

École polytechnique de Louvain

Utilisation d'indicateurs morphologiques pour définir des règles de dimensionnement de planchers composés de grumes

Auteur : Alexis PIERSON

Promoteur : Pierre LATTEUR

**Lecteurs : Julien GENO, Justin GOOSSE, João PACHECO DE ALMEIDA,
Marie VANDAMME**

Année académique 2020–2021

Master [120] : ingénieur civil des constructions

**Utilisation d'indicateurs
morphologiques pour définir des règles
de dimensionnement de planchers
composés de grumes**

Pierson Alexis

“When we build, let us think we build forever. Let it not be for present delight nor for present use alone. Let it be such work as our descendants will thank us for, and let us think, as we lay stone, that a time is to come when those stones will be held sacred because our hands have touched them, and that people will say, as they look upon the labor and wrought substance of them, ‘See! This our parents did for us’ ”

John Ruskin

Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier mon promoteur, Monsieur Pierre Latteur, pour m'avoir permis de réaliser ce mémoire. En effet, lors du choix de mon sujet il y a quelques mois, peu de sujets m'inspiraient et malgré le nombre de mémoires qu'il avait déjà, Monsieur Latteur a bien voulu ajouter ce sujet spécialement pour moi. Par ailleurs, je tiens à le remercier pour ses conseils et remarques afin de me faire avancer dans mon travail et de suivre une certaine rigueur.

Je voudrais également remercier tout particulièrement Julien Geno qui m'a suivi tout au long de ce travail. Je tiens à le remercier pour le temps qu'il a pu me consacrer ainsi que pour les conseils qu'il a pu me donner afin de perfectionner mes recherches. Son soutien lors de mes moments de doutes et de remises en question m'a permis de prendre confiance en mon travail. Je souhaite également le remercier pour ses relectures.

J'aimerais aussi remercier Marie Vandamme pour ses conseils, les informations et fichiers qu'elle a pu me transmettre.

Je tiens également à remercier Martin Steinmetz pour ses conseils et son aide dans la réalisation de graphiques en utilisant Python mais également pour ses remarques et conseils pertinents lors de nos discussions au sujet des indicateurs morphologiques.

Par ailleurs, je souhaite déjà remercier João Pacheco De Almeida, Justin Goosse et Marie Vandamme pour l'intérêt qu'ils accordent à ce travail, leur lecture de ce document et leur présence lors de la défense orale.

Merci aussi à Dorsan Dallemagne et Thomas Kaisin, travaillant également sur les structures réciproques, pour l'entraide qui a été présente tout au long de cette année.

J'aimerais aussi remercier mes camarades de travail, en particulier Chloé De Ketele, Loic Lebon et Emmanuel Willemart, pour leur soutien, leurs conseils et les pauses kicker qui permettaient de se détendre. Je souhaite également remercier mes autres amis du master GC, Dehaen Maxime, Dosimont Colin, Moens Christopher, Niclaes Jens, Ryckmans Charles et Sion Martin, entre autres, pour ces années passées à s'entraider et à se tirer constamment vers le haut.

Je voudrais aussi remercier mon amie de toujours, Ysaline Winkel, pour son soutien, ses conseils et ses relectures afin de perfectionner mon travail.

Pour finir, je souhaite remercier ma maman, non seulement pour ses nombreuses relectures et ses conseils dans le cadre de ce travail mais également pour m'avoir soutenu, supporté et écouté durant ces cinq années d'études qui prennent fin.

Table des matières

REMERCIEMENTS	I
TABLE DES MATIERES	III
TABLE DES SYMBOLES	VII
1 INTRODUCTION	1
2 ETAT DE L'ART	3
2.1 L'UTILISATION DE GRUMES DANS LA CONSTRUCTION	3
2.1.1 CONSTRUCTIONS EN FUSTE	3
2.1.2 CONSTRUCTIONS POTEAU-POUTRE	3
2.1.3 PLANCHERS	4
2.1.4 CARPORT SOLAIRE.....	4
2.1.5 DIVERS	5
2.2 LES STRUCTURES RÉCIPROQUES	6
2.2.1 DÉFINITION	6
2.2.2 PLANCHERS RÉCIPROQUES.....	8
2.2.3 TRAVAUX EXISTANTS	11
2.3 LA THÉORIE DES INDICATEURS MORPHOLOGIQUES	12
3 OPTIMISATION DU VOLUME DE BOIS D'UNE POUTRE FLECHIE	15
3.1 OPTIMISATION DU VOLUME DE BOIS D'UNE POUTRE FLÉCHIE EN FONCTION DE LA CONTRAINTE	16
3.1.1 INTERPRÉTATION ET DISCUSSION	18
3.1.1.1 Efficacité matérielle ($\rho V/F$)	18
3.1.1.2 Volume de matière	21
3.1.1.3 Taux de travail.....	23
3.1.2 EN RÉSUMÉ	25
3.2 OPTIMISATION DU VOLUME DE BOIS D'UNE POUTRE FLÉCHIE EN FONCTION DE LA FLÈCHE MAXIMALE	26
3.2.1 INTERPRÉTATION ET DISCUSSION	29
3.2.1.1 Efficacité matérielle ($\rho V/F$)	29
3.2.1.2 Volume de matière	31
3.2.2 EN RÉSUMÉ	33
3.3 CONCLUSION INTERMÉDIAIRE.....	35
4 OPTIMISATION DU VOLUME DE BOIS D'UN PLANCHER COMPOSE DE POUTRES PARALLELES ..	39
4.1 OPTIMISATION DU VOLUME DE BOIS D'UN PLANCHER CLASSIQUE EN FONCTION DE LA CONTRAINTE	39
4.1.1 INTERPRÉTATION ET DISCUSSION	42
4.1.1.1 Efficacité matérielle ($\rho V/F$)	42
4.1.1.2 Volume de matière	45

4.1.1.3	Taux de travail.....	47
4.1.2	EN RÉSUMÉ	48
4.2	OPTIMISATION DU VOLUME DE BOIS D'UN PLANCHER CLASSIQUE EN FONCTION DE LA FLÈCHE MAXIMALE.....	50
4.2.1	INTERPRÉTATION ET DISCUSSION	52
4.2.1.1	Efficacité matérielle ($\rho V/F$)	52
4.2.1.2	Volume de matière	55
4.2.2	EN RÉSUMÉ	56
4.3	CONCLUSION INTERMÉDIAIRE.....	57
5	<u>OPTIMISATION DU VOLUME DE BOIS D'UN PLANCHER CARRE COMPOSE D'UN SEUL MODULE RECIPROQUE ELEMENTAIRE</u>	<u>61</u>
5.1	OPTIMISATION DU VOLUME DE BOIS EN FONCTION DE LA CONTRAINTE DE FLEXION	62
5.1.1	APPROXIMATION : TOUTES LES POUTRES DU MODULE SONT DE TYPE 1	62
5.1.1.1	Expression du moment maximal	62
5.1.1.2	Expression du volume du module réciproque	64
5.1.2	DEUX POUTRES DE TYPE 1 ET DEUX POUTRES DE TYPE 2.....	66
5.1.2.1	Expression du moment maximal	67
5.1.2.2	Indicateur de volume de la structure primaire.....	67
5.1.2.3	Prise en compte des structures secondaires	68
5.1.3	INTERPRÉTATION ET DISCUSSION	72
5.2	OPTIMISATION DU VOLUME DE BOIS EN TENANT COMPTE DE L'EFFORT TRANCHANT.....	73
5.3	OPTIMISATION DU VOLUME DE BOIS EN FONCTION DE LA FLÈCHE MAXIMALE.....	78
5.4	CONCLUSION INTERMÉDIAIRE.....	80
6	<u>DEVELOPPEMENT DE MODELES NUMERIQUES AFIN DE GENERER ET D'OPTIMISER LE VOLUME DE MATIERE D'UN PLANCHER FORME D'UN MODULE RECIPROQUE</u>	<u>81</u>
6.1	OPTIMISATION DU VOLUME DE BOIS D'UN PLANCHER FORMÉ D'UN MODULE RÉCIPROQUE EN FONCTION DE LA CONTRAINTE DE FLEXION	83
6.1.1	CALCUL DE L'INDICATEUR DE VOLUME DE LA STRUCTURE PRIMAIRE SEULE	83
6.1.2	CALCUL DE L'INDICATEUR DE VOLUME DE LA STRUCTURE PRIMAIRE ET DE LA STRUCTURE SECONDAIRE	84
6.2	OPTIMISATION DU VOLUME DE BOIS D'UN PLANCHER FORMÉ D'UN MODULE RÉCIPROQUE EN FONCTION DE LA CONTRAINTE À L'EFFORT TRANCHANT	85
6.2.1	CALCUL DE L'INDICATEUR DE VOLUME DE LA STRUCTURE PRIMAIRE SEULE	85
6.2.2	CALCUL DE L'INDICATEUR DE VOLUME DE LA STRUCTURE PRIMAIRE ET DE LA STRUCTURE SECONDAIRE	86
7	<u>DEVELOPPEMENT D'UN MODELE NUMERIQUE GENERANT ET OPTIMISANT UN PLANCHER RECIPROQUE COMPOSE DE PLUSIEURS MODULES.....</u>	<u>87</u>
7.1	ANALYSE D'UN PLANCHER RÉCIPROQUE COMPOSÉ DE PLUSIEURS MODULES	91
7.2	CONCLUSION INTERMÉDIAIRE.....	93
8	<u>CONCLUSION ET DISCUSSION.....</u>	<u>95</u>
ANNEXE A	<u>POUTRE FLECHIE - RESUME DE L'ANALYSE A L'ETAT LIMITE DE SERVICE.....</u>	<u>101</u>

<u>ANNEXE B</u>	<u>PLANCHER CLASSIQUE – EFFICACITE MATERIELLE (ULS).....</u>	<u>103</u>
<u>ANNEXE C</u>	<u>PLANCHER CLASSIQUE – IMAGE DU VOLUME (ULS).....</u>	<u>107</u>
<u>ANNEXE D</u>	<u>PLANCHER CLASSIQUE - EFFICACITE MATERIELLE (SLS).....</u>	<u>111</u>
<u>ANNEXE E</u>	<u>PLANCHER CLASSIQUE – IMAGE DU VOLUME (SLS).....</u>	<u>119</u>
<u>TABLE DES FIGURES.....</u>		<u>127</u>
<u>BIBLIOGRAPHIE.....</u>		<u>133</u>

Table des symboles

Notations	Unités	Définitions
$\alpha_{i,j} \left(a, \frac{\rho V}{F} \right)$	[/]	Fonction de a et $\frac{\rho V}{F}$ liée à la réaction d'appui d'une poutre de Type i s'appuyant sur une poutre de Type j .
γ_m	[/]	Facteur de sécurité utilisé pour pondérer la résistance caractéristique du bois.
δ	[mm]	Flèche de la structure étudiée.
δ_{max}	[mm]	Flèche maximale de la structure étudiée.
λ	[/]	Coefficient de proportionnalité entre les 2 dimensions d'un plancher classique tel que $L_2 = \lambda L_1$ avec $\lambda \in]0,1]$.
Λ, Λ_i	[/]	Indicateur adimensionnel de poids propre lié à un matériau i .
Λ_σ	[/]	Indicateur adimensionnel de poids propre lié à la contrainte dans l'élément.
Λ_{ULS}	[/]	Indicateur adimensionnel de poids propre, lié à la contrainte dans l'élément, évalué à l'état limite ultime.
Λ_δ	[/]	Indicateur adimensionnel de poids propre lié à la flèche de l'élément.
Λ_{SLS}	[/]	Indicateur adimensionnel de poids propre, lié à la flèche de l'élément, évalué à l'état limite de service.
ρ	[N/m ³]	Poids volumique du matériau considéré.
ρ_{ULS}	[N/m ³]	Poids volumique du matériau considéré, à l'état limite ultime.
ρ_{SLS}	[N/m ³]	Poids volumique du matériau considéré, à l'état limite de service.
$\frac{\rho V}{F}, \left(\frac{\rho V}{F} \right)_i$	[/]	Efficacité matérielle d'un élément lié à un matériau i .
$\frac{\rho_{ULS} V_{ULS}}{F_{ULS}}$	[/]	Efficacité matérielle évaluée à l'état limite ultime.
$\frac{\rho_{SLS} V_{SLS}}{F_{SLS}}$	[/]	Efficacité matérielle évaluée à l'état limite de service.
σ	[MPa]	Contrainte de flexion dans la section la plus sollicitée de la poutre.
$\sigma_{0,réelle}$	[MPa]	Contrainte réelle dans l'élément lorsque celui-ci est dimensionné en négligeant son poids propre.

$\Delta\sigma$	[MPa]	Contrainte supplémentaire liée au poids propre de l'élément.
τ	[MPa]	Contrainte de cisaillement.
ϕ	[m]	Diamètre de la section d'une poutre.
ϕ_1, ϕ_2	[m]	Diamètre de la section d'une poutre de Type 1 ou de Type 2.
a	[/]	Proportion d'engagement d'une poutre avec $a \in [0,1]$
e	[m]	Entraxe entre deux poutres parallèles.
$f_{1,0} \left(a, \frac{\rho V}{F} \right)$	[/]	Fonction de a et $\frac{\rho V}{F}$ liée au moment maximal d'une poutre de Type 1.
$f_{1,g,0} \left(a, \frac{\rho V}{F} \right),$ $f_{1,p,0} \left(a, \frac{\rho V}{F} \right)$	[/]	Fonction de a et $\frac{\rho V}{F}$ liée au moment maximal, situé à gauche ou au droit de la charge ponctuelle, d'une poutre de Type 1.
$f_{m,d}$	[MPa]	Contrainte maximale permise dans la section en flexion à l'état limite ultime. $f_{m,d} = f_{m,k} k_{mod} / \gamma_m$
$f_{m,k}$	[MPa]	Résistance caractéristique (95%) en flexion
$f_{v,d}$	[MPa]	Contrainte de cisaillement permise dans la section à l'état limite ultime. $f_{v,d} = f_{v,k} k_{mod} / \gamma_m$
$f_{v,k}$	[MPa]	Résistance caractéristique (95%) en cisaillement
k_{cr}	[/]	Coefficient utilisé dans le critère de cisaillement pour considérer les fissures dans le bois. $k_{cr} = 0,67$
$g_1 \left(\frac{\rho V}{F} \right)$	[/]	Fonction de $\frac{\rho V}{F}$ liée à la position du moment maximal d'une poutre de Type 1.
k_{mod}	[/]	Coefficient utilisé pour pondérer la résistance du matériau, dépendant de la durée de chargement la moins longue et de la classe de service.
n	[/]	Nombre de poutres composant un plancher classique.
q	[kN/m ²]	Charge surfacique répartie uniformément sur le plancher.
q_1, q_2	[kN/m]	Charge linéique sur les poutres du plancher réciproque en fonction de la zone du plancher.
q_L	[kN/m]	Charge linéique liée à la charge surfacique sur les poutres.

$q_{L,tot}$	$[kN/m]$	Charge linéique totale sur une poutre, en considérant son poids propre et les charges externes. $q_{L,tot} = q_L + q_{DW}$
q_{DW}	$[kN/m]$	Charge linéique d'une poutre liée à son poids propre.
q_{ULS}	$[kN/m^2]$	Charge surfacique répartie uniformément sur le plancher à l'état limite ultime.
x	$[m]$	Position le long de la poutre lors de la recherche du moment maximal.
$x_{g,1,max} \left(a, \frac{\rho V}{F} \right),$ $x_{g,1,max} \left(a, \frac{\rho V}{F} \right)$	$[m]$	Position du moment maximal, à gauche ou à droite de la charge ponctuelle, dans une poutre de Type 1.
$E_{0,m}$	$[MPa]$	Module de Young moyen du matériau considéré.
F	$[kN]$	Force totale liée au cas de charge extérieure.
F_{ULS}	$[kN]$	Force totale liée au cas de charge extérieure à l'état limite ultime.
I	$[m^4]$	Inertie de la section d'une poutre. $I = \pi \phi^4 / 64$ pour les sections circulaires pleines considérées.
L, L_1, L_2	$[m]$	Dimensions principales d'un plancher.
L_b	$[m]$	Longueur d'une poutre.
$M, M_{d,1}, M_{g,1}$	$[kNm]$	Moment de flexion situé à gauche ou à droite de la charge ponctuelle dans une poutre de Type 1
$M_{1,max}$	$[kNm]$	Moment de flexion maximal pour une poutre de Type 1.
$R_{i,j}$	$[kN]$	Réaction d'appui d'une poutre de Type i sur une poutre de Type j.
DW		Dead Weight (Poids Propre).
ULS		Ultimate Limite State (Etat limite ultime).
SLS		Service limite state (Etat limite de service).
V	$[m^3]$	Volume total de la structure.
V_i	$[m^3]$	Volume d'une poutre i.
V_{ULS}	$[m^3]$	Volume évalué à l'état limite ultime.
V_{SLS}	$[m^3]$	Volume évalué à l'état limite de service.

$V_0, V_{0,ULS}, V_{0,SLS}$	$[m^3]$	Volume lorsque le poids propre est négligé.
$V_{\Lambda}, V_{\Lambda,ULS}, V_{\Lambda,SLS}$	$[m^3]$	Volume lorsque le poids propre est pris en compte.
V_{sec}	$[m^3]$	Volume de la structure secondaire d'un plancher réciproque.
V_{prim}	$[m^3]$	Volume de la structure primaire d'un plancher réciproque.
V_{tot}	$[m^3]$	Volume total de la structure.
W	$[/]$	Indicateur adimensionnel de volume
$W_0, W_{0,ULS}, W_{0,SLS}$	$[/]$	Indicateur adimensionnel de volume lorsque le poids propre est négligé.
$W_{\Lambda}, W_{\Lambda,ULS}, W_{\Lambda,SLS}$	$[/]$	Indicateur adimensionnel de volume lorsque le poids propre est considéré.
$W_{B,1} \left(a, \frac{\rho V}{F} \right)$	$[/]$	Fonction de a et $\frac{\rho V}{F}$ liée à l'indicateur de volume d'un plancher réciproque composé uniquement de poutres de Type 1.
W_{ULS}	$[/]$	Indicateur adimensionnel de volume évalué à l'état limite ultime.
W_{SLS}	$[/]$	Indicateur adimensionnel de volume évalué à l'état limite de service.

1 Introduction

Ce travail a pour objectif de s'intéresser aux éléments en grumes en proposant une approche basée sur des nombres adimensionnels, appelés indicateurs morphologiques, offrant un résultat universel. Différentes configurations dans lesquelles une grume peut être utilisée vont être étudiées, à savoir : une simple poutre fléchie, un plancher classique et un plancher réciproque. Toutefois, les termes « grumes », « indicateur morphologique » et « structures réciproques » ne signifient rien pour un grand nombre de personnes. Il est donc nécessaire de détailler leur signification et l'intérêt de ce travail.

Tout d'abord, une grume est un tronc d'arbre encore recouvert de son écorce duquel les branches ont été retirées. De nos jours, le béton et l'acier sont fortement présents dans le monde de la construction et forment le paysage urbain un peu partout dans le monde. Cependant, la pollution générée pour l'obtention et l'utilisation de ces matériaux est très importante. Dans un monde où le changement climatique est une réalité, il est important d'essayer d'apporter des alternatives aux moyens de constructions habituels afin de réduire l'impact de la construction sur la pollution. Une des réponses possibles semble être l'utilisation du bois. En effet, ce matériau a l'intérêt d'être naturel et de générer moins de pollution que les deux précédemment cités. D'autre part, le bois emmagasine du CO_2 . En l'utilisant dans la construction il serait donc possible d'avoir une meilleure gestion du rejet de ce gaz à effet de serre dans le temps.

Par ailleurs, l'aspect esthétique engendré par l'utilisation du bois motive également l'intérêt porté à ce matériau. Bien que la notion de beauté reste subjective, un élément de bois visible apporte souvent en cachet et en chaleur dans une pièce ou dans un bâtiment, comparé à un élément en béton ou en acier.

Cependant, de nos jours, le bois n'est économiquement pas suffisamment concurrent au béton et à l'acier. En effet, bien qu'il s'agisse d'un matériau naturel, il nécessite beaucoup de transformations avant son utilisation, ce qui augmente donc son coût. De plus, les portées atteignables sont vite limitées sans l'utilisation de systèmes de colles ou autres. Toutes ces modifications et processus de fabrication rendent le bois économiquement moins intéressant que le béton et l'acier bien qu'il s'agisse d'un matériau « gratuit » dans la nature. L'idée est donc d'utiliser des troncs ayant subi le moins de transformations possibles pour rendre l'utilisation du bois rentable.

L'intérêt des structures réciproques réside justement dans l'opportunité qu'elles offrent de combler la limite de portée du bois. Une structure réciproque est par définition une structure composée d'au moins trois éléments qui reposent tous sur leur voisin. De plus, tous les éléments sont hiérarchiquement équivalents, c'est à dire que tous les éléments doivent être installés pour que la structure tienne. Il s'agit d'un système porteur pas très répandu mais qui a pourtant ses intérêts. En effet, de telles structures permettent de franchir de grandes portées avec des éléments de faibles dimensions. Il serait alors possible d'imaginer une gestion durable des forêts permettant de construire de tels planchers sans devoir attendre des dizaines d'années avant d'être utilisés.

D'autre part, la géométrie de telles structures permet d'apporter une originalité et un aspect architectural unique en son genre. Toutefois, la conception et l'agencement de telles structures n'est, par conséquent, pas aisée. L'un des objectifs de ce travail est donc de fournir un outil permettant de générer et de calculer facilement de tels planchers.

Enfin, afin de pouvoir rendre le bois et les planchers réciproques concurrentiels à d'autres structures et matériaux il est nécessaire de connaître leur « mode » de fonctionnement idéal. Pour ce faire, ce

mémoire a, entre autres, pour but d'optimiser ces structures en termes de volume de matière et de chercher la configuration optimale. Un travail traitant de ce sujet a été réalisée par Marie Vandamme [22] en utilisant la théorie des indicateurs morphologiques. Cette théorie sera introduite plus tard, mais permet, sur base de nombres adimensionnels, exprimés à partir de paramètres du problème, d'obtenir des résultats universels et de réduire le nombre de paramètres à étudier. Cependant, cette analyse a été réalisée en négligeant le poids propre des éléments étudiés. Le présent travail a donc, entre autres, pour but d'étudier l'impact du poids propre sur les résultats obtenus. De plus, il existe une multitude de bois différents, mais comment choisir celui à utiliser ? C'est une question à laquelle ce travail va répondre.

Ce mémoire va donc se composer de différentes parties :

Premièrement, un portrait global du sujet traité est présenté. Pour ce faire, une vue d'ensemble de l'utilisation de grumes dans la construction est réalisée avant d'aborder les éléments essentiels à la lecture et à la compréhension des développements futurs. Parmi ceux-ci, une explication détaillée des structures réciproques et de la théorie des indicateurs morphologiques est faite.

Deuxièmement, l'analyse d'une poutre simple fléchie est réalisée, à l'état limite ultime (ULS) et à l'état limite de service (SLS). L'analyse est divisée en plusieurs parties. Tout d'abord une analyse adimensionnelle du volume de matière de la poutre est faite. Cette étude fournit un résultat universel permettant de voir l'impact du poids propre de la poutre sur son dimensionnement. Ensuite, une discussion est menée en comparant plusieurs classes de résistance de bois entre elles en termes de volume de matière et de poids nécessaire pour pouvoir reprendre une certaine charge F .

Troisièmement, un plancher classique composé de poutres parallèles est étudié. Les analyses et discussions dans cette partie sont très similaires à celles réalisées pour la poutre simple. Il y a donc dans un premier temps une analyse universelle permettant d'optimiser de tels planchers. Cette étude permet également d'étudier l'impact du poids propre des éléments composant un plancher classique. Dans un second temps, le volume de matière et le poids d'un tel plancher nécessaire pour reprendre un chargement F est discuté, en fonction de la classe de résistance.

Quatrièmement, l'étude d'un plancher réciproque est détaillée. Cette partie a pour but de mettre en évidence les paramètres optimaux permettant d'optimiser le volume de bois d'une structure réciproque. Cette section est également basée sur une analyse utilisant les indicateurs morphologiques.

Cinquièmement, des modèles numériques permettant la création et l'optimisation de planchers réciproques sont présentés.

Sixièmement, un modèle numérique permettant la création et l'optimisation d'un plancher réciproque composé de plusieurs module est présenté. Ce modèle permet alors de créer des planchers réciproques de formes quelconques.

Finalement, une discussion est réalisée afin de résumer les conclusions et de proposer des pistes d'amélioration et de perfectionnement.

2 Etat de l'art

Ce chapitre a pour but, dans un premier temps, de faire découvrir au lecteur l'utilisation de troncs d'arbres dans la construction. Pour ce faire, plusieurs types de constructions et ouvrages sont exposés afin de montrer la diversification et les possibilités que ce matériau peut offrir.

Dans un second temps, le principe de structure réciproque est défini en s'intéressant tout particulièrement aux planchers réciproques. Dans cette partie, le travail réalisé par Marie Vandamme [22] et les conclusions qui ont pu être tirées sont abordées.

Enfin, ce mémoire utilisant abondamment la théorie des indicateurs morphologiques, fortement étudiée par Pierre Latteur, cette dernière est expliquée afin de se familiariser avec les notions qui sont abordées dans les chapitres ultérieurs.

2.1 L'utilisation de grumes dans la construction

Comme cela a déjà pu être évoqué, le présent travail a pour but d'étudier des éléments en grumes dans la construction. Cette section a donc pour objectif de parcourir et d'offrir un panorama de situations et d'ouvrages où les troncs d'arbres peuvent être utilisés comme éléments structuraux d'un ouvrage. Pour rappel, une grume est un tronc d'arbre encore recouvert de son écorce duquel les branches ont été retirées.

2.1.1 Constructions en fuste

Tout un chacun a probablement déjà vu ce type de construction qui consiste à utiliser des troncs d'arbres directement et à les empiler pour créer des murs, tel qu'imaginé à la Figure 1, à gauche [17]. En réalité les troncs d'arbres sont généralement traités ou calibrés préalablement et sont donc appelés rondins mais gardent une allure de grume. Ce type de construction se retrouve surtout dans des pays nordiques comme la Suède, la Finlande, la Norvège, la Russie ou encore le Canada. Les techniques de fabrication et d'emboîtement des rondins sont donc multiples et différent de régions en régions et ont évolué au cours du temps. L'objectif n'étant pas ici de s'intéresser aux connections entre les éléments, les différentes techniques d'assemblage ne sont pas détaillées mais il est intéressant d'observer (Figure 1, à droite [11]) qu'il existe plusieurs manières de connecter deux grumes.



Figure 1 : Construction en grumes empilées [17] [11]

2.1.2 Constructions poteau-poutre

Les grumes peuvent également être utilisées comme poutres et colonnes directement afin de former un système constructif nommé « poteau-poutre ». Ce type de construction offre une alternative aux murs en rondin, présenté au point précédent, en réduisant la quantité de bois utilisé tout en conservant l'aspect chaleureux de ce dernier.



Figure 2 : Construction Poteau-Poutre [18] [19]

2.1.3 Planchers

L'entreprise TTT Products [21], située en Nouvelle Zélande a développé un plancher composé de grumes uniquement, tel que représenté à la Figure 3. Ces dernières sont traitées et manufacturées afin de pouvoir les assembler ensemble avec le même principe que celui des pieux sécants. C'est-à-dire qu'un élément sur deux garde un contour circulaire alors que les éléments adjacents sont ajustés, comme il est possible de le voir sur la photo de gauche de la Figure 3.



Figure 3 : Exemple de plancher en grumes [21]

2.1.4 Carport solaire

A plusieurs endroits dans le monde, des troncs d'arbres ont été utilisés afin de servir de structure à des panneaux photovoltaïques. Cela a en effet été le cas pour le parking d'une entreprise de torréfaction de café aux Etats-Unis, Vermont Artisan Coffee (à gauche sur la Figure 4 [23]), réalisé par WholeTrees, mais également en Belgique, à Pairi Daiza (à droite sur la Figure 4 [6]), réalisé par Prefabois. Non seulement cela permet de créer de l'énergie solaire mais également de conserver le CO_2 stocké dans le bois au lieu de le rejeter dans l'atmosphère.



Figure 4 : Carport - Vermont Artisan Coffee (à gauche) [23] – Pairi Daiza (à droite) [6]

2.1.5 Divers

Pour finir cette section, d'autres réalisations et ouvrages obtenus à partir de troncs d'arbres sont présentés afin de montrer l'utilisation multiple possible des grumes. Parmi celles-ci, l'utilisation de troncs d'arbres pour créer des pergolas. Il est alors possible de couvrir de larges zones tout en gardant un aspect naturel et en se fondant dans l'environnement où la structure est placée.



Figure 5 : Pergolas [24] [25]

L'entreprise WholeTrees Structures, située aux Etats Unis, développe également des treillis dont les membrures sont des troncs d'arbres, tel que représenté sur la Figure 6. L'intérêt d'évoquer cet élément est de montrer qu'il est possible de diversifier le type d'utilisation et de fonction des grumes.



Figure 6 : Treillis formé de grumes [26]

Parmi les structures couvrant de grandes zones, les troncs d'arbres peuvent également être utilisés pour des hangars de stockage, comme c'est le cas pour un hangar à la Môle (Figure 7 [10]) où les poteaux sont en robinier, les fermes en châtaigner et les pannes en pin maritime.



Figure 7 : Hangar de stockage à la Môle [10]

Enfin, peut-être un peu moins beau esthétiquement et plus artisanal que les autres structures et ouvrages qui ont été présentés, les troncs d'arbres peuvent être utilisés pour créer des ponts afin de franchir de grandes portées. Ce type d'utilisation du tronc d'arbre existe depuis toujours d'ailleurs. La Figure 8 montre que, avec des troncs d'arbres de petites dimensions, il est possible de franchir une grande portée. Il s'agit en fait ici du pont auto-porté de Léonard de Vinci. Ce pont est un exemple typique de structure réciproque, qui est expliquée à la section suivante.



Figure 8 : Pont formé à partir de grumes [7]

2.2 Les structures réciproques

2.2.1 Définition

Pour commencer cette section, il est important de définir ce qu'on entend par « structure réciproque », étant donné que celles-ci vont être étudiées dans la suite de ce travail. De plus, cette appellation peut paraître abstraite, il est donc important de comprendre le principe structurel qui se cache derrière. Olga Popovic Larsen fournit [16] la définition suivante:

« The reciprocal frame is a three-dimensional grillage structure mainly used as a roof structure, consisting of mutually supporting sloping beams placed in a closed circuit. The inner end of each beam rests on and is supported by the adjacent beam. At the outer end the beams are supported by an external wall, ring beam or by columns. The mutually supporting radiating beams placed tangentially around a central point of symmetry form an inner polygon. The outer ends of the beams form an outer polygon or a circle. »

Cette définition concerne les structures réciproques tridimensionnelles mais est tout à fait applicable aux structures réciproques bidimensionnelles, tel qu'un plancher. En complément à cette définition, il faut tout de même préciser qu'une structure réciproque est composée au minimum de 3 éléments pour pouvoir fonctionner. De plus, dans le cas d'un plancher, les éléments composants la structure réciproque sont plans et principalement sollicités en flexion.

Un plancher réciproque, tel que ceux représentés à la Figure 9 [8] sont constitués de ce qu'on appelle des « modules ». Ces derniers peuvent avoir des configurations diverses et variées, comme illustré en Figure 10, mais ils sont toujours formés au moyen de plusieurs éléments, au minimum 3. Il est alors possible de créer des planchers composés de plusieurs modules identiques, comme c'est le cas pour les quatre premières images de la Figure 9. Par ailleurs, il est également possible de créer des planchers composés de plusieurs modules différents, tel que représenté sur les deux derniers exemples de la Figure 10. Il y a donc une multitude de combinaisons possibles et variées afin de créer un plancher réciproque.

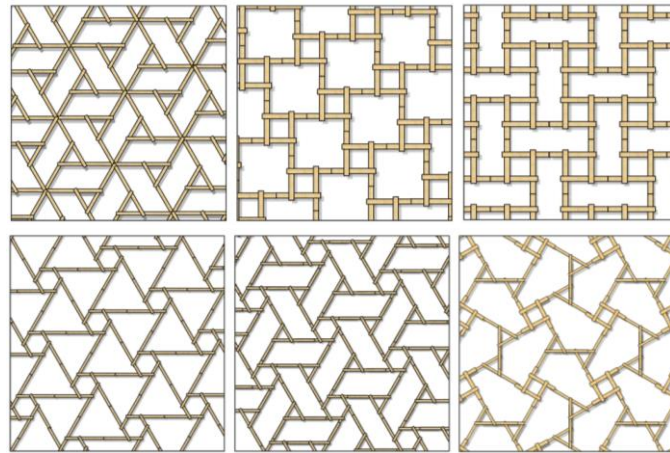


Figure 9 : Exemples de planchers réciproques [8]



Figure 10 : Exemple de configuration de modules réciproques [14]

Dans le cadre de ce travail, uniquement des planchers composés de modules carrés composés de quatre éléments sont considérés, tel que représenté sur la Figure 11, à gauche. Les différents paramètres définissant un tel module sont repris sur la Figure 11, à droite. Parmi ces paramètres, il y a :

- L_b : La longueur d'un élément
- a : La proportion d'engagement d'un élément
- aL_b : La longueur d'engagement d'un élément
- ϕ : Le diamètre des éléments
- L : La portée totale du module

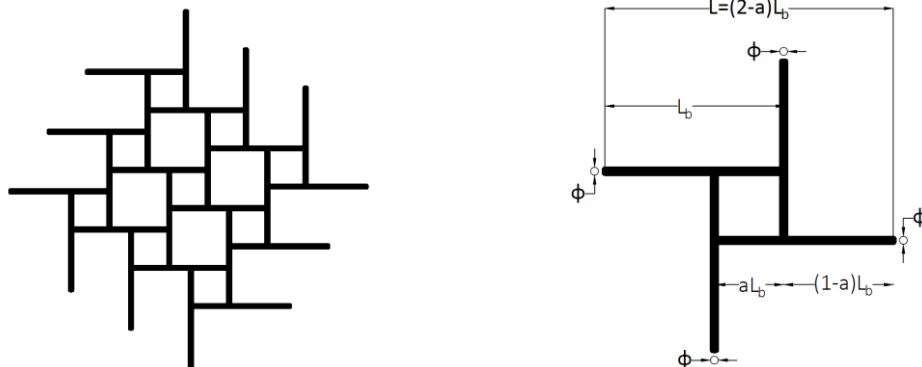


Figure 11 : Plancher réciproque composé de modules carrés (à gauche) – Paramètres d'un module carré (à droite)

Il est donc possible de franchir et couvrir des portées supérieures aux longueurs des éléments. C'est d'ailleurs là que la structure réciproque prend tout son sens. De plus, en choisissant les modules qui composeront le plancher, il est possible d'obtenir un aspect architectural agréable et original rendant le bâtiment unique.

Enfin, un plancher réciproque, tel que celui étudié dans ce document, est composé de deux types de structures : une structure primaire et une structure secondaire. La structure primaire est composée des éléments qui forment le module réciproque (les éléments rouges sur la Figure 12). La structure secondaire est composée de planchers classiques formés de poutres parallèles (les éléments en noir sur la Figure 12). Le module utilisé divise donc le plancher en 5 zones : 4 zones rectangulaires et une zone centrale carrée.

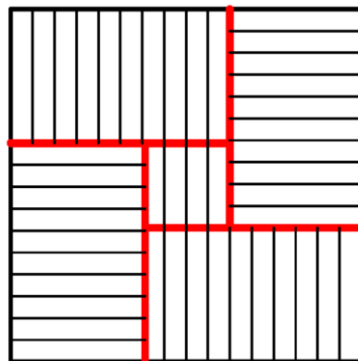


Figure 12 : Structure réciproque - Schéma du plancher étudié composé de sa structure primaire (en rouge) et de sa structure secondaire (en noir)

2.2.2 Planchers réciproques

Le principe même des structures autoportées, que ce soit en deux dimensions ou en trois dimensions, n'est pas récent et a été utilisé dans de nombreux endroits dans le monde au cours du temps. Marie Vandamme [22] ayant déjà traité l'aspect historique général de ces structures, leur évolution et leur utilité dans le temps, il est maintenant surtout intéressant de s'attarder sur l'existence et l'apparition des planchers réciproques à proprement parlé.

En occident, à l'époque médiévale, beaucoup de constructions étaient réalisées en bois. Malheureusement, celui-ci était limitant pour les dimensions des pièces ou des bâtiments comme des églises ou des palais, ils utilisaient alors 4 poutres de dimensions inférieures à la portée souhaitée afin de couvrir la surface. Un architecte de l'époque, Villard de Honnecourt, a proposé une solution avec un grillage plan, représenté à la Figure 13 (à gauche). Cette configuration permettait de franchir des portées plus ou moins grandes avec des éléments de plus petites dimensions dont les assemblages permettent de garder tous les éléments dans le même plan. Au *XV^{ème}* siècle, Leonard de Vinci a également proposé une configuration planaire (Figure 13, au centre) très similaire à celle proposée par Honnecourt. Au *XVI^{ème}* siècle, le peintre et architecte Sebastiano Serlio a également proposé sa configuration (Figure 13, à droite), qui est tout aussi similaire à celle de Honnecourt. A la fin du *XVII^{ème}* siècle, John Wallis fut, quant à lui, le premier à s'intéresser à différentes morphologies de plancher possibles et à étudier le transfert de charges entre les éléments.

Il est donc évident que le principe de ces structures, qui consiste donc à couvrir de grandes zones avec de petits éléments, n'est pas une réflexion récente mais a pour ainsi dire parcouru les siècles. Toutefois, il est bon de se demander si ce principe constructif est utilisé de nos jours et s'il est possible de retrouver de tels planchers dans des constructions contemporaines ? Pour répondre à cette question, plusieurs exemples plus ou moins récents vont être présentés. Les exemples choisis ne sont

pas forcément réalisés en grumes, mais l'objectif est de montrer au lecteur les possibilités qu'offre ce type de construction.

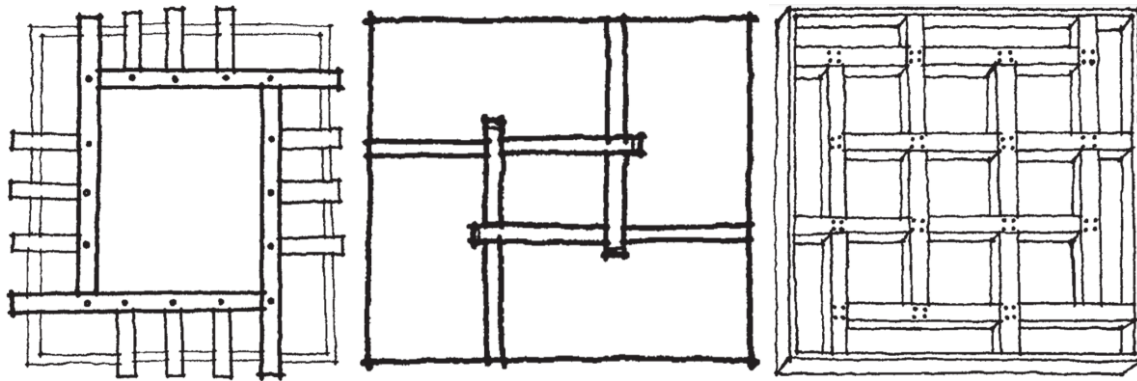


Figure 13 : Planchers réciproques dans le temps - Gauche : proposition de l'architecte Villard de Honnecourt (Epoque médiévale) - Milieu : Proposition de Leonardo da Vinci (XV^{ème} siècle) - Droite : proposition de Sebastiano Serlio (XVI^{ème} siècle) [16]

- La « Spinning house » (Figure 14 et Figure 15 [16])

Il s'agit d'une maison imaginée par Kazuhiro Ishii, un architecte japonais. L'idée d'utiliser une structure réciproque ici avait pour but d'avoir beaucoup de lumière dans le bâtiment. De plus, chaque structure réciproque de chaque étage est pivotée par rapport à l'étage inférieur afin de donner un effet de rotation. En plus de cet effet de rotation créé, la structure réciproque permet donc d'apporter de la lumière à partir du toit. Dans le cas présent, les structures réciproques sont réalisées en acier et composées de treillis Vierendeel pour ramener les charges supérieures sur les structures réciproques aux étages inférieurs.

- L'orchestre philharmonique de Berlin de Hans Scharoun (Figure 16 [16])

L'exemple repris ici consiste en une structure réciproque composée de trois éléments en béton armé qui permettent de couvrir la salle de concert. Les trois éléments sont de dimensions inférieures à la longueur de la salle et se rejoignent au centre de celle-ci. Il s'agit ici d'un bon exemple montrant qu'avec de petits éléments, il est possible de couvrir de grandes superficies.

- Charpente en bois réciproque – Musée Frans Masereel – Kasterlee (Figure 17 [20])

La charpente présentée n'est en réalité pas totalement plane et est inclinée de 3° par rapport à l'axe azimut. Cependant, cette réalisation est intéressante de par son étendue et la quantité d'éléments connectés. De plus, il s'agit ici d'une structure réciproque réalisée avec du bois de petites dimensions. Il a donc été possible de couvrir une très grande surface avec des éléments qui, à priori, ne semblaient pas adaptés à cet usage. Par ailleurs, cette réalisation permet de se rendre compte de l'originalité architecturale que peut offrir une structure réciproque.

Il est évident que le concept de structure réciproque ne se limite pas au plancher et aux structures planes, loin de là. Ce principe constructif permet de réaliser de magnifiques ouvrages tridimensionnels tel que des dômes, par exemple. Parmi les ouvrages les plus impressionnants il y a l'observatoire de Rokko (Figure 18 [1]), à Kobe au Japon. La Figure 19 [3] présente un exemple de couverture d'une terrasse où il n'y a qu'un appui central situé au milieu et le reste de la toiture est réalisé avec le principe de structure réciproque.

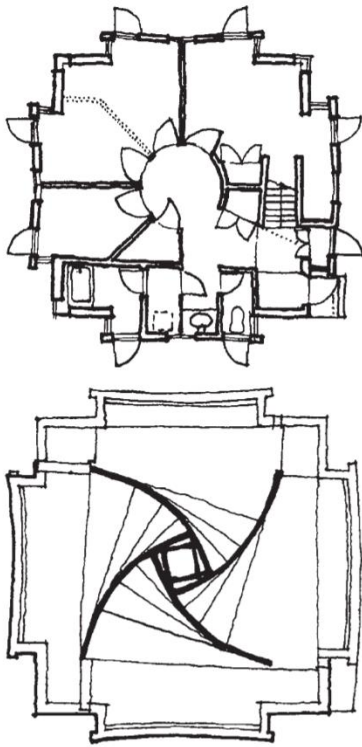


Figure 14 : Spinning house - Plan de l'étage (en haut) - Plan de toiture (en bas) [16]

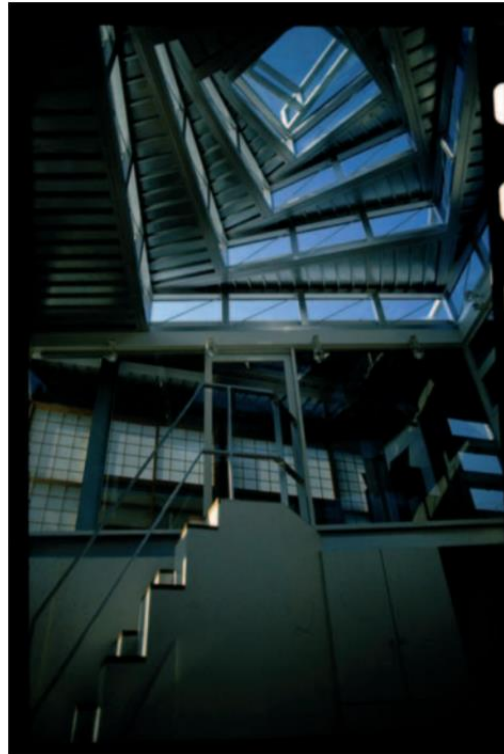


Figure 15 : Spinning house – Photo de l'intérieur [16]



Figure 16 : Orchestre philharmonique [16]

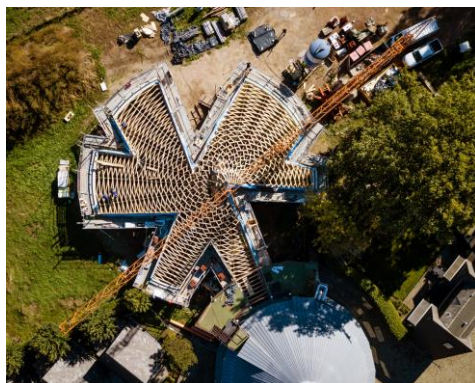


Figure 17 : Charpente en bois réciproque - Musée Frans Masereel – Kasterlee [20]



Figure 18 : Observatoire Rokko [1]



Figure 19 : Exemple de couverture d'une terrasse avec un appui central et une structure réciproque en toiture [3]

2.2.3 Travaux existants

Parmi les travaux existant dans l'optique de dimensionner les structures réciproques, deux travaux vont être abordés. Le premier, réalisé par Simon Gelez, Simon Aubry et Bernard Vaudeville [2], s'est intéressé à une configuration de plancher bien précise alors que le second, réalisé par Marie Vandamme [22], offre une analyse plus générale permettant d'optimiser le volume de matière des planchers réciproques. De plus, cette analyse a permis une comparaison, en terme de volume de matière, de différents planchers réciproques par rapport à un plancher classique.

Le premier travail a développé, dans un premier temps, une formule exprimant le moment de flexion maximal pour une configuration de plancher bien précis, illustré sur la Figure 20, en supposant que ce dernier était soumis à une charge uniformément répartie. Ce développement a été fait en partie sur base numérique et analytique. Dans un second temps, une méthode analytique a été développée afin de connaître le moment de flexion et la flèche à un nœud. Cette méthode a alors permis d'observer que le comportement du plancher dépendait de la connexion entre les différents éléments.

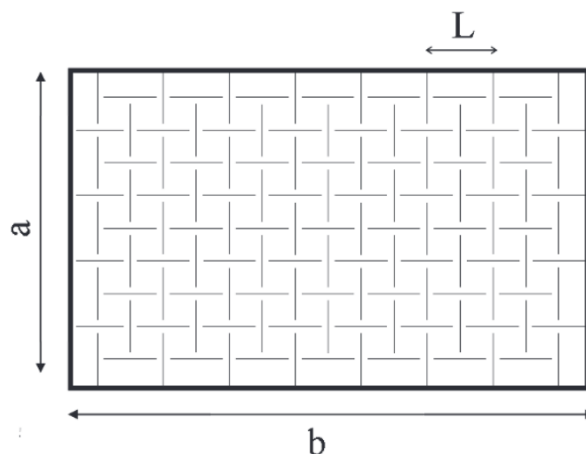


Figure 20 : Configuration de plancher étudiée par Simon Gelez, Simon Audry et Bernard Vaudeville

Marie Vandamme a, quant à elle, comparé différents planchers réciproques aux planchers classiques en termes de masse et d'efficacité. Pour ce faire, elle a développé une méthode analytique et numérique, basée sur la théorie des indicateurs morphologiques, qui lui ont permis de tirer plusieurs conclusions. Cette théorie est également abondamment utilisée dans le cadre de ce travail, elle est donc expliquée dans la section 2.3. Pour pouvoir comparer plusieurs planchers entre eux, 2 indicateurs de volume ont été développés, un indicateur de volume à l'état limite ultime sous critère de flexion (W_{ULS}) et un indicateur de volume à l'état limite de service (W_{SLS}) :

$$W_{ULS} = \frac{V_{ULS} f_{m,d}^{2/3}}{F_{ULS}^{2/3} L^{5/3}} \quad W_{SLS} = \frac{V_{SLS} E_{0,m}^{1/2}}{F_{SLS}^{1/2} L^2}$$

A partir de ces indicateurs, il a été possible de démontrer que la proportion d'engagement optimale est proche de $a = 0,3$. D'autre part, il a été démontré que pour un nombre de modules fixé composant le plancher, le volume de bois reste relativement constant. De plus, il a été montré qu'entre un plancher classique composé de poutres parallèles et un plancher réciproque carré composé d'un module carré, ce dernier permettait d'économiser entre 15% et 35% de matière. Il est important de noter que son étude a été réalisée en négligeant le poids propre. L'un des objectifs du présent mémoire est de regarder l'influence qu'a ce poids propre sur les conclusions tirées.

2.3 La théorie des indicateurs morphologiques

Pour réaliser ses analyses, Marie Vandamme [22] a utilisé la théorie des indicateurs morphologiques. Étant donné que cette dernière est également abondamment utilisée dans ce document, il est nécessaire de l'introduire afin de comprendre ce qu'elle représente et de montrer son utilité dans le cadre de ce travail.

La théorie des indicateurs morphologiques a été étudiée par Pierre Latteur [13] lors de son doctorat. Il s'est intéressé à l'optimisation de treillis, d'arcs, de poutres et de câbles sur base d'indicateurs morphologiques. D'autres recherches ont également fait appel à cette théorie, comme celles de Jonas Feron [9], Lindy Boucher [4] et Igor Bouckaert [5] liées aux structures de tensegrité. L'utilisation des indicateurs morphologiques a pour but d'optimiser une structure en termes de volume ou encore de déplacement. Par définition, **un indicateur morphologique est un nombre adimensionnel exprimé sur base de paramètres de la structure.**

Ce travail ayant, entre autres, pour but d'étudier les structures réciproques, ces dernières vont être prises comme point de départ pour expliquer la théorie des indicateurs morphologiques. En effet, le nombre de paramètres à considérer pour l'optimisation d'une telle structure peut être élevé (certains d'entre eux sont illustrés à la Figure 21):

- L_b : la longueur des poutres, en m
- ϕ : le diamètre des poutres, en m
- L : la longueur du plancher, en m
- l : la largeur du plancher, en m
- e : l'entraxe entre 2 poutres, en m
- a : la proportion d'engagement
- I : l'inertie de la section, en m^4
- σ : la contrainte du matériau pour le dimensionnement, en Pa
- E : le module d'élasticité du matériau considéré, en Pa
- ρ : le poids volumique du matériau des éléments, en N/m^3
- V : le volume de la structure, en m^3
- F : la charge externe appliquée, en N

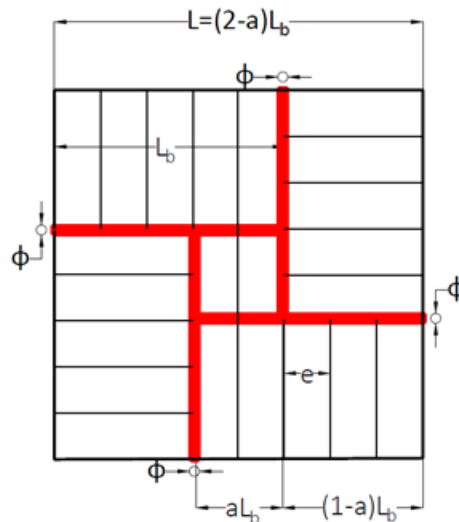


Figure 21 : Paramètres d'une structure réciproque

Il est évident qu'optimiser une structure sur base d'autant de paramètres est relativement compliqué. L'intérêt des indicateurs morphologiques est justement de réduire ce nombre de paramètres afin de rendre l'optimisation des structures plus abordable. En effet, le principe des indicateurs morphologiques est de combiner ces paramètres entre eux afin de créer des nombres adimensionnels. Ces derniers sont donc formés à partir de données du projet, ce qui permet de réduire le nombre de paramètres à prendre en compte dans l'optimisation. La puissance de cette théorie réside donc dans le fait que, en étudiant une seule structure il est possible d'obtenir des équations et des résultats adimensionnels. Ces derniers sont alors utilisables pour n'importe quelle autre structure dont le chargement, les dimensions ou encore le matériau seraient différents.

Il existe deux types d'indicateurs morphologiques : les indicateurs morphologiques primaires et les indicateurs morphologiques secondaires.

Les indicateurs morphologiques primaires sont des indicateurs qui vont servir à l'optimisation. Parmi ceux développés dans ce document, ils peuvent être classés en différentes catégories en fonction des paramètres qui les composent :

- Géométrie du plancher : a , la proportion d'engagement
 L/e , lié au nombre de poutres composant le plancher
 λ , facteur de proportionnalité des longueurs
- Poids propre de la structure : $\Lambda_\sigma = \frac{\rho L_b^{5/3}}{F^{1/3} \sigma^{2/3}}$, l'indicateur de poids propre ULS
 $\Lambda_\delta = \frac{\rho L_b^2}{F^{1/2} E_{0,m}^{1/2}}$, l'indicateur de poids propre SLS
- Critère de dimensionnement : L/δ , lié au critère de flèche
 Z , lié au critère de cisaillement

Les indicateurs secondaires sont quant à eux fonction des indicateurs primaires. C'est sur base de ces indicateurs que l'optimisation va s'opérer et qu'il va être possible de comparer plusieurs structures entre elles. Parmi les indicateurs secondaires utilisés dans ce travail :

- L'indicateur de volume, sous le critère de flexion ou de cisaillement, qui représente le volume de la structure telle que la contrainte dans le matériau soit égale à σ (ou $f_{m,d}$ lorsqu'il est

évalué à l'état limite ultime, ULS). L'expression de gauche représente son écriture générale alors que l'expression de droite représente son écriture à l'état limite ultime :

$$W_{\sigma} = \frac{V\sigma^{2/3}}{F^{2/3}L^{5/3}} \qquad W_{ULS} = \frac{V_{ULS}f_{m,d}^{2/3}}{F_{ULS}^{2/3}L^{5/3}}$$

- L'indicateur de volume, sous le critère de flèche, qui représente le volume de la structure tel que la flèche de la structure soit égale à δ (ou δ_{max} lorsqu'il est évalué à l'état limite de service, SLS). L'expression de gauche représente son écriture générale alors que l'expression de droite représente son écriture à l'état limite de service :

$$W_{\delta} = \frac{VE_{0,m}^{1/2}}{F^{1/2}L^2} \qquad W_{SLS} = \frac{V_{SLS}E_{0,m}^{1/2}}{F_{SLS}^{1/2}L^2}$$

Dans le cadre de son travail , Marie Vandamme [22] a pu démontrer que ces indicateurs morphologiques secondaires sont bien fonction des indicateurs morphologiques primaires :

$$\begin{cases} W_{ULS} = f\left(a, \lambda, \frac{L}{e}, Z\right) \\ W_{SLS} = f\left(a, \lambda, \frac{L}{\delta_{max}}\right) \end{cases}$$

Dans la suite de ce document, la prise en compte du poids propre dans l'analyse fera apparaitre un autre indicateur morphologique primaire supplémentaire dans les paramètres des fonctions d'indicateurs de volume, à savoir Λ_{ULS} et Λ_{SLS} . Les indicateurs de volume auront donc un paramètre en plus et prendront la forme suivante :

$$\begin{cases} W_{ULS} = f\left(a, \lambda, \frac{L}{e}, Z, \Lambda_{ULS}\right) \\ W_{SLS} = f\left(a, \lambda, \frac{L}{\delta_{max}}, \Lambda_{ULS}\right) \end{cases}$$

Enfin, un autre nombre adimensionnel, qui est l'efficacité matérielle ($\rho V/F$), également un indicateur morphologique secondaire, va être utilisé dans ce document. Cela sera démontré ultérieurement, mais l'efficacité matérielle peut s'écrire comme le produit d'un des indicateurs primaires et d'un des indicateurs secondaires :

$$\begin{cases} \frac{\rho_{ULS}V_{ULS}}{F_{ULS}} = W_{ULS}\Lambda_{ULS} \\ \frac{\rho_{SLS}V_{SLS}}{F_{SLS}} = W_{SLS}\Lambda_{SLS} \end{cases}$$

L'efficacité matérielle représente le poids de la structure étudiée (ρV) pour reprendre une certaine force (F) et ce en respectant le critère étudié.

3 Optimisation du volume de bois d'une poutre fléchie

L'objectif des trois chapitres suivants est de développer une série d'équations analytiques permettant d'optimiser le volume de matière nécessaire à la réalisation d'un plancher carré composé d'un module réciproque. Dans un premier temps, ce chapitre réalise l'analyse d'une poutre isostatique. Ensuite, un plancher classique (Section 4) composé de poutres parallèles est étudié avant de s'intéresser au plancher réciproque (Section 5). Cette optimisation se fait en utilisant la théorie des indicateurs morphologiques et est réalisée sur base d'une analyse à l'état limite ultime (ULS) en contrainte de flexion et d'une analyse à l'état limite de service (SLS).

Lors d'un précédent mémoire, réalisé par Marie Vandamme [22], des analyses similaires ont été menées mais en y négligeant le poids propre des structures. L'intérêt est donc ici d'intégrer le poids propre des éléments à l'analyse et d'observer son influence sur les résultats obtenus. Suite à l'ajout du poids propre aux développements, trois analyses différentes ont été menées :

- **L'efficacité matérielle ($\rho V/F$)** : Cette analyse fournit une information sur l'importance du poids de la structure (ρV) par rapport à la charge extérieure totale appliquée sur la structure (F). Cette information peut s'avérer utile à différents niveaux d'un projet. En effet, le poids de la structure aura une influence sur le coût des fondations, le transport des éléments ainsi que sur la manutention de ceux-ci. De plus, le transport et la manutention d'éléments trop lourds pourraient engendrer une pollution supplémentaire de par la nécessité de réaliser plus de trajets avec moins de grumes sur un camion ou encore l'utilisation de machinerie supplémentaire sur chantier.
- **Le volume de matière (V)** : L'objectif est de réaliser une comparaison entre plusieurs classes de résistance de bois afin de voir si l'une d'entre elles minimise le volume de matière nécessaire dans tous les cas. Cette information s'avère intéressante si une certaine importance est portée à la hauteur sous plafond de notre pièce.
- **Le taux de travail (T)** : L'intérêt de cette étude est de regarder le taux de travail réel des éléments lorsque ceux-ci sont dimensionnés en négligeant le poids propre.

Les paramètres et notations utilisés dans les développements qui suivent sont tous définis dans la partie « Table des symboles ».

Tout d'abord, avant de s'intéresser au plancher conventionnel et au plancher réciproque, le cas d'une poutre fléchie est étudié. Cette dernière est supposée isostatique, de longueur L_b , de section circulaire pleine et de diamètre ϕ . Nous supposons que cette poutre est soumise à une charge uniformément répartie q_L [N/m], avec $F = q_L L_b$ [N], et à son poids propre $q_{DW} = \rho V/L_b$ [kN/m], avec V le volume de la poutre et ρ le poids volumique du matériau. La charge linéique totale est donnée par $q_{L,tot} = q_L + q_{DW} = \frac{F + \rho V}{L_b}$. La situation est représentée à la Figure 22.

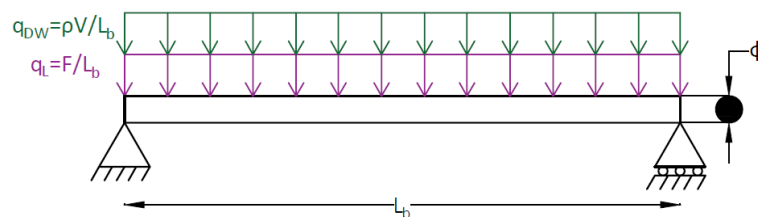


Figure 22 : Poutre fléchie – Schéma statique d'une poutre fléchie soumise à son poids propre et à une charge uniformément répartie

3.1 Optimisation du volume de bois d'une poutre fléchie en fonction de la contrainte

L'objectif de ce point étant l'optimisation du volume de bois d'une poutre fléchie en fonction de la contrainte, les expressions de la contrainte en flexion et du volume d'un cylindre sont utilisées pour commencer le développement :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{M_{max} \phi}{I} \frac{1}{2} \\ V = \frac{\pi \phi^2}{4} L_b \end{cases}$$

Où $M_{max} = \frac{q_{L,tot} L_b^2}{8} = \frac{(\rho V + F) L_b}{8}$ est le moment maximal et $I = \frac{\pi \phi^4}{64}$ l'inertie de la poutre. En utilisant ces expressions dans l'expression de la contrainte, le système peut se réécrire :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{(\rho V + F) L_b}{8} \frac{64}{\pi \phi^4} \frac{\phi}{2} \\ V = \frac{\pi \phi^2}{4} L_b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \phi^2 = \left(\frac{(\rho V + F) L_b}{\sigma} \frac{4}{\pi} \right)^{2/3} \\ V = \frac{\pi \phi^2}{4} L_b \end{cases}$$

En insérant l'expression de ϕ^2 obtenue avec la contrainte dans l'expression du volume, ce dernier peut être exprimé de manière implicite en fonction de la contrainte :

$$V = \left(\frac{\pi}{4} \right)^{1/3} (\rho V + F)^{2/3} \frac{L_b^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = \left(\frac{\pi}{4} \right)^{1/3} \left(\frac{\rho V}{F} + 1 \right)^{2/3} \frac{L_b^{5/3} F^{2/3}}{\sigma^{2/3}}$$

$$V = 0,923 \left(\frac{\rho V}{F} + 1 \right)^{2/3} \frac{L_b^{5/3} F^{2/3}}{\sigma^{2/3}} \quad (1a)$$

Cette égalité peut être réécrite sous forme adimensionnelle, en faisant apparaître l'indicateur de volume W_σ , ce qui donne :

$$W_\sigma = \frac{V \sigma^{2/3}}{L_b^{5/3} F^{2/3}} = 0,923 \left(\frac{\rho V}{F} + 1 \right)^{2/3}$$

En remarquant que $\frac{\rho V}{F} = \frac{\rho L_b^{5/3}}{F^{1/3} \sigma^{2/3}} \frac{V \sigma^{2/3}}{L_b^{5/3} F^{2/3}} = \frac{\rho L_b^{5/3}}{F^{1/3} \sigma^{2/3}} W_\sigma$, l'expression de l'indicateur de volume peut alors s'écrire de manière implicite :

$$W_\sigma = \frac{V \sigma^{2/3}}{L_b^{5/3} F^{2/3}} = 0,923 \left(\frac{\rho L_b^{5/3}}{F^{1/3} \sigma^{2/3}} W_\sigma + 1 \right)^{2/3}$$

Où le terme $\frac{\rho L_b^{5/3}}{F^{1/3} \sigma^{2/3}}$ est appelé **indicateur de poids propre à l'état limite ultime** et sera noté Λ_σ dans la suite de ce document. Cet indicateur représente l'importance du poids propre de la structure par rapport aux charges extérieures et sera davantage discuté dans la section 3.1.1.1, consacrée à l'efficacité matérielle. L'expression implicite de l'indicateur de volume devient alors :

$$W_\sigma = \frac{V \sigma^{2/3}}{L_b^{5/3} F^{2/3}} = 0,923 (\Lambda_\sigma W_\sigma + 1)^{2/3} \quad (1b)$$

L'expression (1b) fournit le volume adimensionnel d'une poutre fléchie, de longueur L_b soumise à son poids propre et à une charge totale F , dont la contrainte dans la section la plus sollicitée est σ .

L'expression (1b) évaluée à l'état limite ultime s'écrit :

$$W_{ULS} = \frac{V_{ULS} f_{m,d}^{2/3}}{L_b^{5/3} F_{ULS}^{2/3}} = 0,923 (\Lambda_{ULS} W_{ULS} + 1)^{2/3} \quad (1c)$$

Afin de tracer des courbes représentatives du champ d'application souhaité, plusieurs hypothèses

doivent être prises afin de borner l'indicateur de poids propre $\Lambda_{ULS} = \frac{\rho_{ULS} L_b^{5/3}}{f_{m,d}^{2/3} F_{ULS}^{1/3}}$:

- Le matériau (ρ et $f_{m,d}$)** : Tout d'abord, ce mémoire ayant pour but de s'intéresser aux grumes, certaines classes de résistance de bois ont été choisies, en supposant que le bois soit classé selon la norme EN338. Les caractéristiques de ces dernières sont reprises dans le Tableau 1. La résistance de design $f_{m,d}$ est calculée à partir de la valeur caractéristique : $f_{m,d} = f_{m,k} \frac{k_{mod}}{\gamma_m}$ où $\gamma_m = 1,3$ [/] puisque ce travail s'intéresse au bois massif. La valeur de k_{mod} est quant à elle posée à 0,8 en supposant que les planchers ont une classe de service 1 et que les charges d'exploitation sont les charges de plus courte durée.

