

École polytechnique de Louvain

Calcul des assemblages de troncs d'arbres de structures réciproques sur base d'une approche de conception paramétrique

Auteur: **Thomas KAISIN**

Promoteur: **Pierre LATTEUR**

Lecteurs: **Julien GENO, João SARAIVA ESTEVES PACHECO DE
ALMEIDA, Igor BOUCKAERT, Justin GOOSSE**

Année académique 2020–2021

Master [120] : ingénieur civil des constructions

*Je dédicace le fruit du présent
mémoire à ma grand-mère
Moeke, décédée durant la
rédaction de celui-ci.*

Remerciements

Mes premiers remerciements vont à mon promoteur, le Pr Pierre Latteur. Je le remercie de m'avoir donné l'opportunité de traiter d'un sujet qui m'a toujours vivement intéressé, ainsi que pour ses remarques constructives et bien sûr avant tout, pour la qualité de ses cours, prodigués pendant mon cursus.

Ensuite, je tiens à remercier spécialement Julien Geno pour sa précieuse aide et son temps dévoué tout au long de ce travail. Ses conseils avisés, son implication soutenante, sa gentillesse et ses encouragements m'ont aidé à tenir le cap. Je remercie également Justin Goosse pour sa bienveillante collaboration.

Ma gratitude va encore au Pr Benoît Herman pour le temps qu'il a consacré à l'impression 3D d'une maquette réduite de la structure étudiée dans ce mémoire.

En outre, je tiens à remercier chaleureusement mes parents sans qui je n'en serais pas arrivé jusque là aujourd'hui. Leur confiance, leur soutien et leur dévotion m'installent dans un confort quotidien. Je remercie tout particulièrement mon papa pour le temps consacré à d'attentives relectures.

Enfin, je remercie infiniment Rachelle pour ses encouragements permanents. Son réconfort ainsi que son estime à mon égard m'apportent une force quotidienne et me permettent de croire en moi.

Abstract

Le développement de structures réciproques composées de troncs d'arbres présente de réels avantages dans le monde de la construction, en plus d'un potentiel d'exploitation non négligeable. L'empreinte écologique réduite et l'aspect brut des troncs confèrent au bois un atout majeur pour rivaliser économiquement avec un matériau traditionnel comme le béton. En outre, le soutien mutuel des éléments qui caractérise ce principe structural permet de franchir des portées plus grandes que la longueur limitée des éléments qui composent la structure. Au cours du présent travail, nous discuterons de l'étude calculatoire de ces structures et, plus précisément, celle des assemblages liant les troncs entre eux. Un assemblage bois – bois étant souhaité, la transmission des efforts se fait par pression de contact. L'objectif de ce travail consiste à interpréter un schéma statique cohérent et représentatif de la réalité au sein d'un programme de calcul. Ensuite, nous développerons une méthode théorique sur la répartition des efforts au sein des assemblages. Ainsi, la vérification des contraintes du bois dans ces assemblages, pour n'importe quel cas de charges appliqué à la structure, pourra être opérée.

Tables des matières

Tables des matières

Remerciements.....	I
Abstract	I
Tables des matières.....	III
1. Introduction	3
2. État de l'art	7
2.1. Les structures réciproques	7
2.1.1. Origine.....	7
2.1.2. Caractérisation des structures réciproques.....	8
2.1.3. Quelques applications actuelles	9
2.2. Parametric design	10
2.2.1. Qu'est-ce que le parametric design ?.....	10
2.2.2. Intérêt au sein de l'architecture	10
2.2.3. Application pratique	11
2.3. Usinage robotique.....	12
2.3.1. Le projet « The Sequential Roof »	12
2.3.2. L'étude « Timber bar structures with butt T-joints »	13
2.4. Structures réciproques composées de grumes	14
3. Paramétrisation	19
3.1. Outils	19
3.2. Modélisation d'une toiture.....	21
3.2.1. Modèle filaire.....	21
3.2.2. Modèle géométrique	22
3.2.3. Calcul des embrèvements	23
3.2.4. Code couleur.....	25
3.2.5. Apprentissage	25
4. Assemblages	29
4.1. Assemblage défini par J. G.....	30
4.1.1. Les paramètres.....	30
4.1.2. L'usinage robotique.....	32
4.1.3. Aspect final de l'assemblage	32
4.2. Surfaces de contact	33

4.2.1. Cylindres locaux.....	35
4.2.2. Volumes de découpe.....	36
4.2.3. Projection.....	36
5. Scénarios de chargement.....	41
5.1. Hypothèses.....	41
5.1.1. Résultante de force.....	41
5.1.2. Comportement de l'assemblage.....	42
5.1.3. Répartition des contraintes.....	43
5.1.4. Produit scalaire.....	43
5.1.5. Frottement.....	44
5.2. Répartition des efforts au sein de l'assemblage.....	44
5.2.1. Vecteurs normaux.....	44
5.2.2. Identification des surfaces sollicitées.....	47
5.2.3. Méthodologie de répartition de l'effort.....	47
5.2.4. Conclusion.....	49
5.3. Sans tolérance d'usinage.....	49
5.3.1. 1 surface chargée.....	50
5.3.2. 2 surfaces chargées.....	51
5.3.3. 3 surfaces chargées.....	51
5.3.4. 4 surfaces chargées.....	52
5.4. Avec tolérance d'usinage.....	53
5.4.1. Moins de 3 surfaces chargées.....	55
5.4.2. 3 surfaces chargées.....	55
5.4.3. 4 surfaces chargées.....	57
5.4.4. Cas particuliers.....	61
6. Module de calcul des structures.....	67
6.1. Pattern de la structure.....	67
6.2. Schéma des étapes.....	68
6.2.1. Création du modèle de calcul.....	68
6.2.2. Analyse calculatoire.....	69
6.2.3. Récupération des efforts.....	72
6.2.4. Définition du joint des assemblages.....	73
6.3. Détermination de la résultante.....	75
7. Application à la structure étudiée.....	79
7.1. Hypothèses.....	79

7.2. Analyse	80
8. Limites de l'étude et objectifs futurs.....	87
9. Conclusion	91
10. Bibliographie.....	95
11. Annexes.....	99
11.1. Nombre de surfaces de contact chargées	99

Introduction

1. Introduction

Le présent mémoire s'inscrit dans la recherche de nouvelles alternatives dans le milieu de la construction et, plus particulièrement, dans la construction en ossature bois. En effet, à l'heure actuelle, l'utilisation à grande échelle de ce matériau organique est trop souvent délaissée. La raison principale réside probablement dans le coût de sa main d'œuvre ainsi que dans l'importante perte de matériau liée à sa transformation.

Pour garantir et promouvoir l'attrait lié aux ossatures bois, nous introduisons le concept des structures réciproques. Le principe de ce type de structure consiste en la superposition de poutres, les unes sur les autres, de manière à ce que l'ensemble de ces poutres se soutiennent mutuellement. Ainsi, le dispositif propre à ce genre de structure présente un aspect structural intéressant qui sera exploité dans ce travail. Une autre particularité de ces structures est qu'elles permettent de franchir des portées beaucoup plus grandes que la longueur limitée des éléments qui les composent.

En outre, nous allons étudier le comportement des structures réciproques dans le cas où celles-ci sont composées de grumes – parties structurellement exploitables d'un tronc d'arbre. L'intérêt de travailler directement avec des troncs bruts se justifie à plusieurs niveaux.

Premièrement, cela constitue un avantage économique puisque nous n'effectuons aucune transformation du bois (élagage, sciage, rabotage, collage, etc.) qui sont les principales raisons d'un coût élevé pour une structure en bois. Ainsi, la suppression de ces coûts entraîne la possibilité, pour ce matériau, de rivaliser avec une structure plus économique comme le béton.

Ensuite, l'utilisation de troncs présente une empreinte écologique quasi nulle pour autant que nos forêts soient gérées et replantées de manière durable. Les structures réciproques à base de grumes, en plus d'un intérêt architectural évident, sont étiquetées « low carbon ».

Finalement, nous verrons que, dans cette étude, les troncs présentés ne sont pas dénaturés et pourront donc être réutilisés en fin de vie de la structure pour d'autres applications. Contrairement aux structures en béton qui, en fin de vie, polluent énormément faute de possibilités de recyclage, les structures réciproques à base de grumes semblent donc assez concurrentielles.

Par ailleurs, il est à noter que ce mémoire s'inscrit dans la continuité du travail réalisé par Mr Justin Goosse [1]. Son travail a abouti à la construction réelle d'une structure réciproque composée de 14 grumes [Figure 1], qui sera notre structure de référence tout au long de ce mémoire. Dans son travail, un modèle sur base d'une approche paramétrique a été implémenté dans le but de définir la géométrie de cette structure réciproque, d'en intégrer des troncs d'arbres scannés au préalable et d'en définir les plans de découpe des grumes pour les assemblages de la structure. Ces plans de découpe étant finalement destinés à un usinage robotique.

Concrètement, l'objectif du présent mémoire est d'approfondir cette recherche et d'enrichir le modèle paramétrique en apportant une étude structurale. L'intérêt à terme étant de développer

un programme complet et autonome pour toute structure reposant sur ce principe de grumes mutuellement soutenues.

En ce sens, nous allons proposer une analyse de la transmission des efforts au sein de cette structure complexe et tenter de fournir une méthode théorique cohérente pour la répartition des efforts au niveau de ces assemblages ; le but étant d'établir une vérification des contraintes qui sollicitent le matériau bois. Nous verrons que ces assemblages sont élaborés de manière à avoir une transmission d'efforts d'une grume à l'autre uniquement par pression de contact. Nous souhaitons en effet un assemblage purement bois – bois sans apport de connexions métalliques, notamment pour garder l'avantage économique de cette exploitation.

En pratique, l'utilisation du logiciel *Rhinoceros* et son plugin dédié *Grasshopper* nous permettra d'entreprendre cette approche paramétrique. Ce travail a également pour but de vulgariser brièvement le fonctionnement de ces derniers à l'aide d'un mini-projet de modélisation d'une toiture.

Ensuite, nous nous servirons du module *Karamba3D* de Grasshopper pour notre analyse calculatoire. Nous verrons que l'interprétation d'une structure réciproque dans un programme de calcul s'avère être une tâche quelque peu fastidieuse.

A l'issue de ce mémoire, le lecteur sera en mesure de comprendre les différents concepts de structures réciproques, d'approche paramétrique et brièvement d'usinage robotique.

Le lecteur pourra également se rendre compte de la manière dont on peut effectuer l'analyse calculatoire pour une telle structure.

Finalement, il sera amené à découvrir comment la répartition des efforts au sein des assemblages peut être théoriquement interprétée, dans le but de justifier un comportement cohérent dans la pratique.



Figure 1 : Structure de référence du mémoire. [1]

État de l'art

2. État de l'art

Tout au long de ce mémoire nous parlerons des concepts de structures réciproques, de « parametric design » et également d'usinage robotique. Cette première partie a pour but de se familiariser avec ces différents concepts.

2.1. Les structures réciproques

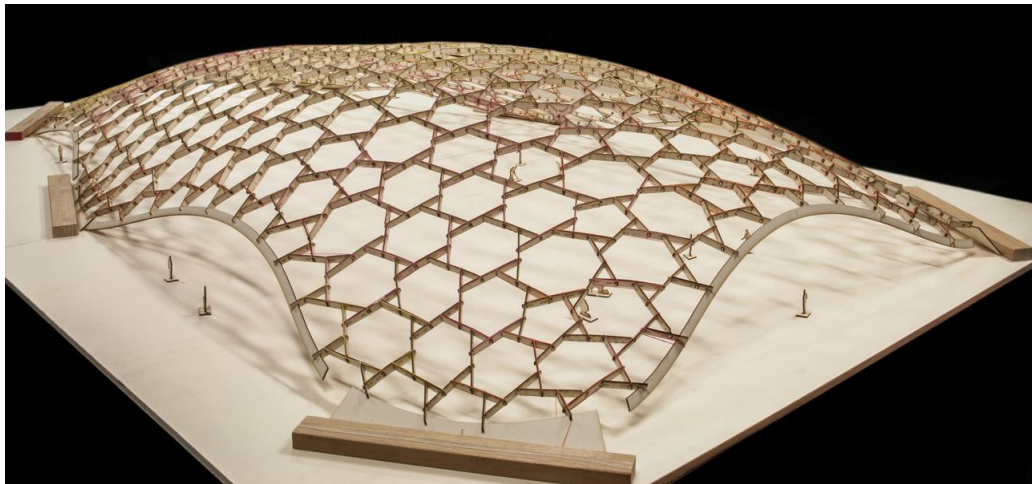


Figure 2 : Projet d'un dôme sous le concept de structure réciproque, Elena Corio [16].

2.1.1. Origine

Il serait difficile de dater la première apparition d'un édifice où le principe structural est basé sur le soutien mutuel des éléments qui le composent. Cependant, quelques éléments nous permettent de retracer leur histoire. En effet, les potentiels premiers acteurs sembleraient être les indiens avec leurs tipis [Figure 3]. Ces constructions relativement simples faisaient déjà apparaître le principe de structures réciproques. En effet, les éléments en bois d'un tipi convergent en un point où chacun repose l'un sur l'autre ; l'ajout de peaux animales sur la couverture de la structure et une corde au niveau de la jonction supérieure venaient par ailleurs solidifier l'ensemble. [2]

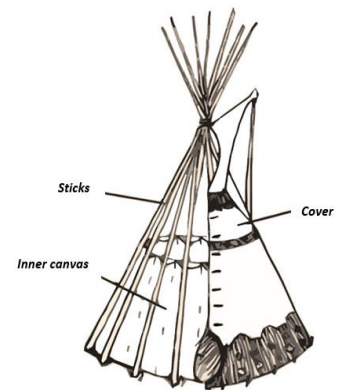


Figure 3 : Principe d'un tipi [15]

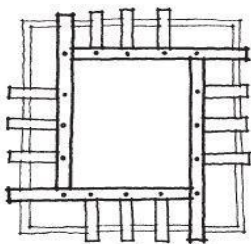


Figure 4 : Honnecourt [2]

Par la suite, au Moyen-Âge, de nombreux hommes de savoir en ingénierie ont tenté de trouver des systèmes portatifs permettant de couvrir de larges distances par rapport à la longueur des éléments les composant. Parmi eux, nous pouvons citer l'architecte français, Villard de Honnecourt, qui proposa un système de 4 poutres enchevêtrées pour couvrir une surface carrée. [Figure 4] [2] [3]

Plus tard, au XV^{ème} siècle, un des premiers acteurs ayant fait des recherches scientifiques sur ce principe structural n'est nul autre que Leonard de Vinci. Il complexifie davantage le système en apportant un aspect concret en 3 dimensions avec son célèbre pont qui repose sur cette théorie d'éléments mutuellement soutenus [Figure 5]. A nouveau, ce pont permet de franchir des portées avec des éléments constitutifs de longueurs limitées ; c'est là tout l'intérêt des structures réciproques qui nous intéressent. [3]

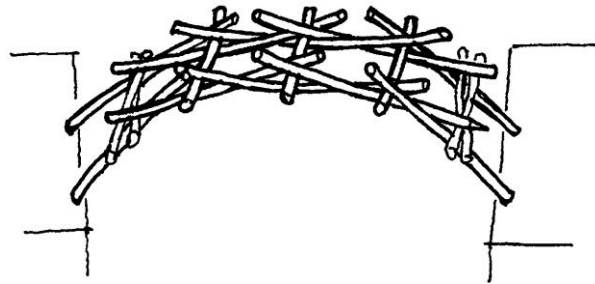


Figure 5 : Pont pensé par Léonard de Vinci [3]

Récemment, dans les années 60-70, deux ingénieurs allemands ont proposé un plancher sous le concept de structure réciproque composée de poutres encochées en béton préfabriqué [Figure 6]. [2]

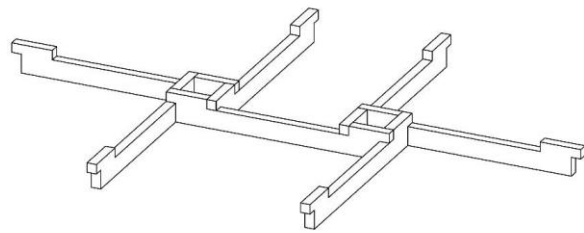


Figure 6 : Plancher en béton préfabriqué. [2]

2.1.2. Caractérisation des structures réciproques

Une structure est dite « réciproque » si chaque poutre de la structure soutient au moins une autre poutre et pour laquelle chaque poutre peut posséder au maximum un seul appui. En d'autres mots, une poutre a deux extrémités, chaque extrémité peut soit reposer sur une autre poutre, soit être posée sur un appui extérieur à la structure, mais les 2 extrémités d'une poutre ne peuvent pas reposer sur deux appuis extérieurs. Les structures réciproques se composent, en général, d'un motif composé d'un certain nombre d'éléments qu'on appelle *module* [Figure 7]. Le module à 3 poutres est le plus petit module possible. Ces modules ainsi répétés permettent la formation de la structure finale.

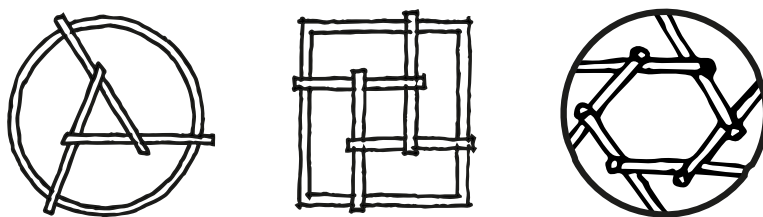


Figure 7 : Module à 3, 4 et 6 éléments [3]

Ces structures ne sont pas exclusives à un seul matériau ou à un type d'assemblage spécifique, elles peuvent être agencées avec différents types d'éléments. Il existe, en effet, de nombreuses manières d'assembler les éléments entre eux, certaines sont reprises ici [Figure 8]. En effet, (a) les éléments peuvent simplement être posés les uns sur les autres, (b) ils peuvent être connectés entre eux via des encoches préalablement découpées et (c) les éléments sont découpés de manière à ce que la structure puisse être considérée comme une surface en 2D (un plancher par exemple) une fois les éléments combinés. Pour des raisons de solidification, un renforcement dans la connexion entre les éléments est parfois nécessaire et peut se faire via des apports de composants métalliques tels que des boulons, des connecteurs métalliques, des tirefonds, etc. [2]

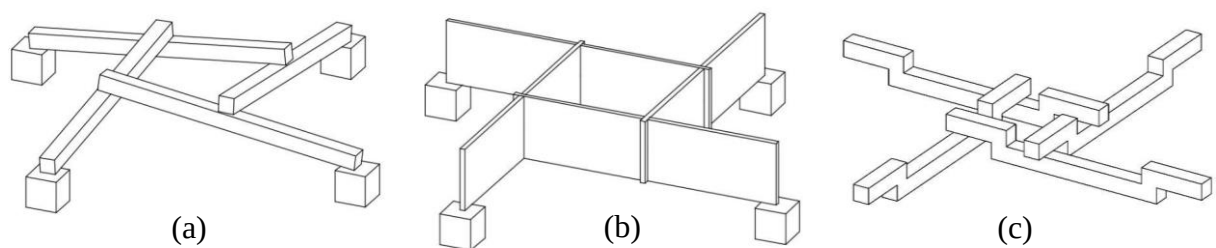


Figure 8 : Différents types d'assemblages [2]

2.1.3. Quelques applications actuelles

A l'heure actuelle, nous pouvons retrouver ce principe de fonctionnement sous différentes applications dans la vie de tous les jours. La salle communautaire de Woodland en Angleterre est composée de rondins en sapin douglas d'environ 3 m de long chacun [Figure 9].

Dans le nord du Danemark, à Morsø, une passerelle pour piétons a été construite selon le principe de De Vinci [Figure 10].



Figure 9 : Woodland Community Hall [12]



Figure 10 : Passerelle à Morsø, Danemark [14]

2.2. Parametric design

Dans la plupart des outils de modélisation classique en architecture, que ce soit des outils manuels tels qu'un crayon, une gomme ou un compas ou des outils au sein d'un programme numérique, il y a souvent un manque d'interactivité au niveau des modifications que l'on souhaite apporter à un projet après création de celui-ci. Cependant, lorsqu'on conçoit un modèle ou un projet, il est plutôt intéressant de pouvoir constamment revenir en arrière et de réélaborer quelques aspects particuliers sans pour autant devoir « recréer » un nouveau projet. C'est là que le parametric design intervient. [4]

2.2.1. Qu'est-ce que le parametric design ?

Une définition simple pourrait être :

« Le parametric design est un processus de modélisation dans lequel l'ensemble des éléments sont interdépendants les uns des autres et entièrement définis par un ensemble, plus ou moins grand, de paramètres fixés par le concepteur ».

De cette manière, lorsque l'on souhaite dimensionner une forme quelconque, on va attribuer à cette forme un certain nombre de paramètres la définissant : le nombre de côtés, le positionnement dans l'espace, l'épaisseur, l'orientation, ... ; il faudra également définir les relations entre chaque élément : quel est l'impact de la modification d'un élément sur les autres du projet ?

Pour des projets complexes, les formes géométriques que l'on conçoit sont dépendantes d'entités élémentaires telles que des points, des lignes, des courbes, des maillages qui sont eux-mêmes paramétrés par leur position, leur longueur, leur orientation, etc. [4]

Un autre aspect intéressant du parametric design réside dans la possibilité de déterminer facilement plusieurs solutions pour un même problème. Les choix d'ajustage de certains paramètres sont en effet assez nombreux, l'utilisateur choisira la solution qui semble, à ses yeux, la meilleure parmi toutes celles qu'il aura pu comparer. On distingue deux grands piliers permettant le parametric design et facilitant l'ajustage de paramètres : soit par programmation à l'aide d'un langage spécifique, soit à l'aide d'un programme déjà conçu pour permettre ce type d'approche dans lequel une interface graphique rend la conception plus intuitive. [5]

Lorsque le projet est bien ficelé au niveau de la paramétrisation, nous pouvons gagner un temps considérable dans la modélisation de projets similaires. Ceci peut s'illustrer simplement par un exemple de conception d'un pont : *« Un modèle est établi pour un pont devant franchir une portée de 8 m. Si la portée du pont est un paramètre qui a été fixé dans le modèle, alors il est aisé d'obtenir une solution similaire pour un autre pont dont la portée est de 12 m ».*

2.2.2. Intérêt au sein de l'architecture

Lors d'une conception dans le monde de la construction, le problème posé au départ n'est pas forcément complet. En ce sens, un certain nombre de solutions sont possibles. C'est au cours du déroulement du projet qu'apparaissent des facteurs perturbateurs qui viennent restreindre ce nombre de solutions. [5] En effet, dans la construction, des imprévus peuvent toujours se présenter en cours de modélisation. L'intérêt du parametric design réside dans le fait de ne pas se focaliser sur une solution spécifique, il permet de démarrer un modèle assez large en prenant

en compte beaucoup de paramètres et au fur et à mesure de la conception, les spécificités du problème sont prises en compte de manière à tendre vers une solution finale.

De plus, le parametric design ouvre des perspectives intéressantes pour le monde architectural. En effet, l'architecture c'est un ensemble de nombreux éléments qui peuvent être relativement complexes mais qui, outre l'esthétisme des projets, visent également à en garantir la stabilité et la résistance. Ainsi le parametric design permet de jongler entre l'aspect architectural d'une part, et la stabilité structurelle de l'autre.

2.2.3. Application pratique

Une des plus grandes structures en bois au monde a été dimensionnée grâce au parametric design. Il s'agit de la « Metropol Parasol » [Figure 11] situé à Séville en Espagne. La structure est conçue comme un grand treillis en bois pour laquelle les éléments ont été paramétrés de manière à créer une forme organique en réponse à la charge structurelle. [6]



Figure 11 : "Metropol Parasol", Séville, Espagne [13]

2.3. Usinage robotique

A l'heure actuelle, l'expansion de l'utilisation de robots dans le monde de l'industrie est fulgurante. De nombreuses recherches et développements ont permis de rendre des robots très autonomes et efficaces dans pas mal de domaines. Dans cette partie, nous nous intéresserons uniquement à l'automatisation robotique dans l'industrie du bois. Cette dernière permet actuellement deux activités principales : l'usinage (par découpe, fraisage, ...) de pièces géométriques et la jonction de celles-ci dans le but de former une structure. [7]

La monde de la robotique n'a pas beaucoup de sens dans le montage et/ou la découpe d'éléments appartenant à des structures standards telles que de simples charpentes de toiture par exemple. L'utilisation de robots devient, par contre, un atout quand on s'intéresse à des ossatures plus complexes composées d'une géométrie non-répétitive et non-standardisée. Dans ce type de structure, il existe un grand nombre d'objets qui ont la particularité d'être tous uniques et non-remplaçables entre eux. Le grand nombre d'objets implique une logistique irréprochable et difficile à mettre en œuvre par l'homme car la numérotation de tous les éléments distincts et le stock en mémoire de l'information sur leurs positions dans la structure sont des tâches fastidieuses. [8]

En ce sens, l'usinage des éléments et leur montage au sein de la structure par automatisation robotique prennent tout leur sens. Une étude théorique et expérimentale a été menée [8] et a abouti à une méthode d'automatisation robotique. Dans cette dernière, chaque pièce de la structure est traitée une à une par un seul robot. C'est-à-dire que chaque pièce est d'abord usinée à partir d'un matériau stock atteignable par le robot, pour ensuite être positionnée et fixée à sa bonne place dans la structure. L'usinage de la pièce suivante commence lorsque la précédente est fixée. Cette automatisation plutôt complète permet de ne pas perdre d'informations au cours du montage de la structure. En effet, il n'y a pas nécessité de numéroter chaque élément ni d'en retenir sa position puisque tout est entièrement géré par le système robotique. Le robot doit cependant disposer d'informations complètes sur l'identité des éléments et leurs positions tout au long du processus.

Néanmoins, il y a des limitations opérationnelles liées à ce processus. En effet, les manœuvres et capacités de levage robotiques impliquent des restrictions au niveau du poids et de la longueur des pièces. De plus, étant donné que la structure est montée directement par le robot (par conséquent dans un entrepôt), la taille finale de la structure peut poser problème lorsque celle-ci est destinée à être transportée par trafic routier vers un site quelconque. [8]

Dans ce qui suit, nous allons présenter des projets qui ont utilisé l'automatisation robotique à différentes échelles.

2.3.1. Le projet « The Sequential Roof »

Cette toiture de taille impressionnante [Figure 12], 48 x 5.6 x 1.4 m, était tout d'abord un projet mené en laboratoire de recherche qui a été mis en œuvre et validé d'un point de vue architectural pour finalement aboutir en une structure à fonction réelle. La toiture se résume en une succession de 168 fermes en bois, individuelles structurellement parlant. Ces fermes sont composées de lattes en bois massif qui ont été entièrement assemblées à l'aide d'instruments robotisés. Cette structure est le système portatif du toit et il sert également de support aux sous-

systèmes du bâtiment ainsi qu'à l'aspect architectural du plafond lorsque l'on se situe à l'intérieur. [8]



Figure 12 : « The Sequential Roof » : structure finie (à gauche), montage partiel (à droite). [8]

L'automatisation du montage a été réalisée grâce à un robot en forme de portique [Figure 13, (a)] capable de naviguer autour de 6 axes et composé de nombreux instruments comme des pinces mécaniques, une scie sur table, un stock de rangement pour le bois ou encore un tiroir de rangement d'outils. [8]

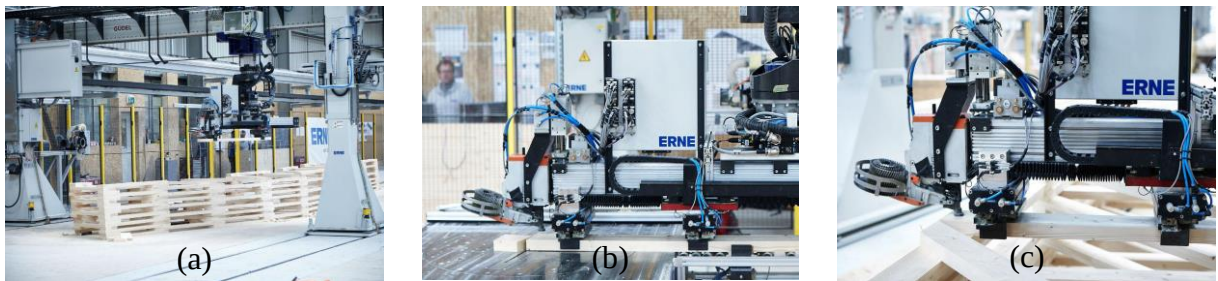


Figure 13 : L'instrument robotique : (a) le portique, (b) la scie sur table, (c) l'assembleur. [8]

2.3.2. L'étude « Timber bar structures with butt T-joints »

Dans cette étude, les concepts de structures réciproques et d'assemblage robotique sont concernés. Le principe était de former une structure à l'aide de chevrons de petites tailles dont la connexion entre les différents éléments est relativement simple ; une connexion en T bout à bout collés [Figure 15]. Ce type d'assemblage consiste à n'effectuer qu'une seule coupe (à l'aide de la scie du robot) au niveau de chacune des extrémités des chevrons, ce qui permet de simplifier, ou en tout cas d'alléger le nombre de tâches que le robot doit effectuer. En effet, ce genre d'assemblage « simple » était nécessaire pour justifier l'utilisation d'usinage robotique [Figure 15]. [7] [8]

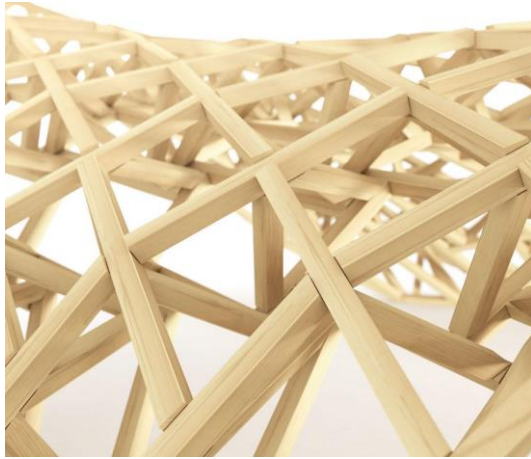


Figure 15 : Structures réciproques avec connexion en T bout à bout collés. [8]



Figure 15 : Montage de la structure en joints en T par robot. [7]

2.4. Structures réciproques composées de grumes

Dans cette dernière partie de cet état de l'art, nous discuterons d'une étude orientée dans la conception de structures réciproques avec l'utilisation de grumes (troncs bruts composant les arbres). Cette étude, réalisée par Justin Goosse [1], a la particularité de combiner les 3 concepts explicités précédemment : structure réciproque, parametric design et usinage robotique. Le présent mémoire s'inscrit dans la continuité de cette étude. Ainsi, nous allons brièvement revenir sur cette dernière en guise de contextualisation.

Le fait de travailler directement avec des grumes comporte quelques difficultés dans la conception géométrique de la structure. En effet, la variabilité des troncs d'arbres est pour le moins infinie puisque, a priori, tout arbre est unique.

Tout d'abord, le long d'un tronc d'arbre, la présence d'excroissance (due à la naissance de branches) est toujours existante. Ces petits défauts peuvent facilement impacter l'assemblage des grumes entre-elles. Par ailleurs, la section transversale du tronc n'est jamais une forme circulaire ou ovoïde parfaite et le rayon moyen peut être fort différent d'une grume à l'autre.

Notons également qu'un tronc n'est pas un élément rectiligne parfait, c'est un élément possédant une ou plusieurs courbes. Il existe donc, en toute coupe transversale de la grume, une excentricité entre les centres géométriques de la présente grume et du modèle 3D défini (nous en parlerons un peu plus bas) [Figure 16].

En outre, n'oublions pas que le bois est un matériau naturellement vivant, ce qui signifie que ce dernier risque de subir de fortes variations dimensionnelles en fonction du taux d'humidité de l'environnement dans lequel il se situe.

Finalement, une fois que toutes les propriétés intrinsèques de ce matériau organique sont prises en considération, la réflexion autour de la conception de la structure pouvait débuter.

