

École polytechnique de Louvain

Modélisation numérique de l'écoulement à travers et sur une digue

Auteur : **Nathan DELPIERRE**
Promoteurs : **Hadrien RATTEZ, Sandra SOARES-FRAZÃO**
Lecteurs : **Robin MEURICE, Sébastien LAMBOT**
Année académique 2021–2022
Master [120] : ingénieur civil des constructions

Remerciements

Un travail de fin d'études est un exercice de soliste mais pas de solitaire. C'est pourquoi je tiens à remercier l'ensemble des personnes qui ont contribué à ce travail.

En premier lieu mes professeurs, Sandra Soares-Frazão et Hadrien Rattez qui ont toujours su me motiver en évoquant de nouvelles pistes à explorer. Leur expérience et leurs connaissances dans leurs domaines respectifs ont été un atout de taille, leurs conseils, un avantage considérable. Je les remercie également pour leur disponibilité exceptionnelle.

Ensuite je tiens à remercier Robin Meurice pour avoir accepté d'être lecteur de ce travail mais aussi pour son aide précieuse, sa disponibilité et ses conseils avisés.

Merci au Professeur Sébastien Lambot pour avoir accepté d'être lecteur de ce travail.

Merci à ma grand-mère, Monique Lemal, professeur de Mathématiques pour les relectures de ce travail et pour m'avoir inculqué le goût de la rigueur lorsque j'étais encore un adolescent distrait et turbulent.

Merci à Marie-Thérèse Schellekens pour son soutien de tous les jours et pour les relectures.

Enfin je souhaite remercier mes parents qui m'ont toujours soutenu au cours de mes études. Quels que soient mes choix, ils m'ont encouragé avec l'exigence nécessaire et juste.

"Et les eaux se renforcèrent extraordinairement sur la terre ; et toutes les hautes montagnes qui étaient sous tous les cieus furent couvertes"— Genèse 7 :19

Table des matières

Symboles	11
Introduction	15
I Ecoulements en milieu poreux	19
1 Milieu poreux	21
1.1 Définition et caractérisation d'un milieu poreux	21
1.2 Charge hydraulique	24
1.3 Hydrodynamique : équation de Darcy	24
2 Equation de Richards	27
2.1 Formulations de l'équation de Richards	27
2.2 Dérivation de l'équation de Richards	28
2.2.1 Equation de Darcy-Buckingham	28
2.2.2 Conservation de la masse	28
2.3 Cas particulier : équation de Richards en milieu saturé	29
2.4 Equations de fermeture : Modèle de Mualem-van Genuchten	30
2.4.1 Courbe de rétention d'eau dans le sol	30
2.4.2 Degré de saturation équivalent : S_e	34
2.4.3 Conductivité hydraulique : K	35
2.4.4 Capacité hydraulique : C	35
2.5 Comportement hystérétique des milieux non-saturés	36
2.5.1 Prise en compte de l'hystérèse dans les modèles	37
3 Calcul des contraintes	41
3.1 Estimation du poids volumique	41
3.2 Contraintes verticales totales	41
3.3 Contraintes effectives	42

TABLE DES MATIÈRES

3.3.1	Contrainte effective dans les sols saturés	43
3.3.2	Contrainte effective dans les sols non saturés	43
3.4	Critère de Mohr-Coulomb modifié	44
4	Résolution numérique de l'équation de Richards	47
4.1	Schéma de résolution 1D	48
4.1.1	Schéma de résolution 1D explicite	49
4.1.2	Schéma de résolution 1D implicite	49
4.1.3	Algorithme de résolution	51
4.1.4	Conditions limites	52
4.1.5	Cas tests	53
4.1.6	Conclusions sur la résolution numérique de l'équation de Richards 1D	58
4.2	Méthode de Godunov	59
4.2.1	Résultats et cas tests en 2D	60
4.2.2	Limites de la méthode de Godunov	63
4.3	Méthode des volumes finis sur un maillage non structuré	64
4.3.1	Formulation des volumes finis	64
4.3.2	Conditions frontières	67
4.3.3	Validation avec les cas tests précédents	70
4.3.4	Description de la géométrie de la digue réelle	72
4.3.5	Bassin de retenue	73
4.3.6	Couplage sol-atmosphère	75
4.3.7	Etude de l'influence de la taille du maillage	78
4.3.8	Etude de l'influence du pas de temps	81
4.3.9	Etude de l'influence de la saturation initiale	83
4.3.10	Remplissage et vidange d'un bassin le long de la digue	84
4.3.11	Influence de la conductivité	85
4.3.12	Calcul des vitesses	89
4.3.13	Calcul des contraintes : cas tests	93
4.4	Hystérèse dans le modèle	98
4.4.1	Evolution selon la courbe de séchage	98
4.4.2	Sans prise en compte de l'hystérèse : Wetting curve	100
4.4.3	Prise en compte de l'hystérèse	103
4.5	Limites du code et problèmes généraux de convergence	108
4.5.1	Non-convergence du problème de Richards	108
4.5.2	Problèmes de convergence dans le code créé	109

II	Ecoulements à surface libre	111
1	Equations de Saint-Venant	113
1.1	Hypothèses	113
1.2	Conservation de la masse	114
1.3	Conservation de la quantité de mouvement	114
1.4	Système d'équations de Saint-Venant	118
1.5	Vitesse finie de propagation de l'information	118
2	Résolution des équations de Saint-Venant	123
2.1	Schéma de résolution des volumes finis	123
2.2	Calcul des flux aux interfaces.	124
2.3	Conditions frontières	126
2.3.1	Condition transmissive	126
2.3.2	Condition de mur	127
2.3.3	Débit imposé à l'amont	127
2.4	Astuces numériques	127
2.4.1	Choix du pas de temps	127
2.4.2	Pente de fond raide	128
2.4.3	Prise en compte du frottement	128
2.5	Cas test	129
2.5.1	Rupture de barrage	129
2.5.2	Submersion de digue par rupture de barrage	131
III	Couplage des modèles	137
1	Algorithme et implémentation du couplage	139
1.1	Etat de l'art	139
1.2	Algorithme utilisé	140
1.3	Résultats sans prise en compte de l'infiltration.	141
1.3.1	Cas test Réservoir :	141
1.3.2	Surverse de la digue sèche.	143
1.3.3	Surverse d'une digue proche de la saturation.	146
1.4	Résultats en tenant compte de l'infiltration	147
1.4.1	Calcul des flux infiltrés : domaine de Richards	147
1.4.2	Calcul des flux infiltrés : domaine de Saint-Venant	148
1.4.3	Cas test d'infiltration	148
1.4.4	Réservoir sans mouvement	152
1.4.5	Surverse de digue sèche.	154

TABLE DES MATIÈRES

1.4.6	Surverse de digue proche de la saturation.	155
1.4.7	Conclusion sur la prise en compte de l'infiltration.	156
Conclusion		161
Bibliographie		165
A Equations de Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes		169
B GMSH		173

Symboles

V	Volume de sol [m ³]
V_v	Volume des vides [m ³]
V_w	Volume d'eau [m ³]
V_a	Volume d'air [m ³]
V_s	Volume des grains [m ³]
θ	Teneur en eau volumétrique [/]
θ_s	Teneur en eau volumétrique en saturation [/]
θ_r	Teneur en eau volumétrique résiduelle [/]
ϕ	Porosité [/]
S_r	Degré de saturation [/]
k	Perméabilité [m ²]
K	Conductivité hydraulique [m/s]
ρ	Masse volumique [kg/m ³]
γ	Poids volumique [N/m ³]
g	Accélération gravitationnelle [m/s ²]
μ	Viscosité dynamique [Pa.s]
H	Charge hydraulique [m]
v	vitesse [m/s]
z	Position verticale [m]
u_w	Pression interstitielle [Pa]
h	Pression interstitielle [m]
q	Vitesse de Darcy [m/s]
C	Capacité hydraulique [1/m]
D	Diffusivité hydraulique [m ² /s]
α	Paramètre lié à la pression d'entrée d'air [1/m]
η	Paramètre lié à la distribution des pores [/]
S_e	Teneur en eau relative [/]
n	Indice représentant le pas de temps [/]
m	Indice représentant le pas d'itération [/]

δ	Critère de convergence [m]
Ω	Domaine bidimensionnel de calcul [/]
$\partial\Omega$	Frontière du domaine de calcul [/]
Γ_D	Frontière avec une condition de Dirichlet [/]
Γ_N	Frontière avec une condition de Neumann [/]
z_w	Niveau d'eau par rapport au niveau de référence [m]
z_b	Niveau du lit par rapport au niveau de référence [m]
h	Hauteur d'eau dans le système de Saint-Venant [m]
V	Vitesse de l'eau dans le système de Saint-Venant [m/s]
Q	Débit dans le système de Saint-Venant [m ³ /s]
A	Aire mouillée de la section du canal [m ²]
P	Périmètre mouillé de la section du canal [m]
R	Rayon hydraulique du canal [m]
S_0	Pente de fond du canal [/]
S_f	Pente de la ligne de charge [/]
τ	Contrainte de cisaillement [Pa]
β	Coefficient de Boussinesq [/]
$\mathbf{U}$	Vecteur des variables conservées dans le système de Saint-Venant [/]
$\mathbf{F}$	Vecteur des flux dans le système de Saint-Venant [/]
$\mathbf{S}$	Vecteur des termes sources dans le système de Saint-Venant [/]
c	Vitesse de propagation d'une perturbation [m/s]
Fr	Nombre de Froude [/]
CFL	Nombre de Courant-Friedrich-Levy [/]
n	Coefficient de Manning [s/m ^{1/3}]

Introduction

Les inondations affectent les sociétés humaines depuis des milliers d'années. Dès l'antiquité, les hommes ont érigé des digues, assaini les rivières et prévu des canaux de déviation pour lutter contre les inondations.

Longtemps la famine, les épidémies et les guerres ont relégué la problématique des digues au second plan. Le manque de connaissances a rendu difficile la construction sûre des digues en terre. Aux Pays-Bas, au début du 19^{ème} siècle, des efforts furent entrepris afin de standardiser la construction des digues sous l'impulsion de l'administration française (VAN BAARS et VAN KEMPEN, 2009). Malgré ces efforts, de nombreuses ruptures ont encore eu lieu, pas seulement aux Pays-Bas, mais aussi à travers le monde.

L'augmentation du nombre de phénomènes climatiques extrêmes depuis les années 60 nous pousse à requestionner les méthodes de dimensionnement et de contrôle et à imaginer de nouvelles façons de réduire les risques liés aux inondations.

De tous les phénomènes climatiques extrêmes, les inondations dominent largement en terme d'occurrence. En effet, selon un rapport du bureau des Nations unies pour la réduction des risques liés aux catastrophes (UNDRR, 2019), 44% des catastrophes naturelles entre 2000 et 2019 sont liées à des inondations soit 164 phénomènes par an. Bien que ces inondations ne soient pas le phénomène le plus meurtrier, elles sont celui touchant le plus de personnes à travers le monde. Rien qu'entre 2000 et 2019, 1.65 milliard de personnes ont été impactées par des inondations.

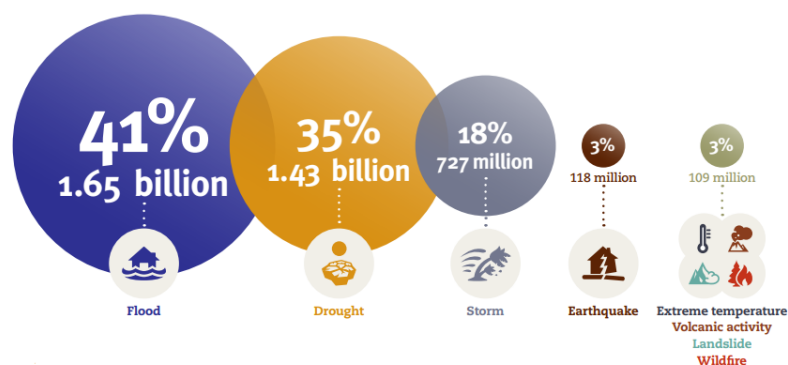


FIGURE 1 – Nombre total de personnes affectées par type de désastre entre 2000 et 2019. UNDRR, 2019.

Le continent le plus touché est l'Asie, totalisant 41% des phénomènes d'inondations à travers le monde. Cependant les récentes inondations qui ont frappé la Belgique l'été dernier

nous rappellent durement que nous devons continuer à chercher des moyens de réduire les risques, même dans nos régions.

Encore aujourd'hui les ruptures de berges ou de digues en terre sont souvent à l'origine d'inondations dont les conséquences sont importantes. Citons la récente catastrophe de Brumadinho au Brésil (2019) ayant causé la mort de 270 personnes, les inondations à la Nouvelle-Orléans en 2005 ou encore le célèbre raz-de-marée qui a causé 89 ruptures de digues, 2551 morts et 4% du territoire national inondé en une nuit aux Pays-Bas en 1953.



FIGURE 2 – Images satellite avant/après la rupture du barrage de Brumadinho, SULICH et al., 2021.

Afin d'illustrer le triple impact que peut avoir une rupture de digue en terre, prenons le cas de la rupture de Brumadinho (figure 2) en exemple :

1. L'impact humain : les pertes humaines peuvent être importantes, cette catastrophe en est la preuve, ayant coûté la vie à 270 personnes.
2. L'impact environnemental : celui-ci est extrêmement important dans ce cas. Ce barrage soutenait un bassin de retenue de déchets miniers. Sa rupture a relâché 12 millions de m^3 de terres polluées, lesquelles ont parcouru jusqu'à 300 km dans les rivières (SULICH et al., 2021).
3. L'impact économique : l'entreprise Vale, exploitant de la mine, a vu son cours chuter de 25% au lendemain de l'incident. En plus d'avoir perdu la confiance des marchés, sa production de minerai de fer a baissé de 34 % au cours de l'année 2019 et elle a dû s'affranchir d'amendes importantes envers le gouvernement brésilien (5.2 milliards USD au total) afin de réparer les dégâts sur les infrastructures, les habitations détruites ou rendues inhabitables, etc.

Que les ruptures soient dues à un défaut de conception, de construction, à un manque d'entretien ou encore à des causes naturelles (submersion, tempête, séisme, etc), leurs mécanismes sont bien identifiés :

- La rupture par surverse (Overtopping) : ce mode de rupture est la cause la plus fréquente. Celui-ci représente 34 % des ruptures constatées (FOSTER et al., 2000). Il survient lorsque l'eau déborde par dessus la digue. C'est donc un phénomène purement externe.
- La rupture suite à l'infiltration de l'eau (renardage ou piping) : cette infiltration peut être divisée en 2 catégories : le renardage à travers la digue et le renardage à travers les fondations. Ces types de rupture représentent respectivement 28 et 14 % du total des ruptures constatées. Ce mode de rupture est atteint lorsque le gradient hydraulique critique d'érosion interne est atteint. Cela crée l'érosion interne de la digue et au fil du temps un conduit se forme jusqu'à provoquer une brèche dans la digue par effondrement du conduit.
- La rupture par glissement (sliding) : ce type de rupture est plus rare, il peut se produire soit en amont soit en aval de la digue.

La figure 3 illustre ces différents modes de rupture.

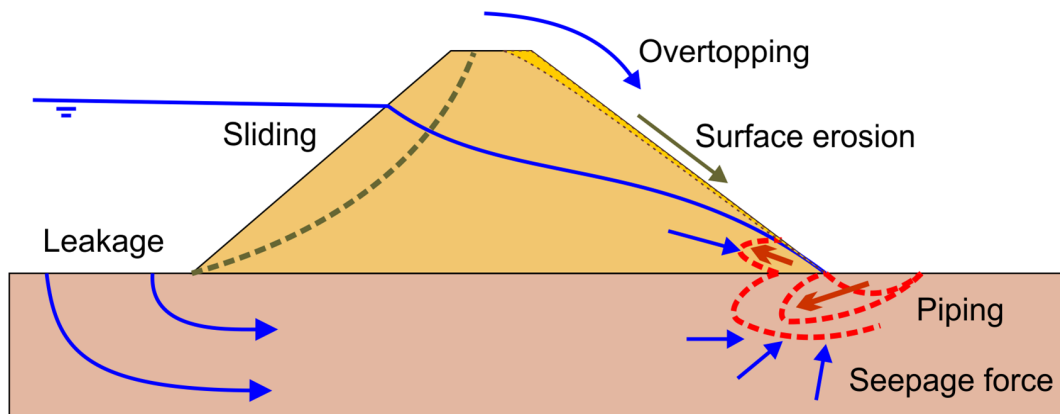


FIGURE 3 – Récapitulatif des modes de rupture.

A la différence des autres phénomènes climatiques, les dégâts causés par les inondations peuvent être réduits fortement si la conception d'un système global et intégré à l'échelle de région entière est bien réalisée. Cette approche nécessite une cohérence des pouvoirs publics au niveau de l'urbanisme et une administration capable de mettre en place l'entretien régulier et la surveillance des infrastructures.

Au niveau des digues, cela peut se traduire par une exigence supérieure au niveau de la qualité de la construction. De même, lorsque la digue est en fonction, l'entretien et la sur-

veillance des paramètres de celle-ci sont cruciaux. Ces surveillances peuvent être simplement visuelles ou beaucoup plus élaborées. Ces dernières années, nous avons assisté au développement de l'utilisation massive de données collectées à grande échelle à l'aide de capteurs, de drones, d'imagerie infrarouge. Toute cette technologie permet de détecter les zones de faiblesse, les cavités ou encore les zones d'écoulements internes dans la digue.

En plus de ces développements, de nombreux modèles numériques ont été développés afin d'améliorer le dimensionnement des digues mais également de permettre de mieux évaluer les risques sur les digues déjà en fonction. En général, ces modèles ne prennent compte que d'un seul aspect à la fois. Soit ils décrivent l'écoulement de surverse soit l'écoulement interne. La prise en compte des deux phénomènes de façon combinée est peu fréquente.

L'objectif de ce travail est de réaliser un modèle numérique permettant de prendre en compte à la fois les écoulements sur et à travers la digue. Ce travail s'articulera donc autour des ces 2 types d'écoulements :

1. L'écoulement interne : ce type d'écoulement est décrit par l'équation de Richards. Nous commencerons par décrire les caractéristiques d'un sol poreux non-saturé. Ensuite nous aborderons en détail l'équation de Richards et pour finir nous développerons un modèle robuste permettant de résoudre cette équation en 2 dimensions pour n'importe quelle géométrie de digue.
2. L'écoulement externe : ce type d'écoulement est décrit par les équations de Saint-Venant. Nous développerons un modèle qui permettra donc de décrire le flux de surverse sur la digue.

Comme nous l'avons vu, ces deux types d'écoulements sont les plus critiques par rapport à la stabilité des digues. Dès lors nous développerons également un modèle réalisant le couplage direct entre les 2 domaines. Ce couplage permettra de prendre en compte l'interaction entre ces 2 écoulements. Nous verrons que ce modèle est précis et robuste et que le couplage effectué est conservatif au niveau de la masse.

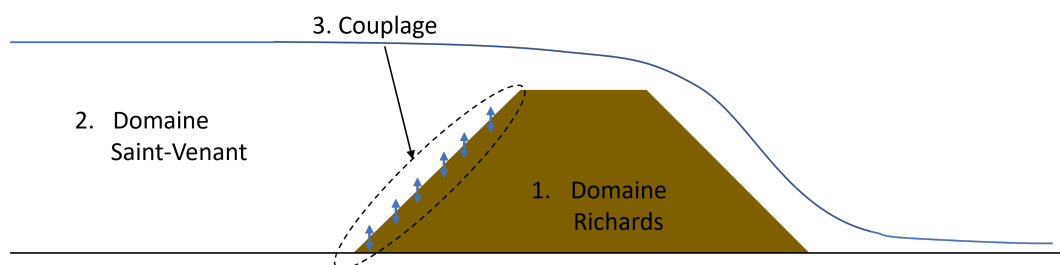


FIGURE 4 – Etapes du travail, types d'écoulement.

Première partie

Ecoulements en milieu poreux

Chapitre 1

Milieu poreux

Nous présenterons dans ce chapitre les notions qui sont nécessaires à la compréhension de la suite de cette première partie. Nous décrirons le concept de milieu poreux. Ensuite, nous aborderons les propriétés de ce type de milieu ainsi que le principe de charge hydraulique, moteur de l'écoulement. Enfin nous terminerons par aborder la loi de Darcy, décrivant le transfert d'eau en milieu saturé.

1.1 Définition et caractérisation d'un milieu poreux

Un milieu poreux est caractérisé par la présence d'une matrice solide constituée de grains dont la distribution permet la présence de pores. Ces pores sont des vides pouvant être remplis par un mélange d'eau et d'air.

Dans le cadre de ce travail, le milieu poreux est le sol.

Soit V , un volume quelconque de sol. Ce volume est occupé par V_s , le volume des particules solides, V_w le volume d'eau et V_a le volume occupé par l'air. Par conséquent, nous pouvons écrire :

$$V = V_v + V_s = V_a + V_w + V_s \quad (1.1)$$

Où V_v est le volume des vides, défini comme la somme du volume d'eau et d'air.

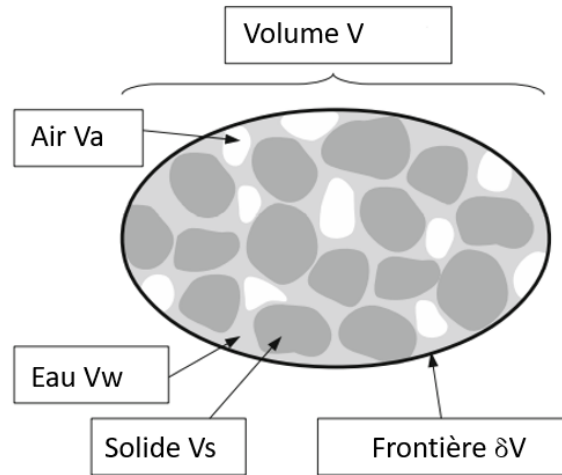


FIGURE 1.1 – Milieu poreux, Szymkiewicz (2013)

On peut établir un certain nombre de relations visant à décrire ce volume.

L'ensemble de ces quantités sont exprimées à l'échelle dite de Darcy, c'est à dire là où la loi de Darcy s'applique aisément. Cette échelle est nommée de cette façon par Szymkiewicz (2013) par opposition à l'échelle des pores où les équations de Navier-Stokes seraient plus à même de décrire l'écoulement.

A l'échelle de Darcy, un même point peut être occupé par les 3 phases. Par conséquent ce point est défini par des concepts de fractions de volume ou encore de saturation.

- $\theta []$: la teneur en eau volumétrique. Elle est définie par un rapport entre le volume d'eau et le volume total contenu dans l'échantillon.

$$\theta = \frac{V_w}{V} \quad (1.2)$$

Cette définition ne doit pas être confondue avec la définition classique de la teneur en eau en mécanique des sols :

$$w = \frac{W_w}{W_s} \quad (1.3)$$

Où W_w est le poids de l'eau et W_s le poids des grains.

Certaines valeurs de θ peuvent être considérées comme caractéristiques. Retenons en particulier la teneur en eau saturée (représentant la teneur en eau volumétrique maximale) notée θ_s et la teneur en eau résiduelle notée θ_r (qui est la teneur en eau minimale dans le sol).

En fonction du type de sol, θ_s sera compris entre 20 et 50% alors que θ_r sera compris entre 0.1 et 10%.

- ϕ [/] : la porosité définit le rapport entre le volume des vides et le volume total.

$$\phi = \frac{V_v}{V} \quad (1.4)$$

- S_r [/] : le degré de saturation en eau s'exprime comme le rapport entre le volume d'eau et le volume des vides, ou encore comme le rapport entre la teneur en eau volumétrique et la porosité :

$$S_r = \frac{V_w}{V_v} = \frac{\theta}{\phi} \quad (1.5)$$

Le degré de saturation d'un sol saturé est de 1 car l'eau occupe l'entièreté du volume des vides.

- $k[m^2]$: la perméabilité est la capacité d'un milieu poreux à se laisser traverser par un fluide sous l'effet d'un gradient de pression. L'ordre de grandeur se situe entre 10^{-7} pour des graves et 10^{-20} pour de l'argile.
- $K[m/s]$: la conductivité hydraulique exprime également la capacité d'un milieu poreux à laisser passer un fluide sous l'effet d'un gradient de pression. Cette grandeur dépend à la fois des propriétés du milieu mais également de celles du fluide. La relation suivante exprime K en fonction de ces paramètres :

$$K = \frac{k\rho g}{\mu} \quad (1.6)$$

Où ρ est la masse volumique du fluide [kg/m^3] (l'eau dans notre cas), g la pesanteur [m/s^2] et μ la viscosité dynamique du fluide [$Pa.s$].

k (m/s)	Type de matériaux	Niveau de perméabilité
$1 > k > 10^{-2}$	Graviers sans éléments fins	Très perméable
$10^{-2} > k > 10^{-4}$	Sables grossiers, graviers sableux sans éléments fins	Perméable
$10^{-4} > k > 10^{-6}$	Sables moyens à fins, limons peu argileux, loess	Peu perméables
$10^{-6} > k > 10^{-8}$	Sables argileux, roche altérée à fracturée	Très peu perméables
$k < 10^{-8}$	Argiles homogènes, roche non fracturée	Quasi imperméable

FIGURE 1.2 – Exemples d'ordre de grandeur de conductivité hydraulique

1.2 Charge hydraulique

La charge hydraulique constitue le moteur de l'écoulement. C'est une grandeur qui représente l'énergie mécanique de l'eau. Elle s'exprime en mètres et est la somme de l'énergie cinétique, de l'énergie potentielle et du travail réalisé par les forces de pression.

L'expression de la charge découle de l'équation de Bernoulli qui exprime que la charge totale est constante le long d'une ligne de courant et sous les hypothèses suivantes :

- Fluide incompressible : masse volumique constante
- Mouvement irrotationnel : écoulement non-tourbillonnaire
- Fluide parfait : effets visqueux négligeables, pas de pertes de charge par frottement

La charge hydraulique totale s'exprime alors comme :

$$H = \frac{v^2}{2g} + z + \frac{u_w}{\rho g} \quad (1.7)$$

Où v est la vitesse du fluide [m/s], ρ la masse volumique [kg/m^3], z l'altitude du point considéré [m] par rapport à un niveau de référence et u_w la pression d'eau interstitielle [Pa]. Le premier terme de cette expression représente donc l'énergie cinétique, le second l'énergie potentielle de pesanteur et le dernier le travail des forces de pressions.

Dans un sol, nous pouvons considérer que la vitesse de l'eau est négligeable pour calculer la charge. Par conséquent, la charge hydraulique peut simplement s'écrire de la façon suivante :

$$H = z + h \quad (1.8)$$

Où $h = \frac{u_w}{\rho g}$ est la pression interstitielle en m.

La pression peut être de 2 types. Soit le sol est saturé, auquel cas la pression est hydrostatique : l'eau en un point est soumise au poids de la colonne d'eau qui la surmonte. Ce type de pression est considéré positif dans ce travail.

A l'inverse, lorsque le sol n'est pas saturé il faut tenir compte des effets de capillarité et d'adsorption. En effet, dès lors que le sol n'est plus saturé, des forces de tension superficielle apparaissent aux interfaces air-eau, eau-grain (BRUAND et COQUET, 2005). Dans ce cas, le signe de la pression est négatif.

1.3 Hydrodynamique : équation de Darcy

L'eau s'écoulant dans un sol suit une trajectoire tortueuse guidée par le réseau de pores qui constituent le sol. L'aptitude qu'a un sol à se laisser traverser par un sol dépend des différents paramètres que nous avons décrits précédemment.

Darcy a décrit, dans son célèbre article de 1856 (DARCY, 1856), une loi expérimentale liant la vitesse d'écoulement de l'eau dans un sol saturé à la conductivité hydraulique et au gradient de charge hydraulique.

Le gradient hydraulique correspond au quotient de la différence de charge hydraulique entre 2 points et de la distance qui les sépare :

$$i = \frac{\Delta H}{L} \quad (1.9)$$

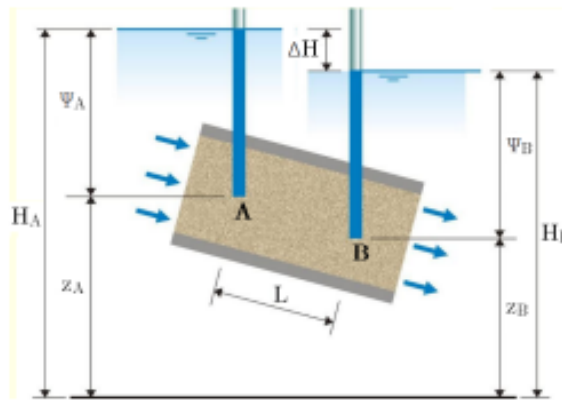


FIGURE 1.3 – Ecoulement entre 2 points dans un milieu saturé, THIMUS, 2007

La loi de Darcy exprime donc la vitesse de la façon suivante :

$$q = K \frac{\Delta H}{L} [m/s] \quad (1.10)$$

Où K correspond à la conductivité hydraulique décrite précédemment. Cette vitesse correspond à une vitesse de percolation apparente à travers le sol.

La distance L indique qu'une direction d'écoulement a été choisie de façon bien définie. Dans le cas d'un sol isotrope, nous pouvons réécrire l'équation de Darcy sous sa forme généralisée :

$$\mathbf{q} = -K \nabla H \quad (1.11)$$

Cette équation reste valable si les hypothèses suivantes sont respectées :

- Le milieu est complètement saturé.
- Le sol est relativement homogène.
- L'écoulement est laminaire.
- Les grains doivent être assez fins. Lorsque ceux-ci sont trop grossiers, la vitesse de l'eau peut être élevée, rendant le flux turbulent.

Chapitre 2

Equation de Richards

L'équation de Richards est une équation aux dérivées partielles non-linéaire décrivant le transfert de l'eau dans les sols non saturés en conditions non permanentes. Cette équation fut obtenue par Richards en 1931 et repose sur la combinaison de l'équation de continuité et l'équation de Darcy.

Cette équation, nous le verrons, décrit comment l'évolution des flux dans le sol modifie sa teneur en eau au cours du temps.

2.1 Formulations de l'équation de Richards

La formulation classique de l'équation de Richards est la suivante :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [\mathbf{K}(h) \nabla (h + z)] \quad (2.1)$$

Où θ est la teneur en eau telle que définie à l'équation (1.2), $\mathbf{K}(h)$ la conductivité hydraulique, h la pression exprimée en [m] et z la coordonnée verticale.

Cette formulation est généralement nommée "Formulation mixte" car elle inclut explicitement θ et h .

Il est également possible d'écrire cette équation sous forme de pression, c'est-à-dire uniquement en fonction de h :

$$C(h) \frac{\partial h}{\partial t} = \nabla \cdot [\mathbf{K}(h) \nabla (h + z)] \quad (2.2)$$

Où le terme $\mathbf{C}(h)$, que nous détaillerons à la section 2.4.4, est appelé capacité hydraulique [1/m].

La troisième forme courante de l'équation de Richards est exprimée uniquement en fonction de θ :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [\mathbf{D}(\theta) \nabla \theta] + \nabla \cdot \mathbf{K}(\theta) \quad (2.3)$$

Où le terme $\mathbf{D}(\theta)$ correspond à la diffusivité [m^2/s] :

$$\mathbf{D}(\theta) = \frac{\mathbf{K}(\theta)}{\mathbf{C}(\theta)} \quad (2.4)$$

Dans un article datant de 2013 (CAVIEDES-VOULLIÈME et al.), les auteurs pointent les avantages et inconvénients de chacune des formulations :

- Formulation en fonction de θ : cette formulation a l'avantage d'être exprimée uniquement en fonction de la variable conservée. Cependant, il est impossible de résoudre cette forme en régime saturé car la capacité hydraulique vaut 0 lorsque le sol est saturé, faisant tendre la diffusivité vers l'infini.
- Formulation en pression : elle fournit des solutions continues, même en saturation.
- Formulation mixte : cette formulation combine les avantages des 2 autres : elle est à la fois conservatrice et fournit des solutions continues en régime saturé et non saturé.

2.2 Dérivation de l'équation de Richards

2.2.1 Equation de Darcy-Buckingham

L'équation de Darcy-Buckingham est une généralisation de la loi de Darcy 1.3 pour les sols non saturés.

Cette expression est très similaire à la loi de Darcy : elle exprime que le flux dans un sol non saturé est proportionnel au gradient de charge hydraulique mais aussi à la conductivité hydraulique pour les sols non saturés. A la différence de l'équation de Darcy, la conductivité hydraulique n'est pas constante mais est fonction du potentiel capillaire h de l'eau :

$$\mathbf{q} = -K(h)\nabla(z + h) \quad (2.5)$$

Cette équation est valide autant en milieu saturé qu'en milieu non-saturé. En effet, dès que le sol est saturé, la conductivité devient celle du milieu saturé.

2.2.2 Conservation de la masse

Soit un élément de sol, la conservation de la masse sur un élément peut s'écrire comme :

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = -\nabla \cdot \mathbf{q} \quad (2.6)$$

Cela signifie que la variation de teneur en eau d'un élément de sol équivaut au taux de variation des flux entrants et sortants de cet élément.

A présent, il suffit de remplacer $\mathbf{q}$ par l'équation (2.5) pour obtenir l'équation de Richards.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \nabla \cdot [\mathbf{K}(h) \nabla (h + z)] \quad (2.7)$$

2.3 Cas particulier : équation de Richards en milieu saturé

Lorsque le sol est saturé, la teneur en eau θ ne varie plus avec le temps. Dès lors, si le sol est homogène et isotrope, l'équation de Richards se réduit à l'équation suivante :

$$\nabla \cdot \nabla(H) = 0 \quad (2.8)$$

Cette équation correspond à l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial z^2} = 0 \quad (2.9)$$

La résolution de cette équation permet d'introduire le concept de ligne de courant et d'équipotentielle. Les lignes de courant sont en tout point perpendiculaires aux équipotentiels. Elles indiquent la direction du flux. De même le long des équipotentiels la charge hydraulique H est constante.

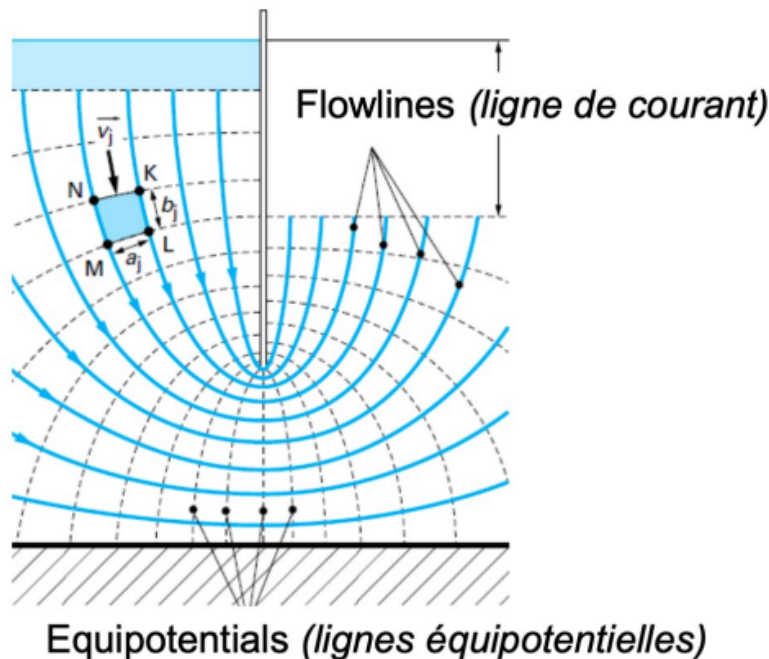


FIGURE 2.1 – Lignes de courant et équipotentiels, [LGCIV1031] RATTEZ et PACHECO DE ALMEIDA, 2022

2.4 Equations de fermeture : Modèle de Mualem-van Genuchten

Comme nous l'avons vu, l'équation de Richards est non linéaire car la conductivité hydraulique K et la teneur en eau θ dépendent directement de la pression h . Cela implique qu'il faut trouver des expressions, appelées équations de fermeture, qui permettront de résoudre l'équation.

Divers modèles décrivent les relations entre la pression de l'eau h , la teneur en eau θ ou encore la conductivité hydraulique K . Dans ce travail, nous ferons usage d'un modèle décrit par van Genuchten en 1980 à la suite d'un premier travail de Mualem en 1976. Ce modèle permet d'obtenir une relation directe entre différents paramètres du sol.

Les expressions qui y sont décrites nécessitent, en revanche, de faire usage de paramètres empiriques qui sont obtenus en étant ajustés afin de correspondre à des valeurs expérimentales. Cette détermination empirique des valeurs ne sera pas réalisée dans ce travail où nous ferons plutôt usage de valeurs classiques présentées dans divers articles.

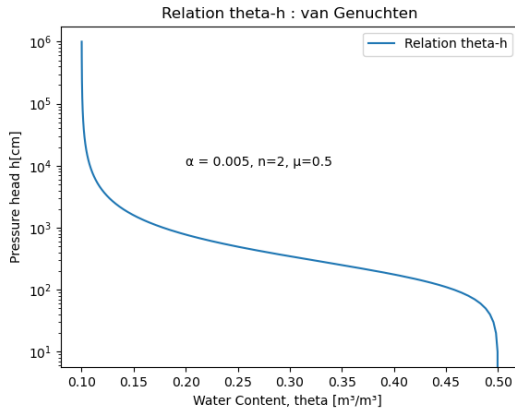
Le développement de ce modèle fait suite à la difficulté que représente la détermination de conductivité hydraulique dans le cas de sols non saturés. Là où la détermination expérimentale de la conductivité hydraulique est relativement simple dans le cas d'un sol saturé, la conductivité hydraulique dans un sol non saturé est plus difficile à déterminer car dépendante de beaucoup de facteurs. D'une part, parce que cette conductivité hydraulique est très variable dans l'espace et d'autre part, parce que sa mesure extensive est coûteuse et prend du temps.

2.4.1 Courbe de rétention d'eau dans le sol

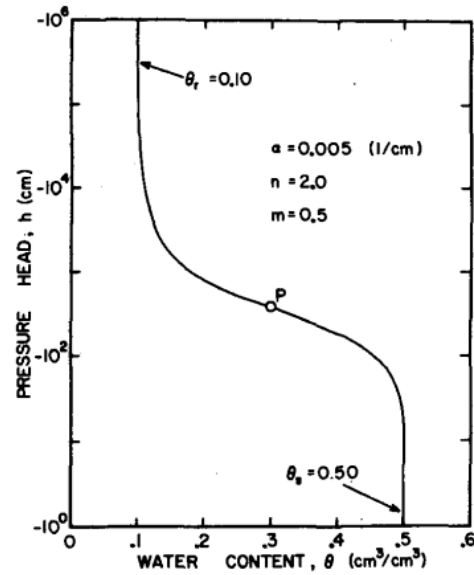
La première relation mise en avant par le modèle de van Genuchten est celle décrivant le lien entre la pression d'eau h et la teneur en eau θ . Cette relation est habituellement appelée 'soil water retention curve' ou SWRC.

Celle-ci s'avère plus précise que le modèle de Brooks et Corey (1964) dans le cas de sols non remaniés et disposant d'une distribution peu homogène de taille de grains (van GENUCHTEN, 2019).

$$\theta = \begin{cases} \frac{\theta_s - \theta_r}{(1 + (\alpha|h|)^n)^\mu} + \theta_r & \text{si } h \leq 0 \\ \theta_s & \text{si } h > 0 \end{cases} \quad (2.10)$$



(a) SWRC obtenue



(b) SWRC, van GENUCHTEN., 1980

FIGURE 2.2

Nous pouvons observer que la teneur en eau est correctement bornée à θ_s la teneur en eau de saturation et à θ_r la teneur en eau résiduelle. La teneur en eau résiduelle correspond au moment où les films d'eau sur les grains deviennent discontinus, ne laissant plus que des éléments isolés d'eau qui ne peuvent pas s'écouler à travers le sol.

Ces 2 paramètres sont déterminés de façon expérimentale et permettent donc de fixer la courbe à ses extrémités. Cependant, les mesures de teneur en eau résiduelle ne sont pas toujours réalisées et van Genuchten suggère alors plusieurs façons de faire pour la déterminer. Par exemple, il est possible de déterminer ce paramètre par extrapolation à partir de valeurs connues, en cherchant le moment où $\frac{d\theta}{dh} = 0$ ou encore en considérant que la teneur en eau à de très faibles pressions ($h = -15000$ [cm]) correspond à cette teneur en eau résiduelle.

Un autre paramètre d'intérêt est le paramètre α . Certains articles (CAVIEDES-VOULLIÈME et al., 2013 ; SOLTANI et al., 2021) suggèrent que ce paramètre est lié à la pression d'entrée d'air. Cette pression est définie (BROOKS et COREY, 1964) comme l'état de pression où l'entrée d'air (et donc l'évacuation d'eau) dans le plus gros pore devient possible au cours d'un processus de désaturation d'un sol saturé. Cette pression peut être trouvée de façon graphique en croisant l'asymptote verticale en θ_s avec la tangente à la courbe.

De façon générale, observons sur la figure 2.3 que la valeur de pression d'entrée d'air est inversement proportionnelle à la valeur du paramètre α .

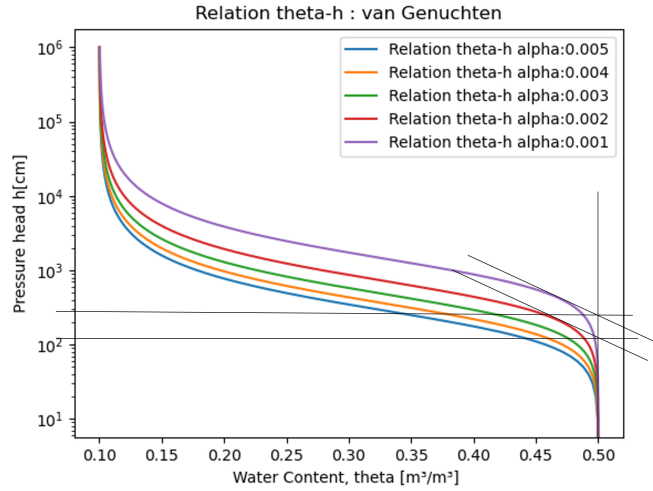


FIGURE 2.3 – Influence du terme α

Déterminer de façon précise ce paramètre α est très important dans la mesure où, comme nous pouvons le voir, il influence de façon significative la valeur de la teneur en eau pour une même pression. En d'autres mots, une mauvaise évaluation de ce paramètre conduit à une très mauvaise évaluation de la teneur en eau, laquelle est directement liée à la perméabilité relative du sol mais également à son poids ainsi qu'à sa résistance au cisaillement (SOLTANI et al., 2021).

En ce qui concerne les autres coefficients η et μ , van GENUCHTEN. (1980) propose une relation directe entre eux telle que :

$$\mu = 1 - \frac{1}{\eta} \quad (2.11)$$

CAVIEDES-VOULLIÈME et al. (2013) fixent le paramètre η à 2 et précisent que celui-ci est relatif à la distribution de taille des pores et doit être strictement supérieur à 1. Observons donc son influence sur la forme de la courbe à la figure 2.4. Notons que sur cette figure les axes pour représenter la SWRC sont inversés par rapport aux figures précédentes. Il n'existe pas de convention à ce sujet. Dès lors nous garderons cette façon de présenter pour le reste de ce travail.

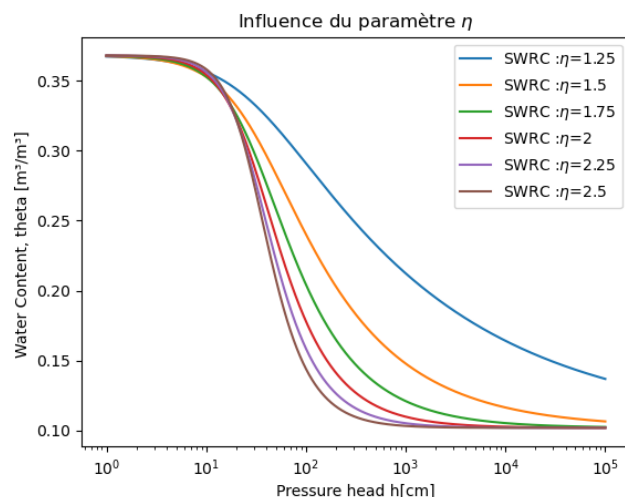


FIGURE 2.4

L'influence principale de ce paramètre se trouve au niveau de la pente de la courbe. Il influence peu la pression d'entrée d'air. Pour trouver sa valeur exacte, il faut donc l'ajuster à des courbes expérimentales.

