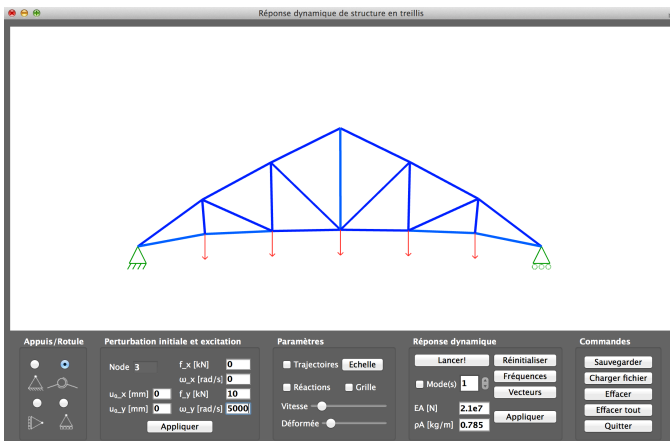


# Réalisation d'un logiciel didactique pour le calcul dynamique de structures



Mémoire présenté par  
**Guillaume VAN DER ELST**

en vue de l'obtention du grade de master en  
**Ingénieur civil des constructions**

Promoteur  
**Pierre LATTEUR**

Lecteurs  
**Catherine DONEUX**  
**Sébastien GOESSENS**

Année académique 2016-2017



## *Remerciements*

*Mes remerciements vont à tous ceux et celles qui ont contribué, de près ou de loin, à l'élaboration de ce travail de fin d'études.*

*Je remercie plus particulièrement :*

*Monsieur P. Latteur, mon promoteur, qui m'a consacré son temps et qui a su poser un regard critique et expérimenté sur mon logiciel.*

*Monsieur J.-P. Coyette et Monsieur L. Delannay qui m'ont enseigné la dynamique des systèmes élastiques.*

*Monsieur Remacle, professeur d'analyse numérique des structures, qui a suscité chez moi l'envie de créer un logiciel de résolution.*

*Madame C. Doneux et Monsieur S. Goessens qui assurent la lecture de mon mémoire.*

*Enfin, mes remerciements vont également à ma famille et à mes amis qui m'ont soutenu et encouragé tout au long de mes années d'études.*



# Table des matières

---

Introduction .....	7
Chapitre 1 : Théorie de la dynamique des systèmes élastiques .....	9
1.1. Système à un seul degré de liberté (1-ddl).....	10
1.1.1. Vibration libre.....	11
1.1.2. Vibration forcée.....	13
1.2. Système à multiples degrés de liberté (N-ddl) .....	18
1.2.1. Vibration libre.....	20
1.2.2. Vibration forcée.....	22
Chapitre 2 : Modélisation par éléments finis .....	24
2.1. Discrétisation du système continu en éléments finis .....	25
2.2.1. Application du théorème à une barre.....	26
2.2.2. Changement de repère .....	28
2.2.3. Application du théorème à l'ensemble du treillis.....	30
2.3. Théorème des travaux virtuels : problème dynamique.....	32
Chapitre 3 : Résolution numérique de l'équation de mouvement.....	36
3.1. Méthode de Newmark .....	38
3.2. Modélisation des appuis .....	41
3.3. Illustration.....	44
3.3.1. Modélisation du treillis .....	44
3.3.2. Composition des matrices globales .....	46
3.3.3. Application de la méthode de Newmark.....	49

Chapitre 4 : Interprétation des résultats .....	51
4.1. Vibration libre.....	51
4.1.1. Réponse analytique .....	51
4.1.2. Analyse de résultats .....	54
4.2. Vibration forcée.....	60
4.2.1. Réponse analytique .....	60
4.2.2. Analyse de résultats .....	61
4.2.3. Phénomène de résonance .....	62
Chapitre 5 : Aspect didactique du logiciel .....	66
5.1. Présentation générale du logiciel .....	67
5.2. Construction de la structure .....	68
5.3. Modélisation des efforts et déformations .....	68
5.4. Paramètres d'affichages .....	70
5.5. Animation de la réponse dynamique .....	70
5.6. Commandes du logiciel .....	80
Conclusion.....	81
Bibliographie.....	84
Annexe : Mode d'emploi et tutoriel didactique.....	85

# Introduction

---

Dans le cadre de formations universitaires, les cours sont généralement donnés oralement et accompagnés de supports écrits. Ce mode de transmission du savoir semble convenir à beaucoup d'études, et notamment aux plus littéraires. Cependant, d'autres formations, telle que l'ingénierie, offrent une matière dont la compréhension peut s'avérer être moins intuitive. Ce constat explique entre autre l'apparition progressive, ces dernières années, de supports informatiques dans un cadre pédagogique.

Réfléchissons un instant à l'étude de la dynamique des structures. En vue de pouvoir analyser et résoudre des problèmes en mouvement, il paraît presque contre-intuitif de limiter les outils d'apprentissage à des supports écrits. Il semble en effet compliqué de visualiser, à partir de formules généralement complexes, la réponse d'un système soumis à une excitation quelconque.

Sur base de ce constat, ce mémoire propose un outil interactif complémentaire aux supports écrits.

Ce travail de fin d'étude consiste à réaliser un logiciel didactique dans un but d'introduire son utilisateur à la dynamique des structures. Parallèlement au logiciel, un document écrit est fourni avec deux objectifs principaux.

Dans un premier temps, il constitue un mode d'emploi simple, illustré d'images du logiciel et complété de directives à suivre. Ensuite, il présente un rôle pédagogique en expliquant, à la manière d'un tutoriel, les principes clés de la dynamique.

Le but est de pouvoir établir facilement le lien entre le comportement d'une structure et les concepts théoriques qui le régissent. A travers un enchaînement d'étapes successives, l'utilisateur est invité à représenter une structure type, à en faire varier les paramètres, à définir l'excitation à laquelle elle est soumise et, ainsi, lui permettre d'analyser les différentes réponses dynamiques en lien avec la théorie.

Le logiciel constitue bien un outil introductif à la dynamique des structures. Par conséquent, le but recherché n'est pas d'être en mesure de calculer l'ensemble des systèmes des plus simples aux plus complexes.

Dans cette optique, les choix suivants ont été faits: d'une part, les structures étudiées se limitent aux structures élastiques de type treillis, qui, pour rappel, ne reprennent que de l'effort normal. D'autre part, la dynamique classique comprend l'étude de systèmes amortis. Dans le cadre de ce mémoire, l'analyse est restreinte aux treillis non-amortis.

Le logiciel a été étudié dans un souci de sobriété et de clarté pour offrir une utilisation la plus intuitive possible.

Dans ce mémoire, il est question, dans un premier temps, de rappeler la théorie fondamentale de la dynamique des systèmes élastiques. Ce rappel est nécessaire pour pouvoir cibler notre analyse au comportement dynamique des structures par la suite.

Dans un second temps, le travail développe la démarche suivie afin de modéliser une structure à l'aide d'éléments finis. Cette discrétisation du problème constitue une étape indispensable préliminaire à l'implémentation de sa résolution.

Ensuite, une interprétation des résultats fournis par le logiciel est réalisée en lien avec les concepts théoriques précédemment présentés. Celle-ci a pour objectifs, à la fois, de vérifier la pertinence des résultats et d'illustrer une démarche de réflexion type qu'un utilisateur du logiciel doit pouvoir mener à l'aide de celui-ci.

Finalement, une réflexion critique vise à identifier les points forts et les pistes d'amélioration de cet outil d'apprentissage.

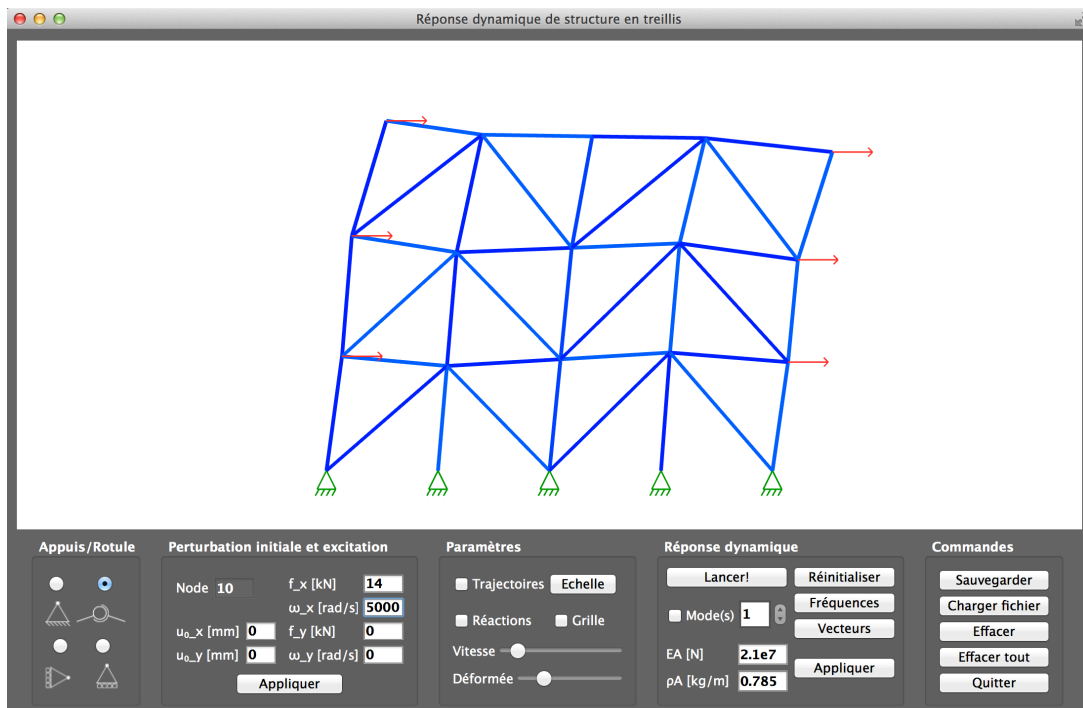


Figure 1: Logiciel de calcul dynamique de structures

# Chapitre 1 :

## Théorie de la dynamique des systèmes élastiques

---

Dès lors qu'on souhaite étudier la stabilité d'une structure, il est nécessaire d'évaluer les charges auxquelles celle-ci sera soumise. Dans un premier temps, ce sont les charges dites statiques qui vont être prises en compte. Elles sont appelées ainsi car elles présentent une intensité relativement constante dans le temps. On y retrouve notamment le poids propre de la structure ainsi que les charges d'occupation.

Cette approche, basée sur les charges statiques, permet d'aboutir à un premier dimensionnement de la structure. Celle-ci est parfois suffisante et ne requiert pas d'études de stabilité supplémentaires. En revanche, certains bâtiments, de par leur fonction, leur géométrie, leur localisation ou encore bien d'autres facteurs, sont soumis à des charges dynamiques. Celles-ci se caractérisent par une intensité variable dans le temps. On retrouve par exemple un bâtiment industriel abritant des machines vibrantes, une passerelle soumise au passage régulier de poids lourds, ou encore, un immeuble en zone sismique. Des structures soumises à des charges de ce type doivent généralement prévoir une étude adaptée à leur contexte d'utilisation, faisant appel à la théorie de la dynamique.

Nous allons voir que la réponse d'une structure, dans un tel contexte, peut induire des contraintes considérablement importantes et, ainsi, avoir un impact très défavorable sur sa stabilité. Pour un dimensionnement adapté, il est donc indispensable de parvenir à évaluer cette réponse afin d'anticiper les sollicitations possibles et les minimiser, voire les éviter.

Ce premier chapitre a pour but de présenter les concepts théoriques fondamentaux nécessaires à la compréhension du comportement dynamique d'une structure.

Dans un premier temps, nous allons nous intéresser à l'étude d'un système élastique à un seul degré de liberté<sup>1</sup> pour ensuite aborder les systèmes qui en comportent plusieurs. Pour rappel, l'amortissement des systèmes sort du cadre de ce travail.

---

<sup>1</sup> Noté "ddl" dans la suite du travail

## 1.1. Système à un seul degré de liberté (1-ddl)

Comme système à 1-ddl, nous allons étudier une masse située à l'extrémité d'un ressort. Celle-ci est donc soumise à la force du ressort  $f_k(t)$  et à une éventuelle force extérieure  $f(t)$ . Elle est donc libre de se déplacer longitudinalement et sa trajectoire est caractérisée par  $u(t)$ .

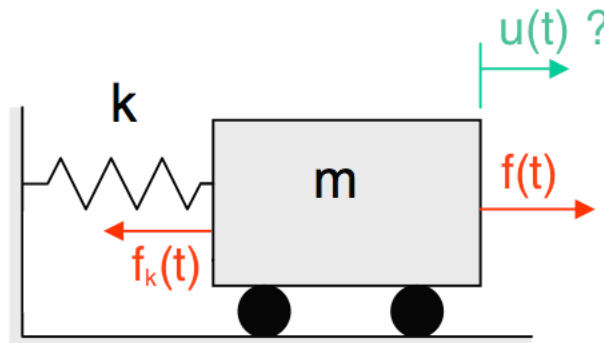


Figure 2 : Système masse-ressort à 1-ddl [1]

Il existe différentes méthodes pour dériver l'équation de mouvement dans le temps d'un système comme celui-ci.

L'une d'elle se base sur la deuxième loi de Newton : "Soit un corps de masse constante, l'accélération subie par ce corps dans un référentiel galiléen est proportionnelle à la résultante des forces qu'il subit, et inversement proportionnelle à sa masse."

Sous forme d'équation, nous retrouvons la formule connue :

$$\sum_i F_i(t) = m \cdot \ddot{u}(t)$$

- $F_i(t)$  [N] , forces extérieures exercées
- $m$  [kg] , masse
- $\ddot{u}(t)$  [ $m/s^2$ ] , accélération

Pour rappel, la force exercée par un ressort est le produit de sa raideur  $k$  [N/m] par le déplacement relatif à sa position d'équilibre.

Nous obtenons une première équation de mouvement.

$$-f_k(t) + f(t) = -ku(t) + f(t) = m\ddot{u}(t)$$

Ou encore :

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = f(t)$$

### 1.1.1. Vibration libre

Lorsque le système subit une perturbation initiale mais qu'aucune force extérieure ne s'y applique, soit  $f(t) = 0$ , on peut observer qu'il entame une série d'oscillations successives autour de sa position d'équilibre. En l'absence de tout frottement, ce mouvement d'amplitude finie est répété à l'infini ; on dit que le système oscille librement. La perturbation peut être induite par un déplacement initial et/ou une vitesse initiale imposée à la masse.

Déterminer l'expression mathématique du déplacement  $u(t)$  consiste à résoudre l'équation différentielle homogène du second ordre suivante.

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = 0$$

La solution s'exprime comme ceci.

$$u(t) = ae^{st}$$

En introduisant celle-ci dans l'équation du mouvement, nous obtenons l'expression suivante.

$$(ms^2 + k)ae^{st} = 0$$

La solution non triviale impose  $ae^{st} \neq 0$ .

$$(ms^2 + k) = 0 \quad \rightarrow \quad s^2 = -\frac{k}{m} = -\omega_n^2 \quad \rightarrow \quad s = \pm i\omega_n$$

Nous venons d'introduire la notion de fréquence angulaire propre, ou encore, fréquence angulaire naturelle, notée  $\omega_n$ . Cette grandeur dépend uniquement des propriétés intrinsèques du matériau composant le système, à savoir, sa raideur et sa masse.

$$\omega_n \doteq \sqrt{\frac{k}{m}} \quad [rad/s]$$

Elle est donc propre à un système et définit la fréquence angulaire à laquelle celui-ci oscille librement lorsqu'il est soumis à une perturbation.