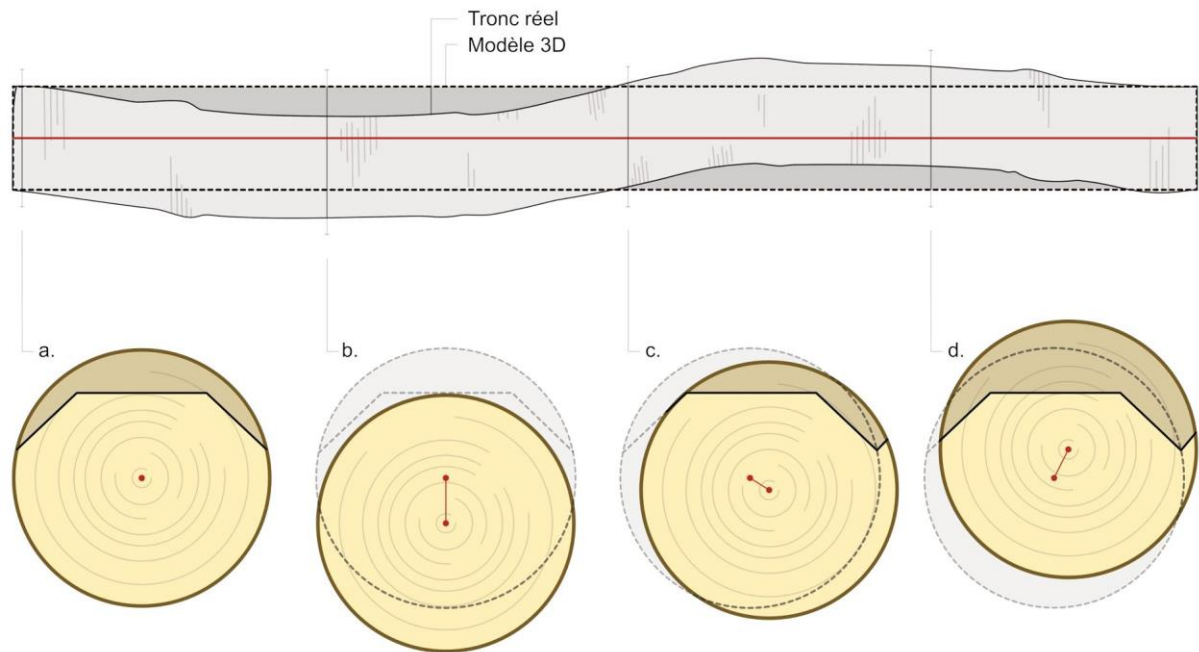


Figure 16 : Excentricités par rapport au modèle 3D le long de la grume. [1]

A l'aide du logiciel Rhinoceros & Grasshopper¹, un modèle paramétrique a été développé pour former l'allure de la structure [1]. L'approche paramétrique va également nous permettre de configurer toutes nos manipulations géométriques dans le but d'obtenir des joints à encoche pour chaque paire de grumes en contact. Ce modèle est tout d'abord composé de lignes simplifiées qui, via form-finding², sont agencées de manière à obtenir un cadre réciproque. Ces lignes serviront de base et on vient assimiler à celles-ci des tubes tangents représentant les troncs simplifiés.

Le modèle étant bien défini, l'étape suivante consiste à assimiler les grumes à celui-ci (mapping). Le scan des grumes était nécessaire et s'est fait par photogrammétrie. Cette technologie permet de créer un maillage 3D à l'aide de simples photos [Figure 17]. Le traitement de ces images a été réalisé par le logiciel *Metashape*. Les maillages fournis en sortie sont composés d'une multitude de facettes (le nombre de facettes est un paramètre que nous pouvons faire varier) et sont des éléments facilement incorporables sur le logiciel Rhinoceros.



Figure 17 : Scan de la grume par photogrammétrie. [1]

¹ Le fonctionnement de ces logiciels sera explicité au point (3.1).

² Le form-finding est le processus de génération automatique d'un pattern réciproque. [1]

Une fois le mapping des troncs effectué, le modèle Rhinoceros établit les différents plans de découpe qui fournissent les informations nécessaires au déplacement de la fraise du robot au moment de l'usinage des grumes.

L'illustration suivante résume les différentes étapes de cette étude [Figure 18]. [1]

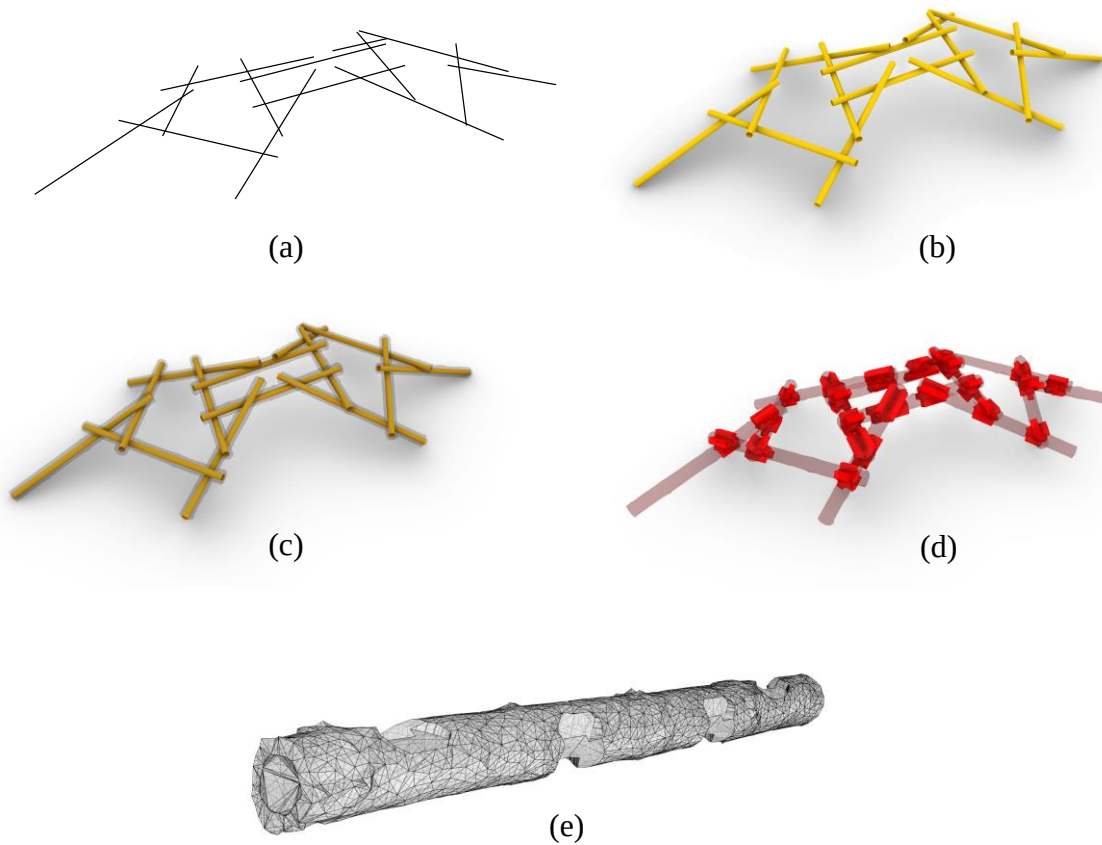


Figure 18 : Méthode de conception d'une structure réciproque avec grumes. [1]

- (a) Modèle filaire*
- (b) Tubes tangents*
- (c) Mapping des troncs*
- (d) Volumes de découpe*
- (e) Grume après usinage*

La continuité de ce travail, notamment au niveau de l'intégration de nouvelles fonctionnalités, est explicité au point (1).

Paramétrisation

3. Paramétrisation

La réalisation de la présente étude a nécessité la prise en main de différents outils pour mener à bien cette dernière. Dans cette partie, le fonctionnement de chacun de ces outils sera expliqué brièvement. Par la suite, un cas concret d'automatisation de design et calcul d'une toiture composée de fermes sera présenté et fera l'objet d'une première approche de paramétrisation.

3.1. Outils

La figure ci-dessous représente un schéma hiérarchique de l'utilisation des outils [Figure 19]. Le logiciel de référence est *Rhinoceros*. Il s'agit d'un programme de conception 3D pour des formes relativement complexes. Rhino est un modèleur surfacique, c'est-à-dire que l'ensemble de la géométrie modelée est composé d'un assemblage de surfaces fermées. Pour ce faire, il possède de puissants outils.

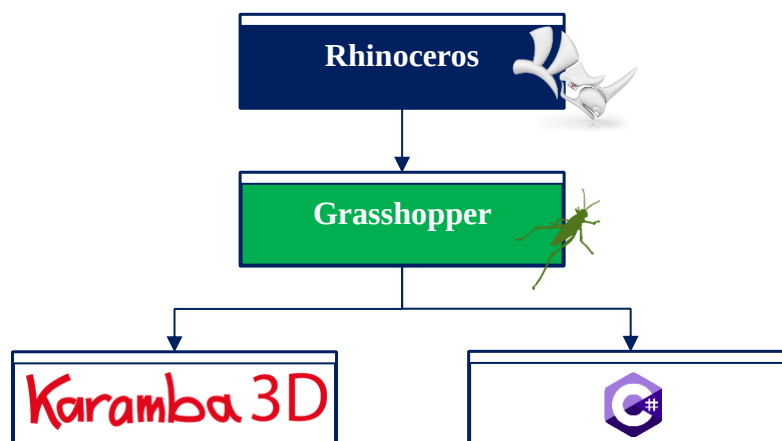


Figure 19 : Hiérarchie des outils

NB : Les différents logos seront utilisés tout au long de ce travail et il ne sera plus précisé à quels programmes ils se réfèrent par la suite.

Dans le cadre de cette étude, c'est davantage l'utilisation d'un plug-in de Rhino qui a été utilisé et qui se prénomme *Grasshopper*. Ce dernier doit être exécuté en même temps que Rhino et va permettre la paramétrisation. Son fonctionnement est basé sur une programmation visuelle dans laquelle l'utilisateur effectue des tâches via un enchaînement de petites boîtes ; chacune d'entre elles ayant leur propre action. L'avantage de l'utilisation de ce duo Rhino-Grasshopper réside dans le fait que tout ce qui a été modélisé par programmation est visible dans l'interface 3D. Par conséquent, la modification d'un paramètre quelconque dans Grasshopper est directement observable sous l'interface de Rhino. Un exemple simple de construction d'un parallélépipède rectangle est représenté ci-dessous [Figure 20].

Oltre l'utilisation de Grasshopper, qui permet de définir la géométrie dans l'espace, nous avons ici le besoin d'intégrer un module permettant de faire des calculs de structures. Ceci se fait par l'utilisation de *Karamba3D*, un module développé pour Grasshopper. Il fonctionne par éléments finis et permet l'analyse de structures soumises à des charges. Ainsi, depuis son

interface, l'utilisateur peut aisément récupérer les réactions d'appuis, les efforts normaux et tranchants et les moments fléchissants.

Enfin, un dernier outil utilisé est l'implémentation de code C#. Grasshopper, via une de ses boîtes, permet d'intégrer directement ce type de code. L'utilité de cet outil réside dans l'aisance à répéter certaines tâches, à parcourir des éléments d'une liste, etc.

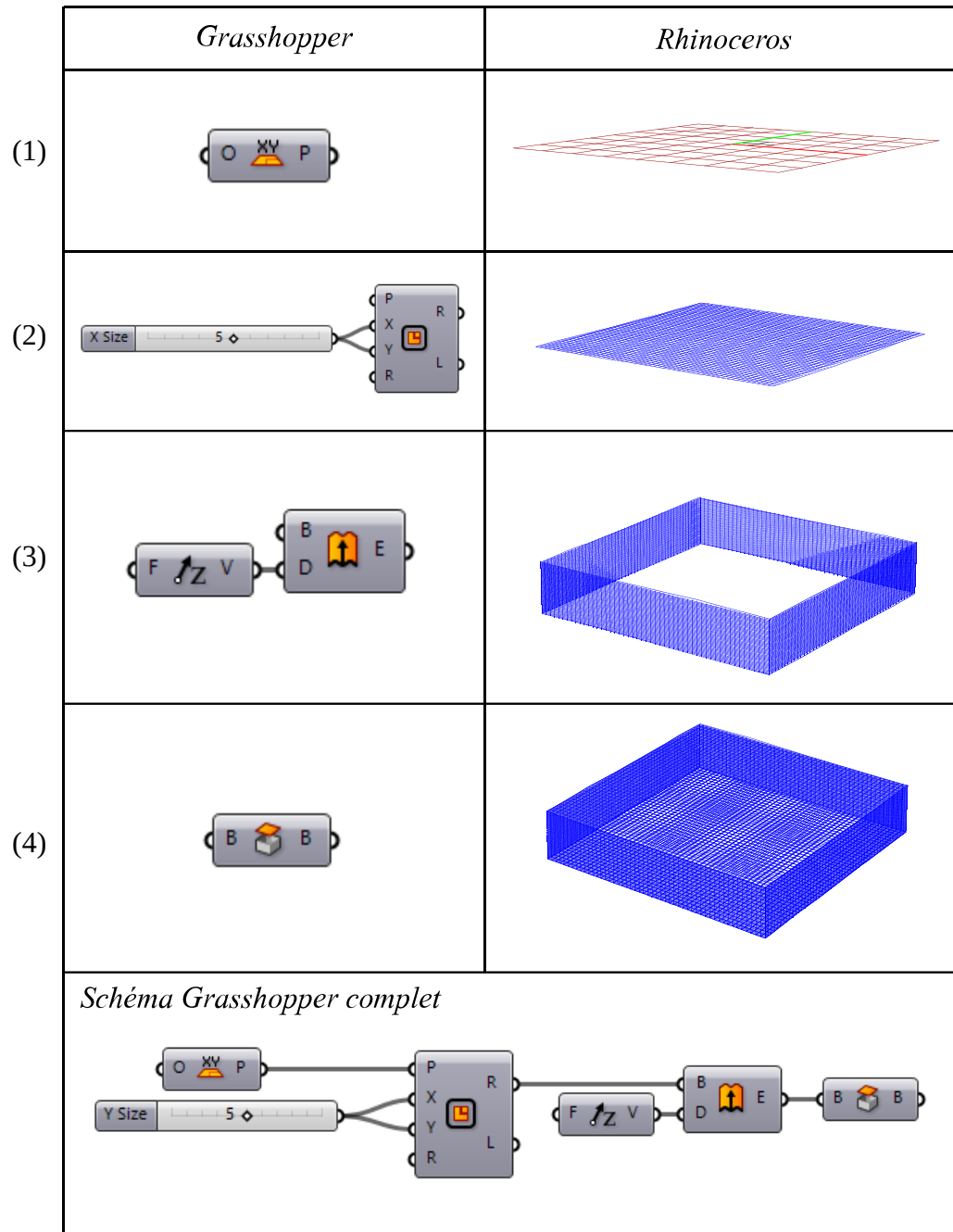


Figure 20 : Relation Rhinoceros & Grasshopper

(1) Définit le plan de base.

(3) Extrude selon l'axe normal du rectangle.

(2) Trace un rectangle dans le plan.
Pour largeur et longueur de 5 m.

(4) Ajoute les surfaces aux extrémités pour
obtenir un volume fermé.

3.2. Modélisation d'une toiture

Avant de rentrer dans le vif du sujet de ce travail qui comporte une complexité difficile à appréhender au premier abord, une familiarisation avec les outils décrits ci-dessus est nécessaire. En effet, le lancement de l'étude s'est fait sans la moindre connaissance de ces derniers. Pour ce faire, et de manière à rester dans un cas concret, il a été pensé de concevoir un programme autonome de modélisation d'une toiture composée de fermes, capable de calculer les contraintes du bois au niveau des embrèvements (emboitement de l'arbalétrier dans l'entrait). Le cas de fermes constituées d'un entrait et de deux arbalétriers a été considéré [Figure 23]. Par « autonome », cela sous-entend qu'une fois établi, le programme peut générer et calculer une multitude de cas différents uniquement en faisant varier les paramètres qui définissent la toiture.

Ainsi, les paramètres définis pouvant être modifiés [Figure 21] sont :

- Les dimensions des sections (arbalétriers, entrails, pannes, faîtage).
- L'inclinaison de la toiture.
- Les longueur/largeur de la toiture.
- Les nombres d'entrails/pannes.
- Le chargement (charge permanente, neige, vent).
- Les conditions EC5³ (type de bois, classe de la toiture).

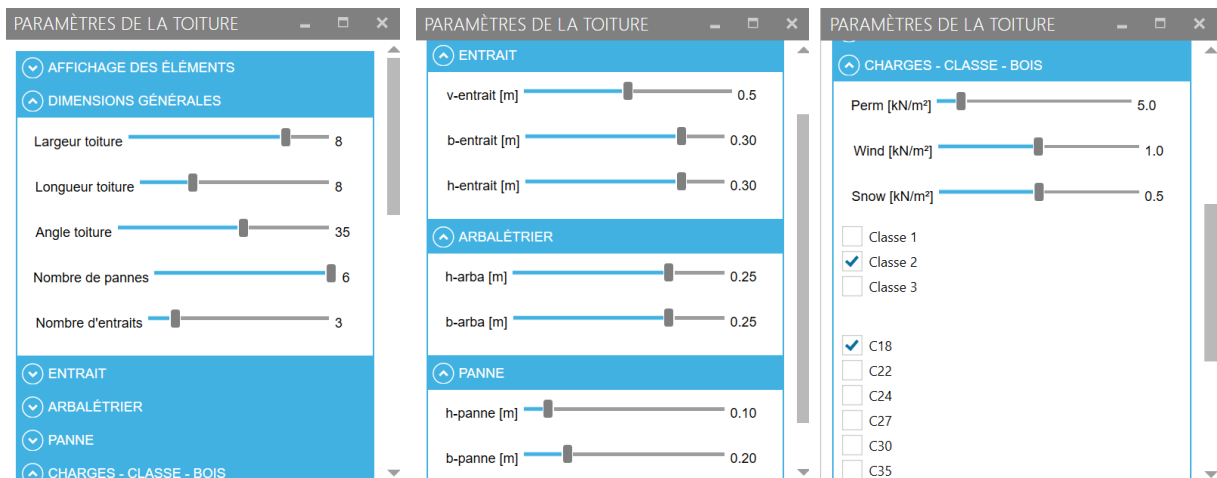


Figure 21 : Fenêtres visuelles des paramètres pouvant être modifiés via glissement des curseurs.

La réalisation de ce programme a nécessité l'approche de trois phases. Premièrement, il a fallu établir un **modèle filaire** pour le calcul avec Karamba3D, ensuite définir un **modèle géométrique** comportant l'ensemble des poutres prismatiques, et finalement coupler ces deux modèles pour en déterminer les contraintes dans le matériau.

3.2.1. Modèle filaire

Dans un premier temps, nous définissons les différents points et lignes dans l'espace. Ces éléments définissent la structure simplifiée de la toiture et sont évidemment liés à nos différents

³ Les conditions de l'Eurocode 5 ont été considérées selon l'annexe Nationale belge.

paramètres mentionnés ci-dessus. La figure suivante illustre un modèle filaire fini [Figure 22]. Ce dernier constitue l'ensemble des éléments géométriques à fournir à Karamba3D pour en permettre l'analyse calculatoire. En plus de ces éléments, nous devons également stipuler quelles sont nos conditions de chargement, nos appuis, et nos joints entre éléments ; c'est-à-dire quel est le type de connexion (encastrement, rotule, etc.). Pour chacun des appuis et joints, nous définissons quelles sont les directions bloquées et libérées.

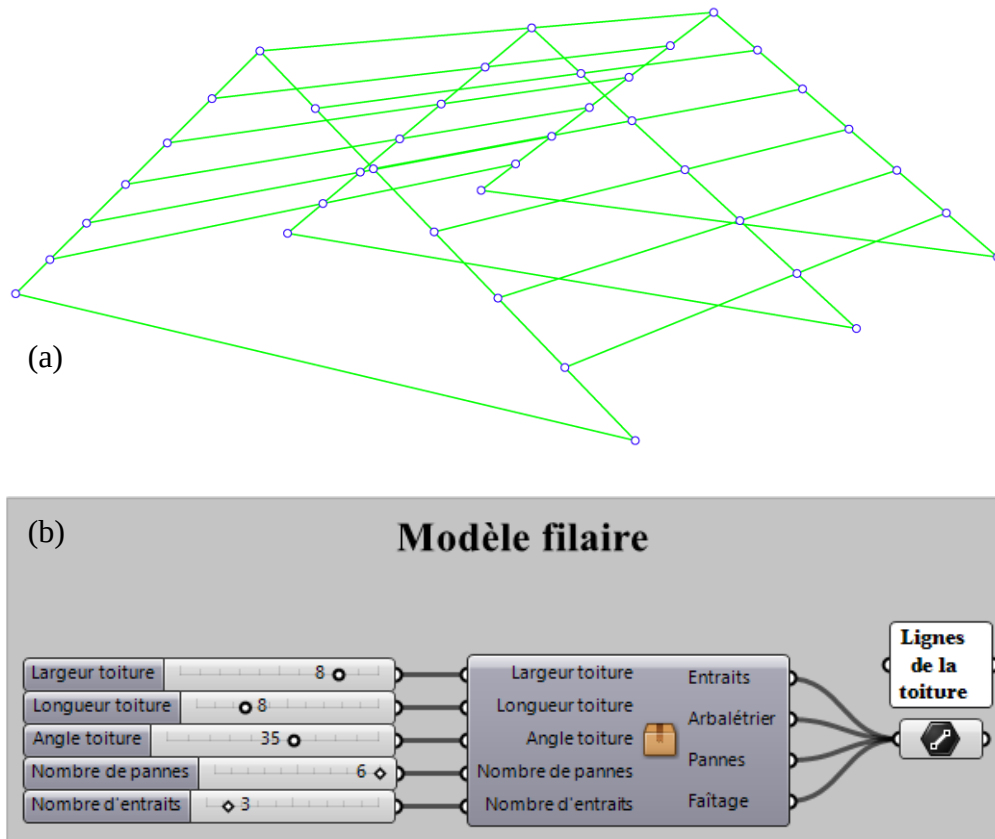


Figure 22 : Toiture - Modèle filaire : (a) Rhinoceros, (b) Grasshopper

3.2.2. Modèle géométrique

En partant du modèle filaire, nous pouvons désormais définir une géométrie spécifique à chaque ligne correspondant aux différents éléments de notre toiture. Nous définissons donc des solides – dans notre cas ce sont uniquement des poutres prismatiques – paramétrés par une largeur, une hauteur et une longueur.

L'intérêt de définir ces solides est de retrouver nos surfaces de contact dans les emboîtements. Les surfaces de contact sont les surfaces qui seront sollicitées suite au chargement de la toiture. Ces dernières sont trouvées via intersection entre les arbalétriers et entrails de chaque ferme. Toutes ces tâches sont réalisables avec Grasshopper, et nous pouvons finalement observer sur Rhino notre structure géométrique [Figure 23].

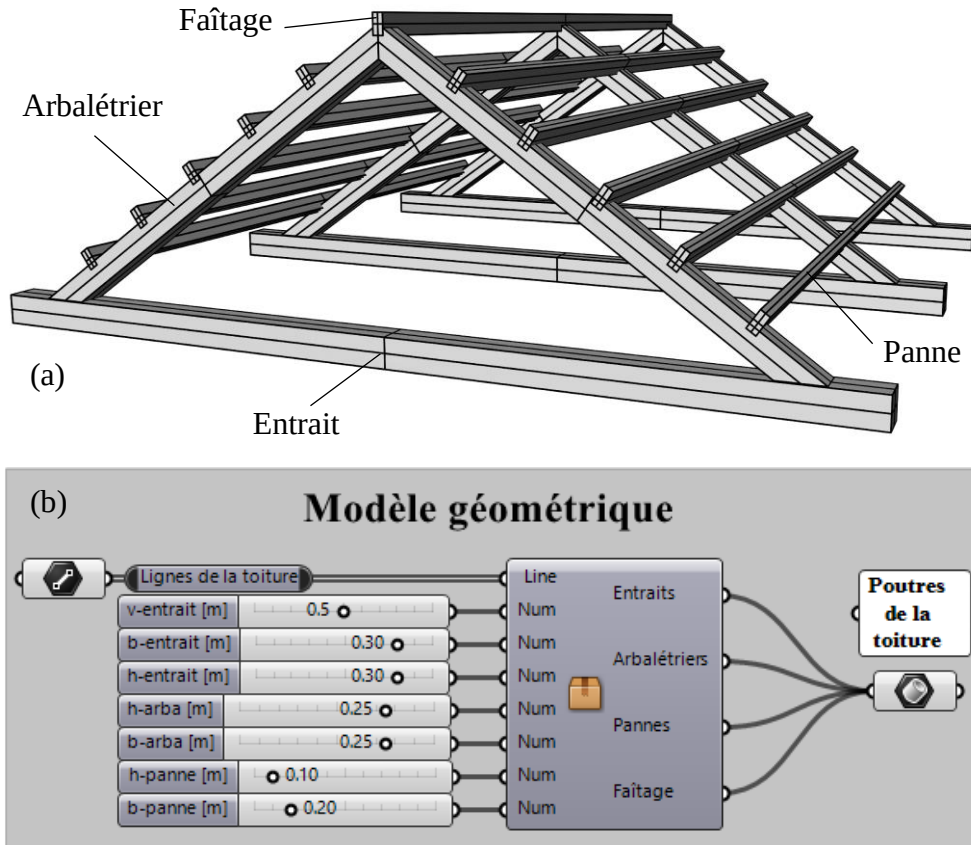


Figure 23 : Toiture – Modèle avec poutres prismatiques : (a) Rhinoceros, (b) Grasshopper.

3.2.3. Calcul des embrèvements

Pour résumer, une représentation schématique de l'intégralité de la méthode est illustrée ci-dessous [Figure 24].

Nous sommes maintenant capables de déterminer les contraintes au sein des embrèvements [Figure 25] de n'importe quelle toiture via notre modèle. Ces contraintes sont ensuite vérifiées selon l'Eurocode 5 [9]. Ainsi, en quelques réglages, et pour un cas de charge connu, nous pouvons facilement définir quelles sections de poutre et quel type de bois nous allons imposer à notre structure afin que cette dernière soit conforme aux critères imposés. Notons également que la possibilité de pouvoir régler l'inclinaison de la toiture nous permet d'avoir un modèle complet et adaptable à tout projet tant que celui-ci se base sur le même principe constructif.

Nous effectuons 4 vérifications [10] pour garantir la conformité des embrèvements [Figure 25] :

1. Le critère de compression sur la 1^{ère} surface : $\sigma_{A_1} = \frac{N \cos(\gamma)}{A_1} \leq f_{c,\gamma,d}$
2. Le critère de compression sur la 2^{ème} surface : $\sigma_{A_2} = \frac{N \sin(\gamma)}{A_2} \leq f_{c,\frac{\pi}{2}-\gamma,d}$
3. Le critère de cisaillement du talon : $\tau_{Ed} = \frac{N \cos^2(\gamma)}{bv} \leq f_{v,d}$
4. Le critère de traction dans l'entrait : $\sigma_{t,entrait} = \frac{N \cos(\beta)}{b(h_{entrait}-t)} \leq f_{t,0,d}$

Les critères 1 et 2 vérifient que la compression exercée sur les fibres du bois ne dépasse pas la résistance en compression oblique de ces fibres (dépendante de l'angle γ et de l'essence du bois). Le critère 3 vérifie que la longueur du talon de l'entrait est suffisante pour compenser les

efforts de cisaillement. Enfin, le critère 4 vérifie que la traction parallèle aux fibres dans l'entrait ne dépasse pas la traction maximale que ces fibres peuvent effectivement reprendre.

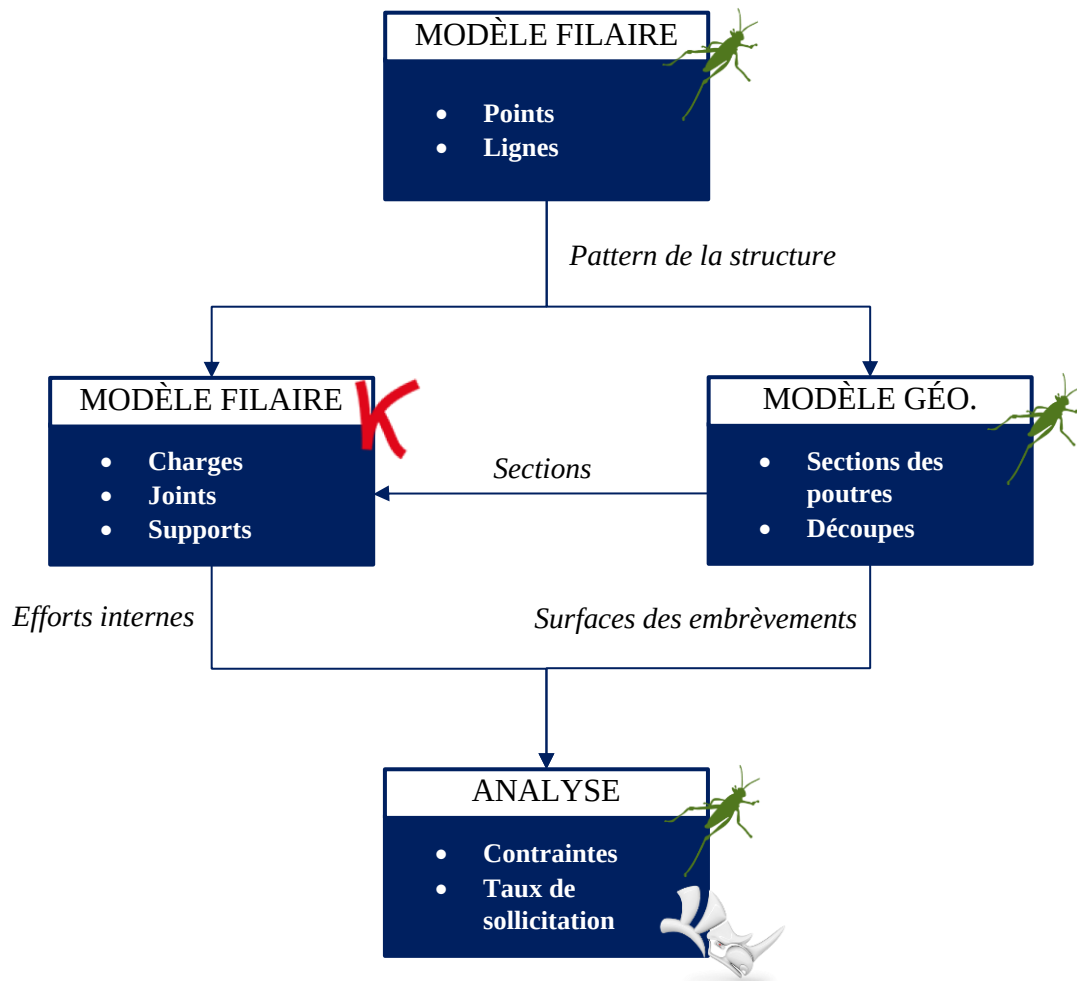


Figure 24 : Méthode schématique de la modélisation

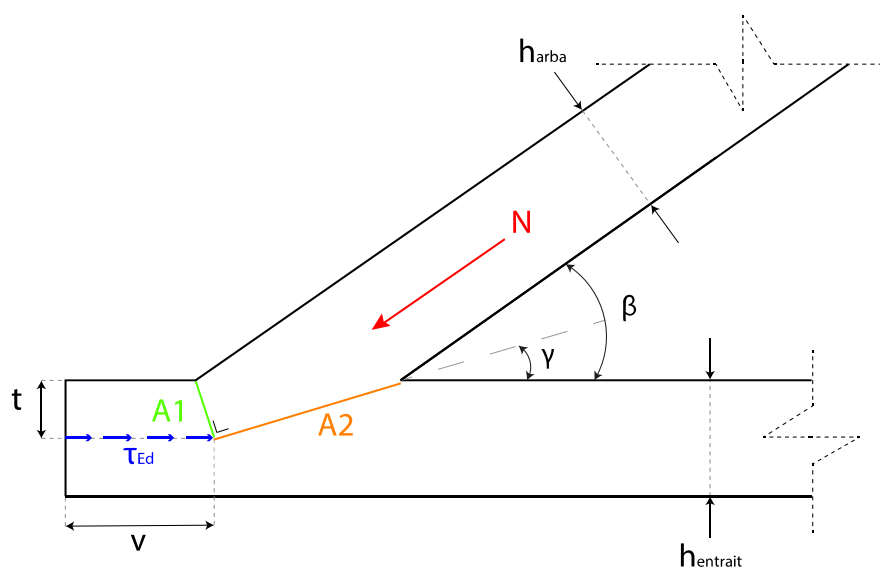


Figure 25 : Schéma 2D d'un emboîtement

3.2.4. Code couleur

Une dernière fonctionnalité de notre modèle, et du moins très intéressante, est l'application d'un gradient de couleur aux surfaces de l'embranchement. Ce gradient représente le taux de sollicitation des surfaces en fonction de la sollicitation maximale que celles-ci peuvent supporter (dépendante du bois et de l'inclinaison de ses fibres). L'utilisateur pourra de ce fait évaluer rapidement le taux de sollicitation lorsqu'il augmentera la charge sur la toiture ou diminuera les sections de ses poutres.

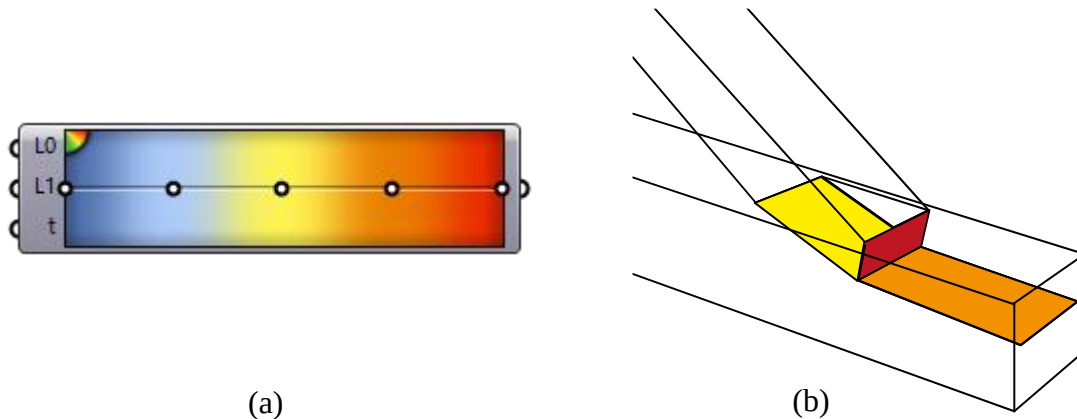


Figure 26 : Gradient de couleur : (a) Grasshopper, (b) Rhinoceros.