Des expérimentations ont été réalisées afin de déterminer des valeurs caractéristiques pour plusieurs types de sols. Par exemple, CARSEL et PARRISH (1988) proposent les valeurs caractéristiques suivantes :

Texture	θ_r	θ_s	α	n	K_{sat}
			cm^{-1}		m d^{-1}
Sand	0.045	0.43	0.145	2.68	7.128
Loamy sand	0.057	0.41	0.124	2.28	3.502
Sandy loam	0.065	0.41	0.075	1.89	1.061
Loam	0.078	0.43	0.036	1.56	0.249
Silt	0.034	0.46	0.016	1.37	0.06
Silt loam	0.067	0.45	0.02	1.41	0.108
Sandy clay loam	0.1	0.39	0.059	1.48	0.314
Clay loam	0.095	0.41	0.019	1.31	0.062
Sandy clay	0.1	0.38	0.027	1.23	0.028
Silty clay	0.07	0.36	0.005	1.09	0.005
Clay	0.068	0.38	0.008	1.09	0.048

FIGURE 2.5 – Valeurs caractéristiques pour les différents paramètres.

2.4.1.1 Méthode de mesure de la SWRC

Les méthodes pour mesurer cette courbe sont nombreuses et complexes. La plupart d'entre elles ne sont valables que pour une certaine étendue de valeurs de pression. Il est à noter que dans la plupart des articles traitant de ces méthodes, il est fait état de la pression totale (ALBERS, 2015 ; KRAHN et FREDLUND, 1972).

Cette pression totale se définit comme étant la somme de la pression matricielle et de la pression osmotique. Dans le cadre d'une étude se focalisant sur le comportement géotechnique et hydraulique des digues, la pression matricielle est la variable d'intérêt.

Cette pression matricielle n'est autre que la pression due à la présence d'eau exprimée en [m]. Les valeurs prises par la pression dans les sols sont très étendues et cela est d'autant plus vrai pour les sols très fins qui se caractérisent par d'importantes forces capillaires présentes dans les petits pores (ALBERS, 2015). C'est pourquoi, pour ce genre de sol, il est nécessaire de recourir à plusieurs méthodes de mesures pour compléter la même courbe.

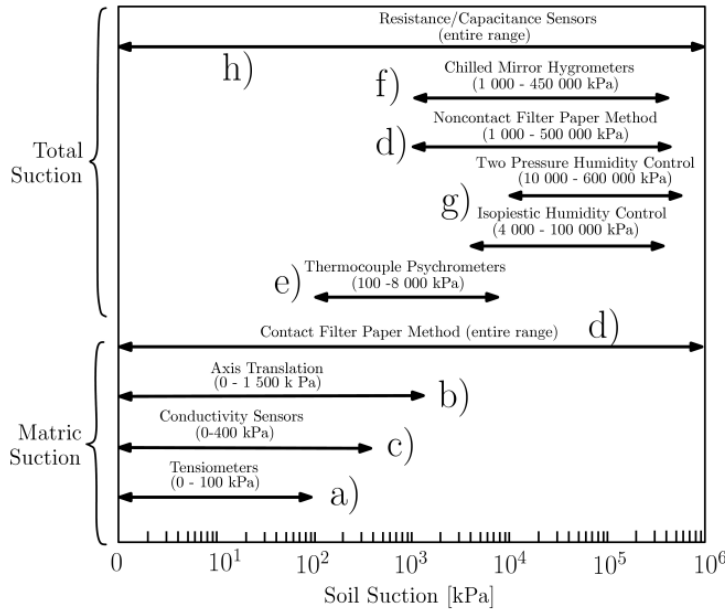


FIGURE 2.6 – Méthodes de mesure, ALBERS, 2015.

La représentation des courbes varie en fonction des articles. Certains privilégient la relation $h-\theta$ (comme dans ce travail) et d'autres préfèrent exprimer la pression en Pa et donc privilégient la relation $p_c - S_e$, où S_e est le degré de saturation équivalent.

2.4.2 Degré de saturation équivalent : S_e

Le degré de saturation équivalent dans le modèle de Mualem-van Genuchten s'exprime de la façon suivante :

$$S_e = \frac{\theta - \theta_r}{\theta_s - \theta_r} \quad (2.12)$$

Cette relation, purement linéaire, fournit des valeurs entre 0 (sol à l'état de teneur en eau résiduelle) et 1 (sol saturé).

2.4.3 Conductivité hydraulique : K

La conductivité hydraulique est un paramètre qui exprime la capacité de l'eau à circuler dans un milieu. La fonction qui le décrit doit exprimer une stricte croissance de la conductivité avec la teneur en eau. En effet, lorsque le sol se sature, le nombre de pores remplis d'eau augmente et la circulation de l'eau est facilitée. Lorsque le sol est saturé, la conductivité doit être maximale.

van Genuchten (1980) a proposé une expression de la conductivité hydraulique, liée aux divers paramètres précédemment cités :

$$K = \begin{cases} K_s S_e^{\hat{L}} \left[1 - \left(1 - S_e^{\frac{1}{\mu}} \right)^2 \right] & \text{si } h \leq 0 \\ K_s & \text{si } h > 0 \end{cases} \quad (2.13)$$

Où $\hat{L}$ est un paramètre libre qui est fixé à 0.5 (MUALEM, 1976).

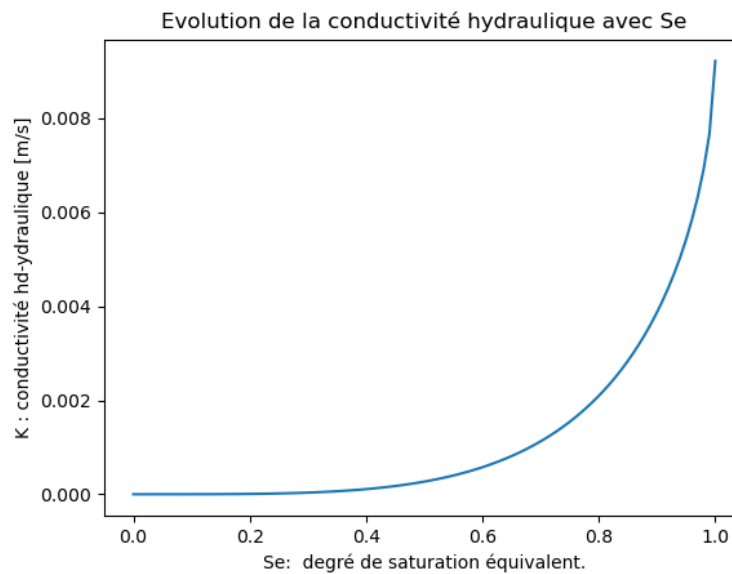


FIGURE 2.7 – Exemple de courbe de conductivité hydraulique.

2.4.4 Capacité hydraulique : C

La capacité hydraulique du sol représente la variation de la teneur en eau pour une variation de pression donnée. C'est une caractéristique importante pour représenter la capacité du

sol à stocker l'eau et qui dépend à nouveau des caractéristiques physiques du sol définies précédemment :

$$C = \begin{cases} \frac{\partial \theta}{\partial h} = -\mu \epsilon \alpha \alpha^\eta \frac{\theta_s - \theta_r}{(1 + \alpha^\eta |h|^\eta)^{\mu+1}} |h|^{\hat{\eta}} h^{-1} & \text{si } h \leq 0 \\ 0 & \text{si } h > 0 \end{cases} \quad (2.14)$$

2.5 Comportement hystérétique des milieux non-saturés

En fonction du degré de saturation initial du sol, divers comportements peuvent être observés (ALBERS, 2015; LIU et al., 2017). Si un échantillon de sol est initialement saturé et qu'on lui fait subir un processus de drainage, celui-ci suivra la courbe de séchage. De la même façon, si un échantillon est totalement sec et qu'on l'humidifie progressivement, celui-ci suivra la courbe d'humidification. Ces 2 courbes se rejoignent à leurs deux points extrêmes qui sont respectivement le point de saturation $\theta = \theta_s$ et le point de teneur en eau résiduelle $\theta = \theta_r$. En se rejoignant, ces courbes forment une hystérèse.

Ce phénomène d'hystérèse, qui implique que différentes teneurs en eau sont possibles pour une même pression, peut être dû à plusieurs effets. (ALBERS, 2015; WU et al., 2011).

- Effet "Ink Bottle" : cet effet résulte de la forme des pores qui sont une suite d'élargissements et de rétrécissements. Cela implique qu'en divers endroits, les ménisques formés par l'eau contre les parois ont la même courbure et donc la même pression capillaire pour des teneurs en eau différentes.

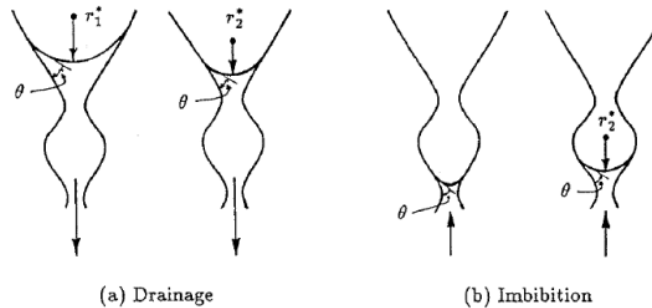


FIGURE 2.8 – Illustration de l'effet "Ink bottle", Albers 2015.

- L'effet goutte d'eau : l'angle de contact avec les parois est plus élevé lorsque l'eau progresse dans les pores que lorsqu'elle se retire. Ce phénomène est dû aux impuretés, à la rugosité ou en règle générale à la variabilité de l'état de surface des parois.

- Différents volumes d'air sont capturés par le sol en fonction de l'évolution à la hausse (séchage) ou à la baisse (mouillage) de la contrainte de succion.

Comme nous l'avons constaté, cet effet d'hystérèse n'est pas pris en compte dans la relation de van Genuchten 2.4. La plupart des modèles ne prennent pas ce phénomène en compte du fait de sa complexité. En règle générale, la courbe de séchage est utilisée seule car celle-ci est plus simple à mesurer et elle fournit des résultats plus conservateurs dans la mesure où pour une même pression, elle donne une teneur en eau plus élevée que la courbe d'humidification (TSAI, 2011).

L'influence de cet effet peut être critique. Une mauvaise prise en compte des 2 courbes entraîne une mauvaise estimation des teneurs en eau qui influencent le poids volumique du sol, sa résistance au cisaillement et par conséquent fausse les calculs de stabilité de sols.

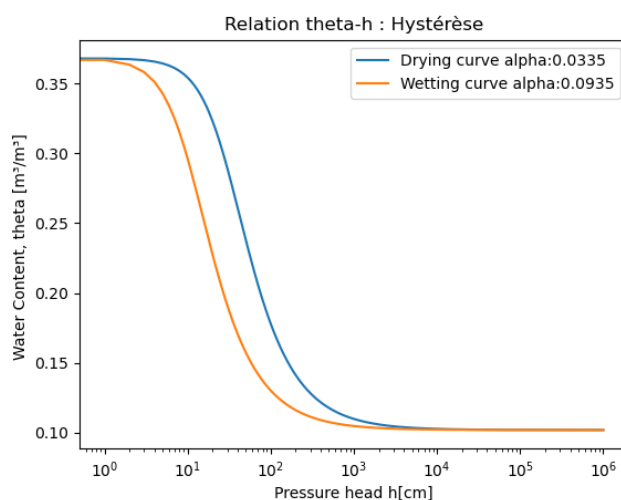


FIGURE 2.9 – Exemple d'effet d'hystérèse.

2.5.1 Prise en compte de l'hystérèse dans les modèles

La prise en compte de l'hystérèse dans les modèles se fait généralement en modulant le paramètre α . Comme nous l'avons vu précédemment, ce paramètre a un impact sur la pression d'entrée d'air et c'est cette pression qui représente la différence entre un sol en cours d'humidification et un sol en cours de séchage.

Dans une conférence donnée en 2019, van Genuchten formule que, selon lui, le rapport entre les paramètres α de chaque courbe peut être estimé dans la majorité des cas comme :

$$\frac{\alpha_{wetting}}{\alpha_{drying}} \geq 2 \quad (2.15)$$

Puisque la tendance au séchage ou au mouillage d'un sol peut changer au cours du temps, la prise en compte de l'hystérèse nécessite l'utilisation de courbes reliant la courbe d'humidification et celle de drainage.

Celles-ci sont appelées "scanning curves" dans la littérature (LIU et al., 2017 ; JAYNES, 1984). En effet, au cours du temps, un sol peut initialement subir un séchage et puis soudainement, subir une réhumidification. Afin d'obtenir le comportement le plus réaliste possible, il faut alors trouver un moyen de faire le passage entre l'une et l'autre courbe. Dans son article de 1984, JAYNES a comparé 4 méthodes différentes pour prendre en compte les scanning curves dans l'hystérèse : méthode linéaire, exponentielle, basée sur la pente de la courbe caractéristique, etc. Il a mis en évidence que pour un sol non saturé dont les courbes caractéristiques forment une hystérèse, les résultats obtenus avec chaque méthode sont sensiblement identiques. En particulier, l'algorithme tenant compte d'une scanning curve linéaire apparaît comme un bon choix au vu de sa simplicité de formulation et d'application.

L'implémentation de la scanning curve linéaire consiste donc à imposer une évolution linéaire entre les 2 courbes lorsque, par exemple, un sol en cours de séchage subit une réhumidification. Le passage d'une courbe à l'autre se fait en suivant une droite dont la pente κ est déterminée de façon empirique si possible.

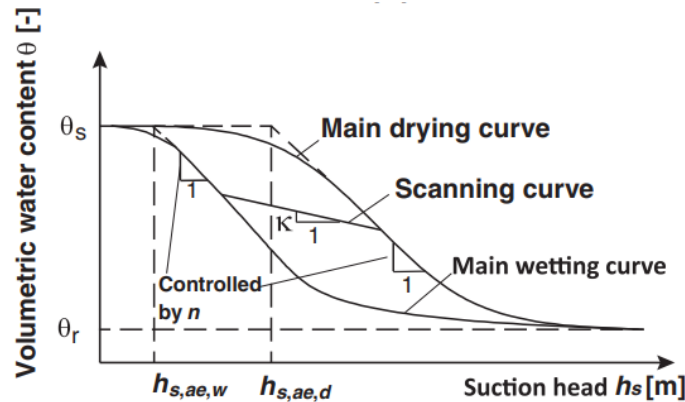


FIGURE 2.10 – Scanning curve linéaire, LIU et al., 2017

Dans le cas où l'échantillon de sol est en cours de séchage et subit une réhumidification, son état correspond à une entrée sur la scanning curve.

2 Equation de Richards

Dans ce cas, la condition de sortie de la scanning curve est la suivante :

$$\theta_{wetting}(h) > \theta_{scanning}(h) \quad (2.16)$$

Dans le cas d'un sol en cours d'humidification subissant un séchage soudain, la condition s'inverse :

$$\theta_{drying}(h) < \theta_{scanning}(h) \quad (2.17)$$

Cet algorithme est simple à utiliser dans le cas d'un échantillon de sol unique. Cependant, Jaynes (1984) ne l'a pas mis à l'épreuve dans une simulation plus complète qui ferait intervenir plus qu'une seule cellule de sol.

Considérons donc un sol avec les propriétés suivantes :

θ_s [/]	θ_r [/]	α_{drying} [1/cm]	$\alpha_{wetting}$ [1/cm]	κ [/]
0.368	0.102	0.0335	0.0935	0.00006

TABLE 2.1 – Propriétés du sol utilisé.

Le comportement obtenu avec la scanning curve linéaire est testé pour différents cas :

- Un séchage suivi d'un mouillage d'un même sol est réalisé. Cela permet de mettre en évidence le passage d'une courbe de l'hystérèse à l'autre en faisant usage de la scanning curve linéaire.

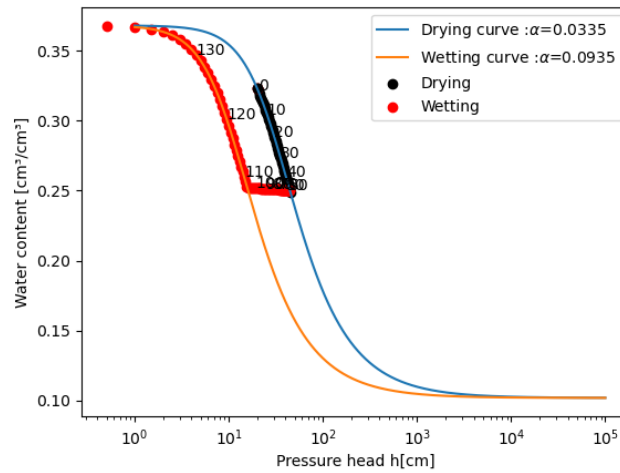


FIGURE 2.11 – Séchage suivi d'un mouillage.

- De la même façon, nous pouvons mouiller un sol et ensuite le sécher. Le passage d'une courbe à l'autre est également fait via la scanning curve.

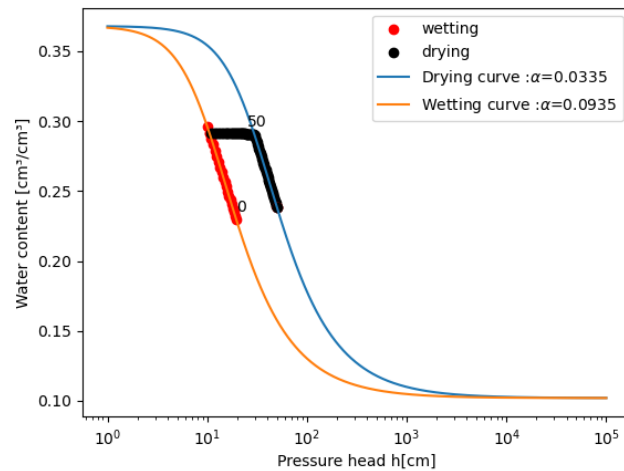


FIGURE 2.12 – Mouillage suivi d'un séchage.

L'utilisation de la scanning curve linéaire est donc assez simple pour décrire l'évolution de l'état (θ, h) d'un sol au comportement hystérétique.

Chapitre 3

Calcul des contraintes

Dans cette section, nous verrons comment obtenir le poids volumique d'un sol en fonction de sa teneur en eau et nous définirons, dans une optique de première approche, une façon de calculer les contraintes verticales. Nous verrons également quelle est l'influence du degré de saturation du sol sur le critère de Mohr-Coulomb.

3.1 Estimation du poids volumique

Le poids volumique d'un sol est fonction de la teneur en eau θ . Par conséquent, celui-ci évolue au fil des variations de teneur en eau du sol. Dans un article de 2017, LIU et al. propose l'expression suivante pour relier le poids volumique du sol à sa teneur en eau :

$$\gamma = [(1 - \theta_s) \rho_w G_s + \rho_w \theta] g \quad (3.1)$$

Où G_s est la densité relative des grains pouvant être considérée égale à 2.6, et g la gravité.

3.2 Contraintes verticales totales

Le calcul des contraintes nécessite de résoudre l'équation d'équilibre de la mécanique :

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} = 0 \quad (3.2)$$

Où $\boldsymbol{\sigma}$ est le tenseur des contraintes et $\mathbf{g}$ le vecteur gravitationnel.

Cette équation est complétée par des lois de comportements qui régissent les relations contraintes-déplacements du sol. Ce problème doit être complété par des conditions frontières, pouvant être des déplacements imposés ou des contraintes, et également par des conditions initiales.

La méthode des éléments finis est souvent utilisée pour résoudre ce problème, mais celle-ci

ne sera pas implémentée dans le cadre de ce travail.

En revanche, il est possible d'estimer les contraintes verticales totales, sans résoudre les équations de la mécanique, de la façon suivante :

$$\sigma_v = \gamma_{up} h_{sol} \quad (3.3)$$

où γ_{up} correspond au poids volumique moyen de la colonne de sol située au dessus du point considéré et h_{sol} correspond à la hauteur de cette colonne.

3.3 Contraintes effectives

Les contraintes effectives sont une combinaison entre les contraintes externes appliquées sur le sol et les pressions internes causées par la présence de fluides (NUTH et LALOU, 2008) . Le concept de contrainte effective fut introduit en premier lieu par Terzaghi en 1936 (TERZAGHI, 1936). Dans son article, celui-ci énonce que les contraintes principales dans un sol saturé sont composées de 2 parties. D'une part la contrainte neutre, qui est due à l'eau et qui agit dans toutes les directions, d'autre part les contraintes qui s'appliquent réellement aux particules de sol :

$$\sigma = \sigma' + u \quad (3.4)$$

La contrainte effective peut également être définie comme celle qui induit la déformation du sol (NUTH et LALOU, 2008).

Toutefois, la définition de la contrainte effective porte à débat. En effet, la première définition (3.4) n'est valable que pour les sols saturés et une nouvelle définition peut être proposée dans le cas de sols poreux non saturés :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - \sum_{\beta=1}^n \alpha_{\beta} u_{\beta} \delta_{ij} \quad (3.5)$$

Où u_{β} représente la pression interstitielle associée au fluide β , α_{β} est un facteur de proportionnalité pour ce même fluide et δ_{ij} le symbole de Kronecker valant 1 lorsque $i=j$ et 0 lorsque $i \neq j$. Observons donc que la contrainte interstitielle n'apparaît que dans le cas de contraintes normales. En effet, les fluides interstitiels ne peuvent pas reprendre le cisaillement.

Le paramètre α doit permettre de tenir compte de la part de chaque fluide dans le comportement général et c'est donc sur ce paramètre en particulier que se portent les débats. NUTH et LALOU, 2008 avancent qu'aucune formulation des contraintes effectives n'a encore prouvé être applicable à tout type de sol.

3.3.1 Contrainte effective dans les sols saturés

D'un point de vue purement théorique, 2 états limites de saturation sont possibles :

- Le sol est saturé en air, il est complètement sec. Dans ce cas la contrainte effective est égale à la contrainte totale :

$$\sigma = \sigma' \quad (3.6)$$

Ce résultat reste valable uniquement dans le cas où la pression de l'air reste à la valeur de pression atmosphérique.

- Le sol est saturé en eau. L'hypothèse qui sous-tend l'équation suivante est donc l'incompressibilité du fluide mais aussi des grains du sol en question :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - u_W \delta_{ij} \quad (3.7)$$

Ces 2 hypothèses ne sont pas vérifiées pour tous les types de géomatériaux, c'est pourquoi d'autres formulations ont été mises en avant par Terzaghi lui-même mais également par Biot en 1955. Ces formulations font intervenir la porosité ou les coefficients de compressibilité du squelette solide. Cependant dans la majorité des cas l'hypothèse d'incompressibilité est valide et l'on ne tient pas compte de ces formulations (SKEMPTON, 1960 cité par NUTH et LALOU, 2008).

3.3.2 Contrainte effective dans les sols non saturés

Dans le cas des sols non saturés, l'eau n'est pas le seul fluide présent dans le matériau poreux. Il faut trouver un moyen de tenir compte de cet aspect. Pour ce faire, définissons à nouveau la contrainte effective comme la combinaison de la contrainte totale et, cette fois, d'une pression interstitielle équivalente u^* (NUTH et LALOU, 2008) :

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} - u^* \delta_{ij} \quad (3.8)$$

Où u^* correspond à la pression interstitielle équivalente que génère la présence des différents fluides. Dans le cadre de ce travail, nous nous bornerons à la formulation suivante (LIU et al., 2017) :

$$\sigma' = \sigma - S_e \gamma_w h \quad (3.9)$$

où S_e correspond à la saturation équivalente telle que définie à la section 2.4.2, γ_w le poids volumique de l'eau et h la pression (ou la succion lorsque h est négatif).

3.4 Critère de Mohr-Coulomb modifié

Le critère de Mohr-Coulomb est, pour rappel, un modèle mathématique qui décrit la résistance des matériaux tels que les sols lorsqu'ils sont soumis à des contraintes normales ou de cisaillement. De façon générale ce critère s'applique à des matériaux dont la résistance en compression est bien supérieure à la résistance en traction.

Le critère décrit dès lors une enveloppe des contraintes que le matériau peut subir.

$$\tau = c + (\sigma - u_w) \tan(\phi) = c + \sigma' \tan(\phi) \quad (3.10)$$

Où τ est la contrainte de cisaillement, σ' la contrainte normale effective, c la cohésion du sol et ϕ son l'angle de frottement. Dans son article, LIU et al. (2017) reprend une expression établie en premier lieu par BISHOP(1959) qui modifie le critère de Mohr-Coulomb afin de prendre en compte l'influence de l'état de saturation du sol :

$$\tau = c' + \sigma \tan \varphi' - S_e h \gamma_w \tan \varphi' \quad (3.11)$$

Observons que, pour un sol saturé, cette équation est strictement équivalente à l'équation (3.10) car dans ce cas $S_e = 1$ et $h \gamma_w = u_w$

Appliquer ce nouveau critère permet de tenir compte du gain en résistance au cisaillement généré par la tension de capillarité dans les sols non saturés. Cela met en évidence le phénomène de cohésion apparente :

$$c'' = c' - S_e h \gamma_w \tan \varphi' \quad (3.12)$$

La résistance au cisaillement complémentaire donnée par cet effet de cohésion apparente permet de justifier des pentes de talus plus raides ou des tranchées plus profondes (WHENHAM, 2010). Cet aspect de la résistance au cisaillement est rarement pris en compte dans les dimensionnements alors qu'il est possible de mesurer de façon précise la succion dans le sol. De plus, sa prise en compte est économique, car elle permet de réaliser des soutènements moins coûteux, et plus sécuritaires (WHENHAM, 2010).

Lorsque le choix est fait de tenir compte de l'effet avantageux de la succion sur chantier, il faut s'assurer que la teneur en eau ne varie plus au cours du temps en installant des dispositifs de drainage, en couvrant le talus pour éviter l'infiltration d'eau nouvelle et en mesurant en continu les pressions.

Prenons l'exemple d'un sol avec les caractéristiques suivantes :

3 Calcul des contraintes

θ_s [°]	θ_r [°]	α [1/cm]
0.368	0.102	0.0335

TABLE 3.1 – Récapitulatif des valeurs caractéristiques.

En choisissant arbitrairement un ϕ égal à 25° , un $c=10$ kPa et en faisant varier la pression interstitielle, les droites de Mohr-Coulomb sont obtenues à la figure 3.1.

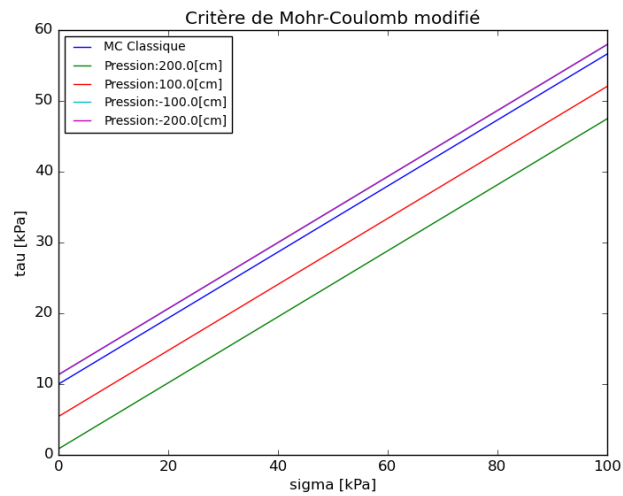


FIGURE 3.1 – Mohr-Coulomb modifié.

Nous observons bien le gain de cohésion apparente dans le cas des sols non saturés et la perte de résistance au cisaillement pour les sols saturés.

Chapitre 4

Résolution numérique de l'équation de Richards

La résolution analytique de l'équation de Richards n'est possible que pour une série de cas simples dont les conditions frontières et initiales sont extrêmement simplifiées. La résolution numérique de l'équation de Richards a été réalisée pour de nombreux cas et selon diverses méthodes. Son implémentation nécessite d'être conservative au niveau de la masse, stable, précise et efficace (CAVIEDES-VOULLIÈME et al., 2013).

Le challenge principal de la résolution numérique de l'équation de Richards est son aspect hautement non linéaire qui survient à travers les coefficients qui dépendent tous de la variable d'intérêt, la pression.

Dans la majorité des cas, la discrétisation spatiale de l'espace est réalisée soit par éléments finis, par volumes finis ou encore par différences finies (FARTHING et OGDEN, 2017).

En une dimension, la discrétisation utilisée est toujours structurée (CAVIEDES-VOULLIÈME et al., 2013; CELIA et al., 1990).

En 2 dimensions, les maillages utilisés sont en général non structurés et les formulations peuvent être centrées sur les cellules (BURZYŃSKI et SZYMKIEWICZ, 2011) ou centrées sur les sommets (MANZINI et FERRARIS, 2004).

Au niveau de la discrétisation temporelle, la majorité des codes résout l'équation de façon implicite car les formulations explicites ne permettent pas d'obtenir de solution lorsque le sol est saturé.

Dans cette section, nous commencerons par dériver un schéma de résolution par volumes finis pour l'équation de Richards en une dimension sur base d'un article de Cavièdes-Voullième (2013). Nous comparerons les résultats obtenus avec ceux de l'article.

Dans un second temps, nous verrons une méthode permettant de résoudre l'équation de Richards en 2 dimensions pour un maillage structuré.

Ensuite, nous développerons un schéma de volumes finis pour un maillage non-structuré généré à l'aide du logiciel de maillage open-source GMSH¹ (GEUZAIN et REMACLE, 2009). Dans ce cadre, nous montrerons que ce schéma est conservatif et robuste. Enfin, nous aborderons les limites du modèle développé.

4.1 Schéma de résolution 1D

Dans cette section, nous dériverons le schéma implicite de résolution par volumes finis de l'équation de Richards sous sa forme mixte en une dimension. A titre informatif, nous présenterons le schéma de volumes finis explicite introduit par CAVIEDES-VOULLIÈME et al. (2013).

D'un point de vue géométrique, le domaine de Richards en une dimension est matérialisé par une colonne de cellules dans la direction verticale. Les différents coefficients utilisés pour indiquer les interfaces et les cellules sont représentés à la figure 4.1

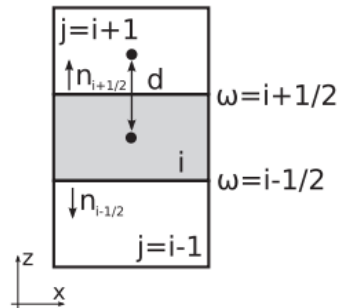


FIGURE 4.1 – Schéma de volumes finis, CAVIEDES-VOULLIÈME et al., 2013

En une dimension, l'équation de Richards dans sa forme mixte (2.1) peut être réécrite de la façon suivante :

$$\frac{\partial \theta(h)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial z} \left[K(h) \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \right] \quad (4.1)$$

1. Quelques commentaires sur l'utilisation de GMSH sont faits à l'annexe B

4.1.1 Schéma de résolution 1D explicite

Le schéma explicite est le suivant :

$$\theta_i^{n+1} = \frac{\Delta t}{\delta z^2} \left[K_{i+1/2}^n h_{i+1}^n + (K_{i+1/2}^n - K_{i-1/2}^n) h_i^n + K_{i-1/2}^n h_{i-1}^n \right] + \frac{\Delta t}{\delta z} (K_{i+1/2}^n - K_{i-1/2}^n) + \theta_i^n \quad (4.2)$$

Dans cette formulation, l'indice n désigne le pas temporel et i la cellule. Le terme δz correspond à la distance verticale entre 2 cellules adjacentes, Δt est le pas de temps, $K_{i+1/2}^n$ désigne la conductivité hydraulique de l'interface supérieure, h_{i+1}^n correspond à la pression à la cellule supérieure.

Cette formulation est relativement simple à implémenter mais a 2 principaux défauts :

- La nature explicite du schéma implique que le pas de temps de résolution est limité par une condition de stabilité.
- Il est strictement impossible de résoudre ce schéma dans des conditions saturées. Cet aspect provient de la définition même de la relation SWRC que nous avons définie à la section 2.4.1. Lorsque le sol est saturé, il est impossible de trouver la valeur correspondante de pression h.

Ces deux raisons suffisent pour ne pas aller plus loin dans cette direction dans le cadre de ce travail.

4.1.2 Schéma de résolution 1D implicite

Dérivons à présent le schéma implicite de résolution de l'équation de Richards en une dimension. La formulation de l'équation de Richards qui est utilisée est la formulation mixte (2.1)

Un schéma d'Euler implicite est utilisé pour discrétiser le temps, alors qu'un schéma de différences finies centrées est utilisé pour les dérivées spatiales.

$$\underbrace{\frac{\theta^{n+1} - \theta^n}{\Delta t}}_1 = \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left[K(h^{n+1}) \left(\frac{\partial h^{n+1}}{\partial z} + 1 \right) \right]}_2 \quad (4.3)$$

Définissons également :

$$\delta^m = h^{n+1,m+1} - h^{n+1,m} \quad (4.4)$$

la différence de pression calculée entre 2 itérations successives (m et m+1) pour un même pas de temps (n+1).

1. Développons le premier terme avec un développement de Taylor au premier ordre :

$$\theta^{n+1,m+1} = \theta^{n+1,m} + \left(\frac{\partial \theta}{\partial h} \right)^{n+1,m} (h^{n+1,m+1} - h^{n+1,m}) \quad (4.5)$$

Où $\left(\frac{\partial \theta}{\partial h} \right)^{n+1,m} = C^{n+1,m}$. Ce terme correspond à la capacité hydraulique que nous avons défini précédemment. Nous obtenons donc l'équation 4.6.

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} = \frac{\theta^{n+1,m} + C^{n+1,m} \delta^m - \theta^n}{\Delta t} \quad (4.6)$$

2. Pour le second terme :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[K(h^{n+1}) \left(\frac{\partial h^{n+1}}{\partial z} + 1 \right) \right] = \frac{\partial}{\partial z} (K(h^{n+1,m})) + \frac{\partial}{\partial z} \left(K(h^{n+1,m}) \frac{\partial h^{n+1,m+1}}{\partial z} \right) \quad (4.7)$$

Il est à noter que les termes C et K sont approximés au pas de temps n+1 et à l'itération m, alors que le terme de pression h est lui au même pas de temps n+1 mais à l'itération suivante m+1, puisqu'on résout pour celui-ci.

Finalement l'équation (4.7) devient :

$$\frac{\partial}{\partial z} \left[K(h^{n+1}) \left(\frac{\partial h^{n+1}}{\partial z} + 1 \right) \right] = \underbrace{\frac{\partial K^{n+1,m}}{\partial z}}_a + \underbrace{\frac{\partial}{\partial z} \left(K^{n+1,m} \frac{\partial h^{n+1,m+1}}{\partial z} \right)}_b \quad (4.8)$$

A présent, il faut discrétiser spatialement.

1. Ce terme ne change pas
2. Chaque terme est approché séparément par différence finie :

(a)

$$\frac{\partial K^{n+1,m}}{\partial z} = \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m} - K_{i-1/2}^{n+1,m}}{\Delta z} \quad (4.9)$$

(b)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial z} \left(K^{n+1,m} \frac{\partial h^{n+1,m+1}}{\partial z} \right) &= \frac{1}{\Delta z^2} \left(K_{i+1/2}^{n+1,m} (h_{i+1}^{n+1,m+1} - h_i^{n+1,m+1}) \right. \\ &\quad \left. - K_{i-1/2}^{n+1,m} (h_i^{n+1,m+1} - h_{i-1}^{n+1,m+1}) \right) \end{aligned} \quad (4.10)$$

En combinant tous ces termes, réécrivons l'équation :

$$\frac{\theta^{n+1,m} + C^{n+1,m}\delta^m - \theta^n}{\Delta t} = \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m} - K_{i-1/2}^{n+1,m}}{\Delta z} + \frac{1}{\Delta z^2} \left(K_{i+1/2}^{n+1,m} (h_{i+1}^{n+1,m} - h_i^{n+1,m}) - K_{i-1/2}^{n+1,m} (h_i^{n+1,m} - h_{i-1}^{n+1,m}) \right). \quad (4.11)$$

En groupant les termes en fonction de leur indice spatial (i-1,i,i+1) et en utilisant la définition de δ^m , on obtient :

$$\begin{aligned} & -\frac{K_{i-1/2}^{n+1,m}}{\Delta z^2} h_{i-1}^{n+1,m+1} + \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m}}{\Delta z^2} h_i^{n+1,m+1} + \frac{K_{i-1/2}^{n+1,m}}{\Delta z^2} h_i^{n+1,m+1} - \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m}}{\Delta z^2} h_{i+1}^{n+1,m+1} \\ & + \frac{C_i^{n+1,m}}{\Delta t} (h_i^{n+1,m+1} - h_i^{n+1,m}) = \frac{K_{i+1/2}^{n+1,m} - K_{i-1/2}^{n+1,m}}{\Delta z} - \frac{\theta_i^{n+1,m} - \theta_i^n}{\Delta t} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Le schéma de résolution final est obtenu :

$$a_i h_{i-1}^{n+1,m+1} + b_i h_i^{n+1,m+1} + c_i h_{i+1}^{n+1,m+1} = f_i \quad (4.13)$$

Où les coefficients sont :

$$\begin{aligned} a_i &= -\frac{\Delta t}{\Delta z^2} K_{i-1/2}^{n+1,m} \\ b_i &= \frac{\Delta t}{\Delta z^2} K_{i+1/2}^{n+1,m} + \frac{\Delta t}{\Delta z^2} K_{i-1/2}^{n+1,m} + C_i^{n+1,m} \\ c_i &= -\frac{\Delta t}{\Delta z^2} K_{i+1/2}^{n+1,m} \\ f_i &= C_i^{n+1,m} h_i^{n+1,m} + \frac{\Delta t}{\Delta z} (K_{i+1/2}^{n+1,m} - K_{i-1/2}^{n+1,m}) - \theta_i^{n+1,m} + \theta_i^n \end{aligned} \quad (4.14)$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} b_1 & c_1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_2 & b_2 & c_2 & 0 & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & 0 & a_{N-1} & b_{N-1} & c_{N-1} \\ 0 & \cdots & 0 & a_N & b_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1^{n+1,m+1} \\ h_2^{n+1,m+1} \\ \vdots \\ h_{N-1}^{n+1,m+1} \\ h_N^{n+1,m+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \\ f_N \end{bmatrix} \quad (4.15)$$

4.1.3 Algorithme de résolution

L'implémentation de la résolution implicite à chaque pas de temps est représentée à la figure 4.2

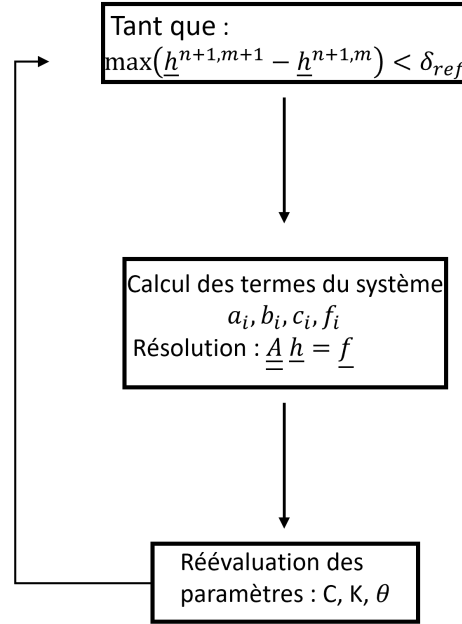


FIGURE 4.2 – Algorithme pour la résolution implicite de l'équation de Richards.

Nous pouvons apporter quelques précisions supplémentaires quant à cet algorithme :

1. Au premier pas d'itération : $K_{i\pm 1/2}^{n+1,m=0} = K_{i\pm 1/2}^n$, $C_i^{n+1,m=0} = C_i^n$, $\theta_i^{n+1,m=0} = \theta_i^n$. De la même façon, nous pouvons prendre comme première estimation : $h_i^{n+1,m=0} = h_i^n$.
2. Le terme δ_{ref} doit être sélectionné de façon à converger relativement rapidement mais également à ne pas perdre en précision. Dans ce travail nous utiliserons $\delta_{ref} = 10^{-3}$

4.1.4 Conditions limites

Deux types de conditions limites sont considérés dans le cas 1D : la pression imposée en frontière et le flux imposé en frontière. En 1D cela signifie des conditions pour la cellule supérieure et la cellule inférieure (ces cellules sont désignées par la lettre β). Dans son article CAVIEDES-VOULLIÈME et al.(2013), explicite la façon d'en tenir compte :

1. Pression imposée aux frontières (h_p) :

$$\begin{aligned}
 a_\beta &= 0 \\
 b_\beta &= 1 \\
 c_\beta &= 0 \\
 f_\beta &= h_p
 \end{aligned}
 \tag{4.16}$$

2. Flux imposé aux frontières :

$$\begin{aligned}
a_\beta &= a_\beta \Psi \\
b_\beta &= C_\beta^{n+1,m} + \frac{\Delta t}{\delta z^2} \left(K_{\beta-1/2}^{n+1,m} \Psi + K_{\beta+1/2}^{n+1,m} (1 - \Psi) \right) \\
c_\beta &= c_\beta (1 - \Psi) \\
f_\beta &= C_\beta^{n+1,m} h_\beta^{n+1,m} + \frac{\Delta t}{\delta z} \left(K_{\beta+1/2}^{n+1,m} (1 - \Psi) - K_{\beta-1/2}^{n+1,m} \Psi \right) + \theta_\beta^n - \theta_\beta^{n+1,m} + \frac{\Delta t}{\delta z} J_\beta^{n+1}
\end{aligned} \tag{4.17}$$

Où Ψ vaut 0 à la frontière inférieure et 1 à la frontière supérieure. Le terme J_β^{n+1} correspond à un flux imposé qui est positif vers le haut. Pour imposer une frontière imperméable, il suffit que ce terme soit nul.

4.1.5 Cas tests

Les cas tests présentés dans cette section sont basés sur un article de Cavièdes-Voullième (2013) ainsi que sur sa thèse de Master (2010).

Le sol utilisé pour ces différents cas tests a les propriétés suivantes :

θ_s [/]	θ_r [/]	α [1/cm]	K_s [cm/s]
0.368	0.102	0.0335	0.00922

TABLE 4.1 – Propriétés du sol utilisé pour les cas tests.

4.1.5.1 Cas test 1 : frontières imperméables

Ce premier cas test permet de vérifier le comportement du modèle dans le cas le plus simple. Il s'agit d'une colonne de sol d'une hauteur de 1 mètre dont la base est imperméable. La pression est initialisée à $h = -20$ [cm] dans toute la colonne signifiant que le sol est non-saturé. Sous l'effet de la gravité, l'on s'attend à ce que l'eau s'écoule en direction de la limite inférieure de la colonne. La partie inférieure de la colonne se sature, alors que la partie supérieure se désature.

La situation d'équilibre est atteinte lorsque la teneur en eau ne varie plus. Compte tenu de cet aspect et de l'équation (4.1), nous devrions observer à l'équilibre $\frac{\partial h}{\partial z} = 1$, c'est-à-dire un profil disposant d'une droite de pente 1.

Comparons les résultats obtenus (figure 4.4) avec ceux de l'article (figure 4.3), en affichant le profil de pression toutes les 10 minutes.

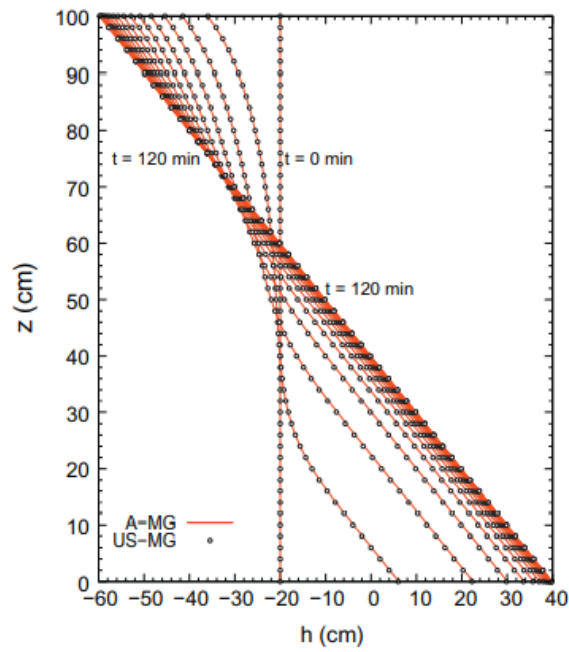


FIGURE 4.3 – Résultats obtenus, Cavièdes-Voullième, 2013.

