

École polytechnique de Louvain

Développement d'un modèle dynamique d'une capsule Hyperloop

Auteur: **Alexandre Buset**

Promoteurs: **Bruno DEHEZ, Nicolas DOCQUIER**

Lecteurs: **Philippe CHATELAIN, Virginie KLUYSKENS**

Année académique 2019–2020

Master [120] : ingénieur civil électromécanicien

REMERCIEMENTS

Avec la fin de ce travail long d'un an d'efforts, sonne le temps des remerciements. Ce mémoire n'aurait jamais été possible sans l'aide de nombreuses personnes. J'aimerais tout particulièrement remercier mes promoteurs, le Prof. Bruno Dehez et le Dr. Nicolas Docquier pour leur implication soutenue durant tout ce projet. Je voudrais les remercier pour les nombreuses heures qu'ils ont pu me consacrer durant cette année ainsi que pour leurs encouragements, sans oublier bien sûr, toutes les remarques éclairantes et enseignements qu'ils m'ont apportés.

Un grand merci également au Dr. Virginie Kluyskens pour son aide indispensable ainsi que pour tous les conseils et remarques m'ayant permis de progresser dans ce travail. De par sa participation à l'ensemble des réunions avec le Prof. Bruno Dehez et le Dr. Nicolas Docquier, le Dr. Virginie Kluyskens m'a apporté une contribution à l'élaboration de ce mémoire très estimable.

Je souhaiterais aussi adresser mes remerciements à l'équipe d'étudiants du MIT qui m'a permis d'obtenir nombre d'informations essentielles pour mon étude.

Je tiens par ailleurs à remercier Monsieur Sébastien Gendron PDG de la société TransPod pour notre échange de mails fort intéressant.

Enfin, je voudrais exprimer ma gratitude à ma chère famille et mes précieux amis qui m'ont soutenu durant ces cinq années d'études et surtout tout au long de la rédaction de ce mémoire.

The Hyperloop project aspires to become the mean of transport of the future. By minimizing the friction losses, the Hyperloop system wants to offer a eco-friendly and economical alternative to the traditional long-distance travels today mainly provided by air transport. A Hyperloop system is composed of a capsule moving in a low pressure tube. This capsule has the particularity to levitate above the track, removing almost all the friction losses related to the use of a conventional wheel system. Several technologies ensure the levitation function. Nevertheless, one of the most promising is the electrodynamic suspension (EDS) system. Its working principle is based on the interactions between a variable magnetic field and the induced currents in an electrical conductor. This interaction will generate a lift force lifting the capsule above the guideway. A lot of studies took an interest in the electrodynamic forces provide by an EDS system. Other researches focused on the analysis of the dynamical behavior of magnetic levitation (MagLev) vehicles by modeling the electrodynamic forces as equivalent springs. However, it would appear that none study presents a dynamical analysis of an EDS system by taking into account both the electrodynamic phenomena and the vehicle related multibody dynamics. This Master's thesis is a first initiative to join these two physics counterparts and to study the dynamics of a Hyperloop capsule.

First, two electrodynamic models were designed in order to compute the electrodynamic forces generated by the levitation system. The first model, based on the finite elements method (FEM model), allows to freeing from a large number of hypothesis as well as to take into account three kinematic parameters: the purely longitudinal speed of the capsule v_x , the size of the air gap between the track and the skis of the capsule e and the pitch angle of the ski with respect to the track θ . In order to overcome the problems related to the computational time needed for a finite element model, two substitution models were designed: the first, based on the interpolation of the data obtained thanks to the FEM model for different configurations of the ski, the second, developed on a Lumped model using an equivalent electrical circuit to represent the magnetic levitation system. It will be then demonstrate that only the substitution model by interpolation provide satisfactory results for the studied system. A second electrodynamic model was created, which is based on the Fourier series expansion of the electrodynamic quantities (FB model). This model has for main advantage to result in an analytical expression of the electrodynamic forces. The results obtained thanks to these two models are then compared to define their limitations. Finally, several ways to improve these two electrodynamic models are highlighted to overcome the existing limitations.

Second, the multibody model of an existing Hyperloop capsule is developed. Our study aims to achieve the coupling between the multibody model and the previously studied electrodynamic models. The results will allow comparing the dynamical behavior of the Hyperloop capsule as a function of the model considers. This shows a significant difference between the FEM and FB models and the importance of considering the pitch angle of the skis.

Le projet Hyperloop ambitionne de devenir le moyen de transport du futur. En réduisant au maximum les pertes par frottement, le système Hyperloop veut offrir une alternative éco-responsable et économique aux voyages longues distances traditionnels aujourd'hui principalement assurés par le transport aérien. Un système Hyperloop est composé d'une capsule se déplaçant au sein d'un tube sous basse pression. Cette capsule a pour particularité de léviter au-dessus de la voie, en supprimant quasi totalement les pertes par frottement liées à l'utilisation d'un système de roues classiques. Plusieurs technologies assurent la fonction de lévitation. Toutefois, l'une des plus prometteuses est le système de lévitation électrodynamique (EDS). Son principe de fonctionnement est basé sur l'interaction entre un champ magnétique variable et les courants électriques induits dans un conducteur électrique, ce qui crée une force de portance permettant de soulever la capsule au-dessus de la voie. Beaucoup d'études se sont intéressées aux forces électrodynamiques générées par un tel système EDS. D'autres recherches se sont concentrées sur l'analyse de la dynamique des véhicules à lévitation magnétique en modélisant les forces électrodynamiques comme des ressorts équivalents. Néanmoins, semble-t-il, aucune étude ne présente une analyse dynamique d'un système EDS en modélisant à la fois les phénomènes électrodynamiques et la dynamique multicorps liée au véhicule. Ce mémoire se veut une première initiative de joindre ces deux pendents de la physique et d'étudier la dynamique d'une capsule Hyperloop.

Tout d'abord, deux modèles électrodynamiques ont été conçus afin de calculer les forces électrodynamiques générées par le système de lévitation. Le premier modèle, basé sur la méthode des éléments finis (modèle FEM), permet de s'affranchir d'un grand nombre d'hypothèses simplificatrices ainsi que de tenir compte de trois paramètres cinématiques : la vitesse de déplacement purement longitudinale de la capsule v_x , la hauteur d'entrefer entre la voie et le ski de la capsule Hyperloop e et l'angle de tangage du ski par rapport à la voie θ . Afin de palier les problèmes liés au temps de calcul nécessaire pour un modèle éléments finis, deux modèles de substitution ont été conçus : le premier, basé sur l'interpolation des résultats du modèle FEM pour différentes configurations du ski, le second, élaboré sur un modèle Lumped utilisant un circuit électrique équivalent pour représenter le système de lévitation magnétique. Il est alors démontré que seul le modèle de substitution par interpolation offre des résultats satisfaisants dans le cas du système étudié. Un deuxième modèle électrodynamique a ensuite été créé, qui se base sur le développement en série de Fourier des quantités électrodynamiques (modèle FB). Ce modèle a pour principal avantage d'aboutir à une expression analytique des forces électrodynamiques. Les résultats obtenus grâce à ces deux modèles sont alors comparés en vue de définir leurs limitations. Enfin, plusieurs pistes d'amélioration sont proposées afin de dépasser les limitations actuelles des modèles électrodynamiques.

Dans un deuxième temps, le modèle multicorps d'une capsule Hyperloop existante a été développé. Notre étude vise à réaliser le couplage entre ce modèle multicorps et les modèles électrodynamiques précédemment étudiés. Le résultat permettra de comparer le comportement dynamique de la capsule Hyperloop en fonction du modèle considéré, montrant ainsi une différence sensible entre les modèles FEM et FB ainsi que l'importance de considérer l'angle de tangage des skis.

Introduction	1
1 État de l'art	10
1.1 Forces électrodynamiques	11
1.2 Dynamique multicorps du véhicule	12
2 Méthodologie de travail	15
2.1 Capsule Hyperloop du MIT	17
2.1.1 Design mécanique	17
2.1.2 Design magnétique	19
3 Modèles électrodynamiques	21
3.1 Modèle éléments finis	22
3.1.1 Configurations du modèle	23
3.1.2 Vérification du modèle	24
3.2 Modèles de substitution	29
3.2.1 Interpolation	29
3.2.2 Modèle Lumped	35
3.3 Modélisation en série de Fourier	41
3.3.1 Résolution dans les différents sous-domaines	43
3.3.2 Résolution des conditions frontières	48
3.3.3 Vérification des résultats analytiques	49
3.3.4 Forces électrodynamiques	49
3.3.5 Vérification des résultats pour les forces électrodynamiques	52
3.4 Comparaison des modèles électrodynamiques	53
3.4.1 Impact de la perméabilité finie du fer	53
3.4.2 Impact de la perméabilité des aimants permanents	54
3.4.3 Impact des effets de bord	54
3.4.4 Comparaison avec le modèle FEM complet	55
3.5 Pistes d'amélioration	56
3.5.1 Amélioration du modèle FEM	56
3.5.2 Amélioration du modèle FB	56
4 Modèle multicorps	57
4.1 Formalisme Multicorps	57
4.2 Équilibre	58
4.2.1 Équilibre quasi-statique	59

4.3	Analyse modale	59
4.4	Modélisation multicorps de la capsule Hyperloop du MIT	61
4.5	Déplacement de la capsule Hyperloop	62
4.6	Couplage avec le modèle électrodynamique	62
5	Dynamique de la capsule	64
5.1	Centre de masse de la caisse	64
5.2	Force de poussée de la capsule	66
5.3	Analyse modale de la capsule	68
5.4	Réaction de la capsule à des perturbations sur la voie	70
	Conclusions	74
	Bibliographie	76
	Annexes	I
A	Théorème de Earnshaw	II
B	Modèle Lumped : Développement des expressions	IV
B.1	Calcul du courant induit dans la voie en aluminium	IV
B.2	Calcul des forces moyennes	V
B.2.1	Force de portance moyenne	V
B.2.2	Force de traînée moyenne	V
C	Vecteur potentiel	VII
D	Développement en série de Fourier d'un signal carré	IX
D.1	Série de Fourier réelle	IX
D.2	Série de Fourier complexe	X
E	Champ électrique et potentiel vecteur	XI
F	Calcul des expressions de forces électrodynamiques pour la modélisation en série de Fourier	XII
G	Fonction de transition de la vitesse	XVI
G.1	Transition linéaire	XVI
G.2	Transition en cosinus	XVII

LISTE DES SYMBOLES

σ	Tenseur des contraintes de Maxwell	$[N/m^2]$
A	Vecteur potentiel magnétique	$[Tm]$
B	Densité de flux magnétique ou induction électromagnétique	$[T]$
D	Induction électrique	$[C/m^2]$
E	Champ électrique	$[N/C]$
H	Excitation magnétique	$[A/m]$
I	Courant électrique	$[A]$
J	Densité de courant électrique	$[A/m^2]$
$\ddot{q}$	Accélérations généralisées d'un système multicorps	$[m/s^2]$ ou $[rad/s^2]$
$\dot{q}$	Vitesses généralisées d'un système multicorps	$[m/s]$ ou $[rad/s]$
ϵ_0	Perméabilité magnétique du vide	$8,854 \cdot 10^{-12} [F/m]$
λ	Longueur d'onde	$[m]$
λ_L	Multiplicateurs de Lagrange associés aux contraintes d'un système multicorps	$[N]$
λ_{vp}	Valeur propre liée à un mode propre d'un système multicorps	$[-]$
μ_0	Perméabilité magnétique du vide	$4\pi \cdot 10^{-7} [H/m]$
ϕ	Flux magnétique	$[Tm^2]$
ρ_V	Densité volumique de charge	$[C/m^3]$
θ	Angle de tangage	$[rad]$
ε_{mag}	Force électromotrice induite par la variation d'un champ magnétique dans un conducteur	$[V]$
B_r	Amplitude du champ rémanent des aimants permanents	$[-]$
c	Vecteur dynamique non-linéaire d'un système multicorps	$[N]$
e	Hauteur de l'entrefer	$[m]$
F_r	Matrice des forces généralisées réduite d'un système multicorps	$[N]$
F_D	Force de traînée	$[N]$
F_L	Force de portance	$[N]$

J	Matrice jacobienne des contraintes d'un système multicorps	$[-]$
L	Inductance propre équivalente du modèle Lumped	$[H]$
M	Matrice de masse généralisée d'un système multicorps	$[kg]$
M_r	Matrice de masse réduite d'un système multicorps	$[kg]$
p	Nombre de paires de pôles par période	$[-]$
Q	Forces généralisées d'un système multicorps	$[N]$
q	Coordonnées généralisées d'un système multicorps	$[m]$ ou $[rad]$
R	Résistance équivalente du modèle Lumped	$[\Omega]$
T_θ	Couple de tangage	$[Nm]$

INTRODUCTION

*"Mon coursier à vapeur, modèle de rapidité
Laisse derrière lui le temps qui court
Et s'il prend sur l'heure sa course vers l'Ouest
Il émerge à nouveau hier à l'Est"*

Reinhart Kosseleck [1]

Aller plus vite, aller plus loin : voici un objectif qui, depuis toujours, anime l'être humain et l'a mené vers de grandes découvertes. Jadis, le transport était assuré par la domestication d'animaux. Des inventions telle que la roue ont permis d'améliorer l'efficacité du transport. Grâce à l'apparition des premiers véhicules qui étaient maritimes, l'Homme a été capable de transporter de grandes quantités de produits et de marchandises sur de longues distances, favorisant ainsi les échanges commerciaux. La révolution industrielle voit l'émergence de véhicules fonctionnant grâce à l'énergie de la vapeur comme le train avec la première locomotive vapeur en 1804 ou encore la voiture en 1769.

De nos jours, l'avion est le moyen de transport le plus rapide. Des avions commerciaux de ligne tel que le *Boeing 747-8i* ont une vitesse de croisière de l'ordre de 0.86Ma soit 913.5km/h à une altitude de 11000m [2]. Cependant, ce moyen de transport a pour gros inconvénient l'importante pollution sonore qu'il produit ainsi que l'espace nécessaire pour faire atterrir et décoller un avion. Cela a pour conséquence la construction d'aéroports dans des zones forts éloignées des habitations et donc des centres-villes. De plus, la grande quantité de carburant consommée par un avion engendre beaucoup de pollution dangereuse pour l'environnement et le voisinage proche.

C'est dans ce contexte que le projet Hyperloop prend ses racines. Il a la lourde ambition d'être considéré par certains comme étant l'avenir du système de transport. Tout droit sorti d'une nouvelle écrite par Jules Verne¹ en 1889 [3], le concept d'un système Hyperloop a été remis au goût du jour par Elon Musk, PDG de Tesla et SpaceX, dans un article publié en accès libre en 2013 [4]. Dans cette contribution, Elon Musk décrit l'Hyperloop comme une capsule voyageant dans un tube maintenu à basse pression (100Pa) à une vitesse de croisière de l'ordre de 1220km/h. De façon à réduire au maximum les pertes au sein du système, la capsule est maintenue en lévitation au-dessus de la voie. Dès lors, le concept Hyperloop requiert une très faible quantité d'énergie pour propulser la capsule. Le système peut alors être alimenté par des énergies renouvelables produites par des panneaux solaires recouvrant le tube ou encore via des éoliennes, offrant une alternative propre au transport aérien. De plus, tout comme les gares ferroviaires, les stations Hyperloop sont conçues pour être localisées au sein-même des villes leur assurant un accès aisé. Un dernier avantage qui peut être pointé est la vitesse de l'Hyperloop. Voyageant à une vitesse de croisière de 1220km/h, le système Hyperloop réduirait significativement le temps de trajet entre deux villes. Il serait alors tout à fait possible de résider dans une région fort éloignée de celle où nous travaillons.

¹Bien que certains attribuent cette nouvelle à son fils Michel.

Malheureusement, malgré ces atouts évidents, le système Hyperloop laisse une série de questions sans réponse et plusieurs problèmes non résolus. Ainsi, par exemple, ce système est bien plus approprié à un environnement tel qu'un désert car il a besoin d'un terrain plat pour son bon fonctionnement. La question de la sécurité et celle du confort du système restent ouvertes. Et enfin, pour l'instant, aucun voyage incluant un être humain à bord n'a été effectué.

Différents systèmes de lévitation

L'une des caractéristiques principales du système Hyperloop est sa capacité à léviter au-dessus de la voie. Cette particularité permet de réduire considérablement les pertes dues à la friction. En effet, les pertes liées à la friction des roues dans un véhicule augmentent avec la vitesse. Or, une capsule Hyperloop est conçue afin d'atteindre une vitesse de croisière proche de la vitesse son (à peu près 1200km/h). A cette vitesse, les pertes par friction au niveau des roues nécessiteraient d'accroître considérablement la puissance à fournir au système.

De nos jours, la lévitation de véhicules telle qu'une capsule Hyperloop ou encore un train peut être réalisée grâce à quatre systèmes différents, chacun ayant ses avantages et ses inconvénients.

Lévitation pneumatique

Fondamentalement, la lévitation pneumatique est assurée grâce à un fin film d'air porté à une pression supérieure à la pression ambiante. De fait, la différence entre la pression en-dessous du ski² et la pression ambiante mène à une résultante de forces poussant le ski vers le haut. Cela a donc pour effet de pousser l'ensemble de la capsule vers le haut.

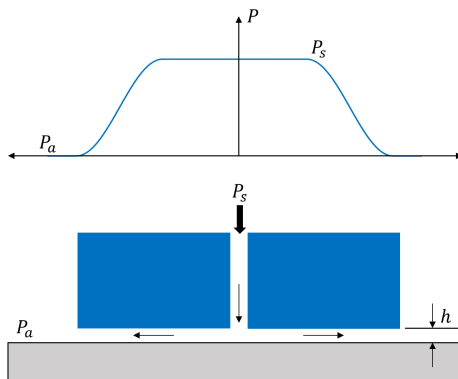


Figure 1 : Profil de pression approximé dans un système à lévitation pneumatique [5]

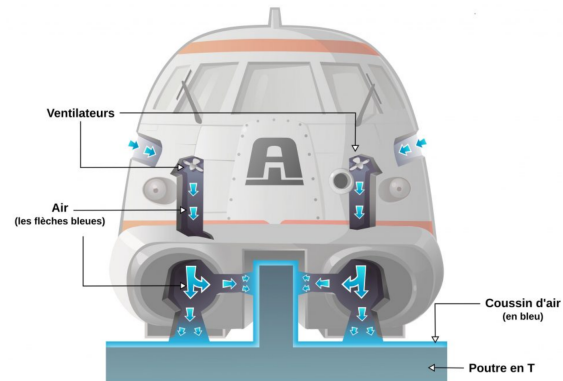


Figure 2 : Représentation simplifiée du système Aérotrain [6]

L'augmentation de la pression du fin film d'air en-dessous des skis de l'Hyperloop peut être réalisée de deux façons différentes :

1. de façon **hydrostatique** : l'augmentation de pression est accomplie en injectant de l'air lui-même comprimé.
2. de façon **aérodynamique** : le mouvement relatif entre deux surfaces (dans notre cas, le ski et le sol) va générer une augmentation de la pression de la couche d'air entre les 2 surfaces.

La pression interne générée par les effets aérodynamiques dépend de la viscosité du fluide. Donc, utiliser un système de lévitation pneumatique purement aérodynamique (qui fonctionne avec de l'air) mène à des forces

²Le ski est la partie de la capsule Hyperloop assurant la fonction de lévitation.

de lévitation beaucoup trop faibles pour soulever le poids d'un train ou d'une capsule Hyperloop.

A la fin des années 1960, un ingénieur français, Jean Bertin, a conçu l'Aérotrain. Ce train est propulsé par des hélices d'aéronef et lévite sur un coussin d'air au-dessus d'une voie en forme de T renversée (voir Figure 2). En France, plusieurs voies de test ont été construites afin de vérifier la faisabilité d'un tel projet. L'Aérotrain a alors démontré son efficacité en battant, le 5 mars 1974, le record de vitesse mondial pour un véhicule sur rail. En effet, l'Aérotrain I80-HV a atteint ce jour-là une vitesse de pointe de 430.2km/h [7]. Le projet fut néanmoins arrêté en 1977 principalement pour des raisons politiques (en faveur du TGV). Cependant, en 2017, une startup française a relancé le concept de l'Aérotrain le rebaptisant alors "Spacetrain" [8].

Lévitation électromagnétique

Les systèmes à lévitation électromagnétique (EMS³) accomplissent la fonction de lévitation grâce aux forces d'attraction agissant entre un aimant (généralement un électroaimant) et un matériau ferromagnétique. Un tel système a déjà prouvé son efficacité dans le train MagLev (i.e. à lévitation magnétique). Par exemple, le MagLev allemand Transrapid utilise des électroaimants intégrés dans le train et un rail ferromagnétique en forme de T afin de générer la force de portance et de guidage du train (Figure 3).

L'utilisation d'électroaimants présente l'avantage d'être capable de moduler les forces d'attraction en jeu. De cette manière, le véhicule a la capacité de modifier la raideur ainsi que l'amortissement du système de suspension électromagnétique.

Cependant, le théorème d'Earnshaw postule que des interactions électrostatiques ne peuvent pas, à elles seules, entièrement stabiliser un système (voir Annexe A). Dès lors, un système électromagnétique nécessite un contrôleur pour stabiliser la hauteur de l'entrefer (i.e. distance entre le rail et les aimants). Ce contrôleur a lui-même besoin d'un ensemble de capteurs capables de transmettre des données, augmentant ainsi la complexité du dispositif. Par ailleurs, un système électromagnétique est dit actif, signifiant qu'il a besoin d'une source d'énergie externe pour générer le champ magnétique.

Lévitation électrodynamique

Le principe de fonctionnement des systèmes à lévitation électrodynamique (EDS³) est basé sur l'induction de courant de Foucault par un champ magnétique variable vu par un conducteur électrique (Figure 4). En effet, selon la loi de Faraday, la variation d'un flux magnétique dans un conducteur va générer une force électromotrice (ε_{mag}) :

$$\varepsilon_{mag} = -\frac{d\phi}{dt}$$

Cette force électromotrice va, dans un conducteur électrique, générer des courants appelés courants de Foucault ($I = \frac{\varepsilon_{mag}}{R}$). Ces courants vont, suivant la loi de Lenz, produire un champ magnétique s'opposant à la variation du premier champ magnétique. Ce phénomène va résulter en une force de répulsion entre les deux parties du

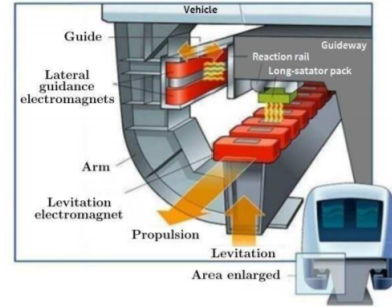


Figure 3 : Exemple de lévitation électromagnétique dans le train MagLev Transrapid [9]

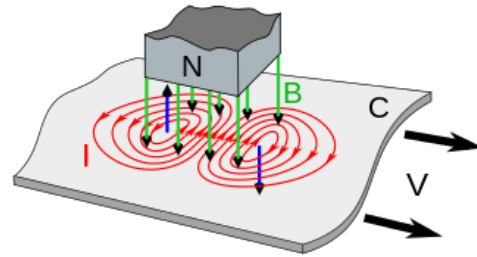


Figure 4 : Représentation schématisée des courants de Foucault induits par le mouvement d'une plaque conductrice dans un champ magnétique [10]

³Par convention, pour l'ensemble de ce mémoire, nous utiliserons l'acronyme 'EMS' pour évoquer la "ElectroMagnetic Suspension", c'est-à-dire la lévitation électromagnétique et l'acronyme EDS concernant la "ElectroDynamic Suspension", c'est-à-dire la lévitation électrodynamique.

système (i.e. l'aimant générant le champ magnétique et la plaque conductrice). Dans le cas de l'Hyperloop ou des trains MagLev, la variation du champ magnétique est due à la différence de vitesse relative entre la capsule ou le bogie contenant les aimants et la voie constituée d'une plaque conductrice ou contenant des enroulements de fils conducteurs.

Il existe pour l'instant deux types de systèmes EDS différents permettant la lévitation d'un véhicule. Premièrement, le JR-Maglev (MLX⁴) utilise le principe des systèmes **"null-flux"**. Des aimants supraconducteurs⁵ à bord du train interagissent avec des enroulements dans la voie. Ces enroulements prennent la forme d'un 8 comme représenté à la Figure 5. De cette manière, les courants électriques induits s'annulent quand le train se trouve dans une certaine configuration.

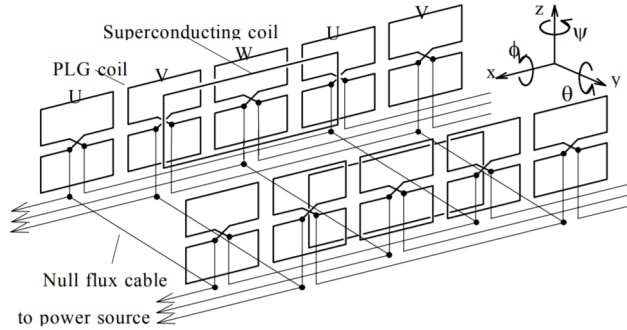


Figure 5 : Représentation des enroulements en forme de 8 [11]

Cette configuration est donc choisie afin que le train lévite à une certaine hauteur par rapport à la voie et au centre des deux murs verticaux formant la voie en U. Ceci est représenté à la Figure 6.

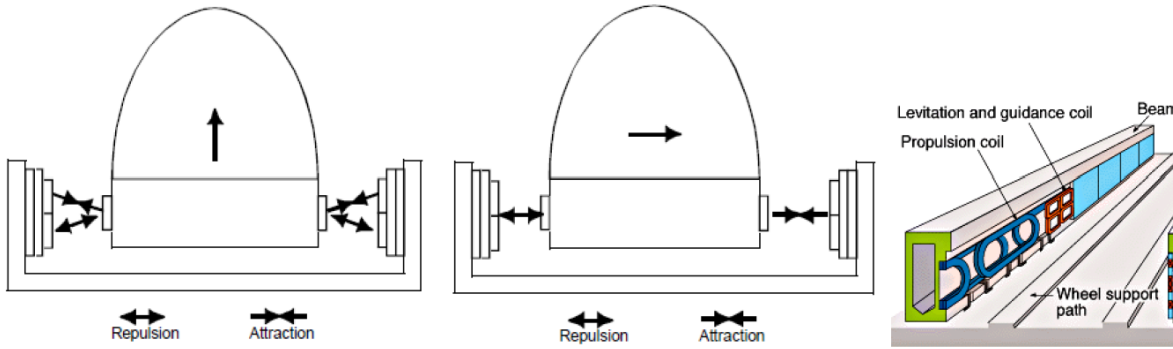


Figure 6 : Lévitation et guidage latéral dans le JR-Maglev [12]

Le deuxième système EDS est le concept **"Inductrack"** [13] [14] qui est basé sur des aimants permanents attachés au véhicule ainsi que des circuits électriques en court-circuit dans la voie. Ce système maximise les forces électrodynamiques responsables de la lévitation du véhicule. De fait, comme montré à la Figure 7, les aimants permanents présents dans le véhicule sont disposés suivant une configuration particulière appelée réseau d'Halbach. Le but de cette configuration est d'amplifier le champ magnétique présent entre le véhicule et la voie.

⁴JR-Maglev signifiant "Japan-Railway MagLev" et MLX spécifiant le modèle du train MagLev.

⁵Electroaimants faits d'enroulement en fil supraconducteur.

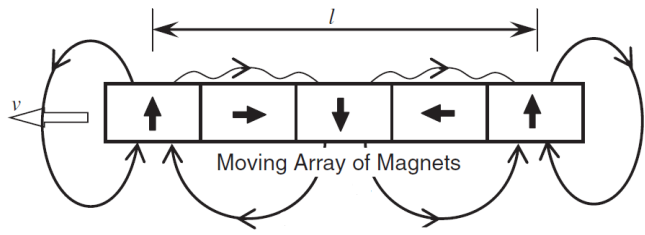
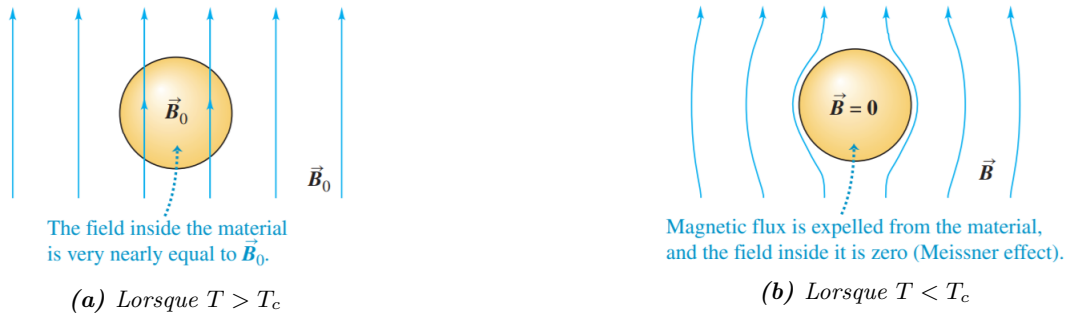


Figure 7 : Représentation d'un réseau d'Halbach [13]

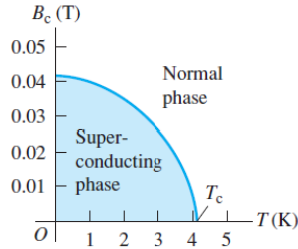
Effet Meissner

L'utilisation des matériaux supraconducteurs dans un système de lévitation magnétique a déjà été évoquée ci-avant. Dans ce cas, les matériaux supraconducteurs étaient utilisés comme des aimants supraconducteurs, c'est-à-dire des électroaimants faits d'enroulement en fil supraconducteur. La propriété de tels matériaux est la disparition de toute résistance électrique (i.e. une conductivité infinie) lorsqu'ils sont refroidis en-dessous d'une température critique T_c propre à chaque matériau. Dans cet état, les fils de supraconducteur peuvent conduire des courants électriques d'intensité bien plus grande produisant des champs magnétiques intenses. Cependant, cette absence de résistance électrique n'est pas la seule propriété des supraconducteurs.



(a) Lorsque $T > T_c$

(b) Lorsque $T < T_c$



(c) Diagramme de phase du mercure⁶ [15]

Figure 8 : Effet Meissner dans un matériau supraconducteur [15]

Une autre propriété importante des supraconducteurs est appelée l'effet Meissner. Ce comportement magnétique des supraconducteurs apparaît lorsqu'ils sont placés dans un champ magnétique homogène $\vec{B}_0$. Si la température du matériau T est plus grande que sa température critique T_c , ce matériau se trouve dans sa phase normale. Dans ce cas, les lignes de champ magnétique traversent le matériau, et le champ magnétique en son sein est non-nul (Figure 8a). Par contre, si la température du matériau est abaissée en-dessous de sa température critique, alors, une mesure du champ magnétique dans le matériau montrera que celui-ci est nul⁷. Cet état du matériau est appelé phase supraconductrice et dans celle-ci, le matériau expulse le flux magnétique (Figure 8b) agissant comme un matériau diamagnétique parfait. Cela signifie que sa susceptibilité $\chi_v = -1$.

⁶Les diagrammes des autres matériaux supraconducteurs ont la même forme mais avec des valeurs numériques différentes.

⁷Excepté pour une très fine couche à la surface du matériau, caractérisée par la profondeur de pénétration de London, λ .

Donc, le supraconducteur va ressentir une force répulsive agissant contre lui. Par principe d'action-réaction, l'aimant générant le champ magnétique va, lui aussi, ressentir cette force répulsive. Il faut noter que le diagramme de phase d'un matériau supraconducteur dépend comme susmentionné de sa température mais aussi du champ magnétique auquel il est soumis comme présenté à la Figure 8c.

Quand on parle de système EMS, le théorème d'Earnshaw postule que des interactions électrostatiques ne peuvent pas stabiliser entièrement un système. Bien qu'il est démontré dans l'Annexe A que ceci n'est plus vrai lorsqu'il s'agit de matériaux diamagnétiques (i.e. des matériaux qui repoussent le champ magnétique comme le bismuth ou le mercure), il peut être établi que les forces répulsives en jeu ne sont pas d'intensité suffisante pour être utilisées dans des applications tels que les trains MagLev ou les systèmes Hyperloop et ce à cause de leur faible susceptibilité négative [16]. Ce problème disparaît lorsque l'on travaille avec des supraconducteurs ayant une susceptibilité $\chi_v = -1$.

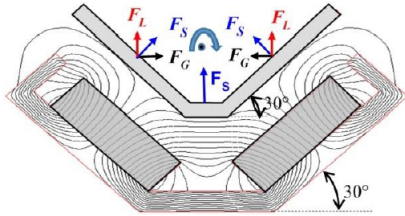


Figure 9 : Schéma d'une voie en forme de V [17]

Le projet italien UAQ4 est un système de train MagLev constitué de deux "patins"⁸ faits de matériaux supraconducteurs à haute température (HTS⁹) de chaque côté du bogie. Ces matériaux ont pour particularité d'avoir une température critique T_c suffisamment élevée pour être atteinte en utilisant de l'azote liquide, donc à peu près 77K. Ces "patins" vont interagir avec deux voies en V composées d'aimants permanents en néodyme (NdFeB) (voir Figure 9). Ces voies en forme en V permettent de générer à la fois la force de portance et la force de guidage du système.

Comparaison entre les différents systèmes

Aucun des différents systèmes évoqués ci-dessus n'est parfait. Ils possèdent tous des avantages comme des inconvénients. Nous allons nous pencher sur ceux-ci via une approche comparative.

Lévitiation pneumatique Elle assure une très bonne stabilité de la capsule Hyperloop et ce, sans réelle adaptation de la voie sur laquelle progresse le véhicule. Cependant, comme ce système projette de l'air sous pression pour léviter, la quantité d'air contenue dans le tube augmente, et partant sa pression. Or, l'intérêt d'un système Hyperloop progressant dans un tube est de pouvoir atteindre des pressions d'air ambiant très faibles afin de limiter la force de traînée aérodynamique sur la capsule. Il faudrait donc un tube capable de vider l'air de manière constante dans le but d'y maintenir la basse pression souhaitée. Un tel système viendrait alors augmenter la complexité technologique des tubes et donc leur coût.

Par ailleurs, comme déjà mentionné, un système à lévitation pneumatique ne permet pas d'atteindre de grandes hauteurs d'espacement entre la voie et le véhicule. Celles-ci sont comprises entre 0.5mm et 5mm en fonction de la puissance des compresseurs utilisés [4], [18]. Dans l'article publié en 2013 par Elon Musk [4], cette hauteur est estimée entre 0.5mm et 1.3mm. Afin d'éviter tout risque d'accident, il faudrait imposer que les défauts présents sur la voie ne soient pas plus importants que cette hauteur de lévitation. Ce faisant, il faudrait exiger une tolérance très faible sur la manufacture de la voie augmentant son coût.

Lévitiation électromagnétique Le grand avantage de cette technologie constitue aussi son plus grand inconvénient. De par la nature instable d'un tel système, celui-ci requiert un mécanisme de contrôle. Celui-ci va faire fluctuer les électroaimants afin de stabiliser la hauteur d'espacement entre le véhicule et la voie. Grâce à ce contrôle, le système est capable de moduler la raideur des forces en jeu assurant un mécanisme de système de suspension efficace. Cependant, un tel contrôleur accroît considérablement la complexité du système. Par ailleurs, l'utilisation d'électroaimants requiert une alimentation continue de ceux-ci augmentant donc la consommation énergétique globale du système.

⁸Traduit de l'anglais "skatters".

⁹Par convention, l'acronyme 'HTS' vient de l'anglais "**H**igh **T**emperature **S**uperconductor" signifiant supraconducteur à haute température.

Lévitiation électrodynamique L'atout majeur de ce système est sa passivité. En effet, la force de portance d'un système EDS provient de la mise en mouvement des aimants permanents contenus dans la capsule. Dès lors, aucune énergie supplémentaire n'est nécessaire pour permettre la lévitation du véhicule. Cependant, cela a pour effet que les forces de portance sont nulles lorsque la capsule Hyperloop est à l'arrêt nécessitant l'utilisation de roues auxiliaires pour le déplacement à faible vitesse. De plus, les forces générées sont fonction de la vitesse et de la géométrie du système. Dès lors, pour une capsule et une vitesse données, les forces sont fixes et ne peuvent pas être modifiées.

Lévitiation via effet Meissner Ce principe de lévitation présente de nombreux aspects positifs intéressants. Les forces de traînée dues à la lévitation sont nulles et ce, pour toute vitesse. La force de portée est produite à vitesse nulle permettant la lévitation de la capsule lorsqu'elle est à l'arrêt. Le système est intrinsèquement stable ne nécessitant donc pas de contrôle supplémentaire. Malheureusement, ce système est économiquement non viable. En effet, d'une part, il requiert un mécanisme de refroidissement à l'azote liquide à bord du véhicule. D'autre part, il nécessite aussi l'installation de rails constitués en aimants permanents puissants. Ceux-ci devant s'étendre sur des centaines voire des milliers de kilomètres, cela rendrait le prix de l'ensemble du système gigantesque.