3.2.5. Apprentissage

Il est ici appréciable de se rendre compte de l'efficacité d'une approche paramétrique ; sur base de quelques paramètres définis en amont, d'innombrables projets pourraient être réalisés à l'aide d'un même modèle. L'accomplissement final de ce programme a abouti à une maîtrise aisée de Grasshopper ainsi que Karamba3D. A partir de cet instant, entamer l'étude principale pouvait débiter de manière plus sereine et efficace.

Assemblages

4. Assemblages

Nous allons maintenant rentrer dans le vif du sujet des structures réciproques. Comme dit précédemment, le présent mémoire s'inscrit dans la continuité du travail effectué par Justin Goosse [1]. La finalité de son travail peut se résumer par l'illustration suivante [Figure 27].

Les grandes étapes de son travail se résument en :

1. Définition de la géométrie de la structure par Form-Finding.
2. Scans de grumes par photogrammétrie.
3. Import des scans sous forme de maillages dans Grasshopper.
4. Assimilation des maillages à la géométrie.
5. Définition des assemblages et des volumes de découpe⁴.
6. Usinage par robots.
7. Montage de la structure.



Figure 27 : Structure réciproque par Justin Goosse [1]

Nous n'allons pas revenir en détails sur toutes ces étapes, nous allons uniquement nous concentrer sur l'étape 5 ; la définition des assemblages et volumes de découpe. En effet, le présent mémoire repose sur cet aspect des structures réciproques et la structure ci-dessus sera la structure de référence pour toute notre analyse.

Dans ce chapitre, nous commencerons par réintroduire l'assemblage déjà défini auparavant, nous discuterons des paramètres qui le définissent, de sa forme et des justifications des choix qui ont été faits.

Ensuite, à partir de cet assemblage, nous verrons comment il est possible de trouver les surfaces de contact effectives dans chaque assemblage en vue de déterminer les contraintes dans le bois et d'en évaluer plus tard les sollicitations maximales que celui-ci peut supporter.

⁴ Le volume de découpe est le plan que définit la fraise du robot au moment de la découpe de la grume.

4.1. Assemblage défini par J. G.

Toute l'étude de ce travail repose sur la définition de l'assemblage conçu en amont par Justin Goosse. Dans cette section, nous allons rappeler quels sont les paramètres qui caractérisent cet assemblage et quelles en sont les justifications. En ce sens, nous verrons que la géométrie de cet assemblage – qui a été réitéré à plusieurs reprises – prend du sens et s'adapte parfaitement aux structures réciproques.

4.1.1. Les paramètres

Nous allons revenir ici sur les paramètres qui ont été déterminés comme primordiaux pour la définition de l'assemblage.

Inclinaison des plans

Premièrement, il est important de rappeler que nous souhaitons un assemblage bois – bois quasi exclusif de manière à limiter conséquemment l'apport d'acier à la structure. Cela nous impose déjà de devoir imbriquer une grume dans l'autre plutôt que de simplement les poser l'une sur l'autre (écorce sur écorce). Par ailleurs, et suite à cette imbrication, nous devons faire

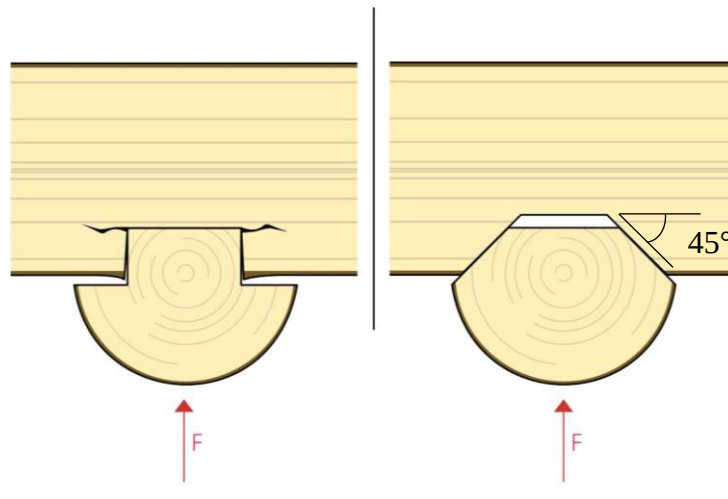


Figure 28 : Avantage des plans inclinés pour le décollement. [1]

attention au décollement des fibres du bois sous chargement. De manière à limiter fortement ce décollement, il a été pensé de prévoir des plans inclinés pour les découpes afin de pouvoir procéder par butée lors de la transmission des efforts dans le bois [Figure 28]. Par souci de facilité, l'angle de l'inclinaison est le même pour tous les assemblages et est fixé à 45°.

Rentrant

C'est un paramètre qui a été établi de manière à définir à quel point une grume « rentre » dans l'autre. La variation de ce paramètre nous permet d'augmenter/diminuer la surface de contact entre deux grumes au niveau de l'assemblage [Figure 29].

C'est un paramètre adimensionnel qui se définit comme suit :

$$r_i = \frac{d_i}{R_i}$$

Où :

- ⇒ R_i est le rayon de la grume évaluée au niveau de l'assemblage i .
- ⇒ d_i est la distance entre l'extrémité du diamètre de la grume et l'extrémité de plan incliné au niveau du fond de découpe de l'assemblage i .

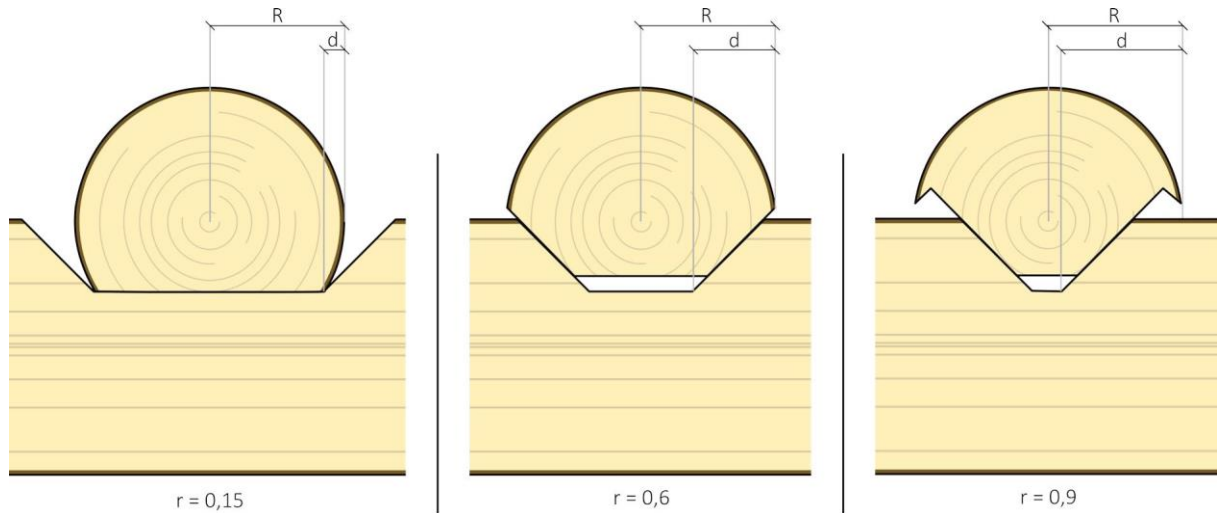


Figure 29 : Impact du rentrant sur la surface de contact des assemblages. [1]

Dégagement

Les limites de découpe résultant de l'intersection des maillages de 2 grumes partageant un assemblage peuvent être imprécises en raison d'un décalage lors du scan des troncs ou même lors de leur usinage. Pour contrer ce problème et garantir une marge de manœuvre quant à la précision du modèle, la notion de dégagement a été introduite. Le dégagement est un offset d'une certaine valeur imposé aux limites de découpe. Il en résulte une intersection de maillage élargie, ce qui permet de passer d'un montage relativement complexe à un montage plus aisé suite à la création d'un jeu d'espace via ce dégagement [Figure 30]. A noter que ce dégagement est également un paramètre nécessaire à l'usinage robotique car la fraise de découpe implique un surplus de longueur équivalente au rayon de cette dernière.

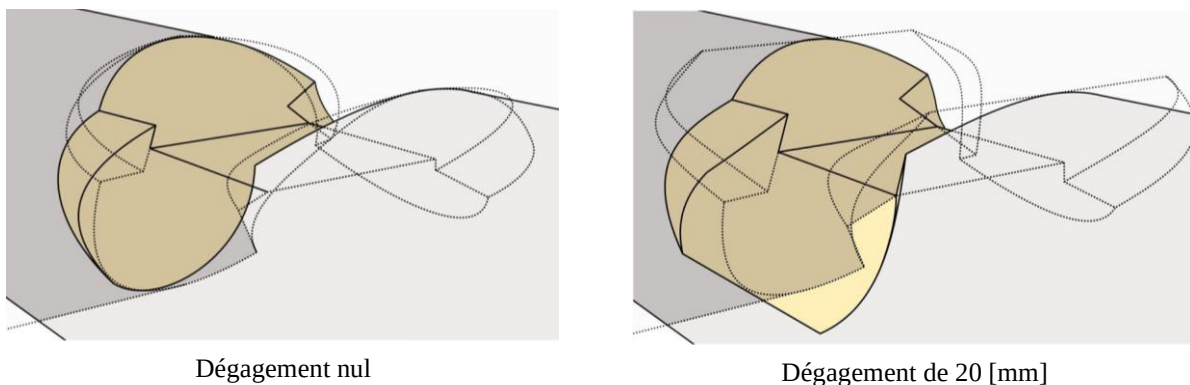


Figure 30 : Influence du dégagement. [1]

Espace de fond

Comme dit dans le paramètre « inclinaison des plans », nous devons éviter d'avoir un contact entre les surfaces de fond de découpe des deux grumes pour éviter le décollement des fibres du bois. Un espace de fond de découpe est donc toujours présent dans l'assemblage étudié [Figure 31]. Nous noterons par ailleurs que les variations dimensionnelles du bois peuvent faire varier cet espace et que cet aspect a été considéré [1].

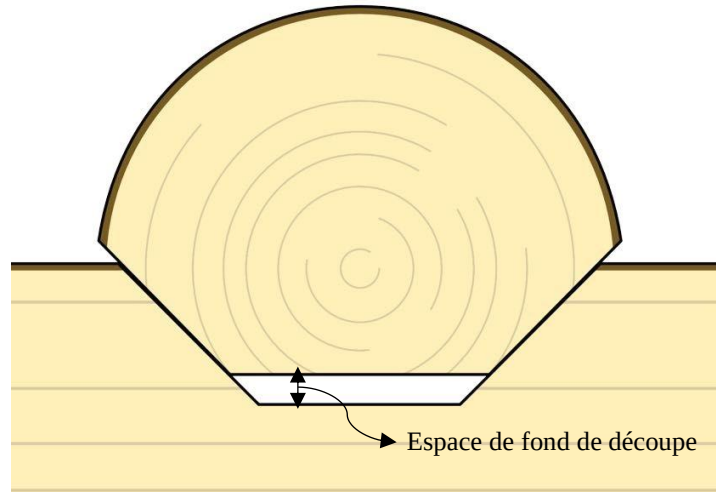
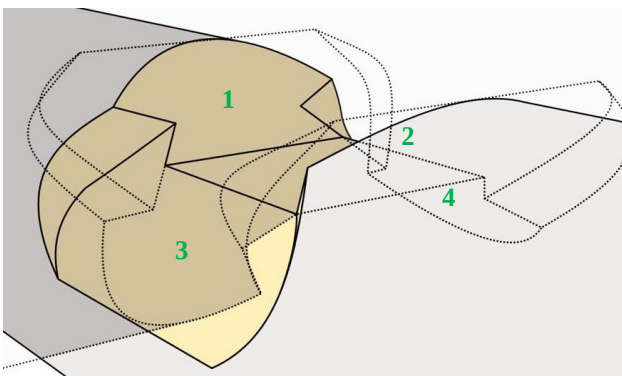


Figure 31 : Fond de découpe entre deux grumes. [1]

4.1.2. L'usinage robotique

A ce niveau de présentation de l'assemblage, nous pouvons nous rendre compte de la complexité de celui-ci. Ainsi, il est évident que l'usinage des découpes est plus facile par matériel robotique. En effet, les différentes phases de découpe des grumes relèvent d'une précision difficile à effectuer avec des outils manuels. Le bras télescopique des robots permet de se déplacer aisément dans l'espace, conférant un bon positionnement de la fraise pour les découpes des grumes. L'utilisation de robots permet également un gain de temps considérable ; c'est un aspect très important à considérer lorsque l'on s'attaque à des structures réciproques composées de plusieurs dizaines voire centaines de grumes.

4.1.3. Aspect final de l'assemblage



L'assemblage est finalement constitué de maximum 4 surfaces de contact⁵ sous chargement [Figure 32]. Sur le schéma, les pointillés représentent la partie de la grume du dessus dans l'assemblage.

Dans la section suivante, nous verrons comment retrouver les caractéristiques de ces surfaces à savoir leur géométrie, superficie, inclinaison et vecteurs normaux.

Figure 32 : Assemblage à 4 surfaces de contact. [1]

⁵ Nous verrons au point (1) qu'en réalité les surfaces de contact ne sont pas forcément toutes sollicitées.

4.2. Surfaces de contact

Par souci de facilité de compréhension, nous dénommerons par « surface champignon » et « surface poche latérale » les surfaces 1 et 2 respectivement [Figure 34]. Chaque grume possède donc 2 surfaces de chaque sorte par assemblage. Notons que les surfaces champignons de la grume 'i' viennent se poser sur les surfaces poches latérales de la grume 'j' (représentées par les pointillés) et réciproquement.

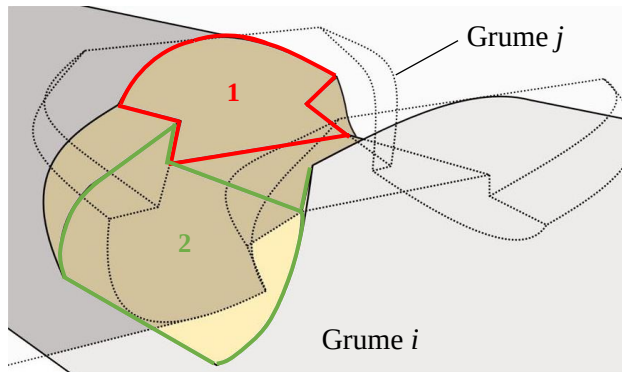


Figure 34 : Identification des surfaces. [1]

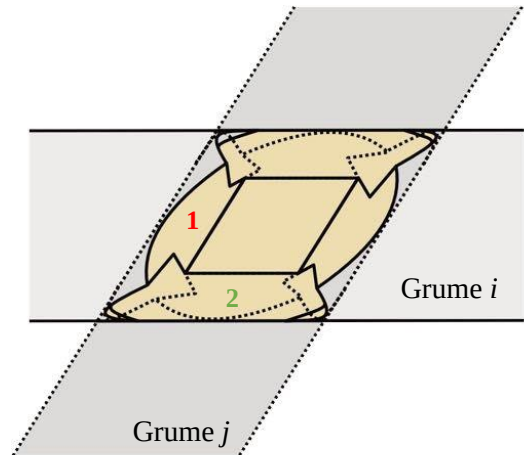
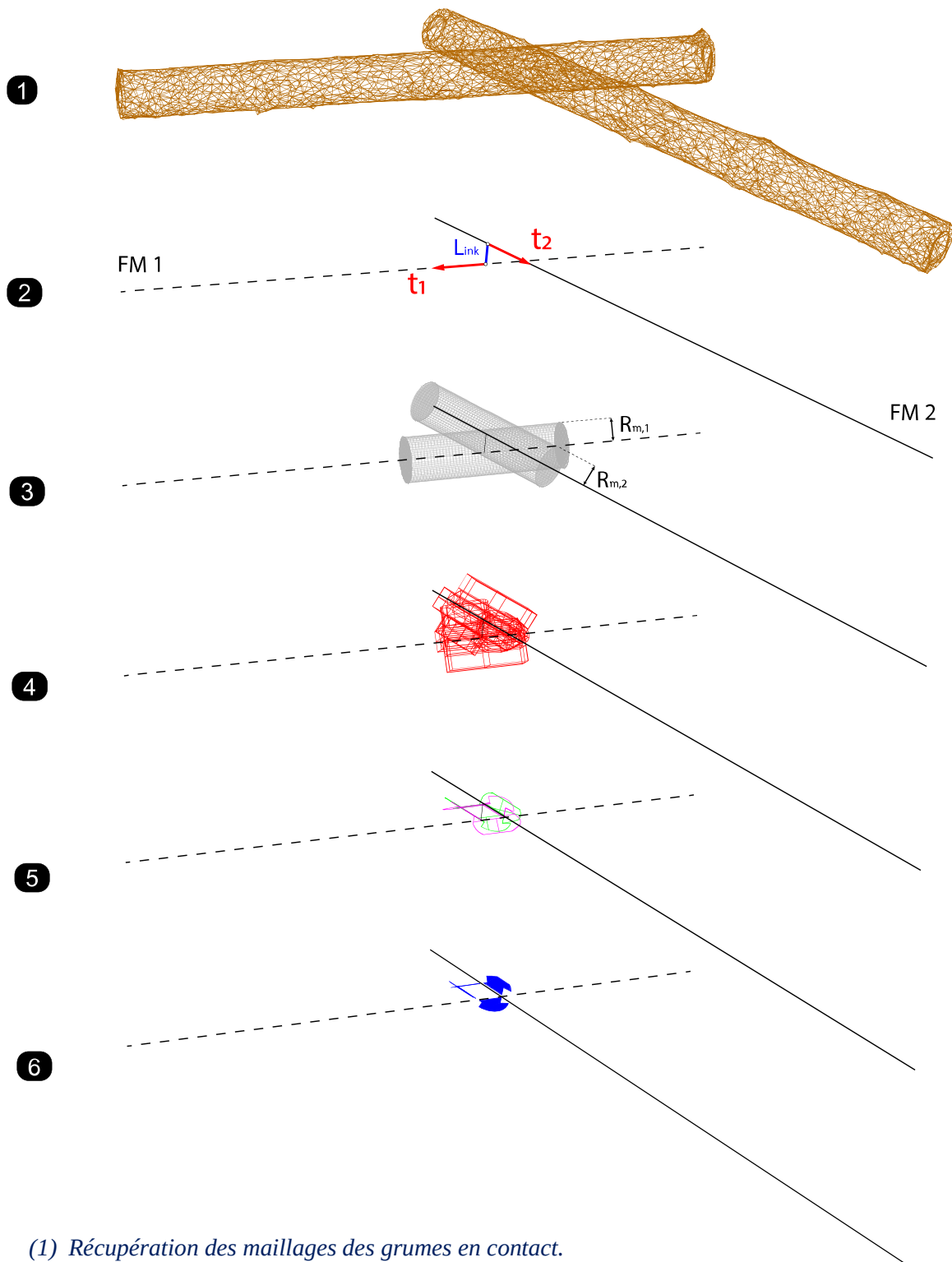


Figure 33 : Identification des surfaces - Vue en plan. [1]

Comme vu au point (4.1.3), il existe un espace de fond de coupe au sein de chaque assemblage. Les surfaces résultantes des découpes réalisées par les robots ne sont donc pas les surfaces de contact finales qui seront sollicitées sous charge. En réalité, ces surfaces de contact sont obtenues par projection des surfaces champignons de la première grume sur les surfaces poches latérales de la seconde grume et réciproquement.

Nous allons décrire dans cette partie la méthode détaillée nous permettant d'obtenir ces surfaces de contact pour chaque connexion entre deux grumes. Cette méthode est illustrée ci-après [Figure 35]. Dans la suite de cet écrit, nous en détaillerons chaque étape.



- (1) Récupération des maillages des grumes en contact.
- (2) Récupération des fibres moyennes de ces grumes.
- (3) Définition de cylindres locaux, pour les 2 grumes, tangents à la fibre moyenne locale.
- (4) Récupération des volumes de découpe et intersection de ceux-ci avec les cylindres pour obtention des surfaces de l'assemblage.
- (5) Projection des surfaces de la grume porteuse sur celles la grume portée et vice versa.
- (6) Obtention des surfaces de contact suite aux projections.

Figure 35 : Méthode d'obtention des surfaces de contact

4.2.1. Cylindres locaux

Les maillages étant relativement lourds et complexes, Grasshopper n'est pas en mesure de réaliser des intersections précises et fournit des erreurs lorsque nous tentons de le faire. Pour remédier à ce problème, nous définissons des cylindres locaux pour chacune des 2 grumes au niveau de l'assemblage ; les solides sont ainsi exprimés comme une jonction de plusieurs surfaces et il est aisé pour Grasshopper de mener à bien des intersections avec ce type d'éléments. Nous verrons au point suivant pourquoi il y a lieu de parler d'intersections.

Les paramètres du point 2 [Figure 36] sont les suivants :

- ⇒ « FM 1 » et « FM 2 » sont les fibres moyennes des 2 grumes respectives.
- ⇒ t_1 et t_2 sont les tangentes prises aux points les plus proches des fibres moyennes et évaluées en ces dernières. Ce sont des tangentes locales prises au niveau de l'assemblage.
- ⇒ Le « Link » est la distance la plus courte entre les deux fibres moyennes et perpendiculaire aux tangentes ; c'est l'élément qui localise le positionnement de l'assemblage. Ce link a été défini de manière à comprendre quand est ce que deux grumes partagent un assemblage. En effet, lorsque la longueur de ce link ne dépasse une certaine valeur (que nous nous imposons), nous savons qu'il y a bien un assemblage entre les deux grumes associées à ce link.

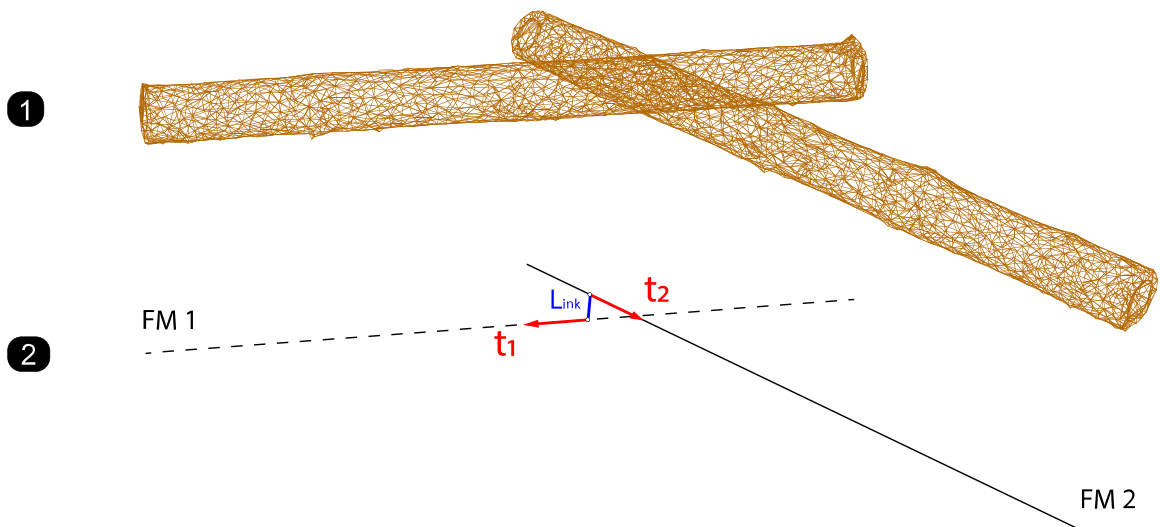


Figure 36 : Fibres moyennes, tangentes et link.

Les paramètres du point 3 [Figure 37] sont les suivants :

- ⇒ $R_{m,1}$ et $R_{m,2}$ sont les rayons moyens des grumes évalués sur la longueur des cylindres.
- ⇒ La longueur du cylindre, est stipulée comme étant la mi-distance entre deux assemblages de la grume à laquelle il se réfère.

Les cylindres locaux sont finalement définis avec les rayons $R_{m,1}$ et $R_{m,2}$, orientés à l'aide des tangentes t_1 et t_2 , et tracés sur un domaine $[-\frac{x}{2}; \frac{x}{2}]$ depuis les points les plus proches des fibres moyennes, avec x la longueur du cylindre défini ci-dessus.

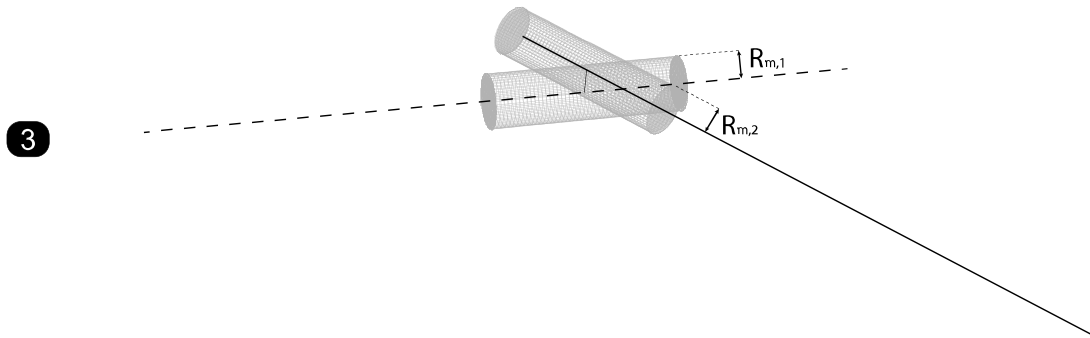


Figure 37 : Définition des cylindres locaux.

4.2.2. Volumes de découpe

Pour rappel, les volumes de découpe [Figure 38] sont les plans que définit la fraise du robot au moment de la découpe des grumes. Ces volumes sont des solides manipulables sous Grasshopper. La prochaine étape est de venir intersecter nos cylindres locaux définis ci-dessus avec ces volumes de découpe.

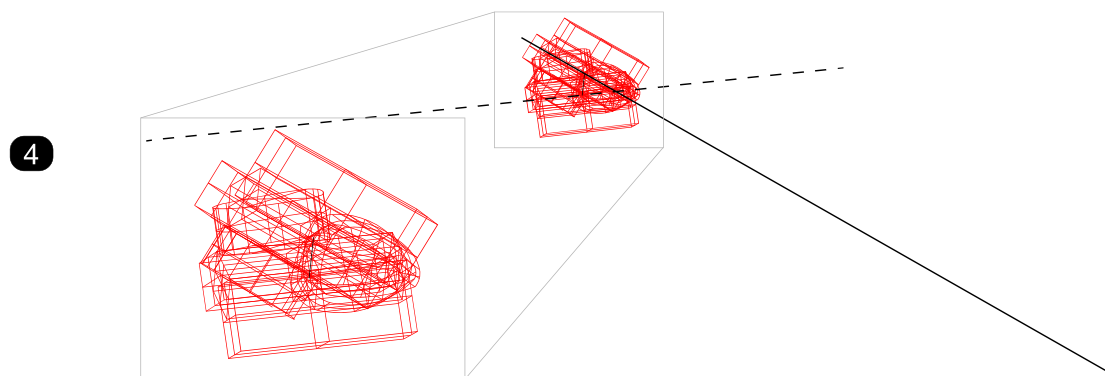


Figure 38 : Volumes de découpe au sein de l'assemblage.

Nous obtenons ainsi les surfaces champignons et poches latérales de chacune de nos grumes au sein de l'assemblage, point 5 [Figure 39].

4.2.3. Projection

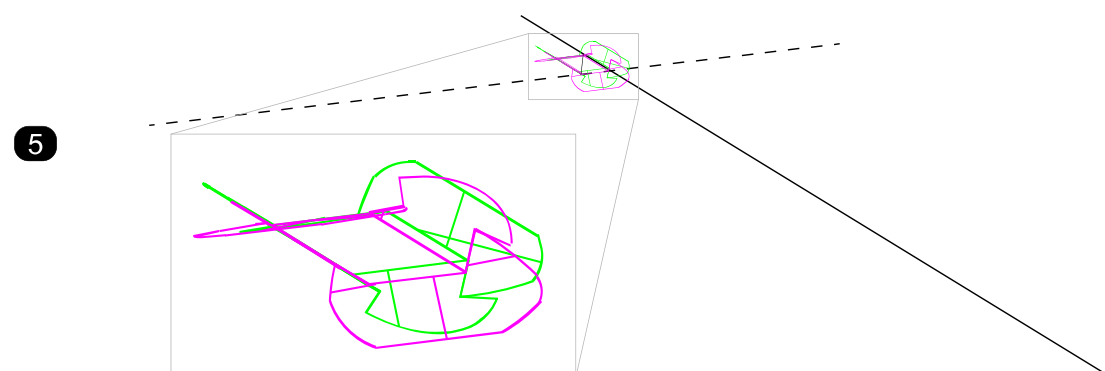


Figure 39 : Surfaces champignons et poches latérales résultant de l'intersection.

Soit les surfaces magentas et vertes [Figure 39] qui correspondent respectivement aux surfaces de la grume 1 et grume 2, nous procédons à la projection des surfaces champignons de l'une sur les poches latérales de l'autre et réciproquement. Nous obtenons finalement nos surfaces de contact [Figure 40].

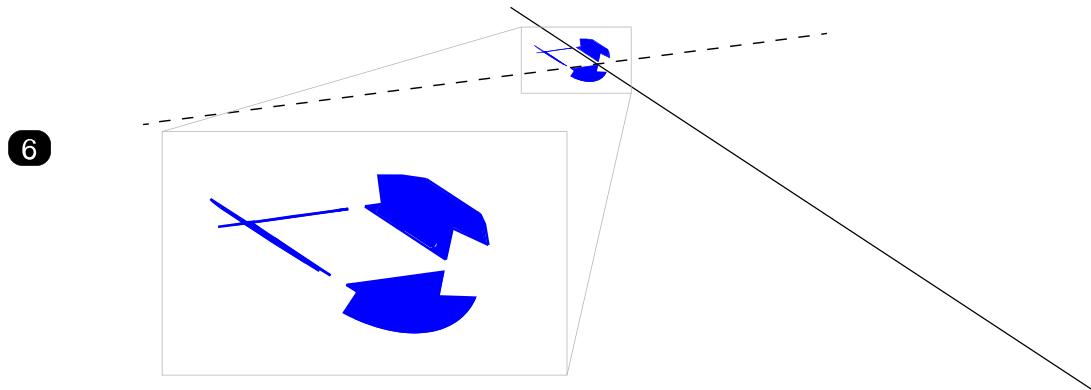


Figure 40 : Surfaces de contact au sein de l'assemblage.

Par conséquent, nous pouvons appliquer cette méthode à l'ensemble des assemblages de la structure étudiée. Toutes ces surfaces de contact liées à ceux-ci sont illustrées ci-dessous [Figure 41].

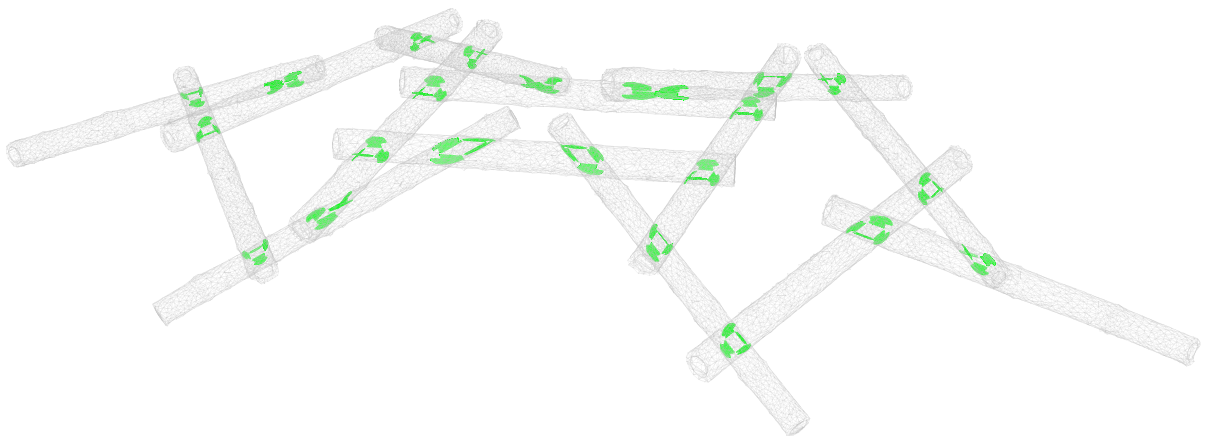


Figure 41 : Surfaces de contact de la structure étudiée

Scénarios de chargement

5. Scénarios de chargement

Dans cette section, nous allons définir la méthodologie de chargement des surfaces au sein des assemblages. Ceci constitue la partie la plus importante du travail et elle a nécessité une prise en compte d'un certain nombre d'hypothèses pour parvenir à un résultat semblant cohérent au niveau de la réalité. La base de réflexion de l'étude réside dans la discussion du nombre de surfaces sollicitées dans un assemblage lorsqu'une force quelconque lui est appliquée. Nous verrons que l'orientation de cette force est le facteur principal dans l'identification de ces surfaces.