	Résineux			Feuillus		
	C18	C24	C40	D30	D50	D70
$f_{m,k}$ [MPa]	18	24	40	30	50	70
ρ [N/m ³]	3800	4200	4800	6400	7400	9600
ρ_{ULS} $\left[\frac{N}{m^3} \right]$	5130	5670	6480	8640	9990	12960
$\frac{\rho_{ULS}}{f_{m,d}^{2/3}} \left[\frac{N^{1/3}}{m^{5/3}} \right]$	0,103	0,094	0,077	0,124	0,102	0,105

Tableau 1 : Valeurs caractéristiques de la résistance et valeurs moyennes du poids volumique de différentes classes de résistance du bois selon la norme EN338

- Le chargement extérieur (q_{ULS})** : Nous supposons que la poutre étudiée reprend à elle seule un plancher de dimension $L_b \times L_b$ soumis à une charge surfacique q_{ULS} , comme représenté sur la Figure 23. Un tel plancher pourrait être utilisé en toiture, en habitation ou encore en bureaux. Sur base des recommandations de l'Eurocode [15], l'intervalle de charge surfacique choisi est $q_{ULS} \in [2; 12]$ [kN/m²].

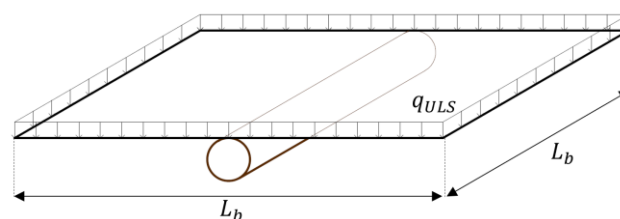


Figure 23 : Poutre fléchie - Schéma de la situation étudiée - ULS

- La géométrie (L_b)** : En ce qui concerne les longueurs caractéristiques du plancher l'intervalle choisi est tel que $L_b \in [2; 10]$ [m].

Il est dès lors possible de borner l'indicateur de poids propre $\Lambda_{ULS} = \frac{\rho_{ULS} L_b^{5/3}}{f_{m,d}^{2/3} F_{ULS}^{1/3}} = \frac{\rho_{ULS}}{f_{m,d}^{2/3}} \frac{L_b}{q_{ULS}^{1/3}}$. La borne supérieure est obtenue en utilisant la classe de résistance pour laquelle le rapport $\rho_{ULS}/f_{m,d}^{2/3}$ est le plus grand, soit le D30, une longueur L_b de 10 [m] et une charge surfacique $q_{ULS} = 2$ [kN/m²]. Ce qui fournit alors $\Lambda_{ULS,max} = 0,0982$. La borne inférieure est quant à elle obtenue en utilisant la classe

de résistance pour laquelle le rapport $\rho_{ULS}/f_{m,d}^{2/3}$ est le plus petit, soit le C40, une longueur $L_b = 2$ [m] et une charge surfacique $q_{ULS} = 12$ [kN/m²]. Ce qui fournit alors $\Lambda_{ULS,min} = 0,0067$. L'intervalle de valeur de l'indicateur de poids propre, correspondant au champ d'application souhaité, est alors donné par $\Lambda_{ULS} \in [0,0067; 0,0982]$.

Il est donc maintenant possible de tracer l'expression (1c) de l'indicateur de volume en fonction de l'indicateur de poids propre. Cette relation est représentée à la Figure 24 où la courbe bleue représente l'indicateur de volume en fonction de l'indicateur de poids propre. La courbe en pointillés rouges représente la valeur de l'indicateur de volume obtenue lorsque le poids propre est négligé.

Sur la Figure 24, il est possible d'observer que, lorsque l'indicateur de poids propre augmente, alors il y a une augmentation de l'indicateur de volume, allant jusqu'à une hausse de 6,32% par rapport au cas où le poids propre est négligé.

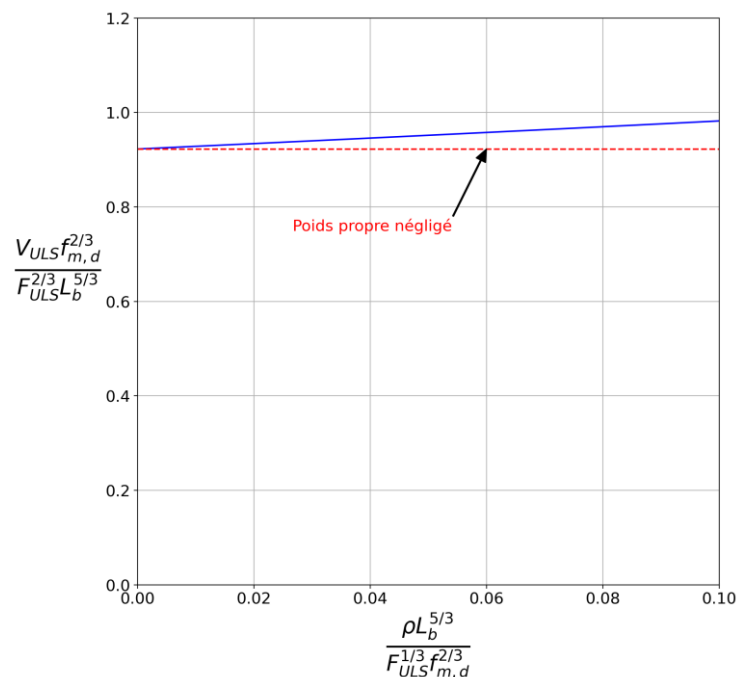


Figure 24 : Poutre fléchie – Indicateur de volume en fonction de l'indicateur de poids propre

3.1.1 Interprétation et discussion

Sur base des développements, des résultats et des observations qui viennent d'être réalisés, plusieurs réflexions vont être discutées dans la présente section :

- Comprendre ce que l'indicateur de poids propre représente et comment l'interpréter, en s'intéressant à l'efficacité matérielle $\rho V/F$. En même temps, l'importance du poids propre en fonction de la classe de résistance est discutée.
- Analyser si une classe de résistance minimise le volume de matière nécessaire dans toutes les situations considérées.
- Etudier l'impact de la prise en compte du poids propre en étudiant le taux de travail réel de l'élément lorsque ce dernier est dimensionné en négligeant son poids propre.

3.1.1.1 Efficacité matérielle ($\rho V/F$)

Dans un premier temps, il est nécessaire de comprendre ce que représente l'indicateur de poids propre physiquement. Pour cela, il est possible de lier l'indicateur de poids propre, Λ_σ , et l'efficacité matérielle, $\rho V/F$ en partant de l'équation (1a) :

$$V = 0,923 \left(\frac{\rho V}{F} + 1 \right)^{2/3} \frac{L_b^{5/3} F^{2/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Cette égalité peut être réécrite afin d'exprimer l'efficacité matérielle ($\rho V/F$) de manière implicite :

$$\frac{\rho V}{F} = 0,923 \left(\frac{\rho V}{F} + 1 \right)^{2/3} \frac{\rho L_b^{5/3}}{F^{1/3} \sigma^{2/3}}$$

En observant que l'indicateur de poids propre apparaît, $\Lambda_\sigma = \frac{\rho L_b^{5/3}}{F^{1/3} \sigma^{2/3}}$, il est alors possible d'exprimer l'efficacité matérielle en fonction de l'indicateur de poids propre de manière implicite.

$$\frac{\rho V}{F} = 0,923 \left(\frac{\rho V}{F} + 1 \right)^{2/3} \Lambda_\sigma$$

En écrivant cette expression à l'état limite ultime, l'expression devient :

$$\frac{\rho_{ULS} V_{ULS}}{F_{ULS}} = 0,923 \left(\frac{\rho_{ULS} V_{ULS}}{F_{ULS}} + 1 \right)^{2/3} \Lambda_{ULS} \quad (1d)$$

La Figure 25 représente l'expression (1d) de l'efficacité matérielle ($\rho_{ULS} V_{ULS}/F_{ULS}$), en fonction de l'indicateur de poids propre, $\Lambda_{ULS} = \frac{\rho_{ULS} L_b^{5/3}}{F_{ULS}^{1/3} f_{m,d}^{2/3}}$, évalué à l'état limite ultime. La relation liant ces deux nombres adimensionnels est presque linéaire, l'indicateur de poids propre représente donc une image de l'efficacité matérielle réelle. Cela signifie que, au plus l'indicateur de poids propre (Λ_{ULS}) est élevé, au plus le poids de la structure ($\rho_{ULS} V_{ULS}$) nécessaire est grand pour reprendre la force totale extérieure F_{ULS} . De manière plus directe, l'efficacité matérielle peut être vue à travers le rapport $\rho_{ULS}/f_{m,d}^{2/3}$, étant donné que ce dernier représente le poids volumique du matériau considéré divisé par sa résistance en flexion.

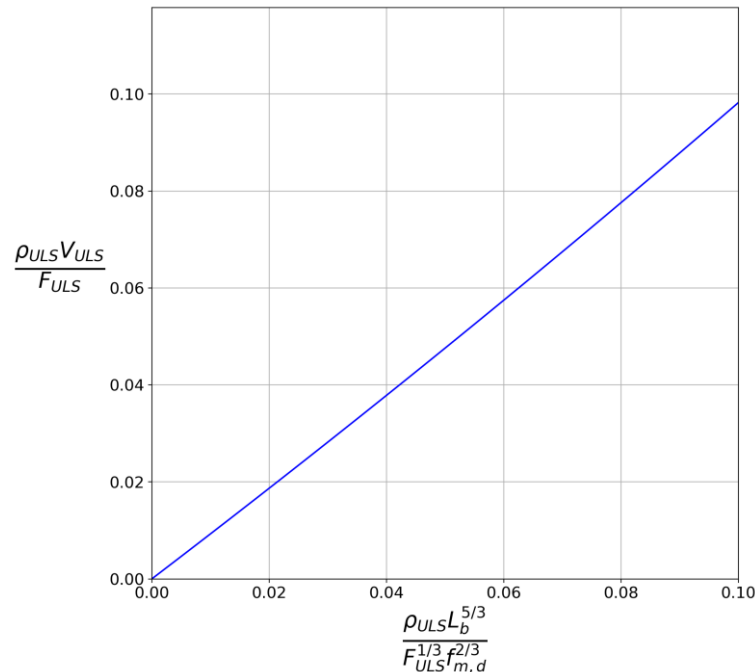


Figure 25 : Poutre fléchie - Efficacité matérielle, $\rho_{ULS} V_{ULS}/F_{ULS}$, en fonction de l'indicateur de poids propre, Λ_{ULS}

Exemple d'utilisation de la Figure 25:

Supposons la situation suivante :

- $L_b = 10$ [m]
- $F_{ULS} = 500\,000$ [N]

Pour cette situation, l'indicateur de poids propre ($\Lambda_{ULS} = \frac{\rho_{ULS} L_b^{5/3}}{F_{ULS}^{1/3} f_{m,d}^{2/3}}$) des classes de résistance C18, C24 et D70 vaut respectivement 0.060, 0.055 et 0.062.

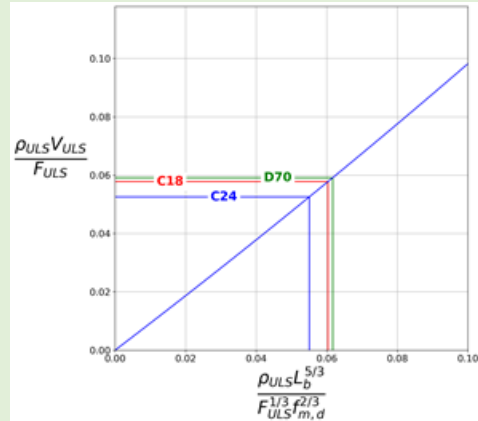
Graphiquement,

$$\left(\frac{\rho_{ULS} V_{ULS}}{F_{ULS}}\right)_{C24} < \left(\frac{\rho_{ULS} V_{ULS}}{F_{ULS}}\right)_{C18} < \left(\frac{\rho_{ULS} V_{ULS}}{F_{ULS}}\right)_{D70},$$

tout comme $\Lambda_{ULS,C24} < \Lambda_{ULS,C18} < \Lambda_{ULS,D70}$.

Donc, si $\Lambda_i < \Lambda_j$ alors $\left(\frac{\rho V}{F}\right)_i < \left(\frac{\rho V}{F}\right)_j$, où i et j représentent deux matériaux différents.

Λ représente bien une image de l'efficacité matérielle $\rho V/F$.



Dans un second temps, il est également possible d'exprimer l'efficacité matérielle $\left(\frac{\rho V}{F}\right)$ en fonction des données du problème (L et F) pour différentes classes de résistance. Pour ce faire, il suffit de

repartir de l'expression (1d), en se rappelant que $\Lambda_{ULS} = \frac{\rho_{ULS} L_b^{5/3}}{F_{ULS}^{1/3} f_{m,d}^{2/3}}$:

$$\frac{\rho_{ULS} V_{ULS}}{F_{ULS}} = 0,923 \left(\frac{\rho_{ULS} V_{ULS}}{F_{ULS}} + 1 \right)^{2/3} \frac{L_b^{5/3} \rho_{ULS}}{F_{ULS}^{1/3} f_{m,d}^{2/3}}$$

Etant donné que la force totale, F_{ULS} , est dépendante de la longueur de poutre ($F_{ULS} = q_{ULS} L_b^2$), l'expression ci-dessus peut être réécrite selon la charge surfacique :

$$\frac{\rho_{ULS} V_{ULS}}{F_{ULS}} = 0,923 \left(\frac{\rho_{ULS} V_{ULS}}{F_{ULS}} + 1 \right)^{2/3} \frac{L_b}{q_{ULS}^{1/3}} \frac{\rho_{ULS}}{f_{m,d}^{2/3}} \quad (1e)$$

La Figure 26 représente l'expression (1e) de l'efficacité matérielle ($\rho_{ULS} V_{ULS}/F_{ULS}$), en fonction du rapport $L_b/q_{ULS}^{1/3}$ pour différentes classes de résistance de bois. Le rapport $L_b/q_{ULS}^{1/3}$ ne représente rien physiquement mais peut être obtenu à partir des données de la situation considérée. Il est donc possible d'observer que, pour une situation donnée (L_b et q_{ULS} connus), la classe de résistance C40 est toujours la plus efficace alors que la classe de résistance D30 est toujours la moins efficace, en termes d'efficacité matérielle. C'est-à-dire que pour reprendre une même charge F_{ULS} , un élément de classe de résistance C40 pèsera moins lourd qu'un élément de classe de résistance D30. D'autre part, les classes de résistance C18, D50 et D70 semblent se valoir. Cette observation permet d'appuyer le fait que le rapport $\rho/f_{m,d}^{2/3}$ détermine l'efficacité matérielle d'un matériau par rapport à un autre.

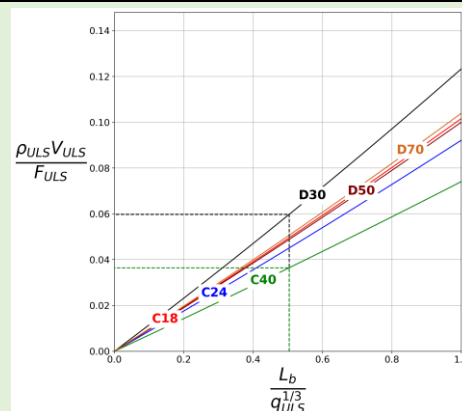
Exemple d'utilisation de la Figure 26:

Supposons la situation suivante:

- $L_b = 8$ [m]
- $q_{ULS} = 4000$ [N/m²]

Pour cette situation, le rapport $L_b/q_{ULS}^{1/3}$ vaut donc $0,504 \left[\frac{m^{5/3}}{N^{1/3}} \right]$.

Il est possible d'observer qu'il y a plus d'un facteur 1,5 entre le poids d'un élément en C40 par rapport à un élément en D30 pour reprendre la même force totale F_{ULS} . L'impact sur le poids total d'une structure peut donc différer d'une classe à l'autre.



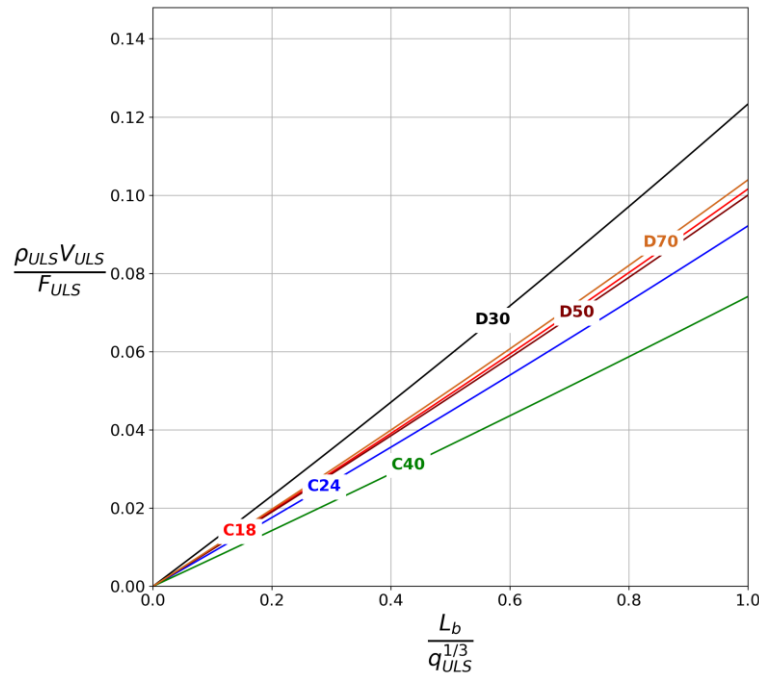


Figure 26 : Poutre fléchie - Efficacité matérielle, $\rho_{ULS} V_{ULS} / F_{ULS}$, en fonction de données du problème, $L_b / q_{ULS}^{1/3}$, pour différentes classes de résistance

3.1.1.2 Volume de matière

Chaque classe de résistance ayant sa propre résistance et son propre poids volumique, il est également intéressant de se demander si une classe de résistance minimise le volume de matière nécessaire dans toutes les situations du champ d'application considéré. Pour ce faire, le point de départ est l'expression (1a) :

$$V = 0,923 \left(\frac{\rho V}{F} + 1 \right)^{2/3} \frac{L_b^{5/3} F^{2/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Où $F = q L_b^2$,

$$V = 0,923 \left(\frac{\rho V}{q L_b^2} + 1 \right)^{2/3} \frac{L_b^3 q^{2/3}}{\sigma^{2/3}}$$

$$\frac{V}{L_b^3 q^{2/3}} = 0,923 \left(\rho \frac{V}{L_b^3 q^{2/3}} \frac{L_b}{q^{1/3}} + 1 \right)^{2/3} \frac{1}{\sigma^{2/3}}$$

L'expression ci-dessus fournit un nombre, $\frac{V}{L_b^3 q^{2/3}}$, qui n'a pas de signification physique, représentant le volume de matière nécessaire (V) divisé par des données du problème (L_b et q). L'expression évaluée à l'état limite ultime s'écrit :

$$\frac{V_{ULS}}{L_b^3 q_{ULS}^{2/3}} = 0,923 \left(\rho_{ULS} \frac{V_{ULS}}{L_b^3 q_{ULS}^{2/3}} \frac{L_b}{q_{ULS}^{1/3}} + 1 \right)^{2/3} \frac{1}{f_{m,d}^{2/3}} \quad (1f)$$

Cette dernière égalité (1f) donne donc l'expression de $\frac{V_{ULS}}{L_b^3 q_{ULS}^{2/3}}$, qui n'a pas de signification physique, de manière implicite en fonction du rapport $L_b / q_{ULS}^{1/3}$, qui est une donnée du problème, et ce pour différentes classes de résistance.

La Figure 27 représente l'expression (1f) du nombre $\frac{V_{ULS}}{L_b^3 q_{ULS}^{2/3}}$ en fonction de données du problème, $L_b/q_{ULS}^{1/3}$, pour différentes classes de résistance. Finalement, dans ce graphique, ni l'abscisse, ni l'ordonnée ne représentent quelque chose de physique. L'ordonnée, $\frac{V_{ULS}}{L_b^3 q_{ULS}^{2/3}}$ peut-être interprétée comme une image du volume. Dès lors, ce graphique permet d'obtenir une information directe sur le volume en fonction de données de la situation, reprises dans le rapport $L_b/q_{ULS}^{1/3}$, et donc de comparer différents matériaux. Cette comparaison permet de savoir quelle classe de résistance minimise le volume nécessaire pour une situation donnée. Dans la gamme d'utilisation définie précédemment, il y a donc bien une classe de résistance qui minimise le volume de bois nécessaire dans tous les cas : le D70. A contrario, la classe de résistance C18 maximise ce volume. Ce graphique est donc surtout intéressant parce qu'il permet, à partir de données d'un projet (L_b et q_{ULS}), de connaître rapidement la différence de volume de matière entre deux classes de résistance. En connaissant le prix de chacune des classes de résistance il est donc possible d'estimer directement l'impact du choix de la classe de résistance choisie sur le coût du projet. Cet aspect est davantage discuté dans la section 8.

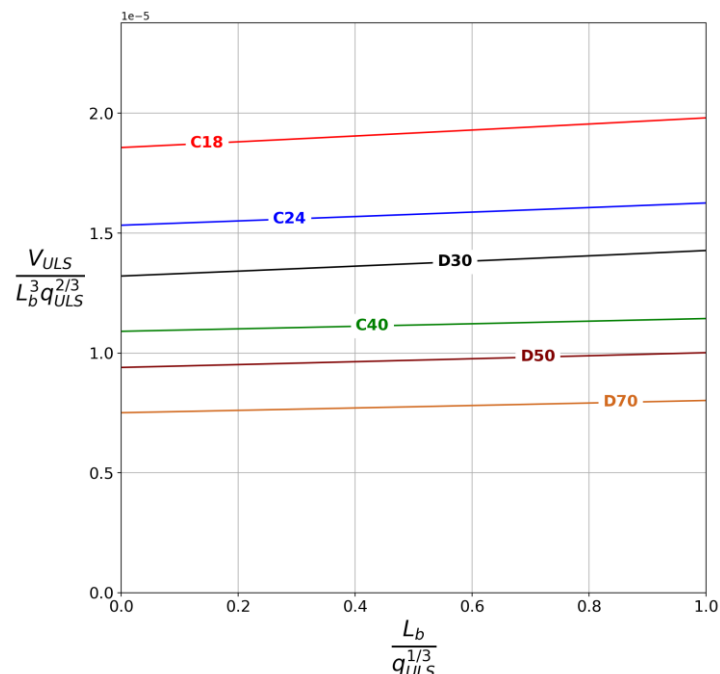


Figure 27 : Poutre fléchie – Image du volume en fonction de paramètres du problème pour différentes classes de résistance

Exemple d'utilisation de la Figure 27:

Supposons la situation suivante:

- $L_b = 8 \text{ [m]}$
- $q_{ULS} = 4000 \text{ [N/m}^2\text{]}$

Pour cette situation, le rapport $L_b/q_{ULS}^{1/3}$ vaut donc $0,504 \left[\frac{\text{m}^{5/3}}{\text{N}^{1/3}} \right]$.

Il est possible d'obtenir la valeur de $\frac{V_{ULS}}{L_b^3 q_{ULS}^{2/3}}$ pour différentes classes de résistance, par exemple le D70 et le C18. Ce nombre vaut respectivement $7,5 * 10^{-6}$ et $1,86 * 10^{-5}$. Il est dès lors possible d'obtenir le volume qui est donné par :

$$V_{ULS,D70} = 7,5 * 10^{-6} * L_b^3 q_{ULS}^{2/3} = 0,97 \text{ [m}^3\text{]}$$

$$V_{ULS,C18} = 1,86 * 10^{-5} * L_b^3 q_{ULS}^{2/3} = 2,40 \text{ [m}^3\text{]}$$

Il y a donc plus d'un facteur 2 entre le volume nécessaire de ces 2 classes de résistance.
En terme de diamètre de section nécessaire, cela donne :

$$\phi_{ULS,D70} = \sqrt{\frac{4V_{ULS,D70}}{\pi L_b}} = 0,39 [m]$$

$$\phi_{ULS,C18} = \sqrt{\frac{4V_{ULS,C18}}{\pi L_b}} = 0,62 [m]$$

La différence de dimension des éléments est donc fortement différente en fonction de la classe de résistance choisie.

3.1.1.3 Taux de travail

En analysant la Figure 24, et comme cela pouvait être attendu, la prise en compte du poids propre a une influence sur le résultat obtenu au niveau de l'indicateur de volume. En effet, au plus l'indicateur de poids propre est grand, au plus l'indicateur de volume s'éloigne de celui obtenu lorsque le poids propre est négligé. L'augmentation maximale de l'indicateur de volume en tenant compte du poids propre monte jusque 6,32%. La question qui se pose est alors de savoir si cette différence est importante et donc à considérer ou si elle peut être négligée. Pour répondre à cette question, le taux de travail réel de l'élément lorsque le poids propre de la poutre est négligé semble un bon indicateur. En effet, en négligeant le poids propre, la contrainte maximale dans l'élément est supposée égale à $f_{m,d}$, ce qui correspond à un taux de travail de 1. Toutefois, le poids propre de la structure va également induire une contrainte. La question est donc de se demander si cette contrainte supplémentaire doit être considérée ou pas.

Pour commencer, il est possible de lier l'indicateur de volume lorsque le poids propre est négligé, noté W_0 , à l'indicateur de volume lorsque le poids propre est pris en compte, noté W_Λ , par un facteur de proportionnalité, noté p ($p > 1$), dépendant de l'indicateur de poids propre Λ_σ .

$$W_\Lambda = p(\Lambda_\sigma) W_0$$

Etant donné que les hypothèses sur le chargement extérieur, sur la longueur de la poutre et sur le matériau utilisé sont les mêmes, il est possible d'écrire :

$$\frac{V_{\Lambda,ULS} f_{m,d}^{2/3}}{F_{ULS}^{2/3} L_b^{5/3}} = p(\Lambda_\sigma) \frac{V_{0,ULS} f_{m,d}^{2/3}}{F_{ULS}^{2/3} L_b^{5/3}}$$

$$V_{\Lambda,ULS} = p(\Lambda_\sigma) V_{0,ULS}$$

Le facteur de proportionnalité $p(\Lambda_\sigma)$ étant supérieur à 1 (car $W_\Lambda > W_0$), il est donc clair que le volume de matière nécessaire en négligeant le poids propre est sous-estimé.

Le volume $V_{0,ULS}$ est obtenu en négligeant le poids propre et en supposant que la contrainte maximale atteinte dans la section est égale à la résistance de flexion du matériau, noté $f_{m,d}$. Cependant ce volume de matière engendre lui-même une certaine charge qui génère donc un supplément de contrainte, $\Delta\sigma_0$. La contrainte maximale réelle de l'élément, lorsque l'élément est dimensionné en négligeant le poids propre, est donc donnée par :

$$\sigma_{0,réelle} = f_{m,d} + \Delta\sigma_0$$

Il est alors possible d'obtenir une expression du taux de travail réel d'une poutre circulaire isostatique, soumise à une charge uniformément répartie, dimensionnée en négligeant son poids propre.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{0,r\acute{e}elle} &= f_{m,d} + \Delta\sigma_0 \\
 &= \frac{4F_{ULS}L_b}{\pi\phi^3} + \frac{4\rho V_{0,ULS}L_b}{\pi\phi^3} \\
 &= \frac{4F_{ULS}L_b}{\pi\phi^3} \left(1 + \frac{\rho V_{0,ULS}}{F_{ULS}} \right) \\
 &= \frac{4F_{ULS}L_b}{\pi\phi^3} \left(1 + \frac{\rho V_{\Lambda,ULS}}{F_{ULS}} \frac{1}{p(\Lambda_\sigma)} \right) \\
 &= f_{m,d} \left(1 + \frac{\Lambda_{ULS}W_{\Lambda,ULS}}{p(\Lambda_\sigma)} \right) \\
 &= f_{m,d} (1 + \Lambda_{ULS}W_{0,ULS})
 \end{aligned}
 \begin{aligned}
 &\left. \begin{aligned} V_{0,ULS} &= \frac{V_{\Lambda,ULS}}{p(\Lambda_\sigma)} \\ \frac{\rho V_{\Lambda,ULS}}{F_{ULS}} &= \Lambda_{ULS}W_{\Lambda,ULS} \\ \frac{W_{\Lambda,ULS}}{p(\Lambda_\sigma)} &= W_{0,ULS} \end{aligned} \right\}
 \end{aligned}$$

Finalement, le taux de travail peut donc s'écrire :

$$T = \frac{\sigma_{0,r\acute{e}elle}}{f_{m,d}} = 1 + \Lambda_{ULS}W_{0,ULS} \quad (1g)$$

La Figure 28 représente l'expression (1g) du taux de travail réel de la poutre fléchie en fonction de l'indicateur de poids propre lorsque celle-ci est dimensionnée en négligeant le poids propre.

Lorsque l'indicateur de poids propre augmente, le taux de travail réel de l'élément augmente également et ce de manière linéaire. Ce taux valant au maximum 109 %, il semble alors acceptable de négliger le poids propre lors du dimensionnement d'une poutre fléchie à section circulaire dans certaines situations. C'est évidemment à l'ingénieur de choisir sa tolérance lors du dimensionnement.

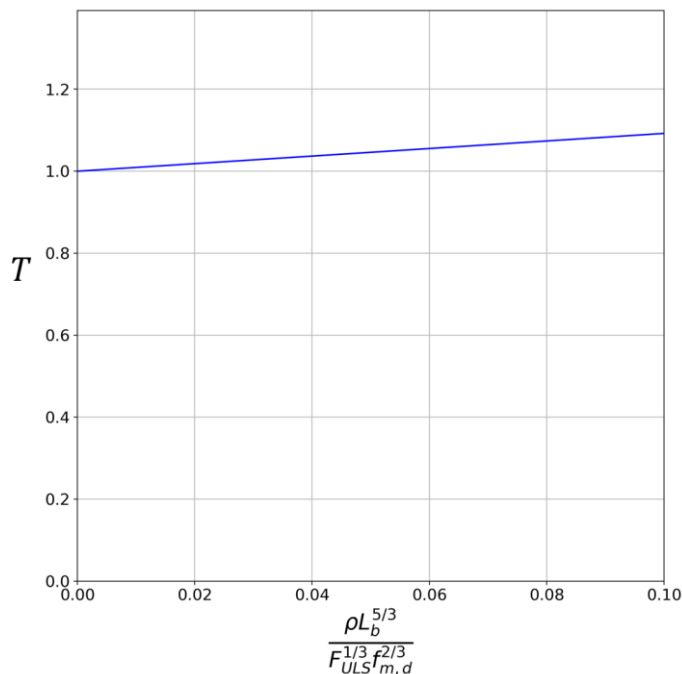


Figure 28 : Poutre fléchie - Taux de travail réel de l'élément, lorsque le poids propre est négligé lors du dimensionnement, en fonction de l'indicateur de poids propre

Exemple d'utilisation de la Figure 28 :

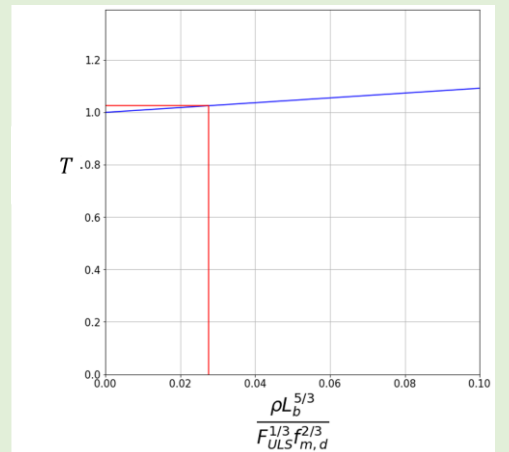
Supposons la situation suivante :

- $L_b = 5 [m]$
- $q_{ULS} = 5000 [N] \rightarrow F_{ULS} = 125\,000 [N]$
- Classe de résistance : C24

Faut-il considérer le poids propre pour dimensionner cette poutre ?

Dans cette situation, l'indicateur de poids propre $\left(\Lambda_{ULS} = \frac{\rho_{ULS} L_b^{5/3}}{F_{ULS}^{1/3} f_{m,d}^{2/3}}\right)$ vaut 0.0275, ce qui correspond à un taux de travail de 1,025.

Il en revient alors au designer de décider s'il néglige le poids propre pour son dimensionnement.



3.1.2 En résumé

Il est possible de résumer tous les développements réalisés pour l'état limite ultime et de rassembler les différents graphiques obtenus en une figure unique (Figure 29). Les graphiques de gauche sont appelés « graphiques projet » et permettent de comparer directement plusieurs classes de résistance entre elles. Ces graphiques permettent également de pouvoir rapidement connaître l'impact sur le coût d'un projet en fonction du choix de la classe de résistance. Les graphiques de droite sont appelés « graphiques adimensionnels » et sont universels. Ils sont donc utilisables peu importe le matériau considéré, tant que l'élément étudié est une poutre fléchie circulaire chargée uniformément. Les graphiques supérieurs fournissent une information liée au volume alors que les graphiques inférieurs donnent une information sur le poids de la structure.

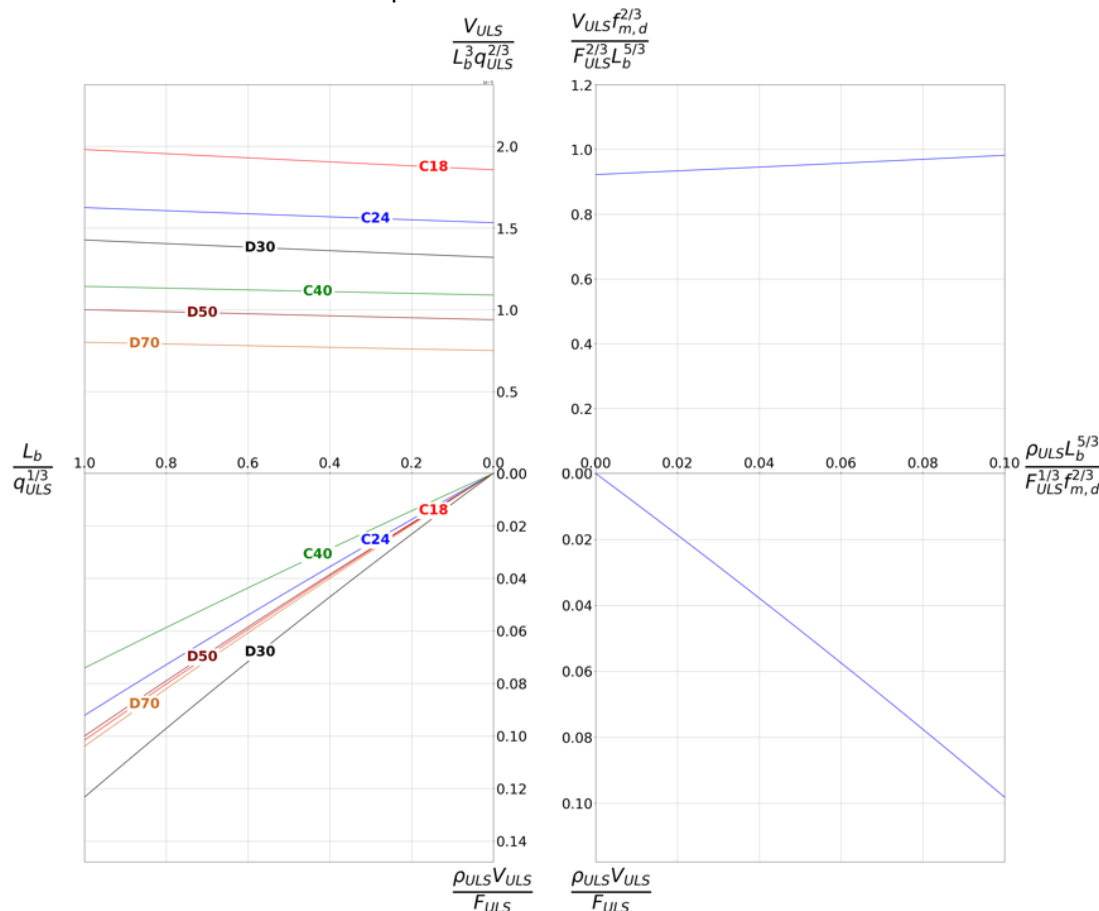


Figure 29 : Poutre fléchie - Résumé de l'analyse à l'état limite ultime (ULS)

Conclusion :

Lorsque le poids propre est négligé, l'indicateur de volume a toujours la même valeur, $W_{ULS} = 0,923$, alors qu'il augmente lorsque l'indicateur de poids propre augmente. De plus, la différence de volume entre l'analyse négligeant le poids propre et celle considérant le poids propre est au maximum de 6,32%.

Le taux de travail réel maximal d'une poutre fléchie à section circulaire dimensionnée en négligeant le poids propre est de 1,09. Il en revient alors au designer de décider s'il néglige le poids propre lors du dimensionnement, s'il le prend en compte ou s'il réduit la résistance du matériau lors du dimensionnement en négligeant le poids propre.

La classe de résistance D70 minimise le volume de matière dans toutes les situations du domaine du champ d'application. Il est possible de classer les classes de résistance en fonction du volume nécessaire pour reprendre une charge F :

$$D70 < D50 < C40 < D30 < C24 < C18$$

D'autre part, la classe de résistance C40 minimise le poids de la poutre pour reprendre une charge extérieure, F . Il est possible de classer les classes de résistances en fonction du poids de la poutre nécessaire pour reprendre une charge F :

$$C40 < C24 < D50 < C18 < D70 < D30$$

3.2 Optimisation du volume de bois d'une poutre fléchie en fonction de la flèche maximale

L'objectif de cette partie est d'optimiser le volume de bois d'une poutre fléchie en fonction de la flèche :

$$\begin{cases} \delta = \frac{5q_L L_b^4}{384E_{0,m}I} \\ V = \frac{\pi\phi^2}{4} L_b \end{cases}$$

Où $q_L = \frac{F+\rho V}{L_b}$ est la charge répartie à reprendre par la poutre et $I = \frac{\pi\phi^4}{64}$ l'inertie de notre poutre. En utilisant ces expressions dans l'expression de la flèche, le système peut se réécrire :

$$\begin{cases} \delta = \frac{5(\rho V + F)L_b^3}{384E_{0,m}} \frac{64}{\pi\phi^4} \\ V = \frac{\pi\phi^2}{4} L_b \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \phi^2 = \left(\frac{5(\rho V + F)L_b^3}{6\pi E_{0,m}\delta} \right)^{1/2} \\ V = \frac{\pi\phi^2}{4} L_b \end{cases}$$

En insérant l'expression de ϕ^2 , obtenue avec la flèche, dans l'expression du volume, ce dernier peut être exprimé de manière implicite en fonction de la flèche :

$$\begin{aligned} V &= \frac{\pi^{1/2}}{4} \left(\frac{5}{6} \right)^{1/2} (\rho V + F)^{1/2} \frac{L_b^2}{E_{0,m}^{1/2}} \left(\frac{L_b}{\delta} \right)^{1/2} = \frac{\pi^{1/2}}{4} \left(\frac{5}{6} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho V}{F} + 1 \right)^{1/2} \frac{L_b^2 F^{1/2}}{E_{0,m}^{1/2}} \left(\frac{L_b}{\delta} \right)^{1/2} \\ V &= 0,405 \left(\frac{\rho V}{F} + 1 \right)^{1/2} \left(\frac{L_b}{\delta} \right)^{1/2} \frac{L_b^2 F^{1/2}}{E_{0,m}^{1/2}} \end{aligned} \quad (2a)$$

Cette égalité peut être réécrite sous forme adimensionnelle, en faisant apparaître l'indicateur de volume $W_\delta = \frac{VE_{0,m}^{1/2}}{L_b^2 F^{1/2}}$, ce qui donne :

$$W_\delta = \frac{VE_{0,m}^{1/2}}{L_b^2 F^{1/2}} = 0,405 \left(\frac{L_b}{\delta} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho V}{F} + 1 \right)^{1/2}$$

En remarquant que $\frac{\rho V}{F} = \frac{\rho L_b^2}{F^{1/2} E_{0,m}^{1/2}} \frac{V E_{0,m}^{1/2}}{F^{1/2} L_b^{1/2}} = \frac{\rho L_b^2}{F^{1/2} E_{0,m}^{1/2}} W_\delta$, l'expression de l'indicateur de volume peut alors s'écrire de manière implicite :

$$W_\delta = \frac{V E_{0,m}^{1/2}}{L_b^2 F^{1/2}} = 0,405 \left(\frac{L_b}{\delta} \right)^{1/2} \left(\frac{\rho L_b^2}{F^{1/2} E_{0,m}^{1/2}} W_\delta + 1 \right)^{1/2}$$

Où le terme $\frac{\rho L_b^2}{F^{1/2} E_{0,m}^{1/2}}$ est appelé **indicateur de poids propre à l'état limite de service** et sera noté Λ_δ dans la suite de ce document. Cet indicateur représente l'importance du poids propre de la structure par rapport aux charges extérieures et sera davantage discuté dans la section 3.2.1.1.

L'expression implicite de l'indicateur de volume devient alors :

$$W_\delta = \frac{V E_{0,m}^{1/2}}{L_b^2 F^{1/2}} = 0,405 \left(\frac{L_b}{\delta_{max}} \right)^{1/2} (\Lambda_\delta W_\delta + 1)^{1/2} \quad (2b)$$

L'expression (2b) fournit le volume adimensionnel d'une poutre fléchie à section circulaire, de longueur L_b soumise à son poids propre et à une charge totale F , dont la flèche vaut δ .

L'expression (2b) évaluée à l'état limite de service s'écrit :

$$W_{SLS} = \frac{V_{SLS} E_{0,m}^{1/2}}{L_b^2 F_{SLS}^{1/2}} = 0,405 \left(\frac{L_b}{\delta} \right)^{1/2} (\Lambda_{SLS} W_{SLS} + 1)^{1/2} \quad (2c)$$

Afin de tracer des courbes représentatives du champ d'application souhaité, plusieurs hypothèses doivent être prises dans le but de borner l'indicateur de poids propre $\Lambda_{SLS} = \frac{\rho L_b^2}{F_{SLS}^{1/2} E_{0,m}^{1/2}}$:

- **Le matériau (ρ et $E_{0,m}$)** : Tout d'abord, ce mémoire ayant pour but de s'intéresser aux éléments en grumes, certaines classes de résistance de bois ont été choisies, en supposant que le bois soit classé selon la norme EN338. Les caractéristiques de ces dernières sont reprises dans le Tableau 2.

	Résineux			Feuillus		
	C18	C24	C40	D30	D50	D70
$E_{0,m} [MPa]$	9000	11000	14000	11000	14000	20000
$\rho [N/m^3]$	3800	4200	4800	6400	7400	9600
$\frac{\rho}{E_{0,m}^{1/2}} \left[\frac{N^{1/2}}{m^2} \right]$	0,040	0,040	0,041	0,061	0,063	0,068

Tableau 2 : Valeurs caractéristiques du module de Young et valeurs moyennes du poids volumique de différentes classes de résistance du bois selon la norme EN338

- **Le chargement extérieur (q_{SLS})** : Tout comme lors de l'analyse à l'état limite ultime, il est supposé que la poutre étudiée reprend à elle seule un plancher de dimension $L_b \times L_b$ soumis à une charge surfacique q_{SLS} . La situation est représentée à la Figure 30. Sur base des recommandations de l'Eurocode [15], l'intervalle de charge surfacique est choisi tel que $q_{SLS} \in [2; 12] [kN/m^2]$
- **La géométrie (L_b)** : En ce qui concerne les longueurs caractéristiques considérées, l'intervalle de valeur est choisi tel que $L_b \in [2; 10] [m]$. De plus, plusieurs valeurs du rapport $\frac{L_b}{\delta}$ sont

utilisées. D'une part, une valeur $\frac{L_b}{\delta_{max}} = 500$ [/] et d'autre part une valeur plus faible valant $\frac{L_b}{\delta_{max}} = 250$ [/].

Il est alors possible de borner les valeurs de l'indicateur de poids propre $\Lambda_{SLS} = \frac{\rho_{SLS} L_b^2}{F_{SLS}^{1/2} E_{0,m}^{1/2}} = \frac{\rho_{SLS}}{E_{0,m}^{1/2}} \frac{L_b}{q_{SLS}^{1/2}}$. La borne supérieure est obtenue en utilisant la classe de résistance pour laquelle le rapport $\rho_{SLS}/E_{0,m}^{1/2}$ est le plus grand, soit le D70, une longueur $L_b = 10$ [m] et une charge surfacique $q_{SLS} = 2$ [kN/m²]. Ces valeurs fournissent la valeur $\Lambda_{SLS,max} = 0,0152$ [/]. La borne inférieure est quant à elle obtenue en utilisant la classe de résistance pour laquelle le rapport $\rho/E_{0,m}^{1/2}$ est le plus petit, soit le C18, une longueur $L_b = 2$ [m] et une charge surfacique $q_{SLS} = 12$ [kN/m²]. En combinant ces données, la borne inférieure de l'indicateur de poids propre vaut alors $\Lambda_{SLS,min} = 0,00073$ [/]. L'intervalle de valeur de l'indicateur de poids propre, correspondant au champ d'application souhaité, est donné par $\Lambda_{SLS} \in [0,00073; 0,0152]$.

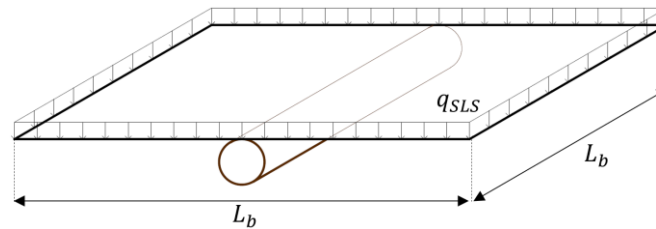


Figure 30 : Poutre simple – Schéma de la situation étudiée - SLS

La Figure 31 représente l'expression (2c) de l'indicateur de volume en fonction de l'indicateur de poids propre, en bleu, pour une valeur de $\frac{L_b}{\delta_{max}} = 250$ à gauche et pour une valeur de $\frac{L_b}{\delta_{max}} = 500$ à droite. La courbe en pointillés rouge représente la valeur de l'indicateur de volume obtenue lorsque le poids propre est négligé.

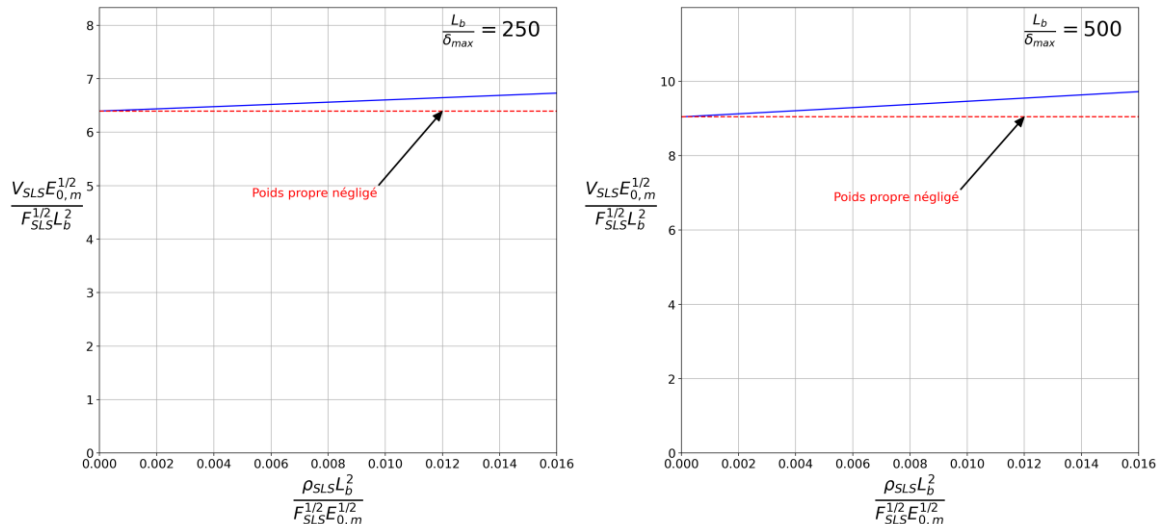


Figure 31 : Poutre fléchie – Indicateur de volume en fonction de l'indicateur de poids propre

$\frac{L_b}{\delta_{max}} = 250$ (à gauche) - $\frac{L_b}{\delta_{max}} = 500$ (à droite)

La Figure 31, permet d'observer que lorsque l'indicateur de poids propre augmente, alors il y a une augmentation de l'indicateur de volume, allant jusqu'à une hausse de 5,2% pour $\frac{L_b}{\delta_{max}} = 250$ et 7,5% pour $\frac{L_b}{\delta_{max}} = 500$ par rapport au cas où le poids propre est négligé.

3.2.1 Interprétation et discussion

Cette section a différents objectifs :

- Comprendre ce que l'indicateur de poids propre représente et comment l'interpréter, en s'intéressant à l'efficacité matérielle $\rho V/F$. En même temps, l'importance du poids propre en fonction de la classe de résistance sera discutée.
- Analyser si une classe de résistance minimise le volume de matière nécessaire dans toutes les situations considérées.

3.2.1.1 Efficacité matérielle ($\rho V/F$)

Dans un premier temps, il est nécessaire de comprendre ce que représente l'indicateur de poids propre physiquement. Pour cela, il est possible de lier l'indicateur de poids propre, Λ_δ , et l'efficacité matérielle, $\rho V/F$ en partant de l'équation (2a) :

$$V = 0,405 \left(\frac{\rho V}{F} + 1 \right)^{1/2} \left(\frac{L_b}{\delta} \right)^{1/2} \frac{L_b^2 F^{1/2}}{E_{0,m}^{1/2}}$$

Cette égalité peut être réécrite afin d'exprimer l'efficacité matérielle ($\rho V/F$) de manière implicite :

$$\frac{\rho V}{F} = 0,405 \left(\frac{\rho V}{F} + 1 \right)^{1/2} \left(\frac{L_b}{\delta} \right)^{1/2} \frac{\rho L_b^2}{F^{1/2} E_{0,m}^{1/2}}$$

En observant que l'indicateur de poids propre, $\Lambda_\delta = \frac{\rho L_b^2}{F^{1/2} E_{0,m}^{1/2}}$, apparaît, il est alors possible d'exprimer l'efficacité matérielle en fonction de l'indicateur de poids propre de manière implicite :

$$\frac{\rho V}{F} = 0,405 \left(\frac{\rho V}{F} + 1 \right)^{1/2} \left(\frac{L_b}{\delta} \right)^{1/2} \Lambda_\delta$$

En évaluant cette expression à l'état limite de service :

$$\frac{\rho_{SLS} V_{SLS}}{F_{SLS}} = 0,405 \left(\frac{\rho_{SLS} V_{SLS}}{F_{SLS}} + 1 \right)^{1/2} \left(\frac{L_b}{\delta_{max}} \right)^{1/2} \Lambda_{SLS} \quad (2d)$$

La Figure 32 représente l'expression (2d) de l'efficacité matérielle $\left(\frac{\rho_{SLS} V_{SLS}}{F_{SLS}} \right)$ en fonction de l'indicateur de poids propre $\left(\Lambda_{SLS} = \frac{\rho_{SLS} L_b^2}{F_{SLS}^{1/2} E_{0,m}^{1/2}} \right)$, pour une valeur de $\frac{L_b}{\delta_{max}} = 250$ et une valeur de $\frac{L_b}{\delta_{max}} = 500$.

La relation liant ces deux nombres adimensionnels ($\rho_{SLS} V_{SLS}/F_{SLS}$ et Λ_{SLS}) est presque linéaire. L'indicateur de poids propre à l'état limite de service représente donc une image de l'efficacité matérielle réelle. Cela signifie que, au plus l'indicateur de poids propre est élevé, au plus le poids de la structure (ρV) nécessaire est grand pour reprendre la force totale extérieure F et respecter le critère de flèche. De manière plus directe, l'efficacité matérielle à l'état limite de service peut être vue à travers le rapport $\rho/E_{0,m}^{1/2}$ étant donné que ce dernier représente le poids volumique du matériau considéré divisé par son module de Young moyen.

L'interprétation est donc similaire à celle faite lors de l'analyse à l'état limite ultime. Il y a donc une efficacité matérielle liée à la rupture de l'élément (ULS) et une efficacité matérielle liée à la déformation de l'élément (SLS).

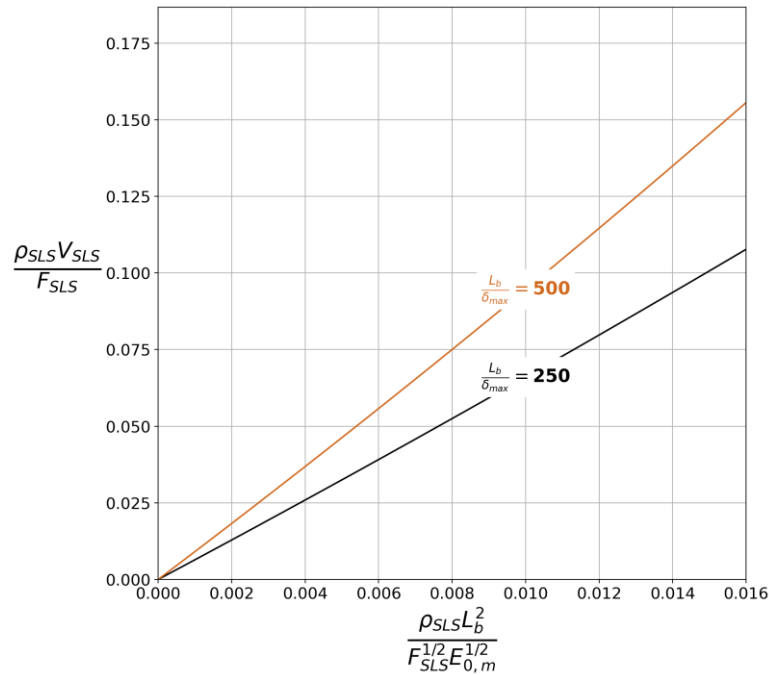


Figure 32 : Poutre fléchie – Efficacité matérielle ($\rho_{SLS} V_{SLS} / F_{SLS}$), en fonction de l'indicateur de poids propre (Λ_{SLS})

Exemple d'utilisation de la Figure 32:

Supposons la situation suivante :

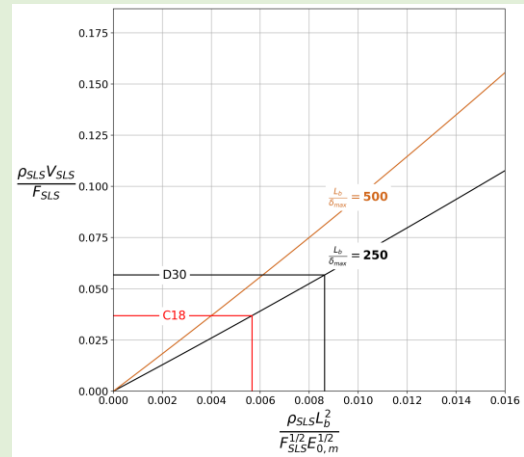
- $L_b = 10$ [m]
- $q_{SLS} = 5000$ [N/m^2] $\rightarrow F_{SLS} = 500\,000$ [N]
- $\frac{L_b}{\delta_{max}} = 250$

Pour cette situation, l'indicateur de poids propre ($\Lambda_{SLS} = \frac{\rho_{SLS} L_b^2}{F_{SLS}^{1/2} E_{0,m}^{1/2}}$) des classes de résistance C18 et D30 vaut respectivement 0,0057 et 0,0086.

Graphiquement, $\left(\frac{\rho V}{F}\right)_{C18} < \left(\frac{\rho V}{F}\right)_{D30}$ tout comme $\Lambda_{C18} < \Lambda_{D30}$.

Donc, si $\Lambda_i < \Lambda_j$ alors $\left(\frac{\rho V}{F}\right)_i < \left(\frac{\rho V}{F}\right)_j$

Λ représente bien une image de l'efficacité matérielle $\rho V / F$.



Dans un second temps, il est également possible d'exprimer l'efficacité matérielle en fonction des données du problème (L_b et F) pour différentes classes de résistance. Pour ce faire, il suffit de repartir de l'expression (2d), en se rappelant que $\Lambda_{SLS} = \frac{\rho_{SLS} L_b^2}{F_{SLS}^{1/2} E_{0,m}^{1/2}}$:

$$\frac{\rho_{SLS} V_{SLS}}{F_{SLS}} = 0,405 \left(\frac{\rho_{SLS} V_{SLS}}{F_{SLS}} + 1 \right)^{1/2} \left(\frac{L_b}{\delta_{max}} \right)^{1/2} \frac{L_b^2}{F_{SLS}^{1/2} E_{0,m}^{1/2}} \rho$$

En utilisant la relation $F = q L_b^2$, l'expression ci-dessus peut être réécrite :

$$\frac{\rho_{SLS} V_{SLS}}{F_{SLS}} = 0,405 \left(\frac{\rho_{SLS} V_{SLS}}{F_{SLS}} + 1 \right)^{1/2} \left(\frac{L_b}{\delta_{max}} \right)^{1/2} \frac{L_b}{q_{SLS}^{1/2} E_{0,m}^{1/2}} \rho_{SLS} \quad (2e)$$

La Figure 33 représente l'expression (2e) de l'efficacité matérielle ($\rho_{SLS}V_{SLS}/F_{SLS}$) en fonction du rapport $L_b/q_{SLS}^{1/2}$ pour différentes classes de résistance de bois, pour un rapport de $\frac{L_b}{\delta_{max}}$ valant 250 à gauche et 500 à droite. Il est donc possible d'observer que, pour une situation donnée (L_b et q_{SLS} connus), les classes de résistance C40, C18 et C24 sont les plus efficaces et se valent. D'autre part, la classe de résistance qui semble la moins efficace est le D70. C'est-à-dire que pour reprendre une même charge F_{ULS} , un élément de classe de résistance D70 pèsera plus lourd qu'un élément d'une autre classe de résistance. Cette observation permet d'appuyer le fait que le rapport $\rho/E_{0,m}^{1/2}$ détermine l'efficacité matérielle d'un matériau par rapport à un autre, à l'état limite de service. Ces graphiques permettent d'obtenir une information directement sur la différence de poids entre deux classes de résistance. Cette information peut être importante, par exemple pour connaître le type de transport à utiliser, ce qui peut avoir un impact sur le coût du projet.

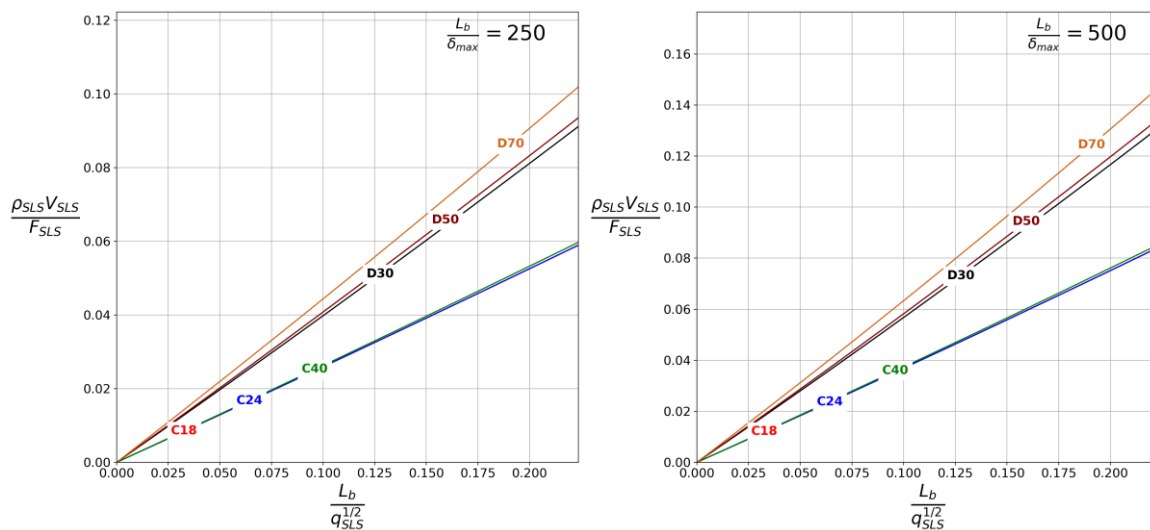


Figure 33 : Poutre fléchie - Efficacité matérielle ($\rho_{SLS}V_{SLS}/F_{SLS}$) en fonction de données du problème, $L_b/q_{SLS}^{1/3}$, pour différentes classes de résistance – A gauche : $\frac{L_b}{\delta_{max}} = 250$; A droite : $\frac{L_b}{\delta_{max}} = 500$

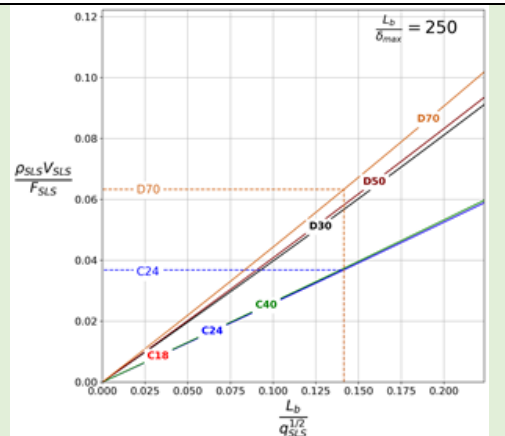
Exemple d'utilisation de la Figure 33:

Supposons la situation suivante :

- $L_b = 10$ [m]
- $q_{SLS} = 5000$ [N/m^2]
- $\frac{L_b}{\delta_{max}} = 250$

Pour cette situation, le rapport $L_b/q_{SLS}^{1/2}$ vaut donc $0,14 \left[\frac{m^2}{N^{1/2}} \right]$.

Si l'élément est du D70, il pèsera donc plus de 1,5 fois le poids d'un élément qui serait du C24, pour reprendre la même charge F_{SLS} .



3.2.1.2 Volume de matière

Chaque classe de résistance ayant son propre module de Young et son propre poids volumique, il est également intéressant de se demander si une classe minimise le volume de matière nécessaire dans toutes les situations du champ d'application étudié. Pour ce faire, le point de départ est l'expression (2a) :

$$V = 0,405 \left(\frac{\rho V}{F} + 1 \right)^{1/2} \left(\frac{L_b}{\delta} \right)^{1/2} \frac{L_b^2 F^{1/2}}{E_{0,m}^{1/2}}$$

Où $F = qL_b^2$,

$$V = 0,405 \left(\frac{\rho V}{qL_b^2} + 1 \right)^{1/2} \left(\frac{L_b}{\delta} \right)^{1/2} \frac{L_b^3 q^{1/2}}{E_{0,m}^{1/2}}$$

$$\frac{V}{L_b^3 q^{1/2}} = 0,405 \left(\rho \frac{V}{q^{1/2} L_b^3} \frac{L_b}{q^{1/2}} + 1 \right)^{1/2} \left(\frac{L_b}{\delta} \right)^{1/2} \frac{1}{E_{0,m}^{1/2}}$$

L'expression ci-dessus fournit un nombre, $\frac{V}{L_b^3 q^{1/2}}$, qui n'a pas de signification physique, représentant le volume de matière (V) nécessaire divisé par des données du problème (L_b et q). L'expression évaluée à l'état limite de service s'écrit :

$$\frac{V_{SLS}}{L_b^3 q_{SLS}^{1/2}} = 0,405 \left(\rho_{SLS} \frac{V_{SLS}}{q_{SLS}^{1/2} L_b^3} \frac{L_b}{q_{SLS}^{1/2}} + 1 \right)^{1/2} \left(\frac{L_b}{\delta} \right)^{1/2} \frac{1}{E_{0,m}^{1/2}} \quad (2f)$$

Cette dernière égalité fournit donc l'expression d'un nombre, $\frac{V_{SLS}}{L_b^3 q_{SLS}^{1/2}}$, qui n'a pas de signification physique, de manière implicite, en fonction du rapport $L_b/q_{SLS}^{1/2}$, qui est une donnée du problème, et ce pour différentes classes de résistance.