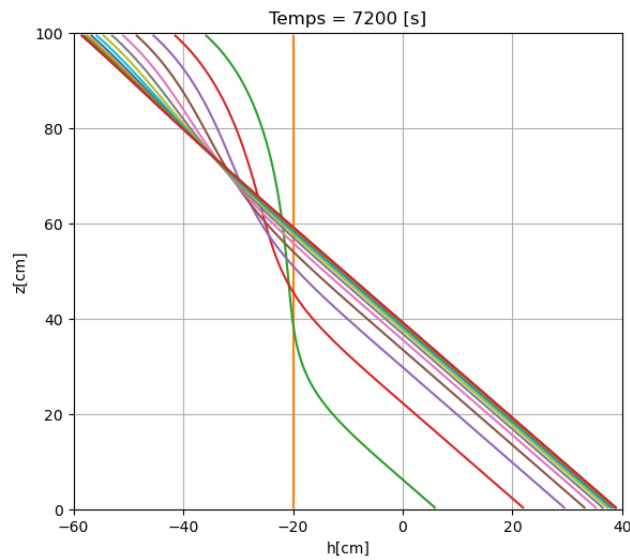


FIGURE 4.4 – Résultats obtenus.

Les résultats obtenus correspondent à ceux obtenus par Cavièdes-Voullième. De plus, à l'équilibre le profil obtenu dispose bien de la pente $\frac{\partial h}{\partial z} = 1$.

4.1.5.2 Cas test 2 : pression imposée

Ce cas test permet de vérifier le fonctionnement des conditions de pression imposées aux frontières. Il simule une saturation partielle progressive du sol. Les conditions frontières sont les suivantes :

- Frontière supérieure : $h = -20$ [cm]
- Frontière inférieure : $h = -50$ [cm]

A nouveau comparons les résultats obtenus (qui sont affichés toutes les 10 minutes à la figure 4.6) avec ceux présentés dans la thèse de CAVIEDES-VOULLIEME (2010) à la figure 4.5.

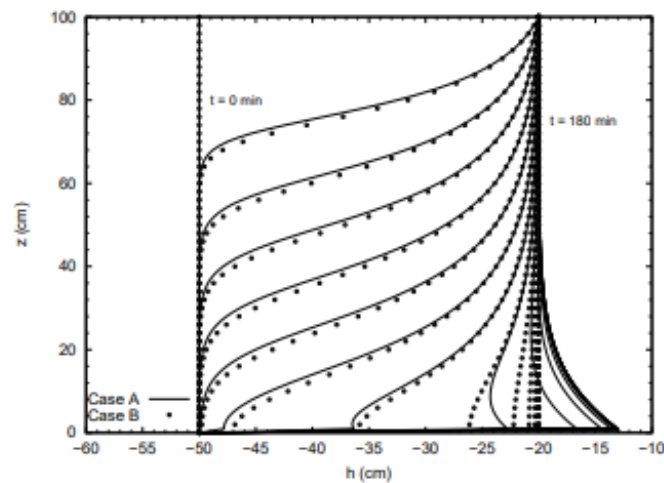


FIGURE 4.5 – Résolution implicite, CAVIEDES-VOULLIEME, 2010

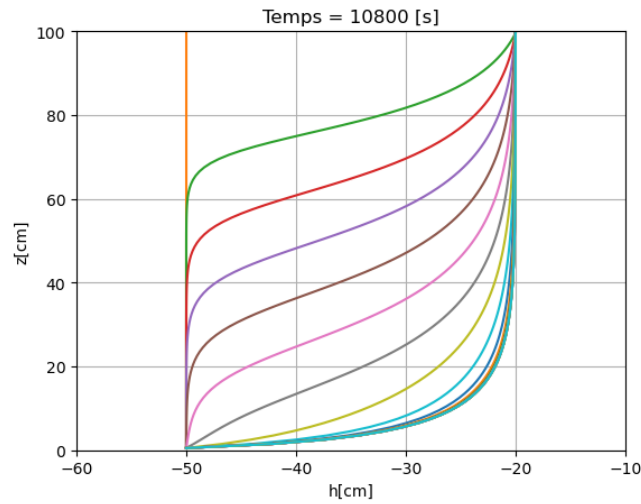


FIGURE 4.6 – Résultats obtenus.

Ces résultats ne concordent pas entre eux. Le profil obtenu par Cavièdes-Voullième avec la formulation implicite ne correspond pas à ce à ce que l'on pourrait attendre. L'allure de son profil de pression évolue de façon peu naturelle. En revanche, il a réalisé la même simulation avec un schéma explicite de résolution. Ces résultats concordent beaucoup mieux avec la simulation réalisée.

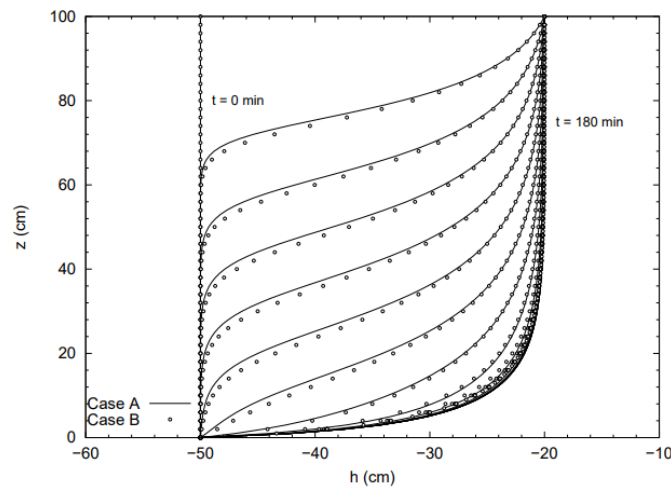


FIGURE 4.7 – Résolution explicite, CAVIEDES-VOULLIEME, 2010.

4.1.5.3 Cas test 3 : processus de saturation dirigé vers le bas

La pression est initialisée pour toutes les cellules comme : $h(z, t=0) = -50$ [cm]. Les conditions limites sont les suivantes :

- Frontière supérieure : $h=0$ [cm]
- Frontière inférieure : $h=-50$ [cm]

Toutes les 240 secondes, le résultat est affiché. Le pas de temps utilisé est de 30 secondes.

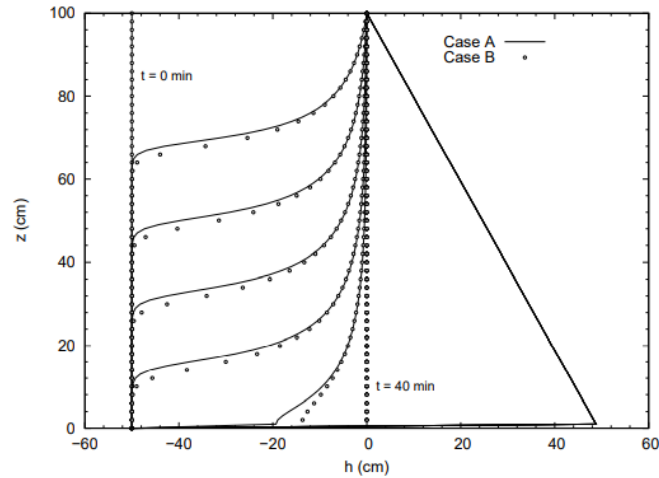


FIGURE 4.8 – Evolution du profil de pression, CAVIEDES-VOULLIEME, 2010.

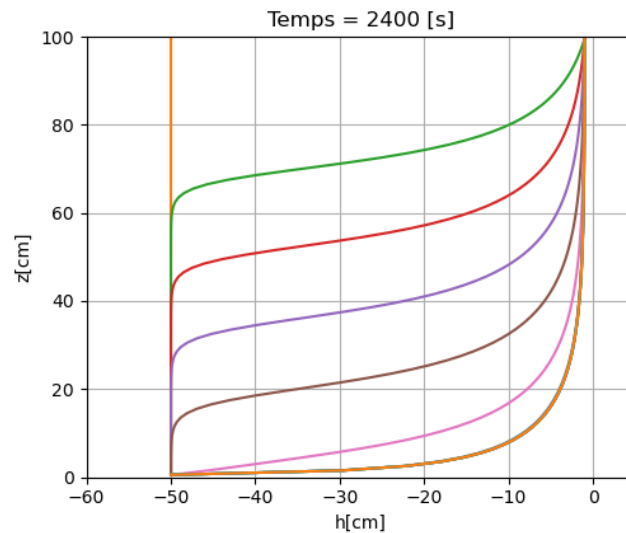


FIGURE 4.9 – Résultats obtenus.

Dans un premier temps, les résultats obtenus sont assez semblables. Cependant lorsque le flux devient stationnaire, les résultats divergent. Le profil obtenu par Cavièdes-Voullième ne semble pas respecter les conditions frontières et le profil a un aspect assez discontinu. Le profil obtenu à la figure 4.9 semble quant à lui mieux correspondre aux conditions frontières et est parfaitement continu.

4.1.6 Conclusions sur la résolution numérique de l'équation de Richards 1D

Dans cette section, nous avons déterminé un schéma de résolution permettant de résoudre l'équation de Richards en une dimension de façon implicite. Ensuite, nous avons réalisé un modèle numérique et nous l'avons mis à l'épreuve de différents cas tests afin de valider les résultats obtenus. Le modèle est stable, robuste et efficace, le temps de calcul pour obtenir les résultats n'ayant jamais dépassé la minute.

4.2 Méthode de Godunov

Nous verrons dans cette section une méthode permettant de résoudre l'équation de Richards en 2 dimensions pour un maillage structuré rectangulaire composé de N lignes et de M colonnes.

Cette méthode est appelée méthode de Godunov (GAŚIOROWSKI et KOLERSKI, 2020) et consiste à séparer le problème bi-dimensionnel en sous-problèmes d'une seule dimension. En d'autres termes, au sein d'un même pas de temps, l'équation de Richards est séparée en deux parties :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \theta^{(1)}}{\partial t} &= \mathbf{A} h^{(1)} \quad \text{sur } \Delta t \text{ pour } j = 1, \dots, N \\ \frac{\partial \theta^{(2)}}{\partial t} &= \mathbf{B} h^{(2)} \quad \text{sur } \Delta t \text{ pour } i = 1, \dots, M \end{aligned} \quad (4.18)$$

Où $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ sont :

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(K_z \frac{\partial}{\partial z} + K_z \right) \\ \mathbf{B} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(K_x \frac{\partial}{\partial x} \right) \end{aligned} \quad (4.19)$$

(1) et (2) désignent l'étape du calcul au sein du même pas de temps, dans la direction z et x respectivement.

Dans un premier temps il faut calculer dans la direction z , pour les N lignes avec $h(x, z, t)^1 = h_0$ comme condition initiale. Dans un second temps, il faut calculer dans la direction X pour les M colonnes avec $h^{(2)}(x, z, t) = h^{(1)}(x, z, t + \delta t)$ comme condition initiale.

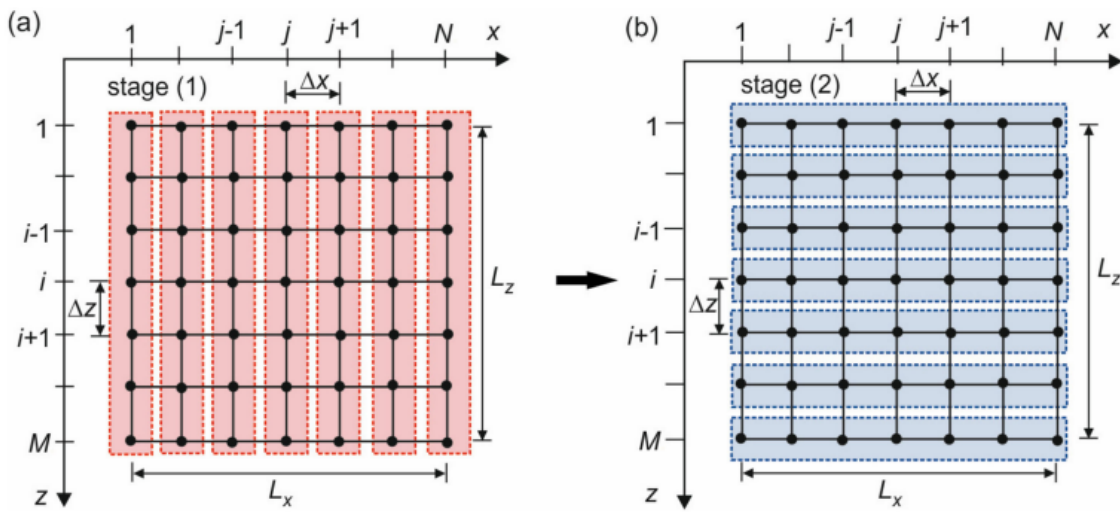


FIGURE 4.10 – Méthode de Godunov, Gasiorowski et Kolerski(2020)

4.2.1 Résultats et cas tests en 2D

4.2.1.1 Cas test 1 : comparaison 1D-2D

Il s'agit dans cette section de comparer les résultats obtenus avec ceux du premier cas test. Après 420 secondes, le programme rencontre une erreur, la matrice des coefficients dans la direction x devient singulière pour une des lignes. Par conséquent, le système n'a plus une solution unique et le cas test ne fonctionne pas au-delà.

Observons tout de même que les résultats obtenus sont en accord avec ce qui avait été obtenu au premier cas test à la section 4.1.5.1.

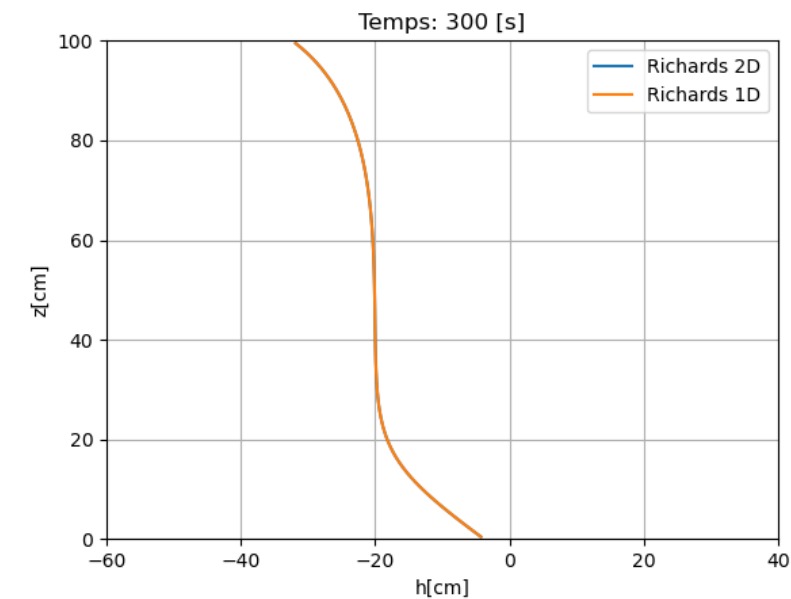


FIGURE 4.11 – Comparaison Richards 1D et 2D

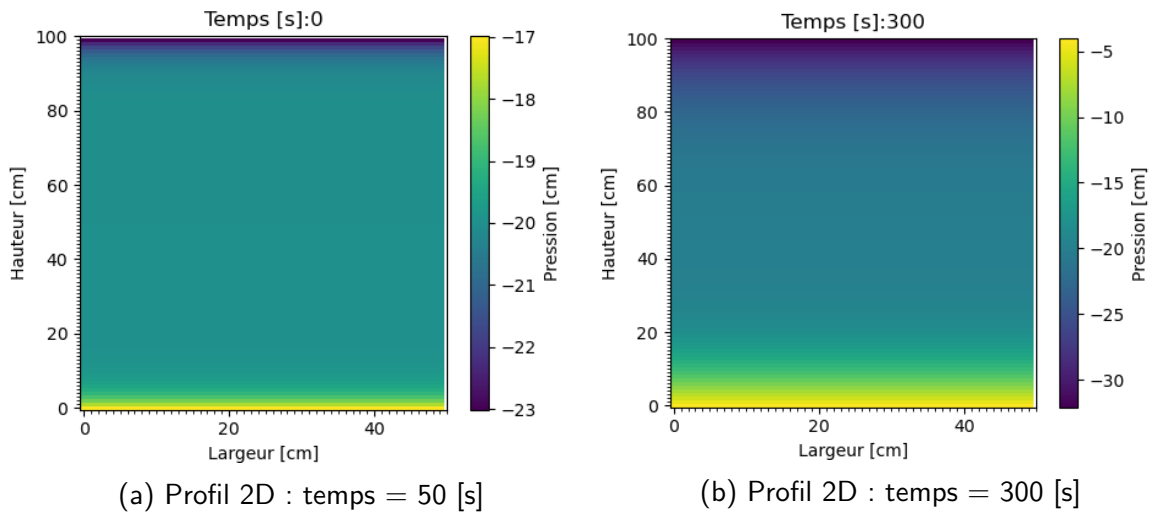


FIGURE 4.12

4.2.1.2 Cas test 2 : Comparaison 1D-2D

Les mêmes conditions initiales que pour le cas test 1D 4.1.5.2 sont utilisées. Le même profil de pression est atteint.

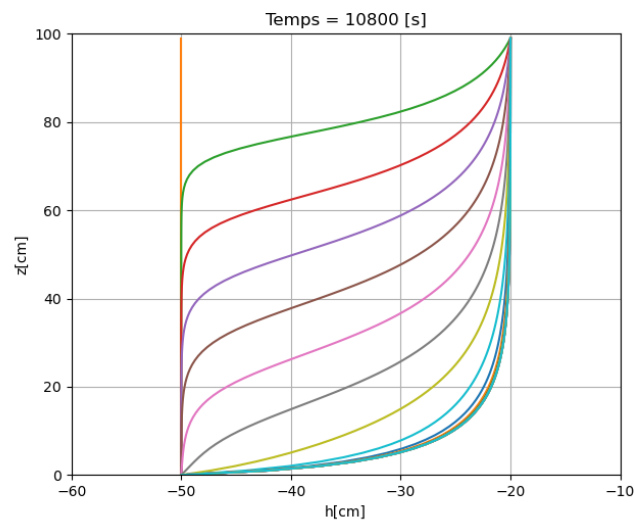


FIGURE 4.13 – Résultats : Richards 2D

Le résultat de la vue d'ensemble est visible à la figure 4.14.

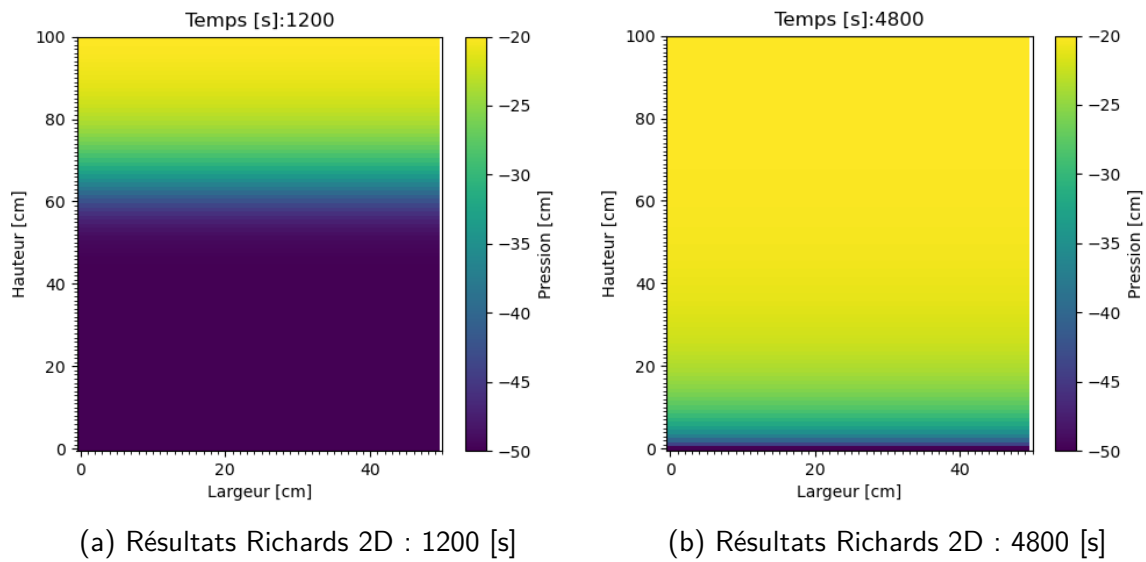


FIGURE 4.14 – Résultats en 2 dimensions.

4.2.1.3 Cas test 3 : Comparaison 1D-2D

Les conditions initiales de ce cas test sont à nouveau reprises du cas test 1D 4.1.5.3. Les profils de pression obtenus au cours du temps sont similaires.

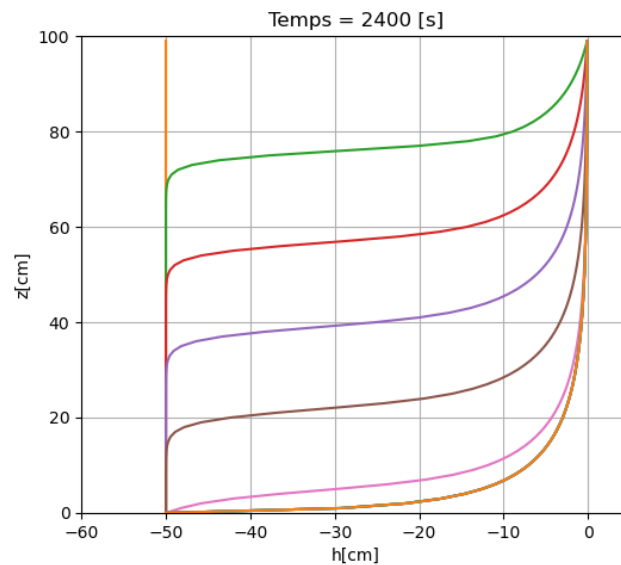


FIGURE 4.15 – Résultats : Richards 2D

4.2.2 Limites de la méthode de Godunov

La méthode de Godunov est très pratique pour résoudre des problèmes avec des géométries simples. Elle permet de comprendre le fonctionnement de l'écoulement en deux dimensions. En contrepartie de sa simplicité d'exécution, elle n'est pas généraliste du point de vue géométrique. De plus, nous avons vu qu'elle ne convergeait pas toujours vers une solution. Par conséquent l'implémentation réalisée n'est pas très robuste.

Pour décrire des géométries plus complexes, il faut recourir à d'autres types de maillages. C'est pourquoi nous verrons à la section suivante une formulation permettant de résoudre l'équation de Richards sur un maillage non-structuré.

4.3 Méthode des volumes finis sur un maillage non structuré

Exprimons l'équation de Richards de façon générale sur un domaine bidimensionnel. Le domaine bidimensionnel est désigné par Ω , sa frontière par $\partial\Omega$. Le vecteur orthogonal à la frontière est désigné par $\mathbf{n}$. A nouveau, écrivons l'équation de Richards sous sa forme mixte :

$$\begin{aligned} \frac{\partial\theta(h)}{\partial t} - \nabla \cdot [K(h)\nabla(h+z)] &= 0, \quad \text{sur } \Omega, t > 0 \\ h &= g^D, \quad \text{sur } \Gamma_D, t > 0 \\ -\mathbf{n} \cdot K(h)\nabla(h+z) &= g^N, \quad \text{on } \Gamma_N, t > 0 \end{aligned} \quad (4.20)$$

Où $\theta(h)$ est la teneur en eau volumétrique, $h(\mathbf{x}, t)$ la pression hydraulique, $K(h)$ la conductivité hydraulique. Le champ de solution h est fonction du vecteur de position $\mathbf{x}=(x,z)$ et du temps t . Les coordonnées z sont considérées positives vers le haut.

Les conditions de Neumann et Dirichlet sont désignées par les fonctions g^N et g^D sur l'ensemble des sous-espaces Γ_D et Γ_N tels que $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$.

4.3.1 Formulation des volumes finis

Le maillage utilisé est un maillage triangulaire. Il s'agit donc d'obtenir une formulation des volumes finis pour chaque élément de ce maillage. Intégrons sur un volume de contrôle, constitué ici du triangle i , l'équation de Richards. A nouveau, par le théorème de la divergence, le terme contenant la divergence a été transformé en une somme des flux sortants du domaine.

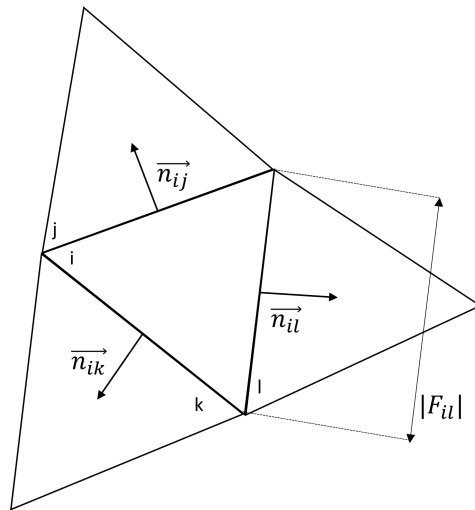


FIGURE 4.16 – Domaine d'intégration.

$$\underbrace{\int_{V_i} \frac{\partial \theta(h)}{\partial t} dV}_1 - \underbrace{\sum_{F_l \in \Gamma_i} \int_{F_l} \mathbf{n} \cdot \mathbf{K}(h) \nabla(h + \mathbf{z}) ds}_2 = 0 \quad (4.21)$$

Où F_l désigne l'une des arêtes du triangle.

$$1. \quad \int_{V_i} \frac{\partial \theta(h)}{\partial t} dV \approx |V_i| \frac{\partial}{\partial t} (\theta_i) \quad (4.22)$$

Où $|V_i|$ est le volume du triangle, soit en 2 dimensions, son aire.

$$2. \quad - \int_{F_l} \mathbf{n} \cdot \mathbf{K}(h) \nabla(h + \mathbf{z}) ds \approx - |F_l| K^{(l)} \left(\nabla h^{(l)} + \nabla z^{(l)} \right) \cdot n^{(l,i)} \quad (4.23)$$

Où $|F_l|$ désigne la longueur de l'arête en question.

Le premier terme s'évalue simplement, comme nous l'avons vu pour l'élaboration du schéma de volumes finis en une dimension :

$$\frac{\partial \theta_i}{\partial t} = \frac{\theta_i^{n+1,m} + C_i^{n+1,m} (h_i^{n+1,m+1} - h_i^{n+1,m}) - \theta_i^n}{\Delta t} \quad (4.24)$$

Le second terme nécessite d'évaluer les gradients de pression et de position aux interfaces entre les cellules.

4.3.1.1 Evaluation des gradients

Les gradients nécessitent donc d'être évalués à l'interface avec chacune des cellules adjacentes.

Terme $\nabla \mathbf{z}^{(l)}$:

Le gradient de z dans la direction x est nul car il n'y a pas de variation de position verticale dans cette direction. Dans la direction z , le gradient vaut 1.

$$\nabla z = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad (4.25)$$

En effectuant le produit scalaire entre la normale sortante de l'arête et le gradient de hauteur, on obtient :

$$- |F_l| K^{(l)} n_z^{l,i} \quad (4.26)$$

où $n_z^{l,i}$ est la composante verticale de la normale à l'arête l pointant vers l'extérieur du triangle i .

Terme $\nabla \mathbf{h}^{(l)}$:

L'évaluation du gradient de pression peut être réalisé de plusieurs façons : méthode de Gauss, méthode des moindres carrés. Dans le cadre de ce travail, nous nous limiterons à une évaluation simplifiée et directe du gradient.

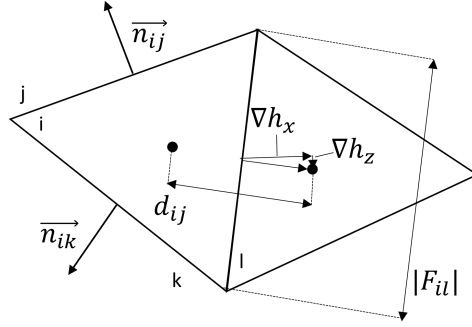


FIGURE 4.17 – Gradient à la frontière.

Evaluation simple du gradient

A l'interface, la normale peut être réécrite dans la direction x et z :

$$\underline{n} = \begin{pmatrix} |n| \cos \theta \\ |n| \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} n_x \\ n_z \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

De la même façon il est possible d'écrire le gradient de pression dans les 2 directions :

$$\underline{\nabla h}^{(l)} = \begin{pmatrix} \nabla h \cos \theta \\ \nabla h \sin \theta \end{pmatrix}^{(l)} = \begin{pmatrix} \nabla h_x \\ \nabla h_z \end{pmatrix} \quad (4.28)$$

De façon générale, le gradient suivant la normale sortante est évalué comme suit :

$$\nabla h = \frac{h_l - h_i}{d_{il}} \quad (4.29)$$

Où d_{il} est la distance entre les centres des 2 cellules adjacentes.

Dès lors, effectuons le produit scalaire entre le gradient et la normale :

$$\underline{n} \cdot \underline{\nabla h} = |n| \cos \theta \nabla h \cos \theta + |n| \sin \theta \nabla h \sin \theta = |n| \nabla h \quad (4.30)$$

Où $|n| = 1$. Le terme de flux (4.23) devient donc :

$$- \int_{F_l} \mathbf{n} \cdot \mathbf{K}(h) \nabla(h + \mathbf{z}) ds \approx \sum_{F_l \in \Gamma_i} |F_l| K^{(l)} \cdot \left(\frac{h_l - h_i}{|d_{il}|} + |n_z| \right) \quad (4.31)$$

Il faut à nouveau résoudre un système d'équations de la forme :

$$\mathbf{A}\mathbf{h}^{n+1,m+1} = \mathbf{c} \quad (4.32)$$

L'assemblage de la matrice $\mathbf{A}$ est aisé. Les coefficients de la diagonale principale sont :

$$A[i, i] = \frac{C_i^{n+1,m}}{\Delta t} |V_i| + \sum_{F_l \in \Gamma_i} K^l |F_l| \left(\frac{1}{d_{il}} \right) \quad (4.33)$$

Où les indices i désignent l'élément en question.

Les coefficients liés aux éléments voisins sont :

$$A[i, j] = -K^l |F_l| \left(\frac{1}{d_{il}} \right) \quad (4.34)$$

où l'indice j désigne un élément adjacent.

Chaque élément du vecteur $\mathbf{c}$ est assemblé de la façon suivante :

$$c[i] = \sum_{F_l \in \Gamma_i} K^l |F_l| n_z^{(l,i)} + \frac{|V_i|}{\Delta t} (\theta_i^n - \theta_i^{n+1,m} + C_i^{n+1,m} h^{n+1,m}) \quad (4.35)$$

4.3.2 Conditions frontières

Les conditions frontières sont un élément clé de l'analyse numérique et de ce modèle. Comme nous le verrons, les résultats obtenus sont toujours influencés par les conditions que nous imposerons aux frontières. Dès lors, nous verrons dans cette section de quelle manière prendre en compte des débits de fuites (seepage), imposer une pression hydrostatique due à la présence d'eau à l'extérieur de la digue ou encore comment imposer un flux quelconque. Dans tous les cas, les conditions frontières doivent être bien définies. Il est par exemple impossible d'imposer à la fois une pression et un flux.

4.3.2.1 Condition de Dirichlet : imposer la pression

Ce type de condition permet de spécifier la valeur de la solution du problème pour un élément particulier.

Dans notre cas, il s'agit d'imposer la valeur de la pression h à un endroit donné de la frontière. Rappelons que notre approche est orientée-cellule, par conséquent nous imposons la valeur de pression directement au centre de la cellule. Cela constitue une approximation, mais celle-ci n'est pas si importante dans la mesure où les écoulements dans les sols sont des phénomènes de long terme. Si l'on souhaite limiter les effets de cette approximation, nous pouvons, par exemple, raffiner le maillage proche de la frontière.

Notons également qu'imposer une pression hydrostatique due à la présence d'un réservoir le

long d'une digue revient exactement à imposer une charge hydraulique constante dans toute la zone sous le réservoir. Cela est dû à la définition même de la charge hydraulique. Lorsque la position verticale diminue, la pression de l'eau augmente au même rythme, chaque effet se contrebalançant parfaitement avec l'autre.

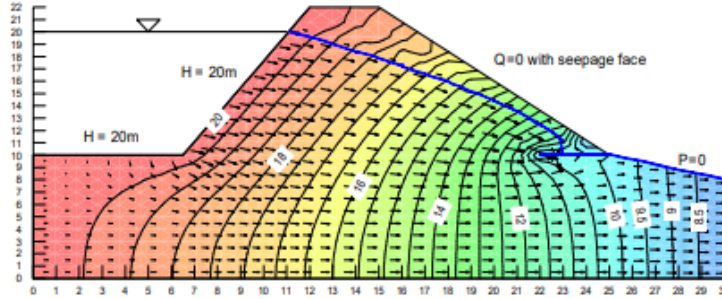


FIGURE 4.18 – Pression imposée à la partie amont de la digue, GEO-SLOPE., 2012

Pour imposer ce type de condition frontière, il faut que le coefficient de l'élément considéré dans la matrice **A** vaille 1 et que la valeur de l'élément du vecteur **c** corresponde à la pression imposée :

$$\begin{aligned} A[i, i] &= 1 \\ c[i] &= h_{imp} \end{aligned} \quad (4.36)$$

4.3.2.2 Condition de Neumann : Imposer un flux

Cette condition frontière consiste à imposer un flux à la frontière. D'un point de vue mathématique, il s'agit d'imposer la dérivée de la pression par rapport à la direction choisie :

$$q_{z,0}(x, z, t) = -K_w \left(\frac{\partial h}{\partial z} + 1 \right) \quad (4.37)$$

$$q_{x,0}(x, z, t) = -K_w \left(\frac{\partial h}{\partial x} \right) \quad (4.38)$$

Si ce flux est imposé à 0 dans les 2 directions, la frontière est considérée imperméable (CAVIEDES-VOULLIÈME et al., 2013; HOOSHYAR et WANG, 2016).

Par exemple, si l'on veut simuler un écoulement dans une colonne de sol dont la partie inférieure est perméable, on peut prendre l'hypothèse que le flux est égal à la conductivité

hydraulique du sol (van GENUCHTEN, 2019 ; GEO-SLOPE., 2012) :

$$q_0 = -K_w \left(\frac{\partial h}{\partial z} + \frac{\partial z}{\partial z} \right) = -K_w(0.0 + 1.0) = -K_w \quad (4.39)$$

Ce flux est rajouté au vecteur **c**. Pour raccorder correctement les unités, la valeur du flux est multipliée par la longueur de la face considérée. Ce flux est donc un débit massique linéaire.

4.3.2.3 Débit de fuite

La face de suintement ou de fuite est la frontière entre le flux saturé dans le sol et l'atmosphère (SCUDELER et al., 2017).

La connaissance du positionnement de cette face est importante pour déterminer de quelle façon le flux à surface libre interagit avec le flux interne.

La condition de débit de fuite ou seepage flow peut être utilisée pour simuler l'eau qui s'écoule le long d'une portion aval d'une digue en terre lorsque celle-ci supporte de l'eau en amont. Dès lors que la pression devient positive sur la face aval, un débit vers l'extérieur de la digue est, en théorie, observable.

SCUDELER et al. (2017) présente 2 méthodes pour prendre ce phénomène en compte à la frontière, dans les 2 cas le débit de fuite est traité à l'aide d'une condition de Dirichlet :

- Imposer à l'avance la position de la surface de suintement. Il faut donc imposer à l'avance la pression atmosphérique ($h = 0$ [cm]) sur toute la surface supposée de suintement. Cette méthode est relativement approximative car c'est une imposition d'une condition statique à un problème dynamique.
- La seconde méthode consiste à imposer la pression atmosphérique ($h=0$ [cm]) dès que la pression de la cellule frontière considérée est supérieure à $h=0$ [cm]. Cette méthode est dite dynamique car la position de la surface libre évolue avec le temps, là où la méthode statique la fixait à l'avance.

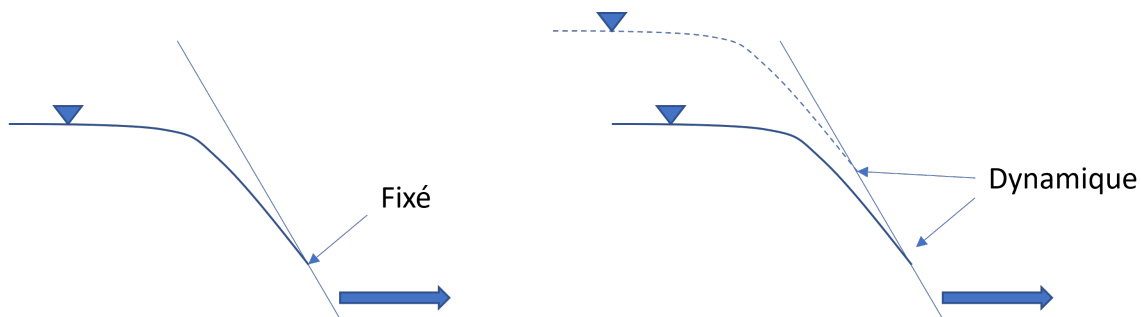


FIGURE 4.19 – Condition dynamique vs statique.

4.3.2.4 Drainage du sol

Les drains permettent l'évacuation de l'eau présente dans le sol. Si l'on fait l'hypothèse qu'un drain est capable d'évacuer toute l'eau qui l'atteint, la pression dans le drain ne dépassera jamais $h = 0$ [cm]. Par conséquent, pour imposer un drain, il suffit d'imposer la pression à 0 [cm] à toutes les cellules concernées.

4.3.3 Validation avec les cas tests précédents

Afin de valider les résultats obtenus avec la formulation sur des maillages non-structurés, les mêmes cas tests que ceux réalisés précédemment ont été effectués.

Afin de pouvoir effectuer une comparaison, un maillage carré est recréé à partir des barycentres des éléments formant le maillage non-structuré. Un post-processing est nécessaire afin de traiter les données et de les représenter de façon à pouvoir les comparer.

Les résultats obtenus avec le code résolvant l'équation de Richards en 1D de façon implicite font à nouveau office de référence, ayant été validés par comparaison avec l'article de CAVIEDES-VOULLIÈME et al. (2013).

4.3.3.1 Cas test 1 : frontières imperméables

Dans ce cas test, comparons les résultats obtenus avec la simulation sur un maillage non structuré pour les mêmes conditions initiales que le cas test de la section 4.1.5.1. Les résultats obtenus et disposés en une dimension sont visibles aux figures 4.20 et 4.21.

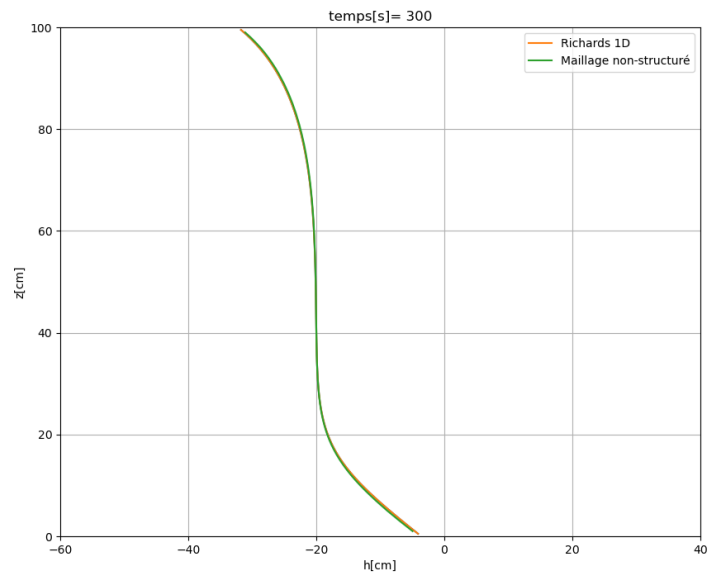


FIGURE 4.20 – Comparaison des résultats : Maillage non-structuré et 1D.

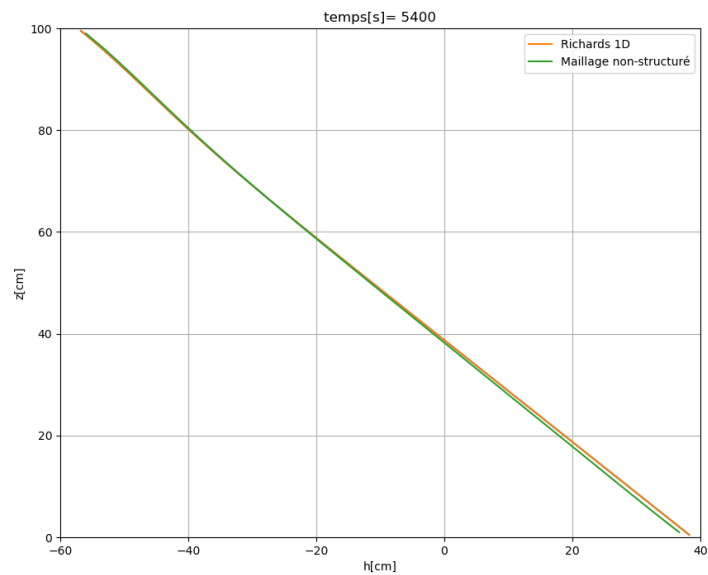


FIGURE 4.21 – Comparaison des résultats : Maillage non-structuré et 1D.

On observe qu'une légère divergence est apparue au cours de la simulation, mais celle-ci reste très limitée.

4.3.3.2 Cas test 2

A nouveau, il s'agit de comparer les résultats obtenus avec le maillage non-structuré et le cas 1D que nous avons réalisé à la section 4.1.5.2. Les résultats obtenus sont visibles à la figure 4.22 et comparés avec les résultats en une dimension.

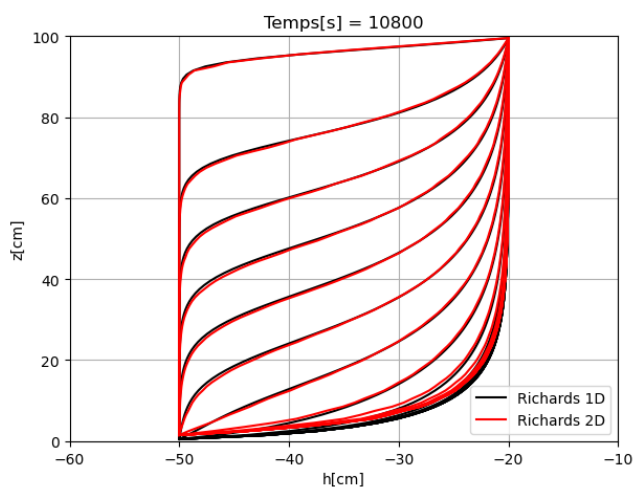


FIGURE 4.22 – Comparaison résultats 1D-2D, maillage non-structuré.

Les résultats obtenus sont sensiblement les mêmes.

4.3.4 Description de la géométrie de la digue réelle

Les cas tests qui suivent ont été réalisés sur une digue dont la géométrie a été choisie pour ressembler à une digue réelle tout en permettant d'obtenir des comportements critiques. En effet, la pente du talus vaut 1 ce qui est relativement élevé pour une pente de talus en terre. La largeur en plan du talus est de 16 [m] alors que sa hauteur atteint 6 [m] au sommet.

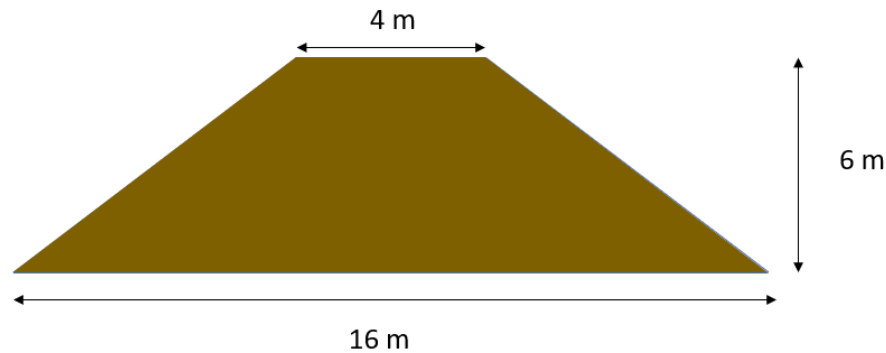


FIGURE 4.23 – Géométrie de la digue.