Dans cette partie, nous énoncerons tout d'abord toutes les hypothèses qui ont été formulées, la méthode utilisée pour obtenir le nombre de surfaces de contact N sollicitées au sein d'un assemblage, la répartition du chargement sur ces surfaces lorsque nous considérons un usinage parfait (c'est-à-dire lorsque les découpes évaluées sur le modèle Grasshopper sont telles quelles dans la réalité) et finalement, nous discuterons de la véracité des résultats en introduisant la prise en compte d'une certaine tolérance d'usinage (robotique) dans notre réflexion.

Notons que pour le développement de la théorie présentée ci-dessous, nous n'avons considéré qu'un modèle comportant deux grumes ayant un assemblage commun⁶ au niveau duquel nous imposons une résultante de force arbitraire et orientable dans toutes les directions de l'espace, de manière à évaluer le comportement de l'assemblage en toute situation. Nous ferons varier cette orientation pour étudier et concrétiser la présente théorie. Plus tard, nous appliquerons celle-ci à notre structure de référence afin d'en dégager un résultat consistant. Par la suite, au point (1), nous expliciterons le chargement de la structure, la méthode d'analyse utilisée ainsi que la manière dont cette résultante de force est déterminée par rapport au chargement qui est appliqué à la structure.

5.1. Hypothèses

Au premier regard, il est clair que l'étude de notre structure de grumes est composée d'un système portatif pour lequel il est relativement complexe de comprendre le cheminement des efforts dans la structure. Par ailleurs, la définition d'un schéma statique proche de la réalité du comportement de la structure constitue également un fameux défi. C'est pourquoi nous nous devons d'imposer des hypothèses simplificatrices afin de permettre une interprétation non seulement proche de la réalité, mais qui permet également une étude numérique simplifiée.

5.1.1. Résultante de force

Lorsque la structure est chargée, de nombreux efforts s'y appliquent. La combinaison des efforts au sein d'un assemblage peut se résumer en l'application d'une seule résultante de force que nous noterons $\vec{R}$. Ici, cette résultante est supposée connue et sera arbitrairement fixée à 1 kN. Nous définissons par ailleurs un repère local (X,Y,Z) au niveau de l'assemblage. La direction du vecteur force sera exprimée dans ce repère et paramétrée par deux angles, α et β [Figure 42].

⁶ Les paramètres de cet assemblage sont les mêmes que pour la structure de référence, vus au point (4.1.1).

Notons que pour le repère local :

- L'axe $\vec{X}$ est défini selon la ligne simplifiée associée à la grume 1.
- L'axe $\vec{Y}$ est défini selon le « link » de l'assemblage.
- L'axe $\vec{Z}$ est défini comme résultant du produit vectoriel : $\vec{Z} = \vec{X} \times \vec{Y}$
- L'angle α définit la rotation de la résultante autour de l'axe $\vec{Z}$.
- L'angle β définit la rotation de la résultante autour de l'axe $\vec{Y}$.
- Les angles α et β sont variés dans un domaine $[0^\circ; 360^\circ]$.

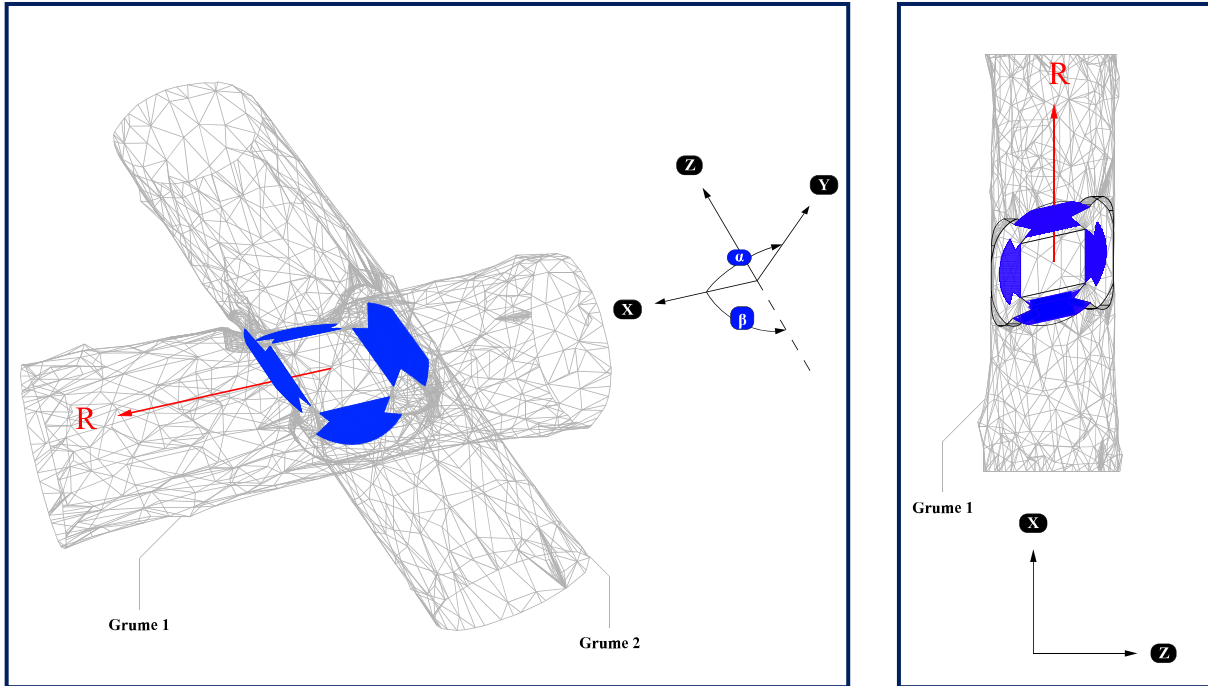


Figure 42 : Repère local et position initiale de la résultante : $\alpha = \beta = 0^\circ$

5.1.2. Comportement de l'assemblage

Le contact entre deux surfaces dans un assemblage possède une certaine rigidité dont nous devons nous préoccuper. En effet, il est primordial de définir le comportement du contact entre ces surfaces. Dans cette étude, nous ferons l'hypothèse que ce contact est assimilé à un ressort de rigidité, notée k [Figure 43]. Il est à noter que la rigidité nous donne une notion d'élasticité entre nos deux surfaces et que celle-ci s'exprime de la manière suivante :

$$k = \frac{EA}{L}$$

Avec :

- E : le module de Young du bois
- A : la surface de contact
- L : la longueur de bois pour la rigidité

Au sein d'un même assemblage, nous ferons l'hypothèse que cette rigidité est constante pour chacune des surfaces de contact. En effet, le module d'élasticité E sera considéré comme équivalent pour chaque grume en raison de la même essence de bois utilisée. Par ailleurs, la longueur L , qui représente théoriquement la longueur de bois associée à la longueur du ressort, sera supposée inférieure au diamètre de la grume concernée et posée comme constante. Finalement, nous ferons l'hypothèse que les surfaces de contact, notées A , ont une superficie relativement équivalente au sein d'un même assemblage. Ceci s'est avéré sensiblement correct en évaluant le ratio entre la superficie la plus faible et la plus grande de chaque assemblage de la structure de référence. En effet, pour celle-ci, ce ratio ne se situe jamais en dessous de 0.8 ; ce qui signifie que le plus grand écart, entre deux surfaces d'un même assemblage, est toujours inférieur à 1/5 de la superficie de la plus grande surface. Nous considérerons donc cette hypothèse comme valide lorsque nous appliquerons cette méthode à la structure de référence au point (1).

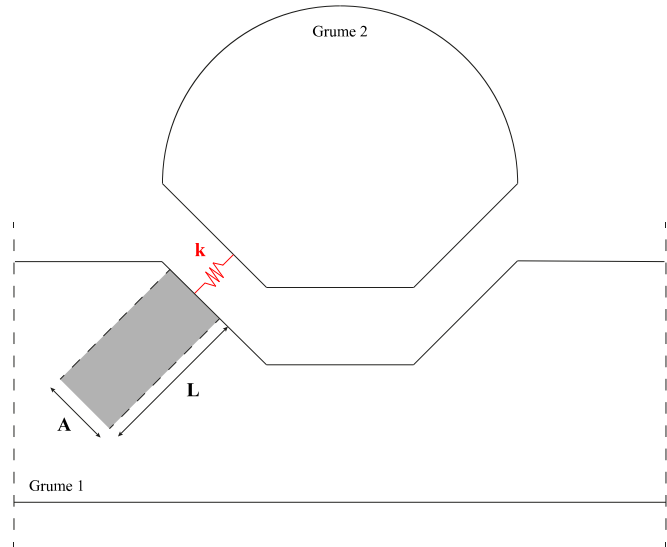


Figure 43 : Assemblage assimilé à un ressort.

5.1.3. Répartition des contraintes

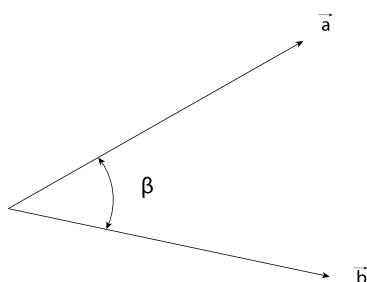
Nous verrons plus loin dans cette partie que la répartition de l'effort résultant sur les surfaces de contact se fera par distribution en fonction des produits scalaires des vecteurs normaux de ces surfaces et le vecteur de cet effort résultant. Une fois que l'effort sollicitant chaque surface est connu, nous faisons l'hypothèse que les contraintes liées à cet effort se répartissent de manière uniforme au sein de la surface. Les contraintes se calculent via l'équation suivante :

$$\sigma_i = \frac{F_i}{A_i}$$

Avec :

- F_i : la portion de résultante reprise par la surface de contact 'i'.
- A_i : la surface de contact 'i' de l'assemblage.

5.1.4. Produit scalaire



Bien que ce ne soit pas ici une hypothèse, nous souhaitons simplement rappeler ce qu'est un produit scalaire car nous parlerons abondamment de cette notion. Un produit scalaire est une opération mathématique appliquée entre 2 vecteurs. Il exprime le produit entre les normes de ces vecteurs et le cosinus de l'angle entre ceux-ci : $(\vec{a} \cdot \vec{b}) = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \beta$.

La norme d'un vecteur quant à elle, est l'intensité du vecteur, c'est-à-dire la longueur de celui-ci. L'utilisation du produit scalaire a un réel intérêt dans une analyse vectorielle ; un produit scalaire positif ou négatif nous indique que les vecteurs sont orientés dans la même direction ou directions différentes respectivement.

5.1.5. Frottement

Une importante hypothèse pour notre analyse consiste à exprimer qu'aucun frottement n'est permis pour le contact entre les surfaces. Cela signifie que si la résultante de forces est telle qu'une seule surface de contact est sollicitée, que cette résultante est orientée de manière à ce qu'une partie de l'effort ne puisse être repris par la surface de contact, alors nous observerons un glissement de la surface de la grume 2 sur la surface de la grume 1 [Figure 44]. En effet, sur le schéma ci-contre, la composante R_i de la résultante sera comblé par l'effort de reprise de la

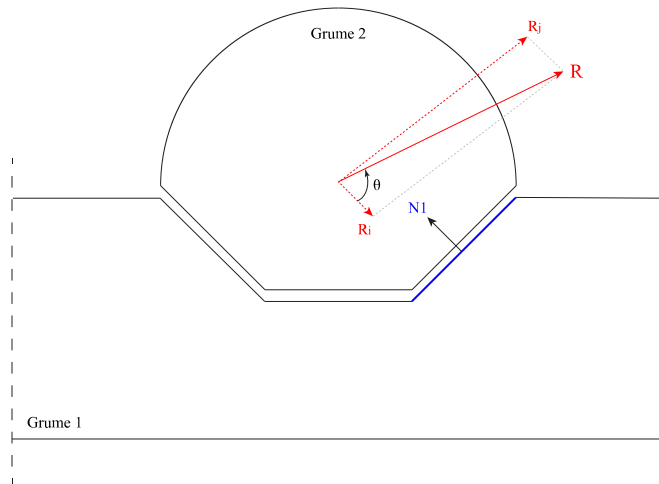


Figure 44 : Zéro frottement au contact des surfaces

surface de vecteur normal N_1 ; cependant la composante R_j ne peut pas être reprise par cette même surface lorsqu'on ne considère aucun frottement. Dans ce cas, cela implique un décollement des deux grumes en cet assemblage, ce qui est totalement à proscrire. Nous verrons plus en détails ce cas particulier au point (5.4.4) où nous discuterons de l'utilisation de tirefonds pour combler ce problème.

5.2. Répartition des efforts au sein de l'assemblage

Notre assemblage étant composé au maximum de 4 surfaces de contact, plusieurs combinaisons de N surfaces sollicitées sont possibles. Nous pouvons en effet avoir une, deux, trois ou quatre surfaces chargées en fonction de l'orientation de la résultante de forces $\vec{R}$. La méthode qui a été utilisée pour connaître la répartition de l'effort parmi ce nombre N de surfaces s'est basé sur une définition purement vectorielle dans laquelle nous utilisons le produit scalaire entre différents vecteurs. Dans ce produit scalaire, nous faisons intervenir les vecteurs normaux des surfaces de contact ainsi que le vecteur résultante des forces.

5.2.1. Vecteurs normaux

Dans Grasshopper, l'obtention des vecteurs normaux aux surfaces – c'est-à-dire le vecteur perpendiculaire à la surface – est aisée. Cependant, nous devons décider d'une même convention d'orientation de ces vecteurs dans l'espace afin de rester cohérent lors de l'application ultérieure d'un produit scalaire. Dans notre modèle Karamba3D⁷, la définition de nos links – qui, pour rappel, sont les droites reliant les points les plus proches des lignes simplifiées des 2 grumes partageant un assemblage – sont toujours définis du point le plus bas

⁷ Voir point (1).

au point le plus haut dans l'espace ; en d'autres mots, les vecteurs associés aux links ont toujours une composante Z positive, pour un repère cartésien global.

Ainsi, via cette convention et pour une structure isostatique (à concavité dirigée vers le bas)⁸ soumises uniquement à des charges gravitaires, nous pouvons comprendre quelle est celle des deux grumes qui soutient l'autre. Cette compréhension est aisée et ne semble pas avoir un réel intérêt lorsque nous considérons une structure relativement simple, comme celle étudiée dans ce mémoire, puisque ceci est clairement apparent. Néanmoins, cela peut se complexifier davantage avec une structure contenant davantage d'éléments et pour laquelle le sens des connexions peut être difficilement interprété au premier regard.

Pour déterminer la relation « qui soutient qui », nous utilisons les vecteurs normaux, N_1 et N_2 , liés aux surfaces de fond de découpe [Figure 46]. En effet, ces vecteurs sont toujours sortant par rapport à la matière, c'est-à-dire « qui ne rentre pas dans la grume ». Ainsi, les vecteurs des deux surfaces de fond de découpe, provenant de chacune des deux grumes, sont de sens opposé et le vecteur pour lequel le produit scalaire avec le vecteur V_{link} est positif, sera le vecteur associé à la grume porteuse au niveau de cet assemblage.

Il est primordial de connaître quelle est la grume porteuse pour définir correctement l'orientation des vecteurs des surfaces de contact. En effet, une surface de contact est en réalité liée à deux surfaces : une surface appartenant à la grume 1 et une surface appartenant à la grume 2. Par défaut, l'orientation des vecteurs normaux de chacune de ces deux surfaces sont sortants par rapport au matériau bois et, en conséquence, ces deux vecteurs sont opposés [Figure 45].

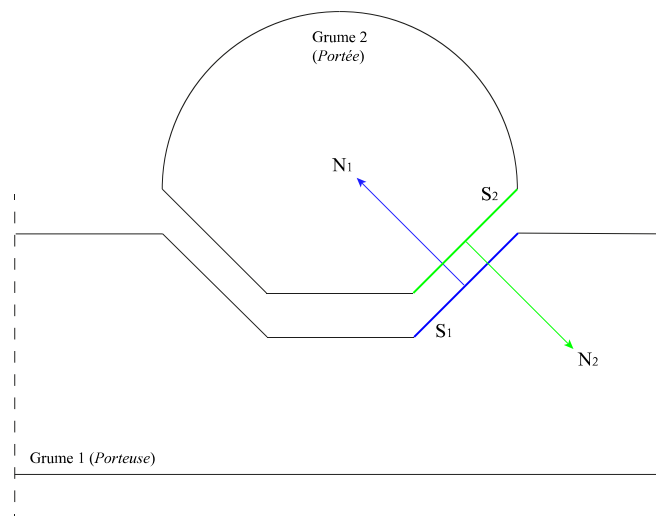


Figure 45 : Schéma des vecteurs opposés des deux surfaces étant en contact : S_1 , S_2 les surfaces et N_1 , N_2 les vecteurs associés.

Par conséquent, lorsque nous connaissons la grume porteuse, nous savons que nous devons choisir les vecteurs normaux associés aux surfaces de celle-ci pour nos manipulations vectorielles. Ceci revient à s'assurer que le produit scalaire entre les vecteurs des surfaces de contact avec le vecteur de fond de découpe de la grume porteuse soit toujours positif.

L'orientation correcte de ces vecteurs est illustrée ci-dessous [Figure 47].

⁸ Cela signifie que la courbe assimilée à la forme de la structure présente une concavité vers le bas.

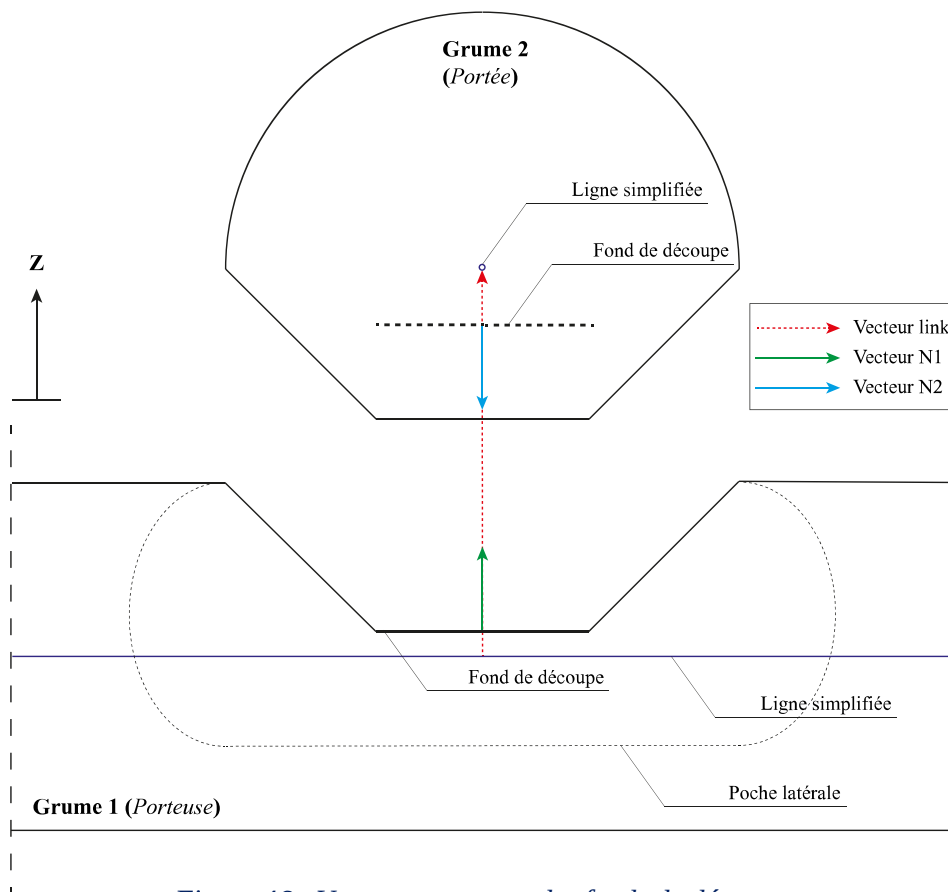


Figure 46 : Vecteurs normaux des fonds de découpe

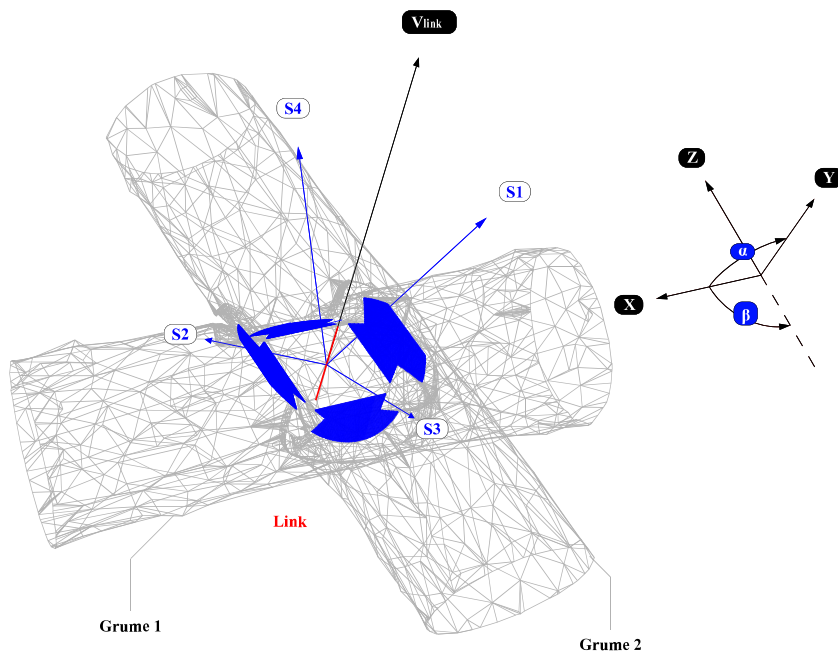


Figure 47 : Vecteurs normaux des surfaces de contact correctement orientés. La grume n°1 est porteuse.

5.2.2. Identification des surfaces sollicitées

Notre convention vectorielle est maintenant bien posée. Nous pouvons dès lors nous intéresser à la détermination du nombre de surfaces de contact sollicitées en fonction de l'orientation de la résultante des efforts $\vec{R}$. L'utilisation du produit scalaire va une nouvelle fois nous être utile. En effet, si le produit scalaire entre la résultante des efforts et la normale d'une surface de contact est positif, la surface ne sera pas chargée. A l'inverse, si ce produit est négatif, les vecteurs sont de sens opposés et par conséquent la surface est chargée [Figure 48]. Sur cette illustration, il est aisé de comprendre que la résultante $\vec{R}$ représente une poussée sur la surface S_1 . Bien entendu, cet exemple est le plus simple que nous puissions avoir et sert ici simplement à faire comprendre la démarche exploitée. Plus tard, nous verrons des cas plus complexes.

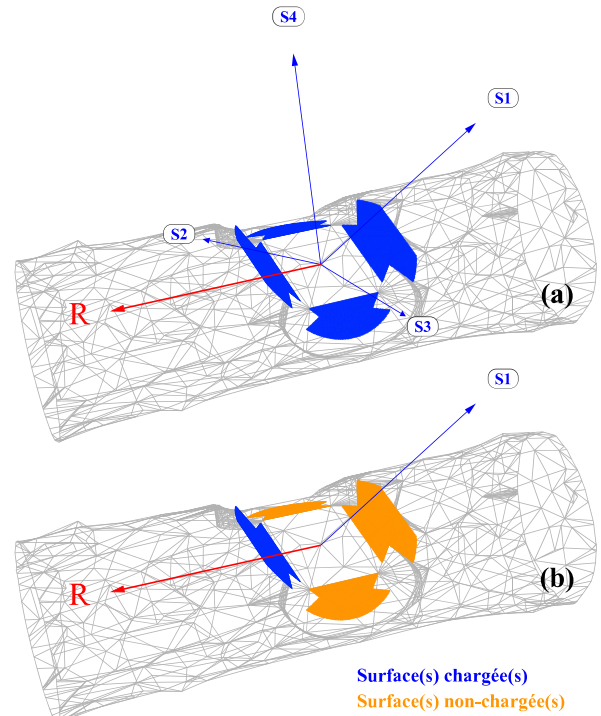


Figure 48 : (a) Avant produit scalaire, (b) Après produit scalaire.

5.2.3. Méthodologie de répartition de l'effort

Il nous reste finalement à comprendre comment l'effort $\vec{R}$ se répartit lorsque notre programme développé nous indique que plusieurs surfaces de contact – entre 1 et 4 – sont chargées. Pour ce faire, nous utilisons une nouvelle fois le produit scalaire. Ce dernier sera effectué entre la résultante $\vec{R}$ et chaque vecteur normal des surfaces chargées. Chacun de ces produits scalaires sera ensuite normalisé de manière à obtenir un pourcentage de sollicitation de $\vec{R}$ pour chaque surface chargée. Cette normalisation est définie ci-dessous [Figure 49].

Soit N , le nombre de surfaces de contact chargées au sein d'un assemblage, la proportion d'effort reprise par la surface 'k' est donnée par :

$$P_k = \frac{(\vec{n}_k \cdot \vec{R})}{\sum_{j=1}^N (\vec{n}_j \cdot \vec{R})} \quad [\%]$$

Avec ' $\cdot$ ', l'opérateur de produit scalaire.

Et P_k est la proportion d'effort pour la surface 'k'.

Figure 49 : Normalisation des produits scalaires.

Nous pouvons ainsi déterminer la force qui agit sur chacune des surfaces chargées [Figure 50].

La force agissant sur la surface de contact 'k' est donnée par :

$$F_k = |\vec{R}| \times P_k \text{ [kN]}$$

Où $|\vec{R}|$ représente la norme du vecteur $\vec{R}$, c'est-à-dire son intensité.

Figure 50 : Force agissant sur les surfaces de contact.

Pour se convaincre de la méthode utilisée pour calculer P_k , prenons un petit exemple simple. Considérons le cas d'un effort $\vec{R} = 1 \text{ kN}$ dont l'orientation est perpendiculaire à la surface de fond de découpe de la grume porteuse et que les quatre surfaces de contact sont chargées [Figure 51]. Le produit scalaire avec le vecteur $\vec{R}$ et chacun des vecteurs des surfaces de contact s'écrit :

$$(\vec{R} \cdot \vec{N}_k) = |\vec{R}| \cdot |\vec{N}_k| \cos(\alpha)$$

L'angle entre les vecteurs des surfaces de contact et le vecteur résultante d'efforts étant $\alpha = 45^\circ$ et la norme d'un vecteur normal valant l'unité par définition, ce produit scalaire est identique pour chacune des surfaces de contact et nous avons :

$$P_1 = P_2 = P_3 = P_4 = 25\%$$

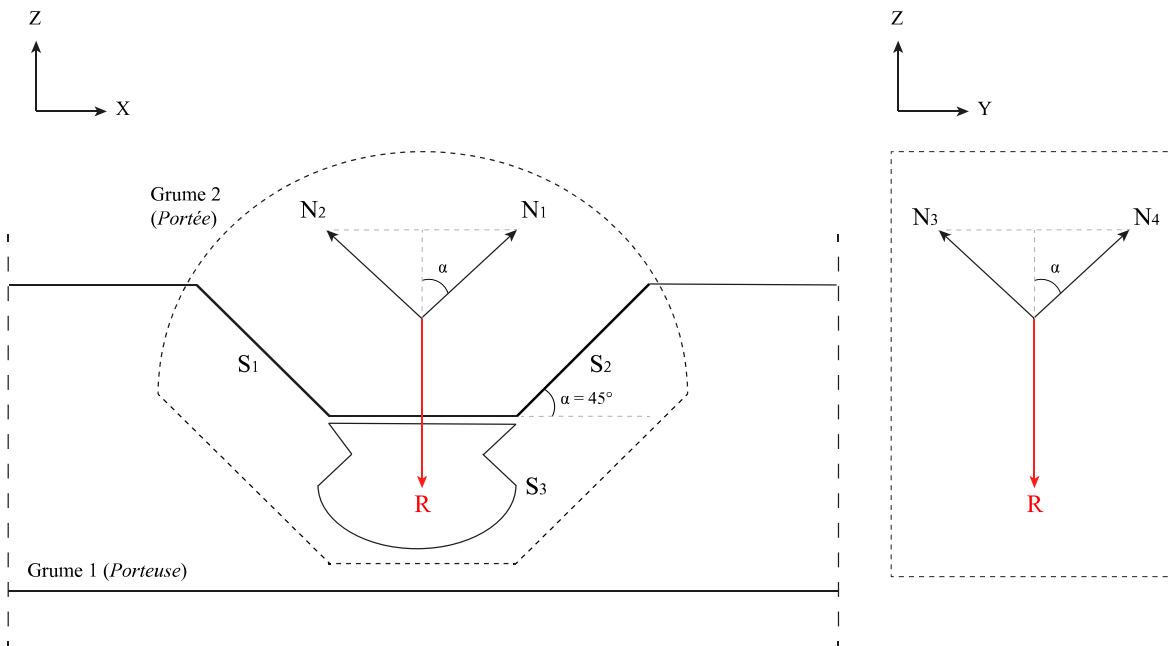


Figure 51 : Exemple pour la définition de proportion des efforts.

5.2.4. Conclusion

Notre méthode de répartition des efforts est à présent bien définie et nous allons pouvoir l'appliquer à un certain nombre de cas différents correspondant aux diverses orientations de la résultante des forces au sein de l'assemblage. Les deux prochaines sections distingueront les cas de 1 à 4 surfaces de contact chargées dans deux configurations : « sans tolérance d'usinage » et « avec tolérance d'usinage ».

5.3. Sans tolérance d'usinage

Dans cette section, nous distinguerons le cas purement théorique de notre recherche, c'est-à-dire que nous faisons abstraction d'une potentielle tolérance d'usinage. Ceci implique que lorsque notre modèle stipule qu'un certain nombre de surfaces au sein de l'assemblage sont sollicitées, nous n'irons pas plus loin et considérerons que ce que le programme fournit est la solution réelle. Nous verrons au point (5.4) que nous pouvons discuter ce résultat et tendre vers une autre solution.

Par ailleurs, pour l'étude des différents cas présentés ci-dessous, nous fixons la position entre les deux grumes ; celle-ci est telle que l'angle entre les deux grumes soit de 60° [Figure 52]. Les cas de chargement sont donc uniquement étudiés pour cet angle entre les deux grumes⁹. En revanche, pour cette même position de grumes, la variation de l'orientation de la résultante des efforts a été réalisée par incrémentation des angles, α et β , avec un pas de 30° . Les sous-sections suivantes reprennent les cas du même type. Cependant, un tableau comprenant le nombre de surfaces de contact chargées, en fonction de toutes les combinaisons de α et β , est disponible à l'Annexe 11.1.

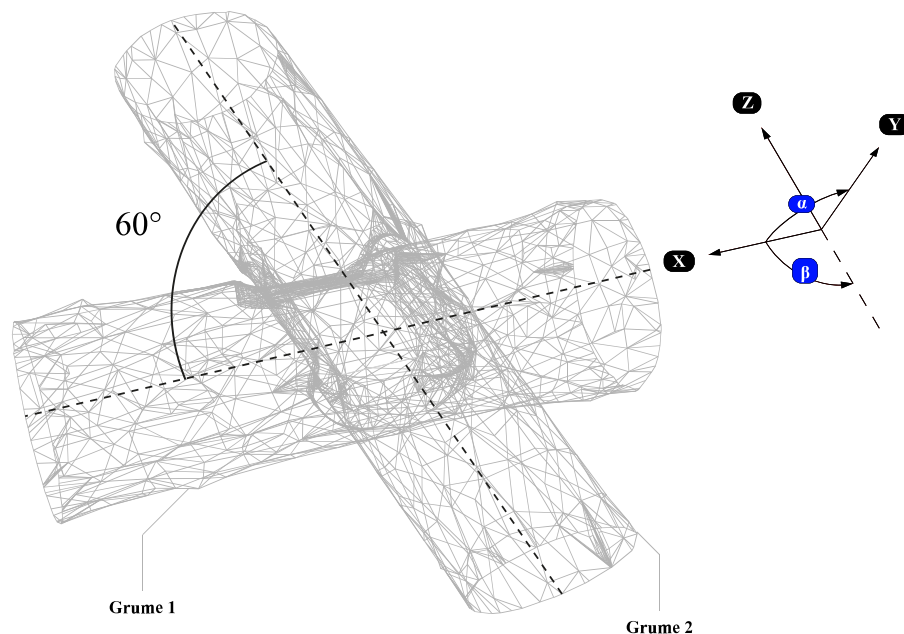


Figure 52 : Angle entre les deux grumes.

⁹ Le spectre de toutes les solutions possibles nécessiterait de considérer toutes les orientations entre les 2 grumes. La détermination de ce spectre pourrait constituer une exploration future.

5.3.1. 1 surface chargée

Le cas où il n'y a qu'une seule surface chargée est le plus trivial. Dans ce cas, il n'y pas de répartition d'efforts et la surface doit reprendre l'intégralité de la résultante des efforts de l'assemblage ($P_1 = 100\%$). Ce cas confère, en réalité, la situation la plus sécuritaire. En effet, si l'on considère que, pour chaque assemblage, une seule surface doit reprendre la totalité de l'effort, alors l'intensité de cet effort appliqué est fortement limitée puisque nous devons respecter le fait que la contrainte σ appliquée au bois soit inférieure à la contrainte maximale σ_{max} que le bois peut effectivement endurer. Le cas de charge pouvant être appliqué à la structure serait alors fortement diminué.