	Lévitiation pneumatique	EMS	EDS	Lévitiation par effet Meissner
Topologie de la voie	Pas d'aspect particulier	En matériau ferromagnétique	En matériau conducteur	En aimants permanents
Espacement voie véhicule	Faible (0.5-5 mm)	Moyen (8-12 mm)	Élevé (50-70 mm)	Élevé (50-60 mm)
Lévitiation à 0m/s	Oui	Oui	Non	Oui
Rapport portance/trainée	Élevé	Élevé	Moyen	Pas de force de traînée
Stabilité	Moyenne	Instable	Faible	Élevée
Complexité système(s) auxiliaire(s)	Moyenne	Élevée	Faible	Moyenne

Tableau 1 : Comparaison des différents systèmes de lévitation

Objectifs de ce mémoire

L'objectif principal de ce travail est de développer un modèle dynamique d'une capsule Hyperloop. Comme nous l'avons exposé tout au long de l'Introduction, il existe diverses techniques permettant la lévitation d'un véhicule. L'une des plus prometteuses fonctionne grâce aux interactions électrodynamiques entre un champ magnétique - généralement produit sur le véhicule - variable, et des conducteurs électriques - généralement situés dans la voie. Dès lors, pour concevoir un modèle dynamique d'une capsule Hyperloop, trois étapes-clés sont requises :

1. créer un modèle décrivant les phénomènes électrodynamiques qui permettent la lévitation de la capsule Hyperloop,
2. concevoir un modèle prédisant le mouvement du système multicorps que compose le véhicule en fonction des forces qu'il subit,
3. permettre un couplage entre les deux modèles précédemment obtenus.

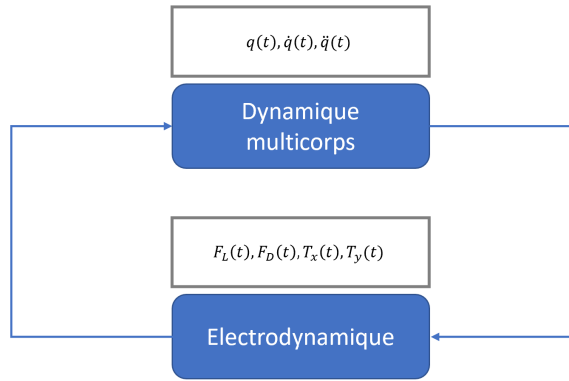


Figure 10 : *Couplage entre les phénomènes électrodynamiques et la dynamique du multicorps*

Ces modèles devront alors être utilisés et analysés en se basant sur un modèle de capsule Hyperloop pré-existant. De cette manière, nous pourrons valider ou non les différents modèles étudiés.

Finalement, une première étude de la dynamique de la capsule Hyperloop pourra être effectuée grâce au couplage entre les modèles électrodynamiques et multicorps.

Dans ce mémoire, les systèmes de propulsion et de guidage de la capsule Hyperloop ne seront pas considérés.

Plan du mémoire

Ce mémoire s'articule autour de cinq grands chapitres. Le premier présente un état de l'art concernant l'étude des véhicules MagLev (i.e. à lévitation magnétique). Celui-ci nous permettra de récolter dans la littérature les informations utiles, et d'identifier ce qui peut être amélioré.

Le deuxième chapitre décrit la méthodologie suivie pour réaliser ce travail. Les objectifs à atteindre y sont à nouveau mentionnés, ainsi que les différentes étapes suivies. Finalement, le design de la capsule pré-existante y sera décrit.

Le troisième chapitre contient le développement des modèles électrodynamiques conçus pour décrire les phénomènes électrodynamiques permettant la lévitation de la capsule Hyperloop. Ces modèles seront alors comparés entre eux afin de faire ressortir leurs avantages respectifs. Ce chapitre se conclut par des pistes d'amélioration de ces différents modèles, lesquelles n'ont pas pu être implémentées dans le cadre de ce travail.

Le chapitre quatre décrit le modèle multicorps utilisé pour prédire le mouvement du véhicule. Il sera aussi spécifié comment le couplage avec le modèle électrodynamique peut être construit.

Le chapitre cinq apporte une analyse dynamique sommaire de la capsule Hyperloop pré-existante utilisée dans le cadre de ce travail. Cette analyse dynamique est donc bien sûr limitée aux phénomènes qui peuvent être pris en compte par les modèles électrodynamiques et multicorps utilisés.

Finalement, la conclusion récapitulera les résultats obtenus et décrira les améliorations qui peuvent être envisagées.

Le projet Hyperloop étant un sujet de recherche relativement récent, il existe à ce jour peu d'études relatives aux forces de portance et de traînée générées par une capsule Hyperloop en elle-même. Cependant, la technologie utilisée est identique à celle exploitée dans les trains MagLev. La seule différence entre un train MagLev et une capsule Hyperloop est que la capsule se déplace dans un tube sous basse pression. Dès lors, la grande partie des études utilisées comme base de ce mémoire sont des études concernant les trains MagLev.

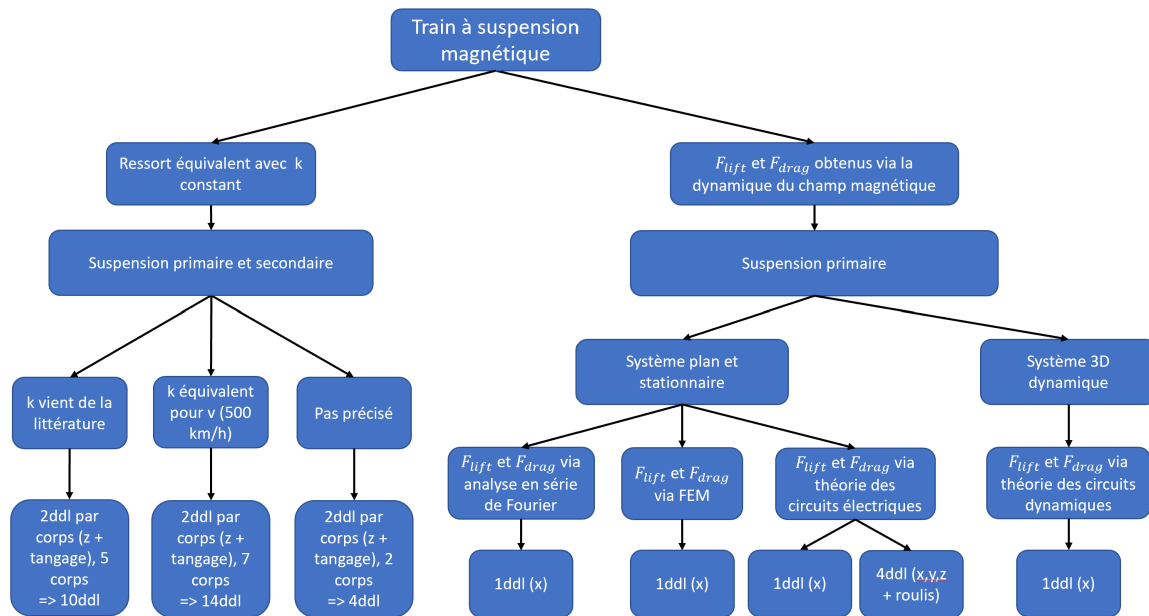


Figure 1.1 : Bloc diagramme résumant les différentes études menées sur le principe EDS appliquées à un véhicule

La Figure 1.1 reprend une classification, la plus complète possible, d'un certain nombre de travaux de recherches réalisés sur la modélisation des trains à lévitation magnétique et leur dynamique. Ce diagramme montre que les études reprises peuvent être classifiées en deux grandes catégories. En effet, les études réalisées

pour le moment se concentrent soit sur le calcul des forces électrodynamiques générées par le système EDS, soit elles se concentrent sur la dynamique multicorps du véhicule en modélisant le système de lévitation au moyen de ressorts équivalents dont les coefficients de raideur k doivent imiter le comportement de la force de portance du système.

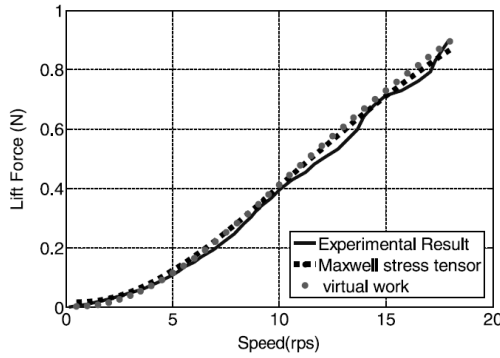
1.1 Forces électrodynamiques

Cette première catégorie de travaux de recherche se focalise sur une étude des forces électrodynamiques générées par le système en fonction de la vitesse pour une hauteur d'entrefer fixe [14], [19], [20], [21], [22]. Les différents articles ayant publié ces travaux de recherche se différencient par la méthode utilisée afin d'obtenir les forces électrodynamiques qui s'exercent sur le système. Quatre grandes méthodologies sont présentées :

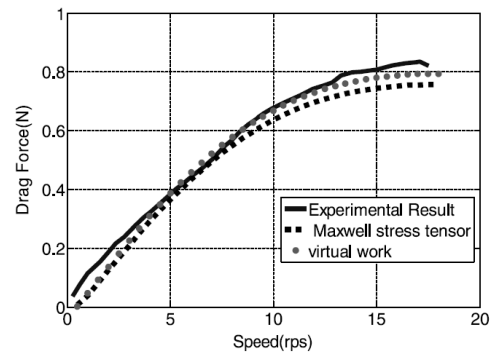
1. Analyse en série de Fourier [19],
2. Analyse par la méthode des éléments finis [21],
3. Analyse via la théorie des circuits électriques équivalents [13], [14], [23],
4. Analyse via une approche énergétique du système [22], [24].

Dans [19], les expressions analytiques exactes des forces électrodynamiques sont obtenues, grâce à un développement en série de Fourier, pour des conducteurs de courant rectangulaire se déplaçant au-dessus et en-dessous d'une voie infinie conductrice. L'article présente alors l'étude de ces forces dans différentes configurations ("normal flux", "null flux" et "brake flux") montrant donc que l'approche modélisation en série de Fourier est très efficace pour étudier un système EDS.

L'article [21] construit un modèle éléments finis d'un système EDS pour une structure plate et circulaire. Les auteurs comparent alors les résultats obtenus expérimentalement validant la robustesse de l'approche éléments finis pour simuler les forces électrodynamiques agissant dans un système EDS.



(a) Vérification de la force de portance



(b) Vérification de la force de traînée

Figure 1.2 : Vérification expérimentale des résultats du modèle éléments finis dans [21]

Une méthode très populaire utilisée pour analyser un système EDS basé sur le concept "Inductrack" est l'utilisation d'un circuit électrique équivalent. Comme le montrent [13], [14], [23], en posant un certain nombre d'hypothèses simplificatrices, il est possible de représenter un système EDS "Inductrack" par un circuit RL équivalent. Ce circuit électrique est soumis à une force électromotrice sinusoïdale à cause de la variation du champ magnétique intercepté par les enroulements contenus dans la voie. Il est alors possible de calculer les forces électrodynamiques agissant sur le système via l'expression des forces de Lorentz dues à l'interaction entre le courant parcourant les enroulements et le champ magnétique qu'ils interceptent. L'article [13] va encore plus loin en utilisant ce modèle pour un système ayant jusqu'à quatre degrés de liberté et analysant donc son comportement dynamique. Notons tout de même qu'aucun système de suspension mécanique n'est considéré.

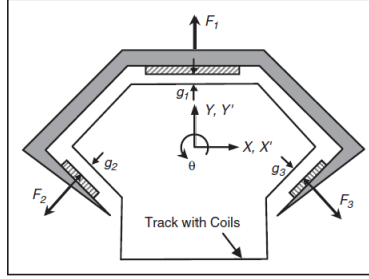


Figure 1.3 : Système à quatre degrés de liberté considéré dans [13]

Finalement, le rapport [22] ainsi que l'article [24] écrits par les mêmes auteurs présentent l'analyse d'un train MagLev utilisant un système EDS recourant au principe "null-flux". Le système de lévitation repose donc sur l'interaction entre les enroulements présents dans le bogie et ceux présents dans la voie (voir Figure 1.4). Pour analyser ce système, l'équipe de scientifiques a utilisé une approche énergétique afin d'obtenir les forces s'exerçant sur le véhicule. Cette approche permet de prendre en compte les effets de bord du système électrodynamique. De plus, cette méthode d'analyse est bien adaptée à l'étude du transitoire et de la dynamique du système.

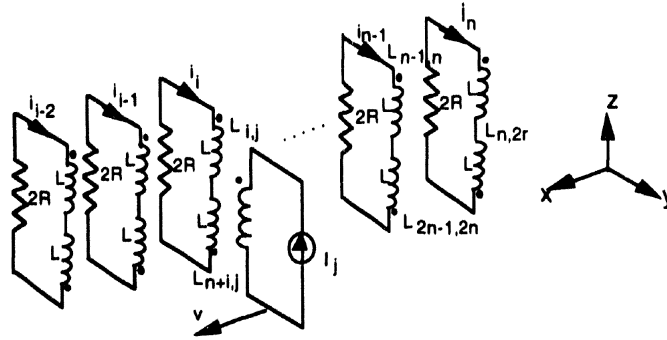


Figure 1.4 : Représentation sous forme de circuits équivalents d'un système de lévitation "null-flux" (seulement un enroulement du bogie est représenté)

1.2 Dynamique multicorps du véhicule

Ce type d'étude a pour objectif premier l'analyse de la réponse fréquentielle d'un véhicule MagLev à des irrégularités aléatoires présentes sur la voie [25] [26] [27]. Les hypothèses principales de ce type d'étude sont les suivantes :

- Uniquement des problèmes plans. [25] et [27] ne considèrent que le degré de liberté verticale et de tangage de chaque corps. [26] prend en compte le degré de liberté latéral et de roulis du bogie et de la caisse.
- La vitesse longitudinale du véhicule est considérée constante.
- Des forces concentrées finies sont utilisées pour remplacer la distribution continue des forces du système de lévitation.
- La force de portance du système de lévitation est modélisée au moyen d'un système ressort/amortisseur équivalent et de coefficient constant. [25] et [27] négligent en plus l'effet d'amortissement du système de lévitation.

Dans [25], le système analysé est le train MagLev allemand Transrapid, fonctionnant sur base d'un système EMS.

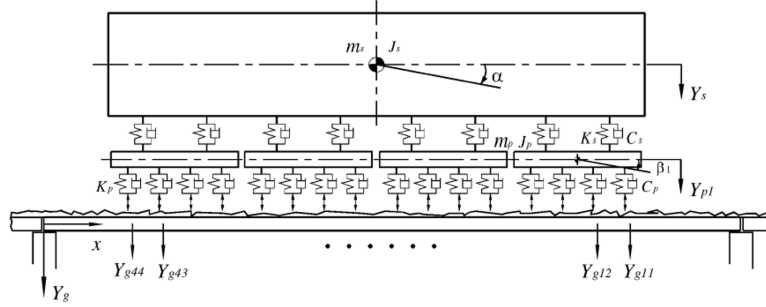


Figure 1.5 : Modèle des interactions verticales considéré dans [25]

Dans cette étude, trois différents types de voie sont considérés en prenant en compte les irrégularités aléatoires que peuvent contenir ces trois types de voies. Le but est de comparer la densité spectrale de puissance de l'accélération de la caisse avec le critère de qualité de conduite du véhicule urbain sur coussin d'air (UTACV¹). De plus, l'article met en avant les différences entre le contrôle des irrégularités de la voie pour un système ferroviaire classique et pour un système MagLev dues à la vitesse de croisière élevée des trains à lévitation magnétique.

Les articles [26] et [27] se concentrent sur les trains MagLev utilisant un système EDS "null-flux" (i.e. comme le train japonais JR-Maglev). Plus particulièrement, ces deux études travaillent sur le contrôle actif des suspensions primaire et secondaire afin de réduire les vibrations de la caisse. En effet, les systèmes à lévitation électrodynamique ont pour caractéristique un très faible coefficient d'amortissement. Celui-ci est d'ailleurs négligé dans les deux articles. Par ailleurs, les mêmes solutions sont envisagées :

- Un générateur linéaire pour contrôler l'amortissement de la suspension primaire. Ce dispositif a pour but premier de fournir de l'énergie électrique à bord du train en utilisant les harmoniques du champ magnétique généré par les bobines de lévitation et de guidage. Lorsque le véhicule atteint une vitesse suffisamment grande, ce dispositif génère un surplus d'énergie électrique. Ce dernier peut alors être injecté dans les enroulements du générateur linéaire et générer des forces électromagnétiques supplémentaires. Ces forces électromagnétiques peuvent être contrôlées grâce au convertisseur à modulation de largeur d'impulsion (PWM²) présent dans le générateur linéaire.

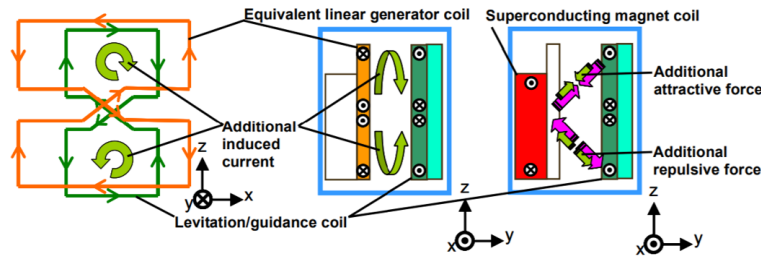


Figure 1.6 : Forces électromagnétiques produites par les enroulements du générateur linéaire et utilisées pour contrôler l'amortissement [28]

¹Par convention, l'acronyme 'UTACV' vient de l'anglais "Urban Tracked AirCushion Vehicle" définissant les critères de qualité d'un véhicule urbain à chenille sur coussin d'air.

²Par convention, l'acronyme 'PWM' provient de l'anglais "Pulse Width Modulation" signifiant la modulation de largeur d'impulsion qui consiste à générer un signal carré de rapport cyclique modulé en fonction d'un signal de commande.

- Des amortisseurs contrôlés par une commande linéaire quadratique (LQ) dans la suspension secondaire du véhicule.

La différence principale entre ces deux études est que [26] se focalise sur le contrôle des vibrations latérales et en roulis du véhicule. Quant à [27], elle s'intéresse au contrôle des vibrations verticales du train MagLev.

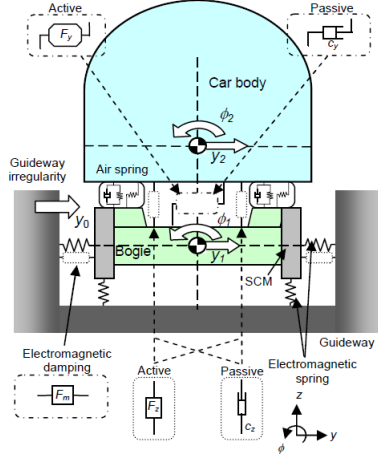


Figure 1.7 : Modèle des interactions considérées dans [26]

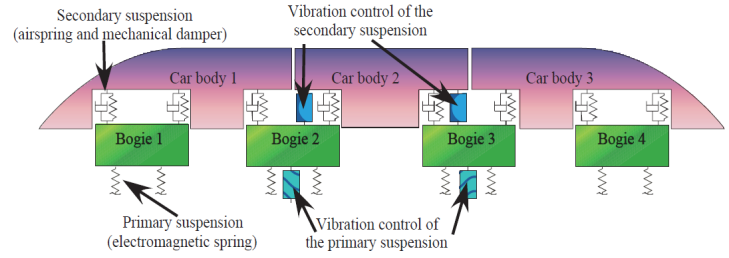


Figure 1.8 : Modèle des interactions considérées dans [27]

Au vu des différents travaux de recherches présentées dans l'état de l'art, réaliser une étude d'un véhicule à lévitation magnétique tel que l'Hyperloop en considérant à la fois la physique relative aux phénomènes électrodynamiques et la dynamique des systèmes multicorps prend tout son sens. En effet, une capsule Hyperloop lévite au-dessus de la voie grâce aux forces électrodynamiques générées par son mouvement. Elle est aussi composée d'un système de suspension mécanique que nous nommerons système de suspension secondaire (la suspension primaire faisant alors référence aux forces électrodynamiques), établissant la liaison entre les skis¹ et la caisse. L'impact de ce système de suspension secondaire sur le comportement de la capsule peut être obtenu au moyen d'une étude multicorps du système. L'objectif de ce mémoire est donc de permettre un couplage entre ces deux phénomènes.

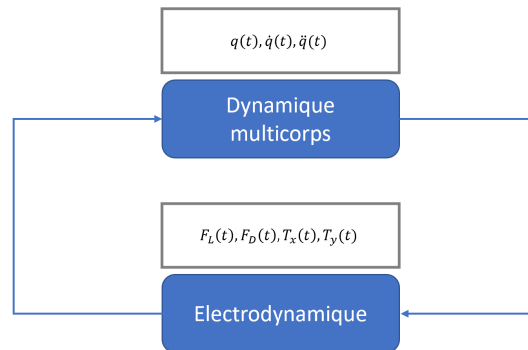


Figure 2.1 : *Couplage entre les phénomènes électrodynamiques et la dynamique du multicorps*

Dans le cadre de ce mémoire, l'analyse dynamique multicorps du système est réalisée à l'aide du logiciel ROBOTRAN développé par l'équipe du CEREM de l'UCLouvain [29] et dont le fonctionnement général sera détaillé dans le Chapitre 4. Le modèle électrodynamique doit alors permettre un couplage facile et performant avec le logiciel ROBOTRAN. Dès lors, deux modèles électrodynamiques natifs ont été étudiés pour ce travail.

Premièrement, un modèle éléments finis quasi-statique 2D du système permet de calculer les quantités électromagnétiques présentes. Un tel modèle a pour grand atout de pouvoir s'affranchir d'un certain nombre

¹Les skis font référence à la partie de la capsule contenant les aimants permanents permettant la lévitation ainsi que les roues utilisées lors des déplacements à basse vitesse.

d'hypothèses assurant ainsi une excellente précision des résultats. Cependant, cette précision nécessite une importante puissance de calcul. Un couplage direct entre un logiciel de modélisation numérique basé sur la méthode des éléments finis (FEM²) tel que COMSOL Multiphysics[®] [30] et ROBOTRAN augmenterait considérablement le temps d'exécution de la simulation. Pour pallier ce problème, deux modèles de substitution ont été imaginés :

- un modèle basé sur l'interpolation d'un ensemble de données obtenues par évaluation du modèle FEM pour différentes configurations (i.e. différentes vitesses v_x , angle de tangage θ et hauteur d'entrefer e),
- un modèle Lumped. De fait, en se basant sur la théorie des circuits électriques, il est possible d'obtenir une expression analytique pour les forces électrodynamiques de traînée et de portance telle que présentée dans [14], [18], [23] et [31]. Ces expressions analytiques vont alors dépendre de variables électriques telles que la résistance et l'inductance propre du système. Par identification entre les forces obtenues avec le modèle FEM et les forces obtenues avec les expressions analytiques, il est possible d'identifier ces différents paramètres.

Chacun de ces deux modèles de substitution permet d'obtenir une expression analytique des forces qui peut être implémentée dans ROBOTRAN.

Deuxièmement, un modèle analytique des forces électrodynamiques peut être obtenu grâce au modèle basé sur le développement en série de Fourier (modèle FB³). Cette méthode a pour objectif de résoudre les équations de Maxwell dans le système en divisant celui-ci en différents sous-domaines. Elle permet donc d'obtenir une expression analytique des forces électrodynamiques de traînée et de portance en se basant sur un nombre restreint d'hypothèses. Une fois obtenues, les expressions analytiques des forces peuvent être implémentées dans ROBOTRAN pour permettre le couplage entre la dynamique multicorps et les phénomènes électrodynamiques.

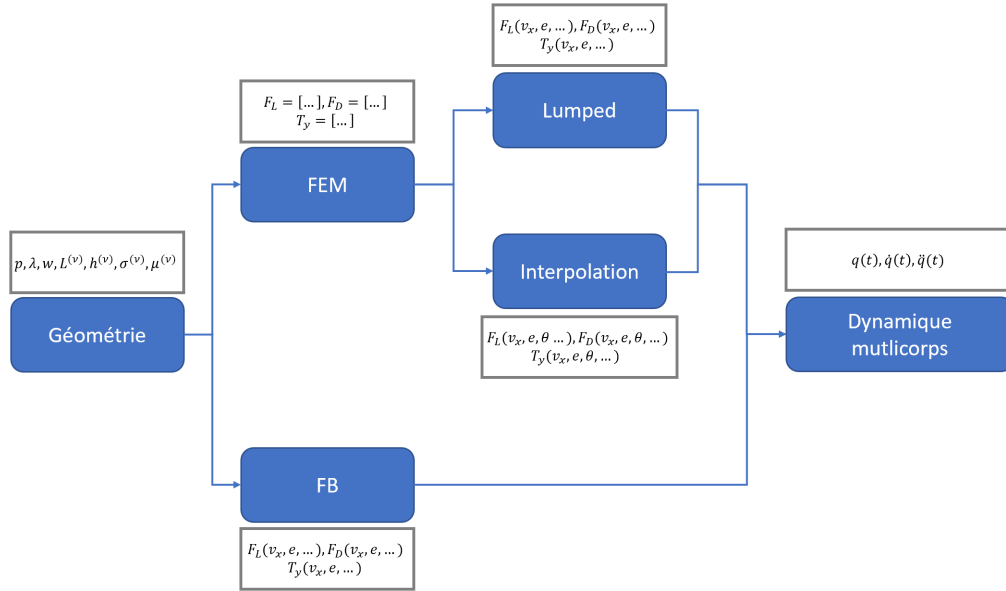


Figure 2.2 : Diagramme récapitulatif des différents modèles étudiés. Les variables contenues dans les cadres gris définissent les sorties des modèles correspondants

Enfin, l'ensemble de ces modèles ont été développés en se basant sur une géométrie particulière d'une capsule Hyperloop à savoir, celle développée par une équipe d'étudiants du MIT. Ce design de capsule va être décrit dans les sections suivantes.

²Par convention, l'acronyme "FEM" vient de l'anglais "Finite Element Method" signifiant méthode des éléments finis.

³Par convention, l'acronyme "FB" vient de l'anglais "Fourier Based" signifiant basé sur Fourier.

2.1 Capsule Hyperloop du MIT

Dans le but d'analyser la stabilité dynamique d'une capsule Hyperloop, il faut s'intéresser à un design particulier de la capsule. Malheureusement, dans un contexte hyper concurrentiel, de telles informations sur le design de capsules Hyperloop sont gardées secrètes la plupart du temps par les différentes entreprises concernées. C'est pourquoi, notre choix s'est porté sur la capsule conçue par une équipe d'étudiants du MIT. Cette capsule a été conçue et fabriquée pour participer à la compétition organisée par SpaceX, en janvier 2017.

L'équipe du MIT a rendu disponible une version publique du rapport reprenant l'ensemble des caractéristiques de leur capsule Hyperloop [32]. Il faut mentionner que toutes les informations nécessaires pour construire le modèle n'étaient pas disponibles dans ledit rapport. Ces informations manquantes ont donc été complétées le plus rigoureusement possible et choisies avec bon sens mais peuvent cependant parfois manquer de précision.

2.1.1 Design mécanique

La capsule du MIT est constituée de deux parties principales. Premièrement, la capsule en elle-même contient l'ensemble des différents modules nécessaires pour le bon fonctionnement du véhicule. Deuxièmement, la capsule est composée d'un ski de chaque côté. Ces skis permettent la lévitation de la capsule au-dessus de la voie en aluminium. Chaque ski est attaché à la capsule au moyen d'un système de suspension mécanique que nous nommerons système de suspension secondaire. Le système de suspension primaire fait référence, quant à lui, à la suspension électrodynamique due à l'interaction entre le ski et la voie.

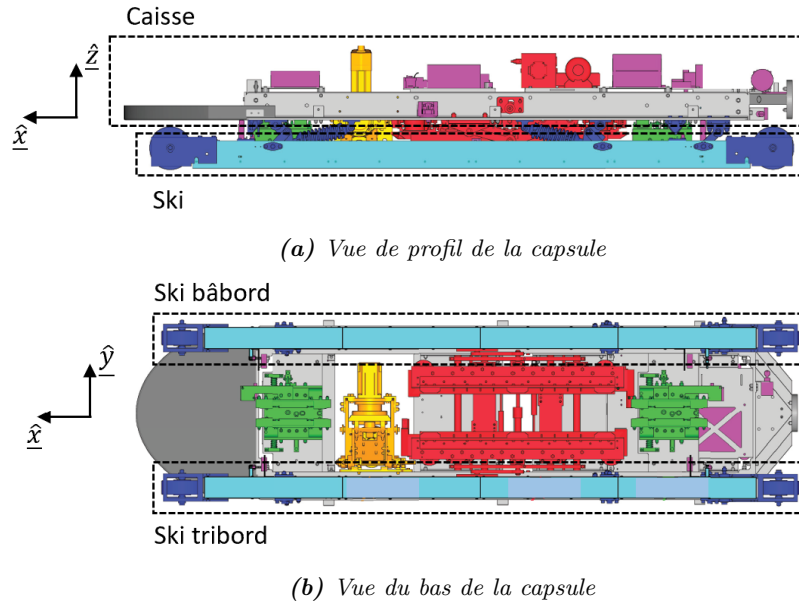


Figure 2.3 : Aperçu de la capsule Hyperloop du MIT

La longueur totale de la caisse est de 2.4m et sa largeur est de 0.64m. La caisse est recouverte d'une carapace aérodynamique pensée afin de limiter la traînée aérodynamique de la capsule au maximum.

Les informations relatives au design mécanique des différents éléments composant la capsule étaient données au travers de dessins faits à l'échelle. Les distances exactes entre les différents éléments n'étaient pas accessibles dans le rapport public du MIT. Cependant, en couplant l'information relative à la longueur totale de la capsule et les schémas réalisés à l'échelle, ainsi qu'en utilisant les dessins techniques de certains des éléments de la capsule, obtenus grâce à un membre de l'équipe du MIT, il a été possible d'estimer les dimensions des composants de la capsule.

Points d'attache de la suspension secondaire

La Figure 2.4 reprend l'ensemble des dimensions caractérisant les points d'attache entre, d'une part, le ski et le système de suspension secondaire et, d'autre part, le système de suspension secondaire et la caisse.

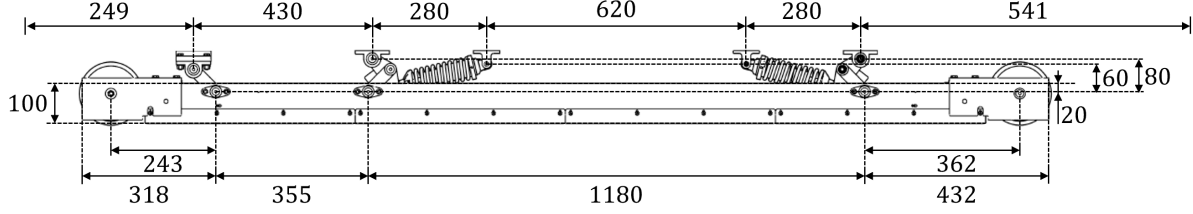


Figure 2.4 : Points d'attache de la suspension secondaire
(les dimensions sont données en mm)

Le système de suspension secondaire prend la forme d'un système trois-barres modifié possédant deux degrés de liberté. Ceci peut être obtenu via la formule de Grubler pour un mécanisme plan :

$$d = 3(N - 1) - 2g$$

où :

- d est le nombre de degrés de liberté,
- N est le nombre d'organes composant le système bâti inclus, soit 7 dans notre cas (5 barres reliant le ski à la caisse, le ski et la caisse),
- g le nombre d'articulations simples, soit 8 dans le cas qui nous occupe.

Ce mécanisme permet donc un mouvement vertical et un mouvement de tangage entre le ski et la caisse.

Système de suspension secondaire

Comme mentionné ci-avant, le design du système de suspension secondaire est basé sur un système trois-barres modifié. Celui-ci est composé d'une bielle et de deux systèmes ressort-amortisseur liés au trois-barres et mis en miroir l'un par rapport à l'autre. Les dimensions de ce système ressort-amortisseur sont données à la Figure 2.5.

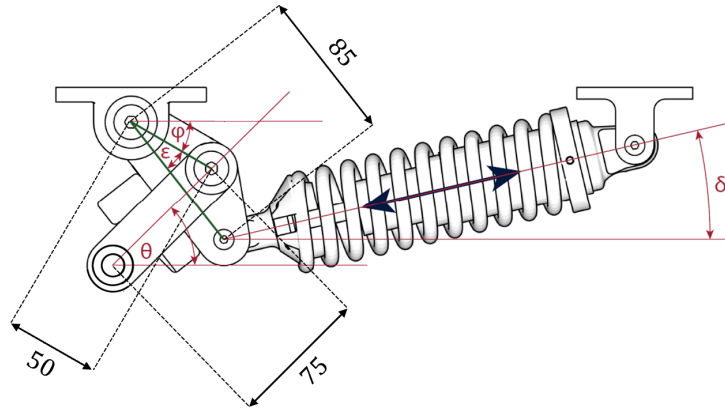


Figure 2.5 : Ressort-amortisseur lié au système trois-barres (les dimensions sont données en mm)

En considérant la configuration représentée à la Figure 2.5 comme étant la configuration au repos, c'est-à-dire lorsque seule la force de gravité intervient sur le système, il est alors possible d'obtenir les angles caractérisant le système au repos. Ceux-ci seront utiles pour calculer la longueur neutre du ressort (voir Chapitre 4). Les valeurs de ces angles au repos sont reprises dans le Tableau 2.1.

Angles	Valeurs
δ	13[°]
ϵ	22[°]
θ	45[°]
ϕ	30[°]

Tableau 2.1 : Valeurs des angles du système de suspension secondaire au repos

Finalement, l'équipe du MIT fournissait, dans son rapport technique, les valeurs des coefficients de raideur et d'amortissement composant la suspension secondaire. Ceux-ci sont repris dans le Tableau 2.2.

	Coefficient de raideur	Coefficient d'amortissement
Suspension avant	30[kN/m]	2[kNs/m]
Suspension arrière	15[kN/m]	1[kNs/m]

Tableau 2.2 : Caractéristiques du système de suspension secondaire

Roues pour le fonctionnement basse vitesse

La capsule Hyperloop du MIT lévite grâce à un système EDS dont le design est exposé à la Sous-Section 2.1.2. Il a déjà été mentionné dans l'Introduction⁴ qu'un tel système possède comme désavantage celui de ne développer aucune force de portance à vitesse nulle. De plus, afin de contrecarrer sa force poids, la capsule doit atteindre une vitesse minimale pour pouvoir léviter au-dessus de la voie. L'utilisation d'un système de roues pour le déplacement à basse vitesse est donc obligatoire. La dimension précise du rayon des roues n'a pas été communiquée dans le rapport technique du MIT [32] mais a été obtenue par mesure approximative sur les schémas présents dans le rapport. Le rayon des roues utilisé dans ce travail est donc de 0.075m.

2.1.2 Design magnétique

Afin de permettre la lévitation du véhicule, la capsule Hyperloop du MIT possède un réseau d'aimants permanents à l'intérieur des skis. Lorsque la capsule se met en mouvement, la voie en aluminium (un matériau conducteur) connaît un champ magnétique variable. Suivant les lois de Lenz et Faraday, les courants induits dans la plaque d'aluminium vont générer un champ magnétique s'opposant à la variation du premier comme déjà expliqué dans l'Introduction⁴. L'interaction entre ces deux champs magnétiques (le champ magnétique des aimants permanents et le champ magnétique induit) va générer deux forces :

- une force de portance (F_L) permettant à la capsule de léviter au-dessus de la voie,
- une force de traînée (F_D) qui agit contre le mouvement de la capsule.

Le réseau d'aimants permanents étant disposé selon une configuration haut-bas, l'équipe du MIT a décidé d'ajouter une plaque de fer sur les aimants. Celle-ci a pour but de canaliser le flux magnétique d'un pôle

⁴Voir page 3.

à l'autre au-dessus des aimants maximisant donc le champ magnétique présent en-dessous (i.e. entre les aimants et l'aluminium). Notons que, pour réduire le poids ajouté par cette plaque de fer, l'équipe du MIT a opté pour une forme sinusoïdale de la plaque de fer. Cependant, cette forme sinusoïdale a été conçue afin de minimiser son impact en comparaison à l'utilisation d'une plaque rectangulaire. Le but de ce mémoire étant de modéliser le système et non d'en optimiser le poids, la plaque de fer a été considérée comme étant de forme rectangulaire tel que représenté à la Figure 2.6.

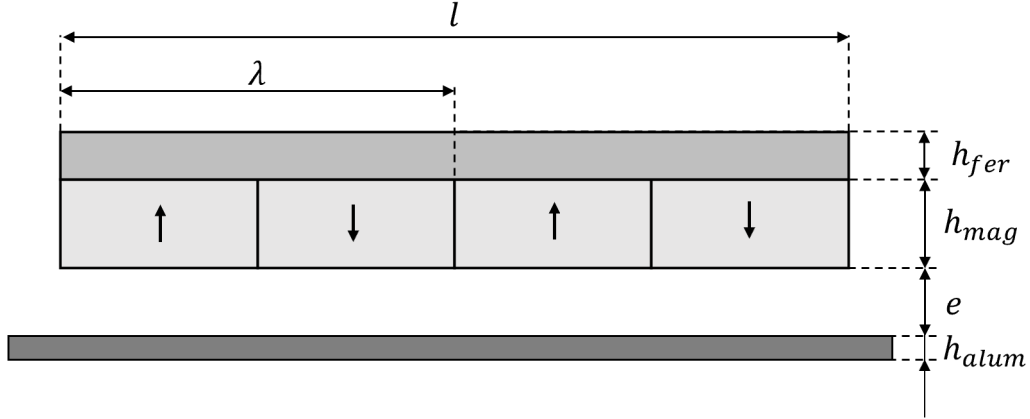


Figure 2.6 : Configuration magnétique d'un ski

L'ensemble plaque de fer, aimants permanents, entrefer (i.e. couche d'air entre les aimants et l'aluminium) et plaque d'aluminium compose un circuit magnétique représenté à la Figure 2.6. Les différents paramètres de ce circuit magnétique sont repris dans le Tableau 2.3.