Les valeurs caractéristiques du sol, reprises à nouveau de l'article de Cavièdes-Voullième, sont les suivantes :

θ_s [/]	θ_r [/]	α [1/cm]	K_s [cm/s]
0.368	0.102	0.0335	0.00922

TABLE 4.2 – Propriétés du sol utilisé pour les cas tests.

A moins que cela soit spécifié, les caractéristiques du sol ne changent pas.

4.3.5 Bassin de retenue

Le premier cas test consiste en un simple bassin de retenue. Ce cas est le plus classique des cas tests réalisables avec une digue. Dans notre cas, la condition frontière gauche correspond à un débit de fuite autorisé comme nous l'avons défini à la section 4.3.2.3.

Au cours de la simulation, l'eau du réservoir va s'infiltrer dans la digue jusqu'à atteindre un état d'écoulement permanent. La pression imposée par le réservoir aux éléments frontières de la digue est hydrostatique et la charge hydraulique dans celui-ci est constante, valant 4 [m].

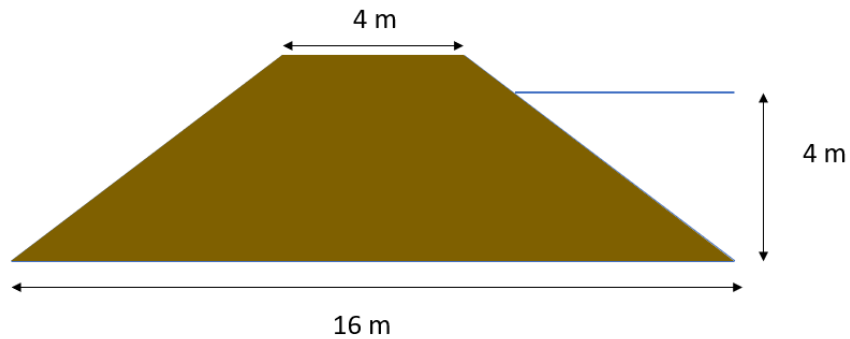
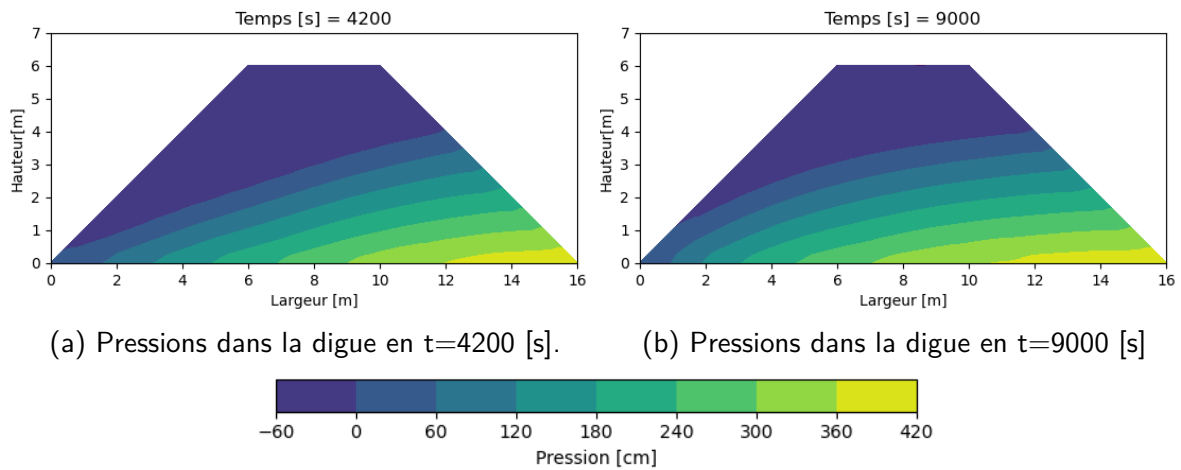


FIGURE 4.24 – Géométrie et niveau de l'eau dans le réservoir.

Les valeurs des pressions obtenues au cours des simulations sont visibles aux figures 4.25a et 4.25b.



De la même façon, nous pouvons obtenir l'évolution de la charge hydraulique en ajoutant la position verticale des cellules aux valeurs de pression obtenues. Cela donne, par exemple, les résultats à la figure 4.26.

Mettre en évidence la charge hydraulique en lieu et place des pressions permet d'afficher les lignes d'équipotentiels et donc d'observer dans quelle direction l'eau se déplace puisque ces lignes sont perpendiculaires aux lignes de courant dans le milieu saturé.

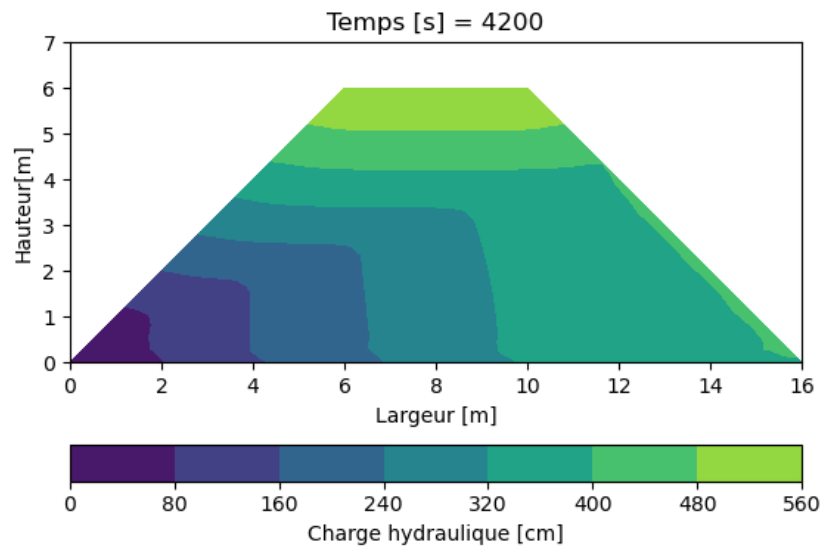


FIGURE 4.26 – Charge hydraulique en $t = 4200$ [s].

4.3.6 Couplage sol-atmosphère

Déterminer le comportement des digues lorsqu'elles sont sujettes à des conditions climatiques extrêmes est indispensable.

L'influence de ces conditions va augmenter au cours des prochaines années au vu de l'augmentation du nombre d'événements climatiques de grande intensité. Dans beaucoup de régions, des précipitations intenses dans un laps de temps très court ont lieu, provoquant des variations rapides de la teneur en eau des digues. Il s'agit donc de comprendre quelle influence une sécheresse extrême ou des précipitations intenses ont sur le flux interne de la digue.

Afin de vérifier le fonctionnement du code de calcul, différents cas tests seront effectués.

4.3.6.1 Cas test : sécheresse imposée en frontière à une digue saturée

La sécheresse à la surface de la digue est matérialisée par une condition de Dirichlet imposée aux frontières ($h = -50$ [cm]). Les conditions initiales de ce cas test sont une saturation de l'ensemble des éléments de la digue ($h = 5$ [cm]). Comme attendu, nous observons qu'un front de désaturation se propage depuis les frontières supérieures de la digue. On assiste à un assèchement progressif de la digue.

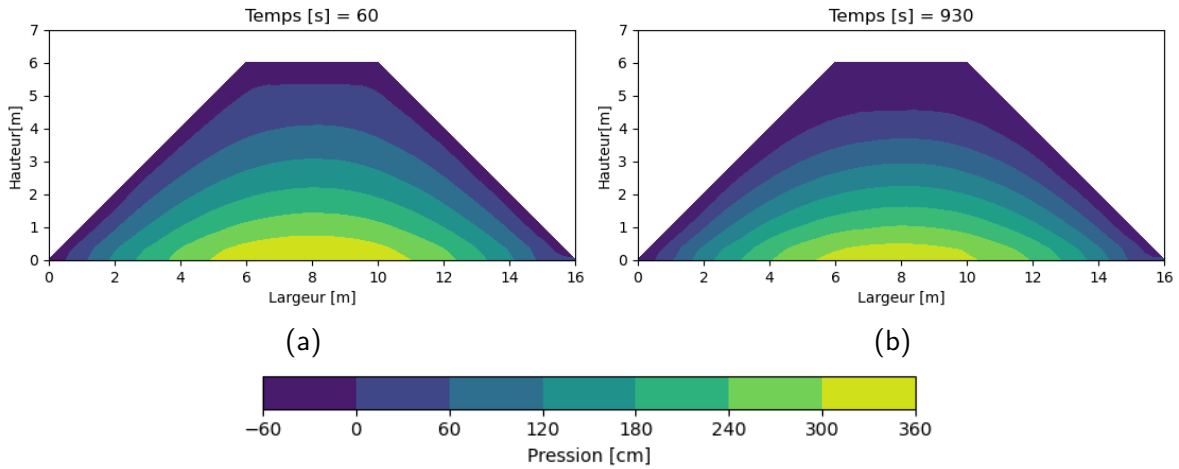


FIGURE 4.27 – Pressions dans la digue suite à la sécheresse

4.3.6.2 Cas test : Précipitations intenses

L'étude de la prise en compte des précipitations par des modèles de Richards a fait l'objet de nombreux articles dans le domaine de l'hydrologie (DUSSAILLANT et al., 2004 ; ZHU et al., 2018) . Ces travaux étudient l'effet du drainage, de l'augmentation des zones imperméables due à l'urbanisation ou encore des techniques de retenue sur l'infiltration de l'eau.

Ces travaux font souvent usage d'une formule permettant de calculer le débit s'infiltrant dans le sol. Cette formule est un simple bilan prenant en compte la part d'eau ruisselant sur le sol (Q_{RUNOFF}), le débit de pluie (Q_{RAIN}), et la variation de la quantité d'eau qui recouvrait déjà le sol :

$$A \frac{dh_s}{dt} = Q_{\text{RAIN}} + Q_{\text{RUNON}} - Q_{\text{INFILTRATION}} - Q_{\text{RUNOFF}} \quad (4.40)$$

Où A est la surface de sol concerné, h_s la hauteur d'eau recouvrant initialement la digue, Q_{ON} le débit s'écoulant sur le sol venant d'autre part.

Dans le cadre de ce travail, nous imposerons un débit correspondant directement à l'infiltration dans le sol.

Considérons par exemple une pluie d'une intensité de 40 [mm/h] . La tranche de digue considérée est épaisse d'un mètre. Prenons l'hypothèse, peu réaliste, que l'ensemble des précipitations s'infiltre. La quantité de pluie, convertie en $\text{[cm}^2/\text{s]}$, correspond au débit d'infiltration suivant : $Q_{\text{Infiltration}} = 0.00111 L_{\text{bound}} \text{[cm}^2/\text{s]}$. Où L_{bound} désigne la longueur de l'arête frontière.

Cette quantité est rajoutée au vecteur $\mathbf{c}$ 4.35 sous la forme :

$$c[i]^+ = Q_{Infiltration} \quad (4.41)$$

Les résultats obtenus sont observables aux figures 4.28a et 4.28b.

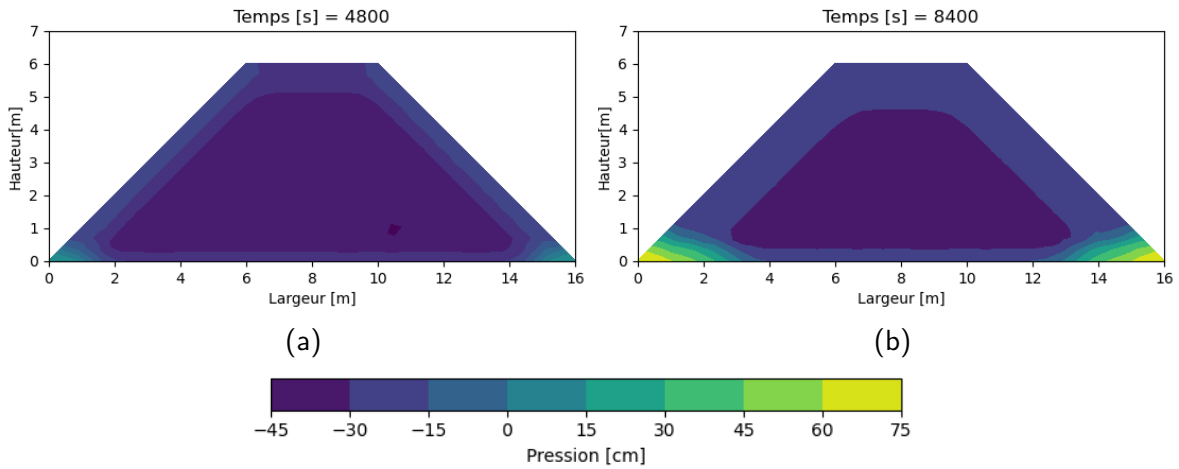


FIGURE 4.28 – Pressions dans la digue suite aux précipitations

L'eau qui pénètre dans la digue s'infiltre sous l'effet de la gravité dans la digue. Nous pouvons observer que le flux s'infiltre dans la digue et que l'eau s'accumule en pied de talus.

Il reste à prouver que la masse est conservée au cours du temps. Cela nécessite de calculer à chaque pas de temps le volume complémentaire présent dans la digue. Pour ce faire il faut intégrer sur chaque élément du maillage la différence de volume d'eau. Ensuite, il faut comparer ce volume à celui calculé avec la formule 4.41. Comme nous pouvons l'observer à la figure 4.29 la masse est conservée. Les volumes d'eau infiltrée et de pluie à chaque pas de temps se confondent parfaitement ce qui correspond aux hypothèses.

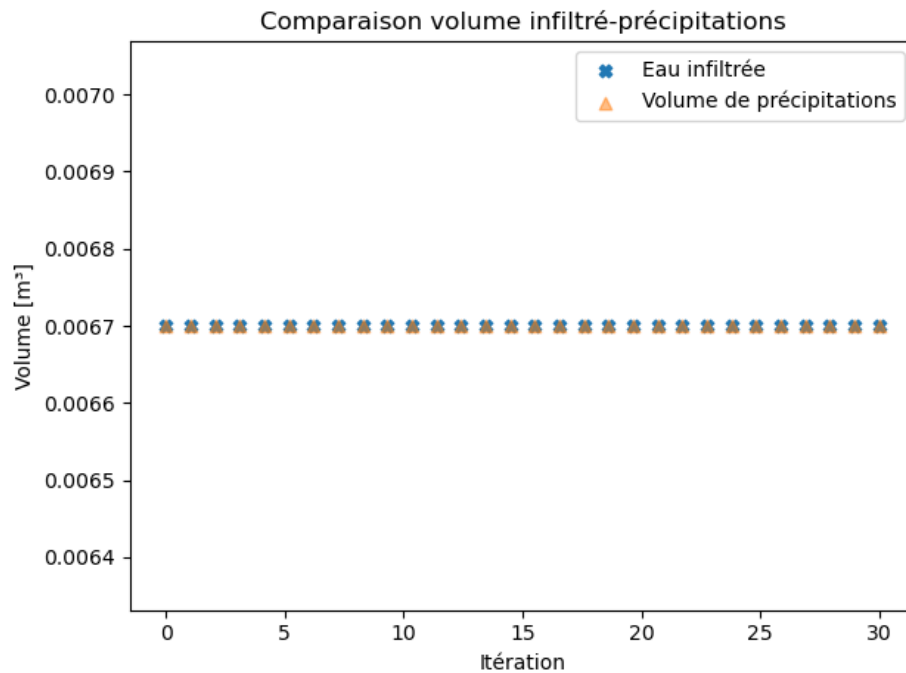


FIGURE 4.29 – Comparaison entre le volume additionnel dans la digue et le volume de pluie.

4.3.7 Etude de l'influence de la taille du maillage

Dans cette section, nous allons étudier l'influence de la taille du maillage sur les résultats et sur le temps de calcul.

Pour effectuer les comparaisons, nous allons utiliser différents cas tests décrits précédemment.

4.3.7.1 Cas test 1 : frontières imperméables

Ce cas test correspond à nouveau au cas 4.1.5.1. Différents raffinements de maillages ont été utilisés. La colonne de sol considérée est large de 50 [cm] et haute de 100 [cm].

Taille du maillage [cm]	1	2	4
Temps de calcul [s]	971	45	3.5

TABLE 4.3 – Temps de calcul.

On observe très peu de différences entre les résultats des différents maillages. En revanche le temps de calcul augmente fortement lorsque le maillage devient plus serré. Un maillage si raffiné ne semble donc pas pertinent dans ce cas.

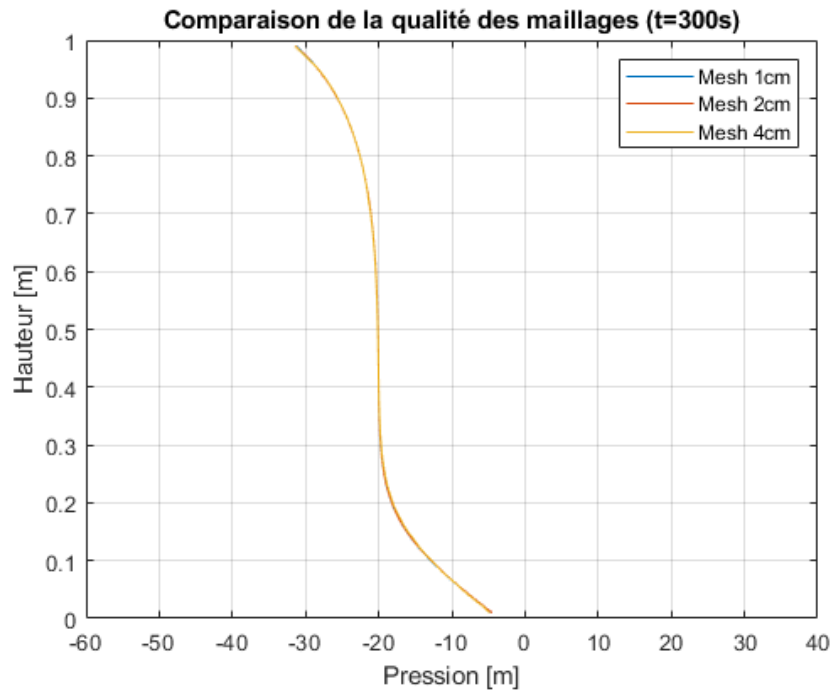


FIGURE 4.30 – Comparaisons des résultats en fonction du raffinement des maillages.

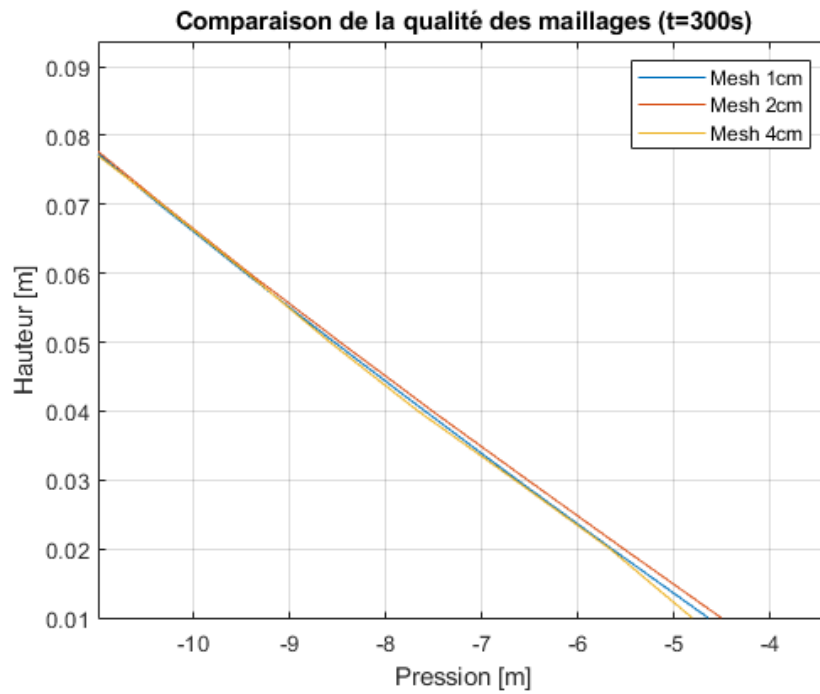


FIGURE 4.31 – Zoom sur les résultats.

4.3.7.2 Cas test 2 : pression imposée

Ce cas test est repris de la section 4.1.5.2. A nouveau différentes tailles de maillage ont été utilisées. On observe une légère différence de pression entre les profils obtenus selon l'un ou l'autre maillage. Cependant ces différences ne s'avèrent pas extrêmement grandes et les résultats avec le maillage plus grossier sont satisfaisants.

Taille du maillage [cm]	1	2	4
Temps de calcul [s]	/	101	11.77

La comparaison n'a pas été effectuée avec le maillage d'1 [cm] au vu du temps de calcul nécessaire.

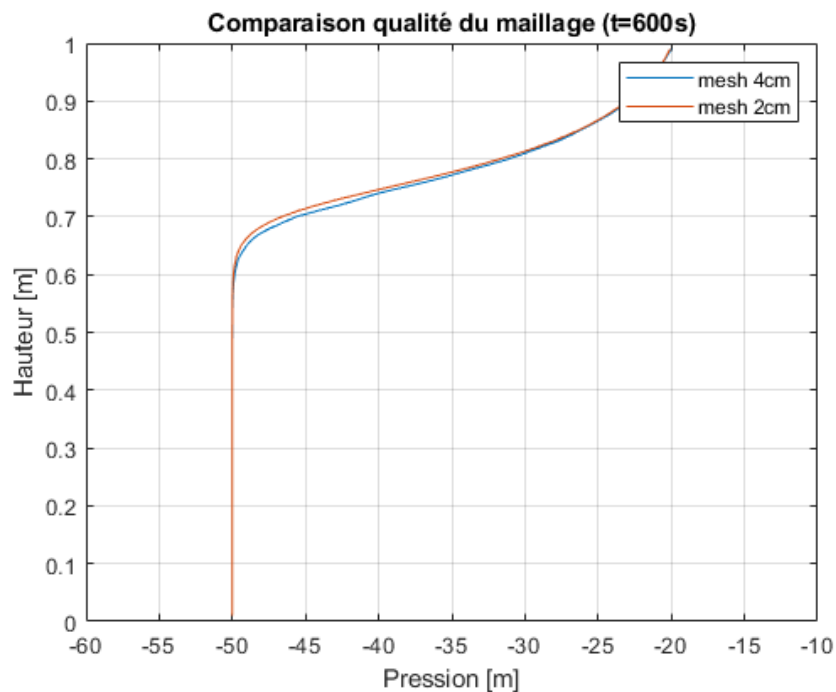


FIGURE 4.32 – Comparaisons des résultats en fonction du raffinement des maillages.

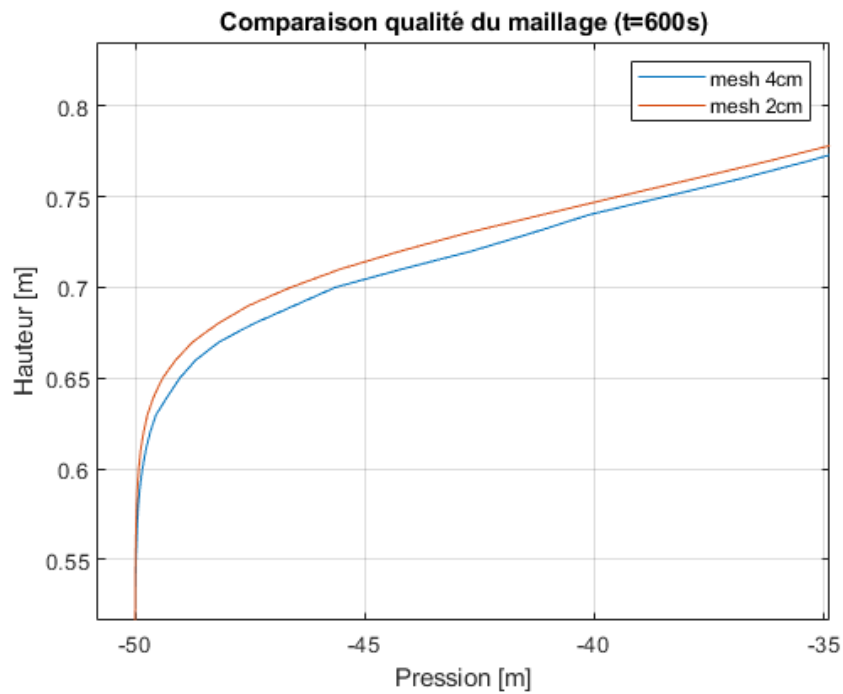


FIGURE 4.33 – Zoom sur les résultats.

4.3.8 Etude de l'influence du pas de temps

En s'appuyant sur le cas test de la section 4.1.5.1, nous allons réaliser une étude de l'influence du pas de temps sur la précision des résultats. Après 300 secondes, les résultats obtenus sont visibles à la figure 4.34.

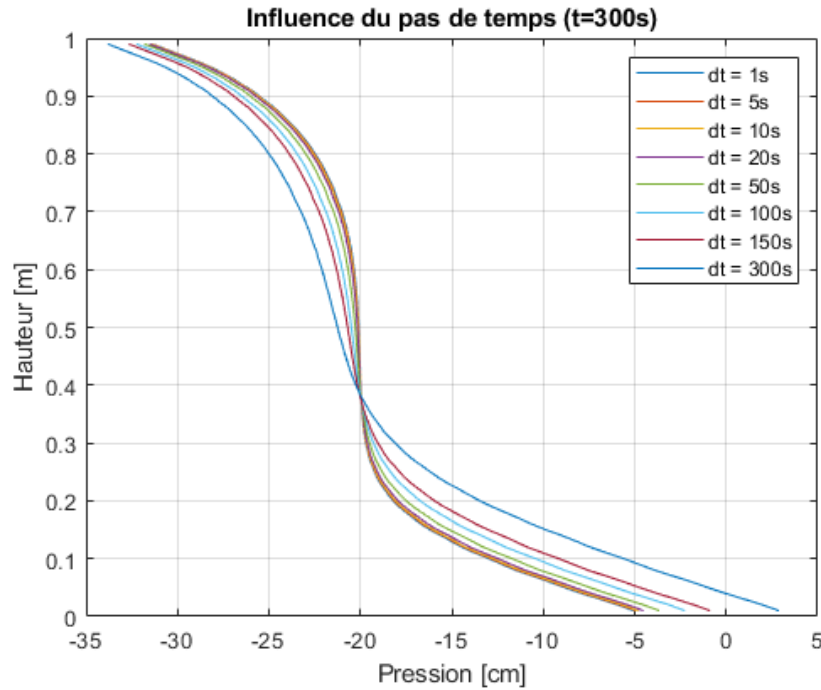


FIGURE 4.34 – Comparaison des résultats obtenus en fonction du pas de temps.

Pour commencer, la méthode est stable pour chaque pas de temps. Nous pouvons observer que les résultats obtenus sont très similaires pour les pas de temps relativement faibles. De même, constatons que les pas de temps plus élevés ont un comportement plus diffusif. Afin d'effectuer une analyse complète, nous utilisons un indicateur de dispersion : le RMSE.

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2}{n}} \quad (4.42)$$

Où $\hat{y}_i$ est la valeur observée et y_i est la valeur de référence (ici la valeur obtenue avec $dt = 1[s]$). Sa valeur fournit un indice sur la dispersivité des valeurs obtenues en fonction du pas de temps choisi.

Pas de temps dt [s]	1	5	10	20	50	100	150	300
Temps de calcul [s]	32.22	8.16	6.02	4.85	2.65	1.38	1.25	1.3
RMSE [cm]	0	0.052254	0.117483	0.247614	0.635223	1.270965	1.893433	3.662925

TABLE 4.4 – RMSE obtenu en fonction du pas de temps.

Nous observons donc que la dispersivité augmente de façon significative avec le pas de temps. Au vu du temps de calcul observé, nous pouvons considérer, pour ce cas test, qu'un pas de temps entre 5 et 10 secondes est un bon compromis à la fois en terme de temps de calcul et de résultats.

4.3.9 Etude de l'influence de la saturation initiale

L'influence de la saturation initiale sur la vitesse de propagation ne peut pas être négligée. Pour observer de quelle façon la saturation initiale de la digue joue un rôle, nous allons à nouveau imposer une pression hydrostatique à la digue. La condition frontière gauche de la digue est imperméable.

Diverses saturations initiales ont donc été considérées et l'observation principale est qu'un degré de saturation initial plus élevé favorise une saturation de la digue plus rapide. A des fins de comparaisons, les différents résultats obtenus après 1440 secondes de simulation sont obtenus.

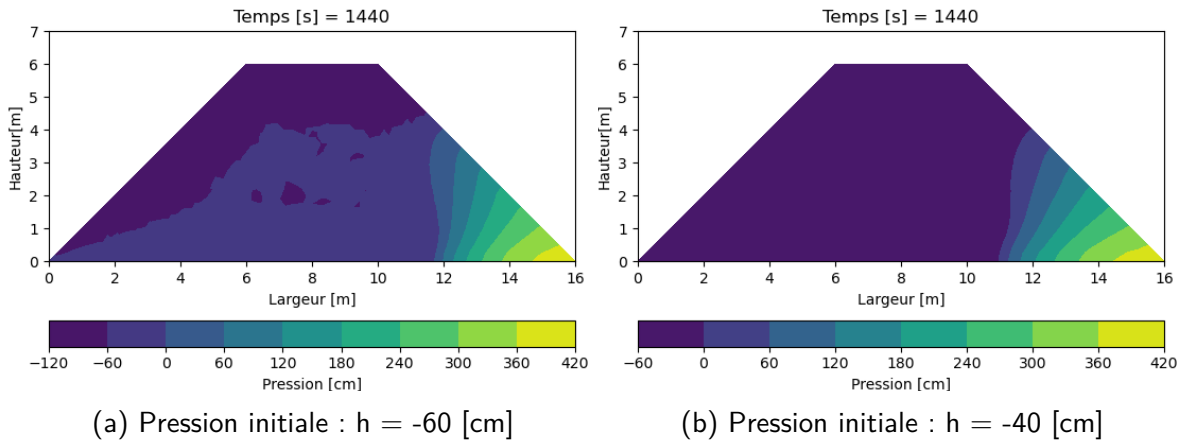


FIGURE 4.35

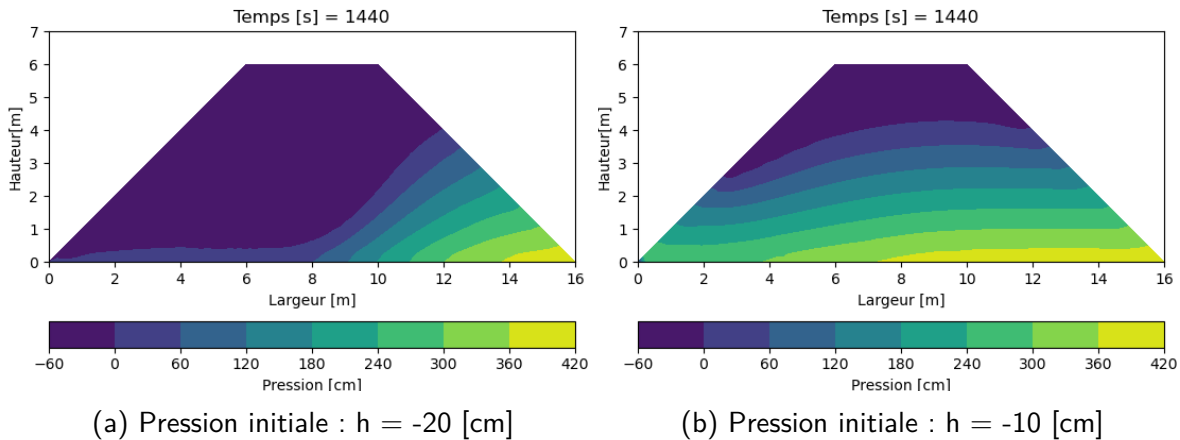


FIGURE 4.36

La propagation du front de saturation est donc logiquement facilitée par une saturation initiale plus élevée. Lorsque le sol est plus proche de la saturation, le gradient de pression, moteur de l'écoulement, est moins élevé. Cependant, la conductivité hydraulique dans un sol saturé est plus importante et il faut moins d'eau pour saturer chaque élément du sol.

4.3.10 Remplissage et vidange d'un bassin le long de la digue

Le cas test suivant consiste à observer de quelle façon la pression évolue à l'intérieur de la digue lorsque de l'eau est stockée d'un côté et ensuite est enlevée rapidement. Pour simuler cette situation, une pression hydrostatique est imposée de $t = 0$ [s] jusqu'à $t = 5000$ [s] laquelle est ensuite enlevée afin de reproduire un phénomène de chasse d'eau.

Tant que le réservoir est rempli, la pression interstitielle est élevée. Cela ne pose pas de problème car cette pression est stabilisée par la présence externe du réservoir. Lorsque le réservoir se vide, la pression est toujours présente mais l'effet stabilisateur a disparu. Dès lors c'est une situation qui est potentiellement critique pour la stabilité de la digue.

Pour éviter que ce type de situation arrive dans la réalité, il faut relâcher l'eau présente dans le réservoir de façon mesurée, pas soudainement. Il n'en reste pas moins que l'hypothèse de relâchement soudain est assez bonne pour un dimensionnement car celle-ci est conservatrice. Les résultats obtenus sont visibles aux figures 4.38a et 4.38b.

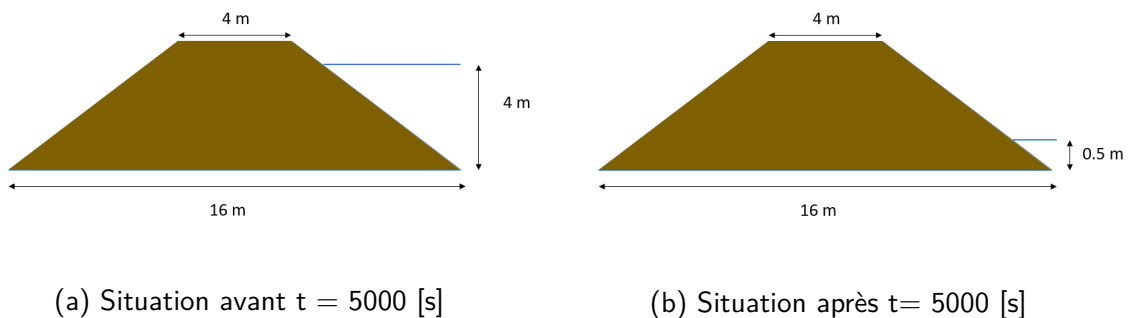


FIGURE 4.37

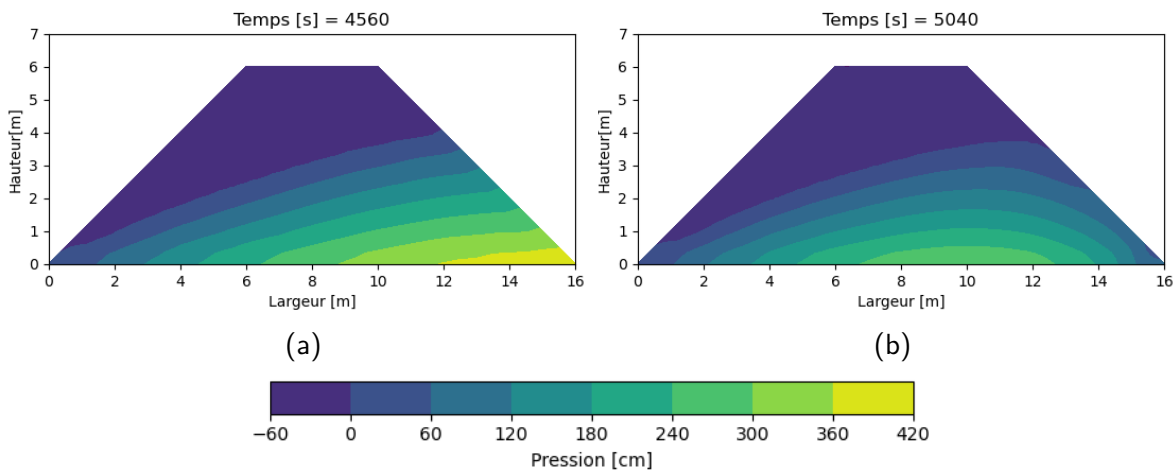


FIGURE 4.38 – Pressions dans la digue avant/après la vidange

Lors des 5000 premières secondes, nous observons la progression du front de saturation dans la digue. De même, lorsque la chasse d'eau a lieu, la pression interstitielle du sol proche du réservoir diminue soudainement mais le sol au milieu de la digue subit encore des pressions interstitielles importantes.

4.3.11 Influence de la conductivité

La conductivité a une influence prépondérante dans la vitesse de propagation de l'eau dans le sol. Divers cas tests sont réalisés afin de mettre en évidence son action. Le pas de temps utilisé est de 30 [s] et la pression initiale dans la digue est de -40 [cm].

A l'évidence, ce paramètre est d'une importance capitale dans la conception des digues en terre. Souvent, une couche imperméable est mise en couverture afin d'étanchéifier la digue ou au moins de limiter les effets d'entrée et de sortie de l'eau.

De même, il existe des digues dont la conception consiste à placer un noyau imperméable au coeur de la digue. Ce noyau est composé en général de sols argileux ou limoneux donc la conductivité hydraulique est limitée.

Nous verrons dans cette section que le modèle réalisé permet de simuler les écoulements pour ces deux situations.

4.3.11.1 Comparaison de différentes conductivités

Le premier cas consiste à imposer une pression hydrostatique à une des frontières de la digue et à observer l'influence des différentes conductivités sur la pénétration dans le sol. Les conductivités plus élevées correspondent à des graviers et des sables grossiers alors que

les conductivités plus faibles correspondent à de l'argile. La condition frontière de la face gauche est imperméable.

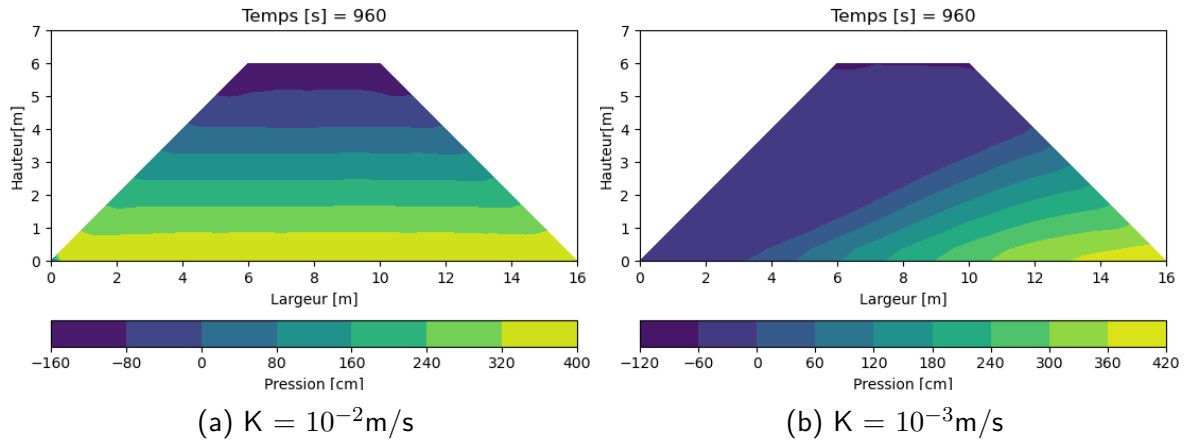


FIGURE 4.39

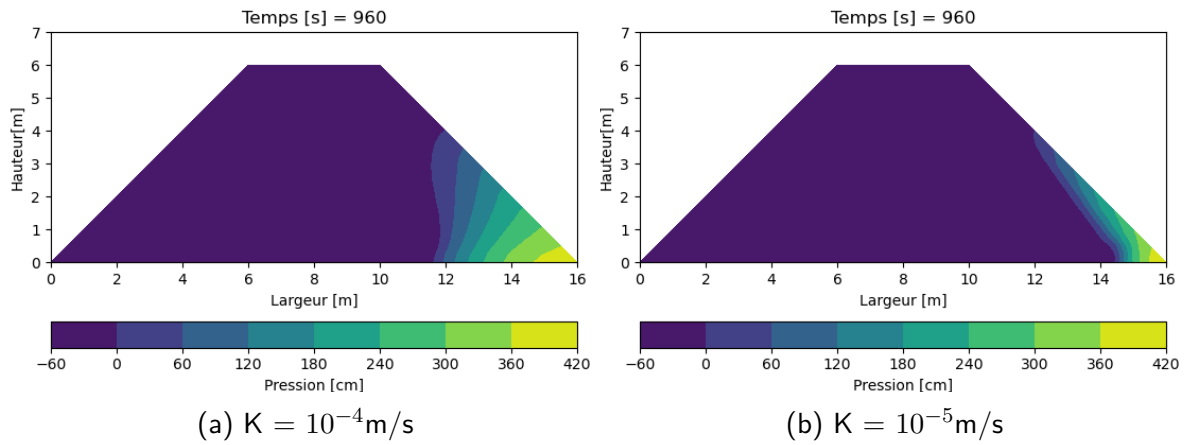


FIGURE 4.40

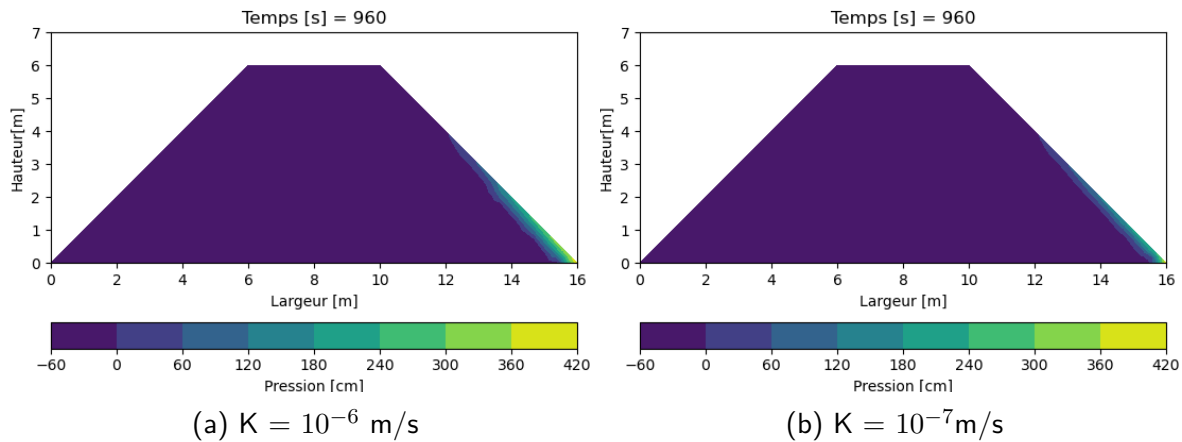


FIGURE 4.41

4.3.11.2 Coeur de digue imperméable

Dans certains cas, le coeur de digue peut être réalisé avec un matériau plus imperméable. Celui-ci peut être constitué d'argile ou de limon. C'est une technique qui permet d'assurer l'étanchéité de la digue en terre. Outre cette technique, il est également possible d'assurer l'étanchéité via un voile en béton ou via une couche externe de matériau imperméable tel que de l'argile ou un géotextile.

La géométrie choisie pour le noyau est présentée à la figure 4.42.

Observons donc quelle est l'influence de ce dispositif sur la propagation de l'eau dans la digue.