La Figure 34 représente l'expression (2f) du nombre $\frac{V_{SLS}}{L_b^3 q_{SLS}^{1/2}}$ en fonction de données du problème, $L_b/q_{SLS}^{1/2}$, pour différentes classes de résistance pour un rapport de $\frac{L_b}{\delta_{max}}$ valant 250 à gauche et 500 à droite.

Sur ces graphiques, ni les abscisses ($L_b/q_{SLS}^{1/2}$), ni les ordonnées ($\frac{V_{SLS}}{L_b^3 q_{SLS}^{1/2}}$) ne représentent quelque chose physiquement. Le nombre $\frac{V_{SLS}}{L_b^3 q_{SLS}^{1/2}}$ peut être interprété comme une image du volume. Ces graphiques permettent donc d'obtenir une information directe sur le volume, grâce au nombre $\frac{V_{SLS}}{L_b^3 q_{SLS}^{1/2}}$, en fonction

de données de la situation, reprises dans le rapport $L_b/q_{SLS}^{1/2}$. Il est alors possible de comparer différents matériaux afin de savoir lequel minimise le volume nécessaire pour une situation donnée. Dans la gamme d'utilisation définie précédemment, il y a donc bien une classe de résistance qui minimise le volume de bois nécessaire dans tous les cas : le D70. A contrario, la classe de résistance C18 maximise le volume dans toutes les situations. Ces graphiques permettent de rapidement connaître la différence de volume nécessaire entre deux classes de résistance pour une situation (L_b et q_{SLS}) donnée. En connaissant le prix de chacune des classes de résistance il est donc possible d'estimer l'impact du choix de la classe de résistance choisie sur le coût du projet. Cet aspect est davantage discuté dans la section 8.

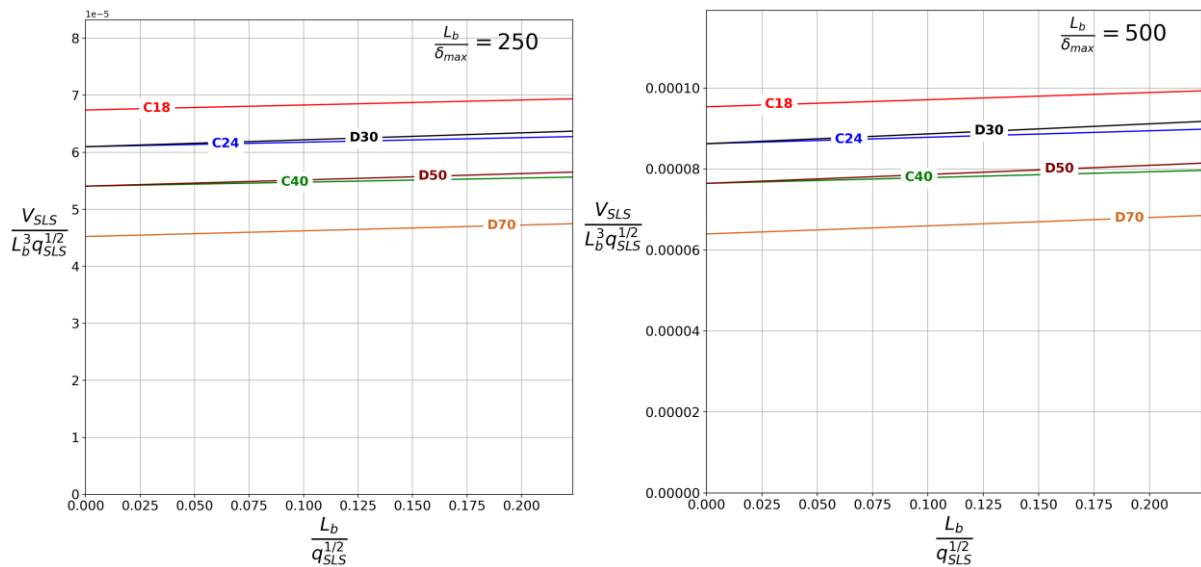


Figure 34 : Poutre fléchie - Volume en fonction de paramètres du problème pour différentes classes de résistance

Exemple d'utilisation de la Figure 34 :

Supposons la situation suivante:

- $L_b = 5 [m]$
- $q_{SLS} = 5000 [N/m^2]$
- $\frac{L_b}{\delta_{max}} = 250$

Pour cette situation, le rapport $L_b/q_{SLS}^{1/2}$ vaut donc $0,07 \left[\frac{m^2}{N^{1/2}} \right]$. Il est possible d'obtenir la valeur de $\frac{V_{SLS}}{L_b^3 q_{SLS}^{1/2}}$ pour différentes classes de résistance, par exemple le D70 et le C18. Ce nombre vaut respectivement $4,6 \cdot 10^{-5}$ et $6,8 \cdot 10^{-5}$. Il est dès lors possible d'obtenir le volume qui est donné par :

$$V_{SLS,D70} = 4,6 \cdot 10^{-5} \cdot L_b^3 q_{SLS}^{1/2} = 0,407 [m^3]$$

$$V_{SLS,C18} = 6,8 \cdot 10^{-5} \cdot L_b^3 q_{SLS}^{1/2} = 0,601 [m^3]$$

Il y a donc un peu moins d'un facteur 1,5 entre le volume nécessaire de ces 2 classes de résistance. En terme de diamètre de section nécessaire, cela donne :

$$\phi_{SLS,D70} = \sqrt{\frac{4V_{SLS,D70}}{\pi L_b}} = 0,32 [m]$$

$$\phi_{SLS,C18} = \sqrt{\frac{4V_{SLS,C18}}{\pi L_b}} = 0,39 [m]$$

La différence de dimension des éléments varie donc en fonction de la classe de résistance.

3.2.2 En résumé

Il est possible de résumer tous les développements réalisés pour l'état limite de service et de rassembler les différents graphiques obtenus en une figure unique (Figure 35). Sur cette figure, il s'agit des graphiques correspondant au critère de flèche $\frac{L_b}{\delta_{max}} = 250$. Le cas de $\frac{L_b}{\delta_{max}} = 500$ est repris dans l'Annexe A. Les graphiques de gauche sont appelés « graphiques projets » et permettent de comparer directement plusieurs classes de résistance entre elles. Les informations obtenues à partir de ces graphiques peuvent alors directement être liées à une notion de prix. Les graphiques de droite sont appelés « graphiques adimensionnels » et sont universels. Ils sont donc utilisables peu importe le

matériau considéré, tant que l'élément étudié est une poutre fléchie circulaire chargée uniformément. Les graphiques supérieurs fournissent une information liée au volume alors que les graphiques inférieurs donnent une information sur le poids de la structure afin de respecter le critère de flèche choisi.

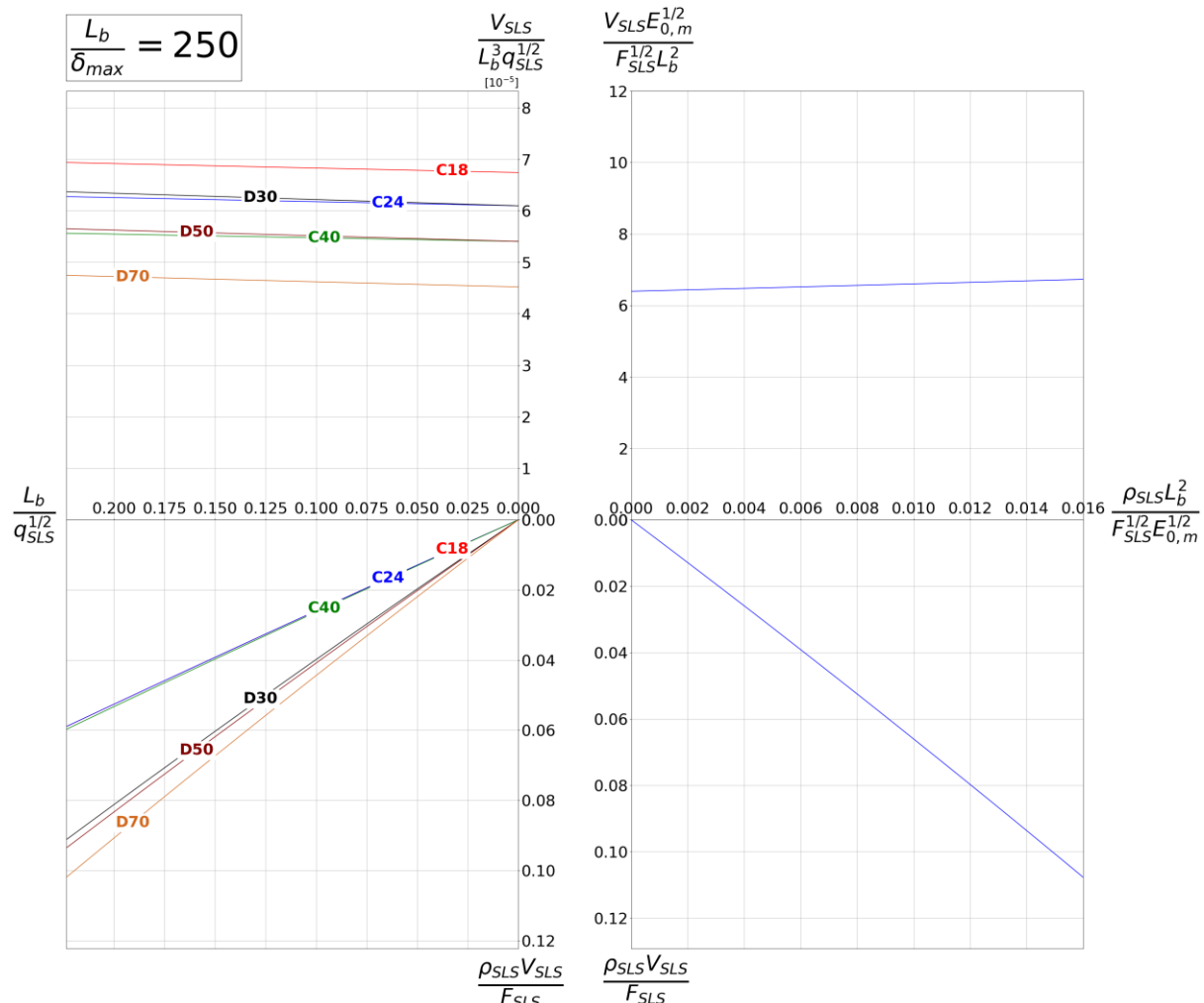


Figure 35 : Poutre fléchie - Résumé de l'analyse à l'état limite de service (SLS)

Conclusion :

Lorsque le poids propre est négligé, l'indicateur de volume a toujours la même valeur pour un critère $\frac{L_b}{\delta_{max}}$ donné alors qu'il augmente lorsque l'indicateur de poids propre augmente. De plus, il augmente d'autant plus que le critère $\frac{L_b}{\delta_{max}}$ est grand. Par exemple, il y a une augmentation de l'indicateur de volume, allant jusqu'à une hausse de 5,2% lorsque $\frac{L_b}{\delta_{max}} = 250$ et de 7,5% lorsque $\frac{L_b}{\delta_{max}} = 500$ lorsque le poids propre est pris en compte par rapport au cas où le poids propre est négligé.

Tout comme cela a été fait pour l'analyse à l'état limite ultime, il est possible de classer les différentes classes de résistance considérées en fonction de leur volume et de leur efficacité matérielle pour reprendre une certaine charge F_{SLS} .

La classe de résistance D70 minimise le volume de matière dans toutes les situations du domaine de champ d'application considéré. Le classement des classes de résistance nécessitant le moins de volume pour une situation connue est donné par :

$$D70 < C40 < D50 < C24 < D30 < C18$$

D'autre part, les classes de résistance minimisant le poids de la poutre pour reprendre une charge extérieure, F , sont les C18, C24 et C40. Le classement des classes de résistance nécessitant le moins de poids pour une situation connue est donné par :

$$C24 < C18 < C40 < D30 < D50 < D70$$

Les deux classements définis ci-dessus sont indépendants du critère de flèche défini.

3.3 Conclusion intermédiaire

Pour conclure l'analyse d'une simple poutre fléchie à section circulaire soumise à une charge uniformément répartie et à son propre poids, il est possible de résumer toutes les analyses réalisées. Des expressions ont été obtenues afin d'exprimer le volume de manière adimensionnelle, à l'aide d'un indicateur de volume W , en fonction d'un indicateur de poids propre, Λ . Ce dernier représente l'importance du poids propre de la poutre pour reprendre une certaine charge et respecter le critère étudié (ULS ou SLS). Que ce soit l'analyse à l'état ultime ou à l'état limite de service, il a été démontré qu'en tenant compte du poids propre dans le dimensionnement, les résultats diffèrent de l'analyse où le poids propre est négligé. En effet, le volume nécessaire augmente en tenant compte du poids propre. De plus, le taux de travail réel d'une poutre fléchie circulaire dimensionnée en négligeant son poids propre est au maximum de 1,09.

Par ailleurs, des analyses ont été menées dans le but de comparer différentes classes de résistance entre elles. Dans un premier temps, l'efficacité matérielle $\left(\frac{\rho V}{F}\right)$ a été étudiée afin de connaître l'importance du poids propre de l'élément (ρV) par rapport à la charge extérieure (F) . Dans un second temps, le volume de matière a été analysé pour pouvoir comparer les dimensions de différentes classes pour reprendre une certaine charge F . Ces analyses permettent aussi une comparaison rapide sur l'impact que la classe de résistance a sur le prix du projet, pour autant que cet aspect soit connu. En effet, le poids des éléments a une influence sur le coût du transport et des machineries nécessaires pour sa manutention. Par ailleurs, si le prix au mètre cube de matériau est connu, la comparaison entre deux classes de résistance peut s'effectuer rapidement sur base du volume.

La **Figure 36** représente l'ensemble des résultats obtenus dans le monde adimensionnel en regroupant tous les « **graphiques adimensionnels** ». La partie de gauche représente l'analyse à l'état limite ultime (ULS) alors que la partie de droite représente l'analyse à l'état limite de service (SLS). Les graphiques supérieurs représentent l'indicateur de volume en fonction de l'indicateur de poids propre alors que les graphiques inférieurs représentent l'efficacité matérielle en fonction de l'indicateur de poids propre. Ces graphiques peuvent être utilisés peu importe le matériau considéré, tant qu'il s'agit d'une poutre fléchie circulaire uniformément chargée.

La **Figure 37** rassemble l'ensemble des « **graphiques projets** » qui permettent de choisir un matériau pour une situation connue. La partie de gauche représente l'analyse à l'état limite ultime (ULS) alors que la partie de droite représente l'analyse à l'état limite de service (SLS), pour un critère de flèche $\frac{L_b}{\delta_{max}} = 250$. Les graphiques supérieurs donnent une information sur le volume en fonction de données du projet, pour différentes classes de résistance. Les graphiques inférieurs donnent, quant à eux, une information sur le poids de l'élément par rapport à la charge F à reprendre. À partir de ces graphiques il est donc possible de directement comparer les différentes classes de résistance pour les différents critères et de choisir le matériau le plus adéquat. Comme cela a déjà été dit, ces graphiques sont surtout intéressants afin de pouvoir connaître rapidement l'impact de la classe de résistance sur le coût du projet. La notion de prix sera davantage discutée dans la section 8.

Ces graphiques permettent de conclure que dans toutes les situations, la classe de résistance **D70 minimise le volume** nécessaire alors que la classe de résistance **C40 minimise le poids** de l'élément pour reprendre une certaine charge F .

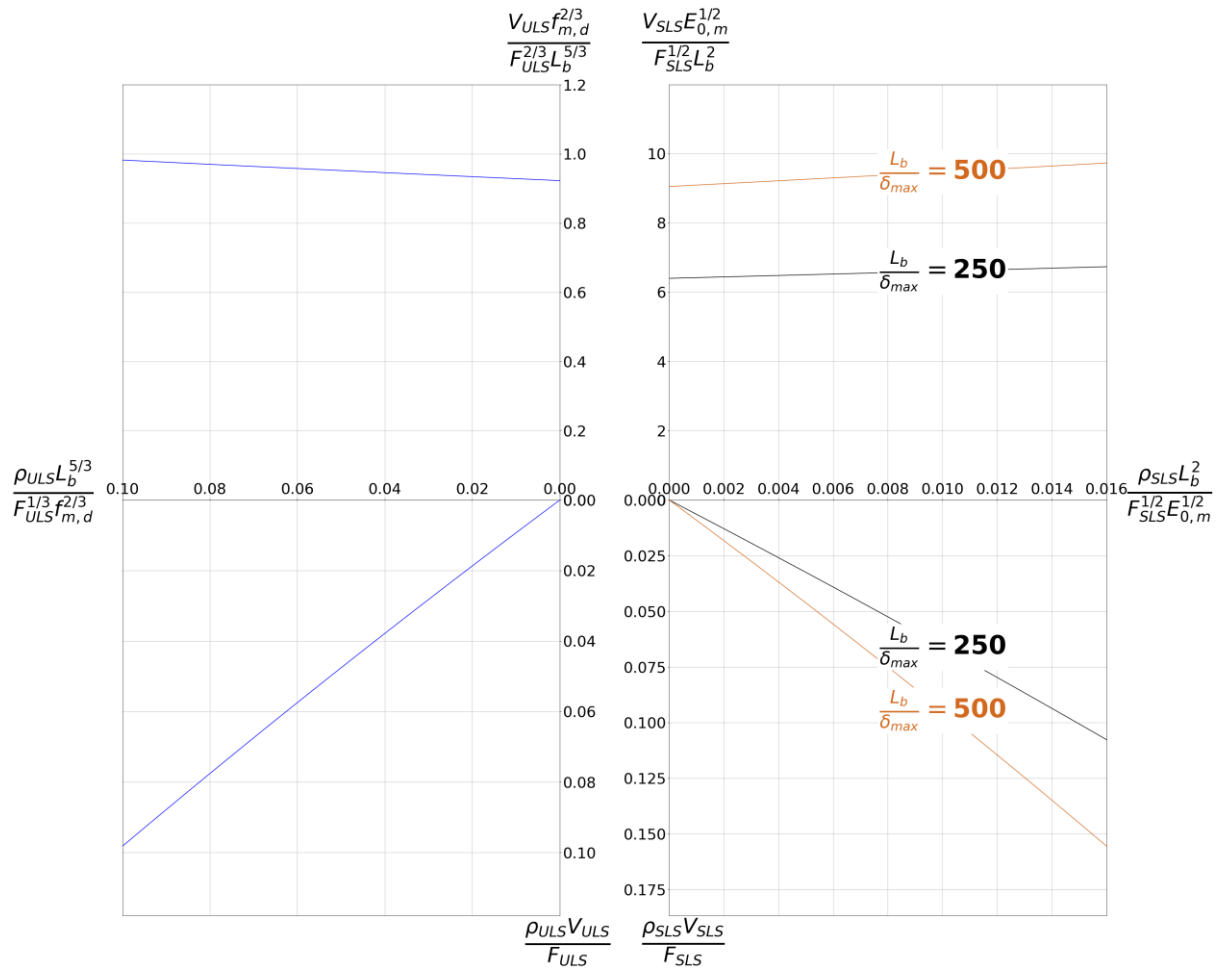


Figure 36 : Poutre fléchie - Résumé de l'analyse adimensionnelle - ULS à gauche - SLS à droite

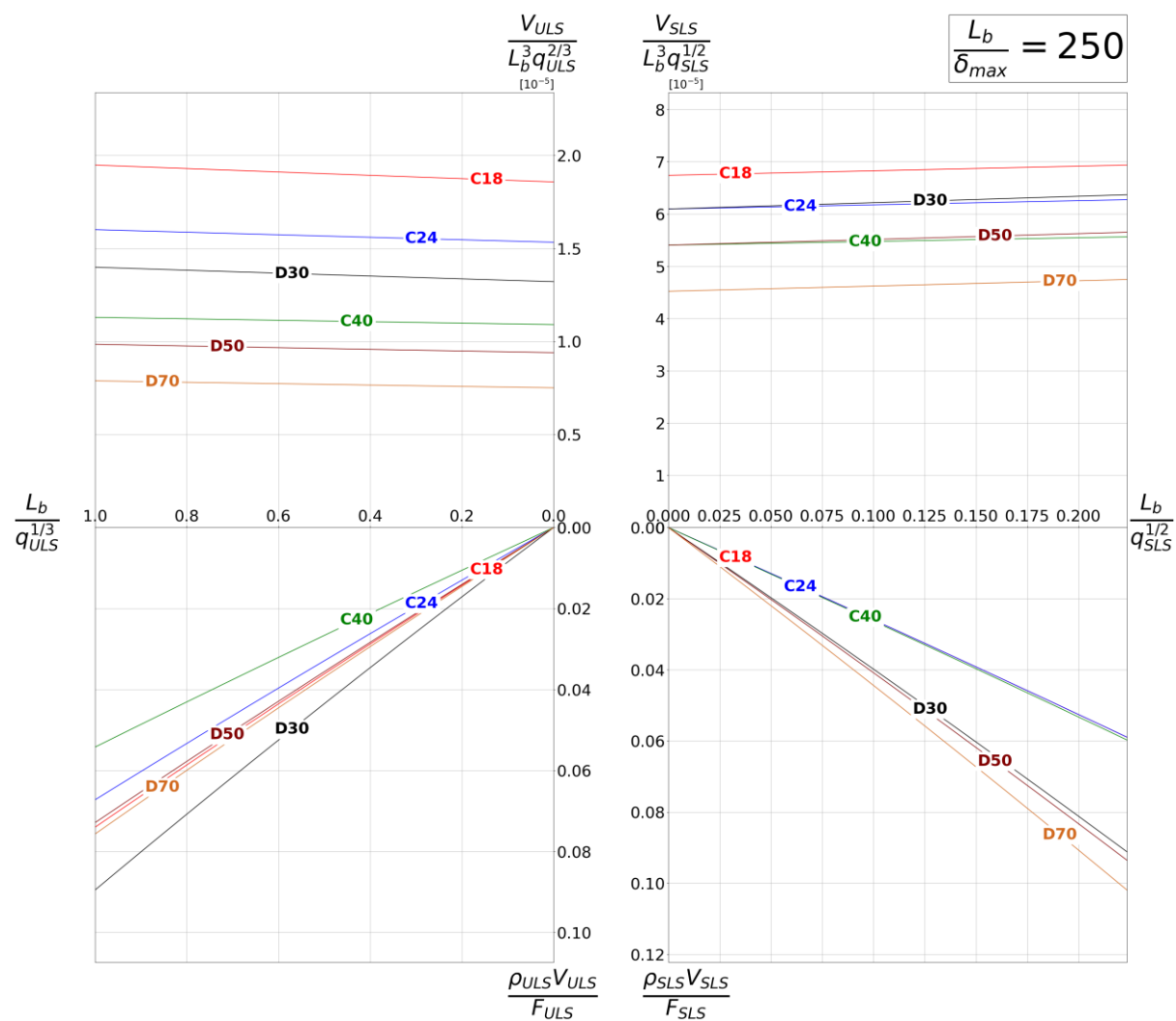


Figure 37 : Poutre fléchie - Résumé de l'analyse "projet" - ULS à gauche - SLS à droite

4 Optimisation du volume de bois d'un plancher composé de poutres parallèles

Dans cette section l'objectif est de s'intéresser aux planchers composés de poutres parallèles couramment utilisés dans la construction. D'une part cela permettra de le comparer à un plancher réciproque. D'autre part, cela permettra de calculer le volume lié à la structure secondaire du plancher réciproque.

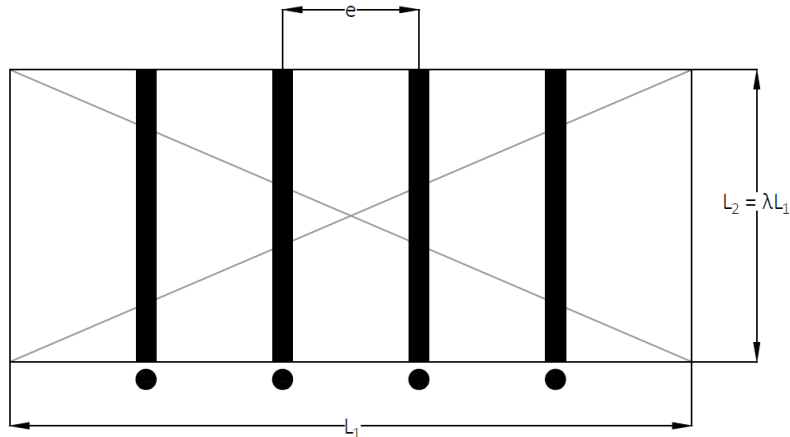


Figure 38 : Plancher classique – Schéma de la situation étudiée

Le plancher étudié est représenté en Figure 38. Il s'agit d'un plancher de dimensions $L_1 \times L_2$, où $L_2 = \lambda L_1$ avec $\lambda \in]0; 1]$ le facteur de proportionnalité entre les longueurs du plancher. Ce dernier est composé de n poutres isostatiques identiques portant selon le plus petit côté. Les poutres ont donc une portée L_2 , une section circulaire pleine et un diamètre ϕ . De plus, les poutres sont espacées les unes des autres d'un entraxe $e = L_1/n$. Le plancher est soumis à une charge surfacique uniformément répartie q [N/m²] telle que $F = q\lambda L_1^2$ [N]. De plus, chaque poutre est également soumise à son poids propre $q_{DW} = \rho V_i/L_2$ [kN/m], avec V_i le volume d'une poutre. En Figure 39 est représenté le schéma statique de chacune des poutres du plancher.

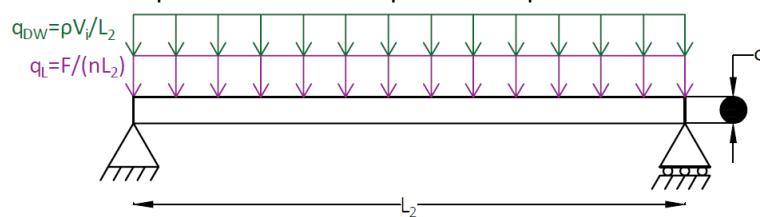


Figure 39 : Plancher classique - Schéma statique d'une poutre du plancher

4.1 Optimisation du volume de bois d'un plancher classique en fonction de la contrainte

Il faut d'abord déterminer la charge linéique qui est reprise par chaque poutre. A partir de la Figure 38, la charge linéique liée à la charge surfacique est donnée par :

$$q = \frac{F}{\lambda L_1^2} \text{ [N/m}^2\text{]} \quad \rightarrow \quad q_L = \frac{F}{\lambda L_1^2} e = \frac{F}{\lambda L_1 n} \left[\frac{\text{N}}{\text{mm}} \right]$$

La charge linéique totale reprise par chaque poutre du plancher vaut alors :

$$q_{L,tot} = q_{DW} + q_L = \frac{\rho V_i + \frac{F}{n}}{\lambda L_1}$$

L'objectif étant d'optimiser le volume du plancher en fonction de la contrainte, le point de départ est à nouveau l'écriture des expressions classiques de la contrainte en flexion et du volume d'un cylindre. En considérant que les poutres du plancher sont isostatiques, le moment maximal est donc donné par $M_{max} = \frac{q_{L,tot}(\lambda L_1)^2}{8} = \frac{(\rho V_i + \frac{F}{n})\lambda L_1}{8}$. De plus, l'inertie d'une poutre à section circulaire est donnée par $I = \frac{\pi \phi^4}{64}$. Les expressions de la contrainte et du volume sont alors données par :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{(\rho V_i + \frac{F}{n}) L_2}{8} \frac{64}{\pi \phi^4} \frac{\phi}{2} \\ V_i = \frac{\pi \phi^2}{4} L_2 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \phi^2 = \left(\frac{(\rho V_i + \frac{F}{n}) L_2}{\sigma} \frac{4}{\pi} \right)^{2/3} \\ V_i = \frac{\pi \phi^2}{4} L_2 \end{cases}$$

En insérant l'expression de ϕ^2 obtenue avec la contrainte dans l'expression du volume, il est possible d'écrire une expression implicite du volume d'une poutre du plancher en fonction de la contrainte :

$$V_i = \left(\frac{\pi}{4} \right)^{1/3} \left(\rho V_i + \frac{F}{n} \right)^{2/3} \frac{L_2^{5/3}}{\sigma^{2/3} n^{2/3}} = \left(\frac{\pi}{4} \right)^{1/3} \frac{1}{n^{2/3}} \left(\frac{\rho V_i}{F} n + 1 \right)^{2/3} \frac{L_2^{5/3} F^{2/3}}{\sigma^{2/3}}$$

En sachant que $V = nV_i$, le volume de bois du plancher est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{V}{n} &= \left(\frac{\pi}{4} \right)^{1/3} \frac{1}{n^{2/3}} \left(\frac{\rho V}{F} n + 1 \right)^{2/3} \frac{L_2^{5/3} F^{2/3}}{\sigma^{2/3}} \\ V &= \left(\frac{\pi}{4} \right)^{1/3} n^{1/3} \left(\frac{\rho V}{F} + 1 \right)^{2/3} \frac{L_2^{5/3} F^{2/3}}{\sigma^{2/3}} \end{aligned} \quad (3a)$$

Cette égalité peut être réécrite sous forme adimensionnelle, ce qui donne :

$$W_\sigma = \frac{V \sigma^{2/3}}{L_2^{5/3} F^{2/3}} = \left(\frac{\pi}{4} \right)^{1/3} n^{1/3} \left(\frac{\rho V}{F} + 1 \right)^{2/3}$$

En remarquant que $\frac{\rho V}{F} = \frac{\rho L_2^{5/3}}{F^{1/3} \sigma^{2/3}} \frac{V \sigma^{2/3}}{F^{2/3} L_2^{5/3}} = \Lambda_\sigma W_\sigma$, il est possible de faire apparaître l'indicateur de poids propre Λ_σ , introduit au point 3.1, et d'obtenir une expression implicite de l'indicateur de volume :

$$W_\sigma = \frac{V \sigma^{2/3}}{L_2^{5/3} F^{2/3}} = \left(\frac{\pi}{4} \right)^{1/3} n^{1/3} (\Lambda_\sigma W_\sigma + 1)^{2/3} \quad (3b)$$

L'expression (3b) donne donc le volume adimensionnel d'un plancher de dimension $L_1 \times L_2$, composé de n poutres parallèles portant selon le plus petit côté. Les poutres sont soumises à leur poids propre et à une charge F répartie telle que la contrainte dans la section la plus sollicitée est σ .

En remplaçant n par L_1/e dans l'expression (3b) et en l'évaluant à l'état limite ultime :

$$W_{ULS} = \frac{V_{ULS} f_{m,d}^{2/3}}{L_2^{5/3} F_{ULS}^{2/3}} = \left(\frac{\pi}{4} \right)^{1/3} \left(\frac{L_1}{e} \right)^{1/3} (\Lambda_{ULS} W_{ULS} + 1)^{2/3} \quad (3c)$$

La Figure 40 représente l'expression (3c) de l'indicateur de volume en fonction du nombre de poutres (représenté par le rapport L_1/e) présentes dans le plancher. Trois courbes sont tracées, la courbe rouge pointillée représente le cas où le poids propre est négligé ($\Lambda_{ULS} = 0$), la courbe verte représente la borne inférieure de l'indicateur de poids propre ($\Lambda_{ULS} = 0.0067$) et la courbe bleue représente la borne supérieure de l'indicateur de poids propre ($\Lambda_{ULS} = 0.098$). Pour rappel, ces bornes ont été

définies en section 3.1. La Figure 40 fournit donc une enveloppe de valeurs d'indicateur de volume dans laquelle se trouve toutes les solutions du champ d'application considéré.

La Figure 41 représente l'expression (3c) de l'indicateur de volume en fonction de l'indicateur de poids propre pour différentes valeurs du nombre de poutres composant le plancher. Ce graphique permet une lecture verticale de la Figure 40, entre la courbe $\Lambda_{ULS} = 0$ et la courbe $\Lambda_{ULS} = 0.098$. C'est-à-dire que pour une valeur de L_1/e donnée, la Figure 41 donne la valeur de l'indicateur de volume pour toutes les valeurs d'indicateur de poids propre comprises entre $\Lambda_{ULS} = 0$ et $\Lambda_{ULS} = 0.098$. Un exemple est représenté en Figure 42 pour une valeur de $L_1/e = 15$. La droite verticale (mauve) tracée sur le graphique de gauche représente la droite associée à $L_1/e = 15$ sur le graphique de droite.

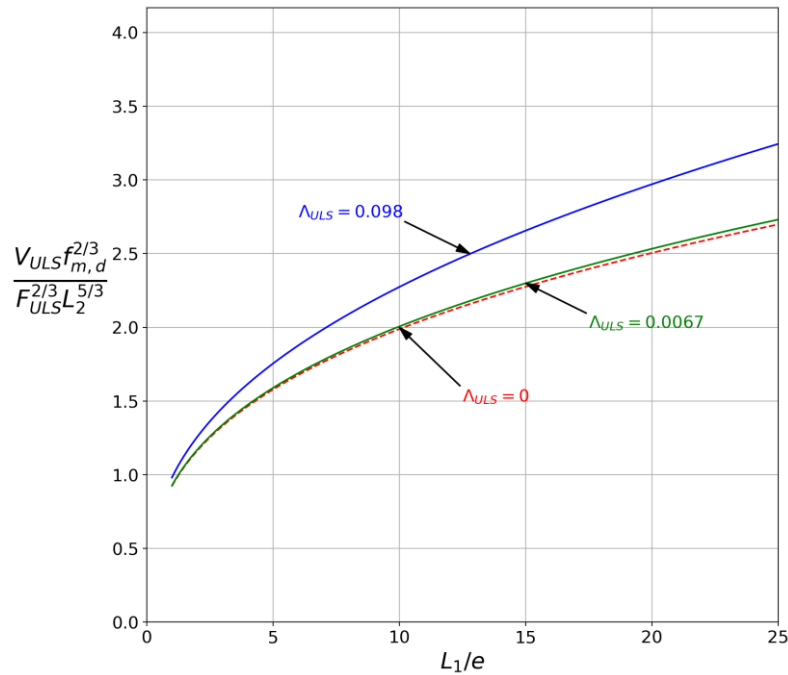


Figure 40 : Plancher classique - Indicateur de volume en fonction du nombre de poutres

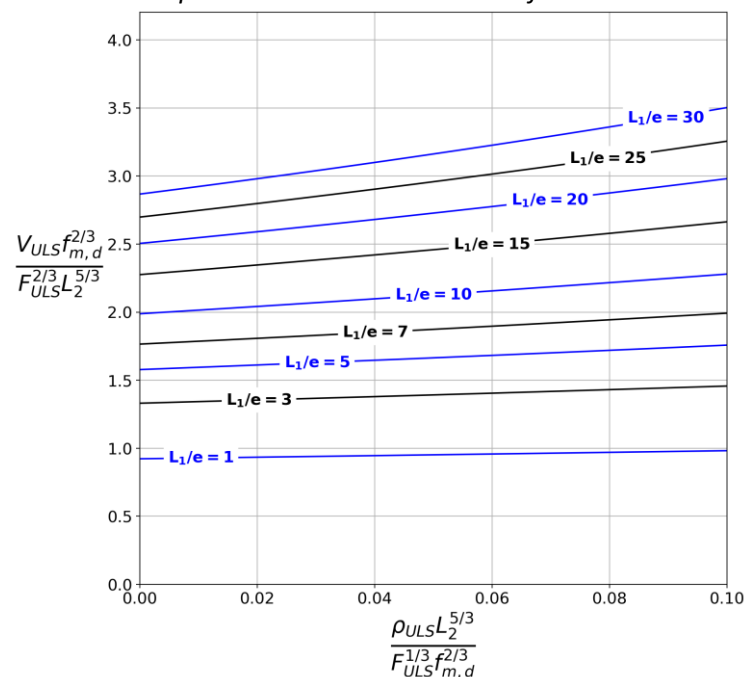


Figure 41 : Plancher classique - Indicateur de volume en fonction de l'indicateur de poids propre pour différentes valeurs du nombre de poutre

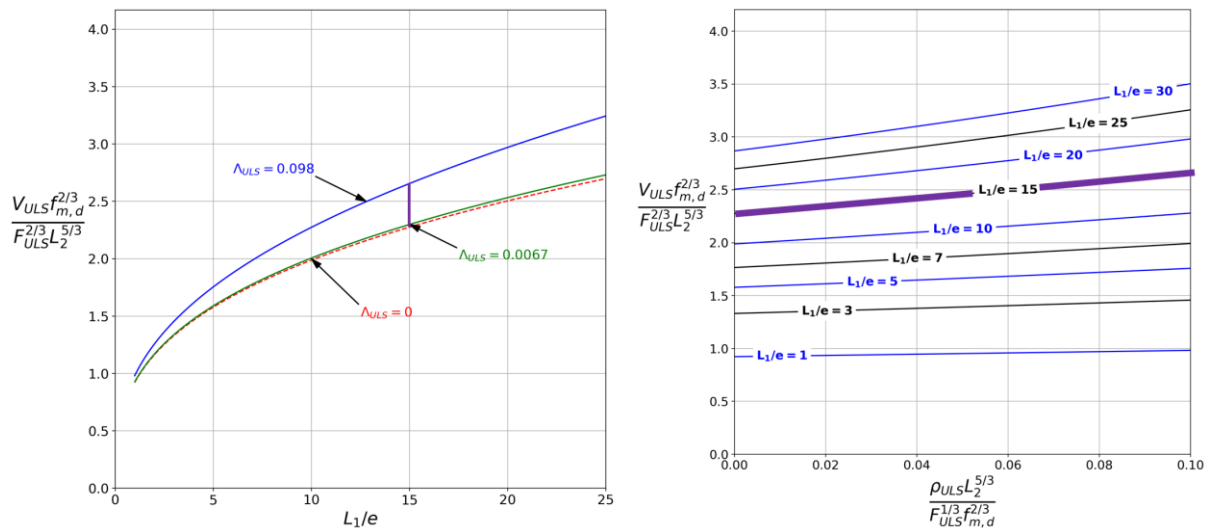


Figure 42 : Plancher classique : Exemple de lecture des Figure 40 et Figure 41 combinées

Sur la Figure 40, il est possible d'observer que, lorsque le poids propre est pris en compte, alors il y a une augmentation de l'indicateur de volume allant de 6,32% pour $L_1/e = 1$ à 20,24% pour $L_1/e = 25$, lorsque $\Lambda_{ULS} = 0,098$. Par ailleurs pour $\Lambda_{ULS} = 0,0071$, cette augmentation varie de 0,44% à 1,29%. Ce graphique fournit donc une enveloppe de valeurs dans laquelle se trouveront toutes les solutions possibles. D'autre part, sur la Figure 41, les courbes montrent que, au plus le nombre de poutres (L_1/e) est grand, au plus l'indicateur de poids propre a une influence sur l'indicateur de volume. En effet, lorsque $L_1/e = 1$, la courbe est presque horizontale alors qu'elle est nettement plus inclinée lorsque $L_1/e = 30$.

4.1.1 Interprétation et discussion

Sur base des développements, des résultats et des observations qui viennent d'être réalisés, plusieurs réflexions, similaires à celles discutées pour la poutre simple fléchie, vont être discutées dans la présente section :

- Analyser l'efficacité matérielle $\rho V/F$ d'un tel plancher.
- Analyser le volume total d'un tel plancher en fonction de la classe de résistance.
- Etudier l'impact de la prise en compte du poids propre en étudiant le taux de travail réel des éléments du plancher lorsque ceux-ci sont dimensionnés en négligeant leur poids propre.

4.1.1.1 Efficacité matérielle ($\rho V/F$)

Dans un premier temps, l'objectif va être d'exprimer l'efficacité matérielle ($\rho V/F$) en fonction de l'indicateur de poids propre (Λ) afin d'obtenir un résultat adimensionnel. Pour cela, il faut partir de l'équation (3a) :

$$V = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/3} n^{1/3} \left(\frac{\rho V}{F} + 1\right)^{2/3} \frac{L_2^{5/3} F^{2/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Cette égalité peut être réécrite afin d'exprimer l'efficacité matérielle ($\rho V/F$) de manière implicite :

$$\frac{\rho V}{F} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/3} n^{1/3} \left(\frac{\rho V}{F} + 1\right)^{2/3} \frac{L_2^{5/3} \rho}{F^{1/3} \sigma^{2/3}}$$

En se rappelant que $\frac{\rho L_b^{5/3}}{F^{1/3} \sigma^{2/3}} = \Lambda_\sigma$, en remplaçant n par L_1/e et en évaluant l'expression à l'état limite ultime, l'expression devient alors :

$$\frac{\rho_{ULS} V_{ULS}}{F_{ULS}} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/3} \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \left(\frac{\rho_{ULS} V_{ULS}}{F_{ULS}} + 1\right)^{2/3} \Lambda_{ULS} \quad (3d)$$

La Figure 43 représente l'expression (3d) de l'efficacité matérielle en fonction du nombre de poutres (L_1/e), pour $\Lambda_{ULS} = 0,098$ en bleu et $\Lambda_{ULS} = 0,0067$ en vert. Ce graphique donne donc une enveloppe de valeurs dans laquelle toutes les solutions se trouvent. Au plus le nombre de poutres composant le plancher augmente, au plus l'importance du poids propre de la structure par rapport à la charge extérieure est importante. Cette observation s'explique par le fait que la charge reprise par chaque poutre est donc de plus en plus petite. Le poids propre prend donc plus d'importance.

La Figure 44 représente l'expression (3d) de l'efficacité matérielle en fonction de l'indicateur de poids propre pour différentes valeurs du nombre de poutres composant le plancher. Ce graphique permet une lecture verticale de la Figure 43, entre la courbe $\Lambda_{ULS} = 0$ et la courbe $\Lambda_{ULS} = 0,098$. C'est-à-dire que pour une valeur de L_1/e donnée, ce graphique donne la valeur de l'efficacité matérielle pour toutes les valeurs d'indicateur de poids propre comprise entre $\Lambda_{ULS} = 0$ et $\Lambda_{ULS} = 0,098$.

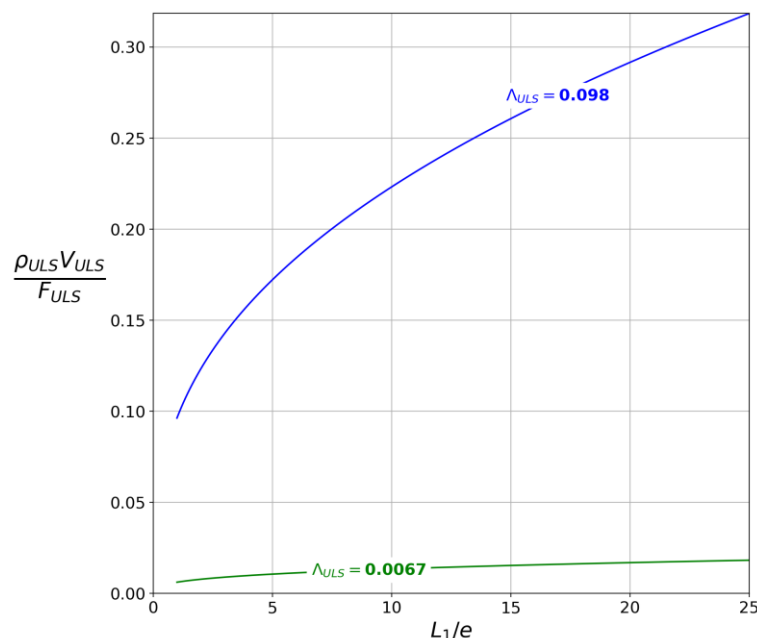


Figure 43 : Plancher classique - Efficacité matérielle en fonction du nombre de poutres pour l'indicateur de poids propre maximal et minimal

Exemple d'utilisation de la Figure 44:

Supposons la situation suivante :

- $L_1 = 10$ [m] , $L_2 = 6$ [m] et $e = 1$ [m]
- $q_{ULS} = 5000$ [N/m²] $\rightarrow F_{ULS} = 300\,000$ [N]
- C24

Pour cette situation, l'indicateur de poids propre $\left(\Lambda_{ULS} = \frac{\rho_{ULS} L_2^{5/3}}{F_{ULS}^{1/3} f_{m,d}^{2/3}}\right)$ vaut 0,028, le rapport $\frac{L_1}{e}$ vaut 10 et donc $\frac{\rho_{ULS} V_{ULS}}{F_{ULS}} = 0,058$ [/]. Le poids propre de la structure dans cette situation équivaut à 5,8% de la charge extérieure F_{ULS} .

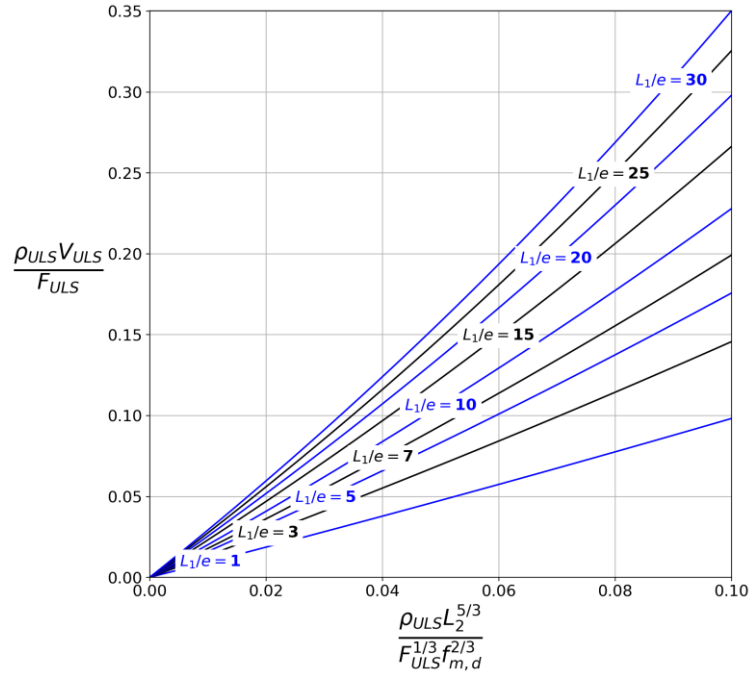


Figure 44 : Plancher classique - Efficacité matérielle en fonction de l'indicateur de poids propre pour différents nombres de poutres composant le plancher

Dans un second temps, l'efficacité matérielle ($\rho V/F$) peut être exprimée en fonction des données du problème pour différentes classes de résistance, comme cela a été fait pour une poutre simple fléchie.

A partir de l'expression (3d), et en se rappelant que $\Lambda_{ULS} = \frac{\rho_{ULS} L_2^{5/3}}{F_{ULS}^{1/3} f_{m,d}^{2/3}}$:

$$\frac{\rho_{ULS} V_{ULS}}{F_{ULS}} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/3} \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \left(\frac{\rho_{ULS} V_{ULS}}{F_{ULS}} + 1\right)^{2/3} \frac{\rho_{ULS} L_2^{5/3}}{F_{ULS}^{1/3} f_{m,d}^{2/3}}$$

En utilisant le fait que $F = q L_1 L_2 = q L_2^2 / \lambda$, il est possible de réécrire cette expression.

$$\frac{\rho_{ULS} V_{ULS}}{F_{ULS}} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/3} \lambda^{1/3} \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \left(\frac{\rho_{ULS} V_{ULS}}{F_{ULS}} + 1\right)^{2/3} \frac{L_2}{q_{ULS}^{1/3} f_{m,d}^{2/3}} \quad (3e)$$

L'expression (3e) exprime donc l'efficacité matérielle ($\rho_{ULS} V_{ULS} / F_{ULS}$) d'un plancher en fonction du nombre de poutres (L_1/e), du facteur de proportionnalité λ , du rapport $\frac{L_2}{q_{ULS}^{1/3}}$ et du matériau considéré ($\rho_{ULS} / f_{m,d}^{2/3}$).

La Figure 45 représente l'efficacité matérielle ($\rho_{ULS} V_{ULS} / F_{ULS}$) d'un plancher en fonction du rapport $\frac{L_2}{q_{ULS}^{1/3}}$ pour une valeur de $\lambda = 0,6$ et $L_1/e = 10$, pour différentes classes de résistance. Des graphiques similaires couvrant d'autres combinaisons λ et L_1/e sont repris en Annexe B.

De manière générale, les résineux (classe de résistance C) nécessitent moins de poids (ρV) que les feuillus (classe de résistance D) pour reprendre une même charge F . La classe de résistance C40 étant la plus efficace alors que la D30 est la moins efficace. Tout comme cela a pu être conclu pour la poutre simple, pour une situation donnée, c'est-à-dire pour λ , e , L_1 et q_{ULS} donnés, l'efficacité matérielle dépend uniquement du rapport $\frac{\rho}{f_{m,d}^{2/3}}$. Au plus ce rapport sera élevé, au plus le poids de la structure (ρV) sera important par rapport à la charge extérieure à reprendre (F). De plus, ce graphique peut

être directement associé à une notion de prix, tel que cela a déjà pu être évoqué. En effet, le poids des éléments aura une influence sur leur transport et leur manutention.

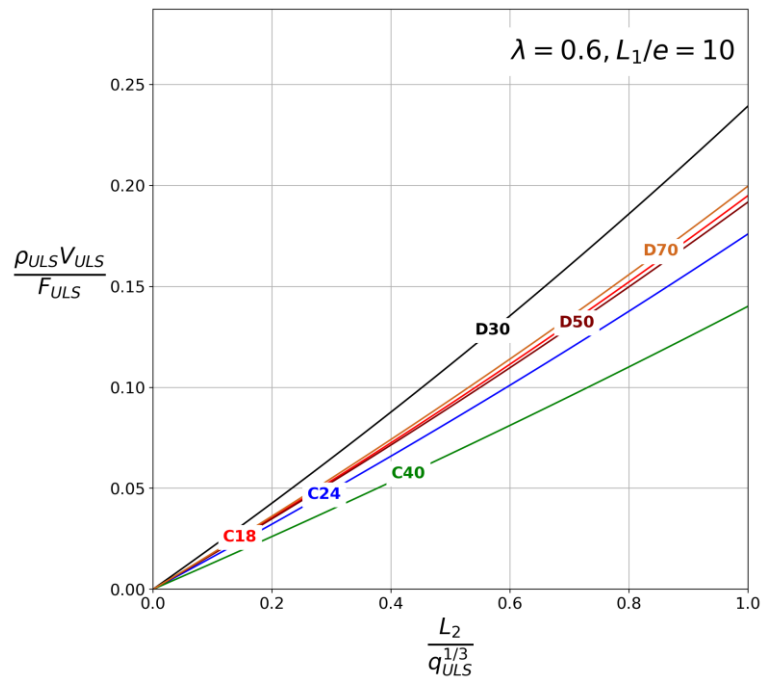


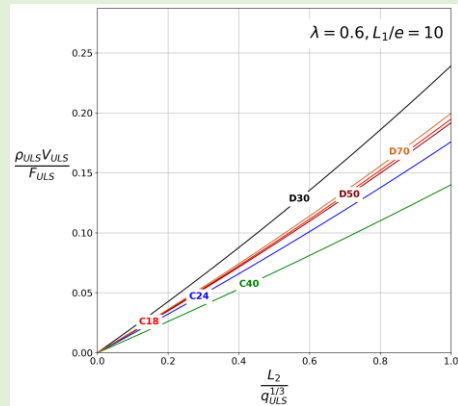
Figure 45 : Plancher classique - Efficacité matérielle en fonction de données du problème ($L_2/q_{ULS}^{1/3}$) pour $\lambda = 0,6$ et $L_1/e = 10$, pour différentes classes de résistance

Exemple d'utilisation de la Figure 45 :

Supposons la situation suivante :

- $L_1 = 10$ [m], $L_2 = 6$ [m] et $e = 1$ [m]
- $q_{ULS} = 5000$ [N/m²] $\rightarrow F_{ULS} = 300\,000$ [N]

Pour cette situation, le nombre $L_2/q_{ULS}^{1/3}$ vaut 0,35. L'efficacité matérielle du C24, C40 et du D30 sont respectivement 0,058, 0,046 et 0,076. Cela représente donc 5,8%, 4,6% et 7,6% de la charge extérieure F_{ULS} .



4.1.1.2 Volume de matière

Le raisonnement est identique à celui fait lors de l'analyse d'une simple poutre fléchie. Chaque classe de résistance ayant sa propre résistance et son propre poids volumique, il est intéressant de se demander si une classe minimise le volume de matière nécessaire dans toutes les situations. Pour ce faire, le point de départ est l'équation (3a) :

$$V = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/3} \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \left(\frac{\rho V}{F} + 1\right)^{2/3} \frac{L_2^{5/3} F^{2/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Où $F = qL_2^2/\lambda$,

$$V = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/3} \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \left(\frac{\lambda \rho V}{qL_2^2} + 1\right)^{2/3} \frac{L_2^3 q^{2/3}}{\lambda^{2/3} \sigma^{2/3}}$$

$$\frac{V}{L_2^3 q^{2/3}} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/3} \frac{1}{\lambda^{2/3}} \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \left(\lambda \rho \frac{V}{L_2^3 q^{2/3}} \frac{L_2}{q^{1/3}} + 1 \right)^{2/3} \frac{1}{\sigma^{2/3}}$$

L'expression ci-dessus fournit un nombre, $\frac{V}{L_2^3 q^{2/3}}$, qui n'a pas de signification physique, représentant le volume de matière nécessaire divisé par des données du problème. L'expression évaluée à l'état limite ultime s'écrit :

$$\frac{V_{ULS}}{L_2^3 q_{ULS}^{2/3}} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/3} \frac{1}{\lambda^{2/3}} \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \left(\lambda \rho_{ULS} \frac{V_{ULS}}{L_2^3 q_{ULS}^{2/3}} \frac{L_2}{q_{ULS}^{1/3}} + 1 \right)^{2/3} \frac{1}{f_{m,d}^{2/3}} \quad (3f)$$

Cette dernière égalité donne donc l'expression de $\frac{V_{ULS}}{L_2^3 q_{ULS}^{2/3}}$, qui n'a pas de signification physique, de manière implicite en fonction du rapport $L_2/q_{ULS}^{1/3}$, qui est une donnée du problème, et ce pour différentes classes de résistance.

La Figure 46 représente l'expression (3f) du nombre $\frac{V_{ULS}}{L_2^3 q_{ULS}^{2/3}}$ en fonction de données du problème, $L_2/q_{ULS}^{1/3}$, pour différentes classes de résistance, pour $\lambda = 0,6$ et $L_1/e = 10$. A nouveau, dans ce graphique, ni l'abscisse, ni l'ordonnée ne représente quelque chose de physique. L'ordonnée, $\frac{V_{ULS}}{L_2^3 q_{ULS}^{2/3}}$, peut être interprétée comme une image du volume. Dès lors, ce graphique permet d'obtenir une information directe sur le volume en fonction de données de la situation, reprises dans le rapport $L_b/q_{ULS}^{1/3}$, et donc de comparer différents matériaux.

Dans la gamme d'utilisation définie précédemment, il y a donc bien une classe de résistance qui minimise le volume de bois nécessaire dans tous les cas : le D70. A contrario, la classe de résistance C18 maximise le volume dans toutes les situations. Cette observation est valable peu importe les combinaisons λ et L_1/e , dans le champ d'étude considéré. En Annexe C, se trouvent plus de courbes couvrant davantage de situations. Ces graphiques permettent de rapidement connaître la différence de volume nécessaire entre deux classes de résistance pour une situation (L_2 et q_{ULS}) donnée. En connaissant le prix de chacune des classes de résistance il est donc possible d'estimer l'impact du choix de la classe de résistance choisie sur le coût du projet. Ce dernier aspect est davantage discuté dans la section 8.

Exemple d'utilisation de la Figure 46 :

Supposons la situation suivante :

- $L_1 = 10 \text{ [m]}$, $L_2 = 6 \text{ [m]}$ et $e = 1 \text{ [m]}$
- $q_{ULS} = 5000 \text{ [N/m}^2\text{]} \rightarrow F_{ULS} = 300\,000 \text{ [N]}$

Pour cette situation, le nombre $L_2/q_{ULS}^{1/3}$ vaut 0,35. Pour du C24, C40 et du D30, les valeurs de $\frac{V_{ULS}}{L_2^3 q_{ULS}^{2/3}}$ sont respectivement $4,77 \cdot 10^{-5}$, $3,40 \cdot 10^{-5}$ et $4,16 \cdot 10^{-5}$. Le volume total pour chaque classe de résistance vaut alors 3,01, 2,15 et 2,63 $\text{[m}^3\text{]}$. Il est alors possible de connaître le volume pour une poutre du plancher et le diamètre des éléments nécessaires. Ce dernier vaut respectivement 0,25, 0,21, 0,23 $\text{[m}^3\text{]}$. Bien que le volume totale diffère, les diamètres respectifs ne sont pas si différents pour cette situation.

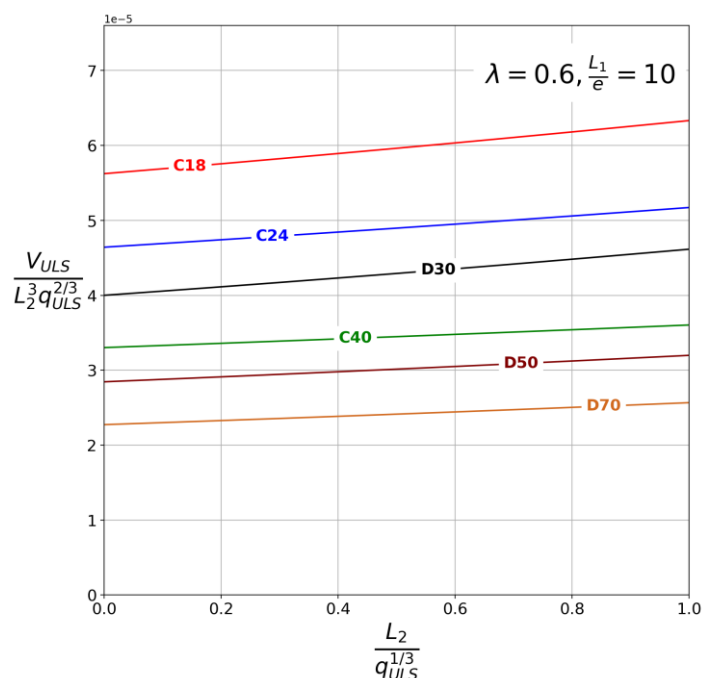


Figure 46 : Plancher classique – Image du volume en fonction de paramètres du problème pour différentes classes de résistance et pour $\lambda = 0,6$ et $L_1/e = 10$

4.1.1.3 Taux de travail

Il est possible de faire un raisonnement analogue à celui réalisé pour une poutre simple fléchie. En effet, à partir de la Figure 40, il est possible de lier l'indicateur de volume lorsque le poids propre est négligé, noté W_0 , à l'indicateur de volume lorsque le poids propre est pris en compte, noté W_Λ , par un facteur de proportionnalité, noté p ($p > 1$). Ce dernier dépend de l'indicateur de poids propre Λ_{ULS} et du rapport L_1/e qui représente le nombre de poutres composant le plancher.

$$W_\Lambda = p\left(\Lambda_{ULS}, \frac{L_1}{e}\right) W_0$$

Etant donné que les hypothèses sur le chargement extérieur, sur la longueur de la poutre et sur le matériau utilisé sont les mêmes, il est possible d'écrire :

$$\frac{V_{\Lambda,ULS} f_{m,d}^{2/3}}{F_{ULS}^{2/3} L_1^{5/3}} = p\left(\Lambda_{ULS}, \frac{L_1}{e}\right) \frac{V_{0,ULS} f_{m,d}^{2/3}}{F_{ULS}^{2/3} L_1^{5/3}}$$

$$V_{\Lambda,ULS} = p\left(\Lambda_{ULS}, \frac{L_1}{e}\right) V_{0,ULS}$$

Le facteur de proportionnalité $p\left(\Lambda_{ULS}, \frac{L_1}{e}\right)$ étant supérieur à 1 (car $W_\Lambda > W_0$), il est donc clair que le volume de matière obtenu en négligeant le poids propre, $V_{0,ULS}$, est sous-estimé.

Le volume $V_{0,ULS}$ est obtenu en supposant que la contrainte maximale atteinte dans les sections les plus sollicitées des poutres est égale à la résistance de flexion du matériau, noté $f_{m,d}$. Cependant ce volume de matière engendre lui-même une certaine charge qui génère donc un supplément de contrainte, $\Delta\sigma_0$. La contrainte maximale réelle de l'élément, lorsque l'élément est dimensionné en négligeant le poids propre, est donc :

$$\sigma_{0,réelle} = f_{m,d} + \Delta\sigma_0$$

$$\begin{aligned}
\sigma_{0,r\acute{e}elle} &= f_{m,d} + \Delta\sigma_0 \\
&= \frac{4F_{ULS}\lambda L_1}{\pi n\phi^3} \left(1 + \frac{\rho V_{0,ULS}}{F_{ULS}} \right) \\
&= \frac{4F_{ULS}\lambda L_1}{\pi n\phi^3} \left(1 + \frac{\rho V_{\Lambda,ULS}}{F_{ULS}} \frac{1}{p(\Lambda_{ULS}, \frac{L_1}{e})} \right) \\
&= f_{m,d} \left(1 + \frac{\Lambda_{ULS} W_{\Lambda,ULS}}{p(\Lambda_{ULS}, L_1/e)} \right) \\
&= f_{m,d} (1 + \Lambda_{ULS} W_{0,ULS})
\end{aligned}
\quad
\begin{aligned}
V_{0,ULS} &= \frac{V_{\Lambda,ULS}}{p(\Lambda_{ULS}, L_1/e)} \\
\frac{\rho V_{\Lambda,ULS}}{F_{ULS}} &= \Lambda_{ULS} W_{\Lambda,ULS} \\
\frac{W_{\Lambda,ULS}}{p(\Lambda_{ULS}, L_1/e)} &= W_{0,ULS}
\end{aligned}$$

Finalement, le taux de travail peut donc s'écrire :

$$T = \frac{\sigma_{0,r\acute{e}elle}}{f_{m,d}} = 1 + \Lambda_{ULS} W_{0,ULS} \left(\frac{L_1}{e} \right) \quad (3g)$$

La Figure 47 représente l'expression (3g) du taux de travail réel d'une poutre du plancher en fonction du rapport L_1/e , qui représente le nombre de poutres, lorsque celle-ci est dimensionnée en négligeant le poids propre. Il y a deux courbes qui sont représentées, correspondant aux valeurs extrêmes d'indicateur de poids propre dans la gamme d'utilisation définie. Ce taux de travail peut donc être relativement élevé, jusqu'à 125%. Négliger le poids propre semble dès lors une hypothèse fort simplificatrice.

