

## Annexe D

# Calcul des conditions limites

Cette annexe a pour objectif de présenter les différentes conditions limites que l'on a pu rencontrer dans le cadre de ce travail de fin d'études. Elles sont calculées à l'aide des caractéristiques et les développements sont présentés pour le cas unidimensionnel. Ces conditions limites sont celles implémentées dans le code de calcul en deux dimensions. C'est pourquoi le cas bidimensionnel sera présenté en généralisant les expressions unidimensionnelles obtenues.

Commençons par présenter les équations de compatibilité pour le cas unidimensionnel. Ces équations sont en fait dérivées des équations de conservation et sont valables le long des deux caractéristiques  $C^+$  et  $C^-$  si on néglige les termes sources.

$$\left. \begin{aligned} \frac{dQ}{dt} + (-V \mp c) \frac{dA}{dt} &= 0 \\ \frac{d\Sigma}{dt} + (-V \mp c) \frac{dQ}{dt} &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ sur les caractéristiques } C^\mp \equiv \frac{dx}{dt} = V \mp c \quad (\text{D.0.1})$$

où  $\Sigma = \frac{Q^2}{A} + gI_1$  est appelé *flux de quantité de mouvement*.

### D.1 Débit imposé à l'amont

Soit un débit imposé  $Q_{in}$  entrant dans la cellule d'amont  $i=1$ .

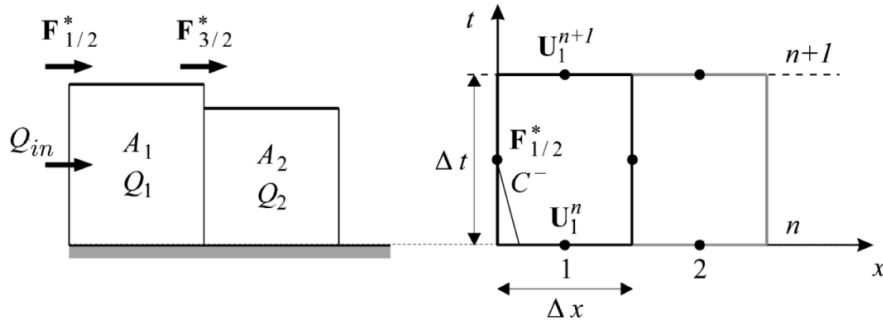


FIGURE D.1 – Condition de débit imposé  $Q_{in}$  à l'interface [32].

Les valeurs du flux moyenné  $\mathbf{F}_{1/2}^*$  à l'interface  $i = 1/2$  sont données par l'expression suivante.

$$\begin{aligned} Q_{1/2}^* &= Q_{in} \\ \Sigma_{1/2}^* - \Sigma_1^n &= (\tilde{V} + \tilde{c})(Q_{1/2}^* - Q_1^n) \end{aligned} \quad (\text{D.1.1})$$

Ces expressions sont calculées grâce à la condition d'amont pour le débit et grâce à la caractéristique  $C^-$  de l'équation (D.0.1)b) pour le flux de quantité de mouvement.

Les valeurs moyennes  $\tilde{c}$  et  $\tilde{V}$  sont remplacées par les seules valeurs disponibles, celles de la cellule 1,

donc  $\tilde{V} = V_1^n$  et  $\tilde{c} = c_1^n$ .

Pour le modèle bidimensionnel utilisé dans le code de calcul, le flux s'exprime comme :

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}})_{1/2}^* = \begin{pmatrix} q_{in,n} \\ \frac{q_{n,L}^2}{h_L} + g \frac{h_L^2}{2} + \sqrt{gh_L} (|Fr_L| + 1) (|q_{in,n}| - q_n) \\ \frac{q_{n,L}q_{t,L}}{h_L} + \frac{q_{t,L}}{h_L} (q_{in,n} - q_n) + \frac{q_{n,L}}{h_L} (q_{in,t} - q_t) - \frac{q_{t,L}}{h_L} \frac{|Fr_L|}{(1+|Fr_L|)} (q_{in,n} - q_n) \end{pmatrix} \quad (\text{D.1.2})$$

où  $q_{in}$  est le débit par unité de largeur.

## D.2 Mur

Pour pouvoir modéliser un mur bloquant le passage de l'eau, on considère d'abord le cas d'un canal fermé à l'aval au niveau de l'interface de la dernière cellule  $i = N$ .