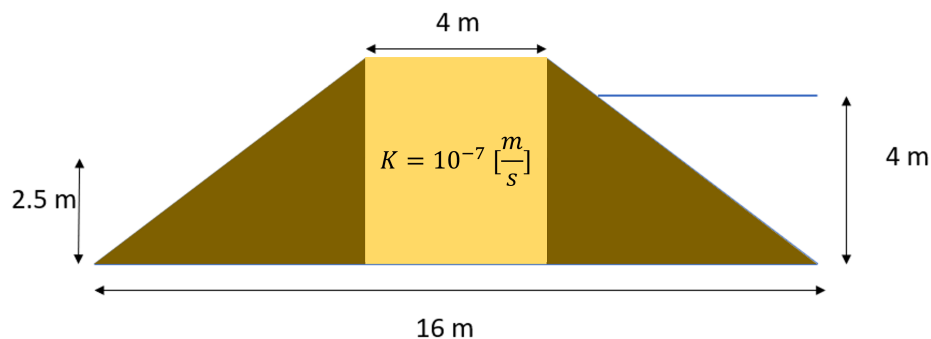


FIGURE 4.42 – Coupe de la digue avec un coeur constitué d'argile.

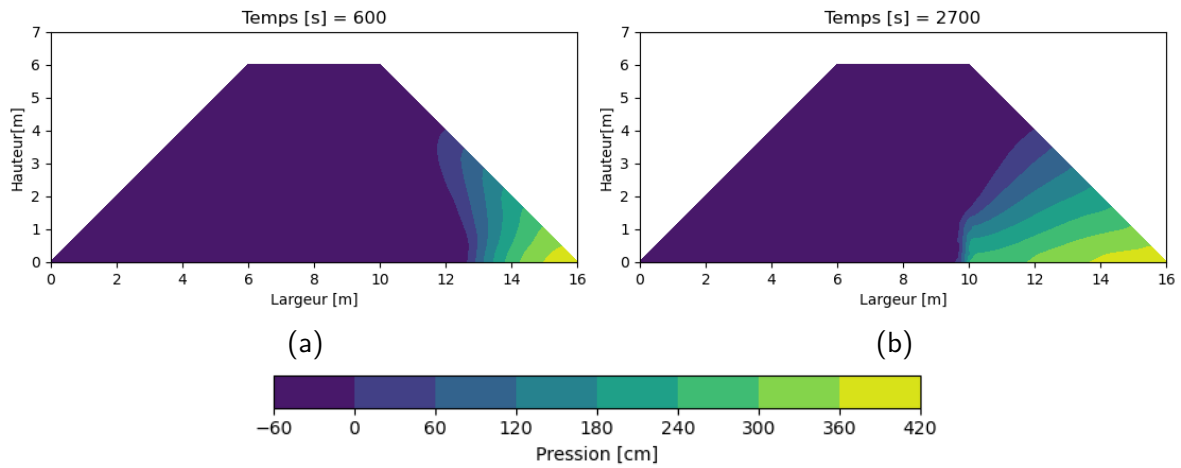


FIGURE 4.43 – Pressions dans la digue avec un noyau en argile.

Ce cas test permet donc de mettre en évidence l'impact du coeur en argile sur la pénétration de l'eau dans la digue. Comme attendu, l'eau s'accumule en amont du noyau. A long terme l'eau pénétrera le noyau mais les fluctuations rapides de pression sont exclues.

4.3.12 Calcul des vitesses

A l'aide de la loi de Darcy-Buckingham, il est possible d'évaluer les vitesses des flux dans le sol.

La loi de Darcy exprime, pour rappel que le flux surfacique est lié à la conductivité ainsi qu'au gradient de cote piézométrique.

$$\vec{q} = -K(h) \cdot \vec{\nabla} H \quad (4.43)$$

La méthode utilisée pour calculer la vitesse à chaque cellule est la suivante :

1. Calcul de la vitesse entre les 2 cellules par le chemin direct :

$$v_{1,2} = -K_{interface} \left(\frac{H_2 - H_1}{d_{1,2}} \right) \quad (4.44)$$

Où $d_{1,2}$ est la distance entre les centres des cellules et H_1, H_2 la charge hydraulique de chaque cellule.

2. Evaluation de l'angle α caractérisant l'orientation de l'interface :

$$\alpha = \left| \arctan\left(\frac{n_z}{n_x}\right) \right| \quad (4.45)$$

3. Calcul de la vitesse dans la direction x et z :

$$\begin{cases} q_x = \text{signe}(dx) v \cos \alpha \\ q_z = \text{signe}(dz) v \sin \alpha \end{cases} \quad (4.46)$$

Le signe(dx) permet de donner l'orientation finale de la vitesse.

Finalement, la vitesse moyenne pour une cellule est calculée en réalisant la moyenne des vitesses à chaque interface.

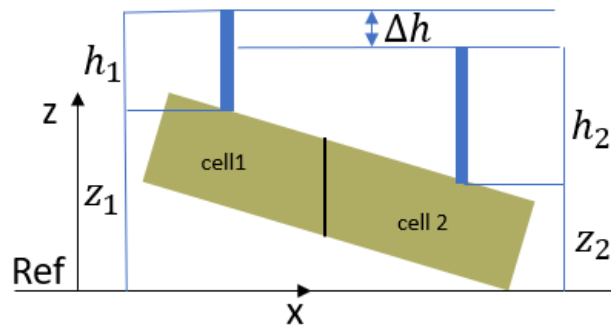


FIGURE 4.44 – Schéma de mise en contexte.

4.3.12.1 Cas test 1 : frontières imperméables

Il s'agit ici d'afficher les vitesses obtenues en appliquant strictement les expressions précédentes. Le cas test réalisé correspond à nouveau au cas test 4.1.5.1. Cependant, la condition frontière inférieure correspond à une condition de perméabilité, signifiant que l'eau peut s'écouler et s'échapper du sol par le bas.

L'objectif est donc d'observer le champ de vitesse obtenu. En toute logique la vitesse dans la partie supérieure du sol, qui se désature plus rapidement, doit être inférieure à celle dans la partie inférieure du sol. Cela est dû à l'expression de la conductivité dans un sol non saturé. Comme nous l'avons exprimé à la section 2.4.3, celle-ci décroît fortement lorsque le sol se désature.

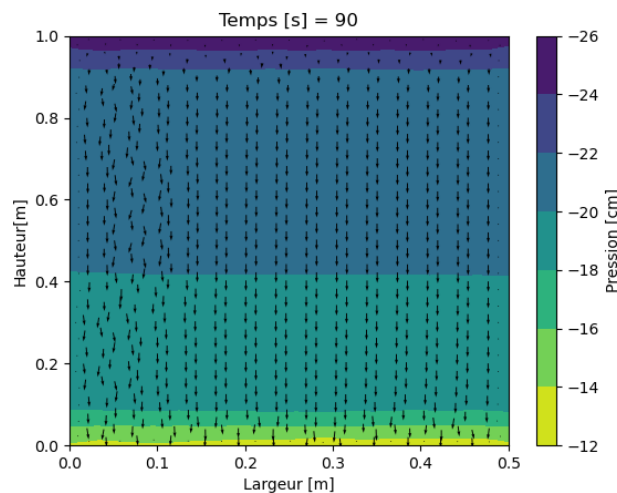


FIGURE 4.45 – Champ de vitesse obtenu en $t = 90$ [s].

Puisque le sol est relativement proche de la saturation initialement ($h = -20$ [cm]), nous observons que le champ de vitesses est assez égal. Les vitesses sont proches de la conductivité en saturation.

Après un certain temps, la partie supérieure s'est bien désaturée et nous observons que la vitesse dans ce secteur est proche de 0.

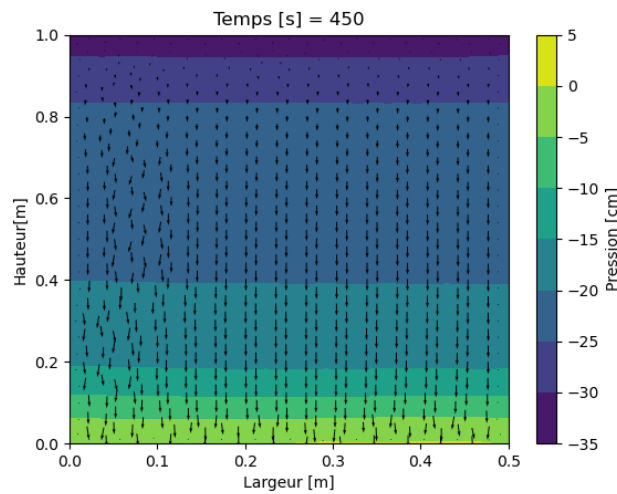


FIGURE 4.46 – Champ de vitesse obtenu en $t = 450$ [s].

4.3.12.2 Cas test 2 : Pression hydrostatique sur une digue

Nous pouvons également obtenir le champ de vitesses pour des cas plus complexes. Reprenons le cas de la digue qui retient un réservoir 4.3.5, et observons de quelle façon se comporte celui-ci.

Afin de montrer que le calcul des vitesses tel que développé à la section 4.3.12 est valable quelle que soit la direction du flux, montrons aux figures 4.47 et 4.48 les champs de vitesses obtenus selon que le bassin est à gauche ou à droite de la digue.

De plus les équipotentiels sont affichées à la place de la pression. Cela permet de montrer que, dans les zones saturées, les lignes de courant, représentées par le champ de vitesses, sont bien perpendiculaires aux équipotentiels, comme attendu dans ce type de flux.

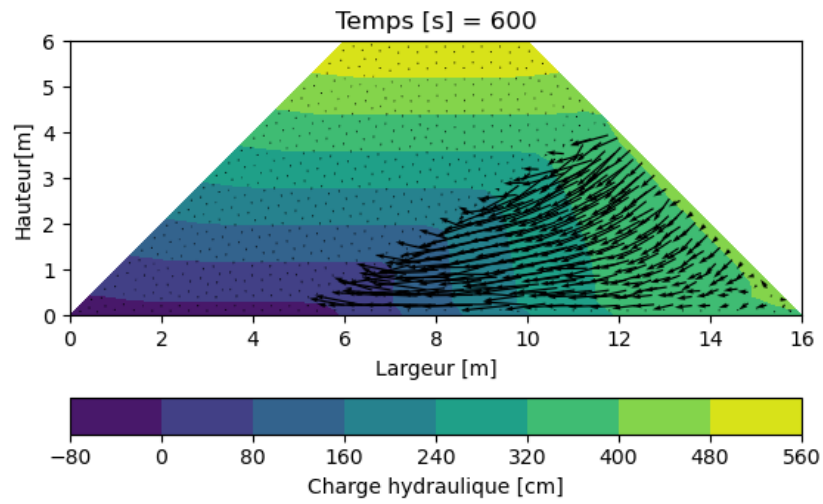


FIGURE 4.47 – Champ de vitesse obtenu en $t = 600$ [s], bassin à droite.

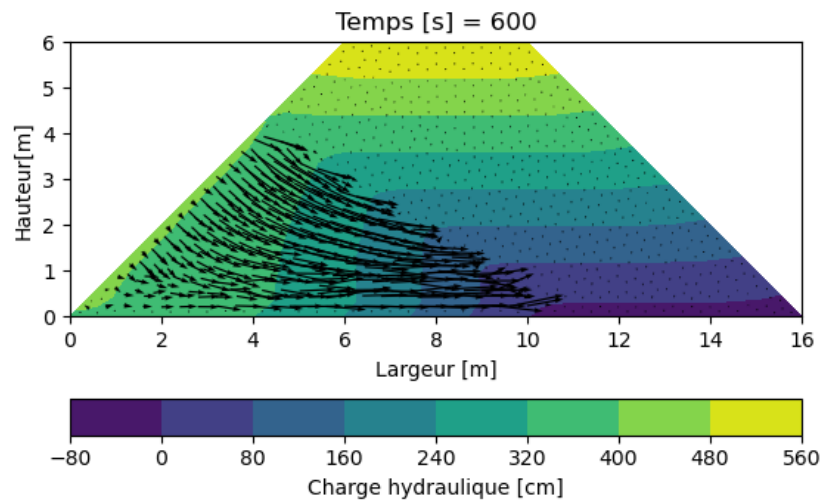


FIGURE 4.48 – Champ de vitesse obtenu en $t = 600$ [s], bassin à gauche.

4.3.13 Calcul des contraintes : cas tests

Dans cette section, nous appliquerons les concepts présentés au chapitre 3. Nous calculerons donc, en première estimation, les contraintes verticales totales et effectives que subit le sol pour plusieurs cas tests.

4.3.13.1 Bassin de retenue

Ce cas test est à nouveau repris du cas test 4.3.5. Il s'agit donc d'observer l'influence de la progression du front de saturation sur les contraintes effectives que doivent reprendre les grains du sol.

Dans l'ensemble, les contraintes totales ne vont pas varier comme nous le constatons aux figures 4.49a et 4.49b . Les seules variations observables seront dues à l'augmentation du poids volumique du sol saturé. Ces contraintes seront plus élevées du côté du bassin par le simple fait de la présence de la masse d'eau.

Les contraintes interstitielles sont présentées ici comme des contraintes de succion, ce qui implique simplement un changement de signe. Nous observons aux figures 4.50a et 4.50b que la succion a bien lieu dans les zones non saturées et que celle-ci diminue jusqu'à devenir une pression interstitielle lorsque le sol se sature.

Par conséquent, les contraintes effectives (4.51a, 4.51b) au sein de la digue diminuent lorsque ce front de saturation progresse. De même, nous observons (4.52a, 4.52b) que la résistance au cisaillement diminue avec la saturation du sol. C'est cette baisse de résistance qui est responsable des instabilités qui peuvent survenir dans les digues en terre saturées.



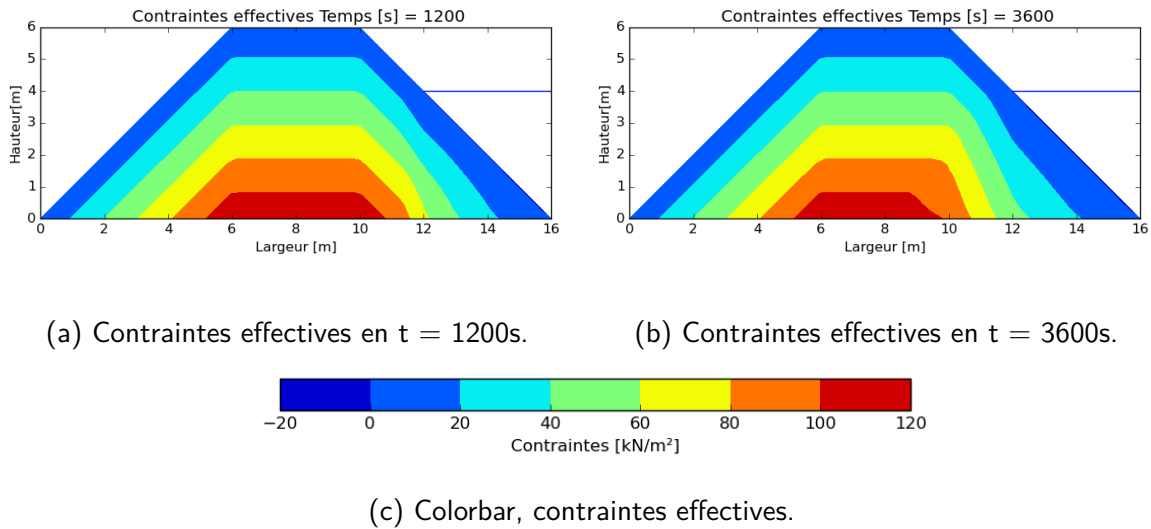


FIGURE 4.51

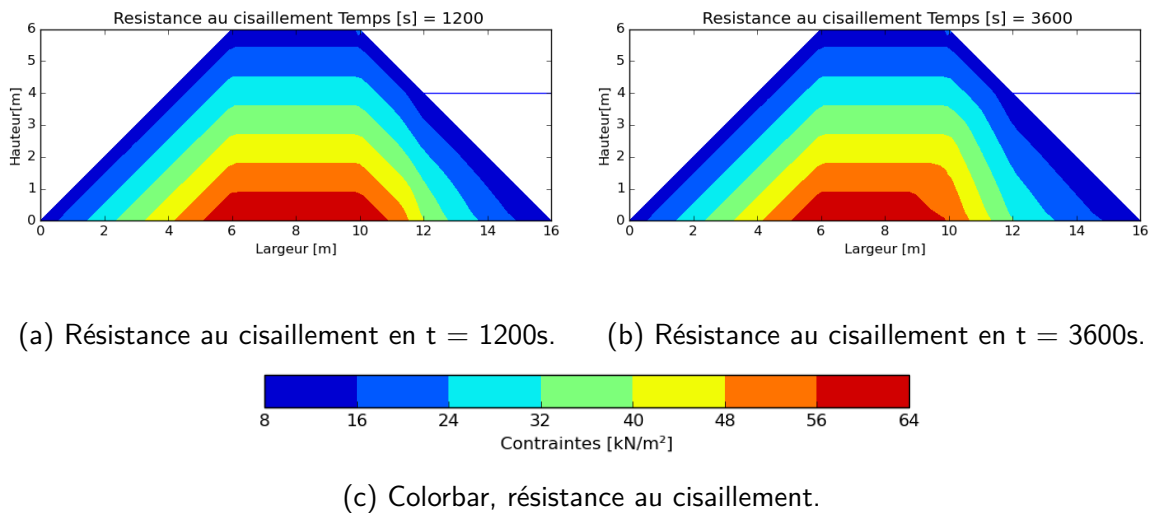


FIGURE 4.52

4.3.13.2 Cas test : Chasse d'eau

Ce cas test doit permettre de mettre en évidence l'influence d'une chasse d'eau, soit d'un retrait rapide de l'eau d'un réservoir attenant à une digue, sur les contraintes dans la digue. La géométrie présentée au cas 4.3.10 est reprise mais l'eau est ici relâchée après 2000 [s]. Nous observons aux figures 4.53a et 4.53b que le relâchement du bassin fait simplement

diminuer la contrainte totale dans la digue.

Les contraintes dues à la présence d'eau dans la digue diminuent fortement (4.54a,4.54b) lorsque l'eau est évacuée mais une certaine quantité d'eau est toujours dans la digue ce qui crée une pression hydraulique non évacuée dans la digue.

Dans le cas d'un écoulement à l'état permanent, nous pouvons nous attendre à une augmentation des contraintes effectives dans la digue lorsque l'eau est relâchée. C'est le cas ici pour une partie de la digue. Cependant certaines parties de la digue continuent de voir les contraintes effectives s'y appliquant diminuer. Cela est dû au fait que l'écoulement permanent n'est pas atteint et une certaine inertie dans l'écoulement est observée (4.55a et 4.55b).

Les estimations effectuées ne permettent pas de savoir si la stabilité de la digue est menacée. Pour cela il faudrait utiliser ou développer un modèle numérique permettant de calculer les contraintes de façon extensive.

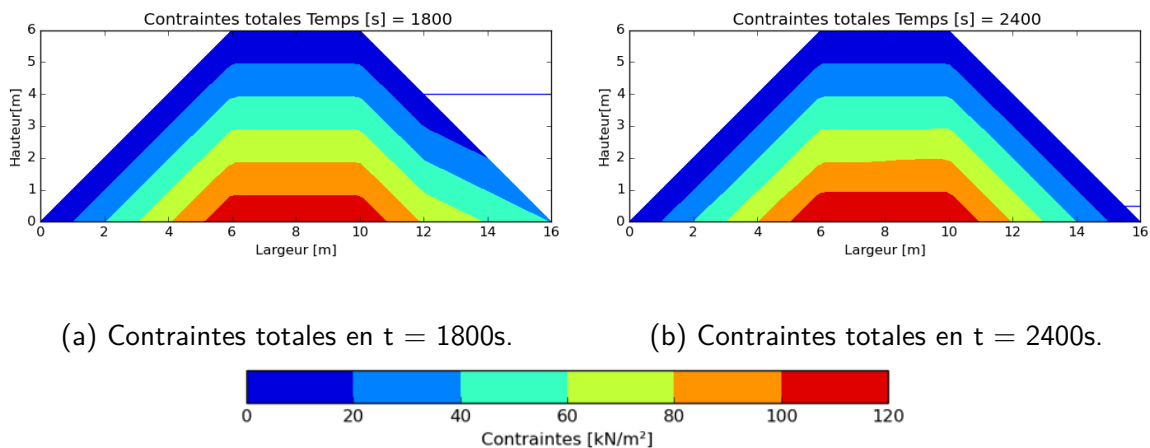


FIGURE 4.53

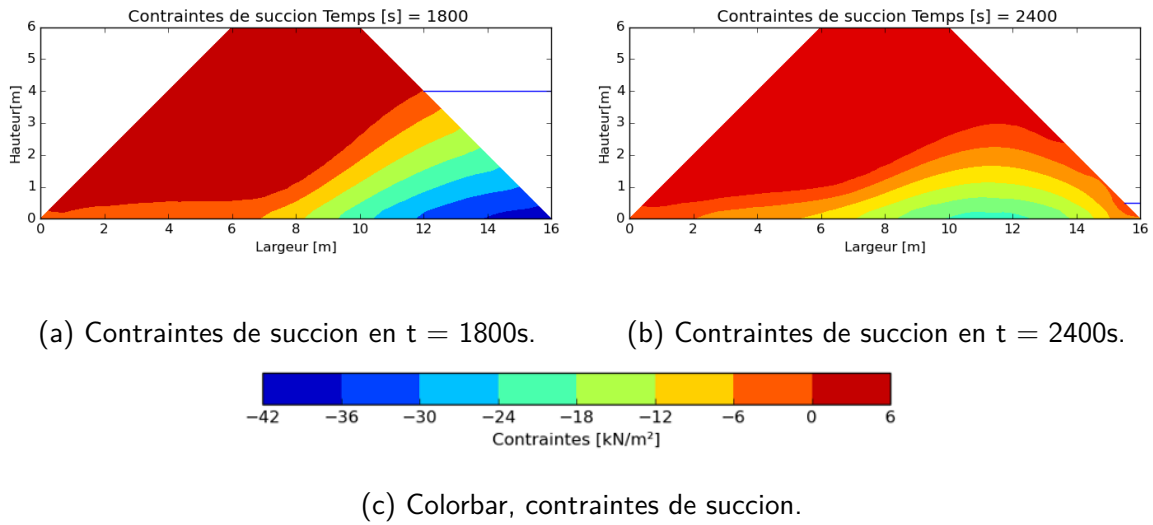


FIGURE 4.54

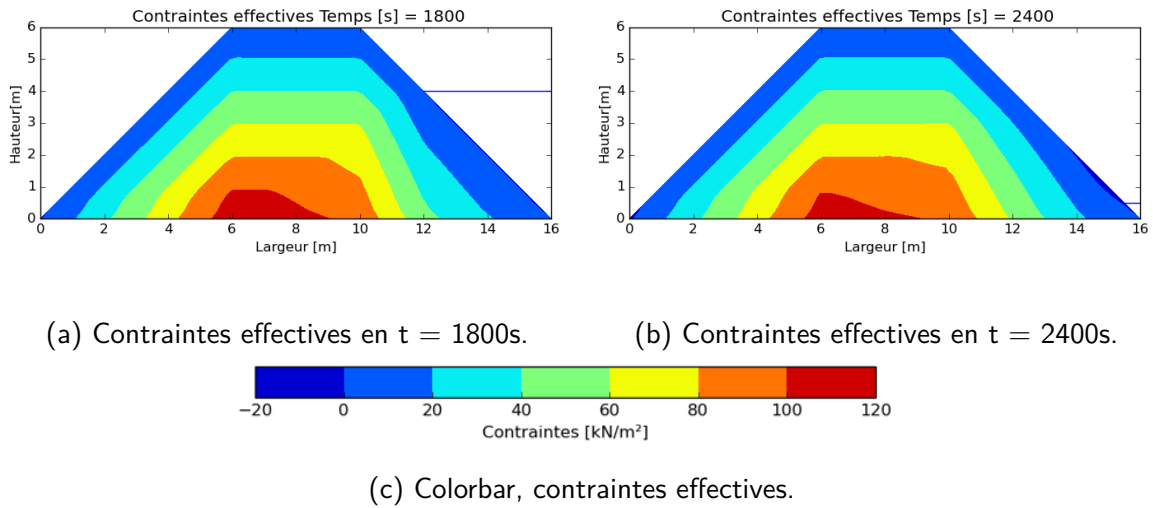


FIGURE 4.55

4.4 Hystérèse dans le modèle

Dans cette section nous tenterons de prendre en compte dans le modèle le comportement hystérétique du sol par rapport au processus de saturation.

Afin de mettre en évidence l'influence du choix de faire usage de la courbe de séchage, de mouillage ou encore de prendre en compte le processus complet d'hystérèse, nous ferons usage du cas test le plus simple : l'exemple de l'article de CAVIEDES-VOULLIÈME et al. (2013) 4.1.5.1.

Dans un premier temps, nous considérerons que tous les éléments du sol suivent la courbe de séchage, que ceux-ci soient en cours de séchage ou d'humidification. Ensuite le même raisonnement sera appliqué avec la courbe de mouillage. Enfin, nous utiliserons un algorithme qui permet à chaque élément du sol d'évoluer sur la courbe correspondant à son état, ce qui revient à prendre en compte le phénomène d'hystérèse.

Dans tous les cas, nous observerons l'impact que ces choix ont sur la vitesse de saturation dans les simulations et nous déterminerons si ces hypothèses sont conservatives.

4.4.1 Evolution selon la courbe de séchage

Dans cette section, nous ferons donc usage de la courbe de séchage pour décrire la relation $\theta - h$, ou, comme nous l'avons décrite à la section 2.4.1, la Soil-Water Retention Curve. Pour décrire cette courbe de séchage, nous prendrons $\alpha = 0.0335$ [1/cm].

La colonne de sol fait 1 mètre de haut, nous observerons le parcours réalisé sur la courbe de rétention par plusieurs cellules situées à différents points de la colonne.

Afin d'obtenir les comportements les plus nets, choisissons un point situé au sommet de la colonne ($z = 0.95$ [m]) 4.56, un point situé au milieu ($z = 0.5$ [m]) 4.57 et un point situé en bas ($z = 0.05$ [m]) 4.58.

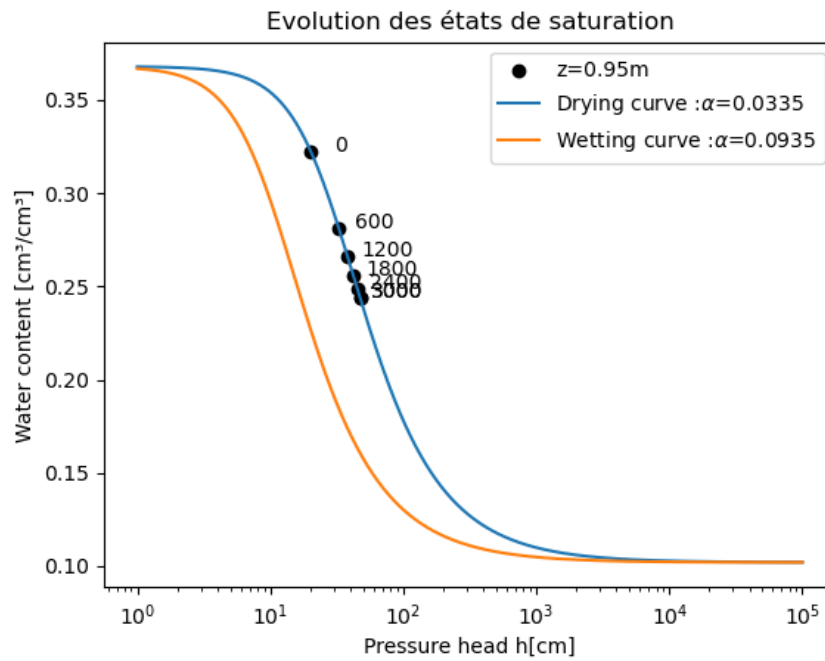


FIGURE 4.56 – Evolution de l'état de saturation, $z = 0.95$ [m].

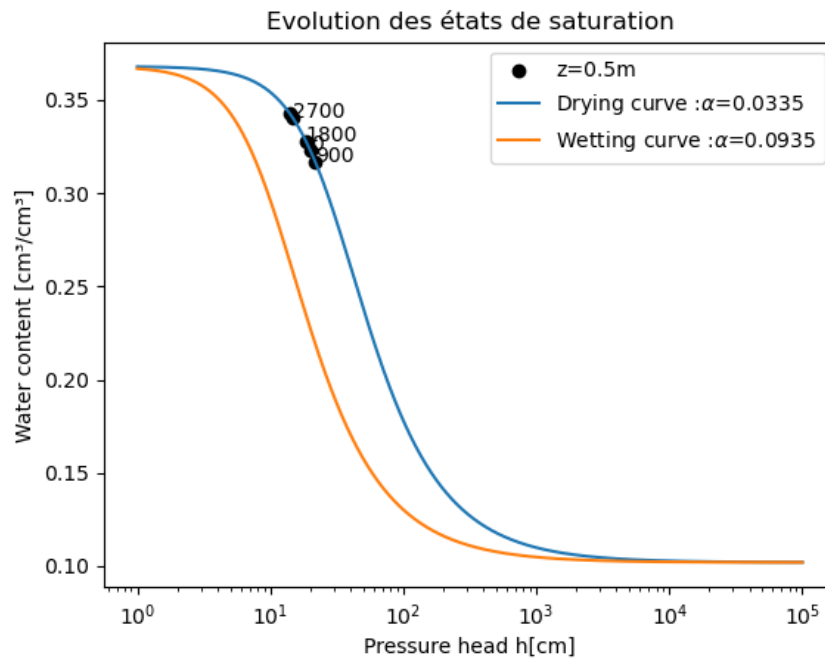


FIGURE 4.57 – Evolution de l'état de saturation, $z = 0.5$ [m].

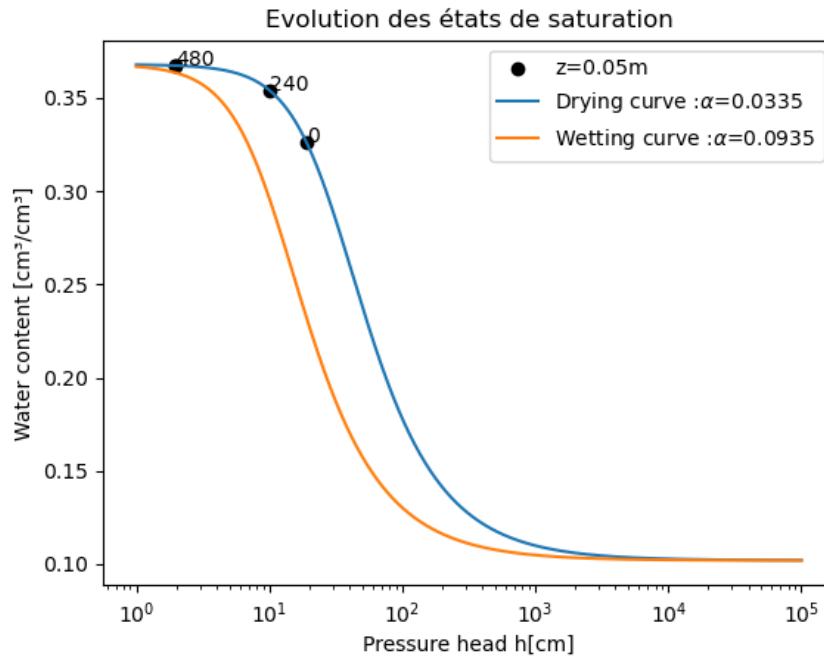


FIGURE 4.58 – Evolution de l'état de saturation, $z = 0.05$ [m].

Nous observons que le point situé dans la partie inférieure se sature très rapidement. Ce point subit une humidification mais se déplace sur la courbe de séchage. Nous verrons au point suivant quel est l'impact de cette approximation.

Le point situé au milieu de la colonne commence par se sécher avant de doucement se réhumidifier. Le point situé au sommet de la colonne s'assèche en continu, il se situe sur la courbe correspondant à son comportement.

4.4.2 Sans prise en compte de l'hystérèse : Wetting curve

Dans cette section, nous réaliserons la même simulation mais en en faisant usage de la courbe d'humidification ($\alpha = 0.0935$ [1/cm]).

Plusieurs observations peuvent être réalisées pour les 3 différents points :

- En $z = 0.95$ [m] 4.59 : nous observons bien que le sol s'assèche moins rapidement qu'avec la courbe de séchage. De plus, les valeurs de teneur en eau restent moins importantes qu'en faisant usage de la courbe de séchage, ce qui n'est pas conservateur car cela donne des poids volumiques moins importants.
- En $z = 0.5$ [m] 4.60 : il n'y a quasi aucune évolution de teneur en eau et de pression observée à ce point.
- En $z = 0.05$ [m] 4.61 : le sol se sature beaucoup moins rapidement qu'avec la courbe de séchage.

A nouveau cela est moins conservateur car la teneur en eau augmente moins rapidement.

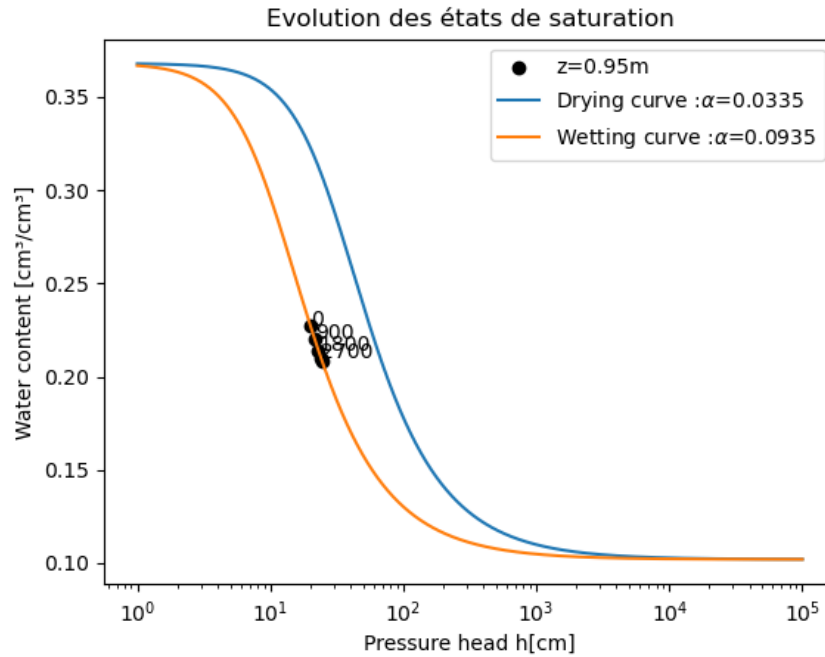


FIGURE 4.59 – Evolution de l'état de saturation, $z = 0.95$ [m].

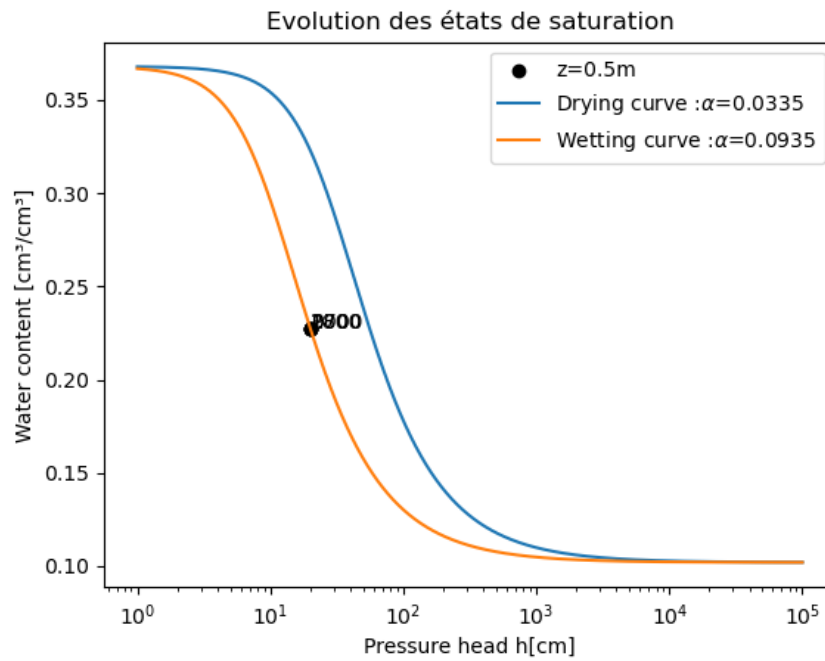


FIGURE 4.60 – Evolution de l'état de saturation, $z = 0.5$ [m].

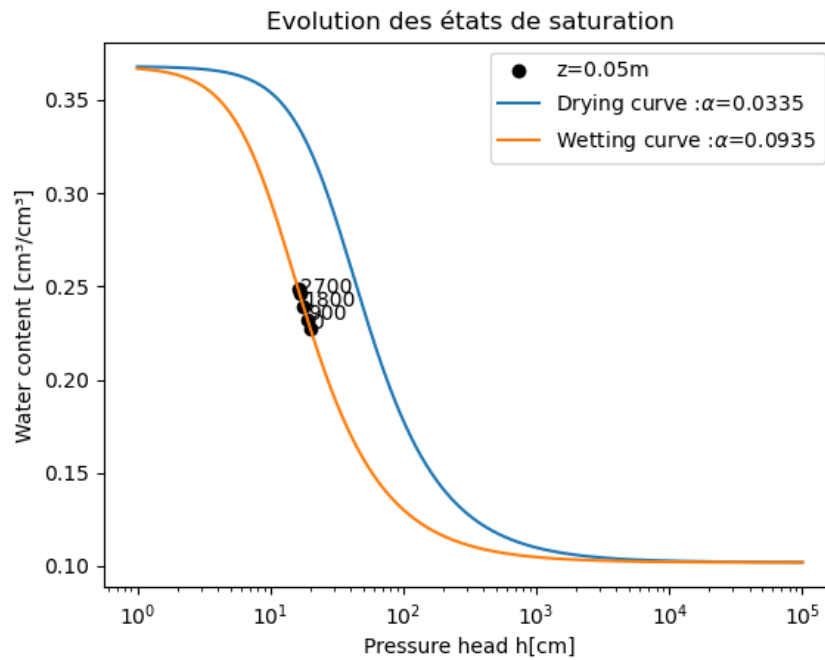


FIGURE 4.61 – Evolution de l'état de saturation, $z = 0.05$ [m].

Au vu des comparaisons que nous avons réalisées entre l'utilisation de la courbe de séchage et de mouillage, nous pouvons considérer que la courbe de séchage fournit des résultats plus conservateurs que la courbe de mouillage et qui seront donc dans tous les cas du côté de la sécurité.

4.4.3 Prise en compte de l'hystérèse

Dans cette section, nous prendrons en compte l'hystérèse dans le modèle. Dans un premier temps, nous aborderons ce problème de façon simplifiée. Ensuite, nous présenterons un algorithme qui doit permettre de prendre en compte l'hystérèse de façon généralisée.

4.4.3.1 Pré-assignation du comportement

Avant de faire usage d'un algorithme complexe, essayons de réaliser le même cas test en pré-assignant le caractère de séchage ou de mouillage de chaque cellule. Comme nous l'avons vu pour le cas test 4.1.5.1, le profil de pression dans le sol a une pente de 1. Nous avons observé que les cellules dont la position z est inférieure à 60 [cm] subissaient un processus d'humidification. De même, toutes les cellules dont la position en z est supérieure à 60 [cm], subissaient un processus de séchage.

Par conséquent, en première approche, considérons que le profil est identique. Nous assignons donc à chaque cellule son comportement en choisissant le paramètre α correspondant.

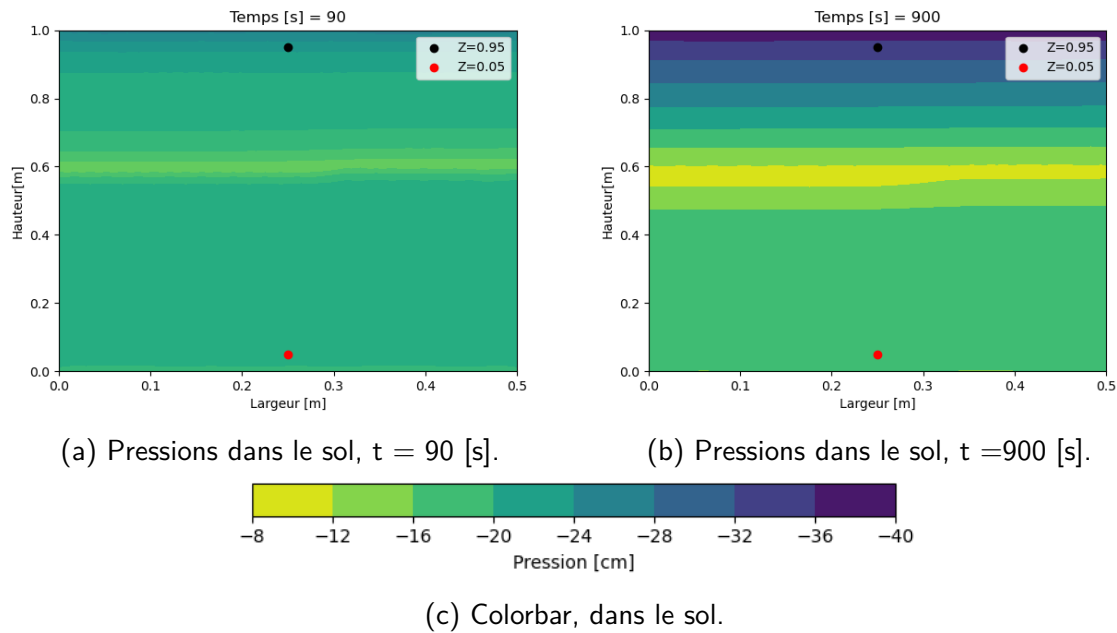


FIGURE 4.62 – Prise en compte de l'hystérèse par pré-assignation.

Comme nous l'observons à la figure 4.62, la prise en compte de l'hystérèse a une influence importante sur la vitesse de propagation de l'eau à travers le sol. En effet, nous pouvons observer qu'à la limite entre la zone de mouillage et de séchage ($z=60$ [cm]), il y a une accumulation d'eau. Cela est dû au fait que le sol ne peut pas s'humidifier aussi rapidement qu'il ne se sèche. Par conséquent, l'eau quitte la partie qui s'assèche et s'accumule en attendant de pénétrer dans la partie qui s'humidifie.

Observons sur la figure 4.63 de quelle façon évolue l'état de chacun des points sur les courbes d'hystérèse. La variation de teneur en eau est bien plus rapide pour le sol qui s'assèche que pour le sol qui s'humidifie.

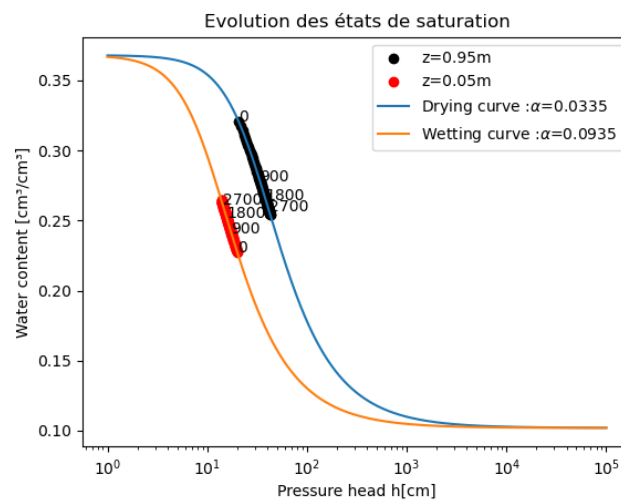


FIGURE 4.63 – Evolution de l'état de saturation aux 2 positions.

La pré-assignation réalisée est critiquable en plusieurs aspects :

- L'accumulation d'eau à l'interface mouillage-séchage devrait créer un passage sur la courbe de scanning pour les éléments concernés. Les éléments du sol suivant jusque là un séchage doivent passer sur la courbe de mouillage.
- Le processus expérimental requis pour réaliser ce test est, au mieux, improbable. En effet, cela nécessiterait de réaliser pour une partie d'un sol un séchage et pour l'autre un mouillage et ensuite de superposer ces deux quantités.

Ces deux remarques permettent de penser que cette façon de faire n'est pas optimale.

4.4.3.2 Prise en compte de l'hystérèse avec l'algorithme

Dans cette section nous développerons un algorithme permettant de prendre en compte l'hystérèse d'une façon plus générale. Cet algorithme permet à chaque élément du sol de s'identifier comme en mouillage ou en séchage, sur la courbe de scanning ou saturé.