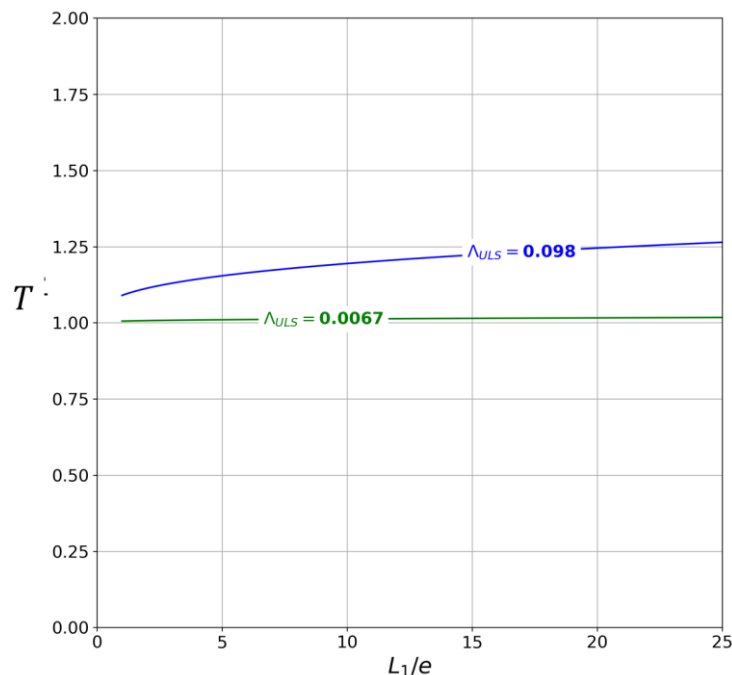


Figure 47 : Plancher classique - Taux de travail réel d'une poutre du plancher dimensionnée en négligeant son poids propre en fonction du nombre de poutres composant le plancher

4.1.2 En résumé

Il est possible de résumer tous les développements réalisés pour l'état limite ultime et de rassembler les différents graphiques obtenus en une figure unique (Figure 48). Les graphiques de gauche sont appelés « graphiques projet » et permettent de comparer directement plusieurs classes de résistance entre elles, pour une certaine valeur de λ (ici 0,6), le facteur de proportion entre les longueurs du

plancher, et L_1/e , représentant le nombre de poutres (ici 10). Ils peuvent aussi être utilisés pour avoir une notion sur le coût du projet, comme cela a déjà pu être dit. Les graphiques de droite sont appelés « graphiques adimensionnels » et sont universels. Ils sont donc utilisables peu importe le matériau considéré, tant que le plancher étudié est composé de poutres fléchies circulaires chargées uniformément. Les graphiques supérieurs fournissent une information liée au volume alors que les graphiques inférieurs donnent une information sur le poids de la structure.

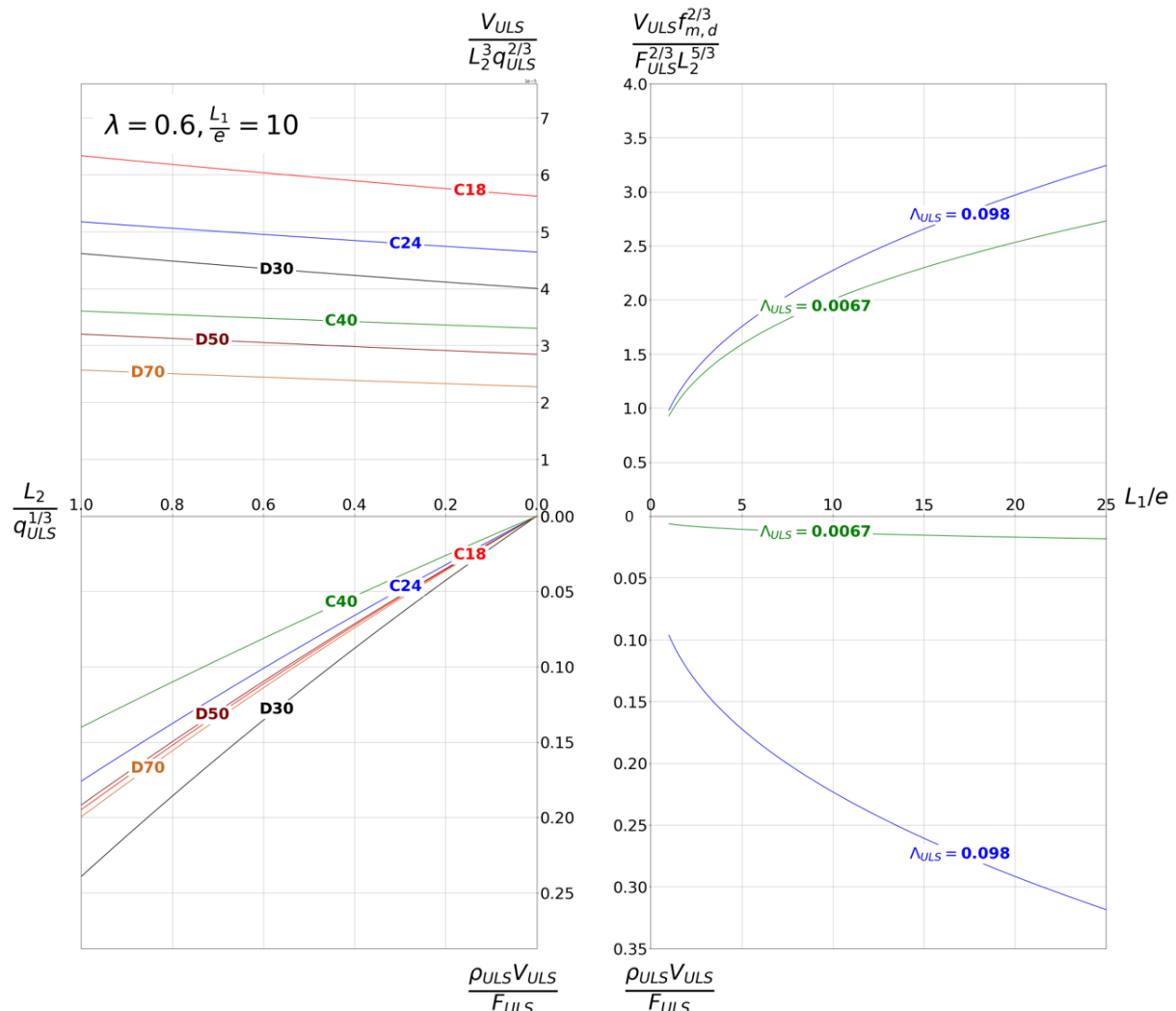


Figure 48 : Plancher classique - Résumé de l'analyse à l'état limite ultime (ULS)

Conclusion :

La solution optimale correspond à minimiser le nombre de poutres composant le plancher, qu'on néglige le poids propre ou non. Cette situation correspond donc à un nombre de poutres nul, ce qui n'est pas réaliste. Le choix du nombre de poutres sera donc dicté par les dimensions de l'élément de couverture du plancher.

D'autre part, la différence de volume nécessaire en prenant en compte le poids propre par rapport au cas où le poids propre est négligé augmente lorsque L_1/e augmente. Pour les cas représentés, il est possible de noter que :

- Pour $\Lambda_{ULS} = 0,098$: une augmentation maximale de 6,32% pour $L_1/e = 1$ à 20,24% pour $L_1/e = 25$
- Pour $\Lambda_{ULS} = 0,0067$: une augmentation maximale de 0,44% pour $L_1/e = 1$ à 1,29% pour $L_1/e = 25$

Le taux de travail réel d'une poutre d'un plancher classique, dimensionnée en négligeant le poids propre, augmente lorsque le nombre de poutres, donné par L_1/e , augmente. Il atteint jusqu'à 1,25 au-delà de 20 poutres pour $\Lambda_{ULS} = 0,098$.

La classe de résistance D70 minimise le volume de matière dans toutes les situations du domaine du champ d'application. Il est possible de classer les classes de résistances en fonction du volume nécessaire pour reprendre une charge F :

$$D70 < D50 < C40 < D30 < C24 < C18$$

D'autre part, la classe de résistance C40 minimise le poids du plancher par rapport à la charge extérieure, F . Il est possible de classer les classes de résistances en fonction du poids nécessaire pour reprendre une charge F :

$$C40 < C24 < D50 < C18 < D70 < D30$$

4.2 Optimisation du volume de bois d'un plancher classique en fonction de la flèche maximale

L'objectif de cette section est d'optimiser le volume de bois d'un plancher classique en fonction de la flèche maximale des poutres le composant. Le point de départ est à nouveau des expressions classiques de la flèche d'une poutre en flexion et du volume d'un cylindre, en considérant à nouveau que les poutres du plancher sont isostatiques. De plus, l'inertie d'une poutre à section circulaire est donnée par $I = \frac{\pi\phi^4}{64}$. Les expressions de la flèche et du volume sont alors données par :

$$\begin{cases} \delta = \frac{5 \left(\rho V_i + \frac{F}{n} \right) \lambda^3 L_1^3}{6\pi E_{0,m} \phi^4} \\ V_i = \frac{\pi \phi^2}{4} \lambda L_1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \phi^2 = \left(\frac{5 \left(\rho V_i + \frac{F}{n} \right) \lambda^3 L_1^3}{6\pi E_{0,m} \phi^4} \right)^{1/2} \\ V_i = \frac{\pi \phi^2}{4} \lambda L_1 \end{cases}$$

En insérant l'expression de ϕ^2 obtenue avec la flèche dans l'expression du volume, il est possible d'écrire une expression implicite du volume d'une poutre du plancher en fonction de la flèche :

$$V_i = \frac{\pi^{1/2}}{4} \left(\frac{5}{6} \right)^{1/2} \left(\rho V_i + \frac{F}{n} \right)^{1/2} \frac{\lambda^{5/2} L_1^{5/2}}{E_{0,m}^{1/2} \delta^{1/2}} = \frac{\pi^{1/2}}{4} \left(\frac{5}{6} \right)^{1/2} \frac{1}{n^{1/2}} \left(\frac{\rho V_i n}{F} + 1 \right)^{1/2} \frac{\lambda^{5/2} F^{1/2} L_1^{5/2}}{E_{0,m}^{1/2} \delta^{1/2}}$$

En sachant que $V = nV_i$ et $L_2 = \lambda L_1$, le volume de bois du plancher est donné par :

$$\begin{aligned} \frac{V}{n} &= \frac{\pi^{1/2}}{4} \left(\frac{5}{6} \right)^{1/2} \frac{1}{n^{1/2}} \left(\frac{\rho V n}{F} + 1 \right)^{1/2} \frac{F^{1/2} L_2^{5/2}}{E_{0,m}^{1/2} \delta^{1/2}} \\ V &= \frac{\pi^{1/2}}{4} \left(\frac{5}{6} \right)^{1/2} n^{1/2} \left(\frac{\rho V}{F} + 1 \right)^{1/2} \left(\frac{L_2}{\delta} \right)^{1/2} \frac{F^{1/2} L_2^2}{E_{0,m}^{1/2}} \end{aligned} \quad (4a)$$

Cette égalité peut être réécrite sous forme adimensionnelle, en faisant apparaître l'indicateur de volume à l'état limite de service $W_\delta = \frac{V E_{0,m}^{1/2}}{L_2^2 F^{1/2}}$, ce qui donne :

$$W_\delta = \frac{V E_{0,m}^{1/2}}{L_2^2 F^{1/2}} = \frac{\pi^{1/2}}{4} \left(\frac{5}{6} \right)^{1/2} n^{1/2} \left(\frac{\rho V}{F} + 1 \right)^{1/2} \left(\frac{L_2}{\delta} \right)^{1/2}$$

En remarquant à nouveau que $\frac{\rho V}{F} = \frac{\rho L_2^2}{F^{1/2} E_{0,m}^{1/2}} \frac{V E_{0,m}^{1/2}}{F^{1/2} L_2^{1/2}} = \frac{\rho L_2^2}{F^{1/2} E_{0,m}^{1/2}} W_\delta$, il est possible de faire apparaître l'indicateur de poids propre Λ_δ et d'obtenir une expression implicite de l'indicateur de volume :

$$W_\delta = \frac{V E_{0,m}^{1/2}}{L_2^2 F^{1/2}} = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L_2}{\delta}\right)^{1/2} (\Lambda_\delta W_\delta + 1)^{\frac{1}{2}} \quad (4b)$$

L'expression (4b) donne donc le volume adimensionnel d'un plancher de dimension $L_1 \times L_2$, composé de n poutres parallèles portant selon le plus petit côté, les poutres étant soumises à leur poids propre et la charge F répartie équitablement entre elles telle que la flèche vaut δ .

L'expression (4b) peut être évaluée à l'état limite ultime et en remplaçant n par L_1/e :

$$W_{SLS} = \frac{V_{SLS} E_{0,m}^{1/2}}{L_2^2 F_{SLS}^{1/2}} = \frac{\pi^{1/2}}{4} \left(\frac{5}{6}\right)^{1/2} \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/2} \left(\frac{L_2}{\delta_{max}}\right)^{1/2} (\Lambda_{SLS} W_{SLS} + 1)^{\frac{1}{2}} \quad (4c)$$

La Figure 49 représente l'expression (4c) de l'indicateur de volume en fonction du nombre de poutres (L_1/e) présentes dans le plancher pour deux critères de flèche, $\frac{L_2}{\delta_{max}} = 250$ et $\frac{L_2}{\delta_{max}} = 500$. Pour chaque critère, trois courbes ont été tracées. La courbe rouge pointillée représente le cas où le poids propre est négligé ($\Lambda_{SLS} = 0$), la courbe verte représente la borne inférieure de l'indicateur de poids propre ($\Lambda_{SLS} = 0.0008$) et la courbe bleue représente la borne supérieure de l'indicateur de poids propre ($\Lambda_{SLS} = 0.015$). Pour rappel, ces bornes ont été définies au point 3.2.

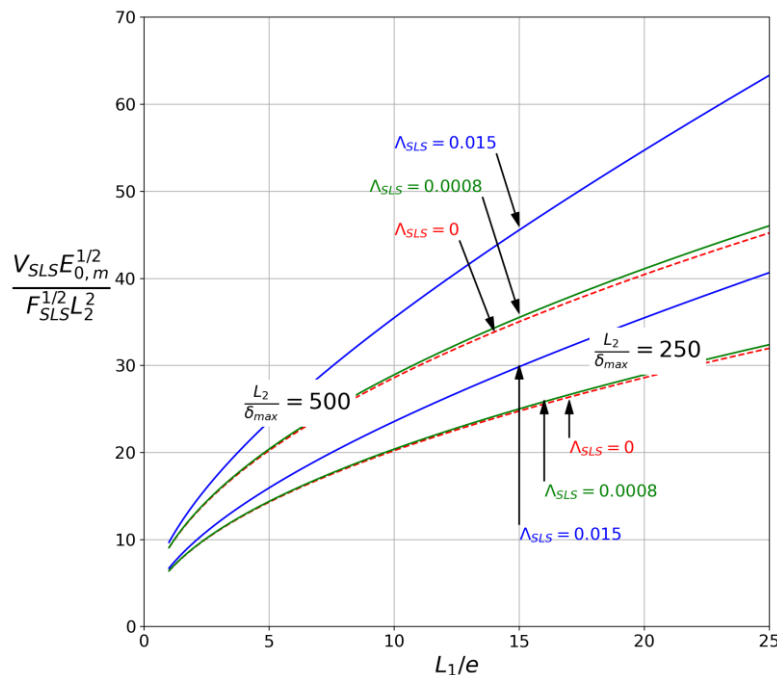


Figure 49 : Plancher classique - Indicateur de volume en fonction du nombre de poutres pour deux critères de flèche

La Figure 49 montre que, lorsque le poids propre est pris en compte et que le nombre de poutres composant le plancher augmente, alors l'indicateur de volume augmente. Pour un critère de flèche $\frac{L_2}{\delta_{max}} = 250$ et $\Lambda_{SLS} = 0,015$, cette augmentation est de 5,2% et 27,17% pour, respectivement, $L_1/e = 1$ et $L_1/e = 25$. Pour le critère $\frac{L_2}{\delta_{max}} = 500$, cette augmentation passe de 7,5% ($L_1/e = 1$) à 40,05% ($L_1/e = 25$). Au plus le critère de flèche est restrictif, au plus le poids propre a de l'importance sur l'indicateur de volume. Finalement, ce graphique permet donc d'obtenir une enveloppe de valeurs dans laquelle toutes les solutions se trouveront.

La Figure 50 représente l'expression (4c) de l'indicateur de volume en fonction de l'indicateur de poids propre, pour $\frac{L_2}{\delta_{max}} = 250$ à gauche et $\frac{L_2}{\delta_{max}} = 500$, pour différentes valeurs du nombre de poutres composant le plancher. Ces graphiques permettent une lecture verticale de la Figure 49, entre la courbe $\Lambda_{SLS} = 0$ et la courbe $\Lambda_{SLS} = 0.015$ pour les critères de flèche respectifs. C'est-à-dire que pour une valeur de L_1/e donnée, ces graphiques donnent la valeur de l'indicateur de volume pour toutes les valeurs d'indicateur de poids propre comprise entre $\Lambda_{ULS} = 0$ et $\Lambda_{ULS} = 0.015$, de la même manière que cela a pu être illustré à la Figure 42.

Les observations discutées pour la Figure 49 sont également observables sur la Figure 50. En effet, il est possible de remarquer que, pour un nombre de poutres faible ($L_1/e = 1$), l'indicateur de poids propre a peu d'influence sur la valeur de l'indicateur de volume contrairement à un nombre de poutres élevé ($L_1/e = 30$).

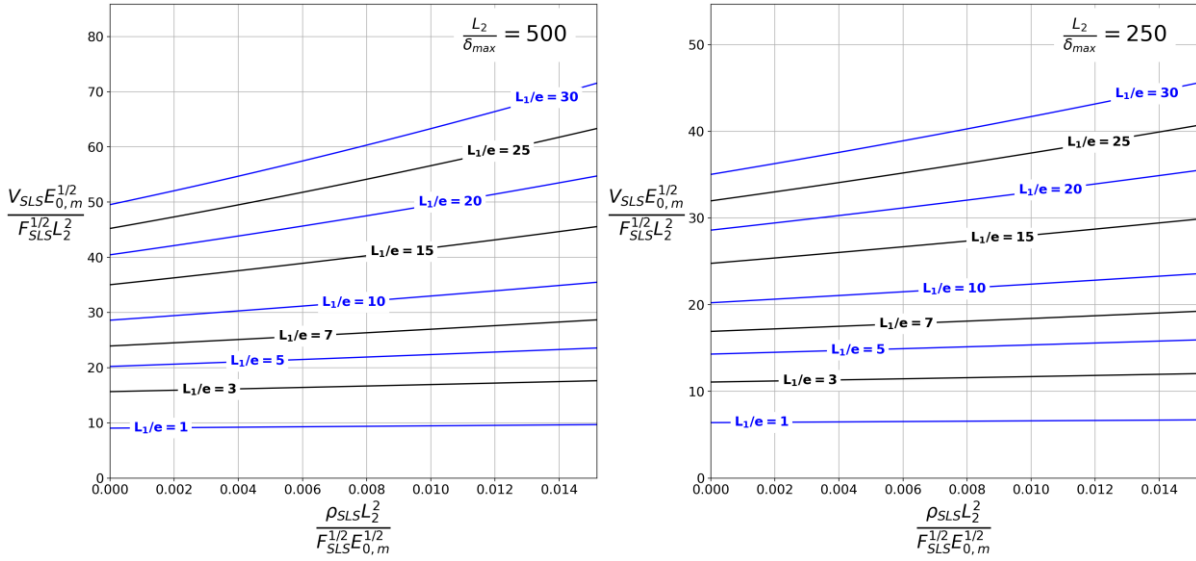


Figure 50 : Plancher classique - Indicateur de volume en fonction de l'indicateur de poids propre

4.2.1 Interprétation et discussion

Sur base des développements, des résultats et des observations qui viennent d'être réalisés, plusieurs réflexions, similaires à celles discutées précédemment, vont être abordées dans la présente section :

- Analyser l'efficacité matérielle $\rho V/F$ d'un tel plancher.
- Analyser le volume total d'un tel plancher en fonction de la classe de résistance.

4.2.1.1 Efficacité matérielle ($\rho V/F$)

Tout comme cela a été réalisé précédemment, l'objectif va être d'exprimer l'efficacité matérielle ($\rho V/F$) en fonction de l'indicateur de poids propre Λ . L'objectif de cette analyse est d'obtenir un résultat adimensionnel. Pour cela, il faut partir de l'équation (4a), où $n = \frac{L_1}{e}$:

$$V = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L_1}{e}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\rho V}{F} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L_2}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{F^{1/2} L_2^2}{E_{0,m}^{1/2}}$$

Cette égalité peut être réécrite afin d'exprimer l'efficacité matérielle ($\rho V/F$) de manière implicite :

$$\frac{\rho V}{F} = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L_1}{e}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\rho V}{F} + 1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L_2}{\delta}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\rho L_2^2}{E_{0,m}^{1/2} F^{1/2}}$$

En remarquant que l'indicateur de poids propre apparait ($\frac{\rho L_2^2}{E_{0,m}^{1/2} F^{1/2}} = \Lambda_\delta$) et en évaluant cette expression à l'état limite de service, l'expression devient :

$$\frac{\rho_{SLS} V_{SLS}}{F_{SLS}} = \frac{\pi^{1/2}}{4} \left(\frac{5}{6}\right)^{1/2} \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/2} \left(\frac{\rho_{SLS} V_{SLS}}{F_{SLS}} + 1\right)^{1/2} \left(\frac{L_2}{\delta}\right)^{1/2} \Lambda_{SLS} \quad (4d)$$

La Figure 51 représente l'expression (4d) de l'efficacité matérielle en fonction du nombre de poutres composant le plancher, pour $\Lambda_{SLS} = 0,0008$ en vert et $\Lambda_{SLS} = 0,015$ en bleu. Au plus le nombre de poutres du plancher augmente, au plus l'importance du poids propre de la structure est grande pour reprendre la charge extérieure. Ce graphique donne donc une enveloppe de valeurs dans laquelle toutes les solutions se trouveront.

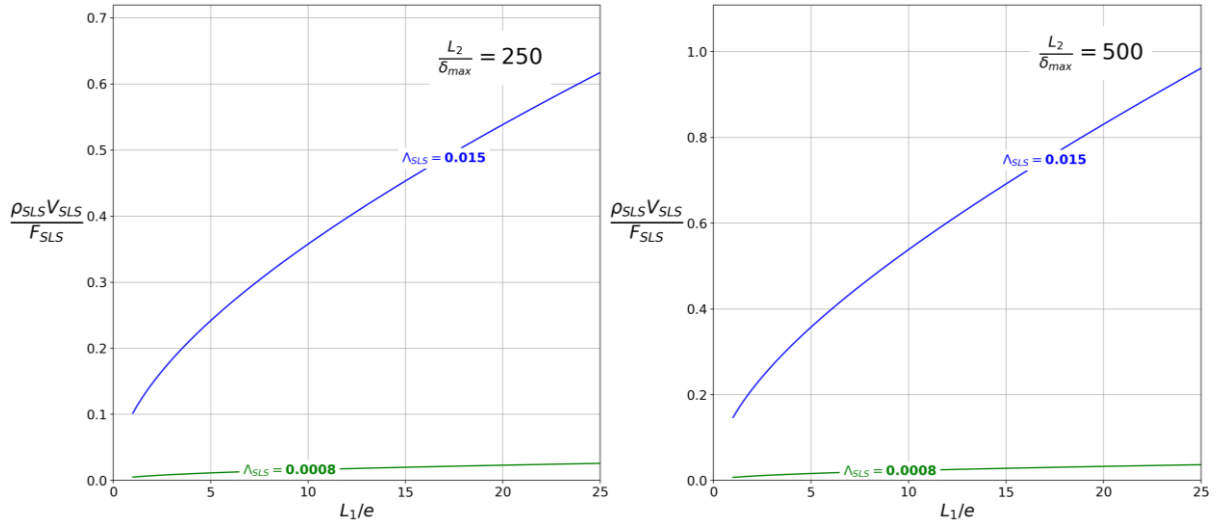


Figure 51 : Plancher classique - Efficacité matérielle en fonction du nombre de poutres pour l'indicateur de poids propre maximal et minimal

La Figure 52 représente l'expression (4d) de l'efficacité matérielle en fonction de l'indicateur de poids propre pour différentes valeurs du nombre de poutres (L_1/e) composant le plancher. Ces graphiques permettent une lecture verticale des graphiques de la Figure 51, entre la courbe $\Lambda_{SLS} = 0,0008$ et la courbe $\Lambda_{SLS} = 0,015$. C'est-à-dire que pour une valeur de L_1/e donnée, ces graphiques donnent la valeur de l'efficacité matérielle pour toutes les valeurs d'indicateur de poids propre comprise entre $\Lambda_{SLS} = 0,0008$ et $\Lambda_{SLS} = 0,015$.

Dans un second temps, l'efficacité matérielle ($\rho V/F$) peut être exprimée en fonction des données du problème pour différentes classes de résistance, comme cela a déjà pu être fait lors d'analyses précédentes.

A partir de l'expression (4d), et en se rappelant que $\Lambda_{SLS} = \frac{\rho_{SLS} L_2^2}{E_{0,m}^{1/2} F_{SLS}^{1/2}}$:

$$\frac{\rho_{SLS} V_{SLS}}{F_{SLS}} = \frac{\pi^{1/2}}{4} \left(\frac{5}{6}\right)^{1/2} \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/2} \left(\frac{\rho_{SLS} V_{SLS}}{F_{SLS}} + 1\right)^{1/2} \left(\frac{L_2}{\delta}\right)^{1/2} \frac{\rho_{SLS} L_2^2}{E_{0,m}^{1/2} F_{SLS}^{1/2}}$$

En utilisant la relation liant la force à la charge surfacique ($F_{SLS} = q_{SLS} L_2^2 / \lambda$), cette expression peut s'écrire :

$$\frac{\rho_{SLS} V_{SLS}}{F_{SLS}} = \frac{\pi^{1/2}}{4} \left(\frac{5}{6}\right)^{1/2} \lambda^{1/2} \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/2} \left(\frac{\rho_{SLS} V_{SLS}}{F_{SLS}} + 1\right)^{1/2} \left(\frac{L_2}{\delta}\right)^{1/2} \frac{L_2}{q_{SLS}^{1/2}} \frac{\rho_{SLS}}{E_{0,m}^{1/2}} \quad (4e)$$

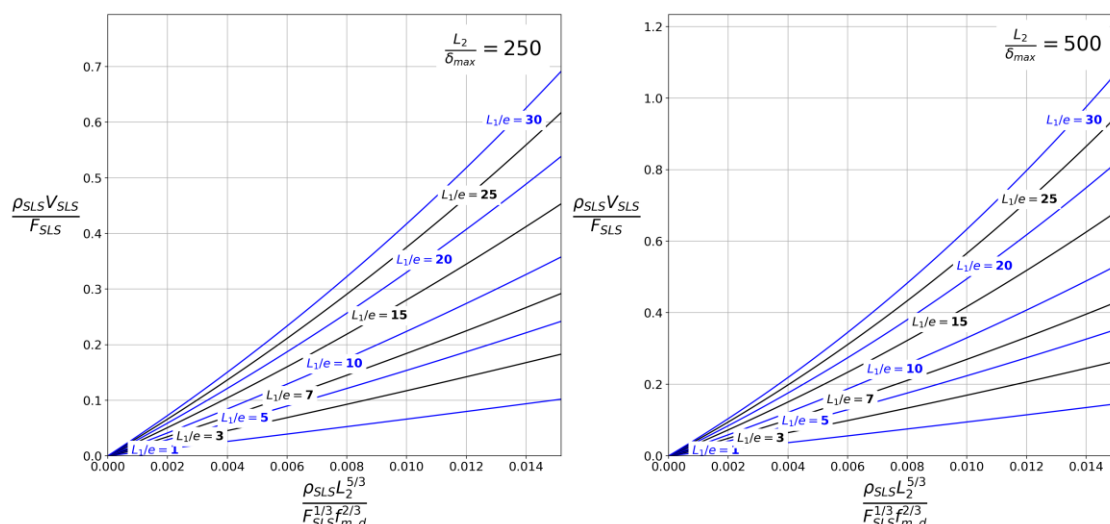


Figure 52 : Plancher classique - Efficacité matérielle en fonction de l'indicateur de poids propre pour différents nombres de poutres composant le plancher

L'expression (4e) représente alors l'efficacité matérielle d'un plancher, de manière implicite, en fonction du nombre de poutres (L_1/e), du facteur de proportionnalité des longueurs λ , du rapport $L_2/q_{SLS}^{1/2}$, d'un critère de flèche (L_2/δ) et du matériau considéré ($\rho_{SLS}/E_{0,m}^{1/2}$).

La Figure 53 représente l'expression (4e) de l'efficacité matérielle en fonction du rapport $L_2/q_{SLS}^{1/2}$, pour différentes classes de résistance, pour $\lambda = 0,6$, $L_1/e = 10$, $L_2/\delta_{max} = 250$ à gauche et $L_2/\delta_{max} = 500$. Davantage de situations sont illustrées en Annexe D. Il est donc possible d'observer que, pour une situation donnée (L_2 et q_{SLS} connus), les classes de résistance C40, C18 et C24 sont les plus efficaces et se valent. D'autre part, la classe de résistance qui semble la moins efficace est le D70. C'est-à-dire que pour reprendre une même charge F_{SLS} , un élément de classe de résistance D70 pèsera plus lourd qu'un élément d'une autre classe de résistance. De plus, tout comme cela a pu être conclu pour la poutre simple, pour une situation donnée, c'est-à-dire pour λ , e , L_1 , L_2 et q_{SLS} donnés, l'efficacité matérielle sous le critère de flèche dépend uniquement du rapport $\rho_{SLS}/E_{0,m}^{1/2}$. Au plus ce rapport sera élevé, au plus le poids propre de la structure (ρV) sera important par rapport à la charge extérieure (F_{SLS}) à reprendre. Ces graphiques sont donc utilisables afin de connaître l'impact sur le coût du transport ou des équipements nécessaires à la manutention des éléments, par exemple.

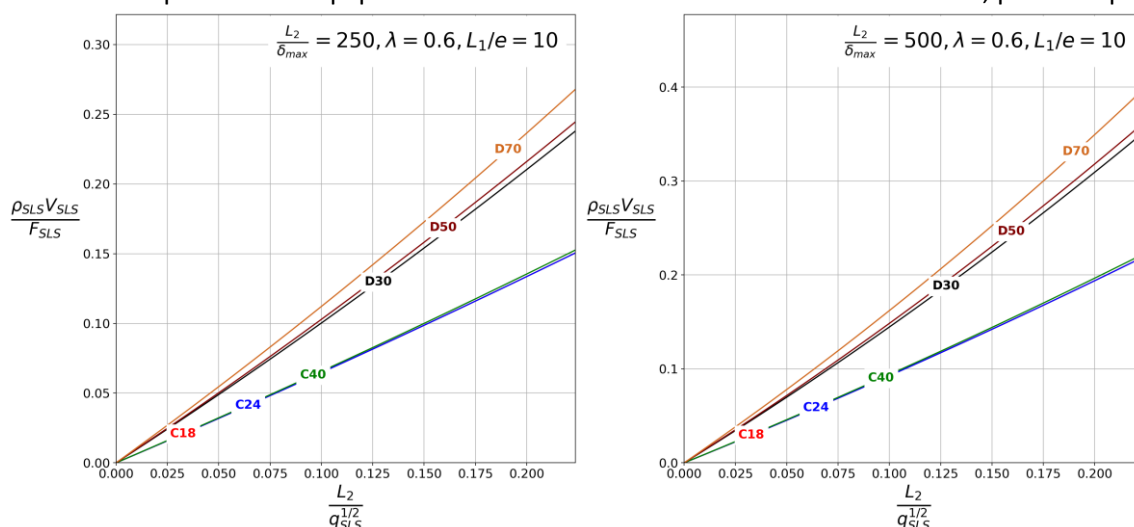


Figure 53 : Plancher classique - Efficacité matérielle en fonction de données du problème ($L_2/q_{SLS}^{1/2}$), pour $\lambda = 0,6$, $L_1/e = 10$, $L_2/\delta_{max} = 250$ (à gauche) et $L_2/\delta_{max} = 500$ (à droite) pour différentes classes de résistance.

4.2.1.2 Volume de matière

Le raisonnement est identique à celui qui a déjà pu être réalisé précédemment dans ce document. Chaque classe de résistance ayant son propre module d'élasticité et son propre poids volumique, il est intéressant de se demander si une classe minimiserait le volume de matière nécessaire dans toutes les situations. Pour ce faire, le point de départ est l'expression (4a) :

$$V = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{2}} \lambda^2 n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{\rho V}{F} + 1\right)^{1/2} \left(\frac{\lambda L_1}{\delta}\right)^{1/2} \frac{F^{1/2} L_1^2}{E_{0,m}^{1/2}}$$

Où $F = qL_2^2/\lambda$,

$$V = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{L_1}{e}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\lambda \frac{\rho V}{qL_2^2} + 1\right)^{1/2} \left(\frac{\lambda L_1}{\delta}\right)^{1/2} \frac{q^{1/2} L_2^3}{\lambda^{1/2} E_{0,m}^{1/2}}$$

$$\frac{V}{L_2^3 q^{1/2}} = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\lambda^{1/2}} \left(\frac{L_1}{e}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\lambda \rho \frac{V}{q^{1/2} L_2^3} \frac{L_2}{q^{1/2}} + 1\right)^{1/2} \left(\frac{L_2}{\delta}\right)^{1/2} \frac{1}{E_{0,m}^{1/2}}$$

L'expression ci-dessus fournit un nombre, $\frac{V}{L_2^3 q^{1/2}}$, qui n'a pas de signification physique, représentant le volume de matière nécessaire divisé par des données du problème. L'expression évaluée à l'état limite de service s'écrit :

$$\frac{V_{SLS}}{L_2^3 q_{SLS}^{1/2}} = \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{5}{6}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{1}{\lambda^{1/2}} \left(\frac{L_1}{e}\right)^{\frac{1}{2}} \left(\lambda \rho \frac{V_{SLS}}{q_{SLS}^{1/2} L_2^3} \frac{L_2}{q_{SLS}^{1/2}} + 1\right)^{1/2} \left(\frac{L_2}{\delta}\right)^{1/2} \frac{1}{E_{0,m}^{1/2}} \quad (4f)$$

Cette dernière égalité, l'expression (4f), fournit donc l'expression de $\frac{V_{SLS}}{L_2^3 q_{SLS}^{1/2}}$, qui n'a pas de signification physique, de manière implicite en fonction du rapport $L_2/q_{SLS}^{1/2}$, qui est une donnée du problème, et ce pour différentes classes de résistance et un critère de flèche choisis. Le nombre $\frac{V_{SLS}}{L_2^3 q_{SLS}^{1/2}}$ peut être vu comme une image du volume et être utilisé dans le choix du matériau à utiliser.

La Figure 54 représente l'expression (4f) du nombre $\frac{V_{SLS}}{L_2^3 q_{SLS}^{1/2}}$ en fonction de données du problème, $(L_2/q_{SLS}^{1/2})$, pour $\lambda = 0.6$, $\frac{L_1}{e} = 10$, $\frac{L_2}{\delta_{max}} = 250$ (à gauche) et $\frac{L_2}{\delta_{max}} = 500$ (à droite). Sur ces graphiques, ni les abscisses, ni les ordonnées ne représentent quelque chose physiquement. Le nombre $\frac{V_{SLS}}{L_2^3 q_{SLS}^{1/2}}$ peut être interprété comme une image du volume. Ces graphiques permettent donc d'obtenir une information directe sur le volume, grâce au nombre $\frac{V_{SLS}}{L_2^3 q_{SLS}^{1/2}}$, en fonction de données de

la situation, reprises dans le rapport $L_b/q_{SLS}^{1/2}$. Il est alors possible de comparer différents matériaux afin de savoir lequel minimise le volume nécessaire pour une situation donnée. Dans la gamme d'utilisation définie, il y a donc bien une classe de résistance qui minimise le volume de bois nécessaire dans tous les cas : le D70. A contrario, la classe de résistance C18 maximise le volume dans toutes les situations. Davantage de situations sont illustrées en Annexe E. Si le prix en fonction des classes de résistance est connu, il est alors possible de directement voir l'impact du choix de la classe de résistance sur le coût du projet.

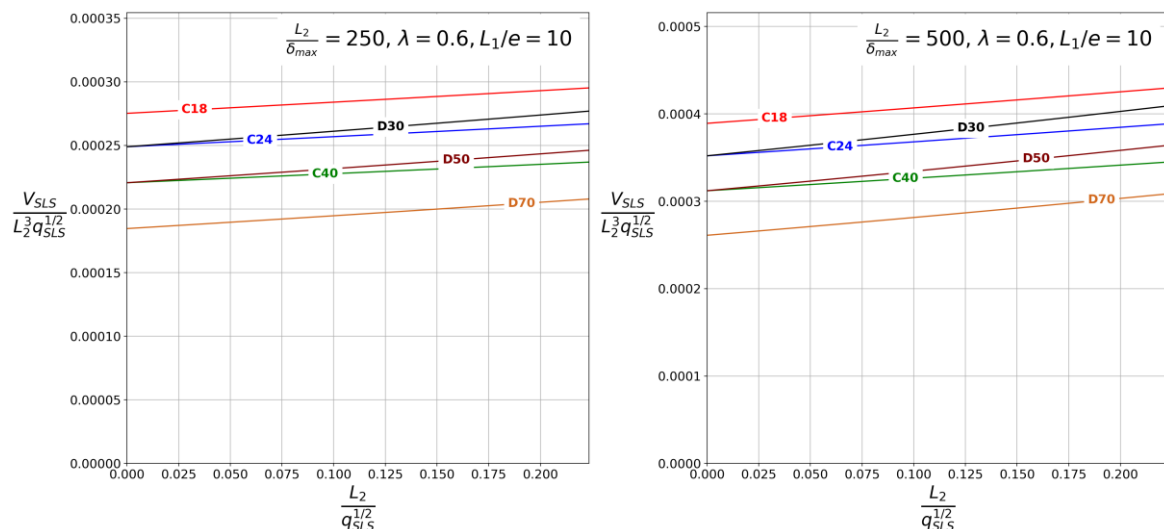


Figure 54 : Plancher classique – Image du volume en fonction de paramètres du problème pour $\lambda = 0,6$, $L_1/e = 10$, $L_2/\delta_{max} = 250$ (à gauche) et $L_2/\delta_{max} = 500$ (à droite), pour différentes classes de résistance.

4.2.2 En résumé

Il est possible de résumer tous les développements réalisés pour un plancher classique à l'état limite de service et de rassembler les différents graphiques obtenus en une figure unique (Figure 55). Les graphiques de gauche sont appelés « graphiques projet » et permettent de comparer directement plusieurs classes de résistance entre elles, pour une certaine valeur de λ , L_1/e et un critère de flèche L_2/δ_{max} donné. De plus, ces graphiques peuvent aider à obtenir des informations sur le coût de certaines parties du projet. Les graphiques de droite sont appelés « graphiques adimensionnels » et sont universels. Ils sont donc utilisables peu importe le matériau considéré, tant que le plancher étudié est composé de poutres fléchies circulaires chargées uniformément. Les graphiques supérieurs fournissent une information liée au volume alors que les graphiques inférieurs donnent une information sur le poids de la structure.

Conclusion :

La solution optimale correspond, tout comme l'analyse à l'état limite ultime, à minimiser le nombre de poutres composant le plancher, qu'on néglige le poids propre ou non. Cette situation correspond donc à un nombre de poutres nul, ce qui n'est pas réaliste. Le choix du nombre de poutres sera donc dicté par les dimensions de l'élément de couverture du plancher.

D'autre part, la différence de volume nécessaire en prenant en compte le poids propre par rapport au cas où le poids propre est négligé augmente lorsque L_1/e augmente. Pour les cas représentés :

- Pour $\Lambda_{SLS} = 0,015$ et $\frac{L_2}{\delta_{max}} = 250$: une augmentation maximale de 5,2% pour $L_1/e = 1$ à 27,17% pour $L_1/e = 25$
- Pour $\Lambda_{SLS} = 0,015$ et $\frac{L_2}{\delta_{max}} = 500$: une augmentation maximale de 7,5% pour $L_1/e = 1$ à 40,05% pour $L_1/e = 25$

La classe de résistance D70 minimise le volume de matière dans toutes les situations du domaine du champ d'application. Il est possible de classer les classes de résistance en fonction du volume nécessaire pour reprendre une charge F :

$$D70 < C40 < D50 < C24 < D30 < C18$$

D'autre part, les classes de résistance C18, C24 et C40 minimisent le poids du plancher par rapport à la charge extérieure, F . Il est possible de classer les classes de résistance en fonction du poids nécessaire pour reprendre une charge F :

$$C24 < C18 < C40 < D30 < D50 < D70$$

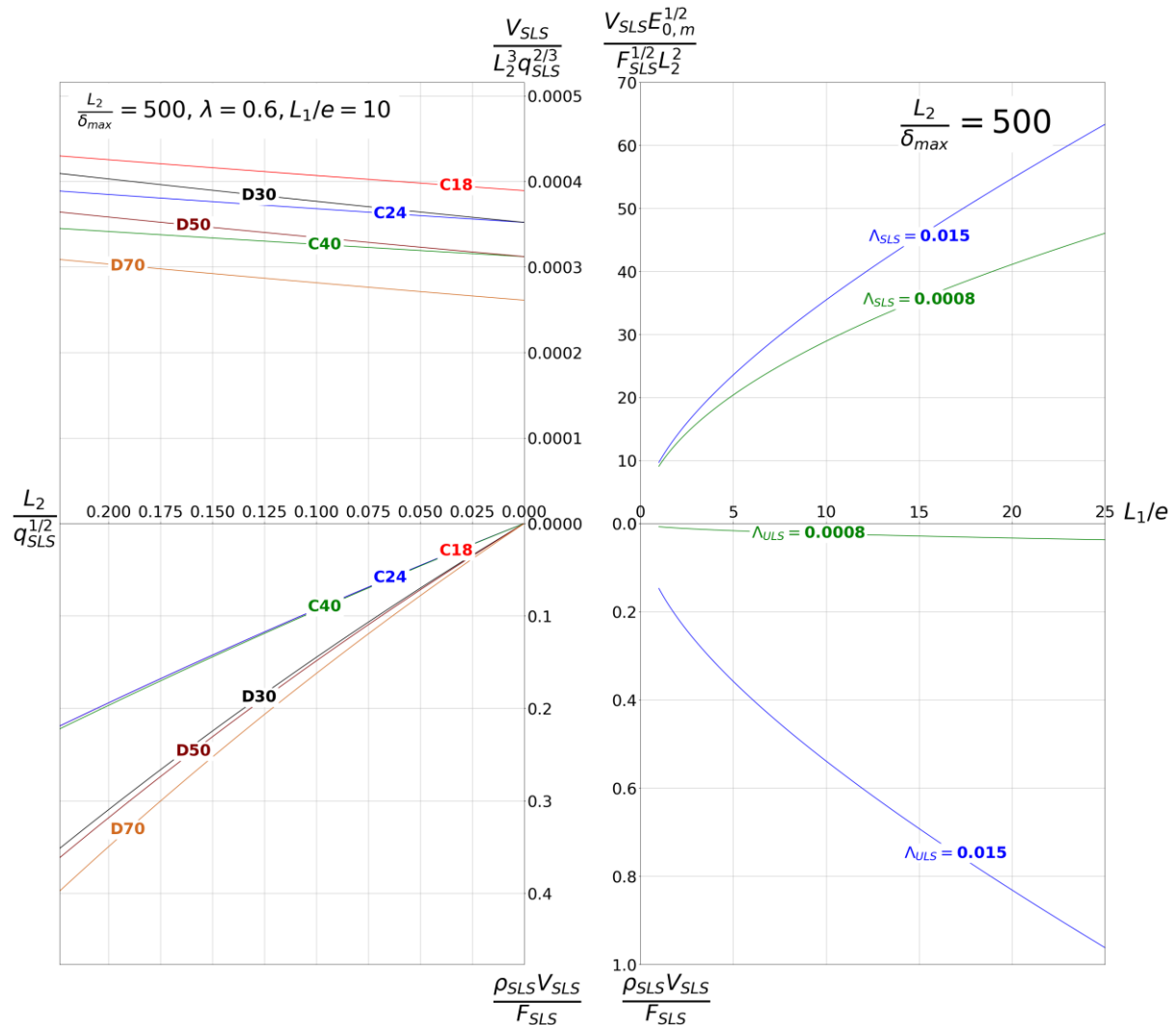


Figure 55 : Plancher classique - Résumé de l'analyse à l'état limite de service (SLS)

4.3 Conclusion intermédiaire

Pour conclure l'analyse d'un plancher simple composé de poutres parallèles, à sections circulaires, soumis à une charge uniformément répartie et à son poids propre, les analyses effectuées sont résumées. Dans un premier temps, des expressions ont été obtenues afin d'exprimer le volume de manière adimensionnelle, à l'aide d'un indicateur de volume W , en fonction d'un indicateur de poids propre (Λ), du nombre de poutres (L_1/e) et d'une flèche maximale (L_2/δ_{max} , à l'état limite de service). Ce dernier représente l'importance du poids propre de la poutre pour reprendre une certaine charge et respecter le critère étudié. Que ce soit l'analyse à l'état limite ultime ou à l'état limite de service il a été démontré qu'en tenant compte du poids propre dans le dimensionnement, les résultats diffèrent de l'analyse où le poids propre est négligé. En effet, le volume nécessaire augmente en tenant compte du poids propre, jusqu'à 40% pour l'SLS. De plus, le taux de travail réel d'une poutre composant le plancher dimensionné en négligeant son poids propre augmente lorsque le nombre de poutres composant le plancher augmente. Ce taux de travail dépasse 1.25 lorsque le plancher est composé de plus de 20 poutres, dans la pire situation.

Par ailleurs, des analyses ont été menées afin de comparer différentes classes de résistances entre elles. Dans un premier temps, l'efficacité matérielle ($\frac{\rho V}{F}$) a été étudiée afin de connaître l'importance du poids propre de l'élément (ρV) par rapport à la charge extérieure (F). Dans un second temps, le

volume de matière a été analysé dans le but de pouvoir comparer les dimensions de différentes classes pour reprendre une certaine charge F . Comme cela a déjà pu être dit, ces analyses permettent de pouvoir obtenir facilement une information sur l'influence qu'a le choix d'une classe de résistance sur le coût du projet. Cet aspect est davantage discuté au point 8.

La **Figure 56** représente l'ensemble des résultats obtenus dans le monde adimensionnel en regroupant tous les « **graphiques adimensionnels** ». La partie de gauche représente l'analyse à l'état limite ultime (ULS) alors que la partie de droite représente l'analyse à l'état limite de service (SLS). Les graphiques supérieurs représentent l'indicateur de volume en fonction de l'indicateur de poids propre alors que les graphiques inférieurs représentent l'efficacité matérielle en fonction de l'indicateur de poids propre. Ces graphiques peuvent être utilisés peu importe le matériau considéré, tant qu'il s'agit d'un plancher, composé de poutres circulaires parallèles, uniformément chargé.

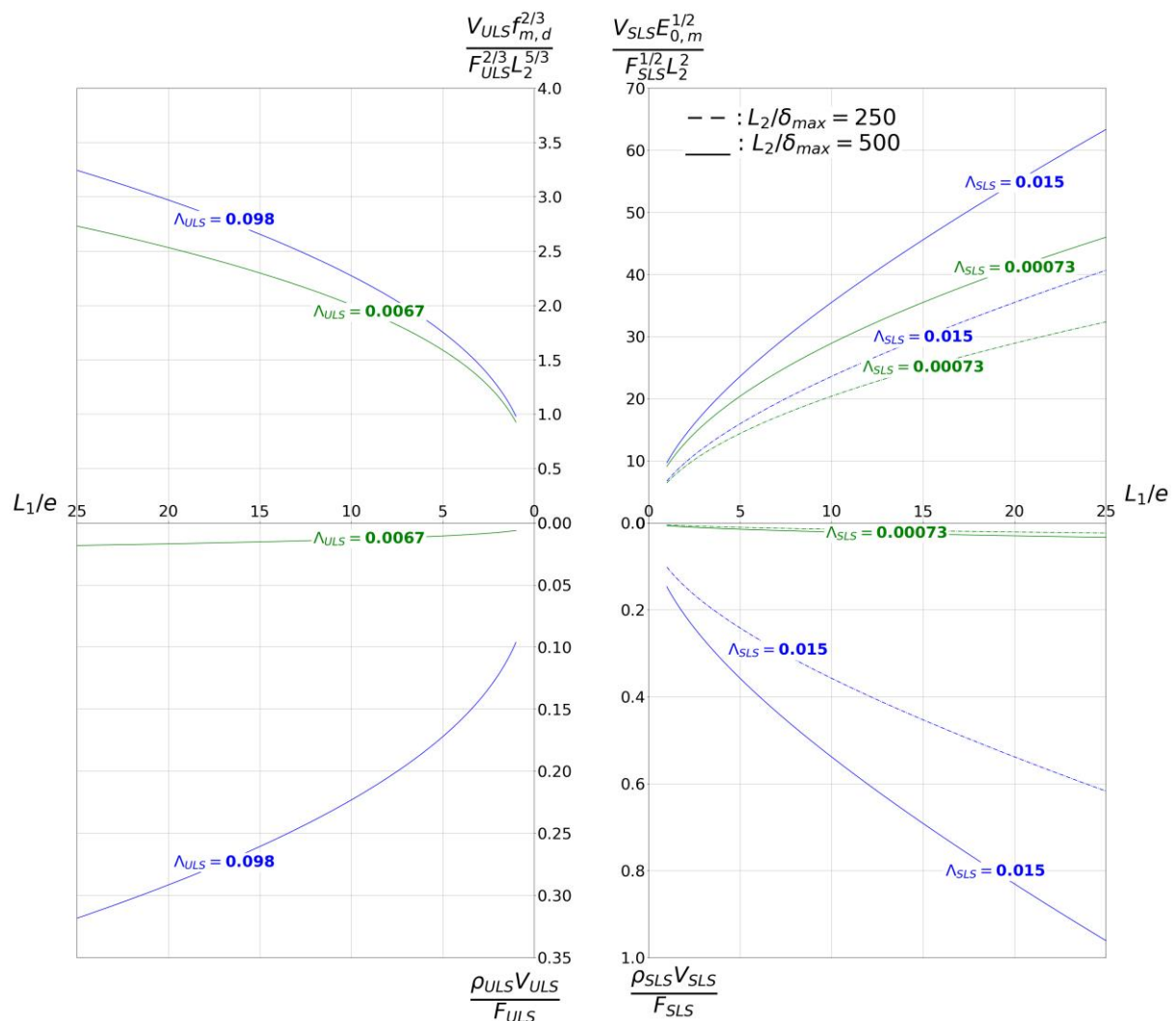


Figure 56 : Plancher classique - Résumé de l'analyse adimensionnelle - ULS à gauche - SLS à droite

La **Figure 57** rassemble l'ensemble des « **graphiques projets** » qui permettent donc de choisir un matériau pour une situation connue. La partie de gauche représente l'analyse à l'état limite ultime (ULS) alors que la partie de droite représente l'analyse à l'état limite de service (SLS), pour un critère de flèche $\frac{L_2}{\delta_{max}} = 250$, $\lambda = 0,6$ et un nombre de poutres $L_1/e = 10$. Les graphiques supérieurs donnent une information sur le volume en fonction de données du projet, pour différentes classes de résistance. Les graphiques inférieurs donnent, quant à eux, une information sur le poids de la structure

par rapport à la charge F à reprendre. A partir de ces graphiques, il est donc possible de directement comparer les différentes classes de résistance pour les différents critères et de choisir le matériau le plus adéquat.

Ces graphiques permettent de conclure que dans toutes les situations, la classe de résistance **D70** minimise le volume nécessaire alors que la classe de résistance **C40** minimise le poids du plancher pour reprendre une certaine charge F , tout comme cela avait pu être remarqué lors de l'analyse de la poutre simple.

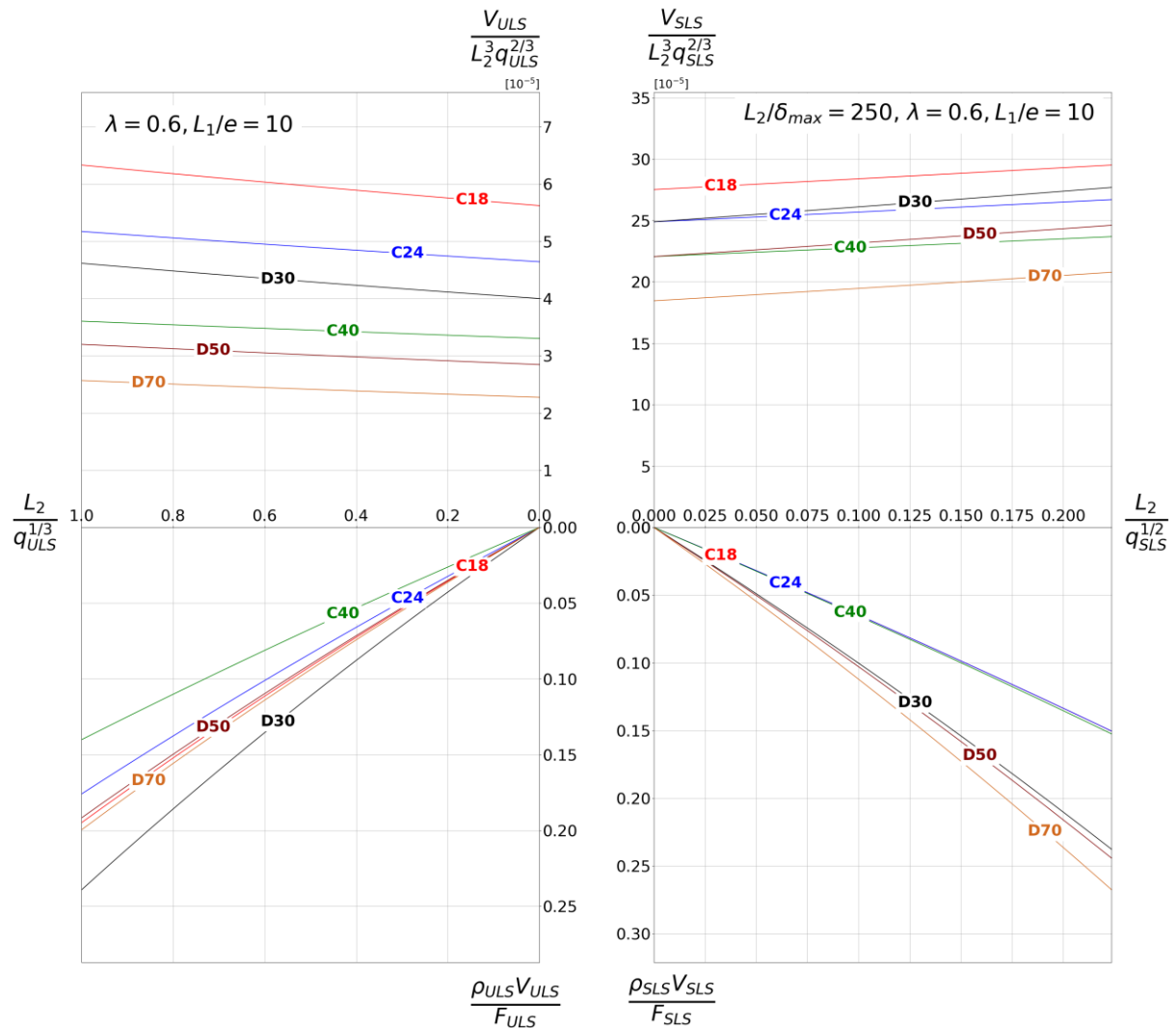


Figure 57 : Plancher classique - Résumé de l'analyse "projet" pour $\lambda = 0,6$ et $L_1/e = 10$ - ULS à gauche - SLS à droite

5 Optimisation du volume de bois d'un plancher carré composé d'un seul module réciproque élémentaire

Ce chapitre a pour objectif d'étudier le volume d'un plancher carré, de dimensions $L \times L$, composé d'un simple module réciproque carré formé de 4 poutres. Ces dernières sont supposées isostatiques, d'une longueur L_b et ayant une section circulaire pleine de diamètre ϕ . En plus du poids propre des poutres $q_{DW} = \rho V_i / L_b$ [kN/m], le plancher est soumis à une charge surfacique uniformément répartie q [N/m²] telle que $F = qL^2$ [N]. Dû à la géométrie de la structure primaire, le plancher est divisé en cinq zones en fonction du sens de portée de la structure secondaire, comme représenté en Figure 58. Pour les zones rectangulaires, la plus petite dimension, soit $(1-a)L_b$, est choisie comme sens de portée. En ce qui concerne la zone centrale, le sens de portée choisi est vertical, comme représenté en Figure 58.

Suite à ce choix du sens de portée de la zone centrale, toutes les poutres ne sont pas chargées de la même manière. Deux types de poutres sont donc définies en fonction du cas de charge. D'une part, les poutres 1 et 3 sont appelées les poutres de « Type 1 » dont le volume est noté V_1 . D'autre part, les poutres 2 et 4 sont chargées de la même manière et sont donc appelées poutres de « Type 2 ». Leur volume est noté V_2 . Les schémas statiques de ces 2 types de poutres sont représentés respectivement Figure 59 et Figure 60.

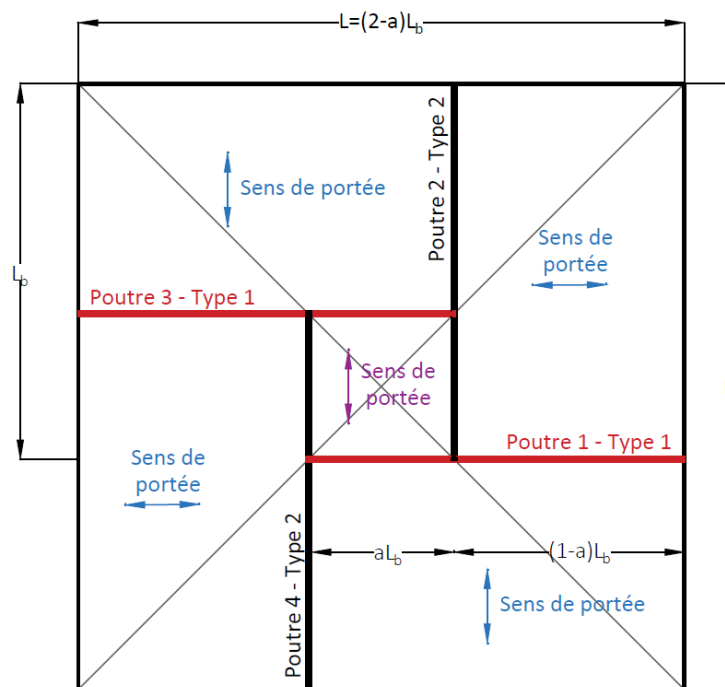


Figure 58 : Module simple - Plancher carré avec un module réciproque

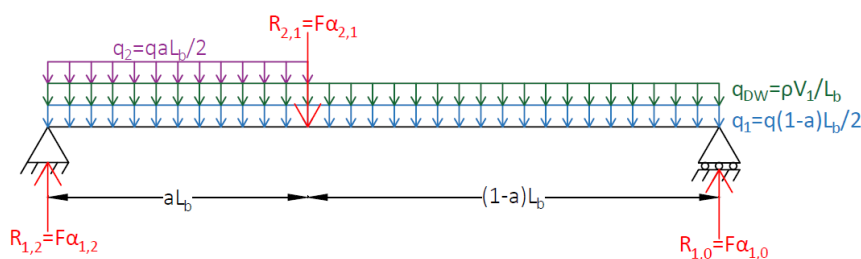


Figure 59 : Module simple - Schéma statique d'une poutre Type 1

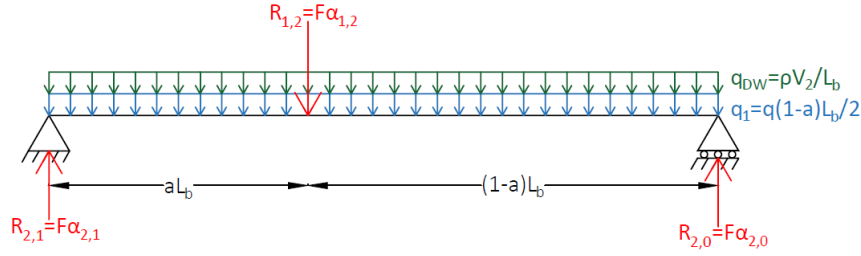


Figure 60 : Module simple - Schéma statique d'une poutre Type 2

Note : Les appuis sont définis avec les indices i et j tels que $R_{i,j}$ représente la réaction d'appui d'une poutre de type i s'appuyant sur une poutre de type j . L'indice 0 fait référence au bord du plancher.

5.1 Optimisation du volume de bois en fonction de la contrainte de flexion

Cette partie aborde différentes analyses. Dans un premier temps, uniquement le volume de la structure primaire en flexion est étudié en considérant que toutes les poutres composant le plancher sont des poutres de type 1. Dans un second temps, le cas du plancher réalisé avec deux poutres de type 1 et deux poutres de type 2 est étudié, à nouveau sous le critère de flexion. L'influence de la structure secondaire est ensuite ajoutée à l'analyse afin d'étudier le plancher dans son ensemble et de pouvoir le comparer à un plancher classique analysé dans le chapitre précédent.

5.1.1 Approximation : toutes les poutres du module sont de type 1

La situation étudiée dans cette partie est un plancher réciproque composé d'un module dont les quatre poutres sont identiques et de type 1. De par ce choix, le type de poutre ayant le plus grand chargement est donc choisi pour dimensionner les quatre éléments, ce qui va mener à un surdimensionnement du volume de matière total réellement nécessaire. La situation est donc sécuritaire puisque $V_1 = V_2$.

L'objectif va être de déterminer le volume du plancher en fonction de la contrainte dans les éléments, en supposant que les éléments sont soumis à de la flexion principalement. Il est donc nécessaire de connaître la position et la valeur du moment maximal dans chacun des éléments. Pour commencer, les réactions d'appuis sont déterminées à partir des équations d'équilibre des moments et des efforts verticaux. La résolution de ces équations donne les réactions d'appuis suivantes :

$$\begin{cases} R_{1,2} = F\alpha_{1,2}\left(a, \frac{\rho V_1}{F}\right) = F\left[\left(\frac{a^2 - a + 1}{4a(2-a)^2}\right) + \frac{\rho V_1}{F} \frac{1}{2a}\right] \\ R_{1,0} = F\alpha_{1,0}\left(a, \frac{\rho V_1}{F}\right) = F\left[\left(\frac{a^2 - 2a + 2}{4(2-a)^2}\right) + \frac{\rho V_1}{F}\right] \\ R_{2,1} = F\alpha_{2,1}\left(a, \frac{\rho V_1}{F}\right) = F\left[\left(\frac{-a^3 + a^2 - a + 1}{4a(2-a)^2}\right) + \frac{\rho V_1}{F} \frac{1}{2a}\right] \\ R_{2,0} = F\alpha_{2,0}\left(a, \frac{\rho V_1}{F}\right) = F\left[\left(\frac{a^2 - 2a + 2}{4(2-a)^2}\right) + \frac{\rho V_1}{F}\right] \end{cases}$$

5.1.1.1 Expression du moment maximal

Pour connaître la contrainte de flexion dans la section, il faut connaître le moment maximal. Cependant, la position de ce dernier n'est, à priori, pas connue. Afin de la déterminer, des coupes sont effectuées le long de la poutre dans le but d'évaluer les efforts internes à gauche et à droite de la charge ponctuelle, comme représenté en Figure 61.