L'expression du déplacement illustre bien cette affirmation.

$$\begin{aligned} u(t) &= a_1 e^{i\omega_n t} + a_2 e^{-i\omega_n t} \\ &= A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t) \\ &= A \cos(\omega_n t + \varphi) \end{aligned}$$

Les valeurs des différents coefficients sont déterminées grâce aux conditions initiales. Soit la perturbation telle que :

$$\begin{cases} u(t=0) = u_0 \text{ [m]} \\ \dot{u}(t=0) = v_0 \text{ [m/s]} \end{cases}$$

Nous obtenons les deux égalités suivantes.

$$u(t=0) = A_1 \cos(\omega_n 0) + A_2 \sin(\omega_n 0) = A_1 = u_0$$

$$\dot{u}(t=0) = -A_1 \omega_n \sin(\omega_n 0) + A_2 \omega_n \cos(\omega_n 0) = A_2 \omega_n = v_0$$

Finalement, l'expression du déplacement s'écrit :

$$u(t) = u_0 \cos(\omega_n t) + \frac{v_0}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \text{ [m]}$$

Deux notions fondamentales viennent compléter la fréquence angulaire naturelle.

○ la fréquence naturelle:  $f_n \doteq \frac{\omega_n}{2\pi} \text{ [Hz]}$

○ la période naturelle:  $T_n \doteq \frac{1}{f_n} \text{ [s]}$

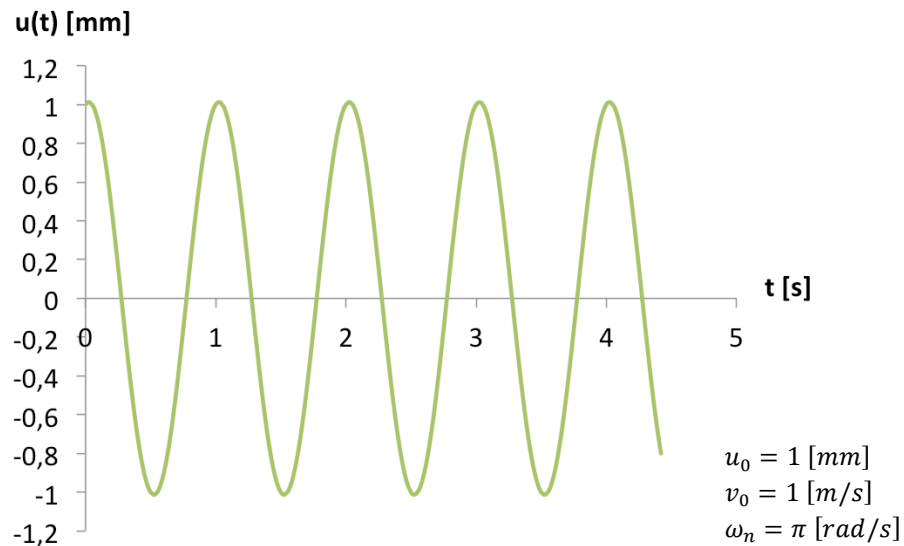


Figure 3: Vibration libre du système masse-ressort

### 1.1.2. Vibration forcée

Lorsqu'on applique une force extérieure à la masse liée au ressort, celle-ci ne décrit plus nécessairement un mouvement oscillatoire suivant sa fréquence naturelle. La force peut être de différents types entraînant toutes sortes de comportements du système. Si elle est ponctuelle dans le temps par exemple, on parle d'une impulsion. La masse oscille alors librement.

L'objectif de cette section est d'étudier la réponse d'une masse soumise à une excitation harmonique.

Soit la force appliquée au système :

$$f(t) = f_0 \sin(\omega t) \text{ [N]}$$

- $f_0$  [N], intensité de la force appliquée
- $\omega$  [rad/s], fréquence angulaire de la force appliquée

Nous allons voir que le mouvement décrit par une masse soumise à une excitation harmonique est composé de plusieurs harmoniques. En résulte alors une oscillation moins régulière que la réponse libre. On parle de vibration forcée.

Lorsque  $f(t) \neq 0$ , l'équation de mouvement devient une équation différentielle non-homogène du second ordre.

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = f(t) = f_0 \sin(\omega t)$$

Par conséquent, le déplacement est défini par la somme de la solution homogène et de la solution non-homogène de l'équation. Notons que la solution homogène correspond à l'expression du déplacement en vibration libre.

$$u(t) = u_h(t) + u_p(t)$$

En pratique, on peut observer que l'oscillation de la masse est également la résultante de l'oscillation naturelle, appelée réponse libre et définie par les propriétés du système, et de l'oscillation forcée, appelée régime permanent.

Dans le cas d'un système amorti, la réponse libre est dite transitoire car elle s'estompe avec le temps pour, finalement, ne laisser place qu'au régime permanent. Cette situation ne sera cependant pas étudiée car elle est sort du cadre de ce travail.

L'objectif est de déterminer la solution particulière qui décrit le régime permanent. Intuitivement, nous pouvons imaginer que la réponse d'un système à une excitation harmonique décrit lui aussi un mouvement harmonique.

Supposons donc une première expression de la solution telle que :

$$u_p(t) = B \sin(\omega t)$$

En introduisant cette expression dans l'équation du mouvement, nous obtenons :

$$m\ddot{u}_p(t) + ku_p(t) = f_0 \sin(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow m(-B\omega^2 \sin(\omega t)) + kB \sin(\omega t) = f_0 \sin(\omega t)$$

$$\Leftrightarrow m(-B\omega^2) + kB = f_0$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{f_0}{k - m\omega^2} = \frac{f_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2}$$

La solution complète de l'équation différentielle peut donc se réécrire comme ceci.

$$\begin{aligned} u(t) &= u_h(t) + u_p(t) \\ &= A_1 \cos(\omega_n t) + A_2 \sin(\omega_n t) + \frac{f_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Comme pour la réponse en vibration libre, les valeurs des coefficients sont déterminées grâce aux conditions initiales.

$$\begin{cases} u(t=0) = u_0 \text{ [m]} \\ \dot{u}(t=0) = v_0 \text{ [m/s]} \end{cases}$$

Nous obtenons finalement l'expression du déplacement.

$$u(t) = u_0 \cos(\omega_n t) + \left( \frac{v_0}{\omega_n} - \frac{f_0}{k} \frac{\omega/\omega_n}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \right) \sin(\omega_n t) + \frac{f_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \sin(\omega t)$$

Notons que, dans le cas particulier où le système est initialement à l'équilibre, soit  $u_0 = v_0 = 0$ , l'expression se simplifie comme suit :

$$u(t) = \frac{f_0}{k} \frac{1}{1 - (\omega/\omega_n)^2} \left( \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_n} \sin(\omega_n t) \right)$$

Elle mène à l'introduction de trois grandeurs fondamentales qui caractérisent la vibration forcée.

- la réponse statique :  $u_{stat} \doteq \frac{f_0}{k}$  [m]

Cette grandeur exprime le déplacement du système de raideur  $k$  entraîné par l'application d'une charge constante de grandeur  $f_0$ .

- le facteur amplificateur :  $R_d \doteq \frac{1}{|1 - (\omega/\omega_n)^2|}$  [-]

Cette grandeur correspond, elle, à l'effet amplificateur (ou réducteur) induit par le caractère dynamique de la force. Nous remarquons d'ailleurs que, dans une situation statique ( $\omega = 0$ ), le facteur amplificateur devient unitaire et l'expression du déplacement se résume à celle de la réponse statique.

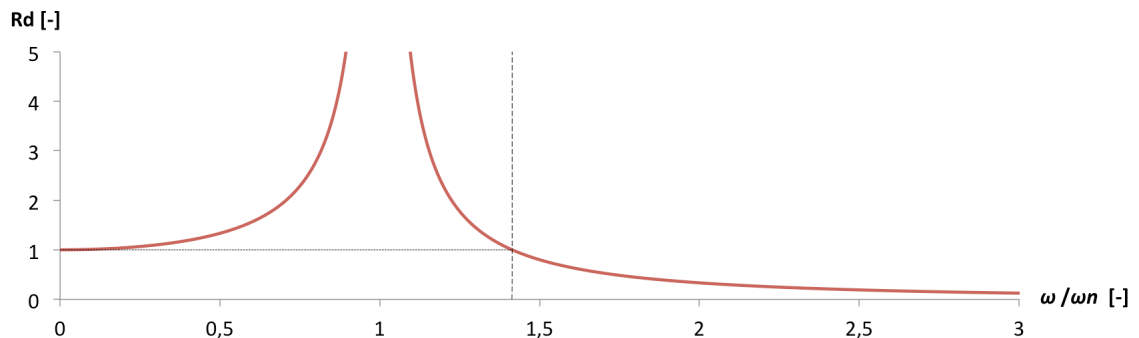


Figure 4 : Valeur du facteur amplificateur en fonction du rapport  $\omega/\omega_n$

Nous observons que, pour un rapport de  $\omega/\omega_n > \sqrt{2}$ , le facteur amplificateur prend des valeurs inférieures à l'unité. La force appliquée a donc un effet réducteur sur la réponse du système par rapport à une situation statique.

- le déphasage :  $\text{soit } \omega < \omega_n, \quad \varphi = 0$   
 $\text{soit } \omega > \omega_n, \quad \varphi = \pi$

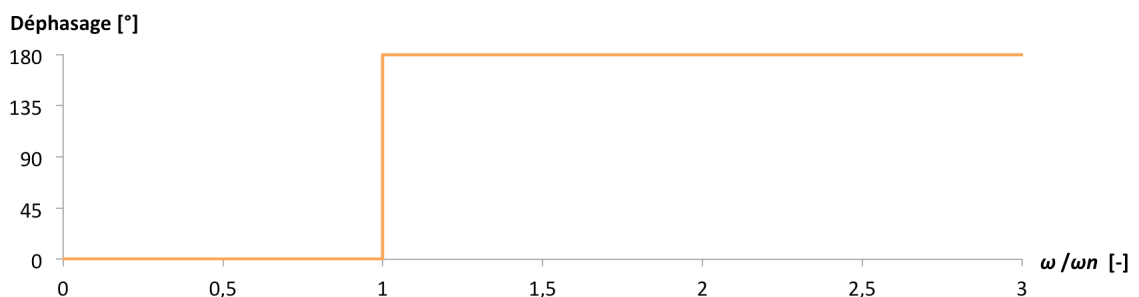


Figure 5: Valeur du déphasage en fonction du rapport  $\omega/\omega_n$

Le régime permanent ne peut être qu'en opposition ou en concordance de phase avec l'excitation harmonique. C'est l'information qu'exprime le déphasage.

A l'aide de ces trois nouvelles grandeurs, la solution particulière de l'équation différentielle définissant le régime permanent peut se réécrire :

$$u_p(t) = u_{stat} R_d \sin(\omega t - \varphi)$$

Le rapport  $\omega/\omega_n$  définit également la composante déterminante du mouvement. Nous constatons en effet, sur les graphes ci-dessous, que la réponse du système sera principalement entraînée par le régime permanent pour une excitation plus faible et par la réponse libre pour une excitation plus rapide.

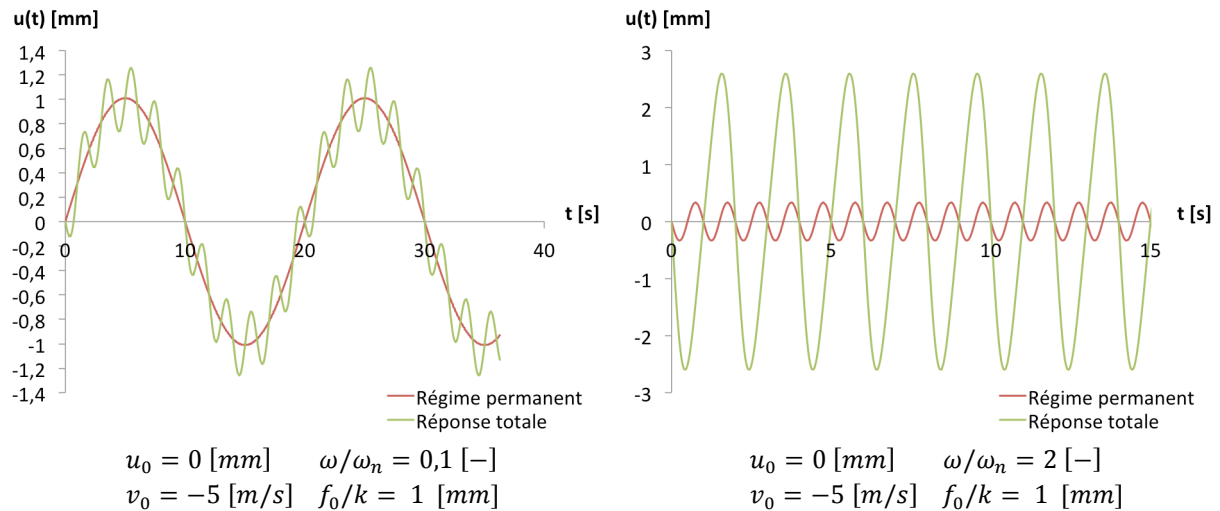


Figure 6: Déplacements des systèmes masse-ressort pour des facteurs amplificateurs différents

Nous pouvons également remarquer que, lorsque le rapport entre la fréquence d'excitation et la fréquence propre approche l'unité, le facteur amplificateur tend vers l'infini et mène à une indétermination. En effet, si la différence entre les 2 fréquences devient minime, l'amplitude du mouvement est amplifiée au fur et à mesure des oscillations jusqu'à atteindre des grandeurs très importantes.

En pratique, cette situation, appelée résonance, mène généralement le système à un état instable et, bien souvent, à une rupture. Cette observation confirme l'importance de connaître les fréquences d'excitation auxquelles la structure est susceptible d'être exposée. De cette manière, il est parfois possible de dimensionner la structure de telle sorte à éviter que sa fréquence propre n'approche les valeurs critiques menant à la résonance.

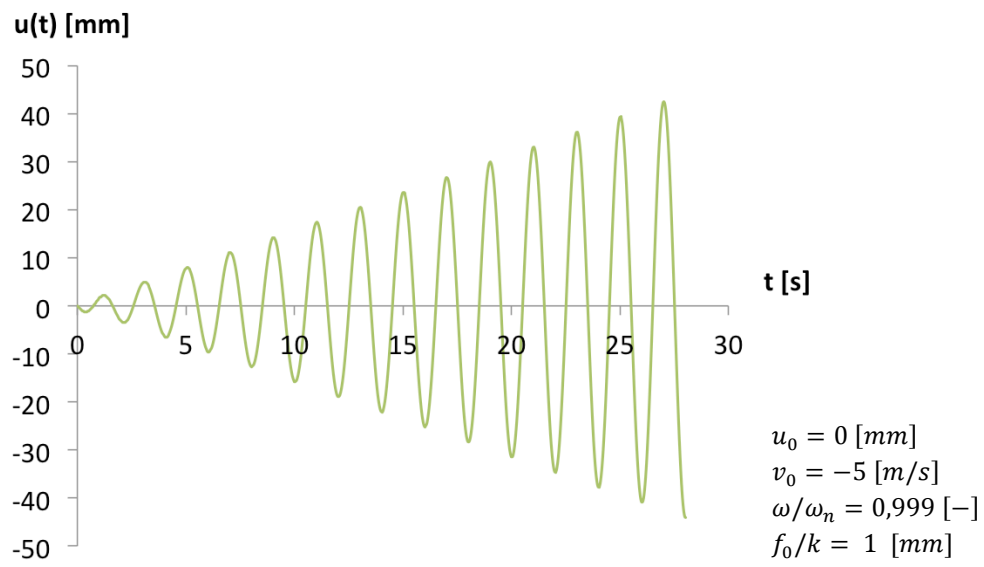


Figure 7 : Phénomène de résonance du système masse-ressort

## 1.2. Système à multiples degrés de liberté (N-ddl)

En réalité, la grande majorité des systèmes présents dans notre environnement fonctionnent selon plusieurs degrés de liberté. L'étude d'un système à un 1-ddl n'est donc pas d'une grande utilité en pratique. Elle permet surtout d'introduire les concepts clés nécessaires à une étude plus générale de la dynamique. L'objectif de cette section-ci est donc d'étendre la démarche menée précédemment aux systèmes à plusieurs degrés de liberté.

Un système à N-ddl est caractérisé par N variables correspondant à chacun de ceux-ci. Une seule variable  $x$ , comme c'était le cas pour un système masse-ressort, ne suffit plus à définir l'état du système. Ces variables, appelées coordonnées généralisées, doivent être cinématiquement admissibles et sont reprises dans un vecteur  $\vec{q}(t)$ .