L'algorithme est décrit à la figure 4.64.

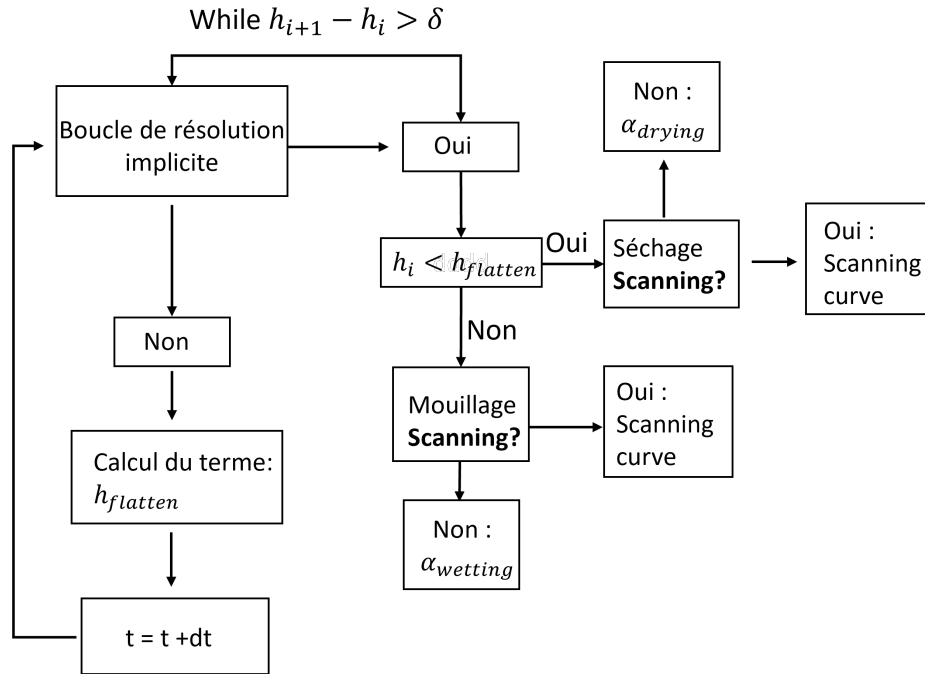


FIGURE 4.64 – Algorithme de prise en compte de l'hystérèse.

Au cours de chaque boucle d'itération servant à trouver la solution pour un temps t , une évaluation de l'état de séchage ou de mouillage est réalisée.

Cette évaluation est basée sur une comparaison entre la pression calculée et une pression lissée sur plusieurs pas de temps.

$$h_{flatten} = \frac{h_{i-1} + h_{i-2} + h_{i-3}}{3} \quad (4.47)$$

Ce lissage permet d'éviter les oscillations entre la courbe de séchage et la courbe de séchage en donnant une tendance moyennée de l'échantillon.

Afin de mettre à l'épreuve cet algorithme, commençons par réaliser le cas test désormais classique 4.1.5.1. Le sol a donc initialement une teneur en eau $\theta = 0.323$ et une pression $h = -20[cm]$.

Nous considérons ici, de façon plus réaliste, que le sol a été amené à cet état au cours d'un séchage. Par conséquent, l'ensemble des points du sol qui vont subir un mouillage vont devoir franchir la courbe de scanning.

Les points d'intérêt choisis sont situés à, respectivement, 5 [cm] de hauteur, 40 [cm] et 95 [cm] de hauteur.

Leur évolution dans le domaine (h, θ) est visible à la figure 4.65.

Nous observons que le point situé au sommet de la colonne subit un séchage continu. Le point situé à 40 [cm] de haut dans la colonne commence par se sécher puis subit une ré-humidification car les éléments inférieurs du sol sont déjà saturés. Enfin le point situé au bas de la colonne s'humidifie en continu jusqu'à être complètement saturé.

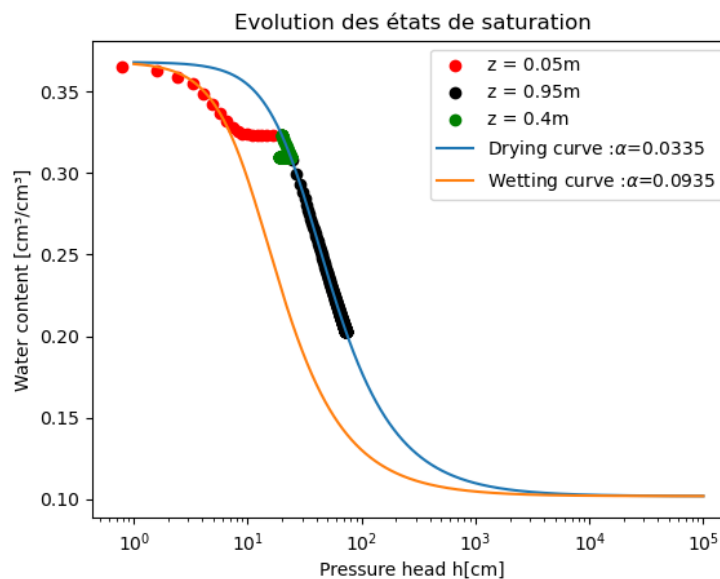


FIGURE 4.65 – Evolution des états aux points d'intérêt.

De même nous pouvons voir le résultat obtenu en deux dimensions aux figures 4.66

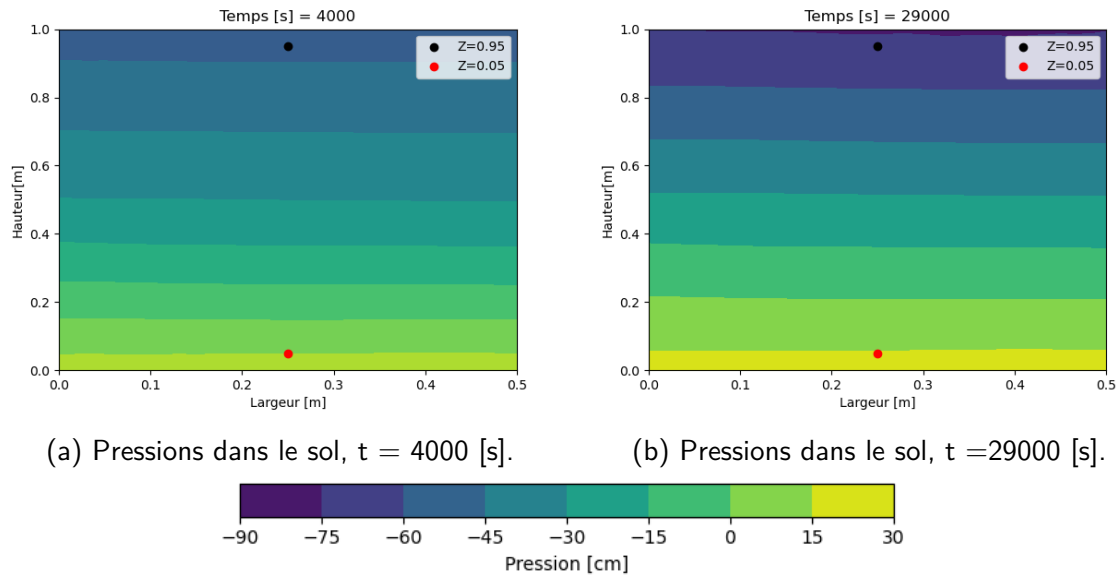


FIGURE 4.66 – Prise en compte de l'hystérèse avec l'algorithme.

Vérifions à présent que le gradient de pression correspond bien à ce qui est attendu, c'est à dire un gradient de pression $\frac{\partial h}{\partial z} = 1$ lorsque l'état stationnaire est atteint. Nous observons à la figure 4.67 que le profil des pressions est différent que celui observé à la section 4.1.5.1 mais que le gradient de pression correspond à ce qui est attendu. En effet, en bas de la colonne une pression $h = 20[cm]$ est obtenue et au sommet la pression observée est $h = -76[cm]$.

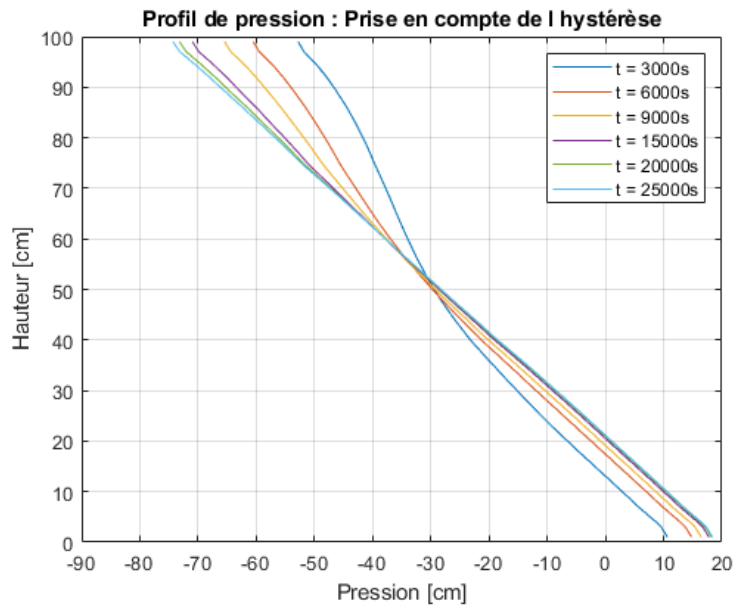


FIGURE 4.67 – Profil des pressions dans le sol.

A nouveau, prenons du recul par rapport aux résultats obtenus :

- Le temps de simulation requis pour atteindre l'état d'équilibre est 4 fois plus élevé que celui qui avait été nécessaire sans la prise en compte de l'hystérèse. Ce ralentissement peut être attribué au passage sur la courbe de scanning qui ne permet pas d'augmentation élevée de teneur en eau lors de son franchissement. De même, comme nous l'avons vu, la courbe de mouillage donne, pour une même pression, des teneurs en eau moins élevées ce qui ralentit la propagation.
- L'équilibre qui est atteint n'est pas le même qu'à l'exemple 4.1.5.1. Cela est dû au fait que la propagation est plus compliquée dans le sol en cours de mouillage. Le sol sec s'assèche davantage et le sol en cours de mouillage ne sait pas absorber plus rapidement. Cela a pour effet de décaler la courbe de pression vers la gauche, c'est à dire des pressions moins élevées.
- Le pas de temps utilisé est $\Delta t = 1$ [s]. Un pas de temps plus élevé rend la convergence compliquée.

4.5 Limites du code et problèmes généraux de convergence

Dans cette section nous aborderons les limites du code de calcul qui a été créé. Il s'agira donc de répertorier les divers problèmes qui ont été rencontrés. Dans un premier temps, nous expliciterons les causes de non-convergence qui sont habituellement citées dans la littérature.

4.5.1 Non-convergence du problème de Richards

Dans un article datant de 2017, FARTHING et OGDEN ont effectué une revue complète des avancées et challenges associés à la résolution numérique de l'équation de Richards.

D'un point de vue général, rappelons que l'équation de Richards est une équation hautement non-linéaire qui ne connaît pas de solution analytique sauf pour certains cas simples. La résolution de cette équation nécessite, comme nous l'avons déjà abordé en détails, l'usage de modèles constitutifs empiriques qui peuvent être discontinus ou non-différentiables. Il est à noter que le nombre élevé de conditions frontières différentes pouvant être utilisées ajoute encore plus au défi que représente la résolution numérique de cette équation.

De plus, l'infiltration dans des sols très secs mène à des fronts d'humidification très marqués avec des gradients hydrauliques très élevés pouvant également causer des problèmes de convergence (ZHA et al., 2019, cité par FARTHING et OGDEN, 2017).

Tous ces facteurs, propres à l'équation de Richards, sont autant de potentiels problèmes pouvant empêcher la convergence et la résolution de l'équation.

D'autres facteurs peuvent avoir une influence sur la convergence :

- La qualité critique de l'implémentation.
- Le choix de la méthode de discrétisation : volumes finis, éléments finis, différences finies.
- Le choix de la méthode de résolution du système discrétisé.
- La discrétisation spatiale : la précision de la solution d'un schéma convergent est directement liée à la taille du maillage. Un maillage fin permet donc une précision plus élevée mais ne modifie pas la capacité du code à converger. Il existe des algorithmes qui adaptent le maillage en fonction de la propagation de l'onde mais ce n'est pas fréquent.
- Pas de temps : la précision est fonction du pas de temps. Un petit pas de temps permet d'obtenir une première estimation plus proche de la solution et par conséquent améliore la convergence. De plus les termes diagonaux de la matrice $\mathbf{A}$ ((4.33)) dépendent de Δt tout comme le vecteur c ((4.35)). Par conséquent, un petit pas de temps Δt rend ces termes dominants dans le système et permet de résoudre plus aisément le système.

Au delà de tous ces facteurs, FARTHING et OGDEN (2017) mettent en avant l'influence du type de problème résolu comme raison de la non-convergence du code de calcul. Les problèmes de convergence surviennent en général lors de propagation de fronts d'ondes très marqués ou lorsque les propriétés non-linéaires du sol subissent de larges évolutions.

4.5.2 Problèmes de convergence dans le code créé

Afin de trouver les limites du code qui a été créé, nous essayerons de trouver quels paramètres influencent de façon critique la convergence du code pour différents cas tests.

4.5.2.1 Cas test 1 : frontières imperméables

Ce cas test correspond à nouveau au cas test que nous avons présenté à la section 4.1.5.1. Dans l'optique de trouver si la non-convergence peut se produire dans ce cas, les conditions frontières, les valeurs de pression initiales, les paramètres du modèle de Mualem-van Genuchten et le pas de temps ont été modifiés.

Il apparaît qu'aucun de ces paramètres n'a permis d'atteindre une non-convergence du modèle. Cela est encourageant et signifie, pour l'instant, que le modèle est robuste.

4.5.2.2 Cas test : réservoir

Dans cette section, nous reprenons exactement les conditions géométriques du cas test 4.3.5. A nouveau tentons de déterminer quels paramètres influencent la convergence du code créé. Pour commencer, les paramètres du tableau 4.5 seront utilisés. Le pas de temps initial est de 30 [s] et la raffinement du maillage 40 [cm].

θ_s [/]	θ_r [/]	α [1/cm]	K_s [cm/s]
0.368	0.102	0.0335	0.00922

TABLE 4.5 – Récapitulatif des valeurs caractéristiques.

- Modifier la pression initiale : lorsque la pression dans le sol est initialement basse (sol sec, par exemple $h = -150$ [cm]), des problèmes de convergence apparaissent. Pour résoudre ce problème, il faut diminuer le pas de temps fortement. Avec un pas de temps $dt = 2$ [s], la convergence est observée et une solution est trouvée. Ce problème de convergence est essentiellement dû au gradient de pression trop important au début de la simulation. Il serait dès lors judicieux de faire usage de pas de temps adaptatif. Cela consiste à commencer la simulation avec un certain pas de temps permettant de converger et de faire usage d'un pas de temps plus élevé lorsque le gradient de pression dans le sol devient moins élevé.
- Conductivité hydraulique : lorsqu'une conductivité hydraulique en saturation élevée est sélectionnée (par exemple, $K_s = 5$ [cm/s]), des cas de non-convergence sont également observés. La vitesse de propagation de l'eau étant très élevée, la convergence est plus compliquée avec des grands pas de temps. La solution pour obtenir une convergence est également d'adapter le pas de temps en le diminuant.
- Paramètre α : en choisissant $\alpha = 0.135$ [1/cm], correspondant à un sable 2.5, la convergence n'est pas directement atteinte. A nouveau il faut réduire le pas de temps pour permettre la convergence.

Les autres paramètres qui ont été modifiés n'ont aucune influence sur la convergence du code.

4.5.2.3 Conclusions sur la convergence du code

Après ces différents tests, il apparaît qu'aucun cas critique n'a été trouvé. Chaque cas de non-convergence a pu être réglé en adaptant le pas de temps. Par conséquent cela prouve que le code de calcul qui a été développé est robuste en plus d'être fiable et conservatif au niveau de la masse.

Deuxième partie

Ecoulements à surface libre

Chapitre 1

Equations de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant décrivent les écoulements dans des canaux à surface libre en faisant usage d'une description de la profondeur moyennée de l'écoulement en faisant l'hypothèse que la composante verticale de la vitesse est nulle. Cette hypothèse, nous y reviendrons, permet donc de supposer une pression hydrostatique dans la section.

Dans cette section, nous expliciterons les hypothèses qui permettent d'obtenir les équations de Saint-Venant, lesquelles seront dérivées en réalisant des bilans sur une partie de l'écoulement. L'obtention des équations de Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes a également été effectuée et est disponible en annexe A.

1.1 Hypothèses

Les hypothèses permettant d'obtenir les équations de Saint-Venant sont les suivantes (SOARES FRAZÃO, 2002) :

- Le fluide est incompressible, ρ ne varie pas.
- La pente du lit est assez faible, de sorte que $h = z_w - z_b$, la hauteur d'eau est toujours mesurable.
- Les lignes de courant sont parallèles, impliquant une distribution de pression hydrostatique et permettant de calculer la vitesse du fluide telle que : $V = Q/A$, où Q est le débit et A l'aire de la section.
- Les pertes de charges sont calculées en faisant usage de la formule de Manning, en considérant un écoulement uniforme.
- L'écoulement est unidimensionnel.
- Le canal considéré sera prismatique.

1.2 Conservation de la masse

Montrons comment dériver l'équation de la conservation de la masse en effectuant un bilan de masse sur un élément du flux :

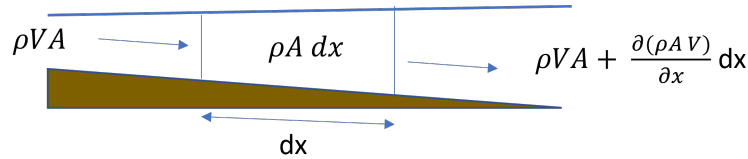


FIGURE 1.1 – Bilan de masse.

La variation de la masse de l'élément est simplement :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho A dx) = \rho V A - \left(\rho V A + \frac{\partial}{\partial x} (\rho V A) dx \right) \quad (1.1)$$

Dès lors que le fluide est incompressible (1.1), l'équation de continuité devient :

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0} \quad (1.2)$$

Où A est l'aire $[m^2]$ de la section et Q le débit $[m^3/s]$.

1.3 Conservation de la quantité de mouvement

Pour rappel, la quantité de mouvement d'un fluide est définie par la multiplication de sa masse m par sa vitesse $\vec{V}$:

$$QDM = m \vec{V} \quad (1.3)$$

La relation de base de la dynamique exprime que la somme des actions des forces extérieures est égale à la variation de la quantité de mouvement, soit :

$$\frac{D(m\vec{V})}{Dt} = \sum \vec{F} \quad (1.4)$$

Les différentes forces s'appliquant sur l'élément fluide considéré sont représentées à la figure 1.2.

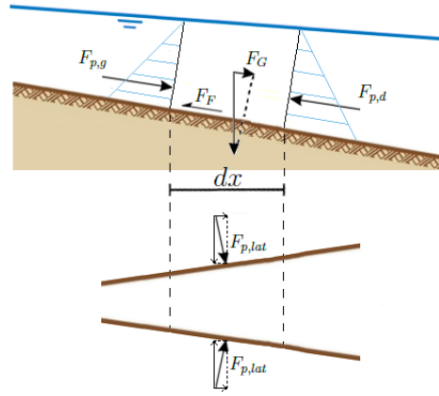


FIGURE 1.2 – Forces appliquées sur l'élément, (slides LGCIV2054 2022).

— La gravité :

$$F_G = \gamma A S_0 dx \quad (1.5)$$

Où $\gamma [N/m^3]$ est le poids volumique de l'eau, A l'aire de la section $[m^2]$ et S_0 la pente de fond $[/]$.

— Le frottement :

$$F_f = -\tau P dx \quad (1.6)$$

Où P est le périmètre de la section $[m]$ et $\tau [Pa]$ la contrainte de cisaillement. Puisque l'on considère un écoulement graduellement varié :

$$\tau = \gamma R S_f \quad (1.7)$$

Où R est le rayon hydraulique $[m]$ ($R=A/P$) et S_f la pente de la ligne de charge.

$$F_f = -\gamma A S_f dx \quad (1.8)$$

— Les pressions latérales et hydrostatiques :

$$F_p = F_{p,g} - F_{p,d} + F_{p,lat} = -\frac{\partial(F_{p,g})}{\partial x} dx + F_{p,l} \quad (1.9)$$

Soit (figure 1.3) la variation de hauteur infinitésimale pour une section constante :

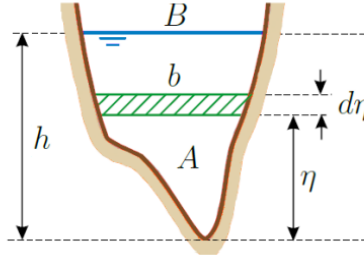


FIGURE 1.3 – Variation de la hauteur pour une section constante, (slides LGCIV2054 2022).

Soit :

$$F_P = - \underbrace{\frac{\partial}{\partial x} \gamma \left(\int_0^h (h - \eta) b(\eta) d\eta \right)}_{I_1 \text{ Pression hydrostatique}} dx + \underbrace{\gamma \left(\int_0^h (h - \eta) \frac{\partial b(\eta)}{\partial x} d\eta \right)}_{I_2 \text{ Pression changement de largeur}} dx \quad (1.10)$$

Le premier terme peut être développé de la façon suivante, via le théorème intégral de Leibniz :

$$I_1 = \int_0^h \frac{\partial}{\partial x} [(h - \eta) b(\eta)] d\eta + \frac{\partial h}{\partial x} (h - h) b(h) - \frac{\partial 0}{\partial x} (h - 0) b(0) = \int_0^h \left[\frac{\partial (h - \eta)}{\partial x} b(\eta) + (h - \eta) \frac{\partial b(\eta)}{\partial x} \right] d\eta \quad (1.11)$$

Dès lors, en remplaçant l'expression de I_1 dans l'équation (1.10), l'expression finale de F_p est obtenue :

$$F_p = -\gamma_w A \frac{\partial h}{\partial x} dx \quad (1.12)$$

Dans le cas d'un canal rectangulaire, la section est constante sur la longueur dx : $A = bh$, $I_1 = Ah_g = A \frac{h}{2}$ et $I_2 = 0$ car il n'y pas de variation de largeur. Dès lors, la somme totale des forces devient :

$$\sum \vec{F} = F_G + F_F + F_P = \gamma A dx S_0 - \gamma A dx S_f - \gamma A \frac{\partial (h/2)}{\partial x} dx \quad (1.13)$$

Il s'agit maintenant de calculer la variation de la quantité de mouvement :

$$\begin{aligned} \frac{D(mu)}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\int_{VC} \rho u dV \right) + \int_{SC} u \rho (\vec{V} \cdot \vec{dA}) \\ &= \frac{\partial}{\partial t} \left(\rho dx \int_A u dA \right) + \int_{SC} \rho u^2 dA \\ &= \rho \frac{\partial Q}{\partial t} dx + \int_{SC} \rho u^2 dA \end{aligned} \quad (1.14)$$

Soit le profil de vitesse logarithmique représenté sur la figure 1.4, V la vitesse moyenne et

e, la déviation par rapport à la vitesse moyenne.

u, la vitesse dans la direction x, peut être exprimé comme :

$$u = V(1 + e) \quad (1.15)$$

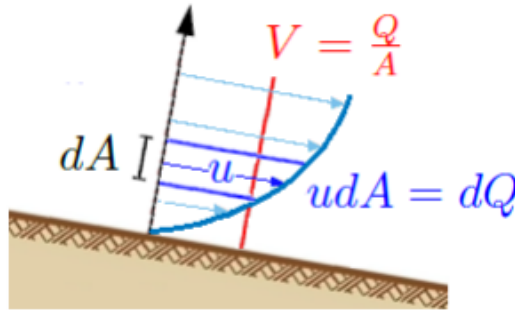


FIGURE 1.4 – Profil de vitesse caractéristique.

Dès lors que la somme des variations e est nulle sur le profil ($\int e dA = 0$), l'intégrale de u^2 se réécrit :

$$\int u^2 dA = \int V^2(1 + e)^2 dA = \int V^2 (1 + e^2 + 2e) dA = V^2 A \beta \quad (1.16)$$

Où β est le coefficient de Boussinesq :

$$\beta = 1 + \int \frac{e^2 dA}{A} \quad (1.17)$$

La variation de la quantité de mouvement ((1.14) devient donc :

$$\frac{D(mu)}{Dt} = \rho \frac{\partial Q}{\partial t} dx + \frac{\partial}{\partial x} (\rho \beta V^2 A) dx \quad (1.18)$$

L'équation complète de la conservation de la quantité de mouvement sous sa forme conservative (exprimée en terme de Q et A, les variables conservées) s'écrit donc comme :

$$\boxed{\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\beta \frac{Q^2}{A} + gA \frac{h}{2} \right) = gA (S_0 - S_f)} \quad (1.19)$$

Où le coefficient de Boussinesq est considéré égal à 1.

1.4 Système d'équations de Saint-Venant

Les équations de Saint-Venant sont donc constituées d'une équation de conservation de la masse et d'une équation de la quantité de mouvement

$$\begin{cases} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} + gI_1 \right) = gA(S_0 - S_f) + gI_2 \end{cases} \quad (1.20)$$

Où $I_1 = A \frac{h}{2}$ pour un canal rectangulaire et $I_2 = 0$ lorsqu'il n'y a pas de changement de largeur du canal.

Ce système d'équations peut être réécrit sous une forme matricielle :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} = \mathbf{S} \quad (1.21)$$

Où :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} A \\ Q \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} Q \\ \frac{Q^2}{A} + gI_1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ gA(S_0 - S_f) + gI_2 \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

1.5 Vitesse finie de propagation de l'information

Afin de prouver que la vitesse de l'information est finie dans l'écoulement, nous allons faire usage des caractéristiques. Les caractéristiques sont des chemins de propagation de l'information du système de Saint-Venant. Le long de ces courbes, les dérivées partielles deviennent des dérivées totales. Ce caractère est très important pour la discrétisation qui sera réalisée plus tard.

Pour cela, il faut réécrire le système sous la forme suivante :

$$L_1 = \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0 \quad (1.23)$$

$$L_2 = \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + gA \frac{\partial h}{\partial x} - gA(S_0 - S_f) = 0 \quad (1.24)$$

Pour un canal rectangulaire, nous pouvons considérer : $dA = B dh$, où B est la largeur, de sorte que :

$$L_2 = \frac{\partial Q}{\partial t} + 2 \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \left(\frac{Q^2}{A^2} \right) \frac{\partial A}{\partial x} + g \frac{A}{B} \frac{\partial A}{\partial x} - gA(S_0 - S_f) = 0 \quad (1.25)$$

A présent, il faut trouver λ tel que :

$$\lambda L_1 + L_2 = 0 \quad (1.26)$$

Développons :

$$\lambda \left(\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \right) + \frac{\partial Q}{\partial t} + 2 \frac{Q}{A} \frac{\partial Q}{\partial x} - \left(\frac{Q^2}{A^2} \right) \frac{\partial A}{\partial x} + g \frac{A}{B} \frac{\partial A}{\partial x} - gA (S_0 - S_f) = 0 \quad (1.27)$$

En groupant chaque terme, de façon à chercher à réécrire cette équation sous la forme d'une équation différentielle ordinaire :

$$\left[\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} \left(\lambda + 2 \frac{Q}{A} \right) \right] + \lambda \left[\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial A}{\partial x} \left(g \frac{A}{B} \frac{1}{\lambda} - \frac{Q^2}{A^2 \lambda} \right) \right] - gA (S_0 - S_f) = 0 \quad (1.28)$$

De façon à avoir :

$$\frac{dQ}{dt} + \lambda \frac{dA}{dt} - gA (S_0 - S_f) = 0 \quad (1.29)$$

Afin d'obtenir cette forme d'équation différentielle ordinaire, il faut satisfaire les conditions suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = \lambda + 2 \frac{Q}{A} = g \frac{A}{B} \frac{1}{\lambda} - \frac{Q^2}{A^2 \lambda} \quad (1.30)$$

Il faut donc résoudre cette équation afin de trouver les valeurs de λ qui satisfont cette condition :

$$\lambda = -V \pm c \quad (1.31)$$

Où c est la célérité : $c = \sqrt{g \frac{A}{B}} = \sqrt{gh}$.

En conclusion, à condition que λ ait une de ces deux valeurs, le système d'équations devient une équation différentielle ordinaire, permettant de trouver les courbes caractéristiques :

Caractéristique positive : En faisant usage de la condition énoncée à l'équation (1.30)

$$c^+ = \frac{dx}{dt} = -V + c + 2V = V + c \quad (1.32)$$

L'équation aux dérivées totales s'écrit donc :

$$\frac{dQ}{dt} + (-V + c) \frac{dA}{dt} - gA (S_0 - S_f) = 0 \quad (1.33)$$

Caractéristique négative :

$$c^- = \frac{dx}{dt} = -V - c + 2V = V - c \quad (1.34)$$

Et l'équation différentielle ordinaire :

$$\frac{dQ}{dt} + (-V - c)\frac{dA}{dt} - gA(S_0 - S_f) = 0 \quad (1.35)$$

Ces 2 équations ((1.33), (1.35)) , sont appelées équations de compatibilité et seront utiles afin de calculer l'information transitant d'une cellule à une autre dans notre futur système de résolution.

D'un point de vue qualitatif, ces caractéristiques permettent de comprendre quelle distance est parcourue au maximum par une onde se propageant dans le courant, comme mentionné à la figure 1.5.

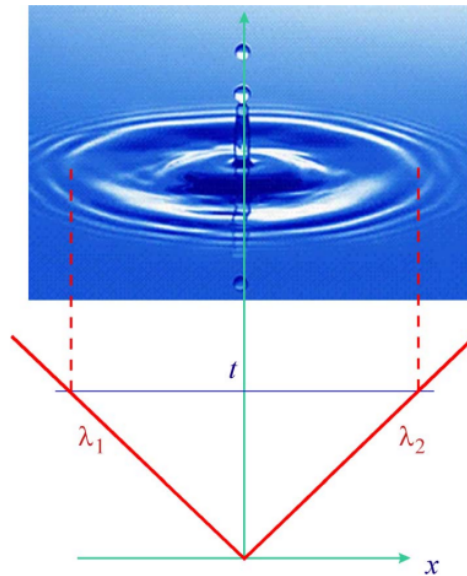


FIGURE 1.5 – Caractéristiques (slides LGCIV2054 2022).

Le rapport entre les vitesses V (vitesse de l'eau) et c (vitesse de propagation d'une perturbation infinitésimale) permet d'établir le caractère subcritique ou supercritique de l'écoulement. Le nombre de Froude se formule comme suit dans le cas d'un canal rectangulaire :

$$Fr = \frac{V}{c} = \frac{V}{\sqrt{gh}} \quad (1.36)$$

Lorsque ce nombre est inférieur à 1 l'écoulement est dit subcritique. L'information peut se déplacer à la fois vers l'amont et vers l'aval. De même, lorsque ce nombre est supérieur à 1, l'information ne peut se déplacer que vers l'aval.

Notons qu'il est également possible d'écrire les équations de compatibilité ((1.33), (1.35)) en terme de Q et de $\Sigma = \frac{Q^2}{A} + gI_1$. Cette formulation est utile pour le schéma de volumes finis que nous utiliserons pour résoudre les équations de Saint-Venant :

$$\frac{d\Sigma}{dt} + (-V \mp c) \frac{dQ}{dt} = (V \mp c) [gA (S_0 - S_f) + gI_2] \quad (1.37)$$

Chapitre 2

Résolution des équations de Saint-Venant

Nous aborderons dans ce chapitre les méthodes de résolution numérique qui seront utilisées pour résoudre les équations de Saint-Venant et nous effectuerons certains cas tests qui permettront de valider le modèle.

2.1 Schéma de résolution des volumes finis

Un schéma de résolution de volumes finis doit être établi afin de pouvoir résoudre numériquement ce système d'équations. Pour ce faire, nous allons intégrer sur un volume $(\Omega = \Delta x \Delta t)$ l'espace-temps l'équation (1.22).

$$\iiint_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{U})}{\partial x} \right) d\Omega = \iiint_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{U}) d\Omega \quad (2.1)$$

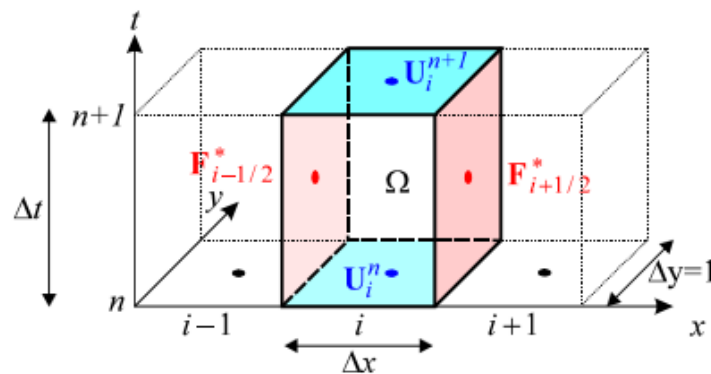


FIGURE 2.1 – Volume de contrôle (slides LGCIV2054 2022).

Le membre de gauche de l'équation (2.1) peut correspondre à la divergence d'un vecteur. Soit le vecteur $\mathbf{R}$:

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \mathbf{F} \\ 0 \\ \mathbf{U} \end{pmatrix} \quad (2.2)$$

Dès lors, la divergence de ce vecteur s'écrit :

$$\nabla \cdot \mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} \quad (2.3)$$

Nous pouvons donc appliquer le théorème de la divergence à l'équation (2.1) en prenant en compte les 6 faces de l'espace :

$$\begin{aligned} \iint_A (\mathbf{R} \cdot \mathbf{n}) dA &= \left(\mathbf{F} \ 0 \ \mathbf{U} \right)_i^n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Delta x + \left(\mathbf{F} \ 0 \ \mathbf{U} \right)_{i+1/2}^* \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta t \\ &+ \left(\mathbf{F} \ 0 \ \mathbf{U} \right)_i^{n+1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Delta x + \left(\mathbf{F} \ 0 \ \mathbf{U} \right)_{i-1/2}^* \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta t \\ &+ \left(\mathbf{F} \ 0 \ \mathbf{U} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta x \Delta t + \left(\mathbf{F} \ 0 \ \mathbf{U} \right) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Delta x \Delta t \end{aligned} \quad (2.4)$$

Le terme source, est quand à lui simplement calculé tel que :

$$\iiint_{\Omega} \mathbf{S}(\mathbf{U}) d\Omega = \bar{\mathbf{S}} \Delta x \Delta t \quad (2.5)$$

Où $\bar{\mathbf{S}}$ est une valeur moyenne de $\mathbf{S}$ de la cellule i .

Finalement, le schéma de résolution a la forme suivante :

$$\boxed{\mathbf{U}_i^{n+1} = \mathbf{U}_i^n - \frac{\Delta t}{\Delta x} \left(\mathbf{F}_{i+1/2}^* - \mathbf{F}_{i-1/2}^* \right) + \bar{\mathbf{S}}_i \Delta t} \quad (2.6)$$

2.2 Calcul des flux aux interfaces.

Plusieurs méthodes peuvent être utilisées afin de calculer les flux aux interfaces entre les cellules. Dans ce travail, nous ferons usage de la méthode de Pavia et de la méthode de Roe. Ces deux méthodes permettent de calculer les flux de façon équivalente mais la méthode de Roe est souvent plus adaptée lorsque les cas sont plus complexes.

Le calcul des flux est basé sur les caractéristiques, telles que représentées à la figure 2.2.

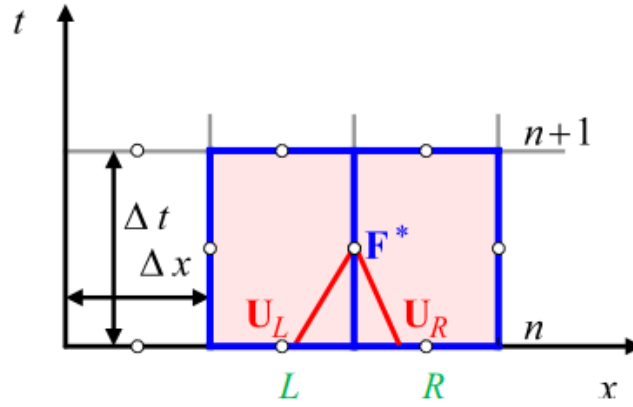


FIGURE 2.2 – Caractéristiques à l'interface (slides LGCIV2054 2022).

Le long des caractéristiques, nous pouvons écrire :

$$\begin{aligned} c^+ : \frac{dQ}{dt} - (v - c) \frac{dA}{dt} &= 0 \\ c^- : \frac{dQ}{dt} - (v + c) \frac{dA}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (2.7)$$

Ce qui devient, en utilisant les différences finies :

$$\begin{aligned} c^+ : \frac{Q_{i+1/2}^* - Q_i^n}{\Delta t} - (\bar{v} - \bar{c}) \frac{A_{i+1/2}^* - A_i^n}{\Delta t} &= 0 \\ c^- : \frac{Q_{i+1/2}^* - Q_{i+1}^n}{\Delta t} - (\bar{v} + \bar{c}) \frac{A_{i+1/2}^* - A_{i+1}^n}{\Delta t} &= 0 \end{aligned} \quad (2.8)$$

et en combinant linéairement les 2 équations :

$$c^+(\bar{v} + \bar{c}) - c^-(\bar{v} - \bar{c}) = 0 \quad (2.9)$$

Cette dernière étape permet d'obtenir l'expression des flux à l'interface :

$$Q_{i+1/2}^* = \frac{1 + \bar{Fr}}{2} Q_i^n + \frac{1 - \bar{Fr}}{2} Q_{i+1}^n + \bar{c} \frac{1 - \bar{Fr}^2}{2} (A_i^n - A_{i+1}^n) \quad (2.10)$$

Où $\bar{Fr}$ est le nombre de Froude moyenné.

Le même raisonnement peut être réalisé à partir de la forme duale 1.37. Ce second développement doit permettre de calculer le terme $\Sigma = \frac{Q^2}{A} + gI_1$ à l'interface.

$$\Sigma_{i+1/2}^* = \frac{1 + \bar{Fr}}{2} \Sigma_i^n + \frac{1 - \bar{Fr}}{2} \Sigma_{i+1}^n + \bar{c} \frac{1 - \bar{Fr}^2}{2} (Q_i^n - Q_{i+1}^n) \quad (2.11)$$

En généralisant, nous pouvons simplement exprimer les flux aux interfaces de la façon

suivante :

$$F_{i+1/2}^* = \frac{1 + \bar{Fr}}{2} F_i^n + \frac{1 - \bar{Fr}}{2} F_{i+1}^n + \bar{c} \frac{1 - \bar{Fr}^2}{2} (U_i^n - U_{i+1}^n) \quad (2.12)$$

Cette formulation doit être valable autant pour le cas subcritique que pour le cas supercritique. Pour ce faire il faut borner le nombre de Froude de la façon suivante :

$$\bar{Fr} = \begin{cases} \bar{V}/\bar{c} & \text{si } \bar{V}/\bar{c} < 1 \\ 1 & \text{si } \bar{V}/\bar{c} \geq 1 \end{cases} \quad (2.13)$$

De cette façon dans le cas où le flux est supercritique, et donc que l'information ne peut venir que de l'amont, nous obtenons :

$$F_{i+1/2}^* = F_i^n \quad (2.14)$$

La distinction entre le schéma de Pavie et le schéma de Roe tient à la façon dont sont évaluées les vitesses moyennes aux interfaces ($\bar{V}$ et $\bar{c}$). La méthode de Pavie est une simple moyenne arithmétique alors que la méthode de Roe est basée sur les caractéristiques et les valeurs propres du système d'équations.

Schéma de Pavie

$$\begin{cases} \bar{V} = \frac{V_i^n + V_{i+1}^n}{2} \\ \bar{c} = \frac{c_i^n + c_{i+1}^n}{2} \end{cases} \quad (2.15)$$

Schéma de Roe

$$\begin{cases} \bar{V} = \frac{Q_R \sqrt{A_L} + Q_L \sqrt{A_R}}{\sqrt{A_L A_R} (\sqrt{A_R} + \sqrt{A_L})} \\ \bar{c} = \sqrt{g \frac{I_{1,R} - I_{1,L}}{A_R - A_L}} = \sqrt{g \frac{A_R h_R - A_L h_L}{2(A_R - A_L)}} \end{cases} \quad (2.16)$$

Où Q_R désigne, par exemple, le débit de la cellule à droite de l'interface et Q_L désigne le débit à gauche de la même interface.

2.3 Conditions frontières

Dans cette section, nous présenterons les différentes conditions frontières que nous utiliserons dans ce travail. Les conditions frontières sont obtenues à partir des équations de compatibilité que nous avons décrites précédemment.

2.3.1 Condition transmissive

La condition transmissive est une condition qui est utilisée, en général, à l'aval. Elle permet de considérer que le canal ne se termine pas au bout du domaine et que l'aval n'a pas d'influence sur le flux. Nous considérons dès lors que le flux à l'interface correspond aux

valeurs de la cellule précédente. Pour un domaine spatial contenant N cellules, la condition transmissive s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Q_{N+1/2}^* &= Q_N^n \\ \Sigma_{N+1/2}^* &= \Sigma_N^n \end{aligned} \quad (2.17)$$

2.3.2 Condition de mur

Cette condition permet d'exprimer que le canal est fermé en amont ou en aval. Par exemple dans le cas d'un mur à l'aval du domaine, la condition est la suivante :

$$\begin{aligned} Q_{N+1/2}^* &= 0 \\ \Sigma_{N+1/2}^* &= \Sigma_N^n + c_N^n Q_N^n \end{aligned} \quad (2.18)$$

2.3.3 Débit imposé à l'amont

Cette condition permet de prendre en compte un débit imposé à l'amont qui évolue ou non avec le temps. La condition s'exprime de la façon suivante :

$$\begin{aligned} Q_{1/2}^* &= Q_{imp} \\ \Sigma_{1/2}^* &= \Sigma_1^n + (V_1^n + c_1^n)(Q_{1/2}^* - Q_1^n) \end{aligned} \quad (2.19)$$

2.4 Astuces numériques

Nous verrons dans cette section différentes astuces qui permettent de rendre le code plus fiable et de résoudre certaines instabilités.

2.4.1 Choix du pas de temps

Le pas de temps dans un schéma de résolution explicite est critique pour la stabilité de la résolution. En effet, une erreur apparaît lorsque le pas spatial du maillage est inférieur à la distance que parcourt l'onde la plus rapide dans l'intervalle du pas de temps choisi.

Il existe une condition qui peut être appliquée afin de trouver un pas de temps permettant de trouver une solution. La condition de Courant-Friedrichs-Lewy ou CFL :

$$\Delta t \leq CFL \frac{\Delta x}{|V| + c} \quad (2.20)$$

Le nombre CFL, ou nombre de Courant, doit être choisi inférieur à 1.

2.4.2 Pente de fond raide

Des instabilités peuvent survenir lorsque l'eau repose sur une pente raide ou qu'il y a un changement soudain de pente de fond. La pente doit être lissée, après l'initialisation, en la recalculant à l'aide d'une différence finie centrée :

$$S_{0,i} = \frac{-(z_{b,i+1} - z_{b,i-1})}{2dx_i} \quad (2.21)$$

Où z_b désigne la hauteur du fond, i l'indice de la cellule centrale.

Un autre problème apparaissant avec les pentes de fond concerne l'eau au repos. La pente est représentée par une série de marches adjacentes. Lorsque l'eau est au repos sur le bord d'une pente, il y a donc une discontinuité entre des cellules sèches et des cellules humides. Il faut donc une condition empêchant l'eau d'une cellule inférieure de sauter dans la cellule adjacente.

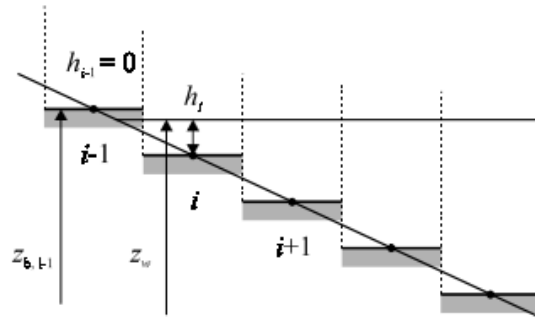


FIGURE 2.3 – Discrétisation en marches de la pente (SOARES FRAZÃO, 2002).