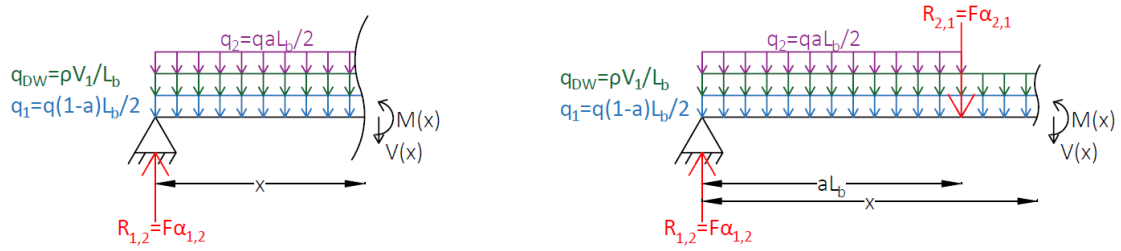


Figure 61 : Module simple - Poutre Type 1 - coupe 1 (gauche) et coupe 2 (droite)

Pour la coupe 1, de gauche ($0 \leq x \leq aL_b$), l'expression du moment est donnée par :

$$M_{g,1}(x) = R_{1,2}x - (q_1 + q_2 + q_{DW})\frac{x^2}{2} \quad 0 \leq x \leq aL_b$$

Pour la coupe 2, de droite ($aL_b \leq x \leq L_b$), l'expression du moment est donnée par :

$$M_{d,1}(x) = (R_{1,2} - R_{2,1} - q_2aL_b)x - (q_1 + q_{DW})\frac{x^2}{2} + (R_{2,1} + q_2aL_b)aL_b$$

- Moment maximal dans le tronçon gauche de la poutre type 1 ($0 \leq x \leq aL_b$)

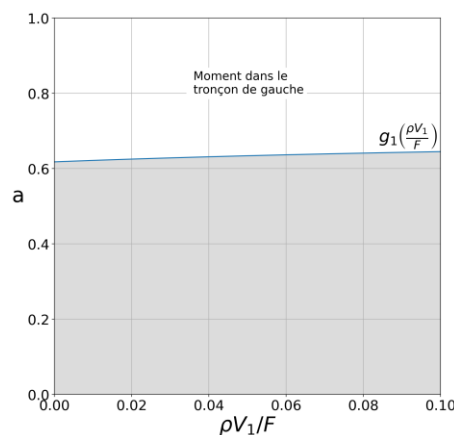
Le moment maximal est obtenu lorsque : $\frac{dM_{g,1}(x)}{dx} = 0$. Cela permet de trouver une expression indiquant où il se trouve :

$$x_{g,1,max} = \frac{2(2-a)\alpha_{1,2}\left(a, \frac{\rho V_1}{F}\right)L}{1 + 2\frac{\rho V_1}{F}(2-a)^2}$$

Il faut alors regarder si cette expression peut donner des valeurs telles que $0 \leq x \leq aL_b$:

$$\frac{2(2-a)\alpha_{1,2}\left(a, \frac{\rho V_1}{F}\right)L}{1 + 2\frac{\rho V_1}{F}(2-a)^2} \leq aL_b = \frac{a}{2-a}L$$

En fonction de la valeur $\frac{\rho V_1}{F}$ la valeur de a à partir de laquelle cette inéquation est vérifiée varie. La Figure 62 représente la valeur de a à partir de laquelle le moment se trouve dans le tronçon de gauche en fonction de la valeur de $\frac{\rho V_1}{F}$.


 Figure 62 : Module simple - Valeur de la proportion d'engagement a à partir de laquelle le moment se trouve dans le tronçon gauche en fonction de $\rho V_1/F$

En réécrivant l'expression du moment $M_{g,1}$ lorsqu'il est maximal en $x_{g,1,max}$, nous obtenons, pour $g_1\left(\frac{\rho V_1}{F}\right) \leq a \leq 1$:

$$M_{g,1,max} = \frac{(2-a)\alpha_{1,2}^2(a, \frac{\rho V_1}{F})}{(1 + 2\frac{\rho V_1}{F}(2-a)^2)} FL = f_{1,g,0}\left(a, \frac{\rho V_1}{F}\right) FL$$

Où $f_{1,g,0}(a) = \alpha_{1,2}^2(2-a)$.

- Moment maximal dans le tronçon droit de la poutre type 1 ($aL_b \leq x \leq L_b$)

A nouveau, le moment maximal est obtenu lorsque : $\frac{dM_{d,1}(x)}{dx} = 0$. L'expression de x vérifiant cette équation est donnée par :

$$x_{d,1,max} = -\frac{a^2}{2(2-a)\left(1-a+2\frac{\rho V_1}{F}(2-a)^2\right)} L$$

Cette équation donnera toujours des valeurs de $x_{d,1,max}$ négatives $\forall a \in [0,1]$. Le moment maximal ne se trouvera donc jamais dans le tronçon de droite.

- Moment maximal au niveau de la charge ponctuelle de la poutre type 1

Le moment calculé au droit de la charge ponctuelle est donné par :

$$M_{p,1,max} = M_{g,1}(x = aL_b) = \frac{\left(1-a+2\frac{\rho V_1}{F}(2-a)^2(1-a^2)\right)}{4(2-a)^3} FL = f_{1,p,0}\left(a, \frac{\rho V_1}{F}\right) FL$$

Pour $0 \leq a \leq g_1(\rho V_1/F)$ et où on a posé $f_{1,p,0}(a) = \frac{1-a+2\frac{\rho V_1}{F}(2-a)^2(1-a^2)}{4(2-a)^3}$.

- Moment maximal de la poutre type 1

En rassemblant tous ces résultats, le moment maximal dans la poutre 1 vaut donc :

$$M_{1,max} = f_{1,0}\left(a, \frac{\rho V_1}{F}\right) FL$$

Avec

$$f_{1,0}\left(a, \frac{\rho V_1}{F}\right) = \begin{cases} f_{1,p,0}\left(a, \frac{\rho V_1}{F}\right) = \frac{\left(1-a+2\frac{\rho V_1}{F}(2-a)^2(1-a^2)\right)}{4(2-a)^3} & 0 \leq a \leq g_1\left(\frac{\rho V_1}{F}\right) \\ f_{1,g,0}\left(a, \frac{\rho V_1}{F}\right) = \frac{(2-a)\alpha_{1,2}^2\left(a, \frac{\rho V_1}{F}\right)}{\left(1+2\frac{\rho V_1}{F}(2-a)^2\right)} & g_1\left(\frac{\rho V_1}{F}\right) \leq a \leq 1 \end{cases}$$

5.1.1.2 Expression du volume du module réciproque

Le volume des poutres de type 1 peut alors être calculé en partant de l'expression de la contrainte de flexion et du volume d'un cylindre tel que réalisé dans les précédents chapitres :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{M_{1,max}}{2I_1/\phi_1} = f_{1,0} \left(a, \frac{\rho V_1}{F} \right) FL \frac{64}{\pi \phi_1^4} \frac{\phi_1}{2} \\ V_1 = \frac{\pi \phi_1^2}{4} \left(\frac{L}{2-a} \right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \phi_1^2 = \left(\frac{32 f_{1,0} \left(a, \frac{\rho V_1}{F} \right) FL}{\pi \sigma} \right)^{2/3} \\ V_1 = \frac{\pi \phi_1^2}{4} \left(\frac{L}{2-a} \right) \end{cases}$$

Le volume d'une poutre de type 1 est alors donné par :

$$V_1 = 3.691 \frac{f_{1,0}^{\frac{2}{3}} \left(a, \frac{\rho V_1}{F} \right) F^{2/3} L^{5/3}}{2-a} \frac{1}{\sigma^{2/3}}$$

Considérant, pour le moment, un plancher composé de 4 poutres de type 1, le volume total du plancher vaut donc :

$$V = 4V_1 = 14,762 \frac{f_{1,0}^{\frac{2}{3}} \left(a, \frac{\rho V_1}{F} \right) F^{2/3} L^{5/3}}{2-a} \frac{1}{\sigma^{2/3}}$$

En utilisant à nouveau la relation liant $\frac{\rho V_1}{F}$ à l'indicateur de volume et de poids propre :

$$\frac{\rho V_1}{F} = \frac{\rho L^{5/3}}{F^{1/3} \sigma^{2/3}} \frac{V_1 \sigma^{2/3}}{F^{2/3} L^{5/3}} = \frac{\rho L^{5/3}}{F^{1/3} \sigma^{2/3}} \frac{V \sigma^{2/3}}{F^{2/3} L^{5/3}} \frac{1}{4} = \frac{\Lambda_\sigma W_\sigma}{4}$$

Il est alors possible d'adimensionnaliser le volume, ce qui donne :

$$W_\sigma = \frac{V \sigma^{2/3}}{F^{2/3} L^{5/3}} = 14,762 \frac{f_{1,0}^{\frac{2}{3}} \left(a, \frac{\Lambda_\sigma W_\sigma}{4} \right)}{2-a}$$

Avec

$$f_{1,0} \left(a, \frac{\Lambda_\sigma W_\sigma}{4} \right) = \begin{cases} f_{1,p,0} \left(a, \frac{\Lambda_\sigma W_\sigma}{4} \right) = \frac{\left(1-a + 2 \frac{\Lambda_\sigma W_\sigma}{4} (2-a)^2 (1-a^2) \right)}{4(2-a)^3} & 0 \leq a \leq g_1 \left(\frac{\Lambda_\sigma W_\sigma}{4} \right) \\ f_{1,g,0} \left(a, \frac{\Lambda_\sigma W_\sigma}{4} \right) = \frac{(2-a) \alpha_{1,2}^2 \left(a, \frac{\Lambda_\sigma W_\sigma}{4} \right)}{\left(1 + 2 \frac{\Lambda_\sigma W_\sigma}{4} (2-a)^2 \right)} & g \left(\frac{\Lambda_\sigma W_\sigma}{4} \right) \leq a \leq 1 \end{cases}$$

Finalement, l'indicateur de volume peut s'écrire :

$$W_\sigma = \frac{V \sigma^{2/3}}{F^{2/3} L^{5/3}} = W_{B,1} \left(a, \frac{\Lambda_\sigma W_\sigma}{4} \right) \quad (5a)$$

$$\text{Où } W_{B,1} \left(a, \frac{\Lambda W}{4} \right) = 14,762 \frac{f_{1,0}^{\frac{2}{3}} \left(a, \frac{\Lambda W}{4} \right)}{2-a}.$$

L'expression (5a) peut être évaluée à l'état limite ultime :

$$W_{ULS} = \frac{V_{ULS} f_{m,d}^{2/3}}{F_{ULS}^{2/3} L^{5/3}} = W_{B,1} \left(a, \frac{\Lambda_{ULS} W_{ULS}}{4} \right) \quad (5b)$$

Sur la Figure 63 est représentée l'expression (5b) de l'indicateur de volume en fonction de la proportion d'engagement a . Trois courbes ont été tracées, la première, en pointillés rouges représente le cas où le poids propre est négligé ($\Lambda_{ULS} = 0$), la deuxième, en vert, représente le cas où

$\Lambda_{ULS} = 0.0067$ et la troisième, en bleu, représente le cas où $\Lambda_{ULS} = 0.098$. Pour rappel, ces valeurs ont été définies dans la section 3.1. Pour toute autre valeur de l'indicateur de poids propre Λ_{ULS} , la solution se trouvera à l'intérieur de ces courbes. La courbe de l'indicateur de poids propre minimal se confond presque avec le cas où le poids propre est négligé.

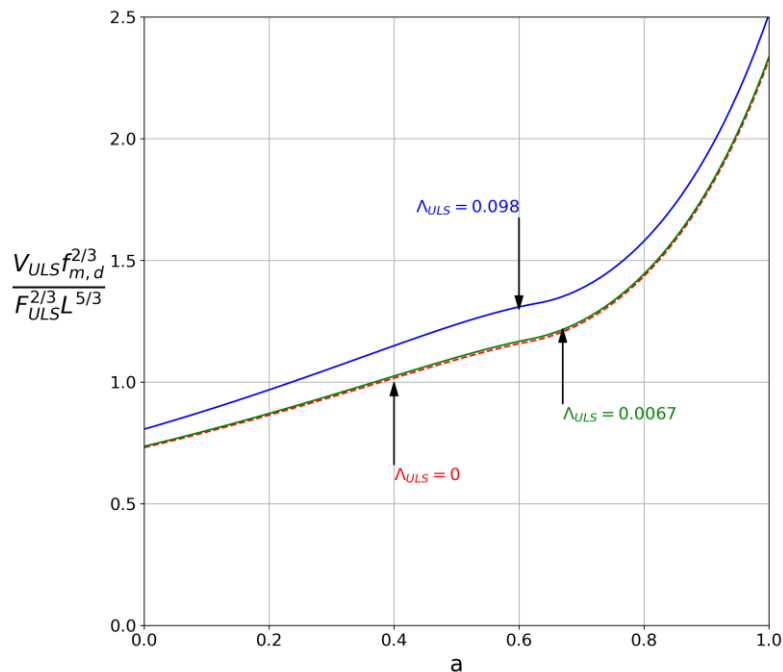


Figure 63 : Module simple - Plancher carré (4 poutres de Type 1) – Indicateur de volume en fonction de la proportion d'engagement a .

Conclusion :

Il est possible d'observer qu'en négligeant le poids propre ou non, la solution optimale correspond à choisir un a minimal, soit $a = 0$. Ce choix mène alors à un plancher composé de 4 poutres de longueur $L/2$ se rejoignant au centre du plancher.

Par ailleurs une augmentation du volume nécessaire est observée en considérant le poids propre par rapport au cas où celui-ci est négligé. Cette augmentation varie en fonction de la valeur de a mais deux zones se distinguent sur la Figure 63 :

- $0 \leq a \leq \sim 0,5$: Le pourcentage de volume supplémentaire nécessaire pour $\Lambda_{ULS} = 0,098$ par rapport au cas où le poids propre est négligé augmente entre $a = 0$ et $a = \sim 0,5$. Il est de 10,23%, en $a = 0$. En $a = \sim 0,5$, cette augmentation est de 13,23%.
- $\sim 0,5 \leq a \leq 1$: Le pourcentage de volume supplémentaire nécessaire pour $\Lambda_{ULS} = 0,098$ par rapport au cas où le poids propre est négligé diminue entre $a = \sim 0,5$ et $a = 1$. En $a = 1$, le pourcentage de volume en plus nécessaire pour $\Lambda_{ULS} = 0,098$ par rapport au cas où le poids propre est négligé est de 10,53%.

Le cas où l'indicateur de poids propre est minimal est, quant à lui, très similaire au cas où le poids propre est négligé.

5.1.2 Deux poutres de type 1 et deux poutres de type 2

L'objectif étant de minimiser le volume de matière, il est intéressant d'étudier le cas où le module est optimisé dans sa configuration optimale, c'est-à-dire avec 2 poutres de type 1 et 2 poutres de type 2. Tout comme précédemment, la première étape consiste à déterminer les réactions d'appuis. Ces dernières sont obtenues à partir des équations d'équilibre des moments et des efforts verticaux. Le volume des poutres de type 1 est noté V_1 alors que le volume des poutres de type 2 est noté V_2 . Les réactions d'appuis peuvent alors s'écrire :

$$\begin{cases} R_{1,2} = F\alpha_{1,2} \left(a, \frac{\rho V_1}{F}, \frac{\rho V_2}{F} \right) = F \left[\left(\frac{a^2 - a + 1}{4a(2-a)^2} \right) + \frac{\rho V_1}{2Fa(2-a)} + \frac{\rho V_2(1-a)}{2Fa(2-a)} \right] \\ R_{1,0} = F\alpha_{1,0} \left(a, \frac{\rho V_1}{F}, \frac{\rho V_2}{F} \right) = F \left[\left(\frac{a^2 - 2a + 2}{4(2-a)^2} \right) + \frac{\rho V_1}{F} + \frac{\rho(V_2 - V_1)}{2F(2-a)} \right] \\ R_{2,1} = F\alpha_{2,1} \left(a, \frac{\rho V_1}{F}, \frac{\rho V_2}{F} \right) = F \left[\left(\frac{-a^3 + a^2 - a + 1}{4a(2-a)^2} \right) + \frac{\rho V_2}{2Fa(2-a)} + \frac{\rho V_1(1-a)}{2Fa(2-a)} \right] \\ R_{2,0} = F\alpha_{2,0} \left(a, \frac{\rho V_1}{F}, \frac{\rho V_2}{F} \right) = F \left[\left(\frac{a^2 - 2a + 2}{4(2-a)^2} \right) + \frac{\rho V_1}{F} + \frac{\rho(V_2 - V_1)}{2F(2-a)} \right] \end{cases}$$

5.1.2.1 Expression du moment maximal

La démarche est la même que celle réalisée précédemment, à savoir chercher l'expression du moment maximal et sa position. Afin de la déterminer, des coupes doivent être effectuées le long de chaque type de poutre dans le but d'évaluer les efforts internes à gauche et à droite de la charge ponctuelle, comme représenté en Figure 64, pour la poutre de type 1. Le résultat n'est, à priori, pas le même que celui obtenu précédemment puisque les poutres de type 2 ont un volume $V_2 \neq V_1$ et que les réactions sont différentes.

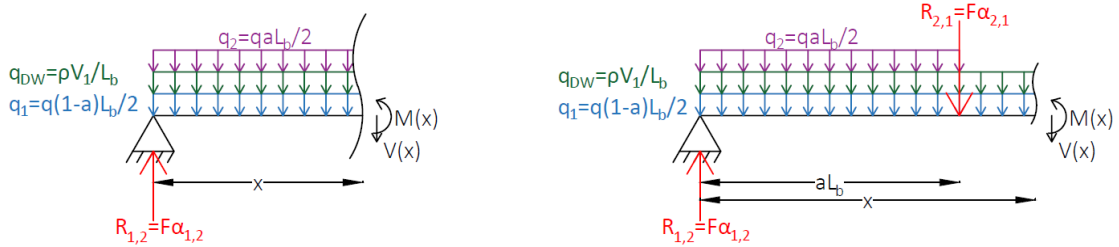


Figure 64 : Module simple - Poutre Type 1 - coupe 1 (gauche) et coupe 2 (droite)

Pour la poutre de type 1 et la coupe 1, de gauche ($0 \leq x \leq aL_b$), l'expression du moment est donnée par :

$$M_{g,1}(x) = R_{1,2}x - (q_1 + q_2 + q_{DW})\frac{x^2}{2} \quad 0 \leq x \leq aL_b$$

- Moment maximal dans le tronçon gauche de la poutre type 1 ($0 \leq x \leq aL_b$)

Le moment maximal est obtenu, dans la poutre de type 1, lorsque : $\frac{dM_{g,1}(x)}{dx} = 0$. Cela permet de trouver une expression indiquant où il se trouve :

$$x_{g,1,max} = \frac{\frac{a^2 - a + 1}{2a(2-a)} + \frac{\rho V_1}{aF} + \frac{\rho V_2(1-a)}{aF}}{1 + 2\frac{\rho V_1}{F}(2-a)^2}$$

Trouver la position du moment maximal de manière analytique sur base de cette équation se révèle être compliqué analytiquement. En effet, le volume de matière V_2 dépend de a et de V_1 tout comme V_1 dépend de a et de V_2 . Pour ces raisons, il a donc été décidé d'utiliser un modèle numérique afin de combler les difficultés du modèle analytique. Le modèle utilisé est décrit à la section 6.1.1. Dans ce qui suit, uniquement les résultats obtenus à partir de ce modèle sont donc montrés et discutés.

5.1.2.2 Indicateur de volume de la structure primaire

La Figure 65 représente l'indicateur de volume en fonction de la proportion d'engagement a pour différentes valeurs d'indicateur de poids propre. Parmi celles-ci, le cas où le poids propre est négligé ($\Lambda_{ULS} = 0$), est représenté par la courbe rouge pointillée. La courbe verte représente la borne inférieure de l'intervalle d'indicateur de poids propre, à savoir $\Lambda_{ULS} = 0,0067$ alors que la courbe bleue représente la borne supérieure de l'intervalle, à savoir $\Lambda_{ULS} = 0,098$. La courbe verte et la

courbe bleue fournissent alors une enveloppe de valeurs dans laquelle toutes les solutions souhaitées se situeront. Il est possible d'observer que la courbe pour l'indicateur de poids propre minimal ($\Lambda_{ULS} = 0,0067$) se confond presque avec celle où le poids propre est négligé. Dans la suite de la discussion, uniquement le cas où $\Lambda_{ULS} = 0,098$ est donc discuté.

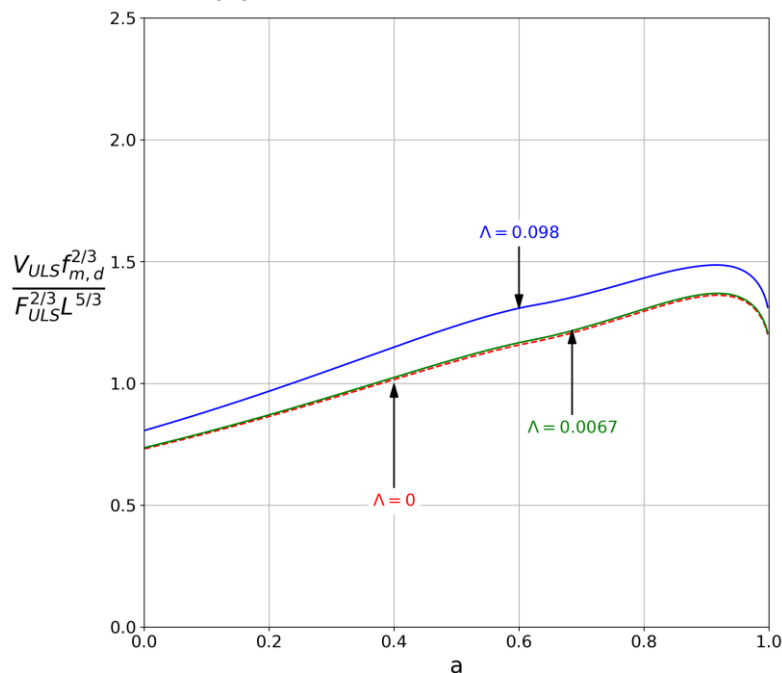


Figure 65 : Module simple - Indicateur de volume en fonction de la proportion d'engagement pour différentes valeurs d'indicateur de poids propre

Conclusion :

Il est possible d'observer qu'en négligeant le poids propre ou non, la solution optimale correspond à nouveau à choisir un a minimal, soit $a = 0$. Ce choix mène alors à un plancher composé de 4 poutres de longueur $L/2$ se rejoignant au centre du plancher.

Par ailleurs, une augmentation du volume nécessaire est observée en considérant le poids propre par rapport au cas où on le négligerait. Cette augmentation varie en fonction de la valeur de a mais deux zones peuvent être distinguées sur la Figure 65 :

- $0 \leq a \leq \sim 0,5$: Le pourcentage de volume supplémentaire nécessaire pour $\Lambda_{ULS} = 0,098$ par rapport au cas où le poids propre est négligé augmente entre $a = 0$ et $a = \sim 0,5$. Il est de 10,23%, en $a = 0$. En $a = \sim 0,5$, cette augmentation est de 13,23%.
- $\sim 0,5 \leq a \leq 1$: Le pourcentage de volume supplémentaire nécessaire pour $\Lambda_{ULS} = 0,098$ par rapport au cas où le poids propre est négligé diminue entre $a = \sim 0,5$ et $a = 1$. En $a = 1$, le pourcentage de volume en plus nécessaire pour $\Lambda_{ULS} = 0,098$ par rapport au cas où le poids propre est négligé est de 9,35%.

Enfin, la courbe correspondant à un $\Lambda_{ULS} = 0,0067$ se confond à nouveau presque avec celle lorsque le poids propre est négligé.

5.1.2.3 Prise en compte des structures secondaires

En plus du volume de la structure primaire, composée des 4 poutres du module, un plancher réciproque est composé de structures secondaires telles que représentées Figure 66. Cette structure secondaire est composée de 5 parties qui sont des planchers classiques. Chacune des parties reprend donc une certaine proportion de la charge et représente une charge supplémentaire à reprendre par les éléments de la structure primaire. L'entraxe e entre les poutres est le même dans toutes les zones du plancher.

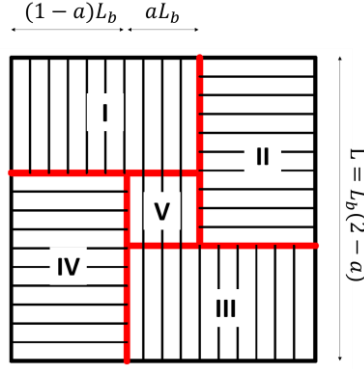


Figure 66 : Module simple - Structure primaire + structure secondaire

- Il y a 4 parties rectangulaires (les zones I, II, III et IV). Le volume de ces parties peut être calculé à partir de l'expression (3a):

$$V_r = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/3} n_r^{1/3} \left(\frac{\rho V_r}{F_r} + 1\right)^{2/3} \frac{L_{2,r}^{5/3} F_r^{2/3}}{\sigma^{2/3}}$$

$$\text{Où } L_{2,r} = \frac{(1-a)L}{2-a}, n_r = \frac{L_r}{e} = \frac{L}{(2-a)e}, \text{ et } F_r = \frac{A_r}{A_{tot}} F = \frac{L_r L_{2,r}}{L^2} F = \frac{1-a}{(2-a)^2} F$$

Ce qui permet alors d'écrire :

$$V_r = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/3} \left(\frac{L}{e}\right)^{1/3} \left(\frac{\rho V_r (2-a)^2}{F (1-a)} + 1\right)^{2/3} \frac{L^{5/3} F^{2/3} (1-a)^{7/3}}{\sigma^{2/3} (2-a)^{10/3}} \quad (5c)$$

- Il y a une partie centrale carrée (la zone V). Le volume de cette zone peut être calculée de manière similaire aux zones rectangulaires, à partir de l'expression (3a):

$$V_c = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/3} n_c^{1/3} \left(\frac{\rho V_c}{F_c} + 1\right)^{2/3} \frac{L_{2,c}^{5/3} F_c^{2/3}}{\sigma^{2/3}}$$

$$\text{Où } L_{2,c} = \frac{aL}{2-a}, n_c = \frac{L_c}{e} = \frac{aL}{(2-a)e} \text{ et } F_c = \frac{A_c}{A_{tot}} F = \frac{L_c^2}{L^2} F = \frac{a^2}{(2-a)^2} F$$

Ce qui permet alors d'écrire :

$$V_c = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{1/3} \left(\frac{L}{e}\right)^{1/3} \left(\frac{\rho V_c (2-a)^2}{F a^2} + 1\right)^{2/3} \frac{L^{5/3} F^{2/3} a^{10/3}}{\sigma^{2/3} (2-a)^{10/3}} \quad (5d)$$

Le volume total de la structure secondaire peut donc s'écrire :

$$V_{sec} = V_c + 4V_r$$

Le volume total, V_{tot} , est alors obtenu en additionnant le volume de la structure primaire, V_{prim} , et le volume de la structure seconde, V_{sec} :

$$V_{tot} = V_{prim} + V_{sec}$$

Ces différents volumes sont calculés en utilisant un modèle numérique, qui est expliqué à la section 6.1.2. Lorsque ce volume total est adimensionnalisé et évalué à l'ULS, il peut alors s'écrire :

$$W_{tot,ULS} = \frac{V_{tot,ULS} f_{m,d}^{2/3}}{F_{ULS}^{2/3} L^{2/3}}$$

La Figure 67 représente l'indicateur de volume du plancher réciproque complet, structure primaire et structure secondaire, en fonction de la proportion d'engagement a , pour une valeur de l'indicateur de poids propre valant $\Lambda_{ULS} = 0,098$ et pour plusieurs rapports $\frac{L}{e}$. Dans le cadre d'un plancher

réciproque, cette valeur ne représente rien physiquement mais permet une comparaison au plancher classique car ce rapport représente une image du nombre de poutres composant le plancher réciproque. Le volume associé à la structure secondaire représente donc une bonne partie du volume total.

Les graphiques présentés à la Figure 68 comparent les courbes obtenues pour $\Lambda_{ULS} = 0,098$ (les courbes pleines) aux courbes obtenues lorsque le poids propre est négligé (les courbes rouges pointillées), pour plusieurs valeurs de L/e . Le pourcentage de différence entre les 2 courbes varie entre 12,36% ($L/e = 5$) et 22,4% ($L/e = 25$). La prise en compte du poids propre dans le dimensionnement a donc une influence importante sur le volume nécessaire.

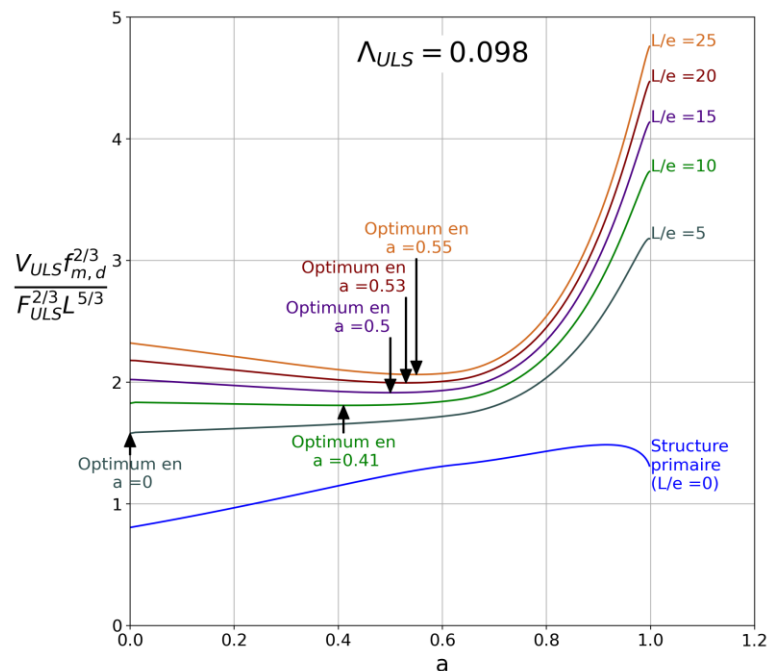


Figure 67 : Module simple - Indicateur de volume de la structure primaire avec la structure secondaire pour indicateur de poids propre max

Conclusion :

Tout d'abord, entre $a = 0$ et $a = 0,7$, l'indicateur de volume est relativement constant pour une valeur de L/e donnée. Au-delà de $a = 0,7$, l'indicateur de volume augmente très fortement. Il est donc préférable d'opter pour une proportion d'engagement a inférieure à 0,7.

Ensuite, il est maintenant possible de comparer le volume d'un plancher classique et d'un plancher réciproque, carré, composé d'un module simple. En supposant que le plancher réciproque est dimensionné en minimisant l'indicateur de volume, il suffit de prendre la valeur de W optimale pour chaque valeur de L/e , reprise en Figure 68 et de comparer cette valeur à la valeur correspondante d'un plancher simple, reprise en Figure 40. Le gain de matière, en fonction de L/e vaut alors :

- $L/e = 5$: Gain de 9,71% de matière
- $L/e = 10$: Gain de 20,26% de matière
- $L/e = 15$: Gain de 27,81% de matière
- $L/e = 20$: Gain de 33% de matière
- $L/e = 25$: Gain de 36,4% de matière

Le plancher réciproque composé d'un module réciproque permet donc un gain de matière allant de 10% à 36% en fonction du rapport L/e . Ces gains de matière sont très similaires à ceux obtenus lors de l'analyse en négligeant le poids propre qui allaient de 15% à 30%.

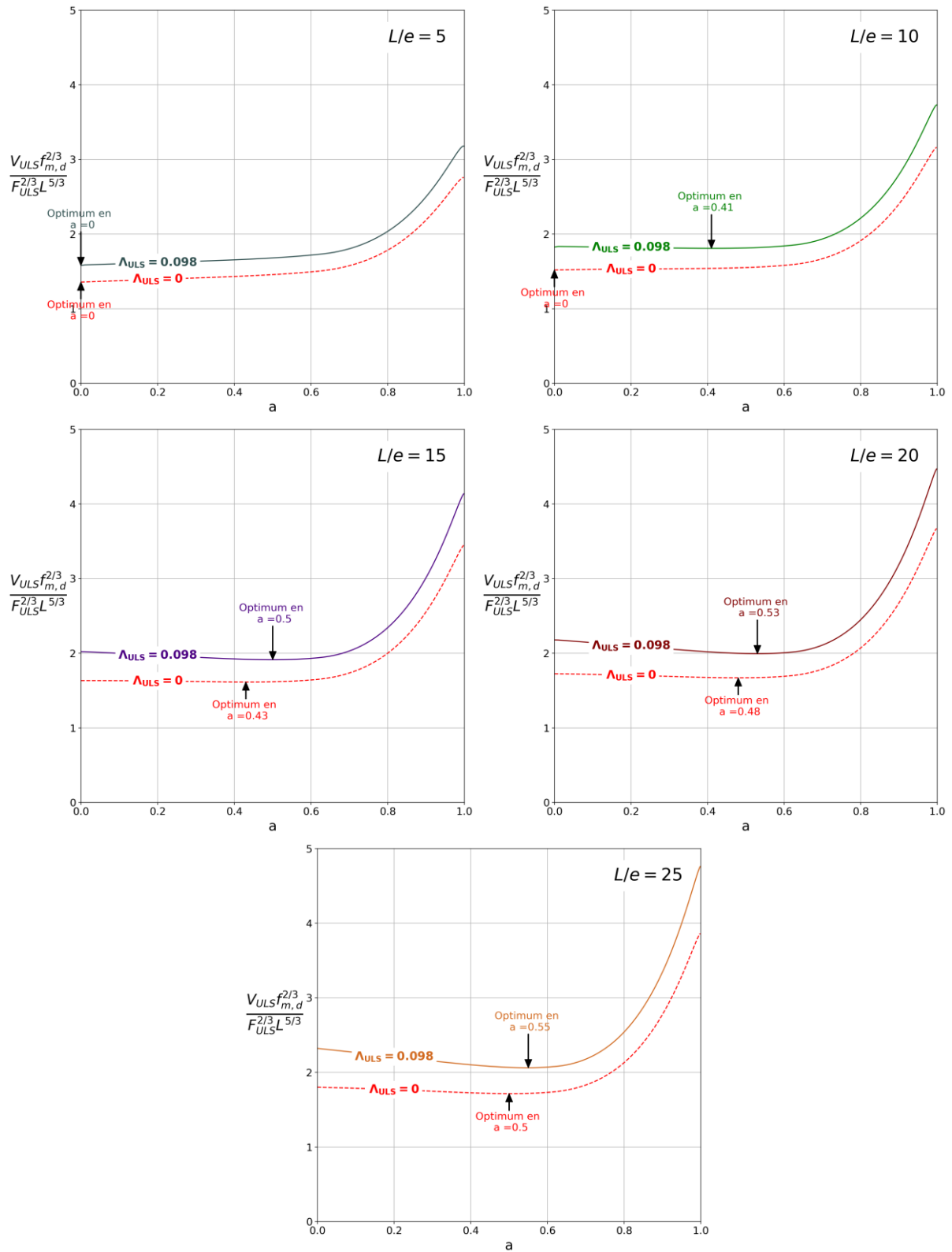


Figure 68 : Module simple - Comparaison des courbes de l'indicateur de volume lorsque le poids propre est négligé avec celles obtenues lorsque $\Lambda_{ULS} = 0,098$ pour plusieurs valeurs du rapport L/e

5.1.3 Interprétation et discussion

Lors de l'analyse de la poutre simple et du plancher classique composé de poutres parallèles, il a été démontré que l'efficacité matérielle était directement fonction de $\rho/f_{m,d}^{2/3}$. De plus, le classement des classes de résistance nécessitant le plus de volume était le même. Ces deux aspects ne sont donc pas discutés dans cette section. Par contre, le taux de travail des éléments dimensionnés en négligeant le poids propre est analysé.

En observant la Figure 68, la prise en compte du poids propre, non seulement de la structure primaire mais également de la structure secondaire, a une influence non négligeable sur le volume nécessaire comparé au cas où le poids propre est négligé. Il est donc intéressant de se demander si les éléments ne sont pas trop sous-dimensionnés lorsque leur poids propre est négligé. Pour ce faire, le taux de travail réel des poutres (type 1 et type 2) est calculé. Le raisonnement est le même que celui qui a été mené dans les précédents chapitres. En négligeant le poids propre, la contrainte maximale dans les éléments est supposée égale à $f_{m,d}$. Or en réalité le volume des éléments induit une charge supplémentaire et donc une contrainte supplémentaire. Mathématiquement, il est possible d'écrire :

$$\sigma_0 = f_{m,d} = \frac{M_{0,max}\phi}{2I} \qquad \sigma_\Lambda = \sigma_{0,réelle} = \frac{M_{\Lambda,max}\phi}{2I}$$

Où, σ_0 correspond à la contrainte dans les éléments lorsque le poids propre est négligé, soit $f_{m,d}$. $\sigma_\Lambda = \sigma_{0,réelle}$ représente la contrainte réelle en tenant compte du poids propre lorsque l'élément est dimensionné en négligeant son poids propre. $M_{0,max}$ correspond au moment maximal dans un élément en négligeant son poids propre et $M_{\Lambda,max}$ au moment maximal dans un élément en considérant son poids propre.

Le taux de travail d'un élément peut alors se calculer :

$$T = \frac{\sigma_{0,réelle}}{f_{m,d}} = \frac{M_{\Lambda,max}}{M_{0,max}} \quad (5e)$$

Les valeurs des moments peuvent être déterminées à l'aide de modèles numériques similaires à ceux qui ont été abordés précédemment dans ce document.

La Figure 69 représente le taux de travail réel des éléments composant le module réciproque carré lorsque ceux-ci sont dimensionnés en négligeant leur poids propre. Pour des questions de lisibilité, l'ordonnée des graphiques présentés ne commence pas à 0 mais à 0,95. Le graphique de gauche correspond aux poutres de Type 1 alors que le graphique de droite correspond aux poutres de Type 2. Plusieurs courbes sont représentées, pour plusieurs valeurs du rapport L/e (5, 10, 15, 20 et 25) et pour les bornes d'indicateurs de poids propre. Les courbes en dessous de $\Lambda_{ULS} = 0,0068$ correspondent donc à cette valeur de l'indicateur alors que les autres courbes sont liées à l'indicateur de poids propre $\Lambda_{ULS} = 0,098$.

Il est donc possible d'observer que pour un indicateur de poids propre faible, le taux de travail réel d'un élément d'un module réciproque carré dimensionné en négligeant le poids propre de la structure est relativement proche de 1. Par contre, lorsque l'indicateur de poids propre est maximal, ce taux de travail peut monter jusqu'à 1,25.

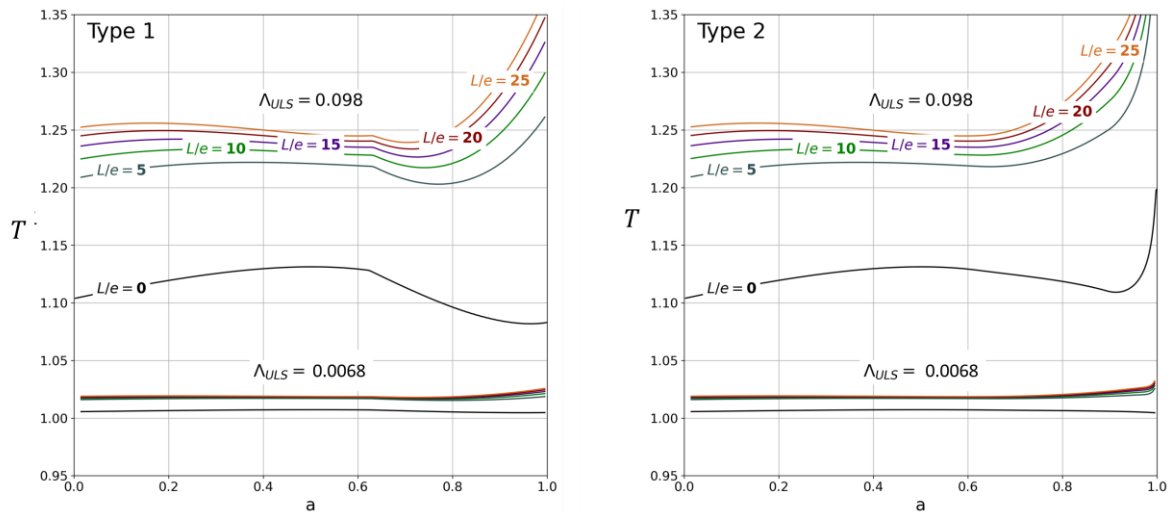


Figure 69 : Module simple - Taux de travail des éléments composant la structure primaire d'un plancher réciproque carré. Poutre de type 1 à gauche et poutre de type 2 à droite

5.2 Optimisation du volume de bois en tenant compte de l'effort tranchant

Jusque maintenant, seule une analyse en flexion a été menée. Cependant il est également intéressant d'étudier l'impact de l'effort tranchant sur les résultats obtenus. Pour prendre en compte l'effort tranchant dans le dimensionnement, un modèle numérique a également été développé. Ce dernier est expliqué plus en détail dans la section 6.2. Dans la suite de cette section, uniquement l'approche suivie et les résultats obtenus sont expliqués et discutés.

Tout d'abord, pour étudier l'effort tranchant, il est nécessaire de connaître la contrainte de cisaillement dans chacun des éléments composant le module réciproque et que cette contrainte respecte le critère imposé par l'Eurocode, à savoir :

$$\frac{4V_{Ed,i}}{3\pi\phi^2/4} < \tau$$

Où $V_{Ed,i}$, correspond à l'effort tranchant maximal dans l'élément i et est obtenu à l'aide du modèle numérique. Il est alors possible d'obtenir le volume d'une poutre i , V_i , en utilisant la même procédure que celle utilisée depuis le début de ce document :

$$\begin{cases} \tau = \frac{4V_{Ed,i}}{3\pi\phi^2/4} \\ V_i = \frac{\pi\phi^2}{4} \frac{L}{2-a} \end{cases} \rightarrow V_i = \frac{4V_{Ed}L}{3(2-a)\tau}$$

Évalué à l'état limite ultime, ce volume peut s'écrire :

$$V_{i,ULS} = \frac{4V_{Ed,ULS}L}{3(2-a)k_{cr}f_{v,d}}$$

Le volume total s'écrit alors :

$$V_{tot,ULS} = 2V_{1,ULS} + 2V_{2,ULS} = \frac{4L}{3(2-a)k_{cr}f_{v,d}} (2V_{Ed,1,ULS} + 2V_{Ed,2,ULS})$$

Où il est possible de faire apparaître l'indicateur de volume tel que défini lors de l'analyse en flexion :

$$W_{ULS} = \frac{V_{tot} f_{m,d}^{2/3}}{F_{ULS}^{2/3} L^{5/3}} = \frac{4}{3(2-a)} \frac{(2V_{Ed,1,ULS} + 2V_{Ed,2,ULS})}{F_{ULS}} \frac{f_{m,d}^{2/3}}{k_{cr} f_{v,d}} \frac{F_{ULS}^{1/3}}{L^{2/3}}$$

Où, pour simplifier l'écriture, un paramètre Z est défini : $Z = \frac{2}{3k_{cr}} \left(\frac{f_{m,d}}{f_{v,d}} \right)^{2/3} \left(\frac{q_{ULS}}{f_{v,d}} \right)^{1/3}$ et donc :

$$W_{ULS} = \frac{V_{tot} f_{m,d}^{2/3}}{F_{ULS}^{2/3} L^{5/3}} = \frac{4Z_{ULS}}{(2-a)} \frac{(V_{Ed,1,ULS} + V_{Ed,2,ULS})}{F_{ULS}} \quad (6a)$$

L'expression (6a) représente donc l'indicateur de volume pour l'étude en cisaillement. Afin de tracer cette relation en tenant compte du poids propre, il ne suffit pas uniquement de prendre les bornes extrêmes de l'indicateur de poids propre comme cela a pu être fait lors de l'analyse en flexion. En effet, parmi les termes de l'égalité (6a), deux d'entre eux font intervenir la classe de résistance, Z_{ULS} et $V_{Ed,i,ULS}$. Ce dernier est en effet une fonction de F_{ULS} , a mais également de l'indicateur de poids propre Λ_{ULS} . Il est donc intéressant de s'arrêter sur Z_{ULS} et Λ_{ULS} afin de déterminer des bornes extrêmes à étudier. Leurs expressions sont reprises ci-dessous. Ces deux nombres dépendent également tous les deux de la charge surfacique extérieure. Cependant, uniquement Λ_{ULS} , dépend de la longueur du plancher. Cela signifie que, pour une valeur de Z_{ULS} donnée, il existe une multitude d'indicateurs de poids propre possibles. Donc lorsque Z_{ULS} est maximal ou minimal, la valeur de Λ_{ULS} associée n'est pas forcément une valeur extrême de l'indicateur de poids propre. Pour rappel, l'indicateur de poids propre a été borné en section 3.1 par : $\Lambda_{ULS} \in [0,098; 0,0067]$. A contrario, pour une valeur de l'indicateur de poids propre donnée, il n'y a qu'une seule valeur de Z_{ULS} correspondant. Mais, à nouveau, cette valeur ne correspond pas forcément à une valeur extrême de Z_{ULS} .

$$Z_{ULS} = \frac{2}{3k_{cr}} \left(\frac{f_{m,d}}{f_{v,d}} \right)^{2/3} \left(\frac{q_{ULS}}{f_{v,d}} \right)^{1/3} \quad \Lambda_{ULS} = \frac{\rho_{ULS}}{f_{m,d}^{2/3}} \frac{L}{q_{ULS}^{1/3}}$$

Sur base des valeurs de design reprises au Tableau 3, des hypothèses sur L ($\in [2; 10]$) et q_{ULS} ($\in [2; 12]$), quatre situations sont étudiées. Deux situations où Z_{ULS} est maximum et minimum avec l'indicateur de poids propre Λ_{ULS} maximal associé. Les deux autres cas correspondent aux valeurs où Λ_{ULS} est maximum et minimal avec la valeur de Z_{ULS} qui y est associée. L'intérêt est de regarder les tendances de chacun de ces cas.

- $Z_{ULS,max} = 0,91$ ($D70$ et $q_{ULS} = 12$ [kN/m^2]) avec $\Lambda_{ULS} = 0,046$ [/] ($L = 10$ [m])
- $Z_{ULS,min} = 0,3$ ($C18$ et $q_{ULS} = 2$ [kN/m^2]) avec $\Lambda_{ULS} = 0,082$ [/] ($L = 10$ [m])
- $\Lambda_{ULS,max} = 0,098$ ($D30$, $q_{ULS} = 2$ [kN/m^2] et $L = 10$ [m]) ce qui correspond à $Z = 0,36$
- $\Lambda_{ULS,min} = 0,0067$ ($C40$, $q_{ULS} = 12$ [kN/m^2] et $L = 2$ [m]) ce qui correspond à $Z = 0,78$

	Résineux			Feuillus		
	C18	C24	C40	D30	D50	D70
$f_{m,k}$ [MPa]	11,08	14,77	24,62	18,46	30,47	43,08
$f_{v,d}$ [MPa]	2,09	2,46	2,46	2,4	2,77	3,08
ρ_{ULS} [N/m^3]	5130	5670	6480	8640	9990	12960
$\frac{f_{m,d}}{f_{v,d}}$ [/]	5,3	6	10	7,7	11,1	14
$\frac{\rho_{ULS}}{f_{m,d}^{2/3}} \left[\frac{N^{1/3}}{m^{5/3}} \right]$	0,103	0,094	0,077	0,124	0,102	0,105

Tableau 3 : Module simple - Valeurs de design

Dans un premier temps uniquement le volume de la structure primaire est étudié. La Figure 70, reprend les courbes obtenues respectivement pour le cas où Λ_{ULS} est maximal (en haut à gauche),

Λ_{ULS} est minimal (en haut à droite), Z est maximal (en bas à gauche) et Z est minimal (en bas à droite). Les critères de flexion et de cisaillement ont été tracés pour chaque cas. Pour chaque critère, deux courbes sont représentées : en rouge pointillé le cas où le poids propre est négligé et en bleu le cas où l'indicateur de poids propre est maximal pour la situation étudiée. Il est possible de remarquer que la prise en compte du poids propre sur les courbes de cisaillement n'a que très peu d'influence. De plus, la situation optimale, c'est-à-dire celle minimisant l'indicateur de volume se situe entre 0,1 et 0,3.

En plus d'analyser la structure primaire, il est nécessaire de prendre en compte la structure secondaire dans l'étude du plancher. En effet, le plancher secondaire va non seulement correspondre à une quantité de volume supplémentaire au plancher mais également une charge en plus à reprendre par les poutres du module. Les quatre situations extrêmes discutées précédemment ont donc été étudiées en tenant compte du poids propre et du volume de la structure secondaire. La Figure 71, représente l'indicateur de volume en fonction de α , en tenant compte de la structure secondaire, sous le critère de flexion et de cisaillement, respectivement pour le cas où Λ_{ULS} est maximal (en haut à gauche), Λ_{ULS} est minimal (en haut à droite), Z est maximal (en bas à gauche) et Z est minimal (en bas à droite). Sur chacun de ces graphiques, pour des soucis de clarté, seules les courbes où le poids propre est considéré ont été tracées. A nouveau, la zone optimale de la proportion d'engagement se situe entre 0,1 et 0,3.

Conclusion :

Tout d'abord, le critère de cisaillement fait intervenir deux nombres dépendant du matériau, Z et Λ_{ULS} . Cependant, pour une valeur de Z , il existe une multitude de valeurs d'indicateur de poids propre Λ_{ULS} possibles. En effet, ce dernier dépend également de la longueur, contrairement à Z . En tenant compte de l'effort tranchant, il y a donc deux paramètres qui dépendent du matériau étudié mais qui ne sont pas directement corrélés.

Dans les quatre cas étudiés, l'indicateur de volume augmente de manière considérable lorsque la proportion d'engagement est égale à 0,1-0,3. Lorsque α est supérieur à cette valeur de 0,3, la flexion devient le critère dimensionnant des éléments, dans tous les cas. Au-delà de $\alpha = 0,7$, les deux critères augmentent considérablement.

La proportion d'engagement optimale se situe donc entre 0,3 et 0,7.

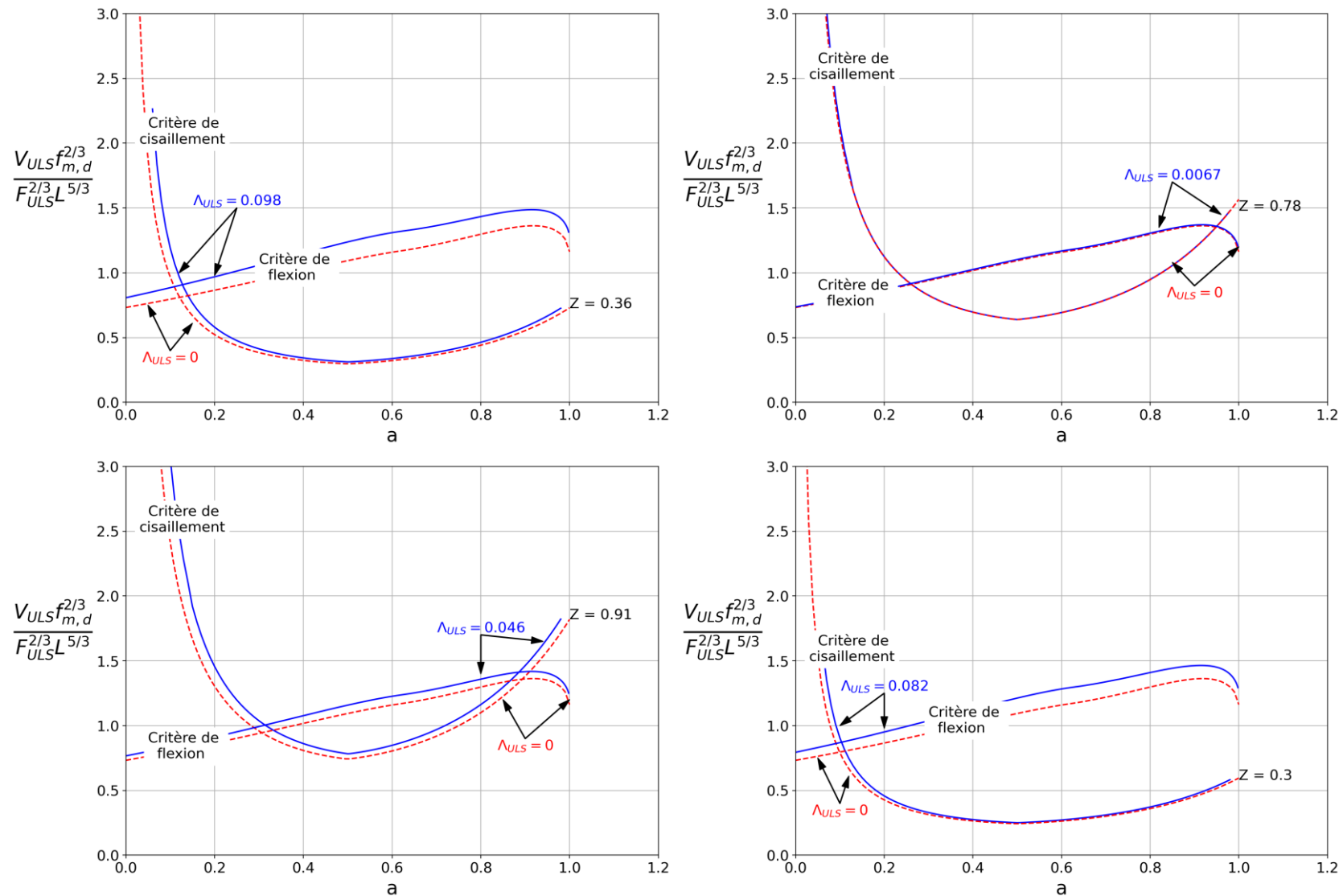


Figure 70 : Module simple - Indicateur de volume en fonction de a pour les quatre cas étudiés pour la structure primaire seule - Comparaison de la courbe de flexion et de cisaillement

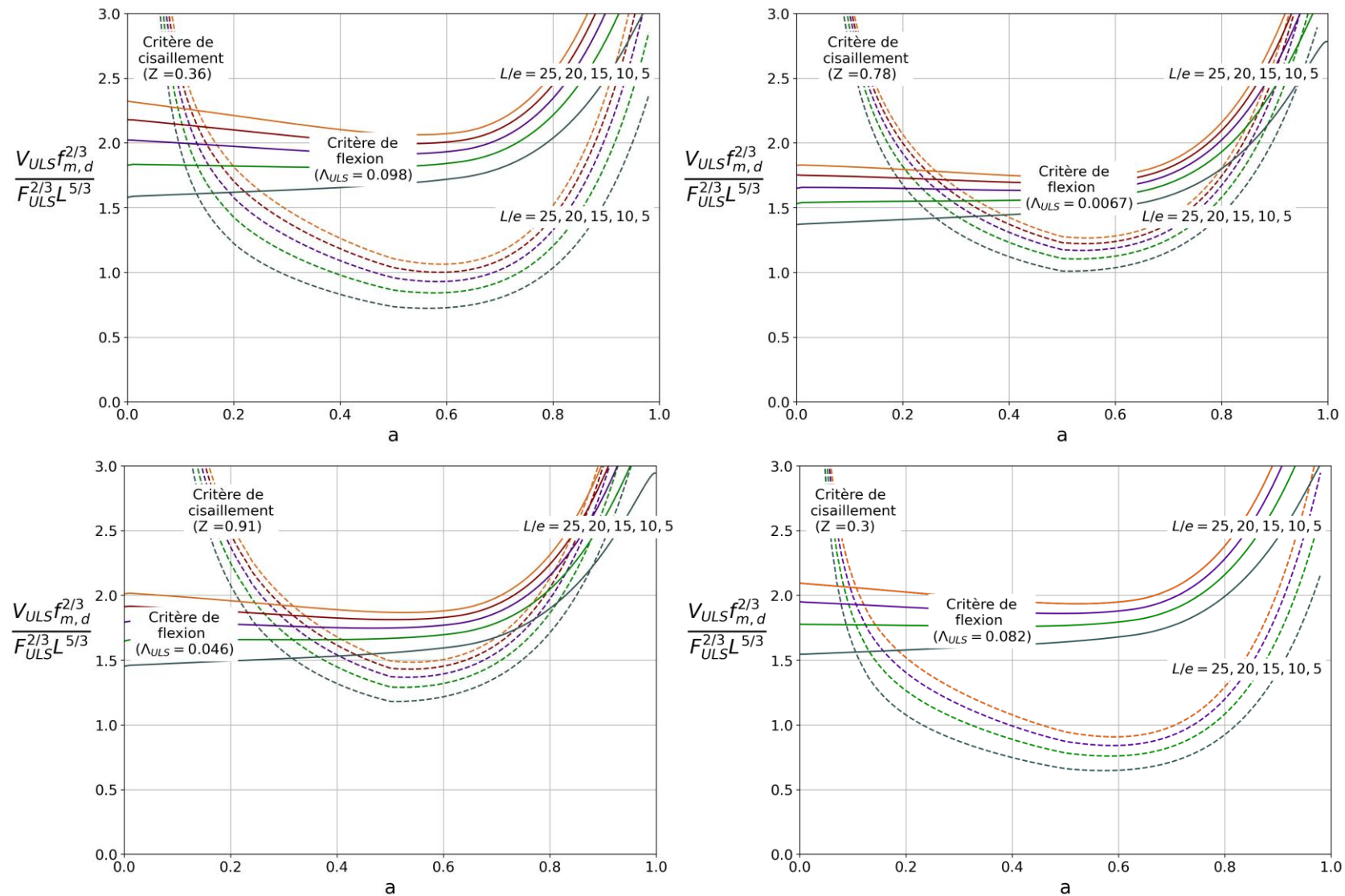


Figure 71 : Module simple - Indicateur de volume en fonction de a dans les quatre cas pour la structure primaire et secondaire - Comparaison des courbes de flexion et de cisaillement

5.3 Optimisation du volume de bois en fonction de la flèche maximale

L'objectif de cette section est de démontrer que les conclusions sur les valeurs optimales des paramètres d'un plancher ne dépendent pas de la prise en compte du poids propre. Il n'y a donc pas d'analyse analytique ou numérique à proprement parlé dans ce qui suit. En effet le but est de réaliser une rétrospective et une comparaison sur certaines analyses qui ont été réalisées dans ce document, en tenant compte du poids propre, et par Marie Vandamme [22], en négligeant le poids propre. Dans la suite de cette partie, W_0 fait référence à l'indicateur de volume en négligeant le poids propre alors que W_Λ fait référence à l'indicateur de volume en tenant compte du poids propre.

Tout d'abord, lors de l'analyse d'un plancher simple, il a été démontré que l'indicateur de volume sous le critère de flexion peut être écrit comme une fonction de L/e (représentant le nombre de poutres dans le plancher) et de l'indicateur de poids propre, Λ_{ULS} (dans l'analyse tenant compte du poids propre) :

$$W_{0,ULS} = f\left(\frac{L}{e}\right) \qquad W_{\Lambda,ULS} = f\left(\frac{L}{e}, \Lambda_{ULS}\right)$$

Lors des deux analyses, il a été observé que la solution optimale, c'est-à-dire celle qui minimise l'indicateur de volume, est obtenue en minimisant le nombre de poutres composant le plancher. La prise en compte du poids propre ayant pour seul effet de déplacer la courbe vers le haut mais en gardant la même allure générale.

L'analyse de l'indicateur de volume pour un plancher simple sous le critère de flèche peut également se résumer en 2 fonctions :

$$W_{0,SLs} = f\left(\frac{L_1}{e}, \frac{L_2}{\delta_{max}}\right) \qquad W_{\Lambda,SLs} = f\left(\frac{L_1}{e}, \frac{L_2}{\delta_{max}}, \Lambda_{SLs}\right)$$

A nouveau, en tenant compte du poids propre dans l'analyse, le seul paramètre supplémentaire intervenant dans l'expression de l'indicateur de volume est l'indicateur de poids propre, Λ_{SLs} . Les conclusions sur la géométrie optimale du plancher ont été identiques lors des deux cas d'études, à savoir minimiser le nombre de poutres composant le plancher. La prise en compte du poids propre ayant pour seul effet, ici aussi, de déplacer la courbe vers le haut mais en gardant la même allure générale.

Ensuite, plusieurs analyses ont été faites sur un plancher réciproque. Parmi celles-ci, l'analyse en flexion de la structure primaire seule composée de deux poutres de type 1 et de deux poutres de type 2. Les indicateurs de volume de l'analyse en négligeant le poids propre et en tenant compte du poids propre peuvent être résumés par :

$$W_{0,ULS} = f(a) \qquad W_{\Lambda,ULS} = f(a, \Lambda_{ULS})$$

La conclusion de ces analyses sur la proportion d'engagement a optimale afin de minimiser l'indicateur de volume fût la même, à savoir $a = 0$. Encore une fois, l'influence du poids propre dans l'analyse est simplement un décalage vers le haut des courbes mais le tracé reste similaire.

En considérant le volume de la structure secondaire, l'indicateur de volume est fonction d'un paramètre en plus, L/e :

$$W_{0,ULS} = f\left(a, \frac{L}{e}\right) \qquad W_{\Lambda,ULS} = f\left(a, \frac{L}{e}, \Lambda_{ULS}\right)$$

Il est important de rappeler que ce paramètre, L/e , dans le cas d'un plancher réciproque ne représente rien physiquement, mais est une image du nombre de poutres composant le plancher secondaire. Les observations ont mené, pour les deux analyses, à conclure que la proportion

d'engagement (a) optimale doit être inférieure à 0,7. A nouveau, la prise en compte du poids propre a eu pour principal effet de déplacer les courbes d'indicateur de volume vers le haut.

Enfin, l'analyse de l'indicateur de volume en prenant en compte l'influence de l'effort tranchant peut se résumer en deux fonctions :

$$W_{0,ULS} = f\left(a, Z, \frac{L}{e}\right) \qquad W_{\Lambda,ULS} = f\left(a, Z, \frac{L}{e}, \Lambda_{ULS}\right)$$

Il a été démontré que la proportion d'engagement optimal afin de minimiser l'indicateur de volume devait être supérieur à 0,3 dans les deux situations.

Pour résumer, toutes les analyses réalisées précédemment ont donc montré que le choix des paramètres géométriques d'un plancher optimisant le volume de ce dernier est indépendant de la prise en compte du poids propre dans l'analyse ou non. L'influence du poids propre dans l'étude est l'apparition d'un paramètre supplémentaire, Λ_{ULS} ou Λ_{SLS} , qui a pour effet de décaler les courbes vers le haut et donc d'obtenir des valeurs d'indicateurs de volume supérieures.

Sur base de ces observations, l'étude de l'indicateur de volume d'un plancher réciproque, en considérant le poids propre, sous le critère de flèche, afin de trouver la proportion d'engagement optimal, n'est pas nécessaire. En effet, il est légitime de s'attendre à la même conclusion que celle obtenue en négligeant le poids propre, à savoir qu'il faut minimiser a pour minimiser l'indicateur de volume sous le critère de flèche.

La manière dont des graphiques tenant compte du poids propre pourraient être obtenus est expliquée à la Figure 72.