Pour illustrer ceci, observons le schéma (ci-contre) d'un double pendule oscillant dans le plan, système à 2 ddl. Nous constatons que 2 angles sont nécessaires et suffisants pour décrire, sans équivoque, la position de chacune des deux masses, et donc, l'état général du système.

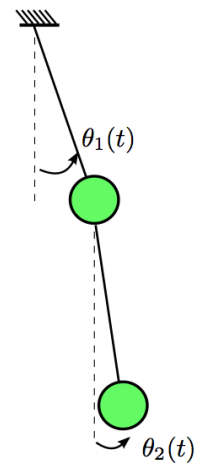


Figure 8 : Double pendule illustrant un système 2-ddl [1]

$$\vec{q}(t) = [ \theta_1(t) , \theta_2(t) ]$$

Cette constatation mène à la suivante: une seule équation du mouvement ne permet plus de déduire la réponse dynamique du système. Les expressions des N coordonnées généralisées se déterminent par la résolution d'un système de N équations à N inconnues. L'obtention de celui-ci passe par une approche énergétique qui dépasse l'objectif de ce travail.

Par conséquent, notons simplement qu'elle se base sur le principe d'Hamilton qui énonce qu'un système évolue de manière à transformer instantanément son énergie cinétique en énergie potentielle la plus petite possible ou son énergie potentielle en énergie cinétique la plus grande possible.

En négligeant les forces non-conservatives, ce principe se présente comme ceci:

$$\int_{t_2}^{t_1} (\delta E_{cin} - \delta E_{pot}) dt = \int_{t_2}^{t_1} (\delta L) dt = 0$$

- $E_{cin}$  , énergie cinétique totale du système
- $E_{pot}$  , énergie potentielle totale du système
- $L = E_{cin} - E_{pot}$  , lagrangien

Le principe d'Hamilton et la définition du lagrangien, après quelques manipulations mathématiques, permettent d'obtenir les N équations linéarisées de Lagrange.

$$\frac{\partial L}{\partial \vec{q}} - \frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{q}}} + \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$$

- $\overrightarrow{F_{ext}}$ , le vecteur des forces extérieures

Lorsque le système évolue autour de sa position d'équilibre, nous pouvons admettre la relation linéaire suivante pour définir le vecteur de coordonnées généralisées.

$$\vec{q}(t) = \vec{q}_0 + \vec{X}(t)$$

- $\vec{q}_0$ , vecteur de coordonnées généralisées en position d'équilibre
- $\vec{X}(t)$ , vecteur de déplacement depuis la position d'équilibre

Finalement, les équations de Lagrange permettent d'aboutir au système matriciel suivant, définissant l'ensemble du système et de dimension NxN.

$$\mathbb{M} \ddot{\vec{X}}(t) + \mathbb{K} \vec{X}(t) = \overrightarrow{F_{ext}}(t)$$

- $\mathbb{M}_{NxN}$ , matrice de masse du système

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \dot{\vec{X}}^T \mathbb{M} \dot{\vec{X}}$$

- $\mathbb{K}_{NxN}$ , matrice de raideur du système

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \vec{X}^T \mathbb{K} \vec{X}$$

Nous identifions facilement, dans l'expression de ce système matriciel, la même structure que l'équation de mouvement d'un système à 1-ddl.

$$m\ddot{u}(t) + ku(t) = f(t)$$

### 1.2.1. Vibration libre

Comme pour le système à un 1-ddl, la première étape est de trouver une expression du déplacement entraîné par une perturbation initiale et évoluant en l'absence de toute force extérieure.

L'idée première pour y arriver est de ramener le système matriciel de dimension  $N \times N$  à une unique équation scalaire.

Imaginons une solution telle que :

$$\vec{X}(t) = \vec{\varphi} u(t)$$

·  $\vec{\varphi}$ , vecteur de fonction de forme

En multipliant chaque membre du système matriciel par le vecteur de fonction de forme transposé, nous parvenons à réduire le système à une seule et unique équation scalaire.

$$(\vec{\varphi}^T \mathbb{M} \vec{\varphi}) \ddot{u}(t) + (\vec{\varphi}^T \mathbb{K} \vec{\varphi}) u(t) = \vec{\varphi}^T \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \hat{m} \ddot{u}(t) + \hat{k} u(t) = 0$$

Nous constatons qu'il s'agit de l'équation de mouvement d'un système à 1-ddl dont la solution est connue.

$$u(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$$

L'étape suivante consiste alors à déterminer la fonction de forme  $\vec{\varphi}$ .

Nous savons que l'accélération respecte l'égalité suivante.

$$\ddot{u}(t) = -\omega^2 u(t)$$

Nous reprenons donc l'expression du système matriciel et nous résolvons l'équation qui en résulte.

$$(-\mathbb{M}\omega^2 + \mathbb{K})\vec{\varphi} = \vec{0}$$

La solution non triviale mène au problème aux valeurs propres suivant.

$$\det(-\mathbb{M}\omega^2 + \mathbb{K}) = 0$$

Il existe  $N$  valeurs propres  $\omega_i^2$  ( $i = 1, \dots, n$ ), solutions du problème. A chacune de celles-ci correspond un vecteur propre  $\vec{\phi}_i$  tel que :

$$(-\mathbb{M}\omega_i^2 + \mathbb{K})\vec{\phi}_i = \vec{0}$$

La solution  $\vec{X}(t) = \vec{\phi} u(t)$  supposée initialement n'est donc pas vérifiée. Elle s'exprime en réalité comme ceci.

$$\vec{X}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{\phi}_i u_i(t) = \sum_{i=1}^N \vec{\phi}_i (A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t))$$

Cette solution a un sens physique très concret.

Comme nous avons pu le voir dans le cadre d'un système à 1-ddl, les propriétés du matériau définissent une fréquence naturelle à laquelle le système oscille lorsqu'il est soumis à une perturbation. Il s'agit de son mode vibratoire propre. Nous remarquons ici qu'un système à N-ddl ne réagit pas selon un unique mode mais selon N modes.

En effet, chacun d'eux est défini par deux grandeurs liées,  $\omega_i$  et  $\vec{\phi}_i$ , qui sont la fréquence propre et le vecteur propre du mode vibratoire. Celles-ci peuvent être déterminées précisément et sont propres au système, indépendamment de l'excitation à laquelle il peut être exposé.

En observant l'expression de la réponse du système perturbé  $\vec{X}(t)$ , nous constatons d'ailleurs qu'elle n'est autre que la somme des réponses des différents modes vibratoires oscillant simultanément mais à des fréquences naturelles et des amplitudes différentes.

Nous savons également que les N paires de coefficients  $\{A_i, B_i\}$  sont définies par les N paires de conditions initiales  $\{u_{0,i}, v_{0,i}\}$ . Ceci signifie que c'est la perturbation imposée au système qui, à travers les valeurs des conditions initiales, définit l'intensité d'excitation de chacun des modes vibratoires. Si nous prenons l'exemple d'un tambour, nous savons que taper au centre de celui-ci ou sur ses bords ne produira pas le même son.

En effet, la surface du tambour est un système dont chacun de ses points représente un ddl. En tapant à deux endroits différents, les conditions initiales de déplacement et de vitesse  $\{u_{0,i}, v_{0,i}\}$  pour chacun des points de la surface ne seront pas les mêmes. Par conséquent, pour deux percussions différentes, chaque mode vibratoire du tambour ne sera pas excité de la même manière (sa paire de coefficients  $\{A_i, B_i\}$  sera différente) et la réponse résultante du tambour (le son) ne sera pas la même.

On appelle "analyse modale" la démarche consistant à extraire les différents modes vibratoires d'un système, soit, les N paires de grandeurs  $\omega_i$  et  $\vec{\phi}_i$ . Pour rappel, celles-ci sont propres aux propriétés du système et, donc, constantes, indépendamment de l'excitation.

### 1.2.2. Vibration forcée

L'objectif de cette section-ci est de parcourir brièvement les étapes principales permettant d'obtenir une expression de la réponse d'un système à N-ddl soumis à une excitation harmonique.

Soit l'équation différentielle matricielle du second ordre :

$$\mathbb{M}\ddot{\vec{X}}(t) + \mathbb{K}\vec{X}(t) = \vec{f}_0 \sin(\omega t)$$

Comme pour le système à 1-ddl, la réponse du système s'exprime selon deux composantes distinctes.

D'une part, la réponse libre oscillant au rythme des fréquences naturelles et, d'autre part, le régime permanent oscillant à la fréquence d'excitation. Cette seconde composante correspond à la solution particulière de l'équation différentielle du second ordre et s'exprime telle que :

$$\vec{X}_p(t) = \vec{\varphi} \sin(\omega t) = \sum_{i=1}^N y_i \vec{\phi}_i \sin(\omega t)$$

- $\vec{\phi}_i$ , vecteur propre du  $i^{\text{ème}}$  mode
- $y_i$ , amplitude constante de la réponse oscillatoire du  $i^{\text{ème}}$  mode

En introduisant cette solution dans le système matriciel, nous pouvons ramener celui-ci à une unique équation scalaire et obtenir l'expression suivante de  $y_i$ .

$$y_i = \frac{\vec{\phi}_i^T \vec{f}_0}{\vec{\phi}_i^T \mathbb{K} \vec{\phi}_i} \cdot \frac{1}{1 - (\omega/\omega_i)^2}$$

- $\omega_i$ , fréquence propre du  $i^{\text{ème}}$  mode

Finalement, le régime permanent peut se réécrire tel que :

$$\vec{X}_p(t) = \sum_{i=1}^N \frac{\vec{\phi}_i^T \vec{f}_0}{\vec{\phi}_i^T \mathbb{K} \vec{\phi}_i} \cdot \frac{1}{1 - (\omega/\omega_i)^2} \vec{\phi}_i \sin(\omega t)$$

Par analogie à l'expression de  $u_p(t)$  pour le système à 1-ddl, nous pouvons redéfinir les deux grandeurs suivantes.

○ la réponse statique : 
$$u_{stat} \doteq \frac{f_0}{k} \rightarrow u_{stat,i} \doteq \frac{\overrightarrow{\phi}_i^T \overrightarrow{f_0}}{\overrightarrow{\phi}_i^T K \overrightarrow{\phi}_i} \text{ [m]}$$

○ le facteur amplificateur : 
$$R_d \doteq \frac{1}{|1 - (\omega/\omega_n)^2|} \rightarrow R_{d,i} \doteq \frac{1}{1 - (\omega/\omega_i)^2} \text{ [-]}$$

Nous remarquons ici aussi que la fréquence angulaire d'excitation peut entraîner un effet de résonance si elle est suffisamment proche d'une des  $N$  fréquences naturelles du système. En effet, si  $\omega \approx \omega_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ), l'amplitude de la réponse du  $i^{\text{ème}}$  mode est amplifiée à chaque oscillation. La réponse du système va évoluer jusqu'à atteindre les déplacements limites, et finalement, mener à la rupture.

# Chapitre 2 :

## Modélisation par éléments finis

---

Le précédent chapitre avait pour but de rappeler la théorie fondamentale de la dynamique des structures.

Nous souhaitons maintenant utiliser les modèles mathématiques que nous avons obtenus afin de résoudre, par ordinateur, une structure de type treillis.

Cependant, ces modèles se basent sur une analyse continue des systèmes et rendent leur implémentation relativement complexe. Il est malgré tout possible de simplifier celle-ci en ajoutant une étape intermédiaire.

Cette étape vise à discrétiser le problème par une modélisation du système par éléments finis. En imposant des relations d'équilibre sur chacun des éléments et en assurant leur continuité par le biais de conditions aux frontières, il est possible de transposer, au système discret, les modèles mathématiques relatifs aux systèmes continus.

C'est l'objectif du chapitre suivant.

Avant de commencer cette analyse par éléments finis, rappelons les hypothèses sur lesquelles repose l'étude des treillis.

- Les charges sont appliquées aux extrémités des barres (nœuds).
- Les contraintes et les déformations induites dans les barres sont axiales.

## 2.1. Discrétisation du système continu en éléments finis

Comme expliqué précédemment, le principe de la modélisation par éléments finis consiste à discrétiser le système continu.

Dans notre cas, le système correspond à une structure en treillis. Assez intuitivement, une discrétisation possible est d'étudier, indépendamment l'une de l'autre, chaque barre constituant ce treillis.

Prenons donc comme élément fini une barre rectiligne. Celle-ci est caractérisée par un système de coordonnées locales  $(X, Y)$  avec  $X$  comme axe principal.

Soit les nœuds 1 et 2 définissant les extrémités de la barre, leurs déplacements sont respectivement notés  $U_1$  et  $U_2$ .

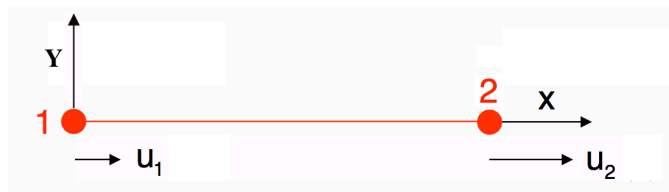


Figure 9 : modèle d'élément fini correspondant à une barre quelconque du treillis [1]

Soit la barre de longueur  $L$ . Nous pouvons faire une approximation du déplacement d'un point quelconque de la barre par la relation suivante.

$$U(X) = N_1(X) \cdot U_1 + N_2(X) \cdot U_2 = \left(1 - \frac{X}{L}\right) \cdot U_1 + \left(\frac{X}{L}\right) \cdot U_2$$

Le choix des fonctions de forme  $N_i(X)$  est de telle sorte que les conditions aux frontières soient respectées.

$$U(X = 0) = U_1$$

$$U(X = L) = U_2$$

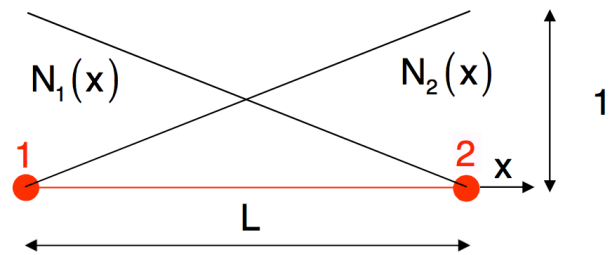


Figure 10 : Schéma des fonctions de forme du déplacement d'un nœud quelconque de la barre. [1]

De l'expression du déplacement découle celles de la déformation axiale et de la contrainte axiale.

$$\varepsilon(X) = \frac{d(U(x))}{dx} = \frac{d(N_1(X))}{dx} \cdot U_1 + \frac{d(N_2(X))}{dx} \cdot U_2 = -\frac{1}{L} \cdot U_1 + \frac{1}{L} \cdot U_2$$

$$\sigma(X) = E\varepsilon(X) = E\left(-\frac{1}{L} \cdot U_1 + \frac{1}{L} \cdot U_2\right)$$

## 2.2. Théorème des travaux virtuels: problème statique

Ce modèle étant défini, la seconde étape consiste à établir la relation d'équilibre qui porte sur chaque élément.

Dans cette démarche, nous allons commencer par étudier l'équilibre statique pour ensuite l'étendre à une situation dynamique.

L'équilibre statique repose sur le théorème des travaux virtuels :

*Quelque soit le système matériel considéré, pour tout déplacement virtuel, le travail virtuel des efforts intérieurs est égal au travail virtuel des efforts extérieurs appliqués à ce système.*

Mathématiquement,

$$\delta\pi = \delta W_i - \delta W_e = 0 \quad \forall \delta U$$

- $\pi = W_i - W_e$ , énergie potentielle totale du système
- $\delta U$ , déplacement virtuel
- $\delta W_i$ , travail virtuel des efforts intérieurs
- $\delta W_e$ , travail virtuel des efforts extérieurs

### 2.2.1. Application du théorème à une barre

Commençons par définir et calculer, pour une barre du treillis, les deux grandeurs  $W_i$  et  $W_e$ .

Soit  $A [m^2]$  la section de la barre et  $E [N/m]$  son module de déformation, tous deux constants sur la longueur.