Paramètres de design	Valeurs
Matériau des aimants	NdFeB Grade N42
Alliage de fer	Acier 1018
Alliage d'aluminium	6061 T6
λ	1[m]
N_p	2
p	1
w	0.05[m]
h_{fer}	0.0254[m]
h_{aimant}	0.01905[m]
h_{alu}	0.0127[m]

Tableau 2.3 : Paramètres du design magnétique des skis

CHAPITRE 3

MODÈLES ÉLECTRODYNAMIQUES

Dans ce chapitre, nous allons analyser deux modèles natifs permettant de prendre en compte les effets électrodynamiques qui entrent en jeu dans un système Hyperloop EDS. Les hypothèses posées pour obtenir chacun des deux modèles seront explicitées.

Le but des modèles électrodynamiques est de résoudre les équations de Maxwell dans le système considéré :

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (3.1a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \quad (3.1b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.1c)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = \rho_V \quad (3.1d)$$

dans lesquelles les différentes quantités physiques sont liées entre elles par les lois constitutives des matériaux :

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} + \mathbf{B}_0 \quad (3.2b)$$

où σ et μ représentent respectivement la conductivité électrique du milieu et sa perméabilité magnétique.

Ensuite, les forces électrodynamiques agissant sur le système peuvent être calculées. Plusieurs méthodes existent pour calculer ces forces. Nous allons, dans ce mémoire, principalement utiliser celle de l'intégration du tenseur de Maxwell :

$$\sigma_{ij} \triangleq \frac{B_i B_j}{\mu_0} - \delta_{ij} \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0} + \epsilon_0 E_i E_j - \frac{1}{2} \epsilon_0 |\mathbf{E}|^2 \delta_{ij} \quad (3.3)$$

Les expressions des forces et des moments de forces sont alors obtenues en intégrant le tenseur de Maxwell sur la surface du volume sur laquelle les forces agissent :

$$\mathbf{F} = \oint_S \boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (3.4a)$$

$$\mathbf{T} = \oint_S (\mathbf{r} \times \boldsymbol{\sigma}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (3.4b)$$

où $\mathbf{r}$ est le vecteur bras de levier défini entre le point de référence, choisi comme étant le centre géométrique du système aimant-fer, et le point d'application de la force.

3.1 Modèle éléments finis

Une première méthode pour résoudre les équations de Maxwell est l'utilisation d'un modèle éléments finis. Celui-ci permet de résoudre numériquement des équations aux dérivées partielles dans un domaine spatial. Pour ce mémoire, un modèle 2D quasi-statique du ski permettant la lévitation de la capsule a été implémenté dans le logiciel COMSOL Mutliphysics[®] [30]. Par le choix du modèle 2D quasi-statique, et afin de faciliter la résolution numérique du problème, les hypothèses suivantes ont été posées :

- Problème purement plan. Seules la dimension longitudinale $\hat{x}$ et la dimension verticale $\hat{z}$ sont considérées. La composante selon $\hat{y}$ du champ magnétique est considérée nulle, (H1)
- Les caractéristiques magnétiques et électriques des matériaux (μ , σ , ϵ) sont considérées constantes et données dans le Tableau 3.1. Les effets de saturation ne sont donc pas pris en compte, (H2)
- Problème quasi-statique, (H3)
- Le ski se déplace avec une vitesse purement longitudinale ($\mathbf{v}_{ski} = v_x \hat{x}$), (H4)
- La voie en aluminium a une longueur infinie, (H5)
- Le système ski-voie se trouve dans une zone d'air de dimension infinie. (H6)

Notons tout de même qu'il est plus facile de résoudre le problème en se positionnant dans un repère fixe aux aimants permanents. Dès lors, les aimants ainsi que le fer et l'air sont immobiles alors que la voie en aluminium a une vitesse $\mathbf{v} = -v_x \hat{x}$.

Le logiciel COMSOL[®] va être utilisé pour résoudre les équations de Maxwell, élément par élément, en utilisant la méthode du vecteur potentiel¹. Il est ensuite possible de calculer, directement dans le logiciel, les forces et les moments de forces qui s'exercent sur le ski en utilisant le tenseur des contraintes de Maxwell comme précédemment expliqué. Il est aussi possible de calculer les forces s'exerçant sur le système en calculant la force de Lorentz subie par la voie en aluminium qui, par principe d'action-réaction, est la même force que celle ressentie par le ski mais de sens opposé. De fait, la voie en aluminium est le siège de courants induits et elle se déplace (si nous nous trouvons dans un repère fixe aux aimants permanents) à une vitesse $\mathbf{v} = -v_x \hat{x}$. Donc, la force de Lorentz qui s'exerce sur la voie, est obtenue via la formule de Lorentz :

$$\mathbf{F} = \int \mathbf{J} \times \mathbf{B} dV \quad (3.5)$$

Il n'était cependant pas directement possible de calculer le moment de force résultant dans COMSOL[®] via l'expression des forces de Lorentz. C'est la raison pour laquelle le calcul des forces et moments de forces

¹Reformulation des équations de Maxwell sur base de la définition d'un vecteur potentiel $\mathbf{A}$. Cette méthode est décrite et utilisée dans l'élaboration du modèle en série de Fourier à la Section 3.3.

Air	σ	$10^{-15}[\text{S/m}]$
	μ_r	1[-]
	ϵ_r	1[-]
Aluminium 6061 T6	σ	$24.336 \cdot 10^6 [\text{S/m}]$
	μ_r	1[-]
	ϵ_r	1[-]
Fer Acier 1018	σ	$6.2893 \cdot 10^6 [\text{S/m}]$
	μ_r	529[-]
	ϵ_r	$10^{-6}[-]$
Aimant NdFeB Grade N42	B_r	1.28[T]
	σ	$0.667 \cdot 10^6 [\text{S/m}]$
	μ_r	1.05[-]
	ϵ_r	1[-]

Tableau 3.1 : Caractéristiques magnétiques des différents matériaux composant le circuit magnétique d'un ski

via le tenseur des contraintes de Maxwell a été favorisé. Le calcul des forces de Lorentz va tout de même permettre de vérifier les résultats obtenus.

3.1.1 Configurations du modèle

Afin de pouvoir utiliser les résultats du modèle électromagnétique dans le modèle mutlicorps, il est nécessaire de calculer les forces et moments de forces pour différentes configurations du système ski-voie en aluminium. De fait, il y a trois paramètres cinématiques-clés ayant un impact sur les forces et moments de forces calculés. Ceux-ci sont :

- la vitesse de déplacement selon l'axe $\hat{x}$, v_x
- la hauteur d'entrefer, e
- l'angle de tangage du ski, θ

Ces trois paramètres sont représentés à la Figure 3.1.

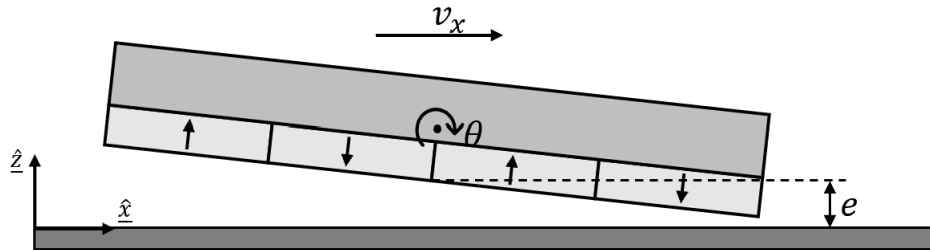


Figure 3.1 : Représentation des paramètres cinématiques du système ski-voie

Dès lors, les forces de portance et de traînée ainsi que le moment de force par rapport au centre géométrique

du couple aimants permanents-fer, ont été calculés pour différentes combinaisons de ces paramètres au sein d'intervalles définis dans le Tableau 3.2. Afin d'éviter l'étude de configurations irréalistes où le ski s'enfonce dans la voie en aluminium, il est nécessaire que les angles de tangage maximal et minimal soient fonction de la hauteur d'entrefer e . Par ailleurs, pour éviter toutes erreurs numériques liées à l'intégration numérique de la solution calculée juste à la frontière entre deux domaines, le tenseur de Maxwell a été intégré sur une surface rectangulaire entourant les aimants et le fer, espacé de ceux-ci d'une distance $\Delta_{rect} = 1mm$. De plus, pour empêcher tout problème lié à la déformation du maillage, les angles de tangage maximal et minimal évalué ont été choisis de manière à laisser un espacement de $0.5mm$ entre la voie en aluminium et la surface d'intégration rectangulaire du tenseur des contraintes de Maxwell.

$$\theta_{max}(e) = \arctan\left(\frac{e - (\Delta_{rect} + 5 \cdot 10^{-4})}{\lambda + \Delta_{rect}}\right) \quad (3.6a)$$

$$\theta_{min}(e) = -\theta_{max}(e) \quad (3.6b)$$

$$\Delta\theta(e) = \frac{2\theta_{max}(e)}{N_\theta - 1} \quad (3.6c)$$

Il a été décidé que le nombre d'éléments par intervalle d'angle de tangage N_θ serait identique pour toute hauteur d'entrefer.

Paramètres cinématiques	Intervalles
v_x	$[0, 100][m/s]$ avec $\Delta v = 1[m/s]$
e	$[3, 29][mm]$ avec $\Delta e = 1[mm]$
θ	$[\theta_{min}(e), \theta_{max}(e)]$ avec $\Delta\theta$ tel que $N_\theta = 10 \forall e$

Tableau 3.2 : Intervalles de valeurs des paramètres cinématiques utilisés pour le modèle FEM

3.1.2 Vérification du modèle

La qualité des résultats d'un modèle FEM est fortement dépendante de plusieurs paramètres. Dans le modèle considéré, ces paramètres sont :

- la qualité du maillage,
- le respect des hypothèses d'un rail en aluminium de longueur infinie et d'une zone d'air de dimensions infinies.

Dans cette partie, ces deux aspects du modèle seront étudiés afin de s'assurer de la validité des résultats obtenus. Enfin, les résultats obtenus par intégration de tenseur des contraintes de Maxwell seront comparés avec ceux obtenus par calcul des forces de Lorentz agissant sur la voie en aluminium.

Impact du maillage

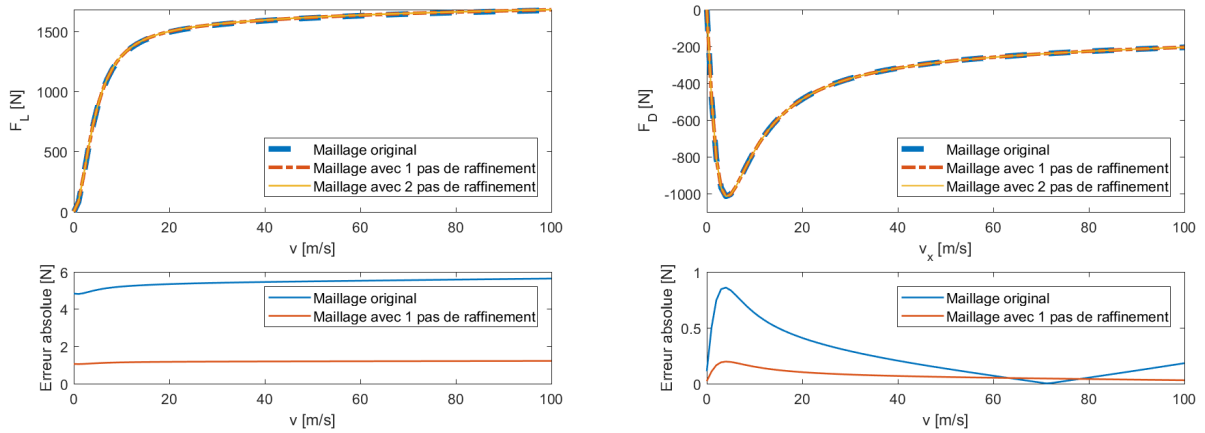
La méthode des éléments finis a pour base de fonctionnement, celle de linéariser les équations aux dérivées partielles sur chaque élément du maillage. Dès lors, le raffinement du maillage (i.e. le nombre d'éléments le composant) a un impact direct sur la qualité des résultats. Plus le nombre d'éléments sera élevé, plus l'erreur liée à la discrétisation du problème sera moindre.

Cependant, augmenter le nombre d'éléments composant le maillage a pour impact d'augmenter le nombre d'équations à résoudre et donc, le temps de calcul nécessaire afin d'obtenir la solution. Le nombre d'éléments

est aussi directement lié au nombre de valeurs nodales à enregistrer, ce qui pourrait entraîner la saturation de la mémoire disponible sur l'ordinateur si ce nombre d'éléments devient trop important. Un compromis doit donc être trouvé entre l'amélioration de la qualité des résultats obtenus et le temps de calcul nécessaire pour résoudre le problème.

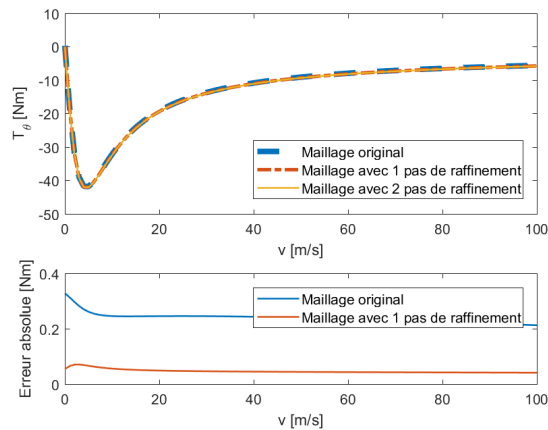
La qualité du maillage a été étudiée dans deux configurations différentes du système. Une pour laquelle le ski a un angle de tangage nul et l'entrefer a une hauteur de 10mm, et une autre pour laquelle la hauteur d'entrefer a la plus petite valeur possible ($e = 3mm$, dû à la présence des roues sur le ski) et l'angle de tangage est maximal en valeur absolue ($\theta = \theta_{min}(e = 3mm)$). Les résultats de ces deux analyses sont présentés aux Figures 3.2 et 3.3. respectivement. Sur celles-ci se trouvent les forces et moments de forces calculés avec le maillage original composant le modèle FEM ainsi que ces mêmes forces calculées sur base d'un maillage avec successivement un et deux niveaux de raffinement supérieur².

Les résultats obtenus confirment une variation des forces et moments de forces calculés en fonction du niveau de raffinement du maillage. De plus, l'erreur absolue entre d'une part, les résultats obtenus avec le maillage original ou avec un seul niveau de raffinement et d'autre part, les résultats obtenus avec le maillage raffiné deux fois permet de confirmer que le raffinement du maillage tend à faire converger les résultats vers une même valeur.



(a) Impact sur la force de portance

(b) Impact sur la force de traînée



(c) Impact sur le couple de tangage

Figure 3.2 : Impact du raffinement du maillage sur les résultats de la simulation FEM pour $e = 10[mm]$ et $\theta = 0[rad]$

²Lorsque le maillage est raffiné une fois, alors on multiplie par deux le nombre d'éléments le composant.

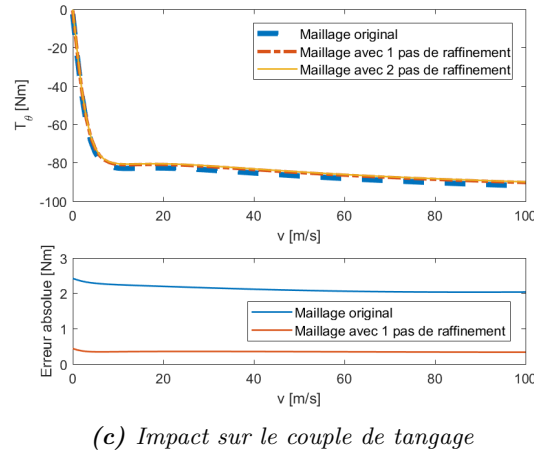
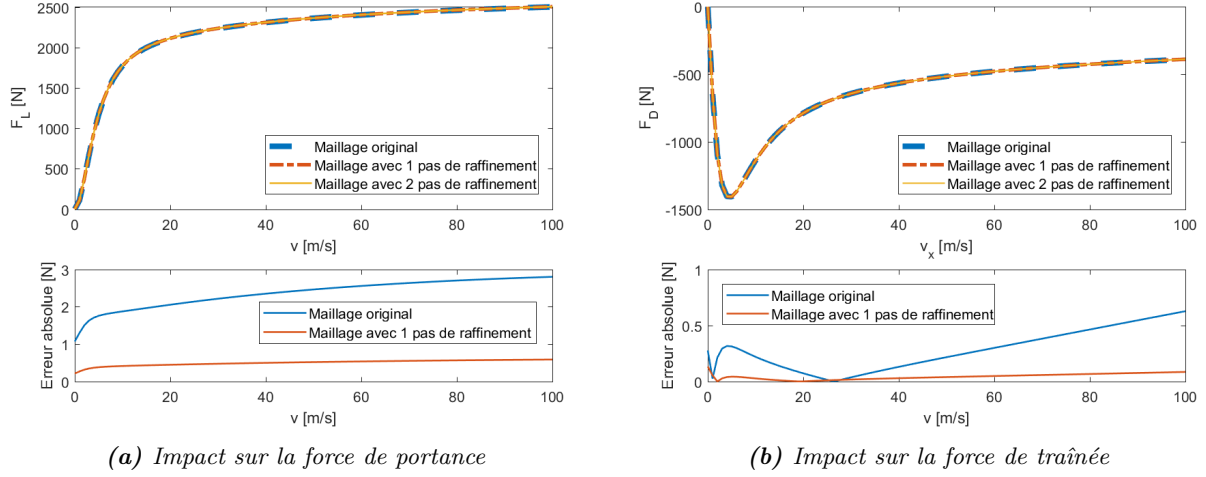


Figure 3.3 : Impact du raffinement du maillage sur les résultats de la simulation FEM pour $e = 3[\text{mm}]$ et $\theta = \theta_{\min}(e = 3\text{mm})$

Il convient cependant de remarquer les temps de calcul nécessaires pour obtenir ces différents résultats, tels que repris dans le Tableau 3.3. Au vu de ces temps de résolution, il a été décidé que le maillage original permet d'obtenir une solution satisfaisante pour un temps de calcul moindre alors que le raffinement du maillage ne permettrait d'obtenir des résultats que très légèrement meilleurs au prix d'un trop grand temps de calcul.

	$e = 10[\text{mm}]$ et $\theta = 0[\text{rad}]$	$e = 3[\text{mm}]$ et $\theta = \theta_{\min}(e = 3\text{mm})$
Maillage de base	4'1"	4'33"
Raffinement 1	17'29"	20'10"
Raffinement 2	1h18'13"	1h32'45"

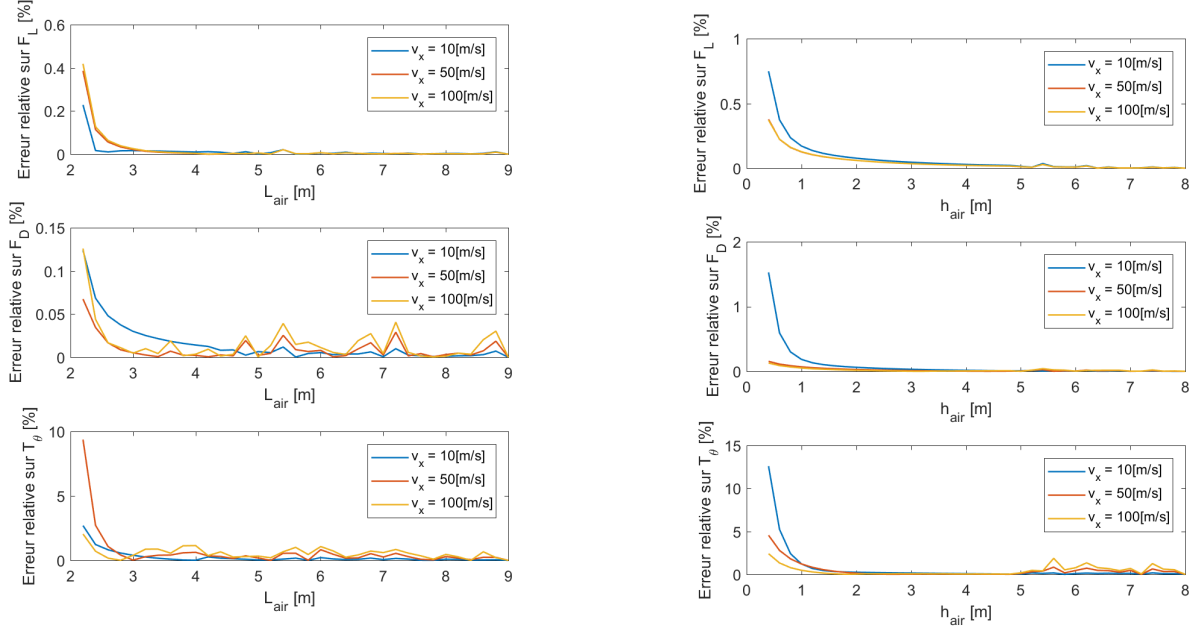
Tableau 3.3 : Temps de calcul nécessaire en fonction du maillage³

³Ordinateur 16G de RAM, Processeur Intel[®] Core[™] i7-7700HQ CPU @ 2.80GHz, 2808 MHz, 4 cœur(s), 8 processeurs logiques, connecté avec le logiciel COMSOL Mutliphysics[®] sur les serveurs de l'UCLouvain via une connexion SSH.

Impact des dimensions

Le respect strict des hypothèses (H5) et (H6) est impossible à satisfaire dans le modèle FEM. Pourtant, il est possible de trouver une longueur pour la voie en aluminium qui est la même pour la zone d'air (car elles devraient tous les deux être infinies) et une hauteur pour cette même zone d'air telles que les augmenter a un impact négligeable sur les résultats obtenus.

Les résultats de cette étude, synthétisés à la Figure 3.4, confirment bien les propos précédemment avancés. En outre, plus la taille de système est grande, plus le nombre d'éléments composant le maillage sera lui aussi élevé. Dès lors, il a été décidé de garder une longueur pour la zone d'air et la voie en aluminium de $5m$ et une hauteur de la zone d'air de $4m$.



(a) Impact de la longueur de la zone d'air et de la voie en aluminium avec $h_{air} = 4m$

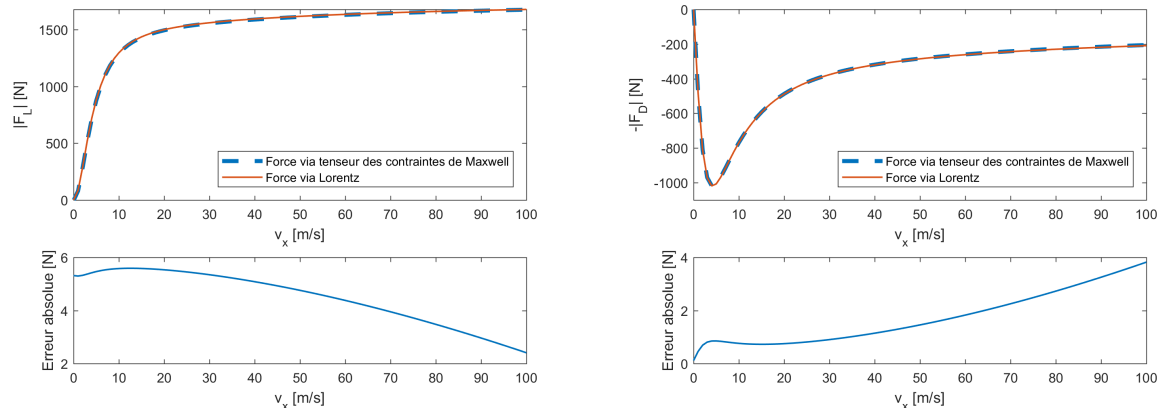
(b) Impact de la hauteur de la zone d'air, $l_{air} = 5m$

Figure 3.4 : Impact des dimensions du modèle

Tenseur des contraintes de Maxwell vs forces de Lorentz

La Figure 3.5 compare les résultats obtenus par intégration du tenseur de contraintes de Maxwell sur une surface entourant les aimants permanents et le fer avec les résultats obtenus par calcul des forces de Lorentz agissant sur la voie en aluminium. De fait, par principe d'action-réaction, ces résultats doivent être égaux en norme mais de direction opposée. La Figure 3.5a présente donc la valeur absolue de la force de portance et la Figure 3.5b présente l'opposé⁴ de la valeur absolue de la force de traînée. L'erreur entre ces deux résultats est très faible, justifiant une fois de plus la qualité des résultats obtenus par le modèle FEM.

⁴Car nous savons que si le ski se déplace dans la direction des x positifs, alors la force de traînée doit s'opposer au mouvement et donc être dirigée vers les x négatifs.



(a) Comparaison des forces de portance calculées

(b) Comparaison des forces de traînée calculées

Figure 3.5 : Comparaison des résultats obtenus grâce au tenseur des contraintes de Maxwell et grâce aux forces de Lorentz

3.2 Modèles de substitution

Le modèle éléments finis permet d'obtenir les forces de portance et de traînée ainsi que le couple de tangage qui s'appliquent au centre géométrique du système composé des aimants et du fer (qui est d'ailleurs considéré comme étant le centre de masse du ski), en fonction des trois paramètres cinématiques définis à la Sous-Section 3.1.1. Toutefois, comme expliqué au Chapitre 2, un couplage direct entre le modèle FEM et le modèle multicorps résulterait en un temps de calcul beaucoup trop long que pour être pertinent. Dès lors, deux modèles de substitution ont été conçus et étudiés afin de permettre un couplage efficace avec le modèle multicorps :

- un modèle basé sur l'interpolation des résultats du modèle FEM,
- un modèle Lumped dont l'identification des paramètres est réalisée sur base du modèle FEM.

3.2.1 Interpolation

Le premier modèle de substitution est basé sur l'interpolation des résultats préalablement calculés avec le modèle FEM. En effet, le modèle FEM permet d'obtenir un tableau de données contenant l'intensité des forces de traînée et de portance ainsi que celle du couple de tangage pour un certain nombre de valeurs discrètes des paramètres cinématiques. Ces valeurs de paramètres qui ont déjà été définies dans le Tableau 3.2 de la Sous-Section 3.1.1, vont former un maillage tri-dimensionnel dans lequel les valeurs des forces F_L et F_D et du couple T_θ sont connues aux noeuds. La base non-régulière (i.e. les éléments le composant ne sont pas des parallélogrammes) du maillage est représentée à la Figure 3.6. Notons que la 3^{ème} dimension du maillage (selon la vitesse v_x) est régulière car la vitesse du véhicule ne dépend pas et n'influence pas les deux autres paramètres cinématiques. Dès lors, l'interpolation sur ce maillage sera résolue en trois étapes :

1. Détermination des noeuds de l'élément dans lequel se trouve le système,
2. Interpolation bilinéaire sur le maillage 2D non linéaire entre les paramètres e et θ ,
3. Interpolation linéaire sur la 3^{ème} paramètre v_x .

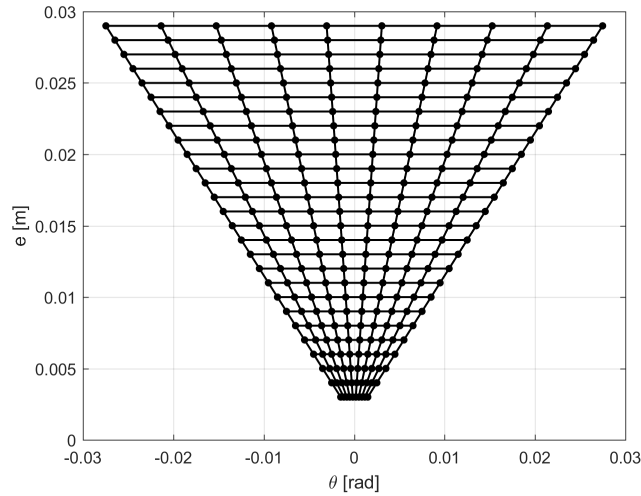


Figure 3.6 : Base du maillage d'interpolation

Détermination de l'élément d'intérêt du maillage

La première étape pour procéder à l'interpolation des valeurs obtenues grâce au logiciel COMSOL[®] est de déterminer dans quel élément du maillage tri-dimensionnel la configuration du ski se trouve à un instant t donné. Le maillage étant en 3D et composé d'éléments à base trapézoïdale, il faudrait, de manière générale,

déterminer huit valeurs nodales pour chacun des trois paramètres cinématiques (v_x, θ, e) ainsi que pour chacune des quantités à interpoler (F_L, F_D, T_θ) . Pourtant, par particularité du maillage étudié (i.e. un maillage composé de prismes droits à base trapézoïdale), il n'y a que quatre valeurs distinctes d'angle de tangage θ à déterminer ainsi que deux valeurs de vitesse v_x et de hauteur d'entrefer e (voir Figure 3.7).

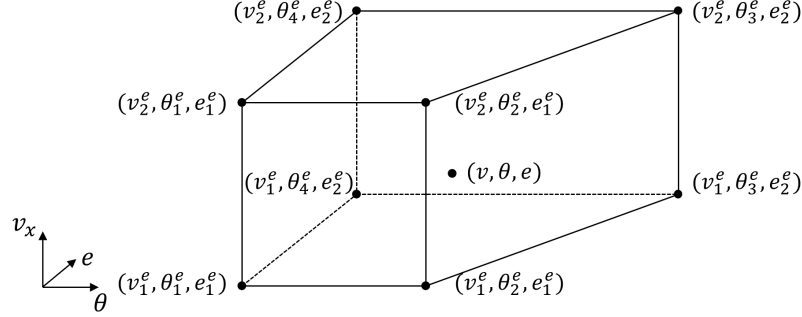


Figure 3.7 : Représentation d'un élément quelconque Ω_e du maillage 3D

Déterminer les valeurs nodales inférieures $(v_{x,k}, e_k)$ les plus proches de la configuration réelle de la capsule (v_x, e) peut se faire par utilisation de la division entière. La valeur nodale supérieure de ces deux paramètres est alors obtenue en ajoutant le pas du balayage paramétrique correspondant :

$$\begin{aligned} v_{x,k+1}^e &= v_{x,k}^e + \Delta v \\ e_{k+1}^e &= e_k^e + \Delta e \end{aligned}$$

L'intervalle et le pas du balayage paramétrique correspondant à l'angle de tangage n'étant pas constants, il faut les calculer sur base des deux valeurs e_1^e et e_2^e composant l'élément d'intérêt via les équations (3.6) :

$$\begin{aligned} \Delta\theta_1^e &= \frac{2\theta_{max}(e_1^e)}{N_\theta - 1} \\ \Delta\theta_2^e &= \frac{2\theta_{max}(e_2^e)}{N_\theta - 1} \end{aligned}$$

Il est alors possible d'obtenir la valeur nodale θ_1 , c'est à dire l'angle de tangage inférieur, la plus proche correspondant à la configuration réelle du ski pour e_1^e par utilisation de la division entière. Comme présenté à la Figure 3.8, la configuration du ski est donc dans le rectangle rouge.

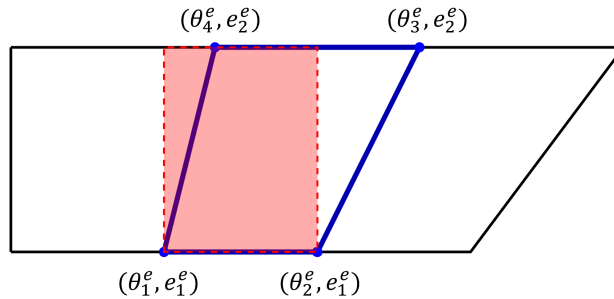


Figure 3.8 : Schéma du maillage

Dès lors, soit la configuration se trouve bien dans l'élément choisi (représenté en bleu sur la Figure 3.8), soit il appartient à l'élément se trouvant juste à sa gauche. Il n'est pour le moment pas possible de le déterminer.

Notons que si le ski se trouve dans une configuration qui n'est pas contenue dans le fichier de données, alors une extrapolation uniforme est utilisée.

Maintenant que toutes les valeurs nodales des différents paramètres cinématiques pour un élément quelconque du maillage Ω_e ont été trouvées, il reste à récupérer les huit valeurs nodales des forces F_L et F_D ainsi que celle du couple T_θ dans le fichier de données.

Interpolation bilinéaire sur e et θ

L'interpolation bilinéaire sur un maillage non-régulier peut être résolue grâce à un isomorphisme entre un élément d'intérêt du maillage non-régulier Ω_e et un élément parent $\hat{\Omega}$ défini dans le plan $\zeta = (\zeta, \eta)$ comme représenté à la Figure 3.9. Définissons alors un isomorphisme bilinéaire entre Ω_e et $\hat{\Omega}$:

$$\theta = \alpha_1 + \alpha_2\zeta + \alpha_3\eta + \alpha_4\zeta\eta \quad (3.7a)$$

$$e = \beta_1 + \beta_2\zeta + \beta_3\eta + \beta_4\zeta\eta \quad (3.7b)$$

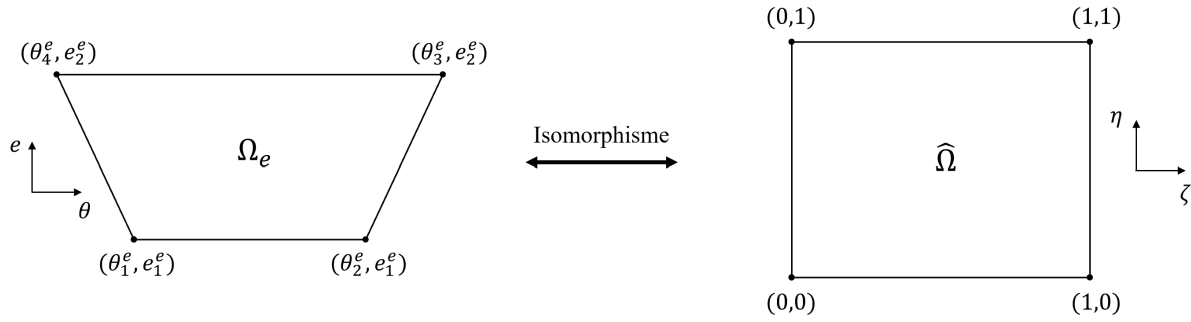


Figure 3.9 : Isomorphisme entre un élément quelconque du maillage non-régulier Ω_e et l'élément parent $\hat{\Omega}$

Par construction, les sommets de l'élément quelconque Ω_e doivent correspondre aux sommets de l'élément parent $\hat{\Omega}$. Ceci permet de définir les coefficients inconnus α_i et β_i pour le maillage étudié :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \theta_1^e & \beta_1 &= e_1^e \\ \alpha_2 &= \theta_2^e - \theta_1^e = \Delta\theta_1^e & \beta_2 &= 0 \\ \alpha_3 &= \theta_4^e - \theta_1^e & \beta_3 &= e_2^e - e_1^e = \Delta e \\ \alpha_4 &= \theta_1^e - \theta_2^e + \theta_3^e - \theta_4^e = \Delta\theta_2^e - \Delta\theta_1^e & \beta_4 &= 0 \end{aligned}$$

De cette manière, la correspondance entre $\hat{\Omega}$ et Ω_e est connue. Il reste alors à inverser les équations (3.7) pour obtenir la relation permettant de passer de Ω_e à $\hat{\Omega}$. Or, étant donné que les relations (3.7) ne sont pas linéaires, inverser ces fonctions a alors pour résultat :

$$\eta = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.8)$$

où pour faciliter l'écriture :

$$a = -\alpha_4 \Delta e; \quad b = \alpha_4(e - e_1^e) - \alpha_2 \Delta e; \quad c = \alpha_2(e - e_1^e) \quad (3.9)$$

Il faut donc se demander si les deux solutions apportées par (3.8) sont valides pour notre maillage ou si seulement l'une d'entre elles l'est. Dans [33], il est mentionné que pour tout quadrilatère Ω_e convexe, la transformation avec l'élément parent $\hat{\Omega}$ sera toujours bijective. Étant donné que le maillage utilisé est composé d'éléments quadrilatères convexes, une seule des deux solutions sera effectivement valide. Il ne reste ainsi qu'à trouver laquelle. Pour ce faire, analysons les relations (3.9) :

$$\begin{aligned} a &= -\underbrace{(\Delta\theta_2^e - \Delta\theta_1^e)}_{>0} \underbrace{(\Delta e)}_{>0} < 0 \\ b &= \Delta\theta_2^e(e - e_1^e) - \Delta\theta_1^e(e - e_1^e + \Delta e) \end{aligned}$$

Or, par construction du maillage, $\Delta\theta_2 > \Delta\theta_1$ et $e > e_1$, donc :

$$\begin{aligned} \frac{\Delta\theta_2^e}{\Delta\theta_1^e} &< \left(1 + \frac{\Delta e}{e - e_1^e}\right) \\ \Delta\theta_2^e(e - e_1^e) &< \Delta\theta_1^e(e - e_1^e + \Delta e) \\ \Rightarrow b &< 0 \end{aligned}$$

Sachant que $\eta \in [0, 1]$, il en ressort logiquement que seule une des deux solutions pour η est acceptable. La transformation permettant de passer de Ω_e à $\hat{\Omega}$ est donc définie par :

$$\eta = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (3.10a)$$

$$\zeta = \frac{\theta - \alpha_1 - \alpha_3\eta}{\alpha_4\eta + \alpha_2} \quad (3.10b)$$

C'est uniquement à partir de cette étape, qu'il est possible de déterminer si le choix de l'élément est correct. Comme le présentait la Figure 3.8, nous avons à ce moment le choix entre l'élément bleu et l'élément se trouvant juste à sa gauche. Nous avons alors arbitrairement choisi l'élément bleu. Or, si ce choix n'est pas correct, la valeur de ζ obtenue grâce à l'équation (3.10b) sera négative. Ceci signifie que la configuration du ski appartient à l'élément de gauche et non pas à l'élément bleu. Il faut donc modifier le choix de l'élément du maillage et recommencer les calculs d'interpolation. Remarquons tout de même que, par particularité du maillage, la valeur de η ne changera pas.