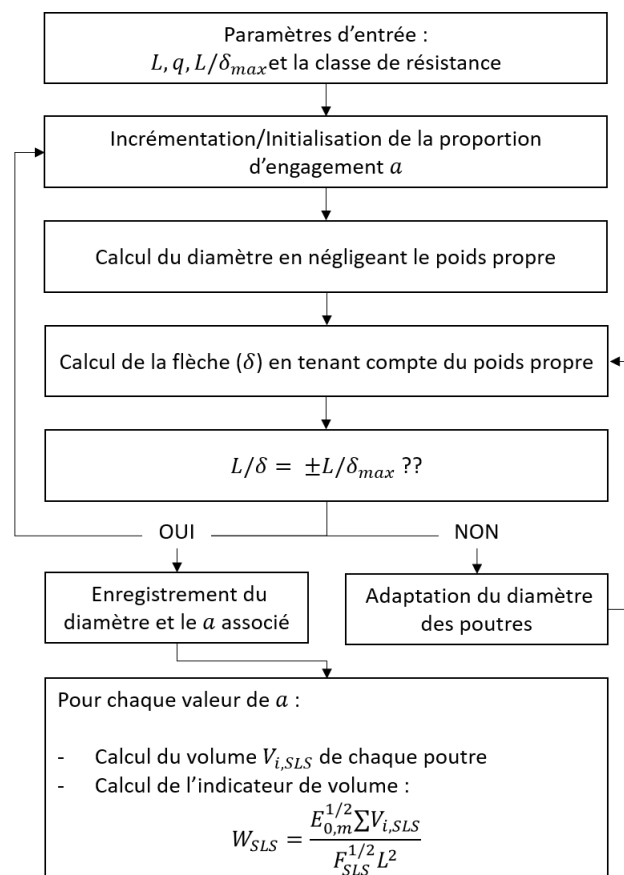


Figure 72 : Algorithme permettant le calcul de l'indicateur de volume à l'état limite de service (SLS) de la structure primaire d'un module réciproque

5.4 Conclusion intermédiaire

Pour conclure l'étude réalisée d'un plancher réciproque carré, formé d'un module réciproque lui-même composé de quatre éléments, les différents résultats obtenus vont être résumés.

Tout d'abord, sous le critère de flexion, il a été démontré que la proportion d'engagement (α) minimisant l'indicateur de volume doit être inférieure à 0,7. D'autre part, sous le critère de cisaillement, la valeur optimale se situe au-delà de 0,3. Enfin, sous le critère de flèche, la solution à favoriser est d'utiliser une valeur de α la plus petite possible. En combinant ces résultats, **la proportion d'engagement permettant de minimiser l'indicateur de volume se situe autour de $\alpha = 0,3$.**

Ensuite, l'étude à l'état limite ultime (ULS) du volume d'un plancher réciproque a permis la comparaison avec un plancher classique composé de poutres parallèles. Cette comparaison a permis de se rendre compte qu'**un plancher réciproque permet d'économiser entre 10% et 35% de volume de matière comparé à un plancher classique.**

Finalement, la prise en compte du poids propre dans l'optimisation des planchers n'a que très peu d'influence. En effet, les conclusions tirées sur les zones d'utilisation optimales sont identiques à celles obtenues en négligeant le poids propre. Cependant, le poids propre a une influence non négligeable sur **le volume de matière** total d'un plancher réciproque. En effet, **il est jusqu'à 20% supérieur par rapport à l'analyse en négligeant le poids propre.** De plus, le taux de travail des éléments du module, dimensionné en négligeant le poids propre, peut être relativement élevé et monter, dans certains cas, jusqu'à **125%**, ce qui n'est pas négligeable.

6 Développement de modèles numériques afin de générer et d'optimiser le volume de matière d'un plancher formé d'un module réciproque

Lors de l'analyse d'un plancher réciproque composé d'un module, l'analyse analytique a montré ses limites lorsque beaucoup de paramètres entrent en jeu dans l'optimisation. Le but de ce chapitre est donc d'expliquer les différents modèles qui ont été utilisés afin d'obtenir les courbes présentées dans le chapitre précédent.

Les différents algorithmes qui sont présentés dans la suite de ce chapitre ont été implémentés dans Grasshopper, un plugin de Rhinoceros. Ce dernier est un logiciel de modélisation 3D permettant la création de formes et de projets aussi variés que complexes. Grasshopper, quant à lui, permet de faire de la programmation visuelle en créant des modèles paramétriques. Cette programmation visuelle est basée sur l'assemblage et la connexion de « boîtes », tel que représenté en Figure 73. L'avantage de ce type de modèles est de pouvoir rapidement adapter un modèle à un autre projet en changeant uniquement un paramètre d'entrée. D'autre part, pour calculer les structures étudiées, Karamba3D a été utilisé. Karamba3D est un outil d'ingénierie structurelle, intégré dans l'environnement Grasshopper, permettant d'analyser les géométries créées à l'aide de Grasshopper.

Un exemple de code permettant la création et le calcul d'un module réciproque est repris en Figure 73. Le code est divisé en plusieurs parties et peut paraître complexe de prime abord, mais une fois programmé, il est possible de créer et calculer n'importe quel module simple en changeant uniquement les paramètres d'entrée. Par exemple, en Figure 74, un module dont la proportion d'engagement est égale à 0,3 a été généré et calculé. En changeant uniquement le paramètre d'entrée lié à la proportion d'engagement (α), il est possible d'obtenir les résultats pour une autre configuration. Cela est illustré en Figure 75, où $\alpha = 0,9$. Bien évidemment, il est possible de changer les autres paramètres d'entrée également sans devoir toucher au reste du code.

Il s'agit ici d'un exemple afin d'illustrer la puissance de la programmation paramétrique. Les codes correspondant aux algorithmes présentés dans la suite de ce chapitre sont basés sur le code présenté en Figure 73. Ils ne sont donc pas illustrés.

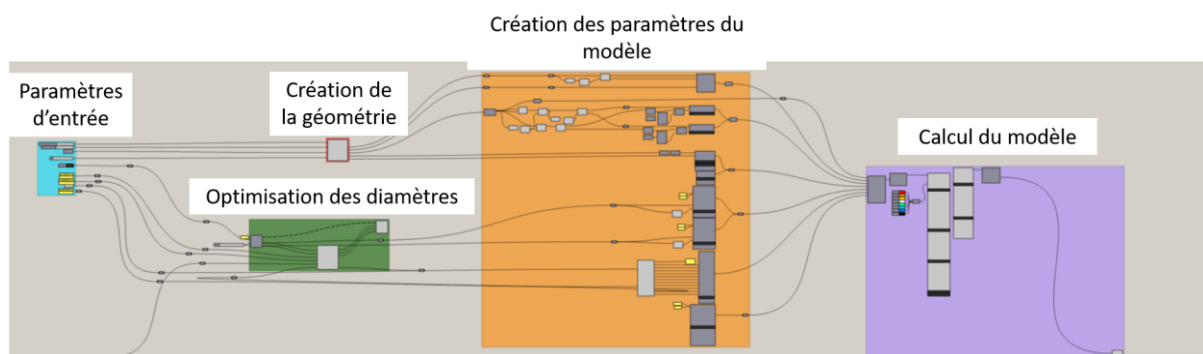


Figure 73 : Exemple d'un code Grasshopper

Développement de modèles numériques afin de générer et d'optimiser le volume de matière d'un plancher formé d'un module réciproque

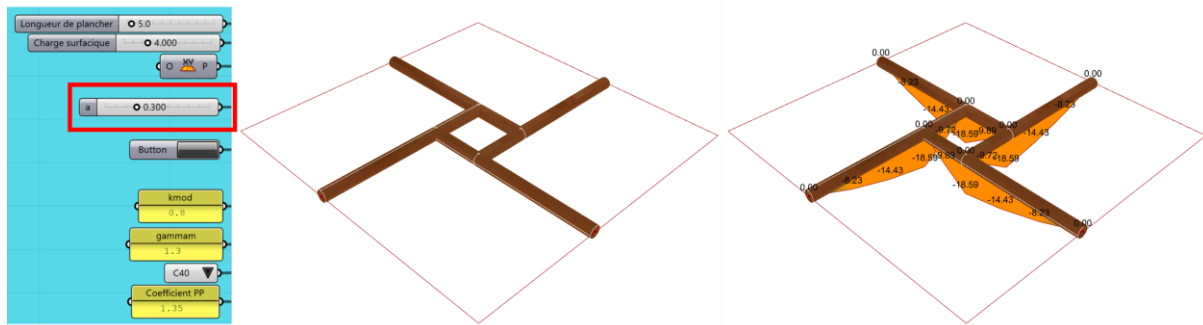


Figure 74 : Exemple d'un code Grasshopper - Proportion d'engagement égale 0,3 – Paramètres d'entrée à gauche – Géométrie du module au centre – Diagramme des moments à droite

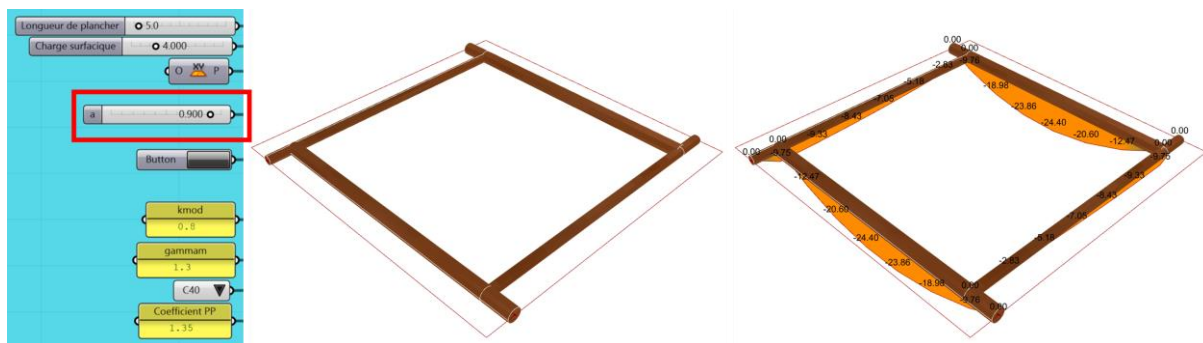


Figure 75 : Exemple d'un code Grasshopper - Proportion d'engagement égale 0,9 - Paramètres d'entrée à gauche – Géométrie du module au centre – Diagramme des moments à droite

6.1 Optimisation du volume de bois d'un plancher formé d'un module réciproque en fonction de la contrainte de flexion

6.1.1 Calcul de l'indicateur de volume de la structure primaire seule

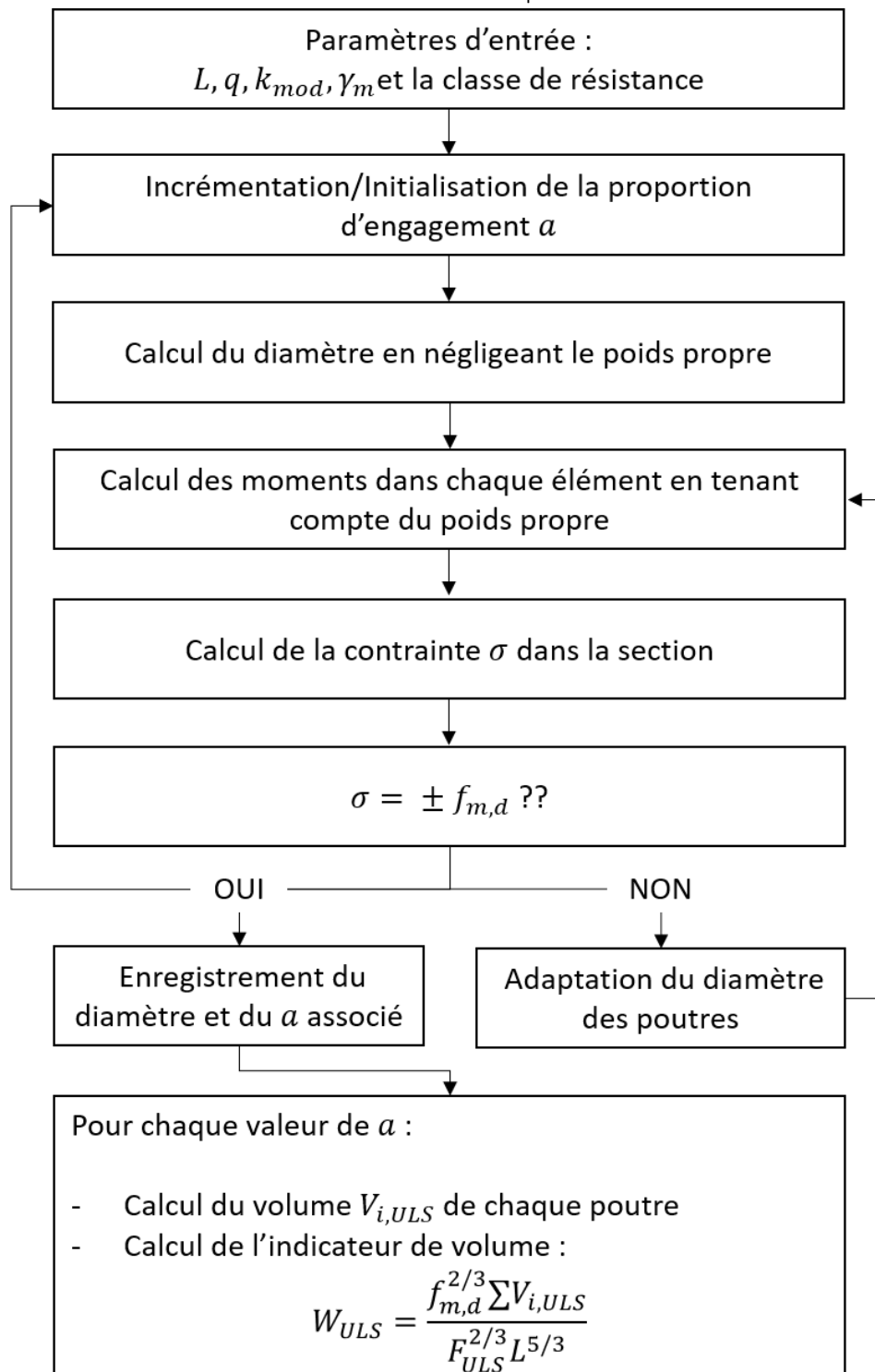


Figure 76 : Algorithme permettant le calcul de l'indicateur de volume, sous le critère de flexion, à l'état limite ultime (ULS) de la structure primaire d'un module réciproque

6.1.2 Calcul de l'indicateur de volume de la structure primaire et de la structure secondaire

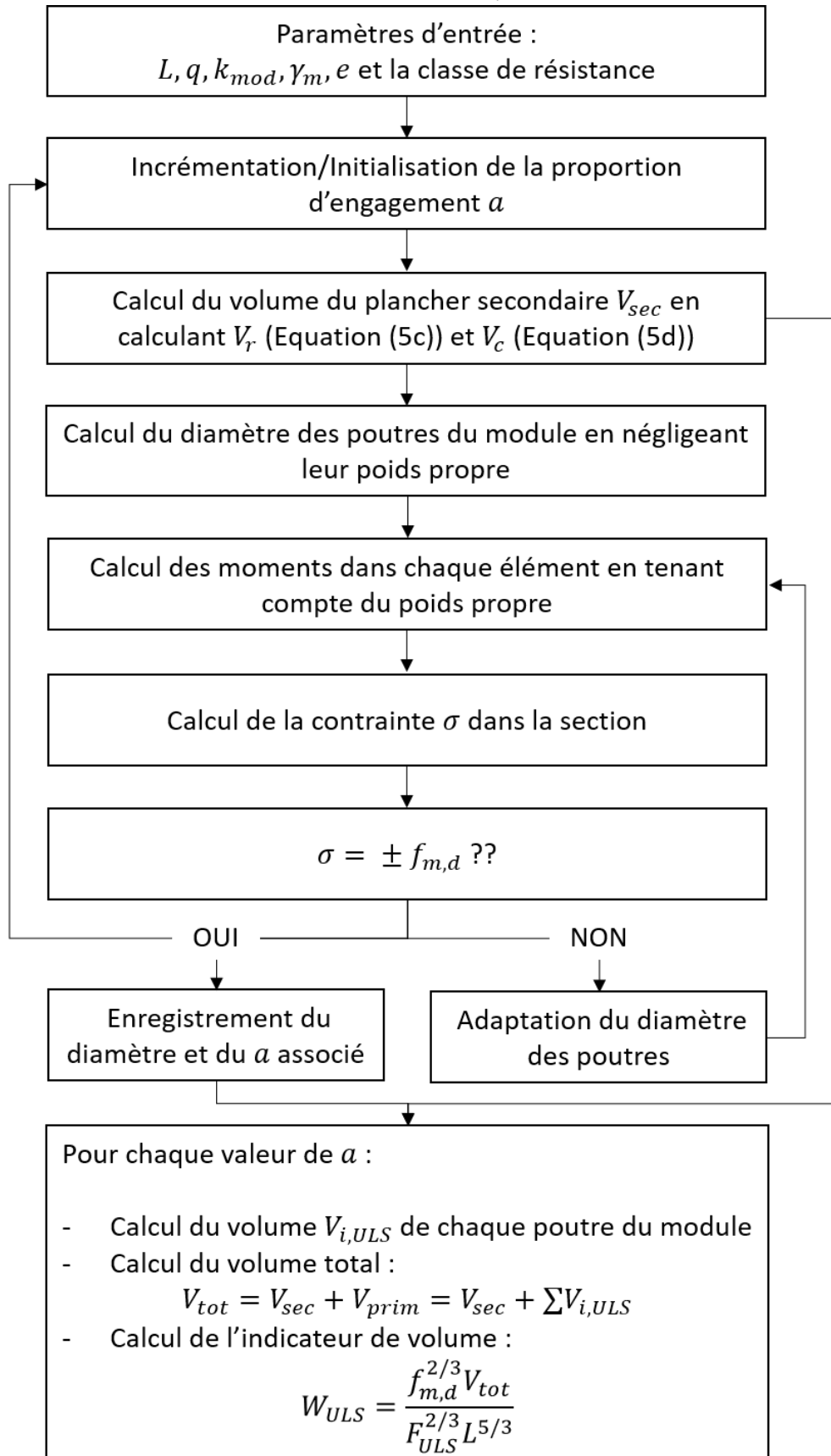


Figure 77 : Algorithme permettant le calcul de l'indicateur de volume, sous le critère de flexion, à l'état limite ultime (ULS) de la structure primaire et secondaire d'un module réciproque

6.2 Optimisation du volume de bois d'un plancher formé d'un module réciproque en fonction de la contrainte à l'effort tranchant

6.2.1 Calcul de l'indicateur de volume de la structure primaire seule

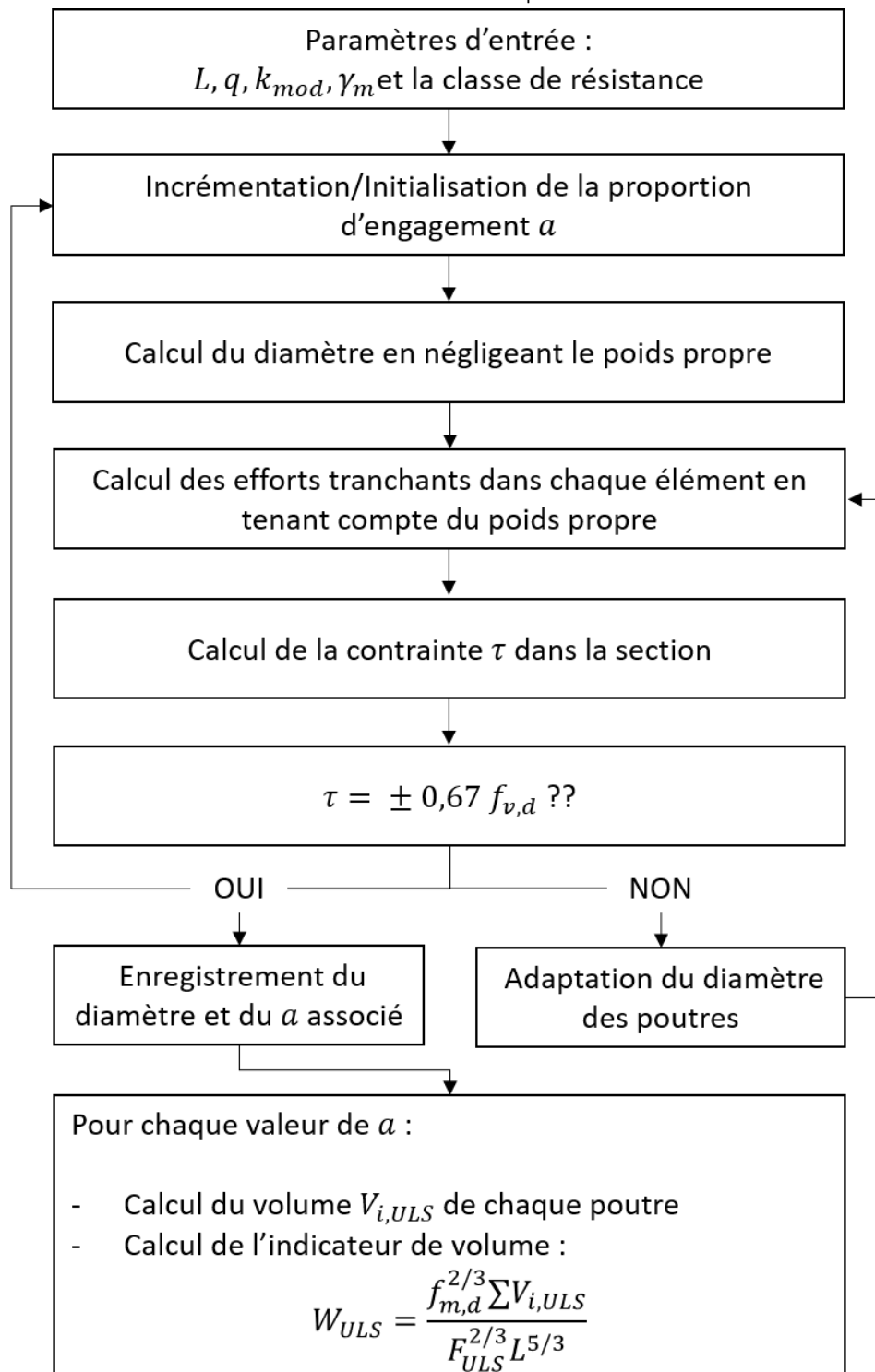


Figure 78 : Algorithme permettant le calcul de l'indicateur de volume, sous le critère de cisaillement, à l'état limite ultime (ULS) de la structure primaire d'un module réciproque

6.2.2 Calcul de l'indicateur de volume de la structure primaire et de la structure secondaire

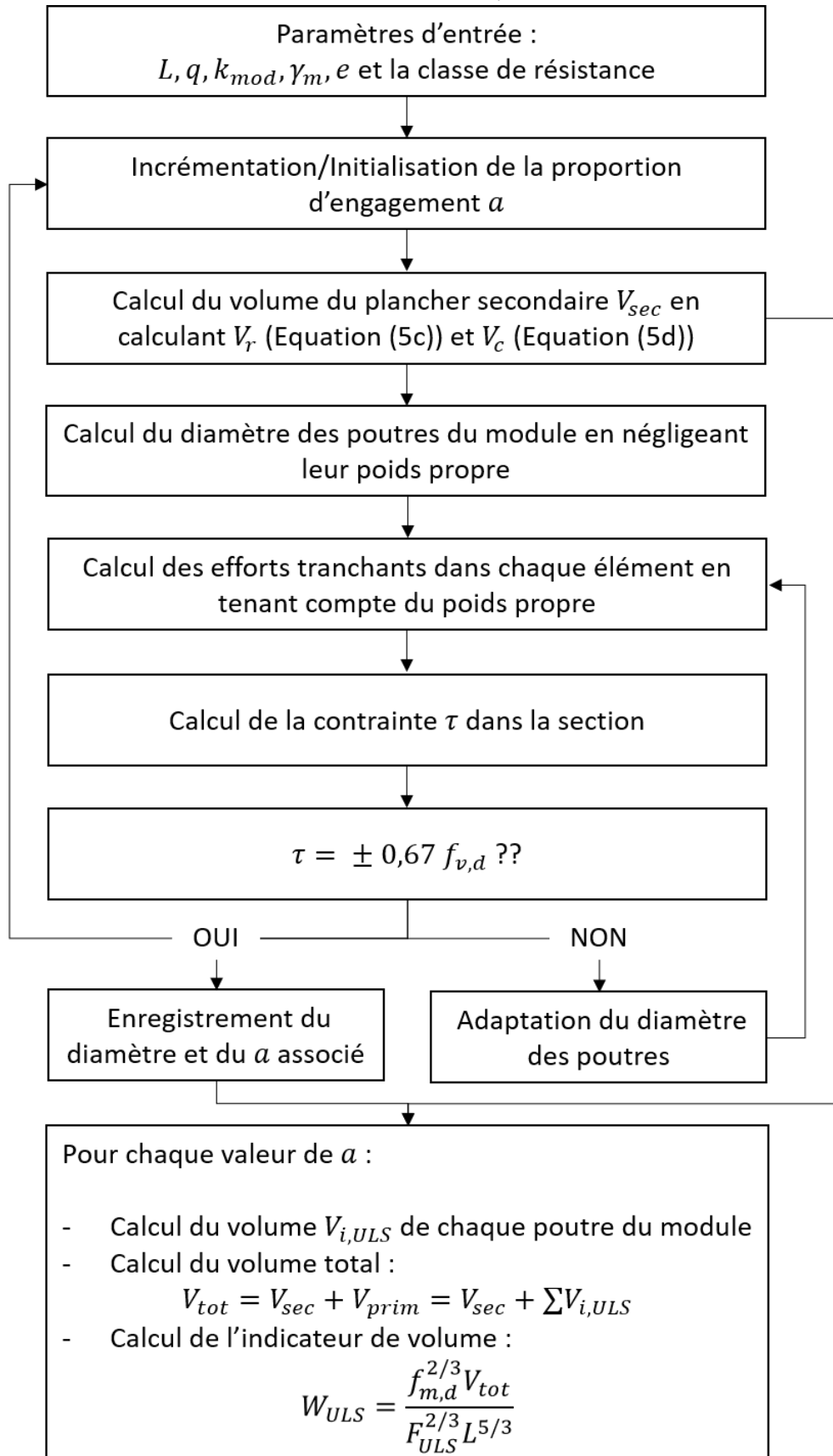


Figure 79 : Algorithme permettant le calcul de l'indicateur de volume, sous le critère de cisaillement, à l'état limite ultime (ULS) de la structure primaire et secondaire d'un module réciproque

7 Développement d'un modèle numérique générant et optimisant un plancher réciproque composé de plusieurs modules

La présente section a pour but de présenter un algorithme permettant de générer et calculer un plancher réciproque composé de plusieurs modules pour une géométrie de plancher quelconque. Les différentes étapes suivies, pour la génération de ces planchers, sont reprises à la Figure 80 et expliquées ci-dessous. La partie optimisation est abordée au point 7.1. L'algorithme présenté ci-dessous a été implémenté dans un plugin de Rhinoceros, Grasshopper et calculé à l'aide de Karamba3D. Ces outils ont été présentés à la section 6. En résumé, l'utilisation de ces outils permet une création de modèles paramétriques en utilisant la programmation visuelle. La création d'un modèle paramétrique permet alors de facilement s'adapter à un autre projet.

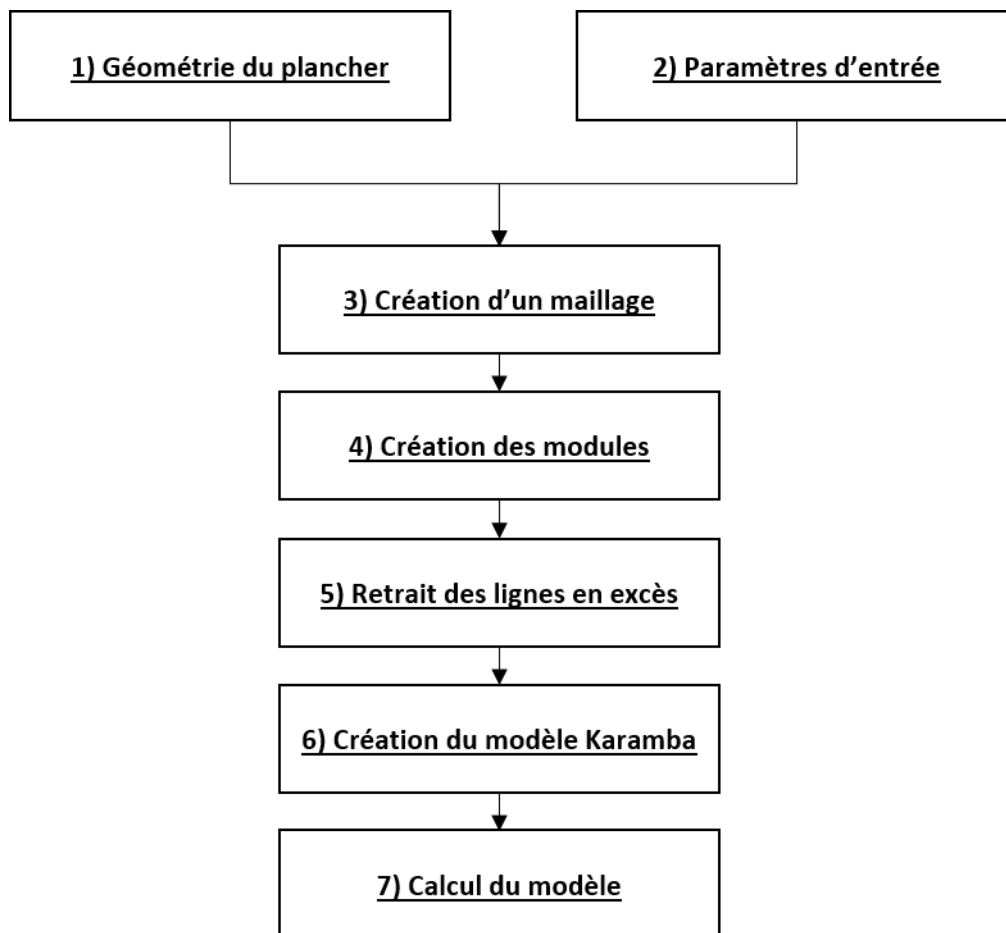


Figure 80 : Algorithme permettant de générer et calculer des planchers réciproques composés de plusieurs modules

- 1) Définition de la **géométrie du plancher** (pour illustrer les explications qui suivent, un plancher de forme carrée a été choisi, tel que représenté Figure 81).
- 2) **Paramètres d'entrée** : il y a plusieurs paramètres à donner, à savoir la longueur des éléments composant le plancher (L_b), la proportion d'engagement (a) des modules et la classe de résistance du bois considéré.
- 3) **Création d'un maillage** : Sur base de la longueur des poutres d'un module et de la proportion d'engagement a , un maillage est créé (Figure 82, à gauche). La longueur d'une maille du

maillage est donnée par : $L_{maille} = \sqrt{((1-a)L_b)^2 + (aL_b)^2}$. De plus, le maillage subit une rotation (Figure 82, à droite) afin de permettre le positionnement des modules lors de l'étape suivante.

- 4) **Création des modules** : Pour chaque maille, il est possible de récupérer le centre (Figure 83, à gauche) et créer les modules autour de ces points (Figure 83, à droite) de telle sorte que chaque module soit centré à l'intersection des mailles.

A partir des coordonnées du centre (x, y) de chaque maille, quatre points peuvent être tracés (1, 2, 3 et 4), tel que représenté Figure 84, à gauche. En combinant plusieurs mailles, comme illustré à droite sur la Figure 84, les modules apparaissent et la géométrie du plancher prend forme. Les points numérotés $1_A, 2_A, 3_A$ et 4_A sont obtenus à partir du centre (x_A, y_A) . Les points numérotés $1_B, 2_B, 3_B$ et 4_B sont obtenus à partir du centre (x_B, y_B) etc.

Il est ensuite possible de relier les points entre eux.

- 5) **Retrait des lignes en excès** : Cette partie a pour but de retirer les lignes en dehors de la délimitation du plancher (Figure 85).
- 6) **Création du modèle Karamba** : Les différents éléments sont créés pour être traités en tant que poutre. Les conditions d'appui et de connexion entre éléments sont également définies tout comme le cas de chargement qui est ici une charge surfacique agissant sur la plancher.
- 7) **Calcul du modèle Karamba** : Le modèle est ensuite calculé afin de pouvoir connaître, par exemple, les efforts dans chacun des éléments. La Figure 86 représente les diagrammes des moments selon y dans chacun des éléments.

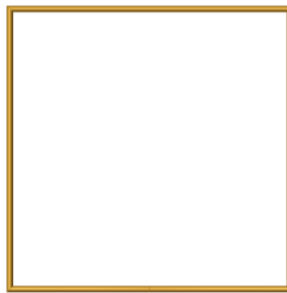


Figure 81 : Génération et calcul d'un plancher réciproque composé de plusieurs modules - Etape 1

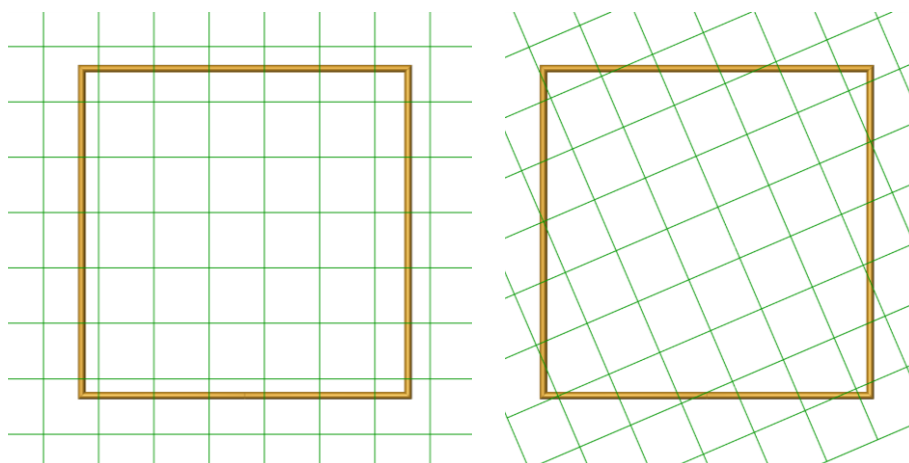


Figure 82 : Génération et calcul d'un plancher réciproque composé de plusieurs modules - Etape 3

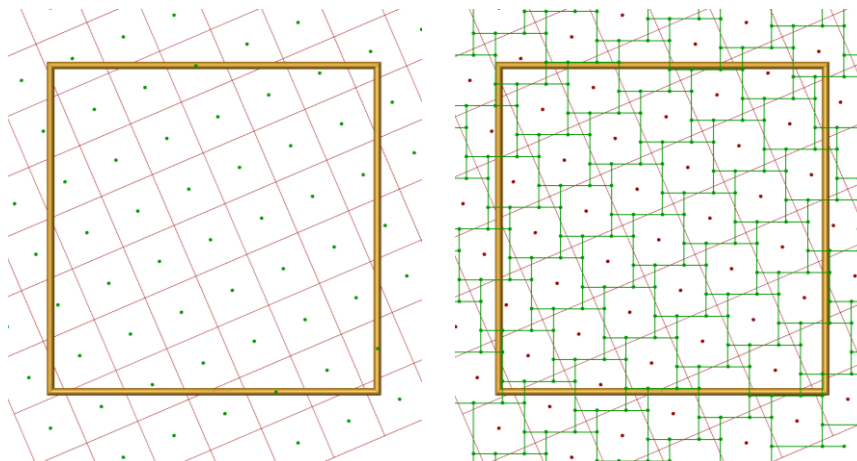


Figure 83 : Génération et calcul d'un plancher réciproque composé de plusieurs modules - Etape 4

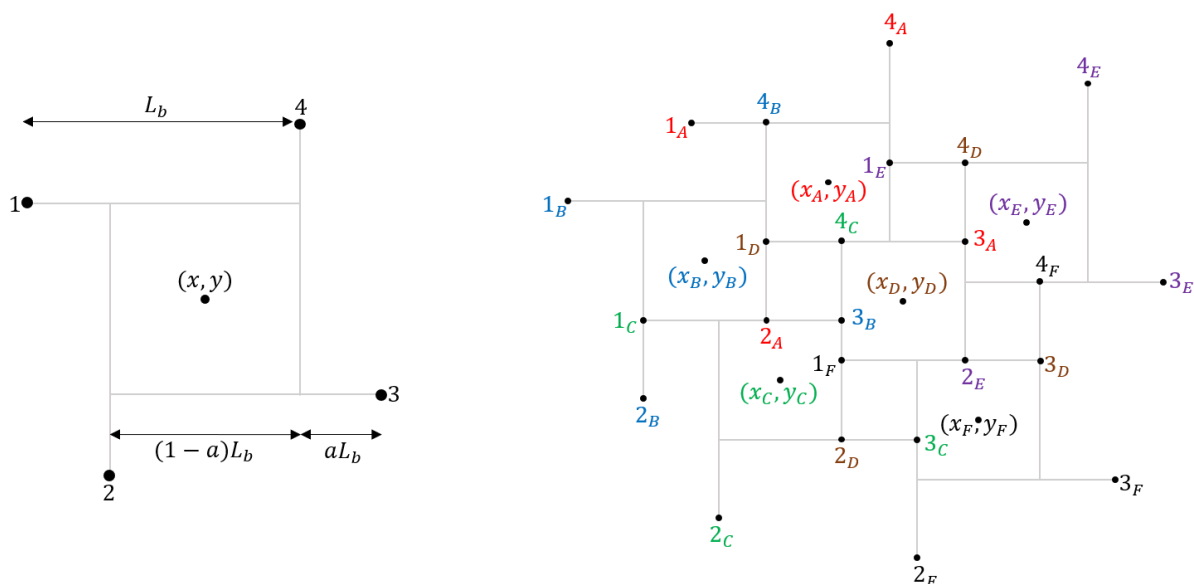


Figure 84 : Génération et calcul d'un plancher réciproque composé de plusieurs modules - Etape 4 – Création des modules

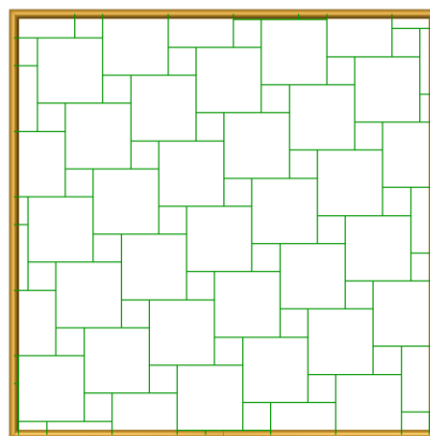


Figure 85 : Génération et calcul d'un plancher réciproque composé de plusieurs modules - Etape 5

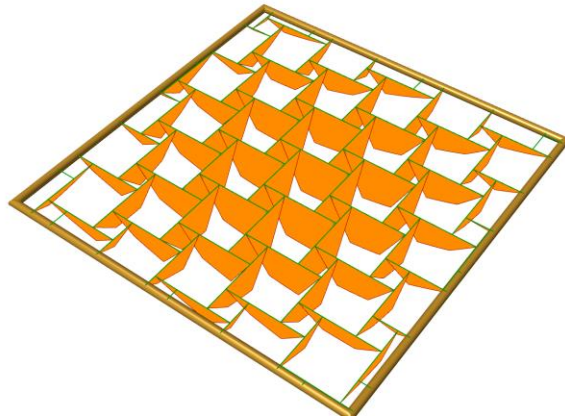


Figure 86 : Génération et calcul d'un plancher réciproque composé de plusieurs modules - Etape 7

L'exemple pris pour expliquer l'algorithme est un plancher carré arbitraire, mais il est tout à fait possible d'utiliser le programme afin de générer et calculer des planchers de formes quelconques et variées comme rectangulaire, circulaire, polygonale ou toute autre forme quelconque, tel que représenté Figure 87.

La méthodologie suivie afin de créer ces planchers présente toutefois un défaut non négligeable, pour que cette représentation soit complètement réaliste. En effet, il y a des éléments fort proches des bords ou trop petits, comme les zones entourées à la Figure 88, par exemple. Dans une situation précise, il est possible de retirer manuellement ces éléments et d'adapter la géométrie aux bords, tel que cela est fait pour l'exemple qui est présenté au point 7.1. Dans l'idéal, il faudrait retirer ces éléments de manière automatique pour obtenir une géométrie plus réaliste et que l'algorithme soit totalement utilisable.

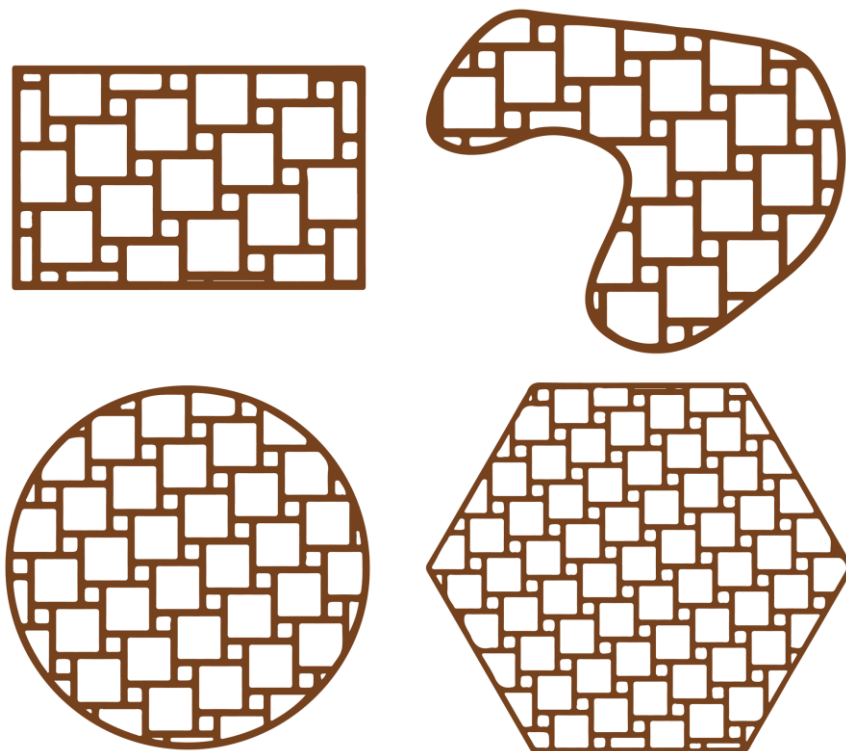


Figure 87 : Génération et calcul d'un plancher réciproque composé de plusieurs modules – Exemples de configurations

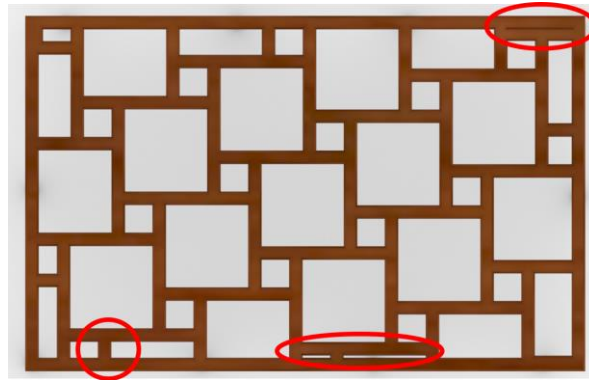


Figure 88 : Génération et calcul d'un plancher réciproque composé de plusieurs modules - Problèmes

7.1 Analyse d'un plancher réciproque composé de plusieurs modules

L'objectif de cette sous-section est de se mettre dans une situation réelle afin de créer et optimiser le volume de matière d'un plancher réciproque. Supposons une zone, de dimension $18 [m] \times 18 [m]$, destinée à accueillir des open-spaces, soit une charge surfacique de $3 [kN/m^2]$. Pour optimiser le volume de matière, trois critères sont utilisés : la flèche, le volume et le nombre de colonnes.

Il est supposé que les éléments composant les modules aient une longueur comprise entre 4 et 5 $[m]$. La proportion d'engagement, a , est fixée à 0,3 puisque c'est la valeur qui minimise le volume de matière d'un module, comme cela a pu être démontré. En utilisant le modèle montré précédemment et en supprimant tous les éléments à moins d'un mètre du bord, la géométrie du plancher obtenue est présentée en Figure 89.

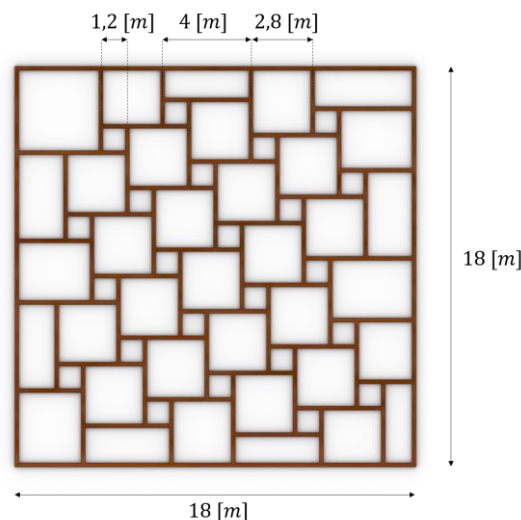


Figure 89 : Cas d'étude - Plancher réciproque

Il faut alors s'intéresser aux dimensions des éléments composant la structure primaire afin de respecter différentes contraintes. Ces dernières sont la flèche et le volume de matière. L'objectif est de satisfaire un certain critère de flèche, posé à $L/250$ et de minimiser le volume total du plancher. Pour ce faire, des colonnes vont être générées de manière aléatoire jusqu'à l'obtention de la meilleure situation. Tant le nombre de colonnes que leur positionnement est aléatoire, une inconnue se pose alors, à savoir la valeur de L à utiliser dans le critère de flèche L/δ . En effet, cette longueur va varier en fonction de la position des colonnes. Cette longueur est choisie en supposant qu'il y aura au minimum une colonne située au milieu du plancher et donc $L = 9 [m]$. De plus, certaines conditions sont préalablement imposées :

- Il est possible d'avoir, au plus, une colonne par module.
- Les colonnes ne peuvent pas se situer trop proches du bord du plancher (minimum à $3[m]$).
- La position des colonnes de contour est préalablement imposée

Ces conditions permettent de limiter le nombre de combinaisons possibles et donc d'avoir une convergence plus rapide vers la solution optimale.

Afin de trouver la configuration optimale, le plug-in Octopus, de Grasshopper, est utilisé. Ce plug-in est un solveur qui permet de réaliser une optimisation multi-objectifs en utilisant le principe de Pareto. Ce dernier consiste à trouver un compromis entre tous les objectifs (la flèche, la volume et le nombre de colonnes) afin d'obtenir la solution la plus « optimale ». Octopus est basé sur des algorithmes génétiques, c'est-à-dire qu'il fait varier une série de paramètres, appelés « des génomes », pour créer une famille de solutions. Les génomes utilisés ici sont : le nombre de colonnes, leur position et le diamètre des éléments du plancher. Octopus va ensuite prendre les meilleures solutions et faire des combinaisons entre elles pour tester de nouvelles configurations et créer une nouvelle famille de résultats. Il répète ensuite cela afin de converger vers les solutions optimales. A chaque itération, il crée un front de Pareto représentant les meilleurs configurations, tel qu'illustré à la Figure 90. Les 3 axes de cette figure représentent (1) le volume de matière du plancher, (2) le nombre de colonnes et (3) la « flèche ». Le nombre de colonnes (2) a été ajouté comme paramètre d'optimisation afin d'éviter la solution triviale qui consisterait à avoir une colonne à toutes positions possibles. D'autre part, l'axe associé au critère de flèche (3) représente en réalité la valeur absolue de la différence entre le critère de flèche toléré et la réalité : $\left| \frac{L}{\delta_{max}} - \frac{L}{\delta_{réelle}} \right| = \left| 250 - \frac{L}{\delta_{réelle}} \right|$. En effet, Octopus cherche à minimiser les objectifs. Avec ce critère, il va essayer de tendre vers 0. Finalement, la surface grisée de la Figure 90 représente le front de Pareto et combine toutes les meilleures combinaisons possibles. C'est ensuite au concepteur de choisir la solution qui correspond le mieux à ses attentes.

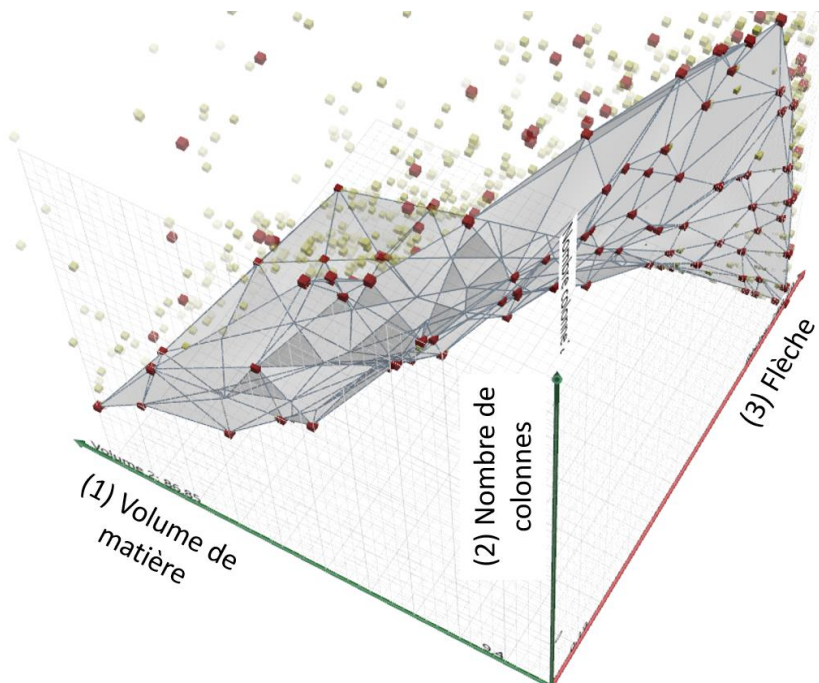


Figure 90 : Front de Pareto

Pour le cas étudié, la solution choisie est représentée en Figure 91, avec à gauche une illustration du plancher et à droite la position des colonnes. La Figure 92 représente quant à elle la déformée du

plancher (à gauche) et les diagrammes des moments de chaque élément (à droite). Les caractéristiques de ce plancher sont les suivantes :

- 6 colonnes intérieures
- Diamètre des poutres = 45 [cm] et donc le volume total du plancher vaut : 45 [m³]

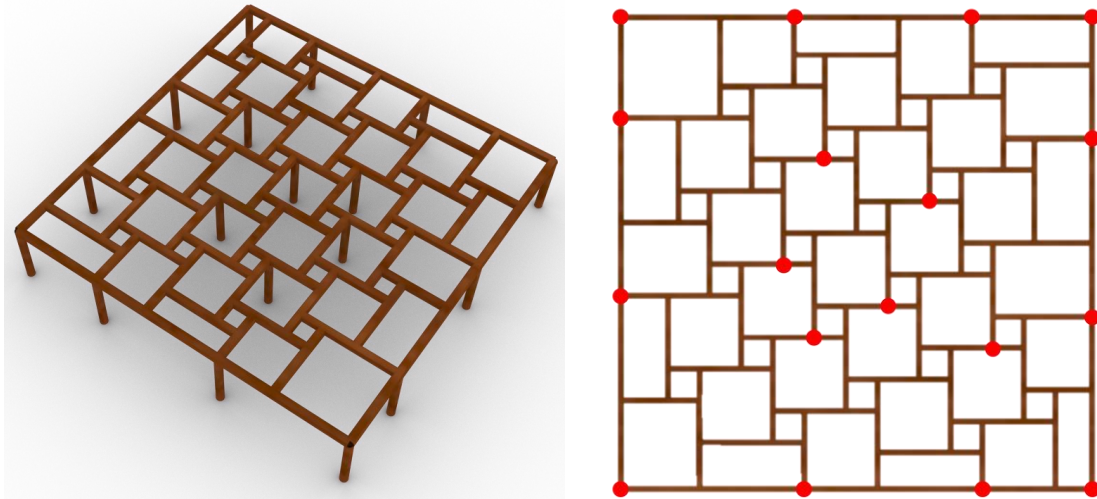


Figure 91 : Cas d'étude - Plancher réciproque - Illustration du plancher (à gauche) - Position des colonnes (à droite)

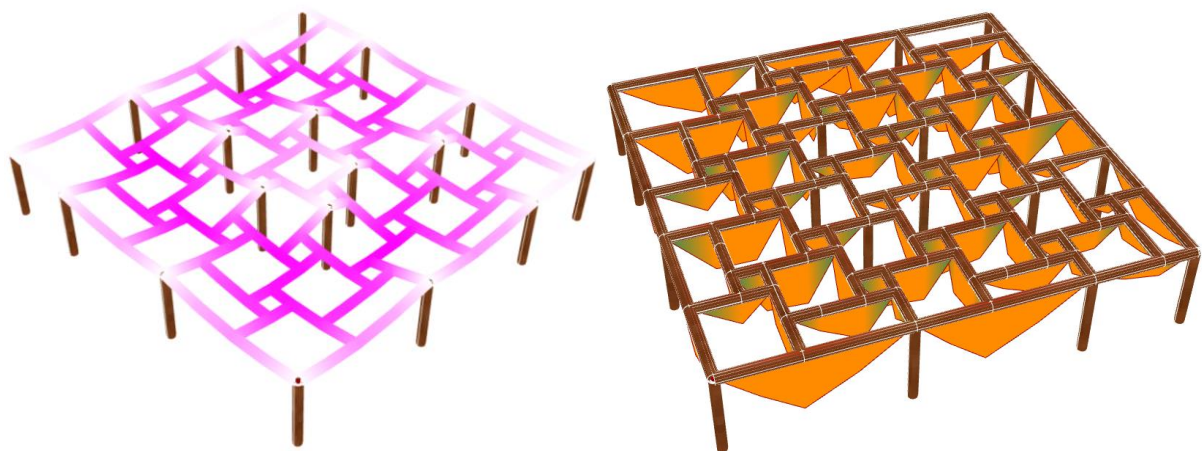


Figure 92 : Cas d'étude - Plancher réciproque - Déformée (à gauche) - Diagrammes des moments (à droite)

7.2 Conclusion intermédiaire

Cette analyse fournit un résultat et une solution qui mérite discussion car il ne s'agit pas de l'optimum de ce plancher.

- Tout d'abord, tous les éléments du plancher réciproque ont été dimensionnés avec la même section, ce qui n'est certainement pas la solution optimale. Certains éléments ont donc un surplus de matière qui n'est pas nécessaire. En effet, cette quantité de matière supplémentaire a non seulement une influence négative sur le volume total mais en plus ajoute une charge à reprendre.

- Ensuite, la présence de plusieurs modules connectés est néfaste pour la flèche globale. En effet, la déformation d'un module aura un impact sur la flèche de son module voisin. La flèche totale est donc liée à l'addition de flèches qui s'enchainent. Cet impact nécessiterait une étude plus approfondie.
- D'autre part, le critère de flèche utilisé pour le plancher réciproque mérite une réflexion. En effet, en fonction de la position des colonnes, la longueur utilisée pour calculer la flèche admissible varie également. Toutefois, il n'est pas si simple de déterminer la distance à utiliser pour chaque génération de nouvelles colonnes. Cet aspect mériterait donc une attention plus particulière.
- Enfin, la longueur des éléments (L_b) composant le plancher réciproque a été choisie arbitrairement également. Il serait sûrement intéressant d'étudier l'impact de cette longueur sur les résultats obtenus. De plus, cette longueur a un impact sur le nombre de modules composant le plancher.

8 Conclusion et discussion

Pour conclure ce document, les résultats et observations importantes sont résumés et discutés. Le présent travail a traité les différents points suivants :

- Influence du poids propre sur l'optimisation du volume de matière et le dimensionnement d'une poutre simple, d'un plancher classique et d'un plancher réciproque en utilisant la théorie des indicateurs morphologiques
- Comparaison du volume de matière, en tenant compte du poids propre d'un plancher classique composé de poutres parallèles avec un plancher réciproque composé d'un module carré.
- Comparaison de différentes classes de résistance en termes de volume de matière (V) et d'efficacité matérielle ($\rho V/F$) pour une simple poutre fléchie et un plancher classique composé de poutres parallèles.

Cette conclusion va donc revenir sur chacun de ces points et présentera ensuite une série de pistes d'améliorations et d'éléments qu'il serait intéressant d'étudier.

Dans un premier temps, la méthode d'analyse basée sur les indicateurs morphologiques a permis de prendre en compte le poids propre et de réduire le nombre de paramètres à considérer dans l'optimisation du volume. En effet, les indicateurs morphologiques sont des nombres adimensionnels exprimés selon des données du problème. Un indicateur regroupe donc plusieurs informations du problème. Afin d'étudier le volume de matière, deux indicateurs morphologiques ont été utilisés,

respectivement à l'état limite ultime et l'état limite de service : $\frac{V_{ULS} f_{m,d}^{2/3}}{F_{ULS} L^{5/3}}$ et $\frac{V_{SLS} E_{0,m}^{1/2}}{F_{SLS} L^2}$. Il a été montré

que ces indicateurs, dits secondaires, dépendent au plus de 5 indicateurs primaires, en fonction de la structure étudiée. Ces derniers sont : α , Z , Λ (Λ_{ULS} ou Λ_{SLS}), λ et L/e . Par rapport à l'analyse en négligeant le poids propre, un seul paramètre a été ajouté, à savoir l'indicateur de poids propre qui s'écrit, respectivement à l'état limite ultime et l'état limite de service : $\frac{\rho_{ULS} L^{5/3}}{F_{ULS}^{1/3} f_{m,d}^{2/3}}$ et $\frac{\rho_{SLS} L^2}{F_{SLS}^{1/2} E_{0,m}^{1/2}}$. A partir de

ce terme, deux analyses ont été réalisées : l'impact du poids propre sur le volume de matière nécessaire et l'impact d'un dimensionnement en négligeant le poids propre sur le taux de travail réel d'un élément. Les conclusions et observations, pour chaque cas d'études, sont reprises dans le Tableau 4. Il est important de préciser que les résultats obtenus sur base de cette analyse sont indépendants du matériau utilisé, tant que les éléments utilisés sont de section circulaire. Les conclusions tirées sont donc universelles et valables dans toutes les situations similaires à celles étudiées.

Dans un deuxième temps, un plancher classique composé de poutres parallèles a été comparé à un plancher réciproque carré composé d'un module carré. Tout d'abord, il est à noter que la considération du poids propre dans les analyses ne change pas les conclusions, obtenues par Marie Vandamme [22], sur la géométrie optimale d'un plancher réciproque. En effet, il a été démontré que la proportion d'engagement optimale est $\alpha = 0,3$. De plus, en utilisant les indicateurs morphologiques, il a été possible de montrer que, dans sa configuration optimale, un plancher réciproque carré permet d'économiser entre **10% à 35%** de matière en comparaison à un plancher classique carré composé de poutres parallèles.

Dans un troisième temps, à partir des équations développées, il a été possible de comparer différentes classes de résistance de bois entre elles. Cette comparaison a été réalisée en étudiant deux

	<u>Impact du poids propre sur le volume de matière de la structure</u>	<u>Impact du poids propre sur le taux de travail réel d'un élément de la structure</u>
<u>Poutre simple</u>	<u>Etat limite ultime :</u> Augmentation jusqu'à 6,32% du volume de matière en tenant compte du poids propre. <u>Etat limite de service :</u> Pour le critère $\frac{L}{\delta} = 250$: Augmentation jusqu'à 5,2% du volume de matière en tenant compte du poids propre. Pour le critère $\frac{L}{\delta} = 500$: Augmentation jusqu'à 7,5% du volume de matière en tenant compte du poids propre.	Une poutre fléchie chargée uniformément, dimensionnée en négligeant son poids propre a un taux de travail réel pouvant aller jusqu'à 109%. En fonction de la valeur de l'indicateur de poids propre, il revient au concepteur de choisir de négliger le poids propre lors du dimensionnement et d'accepter un taux de travail supérieur à 100%, de prendre en compte le poids propre ou alors de réduire la résistance de design utilisée dans le dimensionnement s'il souhaite négliger le poids propre.
<u>Plancher classique</u>	<u>Etat limite ultime :</u> Augmentation de 6,32% ($L_1/e = 1$) du volume de matière à 20,24% ($L_1/e = 25$), en tenant compte du poids propre. Rappel : L_1/e représente le nombre de poutres composant le plancher. <u>Etat limite de service :</u> Pour le critère $\frac{L}{\delta} = 250$: Augmentation de 5,2% ($L_1/e = 1$) du volume de matière à 27,17% ($L_1/e = 25$), en tenant compte du poids propre. Pour le critère $\frac{L}{\delta} = 500$: Augmentation de 7,5% ($L_1/e = 1$) du volume de matière à 40,17% ($L_1/e = 25$), en tenant compte du poids propre.	Le taux de travail des poutres, dimensionnées en négligeant leur poids propre, d'un plancher classique peut monter jusqu'à 125%, dans la pire situation du champ d'application étudié. Dans d'autres situations, ce taux de travail est proche de 100%. En fonction du projet, négliger le poids propre semble donc une hypothèse acceptable et pour d'autres projets moins.
<u>Plancher réciproque</u>	<u>Etat limite ultime :</u> Augmentation de 12,36% ($L/e = 5$) du volume de matière à 22,4% ($L/e = 25$), en tenant compte du poids propre. (Pour rappel, L/e ne représente rien physiquement pour un plancher réciproque. Ce rapport représente une image du nombre de poutres composant le plancher secondaire)	Pour une situation donnée, le taux de travail des poutres de type 1 et le taux de travail des poutres de type 2 est relativement similaire. Dans la pire situation du champ d'application étudié, ce taux de travail monte jusqu'à 125%.

Tableau 4 : Résumé des résultats obtenus sur base de l'indicateur de poids propre

critères : le volume de matière (V) et l'efficacité matérielle ($\rho V/F$). Pour rappel, l'efficacité matérielle représente l'importance du poids propre de la structure (ρV) par rapport à la charge extérieure à reprendre (F). Cette information est intéressante à plusieurs titres. En effet, le poids de la structure aura une influence sur le coût des fondations, le transport des éléments ainsi que sur la manutention de ceux-ci. Tout d'abord, en terme de **volume**, les analyses ont montré que, à l'état limite ultime, le volume de matière nécessaire d'un matériau est lié à $1/f_{m,d}^{2/3}$. C'est-à-dire que si $f_{m,d}$ d'un matériau A est plus faible que celui d'un matériau B alors le volume de matière du matériau A sera plus élevé. A l'état limite de service, il a été montré que le volume de matière est directement lié au rapport $1/E_{0,m}^{1/2}$. Les graphiques obtenus permettent alors de rapidement connaître l'influence du choix de la classe de résistance sur le projet sans devoir recommencer le dimensionnement depuis le début. En terme d'**efficacité matérielle**, à l'état limite ultime, au plus le rapport $\rho/f_{m,d}^{2/3}$ est grand pour le matériau A, au plus le poids nécessaire pour reprendre une certaine charge F sera grand par rapport à un autre matériau B qui aurait un rapport $\rho/f_{m,d}^{2/3}$ plus faible. A l'état limite de service, une observation similaire a été tirée mais sur base du rapport $\rho/E_{0,m}^{1/2}$. A nouveau, les graphiques obtenus permettent alors de rapidement connaître l'influence du choix de la classe de résistance sur le projet sans devoir recommencer le dimensionnement depuis le début. Les classes de résistances considérées ont donc pu être classées, en fonction de l'état limite et du critère étudié. Leur classement est repris au Tableau 5. Sur base de ces classements, la classe de résistance C_{40} semble la plus appropriée. Toutefois, une notion n'a pas encore été abordée : le prix ! Cette information est difficile à trouver et varie avec le temps. Néanmoins, à partir des informations trouvées [12], le prix ne semble pas dépendre des classes de résistance mais plutôt de l'essence de bois. Cela signifie que, pour une même essence, le prix sera le même peu importe la classe de résistance souhaitée. De plus, les résineux (classe de résistance C) coûtent moins cher que les feuillus (classe de résistance D). Utiliser un bois ayant une classe de résistance C_{40} semble donc la meilleure solution. Cependant, le prix dépend de l'offre et de la demande sur le marché. Il serait possible de finalement opter pour un bois feuillus si le cours du marché devait s'inverser et afficher des prix de résineux plus élevés que les feuillus. Les graphiques obtenus sur le volume de matière et l'efficacité matérielle peuvent être utilisés dans ce choix. En effet, ils permettent de directement quantifier l'impact du choix du bois choisi sur le coût du projet et donc de finalement peut-être opter pour un bois nécessitant plus de volume ou pesant plus lourd mais coûtant moins cher.