- $W_i$  désigne le travail des efforts intérieurs. Il correspond à l'énergie de déformation de la barre et se calcule comme ceci.

$$W_i = \frac{1}{2} \int_0^L \varepsilon(X) \sigma(X) A dX = \frac{EA}{2} \int_0^L \left( \frac{d(U(x))}{dx} \right)^2 dX = \frac{EA}{2L} (U_2 - U_1)^2$$

Nous pouvons également l'exprimer sous forme matricielle.

$$W_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & -\frac{EA}{L} \\ -\frac{EA}{L} & \frac{EA}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [U]^T [K] [U]$$

- $[U]$ , vecteur de déplacement nodal local
  - $[K]$ , matrice de raideur locale
- $W_e$  désigne le travail des efforts extérieurs. Négligeons les forces volumiques, notamment le poids de la barre, ainsi que toute autre charge surfacique. Cette hypothèse est nécessaire pour respecter le principe du treillis dont les charges ne s'appliquent qu'aux nœuds. Le travail des efforts extérieurs s'écrit dès lors comme ceci.

$$W_e = \sum F_i U_i = F_1 U_1 + F_2 U_2$$

Nous pouvons également exprimer ce terme sous forme matricielle.

$$W_e = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \end{bmatrix} = [U]^T [F]$$

- $[F]$ , vecteur de force nodale local

## 2.2.2. Changement de repère

Les grandeurs définies ci-dessus ne concernent qu'une seule barre et sont exprimées dans le système de coordonnées locales (X,Y) de celle-ci.

En vue d'appliquer le théorème des travaux virtuels à l'ensemble du treillis, il faut définir un système de coordonnées globales (x,y) commun à toutes les barres. Ce changement de repère implique une réécriture des expressions des deux travaux sur base des coordonnées globales.

Par définition, tout vecteur  $V$  est caractérisé par 2 jeux de coordonnées relatifs au système dans lequel il est exprimé.

Dans le système local :

$$V = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = [T] v$$

Dans le système global :

$$v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} = [T]^T V$$

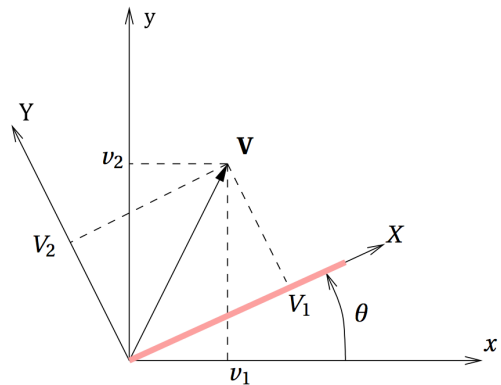


Figure 11 : Changement de repère [2]

Soit l'énergie de déformation d'une barre exprimée dans son système local telle que :

$$W_i = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} U_{1,x} \\ U_{1,y} \\ U_{2,x} \\ U_{2,y} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_{1,x} \\ U_{1,y} \\ U_{2,x} \\ U_{2,y} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [U]^T [K] [U]$$

Le changement de repère vers le système global s'opère comme suit :

$$W_i = \frac{1}{2} [U]^T [K] [U] = \frac{1}{2} [u]^T [T]^T [K] [T] [u] = \frac{1}{2} [u]^T [k] [u]$$

Nous obtenons la matrice de raideur globale de la barre.

$$[k] = [T]^T [K] [T]$$

$$\begin{aligned}
&= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ -\frac{EA}{L} & 0 & \frac{EA}{L} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \\
&= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta & -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta \\ -\cos^2\theta & -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & -\sin^2\theta & \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Nous pouvons faire de même avec le travail des efforts extérieurs.

Dans le système local, il s'écrit comme tel :

$$W_e = \begin{bmatrix} U_{1,x} \\ U_{1,y} \\ U_{2,x} \\ U_{2,y} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} F_{1,x} \\ F_{1,y} \\ F_{2,x} \\ F_{2,y} \end{bmatrix} = [U]^T [F]$$

Et le changement de repère s'opère comme suit :

$$W_e = [U]^T [F] = [u]^T [T]^T [T] [f] = [u]^T [I] [f] = [u]^T [f]$$

### 2.2.3. Application du théorème à l'ensemble du treillis

L'extension du théorème à l'ensemble du treillis requiert, au préalable, la redéfinition de certains vecteurs et de certaines grandeurs.

Soit un treillis composé de  $N$  nœuds et de  $B$  barres.

Le vecteur de déplacement global  $[u]_{2N}$  contient désormais les déplacements horizontaux et verticaux des  $N$  nœuds du treillis. Et, selon la même logique, le vecteur de force global  $[f]_{2N}$  contient maintenant les forces horizontales et verticales appliquées à ces nœuds.

$$[u] = \begin{bmatrix} u_{1,x} \\ u_{1,y} \\ \vdots \\ u_{n,x} \\ u_{n,y} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad [f] = \begin{bmatrix} f_{1,x} \\ f_{1,y} \\ \vdots \\ f_{n,x} \\ f_{n,y} \end{bmatrix}$$

La matrice de raideur globale de la barre  $j$ , notée  $[k^j]_{4 \times 4}$ , est étendue pour former une matrice  $[k_e^j]_{2N \times 2N}$  où l'indice  $e$  fait référence à son extension. Cette matrice est quasiment-nulle; seules 16 entrées sont remplies par les 16 éléments contenus dans  $[k^j]_{4 \times 4}$ .

$$[k^j]_{4 \times 4} \xrightarrow{\text{extension}} [k_e^j]_{2N \times 2N}$$

Soient  $a, b$ , les nœuds d'extrémités de la barre  $j$  et  $n_{a,x}, n_{a,y}, n_{b,x}, n_{b,y}$ , les indices de la matrice de raideur étendue qui y correspondent.

Les 16 éléments non nuls sont tels que :

$$[k_e^j]_{pq} \neq 0 \quad \forall p, q \in \{n_{a,x}, n_{a,y}, n_{b,x}, n_{b,y}\}.$$

Désormais, les travaux des efforts intérieurs et extérieurs de la barre  $j$  sont notés  $W_e^j$  et  $W_i^j$ , tandis que  $W_i$  et  $W_e$  désignent les travaux du treillis tout entier.

Sur base de ces notations, nous pouvons tirer l'expression du travail des efforts intérieurs de l'ensemble du treillis. Il équivaut à la somme des travaux de chacune de ses barres.

$$W_i = \sum_{j=1}^B W_i^j = \sum_{j=1}^B \frac{1}{2} [u]^T [k_e^j] [u] = \frac{1}{2} [u]^T \left( \sum_{j=1}^B [k_e^j] \right) [u] = \frac{1}{2} [u]^T [k] [u]$$

Nous obtenons finalement la matrice de raideur globale du treillis  $[k]$ . Elle est obtenue en sommant toutes les matrices de raideur globales étendues des barres du treillis.

L'expression du travail virtuel des efforts extérieurs se présente sous la même forme que celle obtenue pour une unique barre. Notons cependant que les vecteurs présents dans l'expression ont été redéfinis précédemment. Ils ne sont donc plus composés de 4 éléments mais bien de  $2N$ .

$$W_e = [u]^T [f]$$

Finalement, nous obtenons l'énergie potentielle totale du treillis.

$$\pi = W_i - W_e = \frac{1}{2} [u]^T [k] [u] - [u]^T [f]$$

Sur base de cette expression, nous pouvons appliquer le théorème des travaux virtuels et obtenir la relation finale pour un équilibre statique.

$$\begin{aligned} \delta\pi &= \delta W_i - \delta W_e = 0 && \forall \delta U \\ &= \delta \left( \frac{1}{2} [u]^T [k] [u] \right) - [\delta u]^T [f] \\ &= [\delta u]^T [k] [u] - [\delta u]^T [f] \\ &= [k] [u] - [f] \end{aligned}$$

## 2.3. Théorème des travaux virtuels : problème dynamique

Le théorème des travaux virtuels peut être étendu à un problème dynamique.

*Quelque soit le système matériel considéré, à tout instant et pour tout déplacement virtuel, la somme du travail virtuel des efforts intérieurs et du travail virtuel des forces d'inerties est égale au travail virtuel des efforts extérieurs appliqués à ce système.*

Un terme s'ajoute donc à l'expression relative au problème statique pour prendre en compte l'effet d'inertie. Notons également que tous les termes sont, maintenant, dépendants du temps.

Mathématiquement,

$$\delta W_i + \delta W_a = \delta W_e \quad \forall \delta U \text{ et } \forall t$$

Par analogie au déplacement du point quelconque d'une barre, nous pouvons également exprimer sa vitesse.

Soient  $\dot{U}_1$  et  $\dot{U}_2$  les vitesses des 2 nœuds situés aux extrémités d'une barre.

$$\dot{U}(X) = N_1(X) \cdot \dot{U}_1 + N_2(X) \cdot \dot{U}_2 = \left(1 - \frac{X}{L}\right) \cdot \dot{U}_1 + \left(\frac{X}{L}\right) \cdot \dot{U}_2$$

Soit également la masse volumique constante  $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>].

Nous pouvons alors calculer l'énergie cinétique qui quantifie les effets d'inertie.

$$W_a = \frac{1}{2} \int_0^L \rho \cdot \dot{U}^2(X) A dX = \frac{\rho A}{2} \int_0^L \dot{U}^2(X) dX = \frac{\rho A L}{6} (\dot{U}_1^2 + \dot{U}_1 \dot{U}_2 + \dot{U}_2^2)$$

Son expression peut être exprimée sous forme matricielle.

$$W_a = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \frac{\rho A L}{3} & \frac{\rho A L}{6} \\ \frac{\rho A L}{6} & \frac{\rho A L}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{U}_1 \\ \dot{U}_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2} [\dot{U}]^T [M] [\dot{U}]$$

- $[\dot{U}]$ , vecteur de vitesse nodale local
- $[M]$ , matrice de masse locale

Le changement de repère du système local au système global s'opère comme ceci :

$$W_a = \frac{1}{2} [\dot{U}]^T [M] [\dot{U}] = \frac{1}{2} [\dot{u}]^T [T]^T [M] [T] [\dot{u}] = \frac{1}{2} [\dot{u}]^T [m] [\dot{u}]$$

Nous obtenons la matrice de raideur globale de la barre.

$$[m] = [T]^T [M] [T]$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\rho AL}{3} & 0 & \frac{\rho AL}{6} & 0 \\ 0 & \frac{\rho AL}{3} & 0 & \frac{\rho AL}{6} \\ \frac{\rho AL}{6} & 0 & \frac{\rho AL}{3} & 0 \\ 0 & \frac{\rho AL}{6} & 0 & \frac{\rho AL}{3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$= \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} = [M]$$

Afin d'obtenir la matrice de masse globale du treillis, et non plus d'une seule barre, nous sommes toutes les matrices de masse étendues de chaque barre. La logique suivie est identique à celle utilisée pour composer la matrice de raideur globale du treillis. Nous pouvons ainsi calculer l'énergie cinétique totale.

$$W_a = \sum_{j=1}^B W_a^j = \sum_{j=1}^B \frac{1}{2} [\dot{u}]^T [m_e^j] [\dot{u}] = \frac{1}{2} [\dot{u}]^T \left( \sum_{j=1}^B [m_e^j] \right) [\dot{u}] = \frac{1}{2} [\dot{u}]^T [m] [\dot{u}]$$

Dans cette expression, le vecteur  $[\dot{u}]_{2N}$  a également été redéfini et contient les vitesses verticales et horizontales des N nœuds du treillis.

Nous pouvons déterminer le travail virtuel des forces d'inerties.

$$\delta W_a = \delta([\dot{u}]^T [m] [\dot{u}]) = [\delta \dot{u}]^T [m] [\dot{u}] = [\delta u]^T [m] [\ddot{u}]$$

En introduisant ce résultat dans l'expression du théorème des travaux virtuels, nous obtenons la relation suivante.

$$\begin{aligned} \delta W_i + \delta W_a &= \delta W_e & \forall \delta U \text{ et } \forall t \\ \Leftrightarrow [\delta u]^T [k] [u] + [\delta u]^T [m] [\ddot{u}] &= [\delta u]^T [f] \\ \Leftrightarrow [k] [u] + [m] [\ddot{u}] &= [f] \end{aligned}$$

Ou encore :

$$[k] [u(t)] + [m] [\ddot{u}(t)] = [f(t)]$$

Finalement, cette expression nous permet de constater toute l'utilité de la modélisation par éléments finis.

En effet, l'ensemble de la démarche suivie dans ce chapitre nous a permis de transposer l'équation de mouvement relatif à un système continu au système discrétisé.

○ Système continu : 
$$\mathbb{M}\ddot{\vec{X}}(t) + \mathbb{K}\vec{X}(t) = \overrightarrow{F_{ext}}(t)$$

↓

○ Système discret : 
$$[m] [\ddot{u}(t)] + [k] [u(t)] = [f(t)]$$

L'avantage de cette seconde relation, pour rappel, est qu'elle peut être directement implémentée afin d'obtenir une solution numérique.

Pour terminer, nous pouvons relever la concordance des grandeurs définies dans ce chapitre avec certaines grandeurs abordées dans la théorie de la dynamique des systèmes élastiques.

En effet, nous avons dérivé l'expression du travail des forces intérieures.

$$W_i = \frac{1}{2} [u]^T [k] [u]$$

Ce travail correspond à l'énergie potentielle de déformation. Celle-ci était déjà présentée au chapitre précédent afin d'obtenir la matrice de raideur du système.

$$E_{pot} = \frac{1}{2} \vec{X}^T \mathbb{K} \vec{X}$$

Le même constat peut être fait pour le travail des forces d'inerties.

$$W_a = \frac{1}{2} [\dot{u}]^T [m] [\dot{u}]$$

Il correspond à l'énergie cinétique. Celle-ci était également présentée au chapitre précédent afin d'obtenir la matrice de masse du système.

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \dot{\vec{X}}^T \mathbb{M} \dot{\vec{X}}$$

Enfin, nous avons déduit le travail des forces extérieures.

$$W_e = [u]^T [f]$$

Celui-ci est plus intuitif car il découle de la définition même du travail d'une force qui équivaut au produit de la force appliquée et du déplacement entraîné dans sa direction d'application.

$$W = \vec{X}^T \mathbb{F}$$

# Chapitre 3 :

## Résolution numérique de l'équation de mouvement

---

Le chapitre précédent avait pour objectif de modéliser un treillis quelconque et d'en déduire son équation de mouvement en vue d'obtenir numériquement une réponse dynamique.

En omettant les crochets et en utilisant les notations de matrices globales  $\mathbb{M}$  et  $\mathbb{K}$ , nous pouvons écrire cette équation comme ceci.

$$\mathbb{M}\ddot{u}(t) + \mathbb{K}u(t) = f(t)$$

Pour solutionner cette équation, la théorie de la dynamique des systèmes élastiques fournit une méthode qui demande de résoudre le problème aux valeurs propres suivant.

$$\det(-\mathbb{M}\omega^2 + \mathbb{K}) = 0$$

Celle-ci mène à l'expression du déplacement que nous avons déjà tirée précédemment.

$$\vec{X}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{\phi}_i \left( \underbrace{A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t)}_{\text{réponse libre}} + \underbrace{\frac{\vec{\phi}_i^T \vec{f}_0}{\vec{\phi}_i^T \mathbb{K} \vec{\phi}_i} \cdot \frac{1}{1 - (\omega/\omega_i)^2} \sin(\omega t)}_{\text{réponse forcée}} \right)$$

Seulement, l'implémentation de la résolution d'un problème aux valeurs propres est particulièrement complexe et fastidieuse.

En décidant de résoudre numériquement un problème dynamique, nous élargissons également le choix des méthodes de résolution. Certaines sont dites directes et permettent de résoudre l'équation sans avoir à passer par des étapes intermédiaires tel que le problème aux valeurs propres.

Les méthodes numériques sont généralement des méthodes itératives dont l'idée n'est plus de résoudre l'équation en chaque instant  $t$  mais en des temps ponctuels. Elles se basent en effet sur une discrétisation de l'échelle de temps en intervalles de durée  $\Delta t$  et, pour lesquels, elles admettent une variation du déplacement, de la vitesse et de l'accélération.