Pour $\alpha = 30^\circ$ et $\beta = 120^\circ$, nous nous situons dans ce cas avec une surface chargée [Figure 53].

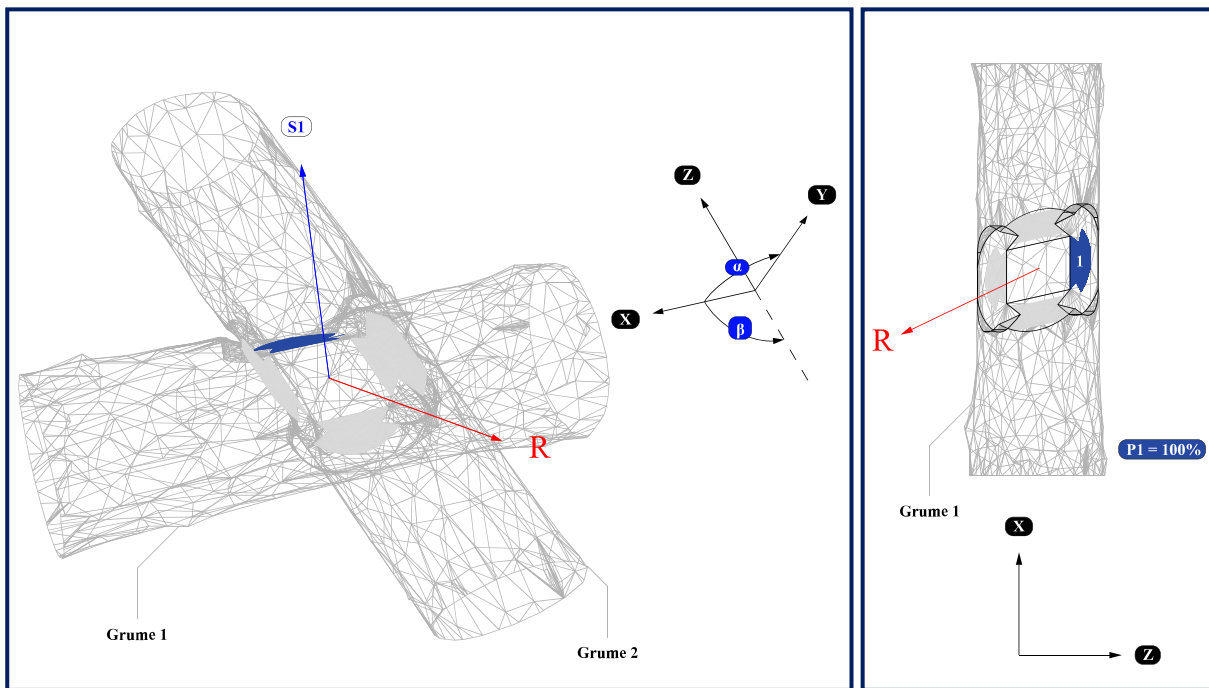


Figure 53 : Scénario avec 1 surface chargée pour $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 120^\circ$

On notera toutefois qu'il s'agit ici d'un cas difficile à rencontrer dans la réalité ; la complexité des structures réciproques est telle que l'orientation de la résultante impliquera en permanence la sollicitation minimale de deux surfaces de contact.

5.3.2. 2 surfaces chargées

Ce cas est observé pour une combinaison telle que $\alpha = 0^\circ$ et $\beta = 60^\circ$ [Figure 54]. L'application de la méthode de répartition de l'effort est ici nécessaire. Nous obtenons les pourcentages $P_1 = 44\%$ et $P_2 = 56\%$. Ce résultat est cohérent dans le sens où le premier « blocage » au sein de l'assemblage, c'est-à-dire la première étape de reprise de l'effort, est effectué par la surface de contact S_2 . En effet, l'angle α étant nul, la résultante se situe dans le plan XZ et le vecteur normal associé à la surface S_2 est le plus opposé à cet effort, ce qui confirme un produit scalaire plus élevé et donc une plus grande contribution de reprise d'efforts pour cette surface de contact.

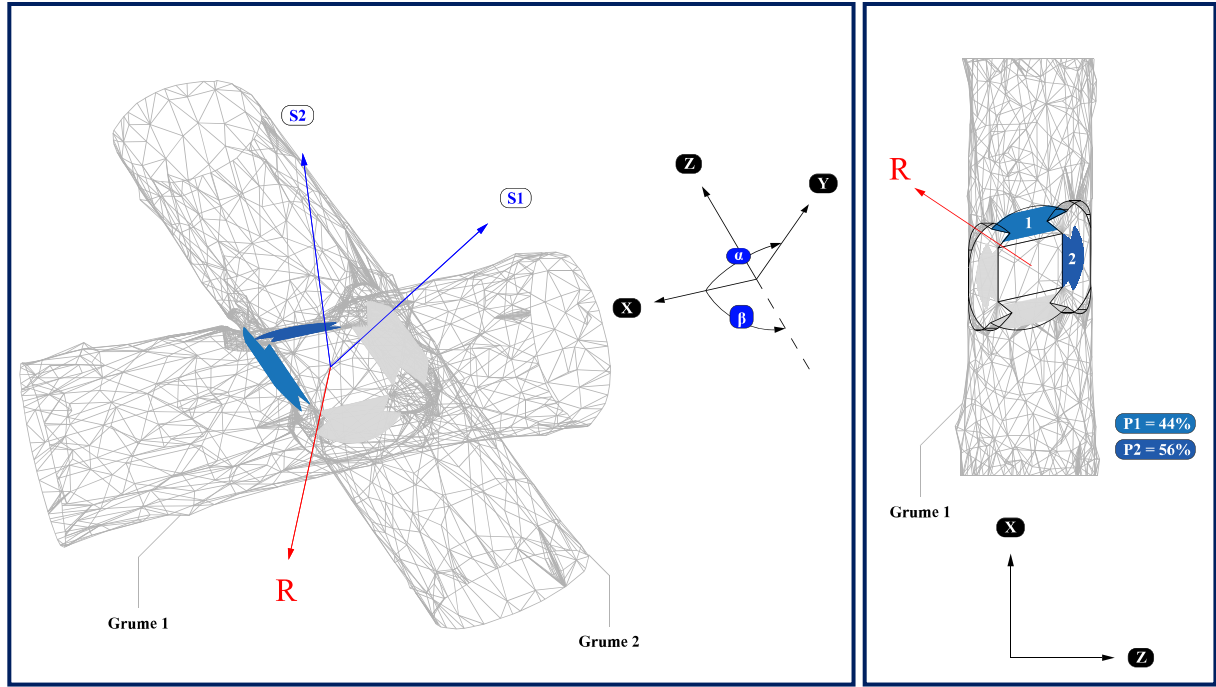


Figure 54 : Scénario avec 2 surfaces chargées pour $\alpha = 0^\circ$, $\beta = 60^\circ$

Il est à noter que ce cas de chargement sera toujours constitué de deux surfaces « adjacentes ». C'est-à-dire que la combinaison ne comportera jamais deux surfaces opposées¹⁰. En effet, deux surfaces opposées ont des vecteurs normaux opposés également et, dans un tel cas d'orientation de la résultante, le produit scalaire du vecteur d'une des deux surfaces avec celle-ci sera positif et par conséquent, cette surface concernée sera non-chargée. Par contre, il est évident que nous ayons deux surfaces opposées qui soient chargées lorsque nous nous situons dans un cas de chargement où 3 ou 4 surfaces de contact sont sollicitées. En d'autres mots, la présence de deux surfaces opposées et chargées implique nécessairement que la 3^{ème} et/ou la 4^{ème} surface de l'assemblage concerné soit également chargée.

5.3.3. 3 surfaces chargées

Nous poursuivons notre analyse en exposant le cas avec 3 surfaces. Un de ces cas est observé pour une combinaison avec $\alpha = 330^\circ$ et $\beta = 30^\circ$ [Figure 55]. La répartition de l'effort se complexifie suite à l'ajout d'une surface de contact par rapport au cas précédent. Nous obtenons les pourcentages suivants : $P_1 = 57\%$, $P_2 = 3\%$ et $P_3 = 40\%$. Ici, l'angle α est tel que le

¹⁰ Il existe uniquement un cas particulier lorsque nous considérons une tolérance d'usinage. Ce cas très peu probable de se produire sera explicité dans le point (5.4).

produit scalaire le plus élevé soit celui avec la surface S_1 . L'angle β , lui, implique que la surface S_3 serve de blocage latéral, et la combinaison de ces 2 angles implique que la surface de contact S_2 soit également sollicitée. Nous observons que le pourcentage de chargement de cette dernière est très faible comparé aux deux autres. Nous verrons plus tard, point (5.4), que cette surface S_2 pourra être potentiellement considérée comme non-chargée en pratique, en raison d'une tolérance d'usinage.

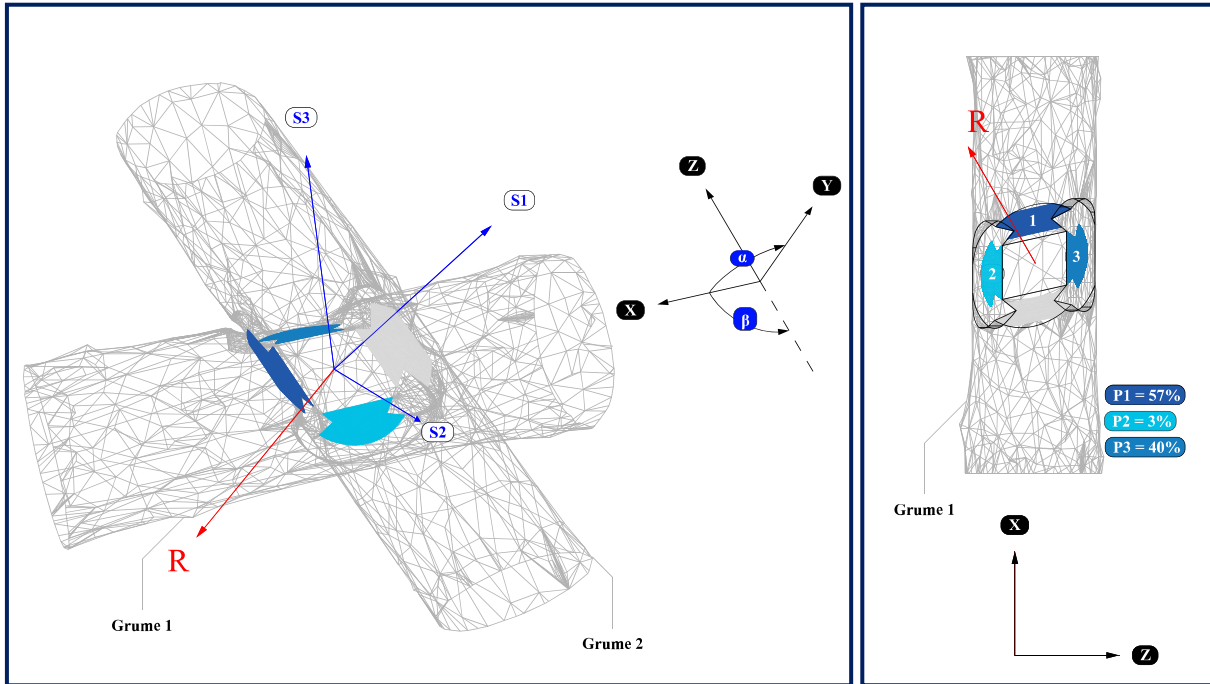


Figure 55 : Scénario avec 3 surfaces chargées pour $\alpha = 330^\circ$, $\beta = 30^\circ$

5.3.4. 4 surfaces chargées

Finalement, nous obtenons le dernier cas possible avec 4 surfaces chargées, pour une combinaison d'angles $\alpha = 300^\circ$ et $\beta = 330^\circ$ [Figure 56]. Les différents pourcentages de répartition de l'effort sont : $P_1 = 36\%$, $P_2 = 12\%$, $P_3 = 32\%$, $P_4 = 18\%$. Nous observons que les surfaces S_1 et S_3 sont les plus sollicitées. En effet, ceci fait sens puisque l'angle β fournit une orientation telle que les blocages principaux sont effectués par ces 2 surfaces. Par ailleurs, la valeur de l'angle α fournit une direction abrupte pour la résultante, proche de l'axe $-\vec{Y}$, ce qui implique la sollicitation des 4 surfaces de contact. De la même manière qu'au cas précédent, nous discuterons, au point (5.4), de l'implication des surfaces S_2 et S_4 , elles ne sont en réalité par forcément chargées.

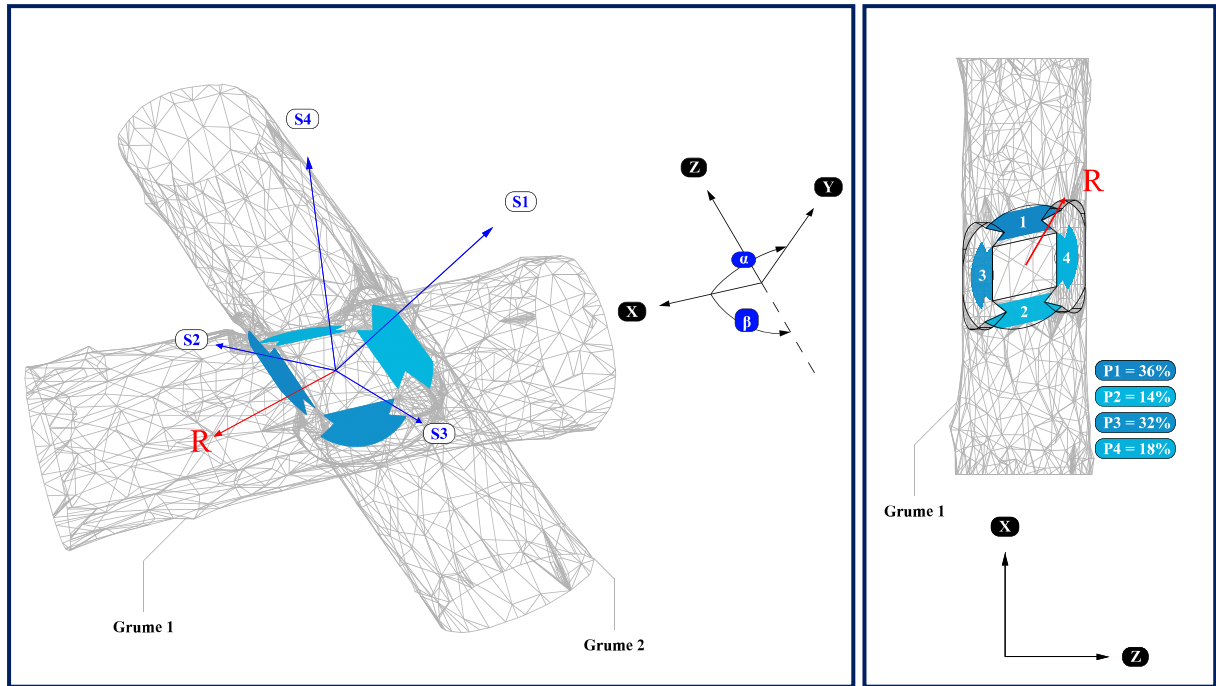


Figure 56 : Scénario avec 4 surfaces chargées pour $\alpha = 300^\circ$, $\beta = 330^\circ$

5.4. Avec tolérance d'usinage

Nous connaissons désormais les différents scénarios de chargement possibles en fonction de l'orientation de la résultante des forces $\vec{R}$. Cependant, une importante complémentarité à la méthode doit également être prise en compte : la tolérance d'usinage robotique. En effet, les résultats actuels sortant de notre modèle sont cohérents au niveau de la répartition des efforts en fonction des N surfaces de contact sollicitées. Néanmoins, le programme fournit un résultat théorique qui nécessite d'être confronté à quelques modifications dans la pratique.

Comme vu précédemment, l'usinage robotique est un atout majeur dans la découpe de grumes. Néanmoins, comme tout autre outil de découpe, son application est limitée à une certaine précision conférant une marge à prendre sur les résultats fournis par le programme. Par « tolérance d'usinage », nous entendons donc la prise en compte de cette marge dans notre réflexion consistant à définir quelles surfaces de contact sont sollicitées.

En réalité, cette tolérance d'usinage n'est pas quantifiable en amont. En effet, la tolérance d'usinage est principalement due à un problème de référencement des outils d'usinage robotique (fraises) ; c'est-à-dire qu'il peut y avoir un léger décalage de ceux-ci par rapport à leurs axes de positionnement. Par ailleurs, le bras de levier du robot est assez long et doit supporter le poids de ces outils ; ceci mène également à de légers décalages de la position de ces derniers. Ainsi, durant la découpe, ces erreurs impliquent une position décalée d'un plan incliné par rapport aux autres dans un assemblage. En outre, l'inclinaison de ce plan incliné (fixé initialement à 45° dans notre cas) peut également varier en raison de ces décalages.

Par conséquent, nous comprenons que cette tolérance d'usinage mènera à une modification du contact entre les surfaces de deux grumes partageant un assemblage. En effet, cette tolérance sera telle que certaines surfaces de l'assemblage vont en réalité effectuer un « blocage » ayant

pour conséquence d'initier un décollement au niveau d'autres zones de contact de l'assemblage [Figure 57]. Ce qui signifierait que certaines de nos surfaces de contact, présumées chargées, ne le sont pas forcément.

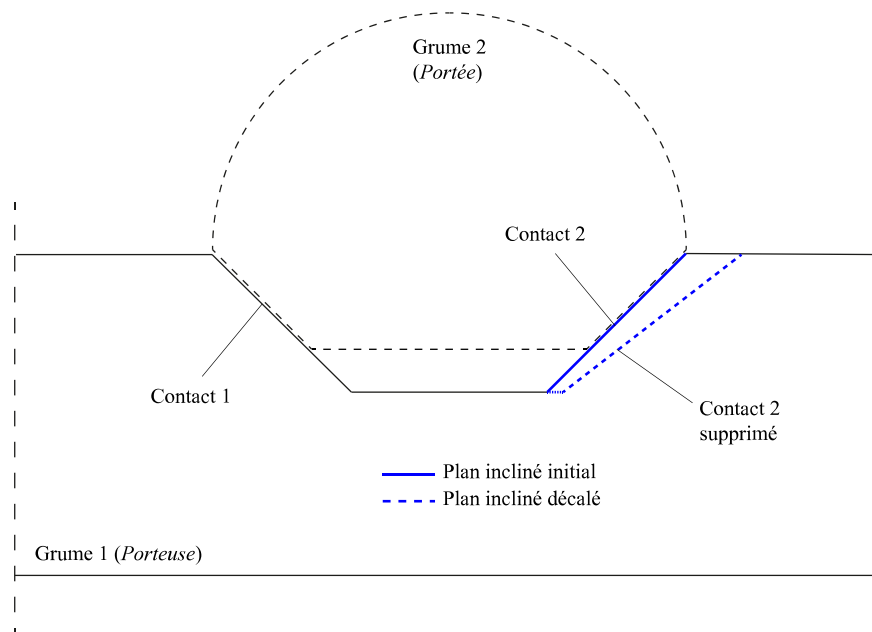


Figure 57 : Schéma simplifié du concept de tolérance d'usinage.

La présente section va, en ce sens, tenter de comprendre quelles surfaces de contact peuvent effectivement, suite à cette tolérance d'usinage, être « supprimées » des résultats observés au point (5.3) et de déterminer comment l'effort qui était appliqué à ces surfaces supprimées se répartit sur les surfaces qui restent chargées malgré l'ajout de la tolérance.

Au fond, nous nous rendons compte que cette tolérance d'usinage fera sens et impliquera des blocages/décollements pour des surfaces opposées. En effet, deux surfaces opposées ont des fonctions de reprises d'efforts de sens contraire puisque leurs vecteurs normaux sont également opposés entre eux. Nous notons que pour deux surfaces de contact opposées, la plus chargée de ces dernières sera considérée comme étant celle qui « bloque » et se verra attribuer le chargement de l'autre qui sera décollée. Ceci est pertinent puisque, pour rappel, aucun frottement n'est permis au niveau du contact entre les surfaces. Ainsi, la surface de contact la plus chargée fera en sorte que le contact entre les deux grumes se fasse prioritairement de son côté.

Pour étudier ce fondement, nous allons reparcourir les différents cas fournis dans la section précédente (5.3) et en discuter les potentielles modifications pour les surfaces de contact chargées.

Nous noterons que l'ensemble des choix qui seront faits dans cette partie contribue à une marge sécuritaire dans notre calcul. En effet, la réduction du nombre de surfaces de contact diminue la contrainte pouvant être reprise ; notre cas de charge est donc limité. Par ailleurs, il est important de comprendre qu'à terme, le comportement de la structure en bois va changer. En effet, plus le temps passe, plus la fatigue du matériau organique (bois) et la plastification de celui-ci, notamment par tassement de ses fibres, feront en sorte que les 4 surfaces de contact de chaque assemblage seront sollicitées.

5.4.1. Moins de 3 surfaces chargées

Lorsque notre modèle nous indique que seulement une ou deux surfaces de contact sont sollicitées, nous considérerons que la tolérance d'usinage n'affecte pas ce résultat. Les pourcentages P_i des surfaces sont dès lors inchangés. Cette hypothèse est triviale pour le cas à une surface de contact. Le cas à deux surfaces de contact fait sens également puisque, pour rappel, la situation à deux surfaces de contact n'est jamais constituée de deux surfaces opposées¹¹. Or, comme énoncé ci-dessus, la tolérance d'usinage fait uniquement sens dans ce dernier cas.

5.4.2. 3 surfaces chargées

Si le modèle nous indique que 3 surfaces de contact sont effectivement chargées, nous allons pouvoir appliquer la théorie de la tolérance d'usinage à ce résultat. Dans cette situation, nous allons distinguer deux cas en fonction des pourcentages de répartition fournis par le programme.

1. Les pourcentages P_i des 3 surfaces sont tous différents

Cette situation concerne le cas vu au point (5.3.3). Reprenons son schéma ci-dessous [Figure 58]. Dans ce genre de cas, nous avons deux surfaces de contact opposées pour lesquelles un des pourcentages de répartition d'efforts est sensiblement plus élevé que l'autre. Ici nous avons : $P_3 = 40\% \gg P_2 = 3\%$. Quand nous observons le schéma, il est clair que c'est bien la surface S_3 qui est la plus opposée à la résultante. Dès lors, lorsque nous souhaitons ajouter une certaine tolérance d'usinage au modèle, nous considérons que cette surface va en réalité présenter un blocage latéral empêchant le contact des deux grumes au niveau de la surface de contact S_2 .

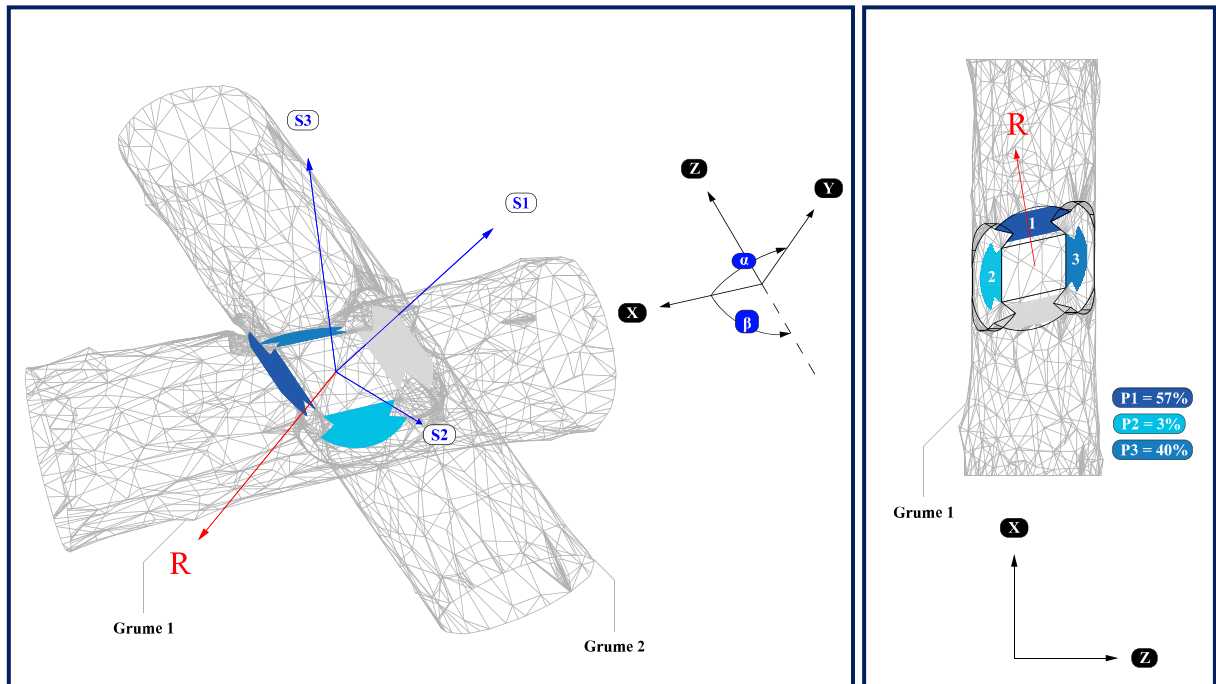


Figure 58 : Scénario à 3 surfaces chargées avec répartitions différentes avant tolérance.

¹¹ Excepté un seul cas particulier, voir point (5.4.3).

Par conséquent, nous modifions notre modèle en stipulant que cette surface est non-chargée lorsque nous considérons une tolérance d'usinage ; nous devons donc nous préoccuper de la reprise du pourcentage P_2 par les surfaces S_1 et S_3 . Comme la tolérance d'usinage a un impact confirmé entre deux surfaces opposées, nous considérons que c'est la surface opposée qui reprendra le pourcentage de la surface rendue non-chargée. Ici, c'est donc la surface S_3 qui se verra attribuer les 3% supplémentaires à son chargement. La situation, après application de la tolérance, est illustrée ci-dessous [Figure 59].

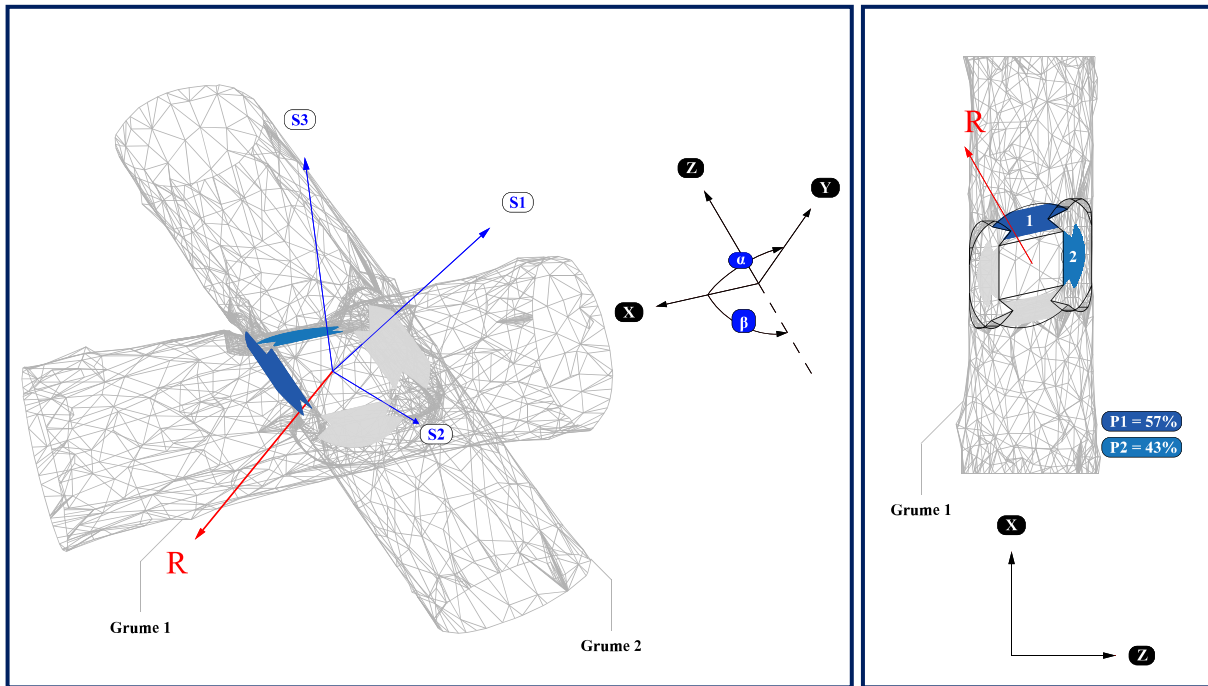


Figure 59 : Scénario à 3 surfaces chargées après tolérance.

2. Les pourcentages P_i de deux surfaces sont égaux.

Nous sommes ici dans un cas bien particulier du scénario à 3 surfaces de contact. Il s'agit du cas où la résultante $\vec{R}$ se situe dans le plan formé par un des deux axes des grumes et du link, qui pour rappel est la distance la plus courte entre les lignes simplifiées des deux grumes. En effet, le fait que la résultante soit exprimée dans ce plan implique une répartition équitable entre les deux surfaces de contact opposées [Figure 60].

Dans une telle situation, nous considérerons que la tolérance d'usinage n'impliquera pas une modification dans la répartition des efforts et les résultats explicités sans tolérance seront authentiques.

Nous observons ce scénario pour une combinaison d'angles $\alpha = 330^\circ$ et $\beta = 0^\circ$ [Figure 60].

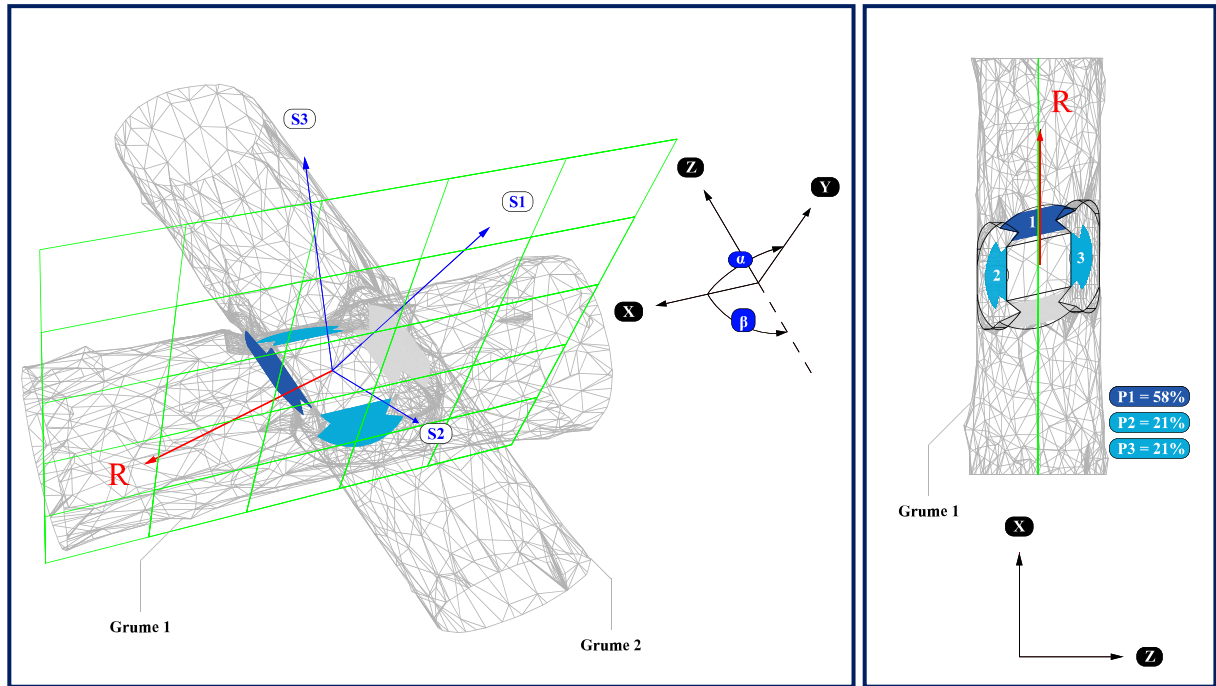


Figure 60 : Scénario à 3 surfaces chargées avec deux pourcentages identiques.

5.4.3. 4 surfaces chargées

De même que pour le point précédent, nous allons pouvoir appliquer une modification à la répartition des efforts sur les surfaces de contact en invoquant la tolérance d'usinage. Pour cette situation avec 4 surfaces, nous allons distinguer 3 cas.

1. Tous les pourcentages P_i sont égaux.

Ce scénario est très particulier et a une infime chance de se produire dans la réalité. En effet, pour que les pourcentages des 4 surfaces de contact soient égaux (soit $P_i = 25\%$), il faut que la résultante $\vec{R}$ soit parfaitement orientée selon le link dans la direction $-\vec{Y}$, c'est-à-dire pour des d'angles $\alpha = 270^\circ$ et $\beta = 0^\circ$ [Figure 61]. Dans ce présent cas, nous ne considérons pas la tolérance d'usinage.

Cas particulier : Notons ici que nous pouvons en réalité avoir un cas extrême, cependant très peu probable, conférant une reprise de l'effort uniquement par deux surfaces parmi les 4. En effet, si les plans inclinés des surfaces S_1 et S_2 sont décalés (en raison de la tolérance toujours) de manière à ce que ceux-ci soient rapprochés entre eux par rapport à leur position initiale, cela impliquera que la grume portée soit légèrement surélevée de sorte que le contact au niveau des surfaces S_3 et S_4 n'est plus d'application. Dans cette situation, nous nous retrouverons dans le seul cas particulier où uniquement deux surfaces opposées reprennent l'intégralité de l'effort $\vec{R}$ avec comme pourcentage de répartition : $P_1 = P_2 = 50\%$.