L'interpolation globale $u^h(\mathbf{x})$ des valeurs nodales U_j peut alors s'écrire :

$$u^h(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^N U_j \tau_j(\mathbf{x}) \quad \text{où } \mathbf{x} = (\theta, e) \quad (3.11)$$

dans laquelle, U_j correspond à la valeur nodale globale j , et $\tau_j(\mathbf{x})$ la fonction de forme globale j . Ces dernières sont définies pour un élément Ω_e :

$$\tau_e(\mathbf{x}) = \phi_1^e(\mathbf{x}) \quad (3.12a)$$

$$\tau_{e+1}(\mathbf{x}) = \phi_2^e(\mathbf{x}) \quad (3.12b)$$

$$\tau_{e+2}(\mathbf{x}) = \phi_3^e(\mathbf{x}) \quad (3.12c)$$

$$\tau_{e+3}(\mathbf{x}) = \phi_4^e(\mathbf{x}) \quad (3.12d)$$

où les $\phi_i^e(\mathbf{x}) = \phi_i(\zeta(\mathbf{x}), \eta(\mathbf{x}))$ sont les fonctions de forme locale de l'élément parent. Elles sont définies tel que $\phi_i^e(\mathbf{x})$ doit s'annuler pour tous les noeuds sauf le noeud i où elle vaut 1 :

$$\phi_1(\zeta, \eta) = (1 - \zeta)(1 - \eta) \quad (3.13a)$$

$$\phi_2(\zeta, \eta) = \zeta(1 - \eta) \quad (3.13b)$$

$$\phi_3(\zeta, \eta) = \zeta\eta \quad (3.13c)$$

$$\phi_4(\zeta, \eta) = (1 - \zeta)\eta \quad (3.13d)$$

L'interpolation bilinéaire des forces F_L et F_D ainsi que du couple T_θ pour e et θ pour une vitesse nodale $v_{x,k}$ donnée est obtenue par combinaison des équations (3.11), (3.12) et (3.13).

Interpolation linéaire sur v_x

Une fois l'interpolation bilinéaire calculée pour une vitesse $v_{x,k}$ et $v_{x,k+1}$ appartenant au maillage, il ne reste alors qu'à procéder à une interpolation linéaire entre ces deux valeurs :

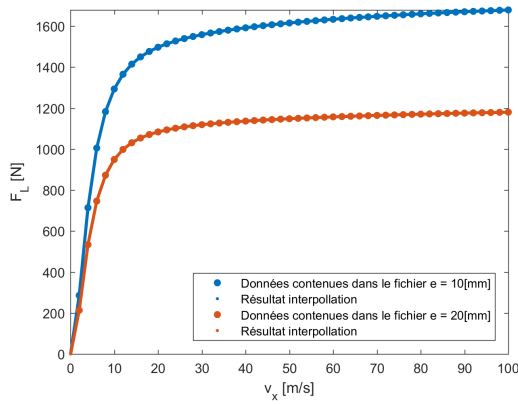
$$F_L(v_x, \theta, e) = F_L(v_{x,k}^e, \theta, e) \frac{v_{x,k+1}^e - v_x}{\Delta v} + F_L(v_{x,k+1}^e, \theta, e) \frac{v_x - v_{x,k}^e}{\Delta v} \quad (3.14a)$$

$$F_D(v_x, \theta, e) = F_D(v_{x,k}^e, \theta, e) \frac{v_{x,k+1}^e - v_x}{\Delta v} + F_D(v_{x,k+1}^e, \theta, e) \frac{v_x - v_{x,k}^e}{\Delta v} \quad (3.14b)$$

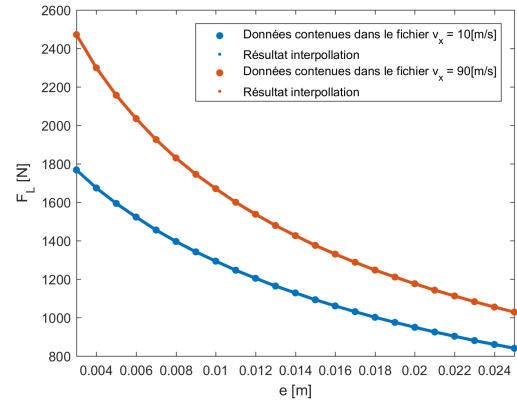
$$T_\theta(v_x, \theta, e) = T_\theta(v_{x,k}^e, \theta, e) \frac{v_{x,k+1}^e - v_x}{\Delta v} + T_\theta(v_{x,k+1}^e, \theta, e) \frac{v_x - v_{x,k}^e}{\Delta v} \quad (3.14c)$$

Vérification des résultats

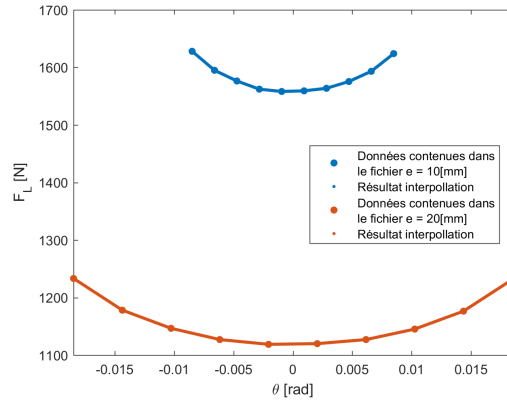
La Figure 3.10 permet de vérifier le bon fonctionnement de l'algorithme d'interpolation. Les courbes reliant deux données contenues dans le fichier sont formées d'un ensemble de points tous calculés par l'algorithme. La vérification n'est ici présentée que pour la force de portance F_L mais les résultats sont tout à fait semblables pour la force de traînée F_D et le couple de tangage T_θ .



(a) Variation de la vitesse avec hauteur d'entrefer et tangage fixes ($\theta = 0[\text{rad}]$)



(b) Variation de la hauteur d'entrefer avec vitesse et tangage fixes ($\theta = 0[\text{rad}]$)



(c) Variation de l'angle de tangage avec hauteur d'entrefer avec vitesse fixes ($v_x = 30[\text{m/s}]$)

Figure 3.10 : Vérification de l'interpolation sur la force de portance

3.2.2 Modèle Lumped

La littérature [13], [14], [18], [23], [31], présente de manière abondante la description d'un système EDS au travers d'un modèle Lumped du circuit magnétique. Cela signifie que le système électrodynamique est décrit sur base d'un circuit électrique équivalent (voir Figure 3.11). Pour ce faire, un certain nombre d'hypothèses simplificatrices doivent être prises :

- La voie est considérée comme un ensemble d'enroulements rectangulaires mis en court circuit de largeur w et de hauteur h_{alu} dans le plan $(\underline{\hat{y}}, \underline{\hat{z}})$, (H7)
- L'épaisseur des conducteurs est supposée négligeable dans les directions $\underline{\hat{y}}$ et $\underline{\hat{z}}$, (H8)
- L'épaisseur des enroulements dans la direction $\underline{\hat{x}}$ est négligeable devant $k^{-1} = \frac{\lambda}{2\pi}$. Autrement dit, le transitoire électrique est négligé, (H9)
- La variation du champ magnétique $\mathbf{B}$ sur la hauteur de la voie en aluminium est négligée (i.e. $e^{kh_{alu}} \ll 1$), (H10)
- Les interactions entre les différents circuits sont négligées. Autrement dit, les inductances mutuelles (M_{ij}) entre les enroulements sont négligées par rapport à leur inductance propre (L_i et L_j), (H11)
- Le ski se déplace avec une vitesse purement longitudinale ($\mathbf{v}_{ski} = v_x \underline{\hat{x}}$), (H12)
- Le champ magnétique varie sinusoïdalement dans le temps, (H13)
- Problème purement plan. Seules la dimension longitudinale $\underline{\hat{x}}$ et la dimension verticale $\underline{\hat{z}}$ sont considérées. La composante selon $\underline{\hat{y}}$ du champ magnétique est considérée nulle. (H14)

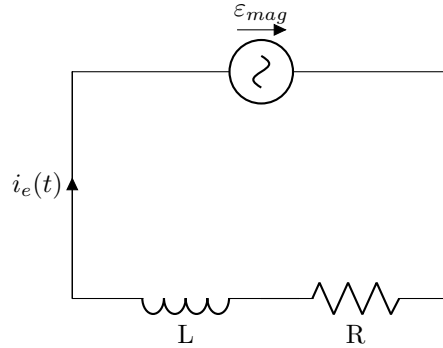


Figure 3.11 : Circuit équivalent d'un système EDS

Dès lors, en étudiant la dynamique du circuit, il est possible de calculer les forces électrodynamiques agissant sur le système via les forces de Lorentz qui s'exercent sur un conducteur parcouru d'un courant, plongé dans un champ magnétique (aussi appelées forces de Laplace). Finalement, la détermination des paramètres du modèle peut être faite sur base des résultats obtenus avec le modèle FEM.

Selon les hypothèses (H13) et (H14), et au regard de la littérature [13], [14], [18], [23], [31], les composantes de la densité de flux magnétique $\mathbf{B}$ sont données par :

$$B_x(z, t) = B_0 \sin(kx) e^{-k(e-z)} = B_0 \sin(kvt) e^{-k(e-z)} \quad (3.15a)$$

$$B_z(z, t) = B_0 \cos(kx) e^{-k(e-z)} = B_0 \cos(kvt) e^{-k(e-z)} \quad (3.15b)$$

où pour simplifier l'écriture :

$$k = \frac{2\pi p}{\lambda} \quad \text{et} \quad B_0 = B_r (1 - e^{-kh_{mag}}) \frac{\sin\left(\frac{\pi}{M}\right)}{\frac{\pi}{M}}$$

D'après la loi de Faraday, tout champ magnétique variable génère, dans un matériau conducteur, une force électromotrice :

$$\varepsilon_{mag} = -\frac{\partial \phi}{\partial t} \quad (3.16)$$

Dans cette équation, ϕ représente le flux magnétique intercepté par le conducteur et est exprimé comme:

$$\phi = \int_S \mathbf{B}(t) \cdot d\mathbf{S}$$

Donc, d'après les hypothèses (H7), (H8) et (H10) et les équations (3.15) et (3.16), on obtient la force électromotrice induite dans le système :

$$\varepsilon_{mag} = \underbrace{\frac{B_0 w}{k} e^{-ke}}_{=\phi_0} \omega \cos(\omega t)$$

Les lois de Kirchhoff appliquées au circuit électrique de la Figure 3.11, permettent de faire le lien entre la force électromotrice précédemment obtenue et le courant circulant dans le conducteur électrique :

$$\varepsilon_{mag} = Ri_e(t) + L \frac{di_e(t)}{dt}$$

Cette équation différentielle peut être résolue dans le domaine de Laplace :

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\{\phi_0 \omega \cos(\omega t)\} &= \mathcal{L}\left\{Ri_e(t) + L \frac{di_e(t)}{dt}\right\} \\ \Rightarrow I_e(s) &= \frac{\phi_0 \omega}{L} \frac{s}{\left(s + \frac{R}{L}\right)(s^2 + \omega^2)} \end{aligned} \quad (3.17)$$

Via la décomposition en fractions en simple, l'utilisation de la transformée de Laplace inverse et en négligeant le transitoire électrique (i.e. le terme $e^{-\frac{R}{L}t}$), le courant circulant dans le circuit exprimé dans le domaine temporel devient (développement complet à l'Annexe B.1) :

$$i_e(t) = \frac{\frac{\phi_0}{L}}{1 + (R/\omega L)^2} [R/\omega L \cos(\omega t) + \sin(\omega t)] \quad (3.18)$$

Finalement, l'expression de la force subie par la voie en aluminium est donnée par la formule des forces de Laplace⁵ :

$$\mathbf{F} = I\mathbf{l} \times \mathbf{B}(z=0, t)$$

⁵Les forces de Laplace sont une particularisation des forces de Lorentz qu'un champ magnétique exerce sur un conducteur parcouru d'un courant électrique.

Selon l'Hypothèse (H7), le courant se déplace suivant les directions $\hat{y}$ et $\hat{z}$. Les forces de portance et de traînée sont donc obtenues par :

$$F_L = i_e(t)wB_x(t) \quad (3.19a)$$

$$F_D = i_e(t)wB_z(t) \quad (3.19b)$$

Dès lors, en utilisant les expressions (3.15), (3.18) et (3.19), et en moyennant ces expressions sur une période, on trouve les expressions analytiques des forces de portance et de traînée (développement complet à l'Annexe B.2) :

$$\langle F_L \rangle = \frac{B_0^2 w^2}{2kL} \frac{1}{1 + (R/\omega L)^2} e^{-2ke} \quad (3.20a)$$

$$\langle F_D \rangle = \frac{B_0^2 w^2}{2kL} \frac{R/\omega L}{1 + (R/\omega L)^2} e^{-2ke} \quad (3.20b)$$

Identification des paramètres

Dans l'expression des forces obtenues grâce au modèle Lumped, se trouvent trois paramètres à identifier :

- la résistance du circuit électrique R ,
- l'inductance propre du circuit électrique L ,
- l'amplitude du champ magnétique B_0 .

Il convient d'abord de remarquer deux points importants. Premièrement, en choisissant la vitesse de déplacement particulière pour laquelle $F_L(\omega^*) = F_D(\omega^*)$, les équations (3.20) définissent une relation entre l'inductance propre et la résistance du circuit électrique :

$$R = \omega^* L \quad (3.21)$$

Cela permet d'enlever un paramètre à identifier.

Deuxièmement, le problème est mal posé. En effet, en reprenant les équations (3.20) et y injectant la relation (3.21), on peut les réécrire sous la forme :

$$\langle F_L \rangle = \frac{w^2}{2k} \frac{B_0^2}{L} \frac{1}{1 + (\omega^*/\omega)^2} e^{-2ke}$$

$$\langle F_D \rangle = \frac{w^2}{2k} \frac{B_0^2}{L} \frac{\omega^*/\omega}{1 + (\omega^*/\omega)^2} e^{-2ke}$$

Dès lors, un choix de paramètres $\beta^* = ((B_0^2)^*, L^*)$ donne le même résultat que le choix $\beta^{**} = a\beta^* = (a(B_0^2)^*, aL^*)$, et ce pour toute constante a . Le problème d'optimisation possède donc une infinité de solutions. Pour contourner cet écueil, il a été décidé d'ajouter une constante à identifier dans la force de traînée :

$$\langle F_L \rangle = \frac{w^2}{2k} \frac{B_0^2}{L} \frac{1}{1 + (\omega^*/\omega)^2} e^{-2ke}$$

$$\langle F_D \rangle = C \frac{w^2}{2k} \frac{B_0^2}{L} \frac{\omega^*/\omega}{1 + (\omega^*/\omega)^2} e^{-2ke}$$

Le vecteur des paramètres à identifier devient $\beta = (C, B_0^2, L)^T$.

L'identification de ces paramètres est faite au moyen d'un estimateur de moindres carrés de manière à correspondre au mieux aux résultats obtenus avec le modèle FEM. Ceci peut être réalisé via la fonction *lsqnonlin(...)* du logiciel Matlab[®]. Celle-ci permet de trouver le vecteur de paramètres $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)^T$ tel que :

$$\min_{\beta} \left(\sum_{i=1}^n f(x_i, \beta)^2 \right)$$

où l'on peut définir la fonction $f(x, \beta)$ comme étant la fonction d'erreur. Pour ce travail, trois fonctions d'erreur ont été utilisées :

- la norme de la différence des forces de portance et de traînée :

$$f_1(v_x, \beta) = \sqrt{(F_{L,FEM} - F_{L,Lumped}(v_x, \beta))^2 + (F_{D,FEM} - F_{D,Lumped}(v_x, \beta))^2}$$

- la norme de la différence des forces normalisées de portance et de traînée :

$$f_2(v_x, \beta) = \sqrt{\left(\frac{F_{L,FEM} - F_{L,Lumped}(v_x, \beta)}{F_{L,FEM}} \right)^2 + \left(\frac{F_{D,FEM} - F_{D,Lumped}(v_x, \beta)}{F_{D,FEM}} \right)^2}$$

- la différence des normes des forces de portance et de traînée :

$$f_3(v_x, \beta) = \sqrt{F_{L,FEM}^2 + F_{D,FEM}^2} - \sqrt{F_{L,Lumped}(v_x, \beta)^2 + F_{D,Lumped}(v_x, \beta)^2}$$

Par ailleurs, la fonction *lsqnonlin(...)* de Matlab[®] a besoin de valeurs initiales pour les paramètres recherchés. Or, la fonction d'optimisation possède un grand nombre d'optimums locaux qui ne peuvent pas être différenciés de l'optimum global par l'algorithme de minimisation⁶. Cela se caractérise par une très grande variabilité des résultats en fonction des conditions initiales. Dès lors, la recherche des paramètres se fait par itération en générant de manière aléatoire les valeurs initiales et en ne conservant que celle qui donne la plus petite erreur par rapport aux données fournies par le modèle FEM.

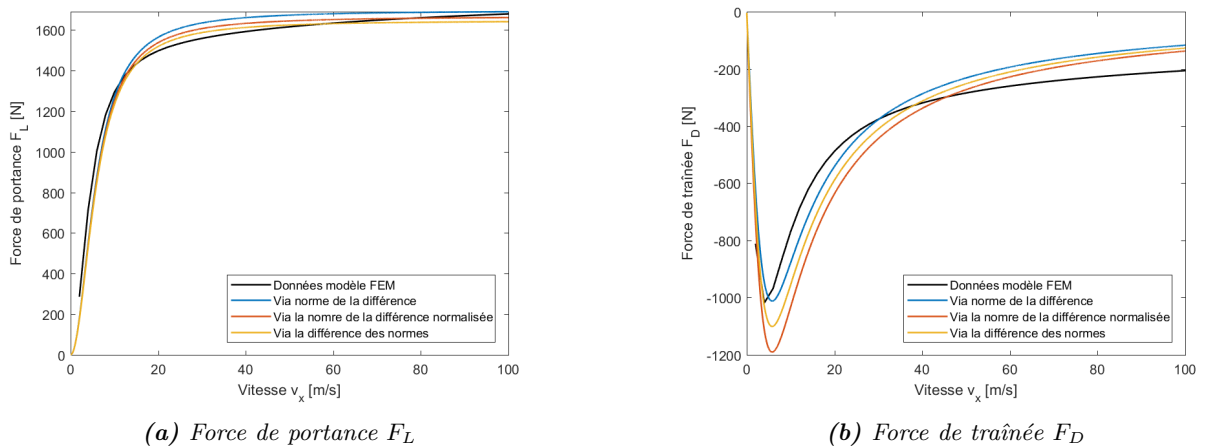


Figure 3.12 : Résultats de l'identification des paramètres

⁶La fonction *lsqnonlin(...)* a été utilisée avec l'algorithme à régions de confiance car celui-ci permet de limiter les valeurs possibles des paramètres à un intervalle.

La Figure 3.12 présente les résultats obtenus. Sur celle-ci, on peut voir que les trois fonctions d'erreurs utilisées donnent des résultats très similaires. Cependant, les solutions obtenues ne correspondent pas parfaitement aux résultats du modèle FEM. De plus, deux itérations successives de l'algorithme ne donnent pas exactement les mêmes résultats. La Figure 3.13 montre la variabilité des trois paramètres à la suite de dix itérations successives de l'algorithme d'identification. Il faut tout de même remarquer que, comme le montre la Figure 3.14, le résidu (i.e. la différence entre les résultats obtenus via le modèle Lumped et ceux découlant du modèle FEM) correspondant pour chacune de ces identifications reste du même ordre de grandeur.

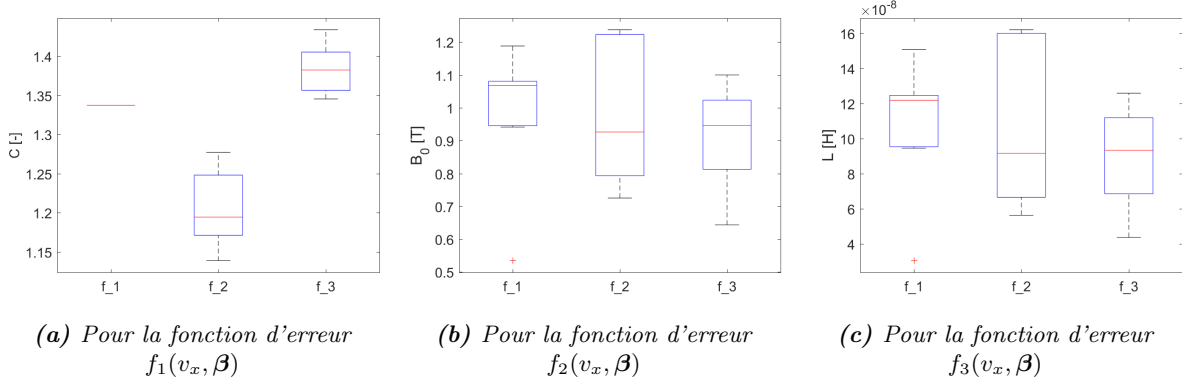


Figure 3.13 : Résidu de l'identification des paramètres

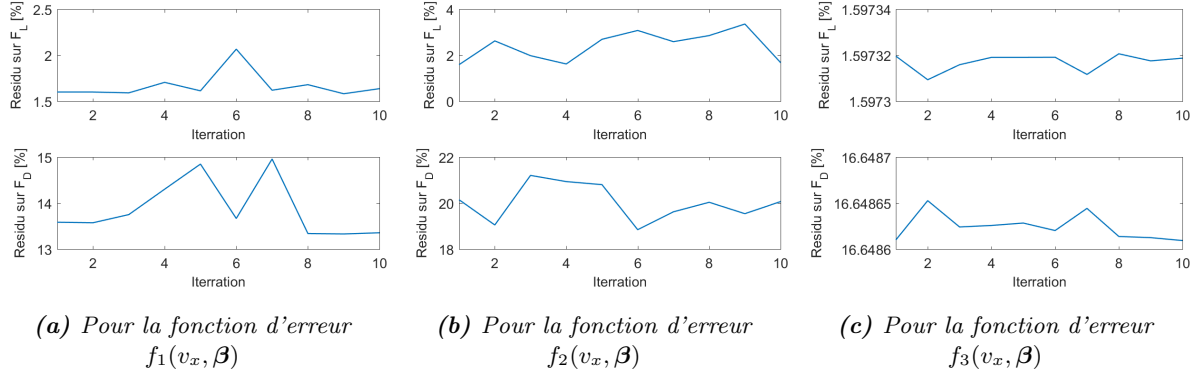


Figure 3.14 : Résidu de l'identification des paramètres

Finalement, une fois les paramètres identifiés, il faut s'assurer que les résultats du modèle Lumped restent cohérents avec ceux du modèle FEM pour différentes valeurs d'entrefer e . Jusqu'ici, l'identification n'a été faite que sur une plage de vitesse ($v_x \in [1, 100][m/s]$)⁷ et pour une hauteur d'entrefer fixe ($e = 10[mm]$). Or, si le modèle est valide, cette identification ne devrait pas dépendre de la valeur de l'entrefer. Malheureusement, comme le prouve la Figure 3.15, lorsque l'entrefer change, les forces électrodynamiques calculées avec le modèle Lumped ne correspondent plus du tout à celles obtenues avec le modèle éléments finis.

Ces résultats nous amènent à conclure que le modèle Lumped ne permet pas d'obtenir un modèle électrodynamique satisfaisant pour le système Hyperloop étudié. Cela est dû aux hypothèses (H7) et (H10) formulées pour obtenir ce modèle qui s'avèrent incorrectes ou exagérées pour le système considéré. En effet, l'hypothèse (H7) stipule que la voie est composée d'enroulements rectangulaires de conducteurs dans lesquels circule un courant électrique. Or, dans notre système, la voie est une plaque conductrice de courant électrique pleine. L'hypothèse (H10) stipule, quant à elle, que la variation du champ $\mathbf{B}$ sur la hauteur de la voie est nulle. Cette

⁷Prendre la vitesse $v_x = 0m/s$ n'est pas possible car les forces correspondantes sont nulles, ce qui donnait des résultats infinis à cause des divisions par zéro dans l'algorithme.

hypothèse est justifiée pour des systèmes où $\lambda < h_{voie}$ ce qui permet de négliger $e^{-kh_{atu}}$ devant 1. Toutefois, ceci n'est pas du tout vrai dans pour notre système. D'ailleurs, nous avons pour celui-ci, $e^{-kh_{atu}} = 0.923$, ce qui n'est pas du tout négligeable devant 1.

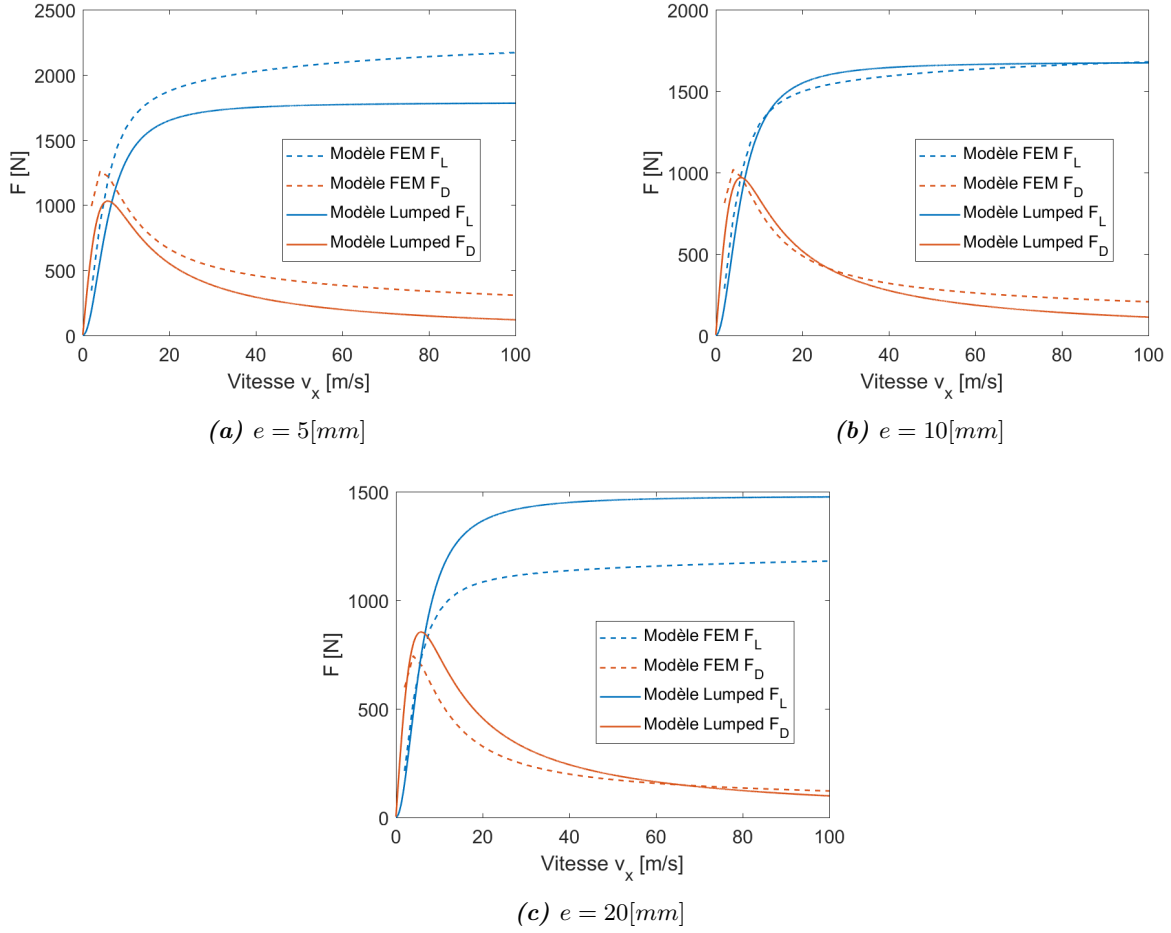


Figure 3.15 : Forces électrodynamiques calculées avec le modèle Lumped après identification des différents paramètres

3.3 Modélisation en série de Fourier

Le but de l'analyse en développement de Fourier est de résoudre analytiquement les équations de Maxwell (3.1) dans un système donné. Pour résoudre ce système d'équations différentielles, nous allons utiliser la formulation du vecteur potentiel pour réécrire le système d'équations (3.1). Ce vecteur potentiel noté $\mathbf{A}$ est défini tel que :

$$\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.22)$$

Le vecteur potentiel n'est donc pas défini de manière unique et nécessite une jauge pour être fixé. Une manière assez courante de procéder est d'utiliser la jauge de Coulomb. Celle-ci fixe le vecteur potentiel en imposant :

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = 0 \quad (3.23)$$

Ce faisant, les équations de Maxwell se réduisent à une seule équation différentielle. Celle-ci est cependant bien trop complexe pour pouvoir être résolue analytiquement dans l'ensemble du système. Dès lors, nous allons diviser notre système en différents sous-domaines (aussi appelés régions). Cette division en sous-domaines doit respecter deux principes-clés :

- l'équation différentielle à résoudre, dans le sous-domaine, doit être la plus simple possible. Pour ce faire, s'assurer que μ et σ soient constants dans un sous-domaine facilite grandement l'équation.
- l'imposition des conditions frontières doit être relativement simple. Comme le système est divisé en plusieurs sous-domaines, le passage du sous-domaine ν au sous-domaine $\nu + 1$ est assuré par des conditions frontières. Celle-ci sont obtenues sur base des équations de Maxwell :

$$\hat{n} \cdot (\mathbf{B}^{(\nu)} - \mathbf{B}^{(\nu+1)}) = 0 \quad (3.24a)$$

$$\hat{n} \times (\mathbf{H}^{(\nu)} - \mathbf{H}^{(\nu+1)}) = \mathbf{J}_s \quad (3.24b)$$

Le vecteur $\hat{n}$ correspond au vecteur normal unitaire sortant de la frontière et est défini comme représenté à la Figure 3.16.

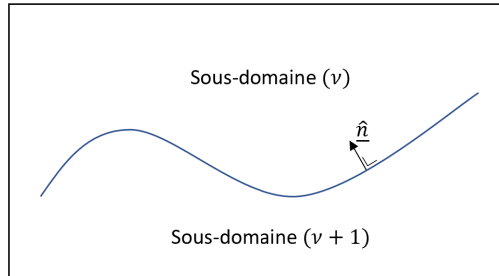


Figure 3.16 : Définitions du vecteur normal unitaire sortant $\hat{n}$

Le système d'intérêt est présenté à la Figure 3.17. Celui-ci consiste en un ski composé de fer et d'un réseau d'aimants permanents (région IV) lévitant au-dessus d'une plaque d'aluminium (région II). Les régions I et III entourant la plaque d'aluminium sont composées d'air.

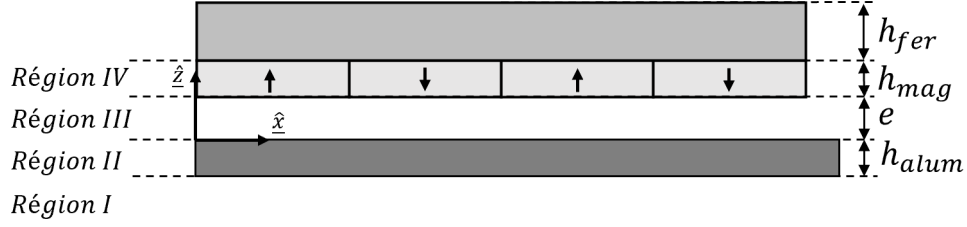


Figure 3.17 : Schéma du système avec représentation des régions et le choix de repère

Afin de faciliter la résolution analytique du problème, les hypothèses suivantes sont utilisées :

- Problème purement plan. Seule la dimension longitudinale $\hat{x}$ et la dimension verticale $\hat{z}$ sont considérées. La composante selon $\hat{y}$ du champ magnétique est considérée nulle, (H15)
- La solution se répète périodiquement à l'infini dans la direction x (i.e. on néglige les effets de bord), (H16)
- Le fer est de perméabilité infinie ($\mu_{fer} = \infty$), (H17)
- La perméabilité des aimants est la même que celle de l'air ($\mu_{mag} = \mu_{air} = \mu_0$), (H18)
- Le ski se déplace avec une vitesse purement longitudinale ($\mathbf{v}_{ski} = v_x \hat{x}$). (H19)

Grâce à l'hypothèse (H15), il est possible de montrer que le vecteur potentiel se dégénère en un vecteur à une seule composante (voir Annexe C). Le vecteur potentiel $\mathbf{A}$ s'écrit alors :

$$\mathbf{A}^{(\nu)} = A^{(\nu)}(x, z) \hat{y} \quad (3.25)$$

Via l'équation (3.25) et la définition du vecteur potentiel donnée par l'équation (3.22), nous obtenons l'expression du champ magnétique en fonction du vecteur potentiel :

$$\mathbf{B}^{(\nu)} = \frac{\partial A^{(\nu)}}{\partial z} \hat{x} - \frac{\partial A^{(\nu)}}{\partial x} \hat{z} \quad (3.26)$$

Par ailleurs, le référentiel choisi pour résoudre le problème est fixe avec le ski. De cette manière, aucune quantité ne dépend du temps, ce qui permet de simplifier considérablement les équations de Maxwell :

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0 \quad (3.27a)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \mathbf{J} \quad (3.27b)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad (3.27c)$$

Le terme source $\mathbf{B}_0$ dû au champ rémanent⁸ des aimants permanents forme, pour le réseau d'aimants considéré, un signal carré d'amplitude B_r . Il peut donc être réécrit sous la forme d'une série de Fourier réelle :

$$\mathbf{B}_0 = \frac{4B_r}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\sin\left(m \frac{2\pi p}{\lambda} x\right)}{m} \hat{z} \quad \text{avec } m = 1, 3, 5, \dots \quad (3.28)$$

⁸Champ magnétique présent dans un matériau en l'absence de tout champ inductif.

La démonstration formelle de cette expression est donnée dans l'Annexe D.1. La suite de la résolution du problème s'inspire très fort de l'article [34] présentant une résolution générale des équations de Maxwell via un modèle basé sur un développement en série de Fourier. Dans celui-ci, les séries de Fourier sont écrites sous forme d'exponentielles complexes. Comme le système étudié est cartésien, la solution du problème est de la forme :

$$A^{(\nu)}(x, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{n,m}^{(\nu)}(z) e^{j \left(\frac{2m\pi}{T^{(\nu)}} (x - x_0^{(\nu)}) - n\omega t \right)} \quad (3.29)$$

où n fait référence aux harmoniques temporelles et k aux harmoniques spatiales. Comme déjà précisé, le problème étudié est indépendant du temps ($n = 0$). Dans le système considéré, tous les sous-domaines sont dits périodiques car ils s'étendent sur l'entière d'une période le long de la direction $\hat{x}$. La période des différents sous-domaines est donc la même et vaut $\frac{\lambda}{p}$ avec p , le nombre de paires de pôles. De plus, $x = x_0^{(\nu)}$, la position de la première frontière périodique du sous-domaine ν est la même pour tous les sous-domaines. L'expression (3.29) se simplifie pour donner :

$$A^{(\nu)}(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{0,m}^{(\nu)}(z) e^{j \frac{2\pi p}{\lambda} m (x - x_0)} \quad (3.30)$$

Le terme x_0 est obtenu en réécrivant le terme source (3.28) sous forme d'une série de Fourier complexe (voir Annexe D.2 pour la démonstration détaillée) :

$$B_0 = \frac{2B_r}{j\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m} e^{j \frac{2\pi p}{\lambda} m x} \hat{z} \quad \text{avec } m = \dots, -5, -3, -1, 1, 3, 5, \dots \quad (3.31)$$

ce qui par inspection donne $x_0 = 0$ et permet donc de réécrire l'équation (3.30) :

$$A^{(\nu)}(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} A_{0,m}^{(\nu)}(z) e^{j \frac{2\pi p}{\lambda} m x} \quad (3.32)$$

Les termes $A_{0,m}^{(\nu)}$ varient en fonction du type d'équation à résoudre et donc du sous-domaine considéré. Ce sont ces termes qui seront recherchés pour les différentes régions dans la section suivante.