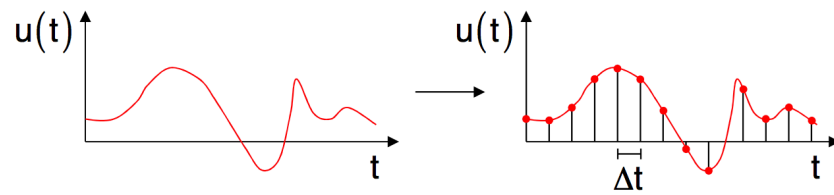


Figure 12 : discrétisation de l'échelle de temps en intervalles de durée  $\Delta t$  [1]

Il existe plusieurs méthodes possibles qui se différencient notamment par leur stabilité et leur précision. La méthode de Newmark développée dans ce travail en fait partie.

### 3.1. Méthode de Newmark

La méthode de Newmark est une méthode dite implicite car elle fournit une solution au temps  $t + \Delta t$  à partir de l'équation au même temps  $t + \Delta t$ .

Par opposition, les méthodes explicites fournissent une solution au temps  $t + \Delta t$  à partir de l'équation au temps  $t$ .

Nous reviendrons plus loin sur les conséquences qu'implique le choix d'une méthode implicite plutôt qu'explicite.

La méthode de Newmark propose les deux relations suivantes pour calculer le déplacement et la vitesse en un temps  $t + \Delta t$  quelconque.

- Vitesse:  $\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + [(1 - \delta)\ddot{u}_t + \delta\ddot{u}_{t+\Delta t}]\Delta t$
- Déplacement:  $u_{t+\Delta t} = u_t + \dot{u}_t\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right)\ddot{u}_t + \alpha\ddot{u}_{t+\Delta t}\right](\Delta t)^2$

·  $\delta$  et  $\alpha$ , paramètres choisis arbitrairement

$$\delta \in \left[\frac{1}{2}; 1\right] \quad \alpha \in \left[0; \frac{1}{2}\right]$$

Selon les valeurs des paramètres  $\delta$  et  $\alpha$ , la méthode peut s'exprimer sous différentes variantes. Le choix de ces valeurs est déterminant pour la stabilité et la précision de la méthode.

Il existe par exemple la méthode des différences centrées avec  $\alpha = 0$  et  $\delta = 1/2$ . Elle est explicite et conditionnellement stable. En effet, pour assurer une convergence vers la solution à chaque itération, une condition doit être imposée sur le choix du pas de temps  $\Delta t$ .

Une autre variante fréquemment utilisée est la méthode de l'accélération moyenne avec  $\alpha = 1/4$  et  $\delta = 1/2$ . Elle conserve le caractère implicite de la méthode de Newmark et, de ce fait, lui assure une stabilité inconditionnelle.

A l'inverse de la convergence, la précision des résultats dépend du choix du pas de temps  $\Delta t$ .

En effet, une discrétisation du temps, pour approcher la solution au temps continu, entraîne nécessairement une perte de précision. Nous pouvons donc imaginer, assez intuitivement, que plus petit sera le pas de temps  $\Delta t$ , moins significative sera cette perte.

C'est cette seconde variante de la méthode de Newmark, l'accélération moyenne, que nous allons retenir pour résoudre l'équation du mouvement.

Reprenons les expressions du déplacement et de la vitesse fournies par les relations de Newmark.

Nous constatons rapidement qu'elles ne sont pas d'une réelle utilité dès lors que l'accélération  $\ddot{u}_{t+\Delta t}$  est inconnue. L'idée est de reformuler ces deux relations afin d'obtenir les 2 expressions de  $\dot{u}_{t+\Delta t}$  et  $\ddot{u}_{t+\Delta t}$  en fonction des grandeurs  $u_t, \dot{u}_t$  et  $\ddot{u}_t$ . Nous trouvons alors :

- Accélération :

$$\ddot{u}_{t+\Delta t} = \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} \left( u_{t+\Delta t} - u_t - \dot{u}_t \Delta t - \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{u}_t (\Delta t)^2 \right)$$

- Vitesse :

$$\dot{u}_{t+\Delta t} = \dot{u}_t + (1 - \delta) \ddot{u}_t \Delta t + \frac{\delta}{\alpha \Delta t} \left( u_{t+\Delta t} - u_t - \dot{u}_t \Delta t - \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{u}_t (\Delta t)^2 \right)$$

Ces deux expressions comportent un terme inconnu  $u_{t+\Delta t}$ . C'est l'objectif recherché en ayant recours à la méthode de Newmark. Cela permet d'éliminer, de l'équation du mouvement, le terme inconnu d'accélération  $\ddot{u}_{t+\Delta t}$  et de ne garder qu'une seule inconnue  $u_{t+\Delta t}$ .

$$\begin{aligned} & \mathbb{M} \ddot{u}_{t+\Delta t} + \mathbb{K} u_{t+\Delta t} = f_{t+\Delta t} \\ \Leftrightarrow & \left( \mathbb{M} \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} + \mathbb{K} \right) u_{t+\Delta t} = f_{t+\Delta t} + \mathbb{M} \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} \left( u_t + \dot{u}_t \Delta t + \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{u}_t (\Delta t)^2 \right) \\ \Leftrightarrow & \hat{\mathbb{K}} u_{t+\Delta t} = \hat{f}_{t+\Delta t} \end{aligned}$$

- $\hat{\mathbb{K}}$ , matrice de raideur effective

$$\hat{\mathbb{K}} = \left( \mathbb{M} \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} + \mathbb{K} \right)$$

- $\hat{f}_{t+\Delta t}$ , vecteur de force effective au temps  $t + \Delta t$

$$\hat{f}_{t+\Delta t} = f_{t+\Delta t} + \mathbb{M} \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} \left( u_t + \dot{u}_t \Delta t + \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{u}_t (\Delta t)^2 \right)$$

Nous obtenons alors un système de N équations à N déplacements inconnus, contenus dans le vecteur  $u_{t+\Delta t}$ .

Avant de pouvoir résoudre ce système par itération en chaque temps  $t = n\Delta t$ , une étape préliminaire est nécessaire. En effet, lors de la première itération, nous cherchons à déduire le déplacement  $u_{0+\Delta t}$ . Nous connaissons  $u_0$  et  $\dot{u}_0$  définis par les

conditions initiales, mais le vecteur d'accélération  $\ddot{u}_0$  est à priori inconnu. Il est cependant possible de le déterminer en appliquant simplement l'équation du mouvement en  $t = 0$ .

$$\ddot{u}_0 = \mathbb{M}^{-1}(f_0 - \mathbb{K}u_0)$$

Une fois cette étape préliminaire effectuée, nous devons assembler la matrice de raideur effective  $\widehat{\mathbb{K}}$ .

Ensuite, la réponse dynamique se résout de manière itérative en répétant, à chaque pas de temps, les opérations suivantes.

1. Composition de la matrice de force effective  $\hat{f}_{t+\Delta t}$
2. Calcul de  $u_{t+\Delta t}$  par la résolution du système :

$$\widehat{\mathbb{K}}u_{t+\Delta t} = \hat{f}_{t+\Delta t}$$

3. Calcul de  $\dot{u}_{t+\Delta t}$  et  $\ddot{u}_{t+\Delta t}$  à l'aide des 2 relations de Newmark ( $\alpha = \frac{1}{4}$  et  $\delta = \frac{1}{2}$ )

Remarque :

*L'idée initiale de l'utilisation de la méthode de Newmark était d'obtenir les déplacements d'un treillis quelconque sans avoir recours au calcul des fréquences propres. En effet, comme vu précédemment, celui-ci nécessite la résolution d'un problème aux valeurs propres dont l'implémentation s'avère complexe et fastidieuse.*

*Cependant, il est fortement souhaitable, dans une optique didactique, de fournir les valeurs des fréquences propres à l'utilisateur du logiciel. Le choix a donc été fait d'implémenter la méthode de Newmark ainsi que d'importer la bibliothèque mathématique LAPACK (Open Source) en mesure de résoudre un problème aux valeurs propres. De cette manière, d'une part, l'utilisateur a connaissance des fréquences propres, et d'autre part, celles-ci peuvent être utilisées afin de vérifier les résultats de la méthode de Newmark.*

## 3.2. Modélisation des appuis

Rappelons-nous que la position de chaque nœud d'un treillis est définie selon les coordonnées globales du système  $(x, y)$ .

Un treillis à  $N$  nœuds est donc décrit par leurs  $N$  paires de coordonnées généralisées  $(x_i, y_i)$  contenues dans le vecteur  $\vec{q}(t)_{2N}$ .

Lorsque le treillis se déforme, chacun de ses nœuds subit un déplacement pouvant être décomposé selon les deux axes  $(u_{i,x}, u_{i,y})$ . Ils sont contenus dans le vecteur  $[u_t]_{2N}$  que nous souhaitons déterminer par la méthode de Newmark. Ce problème fait donc intervenir  $2N$  degrés de libertés.

Cependant, comme pour une situation statique, la résolution d'un treillis impose un degré d'hyperstaticité positif.

$$H = B + R - 2 * N \geq 0$$

- $B$ , nombre de barre
- $R$ , nombre d'appuis
- $N$ , nombre de nœuds

C'est pourquoi, n'importe quel treillis, pour être résoluble, doit comporter au minimum trois appuis. Ceux-ci correspondent à des suppressions de degrés de libertés.

En effet, en restreignant un nœud à se déplacer linéairement, et non plus, en plan, un appui à rouleau supprime 1 ddl. Plus contraignant encore, un appui à rotule empêche tout déplacement du point et implique donc la suppression de 2 ddl. Si  $R$  est le nombre d'appuis du treillis, celui-ci comporte alors  $2N-R$  ddl.

Pour rappel, l'équation de mouvement correspond au système matriciel d'ordre  $2N \times 2N$  :

$$\hat{\mathbb{K}}u_{t+\Delta t} = \hat{f}_{t+\Delta t}$$

Il existe plusieurs manières de faire intervenir les appuis dans l'équation de mouvement.

Une première méthode consiste à supprimer les lignes et colonnes dont les indices correspondent aux déplacements contraints par les appuis. L'ordre du système matriciel à résoudre se réduit alors à  $(2N-R) \times (2N-R)$ .

La résolution de ce système fournit le vecteur de déplacement des nœuds non-contraints  $[u_t]_{2N-R}$ .

Une seconde méthode est basée sur les multiplicateurs de Lagrange.

Celle-ci à l'avantage de fournir les valeurs des réactions d'appuis. Elle propose de résoudre le système matriciel suivant d'ordre  $(2N+R)*(2N+R)$ .

$$\begin{bmatrix} [\hat{k}] & [c]^T \\ [c] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u] \\ [R] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [\hat{f}] \\ [0] \end{bmatrix}$$

- $[\hat{k}]_{2N*2N}$ , matrice de raideur effective  $\hat{\mathbb{K}}$
- $[\hat{f}]_{2N}$ , vecteur de force effective  $\hat{f}$
- $[u]_{2N}$ , vecteur de déplacement
- $[0]_{R*R}$  (à gauche), matrice nulle
- $[0]_R$  (à droite), vecteur nul
- $[R]_R$ , vecteur de réactions d'appuis
- $[C]_{R*2N}$ , matrice de contraintes

La matrice de contraintes  $[C]_{R*2N}$  est une matrice ne contenant, par ligne, qu'une entrée non-nulle qui est égale à l'unité.

En l'introduisant au système matriciel, nous ajoutons R équations supplémentaires à respecter. Celles-ci imposent simplement une valeur 0 à tous les déplacements limités par un appui. Pour chaque ligne de la matrice, la seule entrée non-nulle est celle dont l'indice de colonne correspond à l'indice de ligne du déplacement que nous voulons limiter par un appui. Ainsi, en développant le système matriciel, nous obtenons les R équations :

$$c_{(i,j)}u_j = 0$$

- $u_j$ ,  $j^{\text{ème}}$  déplacement
- $c_{(i,j)}$ ,  $i^{\text{ème}}$  contrainte du système sur le  $j^{\text{ème}}$  déplacement

$$c_{(i,j)} = 1$$

Nous constatons également l'ajout de la matrice de contraintes transposée  $[c]^T_{R*2N}$  et du vecteur de réactions  $[R]_R$  dans le système matriciel.

Le but de cette opération est de prendre en compte, dans les équations d'équilibre, les réactions d'appuis agissant comme des forces extérieures. La  $i^{\text{ème}}$  réaction d'appui est donc introduite dans l'équation d'équilibre qu'elle influence par le biais d'un terme supplémentaire :

$$c_{(j,i)}R_i$$

- $R_i$ ,  $i^{\text{ème}}$  réaction d'appui associée à la  $i^{\text{ème}}$  contrainte
- $c_{(j,i)}$ ,  $i^{\text{ème}}$  contrainte du système

$$c_{(j,i)} = 1$$

De plus, c'est l'avantage que présente cette méthode: nous pouvons déterminer le vecteur de réactions  $[R]_R$  en l'alignant au vecteur de déplacement  $[u]_{2N}$ . De cette manière, les valeurs des réactions d'appuis sont calculées lors de la résolution du système d'équations linéaires.

$$Ax = B$$

Où :

$$A = \begin{bmatrix} [k] & [c]^T \\ [c] & [0] \end{bmatrix}, \quad x = \begin{bmatrix} [u] \\ [R] \end{bmatrix} \text{ (inconnu)}, \quad B = \begin{bmatrix} [f] \\ [0] \end{bmatrix}$$

Cette méthode des multiplicateurs de Lagrange repose sur le principe de minimisation de l'énergie potentielle totale qui est l'équivalent du théorème des travaux virtuels précédemment utilisé.

### 3.3. Illustration

L'objectif de cette section est d'illustrer l'ensemble des concepts théoriques développés jusqu'à présent.

Pour ce faire, nous allons choisir un treillis simple et détailler les différentes étapes effectuées par le logiciel une fois que la structure y est entrée.

Ces étapes comprennent, d'abord, sa modélisation par éléments finis, ensuite, la composition des matrices globales, et finalement, la construction du système matriciel issu de la méthode de Newmark.

#### 3.3.1. Modélisation du treillis

La première étape consiste à enregistrer et gérer de manière structurée les informations de la structure entrée dans le logiciel.

Pour illustrer ceci, nous allons étudier le treillis simple suivant.

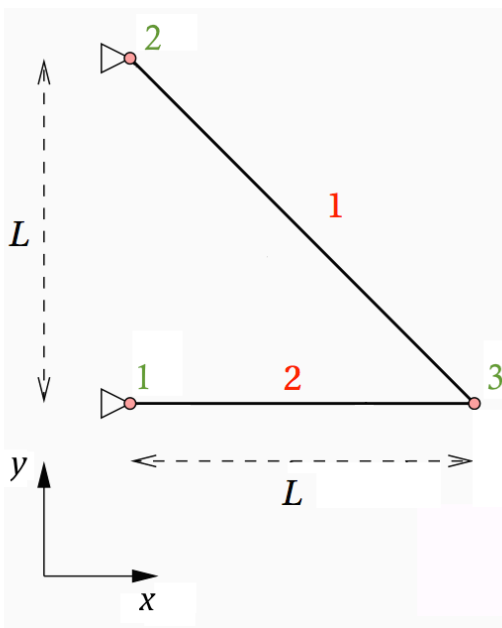


Figure 13 : Treillis quelconque modélisé par éléments finis [2]

- Nœuds → coordonnées globales  $(x, y)$

$$1 \rightarrow (0,0)$$

$$2 \rightarrow (0, L)$$

$$3 \rightarrow (L, 0)$$

- Barres → nœuds aux extrémités  $(n_i, n_j)$

$$1 \rightarrow (2,3)$$

$$2 \rightarrow (1,3)$$

- Appuis → nœud  $n_i \sim$  axe contraint  $(O_x, O_y)$

$$1 \rightarrow 1 \sim (1,0)$$

$$2 \rightarrow 1 \sim (0,1)$$

$$3 \rightarrow 2 \sim (1,0)$$

$$4 \rightarrow 2 \sim (0,1)$$

Lorsque l'utilisateur construit un treillis au moyen de l'interface graphique du logiciel, simultanément, les informations de celui-ci sont analysées et triées dans différents vecteurs.