	Volume de matière (V)	Efficacité matérielle ($\rho V/F$)
Etat limite ultime (ULS)	De la classe de résistance nécessitant le moins de volume à la classe de résistance nécessitant le plus de volume pour reprendre une charge F : $D_{70} - D_{50} - C_{40} - D_{30} - C_{24} - C_{18}$	De la classe de résistance nécessitant le moins de poids (ρV) à la classe de résistance nécessitant le plus de poids pour reprendre une charge F : $C_{40} - C_{24} - D_{50} - C_{18} - D_{70} - D_{30}$
Etat limite de service (SLS)	De la classe de résistance nécessitant le moins de volume à la classe de résistance nécessitant le plus de volume pour reprendre une charge F : $D_{70} - C_{40} - D_{50} - C_{24} - D_{30} - C_{18}$	De la classe de résistance nécessitant le moins de poids (ρV) à la classe de résistance nécessitant le plus de poids pour reprendre une charge F : $C_{24} - C_{18} - C_{40} - D_{30} - D_{50} - D_{70}$

Tableau 5 : Résumé des analyses liées au volume et à l'efficacité matérielle

Dans un dernier temps, il est également intéressant d'aborder différentes pistes d'améliorations et d'approfondissement que ce sujet de recherche permet. Les éléments abordés concernent principalement les structures réciproques étant donné que ces dernières présentent encore beaucoup « d'inconnues ».

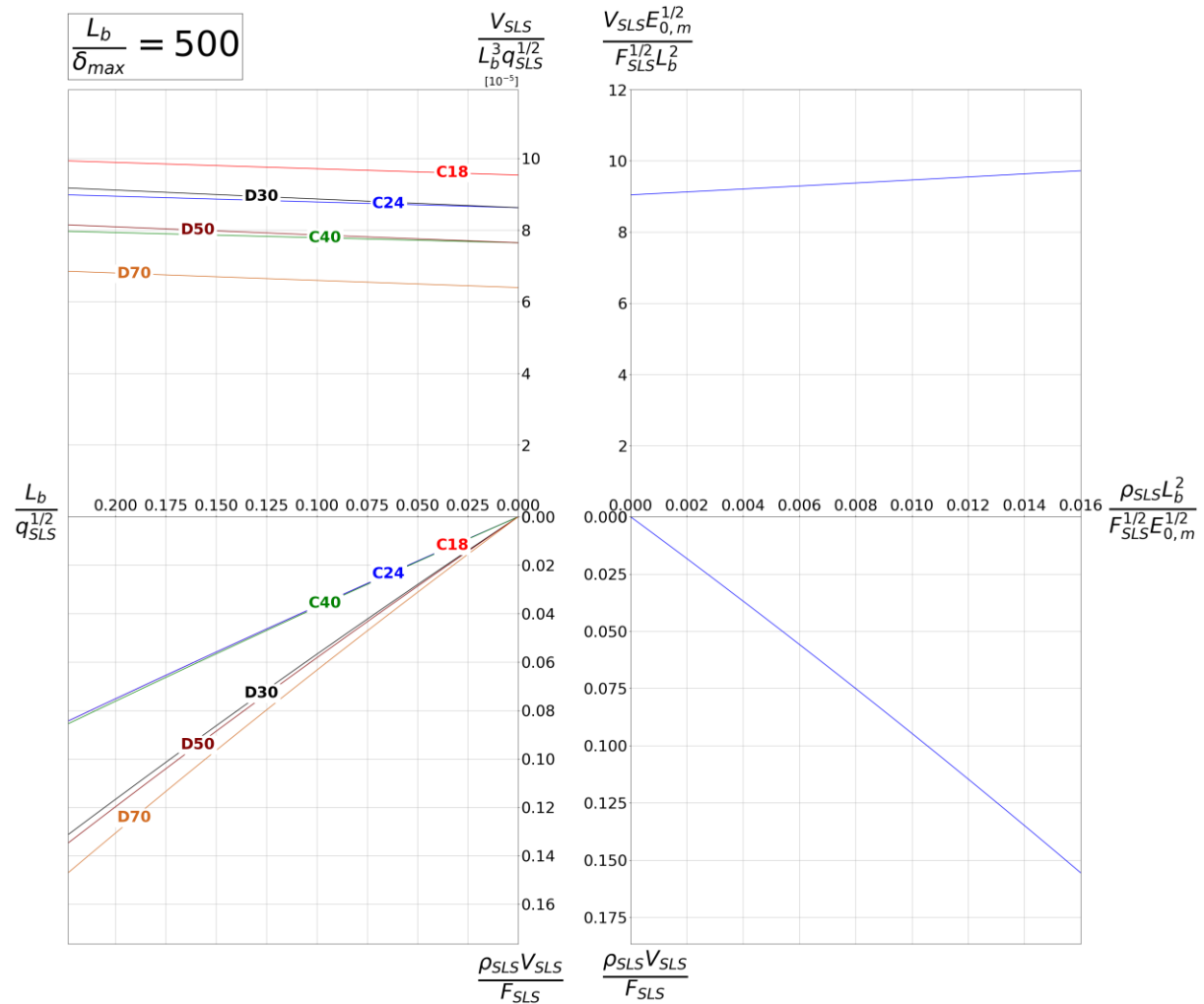
Tout d'abord, il serait intéressant d'étendre le champ d'étude en terme de sollicitation comme un chargement asymétrique et/ou non uniforme. L'étude de la réaction dynamique de ces planchers semble également avoir son utilité. En effet, la réponse dynamique d'un plancher va, entre autres, dépendre de sa rigidité. Or, cette dernière dépend des connexions entre éléments. Au vu du nombre élevé de connexions possibles (structure primaire avec structure secondaire et structure primaire avec structure primaire), il est important de bien les caractériser afin d'obtenir un modèle théorique correspondant à la réponse réelle.

Ensuite, un modèle numérique paramétrique ayant été développé et permettant le calcul d'un plancher réciproque carré composé d'un module carré, il serait intéressant de confronter ces résultats à la réalité. Pour ce faire, des tests en laboratoire pourraient être réalisés afin de pouvoir consolider la confiance envers ce modèle numérique.

D'autre part, un modèle numérique permettant de générer et calculer un plancher réciproque quelconque a été développé. Cependant, ce dernier présente un défaut pour que la solution obtenue soit totalement réaliste, à savoir les éléments trop proches du bord. Il serait intéressant d'essayer de les enlever afin d'avoir un programme qui permette de concevoir n'importe quel plancher réciproque. Dans le cadre de l'optimisation de tels planchers, l'étude de la position des colonnes et des portées à considérer pour connaître la flèche maximale admissible mérite également une réflexion.

Pour finir, bien que le bois soit un matériau utilisé en construction depuis des siècles, il n'en reste pas moins intéressant à étudier. Les planchers réciproques en grumes, et plus globalement, les structures réciproques, sont un type de constructions qui méritent d'être étudiées et approfondies. En effet, elles apportent un cachet architectural et artistique tout en essayant d'offrir une solution aux problèmes actuels liés à la pollution. Ces structures ont donc très certainement un avenir dans le monde de la construction de demain mais nécessitent encore beaucoup d'attention pour pouvoir les utiliser dans leurs meilleures configurations.

Annexe A Poutre fléchie - Résumé de l'analyse à l'état limite de service



Annexe B Plancher classique – Efficacité matérielle (ULS)

Cette annexe se réfère à la section 4.1.1.1, liée à l'étude des planchers classiques, et présente des graphiques de l'efficacité matérielle à l'état limite ultime ($\rho_{ULS}V_{ULS}/F_{ULS}$) en fonction du rapport $L_2/q_{ULS}^{1/3}$ pour différentes classes de résistance et plusieurs combinaisons de λ et L_1/e .

- $\lambda = 0,3$

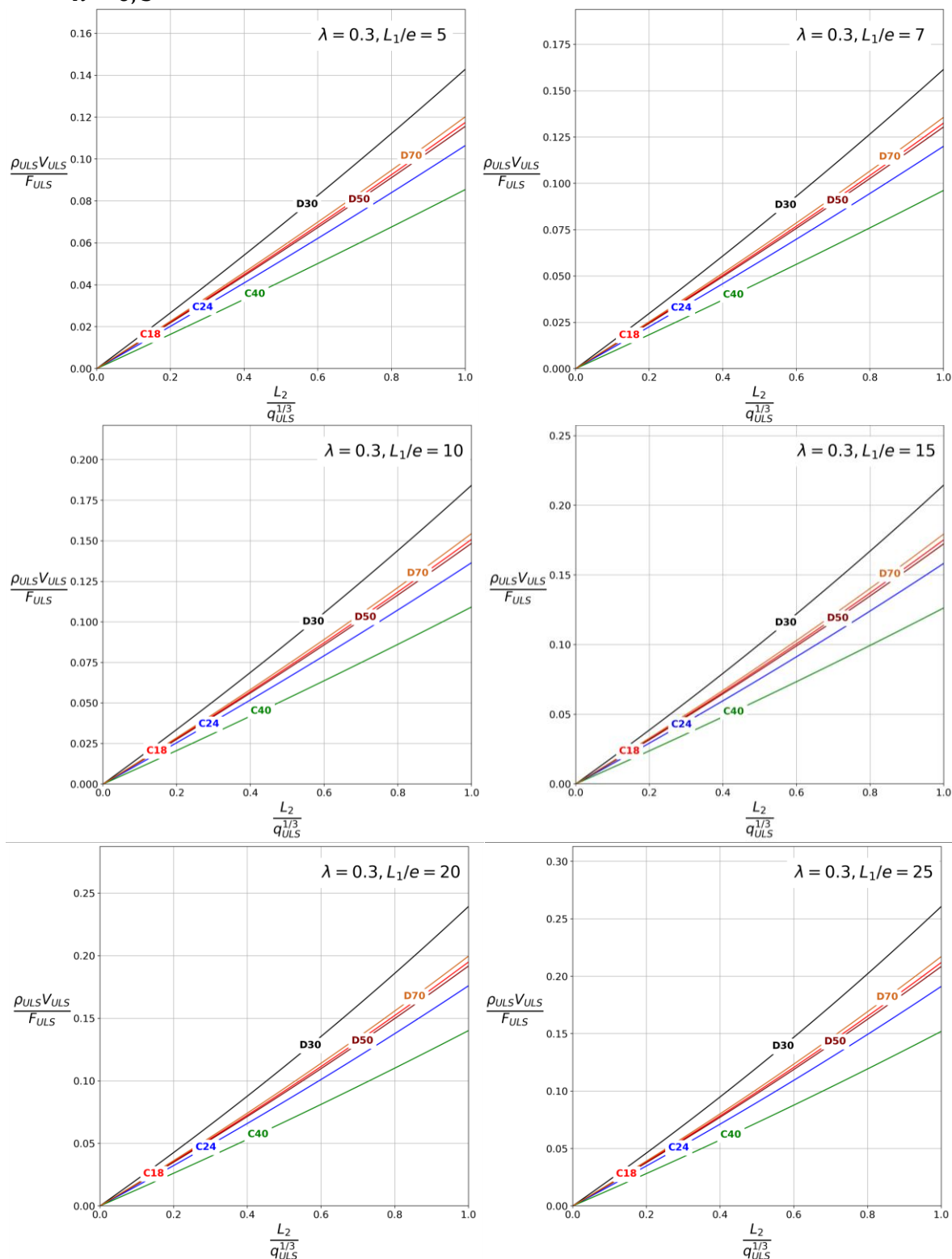


Figure 94 : Annexe B - Plancher classique - Efficacité matérielle (ULS) en fonction de $L_2/q_{ULS}^{1/3}$ pour différentes situations – $\lambda = 0,3$

• $\lambda = 0,5$

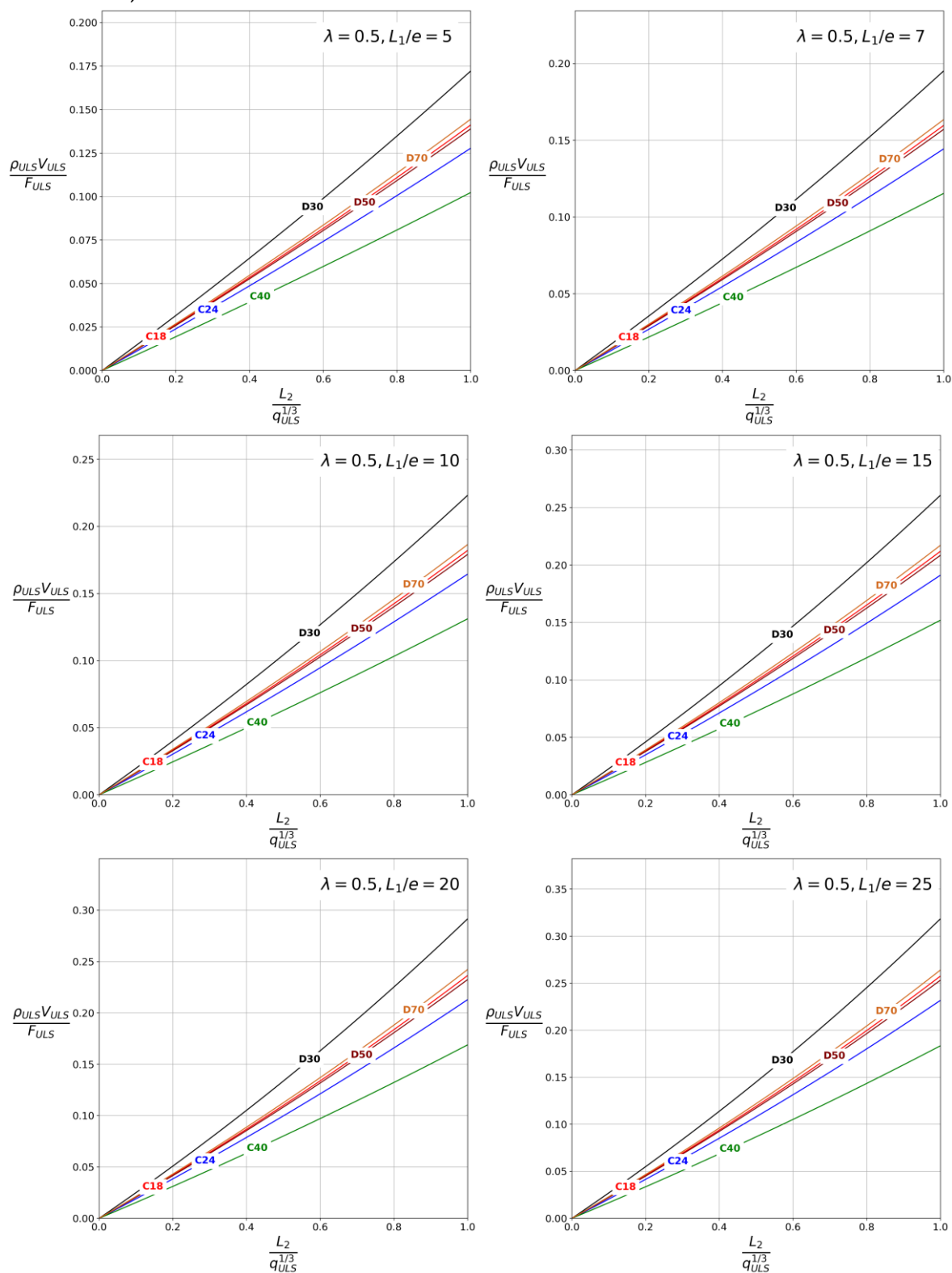


Figure 95 : Annexe B - Plancher classique - Efficacité matérielle (ULS) en fonction de $L_2/q_{ULS}^{1/3}$ pour différentes situations – $\lambda = 0,5$

- $\lambda = 0,8$

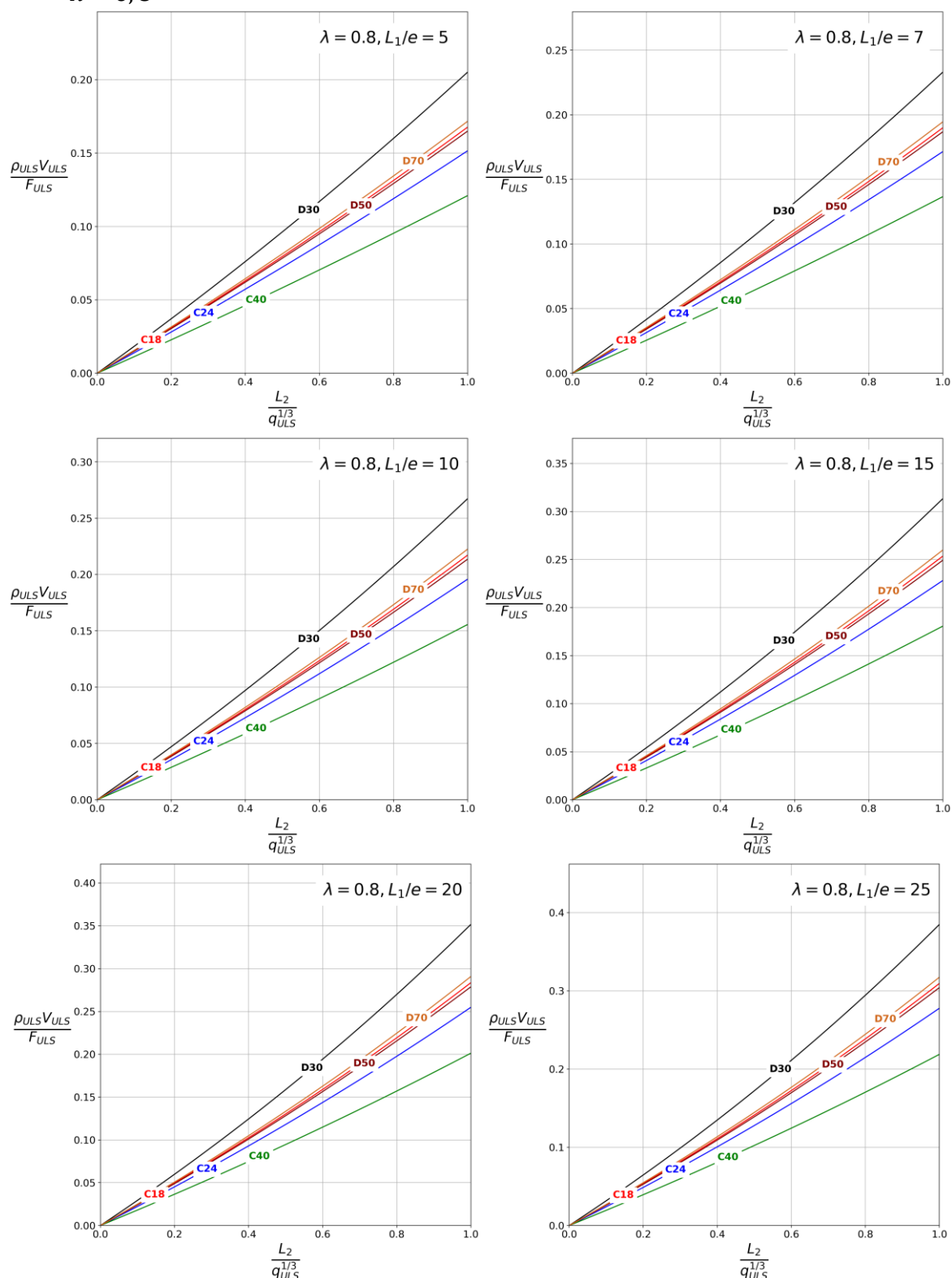


Figure 96 : Annexe B - Plancher classique - Efficacité matérielle (ULS) en fonction de $L_2/q_{ULS}^{1/3}$ pour différentes situations – $\lambda = 0,8$

- $\lambda = 1,0$

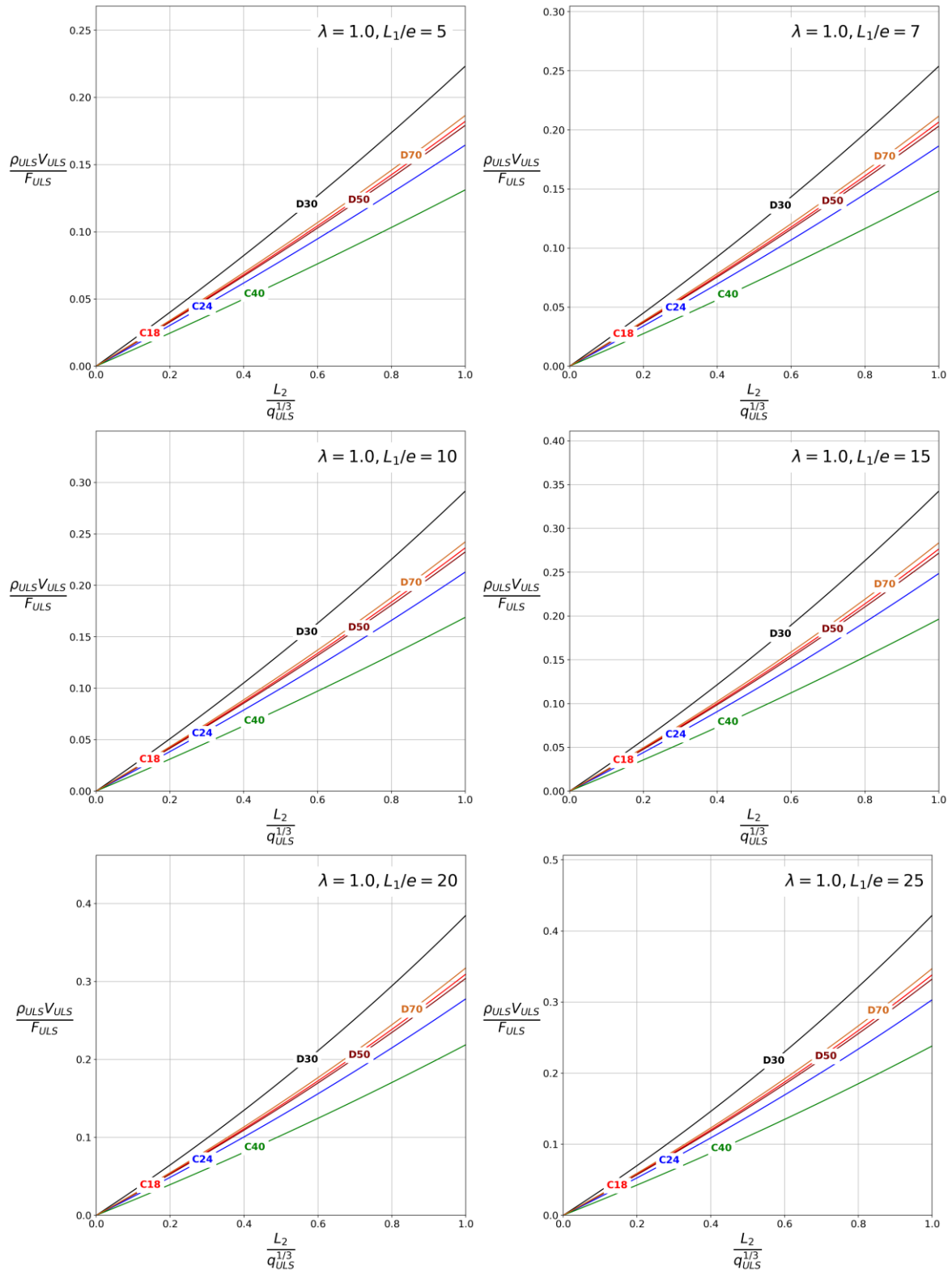


Figure 97 : Annexe B - Plancher classique - Efficacité matérielle (ULS) en fonction de $L_2/q_{ULS}^{1/3}$ pour différentes situations – $\lambda = 1,0$

Annexe C Plancher classique – Image du volume (ULS)

Cette annexe se réfère à la section 4.1.1.2, liée à l'étude des planchers classiques, et présente des graphiques de l'image du volume à l'état limite ultime ($V_{ULS}/L_2^3 q_{ULS}^{2/3}$) en fonction du rapport $L_2/q_{ULS}^{1/3}$ pour différentes classes de résistance et plusieurs combinaisons de λ et L_1/e .

- $\lambda = 0,3$

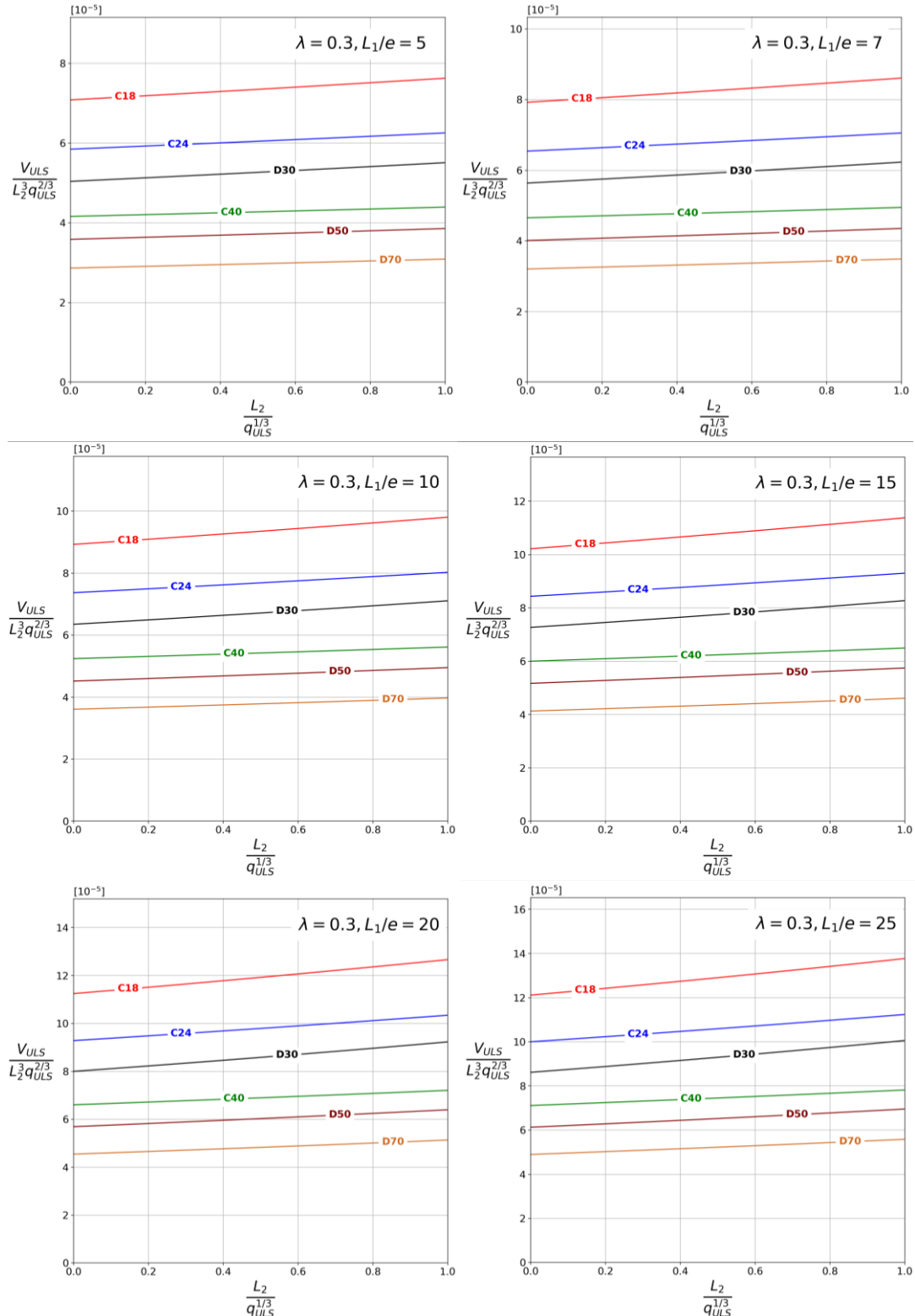


Figure 98 : Annexe C - Plancher classique – Image du volume (ULS) en fonction de $L_2/q_{ULS}^{1/3}$ pour différentes situations – $\lambda = 0,3$

- $\lambda = 0,5$

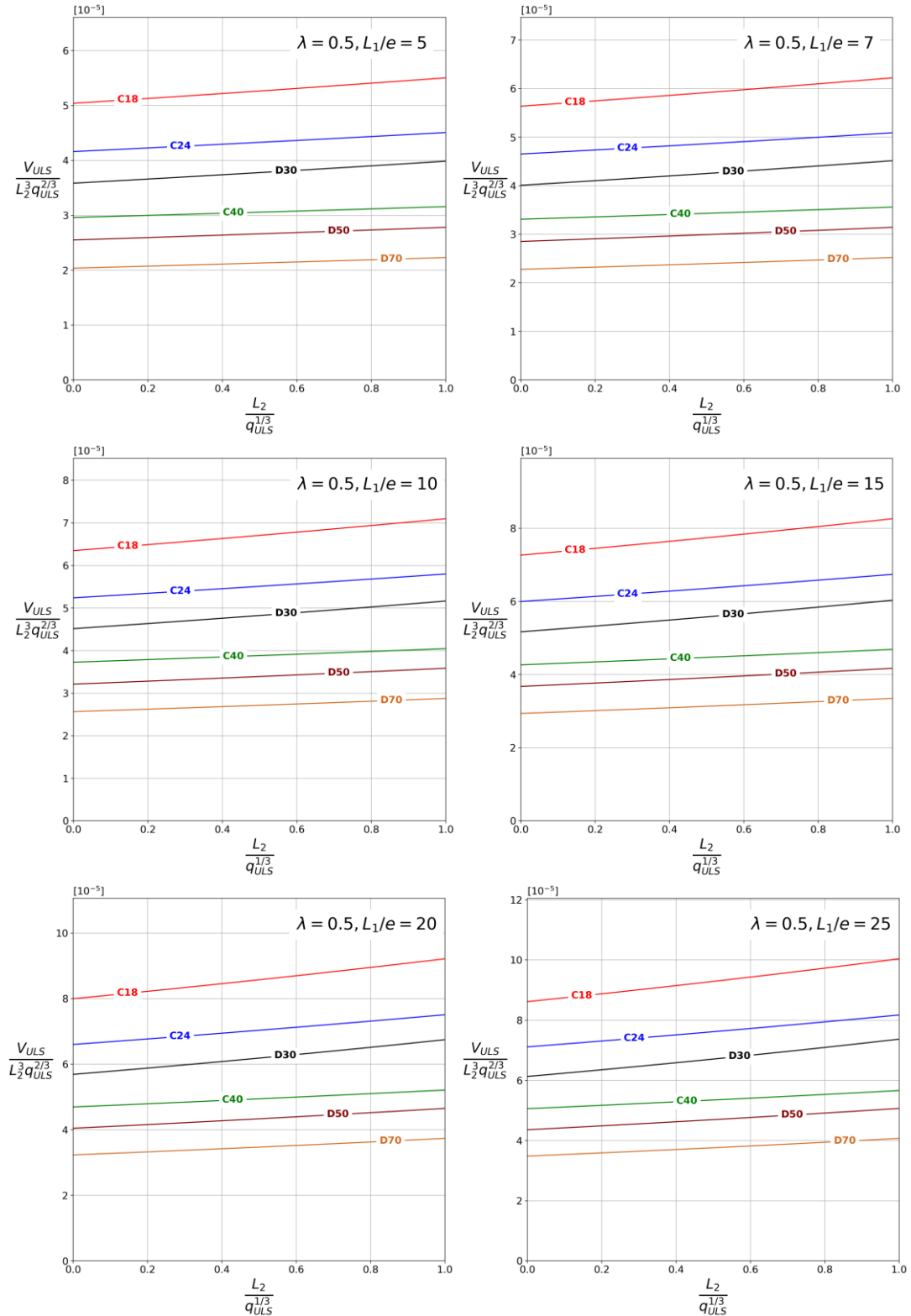


Figure 99 : Annexe C - Plancher classique – Image du volume (ULS) en fonction de $L_2/q_{ULS}^{1/3}$ pour différentes situations – $\lambda = 0,5$

- $\lambda = 0,8$

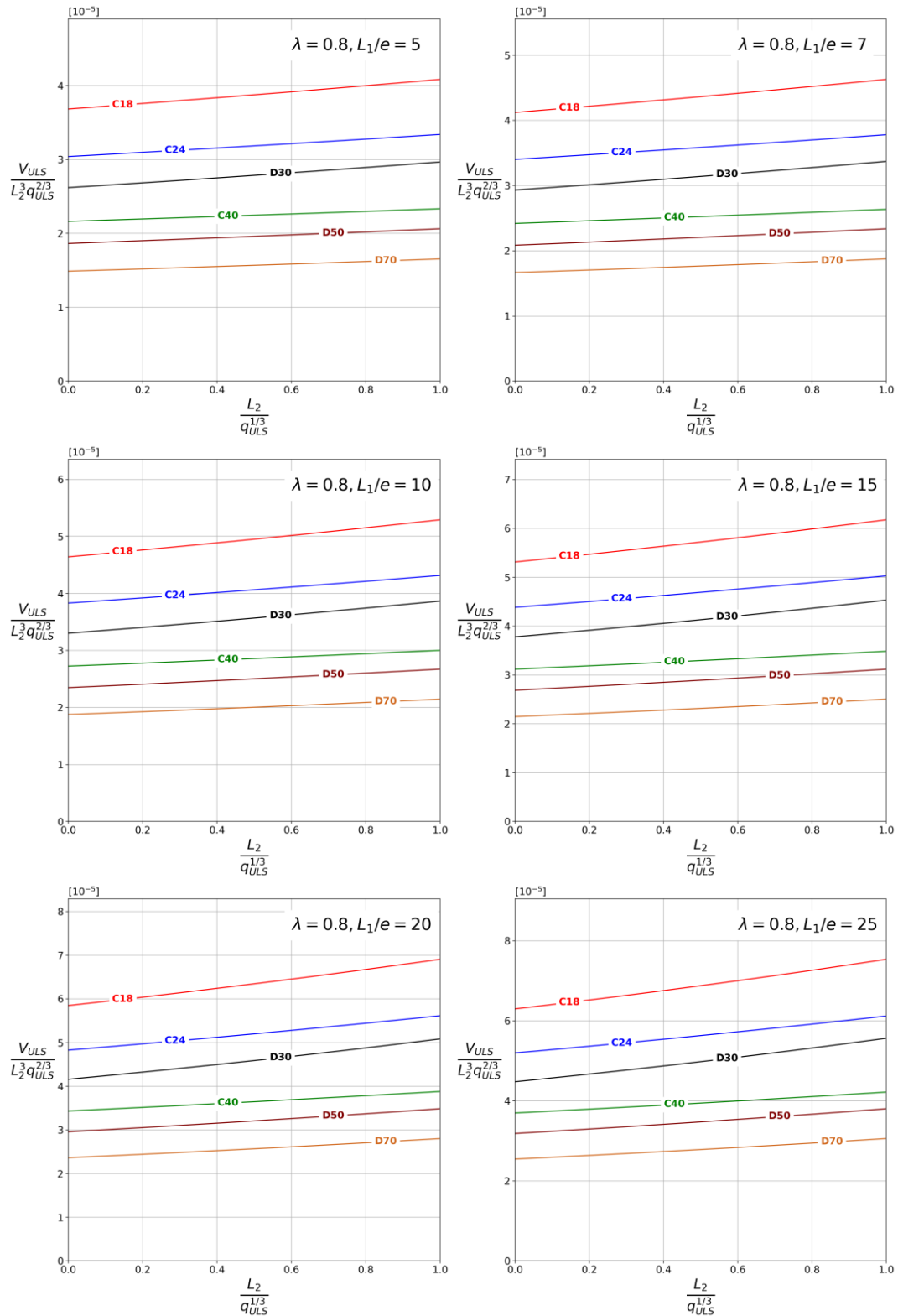


Figure 100 : Annexe C - Plancher classique - Image du volume (ULS) en fonction de $L_2/q_{ULS}^{1/3}$ pour différentes situations – $\lambda = 0,8$

- $\lambda = 1,0$

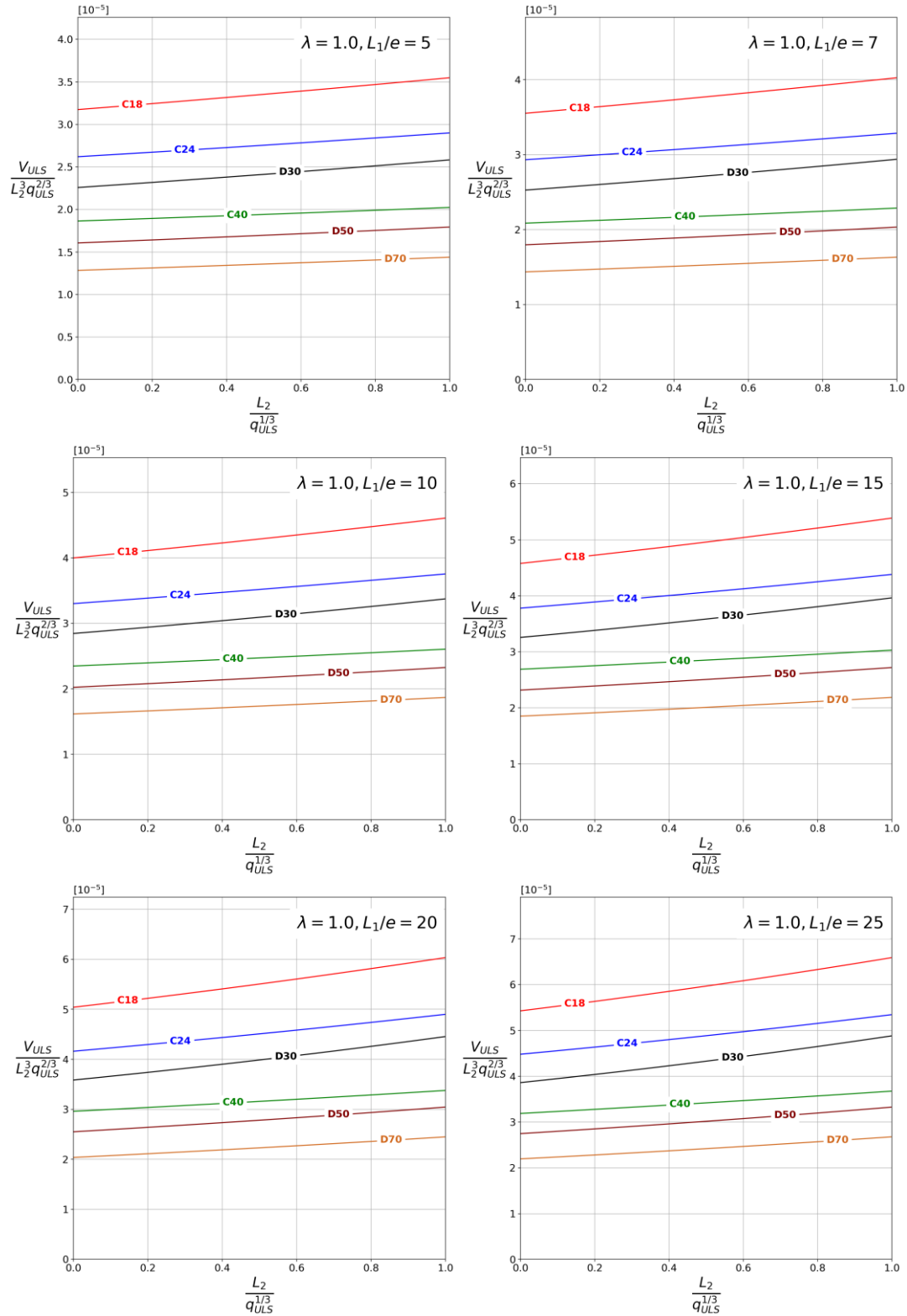


Figure 101 : Annexe C - Plancher classique - Image du volume (ULS) en fonction de $L_2/q_{ULS}^{1/3}$ pour différentes situations – $\lambda = 1,0$

Annexe D Plancher classique - Efficacité matérielle (SLS)

Cette annexe se réfère à la section 4.2.1.1, liée à l'étude des planchers classiques, et présente des graphiques de l'efficacité matérielle à l'état limite de service ($\rho_{SLS}V_{SLS}/F_{SLS}$) en fonction du rapport $L_2/q_{SLS}^{1/2}$ pour différentes classes de résistance et plusieurs combinaisons de L_2/δ_{max} , λ et L_1/e .

- $L_2/\delta_{max} = 250$ et $\lambda = 0,3$

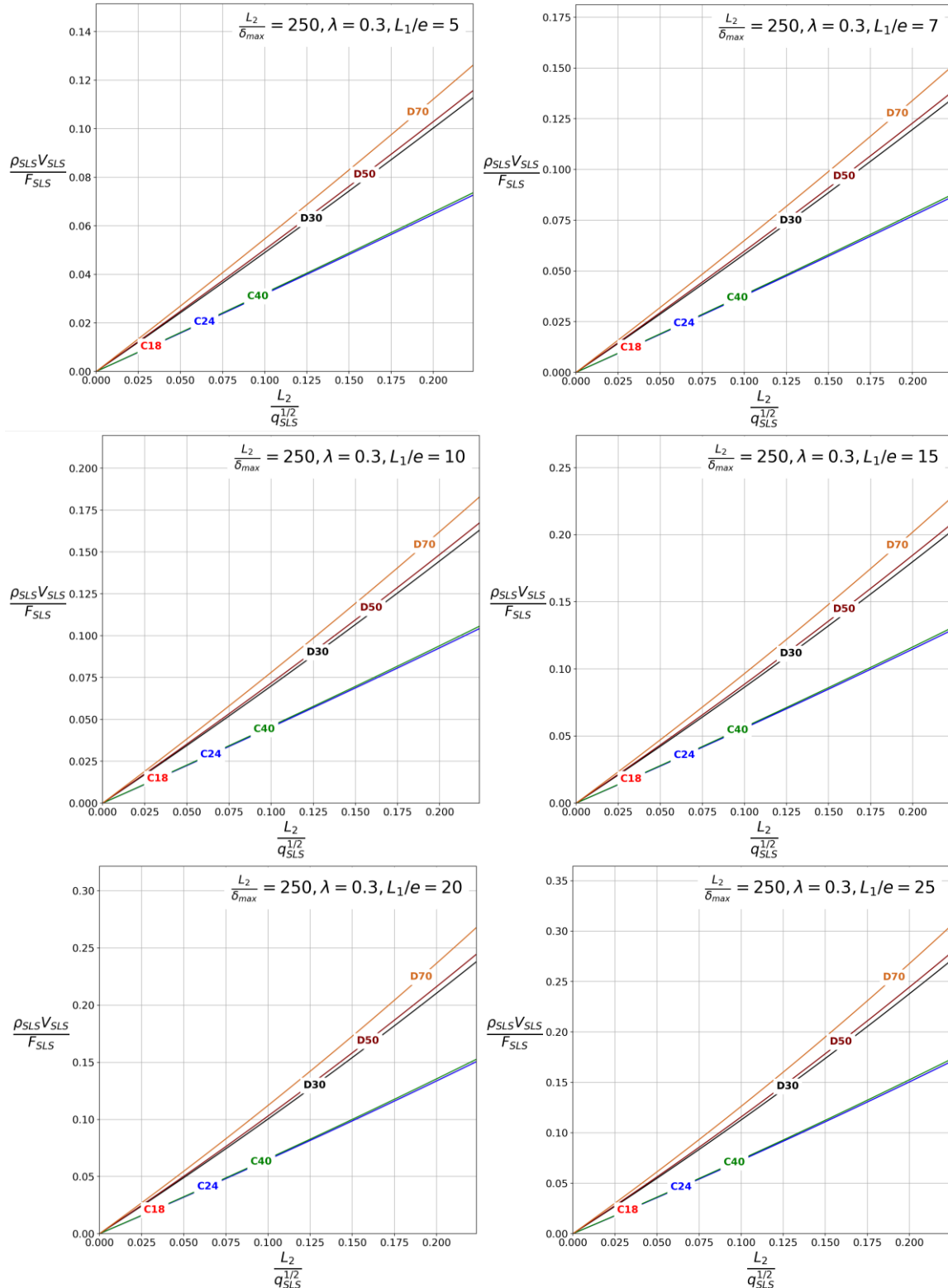


Figure 102 : Annexe D - Plancher classique - Efficacité matérielle (SLS) en fonction de $L_2/q_{SLS}^{1/2}$ avec $L_2/\delta_{max} = 250$ pour différentes situations – $\lambda = 0,3$

- $L_2/\delta_{max} = 250$ et $\lambda = 0,5$

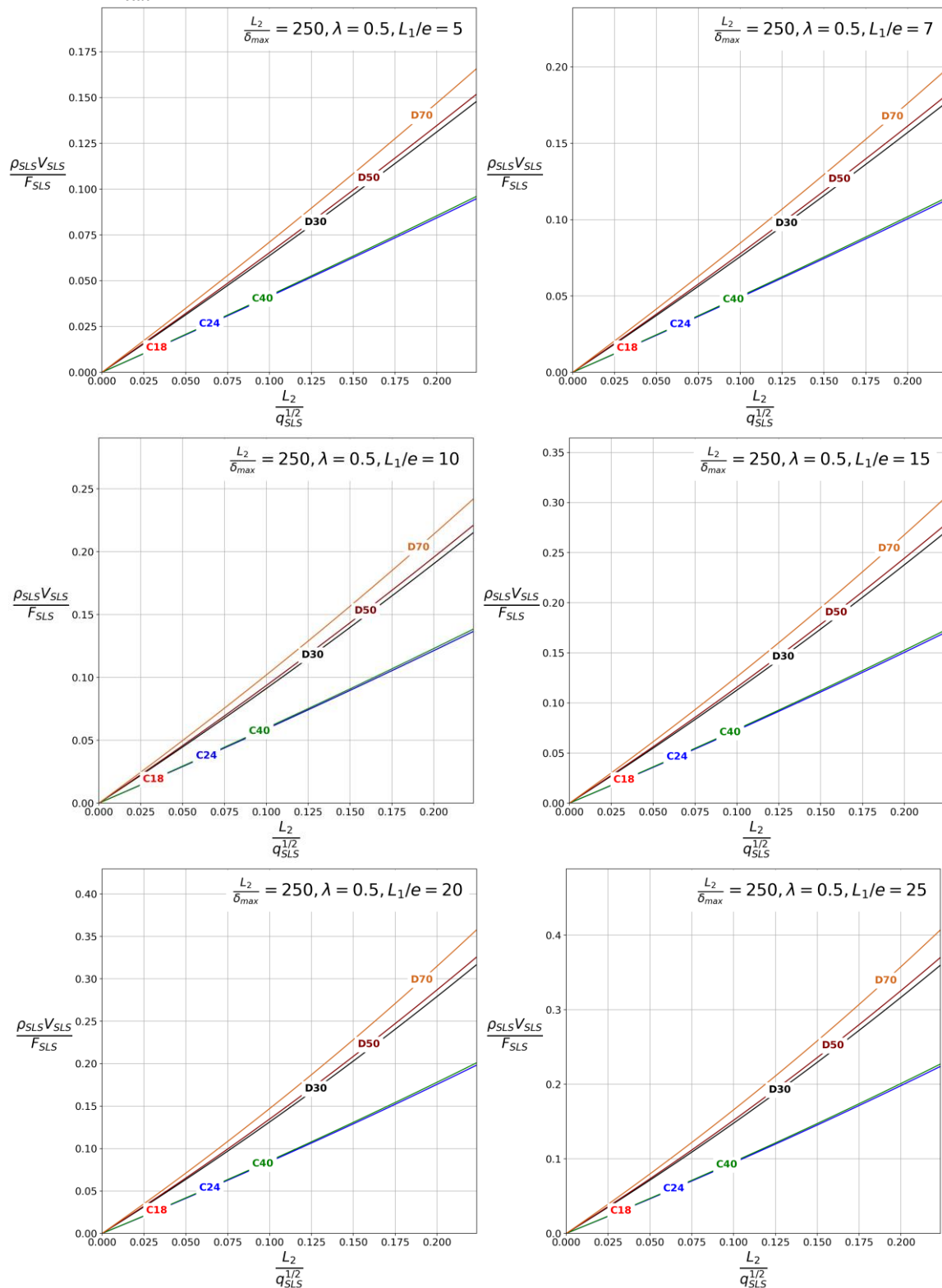


Figure 103 : Annexe D - Plancher classique - Efficacité matérielle (SLS) en fonction de $L_2/q_{SLS}^{1/2}$ avec $L_2/\delta_{max} = 250$ pour différentes situations – $\lambda = 0,5$

- $L_2/\delta_{max} = 250$ et $\lambda = 0,8$

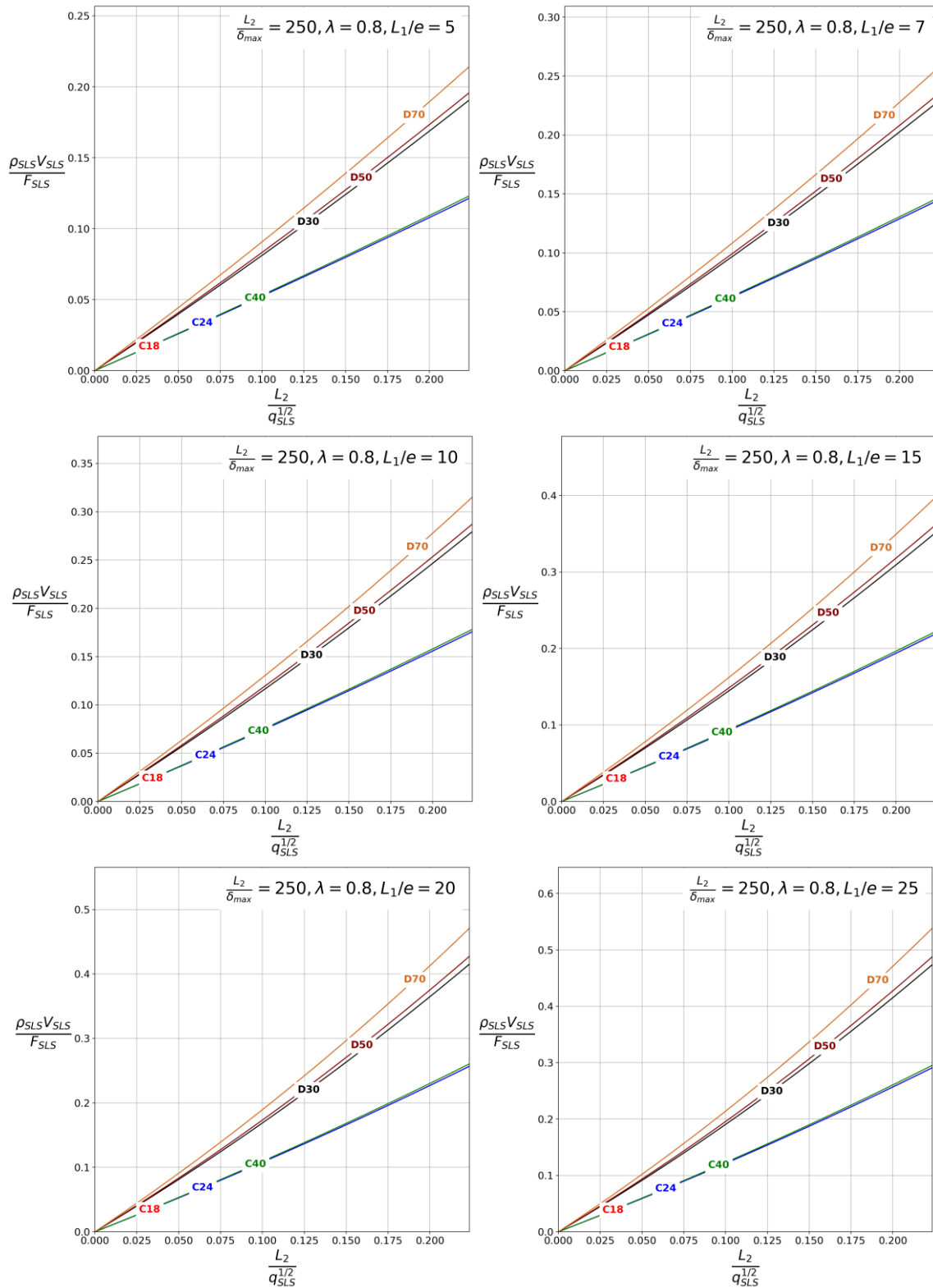


Figure 104 : Annexe D - Plancher classique - Efficacité matérielle (SLS) en fonction de $L_2/q_{SLS}^{1/2}$ avec $L_2/\delta_{max} = 250$ pour différentes situations – $\lambda = 0,8$

- $L_2/\delta_{max} = 250$ et $\lambda = 1,0$

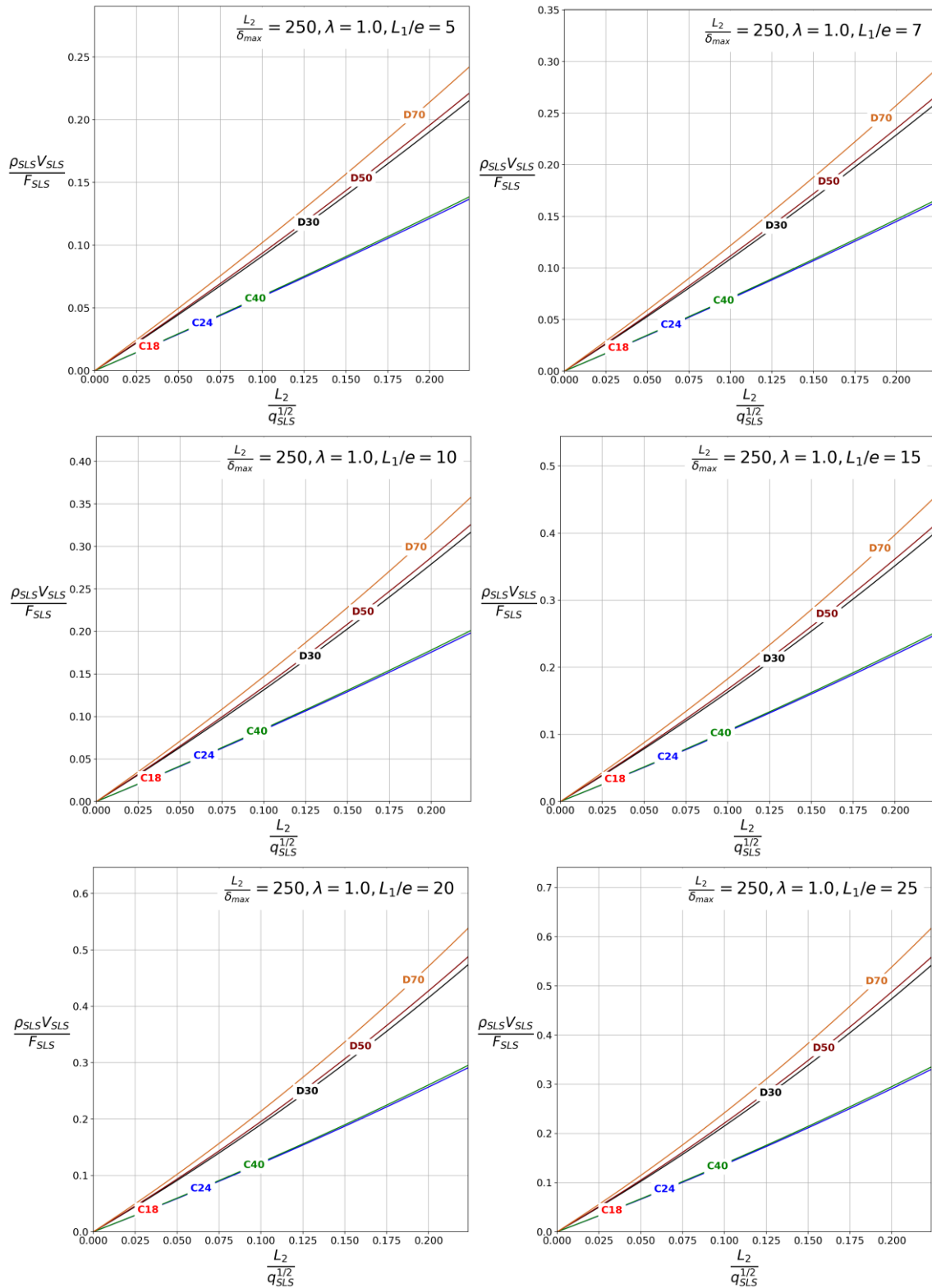


Figure 105 : Annexe D - Plancher classique - Efficacité matérielle (SLS) en fonction de $L_2/q_{SLS}^{1/2}$ avec $L_2/\delta_{max} = 250$ pour différentes situations – $\lambda = 1,0$

- $L_2/\delta_{max} = 500$ et $\lambda = 0,3$

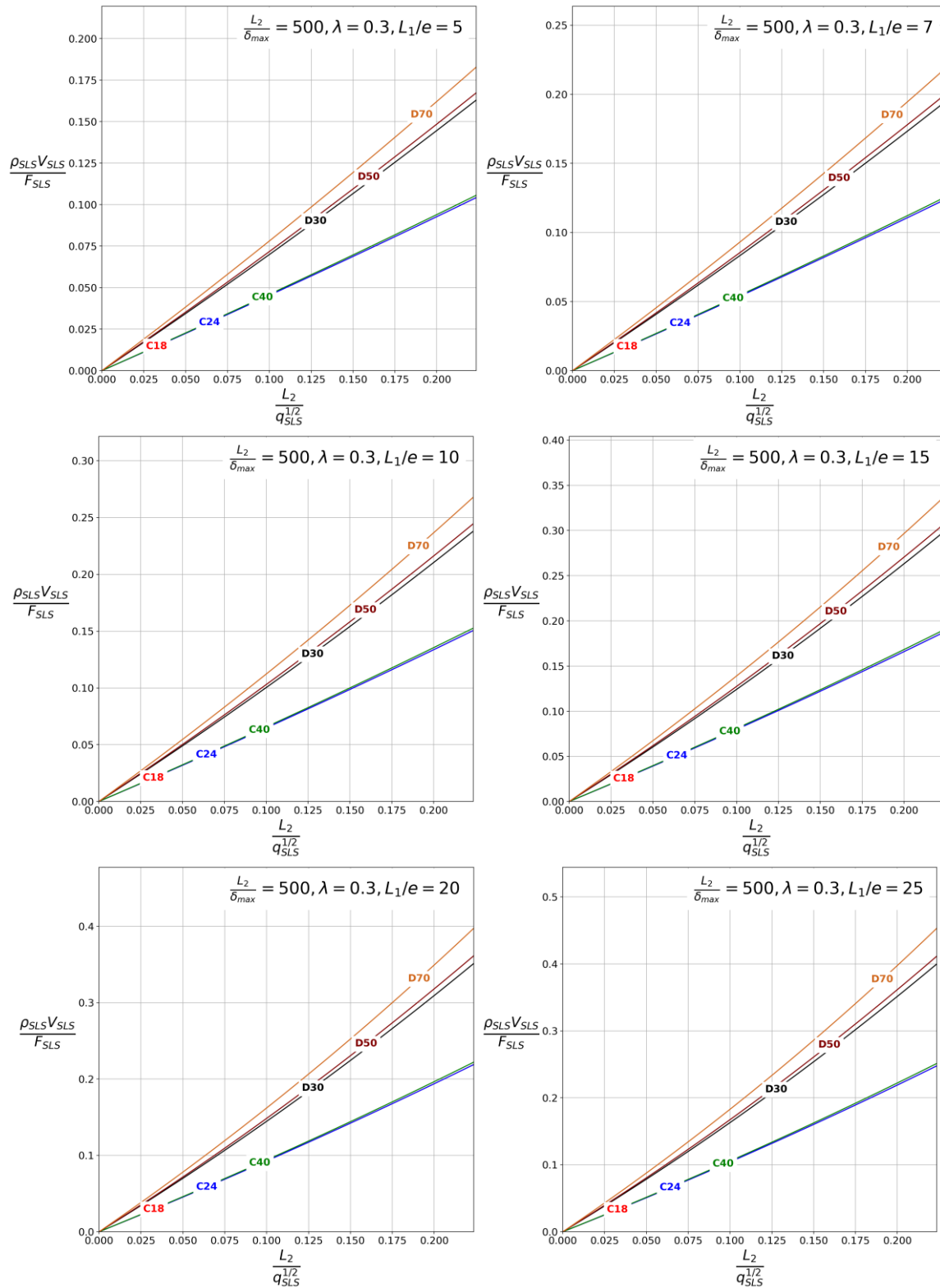


Figure 106 : Annexe D - Plancher classique - Efficacité matérielle (SLS) en fonction de $L_2/q_{SLS}^{1/2}$ avec $L_2/\delta_{max} = 500$ pour différentes situations – $\lambda = 0,3$

- $L_2/\delta_{max} = 500$ et $\lambda = 0,5$

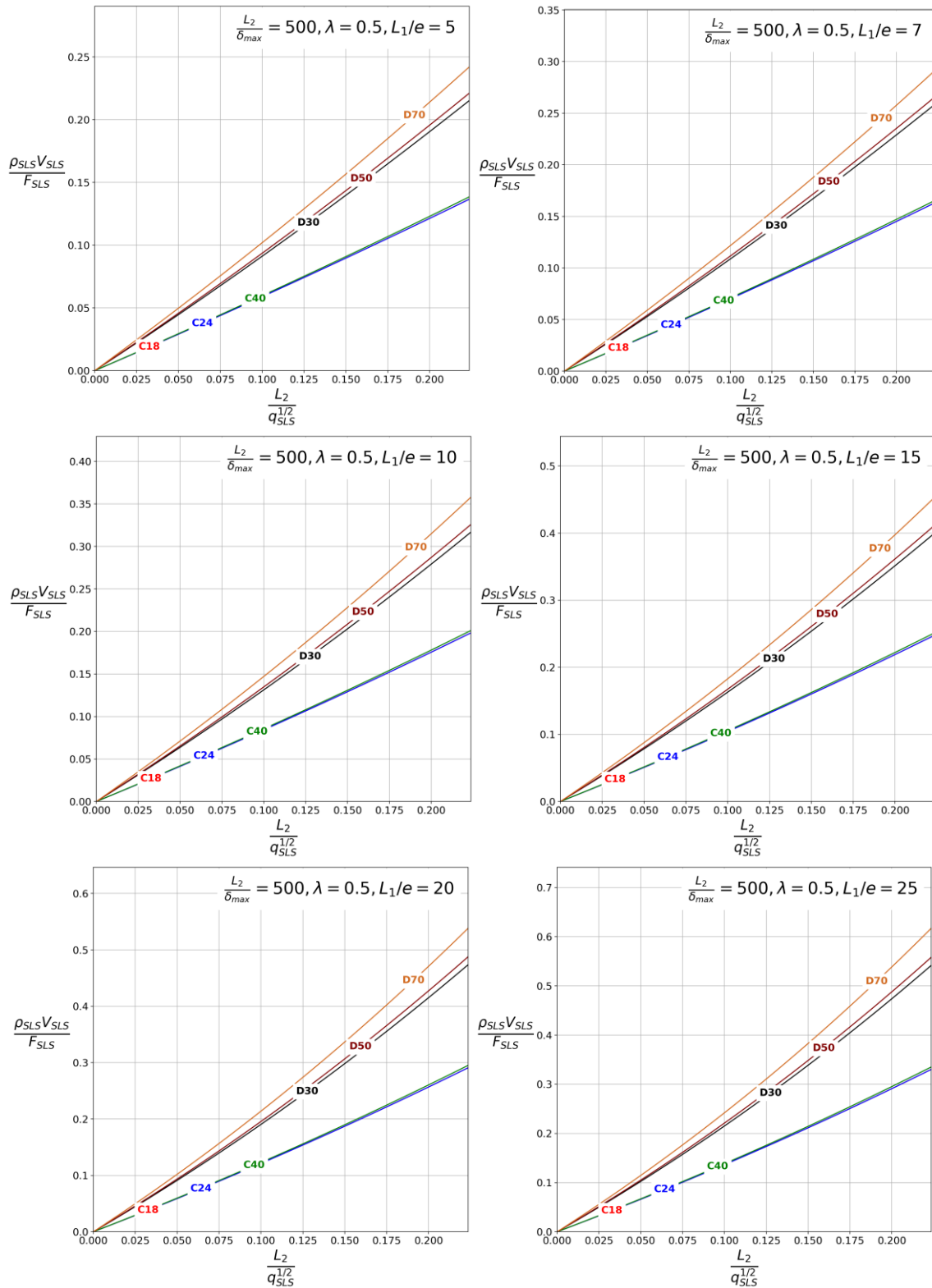


Figure 107 : Annexe D - Plancher classique - Efficacité matérielle (SLS) en fonction de $L_2/q_{SLS}^{1/2}$ avec $L_2/\delta_{max} = 500$ pour différentes situations – $\lambda = 0,5$