Considérons les cellules $i-1$ et i de la figure 2.3. La condition exprime que si la cellule $i-1$ est sèche et que le niveau d'eau par rapport à la référence ($z_w = z_b + h$) de la cellule i est inférieur à la hauteur du lit z_b de la cellule $i-1$, aucun échange de masse ne peut s'effectuer entre les 2 cellules.

$$\mathbf{F}_{i+1/2}^* = \begin{cases} \begin{pmatrix} Q_{i+1/2}^* \\ \Sigma_{i+1/2}^* \end{pmatrix} & \text{si } z_{w,i} > z_{b,i-1} \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \text{si } z_{w,i} \leq z_{b,i-1} \end{cases} \quad (2.22)$$

2.4.3 Prise en compte du frottement

La prise en compte du frottement se fait à travers la pente de la ligne de charge S_f . Ce terme est calculé avec la formule de Manning :

$$S_f = \frac{n^2 V^2}{R^{4/3}} \quad (2.23)$$

Où n est le coefficient de Manning, R le rayon hydraulique et V la vitesse. Afin de prendre en compte la direction du flux dans le frottement, la formule devient :

$$S_f = \frac{n^2 |V| V}{R^{4/3}} \quad (2.24)$$

Dans le modèle réalisé, le frottement est pris en compte de façon séquentielle. Cela signifie que dans un premier temps le schéma de volumes finis (2.6) est appliqué sans le frottement. Le frottement est alors calculé avec les valeurs intermédiaires de débit et d'aire. Pour finir le schéma est réappliqué en tenant compte du frottement.

Il faut également prendre en compte que le frottement ne peut pas inverser la direction du flux mais simplement le ralentir ou l'arrêter au maximum.

2.5 Cas test

Différents cas tests seront présentés dans cette section afin de prouver que le modèle réalisé fournit de bons résultats. Dans un premier temps, nous comparerons le résultat fourni par le code avec la solution analytique d'une rupture de barrage sur un fond horizontal. Ensuite, nous confronterons le modèle à des résultats expérimentaux.

2.5.1 Rupture de barrage

Dans le cas d'une rupture de barrage sur un fond horizontal, dans un canal rectangulaire, il existe une solution analytique. Cette solution analytique nous permet donc de comparer et de valider les résultats obtenus. Cette solution est dérivée dans la thèse de SOARES FRAZÃO(2002), son expression est la suivante :

$$h = \frac{1}{9g} \left(-\frac{x}{t} + 2\sqrt{gh_0} \right)^2 \quad (2.25)$$

Où g est la gravité, x [m] la position horizontale d'intérêt, t le temps écoulé [s] et h_0 la hauteur d'eau initiale dans le barrage [m].

Si la position du barrage est centrée en $x = 0$, observons alors que la hauteur d'eau à cet endroit tend vers $\frac{4}{9}h_0$. Les schémas de Pavie et de Roe donnent des résultats strictement semblables.

Les résultats obtenus numériquement sont visibles aux figures 2.4 et 2.5.

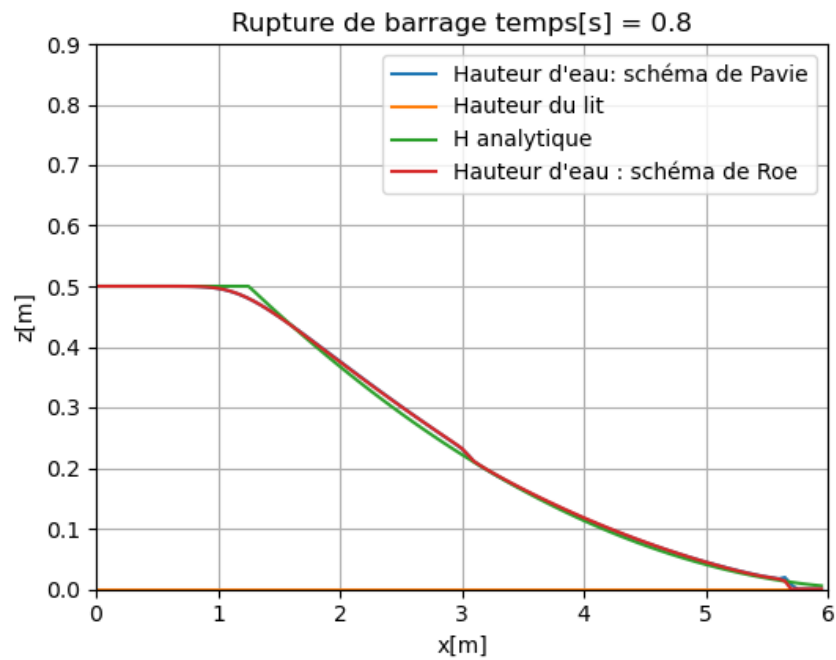


FIGURE 2.4 – Comparaison des résultats obtenus pour la rupture de barrage.

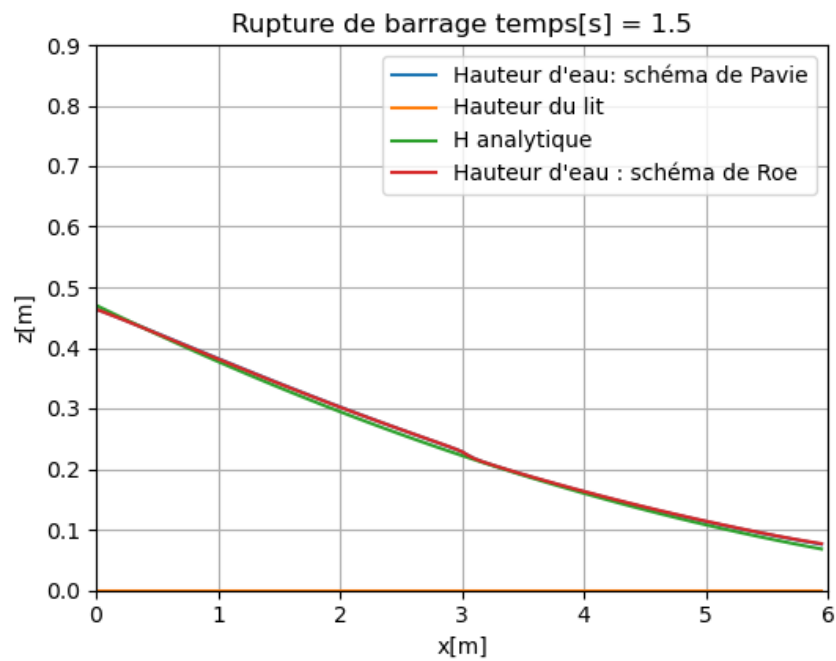


FIGURE 2.5 – Comparaison des résultats obtenus pour la rupture de barrage.

2.5.2 Submersion de digue par rupture de barrage

Ce cas test est basé sur le projet IMPACT. Ce projet, présenté dans un article de SOARES-FRAZÃO(2007), avait pour but d'évaluer les risques liés à des ruptures de barrage et de trouver des méthodes pour les réduire.

A cette fin, un cas test a été réalisé consistant en une rupture de barrage sur fond horizontal et sec en direction d'un ouvrage de protection de type digue.

Le dispositif expérimental est visible à la figure 2.6.

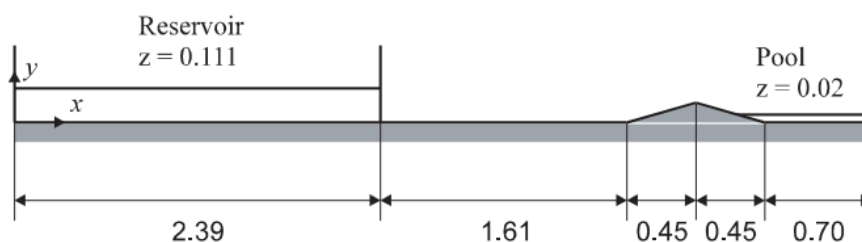


FIGURE 2.6 – Dispositif expérimental et conditions initiales. SOARES-FRAZÃO, 2007

Différentes jauges étaient placées le long du canal d'essai et ont enregistré l'évolution de la hauteur d'eau en fonction du temps. De même, le profil de la hauteur a été enregistré à différents temps de l'expérience.

Nous pouvons donc comparer les résultats obtenus expérimentalement avec ceux du modèle réalisé.

2.5.2.1 Comparaisons des résultats enregistrés aux jauges

Au total, 3 jauges ont été placées le long du canal. L'évolution du niveau d'eau à la position occupée par chacune de ces jauges a été mesurée pendant 45 secondes.

Les résultats obtenus avec la simulation sont présentés aux figures 2.7, 2.8 et 2.9. Visuellement, nous observons que pour les deux premières jauges, le modèle surestime légèrement la hauteur atteinte par l'eau. De plus les mouvements de l'eau mesurés expérimentalement ne sont pas retranscrits dans leur amplitude par le modèle. En revanche, il semble que les tendances générales soient bien représentées. Observons également que les résultats obtenus à la troisième jauge 2.9 sont vraiment représentatifs de la réalité.

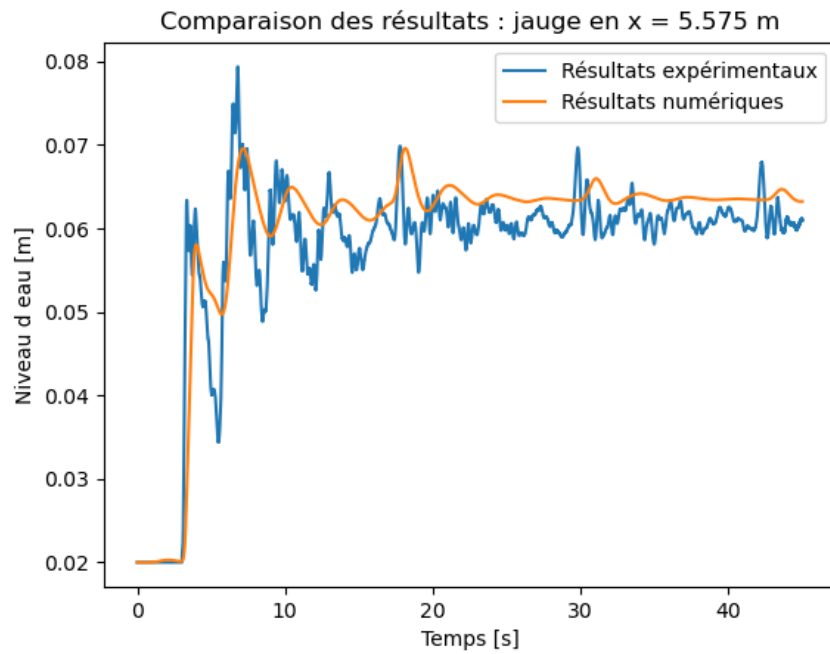


FIGURE 2.7 – Comparaison des résultats obtenus à la jauge 1.

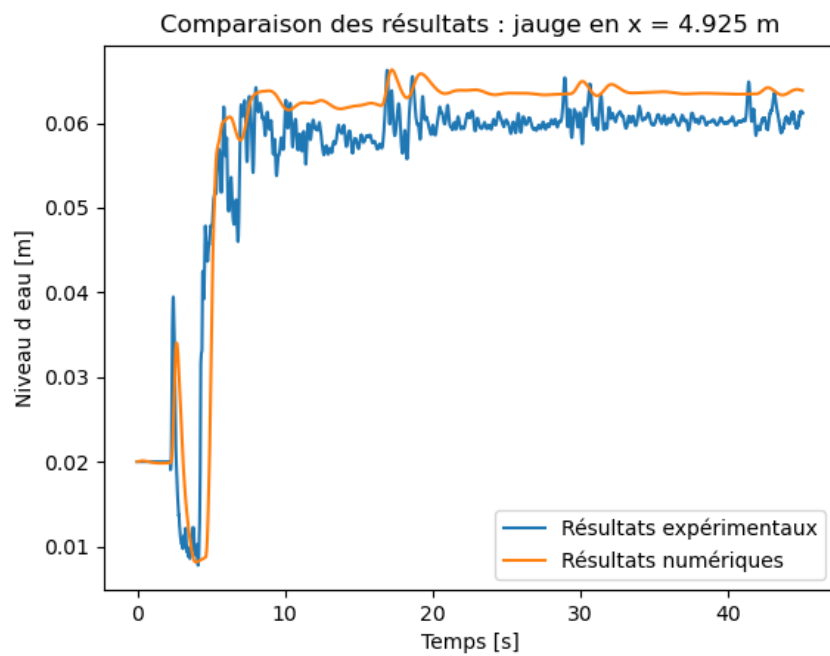


FIGURE 2.8 – Comparaison des résultats obtenus à la jauge 2.

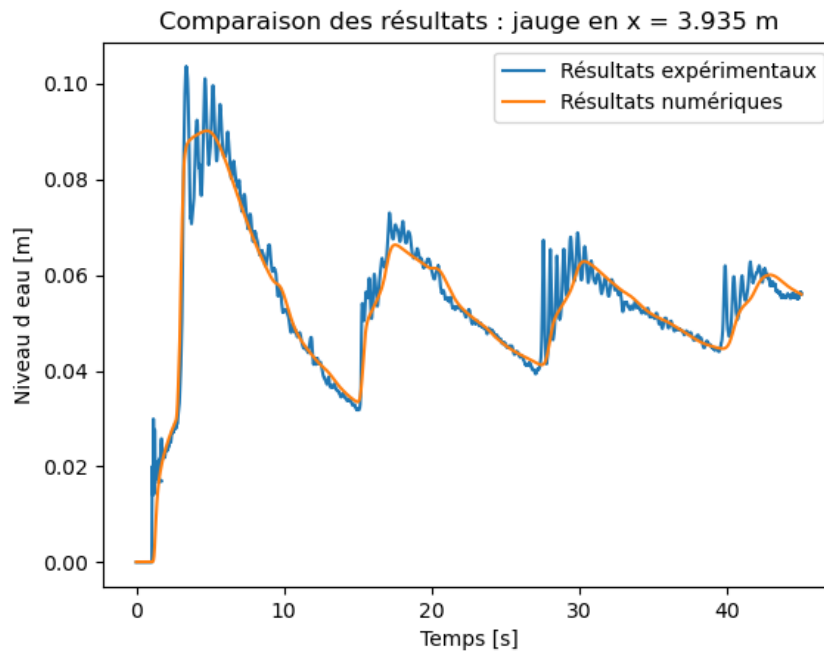


FIGURE 2.9 – Comparaison des résultats obtenus à la jauge 3.

Afin de comparer de façon plus qualitative les résultats obtenus, faisons à nouveau usage de l'indicateur RMSE. Les valeurs de cet indicateur sont également présentées au tableau 2.1. Celles-ci indiquent bien que les résultats obtenus pour la jauge 3 sont meilleurs que ceux obtenus aux 2 autres jauges.

Jauge	1	2	3
$x[m]$	5.575	4.925	3.935
RMSE[m]	0.005	0.005	0.004

TABLE 2.1 – Position des jauges.

2.5.2.2 Comparaison des profils de hauteur obtenus

Comparons à présent les profils obtenus au cours du temps. Le modèle donne des résultats assez satisfaisants. Ceux-ci sont affichés aux figures 2.10, 2.11, 2.12 et 2.13. Les valeurs de RMSE sont également calculées et affichées à la table 2.2 et attestent de la qualité des résultats.

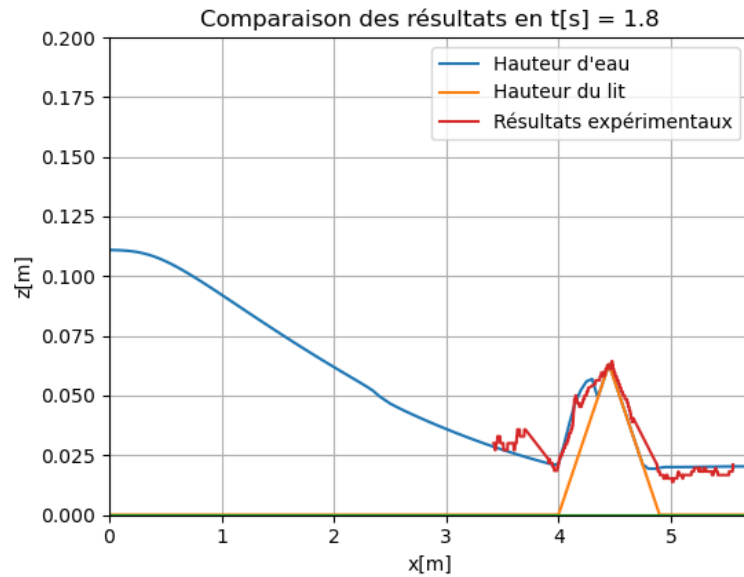


FIGURE 2.10 – Profil des hauteurs obtenues en $t = 1.8s$.

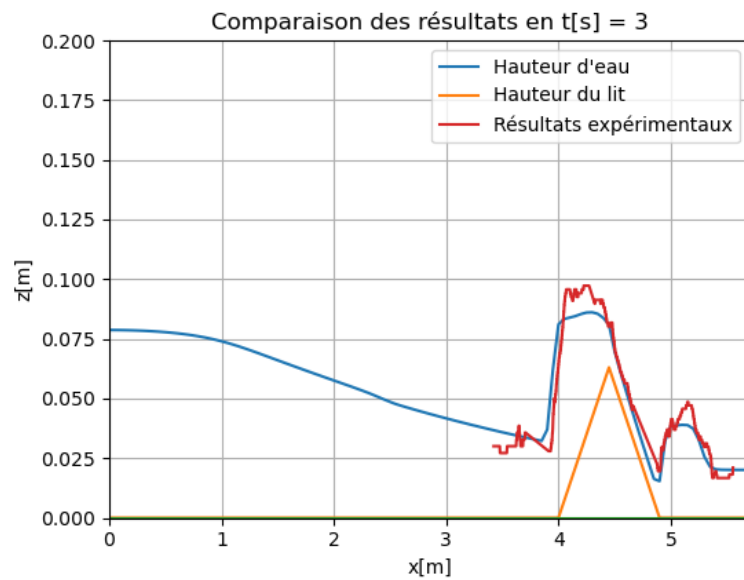


FIGURE 2.11 – Profil des hauteurs obtenues en $t = 3s$.

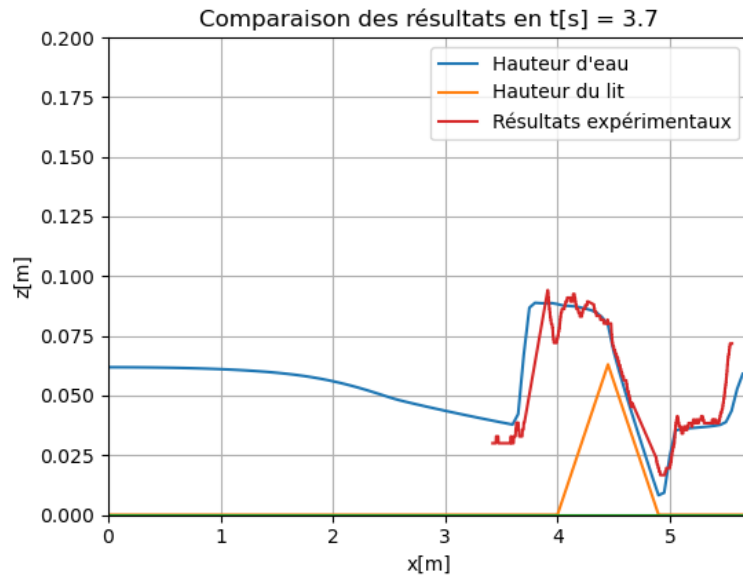


FIGURE 2.12 – Profil des hauteurs obtenues en $t = 3.7$ s.

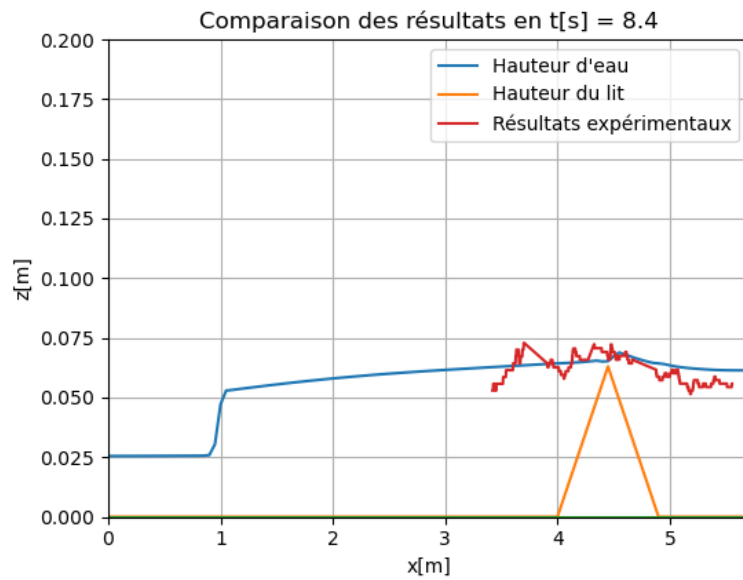


FIGURE 2.13 – Profil des hauteurs obtenues en $t = 8.4$ s.

Temps [s]	1.8	3	3.7	8.4
RMSE[m]	0.00394	0.00774	0.00833	0.0049

TABLE 2.2 – RMSE obtenus à certains temps.

Troisième partie

Couplage des modèles

Chapitre 1

Algorithme et implémentation du couplage

L'interaction entre les écoulements de surface et les écoulements internes est une préoccupation importante dans le domaine de l'ingénierie côtière et fluviale. Dans cette section, nous commencerons par aborder l'état de l'art des méthodes permettant le couplage entre les équations de Saint-Venant et l'équation de Richards. Ensuite, nous présenterons l'algorithme utilisé dans le cadre de ce travail.

1.1 Etat de l'art

L'interaction entre les écoulements de surface et souterrains a donné lieu à des études expérimentales (EBRAHIMI et al., 2007) mais également à de nombreux modèles numériques avancés.

De façon générale, les conditions frontières dans les modèles numériques sont définies à l'interface entre les 2 systèmes. Bien qu'en réalité l'interface entre le milieu souterrain et le domaine de l'écoulement de surface ne soit pas si bien définie (vase, sédiments, etc.), on considère en général que cette interface est nette pour faciliter l'approche mathématique (FURMAN, 2008).

Les méthodes de couplage sont variées. En fonction de l'application souhaitée pour le couplage (agriculture, hydrologie, digues), les conditions frontières utilisées sont différentes. Cependant il y a un consensus quant à la nécessité du respect de la conservation de la masse et de celle de la quantité de mouvement (FURMAN, 2008).

Les différentes méthodes peuvent être classées en fonction du type de couplage temporel utilisé :

- Pleinement couplées : le pas de temps de résolution est identique pour les 2 parties

du modèle (DE MAET et HANERT, 2011 ; LIANG et al., 2007) . Cela fait particulièrement sens lorsque les 2 systèmes sont résolus avec un schéma explicite, impliquant une condition de stabilité sur le pas de temps pour les deux systèmes.

- Découplées : les pas de temps utilisés sont différents et chaque équation est résolue séquentiellement (CAVIEDES-VOULLIÈME et al., 2012). Ces méthodes sont judicieuses lorsque l'équation de Richards est résolue de manière implicite de telle sorte que le pas de temps utilisé pour le système de Richards peut être beaucoup plus élevé. Il faut tout de même veiller à la convergence du système et à sa précision en sélectionnant un pas de temps qui permet de prendre en compte les variations externes de niveau.

En ce qui concerne la discrétisation spatiale, les méthodes sont généralement couplées (DE MAET et HANERT, 2011 ; CAVIEDES-VOULLIÈME et al., 2012) par souci de simplicité. Cela signifie que les cellules qui constituent le domaine de Saint-Venant coïncident avec les cellules qui constituent la frontière du domaine de Richards.

1.2 Algorithme utilisé

Présentons à présent la méthode qui a été élaborée dans le cadre de ce travail afin de réaliser le couplage des deux systèmes d'écoulement. Cette méthode est inspirée d'un article de CAVIEDES-VOULLIÈME et al.(2012) qui présente un algorithme simple de couplage.

- D'un point de vue temporel, la méthode de résolution est purement découplée dans la mesure où la résolution des équations de Saint-Venant nécessite des pas de temps très faibles du fait de la nature explicite du schéma de résolution alors que la résolution implicite de l'équation de Richards permet de faire usage de grands pas de temps sans perdre trop en précision comme nous l'avons vu à la section 4.3.8 .
- D'un point de vue spatial, les 2 domaines sont couplés : les cellules frontières de Richards coïncident avec celles de Saint-Venant.

Le mécanisme de couplage à l'interface entre les deux domaines se fait via deux mécanismes :

1. Les conditions frontières imposées au domaine de Richards : l'écoulement interne reçoit les informations de l'écoulement externe à travers des conditions de Dirichlet imposées à sa frontière. En d'autres mots, la hauteur d'eau de l'écoulement externe est imposée comme pression aux cellules frontières.
2. Les termes sources imposés aux cellules de Saint-Venant : Cavièdes-Voullième suggère de rajouter un terme source de masse au problème de Saint-Venant puisque la surface du sol ne constitue pas une frontière du domaine de Saint-Venant.

En synthèse, l'algorithme consiste à utiliser la hauteur d'eau de l'écoulement de surface comme condition frontière de l'équation de Richards et à utiliser les flux internes calculés

comme termes sources de l'équation de surface. L'algorithme de couplage est détaillé à la figure 1.13. Nous y reviendrons plus tard, cependant il est à noter que q_{inf} représente le débit d'infiltration calculé aux cellules frontières dans le domaine de Richards.

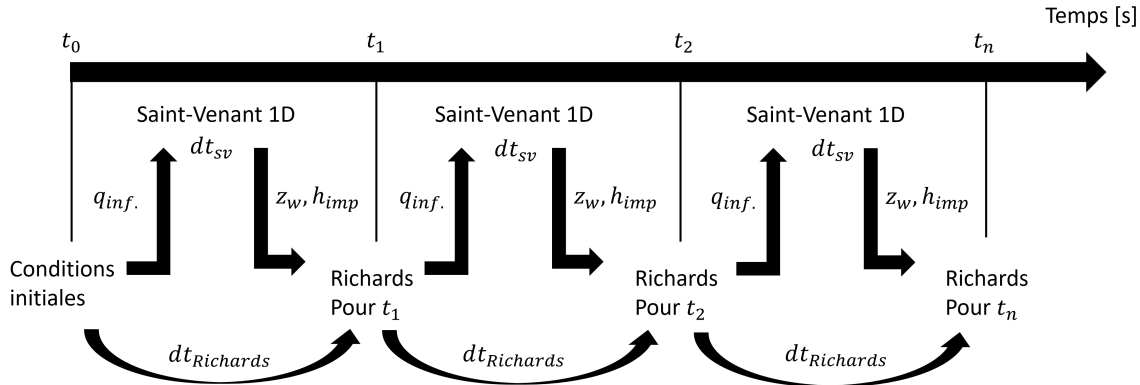


FIGURE 1.1 – Algorithme de couplage.

1.3 Résultats sans prise en compte de l'infiltration.

Dans un premier temps la simulation est réalisée en tenant compte uniquement de la condition frontière imposée par l'équation de Saint-Venant au domaine de Richards. Le terme source d'infiltration présent dans l'équation de Saint-Venant est nul, empêchant toute diminution du niveau d'eau externe. Plusieurs cas tests seront réalisés afin de montrer que le couplage est effectif. Nous verrons ensuite à la section suivante 1.4 quel est l'impact de cette infiltration sur l'écoulement.

1.3.1 Cas test Réservoir :

Ce cas test permet de vérifier l'efficacité du couplage simple dans le sens Saint-Venant $\rightarrow$ Richards. Il s'agit d'un réservoir d'eau de grande taille avec une digue en terre. Les conditions frontières du domaine de Saint-Venant sont les suivantes :

Conditions initiales et frontières du domaine de Saint-Venant :

- Condition amont : mur représentant l'extrémité du bassin.
- Condition aval : libre permettant un écoulement en aval.
- Hauteur d'eau initiale : 4m dans le réservoir.

Conditions initiales du domaine de Richards : Les valeurs caractéristiques utilisées pour ce cas sont les suivantes :

$\theta_s[^\circ]$	$\theta_r[^\circ]$	$\alpha[1/cm]$	$K_s[cm/s]$
0.368	0.102	0.0335	0.1

TABLE 1.1 – Récapitulatif des valeurs caractéristiques.

La conductivité hydraulique relativement élevée qui a été choisie permet simplement d'observer plus rapidement le phénomène d'infiltration dans le sol dont nous tiendrons compte à la section 1.4.4.

La pression dans la digue est initialisée à $h_0 = -40[cm]$.

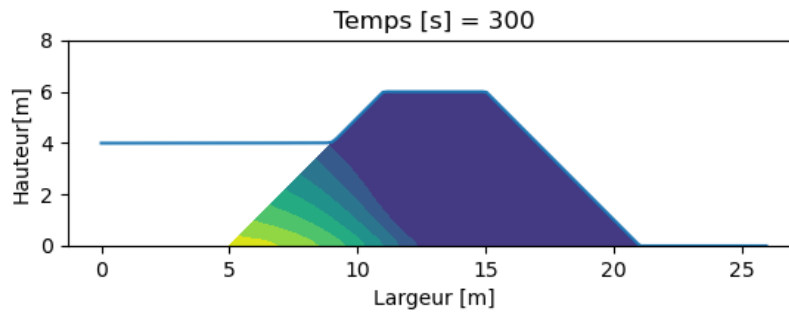


FIGURE 1.2 – Couplage sans infiltration, $t = 300s$.

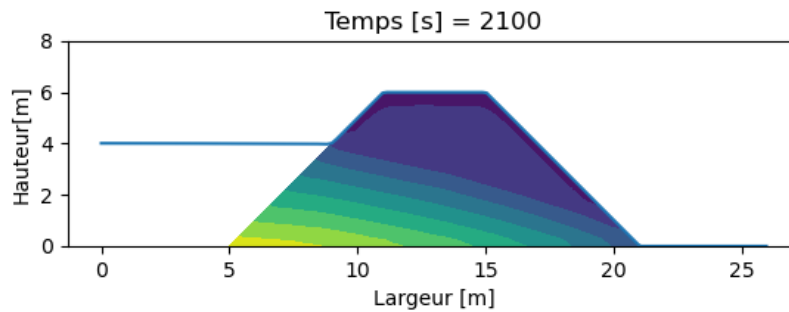


FIGURE 1.3 – Couplage sans infiltration, $t = 2100s$.

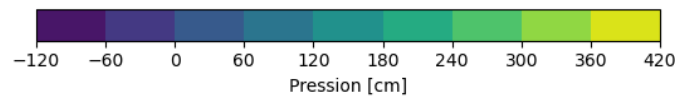


FIGURE 1.4 – Colorbar, pressions dans la digue.

Nous observons donc aux figures 1.2 et 1.3 que le couplage s'effectue correctement. Le front de saturation se propage dans la digue et le niveau d'eau dans le réservoir reste stable.

1.3.2 Surverse de la digue sèche.

Ce cas test consiste à observer l'impact qu'un flux de surverse a sur les divers paramètres de la digue (pression, saturation, contraintes). Les résultats seront ensuite comparés avec ceux obtenus dans la section où la prise en compte de l'infiltration est réalisée (1.4.5).

Les conditions initiales et frontières ont été choisies afin de mettre en exergue l'influence de l'infiltration sur le niveau extérieur de l'eau. En effet, sur base des conclusions qui seront tirées à la section (1.4.3) à propos des paramètres influençant de façon critique l'infiltration, nous choisissons les conditions initiales et frontières suivantes :

- La condition amont du domaine de Saint-Venant est un flux de surverse valant $Q = 1[m^3/s]$ qui se déclenche dès le temps 0. Par conséquent, le flux dans la digue créé normalement par la présence du réservoir d'eau n'atteint pas l'état stationnaire. Cela a pour effet de créer un plus grand gradient de pression entre l'extérieur et l'intérieur de la digue, ce qui influence de façon significative l'infiltration dans la digue.
- La condition aval du domaine de Saint-Venant est libre.
- La pression initiale dans la digue est imposée à $h = -80 [cm]$, soit un sol fortement non-saturé. Nous verrons à la section suivante (1.3.3) l'impact de conditions initiales plus humides.
- La conductivité hydraulique à la saturation choisie est $K_s = 0.1 [cm/s]$.

Les autres paramètres sont, pour rappel :

$\theta_s [/]$	$\theta_r [/]$	$\alpha [1/cm]$
0.368	0.102	0.0335

TABLE 1.2 – Récapitulatif des valeurs caractéristiques.

Après 100 secondes, le flux de surverse atteint son état stationnaire, le niveau d'eau reste constant. Observons l'évolution de la pression dans la digue avec l'augmentation du niveau d'eau aux figures 1.5 et 1.6.

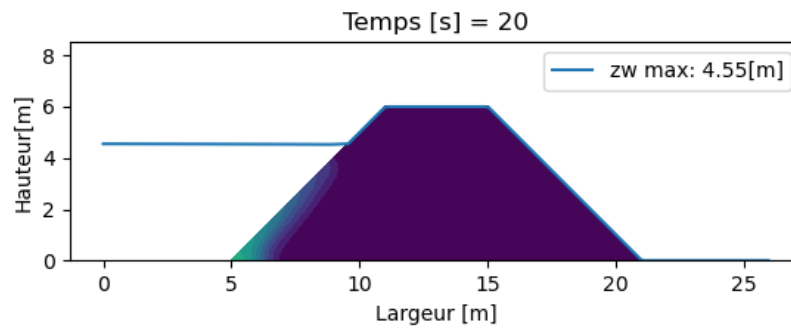


FIGURE 1.5 – Situation en $t = 20s$.

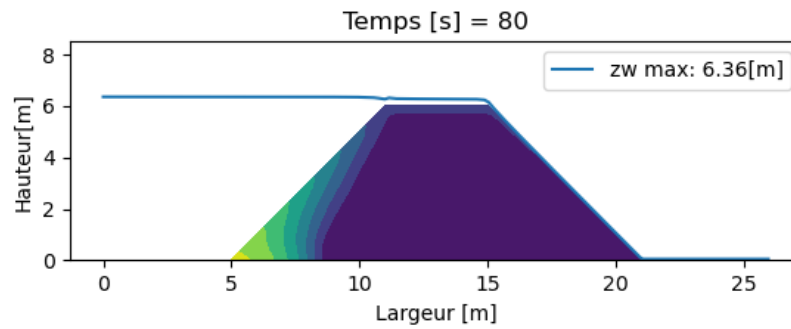


FIGURE 1.6 – Situation en $t = 80s$.

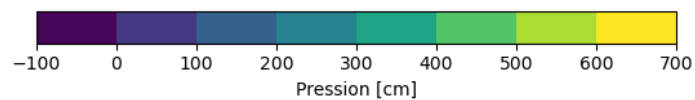


FIGURE 1.7 – Colorbar, pressions dans la digue.

Comme attendu, la pression dans la digue est fortement impactée par la montée de l'eau 1.6. Lorsque la digue est submergée, l'eau pénètre par chaque face dans la digue. Les contraintes totales (1.8a,1.8b) et effectives (1.9a,1.9b) sont également calculées au cours de la simulation.

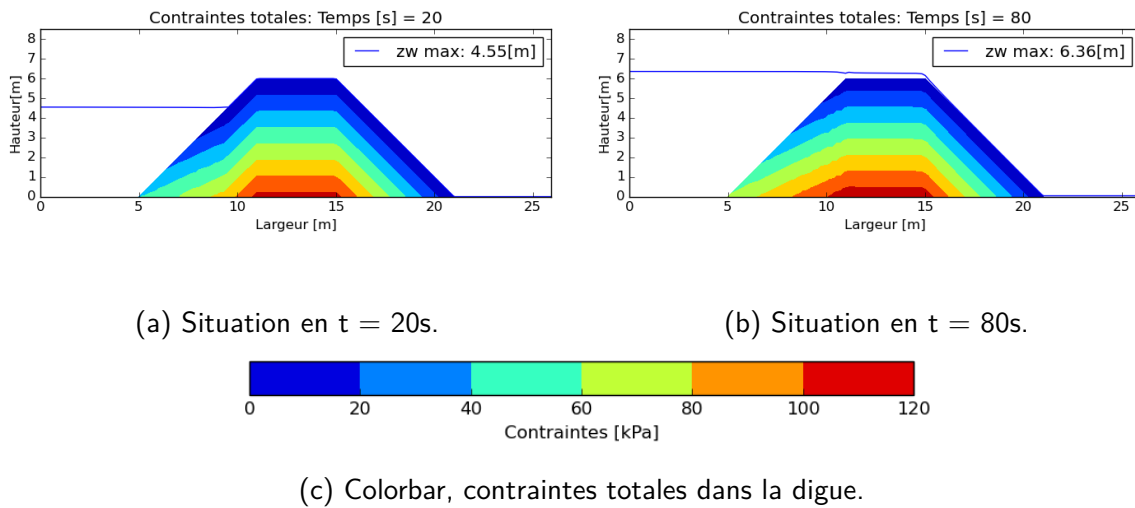


FIGURE 1.8

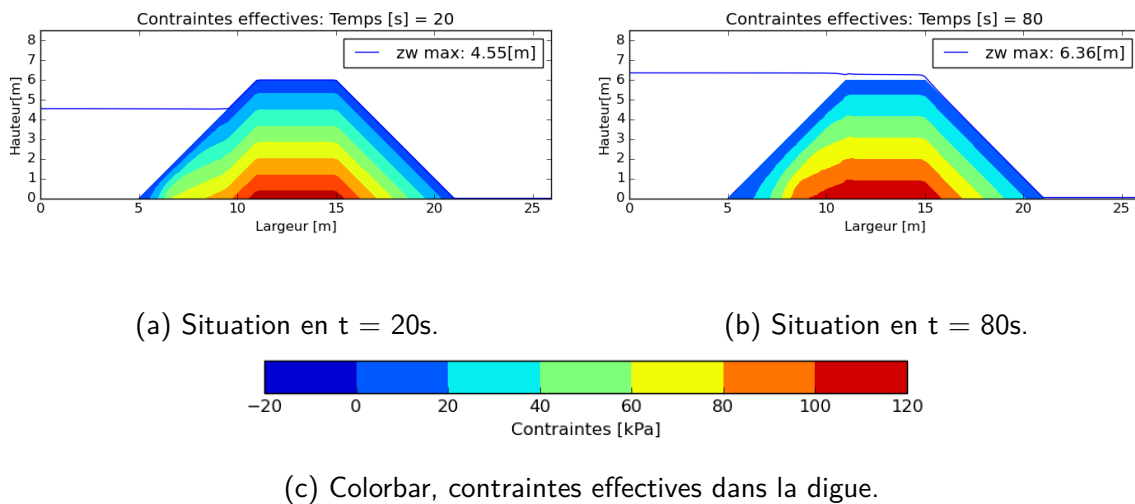


FIGURE 1.9 – Evolution contraintes effectives, flux de surverse.

On observe logiquement l'augmentation des contraintes totales avec l'augmentation du niveau d'eau. Les contraintes effectives sont également influencées par cette augmentation et par la saturation progressive de la digue. Au fur et à mesure de la propagation du front saturé au sein de la digue, l'eau présente dans le sol en quantité reprend une partie des contraintes totales, diminuant ainsi les contraintes reprises par les grains.

1.3.3 Surverse d'une digue proche de la saturation.

Comme nous l'avons vu à la section 4.3.9, la saturation initiale a un impact important sur la vitesse de propagation du front de saturation au sein de la digue. Si l'ensemble de la digue est proche de la saturation ($h_0 = -5[cm]$), le flux de surverse va saturer quasiment instantanément la digue comme observé aux figures 1.10 et 1.11.

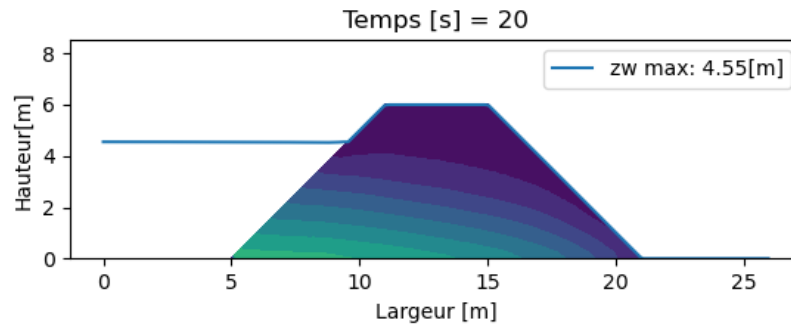


FIGURE 1.10 – Situation en $t = 20$ [s].

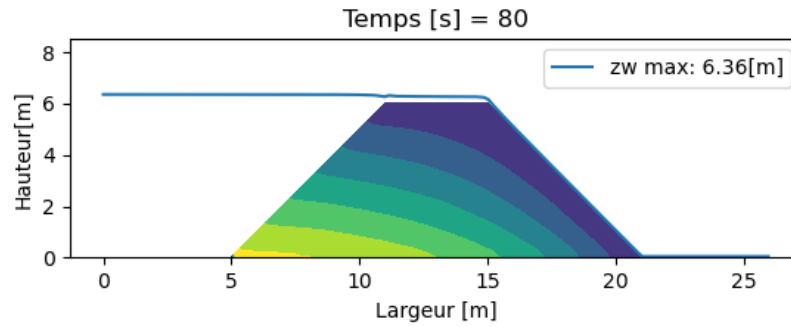


FIGURE 1.11 – Situation en $t = 80$ [s].

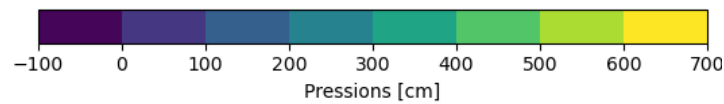


FIGURE 1.12 – Colorbar, pressions dans la digue.

Comme attendu, le flux de surverse sature très rapidement la digue.

1.4 Résultats en tenant compte de l'infiltration

Afin de respecter la conservation de la masse, il faut que l'eau qui s'infiltré dans le domaine de Richards soit retirée au domaine de Saint-Venant. Nous verrons dans cette section une façon de calculer le volume et le débit d'infiltration, respectant la conservation de la masse.

1.4.1 Calcul des flux infiltrés : domaine de Richards

La prise en compte de l'infiltration n'a pas d'effet direct dans le domaine de Richards si ce n'est la diminution de la pression imposée à la frontière du fait de la diminution du niveau de l'eau en surface.

La prise en compte de l'infiltration de l'eau nécessite de calculer les flux sortants de la cellule frontière en direction de l'intérieur du domaine de calcul.

Afin d'estimer le débit d'infiltration, il faut réaliser un bilan de masse sur la cellule frontière. Le bilan de masse est constitué de 2 parties distinctes : l'eau stockée par la cellule et les flux qui en sortent.