Admettant que la structure soit formée de  $N$  nœuds,  $B$  barres et fixée par  $R$  réactions d'appuis, les vecteurs sont les suivants.

- Vecteur  $[pos]_{2N}$  : contient successivement les coordonnées globales des nœuds.

$$[pos]_{2N} \rightarrow [ \underbrace{x_1 y_1}_{n_1} \underbrace{x_2 y_2}_{n_2} \cdots \underbrace{x_n y_n}_{n_n} ]$$

- Vecteur  $[ind]_{2B}$  : contient successivement les index des nœuds situés aux extrémités de chaque barre.

$$[ind]_{2B} \rightarrow [ \underbrace{n_i n_j}_{b_1} \underbrace{n_k n_l}_{b_2} \cdots \underbrace{n_p n_q}_{b_b} ]$$

- Vecteur  $[nc]_R$  : contient l'index du nœud auquel une contrainte est appliquée. Par conséquent, l'index d'un nœud fixé par une rotule est doublé.

$$[nc]_R \rightarrow [ \underbrace{n_i}_{r_1} \underbrace{n_j}_{r_2} \cdots \underbrace{n_p}_{r_r} ]$$

- Vecteur  $[vc]_{2R}$  : contient successivement l'information de l'axe contraint pour chacune des réactions d'appuis. Un 0 indique que le déplacement selon cet axe est libre; par opposition, un 1 indique qu'il est bloqué.

$$[vc]_{2R} \rightarrow [ \underbrace{O_{x,1} O_{y,1}}_{r_1} \underbrace{O_{x,2} O_{y,2}}_{r_2} \cdots \underbrace{O_{x,r} O_{y,r}}_{r_r} ]$$

Les vecteurs décrivant le treillis d'exemple se présentent donc comme ceci.

$$[pos] \rightarrow [ \underbrace{0 0}_{n_1} \underbrace{0 L}_{n_2} \underbrace{L 0}_{n_3} ]$$

$$[ind] \rightarrow [ \underbrace{2 3}_{b_1} \underbrace{1 3}_{b_2} ]$$

$$[nc] \rightarrow [ \underbrace{1}_{r_1} \underbrace{1}_{r_2} \underbrace{2}_{r_3} \underbrace{2}_{r_4} ]$$

$$[vc] \rightarrow [ \underbrace{1 0}_{r_1} \underbrace{0 1}_{r_2} \underbrace{1 0}_{r_3} \underbrace{0 1}_{r_4} ]$$

### 3.3.2. Composition des matrices globales

Cette manière structurée de gérer et enregistrer l'information est indispensable et facilite son traitement par la suite.

L'étape suivante consiste à assembler les matrices globales de raideur et de masse. Pour cela, 4 grandeurs sont requises.

Parmi celles-ci, deux peuvent être facilement obtenues à partir de l'information du treillis stockée dans les vecteurs : la longueur des barres et leur angle d'inclinaison. En effet, connaissant les nœuds situés aux extrémités des barres et leurs coordonnées globales, nous déterminons les deux grandeurs suivantes.

- $L$  [m] : longueur d'une barre quelconque reliant les nœuds  $i$  et  $j$ .

$$L = \sqrt{(x_j - x_i)^2 + (y_j - y_i)^2}$$

- $\theta$  [radians] : angle d'inclinaison d'une barre quelconque avec l'axe horizontal. Soient  $i$  et  $j$  les deux nœuds reliés par cette barre.

$$\theta = \text{atan}\left(\frac{y_j - y_i}{x_j - x_i}\right)$$

Les deux autres grandeurs nécessaires à la résolution de l'équation de mouvement du treillis sont les propriétés du matériau. Elles sont encodées par l'utilisateur par le biais de l'interface graphique.

- $EA$  [N]: le produit du module de cisaillement et de la section des barres.
- $\rho A$  [kg/m]: le produit de la masse volumique et de la section des barres.

Une fois toutes ces quatre valeurs connues, le programme est en mesure de composer les matrices globales.

## Matrice de raideur globale

Dans un premier temps, les matrices globales des barres, et non celles du treillis tout entier, sont assemblées. Pour rappel, celles-ci se calculent grâce à cette expression.

$$[k^i] = \frac{EA}{L_i} \begin{bmatrix} \cos^2\theta_i & \cos\theta_i\sin\theta_i & -\cos^2\theta_i & -\cos\theta_i\sin\theta_i \\ \cos\theta_i\sin\theta_i & \sin^2\theta_i & -\cos\theta_i\sin\theta_i & -\sin^2\theta_i \\ -\cos^2\theta_i & -\cos\theta_i\sin\theta_i & \cos^2\theta_i & \cos\theta_i\sin\theta_i \\ -\cos\theta_i\sin\theta_i & -\sin^2\theta_i & \cos\theta_i\sin\theta_i & \sin^2\theta_i \end{bmatrix}$$

Nous obtenons alors, pour le treillis d'exemple, les matrices suivantes.

Barre 1

Barre 2

$$\rightarrow \theta_1 = -\pi/4 \text{ et } L_1 = \sqrt{2}L$$

$$\rightarrow \theta_2 = 0 \text{ et } L_2 = L$$

$$[k^1] = \frac{EA}{\sqrt{2}L} \begin{bmatrix} 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$[k^2] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Celles-ci sont étendues aux dimensions du système. Comme expliqué au chapitre 2 (p.30), les matrices  $[k_e^j]_{2N \times 2N}$  sont quasiment nulles; seules 16 entrées sont remplies par les 16 éléments contenus dans  $[k^j]_{4 \times 4}$ .

$$[k^1]_{4 \times 4} \xrightarrow{\text{extension}} [k_e^1]_{2N \times 2N} = [k_e^1]_{6 \times 6}$$

$$[k^2]_{4 \times 4} \xrightarrow{\text{extension}} [k_e^2]_{2N \times 2N} = [k_e^2]_{6 \times 6}$$

La matrice de raideur globale du treillis est obtenue en sommant les matrices globales étendues des deux barres.

$$\mathbb{K} = [k] = \left( \sum_{j=1}^B [k_e^j] \right)$$

$$= \frac{EA}{\sqrt{2}L} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & -1/2 & -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}}_{[k_e^1]} + \frac{EA}{L} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}}_{[k_e^2]}$$

## Matrice de masse globale

Le raisonnement suivi pour obtenir la matrice de masse globale est exactement le même. Les matrices de masse globales des barres s'obtiennent grâce à l'expression suivante.

$$[m^i] = \frac{\rho AL_i}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Nous obtenons alors pour le treillis d'exemple.

Barre 1

$$[m^1] = \frac{\rho A \sqrt{2} L}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Barre 2

$$[m^2] = \frac{\rho AL}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Les matrices sont étendues aux dimensions du système et, ensuite, sommées pour former la matrice de masse globale du treillis.

$$\begin{aligned} \mathbb{M} = [m] &= \left( \sum_{j=1}^B [m_e^j] \right) \\ &= \frac{\rho A \sqrt{2} L}{6} \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{[m_e^1]} + \frac{\rho AL}{6} \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}}_{[m_e^2]} \end{aligned}$$

### 3.3.3. Application de la méthode de Newmark

Une fois que les matrices globales du treillis sont définies, nous sommes en mesure d'appliquer la méthode de Newmark. Celle-ci nécessite de construire la matrice de raideur globale effective et le vecteur de force effective.

$$\begin{aligned} \circ \hat{\mathbb{K}} &= \left( \mathbb{M} \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} + \mathbb{K} \right) = [\hat{k}] \\ \circ \hat{f}_{t+\Delta t} &= f_{t+\Delta t} + \mathbb{M} \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} \left( u_t + \dot{u}_t \Delta t + \left( \frac{1}{2} - \alpha \right) \ddot{u}_t (\Delta t)^2 \right) \end{aligned}$$

- $\alpha = \frac{1}{4}$  et  $\delta = \frac{1}{4}$ , paramètres propres à la méthode de l'accélération moyenne
- $\Delta t$ , pas de temps entre deux itérations

Pour rappel, la matrice de raideur globale effective est propre au système, et donc, constante dans le temps. Sur base de ce constat, elle peut être assemblée à ce stade-ci de la démarche moyennant le choix d'une valeur de pas de temps  $\Delta t$ . La simplicité de l'opération et l'importante taille de l'expression ne justifient cependant pas de faire apparaître le détail ici.

Le vecteur de force effective, en revanche, ne peut être calculé ici car il dépend de l'état du système et varie donc à chaque itération.

Le système matriciel final à résoudre pour pouvoir déterminer la réponse dynamique de notre treillis ne comporte plus que la matrice de contraintes  $[c]_{R \times 2N}$  comme élément inconnu. Nous avons vu que cette matrice est nulle, à l'exception d'une entrée par ligne qui contient 1. Elle a pour but d'imposer R déplacements nuls correspondants aux degrés de liberté bloqués par les appuis. Ces contraintes sont ajoutées au système matriciel par les R équations suivantes.

$$[c][u] = 0$$

Par conséquent, si nous souhaitons imposer au treillis d'exemple les quatre contraintes entraînées par les deux rotules, la matrice  $[c]$  doit s'écrire comme ceci :

$$\begin{aligned} 1 &\rightarrow 1 \sim (1,0) \\ 2 &\rightarrow 1 \sim (0,1) \\ 3 &\rightarrow 2 \sim (1,0) \\ 4 &\rightarrow 2 \sim (0,1) \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad [c] = \begin{array}{c} \overbrace{\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}}^1 \quad \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}}^2 \quad \overbrace{\begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{matrix}}^3 \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

De cette manière, le problème comporte bien les quatre égalités suivantes.

$$\begin{cases} u_{1,x} = 0 \\ u_{1,y} = 0 \\ u_{2,x} = 0 \\ u_{2,y} = 0 \end{cases}$$

Nous avons finalement obtenu le système matriciel complet issu de la méthode de Newmark.

$$\begin{bmatrix} [\hat{k}] & [c]^T \\ [c] & [0] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} [u] \\ [R] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [f] \\ [0] \end{bmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{k}_{11} & \dots & \hat{k}_{61} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \hat{k}_{16} & \dots & \hat{k}_{66} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{1,x} \\ u_{1,y} \\ u_{2,x} \\ u_{2,y} \\ u_{3,x} \\ u_{3,y} \\ R_{1,x} \\ R_{1,y} \\ R_{2,x} \\ R_{2,y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{1,x} \\ f_{1,y} \\ f_{2,x} \\ f_{2,y} \\ f_{3,x} \\ f_{3,y} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

·  $\hat{k}_{ij}$ , élément de la matrice de raideur effective

$$\hat{k}_{ij} = \left( m_{ij} \frac{1}{\alpha(\Delta t)^2} + k_{ij} \right)$$

En fixant une valeur du pas de temps  $\Delta t$  utilisé, il est maintenant possible de calculer la réponse dynamique du treillis.

Pour une excitation  $f_t$  et une perturbation initiale  $u_0$  et  $\dot{u}_0$ , la résolution du système fournit les valeurs des déplacements  $u_{3,x}$  et  $u_{3,y}$  ainsi que les réactions d'appuis  $R_{1,x}, R_{1,y}, R_{2,x}$  et  $R_{2,y}$ .

Les résultats de cet exemple sont analysés dans le chapitre suivant.

# Chapitre 4 :

## Interprétation des résultats

---

Ce chapitre a pour but d'illustrer les concepts théoriques de fréquences propres, de modes propres et de réponse dynamique quelconque à l'aide de résultats fournis par le programme.

### 4.1. Vibration libre

#### 4.1.1. Réponse analytique

Dans cette première section, nous allons nous intéresser à la réponse libre du treillis étudié au chapitre précédent.

Pour rappel, l'expression analytique de la réponse libre est de la forme suivante.

$$\vec{X}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{\phi}_i (A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t))$$

- $\omega_i$ ,  $i^{\text{ème}}$  fréquence propre
- $\vec{\phi}_i$ ,  $i^{\text{ème}}$  vecteur propre associé à la  $i^{\text{ème}}$  fréquence propre
- $A, B_i$ , coefficients associés au  $i^{\text{ème}}$  mode propre

Appliqué à l'exemple, nous trouvons donc :

$$\begin{pmatrix} u_{3,x}(t) \\ u_{3,y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{pmatrix} (A_1 \cos(\omega_1 t) + B_1 \sin(\omega_1 t)) + \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} (A_2 \cos(\omega_2 t) + B_2 \sin(\omega_2 t))$$

Où les coefficients  $\{A, B_i\}$  sont fixés par les conditions initiales du problème.

$$\begin{cases} u_{3,x}(t=0) = u_{3,x,0} \\ u_{3,y}(t=0) = u_{3,y,0} \\ \dot{u}_{3,x}(t=0) = \dot{u}_{3,x,0} \\ \dot{u}_{3,y}(t=0) = \dot{u}_{3,y,0} \end{cases}$$

Dans un premier temps, nous allégeons l'expression en imposant le treillis immobile au temps  $t = 0$ .

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \dot{u}_{3,x,0} \\ \dot{u}_{3,y,0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{pmatrix} (-A_1 \omega_1 \sin(0) + B_1 \omega_1 \cos(0)) + \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} (-A_2 \omega_2 \sin(0) + B_2 \omega_2 \cos(0)) \\ &\rightarrow B_1 = B_2 = 0 \end{aligned}$$

Le déplacement se réécrit donc comme ceci.

$$\begin{pmatrix} u_{3,x}(t) \\ u_{3,y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{pmatrix} (A_1 \cos(\omega_1 t)) + \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} (A_2 \cos(\omega_2 t))$$

A l'aide d'une fonction, le logiciel est en mesure de calculer les fréquences propres ainsi que les vecteurs propres associés.<sup>2</sup>

Considérons le treillis d'exemple composé de barres en acier de section carrée de 1 [cm] de côté. Les paramètres à rentrer sont ceux-ci.

- $EA = 2,1.10^7$  [N]
- $\rho A = 0,785$  [kg/m]

Si nous posons également la longueur  $L = 1$  [m], nous obtenons les fréquences propres et les vecteurs propres suivants.

$$\begin{cases} \omega_1 = 2831 \text{ [rad/s]} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3178 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \omega_2 = 6980 \text{ [rad/s]} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,3178 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Le déplacement s'écrit finalement comme ceci.

$$\begin{pmatrix} u_{3,x}(t) \\ u_{3,y}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,3178 \\ 1 \end{pmatrix} (A_1 \cos(2831 * t))}_{\text{mode 1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ -0,3178 \end{pmatrix} (A_2 \cos(6980 * t))}_{\text{mode 2}}$$

Cette expression met en évidence que le mouvement d'un point est composé d'une somme d'harmoniques correspondant au nombre de degrés de liberté du système. Chacune de ces harmoniques oscille à une fréquence propre et à une certaine amplitude fixée par le vecteur propre. Elles sont définies comme les modes propres du système,

---

<sup>2</sup> Fonction *dggev* importée de la bibliothèque mathématique Open Source *LAPACK*

sont intrinsèques à celui-ci et indépendantes d'une quelconque excitation extérieure.

Cependant, selon la perturbation initiale, certains modes sont plus excités que d'autres. Nous pouvons facilement observer cette corrélation en constatant que les coefficients  $A_1$  et  $A_2$ , présents dans l'expression du déplacement, sont fixés par les valeurs de la perturbation initiale  $u_{3,x,0}$  et  $u_{3,y,0}$ .

En effet, au temps  $t = 0$ , les cosinus s'annulent et nous obtenons le système suivant.

$$\begin{pmatrix} u_{3,x,0} \\ u_{3,y,0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{pmatrix} A_1 + \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} A_2 = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix}$$

Ou encore :

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \\ \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_{3,x,0} \\ u_{3,y,0} \end{pmatrix} = \frac{1}{dét} \begin{pmatrix} \phi_{22} & -\phi_{21} \\ -\phi_{12} & \phi_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{3,x,0} \\ u_{3,y,0} \end{pmatrix}$$

Avec :  $dét = \phi_{22}\phi_{11} - \phi_{21}\phi_{12}$

L'expression de ce système nous confirme bien le constat fait précédemment : la réponse dynamique libre d'un treillis est la somme des réponses de ses modes propres dont les intensités sont fixées par les vecteurs propres associés ainsi que par leur perturbation initiale.