3.3.1 Résolution dans les différents sous-domaines

Résolution dans le sous-domaine I

Ce sous-domaine est composé d'air, il n'y a donc pas de terme source :

$$\mathbf{B}^{(I)} = \mu_0 \mathbf{H}^{(I)} \quad (3.33)$$

L'air étant un isolant, sa conductivité est considérée nulle. L'équation (3.27b) devient :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{H}^{(I)} &= \mathbf{0} \\ \downarrow (3.33) \\ \nabla \times \mathbf{B}^{(I)} &= \mathbf{0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \downarrow (3.22) \\
& \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}^{(I)}) = \mathbf{0} \\
& \downarrow (3.23) \\
& \nabla^2 \mathbf{A}^{(I)} = \mathbf{0}
\end{aligned}$$

qui est donc l'équation de Laplace dans un repère cartésien. La solution de cette équation est donnée par l'équation (3.32) avec :

$$A_{0,m}^{(I)}(z) = C_{0,m}^{(I)} e^{\frac{2\pi p}{\lambda}|m|z} + D_{0,m}^{(I)} e^{-\frac{2\pi p}{\lambda}|m|z} \quad (3.34)$$

Pour trouver les constantes d'intégration $C_{0,m}^{(I)}$ et $D_{0,m}^{(I)}$, il faut utiliser les conditions limites du sous-domaine I :

1. toutes les quantités électromagnétiques tendent vers 0 lorsque z tend vers $-\infty$.

$$A_{0,m}^{(I)}(-\infty) = D_{0,m}^{(I)} e^{\infty} = 0$$

$$\boxed{D_{0,m}^{(I)} = 0} \quad (\text{CF.1})$$

2. les conditions de continuité entre les sous-domaines I et II. Pour ce faire, il faut d'abord résoudre le problème dans le sous-domaine II.

Résolution dans le sous-domaine II

Ce sous-domaine est composé d'aluminium, il n'y a donc pas de terme source. De plus, la perméabilité relative de l'aluminium est égale à l'unité :

$$\mathbf{B}^{(II)} = \mu_0 \mathbf{H}^{(II)} \quad (3.35)$$

Le repère étant fixe au ski, la plaque d'aluminium a donc une vitesse non nulle $\mathbf{v}^{(II)} = -v_x \hat{x}$. En outre, l'aluminium est un matériau conducteur électrique de conductivité σ_{alu} :

$$\begin{aligned}
& \nabla \times \mathbf{H}^{(II)} = \mathbf{J}^{(II)} \\
& \downarrow (3.35) \text{ et } (3.2a) \\
& \nabla \times \frac{\mathbf{B}^{(II)}}{\mu} = \sigma_{alu} \left(\mathbf{E}^{(II)} + \mathbf{v}^{(II)} \times \mathbf{B}^{(II)} \right) \\
& \downarrow (3.22) \text{ et } \mu_{alu} = \mu_{air} \\
& \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}^{(II)}) = \mu_0 \sigma_{alu} \left(\mathbf{E}^{(II)} + \mathbf{v}^{(II)} \times (\nabla \times \mathbf{A}^{(II)}) \right) \quad (3.36)
\end{aligned}$$

Via la loi de Faraday (i.e. équation (3.1a)) et sachant que le vecteur potentiel $\mathbf{A}^{(\nu)}$ est défini à un gradient près, il est possible de montrer que le champ électrique $\mathbf{E}^{(\nu)}$ est égal (au signe près) à la variation temporelle du vecteur potentiel (voir Annexe E). Étant donné que, pour le problème considéré, aucune quantité électromagnétique n'est dépendante du temps, cela signifie que le champ électrique est nul dans l'ensemble du système considéré. L'équation (3.36) peut se réécrire comme :

$$\nabla^2 \mathbf{A}^{(II)} = -\mu_0 \sigma_{alu} \mathbf{v}^{(II)} \times (\nabla \times \mathbf{A}^{(II)}) \quad (3.37)$$

En utilisant l'écriture exponentielle des séries de Fourier et grâce à l'hypothèse (H19), l'équation (3.37) peut être réécrite sous la forme de l'équation d'Helmholtz :

$$\nabla^2 \mathbf{A}^{(II)} = \tau_{0,m}^2 \mathbf{A}^{(II)}$$

où $\tau_{0,m}^2 = -j\mu_0 \sigma_{alu} v_x \frac{2\pi p}{\lambda} m$. Comme précédemment expliqué, la solution pour ce sous-domaine est donnée par l'équation (3.32) avec :

$$A_{0,m}^{(II)}(z) = C_{0,m}^{(II)} e^{\sqrt{\left(\frac{2\pi p}{\lambda} m\right)^2 + \tau_{0,m}^2} z} + D_{0,m}^{(II)} e^{-\sqrt{\left(\frac{2\pi p}{\lambda} m\right)^2 + \tau_{0,m}^2} z} \quad (3.38)$$

Les constantes d'intégration $C_{0,m}^{(II)}$ et $D_{0,m}^{(II)}$ sont trouvées via les conditions frontières du sous-domaine II :

1. continuité de la composante normale de $\mathbf{B}$ (eq. (3.24a)) entre les sous-domaines I et II en $z = -h_{alu}$

$$\begin{aligned} B_z^{(I)} \Big|_{z=-h_{alu}} &= B_z^{(II)} \Big|_{z=-h_{alu}} \\ \frac{\partial A^{(I)}}{\partial x} \Big|_{z=-h_{alu}} &= \frac{\partial A^{(II)}}{\partial x} \Big|_{z=-h_{alu}} \end{aligned}$$

Il faut alors remarquer que $A^{(I)}$ et $A^{(II)}$ sont exprimées en série de Fourier de même période $\frac{\lambda}{p}$. Dès lors, l'égalité ci-dessus doit être vérifiée pour chacune des harmoniques⁹ :

$$A_{0,m}^{(I)}(h_{alu}) = A_{0,m}^{(II)}(h_{alu}) \quad \text{pour } m = \dots, -3, -1, 1, 3, \dots$$

$$\boxed{C_{0,m}^{(I)} e^{-\frac{2\pi p}{\lambda} |m| h_{alu}} = C_{0,m}^{(II)} e^{-\sqrt{\left(\frac{2\pi p}{\lambda} m\right)^2 + \tau_{0,m}^2} h_{alu}} + D_{0,m}^{(II)} e^{\sqrt{\left(\frac{2\pi p}{\lambda} m\right)^2 + \tau_{0,m}^2} h_{alu}}} \quad (\text{CF.2})$$

2. continuité de la composante tangentielle de $\mathbf{H}$ (eq. (3.24b)) entre les sous-domaines I et II

$$\begin{aligned} H_x^{(I)} \Big|_{z=-h_{alu}} &= H_x^{(II)} \Big|_{z=-h_{alu}} \\ \frac{\partial A^{(I)}}{\partial z} \Big|_{z=-h_{alu}} &= \frac{\partial A^{(II)}}{\partial z} \Big|_{z=-h_{alu}} \\ \frac{\partial A_{0,m}^{(I)}}{\partial z} \Big|_{z=-h_{alu}} &= \frac{\partial A_{0,m}^{(II)}}{\partial z} \Big|_{z=-h_{alu}} \end{aligned}$$

$$\boxed{C_{0,m}^{(I)} \frac{2\pi p}{\lambda} |m| e^{-\frac{2\pi p}{\lambda} |m| h_{alu}} = \sqrt{\left(\frac{2\pi p}{\lambda} m\right)^2 + \tau_{0,m}^2} \left[C_{0,m}^{(II)} e^{-\sqrt{\left(\frac{2\pi p}{\lambda} m\right)^2 + \tau_{0,m}^2} h_{alu}} - D_{0,m}^{(II)} e^{\sqrt{\left(\frac{2\pi p}{\lambda} m\right)^2 + \tau_{0,m}^2} h_{alu}} \right]} \quad (\text{CF.3})$$

3. les conditions de continuité entre les sous-domaines II et III. Pour ce faire, il faut d'abord résoudre le problème dans le sous-domaine III.

⁹Il en sera de même pour l'ensemble des conditions frontières, l'astuce ne sera donc pas mentionnée à chaque fois.

Résolution dans le sous-domaine III

Comme pour le sous-domaine I, la région III contient de l'air. L'équation dictant le comportement du vecteur potentiel dans cette région est donc à nouveau l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 A^{(III)} = 0$$

où suivant l'article de référence [34], les coefficients $A_{0,m}^{(III)}$ sont donnés par :

$$A_{0,m}^{(III)}(z) = C_{0,m}^{(III)} e^{\frac{2\pi p}{\lambda}|m|z} + D_{0,m}^{(III)} e^{-\frac{2\pi p}{\lambda}|m|z} \quad (3.39)$$

Une fois de plus, il faut imposer les conditions aux frontières pour obtenir les constantes d'intégration :

1. continuité de la composante normale de $\mathbf{B}$ (eq. (3.24a)) entre les sous-domaines II et III en $z = 0$:

$$\begin{aligned} B_z^{(II)} \Big|_{z=0} &= B_z^{(III)} \Big|_{z=0} \\ \frac{\partial A^{(II)}}{\partial x} \Big|_{z=0} &= \frac{\partial A^{(III)}}{\partial x} \Big|_{z=0} \end{aligned}$$

$$\boxed{C_{0,m}^{(II)} + D_{0,m}^{(II)} = C_{0,m}^{(III)} + D_{0,m}^{(III)}} \quad (\text{CF.4})$$

2. continuité de la composante tangentielle de $\mathbf{H}$ (eq. (3.24b)) entre les sous-domaines II et III en $z = 0$:

$$\begin{aligned} H_x^{(II)} \Big|_{z=0} &= H_x^{(III)} \Big|_{z=0} \\ \frac{\partial A^{(II)}}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \frac{\partial A^{(III)}}{\partial z} \Big|_{z=0} \\ \frac{\partial A_{0,m}^{(II)}}{\partial z} \Big|_{z=0} &= \frac{\partial A_{0,m}^{(III)}}{\partial z} \Big|_{z=0} \end{aligned}$$

$$\boxed{\sqrt{\left(\frac{2\pi p}{\lambda}m\right)^2 + \tau_{0,m}^2} [C_{0,m}^{(II)} - D_{0,m}^{(II)}] = \frac{2\pi p}{\lambda}|m| [C_{0,m}^{(III)} - D_{0,m}^{(III)}]} \quad (\text{CF.5})$$

3. les conditions de continuité entre les sous-domaines III et IV. Pour ce faire, il faut d'abord résoudre le problème dans le sous-domaine IV.

Résolution dans le sous-domaine IV

Le sous-domaine IV est composé d'aimants permanents. Un terme source de champ magnétique est donc à prendre en compte à cause du champ rémanent des aimants permanents. L'équation de constitution s'appliquant à ce sous-domaine est :

$$\mathbf{B}^{(IV)} = \mu_0 \mathbf{H}^{(IV)} + \mathbf{B}_0 \quad (3.40)$$

où le terme source $\mathbf{B}_0$ sous forme complexe est donné par l'équation (3.31).

Le repère considéré étant fixé avec le ski, alors la région IV est immobile dans ce repère. L'équation d'Ampère (3.27b) donne :

$$\begin{aligned}
\nabla \times \mathbf{H}^{(IV)} &= \mathbf{0} \\
&\downarrow (3.40) \text{ et } (H18) \\
\frac{1}{\mu_0} \nabla \times (\mathbf{B}^{(IV)} - \mathbf{B}_0) &= \mathbf{0} \\
&\downarrow (3.22) \\
\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}^{(IV)}) &= \nabla \times \mathbf{B}_0 \\
&\downarrow (3.23) \\
\nabla^2 \mathbf{A}^{(IV)} &= -\nabla \times \mathbf{B}_0
\end{aligned}$$

qui n'est rien d'autre que l'équation de Poisson. Pour cette équation, le coefficient $A_{0,1}^{(IV)}$ est de la forme :

$$A_{0,m}^{(IV)}(z) = C_{0,m}^{(IV)} e^{\frac{2\pi p}{\lambda}|m|z} + D_{0,m}^{(IV)} e^{-\frac{2\pi p}{\lambda}|m|z} + P_{0,m}^{(IV)} \quad (3.41)$$

où la solution particulière :

$$P_{0,m}^{(IV)} = -\frac{B_r \lambda}{(\pi m)^2 p}$$

satisfait l'équation de Poisson.

Les conditions frontières entre les sous-domaines III et IV ainsi qu'entre le sous-domaine IV et le fer sont alors :

1. continuité de la composante normale de $\mathbf{B}$ entre les sous-domaines III et IV en $z = e$ (eq. (3.24a)) :

$$\begin{aligned}
B_z^{(III)} \Big|_{z=e} &= B_z^{(IV)} \Big|_{z=e} \\
\frac{\partial A^{(III)}}{\partial x} \Big|_{z=e} &= \frac{\partial A^{(IV)}}{\partial x} \Big|_{z=e}
\end{aligned}$$

$$\boxed{C_{0,m}^{(III)} e^{\frac{2\pi p}{\lambda}|m|e} + D_{0,m}^{(III)} e^{-\frac{2\pi p}{\lambda}|m|e} = C_{0,m}^{(IV)} e^{\frac{2\pi p}{\lambda}|m|e} + D_{0,m}^{(IV)} e^{-\frac{2\pi p}{\lambda}|m|e} - \frac{B_r \lambda}{(\pi m)^2 p}} \quad (\text{CF.6})$$

2. continuité de la composante tangentielle de $\mathbf{H}$ entre les sous-domaines III et IV en $z = e$ (eq. (3.24b)) :

$$\begin{aligned}
-\hat{\underline{z}} \times \left(\frac{\mathbf{B}_z^{(III)}}{\mu_0} - \frac{\mathbf{B}_z^{(IV)} - \mathbf{B}_0}{\mu_0} \right) \Big|_{z=e} &= 0 \\
\hat{\underline{z}} \times \left(\frac{\partial A^{(III)}}{\partial z} \hat{\underline{x}} - \frac{\partial A^{(III)}}{\partial x} \hat{\underline{z}} \right) \Big|_{z=e} &= \hat{\underline{z}} \times \left[\frac{\partial A^{(IV)}}{\partial z} \hat{\underline{x}} - \left(\frac{\partial A^{(IV)}}{\partial x} + \frac{2B_r}{j\pi} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{1}{m} e^{j\frac{2\pi p}{\lambda}mx} \right) \hat{\underline{z}} \right] \Big|_{z=e} \\
\frac{\partial A^{(III)}}{\partial z} \Big|_{z=e} &= \frac{\partial A^{(IV)}}{\partial z} \Big|_{z=e}
\end{aligned}$$

$$\boxed{C_{0,m}^{(III)} e^{\frac{2\pi p}{\lambda}|m|e} - D_{0,m}^{(III)} e^{-\frac{2\pi p}{\lambda}|m|e} = C_{0,m}^{(IV)} e^{\frac{2\pi p}{\lambda}|m|e} - D_{0,m}^{(IV)} e^{-\frac{2\pi p}{\lambda}|m|e}} \quad (\text{CF.7})$$

3. continuité de la composante tangentielle de $\mathbf{H}$ entre le sous-domaine IV et le fer en $z = e + h_{mag}$ (eq. (3.24b)). Au vu de l'hypothèse (H17) alors, le champ $\mathbf{H}_{fer}$ est nul dans le fer¹⁰ :

$$\begin{aligned} H_x^{(IV)} \Big|_{z=e+h_{mag}} &= 0 \\ \frac{\partial A^{(IV)}}{\partial z} \Big|_{z=e+h_{mag}} &= 0 \\ \frac{\partial A_{0,1}^{(IV)}}{\partial z} \Big|_{z=e+h_{mag}} &= 0 \end{aligned}$$

$$\boxed{C_{0,m}^{(IV)} e^{\frac{2\pi p}{\lambda}|m|(e+h_{mag})} = D_{0,m}^{(IV)} e^{-\frac{2\pi p}{\lambda}|m|(e+h_{mag})}} \quad (\text{CF.8})$$

3.3.2 Résolution des conditions frontières

Dans l'ensemble des conditions frontières listées dans les sections précédentes, seule la condition (CF.1) est triviale. Les sept autres conditions frontières sont alors rassemblées en un système linéaire d'équations de la forme :

$$Ax = B$$

avec :

$$A = \begin{pmatrix} e^{-k|m|h_{alu}} & -e^{-\alpha_m h_{alu}} & -e^{\alpha_m h_{alu}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ k|m|e^{-k|m|h_{alu}} & -\alpha_m e^{-\alpha_m h_{alu}} & \alpha_m e^{\alpha_m h_{alu}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha_m & -\alpha_m & -k|m| & k|m| & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e^{k|m|e} & e^{-k|m|e} & -e^{k|m|e} & -e^{-k|m|e} \\ 0 & 0 & 0 & e^{k|m|e} & -e^{-k|m|e} & -e^{k|m|e} & e^{-k|m|e} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & e^{k|m|(e+h_{mag})} & -e^{-k|m|(e+h_{mag})} \end{pmatrix}$$

$$x = \left(C_{0,1}^I \quad C_{0,1}^{II} \quad D_{0,1}^{II} \quad C_{0,1}^{III} \quad D_{0,1}^{III} \quad C_{0,1}^{IV} \quad D_{0,1}^{IV} \right)^T$$

$$B = \left(0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad -\frac{2B_R}{\pi k m^2} \quad 0 \quad 0 \right)^T$$

où pour simplifier l'écriture :

$$k = \frac{2\pi p}{\lambda} \quad \text{et} \quad \alpha_m = \sqrt{(km)^2 + \tau_{0,m}^2}$$

¹⁰Par l'équation (3.2b), on a $\mathbf{H}_{fer} = \frac{\mathbf{B}_{fer}}{\mu_{fer}}$. Étant donné l'hypothèse (H17) et l'obligation physique d'avoir un champ $\mathbf{B}_{fer}$ de valeur finie, on peut conclure que $\mathbf{H}_{fer} = \mathbf{0}$.

3.3.3 Vérification des résultats analytiques

Les résultats obtenus via les expressions analytiques définissant le comportement du vecteur potentiel $\mathbf{A}$ dans les différents sous-domaines, obtenues dans la Sous-Section 3.3.1, ont été comparés avec les résultats obtenus grâce à une simulation FEM du système soumis aux mêmes hypothèses (H15), (H17), (H18), (H19). Ces résultats sont repris à la Figure 3.18 et attestent de la validité des résultats préalablement présentés.

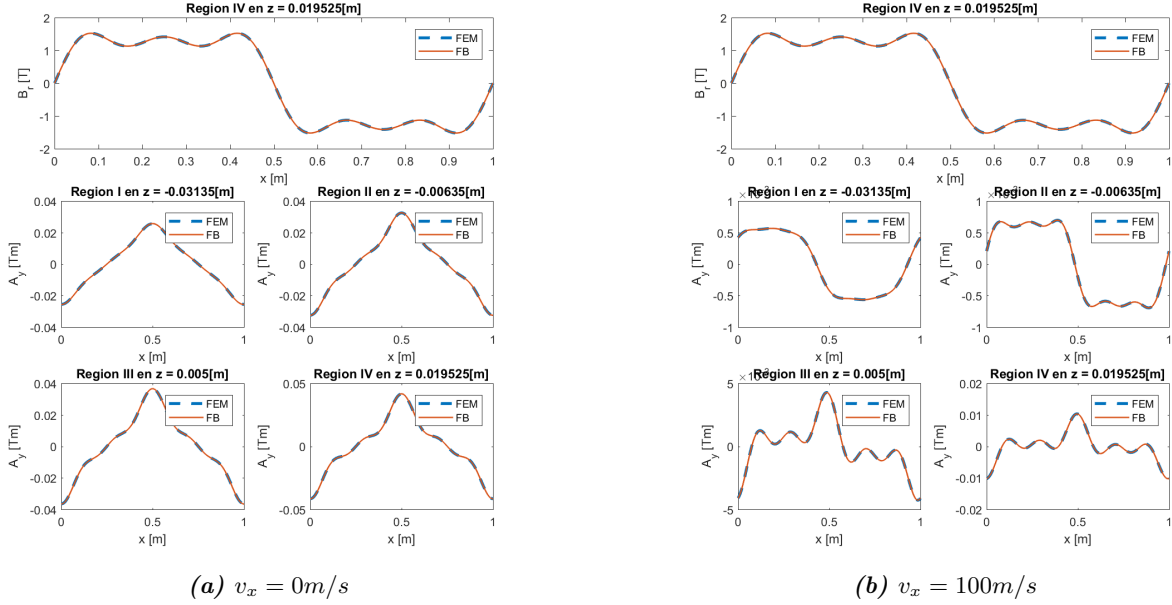


Figure 3.18 : Champ rémanent B_r dans le sous-domaine IV et vecteur potentiel $\mathbf{A}$ dans les différents sous-domaines pour les cinq premières harmoniques

3.3.4 Forces électrodynamiques

Comme déjà spécifié antérieurement, une manière très courante d'obtenir les forces électrodynamiques prenant place dans le système électromagnétique est l'intégration du tenseur des contraintes de Maxwell. Ce tenseur est défini de manière générale par l'équation (3.3). Or, dans le système considéré, il a déjà été mentionné qu'aucun champ électrique n'était présent, et ce, à cause de l'invariance temporelle des quantités électromagnétiques. Dès lors, l'équation (3.3) devient :

$$\sigma_{ij} = \frac{B_i B_j}{\mu_0} - \delta_{ij} \frac{|\mathbf{B}|^2}{2\mu_0}$$

Selon l'hypothèse (H15), le système est considéré comme plan. Dès lors, $B_y = 0$. Cela simplifie fortement l'expression du tenseur de Maxwell qui, sous forme matricielle, devient :

$$\boldsymbol{\sigma} = \frac{1}{\mu_0} \begin{bmatrix} B_x^2 - B_z^2 & 0 & 2B_x B_z \\ 0 & -B_x^2 - B_z^2 & 0 \\ 2B_x B_z & 0 & B_z^2 - B_x^2 \end{bmatrix}$$

Le volume choisi pour le problème étudié est un parallélépipède rectangle entourant le fer, les aimants et passant dans l'entrefer en $z = \xi$ où $\xi \in [0, e]$. Ce parallélépipède rectangle passe à travers les aimants et le fer en $x = 0$ et $x = l$ (voir Figure 3.19).

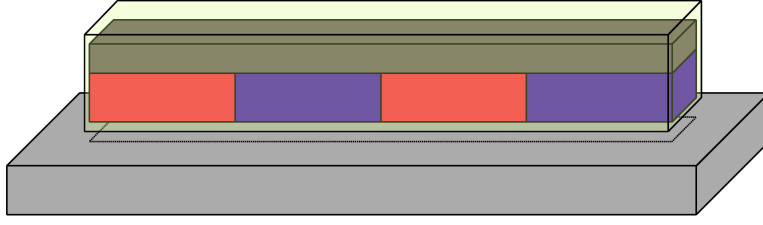


Figure 3.19 : Surface d'intégration du tenseur des contraintes de Maxwell

Au vu de l'hypothèse (H17), le champ derrière le fer est nul. L'intégration du tenseur de Maxwell sur la surface se trouvant au-delà du fer donnera zéro. Comme déjà mentionné, via l'hypothèse (H15), le champ magnétique n'a pas de composante en $\hat{y}$. A nouveau, l'intégration du tenseur de Maxwell sur les deux surfaces définies parallèles au plan (x, z) donnera zéro et peut donc être oublié. Il ne reste alors plus que trois surfaces : celle passant dans l'entrefer en $z = \xi$ et les deux traversant les aimants en $x = 0$ et $x = l$ formant donc un "U". L'expression (3.4a) se développe comme :

$$\begin{aligned} \mathbf{F} = & - \int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2} + h_{mag}} \int_0^w (\sigma_{xx}\hat{x} + \sigma_{xy}\hat{y} + \sigma_{xz}\hat{z})|_{x=0} dydz \\ & + \int_{\frac{\epsilon}{2}}^{\frac{\epsilon}{2} + h_{mag}} \int_0^w (\sigma_{xx}\hat{x} + \sigma_{xy}\hat{y} + \sigma_{xz}\hat{z})|_{x=l} dydz \\ & - \int_0^l \int_0^w (\sigma_{zx}\hat{x} + \sigma_{zy}\hat{y} + \sigma_{zz}\hat{z})|_{z=\xi} dydx \end{aligned}$$

Le problème étant périodique - de périodicité λ - alors, en choisissant l tel que $l = n\lambda$ ($n \in \mathbb{Z}$), les deux intégrales de surface en $x = 0$ et $x = l$ se simplifient pour donner :

$$\mathbf{F} = - \int_0^l \int_0^w (\sigma_{zx}\hat{x} + \sigma_{zy}\hat{y} + \sigma_{zz}\hat{z})|_{z=\xi} dydx$$

La composante du tenseur de Maxwell T_{zy} étant nulle et la densité de flux magnétique étant indépendante de la position en y , l'expression des forces devient :

$$\mathbf{F} = -w \int_0^l (\sigma_{zx}\hat{x} + \sigma_{zz}\hat{z})|_{z=\xi} dx \quad (3.42)$$

La force de portance et la force de traînée sont respectivement les composantes en $\hat{z}$ et en $\hat{x}$ de l'expression (3.42) :

$$F_L = -\frac{w}{2\mu_0} \int_0^l \left[\left(B_z^{(III)} \right)^2 - \left(B_x^{(III)} \right)^2 \right] dx \quad (3.43)$$

$$F_D = -\frac{w}{\mu_0} \int_0^l \left[B_x^{(III)} B_z^{(III)} \right] dx \quad (3.44)$$

Par définition du vecteur potentiel (3.26) :

$$B_x^{(III)} = \frac{\partial A^{(III)}}{\partial z} \quad \text{et} \quad B_z^{(III)} = -\frac{\partial A^{(III)}}{\partial x} \quad (3.45)$$

Via les équations (3.32) et (3.39), le vecteur potentiel s'écrit dans le sous-domaine III :

$$A^{(\nu)}(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} \left(C_{0,m}^{(III)} e^{k|m|z} + D_{0,m}^{(III)} e^{-k|m|z} \right) e^{jkmx} \quad \text{avec } m = \dots, -3, -1, 1, 3, \dots \quad (3.46)$$

Pour rendre l'expression plus lisible, nous avons à nouveau utilisé :

$$k = \frac{2\pi p}{\lambda} \quad \text{et} \quad \alpha_m = \sqrt{(km)^2 + \tau_{0,m}^2}$$

Par ailleurs, les quantités électromagnétiques évoluant dans le système étant, au vu du terme source, des expressions réelles, les coefficients $C_{0,m}^{(\nu)}$ et $D_{0,m}^{(\nu)}$ de l'écriture en série de Fourier complexe doivent alors respecter la condition suivante :

$$\left. \begin{aligned} X_{0,m}^{(\nu)} &= a_{X_{0,m}}^{(\nu)} + jb_{X_{0,m}}^{(\nu)} \\ X_{0,-m}^{(\nu)} &= a_{X_{0,m}}^{(\nu)} - jb_{X_{0,m}}^{(\nu)} \end{aligned} \right\} \forall m > 0 \quad (3.47)$$

Grâce à cette propriété, la définition du vecteur potentiel dans le sous-domaine III, donné par l'équation (3.46), peut se réécrire :

$$\begin{aligned} A^{(\nu)}(x, z) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} \left[\left(a_{C_{0,m}}^{(III)} e^{kmz} + a_{D_{0,m}}^{(III)} e^{-kmz} \right) \cos(kmx) \right. \\ \left. + \left(b_{C_{0,m}}^{(III)} e^{kmz} + b_{D_{0,m}}^{(III)} e^{-kmz} \right) \sin(kmx) \right] \quad \text{avec } m = 1, 3, \dots \quad (3.48) \end{aligned}$$

En combinant les équations (3.43), (3.44), (3.45) et (3.48) et en se rappelant que $l = n\lambda$ avec $n \in \mathbb{Z}$, l'expression des forces de portance et de traînée devient :

$$\left. \begin{aligned} F_L &= -\frac{4w}{\mu_0} k^2 l \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left(a_{C_{0,m}}^{(III)} a_{D_{0,m}}^{(III)} + b_{C_{0,m}}^{(III)} b_{D_{0,m}}^{(III)} \right) \\ F_D &= -\frac{4w}{\mu_0} k^2 l \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left(a_{C_{0,m}}^{(III)} b_{D_{0,m}}^{(III)} - a_{D_{0,m}}^{(III)} b_{C_{0,m}}^{(III)} \right) \end{aligned} \right\} m = 1, 3, 5, \dots$$

où la notation suivante a été utilisée :

$$\begin{aligned} a_{X_{0,m}}^{(III)} &= \Re \left\{ X_{0,m}^{(III)} \right\} \\ b_{X_{0,m}}^{(III)} &= \Im \left\{ X_{0,m}^{(III)} \right\} \end{aligned}$$

Le développement complet des équations pour obtenir ces deux expressions est donné dans l'Annexe F.

Il est alors évidemment possible d'obtenir l'expression du couple électrodynamique en tangage T_θ en développant l'expression (3.4b). Pourtant, le modèle FB ne permettant pas pour le moment de libérer le degré de liberté de tangage du ski, le calcul de T_θ n'a pas grand intérêt et ne sera donc pas développé dans ce travail.

3.3.5 Vérification des résultats pour les forces électrodynamiques

Afin de s'assurer de la validité des résultats précédemment calculés, nous allons procéder de la même manière que dans la Sous-Section 3.3.3, c'est-à-dire comparer les résultats obtenus via les expressions analytiques des forces avec ceux donnés par un modèle FEM prenant en compte les hypothèses (H15), (H18), (H17), (H19).

Ces résultats sont repris à la Figure 3.20¹¹ avec différents niveaux d'harmoniques. Ces graphiques permettent de constater un très bon alignement des résultats analytiques (via le modèle FB) par rapport aux résultats numériques (via le modèle FEM).

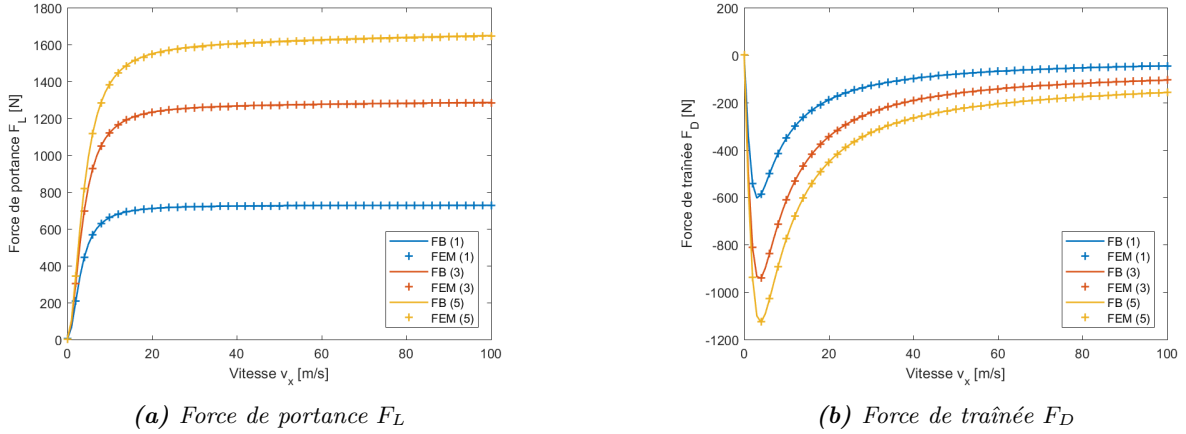


Figure 3.20 : Comparaison des forces électrodynamiques obtenues par le modèle FB et par un modèle FEM

Vu la qualité des résultats obtenus, il est intéressant de déterminer le nombre d'harmoniques qui doivent être prises en compte afin d'obtenir des résultats se rapprochant le plus de la situation dans laquelle l'aimantation des aimants permanents forme un signal carré. Idéalement, il faudrait prendre un nombre infini d'harmoniques pour atteindre la solution exacte. Dès lors, cela conduirait à devoir résoudre une infinité de calculs. De la même manière, plus le nombre d'harmoniques considéré est grand, plus la quantité de calculs à résoudre le sera aussi. Il semble donc, au vu des résultats présentés à la Figure 3.21, que considérer 21 harmoniques nous permet d'approcher au mieux les résultats d'un modèle FEM avec un champ rémanent B_r carré.

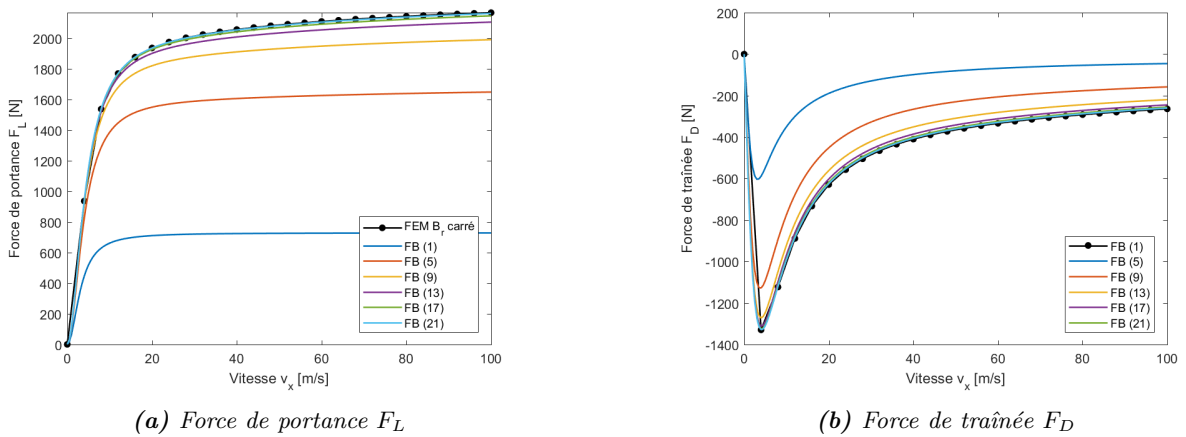


Figure 3.21 : Etude sur le nombre d'harmoniques à prendre en compte pour se rapprocher au mieux du modèle original

¹¹Les nombres entre parenthèses présents dans les légendes font référence au nombre d'harmoniques considérées.

3.4 Comparaison des modèles électrodynamiques

Dans les sections précédentes, nous avons développé deux modèles électrodynamiques natifs. Un modèle numérique basé sur la méthode des éléments finis (FEM) et un modèle analytique basé sur la résolution des équations de Maxwell grâce aux développements en série de Fourier (FB). Chacun des ces deux modèles présente des avantages et des inconvénients.

En effet, le modèle en série de Fourier a pour grand intérêt d'obtenir une expression analytique des quantités électromagnétiques composant le système. Cela présente principalement deux utilités :

- un couplage efficace entre le modèle électrodynamique et le modèle multicorps. Les expressions des forces étant des expressions analytiques dépendant des paramètres de design et cinématiques, il est assez aisé¹² d'implémenter ces forces dans un logiciel multicorps comme ROBOTRAN,
- l'étude facile de l'impact des paramètres de design sur les forces électrodynamiques. Il est effectivement, bien plus simple d'analyser l'effet du pas polaire (i.e. le nombre de paires de pôles par période du réseau d'aimants permanents), par exemple, sur la valeur des forces, à partir de leur expression analytique plutôt qu'en simulant numériquement chacun des cas.

Cependant, cette résolution analytique du problème est uniquement possible en admettant un certain nombre d'hypothèses (de (H15) jusque (H19)). C'est en cela que repose l'avantage principal du modèle FEM qui permet d'obtenir les valeurs des forces électrodynamiques en s'affranchissant d'un grand nombre de postulats. Malheureusement, comme déjà mentionné, le modèle FEM demande une grande puissance de calcul rendant le couplage direct avec le modèle multicorps très peu efficace. Dès lors, nous avons imaginé deux modèles de substitution dont seulement un présentait des résultats satisfaisants, à savoir, le modèle basé sur l'interpolation des résultats du modèle FEM. Ce modèle de substitution ajoute l'hypothèse d'une interpolation linéaire entre deux valeurs successives du modèle FEM.

Dans cette section, nous allons donc analyser les différences entre le modèle FB et le modèle FEM. Il y a principalement trois hypothèses prises dans le modèle FB dont il est possible de s'affranchir dans le modèle FEM :

- la perméabilité infinie du fer,
- les aimants permanents ont une perméabilité identique à celle de l'air,
- la longueur infinie du ski dans la direction $\hat{x}$.

Pour ce faire, les résultats obtenus avec le modèle FB seront comparés à ceux obtenus pour un modèle FEM prenant les mêmes hypothèses que le modèle FB sauf celle qui sera analysée.

3.4.1 Impact de la perméabilité finie du fer

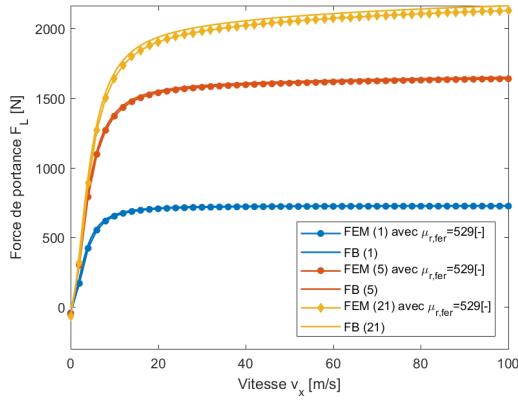
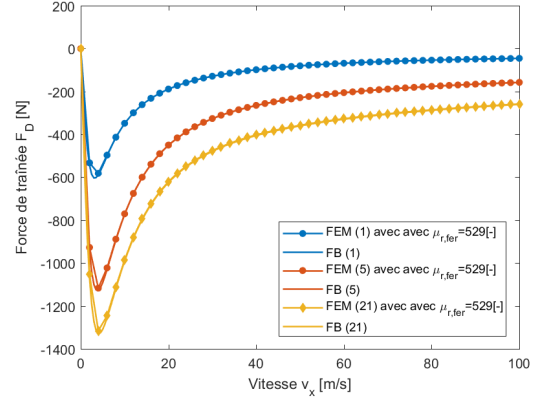
Dans le modèle basé sur le développement en série de Fourier, nous avons posé l'Hypothèse (H17) considérant la perméabilité du fer comme infinie. Ceci permettait de considérer le champ $\mathbf{H}$ comme nul dans le fer. En réalité pourtant, la perméabilité du fer n'est pas infinie bien sûr, mais sa perméabilité relative¹³ vaut $\mu_{r,fer} = 529$, correspondant à une valeur élevée de perméabilité relative. Dès lors, poser l'hypothèse (H17) ne modifie pas beaucoup les résultats comme le présente la Figure 3.22.