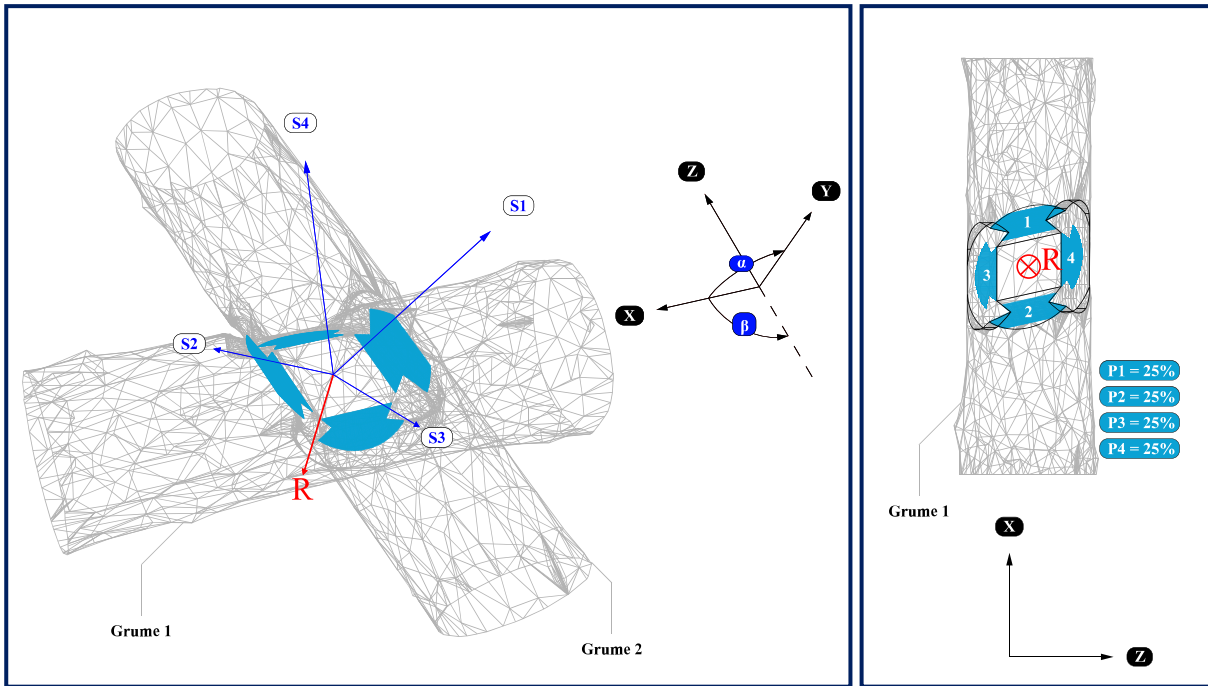


Figure 61 : Scénario à 4 surfaces chargées avec répartition égale.

2. Les pourcentages P_i de deux surfaces sont égaux.

Comme vu précédemment pour un des scénarios à 3 surfaces de contact, nous pouvons également nous retrouver dans un cas où deux surfaces ont une même répartition de l'effort, P_i . Pour rappel, ce cas survient lorsque la résultante appartient au plan défini par l'axe d'une des deux grumes et le link de l'assemblage. Cette répartition identique ne peut se produire que pour deux surfaces opposées, et nous considérons que la tolérance d'usinage n'influence pas ce pourcentage. Par ailleurs, pour les deux surfaces de contact restantes, la tolérance sera telle que la surface initialement la plus chargée imposera un blocage impliquant le décollement du contact des surfaces des deux grumes au niveau de la surface de contact opposée. Cette dernière n'est donc en réalité pas chargée et nous devons identifier quelles sont les surfaces de contact qui reprendront l'effort qu'elle était censée reprendre. Comme le décollement de cette surface est dû au blocage de la surface opposée, c'est cette dernière qui reprendra l'intégralité du pourcentage de répartition d'effort.

Nous observons ce scénario pour une combinaison d'angles $\alpha = 300^\circ$ et $\beta = 0^\circ$ [Figure 62].

Le schéma résultant de la considération de la tolérance d'usinage est illustré ci-dessous [Figure 63].

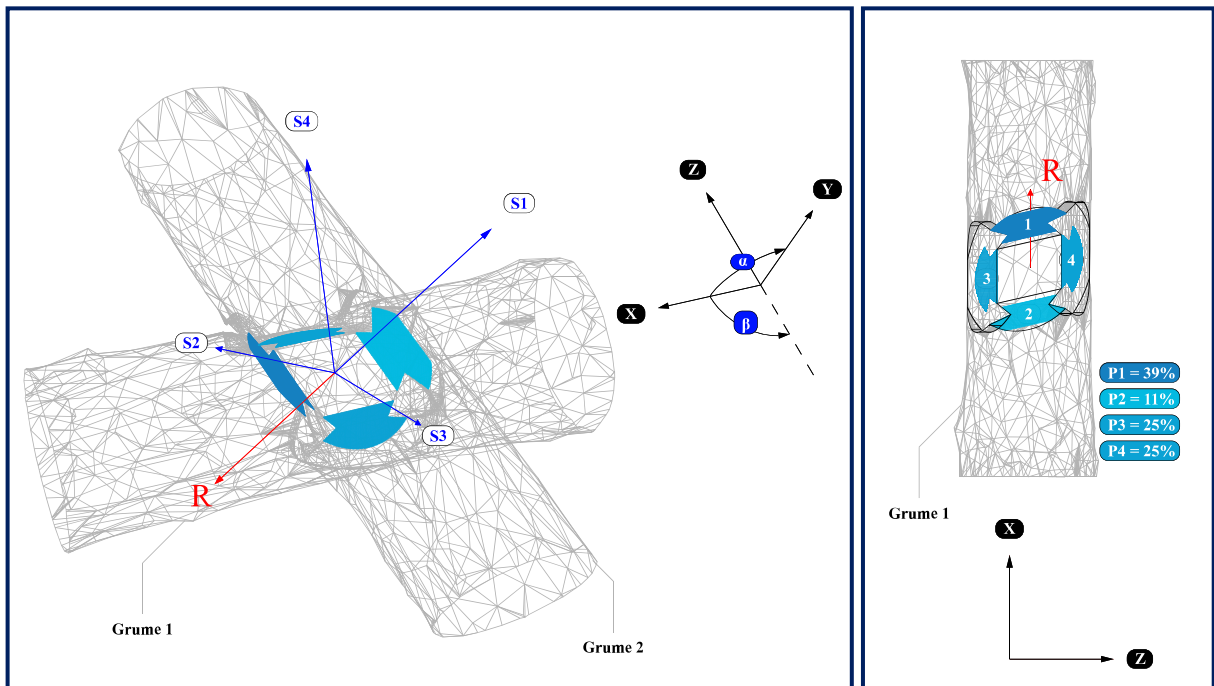


Figure 62 : Scénario à 4 surfaces chargées avec deux pourcentages identiques avant tolérance.

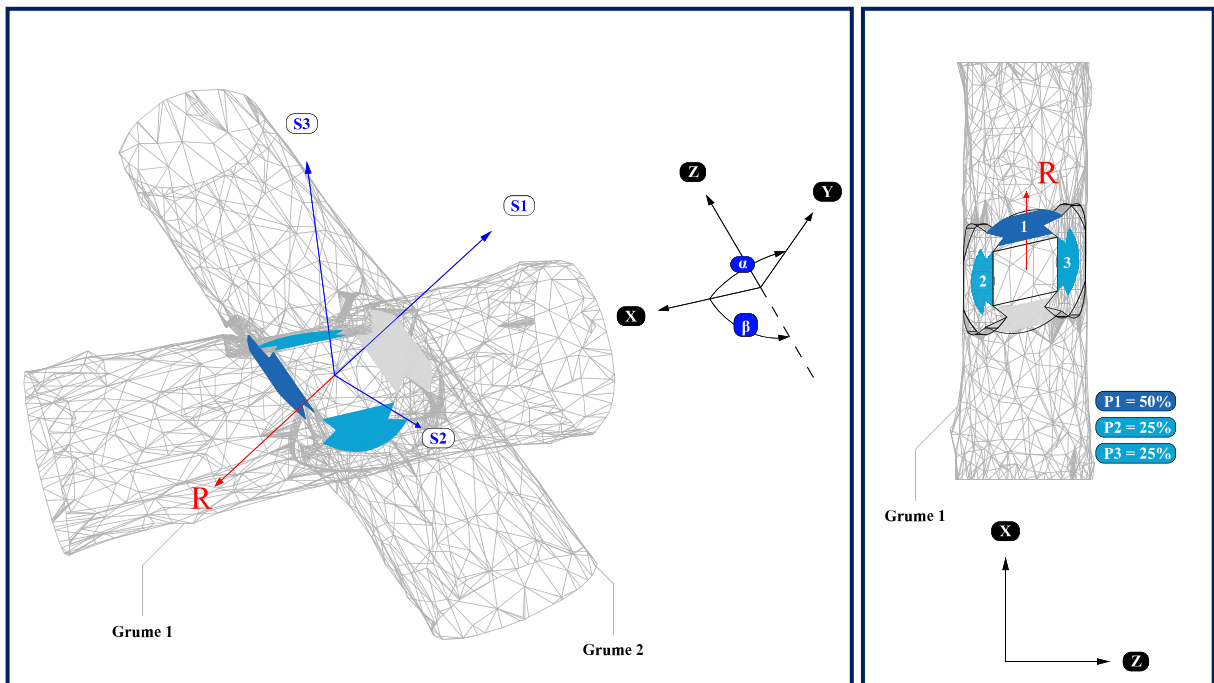


Figure 63 : Scénario à 4 surfaces chargées avec deux pourcentages identiques après tolérance.

3. Les pourcentages P_i sont tous différents.

Ce scénario est le plus courant lorsque nous avons 4 surfaces de contact présumées chargées. En effet, il n'y a aucun critère spécifique pour l'observer si ce n'est que la résultante $\vec{R}$ est simplement orientée de manière à ce que les 4 surfaces de contact soient sollicitées. Ce cas est identique à celui vu au point (5.3.4) dont le schéma est repris ci-dessous [Figure 64].

Pour le cas de figure ci-présent, les surfaces de contact S_1 et S_3 sont les plus chargées de l'assemblage. Un simple regard sur l'orientation de la résultante $\vec{R}$ permet de comprendre ce résultat. En effet, ce sont les surfaces les plus amenées à contrer cette résultante ; leurs orientations (vecteurs normaux) s'opposent clairement à cette dernière. Si bien que ces deux surfaces vont permettre un blocage lorsque nous considérons que la découpe n'est pas parfaite au moment de l'usinage. De cette manière, par tolérance d'usinage, nous estimerons que l'implication des surfaces de contact S_2 et S_4 dans la reprise des efforts n'est pas justifiée dans la réalité et nous intégrons cette particularité dans notre modèle. Comme vu précédemment, nous supposons que c'est la surface de contact opposée à la surface devenue non-chargée qui reprend la contribution P_i de cette dernière. Ainsi pour le cas présent, les pourcentages de sollicitations deviennent :

$$P_1 = P_1 + P_2 = 50\%$$

$$P_3 = P_3 + P_4 = 50\%$$

Le schéma représentant la situation après tolérance d'usinage est illustré ci-dessous [Figure 65].

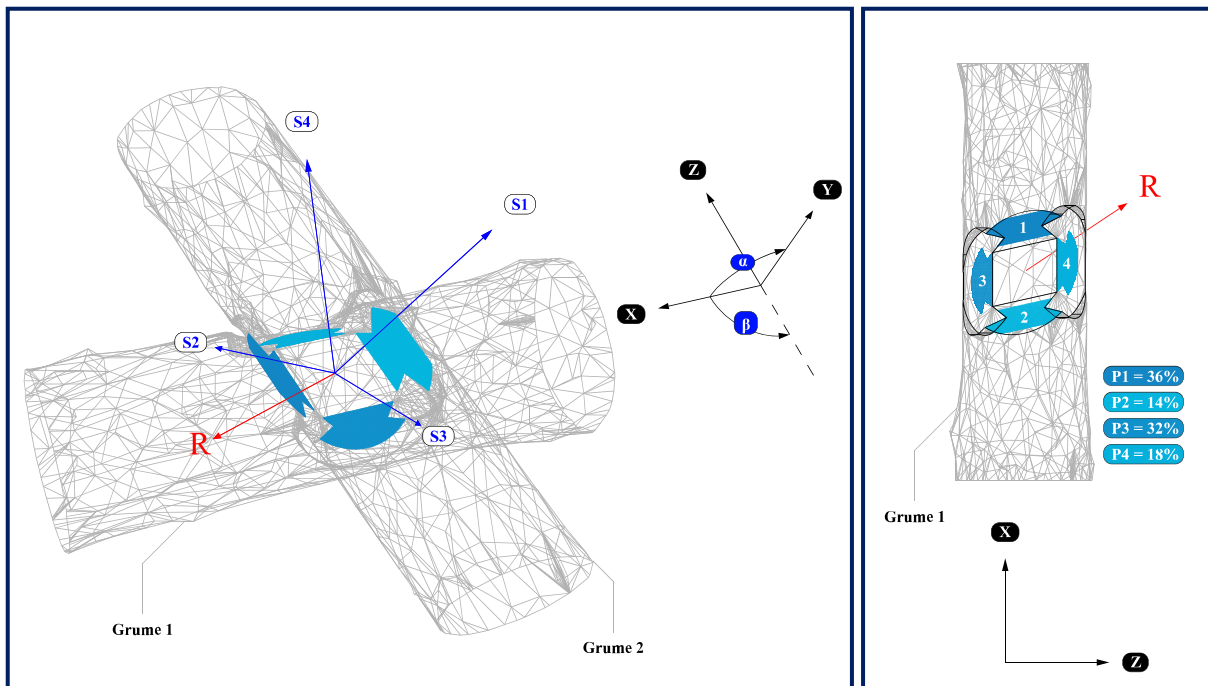


Figure 64 : Scénario à 4 surfaces chargées avec répartitions différentes avant tolérance.

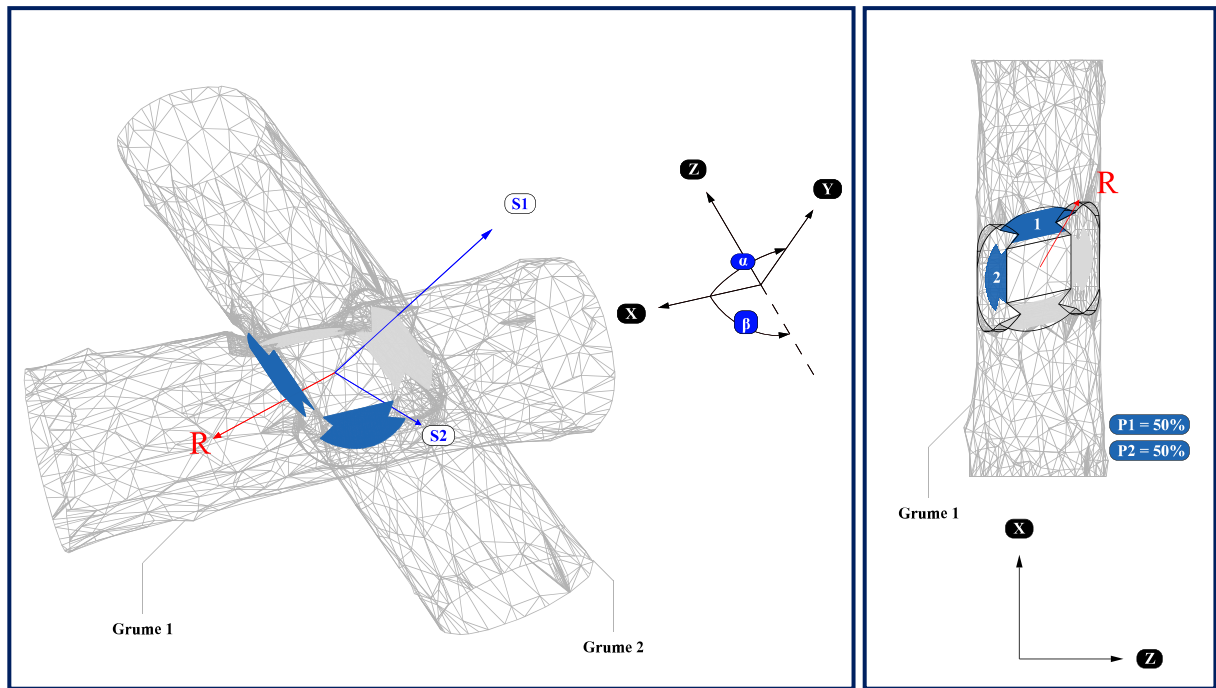


Figure 65 : Scénario à 4 surfaces chargées après tolérance.

5.4.4. Cas particuliers

Nous avons à présent vu tous les scénarios de chargement impliquant un certain nombre de surfaces de contact N . Il reste à discuter deux cas particuliers pouvant survenir dans notre analyse : le cas où aucune surface de contact n'est sollicitée ainsi que le cas où une seule surface est sollicitée mais n'est en réalité pas suffisante pour reprendre la totalité de l'effort. Nous allons analyser ces deux cas ci-dessous.

1. Aucune surface de contact sollicitée

Lorsque la résultante des efforts $\vec{R}$ est telle que le produit scalaire avec chacune des surfaces de contact est positif, aucune de ces dernières ne seront sollicitées [Figure 66]. Nous sommes ici dans un cas où cette résultante implique un décollement total des deux grumes au niveau de l'assemblage. C'est une situation critique car elle met en péril la stabilité de la structure.

Pour rappel, l'objectif principal est de concevoir des structures réciproques avec des grumes et de privilégier un assemblage bois – bois, c'est-à-dire sans apport d'un quelconque autre matériau pour assurer la résistance. Bien évidemment, dans le présent cas extrême, nous n'avons pas le choix et devons joindre un élément additionnel pour empêcher ce décollement de se produire.

Notre choix porte sur le scellage des deux grumes via l'ajout d'un tirefond [Figure 67]. Celui-ci sera inséré au niveau du link. Le dimensionnement de ce tirefond ne sera pas explicité dans ce mémoire et constituera un futur objectif pour la personne qui perpétuera ce travail. Nous en discuterons au point (1).

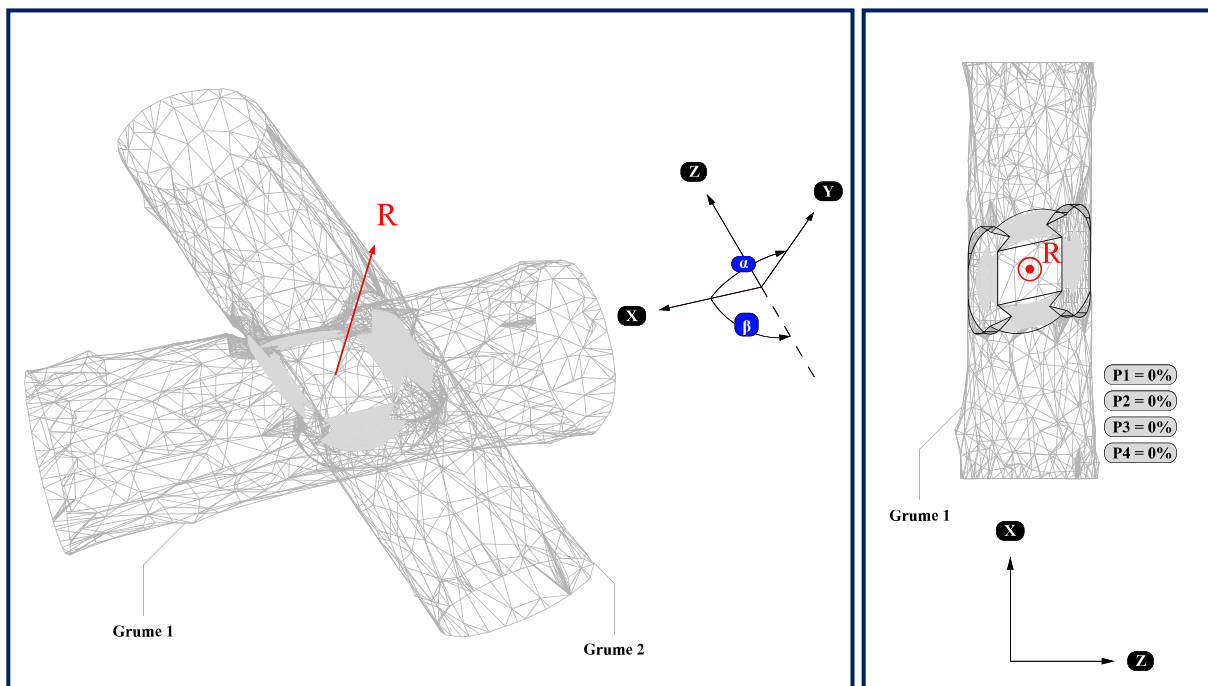


Figure 66 : Cas particulier n°1 : aucune surface de contact sollicitées : $\alpha = 90^\circ$ et $\beta = 0^\circ$.

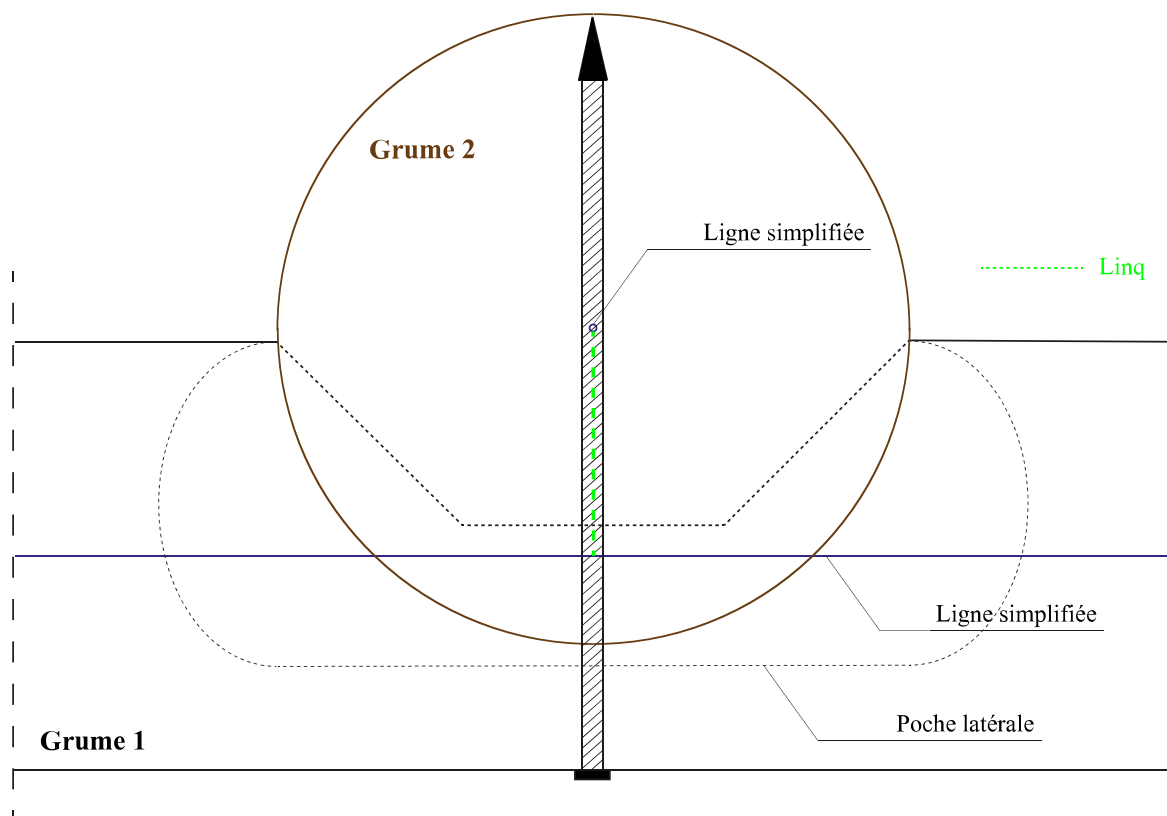


Figure 67 : Schéma d'un tirefond entre deux grumes.

2. Une surface de contact sollicitée présentant une insuffisance

Lorsque la reprise de l'effort résultant n'implique qu'une seule surface de contact, nous devons concentrer plus précisément notre attention sur la direction de cet effort. En effet, il se peut qu'une portion de l'effort, pour une orientation spécifique, entraîne un glissement de la surface associée à la grume portée sur la surface de la grume porteuse.

Prenons le schéma ci-dessous pour étudier les différentes possibilités [Figure 68]. Dans ce schéma, on considère que la surface de contact S_1 est la seule sollicitée au sein de l'assemblage et on trace un cercle définissant l'ensemble des orientations possibles pour $\vec{R}$ – vecteurs partant du centre du cercle vers un point de sa circonférence. Si notre vecteur résultante $\vec{R}$ se situe au niveau de la zone A, la surface de contact S_1 n'est en réalité pas chargée. Pour la zone B, la surface S_1 pourra compenser une portion de l'effort $\vec{R}$. L'effort restant impliquera, pour une résultante dans cette zone, le chargement d'une autre surface de contact puisque le glissement lié à cet effort est dirigé vers l'intérieur de l'assemblage. Finalement, lorsque la résultante se trouve dans la zone C, une partie de l'effort est compensée par la surface S_1 , par contre, l'effort restant implique ici un glissement vers l'extérieur de l'assemblage et, par conséquent, un décollement entre les deux grumes. Ce dernier cas est donc également à proscrire et nous devons placer un tirefond [Figure 67] tout comme le cas précédent.

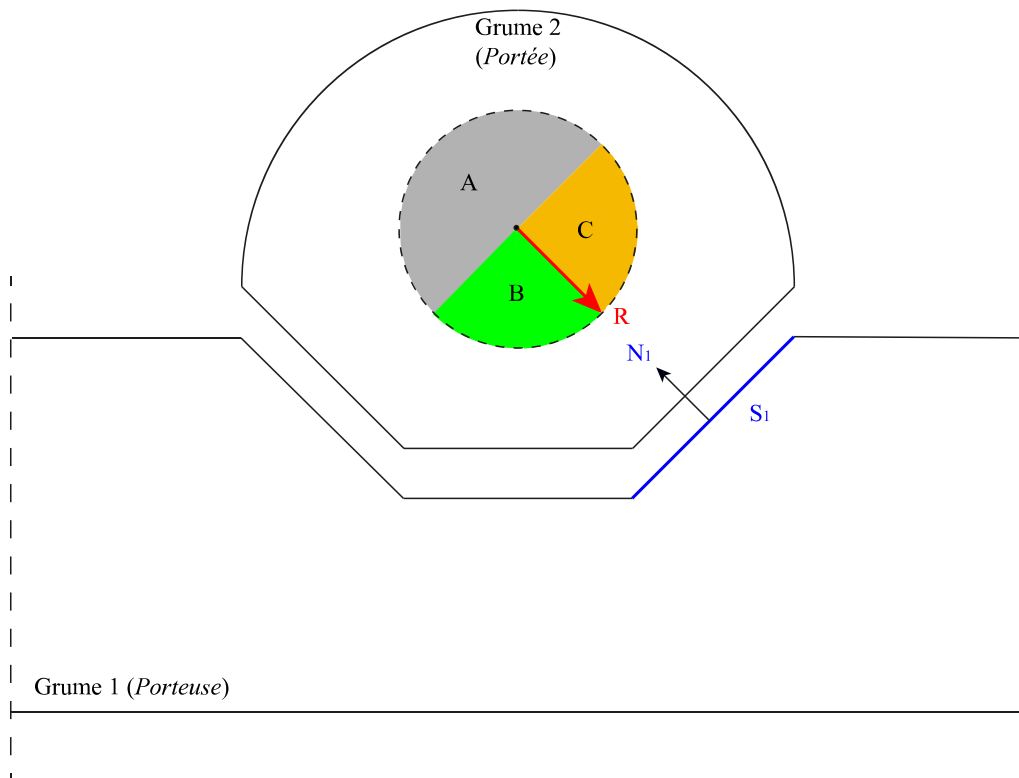


Figure 68 : Fourchette d'orientations pour le cas particulier d'ajout d'un tirefond.

Module de calcul des structures

6. Module de calcul des structures

La section précédente nous a permis de comprendre comment se répartissaient les efforts au sein des surfaces de contact d'un assemblage pour une résultante des efforts $\vec{R}$ fixée à une valeur arbitraire et orientée manuellement dans des directions spécifiques.

A présent, il y a lieu de définir un module de calcul directement ancré dans notre modèle Grasshopper de manière à obtenir la valeur et l'orientation réelle de cette résultante $\vec{R}$ pour n'importe quel cas de chargement s'appliquant sur notre structure.

Comme vu au début de ce travail, sous Grasshopper, le module Karamba3D permet de réaliser cette analyse calculatoire. Dans la présente section, nous nous focaliserons sur les informations à fournir à ce module, le fonctionnement de celui-ci, la manière dont on récupère les différents efforts au sein de la structure dans le but de calculer cette résultante $\vec{R}$ en chaque assemblage.

Notons qu'ici, nous définissons la partie calcul de structure lié à notre structure réciproque de référence ; le modèle sera toutefois adaptable à n'importe quelle autre structure ultérieure.

6.1. Pattern de la structure

Les fonctionnalités de Karamba3D reposent sur la définition d'un modèle filaire de la structure que nous voulons analyser. En ce sens, nous devons transmettre à Karamba3D, l'ensemble des points et lignes qui auront une importance pour la définition de la structure.

Dans notre cas, nous fournissons les lignes simplifiées de chacune des grumes de la structure, les lignes associées aux links de chaque assemblage et les points correspondant aux deux extrémités de toutes ces lignes définies [Figure 69].

Ces éléments sont simples à fournir puisqu'ils sont déjà présents dans notre modèle global, nous n'avons qu'à les intégrer à Karamba3D. Nous verrons dans la section suivante comment se déroule l'intégralité du fonctionnement de ce module.

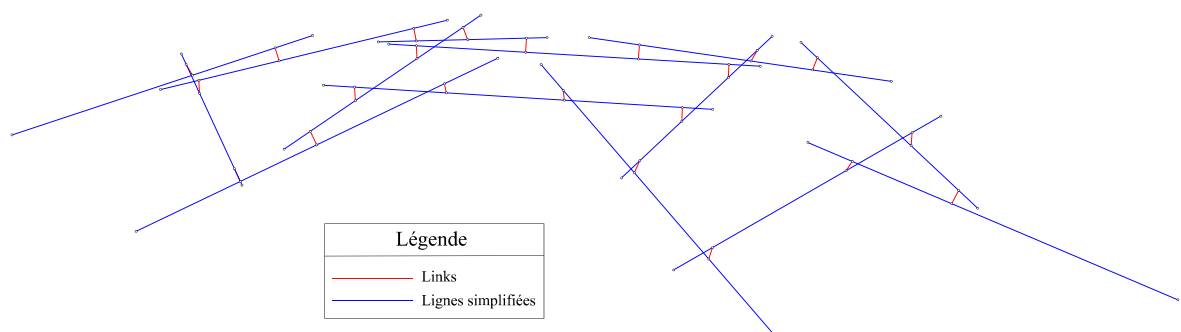


Figure 69 : Modèle filaire de la structure étudiée.

6.2. Schéma des étapes

Karamba3D nous permet d'ajouter des fonctionnalités de calcul à notre modèle Grasshopper. C'est-à-dire qu'après son installation, nous disposons de nouvelles boîtes à « action spécifique », comme définies au point (3.1). Le partie Karamba3D dans notre modèle Grasshopper se résume via la succession de boîtes illustrée ci-dessous [Figure 70]. Dans les sous-sections suivantes, nous détaillerons les fonctionnalités de chacune de ces boîtes.