Nous avons posé précédemment que le treillis était immobile au temps  $t = 0$  en vue d'alléger les calculs qui ont suivis. Sans cette hypothèse, et en utilisant la même logique de développement, le système aurait été le suivant.

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ B_1\omega_1 \\ A_2 \\ B_2\omega_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} & 0 & \phi_{12} & 0 \\ 0 & \phi_{11} & 0 & \phi_{12} \\ \phi_{21} & 0 & \phi_{22} & 0 \\ 0 & \phi_{21} & 0 & \phi_{22} \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} u_{3,x,0} \\ \dot{u}_{3,x,0} \\ u_{3,y,0} \\ \dot{u}_{3,y,0} \end{pmatrix}$$

Cependant, l'hypothèse du treillis immobile au temps  $t = 0$  est maintenue pour l'ensemble des résultats analysés dans la suite de ce travail. En effet, dans un souci d'épuration du logiciel, l'utilisateur a la possibilité de faire varier le déplacement initial du treillis mais sa vitesse initiale est fixée à 0.

### 4.1.2. Analyse de résultats

Reprenons le système qui définit les coefficients  $A_1$  et  $A_2$  des deux modes propres de du treillis.

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} \phi_{22} & -\phi_{21} \\ -\phi_{12} & \phi_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{3,x,0} \\ u_{3,y,0} \end{pmatrix}$$

En observant celui-ci, nous pouvons déduire une situation de perturbation initiale particulière.

En effet, si les déplacements respectent entre eux les mêmes ordres de grandeur que les éléments contenus au sein d'un vecteur propre, seul le mode propre associé à ce vecteur est excité. Cela revient à dire que, si le vecteur de déplacement initial est égal, à un multiple près, à un vecteur propre  $\phi_i$ , le coefficient  $A_j$  relatif à l'autre mode propre s'annule.

Analytiquement,

Soit  $\alpha$  un multiple quelconque,

○ Si  $\begin{pmatrix} u_{3,x,0} \\ u_{3,y,0} \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{\det} \begin{pmatrix} \phi_{22} & -\phi_{21} \\ -\phi_{12} & \phi_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{\det} \begin{pmatrix} \phi_{22}\phi_{11} - \phi_{21}\phi_{12} \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

→ Seul le 1<sup>er</sup> mode propre est excité.

○ Si  $\begin{pmatrix} u_{3,x,0} \\ u_{3,y,0} \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{pmatrix}$ ,

$$\begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{\det} \begin{pmatrix} \phi_{22} & -\phi_{21} \\ -\phi_{12} & \phi_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} = \frac{\alpha}{\det} \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_{22}\phi_{11} - \phi_{21}\phi_{12} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ Seul le 2<sup>ème</sup> mode propre est excité.

Illustrons ces deux cas à l'aide du logiciel. Soit  $\alpha = 0,001$ .

#### 1<sup>er</sup> mode propre

$$\begin{pmatrix} u_{3,x,0} \\ u_{3,y,0} \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \end{pmatrix} = 0,001 \begin{pmatrix} 0,3178 \\ 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,001 \\ 0 \end{pmatrix}$$

La solution analytique nous donne le déplacement suivant.

$$\begin{pmatrix} u_{3,x}(t) \\ u_{3,y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3178 \\ 1 \end{pmatrix} (0,001 \cos(2831 * t))$$

En posant un pas de temps  $\Delta t = 0,00001$ , les déplacements obtenus par le logiciel à l'aide de la méthode de Newmark figurent sur le graphe ci-dessous.

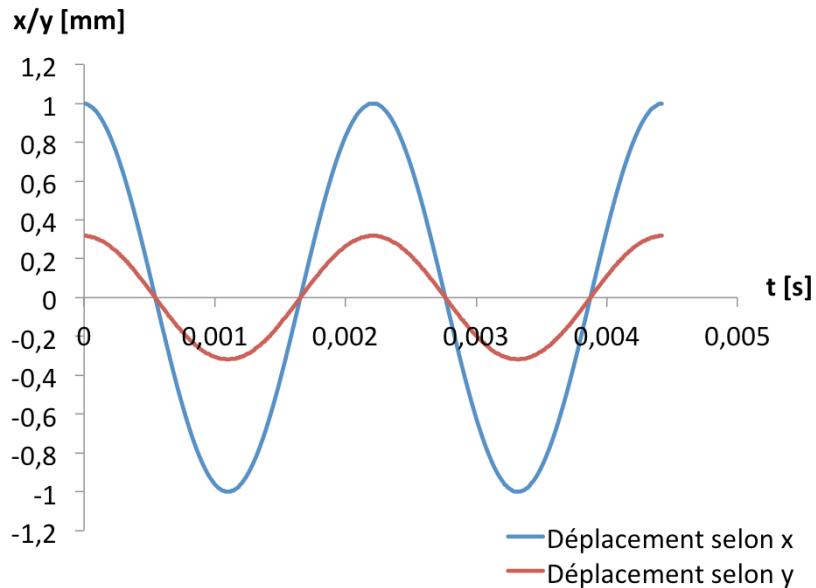


Figure 14 : Déplacement du nœud 3 du treillis pour le mode propre 1 en réponse libre (valeurs extraites du logiciel)

Nous pouvons observer que les résultats fournis sont tout à fait cohérents avec l'expression analytique obtenue. Les amplitudes correspondent à celles calculées et la période semble être proche de celle d'une fréquence de 2831 [rad/s], soit 0,0022 [s].

## 2<sup>ème</sup> mode propre

$$\begin{pmatrix} u_{3,x,0} \\ u_{3,y,0} \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} = 0,001 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -0,3178 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \alpha \end{pmatrix}$$

La solution analytique nous donne le déplacement suivant.

$$\begin{pmatrix} u_{3,x}(t) \\ u_{3,y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,3178 \end{pmatrix} (0,001 \cos(6980 * t))$$

Les déplacements obtenus pour le 2<sup>ème</sup> mode propre figurent sur le graphe suivant.

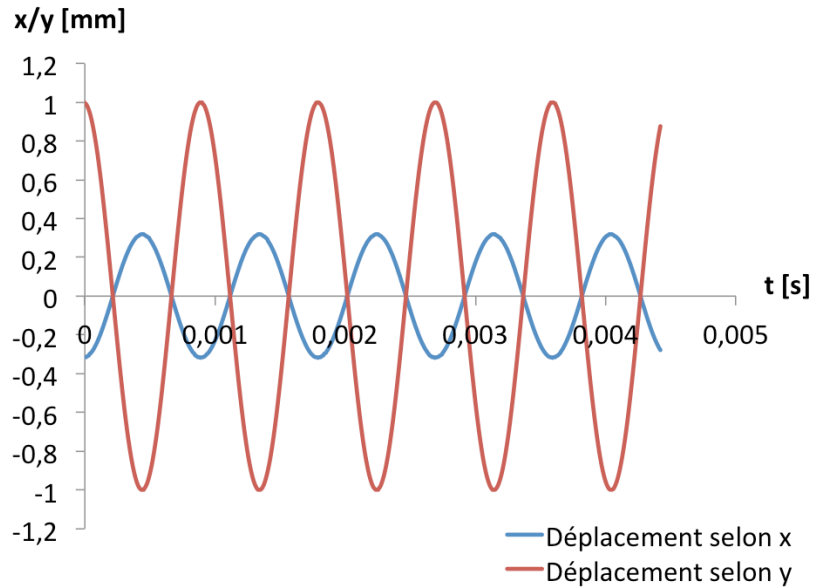


Figure 15 : Déplacement du nœud 3 du treillis pour le mode propre 2 en réponse libre (valeurs extraites du logiciel)

De même que pour le 1<sup>er</sup> mode propre, les résultats semblent tout à fait cohérents avec des amplitudes correctes et une période proche de 0,0009 [s] correspondant bien à une fréquence de 6980 [Hz].

Maintenant que les modes propres ont été clairement définis, nous pouvons nous intéresser à une réponse dynamique quelconque. Celle-ci est composée, comme nous l'avons vu, d'une combinaison linéaire des deux modes propres.

Imposons deux déplacements initiaux quelconque de même amplitude.

### Réponse dynamique quelconque

$$\begin{pmatrix} u_{3,x,0} \\ u_{3,y,0} \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,0005 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} &= \frac{1}{\det} \begin{pmatrix} \phi_{22} & -\phi_{21} \\ -\phi_{12} & \phi_{11} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{3,x,0} \\ u_{3,y,0} \end{pmatrix} \\ &= \frac{0,0005}{-1,101} \begin{pmatrix} -0,3178 & -1 \\ -1 & 0,3178 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,0006 \\ 0,00031 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Comme nous le supposons, les 2 modes propres sont excités.

Le déplacement s'exprime comme ceci :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{3,x}(t) \\ u_{3,y}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,3178 \\ 1 \end{pmatrix} (0,0006 \cdot \cos(2831 * t)) \\ &\quad + \begin{pmatrix} 1 \\ -0,3178 \end{pmatrix} (0,00031 \cdot \cos(6980 * t)) \\ &= \begin{pmatrix} 0,00019 \\ 0,0006 \end{pmatrix} \cos(2831 * t) + \begin{pmatrix} 0,00031 \\ -0,0001 \end{pmatrix} \cos(6980 * t) \end{aligned}$$

Le logiciel fournit les graphes des déplacements selon x et y.

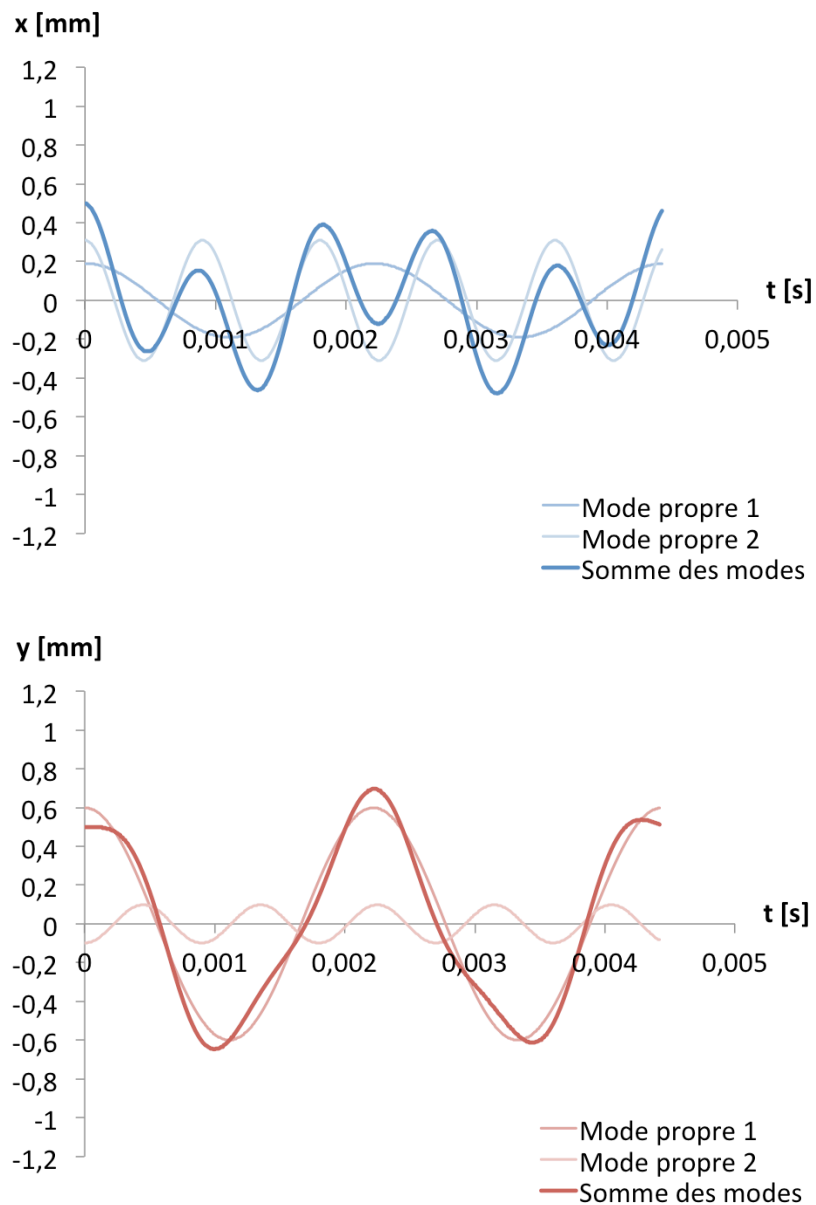


Figure 16 : Déplacement horizontal (au dessus) et vertical (en dessous) du nœud 3 du treillis en réponse libre quelconque (valeurs extraites du logiciel)

De même que pour l'analyse des modes propres, les résultats obtenus par le logiciel pour une réponse dynamique quelconque sont en cohérence avec la solution analytique.

Il est possible de visualiser la réponse dynamique quelconque d'une autre manière.

Au lieu de représenter les déplacements en fonction du temps sur deux graphes distincts, nous pouvons déduire une courbe unique des positions  $(x, y)$  du nœud 3 en chaque temps  $t$ . Nous remarquons alors que, lorsqu'un seul mode propre est excité, le nœud 3 oscille le long d'une droite. Celle-ci passe par l'origine et ses extrémités sont fixées par les points  $(u_{3,x,0}, u_{3,y,0})$  et  $(-u_{3,x,0}, -u_{3,y,0})$ .

Nous obtenons pour les deux modes propres les trajectoires suivantes.

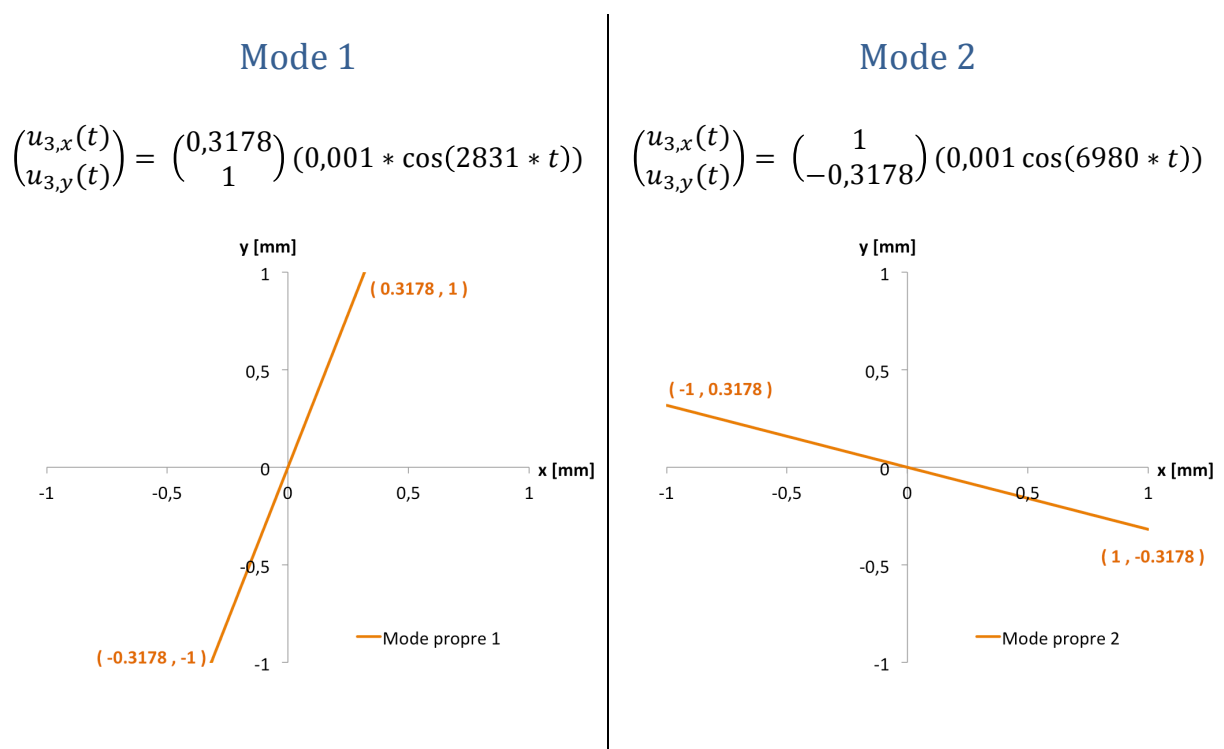


Figure 17: Trajectoire du nœud 3 du treillis pour le mode propre 1 (à gauche) et pour le mode propre 2 (à droite) en réponse libre (valeurs extraites du logiciel)

Ces deux droites ont un sens physique concret. En effet, si nous nous intéressons maintenant à une réponse dynamique quelconque, nous constatons que la trajectoire du nœud 3 est contenue dans un rectangle dont les médianes sont les droites décrites par les oscillations des deux modes propres. Ceci illustre bien que la réponse dynamique du treillis résulte d'une combinaison de ses deux modes propres.

