Annexe B

Approche statistique de Boussinesq

Cette annexe est consacrée au développement détaillé de l'expression des contraintes turbulentes introduites dans les équations de Navier-Stokes. En bref, les équations de Navier-Stokes d'un fluide parfait visqueux sont développées en exprimant toute variable hydraulique comme la somme d'une valeur moyenne et de sa fluctuation temporelle. Ainsi apparaissent des contraintes additionnelles aux contraintes τ_{ij}, que l'on appelle contraintes turbulentes.

B.1 Développement

Rappelons tout d'abord les équations de Navier-Stokes obtenues à l'aide du modèle de fluide parfait visqueux.

$$\left\{\begin{array}{r} \frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial p}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{11}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{12}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{13}}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial u}{\partial t}+\frac{\partial (uu)}{\partial x}+\frac{\partial (vu)}{\partial y}+\frac{\partial (wu)}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial p}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{21}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{22}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{23}}{\partial z}\right)=\left(\frac{\partial v}{\partial t}+\frac{\partial (uv)}{\partial x}+\frac{\partial (vv)}{\partial y}+\frac{\partial (wv)}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial p}{\partial z}+\frac{\partial \tau_{31}}{\partial x}+\frac{\partial \tau_{32}}{\partial y}+\frac{\partial \tau_{33}}{\partial z}\right)-g=\left(\frac{\partial w}{\partial t}+\frac{\partial (uw)}{\partial x}+\frac{\partial (vw)}{\partial y}+\frac{\partial (ww)}{\partial z}\right) \end{array}\right. \tag{B.1.1}$$

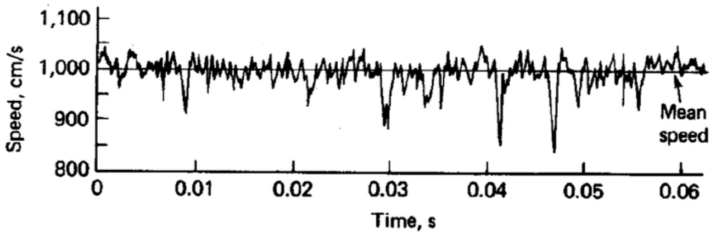

FIGURE B.1 – Mesures de vitesse d'un écoulement turbulent [20].

Afin de mieux modéliser ces turbulences, on considère l'approche de Boussinesq qui consiste à évaluer toute grandeur physique $\phi(x, y, z, t)$ comme la somme de sa moyenne temporelle $\overline{\phi}$ et ses fluctuations ϕ'. Comme on peut le remarquer sur la figure B.1, l'ordre de grandeur de l'amplitude de la moyenne est plus élevé que celle des fluctuations.

$$\phi(x, y, z, t) = \overline{\phi} + \phi' \tag{B.1.2}$$

On définit alors la *moyenne temporelle* $\overline{\phi}$ de notre grandeur physique :

$$\overline{\phi} = \frac{1}{T}\int_{t_0-T/2}^{t_0+T/2} \phi(t)dt \tag{B.1.3}$$

L'intégrale se fait sur une longueur T beaucoup plus grande que le temps caractéristique T_f des fluctuations turbulentes significatives. L'écoulement peut parfois présenter des variations beaucoup plus lentes de temps caractéristiques T_v. On imposera donc qu'on doit avoir $T << T_v$. Vu que cette moyenne varie lentement, ses dérivées seront petites.

Définissons maintenant la *fluctuation* ϕ' de notre grandeur physique :

$$\phi' = \phi - \overline{\phi} \tag{B.1.4}$$

Les dérivées spatiales et temporelles de ce terme seront évidemment plus importantes que les dérivées du terme de moyenne.