¹²Comme expliqué dans la Section 4.6.

¹³Pour rappel, la perméabilité d'un matériau est donnée par :

$$\mu = \mu_0 \mu_r$$

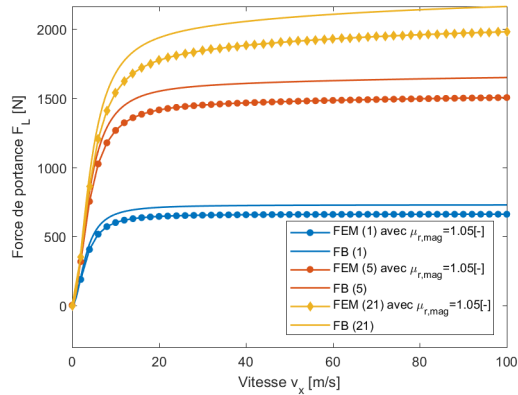
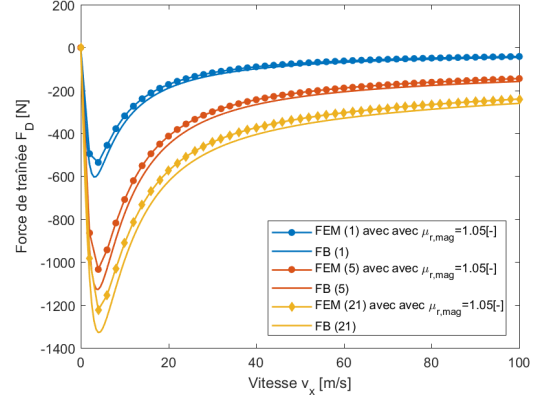
où μ_r est la perméabilité relative du matériau et vaut, par exemple, 1 pour l'air.

(a) Sur la force de portance F_L (b) Sur la force de traînée F_D **Figure 3.22 : Impact d'une perméabilité finie du fer**

3.4.2 Impact de la perméabilité des aimants permanents

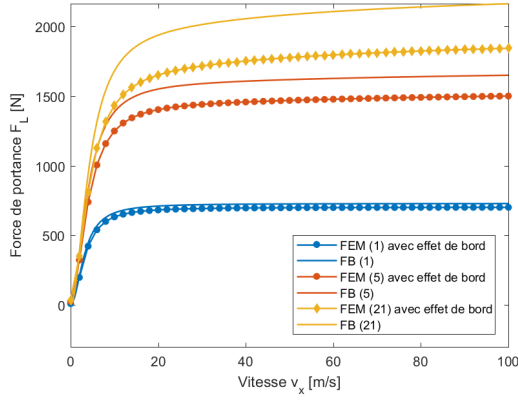
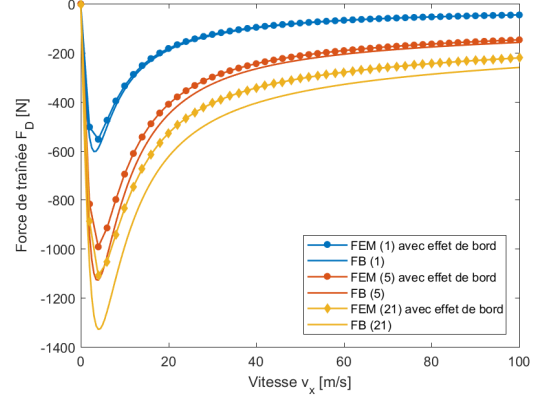
Selon l'Hypothèse (H18), dans le modèle FB, nous avons considéré que la perméabilité des aimants était égale à celle de l'air. Or ceci n'est pas tout à fait vrai car la perméabilité relative des aimants permanents NdFeB grade N42 est de 1.05.

L'impact de cette hypothèse est présenté à la Figure 3.23 et n'est pas négligeable. En effet, cette hypothèse entraîne jusqu'à 9.23% d'erreur.

(a) Sur la force de portance F_L (b) Sur la force de traînée F_D **Figure 3.23 : Impact de $\mu_{r,mag} = 1.05$**

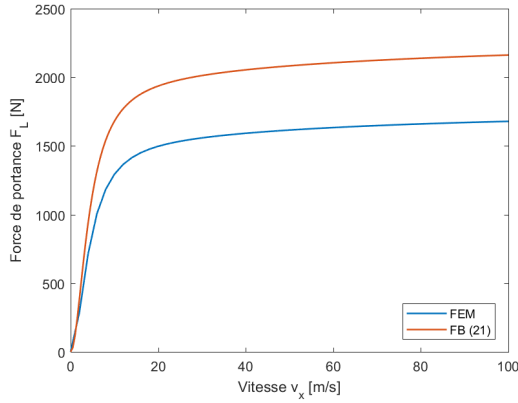
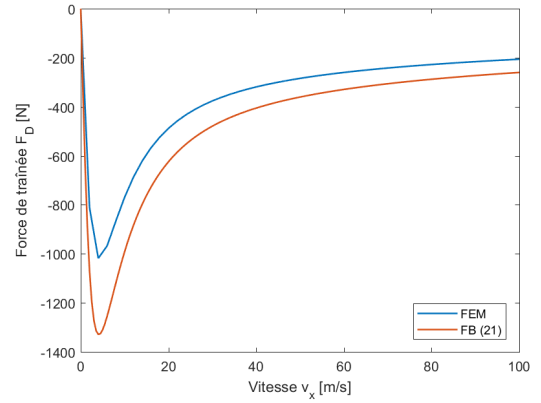
3.4.3 Impact des effets de bord

Le modèle en série de Fourier repose sur la périodicité de la solution dans au moins une direction. De fait, l'utilisation de l'équation (3.29) suppose que la solution se répète de manière périodique jusqu'à l'infini selon la direction $\hat{x}$. Dans la réalité, le ski n'a pas une longueur infinie. Il faut donc prendre en compte les effets de bord que cela induit. Ajouter ces effets de bord va impacter les résultats obtenus comme le montre la Figure 3.24. L'erreur entre les deux courbes s'élève jusqu'à 16.3%.

(a) Sur la force de portance F_L (b) Sur la force de traînée F_D **Figure 3.24 : Impact des effets de bord**

3.4.4 Comparaison avec le modèle FEM complet

Finalement, la Figure 3.25 compare les résultats des forces électrodynamiques obtenues avec le modèle FEM et avec le modèle FB. Il existe une différence notable entre ces résultats. L'impact de premier ordre évident de cette différence sera la hauteur d'entrefer à laquelle se stabiliseront les skis à une vitesse donnée. Il sera tout de même intéressant de comparer la réponse dynamique de la capsule Hyperloop lorsque le modèle électrodynamique est basé sur le modèle FEM et lorsqu'il est basé sur le modèle FB.

(a) Pour la force de portance F_L (b) Pour la force de traînée F_D **Figure 3.25 : Résultat du modèle FEM vs modèle FB**

3.5 Pistes d'amélioration

Les résultats présentés dans les sections précédentes sont déjà convaincants. Pourtant, de nombreuses améliorations peuvent encore être apportées aux différents modèles étudiés.

3.5.1 Amélioration du modèle FEM

Le modèle éléments finis permet de prendre en compte la hauteur de l'entrefer, l'angle de tangage et la vitesse de déplacement v_x du ski. Cependant ce n'est pas la seule composante de vitesse que pourrait posséder un tel système. En effet, le ski peut avoir une composante de vitesse selon $\hat{z}$, c'est-à-dire la vitesse avec laquelle il s'approche ou s'éloigne de la voie. Le ski pouvant changer son angle de tangage, il peut aussi posséder une vitesse de rotation en tangage, $\dot{\theta}$. Ces deux vitesses ne sont pour le moment pas prises en compte par le modèle FEM mais pourraient l'être en utilisant un maillage déformant.

Le logiciel COMSOL[®] offre cette possibilité. Toutefois, par des contraintes de temps, il n'a pas été possible d'explorer cette fonction dans le cadre de ce mémoire.

3.5.2 Amélioration du modèle FB

Un grande limitation actuelle du modèle basé sur les développements en série de Fourier est qu'il ne permet pas de prendre en compte un angle de tangage non nul du ski par rapport à la voie. Il peut cependant être possible de combler cette lacune. Une méthode pertinente consisterait à résoudre le problème en deux étapes. La première suppose de calculer le champ magnétique présent dû aux aimants permanents si le ski (aimants permanents-fer) se trouve dans l'air. Pour la seconde étape, ce résultat est utilisé a posteriori comme condition frontière pour la voie en aluminium. L'imposition de cette condition frontière se ferait au moyen d'un changement de variable dépendant de l'orientation du ski par rapport à la voie.

Toutefois, par manque de temps il n'a pas été possible d'approfondir cette option dans le cadre ce mémoire. De fait, il faudrait préalablement s'assurer que diviser le problème en deux parties et imposer la présence de la voie en aluminium a posteriori permettrait d'obtenir des résultats valides.

Ce chapitre a pour objectif de présenter le modèle multicorps utilisé pour analyser à terme la stabilité de la capsule Hyperloop. Il a déjà été mentionné dans le Chapitre 2 que le modèle multicorps sera construit via le logiciel ROBOTRAN. Le formalisme multicorps utilisé est donc directement lié à celui du logiciel ROBOTRAN. Ce formalisme est décrit en détail dans le document d'introduction à ROBOTRAN [35] servant de base à ce chapitre. Le logiciel ROBOTRAN nous permettra de résoudre les équations du mouvement du système considéré, mais aussi de le linéariser afin d'effectuer un équilibre statique ou quasi-statique ainsi qu'une analyse modale du système très utiles pour étudier sa stabilité.

4.1 Formalisme Multicorps

La capsule Hyperloop est modélisée comme un système multicorps, c'est-à-dire un système mécanique composé de n corps rigides liés entre eux par des articulations. Il existe uniquement deux classes d'articulation dans ROBOTRAN ayant chacune un seul degré de liberté :

- articulation rotoïde : celle-ci possède un degré de liberté de révolution,
- articulation prismatique : celle-ci possède un degré de liberté de translation.

Les mouvements relatifs ayant lieu dans les joints sont décrits dans ROBOTRAN au moyen de coordonnées relatives généralisées q , ainsi que leurs dérivées temporelles $\dot{q}$ et $\ddot{q}$. Dès lors, les équations du mouvement d'un système composé de n corps et soumis à m contraintes, peuvent être écrites grâce à ces coordonnées relatives généralisées [35] :

$$M(q)\ddot{q} + c(q, \dot{q}, g) = Q(q, \dot{q}) + J^T \lambda_L \quad (4.1a)$$

$$h(q) = 0 \quad (4.1b)$$

$$\dot{h}(q, \dot{q}) = J(q)\dot{q} = 0 \quad (4.1c)$$

$$\ddot{h}(q, \dot{q}, \ddot{q}) = J(q)\ddot{q} + J\dot{q}(q, \dot{q}) = 0 \quad (4.1d)$$

dans lesquelles se trouvent :

- $q [n \times 1]$: les coordonnées relatives généralisées,
- $\dot{q} [n \times 1]$: les vitesses relatives généralisées,
- $\ddot{q} [n \times 1]$: les accélérations relatives généralisées,

- $M(q)$ $[n \times n]$: la matrice de masse du système,
- $c(q, \ddot{q}, g)$ $[n \times 1]$: le vecteur dynamique non-linéaire contenant les termes gyroscopique, centrifuge et de gravité ainsi que la contribution des forces et couples externes résultants,
- $Q(q, \dot{q})$ $[n \times 1]$: les forces généralisées,
- $h(q)$ $[m \times 1]$: le vecteur des contraintes algébriques dues aux boucles cinématiques,
- $J = \frac{\partial h}{\partial \dot{q}^T}$ $[n \times m]$: la matrice Jacobienne des contraintes,
- $J\dot{q}(q, \dot{q})$ $[n \times 1]$: le terme quadratique des contraintes au niveau des accélérations,
- λ_L $[m \times 1]$: le vecteur des multiplicateurs de Lagrange associé aux contraintes.

Ce système forme un système d'équations différentielles algébriques (DAE¹). Afin de résoudre ce système DAE, le logiciel ROBOTRAN utilise la méthode du partitionnement de coordonnées. Cette technique consiste à séparer les coordonnées généralisées décrivant le système en deux groupes distincts :

- q_u $[(n - m) \times 1]$: les coordonnées généralisées **indépendantes**,
- q_v $[m \times 1]$: les coordonnées généralisées **dépendantes**.

Ce faisant, il est alors possible d'exprimer les coordonnées généralisées dépendantes q_v en fonction des coordonnées généralisées indépendantes q_u au travers des contraintes algébriques $h(q)$. Le système d'équations (4.1) peut donc subir une réduction de l'index produisant un système réduit d'équations différentielles ordinaires (ODE²) :

$$M_r(q_u)\ddot{q}_u + F_r(\dot{q}_u, q_u) = 0 \quad (4.2)$$

L'équation réduite (4.2) est obtenue dans ROBOTRAN au moyen d'une approche symbolique permettant une meilleure performance. L'intégration temporelle de ces équations est réalisée grâce à des algorithmes d'intégration numérique. Pour ce travail, l'intégrateur numérique exclusivement utilisé a été Runge-Kutta d'ordre 4.

4.2 Équilibre

De manière générale, un équilibre est une configuration du système dans laquelle les forces s'équilibrent avec une accélération absolue nulle du système ($\ddot{q} = 0$). Dès lors, l'équation réduite (4.2) prend la forme :

$$F_r(x^*) = 0 \quad (4.3)$$

où x désigne les variables d'équilibre et l'exposant '*' désigne les solutions du problème d'équilibre.

Il existe deux formes distinctes d'équilibre [36] :

- l'équilibre **statique** : $\ddot{q}_u = \dot{q}_u = 0$,
- l'équilibre **quasi-statique** : $\ddot{q}_u = 0$, certain(s) $\dot{q}_u \neq 0$.

Équilibre statique

L'accélération et la vitesse des joints étant nulles lors d'un équilibre statique, l'équation du mouvement réduite devient un système d'équations non-linéaires, fonction des coordonnées relatives généralisées indépendantes, q_u :

$$F_r(q_u) = 0 \quad (4.4)$$

¹Par convention, l'acronyme DAE désigne l'expression anglaise "Differential Algebraic Equations".

²Par convention, l'acronyme ODE désigne l'expression anglaise "Ordinary Differential Equations".

Les solutions de ce système d'équations non-linéaires sont obtenues de manière itérative grâce à l'algorithme de Newton-Raphson [35] :

$$x^{k+1} = x^k - \left(\frac{\delta F_r}{\delta x} \right)^{-1} \bigg|_{x=x^k} F_r|_{x=x^k} \quad (4.5)$$

La correspondance entre les équations (4.3) et (4.4) permet de définir $x = q_u$ pour un équilibre statique classique. Pourtant, les options du module équilibre du logiciel ROBOTRAN permettent d'échanger les variables d'équilibre considérées. Cette fonctionnalité permet, entre autres, d'effectuer un équilibre inverse, c'est-à-dire de remplacer un ensemble de q_u par des variables du modèle multicorps tel que la masse, la longueur d'un corps ou le coefficient de raideur d'un ressort.

4.2.1 Équilibre quasi-statique

Pour certaines situations, il est intéressant de calculer un équilibre lorsque certaines vitesses sont non-nulles, d'où sa dénomination d'équilibre quasi-statique. Dans ce cas, l'équation du mouvement réduite donne toujours lieu à un système d'équations non-linéaires mais qui sont maintenant dépendantes des coordonnées relatives généralisées indépendantes, q_u mais aussi de leur dérivée temporelle, $\dot{q}_u$:

$$F_r(\dot{q}_u, q_u) = 0 \quad (4.6)$$

Un tel système d'équations est à nouveau résolu de manière itérative au moyen de l'algorithme de Newton-Raphson (4.5). Cependant, la coordonnée indépendante q_i associée à la vitesse non-nulle $\dot{q}_i$, est **ignorable** car sa valeur (qui est donc variable) n'a plus d'impact sur le terme des forces, F_r :

$$\frac{\partial F_r}{\partial q_i} = 0$$

Afin d'assurer la convergence de l'algorithme de Newton-Raphson, cette variable ne doit pas faire partie du procédé itératif. Toutefois, pour garder une certaine consistance entre le nombre de variables d'équilibre et le nombre d'équations, la variable q_i doit être échangée avec une variable sensible. Ceci peut-être réalisé de deux manières [35] :

- en fixant la vitesse $\dot{q}_i$ et en déterminant la force (ou le couple) F_{dyn} nécessaire pour maintenir cette vitesse :

$$x = [q_u \setminus \{q_i\}, F_{dyn}] \Rightarrow F_r(x^*) = 0$$

- en fixant la force (ou le couple) F_{dyn} et en déterminant la vitesse $\dot{q}_i$ correspondant à cette force :

$$x = [q_u \setminus \{q_i\}, \dot{q}_i] \Rightarrow F_r(x^*) = 0$$

4.3 Analyse modale

L'analyse modale d'un système multicorps, en particulier d'un véhicule, a pour objectif d'analyser le comportement en vibration du système et d'en étudier les modes instables ou les effets de résonance ayant un impact défavorable au point de vue du confort. L'analyse modale se fait en trois étapes [36] :

1. calcul d'une configuration d'équilibre x^* ,
2. linéarisation du système d'équations autour de la position d'équilibre,
3. calcul des modes propres (λ_{vp}, v_{vp}) .

En définissant la variation des coordonnées généralisées relatives par rapport à la configuration d'équilibre, $\Delta q_u = q_u - q_u^*$, il est possible de linéariser le système d'équations (4.2) sous la forme :

$$\dot{x} = Ax \quad (4.7)$$

où :

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -I \\ -M_r^{-1}K_r & M_r^{-1}G_r \end{pmatrix}$$

$$x = \begin{pmatrix} \Delta q_u \\ \Delta \dot{q}_u \end{pmatrix} \Rightarrow \dot{x} = \begin{pmatrix} \Delta \dot{q}_u \\ \Delta \ddot{q}_u \end{pmatrix}$$

Dans A , se trouvent la matrice d'amortissement, $G_r \triangleq \frac{\partial F_r}{\partial \dot{q}_u}$ et la matrice de raideur, $K_r \triangleq \frac{\partial F_r}{\partial q_u}$. Ces deux matrices ne sont pas connues analytiquement et leur obtention nécessite l'utilisation de méthodes numériques tel que le "parabolic fitting" [36].

Les solutions de l'équation (4.7) vont être de la forme:

$$\begin{aligned} x(t) &= v_{vp} e^{\lambda_{vp} t} \\ &= v_{vp} e^{(\alpha + j\beta)t} \\ &= v_{vp} e^{\alpha t} (\cos(\beta)t + j \sin(\beta)t) \end{aligned}$$

La partie réelle α est donc directement liée à la stabilité tandis que la partie complexe est liée aux oscillations.

Dans le cas où λ_{vp} est complexe conjugué, la forme suivante est préférée :

$$\lambda_{vp} = \alpha + j\beta = -\xi\omega_0 \pm j\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

ce qui permet d'écrire $x(t)$ sous la forme :

$$x(t) = U e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\omega_0 t - \varphi)$$

De sorte que :

- $\omega_0 = |\lambda_{vp}|$ est la fréquence propre du système non amorti,
- $\xi = 100 \cos \left[\arctan \left(\frac{-\Im\{\lambda_{vp}\}}{\Re\{\lambda_{vp}\}} \right) \right]$ est le facteur d'amortissement,
- $\omega = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$ est la fréquence du système amorti (fréquence vraie),
- $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ [Hz] est la fréquence propre amortie,
- φ est la phase.

Les solutions générales sont une combinaison de modes propres:

$$x_{gén}(t) = \sum_{i=1}^{2(n-m)} C_i v_{vp,i} e^{\lambda_{vp,i} t}$$

4.4 Modélisation multicorps de la capsule Hyperloop du MIT

Le modèle multicorps de la capsule Hyperloop du MIT possède quatorze coordonnées généralisées, dont huit indépendantes (q_u) et six dépendantes (q_v). Dès lors, le véhicule possède, dans le modèle utilisé, six degrés de liberté :

- le déplacement du centre de masse de la caisse selon les axes $\hat{x}$ et $\hat{z}$,
- le tangage de la caisse,
- le roulis de la caisse,
- les deux degrés de liberté de chacun des deux skis par rapport à la caisse permis par le système de suspension mécanique (voir Sous-Section 2.1.1).

La Figure 4.1 illustre une représentation multicorps de la capsule Hyperloop conçue par l'équipe du MIT. Sur cette figure, seul un des deux skis a été représenté pour des raisons de clarté, mais bien sûr, le modèle multicorps étudié est composé de deux skis parfaitement symétriques. Les articulations parallépipédiques correspondent à des articulations prismatiques et les articulations cylindriques correspondent à des articulations rotoïdes. Par ailleurs, la barre rouge représente une "rod cut" et l'articulation sphérique en bleu représente une "ball cut"³.

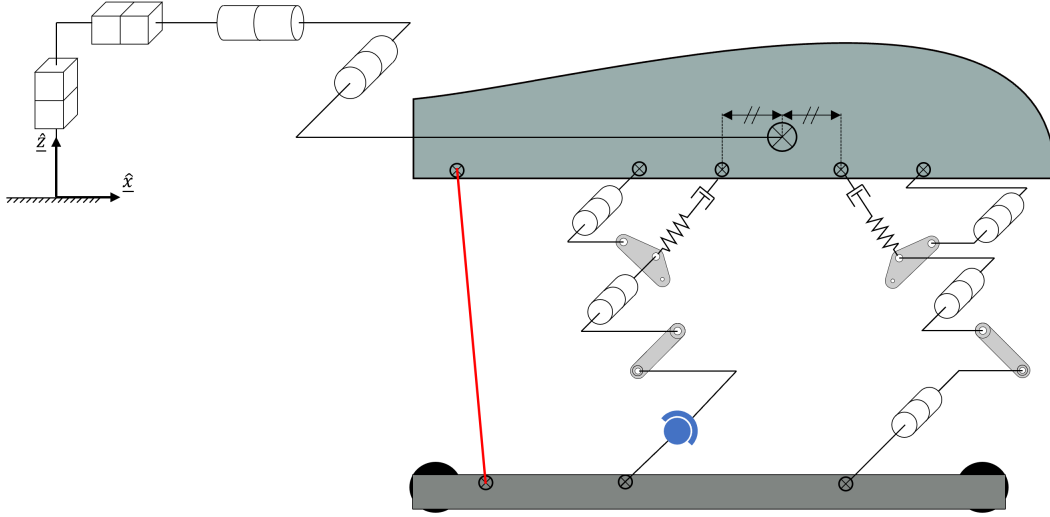


Figure 4.1 : Représentation multicorps de la capsule Hyperloop du MIT

Les dimensions des différents éléments ont été données dans la Sous-Section 2.1.1. Seule la masse totale de la capsule était communiquée par l'équipe du MIT; celle-ci est de 258kg. La répartition de cette masse entre les différents éléments a donc dû être établie de manière arbitraire. L'inertie liée aux éléments composant le système de suspension secondaire a été négligée. Le calcul de l'inertie du ski et de la capsule a été réalisé en considérant des parallélépipèdes rectangles de $2m \times 0.05m \times 0.022225m$ et $2.4m \times 0.64m \times 0.2m$ respectivement. Les différentes masses et inerties définissant le système multicorps sont reprises au Tableau 4.1.

Le dernier point d'attention concernant le modèle multicorps de la capsule Hyperloop est la détermination des longueurs neutres des ressorts présents dans le système de suspension secondaire. En effet, cette information n'était pas présente dans le rapport du MIT, donc pour les calculer, un équilibre inverse a été réalisé. En échangeant les variables indépendantes (q_u) correspondant au tangage et au roulis de la capsule Hyperloop

³Celles-ci sont primordiales pour fermer la boucle cinématique dans le logiciel ROBOTRAN. Cependant, leur fonctionnement et raison d'être ne seront pas décrits dans ce mémoire car jugés non utiles pour l'étude réalisée. De plus amples explications peuvent être trouvées dans [35].

avec les longueurs neutres des ressorts avant et arrière, il est possible de calculer ces longueurs neutres afin d'atteindre un équilibre statique.

	Masse	Inertie
Caisse	230[kg]	$I_x = 8.617[kg \cdot m^2]$ $I_y = 111.167[kg \cdot m^2]$ $I_z = 8.617[kg \cdot m^2]$
Ski	10[kg]	$I_x = 0[kg \cdot m^2]$ $I_y = 3.334[kg \cdot m^2]$ $I_z = 3.335[kg \cdot m^2]$
Elément de la suspension	1[kg]	$I_x = I_y = I_z = 0[kg \cdot m^2]$

Tableau 4.1 : Masses et inerties des corps composant la capsule Hyperloop

4.5 Déplacement de la capsule Hyperloop

Ce mémoire se focalisant uniquement sur la construction d'un modèle permettant d'étudier la stabilité de la capsule Hyperloop, aucun système de propulsion n'a été étudié. Dès lors, le déplacement de la capsule a été simulé dans le modèle multicorps en conduisant le degré de liberté du centre de masse de la capsule selon $\hat{x}$.

Afin de permettre la transition entre une vitesse nulle et la vitesse souhaitée, deux fonctions de transition ont été implémentées :

- une transition linéaire de la vitesse,
- une transition de la vitesse suivant un cosinus.

Le détail de ces deux fonctions de transition est donné dans l'Annexe G.

4.6 Couplage avec le modèle électrodynamique

Grâce au modèle de substitution par interpolation, le couplage entre le modèle électrodynamique et le modèle multicorps se fait de la même manière pour le modèle FEM et pour le modèle FB. En effet, chacun des deux modèles natifs est vu par le modèle multicorps comme des forces selon $\hat{x}$ et $\hat{z}$ (respectivement F_D et F_L) dépendantes de paramètres cinématiques. Si le modèle FEM est utilisé, il permet aussi d'obtenir le couple en tangage T_θ (celui-ci reste nul si le modèle FB est utilisé). Ces forces et ce couple sont alors modélisés comme des forces et couple externes. Dans ROBOTRAN, tous les forces et couples externes s'exerçant sur un corps sont rassemblés en une unique résultante de forces nommée frc^i et une unique résultante de couples trc^i par rapport au centre de masse du corps i .

Il existe tout de même une différence entre l'utilisation du modèle FEM et du modèle FB car ce dernier ne permet pas de prendre en compte un angle de tangage du ski non nul. Par conséquent, deux contraintes $h(q) = 0$ sont ajoutées lorsque le modèle FB est utilisé. Ces contraintes stipulent que la somme des angles de tangage compris dans la chaîne cinématique⁴ partant du repère inertiel et allant jusqu'à un des deux skis

⁴Il s'agit d'un ensemble ordonné de corps successifs composant le système multicorps.

soit nulle et ce pour chacun des deux skis. Lorsque le modèle FB est utilisé, le système perd deux degrés de liberté pour n'en posséder plus que quatre.

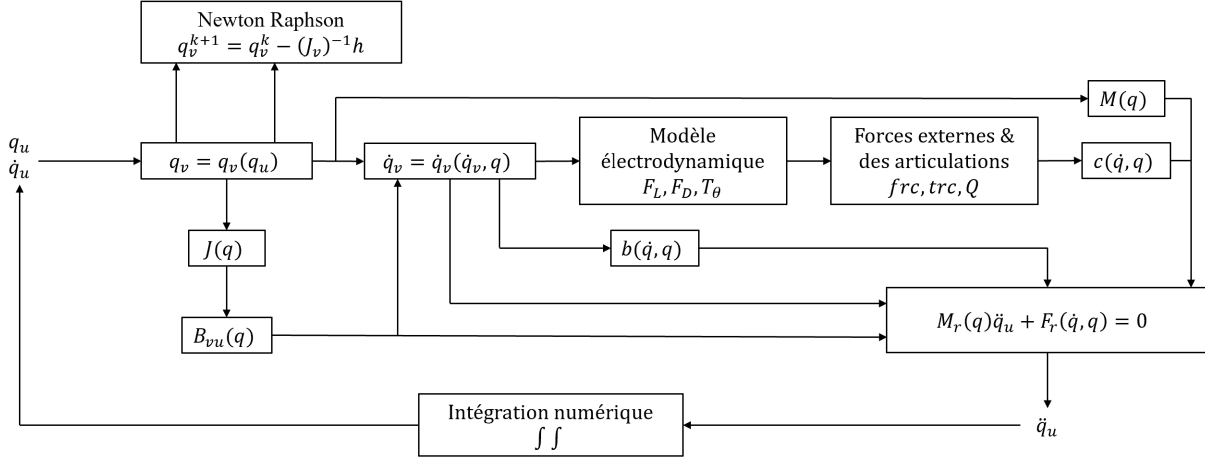


Figure 4.2 : Schéma du fonctionnement global du modèle dynamique multicorps⁵
partiellement repris de [35]

⁵Les expressions $b(\dot{q}, q)$ et $B_{vu}(q)$ proviennent de la réduction du système DAE (4.1) en un système d'ODE (4.2) via le partitionnement de coordonnées.

Les modèles électrodynamiques et multicorps de la capsule Hyperloop ayant été présentés, il est maintenant possible de les coupler comme expliqué dans la Section 4.6 et d'étudier le comportement dynamique de la capsule Hyperloop. Dans, ce chapitre, nous étudierons aussi les potentielles différences dans le comportement dynamique de la capsule Hyperloop selon que le modèle FEM ou le modèle FB est utilisé. Pour ce faire, nous obtiendrons les résultats appropriés de trois manières :

- en utilisant le modèle FEM et en considérant les six degrés de liberté de la capsule,
- en utilisant le modèle FEM et en bloquant le tangage des skis, le système n'a donc plus que quatre degrés de liberté,
- en utilisant le modèle FB et en bloquant le tangage des skis, à nouveau, le système n'a donc plus que quatre degrés de liberté.

De cette façon, nous pourrons étudier la ou les différence.s induite.s par l'utilisation du modèle FEM ou du modèle FB pour un même modèle multicorps. Par ailleurs, nous pourrons aussi étudier l'impact de contraindre l'angle de tangage des skis à un angle nul.

5.1 Centre de masse de la caisse

Une information primordiale manquante dans le rapport technique des étudiants du MIT [32], est la position du centre de masse de la capsule Hyperloop.

Sa position selon $\hat{z}$ a été choisie à 10cm du bord inférieur de la caisse car cela semblait, au vu de la répartition des différents modules composant la capsule, le choix le plus raisonnable. Pour la position en $\hat{x}$ du centre de masse, deux choix paraissaient plus probables : soit mettre le centre de masse au milieu du système de suspension car c'est l'option la plus simple à implémenter vu la construction du modèle multicorps, soit le placer au centre de la longueur de la caisse. Ces dimensions sont reprises à la Figure 5.1.

Il existe un décalage de 69mm entre les deux positions du centre de masse précédemment décrites. Il est donc tout à fait légitime de se demander si ce décalage a un impact sur le comportement dynamique de la capsule. Comme le montrent les graphique repris à la Figure 5.2, lorsque le centre de masse est placé au centre du système de suspension secondaire, sur toute la plage de vitesse $[0; 100]m/s$, il existe une force de réaction non nulle du sol sur la roue avant du ski droit. Cela signifie, que pour toute cette plage de vitesse, la roue avant droite et, par symétrie parfaite entre les côtés droit et gauche de la capsule, la roue avant gauche, restent en contact avec le sol. Ceci ne se produit pas lorsque le centre de masse est positionné au centre de la longueur de la caisse car, comme illustré sur la même Figure 5.2, à partir de $v_x = 40.87m/s$, ni les roues avant ni les roues arrières ne touchent le sol. La capsule est donc, à partir de cette vitesse, en parfaite

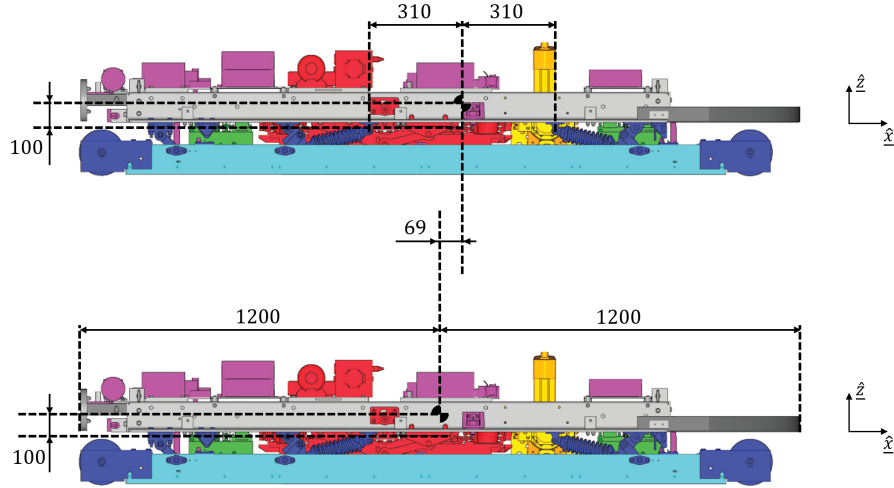


Figure 5.1 : Position du centre de masse de la caisse composant la capsule Hyperloop (les dimensions annotées sont en millimètres et ne sont pas à l'échelle)

l'évitation au-dessus de la voie. Nous pouvons aussi remarquer que la position en $\hat{x}$ du centre de masse de la caisse n'a aucun impact lorsque le tangage des skis est contraint (i.e. avec le modèle FEM possédant quatre degrés de liberté et le modèle FB).

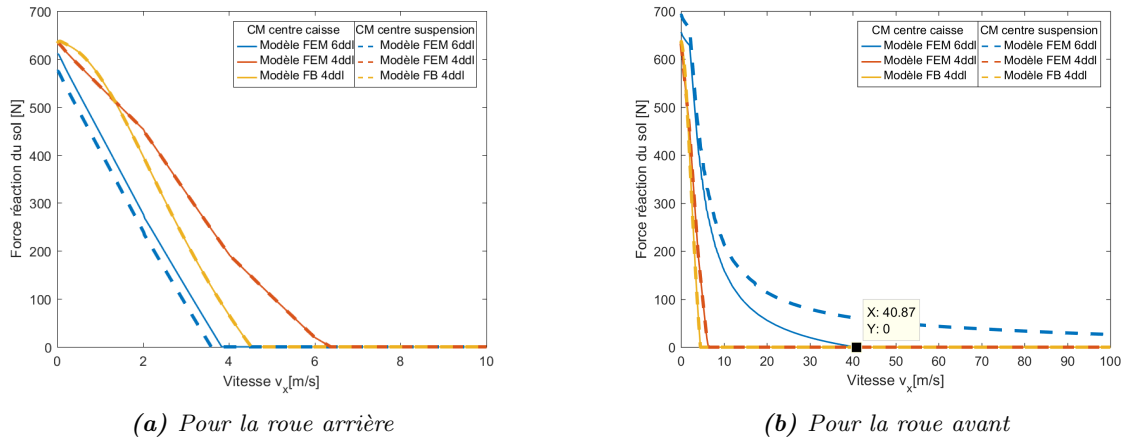


Figure 5.2 : Force de réaction du sol sur les roues du ski droit

Dès lors, une étude plus poussée de l'impact de la position du centre de masse de la caisse sur la dynamique de la capsule est présentée sur la Figure 5.3. Sur celle-ci est représenté la position en $\hat{z}$ et l'angle de tangage de la caisse et du ski droit après stabilisation du véhicule en fonction de la position en $\hat{x}$ du centre de masse de la caisse. Les coudes présents sur ces graphes correspondent à des configurations pour lesquelles les roues avant des skis entrent en contact avec le sol.

Sur la Figure 5.4 figure les résultats de l'impact de la position en $\hat{z}$ du centre de masse de la caisse. Ces résultats sont forts similaires aux précédents.