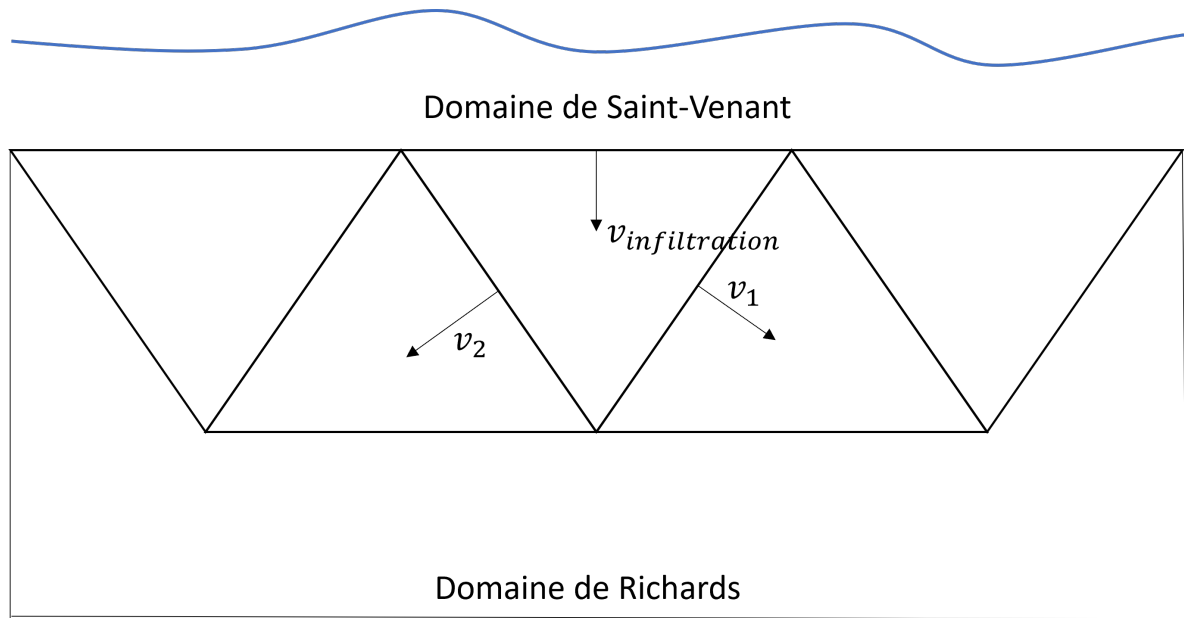


FIGURE 1.13 – Infiltration à la frontière.

Considérons un canal rectangulaire large d'un mètre. Le bilan s'établit formellement de la façon suivante :

$$q_{infiltration} = (v_1 L_1 + v_2 L_2) + (\theta^{n+1} - \theta^n) V_{cell} \frac{1}{dt_{Richards}} \quad (1.1)$$

Où v_1 (e.g) désigne la vitesse du flux entre la cellule frontière et sa première cellule adjacente et L_1 désigne la longueur de cette interface. La seconde partie de la formule du volume infiltré (qui est exprimé en m^2 car le problème est plan) tient compte de la part absorbée par le sol de la cellule même. Ce volume tend très rapidement vers 0 car la cellule frontière se sature presque instantanément. A l'aide de cette formule, définissons la vitesse d'infiltration équivalente à la frontière :

$$v_{infiltration} = \frac{q_{infiltration}}{L_{bound}} \quad (1.2)$$

1.4.2 Calcul des flux infiltrés : domaine de Saint-Venant

L'infiltration est prise en compte dans le système de Saint-Venant comme un terme source. Par conséquent, le vecteur des termes sources est modifié :

$$S(U) = \left(\begin{array}{c} v_{infiltration} \\ gA(S_0 - S_f) \end{array} \right) \quad (1.3)$$

Le schéma de résolution par volume finis 2.6 n'est pas modifié mais il faut tenir compte de ce terme source en l'appliquant. Cette formule est valable uniquement pour un problème plan.

1.4.3 Cas test d'infiltration

Le cas test consiste à placer une masse d'eau au sommet d'une colonne de sol. Au fil du temps le débit infiltré est évalué et cela permettra d'établir une courbe d'infiltration. A priori, le débit d'infiltration devrait diminuer avec le temps car le gradient de pression diminue au fur et à mesure de l'infiltration et donc de la saturation du sol.

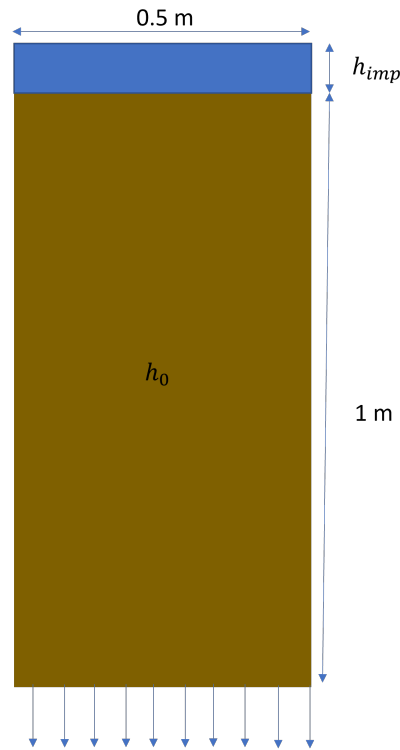


FIGURE 1.14 – Géométrie du cas test.

Il s'agit donc d'une colonne de sol soumise à une pression imposée à son sommet ,matérialisée par un 10 [cm] d'eau, et avec une frontière perméable à sa base (l'eau s'écoule librement). Les valeurs caractéristiques utilisées pour ce cas sont les suivantes :

θ_s	θ_r	α	$K_s[cm/s]$
0.368	0.102	0.0335	0.00922

TABLE 1.3 – Récapitulatif des valeurs caractéristiques.

Pour une pression initiale $h_0 = -40cm$ et une teneur en eau initiale de $\theta = 0.261$, l'évolution du débit infiltré est représentée à la figure 1.15.

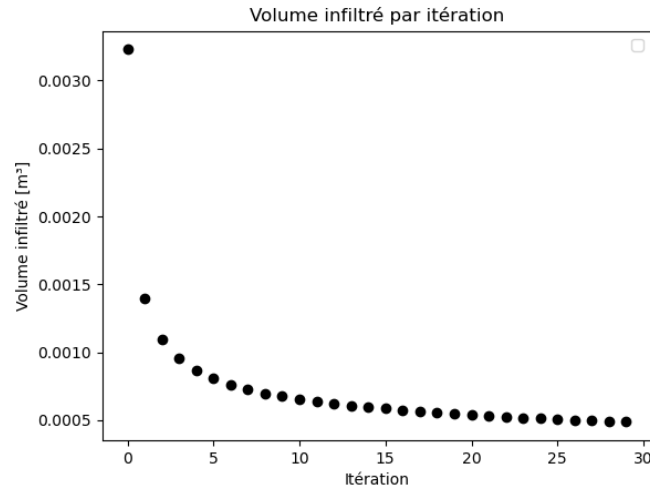
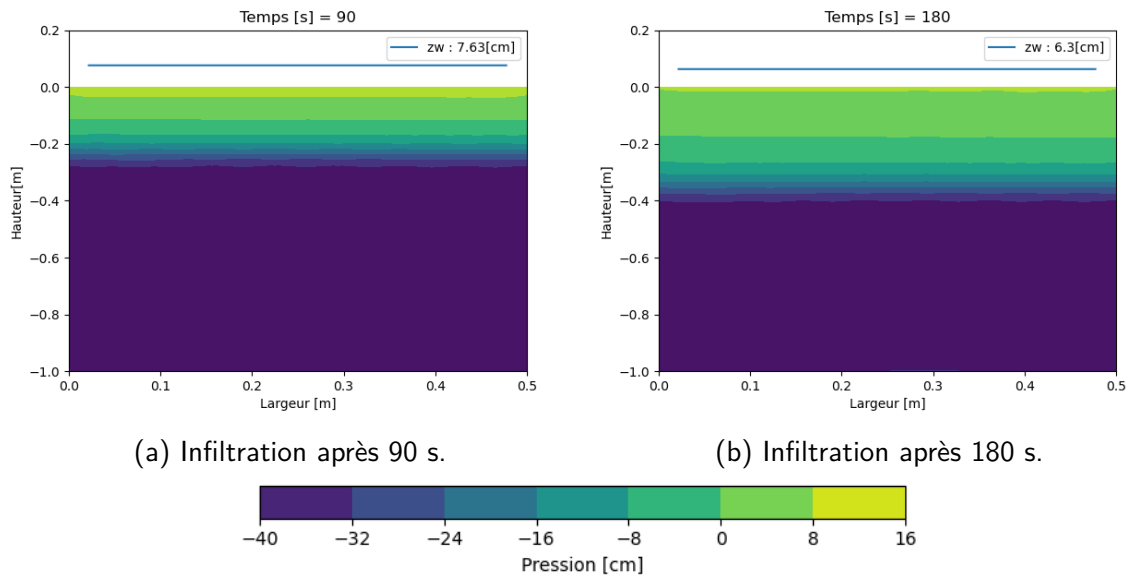


FIGURE 1.15 – Evolution du volume infiltré à chaque itération.

Au début de la simulation, le sol n'est pas du tout saturé, même proche de la surface, par conséquent le gradient de pression initial est important et le débit qui en résulte est le plus élevé de la simulation. Puisque le sol se sature progressivement, le débit d'infiltration diminue avec le temps au diapason du gradient de pression.

La hauteur d'eau qui recouvre le sol diminue à mesure que l'eau s'infiltré dans la colonne (1.16a,1.16b).



(c) Colorbar, pressions dans la colonne.

FIGURE 1.16 – Influence de l'infiltration sur le niveau extérieur.

Divers facteurs influencent le débit d'infiltration :

- La pression initiale dans le sol : si celle-ci est très faible (sol sec), le gradient de pression est plus important et l'eau pénètre plus rapidement.
- La pression extérieure : si le niveau de l'eau recouvrant le sol est plus élevé, le gradient de pression est également plus important causant une infiltration plus rapide de l'eau.
- La conductivité hydraulique : il va de soi qu'une grande conductivité hydraulique favorise l'infiltration de l'eau dans le sol.

Il est également possible de valider le choix de l'expression du débit d'infiltration en vérifiant la conservation de la masse dans le système. Pour ce faire, il faut comparer le volume qui s'est infiltré et qui a quitté le système de Saint-Venant avec la variation de volume d'eau dans le sol. Le volume d'eau quittant le système de Saint-Venant se calcule à chaque pas de temps de Richards de la façon suivante :

$$V_{infiltré,SV} = \sum_{i=1}^{i=n_{cells,sv}} (zw_{i-1} - zw_i)dx_i \quad (1.4)$$

où zw_{i-1} est la hauteur d'eau au pas de temps précédent, zw_i la hauteur d'eau au pas de temps actuel et dx_i la largeur de la cellule de Saint-Venant.

Le volume d'eau qui est entré dans le sol est calculé en intégrant la variation de teneur en eau sur chaque cellule du maillage :

$$V_{infiltré,Rich} = \sum_{j=1}^{j=n_{cells,richards}} (\theta_j^n - \theta_j^{n-1})A_j \quad (1.5)$$

où θ_j^n est la teneur en eau au pas de temps actuel pour une cellule j donnée, θ_j^{n-1} la teneur en eau au pas de temps précédent pour la même cellule et A_j l'aire de cette cellule.

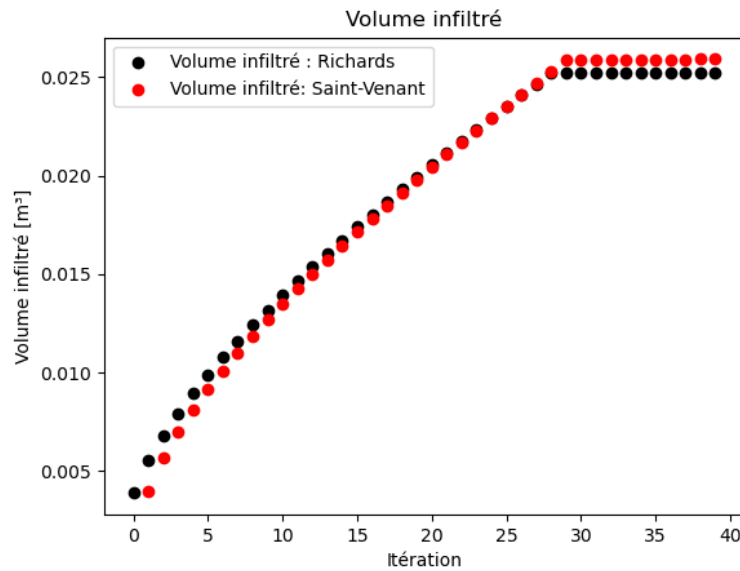


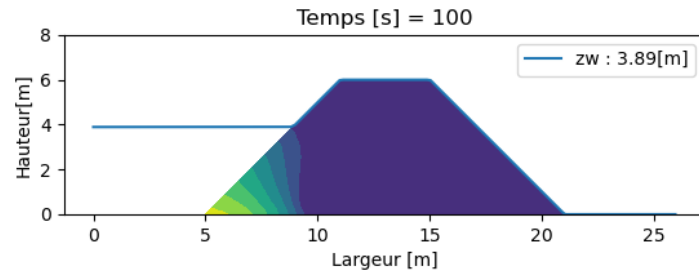
FIGURE 1.17 – Comparaison des volumes infiltrés.

Au total, le volume infiltré dans le sol, calculé avec l'équation (1.5), est légèrement inférieur à celui calculé dans le domaine de Saint-Venant avec l'équation 1.4. La masse n'est donc pas tout à fait conservée, mais le résultat semble acceptable.

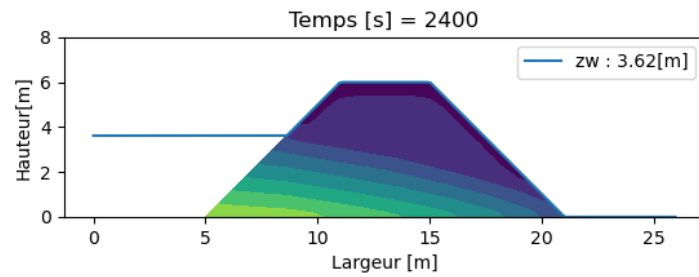
1.4.4 Réservoir sans mouvement

L'objectif de cette section est de valider le calcul de l'infiltration en prenant le cas d'une digue supportant un bassin rempli d'eau. Ce cas test permet de valider l'expression (1.1) en vérifiant à nouveau la conservation de la masse.

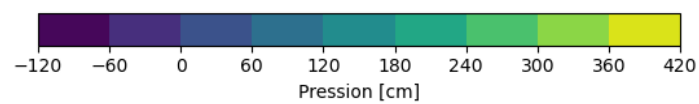
Les conditions initiales sont identiques à celles de la section 1.3.1. Puisque l'eau s'infiltré, la pression exercée par le réservoir sur la digue diminue au fil du temps. Par conséquent, la vitesse de saturation de la digue est moins élevée que dans le cas où l'infiltration n'est pas prise en compte.



(a) Infiltration après 100 s.



(b) Infiltration après 2400 s.



(c) Colorbar, pressions dans la digue.

FIGURE 1.18

A nouveau, en faisant usage des équations (1.4) et (1.5), il est possible d'observer l'évolution du volume d'eau infiltré dans la digue à la figure 1.19.

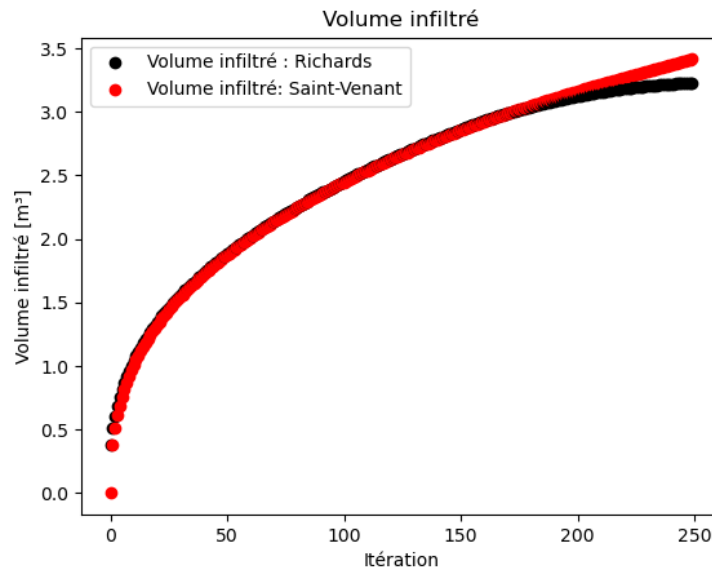


FIGURE 1.19 – Comparaison des volumes infiltrés dans le cas du réservoir sans mouvement.

Aux alentours de la 175^{ème} itération une divergence entre les 2 courbes est observée. Cette divergence s'explique par le fait que l'état stationnaire d'écoulement au sein de la digue est atteint. Le sol de la digue est saturé et il n'y a plus de variation de volume d'eau dans la digue si ce n'est par effet de capillarité. En revanche, l'eau du domaine de Saint-Venant continue à s'infiltrer et traverse la digue dans la partie saturée.

Bien que les résultats obtenus soient assez bons, il est à noter qu'ils ont nécessité une réflexion sur le choix du maillage, lequel est resserré au droit de la partie inférieure gauche de la digue. Le modèle est toujours stable quel que soit le maillage choisi, mais il faut garder un esprit critique quant aux résultats obtenus et la vérification de la conservation de la masse fait partie des critères importants de validation.

1.4.5 Surverse de digue sèche.

Dans cette section, étudions l'effet de la prise en compte de l'infiltration lorsqu'un flux de surverse advient dans le réservoir.

Les conditions initiales sont identiques à celles de la section 1.3.2. L'effet de la prise en compte de l'infiltration est un ralentissement de la vitesse d'ascension de l'eau dans le réservoir. Cela est dû au fait qu'une partie de l'eau qui entre dans le système de Saint-Venant, en amont de la digue, s'infiltré dans la digue :

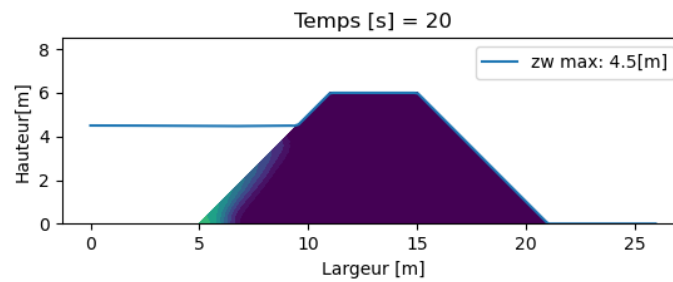


FIGURE 1.20 – Situation en $t = 20$ [s], avec l'infiltration.

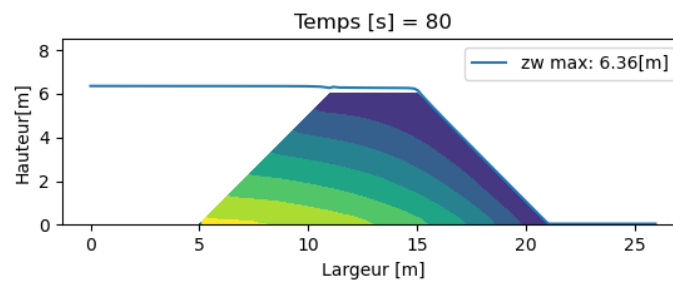


FIGURE 1.21 – Situation en $t = 80$ [s], avec l'infiltration.

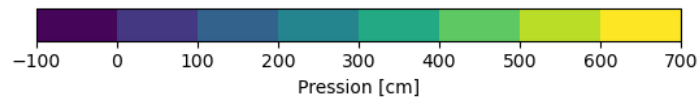


FIGURE 1.22 – Colorbar, pressions dans la digue.

1.4.6 Surverse de digue proche de la saturation.

A nouveau, comparons les résultats obtenus à la section 1.3.3 en tenant compte de l'infiltration. La digue proche de la saturation se sature très rapidement. De plus, puisque le gradient de pression est faible, le débit d'infiltration de l'eau du réservoir dans le sol l'est aussi.

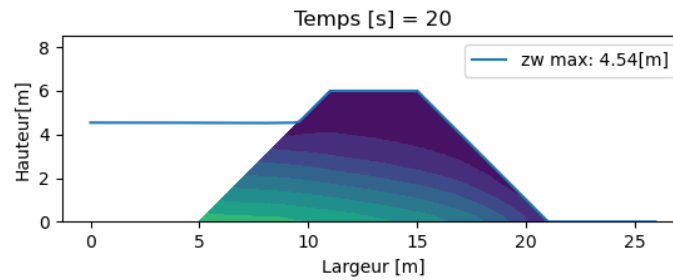


FIGURE 1.23 – Situation en $t = 20$ [s], avec l'infiltration et proche de la saturation.

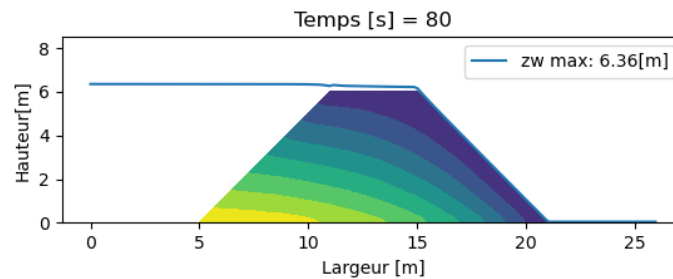


FIGURE 1.24 – Situation en $t = 80$ [s], avec l'infiltration et proche de la saturation.

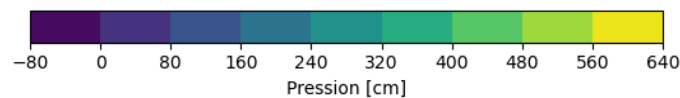


FIGURE 1.25 – Colorbar, pressions dans la digue.

Cela permet donc de confirmer que l'effet de l'infiltration sur un flux est assez faible lorsque la digue est proche de la saturation.

1.4.7 Conclusion sur la prise en compte de l'infiltration.

A la lumière des résultats obtenus, il apparaît que la prise en compte de l'infiltration n'est pas nécessaire. Hormis le fait qu'elle permet de conserver la masse dans le système global,

est même désavantageuse :

- Les résultats obtenus sont moins conservatifs car donnant des valeurs de pression inférieures au cas sans prise en compte de l'infiltration.
L'ingénieur confronté à un dimensionnement de digue aura tendance à se tourner vers la solution la plus sécuritaire. Négliger l'effet de l'infiltration sur le niveau extérieur semble être une bonne hypothèse.
- Ralentissement du code de calcul important du fait du calcul du terme source pour les équations de Saint-Venant.
- La majorité des digues en terre sont conçues avec une couche plus imperméable en face externe, rendant la diminution du niveau extérieur due à l'infiltration davantage limitée.

Conclusions

De longs mois de réflexions, de recherche et d'efforts ont abouti au présent travail. Voyons dès à présent si celui-ci satisfait aux exigences que nous nous étions fixés au début de ce document.

En premier lieu nous nous sommes attachés à décrire les deux types d'écoulements que subissent les digues : les écoulements de surface et les écoulements dans le milieu poreux qui constitue la digue.

Les écoulements en milieux poreux saturés et non saturés ont constitué une grande partie de ce travail. Après avoir décrit l'équation de Richards les régissant, nous avons développé diverses méthodes de résolution de ce problème.

Dans un premier temps la résolution du problème en une dimension avec un schéma de résolution implicite a été réalisée. Les résultats obtenus ont été comparés avec succès avec divers articles.

Par la suite, nous avons abordé la résolution de l'équation de Richards en deux dimensions. Tout d'abord, la méthode de Godunov fût utilisée afin de résoudre le problème sur un maillage structuré. Ce fût un premier pas important vers un modèle en deux dimensions généraliste. Cette étape a permis de saisir les complications qu'implique la résolution en deux dimensions du problème de Richards.

Ensuite, une formulation pour un maillage bi-dimensionnel et non-structuré faisant usage de la méthode des volumes finis a été dérivée. Cette formulation est simple, absolument neuve et a de nombreux avantages. La méthode développée est conservative au niveau de la masse, fournit des résultats cohérents qui ont été, pour certains, validés à partir d'autres travaux. De plus, l'implémentation réalisée est robuste et efficace. De nombreux cas tests ont été réalisés tout comme des études sur les paramètres critiques de la simulation du problème de Richards.

Notons également qu'un module permettant de prendre en compte le comportement hystérétique des sols soumis à des effets de mouillage-séchage a été développé. L'algorithme développé dans cette optique est fonctionnel, bien qu'il augmente fortement le temps de calcul nécessaire. Les résultats obtenus ont été justifiés et sont satisfaisants.

Dans la seconde partie de ce travail, nous avons abordé les équations de Saint-Venant décrivant les écoulements à surface libre. Après avoir posé les bases théoriques nécessaires à la compréhension du problème, nous avons développé un modèle permettant de résoudre ces équations et nous l'avons validé à l'aide de différents cas tests.

La troisième partie de ce travail a permis de réaliser le couplage des deux phénomènes. D'un point de vue spatial, celui-ci est purement couplé alors que d'un point de vue temporel il est découplé. L'infiltration de l'eau dans le sol a été prise en compte dans le système de Saint-Venant à l'aide d'un terme source permettant au couplage réalisé d'être conservatif au niveau de la masse. Différents cas tests ont été expérimentés de façon satisfaisante dont des cas simulant des flux de surverse.

Perspectives

Le travail réalisé ouvre de nouvelles perspectives dans l'étude des phénomènes d'écoulements sur et à travers les digues. De nombreuses directions peuvent encore être prises pour compléter ce travail.

Dans un premier temps, le modèle réalisé doit être confronté à des résultats expérimentaux. Lors d'un travail de fin d'études réalisé en 2011, CHRISTIAENS et de CARTIER D'YVES ont réalisé des essais sur des digues en observant le mécanisme d'initiation de rupture lors de la montée ou de l'abaissement de l'eau le long du talus. L'attention était donc portée sur la stabilité de la digue. Il serait intéressant de réaliser les mêmes expériences en mesurant, à l'aide de tensiomètres par exemple, l'évolution des pressions au cours du temps dans la digue afin de comparer ces résultats avec ceux du modèle numérique. De la même façon, il serait intéressant de placer un colorant dans l'eau et d'observer dans la digue les endroits qui ont été atteints au cours du temps.

Notons tout de même que la réalisation de ces expérimentations nécessite d'obtenir les courbes de rétention (SWRC) pour le sol qui sera utilisé. Ainsi, la détermination précise des paramètres du modèle de Mualem-van Genuchten est un passage obligé pour que la comparaison avec les résultats du modèle soit optimale.

A l'avenir, le modèle réalisé pourrait être pourvu d'une interface graphique, permettant à l'utilisateur de choisir la géométrie, les conditions frontières ou encore le pas de temps. L'implémentation pourrait être améliorée en optimisant la structure et en parallélisant les calculs.

Notons tout de même que le modèle peut être grandement complété. Dans un premier temps il serait intéressant d'implémenter l'équation d'Exner en complément des équations de Saint-Venant. Cette équation permet de prendre en compte le phénomène d'érosion dû au flux de surface. Le défi principal serait alors au niveau du couplage. En effet, cela nécessiterait que le maillage non structuré évolue constituant le domaine de Richards au cours

du temps.

Ensuite, la combinaison avec un logiciel calculant la stabilité de pente permettrait de voir l'influence du flux interne, couplé avec le flux externe, sur la stabilité de la digue. L'utilisation de critère relatif au renardage serait également judicieuse.

Comme nous l'avons vu, les perspectives sont vastes et motivantes. Autant au niveau expérimental que numérique, ce travail peut être exploité et complété afin de toujours mieux comprendre les phénomènes physiques liés aux digues.

Bibliographie

- ALBERS, B. (2015). Main Drying and Wetting Curves of Soils : On Measurements, Prediction and Influence on Wave Propagation. *Eng. Trans.*, 63(1), 5-34. <https://et.ippt.gov.pl/index.php/et/article/view/286>
- BIOT, M. A. (1955). Theory of elasticity and consolidation for a porous anisotropic solid. *Journal of applied physics*, 26(2), 182-185.
- BISHOP, A. W. (1959). The principle of effective stress. *Teknisk ukeblad*, 39, 859-863.
- BROOKS, R. H. & COREY, A. T. (1964). Hydraulic properties of porous media and their relation to drainage design. *Transactions of the ASAE*, 7(1), 26-0028.
- BRUAND, A. & COQUET, Y. (2005). Les sols et le cycle de l'eau.
- BURZYŃSKI, K. & SZYMKIEWICZ, A. (2011). Unstructured finite-volume meshes for two-dimensional flow in variably saturated porous media. *TASK QUARTERLY*, 15(3-4), 339-352.
- CARSEL, R. F. & PARRISH, R. S. (1988). Developing joint probability distributions of soil water retention characteristics. *Water resources research*, 24(5), 755-769.
- CAVIEDES-VOULLIÈME, D. (2010). Numerical simulation of one-dimensional transient vertical flow in variably saturated soils.
- CAVIEDES-VOULLIÈME, D., MURILLO, J. & GARCIA-NAVARRO, P. (2012). Numerical simulation of groundwater-surface interactions by external coupling of the 3 d Richards equation and the full 2 d shallow-water equations.
- CAVIEDES-VOULLIÈME, D., GARCIA-NAVARRO, P. & MURILLO, J. (2013). Verification, conservation, stability and efficiency of a finite volume method for the 1D Richards equation. *J. Hydrol.*, 480, 69-84. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2012.12.008>
- CELIA, M. A., BOULOUTAS, E. T. & ZARBA, R. L. (1990). A general mass-conservative numerical solution for the unsaturated flow equation. *Water resources research*, 26(7), 1483-1496.
- CHRISTIAENS, D. & de CARTIER D'YVES, P. (2011). *Etude de l'initiation de la rupture de berges lors d'une montée ou d'un abaissement de l'eau au pied d'un talus*. UCL-Université Catholique de Louvain.
- DARCY, H. (1856). *Les fontaines publiques de la ville de Dijon : exposition et application...* Victor Dalmont.

- DE MAET, T. & HANERT, E. (2011). An explicit Discontinuous-Galerkin surface-subsurface water flow model. <https://dial.uclouvain.be/pr/boreal/object/boreal:107584>
- DUSSAILLANT, A. R., WU, C. H. & POTTER, K. W. (2004). Richards equation model of a rain garden. *Journal of Hydrologic Engineering*, 9(3), 219-225.
- EBRAHIMI, K., FALCONER, R. A. & LIN, B. (2007). Flow and solute fluxes in integrated wetland and coastal systems. *Environ. Model. Softw.*, 22(9), 1337-1348. <https://doi.org/10.1016/j.envsoft.2006.09.003>
- FARTHING, M. W. & OGDEN, F. L. (2017). Numerical solution of Richards' equation : A review of advances and challenges. *Soil Science Society of America Journal*, 81(6), 1257-1269.
- FOSTER, M., FELL, R. & SPANNAGLE, M. (2000). The statistics of embankment dam failures and accidents. *Canadian Geotechnical Journal*, 37(5), 1000-1024.
- FURMAN, A. (2008). Modeling Coupled Surface-Subsurface Flow Processes : A Review. *Vadose Zone J.*, 7(2), 741. <https://doi.org/10.2136/vzj2007.0065>
- GAŚSIOROWSKI, D. & KOLERSKI, T. (2020). Numerical Solution of the Two-Dimensional Richards Equation Using Alternate Splitting Methods for Dimensional Decomposition. *Water*, 12(6), 1780.
- GEO-SLOPE. (2012). GEO-SLOPE International Ltd. Seepage and stability modelling with SEEP/w.
- GEUZAIN, C. & REMACLE, J.-F. (2009). Gmsh : A 3-D finite element mesh generator with built-in pre-and post-processing facilities. *International journal for numerical methods in engineering*, 79(11), 1309-1331.
- HOOSHYAR, M. & WANG, D. (2016). Providing the physical basis of SCS curve number method and its proportionality relationship from Richards' equation. *AGU Fall Meeting Abstracts, 2016*, H54E-07.
- JAYNES, D. B. (1984). Comparison of soil-water hysteresis models. *J. Hydrol.*, 75(1-4), 287-299. https://www.academia.edu/26140736/Comparison_of_soil_water_hysteresis_models
- KRAHN, J. & FREDLUND, D. G. (1972). On total, matric and osmotic suction. *Soil Sci.* <https://agris.fao.org/agris-search/search.do?recordID=US201303270059>
- LIANG, D., FALCONER, R. A. & LIN, B. (2007). Coupling surface and subsurface flow in a depth averaged flood wave model. *J. Hydrol.*, 337(1), 147-158. <https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2007.01.045>
- LIU, K., VARDON, P. J., HICKS, M. A. & ARNOLD, P. (2017). Combined effect of hysteresis and heterogeneity on the stability of an embankment under transient seepage. *Eng. Geol.*, 219, 140-150. <https://doi.org/10.1016/j.enggeo.2016.11.011>
- MANZINI, G. & FERRARIS, S. (2004). Mass-conservative finite volume methods on 2-D unstructured grids for the Richards' equation. *Advances in Water Resources*, 27(12), 1199-1215.

- MUALEM, Y. (1976). A new model for predicting the hydraulic conductivity of unsaturated porous media. *Water Resour. Res.*, 12(3), 513-522. <https://doi.org/10.1029/WR012i003p00513>
- NUTH, M. & LALOU, L. (2008). Effective stress concept in unsaturated soils : Clarification and validation of a unified framework. *Int. J. Numer. Anal. Methods Geomech.*, 32(7), 771-801. <https://doi.org/10.1002/nag.645>
- RATTEZ, H. & PACHECO DE ALMEIDA, J. (2022). LGCIV1031 Matériaux structuraux et géomatériaux.
- RICHARDS, L. A. (1931). Capillary conduction of liquids through porous mediums. *Physics*, 1(5), 318-333. <https://doi.org/10.1063/1.1745010>
- SCUDELER, C., PANICONI, C., PASETTO, D. & PUTTI, M. (2017). Examination of the seepage face boundary condition in subsurface and coupled surface/subsurface hydrological models. *Water Resources Research*, 53(3), 1799-1819.
- SKEMPTON, A. (1960). Effective stress in soils, concrete and rock : Proceedings of Conference on Pore Pressure and Suction in Soils.
- SOARES FRAZÃO, S. (2002). *Dam-break induced flows in complex topographies. Theoretical, numerical and experimental approaches* (thèse de doct.). UCL-Université Catholique de Louvain.
- SOARES-FRAZÃO, S. (2007). Experiments of dam-break wave over a triangular bottom sill. *Journal of Hydraulic Research*, 45(sup1), 19-26.
- SOARES-FRAZÃO, S. (2022). LGCIV2054 Numerical simulation of transient flows, Notes de cours.
- SOLTANI, A., AZIMI, M., BOROOMANDNIA, A. & O'KELLY, B. C. (2021). An objective framework for determination of the air-entry value from the soil–water characteristic curve. *Results Eng.*, 12, 100298. <https://doi.org/10.1016/j.rineng.2021.100298>
- SULICH, A., SOŁODUCHO-PELC, L. & FERASSO, M. (2021). Management styles and decision-making : Pro-ecological strategy approach. *Sustainability*, 13(4), 1604.
- SZYMKIEWICZ, A. (2013). *Modelling water flow in unsaturated porous media*. Springer.
- TERZAGHI, K. v. (1936). The shearing resistance of saturated soils and the angle between the planes of shear. *First international conference on soil Mechanics*, 1936, 1, 54-59.
- THIMUS, J.-F. (2007). LAUCE1172 Mécanique des sols - Notes de cours, chapitre Eau dans le sol.
- TSAI, T.-L. (2011). Influences of soil water characteristic curve on rainfall-induced shallow landslides. *Environmental Earth Sciences*, 64(2), 449-459. <https://doi.org/10.1007/s12665-010-0868-9>
- UNDRR. (2019). Human cost of disasters : an overview of the last 20 years, 2000-2019.
- VAN BAARS, S. & VAN KEMPEN, I. (2009). The causes and mechanisms of historical dike failures in the Netherlands. *E-Water journal*, 2009.

- van GENUCHTEN. (1980). A Closed-form Equation for Predicting the Hydraulic Conductivity of Unsaturated Soils1. *Soil Sci. Soc. Am. J.*, 44(5). <https://doi.org/10.2136/sssaj1980.03615995004400050002x>
- van GENUCHTEN, R. (2019). Cargèse 2018 4th Summer School Spic- Vadose Zone Hydrologic Processes (Presentation) [[Online ; accessed 12. april 2022]]. [https://www.youtube.com/watch?v=-CtTfA6-FqA&t=1883s&ab_channel=Carg % C3 % A8se20184thSummerSchoolSPIC](https://www.youtube.com/watch?v=-CtTfA6-FqA&t=1883s&ab_channel=Carg%C3%A8se20184thSummerSchoolSPIC)
- WHENHAM, V. (2010). Cohésion apparente des sols non-saturés. *CSTC*.
- WU, L. Z., HUANG, R. Q. & XU, Q. (2011). Incorporating hysteresis in one-dimensional seepage modeling in unsaturated soils. *KSCE J. Civ. Eng.*, 16(1). <https://doi.org/10.1007/s12205-012-1377-z>
- ZHA, Y., YANG, J., ZENG, J., TSO, C.-H. M., ZENG, W. & SHI, L. (2019). Review of numerical solution of Richardson–Richards equation for variably saturated flow in soils. *Wiley Interdisciplinary Reviews : Water*, 6(5), e1364.
- ZHU, H., LIU, T., XUE, B., WANG, G. et al. (2018). Modified Richards' equation to improve estimates of soil moisture in two-layered soils after infiltration. *Water*, 10(9), 1174.

Annexe A

Equations de Saint-Venant à partir des équations de Navier-Stokes

Conservation de la masse

Pour rappel, l'équation de conservation de la masse dans la forme de Navier-Stokes est la suivante :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (\text{A.1})$$

Pour rappel, l'hypothèse d'incompressibilité du fluide a été prise (1.1), par conséquent, le bilan de masse devient :

$$\nabla \cdot (\mathbf{V}) = 0 \quad (\text{A.2})$$

Soit le système de référence suivant :

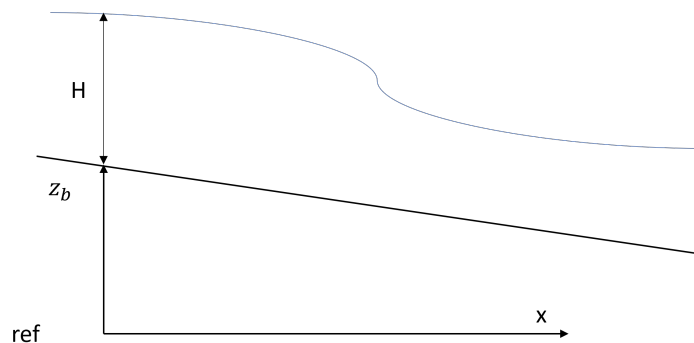


FIGURE A.1 – Schéma de référence.

Intégrons l'équation (A.2) depuis la base jusqu'à la surface libre :

$$\int_{z_b}^{z_b+H} \nabla \cdot \mathbf{V} = \int_{z_b}^{z_b+H} \frac{\partial u}{\partial x} dz + \int_{z_b}^{z_b+H} \frac{\partial w}{\partial z} dz = 0 \quad (\text{A.3})$$

D'une part, par le théorème intégral de Leibniz, nous avons :

$$\int_{z_b}^{z_b+H} \frac{\partial u}{\partial x} dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_b+H} u dz - u_{(z_b+H)} \frac{\partial(z_b + H)}{\partial x} + u_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (\text{A.4})$$

Et d'autre part, à nouveau par le théorème de Leibniz et en prenant comme hypothèse que les flux normaux à la surface libre et à la surface du fond sont nuls :

$$\int_{z_b}^{z_b+H} \frac{\partial w}{\partial z} dz = w_{(z_b+H)} - w_{z_b} = \frac{\partial H}{\partial t} + u_{(z_b+H)} \frac{\partial(z_b + H)}{\partial x} - u_{z_b} \frac{\partial z_b}{\partial x} \quad (\text{A.5})$$

En sommant ces deux expressions, nous obtenons :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_b+H} u dz = 0 \quad (\text{A.6})$$

La vitesse moyenne s'exprime comme :

$$\bar{u} = \frac{1}{H} \int_{z_b}^{z_b+H} u(t, x, z) dz \quad (\text{A.7})$$

Par conséquent :

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial H \bar{u}}{\partial x} = 0 \quad (\text{A.8})$$

En considérant un canal rectangulaire, et en multipliant l'équation (A.2) par la largeur L, nous obtenons l'équation de conservation de la masse finale :

$$\boxed{\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial Q}{\partial x} = 0} \quad (\text{A.9})$$

Où A est l'aire $[m^2]$ de la section et Q le débit $[m^3/s]$.

Conservation de la quantité de mouvement

Pour rappel, l'équation de conservation de la quantité de mouvement dans la direction x est la suivante :

$$\rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (\text{A.10})$$

Où ;

- ρ est la densité de l'eau.
- u, v, w sont les composantes de la vitesse dans les directions x, y, z .
- p est la pression hydraulique.
- μ est la viscosité.
- g_x, g_y, g_z sont les composantes de la gravité dans les directions x, y, z .

Sur base des hypothèses faites précédemment (1.1), pour un flux unidimensionnel, nous obtenons :

$$p = \rho g \delta h \quad (\text{A.11})$$

et :

$$v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (\text{A.12})$$

En faisant l'hypothèse (supplémentaire) que les forces de friction seront comprise dans un terme de global de forces :

$$\mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = 0 \quad (\text{A.13})$$

De telle sorte que l'équation de conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial(\rho g \delta h)}{\partial x} + f_x \quad (\text{A.14})$$

L'estimation du terme des actions externes nécessite de réaliser un bilan :

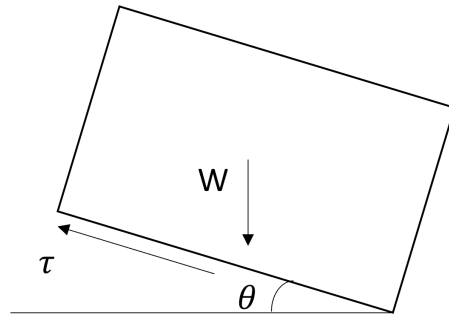


FIGURE A.2 – Bilan de forces sur un élément du flux.

Les forces qui s'appliquent sont donc le frottement τ et W , le poids :

$$f_x = mg \sin \theta - \tau = mg S_0 - mg S_f \quad (\text{A.15})$$

Finalement $f_x = g(S_0 - S_f)$, la force par unité de masse :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right) = -g \frac{\partial h}{\partial x} + g(S_0 - S_f) \quad (\text{A.16})$$

Par conséquent, puisque $u = \frac{Q}{A}$, l'équation de conservation de la quantité de mouvement devient :

$$\boxed{\frac{1}{A} \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{1}{A} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{Q^2}{A} \right) + g \frac{\partial h}{\partial x} - g (S_0 - S_f) = 0} \quad (\text{A.17})$$

Annexe B

GMSH

GMSH est un logiciel open-source permettant de générer des maillages non-structurés. Le logiciel peut être utilisé soit via son interface utilisateur, soit via des API qui sont disponibles en C++, C, Python et Julia.

L'ensemble des codes créés dans ce travail ont été écrits en Python. Dès lors, l'API de GMSH en Python est très pratique pour générer les maillages nécessaires.

En revanche, GMSH ne fournit pas spécifiquement les caractéristiques nécessaires pour chaque méthode de résolution numérique. GMSH permet de générer un maillage et fournit les coordonnées des sommets et des barycentres mais également la numérotation des noeuds, des éléments et des arêtes.

Ensuite, c'est à l'utilisateur de calculer, en fonction de ses besoins, les paramètres complémentaires. Dans notre cas, la méthode des volumes finis a nécessité de créer les fonctions suivantes :

- `get_edges_length` : cette fonction permet de calculer la longueur de chaque arête par simple application du théorème de Pythagore.
- `get_distancesCenters` : cette fonction consiste à calculer la distance directe entre deux barycentres d'éléments adjacents.
- `find_adjacencies` : cette fonction permet de trouver les éléments adjacents à chaque élément du maillage. Si l'élément est un élément frontière, l'élément adjacent inexistant est désigné par -1.
- `get_normal` : cette fonction permet de calculer les normales sortantes à chaque arête du maillage.
- `get_elemAreas` : cette fonction calcule l'aire de chaque élément.

Dans le cadre de la méthode des volumes finis, les valeurs inconnues sont placées aux centres des éléments du maillage. Lorsque les résultats ont été calculés au cours du temps, il faut pouvoir les afficher. Pour cela, un post processing est nécessaire. La fonction de Python

permettant d'afficher les résultats fait partie de la librairie 'matplotlib.tri'. Celle-ci nécessite les valeurs de résultats aux noeuds et non aux centres des éléments. Il faut donc créer deux nouvelles fonctions permettant d'évaluer les valeurs aux sommets :

- `get_elem4nodes` : cette fonction crée un tableau renvoyant pour chaque noeud, les éléments auxquels il appartient.
- `calculate_valueAtNode` : cette fonction calcule la valeur au noeud en effectuant la moyenne des valeurs des éléments qui l'entourent.