L'équation (B.1.1) d'un fluide parfait visqueux doit être vérifiée lorsqu'on développe les différents termes avec l'approche de Boussinesq. Commençons d'abord par présenter les propriétés de l'opérateur de moyenne pour deux grandeurs physiques ϕ et ψ :

$$\overline{\phi'} = 0 \tag{B.1.5}$$
$$\overline{\overline{\phi}} = \overline{\phi} \tag{B.1.6}$$
$$\overline{\overline{\phi}\,\overline{\psi}} = \overline{\phi}\,\overline{\psi} \tag{B.1.7}$$
$$\overline{\phi'\overline{\psi}} = 0 \tag{B.1.8}$$
$$\overline{\phi + \psi} = \overline{\phi} + \overline{\psi} \tag{B.1.9}$$
$$\overline{\phi\psi} = \overline{\phi}\,\overline{\psi} + \overline{\phi'\psi'} \tag{B.1.10}$$

Développons d'abord la première équation de (B.1.1) à laquelle on applique l'opérateur de moyenne temporelle :

$$\overline{\frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{13}}{\partial z}\right)} = \overline{\left(\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial (uu)}{\partial x} + \frac{\partial (vu)}{\partial y} + \frac{\partial (wu)}{\partial z}\right)} \tag{B.1.11}$$

Les opérateurs de moyenne et de dérivation spatiale commutent :

$$\overline{\frac{\partial \phi}{\partial x_i}} = \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial x_i} \tag{B.1.12}$$

On peut aussi supposer pour des écoulements dont la moyenne varie lentement dans le temps que les opérateurs de moyenne et de dérivation temporelle commutent :

$$\overline{\frac{\partial \phi}{\partial t}} \simeq \frac{\partial \overline{\phi}}{\partial t} \tag{B.1.13}$$

Développons le terme suivant à l'aide des propriétés présentées ci-dessus en faisant apparaître la moyenne et la fluctuation de notre grandeur physique u :

$$\overline{\frac{\partial (uu)}{\partial x}} = \frac{\partial \left(\overline{(\overline{u} + u')(\overline{u} + u')}\right)}{\partial x} \tag{B.1.14}$$
$$= \frac{\partial \left(\overline{u}\,\overline{u} + \overline{u'u'} + \overline{2u'\overline{u}}\right)}{\partial x} \tag{B.1.15}$$
$$= \frac{\partial \left(\overline{u}\,\overline{u} + \overline{u'u'}\right)}{\partial x} \tag{B.1.16}$$

L'équation (B.1.11) devient donc :

$$\frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau}_{11}}{\partial x} + \frac{\partial \overline{\tau}_{12}}{\partial y} + \frac{\partial \overline{\tau}_{13}}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \frac{\partial (\overline{u}\,\overline{u} + \overline{u'u'})}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{v}\,\overline{u} + \overline{v'u'})}{\partial y} + \frac{\partial (\overline{u}\,\overline{w} + \overline{w'u'})}{\partial z}\right) \tag{B.1.17}$$

En effectuant le même calcul pour les deux autres équations de (B.1.1) et en réarrangeant les termes, on obtient les équations de Navier-Stokes pour un fluide parfait visqueux turbulent :

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\tau}_{11} - \rho\overline{u'u'})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\tau}_{12} - \rho\overline{u'v'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\tau}_{13} - \rho\overline{u'w'})}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial \overline{u}}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{u}\,\overline{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{v}\,\overline{u})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{w}\,\overline{u})}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\tau}_{21} - \rho\overline{v'u'})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\tau}_{22} - \rho\overline{v'v'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\tau}_{23} - \rho\overline{v'w'})}{\partial z}\right) = \left(\frac{\partial \overline{v}}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{u}\,\overline{v})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{v}\,\overline{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{w}\,\overline{v})}{\partial z}\right) \\ \frac{1}{\rho}\left(-\frac{\partial \overline{p}}{\partial z} + \frac{\partial(\overline{\tau}_{31} - \rho\overline{w'u'})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{\tau}_{32} - \rho\overline{w'v'})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{\tau}_{33} - \rho\overline{w'w'})}{\partial z}\right) - g = \left(\frac{\partial \overline{w}}{\partial t} + \frac{\partial(\overline{u}\,\overline{w})}{\partial x} + \frac{\partial(\overline{v}\,\overline{w})}{\partial y} + \frac{\partial(\overline{w}\,\overline{w})}{\partial z}\right) \end{cases} \tag{B.1.18}$$

À l'aide de l'équation (1.1.2), on peut construire le vecteur de contraintes turbulentes :

$$\sigma_{ij}^{turbulent} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix} \tag{B.1.19}$$