Ce phénomène peut être expliqué en se souvenant que la masse de la caisse est prédominante sur les autres éléments de la capsule. Dès lors, la position du centre de masse de la caisse a un grand impact sur la position du centre de masse de système global. Or, si celui-ci change, le bras de levier entre les forces

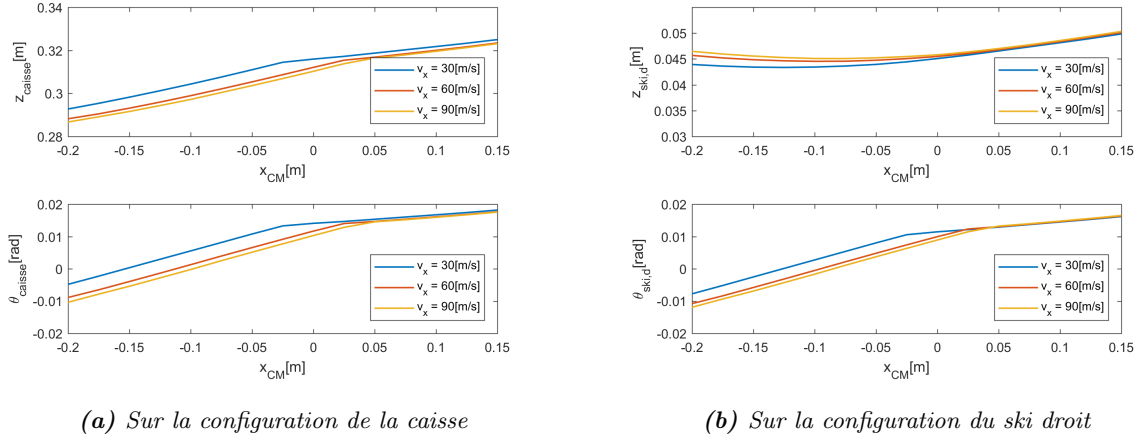


Figure 5.3 : Impact de la position en x du centre de masse de la caisse.
La position $x_{CM} = 0m$ correspond au centre de la caisse

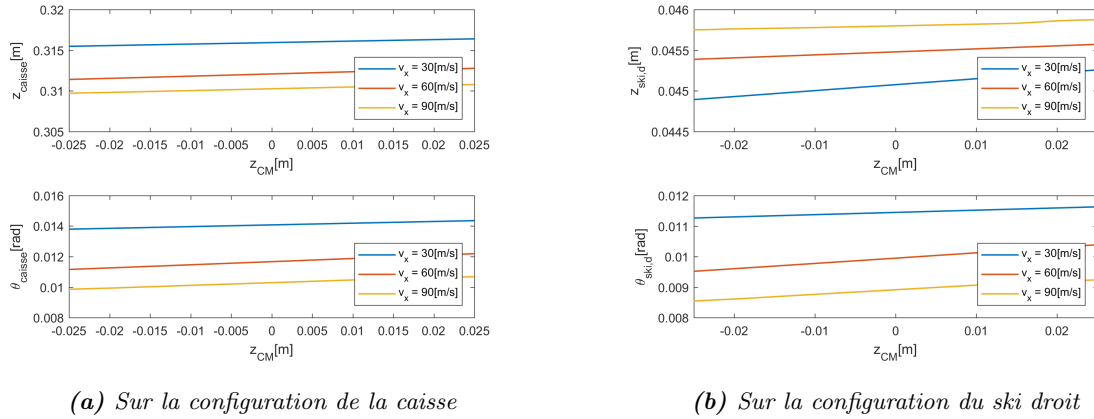


Figure 5.4 : Impact de la position en z du centre de masse de la caisse.
La position $z_{CM} = 0m$ correspond à 10cm au-dessus du bord inférieur de la caisse

électrodynamiques agissant sur les skis et le centre de masse du système change également. Par conséquent, la somme des moments de forces par rapport au centre de masse du système varie elle aussi, entraînant ces variations de configurations.

De tels résultats bien que très peu surprenants, mettent en évidence l'importance de la position du centre de masse d'un véhicule MagLev, et donc la nécessité de disposer d'un modèle possédant un degré de liberté en tangage du véhicule. Dans le reste de ce travail, la position du centre de masse de la caisse sera fixé au centre de la longueur de ladite caisse.

5.2 Force de poussée de la capsule

Comme expliqué dans la Section 4.5, le déplacement de la capsule Hyperloop selon la direction $\hat{x}$ est assuré en commandant le degré de liberté selon $\hat{x}$ du centre de masse de la capsule. Ceci peut se représenter physiquement comme l'ajout d'un moteur fournissant une force selon $\hat{x}$ permettant d'assurer les contraintes de vitesse et d'accélération imposées. Il est donc intéressant d'étudier l'impact de la position d'une telle force sur le comportement de la capsule.

Les résultats de cette étude sont présentés sur les Figures 5.5 et 5.7 pour l'impact de la position en $\hat{x}$ et en

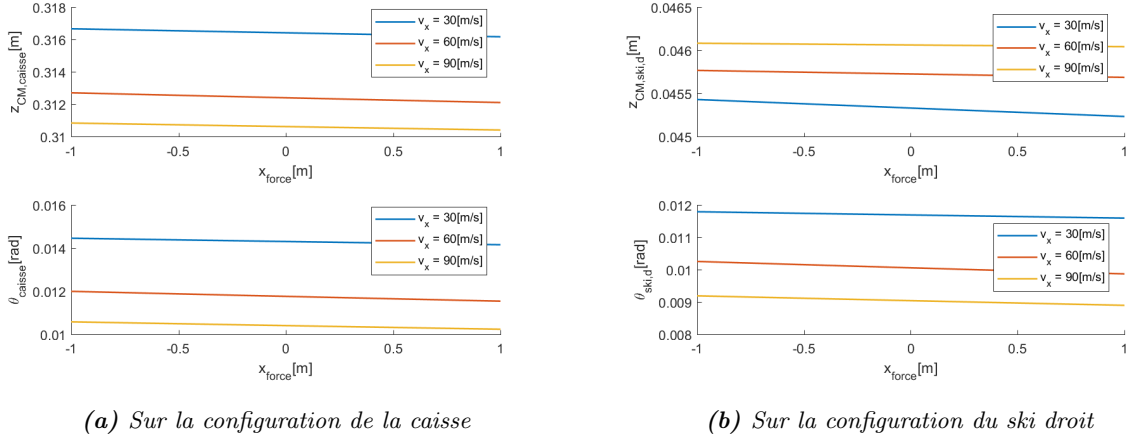


Figure 5.5 : Impact de la position en x de la force de poussée.
La position $x_{\text{force}} = 0\text{m}$ correspond au centre de la caisse

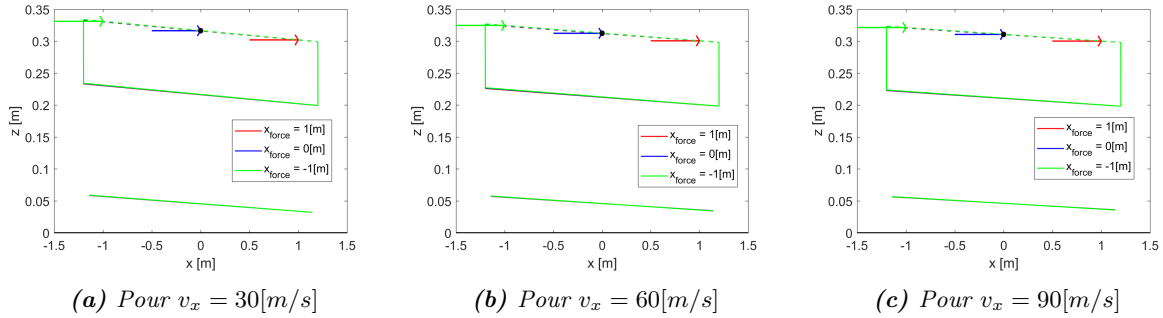


Figure 5.6 : Représentation schématique de la configuration de la capsule Hyperloop pour différentes positions en x de la force de poussée

$\hat{z}$, respectivement, de la force de poussée. Les Figures 5.6 et 5.8 permettent de se représenter ces résultats.

Il ressort de cette étude que la position en $\hat{x}$ de la force de poussée n'a pas beaucoup d'importance, ce qui est assez logique vu que la force de poussée est elle-même orientée selon $\hat{x}$. Cependant, son impact n'est pas nul dû à l'angle de tangage non nul de la caisse.

En ce qui concerne l'impact de la position en $\hat{z}$ de la force de poussée, il convient de remarquer que bien que celui-ci soit plus important que l'impact de la position en $\hat{x}$ de la force de poussée, l'impact de sa position en z est assez faible. De plus, en supposant que la configuration idéale soit un angle de tangage de la caisse nul et une hauteur du ski maximale, les résultats tendent à montrer qu'il n'y a pas de position idéale pour la force de poussée. Plus celle-ci est haute, plus la hauteur du ski est grande mais plus l'angle de tangage du ski augmente également et inversement.

Remarquons que pour toutes les positions de la force de poussée considérées, lorsque la vitesse de la capsule Hyperloop est de 30m/s, les roues avant de la capsule sont en contact avec la voie. La capsule n'est donc pas en lévitation totale.

Au vu de ces résultats, dans la suite du travail, la position en $\hat{x}$ de la force de poussée de la capsule a été fixée au centre du système de suspension et sa position en $\hat{z}$ à 10cm au-dessus du bord inférieur de la caisse.

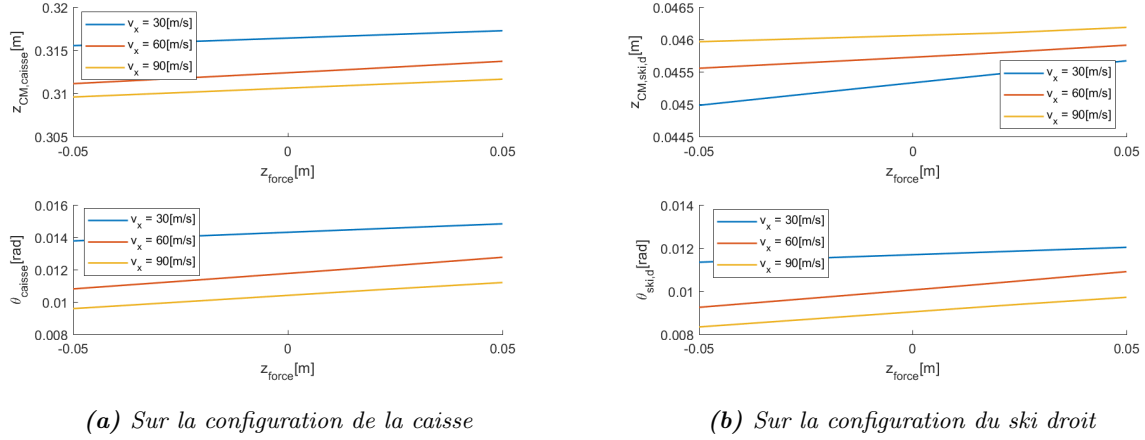


Figure 5.7 : Impact de la position en z de la force de poussée.

La position $z_{force} = 0\text{m}$ correspond à 10cm au-dessus du bord inférieur de la caisse

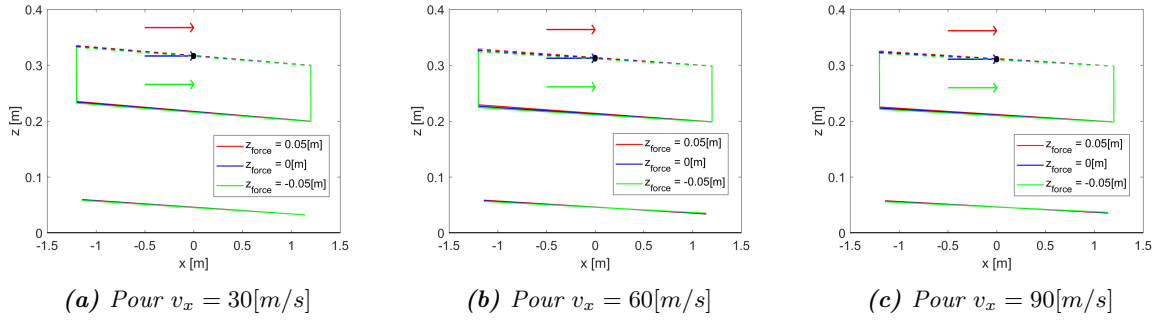


Figure 5.8 : Représentation schématique de la configuration de la capsule Hyperloop pour différentes positions en z de la force de poussée

5.3 Analyse modale de la capsule

Le principe théorique d'une analyse modale a été décrit dans la Section 4.3. En guise de bref rappel, mentionnons qu'une analyse modale linéarise les équations du mouvement d'un système multicorps autour d'un point d'équilibre permettant alors de calculer les modes propres du système. Ces modes propres peuvent être classés en différentes catégories en fonction de la valeur propre $\lambda_{vp,i}$ associée :

- mode propre **non-oscillant** : $\Im\{\lambda_{vp,i}\} = 0$
 - **stable** : $\Re\{\lambda_{vp,i}\} < 0$
 - **instable** : $\Re\{\lambda_{vp,i}\} > 0$
 - **rigide** : $\Re\{\lambda_{vp,i}\} = 0$
- mode propre **oscillant** : $\Im\{\lambda_{vp,i}\} \neq 0$
 - **amorti** : $\Re\{\lambda_{vp,i}\} < 0$
 - **instable** : $\Re\{\lambda_{vp,i}\} > 0$
 - **non-amorti** : $\Re\{\lambda_{vp,i}\} = 0$

Au vu du véhicule étudié et des degrés de liberté considérés dans ce travail, les modes propres non-oscillants ne nous apportent que peu d'information et ne seront donc pas mentionnés.

Le nombre de modes propres composant un système dépend du nombre de degrés de liberté qu'il possède. Dès lors, le modèle FEM, avec six degrés de liberté, possède trois modes propres oscillants :

1. un mode vertical,
2. un mode de roulis,
3. un mode de tangage.

Lorsque le tangage des skis est contraint à un angle nul, le système ne possède plus que quatre degrés de

liberté. Dans ce cas, le système ne compte plus que deux modes oscillants :

1. un mode vertical,
2. un mode de roulis.

La Figure 5.9 reprend les résultats d'une analyse modale effectuée sur la capsule Hyperloop pour différentes vitesses suffisantes afin de permettre la lévitation complète de la capsule. Les résultats obtenus avec le modèle FEM présentent des discontinuités, ce qui n'est pas le cas des résultats calculés avec le modèle FB. La raison de ces discontinuités n'a pas été identifiée. Toutefois, ces résultats tendent à montrer que les modes propres oscillants du système sont stables et ne dépendent que très peu de la vitesse. Il convient aussi de remarquer une légère différence entre les résultats obtenus grâce au modèle FEM avec six degrés de liberté et ceux obtenus avec le modèle FEM avec quatre degrés de liberté. Cette différence est causée par un angle de tangage des skis non nul à l'équilibre pour l'ensemble de la plage de vitesse considérée, ce qui a donc un impact sur les forces électrodynamiques en présence.

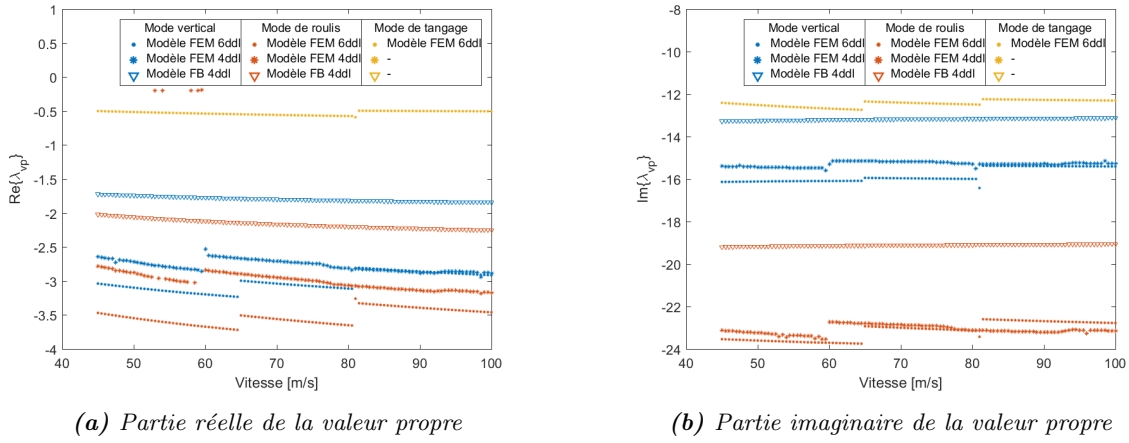


Figure 5.9 : Résultats de l'analyse modale sur la capsule Hyperloop du MIT

Le Tableau 5.1 donne la fréquence propre et le facteur d'amortissement des différents modes propres en fonction du modèle utilisé et des degrés de liberté. Ces résultats ont été obtenus pour une vitesse v_x de 90m/s .

Modèle	Nombre de degrés de liberté	Mode	Fréquence propre	Facteur d'amortissement
FB	4	Vertical	$\nu = 2.096[Hz]$	$\xi = 13.81[\%]$
		Roulis	$\nu = 3.037[Hz]$	$\xi = 11.6[\%]$
FEM	4	Vertical	$\nu = 2.432[Hz]$	$\xi = 16.34[\%]$
		Roulis	$\nu = 3.694[Hz]$	$\xi = 16.34[\%]$
FEM	6	Vertical	$\nu = 2.45[Hz]$	$\xi = 18.27[\%]$
		Roulis	$\nu = 3.612[Hz]$	$\xi = 14.8[\%]$
		Tangage	$\nu = 2.19[Hz]$	$\xi = 4.235[\%]$

Tableau 5.1 : Résultats de l'analyse modale pour $v_x = 90\text{m/s}$

5.4 Réaction de la capsule à des perturbations sur la voie

Comme expliqué dans [37], en fonction de l'étude effectuée sur le véhicule, nous nous intéressons à différentes plages de fréquences des vibrations :

- de 0.1Hz à 0.5Hz pour l'étude du mal de voyage,
- de 0.5Hz à 80Hz pour l'étude du confort et de la sécurité.

Cependant, étant donné qu'aucun des deux modèles électrodynamiques ne permet, pour le moment, de prendre en compte des déformations locales de la voie, il est nécessaire de limiter la période spatiale des déformations de la voie à deux fois la longueur d'un ski. Cette limitation va donc aussi impacter la fréquence temporelle maximale pouvant être simulée :

$$f_{temp.} = \frac{v_x}{\lambda_{spatial}}$$

Le modèle FEM ayant une vitesse v_x maximale de 100m/s, alors la fréquence maximale qui peut-être simulée sans sortir des hypothèses des différents modèles est de 22.5Hz.

Par ailleurs, l'analyse modale a permis de mettre en évidence une faible variation des modes propres de la capsule avec sa vitesse ainsi que la présence de modes propres à faible fréquence (dans les alentours de 2Hz). Afin d'approfondir l'étude dynamique de la capsule, des perturbations sinusoïdales sur la voie ont été ajoutées. Ce signal sinusoïdal de perturbation possède une amplitude de 1mm et une fréquence augmentant linéairement avec le temps permettant ainsi d'étudier la réaction de la capsule en fonction de la fréquence du signal de perturbation :

$$z_{perturb} = z_{max} \sin \left[2\pi \left(\frac{f_1 - f_0}{t_1 - t_0} \frac{t - t_0}{2} \right) (t - t_0) \right] \quad (5.1)$$

Les résultats d'une telle étude sont repris dans les Figures 5.10 et 5.11a. Ceux-ci ont été obtenus lorsque la capsule se déplaçait à une vitesse v_x de 90m/s. Lorsque la capsule a atteint un équilibre quasi-statique, la perturbation de la voie décrite par l'équation (5.1) a été ajoutée pour balayer les fréquences entre $[0, 5]Hz$ durant 500s afin de laisser le temps aux perturbations d'impacter le comportement de la capsule.

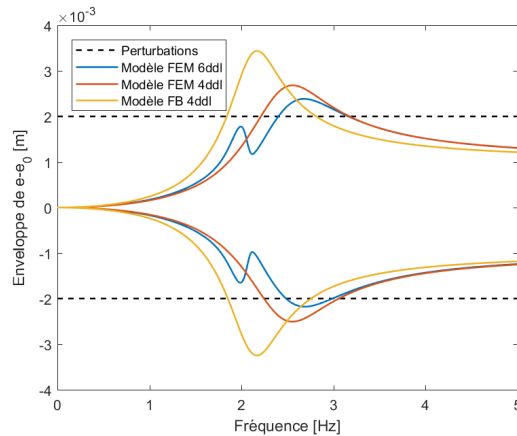


Figure 5.10 : Enveloppe du signal correspondant à la hauteur d'entrefer pour $v_x = 90m/s$

La Figure 5.11a présente l'enveloppe correspondant à la variation de la hauteur d'entrefer par rapport à sa valeur d'équilibre en fonction de la fréquence du signal de perturbation. Sur cette figure est présenté le mode vertical pour les trois modèles (i.e. les pics présents sur les courbes orange et rouge ainsi que le second pic

de la courbe bleue). Le premier pic sur la courbe bleue correspond au mode de tangage de la capsule. Grâce à ces résultats, nous pouvons constater une différence dans le comportement du ski en fonction du modèle électrodynamique utilisé. Les résultats obtenus avec les modèles multicorps à quatre et six degrés de liberté couplés avec le modèle FEM présentent des différences bien moins grandes.

Un aspect très important dans l'analyse des véhicules est l'étude du confort. Celle-ci se base principalement sur l'accélération subie par le véhicule lors d'un trajet ainsi que sur les critères de confort imposés par la norme *ISO2631* [38]. Il bien sûr trop tôt dans l'étude du système Hyperloop pour pouvoir réaliser une analyse complète du confort. Pourtant, il est déjà intéressant d'investiguer les accélérations verticales ressenties par le véhicule. Comme l'explique [37], une mesure nécessaire à l'analyse du confort est l'accélération verticale ressentie au sol à l'emplacement du passager. Or, d'après les plans de la capsule fournis par l'équipe du MIT, le siège pour le passager de leur capsule se trouve à $1.01m$ dans la direction $\hat{x}$ du centre du système de suspension. Grâce au logiciel ROBOTRAN, il est possible de calculer l'accélération absolue de n'importe quel point du système. Ces résultats sont présentés sur la Figure 5.11.

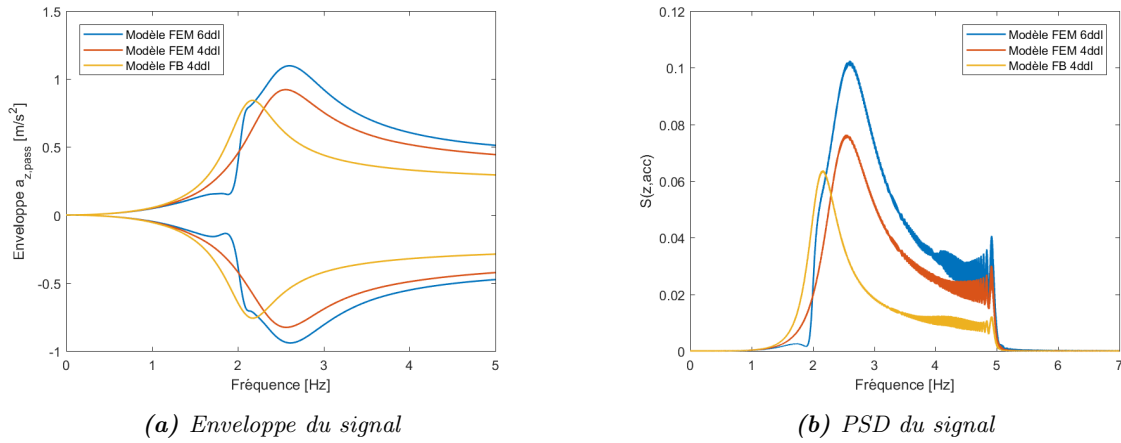


Figure 5.11 : Variation de l'accélération selon $\hat{z}$ d'un point au sol là où se trouve l'assise de la capsule pour $v_x = 90m/s$

La Figure 5.11b montre la densité spectrale de puissance (PSD¹) de l'accélération selon $\hat{z}$. Sur cette figure, nous retrouvons le pic lié au mode propre vertical du véhicule. Notons que dans le cas du système à six degrés de liberté, les modes propres - vertical et de tangage - se superposent ne donnant donc pas réellement lieu à deux pics distincts mais à un seul pic couvrant une plage de fréquence plus large. Il ressort de ces résultats que ne pas considérer le tangage mène à largement sous-estimer les vibrations. Ce qui justifie encore une fois, l'importance de prendre ce degré de liberté en compte dans le modèle dynamique de la capsule Hyperloop.

L'analyse modale effectuée précédemment (voir Section 5.3) montrait une faible dépendance entre les modes propres et la vitesse de la capsule. Cependant, si la vitesse est trop basse, alors les oscillations liées aux perturbations de la voie seront trop importantes et mèneront à un contact entre les roues de la capsule et la voie. Afin d'analyser ce phénomène, les résultats obtenus lorsque les roues des skis entrent en contact avec la voie seront comparés avec des résultats obtenus en désactivant artificiellement le contact entre les roues et la voie.

La Figure 5.13a montre une forte augmentation de l'amplitude des oscillations de l'accélération lorsque le contact entre la voie et les roues de la capsule est activé. Cependant, comme nous pouvons le voir sur la Figure 5.13b, étant donné que les roues des skis touchent le sol, les oscillations de l'accélération ne sont plus sinusoïdales. Dès lors, nous ne constatons pas une forte augmentation de l'amplitude de la PSD du signal autour de 3Hz. La Figure 5.14 montre même une légère diminution de l'amplitude de la PSD autour de 3Hz. En revanche, le contact entre les roues et la voie va entraîner des variations de la densité de puissance pour des fréquences de 4-5Hz. Remarquons tout de même que ces différences sont assez faibles.

¹Par convention, l'acronyme PSD désigne l'expression anglaise "Power Spectral Density".

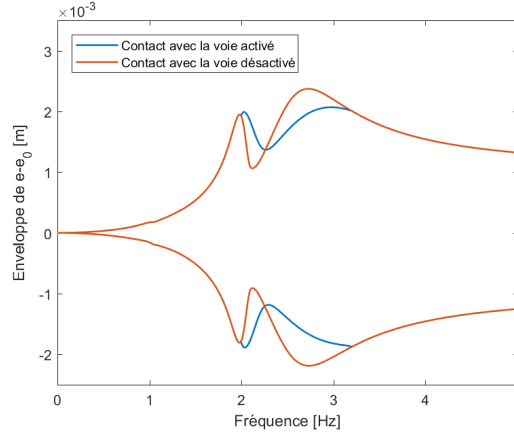
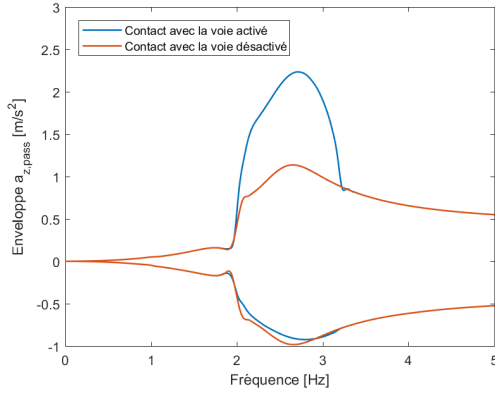
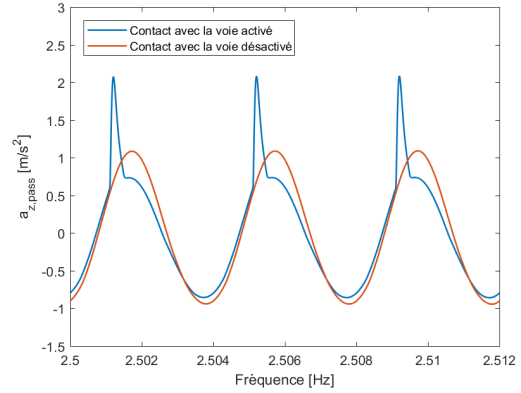


Figure 5.12 : Enveloppe du signal correspondant à la hauteur d'entrefer pour $v_x = 60\text{m/s}$



(a) Enveloppe du signal



(b) Zoom sur le signal

Figure 5.13 : Variation de l'accélération selon $\hat{z}$ d'un point au sol là où se trouve l'assise de la capsule pour $v_x = 60\text{m/s}$

Finalement, une fois l'accélération obtenue pour différentes fréquences, il est nécessaire de pondérer ces accélérations par un facteur W dépendant de plusieurs critères [37] :

- la largeur de la bande de fréquence,
- le critère de mesure,
- l'axe selon lequel les mesures ont été prises.

Dans le cas d'une mesure de l'accélération selon l'axe $\hat{z}$ d'un point au sol là où se trouve l'assise, le facteur de pondération à utiliser est nommé W_k (donné dans [38], Tableau 3, Section 6, p.7). L'accélération pondérée est alors obtenue pour chaque fréquence n par :

$$a_w(t) = \sqrt{\sum_n^n (W_n a_n)^2} \quad (5.2)$$

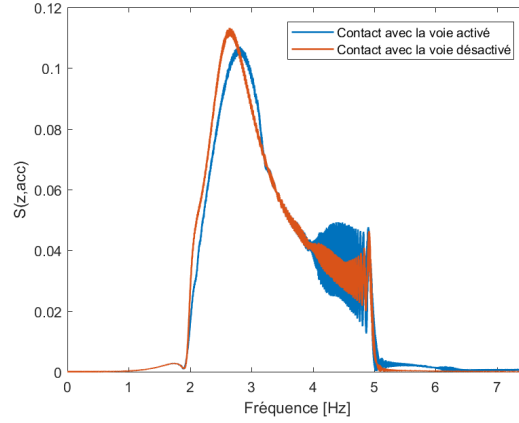


Figure 5.14 : PSD de l'accélération selon $\hat{z}$ d'un point au sol là où se trouve l'assise de la capsule pour $v_x = 60\text{m/s}$

La valeur efficace de l'accélération pondérée doit ensuite être calculée grâce à l'équation suivante :

$$a_w = \left[\frac{1}{T} \int_0^T a_w^2(t) dt \right]^{\frac{1}{2}} \quad (5.3)$$

où T est la durée de la mesure en secondes. Par l'utilisation de la toolbox Matlab[®] "Vibrationdata" [39], il a été possible de calculer la valeur efficace de l'accélération pondérée pour les différents modèles. Ces résultats sont repris dans le Tableau 5.2 pour les différents modèles.

Modèle	Accélération pondérée RMS	Erreur par rapport au modèle FEM 6ddl
FB 4ddl	$a_w = 0.2072[m/s^2]$	38.26%
FEM 4ddl	$a_w = 0.2899[m/s^2]$	13.55%
FEM 6ddl	$a_w = 0.3353[m/s^2]$	Pris comme référence

Tableau 5.2 : Résultats de l'analyse du confort sur la capsule Hyperloop

En outre, grâce aux critères définis par la norme *ISO2631* [38] (Annexe C.2.3), il est possible, sur base de la valeur RMS de l'accélération pondérée, de définir le confort de la capsule Hyperloop ; ceci n'est pas l'objectif de ce travail. Toutefois, nous constatons à nouveau, via les résultats repris dans le Tableau 5.2, que négliger le degré de liberté en tangage des skis induit une grande différence au point de vue du confort (différence de 13.55% entre le modèle FEM quatre degrés de liberté et celui avec six degrés de liberté). De plus, passer du modèle FEM ou modèle FB engendre aussi une erreur non négligeable (différence de 28.53% entre les modèles FB et FEM, chacun à quatre degrés de liberté).

CONCLUSIONS

L'objectif principal de ce mémoire était d'élaborer un modèle permettant d'étudier le comportement dynamique d'une capsule Hyperloop lévitant au-dessus de la voie grâce à un système de suspension électrodynamique passif. Ce modèle devait permettre de prendre en compte à la fois les phénomènes électrodynamiques en jeu ainsi que les phénomènes dynamiques du système multicorps que constitue la capsule Hyperloop. Une fois ce modèle construit, il devait être testé sur un design pré-existant de capsule Hyperloop.

Dans le Chapitre 1, nous avons pu constater que très peu d'études se sont intéressées à la capsule Hyperloop à proprement parler. Toutefois, la littérature regorge d'articles analysant les trains à lévitation magnétique dont le fonctionnement est très proche de celui d'une capsule Hyperloop. Néanmoins, comme nous l'avons observé parmi toutes ces études, très peu voire aucune ne considérait à la fois la physique liée au système de lévitation magnétique et celle décrivant la dynamique de systèmes multicorps.

Le Chapitre 2 s'est attaché à décrire la méthodologie suivie durant ce travail. Il introduit aussi le design pré-existant de la capsule Hyperloop conçue par une équipe d'étudiants du MIT, et décrit dans un rapport rendu public [32]. Il convient tout de même de rappeler qu'un grand nombre d'informations nécessaires pour la confection du modèle multicorps de la capsule manquaient dans ce rapport, et ont donc dû être déduits ou établis le plus rationnellement possible et par bon sens.

Le Chapitre 3 a été dédié à la dérivation de deux modèles électrodynamiques natifs : un premier modèle basé sur la résolution d'un modèle quasi-statique 2D par la méthode des éléments finis (i.e. le modèle FEM), le second modèle, quant à lui, est basé sur la résolution des équations de Maxwell locales grâce au développement en série de Fourier (i.e. le modèle FB). Il a été mis en évidence qu'un couplage direct avec le modèle FEM ne serait pas très efficace et donc deux modèles de substitution ont été conçus sur base des résultats du modèle FEM : un modèle Lumped et un modèle d'interpolation. Toutefois, il a été démontré que le modèle Lumped ne fournissait pas de résultats assez satisfaisants, principalement en raison d'hypothèses abusives qu'un tel modèle nécessitait de poser. Par la suite, nous avons procédé à une comparaison entre les modèles FEM et FB montrant alors que l'impact des effets de bord qui, par construction, ne peuvent pas être pris en compte dans le modèle FB, est non négligeable et que ces effets de bord entraînent une différence allant jusqu'à 16.3% selon qu'ils sont ou non pris en considération.

Dans le Chapitre 4, nous nous sommes penchés sur le développement du modèle multicorps de la capsule Hyperloop basé sur le logiciel ROBOTRAN développé par l'UCLouvain. Ce dernier a pour grand avantage de permettre un couplage simple et efficace avec le modèle électrodynamique. En effet, le modèle multicorps permet d'obtenir les informations cinématiques utiles pour le modèle électrodynamique qui, ainsi, calcule les forces dues à l'interaction entre le champ magnétique des aimants et la voie en aluminium. Ces forces sont alors injectées dans le modèle multicorps sous forme de forces extérieures agissant sur les skis de la capsule.

Dans le Chapitre 5, nous avons présenté une étude dynamique de la capsule Hyperloop. Différents aspects du système y ont été étudiés telles que la position du centre de masse de la caisse et une analyse modale

de la capsule. Enfin, une analyse primitive du confort du véhicule a été réalisée. Celle-ci présente des différences importantes suivant que le modèle FEM ou le modèle FB est utilisé. Par ailleurs, ces résultats sur la dynamique de la capsule montraient l'intérêt de considérer l'angle de tangage des skis par rapport à la voie.

Au terme de ce mémoire, nous pouvons conclure que les différents objectifs ont été partiellement atteints. Le manque de temps et l'indisponibilité de certains paramètres essentiels nous ont empêché d'aboutir à des résultats exhaustifs. Cependant, ce travail étant le premier à l'UCLouvain ayant pour ambition l'étude de la dynamique d'une capsule Hyperloop, il est important de pointer et d'ouvrir la voie vers diverses améliorations pouvant être apportées principalement au niveau du modèle électrodynamique. Ainsi, il serait intéressant d'obtenir un modèle analytique de phénomènes électrodynamiques permettant de prendre en compte le tangage du ski ainsi que les effets dynamiques verticaux et de tangage. Par ailleurs, une étude de design de la capsule aussi bien magnétique que mécanique pourrait être envisagée. Finalement, dans ce travail, seul le système de lévitation de la capsule Hyperloop a été étudié. Or un tel véhicule nécessite aussi des systèmes de guidage et de propulsion. Ceux-ci pourraient donc faire l'objet de travaux et d'études ultérieurs.

BIBLIOGRAPHIE

- [1] R. Koselleck, “Y-a-t-il une accélération de l’histoire ?” 2011. [En ligne]. Disponible: <https://journals.openedition.org/trivium/4079#quotation>
- [2] M. Hugh, “Which planes fly the fastest?” juin 2017. [En ligne]. Disponible: <https://www.telegraph.co.uk/travel/travel-truths/which-passenger-jet-plane-flies-the-fastest/>
- [3] J. Verne, *La Journée d’un Journaliste Américain en 2889 suivi de Le Humbug*. PRNG, 2018.
- [4] E. Musk, “Hyperloop Alpha,” *SpaceX/Tesla Motors*, p. 1–58, 2013. [En ligne]. Disponible: https://www.tesla.com/sites/default/files/blog_images/hyperloop-alpha.pdf
- [5] PI Nelson Air, “Air Bearing Basics, Fundamentals,” 2020. [En ligne]. Disponible: http://www.nelsonair.com/NA_primer.htm
- [6] F. Franche, “Une entreprise française développe l’Aérotrain, une alternative à l’Hyperloop,” juillet 2018. [En ligne]. Disponible: <https://geeko.lesoir.be/2018/07/08/une-entreprise-francaise-developpe-laerotraine-une-alternative-a-lhyperloop/>
- [7] P.-H. Muller, “Aérotrain, le train à sustentation de Jean-Bertin, ancêtre du TGV,” 2006. [En ligne]. Disponible: <https://www.boreally.org//industrie-abandon/aerotraine-jean-bertin/>
- [8] E. Gleizes, “Spacetrain.” [En ligne]. Disponible: <https://space-train.fr/>
- [9] T. D. F. Cabral et F. R. Chavarette, “Dynamics and control design via LQR and SDRE methods for a maglev system,” *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 101, n^o. 2, p. 289–300, janvier 2015.
- [10] Wikipedia, “Eddy current,” 2020. [En ligne]. Disponible: https://en.wikipedia.org/wiki/Eddy_current
- [11] M. Murai, “Optimized Design of 8-Figure Null-Flux Coils in EDS,” Rapport technique, juillet 2014.
- [12] A. Cassat et V. Bourquin, “MAGLEV – Worldwide Status and Technical Review,” *MAGLEV – Worldwide Status and Technical Review*, n^o. Mlx, p. 1–53, décembre 2011.
- [13] N. H. Kim et L. Ge, “Dynamic modeling of electromagnetic suspension system,” *JVC/Journal of Vibration and Control*, vol. 19, n^o. 5, p. 729–741, 2012.
- [14] R. F. Post et D. D. Ryutov, “The inductrack: A simpler approach to magnetic levitation,” *IEEE Transactions on Applied Superconductivity*, vol. 10, n^o. 1, p. 901904, avril 2000.
- [15] H. D. Young et R. A. Freedman, *University Physics with Modern Physics*, 14^e éd. Santa Barbara: Pearson, 2016.