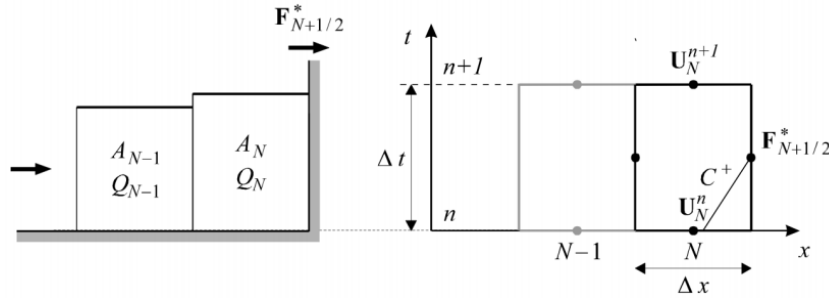


FIGURE D.2 – Condition de mur à l'interface 32.

Le mur impose un débit nul à l'interface  $N + 1/2$ . Le flux moyen est donc calculé grâce à cette condition et avec la caractéristique  $C^+$  de l'équation (D.0.1,b) :

$$\begin{aligned} Q_{N+1/2}^* &= 0 \\ \Sigma_{N+1/2}^* &= (\tilde{V} - \tilde{c})(Q_{N+1/2}^* - Q_N^n) \end{aligned} \quad (\text{D.2.1})$$

Cette fois-ci, le débit  $Q_{N+1/2}$  est nul et les valeurs moyennes  $\tilde{V}$  et  $\tilde{c}$  sont donnés par les valeurs de la cellule  $N$  en supposant que la vitesse s'annule au niveau du mur ( $\tilde{V} = 0$  et  $\tilde{c} = c_N^n$ ).

Pour le modèle bidimensionnel utilisé dans le code de calcul, le flux s'exprime comme :

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}})_{N+1/2}^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{q_{n,L}^2}{h_L} + g \frac{h_L^2}{2} + q_{n,L} \sqrt{gh_L} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{D.2.2})$$

## D.3 Condition transmissive à l'aval

Pour traiter ce type de condition, il faudra distinguer plusieurs cas de profondeur d'eau  $h_{out}$  imposées à l'aval.

### D.3.1 Cas subcritique où $h_{out} < h_c$

Un écoulement subcritique ne peut se terminer avec une hauteur plus petite que  $h_c$ . Dans ce cas, l'axe hydraulique est de type M2 et on impose la hauteur critique  $h_c$  à l'aval.

La matrice de flux  $\mathbf{F}_{N+1/2}^*$  est dérivée de l'équation (D.0.1)<sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} Q_{N+1/2}^* &= Q_N^n + (\tilde{V} - \tilde{c}) (A_{N+1/2} - A_N^n) \\ \Sigma_{N+1/2}^* &= \Sigma_N^n + (\tilde{V} - \tilde{c})^2 (A_{N+1/2} - A_N^n) \end{aligned} \quad (\text{D.3.1})$$

Avec l'aire de la section  $A_{N+1/2} = l h_c$ .  
Pour le cas bidimensionnel, on obtient :

$$\mathbf{F}(\bar{\mathbf{U}})_{N+1/2}^* = \begin{pmatrix} q_{n_L} + \left(\frac{q_{n_L}}{h_L} - \sqrt{gh_L}\right) (h_c - h_L) \\ \frac{q_{n_L}^2}{h_L} + g\frac{h_L^2}{2} + \left(\frac{q_{n_L}}{h_L} - \sqrt{gh_L}\right)^2 (h_c - h_L) \\ \frac{q_{t_L}}{h_L} \left[ q_{n_L} + \left(\frac{q_{n_L}}{h_L} - \sqrt{gh_L}\right) (h_c - h_L) \right] \end{pmatrix} \quad (\text{D.3.2})$$

La hauteur critique est donnée par l'expression suivante :

$$h_c = \left( \sqrt{\frac{1}{g} (q_{n_L}^2 + q_{t_L}^2)} \right)^{2/3} \quad (\text{D.3.3})$$

### D.3.2 Cas subcritique où $h_{out} > h_c$

Si la hauteur imposée à l'aval est supérieure à la hauteur critique  $h_c$ , alors on utilise l'expression (D.3.2) où  $h_c$  est remplacé par  $h_{out}$

### D.3.3 Cas supercritique

Considérons un canal qui ne se termine pas à la cellule  $i = N$ , la dernière cellule prise en compte dans le domaine de calcul. Si on est dans un cas supercritique, l'aval n'influence pas l'écoulement. Une condition transmissive est alors appliquée sur cette frontière telle que l'information est issue uniquement des conditions d'amont. La matrice de flux  $\mathbf{F}_{N+1/2}^*$  est calculée simplement à partir des valeurs de la cellule  $N$  :

$$\begin{aligned} Q_{N+1/2}^* &= Q_N^n \\ \Sigma_{N+1/2}^* &= \Sigma_N^n \end{aligned} \quad (\text{D.3.4})$$

---

1. Comme expliqué à la section correspondante, le calcul de  $\Sigma$  est similaire et n'est pas présenté dans ce rapport.