- $L_2/\delta_{max} = 500$ et $\lambda = 0,8$

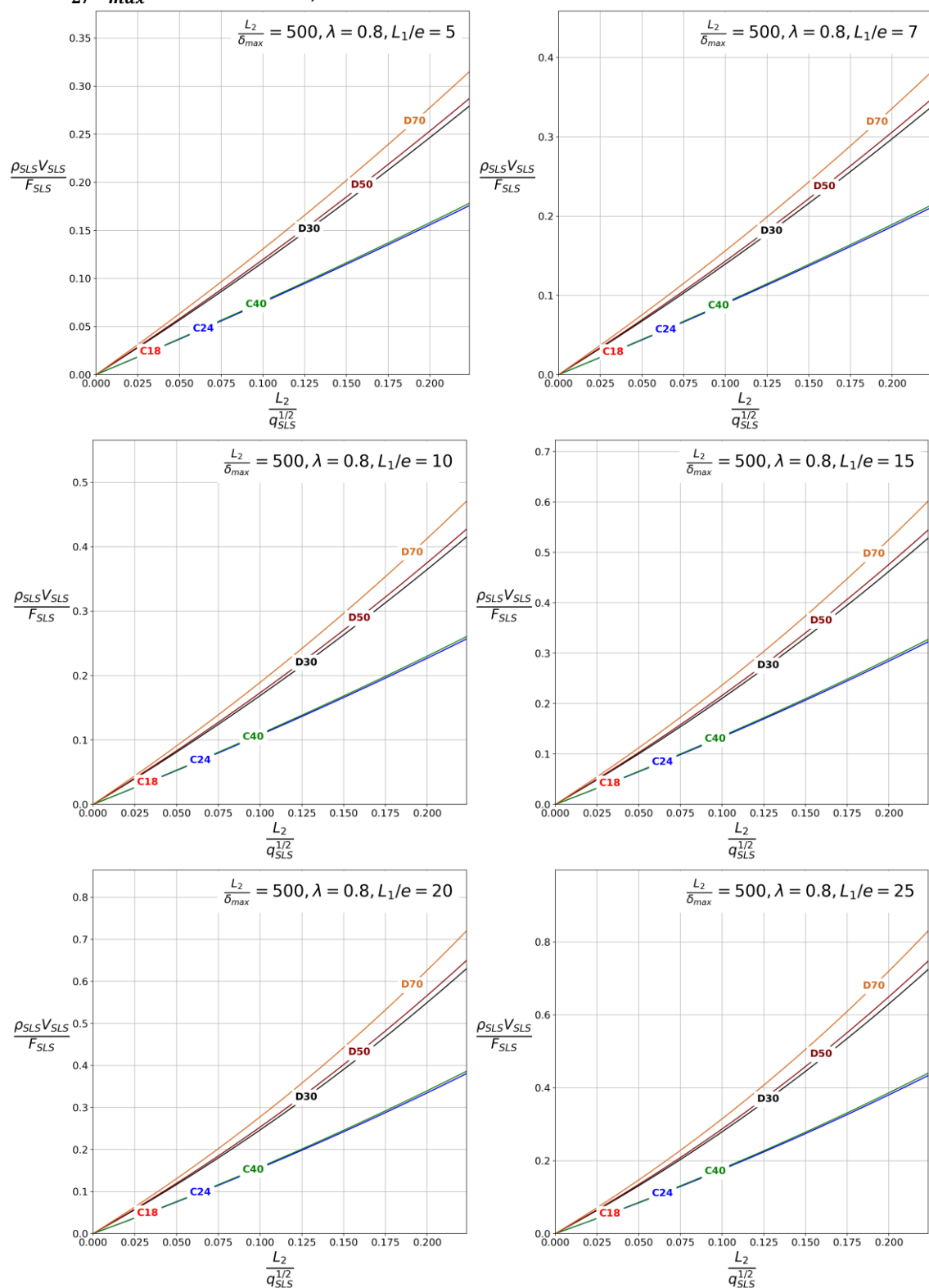


Figure 108 : Annexe D - Plancher classique - Efficacité matérielle (SLS) en fonction de $L_2/q_{SLS}^{1/2}$ avec $L_2/\delta_{max} = 500$ pour différentes situations – $\lambda = 0,8$

- $L_2/\delta_{max} = 500$ et $\lambda = 1,0$

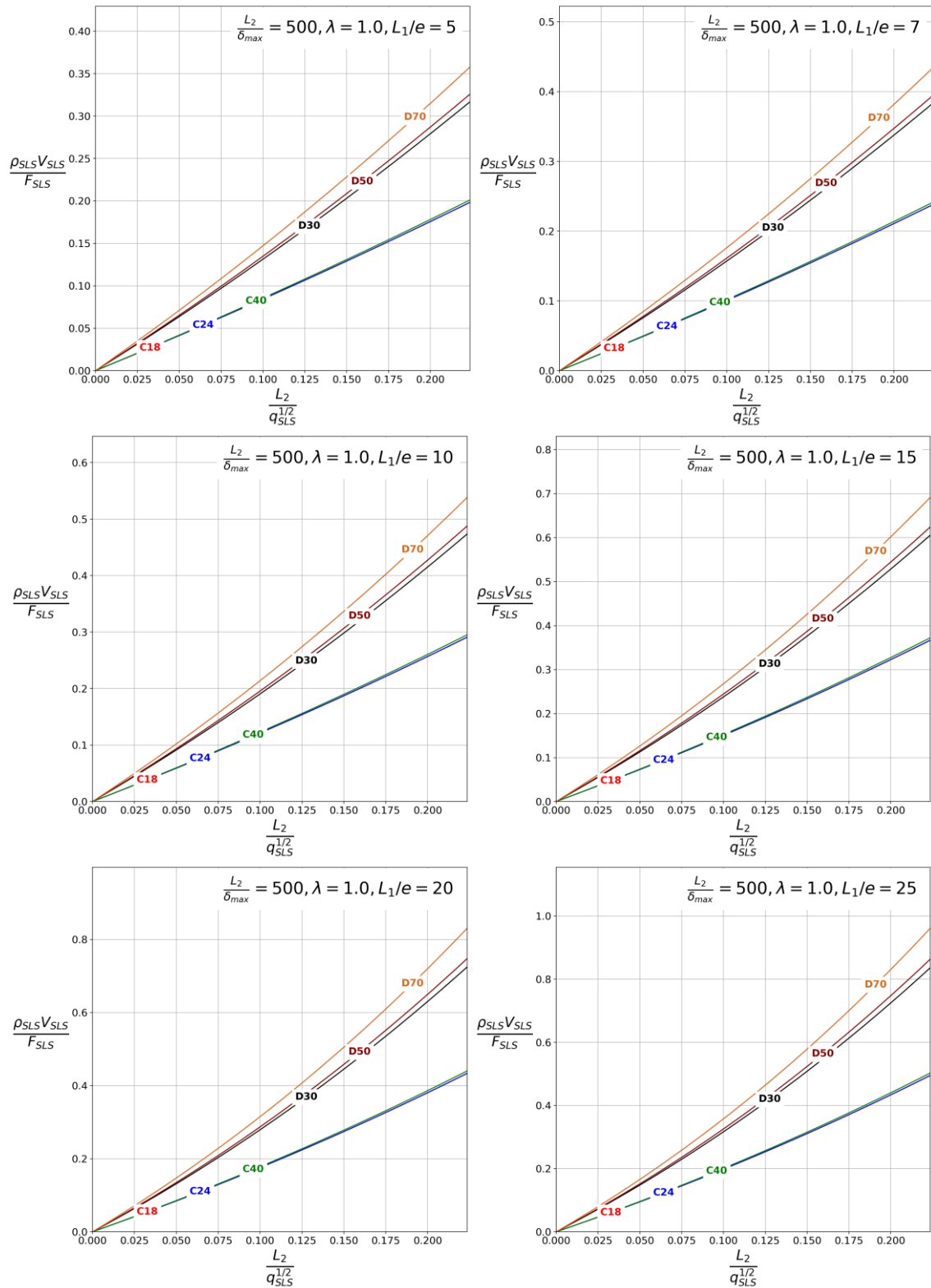


Figure 109 : Annexe D - Plancher classique - Efficacité matérielle (SLS) en fonction de $L_2/q_{SLS}^{1/2}$ avec $L_2/\delta_{max} = 500$ pour différentes situations – $\lambda = 1,0$

Annexe E Plancher classique – Image du volume (SLS)

Cette annexe se réfère à la section 4.2.1.2, liée à l'étude des planchers classiques, et présente des graphiques de l'image du volume à l'état limite ultime ($V_{SLS}/L_2^3 q_{SLS}^{1/2}$) en fonction du rapport $L_2/q_{SLS}^{1/2}$ pour différentes classes de résistance et plusieurs combinaisons de L_2/δ_{max} , λ et L_1/e .

- $L_2/\delta_{max} = 250$ et $\lambda = 0,3$

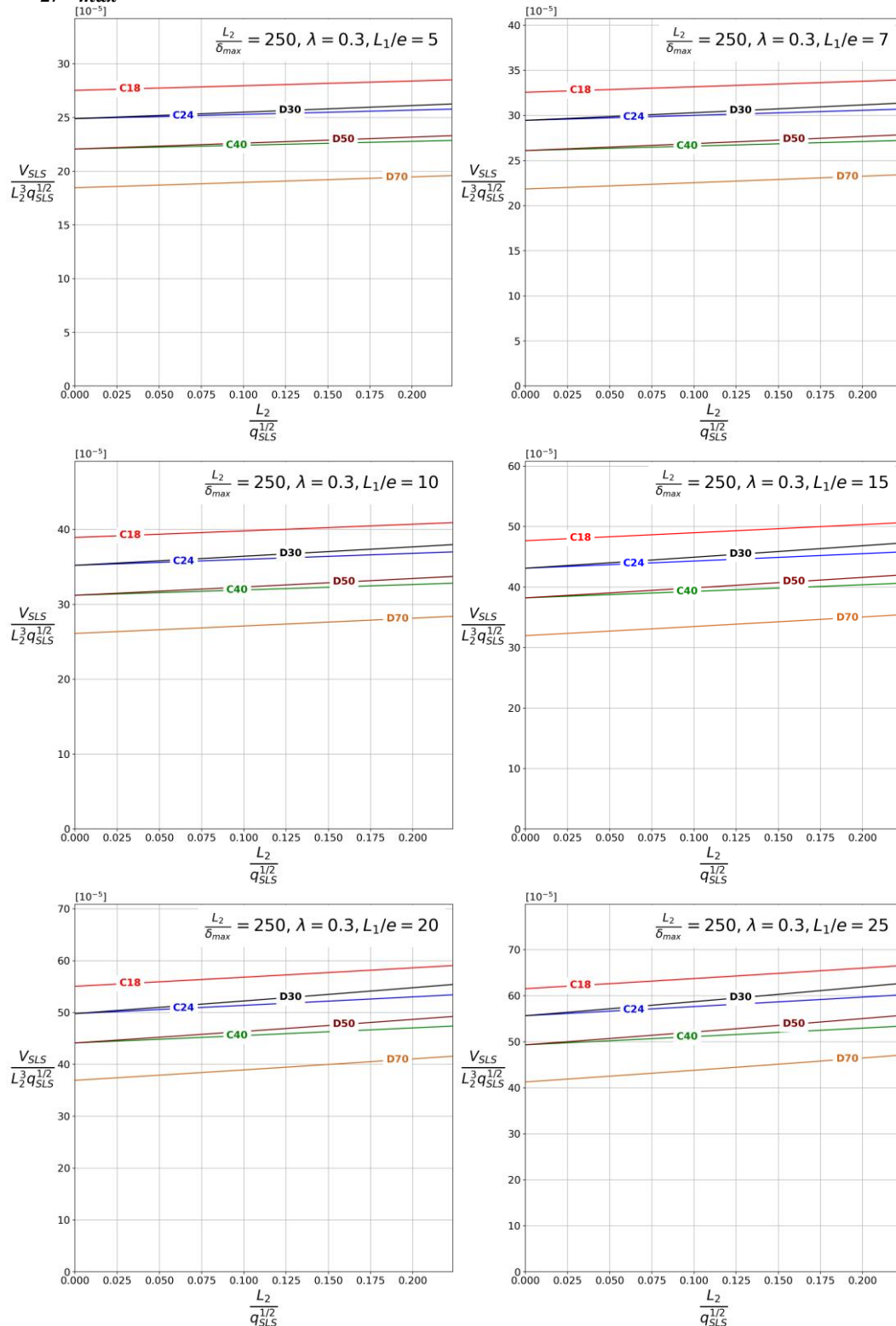


Figure 110 : Annexe E - Plancher classique - Image du volume (SLS) en fonction de $L_2/q_{SLS}^{1/2}$ avec $L_2/\delta_{max} = 250$ pour différentes situations – $\lambda = 0,3$

- $L_2/\delta_{max} = 250$ et $\lambda = 0,5$

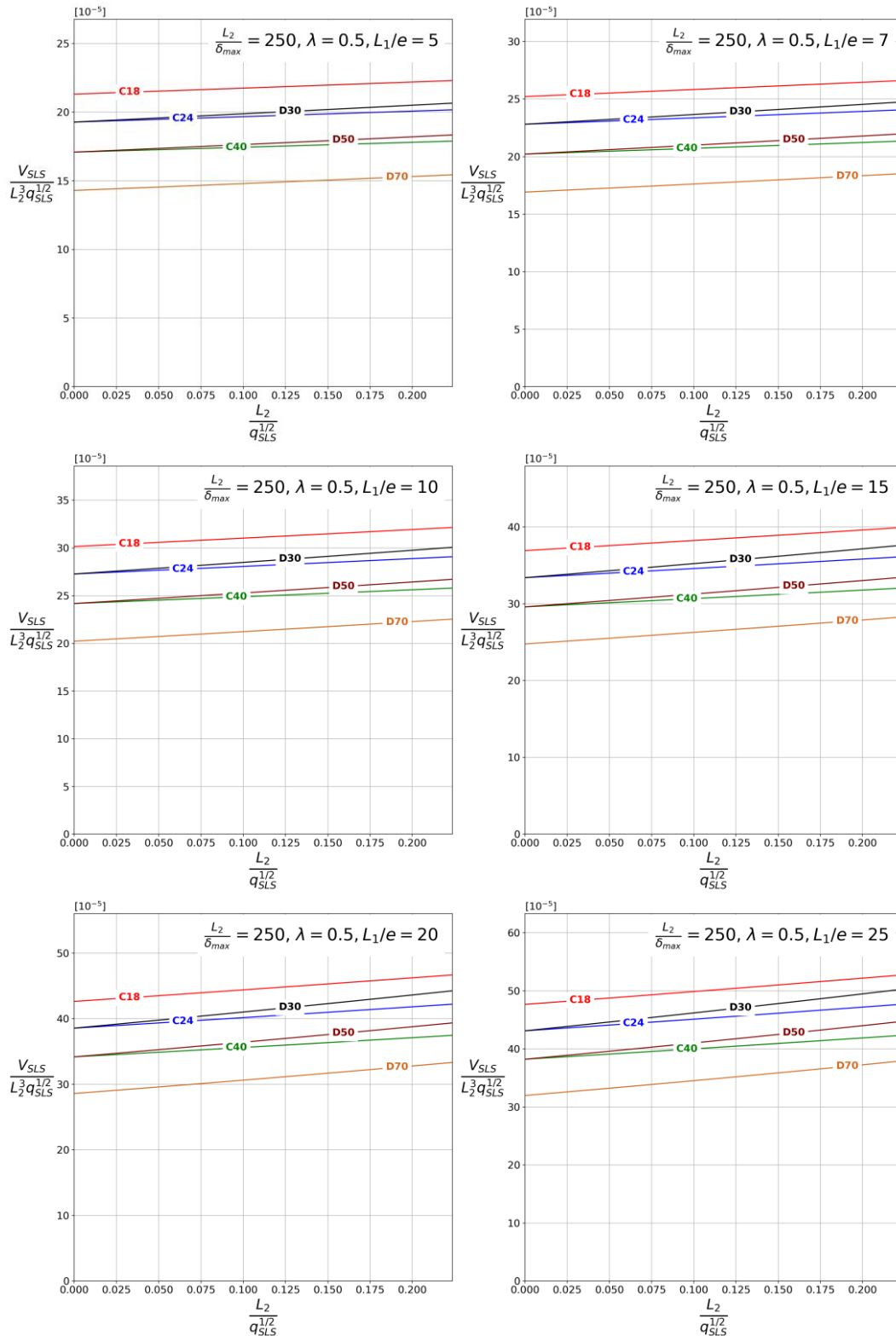


Figure 111 : Annexe E - Plancher classique - Image du volume (SLS) en fonction de $L_2/q_{SLS}^{1/2}$ avec $L_2/\delta_{max} = 250$ pour différentes situations – $\lambda = 0,5$

- $L_2/\delta_{max} = 250$ et $\lambda = 0,8$

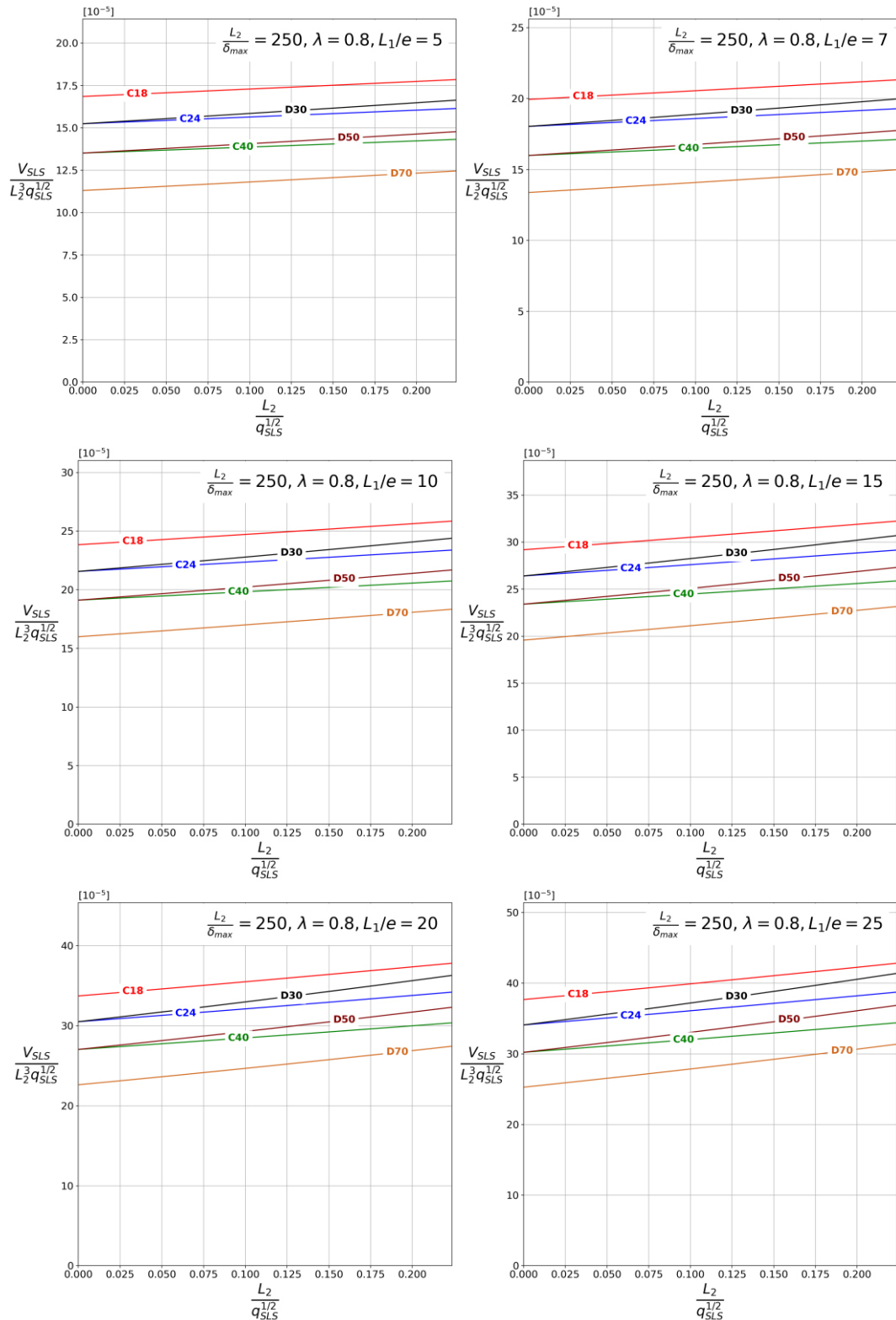


Figure 112 : Annexe E - Plancher classique - Image du volume (SLS) en fonction de $L_2/q_{SLS}^{1/2}$ avec $L_2/\delta_{max} = 250$ pour différentes situations – $\lambda = 0,8$

- $L_2/\delta_{max} = 250$ et $\lambda = 1,0$

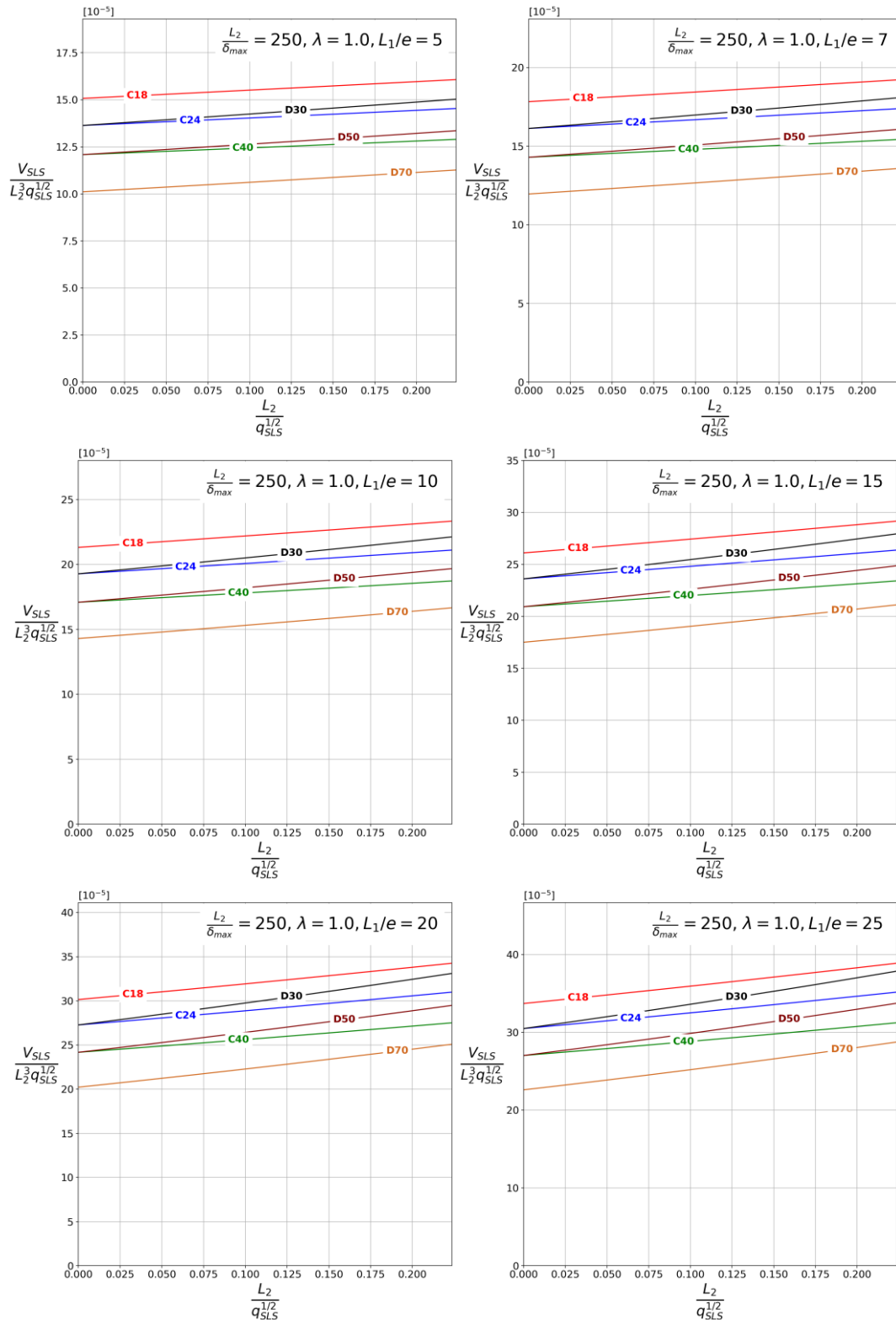


Figure 113 : Annexe E - Plancher classique - Image du volume (SLS) en fonction de $L_2/q_{SLS}^{1/2}$ avec $L_2/\delta_{max} = 250$ pour différentes situations – $\lambda = 1,0$

- $L_2/\delta_{max} = 500$ et $\lambda = 0,3$

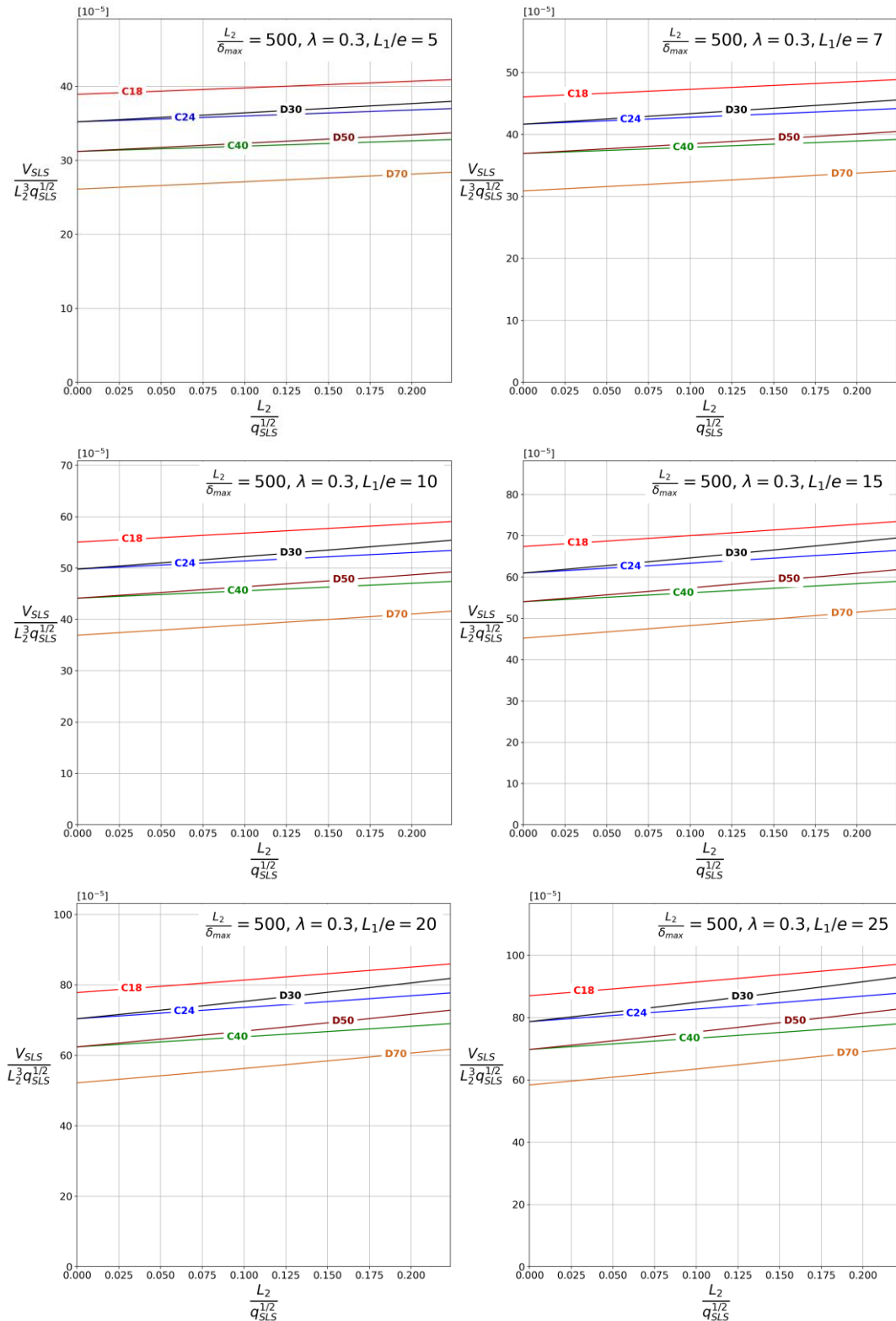


Figure 114 : Annexe E - Plancher classique - Image du volume (SLS) en fonction de $L_2/q_{SLS}^{1/2}$ avec $L_2/\delta_{max} = 500$ pour différentes situations – $\lambda = 0,3$

- $L_2/\delta_{max} = 500$ et $\lambda = 0,5$

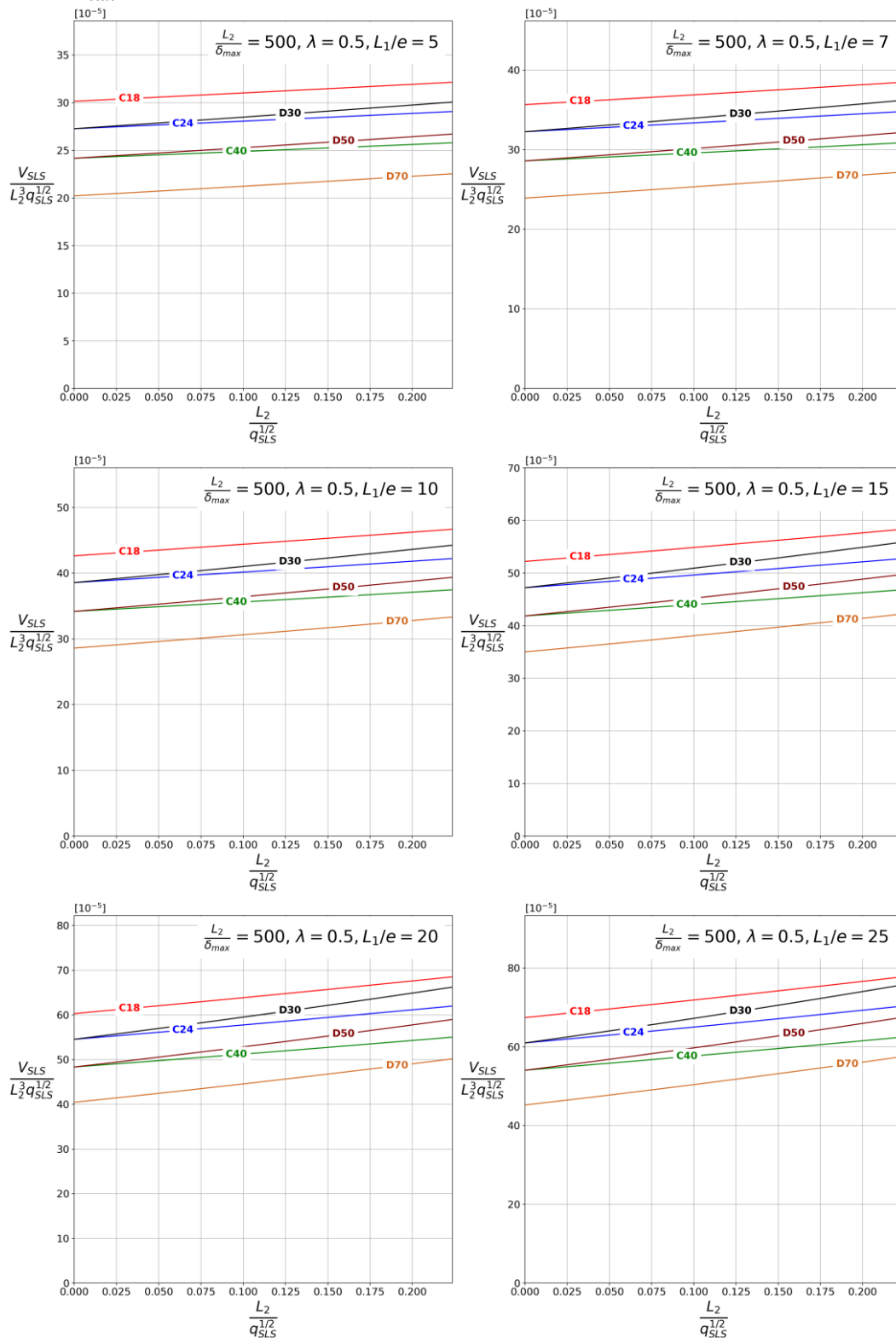


Figure 115 : Annexe E - Plancher classique - Image du volume (SLS) en fonction de $L_2/q_{SLS}^{1/2}$ avec $L_2/\delta_{max} = 500$ pour différentes situations – $\lambda = 0,5$

- $L_2/\delta_{max} = 500$ et $\lambda = 0,8$

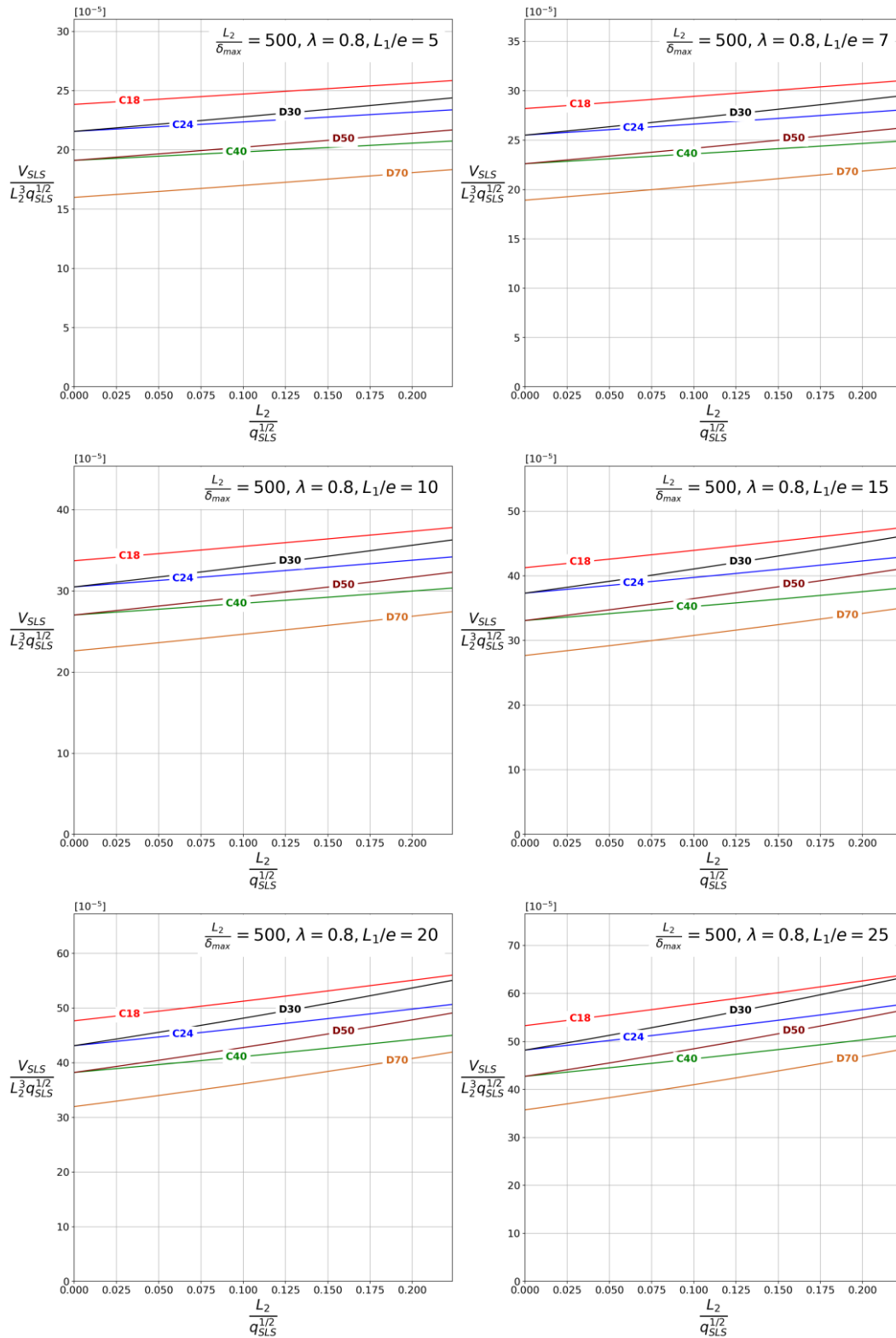


Figure 116 : Annexe E - Plancher classique - Image du volume (SLS) en fonction de $L_2/q_{SLS}^{1/2}$ avec $L_2/\delta_{max} = 500$ pour différentes situations – $\lambda = 0,8$

- $L_2/\delta_{max} = 500$ et $\lambda = 1,0$

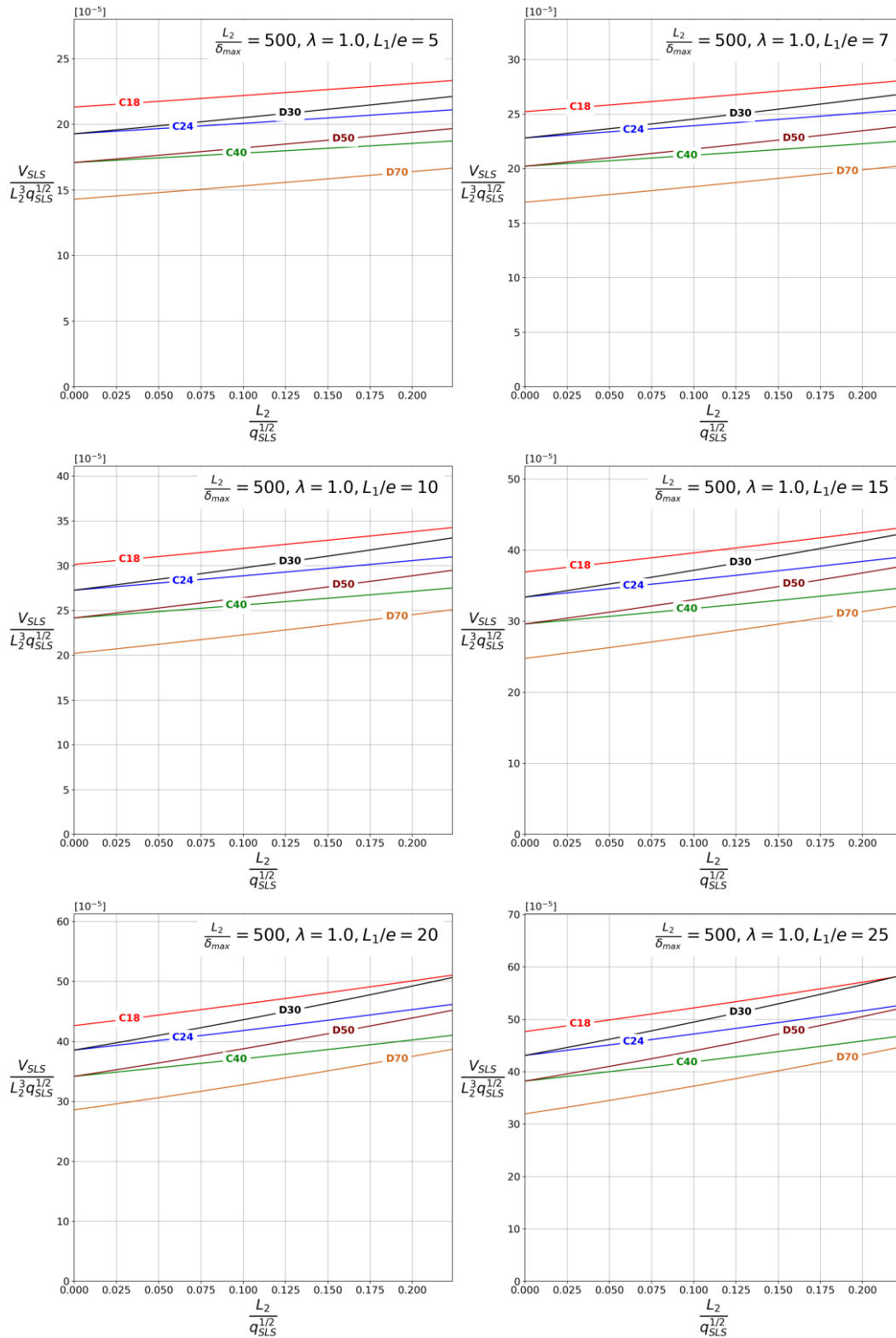


Figure 117 : Annexe E - Plancher classique - Image du volume (SLS) en fonction de $L_2/q_{SLS}^{1/2}$ avec $L_2/\delta_{max} = 500$ pour différentes situations – $\lambda = 1,0$

Table des figures

Figure 1 : Construction en grumes empilées [17] [11]	3
Figure 2 : Construction Poteau-Poutre [18] [19]	4
Figure 3 : Exemple de plancher en grumes [21]	4
Figure 4 : Carport - Vermont Artisan Coffee (à gauche) [23] – Pairi Daiza (à droite) [6].....	4
Figure 5 : Pergolas [24] [25]	5
Figure 6 : Treillis formé de grumes [26]	5
Figure 7 : Hangar de stockage à la Môle [10].....	5
Figure 8 : Pont formé à partir de grumes [7]	6
Figure 9 : Exemples de planchers réciproques [8]	7
Figure 10 : Exemple de configuration de modules réciproques [14].....	7
Figure 11 : Plancher réciproque composé de modules carrés (à gauche) – Paramètres d'un module carré (à droite)	7
Figure 12 : Structure réciproque - Schéma du plancher étudié composé de sa structure primaire (en rouge) et de sa structure secondaire (en noir)	8
Figure 13 : Planchers réciproques dans le temps - Gauche : proposition de l'architecte Villard de Honnecourt (Epoque médiévale) - Milieu : Proposition de Leonardo da Vinci (XV ^{ème} siècle) - Droite : proposition de Sebastiano Serlio (XVI ^{ème} siècle) [16].....	9
Figure 14 : Spinning house - Plan de l'étage (en haut) - Plan de toiture (en bas) [16]	10
Figure 15 : Spinning house – Photo de l'intérieur [16]	10
Figure 16 : Orchestre philharmonique [16]	10
Figure 17 : Charpente en bois réciproque - Musée Frans Masereel – Kasterlee [20]	10
Figure 18 : Observatoire Rokko [1]	11
Figure 19 : Exemple de couverture d'une terrasse avec un appui central et une structure réciproque en toiture [3]	11
Figure 20 : Configuration de plancher étudiée par Simon Gelez, Simon Audry et Bernard Vaudeville.....	11
Figure 21 : Paramètres d'une structure réciproque	13
Figure 22 : Poutre fléchie – Schéma statique d'une poutre fléchie soumise à son poids propre et à une charge uniformément répartie	15
Figure 23 : Poutre fléchie - Schéma de la situation étudiée - ULS	17
Figure 24 : Poutre fléchie – Indicateur de volume en fonction de l'indicateur de poids propre	18
Figure 25 : Poutre fléchie - Efficacité matérielle, $\rho ULSVULS/FULS$, en fonction de l'indicateur de poids propre, ΛULS	19
Figure 26 : Poutre fléchie - Efficacité matérielle, $\rho ULSVULS/FULS$, en fonction de données du problème, $Lb/qULS1/3$, pour différentes classes de résistance	21
Figure 27 : Poutre fléchie – Image du volume en fonction de paramètres du problème pour différentes classes de résistance	22
Figure 28 : Poutre fléchie - Taux de travail réel de l'élément, lorsque le poids propre est négligé lors du dimensionnement, en fonction de l'indicateur de poids propre.....	24
Figure 29 : Poutre fléchie - Résumé de l'analyse à l'état limite ultime (ULS)	25
Figure 30 : Poutre simple – Schéma de la situation étudiée - SLS	28
Figure 31 : Poutre fléchie – Indicateur de volume en fonction de l'indicateur de poids propre $Lb\delta_{max} = 250$ (à gauche) - $Lb\delta_{max} = 500$ (à droite).....	28
Figure 32 : Poutre fléchie – Efficacité matérielle ($\rho SLSVSLS/FSLS$), en fonction de l'indicateur de poids propre (ΛSLS).....	30

Figure 33 : Poutre fléchie - Efficacité matérielle ($\rho SLSVSL/FSL$) en fonction de données du problème, $Lb/qSL1/3$, pour différentes classes de résistance – A gauche : $Lb\delta_{max} = 250$; A droite : $Lb\delta_{max} = 500$	31
Figure 34 : Poutre fléchie - Volume en fonction de paramètres du problème pour différentes classes de résistance	33
Figure 35 : Poutre fléchie - Résumé de l'analyse à l'état limite de service (SLS)	34
Figure 36 : Poutre fléchie - Résumé de l'analyse adimensionnelle - ULS à gauche - SLS à droite	36
Figure 37 : Poutre fléchie - Résumé de l'analyse "projet" - ULS à gauche - SLS à dro	37
Figure 38 : Plancher classique – Schéma de la situation étudiée	39
Figure 39 : Plancher classique - Schéma statique d'une poutre du plancher	39
Figure 40 : Plancher classique - Indicateur de volume en fonction du nombre de poutres	41
Figure 41 : Plancher classique - Indicateur de volume en fonction de l'indicateur de poids propre pour différentes valeurs du nombre de poutre	41
Figure 42 : Plancher classique : Exemple de lecture des Figure 40 et Figure 41 combinées	42
Figure 43 : Plancher classique - Efficacité matérielle en fonction du nombre de poutres pour l'indicateur de poids propre maximal et minimal	43
Figure 44 : Plancher classique - Efficacité matérielle en fonction de l'indicateur de poids propre pour différents nombres de poutres composant le plancher	44
Figure 45 : Plancher classique - Efficacité matérielle en fonction de données du problème ($L2/qULS1/3$) pour $\lambda = 0,6$ et $L1/e = 10$, pour différentes classes de résistance	45
Figure 46 : Plancher classique – Image du volume en fonction de paramètres du problème pour différentes classes de résistance et pour $\lambda = 0,6$ et $L1/e = 10$	47
Figure 47 : Plancher classique - Taux de travail réel d'une poutre du plancher dimensionnée en négligeant son poids propre en fonction du nombre de poutres composant le plancher	48
Figure 48 : Plancher classique - Résumé de l'analyse à l'état limite ultime (ULS)	49
Figure 49 : Plancher classique - Indicateur de volume en fonction du nombre de poutres pour deux critères de flèche	51
Figure 50 : Plancher classique - Indicateur de volume en fonction de l'indicateur de poids propre ...	52
Figure 51 : Plancher classique - Efficacité matérielle en fonction du nombre de poutres pour l'indicateur de poids propre maximal et minimal	53
Figure 52 : Plancher classique - Efficacité matérielle en fonction de l'indicateur de poids propre pour différents nombres de poutres composant le plancher	54
Figure 53 : Plancher classique - Efficacité matérielle en fonction de données du problème ($L2/qSL1/2$), pour $\lambda = 0,6$, $L1/e = 10$, $L2/\delta_{max} = 250$ (à gauche) et $L2/\delta_{max} = 500$ (à droite) pour différentes classes de résistance	54
Figure 54 : Plancher classique – Image du volume en fonction de paramètres du problème pour $\lambda = 0,6$, $L1/e = 10$, $L2/\delta_{max} = 250$ (à gauche) et $L2/\delta_{max} = 500$ (à droite), pour différentes classes de résistance	56
Figure 55 : Plancher classique - Résumé de l'analyse à l'état limite de service (SLS)	57
Figure 56 : Plancher classique - Résumé de l'analyse adimensionnelle - ULS à gauche - SLS à droite ..	58
Figure 57 : Plancher classique - Résumé de l'analyse "projet" pour $\lambda = 0,6$ et $L1/e = 10$ - ULS à gauche - SLS à droite	59
Figure 58 : Module simple - Plancher carré avec un module réciproque	61
Figure 59 : Module simple - Schéma statique d'une poutre Type 1	61
Figure 60 : Module simple - Schéma statique d'une poutre Type 2	62
Figure 61 : Module simple - Poutre Type 1 - coupe 1 (gauche) et coupe 2 (droite)	63
Figure 62 : Module simple - Valeur de la proportion d'engagement α à partir de laquelle le moment se trouve dans le tronçon gauche en fonction de $\rho V1/F$	63

Figure 63 : Module simple - Plancher carré (4 poutres de Type 1) – Indicateur de volume en fonction de la proportion d'engagement α	66
Figure 64 : Module simple - Poutre Type 1 - coupe 1 (gauche) et coupe 2 (droite).....	67
Figure 65 : Module simple - Indicateur de volume en fonction de la proportion d'engagement pour différentes valeurs d'indicateur de poids propre	68
Figure 66 : Module simple - Structure primaire + structure secondaire	69
Figure 67 : Module simple - Indicateur de volume de la structure primaire avec la structure secondaire pour indicateur de poids propre max.....	70
Figure 68 : Module simple - Comparaison des courbes de l'indicateur de volume lorsque le poids propre est négligé avec celles obtenues lorsque $\lambda_{ULS} = 0,098$ pour plusieurs valeurs du rapport L/e	71
Figure 69 : Module simple - Taux de travail des éléments composant la structure primaire d'un plancher réciproque carré. Poutre de type 1 à gauche et poutre de type 2 à droite	73
Figure 70 : Module simple - Indicateur de volume en fonction de α pour les quatre cas étudiés pour la structure primaire seule - Comparaison de la courbe de flexion et de cisaillement	76
Figure 71 : Module simple - Indicateur de volume en fonction de α dans les quatre cas pour la structure primaire et secondaire - Comparaison des courbes de flexion et de cisaillement	77
Figure 72 : Algorithme permettant le calcul de l'indicateur de volume à l'état limite de service (SLS) de la structure primaire d'un module réciproque	79
Figure 73 : Exemple d'un code Grasshopper	81
Figure 74 : Exemple d'un code Grasshopper - Proportion d'engagement égale 0,3 – Paramètres d'entrée à gauche – Géométrie du module au centre – Diagramme des moments à droite	82
Figure 75 : Exemple d'un code Grasshopper - Proportion d'engagement égale 0,9 - Paramètres d'entrée à gauche – Géométrie du module au centre – Diagramme des moments à droite	82
Figure 76 : Algorithme permettant le calcul de l'indicateur de volume, sous le critère de flexion, à l'état limite ultime (ULS) de la structure primaire d'un module réciproque	83
Figure 77 : Algorithme permettant le calcul de l'indicateur de volume, sous le critère de flexion, à l'état limite ultime (ULS) de la structure primaire et secondaire d'un module réciproque	84
Figure 78 : Algorithme permettant le calcul de l'indicateur de volume, sous le critère de cisaillement, à l'état limite ultime (ULS) de la structure primaire d'un module réciproque	85
Figure 79 : Algorithme permettant le calcul de l'indicateur de volume, sous le critère de cisaillement, à l'état limite ultime (ULS) de la structure primaire et secondaire d'un module réciproque	86
Figure 80 : Algorithme permettant de générer et calculer des planchers réciproques composés de plusieurs modules	87
Figure 81 : Génération et calcul d'un plancher réciproque composé de plusieurs modules - Etape 1 ..	88
Figure 82 : Génération et calcul d'un plancher réciproque composé de plusieurs modules - Etape 3 ..	88
Figure 83 : Génération et calcul d'un plancher réciproque composé de plusieurs modules - Etape 4 ..	89
Figure 84 : Génération et calcul d'un plancher réciproque composé de plusieurs modules - Etape 4 – Création des modules	89
Figure 85 : Génération et calcul d'un plancher réciproque composé de plusieurs modules - Etape 5 ..	89
Figure 86 : Génération et calcul d'un plancher réciproque composé de plusieurs modules - Etape 7 ..	90
Figure 87 : Génération et calcul d'un plancher réciproque composé de plusieurs modules – Exemples de configurations	90
Figure 88 : Génération et calcul d'un plancher réciproque composé de plusieurs modules - Problèmes	91
Figure 89 : Cas d'étude - Plancher réciproque	91
Figure 90 : Front de Pareto	92

Figure 91 : Cas d'étude - Plancher réciproque - Illustration du plancher (à gauche) - Position des colonnes (à droite)	93
Figure 92 : Cas d'étude - Plancher réciproque - Déformée (à gauche) - Diagrammes des moments (à droite)	93
Figure 93 : 0 - Poutre fléchie - Résumé de l'analyse à l'état limite de service pour $Lb\delta_{max} = 500$	101
Figure 94 : Annexe B - Plancher classique - Efficacité matérielle (ULS) en fonction de $L2/qULS1/3$ pour différentes situations – $\lambda = 0,3$	103
Figure 95 : Annexe B - Plancher classique - Efficacité matérielle (ULS) en fonction de $L2/qULS1/3$ pour différentes situations – $\lambda = 0,5$	104
Figure 96 : Annexe B - Plancher classique - Efficacité matérielle (ULS) en fonction de $L2/qULS1/3$ pour différentes situations – $\lambda = 0,8$	105
Figure 97 : Annexe B - Plancher classique - Efficacité matérielle (ULS) en fonction de $L2/qULS1/3$ pour différentes situations – $\lambda = 1,0$	106
Figure 98 : Annexe C - Plancher classique – Image du volume (ULS) en fonction de $L2/qULS1/3$ pour différentes situations – $\lambda = 0,3$	107
Figure 99 : Annexe C - Plancher classique – Image du volume (ULS) en fonction de $L2/qULS1/3$ pour différentes situations – $\lambda = 0,5$	108
Figure 100 : Annexe C - Plancher classique - Image du volume (ULS) en fonction de $L2/qULS1/3$ pour différentes situations – $\lambda = 0,8$	109
Figure 101 : Annexe C - Plancher classique - Image du volume (ULS) en fonction de $L2/qULS1/3$ pour différentes situations – $\lambda = 1,0$	110
Figure 102 : Annexe D - Plancher classique - Efficacité matérielle (SLS) en fonction de $L2/qSLS1/2$ avec $L2/\delta_{max} = 250$ pour différentes situations – $\lambda = 0,3$	111
Figure 103 : Annexe D - Plancher classique - Efficacité matérielle (SLS) en fonction de $L2/qSLS1/2$ avec $L2/\delta_{max} = 250$ pour différentes situations – $\lambda = 0,5$	112
Figure 104 : Annexe D - Plancher classique - Efficacité matérielle (SLS) en fonction de $L2/qSLS1/2$ avec $L2/\delta_{max} = 250$ pour différentes situations – $\lambda = 0,8$	113
Figure 105 : Annexe D - Plancher classique - Efficacité matérielle (SLS) en fonction de $L2/qSLS1/2$ avec $L2/\delta_{max} = 250$ pour différentes situations – $\lambda = 1,0$	114
Figure 106 : Annexe D - Plancher classique - Efficacité matérielle (SLS) en fonction de $L2/qSLS1/2$ avec $L2/\delta_{max} = 500$ pour différentes situations – $\lambda = 0,3$	115
Figure 107 : Annexe D - Plancher classique - Efficacité matérielle (SLS) en fonction de $L2/qSLS1/2$ avec $L2/\delta_{max} = 500$ pour différentes situations – $\lambda = 0,5$	116
Figure 108 : Annexe D - Plancher classique - Efficacité matérielle (SLS) en fonction de $L2/qSLS1/2$ avec $L2/\delta_{max} = 500$ pour différentes situations – $\lambda = 0,8$	117
Figure 109 : Annexe D - Plancher classique - Efficacité matérielle (SLS) en fonction de $L2/qSLS1/2$ avec $L2/\delta_{max} = 500$ pour différentes situations – $\lambda = 1,0$	118
Figure 110 : Annexe E - Plancher classique - Image du volume (SLS) en fonction de $L2/qSLS1/2$ avec $L2/\delta_{max} = 250$ pour différentes situations – $\lambda = 0,3$	119
Figure 111 : Annexe E - Plancher classique - Image du volume (SLS) en fonction de $L2/qSLS1/2$ avec $L2/\delta_{max} = 250$ pour différentes situations – $\lambda = 0,5$	120
Figure 112 : Annexe E - Plancher classique - Image du volume (SLS) en fonction de $L2/qSLS1/2$ avec $L2/\delta_{max} = 250$ pour différentes situations – $\lambda = 0,8$	121
Figure 113 : Annexe E - Plancher classique - Image du volume (SLS) en fonction de $L2/qSLS1/2$ avec $L2/\delta_{max} = 250$ pour différentes situations – $\lambda = 1,0$	122
Figure 114 : Annexe E - Plancher classique - Image du volume (SLS) en fonction de $L2/qSLS1/2$ avec $L2/\delta_{max} = 500$ pour différentes situations – $\lambda = 0,3$	123

Figure 115 : Annexe E - Plancher classique - Image du volume (SLS) en fonction de $L2/qSLS1/2$ avec $L2/\delta_{max} = 500$ pour différentes situations – $\lambda = 0,5$	124
Figure 116 : Annexe E - Plancher classique - Image du volume (SLS) en fonction de $L2/qSLS1/2$ avec $L2/\delta_{max} = 500$ pour différentes situations – $\lambda = 0,8$	125
Figure 117 : Annexe E - Plancher classique - Image du volume (SLS) en fonction de $L2/qSLS1/2$ avec $L2/\delta_{max} = 500$ pour différentes situations – $\lambda = 1,0$	126

Bibliographie

- [1] ARUP, "A 'half-skin' dome of interlocking steel pipes", Arup, <https://www.arup.com/projects/rokko-shidare-observatory> (Consulté le 07/06/2021)
- [2] AUBRY S., GELEZ S., VAUDEVILLE B., "Behavior of a Simple Nexorade or Reciprocal Frame System"
- [3] BERGQVIST S., "Single stunning column creates unrestricted views", *Swedish Wood*, <https://www.swedishwood.com/publications/wood-magazine/2018-2/ensam-smacker-pelare-skapar-ohindrad-utsikt/> (Consulté le 18/05/2021)
- [4] BOUCHER L., "Optimisation des structures de tenségrité composées de modules prismatiques", UCL, Louvain-la-Neuve, 2017
- [5] BOUCKAERT I., "Optimisation d'une passerelle de tenségrité soumise à des charges aléatoire", UCL, Louvain-la-Neuve, 2019
- [6] CELINE, "PAIRI DAIZA, plus beau zoo d'EUROPE, construit le plus grand parking photovoltaïque du monde", *Girerd ENR*, <https://girerd-enr.fr/pairi-daiza-plus-beau-zoo-deurope-construit-le-plus-grand-parking-photovoltaïque-du-monde/> (Consulté le 13/05/2021)
- [7] CLEMENT, "Le Pont Auto Porté de Léonard De Vinci", *Humus Pays d'Oc*, <http://humuspaysdoc.fr/2017/09/19/le-pont-autoporte-de-leonard-de-vinci/> (Consulté le 16/05/2021)
- [8] COHEN-OR D., FU C., GOSWAMI Prashant, MITRA N., SONG P. and ZHENG Jianmin, "Reciprocal Frame Structures Made Easy", <http://www.cse.cuhk.edu.hk/~cwfu/papers/recipframe/index.htm> (Consulté le 01/05/2021)
- [9] FERON J., "Optimisation des structures de tenségrité su
- [10] GAUJARDTECHNOLOGIE SCOP, "Hangar de la Môle", *Gaujardtechnologie scop*, <https://bet-gaujard.com/wp/portfolio/hangar-de-la-mole/> (Consulté le 15/05/2021)
- [11] HOME GROUP, "Log Homes : Construction Types", *Cabin Life*, <https://www.cabinlife.com/articles/log-homes-construction-types> (Consulté le 14/05/2021)
- [12] INGENIEROS, "Générateur de prix", Ingenieros, http://www.prix-construction.info/construction_neuve/calculaprecio.asp?Valor=3|0 0 0 0|4|GOB070|emv 02 0: 0 0 0 0 0 0 8 0 2 2 0 0 (Consulté le 03/06/2021)
- [13] LATTEUR P., "Optimisation et prédimensionnement des treillis, arcs, poutres et câbles sur base d'indicateurs morphologiques", VUB, Bruxelles, 2000
- [14] LATTEUR P., GENO J., *Projet Robotree : Extrait du projet de recherche déposé à la Région wallonne*, UCL & ImapPro, Louvain-la-Neuve, 2019
- [15] NBN EN 1991-1-1, "Eurocode 1 - Actions sur les structures - Partie 1-1: Actions générales - Poids volumiques, poids propres, charges d'exploitation bâtiments", 2015
- [16] OLGA POPOVIS LARSEN, "Reciprocal Frame Architecture", Elsevier, 2008
- [17] PIONEER LOG HOMES, "Chilko Experience Wildernss Resort", *Pioneer Log Homes*, <https://www.pioneerloghomesofbc.com/real-estate/for-rent/chilko-experience-wildernss-resort-cariboo-bc/> (Consulté le 14/05/2021)
- [18] PFB CUSTOM HOMES GROUP, "Post & Beam homes", *Precision Craft Log & Timber Homes*, <https://www.precisioncraft.com/log-post-beam-homes.html> (Consulté le 14/05/2021)
- [19] PRECISION CRAFT, "Log Post and Beams Homes", *Precision Craft Log & Timber Homes*, <https://www.precisioncraft.com/log-homes-blog/log-post-and-beam-style/> (Consulté le 14/05/2021)
- [20] TIMBERFRAMING, "Charpente en bois réciproque pour le musée Frans Masereel – Kasterlee", *Timberframing*, <https://www.timberframing.be/portfolio/template-2/> (Consulté le 10/02/2021)

- [21]TTT PRODUCTS, “MultiPole”, *TTT Products*, <https://www.unilog.co.nz/product-31-ttt-multipoles> (Consulté le 15/05/2021)
- [22]VANDAMME M., “Optimisation d’un plancher composé de modules réciproques”, *UCL, Louvain-la-Neuve*, 2020
- [23]WHOLETREES, “Vermont Artisan Coffee Solar Carports”, *WholeTrees Structures*, <https://wholetrees.com/portfolio-item/vermont-artisan-coffee-solar-carports/> (Consulté le 13/05/2021)
- [24] WHOLETREES, “La Crosse Riverside Park Bandshell”, *WholeTrees Structures*, <https://wholetrees.com/portfolio-item/la-crosse-riverside-park-bandshell/> (Consulté le 13/05/2021)
- [25]WHOLETREES, “Pokagon Band of Potawatomi – Peacemaking Center”, *WholeTrees Structures*, <https://wholetrees.com/portfolio-item/pokagon-band-of-potawatomi-peacemaking-center/> (Consulté le 13/05/2021)
- [26]WHOLETREES, “Festival Foods Grocery Store”, *WholeTrees Structures*, <https://wholetrees.com/portfolio-item/festival-foods-grocery-store/> (Consulté le 13/05/2021)

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
École polytechnique de Louvain

Rue Archimède, 1 bte L6.11.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/epl