- [16] P. T. Keyser et S. R. Jefferts, "Magnetic susceptibility of some materials used for apparatus construction (at 295 K)," *Review of Scientific Instruments*, vol. 60, n^o. 8, p. 2711–2714, septembre 1989.
- [17] G. D'Ovidio, F. Crisi et G. Lanzara, "A "V" shaped superconducting levitation module for lift and guidance of a magnetic transportation system," *Physica C: Superconductivity and its Applications*, vol. 468, n^o. 14, p. 1036–1040, février 2008.
- [18] E. Chaidez, S. P. Bhattacharyya et A. N. Karpetis, "Levitation methods for use in the hyperloop high-speed transportation system," *Energies*, vol. 12, n^o. 21, octobre 2019.
- [19] J. Miericke et L. Urnkar, "Theory of electrodynamic levitation with a continuous sheet track - Part I," *Applied Physics*, vol. 2, n^o. 4, p. 201–211, juin 1973.
- [20] H. Rezaei et S. Vaez-Zadeh, "Modelling and analysis of permanent magnet electrodynamic suspension systems," *Progress In Electromagnetics Research M*, vol. 36, n^o. March, p. 77–84, mai 2014.
- [21] A. Najjar-Khodabakhsh, S. Vaez-Zadeh et A. H. Isfahani, "Finite element analysis and experimental implementation of the cylindrical permanent magnet electrodynamic suspension system," *Electromagnetics*, vol. 29, n^o. 7, p. 563–574, octobre 2009.
- [22] J. L. He, D. M. Rote et H. T. Coffey, "Study of Japanese Electrodynamic-Suspension Maglev Systems," Center for Transportation Research, Rapport technique, avril 1994.
- [23] E. Chaidez, "Modeling and Performance Evaluation of Electromagnetic," Thèse de doctorat, Texas A&M University, mai 2018.
- [24] J. L. He, D. M. Rote et H. T. Coffey, "Applications of the Dynamic Circuit Theory to Maglev Suspension Systems," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 29, n^o. 6, p. 4153–4164, novembre 1993.
- [25] C. F. Zhao et W. M. Zhai, "Maglev vehicle/guideway vertical random response and ride quality," *Vehicle System Dynamics*, vol. 38, n^o. 3, p. 185–210, août 2002.
- [26] K. Watanabe, H. Yoshioka, E. Suzuki, T. Tohtake et M. Nagai, "A Study of Vibration Control Systems for Superconducting Maglev Vehicles," *Journal of System Design and Dynamics*, vol. 1, n^o. 3, p. 593–604, mars 2007.
- [27] H. Hoshino, E. Suzuki et K. Watanabe, "Reduction of vibrations in Maglev vehicles using active primary and secondary suspension control," *Quarterly Report of RTRI (Railway Technical Research Institute) (Japan)*, vol. 49, n^o. 2, p. 113–118, mai 2008.
- [28] E. Suzuki, J. Shirasaki, K. Watanabe, H. Hoshino et M. Nagai, "Comparison of Methods to Reduce Vibrations in Superconducting Maglev Vehicles by Primary Suspension Control," *Journal of Mechanical Systems for Transportation and Logistics*, vol. 1, n^o. 1, p. 3–13, août 2008.
- [29] CEREM, "Robotran : Symbolic generator of multibody systems," 2020. [En ligne]. Disponible: <https://www.robotran.be/>
- [30] COMSOL AB, "COMSOL Multiphysics® v. 5.0," Stockholm, Sweden. [En ligne]. Disponible: <https://www.comsol.com/>
- [31] R. Post et D. Ryutov, "The Inductrack concept: A new approach to magnetic levitation," juin 1996. [En ligne]. Disponible: http://www.osti.gov/energycitations/product.biblio.jsp?osti_id=237425
- [32] MIT Hyperloop Team, "MIT Hyperloop Final Report," MIT, Rapport technique, août 2017.
- [33] V. Legat, "INTRODUCTION AUX ELEMENTS FINIS ...et au génie logiciel numérique en langage C," Louvain-la-Neuve, 2015.
- [34] B. Hannon, P. Sergeant, L. Dupré et P. D. Pfister, "Two-Dimensional Fourier-Based Modeling of Electric Machines - An Overview," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 55, n^o. 10, octobre 2019.
- [35] P. Fisette et Q. Docquier, "Modeling Multibody Systems with ROBOTRAN," UCLouvain, Rapport technique, février 2019.

- [36] P. Fisette, “MECA 2215 - Vehicle dynamics,” Louvain-la-Neuve, 2019.
- [37] V. Sokolow et L. Gouveia Ergin, “LMECA2215 - Vehicle Dynamics: Project Report - Assessing the usability of low-cost and accessible sensors for comfort and health measurements,” UCLouvain, Rapport technique, janvier 2020.
- [38] O. internationale de normalisation, “Norme Internationale - ISO2631 : Vibrations et chocs mécaniques - Evaluation de l'exposition des individus à des vibrations globales du corps - Partie 1,” Genève, p. 1–33, 1997.
- [39] T. Irvine, “Vibrationdata: Matlab Signal Analysis & Structural Dynamics Package,” mai 2013. [En ligne]. Disponible: <https://vibrationdata.wordpress.com/2013/05/29/vibrationdata-matlab-signal-analysis-package/>
- [40] T. Lubin, S. Mezani et A. Rezzoug, “Analytic calculation of eddy currents in the slots of electrical machines: Application to cage rotor induction motors,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 47, n^o. 11, p. 4650–4659, novembre 2011.
- [41] J. Miericke et L. Urankar, “Theory of electrodynamic levitation with a continuous sheet track - Part II,” *Applied Physics*, vol. 2, n^o. 4, p. 67–76, octobre 1973.
- [42] L. Brieda, “Interpolation using an arbitrary quadrilateral,” juin 2012. [En ligne]. Disponible: <https://www.particleincell.com/2012/quad-interpolation/>
- [43] T. Lubin, S. Mezani et A. Rezzoug, “Simple analytical expressions for the force and torque of axial magnetic couplings,” *IEEE Transactions on Energy Conversion*, vol. 27, n^o. 2, p. 536–546, juin 2012.
- [44] H. Slutsken, “Flying on the Concorde: What was it really like?” mars 2019. [En ligne]. Disponible: <https://edition.cnn.com/travel/article/concorde-flying-what-was-it-like/index.html>
- [45] G. Demouveaux, “Comment l’Aérotrain a failli révolutionner le transport,” p. 15, décembre 2017. [En ligne]. Disponible: <https://www.ouest-france.fr/leditiondusoir/data/14765/reader/reader.html#!preferred/1/package/14765/pub/21438/page/14>
- [46] H. W. Lee, K. C. Kim et J. Lee, “Review of Maglev train technologies,” *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 42, n^o. 7, p. 1917–1925, juillet 2006.
- [47] Z. Guo, J. Li et D. Zhou, “Study of a null-flux coil electrodynamic suspension structure for evacuated tube transportation,” *Symmetry*, vol. 11, n^o. 10, septembre 2019.
- [48] R. Jeanticou, “Entourloupes chez Hyperloop : pourquoi le train du futur n’est pas près de partir,” juillet 2016. [En ligne]. Disponible: <https://www.telerama.fr/monde/entourloupes-chez-hyperloop-pourquoi-le-train-du-futur-n-est-pas-pres-de-partir,145622.php>

Annexes

ANNEXE A

THÉORÈME DE EARNSHAW

Le théorème de Earnshaw postule que des interactions électrostatiques seules ne peuvent pas entièrement stabiliser un système. En effet, un système est dit stable si :

- $\sum \vec{F} = \vec{0}$ and $\sum \vec{M} = \vec{0} \Rightarrow$ Conditions de stabilité statique
- $k_x \triangleq -\frac{\partial F_x}{\partial x} = 0, k_y \triangleq -\frac{\partial F_y}{\partial y} = 0$ et $k_z \triangleq -\frac{\partial F_z}{\partial z} = 0$
- $k_\phi \triangleq -\frac{\partial M_\phi}{\partial \phi} = 0, k_\theta \triangleq -\frac{\partial M_\theta}{\partial \theta} = 0$ et $k_\psi \triangleq -\frac{\partial M_\psi}{\partial \psi} = 0$ } $\Rightarrow$ Conditions de stabilité dynamique

Or, les forces agissant sur le système sont des forces dues à un champ magnétique non-uniforme. Ces forces peuvent être exprimées comme l'opposé du gradient de l'énergie potentielle du système U :

$$\begin{aligned}\vec{F} &= -\vec{\nabla}U \\ U &\triangleq -(\vec{m} \cdot \vec{B}) \Big| \\ &= \vec{\nabla}(\vec{m} \cdot \vec{B})\end{aligned}$$

Donc, par définition des coefficients de raideur :

$$k_x + k_y + k_z = -\vec{\nabla} \cdot \vec{F} = -\vec{\nabla}^2(\vec{m} \cdot \vec{B}) \quad (\text{A.1})$$

Il n'y a maintenant que deux cas possibles à envisager, soit le dipôle peut avoir une orientation magnétique fixe (i.e. des aimants permanents), soit le dipôle peut s'orienter avec les lignes de champ externes (i.e. matériaux paramagnétiques, ferromagnétiques ou diamagnétiques) :

Dipôle avec orientation magnétique fixe : Dans ce cas, le moment magnétique $\vec{m}$ est constant. La relation (A.1) devient :

$$k_x + k_y + k_z = -\vec{m} \cdot \vec{\nabla}^2(\vec{B})$$

Pour un système sans courant ou sans variation de champ électrique, les équations de Maxwell se simplifient et impliquent que, à la fois la divergente et le rotationnel du champ magnétique $\vec{B}$, sont nuls. Par les identités vectorielles :

$$\begin{aligned}\vec{\nabla} \times \overbrace{(\vec{\nabla} \times \vec{B})}^{=\vec{0}} &= \vec{\nabla} \overbrace{(\vec{\nabla} \cdot \vec{B})}^{=0} - \vec{\nabla} \cdot (\vec{\nabla} \vec{B}) \\ \vec{\nabla}^2 \vec{B} &= \vec{0}\end{aligned}$$

Ce résultat mène à la conclusion que pour des aimants permanents :

$$\boxed{k_x + k_y + k_z = 0}$$

Ayant comme interprétation physique qu'au moins une direction est instable si toutes les autres sont stables.

Dipôle aligné avec les lignes de champ externes : Si on considère uniquement les matériaux paramagnétiques, ferromagnétiques ou diamagnétiques, alors, le moment magnétique est donné par :

$$\vec{m} = C\vec{B}$$

Où C est une constante positive pour les matériaux paramagnétiques et ferromagnétiques et négative pour les matériaux diamagnétiques. L'expression (A.1) peut être réécrite :

$$\begin{aligned} k_x + k_y + k_z &= -C \cdot \vec{\nabla}^2(\vec{B} \cdot \vec{B}) \\ &= -2C \left(B_x \vec{\nabla}^2 B_x + B_y \vec{\nabla}^2 B_y + B_z \vec{\nabla}^2 B_z + \left| \vec{\nabla} B_x \right|^2 + \left| \vec{\nabla} B_y \right|^2 + \left| \vec{\nabla} B_z \right|^2 \right) \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Comme démontré précédemment, le Laplacien de $\vec{B}$ est nul, l'équation (A.2) devient :

$$k_x + k_y + k_z = -2C \underbrace{\left(\left| \vec{\nabla} B_x \right|^2 + \left| \vec{\nabla} B_y \right|^2 + \left| \vec{\nabla} B_z \right|^2 \right)}_{\geq 0}$$

Dès lors, si C est positif (i.e. pour des matériaux paramagnétiques et ferromagnétiques) :

$$\boxed{k_x + k_y + k_z \leq 0}$$

Signifiant qu'au moins une des directions est instable.

Cependant, si C est négatif (i.e. pour des matériaux diamagnétiques) :

$$\boxed{k_x + k_y + k_z \geq 0}$$

L'interprétation physique de cette relation étant qu'il est possible d'avoir un système pour lequel l'ensemble de des directions est stable. Cependant, les forces répulsives dues à l'interaction entre un matériau diamagnétique et un champ magnétique ne sont pas suffisantes pour être utilisées dans un système MagLev sauf pour des matériaux supraconducteurs.

ANNEXE B

MODÈLE LUMPED : DÉVELOPPEMENT DES EXPRESSIONS

Cette annexe fournit les développements complets nécessaires pour l'expression des forces électrodynamiques du système de lévitation sur base du modèle Lumped.

B.1 Calcul du courant induit dans la voie en aluminium

Repartons de l'équation (3.17) et prenons comme condition initiale $i_e(0) = 0$:

$$I_e(s) = \frac{\phi_0 \omega}{L} \frac{s}{\left(s + \frac{R}{L}\right) (s^2 + \omega^2)}$$

Et utilisons la décomposition en fraction simple :

$$\begin{aligned} \frac{s}{\left(s + \frac{R}{L}\right) (s^2 + \omega^2)} &= \frac{A}{s + \frac{R}{L}} + \frac{Bs + C}{s^2 + \omega^2} \\ &= \frac{(A + B)s^2 + \left(B\frac{R}{L} + C\right)s + A\omega^2 + C\frac{R}{L}}{\left(s + \frac{R}{L}\right) (s^2 + \omega^2)} \end{aligned}$$

Et donc par identification :

$$\begin{aligned} A + B &= 0 \Leftrightarrow A = -B \\ B\frac{R}{L} + C &= 1 \Leftrightarrow C = 1 - B\frac{R}{L} = 1 + A\frac{R}{L} \\ A\omega^2 + C\frac{R}{L} &= 0 \Leftrightarrow A\omega^2 + \frac{R}{L} + \left(\frac{R}{L}\right)^2 A = 0 \end{aligned}$$

Ce qui permet d'obtenir :

$$\begin{aligned} A &= \frac{-R/\omega^2 L}{1+(R/\omega L)^2} \\ B &= \frac{R/\omega^2 L}{1+(R/\omega L)^2} \\ C &= \frac{1}{1+(R/\omega L)^2} \end{aligned}$$

$$I_e(s) = \frac{\frac{\phi_0}{L}}{1+(R/\omega L)^2} \left[\frac{R}{\omega} \left(\frac{s}{s^2 + \omega^2} - \frac{1}{s + \frac{R}{L}} \right) + \frac{\omega}{s^2 + \omega^2} \right]$$

En prenant la transformée de Laplace inverse de cette expression, on obtient l'expression du courant induit dans le domaine temporel :

$$i_e(t) = \frac{\frac{\phi_0}{L}}{1+(R/\omega L)^2} \left[R/\omega L \left(\cos(\omega t) - e^{-\frac{R}{L}t} \right) + \sin(\omega t) \right]$$

B.2 Calcul des forces moyennes

B.2.1 Force de portance moyenne

Reprenons l'équation (3.19a) et injectons-y les expressions (3.15a) et (3.18) :

$$F_L = \frac{B_0^2 w^2}{kL} \frac{1}{1+(R/\omega L)^2} \left[\frac{R}{\omega L} \cos(\omega t) + \sin(\omega t) \right] \sin(\omega t) e^{-2ke}$$

De là, calculons la moyenne de cette expression sur une période T :

$$\begin{aligned} \langle F_L \rangle &= \underbrace{\frac{B_0^2 w^2}{kL} \frac{e^{-2ke}}{1+(R/\omega L)^2}}_{=F_0} \left[\frac{R}{\omega L} \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2(\omega t) dt \right] \\ &= \frac{1}{T} F_0 \left(-\frac{R}{\omega L} \frac{1}{4\omega} [\cos(2\omega t)]_0^T - \frac{1}{4\omega} [\sin(2\omega t)]_0^T + \frac{1}{2} [t]_0^T \right) \\ &\quad \downarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \\ &= \frac{1}{T} F_0 \left(\frac{T}{2} - \frac{R}{\omega L} \frac{1}{4\omega} [\cos(4\pi) - 1] - \frac{1}{4\omega} \sin(4\pi) \right) \\ &= \frac{1}{2} F_0 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle F_L \rangle = \frac{B_0^2 w^2}{2kL} \frac{1}{1+(R/\omega L)^2} e^{-2ke}$$

B.2.2 Force de traînée moyenne

Reprenons l'équation (3.19b) et injectons-y les expressions (3.15b) et (3.18) :

$$F_D = \frac{B_0^2 w^2}{kL} \frac{1}{1+(R/\omega L)^2} \left[\frac{R}{\omega L} \cos(\omega t) + \sin(\omega t) \right] \cos(\omega t) e^{-2ke}$$

De là, calculons la moyenne de cette expression sur une période T :

$$\begin{aligned}
 \langle F_D \rangle &= \underbrace{\frac{B_0^2 w^2}{kL} \frac{e^{-2ke}}{1 + (R/\omega L)^2}}_{=F_0} \left[\frac{R}{\omega L} \frac{1}{T} \int_0^T \cos^2(\omega t) dt + \frac{1}{T} \int_0^T \sin(\omega t) \cos(\omega t) dt \right] \\
 &= \frac{1}{T} F_0 \left(\frac{R}{\omega L} \frac{1}{2} [t]_0^T + \frac{R}{\omega L} \frac{1}{4\omega} [\sin(2\omega t)]_0^T - \frac{1}{4\omega} [\cos(2\omega t)]_0^T \right) \\
 &\quad \downarrow T = \frac{2\pi}{\omega} \\
 &= \frac{1}{T} F_0 \left(\frac{R}{\omega L} \frac{T}{2} - \frac{R}{\omega L} \frac{1}{4\omega} \sin(4\pi) - \frac{1}{4\omega} [\cos(4\pi) - 1] \right) \\
 &= \frac{1}{2} \frac{R}{\omega L} F_0
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \langle F_D \rangle = \frac{B_0^2 w^2}{2kL} \frac{R/\omega L}{1 + (R/\omega L)^2} e^{-2ke}$$

ANNEXE C

VECTEUR POTENTIEL

Rappelons la définition du vecteur potentiel $\vec{A}$ (3.22):

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A}$$

Par l'hypothèse d'un problème 2D, la composante selon $\hat{y}$ de $\vec{B}$ est nulle, cela donne la relation :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} B_x \\ 0 \\ B_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y} \\ \frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z} \\ \frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x} \end{pmatrix} \\ \Rightarrow \frac{\partial A_z}{\partial x} &= \frac{\partial A_x}{\partial z} \end{aligned} \tag{C.1}$$

Le vecteur potentiel étant défini à un gradient près, on peut choisir arbitrairement f tel que :

$$\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla} f$$

où $\vec{A}'$ est un vecteur potentiel adéquat pour le champ $\vec{B}$ considéré. Choisissons alors :

$$f = f^x = - \int A_x(x, y, z) dx$$

Suivant ce choix, le vecteur potentiel se réécrit :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A_x - \int \frac{\partial A_x}{\partial x} dx \\ A'_y \\ A_z - \int \frac{\partial A_z}{\partial z} dx \end{pmatrix} \\ \text{(C.1)} \downarrow & \\ &= \begin{pmatrix} A_x - \int \frac{\partial A_x}{\partial x} dx \\ A'_y \\ A_z - \int \frac{\partial A_z}{\partial x} dx \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} K_x(y, z) \\ A'_y(x, y, z) \\ K_z(y, z) \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_x(y, z) \\ A'_y(x, y, z) \\ A'_z(y, z) \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Il faut bien remarquer que dans l'expression (C.2), A'_x et A'_z ne dépendent pas de x . Par ailleurs, ce vecteur potentiel doit toujours respecter la relation (C.1) et donc :

$$\frac{\partial A'_x(y, z)}{\partial z} = \frac{\partial A'_z(y, z)}{\partial x} = 0$$

$$\begin{pmatrix} A'_x \\ A'_y \\ A'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_x(y) \\ A'_y(x, y, z) \\ A'_z(y, z) \end{pmatrix}$$

Faisons alors un nouveau choix de fonction arbitraire f :

$$f = f^z = - \int A_z(z) dz$$

Donc :

$$\vec{A}'' = \vec{A}' + \vec{\nabla} f^z$$

$$\begin{pmatrix} A''_x \\ A''_y \\ A''_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_x - \int \frac{\partial A'_z}{\partial x} dx \\ A''_y \\ A'_z - \int \frac{\partial A'_z}{\partial z} dx \end{pmatrix}$$

$$\begin{matrix} (\text{C.1}) \downarrow \\ \begin{pmatrix} A'_x(y) \\ A''_y(x, y, z) \\ A''_z(y) \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Finalement, faisons un dernier choix de fonction arbitraire :

$$f = f^y = -A''_x(y)x - A''_z(y)z$$

Donc :

$$\vec{A}''' = \vec{A}'' + \vec{\nabla} f^y$$

$$\begin{pmatrix} A'''_x \\ A'''_y \\ A'''_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A''_x - A''_x(y) \\ A'''_y \\ A''_z - A''_z(y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ A'''_y(x, y, z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dès lors, un choix valable de vecteur potentiel pour le système 2D considéré est :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 0 \\ A_y(x, z) \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dans laquelle, $A_y(x, z)$ ne dépend pas de y car le vecteur potentiel doit respecter la jauge de Coulomb.

ANNEXE D

DÉVELOPPEMENT EN SÉRIE DE FOURIER D'UN SIGNAL CARRÉ

Cette annexe contient les développements en série de Fourier réelle et complexe d'un signal carré afin d'obtenir les expressions (3.28) et (3.31).

D.1 Série de Fourier réelle

La décomposition d'un signal périodique $f(x)$ de période T en série de Fourier est obtenu via les relations suivantes :

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right) \right]$$
$$a_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(x)dx \quad a_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \cos\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx \quad b_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) \sin\left(\frac{2\pi}{T}nx\right)dx$$

En considérant un signal carré d'amplitude B_r et de période $\frac{\lambda}{p}$, les relations précédentes deviennent :

- a_0 :

$$a_0 = 0$$

- a_n :

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2p}{\lambda} \left[\int_0^{\frac{\lambda}{2p}} B_r \cos\left(\frac{2\pi p}{\lambda}nx\right)dx - \int_{\frac{\lambda}{2p}}^{\lambda} B_r \cos\left(\frac{2\pi p}{\lambda}nx\right)dx \right] \\ &= \frac{B_r}{n\pi} [\sin(n\pi) - \sin(2n\pi) + \sin(n\pi)] \\ &= 0 \end{aligned}$$

- b_n :

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2p}{\lambda} \left[\int_0^{\frac{\lambda}{2p}} B_r \sin\left(\frac{2\pi p}{\lambda}nx\right)dx - \int_{\frac{\lambda}{2p}}^{\lambda} B_r \sin\left(\frac{2\pi p}{\lambda}nx\right)dx \right] \\ &= \frac{B_r}{n\pi} [-\cos(n\pi) + 1 + \cos(2n\pi) - \cos(n\pi)] \\ &= \frac{2B_r}{n\pi} (1 - (-1)^n) \end{aligned}$$

Le signal carré $f(x)$ peut donc s'écrire sous la forme du développement en série de Fourier :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2B_r}{n\pi} (1 - (-1)^n) \sin\left(\frac{2\pi p}{\lambda} nx\right) \quad (\text{D.1})$$

Or,

$$(1 - (-1)^n) = \begin{cases} 0 & \forall n \text{ pair} \\ 2 & \forall n \text{ impair} \end{cases}$$

L'expression (D.1) devient :

$$f(x) = \frac{4B_r}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2\pi p}{\lambda} nx\right)}{n} \quad \text{avec } n = 1, 3, 5, \dots \quad (\text{D.2})$$

D.2 Série de Fourier complexe

Repartons de l'équation (D.2) :

$$f(x) = \frac{4B_r}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin\left(\frac{2\pi p}{\lambda} nx\right)}{n} \quad \text{avec } n = 1, 3, 5, \dots$$

Via l'écriture de Euler, le $\sin(\dots)$ peut se réécrire sous la forme de deux exponentielles complexes :

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{2B_r}{j\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(e^{j\frac{2\pi p}{\lambda} nx} - e^{-j\frac{2\pi p}{\lambda} nx} \right) \quad \text{avec } n = 1, 3, 5, \dots \\ &= \frac{2B_r}{j\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{j\frac{2\pi p}{\lambda} nx} + \sum_{-n=1}^{\infty} \frac{1}{(-n)} e^{j\frac{2\pi p}{\lambda} (-n)x} \right) \\ &= \frac{2B_r}{j\pi} \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} e^{j\frac{2\pi p}{\lambda} nx} + \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{1}{n} e^{j\frac{2\pi p}{\lambda} nx} \right) \end{aligned}$$

Il est alors possible de rassembler les deux termes de sommation pour finalement obtenir :

$$f(x) = \frac{2B_r}{j\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{1}{n} e^{j\frac{2\pi p}{\lambda} nx} \quad \text{avec } n = 1, 3, 5, \dots$$

ANNEXE E

CHAMP ÉLECTRIQUE ET POTENTIEL VECTEUR

Cette annexe a pour objectif de définir le champ électrique présent dans une région ν en fonction du potentiel vecteur magnétique $A^{(\nu)}$. Pour ce faire, partons de la loi de Faraday qui exprime le champ électrique en fonction de la variation de la densité de flux magnétique :

$$\nabla \times \mathbf{E}^{(\nu)} = -\frac{\partial \mathbf{B}^{(\nu)}}{\partial t}$$

Grâce à la définition du vecteur potentiel (3.22), l'expression ci-dessus devient :

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E}^{(\nu)} &= -\frac{\partial}{\partial t} (\nabla \times \mathbf{A}^{(\nu)}) \\ &\downarrow \text{Théorème de Schwarz} \\ &= -\nabla \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}^{(\nu)}}{\partial t} \right) \\ &\downarrow \nabla \times (\nabla f) = 0 \\ \mathbf{E}^{(\nu)} &= -\left(\frac{\partial \mathbf{A}^{(\nu)}}{\partial t} + \nabla f \right) \end{aligned}$$

Le potentiel magnétique étant défini à un gradient près, on peut poser $(\mathbf{A}^{(\nu)})' = \mathbf{A}^{(\nu)} + \int \nabla f dt$:

$$\Rightarrow \boxed{\mathbf{E}^{(\nu)} = -\frac{\partial (\mathbf{A}^{(\nu)})'}{\partial t}}$$

ANNEXE F

CALCUL DES EXPRESSIONS DE FORCES ÉLECTRODYNAMIQUES POUR LA MODÉLISATION EN SÉRIE DE FOURIER

Dans la Sous-Section 3.3.4, nous avons trouvé que l'expression des forces électromagnétiques agissant sur le ski peut être obtenue en développant les expressions (3.43) et (3.44), c'est-à-dire :

$$F_L = -\frac{w}{2\mu_0} \int_0^l \left[\left(B_z^{(III)} \right)^2 - \left(B_x^{(III)} \right)^2 \right] dx \quad (\text{F.1})$$

$$F_D = -\frac{w}{\mu_0} \int_0^l \left[B_x^{(III)} B_z^{(III)} \right] dx \quad (\text{F.2})$$

où par définition, la densité de flux magnétique $\mathbf{B}^{(\nu)}$ est le rotationnel du vecteur potentiel magnétique $\mathbf{A}^{(\nu)}$ donc :

$$B_x^{(III)} = \frac{\partial A^{(III)}}{\partial z} \quad \text{et} \quad B_z^{(III)} = \frac{\partial A^{(III)}}{\partial x} \quad (\text{F.3})$$

Nous avons aussi obtenu l'expression du vecteur potentiel dans le sous-domaine III :

$$\begin{aligned} A^{(\nu)}(x, z) = 2 \sum_{m=1}^{\infty} & \left[\left(a_{C_{0,m}}^{(III)} e^{kmz} + a_{D_{0,m}}^{(III)} e^{-kmz} \right) \cos(kmx) \right. \\ & \left. + \left(b_{C_{0,m}}^{(III)} e^{kmz} + b_{D_{0,m}}^{(III)} e^{-kmz} \right) \sin(kmx) \right] \quad \text{avec } m = 1, 3, \dots \quad (\text{F.4}) \end{aligned}$$

Remarquons que comme expliqué dans la Sous-Section 3.3.4, la notation suivante a été utilisée :

$$\begin{aligned} a_{X_{0,m}}^{(III)} &= \Re \left\{ X_{0,m}^{(III)} \right\} \\ b_{X_{0,m}}^{(III)} &= \Im \left\{ X_{0,m}^{(III)} \right\} \end{aligned}$$

Via cette notation et en combinant les équations (F.3) et (F.4), les composantes de la densité de flux magnétique deviennent :

$$B_x^{III}(x, z = \xi) = 2k \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\left[a_{C_{0,m}}^{III} e^{km\xi} - a_{D_{0,m}}^{III} e^{-km\xi} \right] \cos(kmx) - \left[b_{C_{0,m}}^{III} e^{km\xi} - b_{D_{0,m}}^{III} e^{-km\xi} \right] \sin(kmx) \right)$$

$$B_z^{III}(x, z = \xi) = 2k \sum_{m=1}^{\infty} m \left(\left[a_{C_{0,m}}^{III} e^{km\xi} + a_{D_{0,m}}^{III} e^{-km\xi} \right] \sin(kmx) - \left[b_{C_{0,m}}^{III} e^{km\xi} + b_{D_{0,m}}^{III} e^{-km\xi} \right] \cos(kmx) \right)$$

Pour simplifier l'écriture, notons :

$$W_m = a_{C_{0,m}}^{III} e^{km\xi} - a_{D_{0,m}}^{III} e^{-km\xi} \quad (\text{F.5a})$$

$$X_m = b_{C_{0,m}}^{III} e^{km\xi} - b_{D_{0,m}}^{III} e^{-km\xi} \quad (\text{F.5b})$$

$$Y_m = a_{C_{0,m}}^{III} e^{km\xi} + a_{D_{0,m}}^{III} e^{-km\xi} \quad (\text{F.5c})$$

$$Z_m = b_{C_{0,m}}^{III} e^{km\xi} + b_{D_{0,m}}^{III} e^{-km\xi} \quad (\text{F.5d})$$

Dès lors, utilisons ces nouvelles expressions en les injectant dans l'équation (F.1) :

$$F_L = -\frac{w}{2\mu_0} \left\{ \int_0^l 4k^2 \left[\sum_{m=1}^{\infty} m (Y_m \sin(kmx) + Z_m \cos(kmx)) \right]^2 dx - \int_0^l 4k^2 \left[\sum_{m=1}^{\infty} m (W_m \cos(kmx) - X_m \sin(kmx)) \right]^2 dx \right\}$$

Or, par orthogonalité des fonctions propres cos et sin, cette expression devient :

$$F_L = -\frac{w}{2\mu_0} 4k^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left[(Y_m^2 - X_m^2) \int_0^l \sin^2(kmx) dx + (Z_m^2 - W_m^2) \int_0^l \cos^2(kmx) dx + (Y_m Z_m + W_m X_m) \int_0^l \cos(kmx) \sin(kmx) dx \right] \quad (\text{F.6})$$

Il y a donc trois intégrales à calculer :

$$\int_0^l \sin^2(kmx) dx = \frac{l}{2} - \frac{\sin(2kml)}{4km}$$

$$\int_0^l \cos^2(kmx) dx = \frac{l}{2} - \frac{\sin(2kml)}{4km}$$

$$\int_0^l \cos(kmx) \sin(kmx) dx = \frac{\sin^2(kml)}{2km}$$

Or comme par hypothèse, $l = n\lambda$ avec $n \in \mathbb{Z}$:

$$\sin(klm) = \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda} n\lambda m\right) = \sin(2\pi nm) = 0 \quad \text{car } nm \in \mathcal{Z}$$

L'équation (F.6) devient alors :

$$\begin{aligned} F_L &= -\frac{w}{2\mu_0} 4k^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left[(Y_m^2 - X_m^2) \frac{l}{2} + (Z_m^2 - W_m^2) \frac{l}{2} \right] \\ &= -\frac{w}{\mu_0} k^2 l \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (Y_m^2 - X_m^2 + Z_m^2 - W_m^2) \end{aligned}$$

En utilisant les expressions (F.5) :

$$Y_m^2 - X_m^2 + Z_m^2 - W_m^2 = 4 \left(a_{C_{0,m}}^{III} a_{D_{0,m}}^{III} + b_{C_{0,m}}^{III} b_{D_{0,m}}^{III} \right)$$

Ce qui donne finalement :

$$\Rightarrow F_L = -\frac{4w}{\mu_0} k^2 l \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left(a_{C_{0,m}}^{III} a_{D_{0,m}}^{III} + b_{C_{0,m}}^{III} b_{D_{0,m}}^{III} \right) \quad (\text{F.7})$$

Procédons alors de la même manière pour la force de traînée, c'est-à-dire, injectons les équations (F.3) dans (F.2) :

$$F_D = -\frac{w}{\mu_0} 4k^2 \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} m q \int_0^l [Y_m \sin(kmx) + Z_m \cos(kmx)] [W_q \cos(kqx) - X_q \sin(kqx)] dx$$

Et donc en utilisant une nouvelle fois l'orthogonalité des fonctions propres, la double somme tombe :

$$\begin{aligned} F_D &= -\frac{w}{\mu_0} 4k^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left[(W_m Y_m - X_m Z_m) \int_0^l \cos(kmx) \sin(kmx) dx \right. \\ &\quad \left. + W_m Z_m \int_0^l \cos^2(kmx) dx - X_m Y_m \int_0^l \sin^2(kmx) dx \right] \end{aligned}$$

Cette expression présente les trois mêmes intégrales que celles précédemment calculées :

$$\begin{aligned} F_D &= -\frac{w}{\mu_0} 2k^2 \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left(\frac{l}{2} W_m Y_m - \frac{l}{2} X_m Y_m \right) \\ &= -\frac{w}{\mu_0} k^2 l \sum_{m=1}^{\infty} m^2 (W_m Y_m - X_m Y_m) \end{aligned}$$

En utilisant les expressions (F.5) :

$$W_m Y_m - X_m Y_m = 2 \left(a_{C_{0,m}}^{III} b_{D_{0,m}}^{III} - a_{D_{0,m}}^{III} b_{C_{0,m}}^{III} \right)$$

L'expression de la force de traînée devient alors :

$$\Rightarrow F_D = -\frac{4w}{\mu_0} k^2 l \sum_{m=1}^{\infty} m^2 \left(a_{C_0,m}^{(III)} b_{D_0,m}^{(III)} - a_{D_0,m}^{(III)} b_{C_0,m}^{(III)} \right) \quad (\text{F.8})$$

ANNEXE G

FONCTION DE TRANSITION DE LA VITESSE

Cette annexe explique le développement des deux fonctions de transition permettant de passer d'une vitesse v_a à une vitesse v_b en un temps Δt .

G.1 Transition linéaire

La première transition consiste en une transition linéaire (Figure G.1) :

$$v(t) = mt + p$$

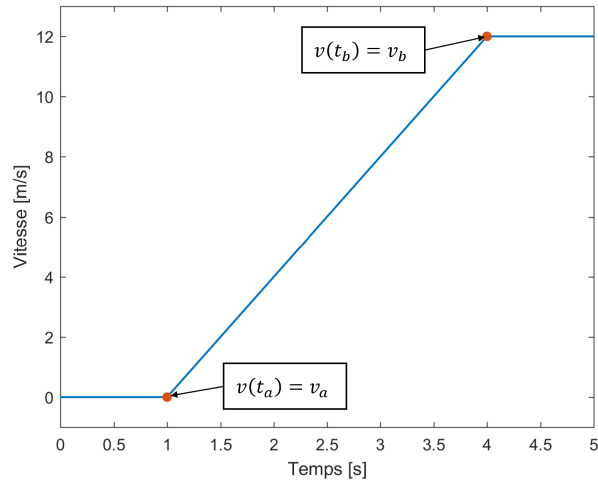


Figure G.1 : Transition via une fonction linéaire

Dans ce cas, nous n'avons que deux conditions limites. En les appliquant, il est possible de trouver les coefficients suivants :

$$m = \frac{v_b - v_a}{\Delta t}$$

$$p = v_a - \frac{v_b + v_a}{\Delta t} t_a$$

G.2 Transition en cosinus

La deuxième transition implémentée est réalisée au moyen d'un cosinus, de la forme :

$$v(t) = A \cos(\omega t + \phi) + C$$

En effet, ce dernier possède par définition des dérivées nulles en ses sommets et est une fonction continue (voir Figure G.2).

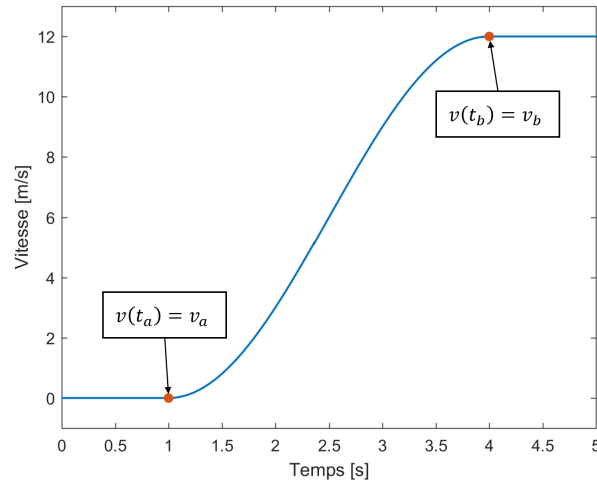


Figure G.2 : Transition via une fonction cosinus

A nouveau, nous n'avons que deux conditions limites. En les appliquant, il est possible de trouver les coefficients suivants :

$$\begin{aligned} A &= \frac{v_a - v_b}{2} \\ \omega &= \frac{\pi}{t_b - t_a} \\ \phi &= \frac{t_b - 3t_a}{2} \\ C &= \frac{v_a + v_b}{2} \end{aligned}$$

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN

École polytechnique de Louvain

Rue Archimède, 1 bte L6.11.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/epl