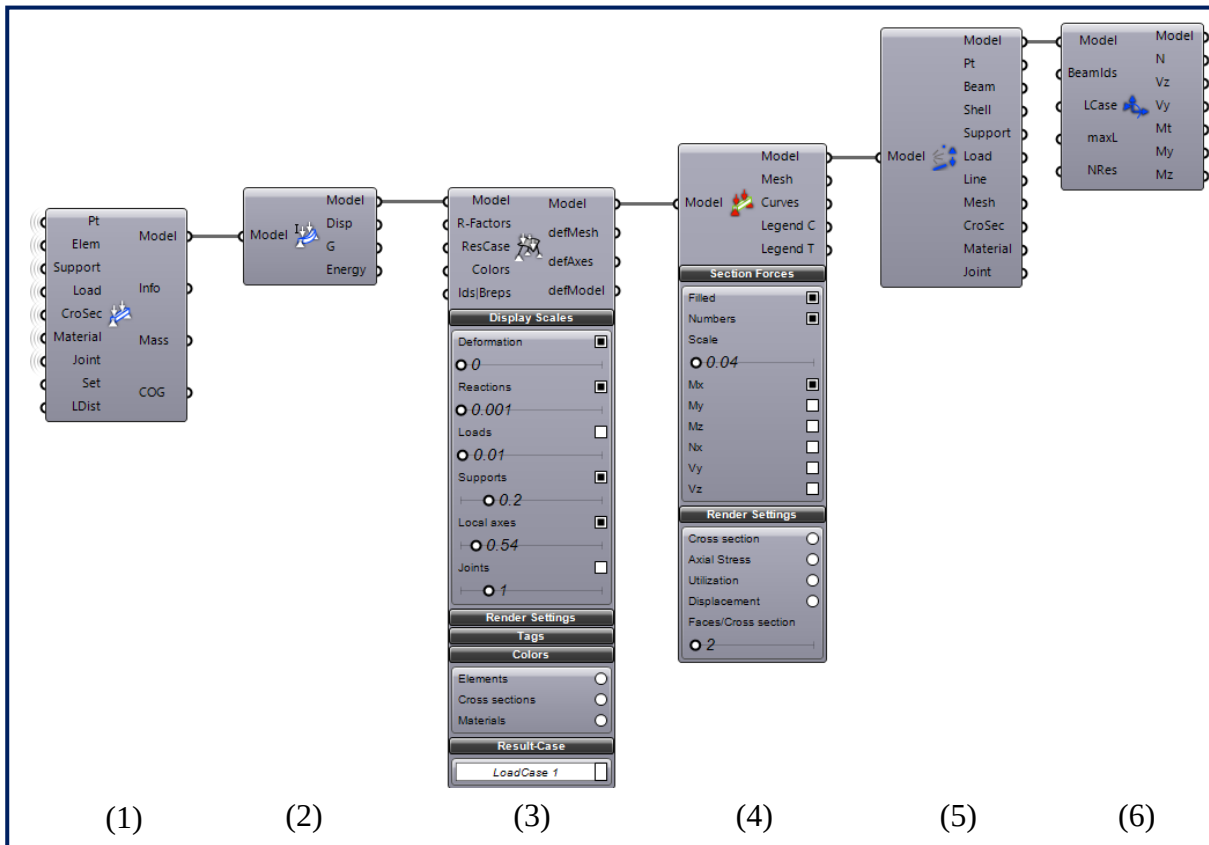


Figure 70 : Succession des boîtes de Karamba3D

6.2.1. Création du modèle de calcul

La boîte (1) se prénomme « Assemble Model ». Elle est la plus importante car c'est celle qui va nous permettre de créer un modèle comprenant l'ensemble des informations nécessaire à Karamba3D pour calculer la structure. Les différentes entrées sont explicités ci-dessous.

« **Pt** » : c'est l'ensemble des points de références du modèle, c'est-à-dire les extrémités de nos lignes définies précédemment.

« **Elem** » : ce sont nos éléments poutres, qui sont définis par les lignes simplifiées de nos grumes.

« **Support** » : ce sont les supports que nous stipulons. Nous définissons manuellement quels sont les points que nous assimilons à des supports et quelles sont les directions bloquées/libérées de ces derniers. Dans notre cas, nous imposons un blocage en translation dans les 3

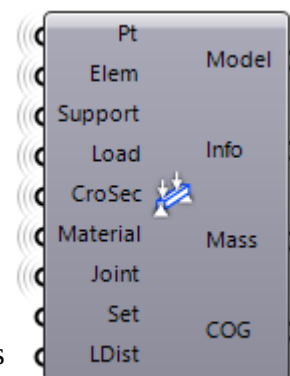


Figure 71 : Boîte (1)

directions de l'espace et un blocage rotationnel de la direction transversale de nos grumes.

« **Load** » : c'est le cas de charge que nous appliquons à notre structure. Nous pouvons définir des charges ponctuelles, linéaires ou encore surfaciques. Dans notre étude, nous imposons une charge linéaire de 100 kg/m à chacune de nos grumes.

« **CroSec** » : c'est la définition des sections de nos poutres. Il est à noter que Karamba3D est davantage ciblé pour le calcul de structures en acier, ce qui implique que la bibliothèque des sections en bois disponible dans Karamba3D est plutôt limitée. De plus, nous travaillons ici dans un domaine particulier des constructions en bois puisque nous utilisons des troncs bruts comme poutres, qui ne sont bien évidemment pas standardisées et donc non-cataloguables dans un tel logiciel de calcul. Nous devons donc faire un compromis et considérer une section circulaire pleine cataloguée dans les structures en acier, pour laquelle le rayon correspond au rayon moyen des grumes. Ensuite, nous informons simplement à Karamba3D que le matériau de cette section n'est pas en acier mais bien en bois.

« **Material** » : cette catégorie est liée à la précédente puisqu'elle permet de définir quel matériau est utilisé pour les poutres de la structure. Nous assimilons ici nos grumes à une essence de bois C30.

« **Joint** » : ce dernier input permet de définir quel est le type de jonction entre les différents éléments de notre modèle, c'est-à-dire entre les lignes simplifiées associées à nos grumes et les links associés aux assemblages entre ces grumes. En effet, ce joint va expliciter à Karamba3D comment il est censé effectuer la transmission des efforts d'une grume à l'autre dans un assemblage. C'est un point très important puisqu'il exprime le comportement des assemblages lorsque la structure est chargée. Nous détaillerons plus loin le schéma statique de ce joint qui a été choisi afin de se rapprocher le plus possible de la réalité du contact entre deux grumes.

Notons ici que les inputs « **CroSec** » et « **Material** » doivent obligatoirement être notifiés à Karamba3D pour que celui-ci puisse effectuer l'analyse calculatoire. Cependant, nous n'avons pas besoin de ces éléments puisque, dans notre cas, nous ne cherchons qu'à obtenir la résultante des efforts $\vec{R}$ en chaque assemblage, qui est indépendante à ces deux inputs. Leur définition est donc arbitraire.

Tous ces éléments étant spécifiés, la boîte nous renvoie un modèle lisible par l'ensemble des fonctionnalités de Karamba3D qui seront détaillés par la suite. Ce modèle est fourni à la sortie « **Model** ».

6.2.2. Analyse calculatoire

La boîte (2) est le logiciel de calcul. Elle prend en entrée notre modèle Karamba3D défini juste avant, puis analyse et calcule notre structure en fonction des informations que nous avons définies. En sortie, la boîte nous fournit le modèle calculé qui contient une grande richesse d'informations relatives à la direction et à l'intensité des efforts, aux réactions d'appuis, à la déformée de la structure, aux contraintes dans le matériau, etc.

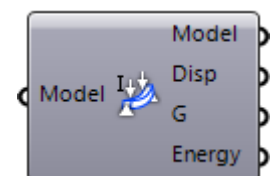


Figure 72 : Boîte (2)

Ces informations sont visuellement exploitables via les boîtes (3) et (4).

La boîte (3) va nous permettre de visualiser, sous l'interface de Rhinoceros, les informations relatives aux éléments qui définissent notre modèle, c'est-à-dire les supports, les joints, les axes locaux ($\vec{x}$, $\vec{y}$, $\vec{z}$) de chacun de nos éléments, les réactions d'appuis, etc.

Cette boîte permet une vérification visuelle pour l'utilisateur dans le sens où chacune des particularités qu'il a spécifiée dans son modèle (par exemple les directions bloquées d'un support) est clairement observée graphiquement.

En guise d'exemple, le visuel pour les appuis et les charges appliquées est illustré ci-dessous [Figure 75].

La boîte (4), en revanche, permet d'afficher l'ensemble des efforts internes de la structure. C'est-à-dire les efforts normaux, les efforts tranchants et les moments fléchissants.

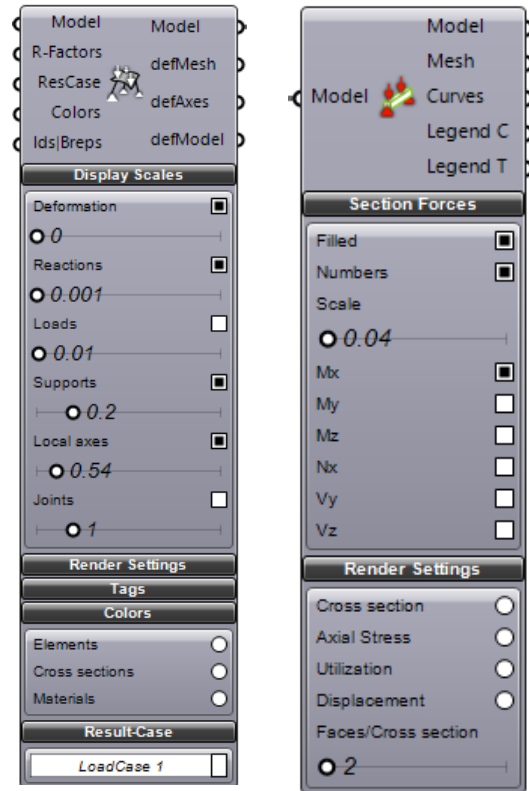


Figure 74 : Boîte (3) Figure 73 : Boîte (4)

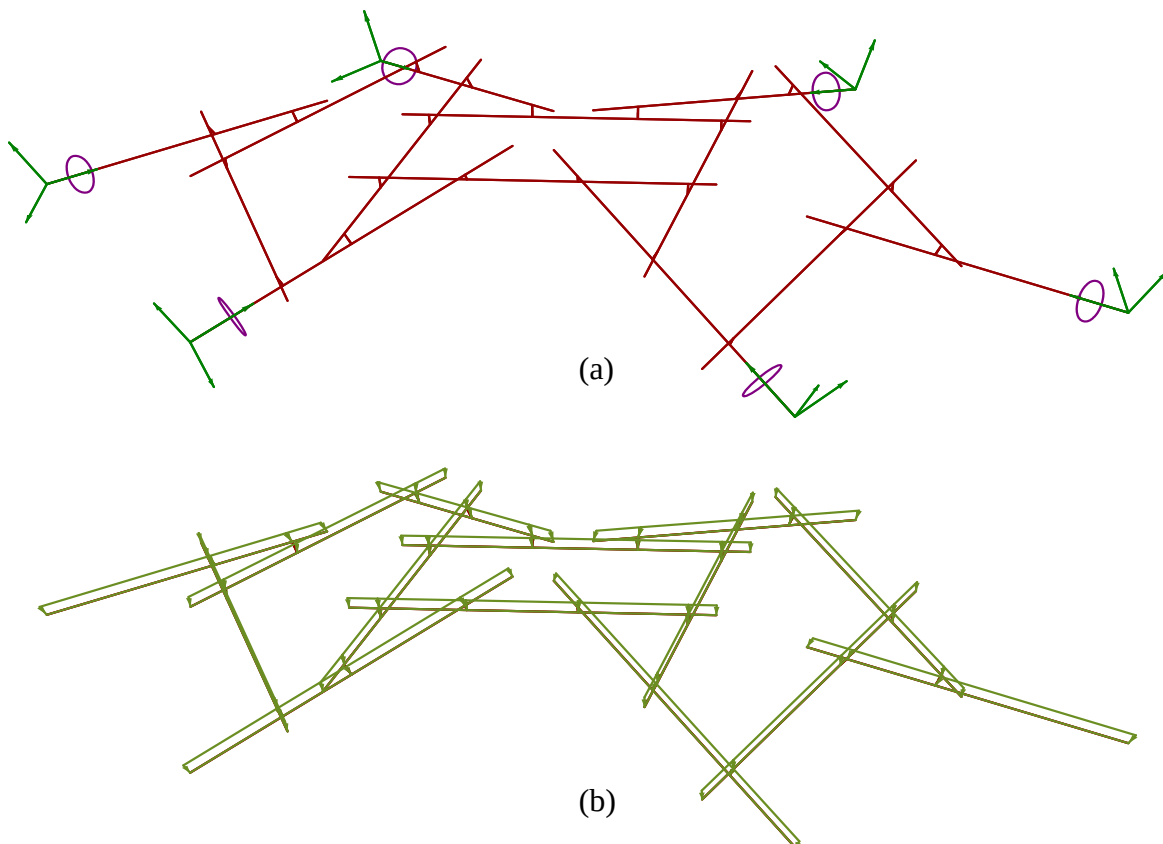


Figure 75 : Visualisation sous Rhino : (a) les appuis définis, (b) le chargement de la structure.

Ces efforts internes sont exprimés selon les axes locaux $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z})$ des éléments. Par définition dans Karamba3D, c'est l'axe $\vec{x}$ qui est orienté selon l'axe des éléments ; les axes $\vec{y}$ et $\vec{z}$ s'orientent à cet axe $\vec{x}$ de manière à former un repère local [Figure 76].

Nous pouvons dès lors comprendre que nous avons un effort normal $N_{\vec{x}}$, des efforts tranchants $V_{\vec{y}}$ et $V_{\vec{z}}$, et des moments fléchissants $M_{\vec{y}}$ et $M_{\vec{z}}$. Ces efforts sont illustrés ci-dessous [Figure 77].

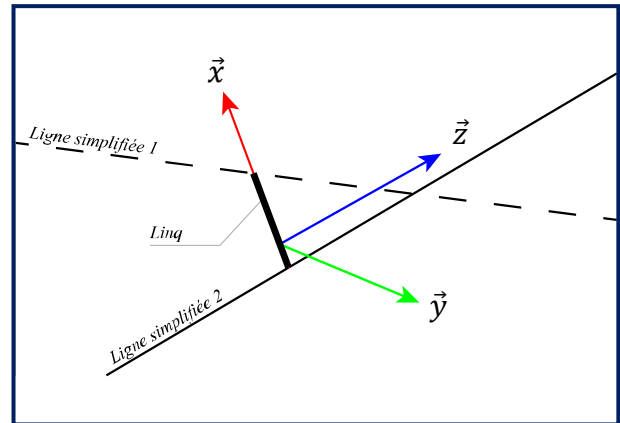
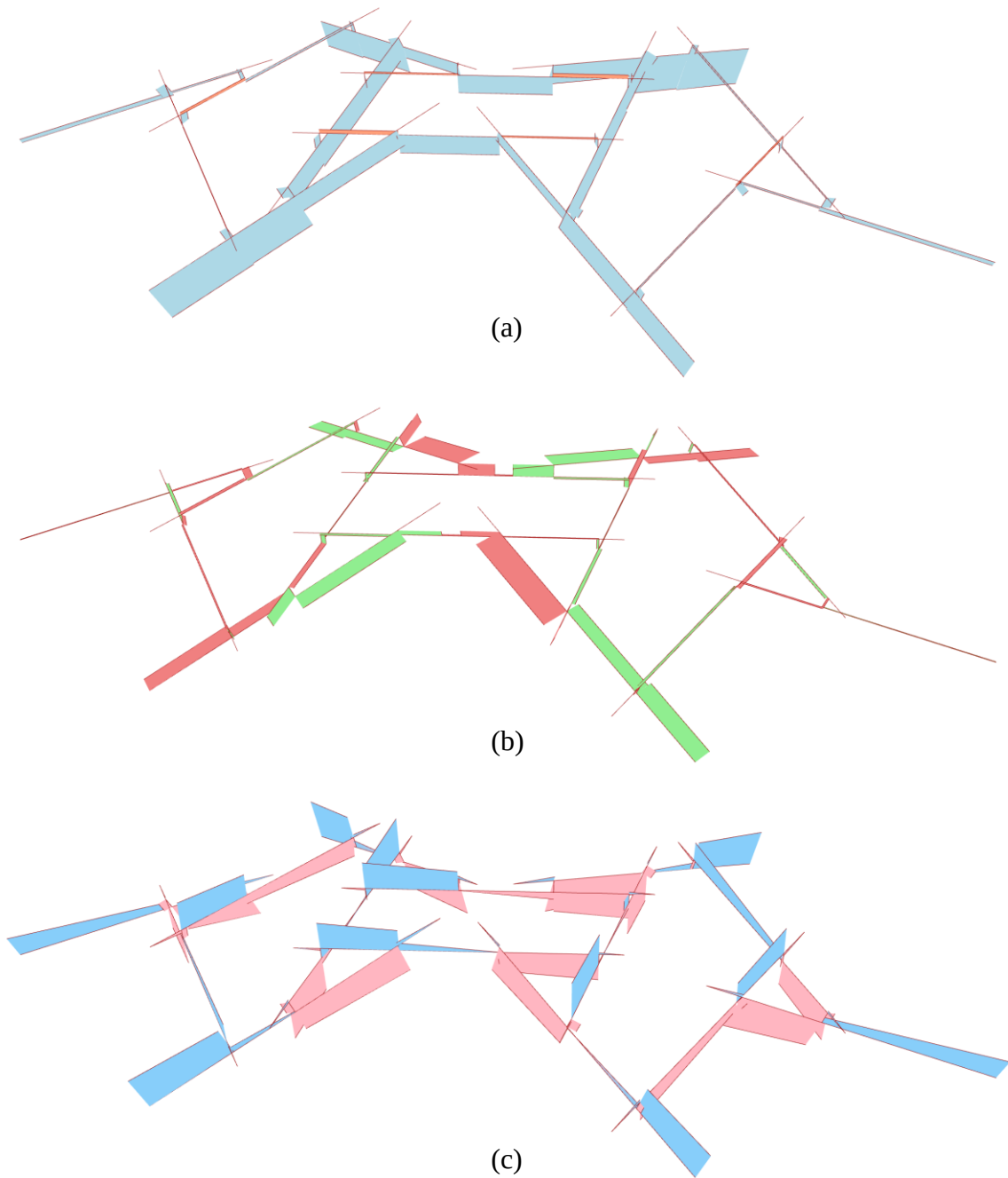


Figure 76 : Axes locaux d'un link.



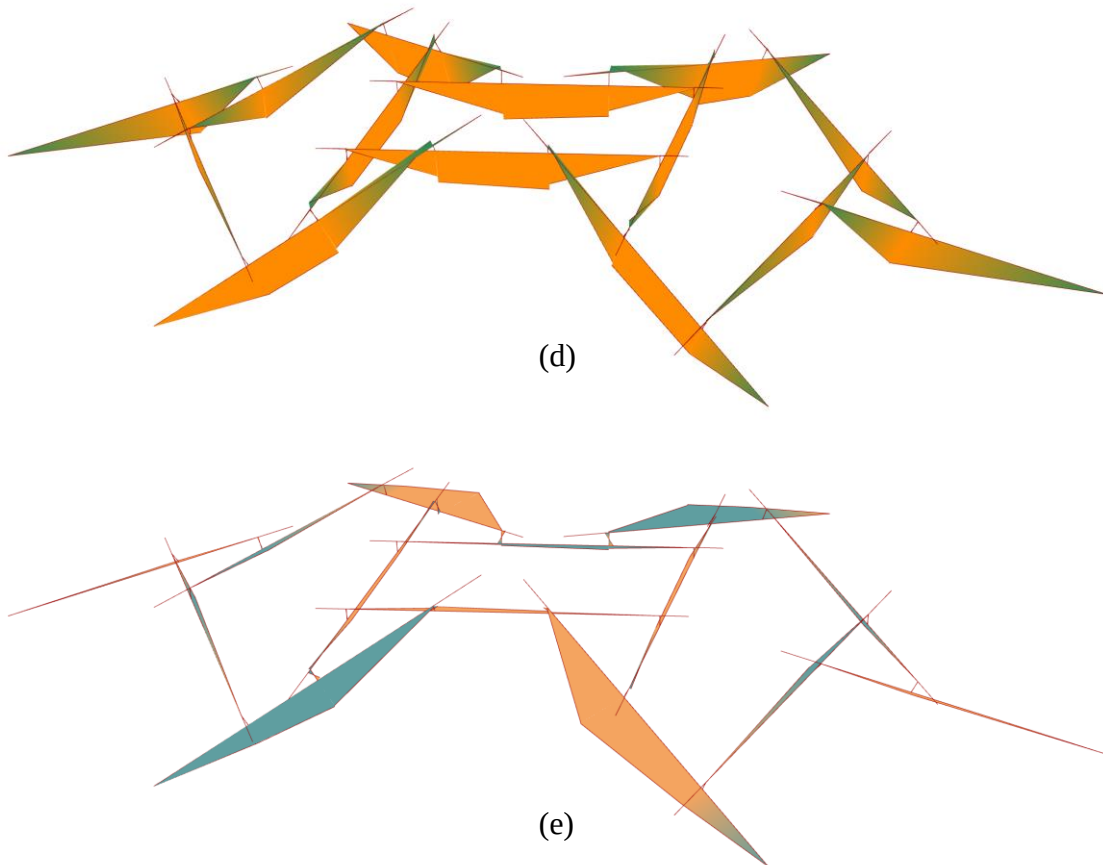


Figure 77 : Efforts internes de la structure étudiée : (a) N_x , (b) V_y , (c) V_z , (d) M_y , (e) M_z .

6.2.3. Récupération des efforts

Jusqu'à présent, nous avons vu comment spécifiés les ressources nécessaires à Karamba3D et comment visualiser les efforts internes de la structure. Nous souhaitons maintenant connaître l'intensité de ces efforts. Les boîtes (5) et (6) permettent d'effectuer cette tâche. La première boîte permet de désassembler le modèle calculé, ce qui va nous permettre de récupérer les vecteurs d'orientation des efforts pour chaque élément du modèle. Ensuite, la deuxième boîte va nous permettre de récupérer l'intensité de ces vecteurs. Ceci constitue toutes les informations nécessaires à la détermination de la résultante $\vec{R}$ en chaque assemblage.

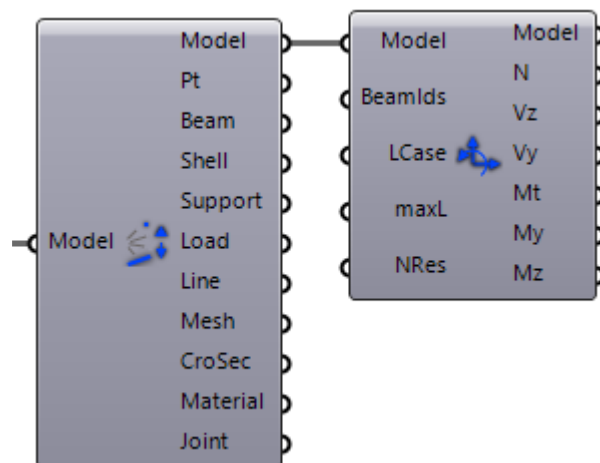


Figure 78 : Boîtes (5) et (6)

6.2.4. Définition du joint des assemblages

Ce dernier point a pour but d'expliquer la relation que nous spécifions à Karamba3D pour un assemblage entre deux grumes. En effet, les lignes simplifiées associées aux grumes sont reliées entre elles via les links et, nous nous devons d'exprimer correctement au logiciel, d'un point de vue physique, le joint qui connecte ces lignes aux links. Le schéma statique de ces joints est explicité ci-dessous [Figure 79].

La complexité de cette définition de joint réside dans la capacité à exprimer les mouvements réels permis au sein d'un assemblage de la structure sous forme d'un schéma statique cohérent (par rapport à la réalité) et compréhensible pour un logiciel de calcul comme Karamba3D.

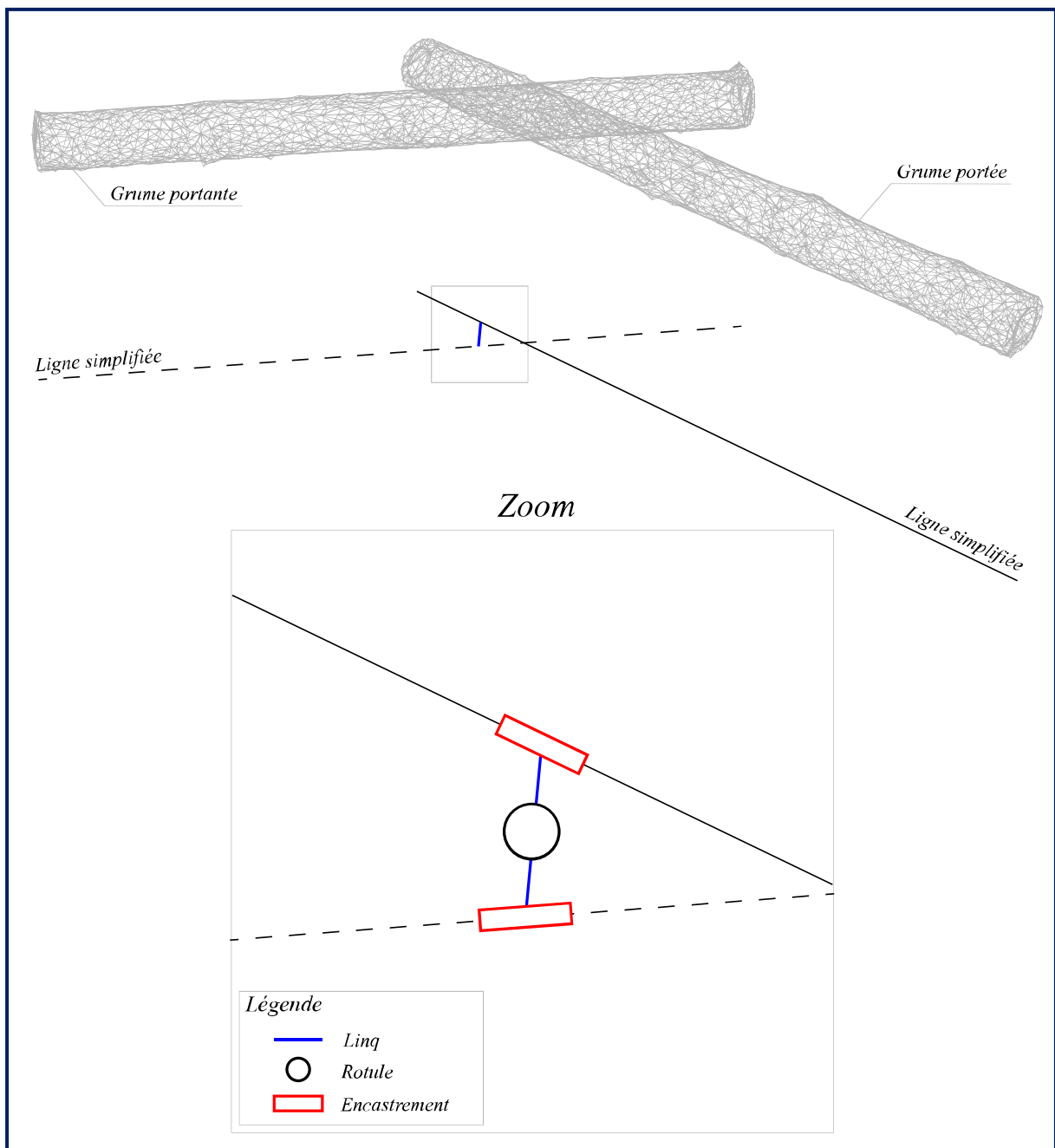


Figure 79 : Schéma du joint spécifié à Karamba3D.

Le mouvement d'une grume par rapport à l'autre au sein d'un assemblage est composé de rotations. Ces rotations sont définies comme étant permises autour des axes locaux $\vec{y}$ et $\vec{z}$ du link, la rotation autour de $\vec{x}$ est bloquée. Nous modélisons ceci par l'ajout d'une rotule au centre de ce link. Les deux extrémités des deux parties du link de part et d'autre de cette rotule sont, elles, spécifiées comme encastrees aux lignes simplifiées des grumes [Figure 79].

Cette définition est supposée cohérente puisqu'elle illustre bien le fait que deux grumes puissent tourner l'une par rapport à l'autre au sein d'un assemblage. Elle a été définie comme étant la meilleure option possible. En effet, il est à noter que la définition de ce joint est passée par plusieurs étapes de réflexion.

Une autre option avait été pensée en considérant que les deux extrémités du link étaient rotulés aux lignes simplifiées des grumes [Figure 80]. Cependant, ce schéma statique de l'assemblage s'est vu être invalide. Pour s'en rendre compte, rappelons que la ligne simplifiée d'une grume représente, à quelques détails près, la fibre moyenne de celle-ci ; c'est-à-dire la ligne au cœur du tronc. Ainsi, le positionnement d'une rotule à cet endroit ne fait pas sens puisque nous sommes dans la matière du tronc [Figure 81, (a)].

Par ailleurs, cet aspect est bel et bien respecté dans le schéma statique choisi puisque dans ce cas la rotule de l'assemblage est située au niveau de l'espace de fond de découpe¹² [Figure 81, (b)].

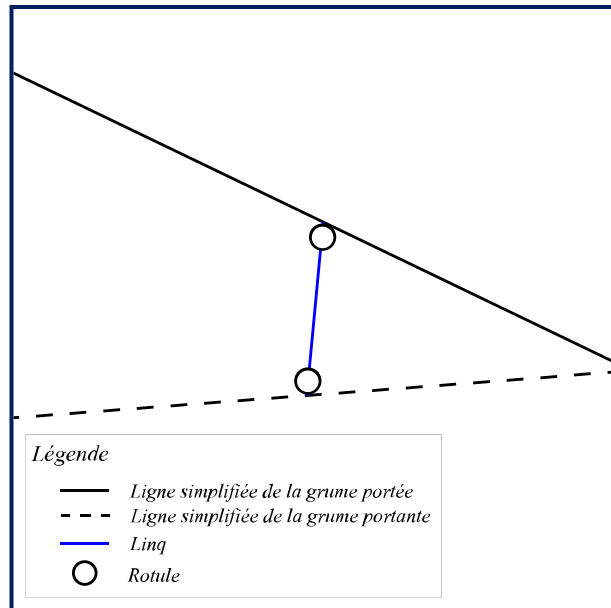


Figure 80 : Autre schéma statique de l'assemblage.

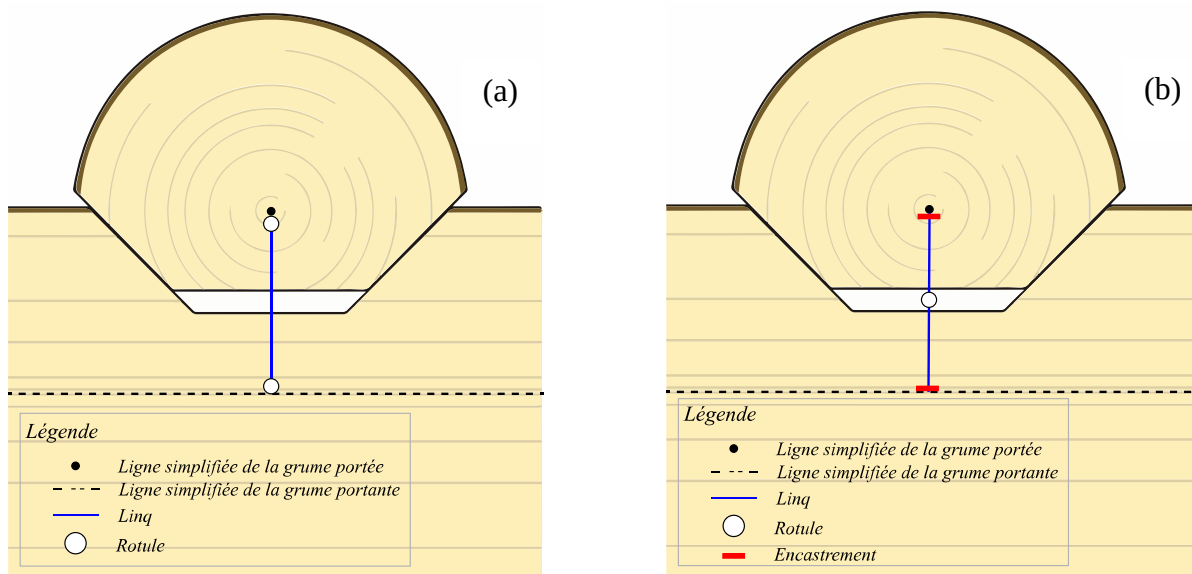


Figure 81 : Schéma statique de l'assemblage avec visualisation des grumes.

¹² Voir point (4.1.1).

6.3. Détermination de la résultante

Dans cette section, nous allons finalement montrer comment calculer la résultante $\vec{R}$ en chaque assemblage. A la suite de ce que nous avons explicité précédemment, il ne nous reste plus qu'à récupérer les efforts internes au niveau des links, qui pour rappel, représentent nos assemblages dans le modèle Karamba3D.

Avec la définition du joint défini ci-dessus, nous comprenons que les moments fléchissants $M_{\vec{y}}$ et $M_{\vec{z}}$ sont nuls au niveau de l'assemblage puisque ce dernier est considéré comme rotulé. Ainsi, pour la résultante des efforts $\vec{R}$, nous ne tenons compte que de l'effort normal $N_{\vec{x}}$ et des efforts tranchants $V_{\vec{y}}$ et $V_{\vec{z}}$.

Par conséquent, nous récupérons l'intensité de ces efforts distincts ainsi que leurs directions en chaque assemblage. Le calcul de la résultante des efforts est défini ci-dessous [Figure 82].

La résultante des efforts $\vec{R}_k$ associée à l'assemblage k est exprimé comme étant :

$$\vec{R}_k = \vec{n}_{N_x}^k \times |N_x|^k + \vec{n}_{V_y}^k \times |V_y|^k + \vec{n}_{V_z}^k \times |V_z|^k$$

Avec

- $\vec{n}^k$: les vecteurs associés aux directions des efforts.
- $|N_x|^k$, $|V_y|^k$ et $|V_z|^k$: les intensités de ces efforts.

Figure 82 : Calcul de la résultante d'efforts au niveau des assemblages.

