] \csc^4 \alpha)}{2\lambda^2} + \mathcal{O}(\lambda^{-3}) \quad (\text{C.10})$$

Le développement en série des coordonnées pseudo-cartésiennes se fait simplement en injectant les fonctions C.5, C.6 et C.8 dans la définition. Sans une telle précision, le développement de ces coordonnées n'aurait pas été suffisamment précis que pour mettre en exergue le fait que l'horizon forme bel et bien un plan asymptotiquement, visible uniquement en $\mathcal{O}(\lambda^{-1})$.

Il est également important de mentionner que ces diverses séries sont celles implémentées dans le code numérique afin d'obtenir des conditions de bord plus précises, étant donné qu'un ordinateur ne connaît pas la notion d'infini.

1. Dans ce cas-ci, le théorème de Lagrange ne s'applique pas. La procédure est de poser $r = \lambda + a_1 \lambda^{-1} + a_2 \lambda^{-2} + \dots$ et de l'injecter dans la série, développer et ensuite égaliser les coefficients. Finalement, on trouve $a_1 = c_2$ et $2a_2 = c_3$.

Annexe D

Aire d'un trou noir de Kerr

On rappelle que la métrique de Kerr en coordonnées de Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ) est donnée par l'élément de ligne suivant :

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = -\left(1 - \frac{2mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \frac{4amr \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2mr \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (\text{D.1})$$

Soit \mathcal{H} l'horizon des événements situé en $r = r_+$, et qui possède comme topologie un *cylindre temps* \times *surface* $\mathcal{H} \cong \mathbb{R} \times \mathcal{L}$, où \mathcal{L} est une variété de dimension 2. Dès lors, l'aire de \mathcal{H} est donnée par l'intégrale suivante :

$$\mathcal{A}_{\mathcal{H}} = \int_{\mathcal{L}} \sqrt{\det\{q_{\mu\nu}\}} dx^2 dx^3$$

avec $q := g|_{\mathcal{L}}$, la métrique restreinte sur \mathcal{L} .

Pour un trou noir de Kerr, la métrique q est obtenue en utilisant $r = r_+$, $dr = 0$ et $dt = 0$:

$$q_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \Sigma_+ d\theta^2 + \left(r_+^2 + a^2 + \frac{2a^2mr_+ \sin^2 \theta}{\Sigma_+}\right) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (\text{D.2})$$

Son déterminant vaut :

$$\begin{aligned} \det\{q_{\mu\nu}\} &= \begin{vmatrix} \Sigma_+ & 0 \\ 0 & \left(r_+^2 + a^2 + \frac{2a^2mr_+ \sin^2 \theta}{\Sigma_+}\right) \sin^2 \theta \end{vmatrix} \\ &= \Sigma_+ \left(r_+^2 + a^2 + \frac{2a^2mr_+ \sin^2 \theta}{\Sigma_+}\right) \sin^2 \theta \\ &= 4m^2 (2mr_+ - a^2) \sin^2 \theta \\ &= 4m^2 r_+^2 \sin^2 \theta \end{aligned}$$

L'intégration est alors triviale et amène au résultat suivant :

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_{\mathcal{H}} &= \int_{\mathcal{L}} \sqrt{\det\{q_{\mu\nu}\}} dx^2 dx^3 \\ &= \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} d\phi 2mr_+ \sin \theta \\ &= \int_0^\pi d\theta 4\pi mr_+ \sin \theta \\ &= 8\pi mr_+ \end{aligned} \quad (\text{D.3})$$