Nous pouvons dès lors appliquer ce calcul pour chaque assemblage de notre structure étudiée. Le schéma ci-dessous illustre la direction de chacune des résultantes obtenues lorsqu'on applique une charge linéaire de 100 kg/m à nos grumes [Figure 83]. Par ailleurs, l'ensemble des résultats pour ce chargement sera explicité dans la partie suivante.

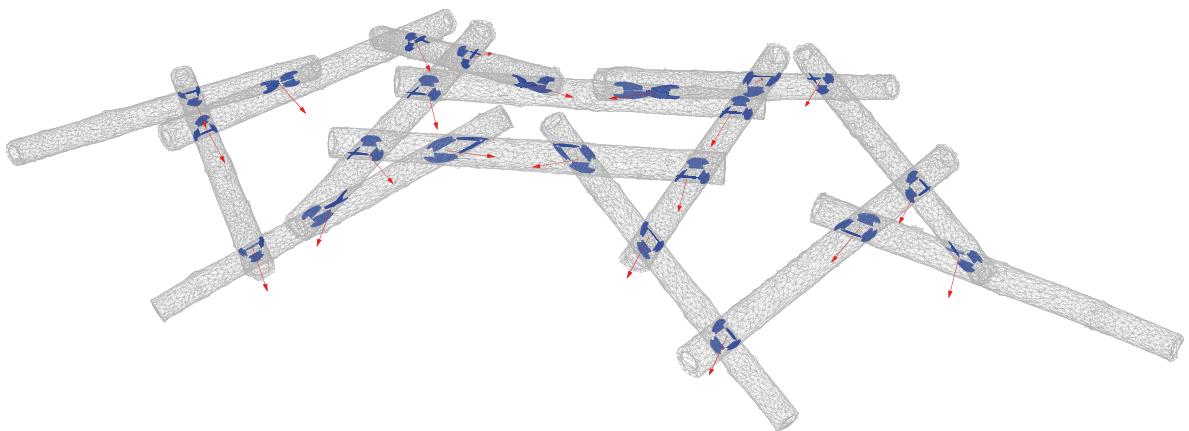


Figure 83 : Orientations des résultantes des efforts aux assemblages de la structure étudiée.

*Application à la structure
étudiée*

7. Application à la structure étudiée

Dans cette partie, nous allons appliquer l'ensemble de l'étude réalisée jusqu'à présent (points 1, 1, 1) à notre structure de référence. Pour ce faire, nous ferons quelques hypothèses complémentaires, nous utiliserons les relations de l'Eurocode 5 [9] pour la combinaison de charges et l'évaluation des contraintes dans les surfaces de contact. Cette combinaison de charges est fournie à Karamba3D dans notre modèle paramétrique. Ainsi, la résultante des forces sera calculée et notre modèle paramétrique nous donnera l'effort qui s'applique en chaque surface de contact des assemblages. Finalement, nous déterminerons les contraintes dans le bois liées à ces efforts appliqués aux surfaces. Un résultat sera explicité pour une situation sans tolérance d'usinage et une autre avec tolérance.

7.1. Hypothèses

Pour ce faire, nous devons poser encore quelques hypothèses. Premièrement les troncs qui sont utilisés dans la structure réciproque appartiennent aux troncs qui, dans l'industrie, sont destinés à fournir, après sciage et rabotage, des poutres prismatiques d'une classe de résistance C24. Comme nous utilisons le tronc brut, nous faisons l'hypothèse que ce dernier présente une résistance plus élevée et nous prendrons une classe de résistance C30.

Les propriétés mécaniques de cette classe, utiles à notre étude, sont fournis ci-dessous [Figure 84].

Classe	$f_{c,0,k}$ [MPa]	$f_{c,90,k}$ [MPa]	γ [kN/m ³]
C30	24	2.7	4.6

Figure 84 : Tableau des propriétés mécaniques de la classe C30.

Une seconde hypothèse semble nécessaire pour la détermination du poids propre de la structure. Le poids propre des grumes étant difficile à évaluer, nous les assimilons à des cylindres dont le diamètre est le diamètre moyen de l'ensemble de nos grumes. Nous pouvons dès lors approximer le poids propre de la structure comme une charge linéaire gravitaire appliquée à toutes nos grumes et dont la valeur est donnée par :

$$Q_{pp} = \pi \frac{D_m^2}{4} \gamma_{C30} \quad [kN/m]$$

Avec :

- D_m : le diamètre réduit en [m]. Celui-ci vaut 0.25 m dans notre cas.
- γ_{C30} : le poids volumique pour une classe C30 en [kN/m³].

Ainsi, nous trouvons : $Q_{pp} = 0.23 kN/m$.

Nous émettons encore l'hypothèse que la classe de service de cette structure en bois est de type 3, c'est-à-dire qui caractérise un ouvrage exposé aux intempéries. Par ailleurs, nous considérons que le temps d'application des charges est à court terme. Ainsi, selon l'Eurocode 5, le coefficient réducteur des résistances caractéristiques du bois est $k_{mod} = 0.7$. Par ailleurs, le coefficient de sécurité à prendre en compte sur ces résistances est $\gamma_m = 1.3$. dans le cas de bois massif.

7.2. Analyse

Nous faisons une vérification aux états limites ultimes (ELU). Selon l'Eurocode 5, la combinaison de charges à l'ELU est définie par :

$$q_{ELU} = 1.35 G_k + 1.5 Q_k \quad [kN/m]$$

Avec :

- G_k : les charges permanentes non-pondérées.
- Q_k : les charges variables non-pondérées.

Dans notre cas, les charges permanentes sont uniquement le poids propre de la structure. Nous avons donc : $G_k = Q_{pp} = 0.23 [kN/m]$. Par ailleurs, nous considérons une charge variable d'exploitation de 100 kg/m, ce qui donne $Q_k = 1kN/m$.

Finalement, la charge linéaire pondérée s'appliquant sur chacune des grumes est :

$$q_{ELU} = 1.35 \times 0.23 + 1.5 \times 1 = \mathbf{1.81} [kN/m]$$

Nous insérons cette valeur dans la définition des charges de Karamba3D. Ainsi, via notre modèle Grasshopper, nous obtenons les forces F qui s'appliquent sur les surfaces de contact. La contrainte appliquée à la surface de contact 'i' est définie par :

$$\sigma_{c,i} = \frac{F_i}{A_i} \quad [MPa]$$

Avec :

- A_i : la superficie de la surface 'i' en $[mm^2]$
- F_i : la force appliquée à la surface 'i' en $[N]$

A présent, pour chaque surface, nous devons vérifier le critère de résistance en compression oblique défini par l'Eurocode 5. En effet, les surfaces étant inclinées à 45° , la transmission des efforts se fera donc de manière inclinée aux fibres. Ce critère s'écrit :

$$\sigma_{c,i} \leq f_{c,45^\circ,d}$$
$$\sigma_{c,i} \leq k_{mod} \frac{f_{c,45^\circ,k}}{\gamma_m}$$

Où :

$$f_{c,45^\circ,k} = \frac{f_{c,90,k} f_{c,0,k}}{f_{c,0,k} \sin^2(45^\circ) + f_{c,90,k} \cos^2(45^\circ)} = \frac{2.7 \times 24}{0.5 \times 24 + 0.5 \times 2.7} = 4.85 [MPa]$$

Et par conséquent :

$$f_{c,45^\circ,d} = 0.7 \times \frac{4.85}{1.3} = 2.61 [MPa]$$

Pour finir, nous calculons le taux d'utilisation (%), c'est-à-dire le pourcentage de sollicitation du bois par rapport à la contrainte maximale que celui-ci peut reprendre. Ce taux, dans notre cas, s'exprime comme étant :

$$\text{Taux d'utilisation} = \frac{\sigma_{c,i}}{f_{c,45^\circ,d}} \times 100 [\%]$$

Tous les résultats que nous obtenons pour chaque surface de contact dans les cas « sans tolérance » et « avec tolérance » sont résumés en tableaux ci-dessous [Figure 87] [Figure 88].

Il est intéressant de remarquer que notre taux d'utilisation n'atteint pas les 40% pour la situation sans tolérance tandis qu'il atteint 60% pour une surface dans le cas avec tolérance. La considération de la tolérance d'usinage implique donc bien comme prévu un cas sécuritaire puisque nous sommes plus rapidement limités au niveau du chargement de la structure.

Les illustrations des surfaces sollicitées pour les deux cas figurent également ci-dessous [Figure 85] [Figure 86].

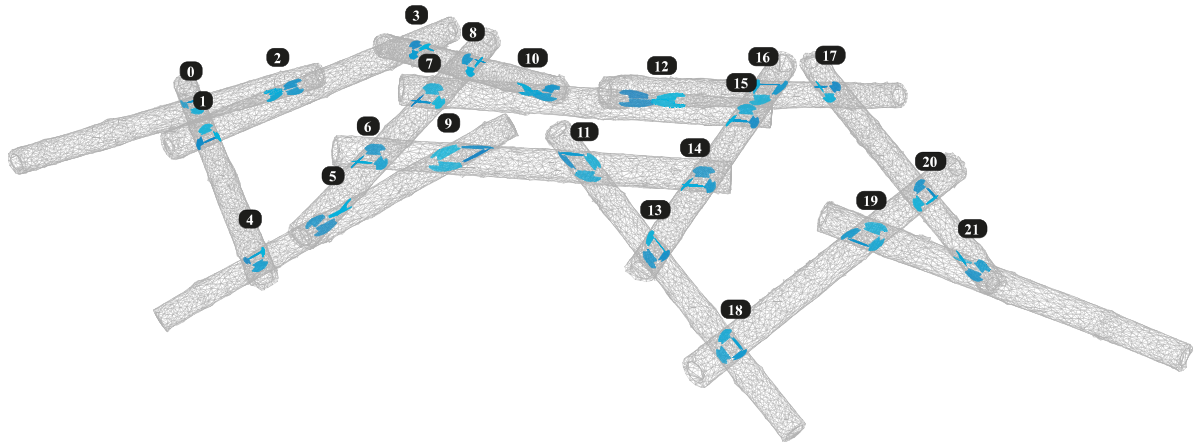


Figure 85 : Surfaces de contact chargées sans tolérance d'usinage.

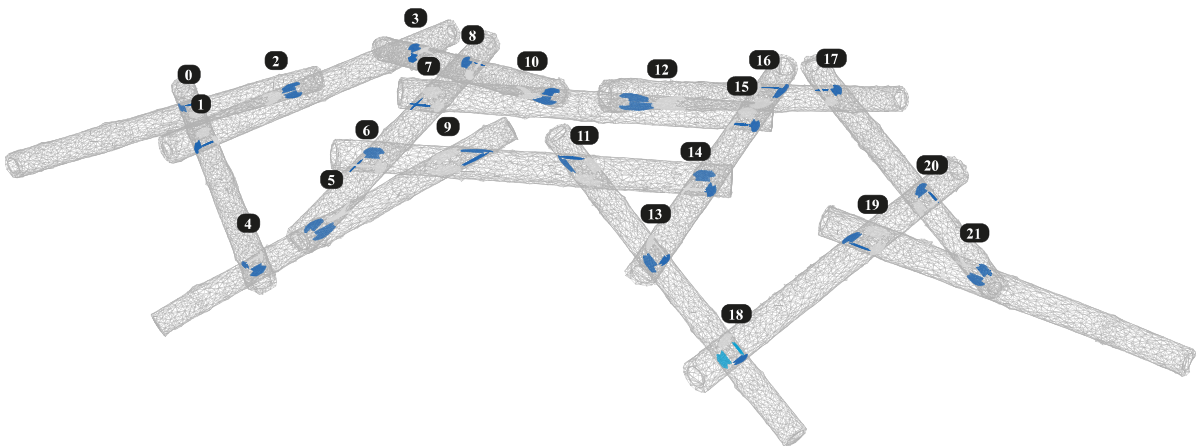


Figure 86 : Surfaces de contact chargées avec tolérance d'usinage.

#Assemblage	Surfaces de contact [mm²]	Répartition de l'effort [%]	Effort R [kN]	σ_c [MPa]	Taux de sollicitation [%]
1	6208	23	8.42	0.312	11.9
	5347	27		0.425	16.3
	4993	19		0.32	12.3
	5104	31		0.511	19.6
2	6425	15	8.23	0.192	7.4
	6467	35		0.445	17.1
	6982	16		0.189	7.2
	7143	34		0.392	15
3	8746	19	8.68	0.189	7.2
	8691	31		0.31	11.9
	7951	22		0.24	9.2
	7735	28		0.314	12
4	6531	34	6.25	0.325	12.5
	6703	16		0.149	5.7
	7704	27		0.219	8.4
	7758	23		0.185	7.1
5	3448	16	5.55	0.258	9.9
	3450	34		0.547	21
	5901	24		0.226	8.6
	6012	26		0.24	9.2
6	9945	19	25.27	0.483	18.5
	9381	31		0.835	32
	8838	17		0.486	18.6
	9851	33		0.847	32.4
7	9727	20	22.08	0.454	17.4
	9410	30		0.704	27
	9215	24		0.575	22
	9134	26		0.629	24.1
8	10359	19	21.53	0.395	15.1
	9505	31		0.702	26.9
	8633	14		0.349	13.4
	9113	36		0.851	32.6
9	8248	21	23.18	0.59	22.6
	8153	29		0.824	31.6
	7711	20		0.601	23
	7534	30		0.923	35.3
10	10970	13	18.94	0.224	8.6
	11029	37		0.636	24.3
	13018	17		0.247	9.5
	13261	33		0.471	18.1
11	9910	20	19.01	0.384	14.7
	10103	30		0.565	21.6
	9638	23		0.454	17.4
	9560	27		0.537	20.6
12	9117	18	18.72	0.37	14.2
	9321	32		0.643	24.6
	10565	22		0.39	14.9
	11134	28		0.471	18
13	14163	13	19.84	0.182	7
	14306	37		0.513	19.7
	15958	15		0.187	7.1
	16007	35		0.434	16.6
14	7495	18	22.74	0.546	20.9
	7168	32		1.015	38.9
	7970	19		0.542	20.8
	7604	31		0.927	35.5
15	9904	20	19.67	0.397	15.2
	9450	30		0.625	23.9
	8686	22		0.498	19.1
	8747	28		0.63	24.1
16	8330	21	24.86	0.627	24
	8430	29		0.855	32.8
	8817	17		0.479	18.4
	8642	33		0.949	36.4
17	12185	21	27.26	0.47	18
	12748	29		0.62	23.7
	11227	18		0.437	16.7
	11369	32		0.767	29.4
18	7358	16	5.8	0.126	4.8
	7283	34		0.271	10.4
	6926	18		0.151	5.8
	6898	32		0.269	10.3
19	7561	29	6.02	0.231	8.8
	7554	21		0.167	6.4
	6932	25		0.217	8.3
	6757	25		0.223	8.5
20	10566	19	8.96	0.161	6.2
	9809	31		0.283	10.8
	10578	22		0.186	7.1
	10457	28		0.24	9.2
21	7739	19	8.51	0.209	8
	7530	31		0.35	13.4
	7658	17		0.189	7.2
	7848	33		0.358	13.7
22	7647	23	8.83	0.266	10.2
	6981	27		0.342	13.1
	7173	19		0.234	9
	7135	31		0.384	14.7

Figure 87 : Résultats pour le cas "sans tolérance".

#Assemblage	Surfaces de contact [mm²]	Répartition de l'effort [%]	Effort R [kN]	σ_c [MPa]	Taux de sollicitation [%]
1	5347	50	8.42	0.787	30.2
	5104	50		0.825	31.6
2	6467	50	8.23	0.636	24.4
	7143	50		0.576	22.1
3	8691	50	8.68	0.499	19.1
	7735	50		0.561	21.5
4	6531	50	6.25	0.478	18.3
	7704	50		0.405	15.5
5	3450	50	5.55	0.805	30.8
	6012	50		0.462	17.7
6	9381	50	25.27	1.347	51.6
	9851	50		1.283	49.1
7	9410	50	22.08	1.173	44.9
	9134	50		1.209	46.3
8	9505	50	21.53	1.133	43.4
	9113	50		1.181	45.2
9	8153	50	23.18	1.421	54.4
	7534	50		1.538	58.9
10	11029	50	18.94	0.859	32.9
	13261	50		0.714	27.4
11	10103	50	19.01	0.941	36
	9560	50		0.994	38.1
12	9321	50	18.72	1.004	38.5
	11134	50		0.841	32.2
13	14306	50	19.84	0.694	26.6
	16007	50		0.62	23.7
14	7168	50	22.74	1.586	60.7
	7604	50		1.495	57.2
15	9450	50	19.67	1.041	39.9
	8747	50		1.124	43.1
16	8430	50	24.86	1.475	56.5
	8642	50		1.438	55.1
17	12748	50	27.26	1.069	40.9
	11369	50		1.199	45.9
18	7283	50	5.8	0.398	15.3
	6898	50		0.421	16.1
19	7561	50	6.02	0.398	15.2
	6932	25		0.217	8.3
	6757	25		0.223	8.5
20	9809	50	8.96	0.457	17.5
	10457	50		0.428	16.4
21	7530	50	8.51	0.565	21.6
	7848	50		0.542	20.8
22	6981	50	8.83	0.633	24.2
	7135	50		0.619	23.7

Figure 88 : Résultats pour le cas "avec tolérance".

Limites de l'étude et objectifs futurs

8. Limites de l'étude et objectifs futurs

Dans cette dernière partie, nous allons revenir brièvement sur certains aspects qui ont été réalisés dans ce mémoire et en discuter l'ensemble des limites ainsi que les applications futures intéressantes à concrétiser.

A l'issue de ce travail, nous sommes capables d'analyser le comportement des assemblages d'une structure réciproque composée de grumes. Cependant, cette analyse s'est portée uniquement sur la structure de référence étudiée dans ce mémoire. Pour celle-ci, il est important de rappeler que nous avons vérifié le cas d'un assemblage dont les paramètres sont fixes ; notamment au niveau des angles des plans inclinés (fixés à 45° dans notre cas) définissant les surfaces de cet assemblage.

La principale limite de ce travail réside donc dans le fait que nous avons procédé à une *vérification* d'une structure pour des paramètres fixes. Dans celle-ci, nous avons uniquement évalué quelles en étaient les contraintes sollicitant le bois au sein des assemblages pour un cas de charge donné. Cependant, un processus davantage orienté dans la *conception* de ce type de structure est indubitablement nécessaire à l'avenir. En effet, si nous considérons que nous modélisons une structure pour laquelle nous avons un cas de charge donné, nous savons, avec la méthode décrite dans le présent travail, comment se répartissent les efforts au sein de ces assemblages et nous obtenons une valeur des contraintes dans le bois. Mais désormais, il serait intéressant de pouvoir faire varier les paramètres géométriques qui définissent l'assemblage – angle des plans inclinés, rentrant, nombres de faces de l'assemblage, etc. – en fonction de ces contraintes calculées. En effet, l'assemblage tel qu'il est défini pour le moment n'est pas forcément le plus optimal pour chaque contact entre deux grumes ; la variation de ces paramètres autoriserait l'obtention de surfaces de contact avec de plus grandes superficies et une meilleure orientation pour la reprise des efforts. Ceci constitue une possibilité d'optimisation des performances en chaque assemblage.

Ainsi, une approche ultérieure pourrait être de former un cycle de modélisation [Figure 89] où les contraintes dans le matériau sont des paramètres itératifs permettant de converger vers une solution idéale en chaque assemblage. Nous aurions, dans ce cas, un modèle paramétrique très autonome où les paramètres ne sont plus constants mais varient d'un assemblage à l'autre.

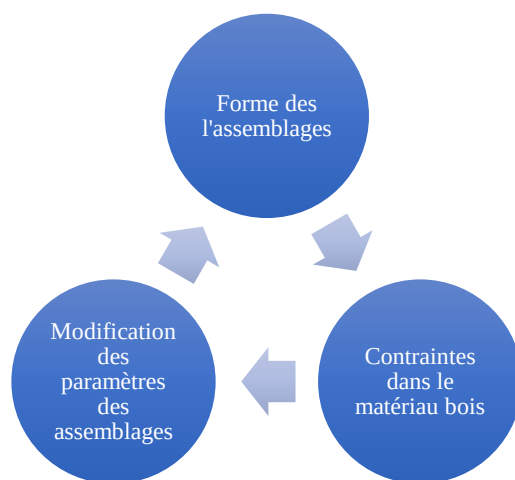


Figure 89 : Cycle d'une modélisation itérative.

Par ailleurs, nous avons explicité les scénarios de chargement qui nécessiteraient la présence de tirefonds afin d'éviter un décollement des assemblages. Une fonctionnalité importante à ajouter est le dimensionnement de ces tirefonds. L'idée est que notre modèle paramétrique fournisse non seulement les assemblages concernés par ce scénario, mais également le tirefond de section minimale à appliquer.

Dans cette étude, nous nous sommes aussi intéressés à la résistance des assemblages entre paire de grumes. Il serait sans doute intéressant de vérifier encore la structure selon les critères de l'Eurocode 5. Notamment au niveau du calcul de la flèche des grumes pour le comportement à l'ELS.

Pour terminer, nous pourrions clôturer cette partie en évoquant que la programmation visuelle via enchaînement de boîtes dans Grasshopper peut vite s'avérer fastidieuse pour des systèmes complexes comme le nôtre. Le problème majeur est le temps de compilation du programme, le modèle actuel étant déjà relativement lent pour un système à 14 grumes. Rappelons qu'à terme, nous souhaitons un modèle paramétrique autonome adaptable à n'importe quelle structure conçue selon le même principe qu'étudier dans ce mémoire. Dès lors, il serait intéressant d'orienter petit à petit cette programmation via le langage *C#* qui, pour rappel, est directement intégrable dans un modèle Grasshopper. En effet, ce langage permettrait d'alléger fortement le code, notamment pour les répétitions de tâches. En outre, une programmation *C#* orientée objet permettrait une meilleure gestion de l'ensemble des paramètres qui définissent les grumes ou les assemblages.

Conclusion

9. Conclusion

En guise de conclusion, nous souhaitons faire un résumé du cheminement du travail réalisé. Pour mémoire, notre principal objectif était de développer une méthode théorique de répartition des efforts au sein des assemblages d'une structure réciproque composée de grumes. Pour ce faire, nous avons dû rendre la géométrie de la structure complexe interprétable pour un logiciel de calcul des structures. L'élaboration d'un modèle paramétrique sous le logiciel Grasshopper nous a permis de réaliser cet objectif.

Rappelons que notre réflexion s'est basée sur une structure de référence déjà construite auparavant et pour laquelle la forme des assemblages entre chaque paire de grumes a également été définie. Ainsi l'ensemble des méthodes et applications présentées dans ce travail ont été explicitées par rapport à cette structure de référence. Cependant, notre approche a été menée de manière à s'adapter à toute autre structure ultérieure, pour autant que celles-ci soient conçues sous le même principe.

En ce sens, nous avons conçu et enrichi un modèle paramétrique tout au long de notre travail. Ce dernier, implémenté sous Grasshopper, nous a permis d'intégrer un module de calcul pour une structure relativement complexe. Il a permis également de faciliter la manipulation des géométries propres à la structure.

Notre premier travail a tout d'abord consisté à réintroduire la définition de ces assemblages et d'en justifier son aspect général. Nous avons vu que les grumes partageant un assemblage sont découpées par usinage robotique de manière à obtenir une connexion par pression contact entre les surfaces de la grume porteuse et de la grume portée.

En second lieu, nous nous sommes intéressés à entrevoir quelles parties des assemblages sont effectivement en contact au moment du chargement de la structure. Nous avons fait remarquer qu'il existe en réalité des surfaces de contact réduites par rapport aux surfaces de découpe des grumes. La détermination de ces surfaces de contact a été obtenue par manipulations géométriques au sein de notre modèle paramétrique.

Par ailleurs, nous avons vu que l'ensemble de toutes les surfaces de contact au sein d'un même assemblage n'étaient pas forcément sollicitées lors du chargement de la structure. Nous avons posé plusieurs hypothèses pertinentes pour tenter de décrire, de la manière la plus cohérente, les différents scénarios de chargement de ces surfaces en fonction de l'orientation de la résultante des efforts appliquée à l'assemblage. Pour rappel, notons que la méthode théorique développée a permis de tenir compte de la sécurité pour l'évaluation des contraintes maximales pouvant être reprises par le matériau bois, sans pour autant être trop sécuritaire.

Ensuite, nous avons démontré comment justifier les divers paramètres en entrée pour l'analyse numérique structurelle. Le point le plus important de cette étape résidait dans la bonne définition du schéma statique de l'assemblage. Par la suite, nous avons pu comprendre les efforts qui s'appliquent au niveau de chacun de ces assemblages et en déterminer cette résultante des efforts.

Finalement, nous avons intégré toutes ces fonctionnalités présentées et étudiées à notre structure de référence. En effet, en appliquant un cas de charges, nous avons pu dégager un résultat final portant sur la détermination des résultantes d'efforts, le nombre de surfaces de contact

sollicitées au sein de chaque assemblage par application de la méthode explicitée, et pour terminer, la détermination du taux d'utilisation du bois.

Pour mettre fin à cet écrit, un schéma résumant l'ensemble des étapes qui ont été réalisées avant et pendant cette étude ainsi que ce qui est attendu à l'avenir, est illustré ci-dessous [Figure 90].

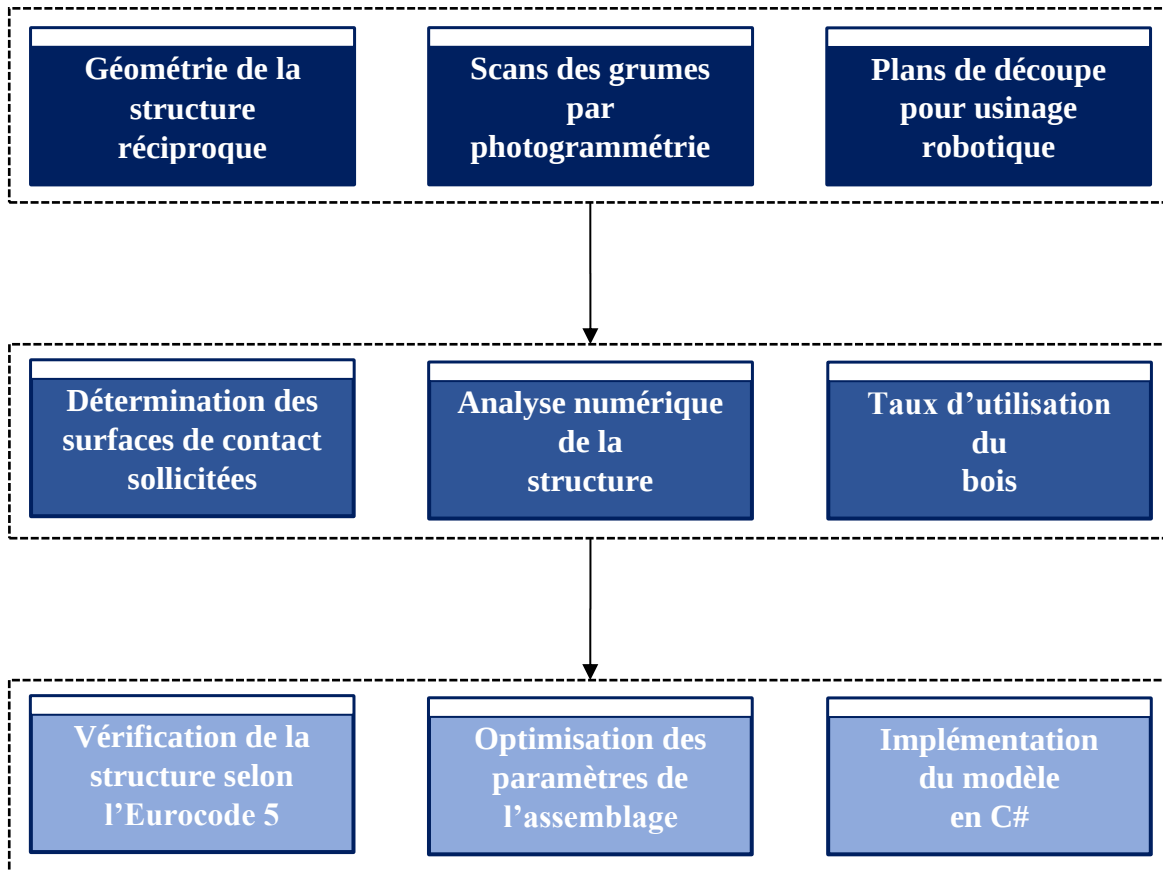


Figure 90 : Structure des objectifs : (a) Avant la présente étude, (b) La présente étude, (c) Exploration future.

Bibliographie

10. Bibliographie

- [1] J. Goosse, «Validation expérimentale d'assemblages de structures réciproques composées de troncs d'arbres,» Louvain-La-Neuve, 2020.
- [2] J. Gustafsson, «Connections in Timber Reciprocal Frames,» Gothenburg, 2016.
- [3] O. P. Larsen, «Reciprocal Frame Architecture,» Oxford, 2008.
- [4] J. Monedero, «Parametric design : a review and some experiences,» Barcelone, 2000.
- [5] R. Hudson, «Strategies for parametric design in architecture,» Bath, 2010.
- [6] N. Al-bqour, «Parametric Thinking for Designing structures in Contemporary Architecture,» Alexandrie, 2020.
- [7] T. Kohlhammer, A. A. Apolinarska, F. Gramazio et M. Kohler, «Design and structural analysis of complex timber structures with glued T-joint connections for robotic assembly,» Zurich, 2017.
- [8] A. A. Apolinarska, «Complex Timber Structures from Simple Elements,» Zurich, 2018.
- [9] EN 1995-1-1 : Eurocode 5 - Conception et calcul des structures en bois - Partie 1-1 : Généralités - Règles communes et règles pour les bâtiments..
- [10] P. Latteur, «LGCIV2043 : Structures en bois,» Université Catholique de Louvain, Louvain-La-Neuve, Janvier 2020.
- [11] U. Thönnissen, «A Form-Finding Instrument for Reciprocal Structures,» Zurich, 2014.
- [12] J. Chilton, «Development of Timber Reciprocal Frame Structures,» Nottingham, 2009.
- [13] «Illustration : Metropol Parasol,» [En ligne]. Available: <https://visiter-seville.fr/metropol-parasol/>. [Accès le 15 Mai 2021].
- [14] «Illustration : Passerelle à Morsø,» [En ligne]. Available: <https://www.core77.com/posts/65043/Leonardo-da-Vincis-Ingenious-Design-for-a-Self-Supporting-Bridge>. [Accès le 12 Mai 2021].
- [15] «Illustration : Tipi,» [En ligne]. Available: <https://www.globaltac.es/tipis/en/our-structures/tepees/parts-and-materials/>. [Accès le 12 Mai 2021].
- [16] «Illustration : Dôme architectural,» [En ligne]. Available: <http://vcg.isti.cnr.it/activities/grid-shell/#contacts>. [Accès le 12 Mai 2021].

Annexes

11. Annexes

11.1. Nombre de surfaces de contact chargées

Aucune surface chargée		1 surface chargée		2 surfaces chargées		3 surfaces chargées		4 surfaces chargées	
α	β	α	β	α	β	α	β	α	β
60°	0°	0°	0°	0°	30°	180°	0°	240°	0°
60°	30°	0°	180°	0°	60°	180°	180°	240°	30°
60°	60°	30°	0°	0°	90°	210°	0°	240°	60°
60°	90°	30°	30°	0°	120°	210°	30°	240°	90°
60°	120°	30°	90°	0°	150°	210°	90°	240°	120°
60°	150°	30°	120°	0°	210°	210°	120°	240°	150°
60°	180°	30°	150°	0°	240°	210°	150°	240°	180°
60°	210°	30°	180°	0°	270°	210°	180°	240°	210°
60°	240°	30°	210°	0°	300°	210°	210°	240°	240°
60°	270°	30°	270°	0°	330°	210°	270°	240°	270°
60°	300°	30°	300°	30°	60°	210°	300°	240°	300°
60°	330°	30°	330°	30°	240°	210°	330°	240°	330°
90°	0°	150°	0°	150°	60°	330°	0°	270°	0°
90°	30°	150°	30°	150°	240°	330°	30°	270°	30°
90°	60°	150°	90°	180°	30°	330°	90°	270°	60°
90°	90°	150°	120°	180°	60°	330°	120°	270°	90°
90°	120°	150°	150°	180°	90°	330°	150°	270°	120°
90°	150°	150°	180°	180°	120°	330°	180°	270°	150°
90°	180°	150°	210°	180°	150°	330°	210°	270°	180°
90°	210°	150°	270°	180°	210°	330°	270°	270°	210°
90°	240°	150°	300°	180°	240°	330°	300°	270°	240°
90°	270°	150°	330°	180°	270°	330°	330°	270°	270°
90°	300°			180°	300°			270°	300°
90°	330°			180°	330°			270°	330°
120°	0°			210°	60°			300°	0°
120°	30°			210°	240°			300°	30°
120°	60°			330°	60°			300°	60°
120°	90°			330°	240°			300°	90°
120°	120°							300°	120°
120°	150°							300°	150°
120°	180°							300°	180°
120°	210°							300°	210°
120°	240°							300°	240°
120°	270°							300°	270°
120°	300°							300°	300°
120°	330°							300°	330°

Figure 91 : Tableaux donnant le nombre de surfaces de contact chargées en fonction des angles α et β spécifiant l'orientation de la résultante d'efforts.

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
École polytechnique de Louvain

Rue Archimède, 1 bte L6.11.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/epl