## Réponse dynamique quelconque

$$\begin{pmatrix} u_{3,x}(t) \\ u_{3,y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,00019 \\ 0,0006 \end{pmatrix} \cos(2831 * t) + \begin{pmatrix} 0,00031 \\ -0,0001 \end{pmatrix} \cos(6980 * t)$$

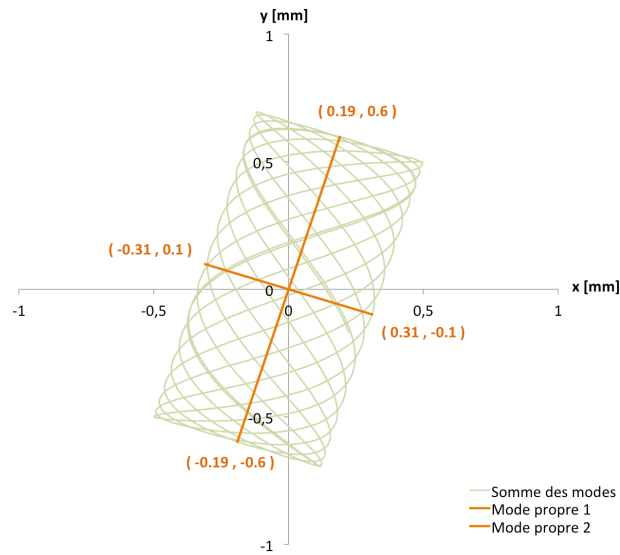


Figure 18 : Trajectoire du nœud 3 du treillis en réponse libre quelconque (valeurs extraites du logiciel)

## 4.2. Vibration forcée

### 4.2.1. Réponse analytique

Pour rappel, la réponse dynamique d'une structure soumise à une force est la résultante de sa réponse libre et de sa réponse forcée. Intéressons-nous maintenant à cette seconde composante, aussi appelée régime permanent.

Soit une force harmonique exercée sur le treillis.

$$\vec{f}(t) = \vec{f}_0 \sin(\omega t)$$

- $\vec{f}_0$  [N], intensité des forces exercées sur la structure
- $\omega$  [rad/s], fréquence angulaire des forces harmoniques

Le déplacement s'exprime comme suit :

$$\vec{X}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{\phi}_i \left( \underbrace{A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t)}_{\text{réponse libre}} + \underbrace{\frac{\vec{\phi}_i^T \vec{f}_0}{\vec{\phi}_i^T K \vec{\phi}_i} \cdot \frac{1}{1 - (\omega/\omega_i)^2} \sin(\omega t)}_{\text{réponse forcée}} \right)$$

En l'absence de toute perturbation initiale, soit  $u_0 = \dot{u}_0 = 0$ , il peut se réécrire comme ceci.

$$\vec{X}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{\phi}_i \left( \underbrace{\frac{\vec{\phi}_i^T \vec{f}_0}{\vec{\phi}_i^T K \vec{\phi}_i}}_{u_{stat,i}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - (\omega/\omega_i)^2}}_{R_{d,i}} \left( \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_i} \sin(\omega_i t) \right) \right)$$

- $u_{stat,i}$  [m], réponse statique du  $i^{\text{ème}}$  mode propre
- $R_{d,i}$  [-], facteur amplificateur du  $i^{\text{ème}}$  mode propre

### 4.2.2. Analyse de résultats

Reprenons le treillis d'exemple précédemment analysé et appliquons-y une force quelconque.

Soit la force harmonique horizontale suivante.

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_{3,x} \\ f_{3,y} \end{pmatrix} \sin(\omega t) = \begin{pmatrix} 10000 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(4000t)$$

Nous pouvons calculer les réponses statiques des deux modes propres.

$$u_{stat,i} = \frac{\vec{\phi}_i^T \vec{f}_0}{\vec{\phi}_i^T K \vec{\phi}_i}$$

La matrice  $K$  figurant dans l'expression ne correspond pas à la matrice de raideur globale du treillis  $\mathbb{K}_{6 \times 6}$  mais aux quatre entrées de celle-ci relatives au nœud 3.

$$K = \begin{bmatrix} k_{55} & k_{56} \\ k_{65} & k_{66} \end{bmatrix}$$

Nous trouvons alors les valeurs des réponses statiques suivantes.

$$u_{stat,1} = \frac{(\phi_{11} \quad \phi_{12}) \begin{pmatrix} f_{3,x} \\ f_{3,y} \end{pmatrix}}{(\phi_{11} \quad \phi_{12}) K \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \end{pmatrix}} = -0,00057 \text{ [m]}$$

$$u_{stat,2} = \frac{(\phi_{21} \quad \phi_{22}) \begin{pmatrix} f_{3,x} \\ f_{3,y} \end{pmatrix}}{(\phi_{21} \quad \phi_{22}) K \begin{pmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{pmatrix}} = 0,00029 \text{ [m]}$$

Finalement, nous obtenons cette équation du déplacement.

$$\begin{pmatrix} u_{3,x}(t) \\ u_{3,y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{pmatrix} \left( \frac{-0,00057}{1 - (\omega/\omega_1)^2} \left( \sin(\omega t) - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) \sin(\omega_1 t) \right) \right) + \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} \left( \frac{0,00029}{1 - (\omega/\omega_2)^2} \left( \sin(\omega t) - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right) \sin(\omega_2 t) \right) \right)$$

Nous pouvons représenter les courbes de ces deux déplacements, et ainsi, les comparer aux résultats du logiciel.

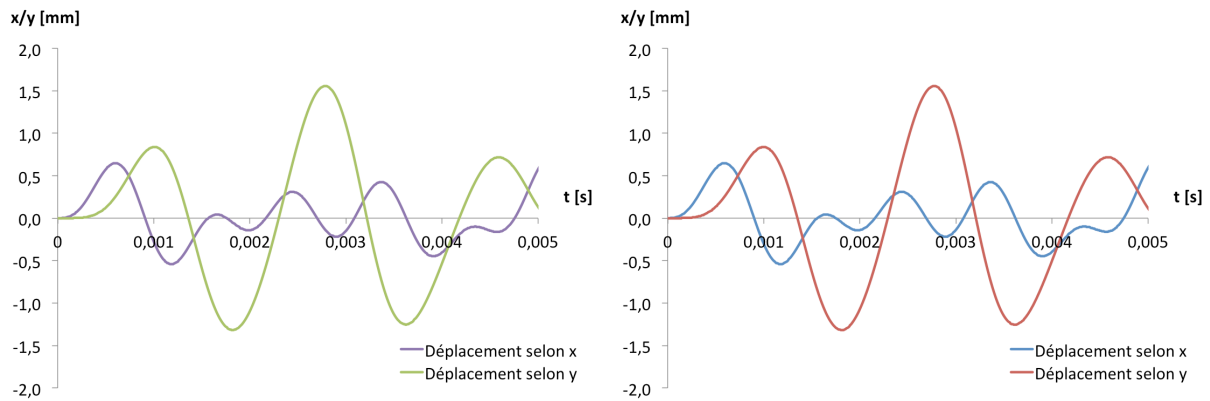


Figure 19 : Déplacements du nœud 3 du treillis en réponse forcée quelconque (valeurs analytiques (à gauche), valeurs extraites du logiciel (à droite))

Les courbes sont similaires et tendent à confirmer la précision des résultats obtenus par le logiciel.

#### 4.2.3. Phénomène de résonance

Il est intéressant de remarquer l'importance des rapports entre la fréquence d'excitation et les fréquences propres  $\omega/\omega_i$ .

En effet, chacun de ces rapports intervient deux fois dans l'expression du déplacement: dans l'expression de  $R_{d,i}$  ainsi qu'en coefficient multiplicateur du régime permanent.

Pour comprendre l'impact qu'il peut avoir, nous allons représenter graphiquement l'amplitude du déplacement maximal du nœud 3 du treillis en fonction des fréquences d'excitation  $\omega$ .

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} u_{3,x}(t) \\ u_{3,y}(t) \end{pmatrix}_{max} &= \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{pmatrix} \left( \frac{-0,00057}{1 - (\omega/\omega_1)^2} \left( \underset{=0}{\sin(\omega t)} - \underset{=1}{\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) \sin(\omega_1 t)} \right) \right) \\
 &+ \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} \left( \frac{0,00029}{1 - (\omega/\omega_2)^2} \left( \underset{=0}{\sin(\omega t)} - \underset{=1}{\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right) \sin(\omega_2 t)} \right) \right) \\
 &= \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{pmatrix} \left( \frac{0,00057}{1 - (\omega/\omega_1)^2} \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) \right) + \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} \left( \frac{-0,00029}{1 - (\omega/\omega_2)^2} \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right) \right)
 \end{aligned}$$

Le graphique du déplacement maximal figure ci-dessous.

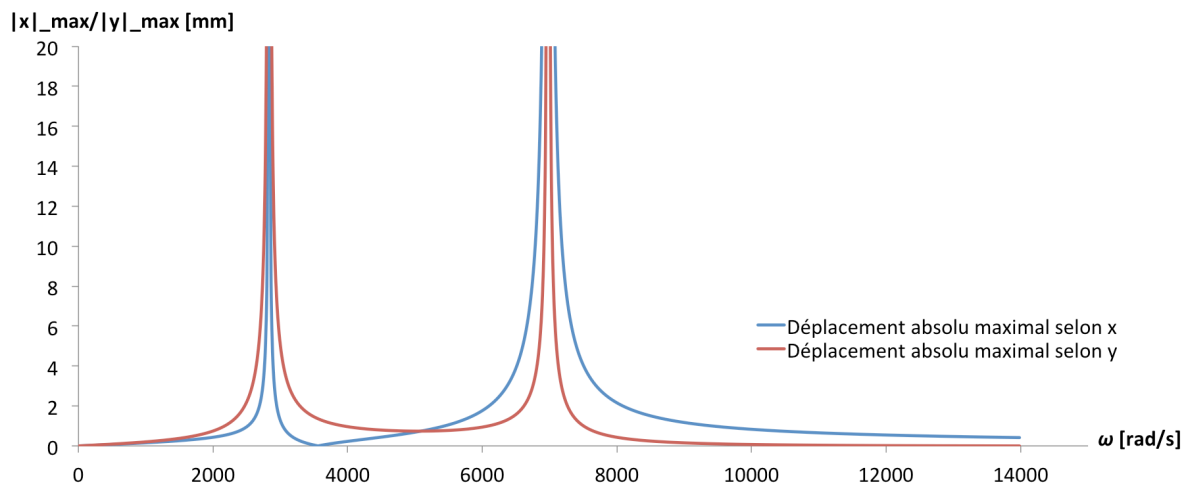


Figure 20 : Déplacement maximal du nœud 3 du treillis pour différentes fréquences d'excitation

Comme expliqué au chapitre 1, nous pouvons observer des gammes de fréquences d'excitations entraînant des déplacements très importants, et souvent, compromettants pour une structure. Il s'agit du phénomène de résonance dont les fréquences critiques sont appelées fréquences de résonance.

En effet, pour un système à N ddl, il existe généralement N fréquences naturelles distinctes aux abords desquelles, les déformations de la structure deviennent très importantes. Le graphe ci-dessus nous confirme bien la présence de deux zones critiques correspondant aux deux fréquences propres du système, 2831 [rad/s] et 6980 [rad/s].

Il est important de noter que le phénomène de résonance ne dépend en aucun cas du point d'application ou de la direction de la force harmonique à laquelle la structure est soumise. Si la fréquence d'excitation approche suffisamment une fréquence propre de la structure, les déformations vont systématiquement être amplifiées à chaque oscillation.

Nous avons démontré précédemment que la réponse dynamique quelconque d'une structure était une combinaison linéaire des modes propres de celle-ci. Dans le cas d'une réponse forcée, le coefficient associé à l'excitation d'un mode est le facteur amplificateur  $R_{d,i}$ .

Nous pouvons observer sur le graphe suivant l'amplitude de réponse de chacun des deux modes propres en fonction des valeurs de  $\omega$ .

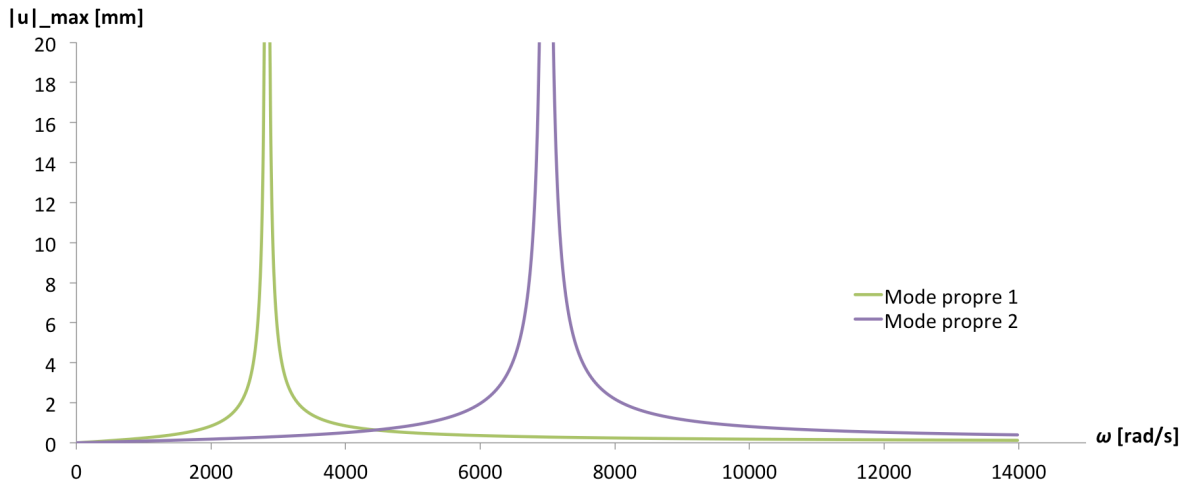


Figure 21 : Amplitude de réponse maximale des modes propres au nœud 3 du treillis pour différentes fréquences d'excitation

Le graphe est assez similaire au précédent mais il met en évidence le poids de chaque mode dans la réponse globale du système en fonction de la fréquence d'excitation. Nous remarquons d'ailleurs que, lors du phénomène de résonance, la trajectoire suivie par un point de la structure est la droite définie par le mode propre dont la fréquence naturelle est approchée par la fréquence d'excitation. Autrement dit, chaque nœud du treillis va opérer des oscillations de très grandes amplitudes le long de la droite qui correspond à ce mode propre.

Observons le déplacement induit par une force harmonique dont la fréquence est proche d'une fréquence propre.  
Soit l'excitation définie comme ceci.

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_{3,x} \\ f_{3,y} \end{pmatrix} \sin(\omega t) = \begin{pmatrix} 10000 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(3000t)$$

L'expression du déplacement se présente toujours comme ceci et  $\omega = 3000$  [rad/s].

$$\begin{pmatrix} u_{3,x}(t) \\ u_{3,y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{pmatrix} \left( \frac{-0,00057}{1 - (\omega/\omega_1)^2} \left( \sin(\omega t) - \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right) \sin(\omega_1 t) \right) \right) + \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} \left( \frac{0,00029}{1 - (\omega/\omega_2)^2} \left( \sin(\omega t) - \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right) \sin(\omega_2 t) \right) \right)$$

Le logiciel nous fourni les valeurs des deux déplacements du nœud 3 selon  $x$  et  $y$ .

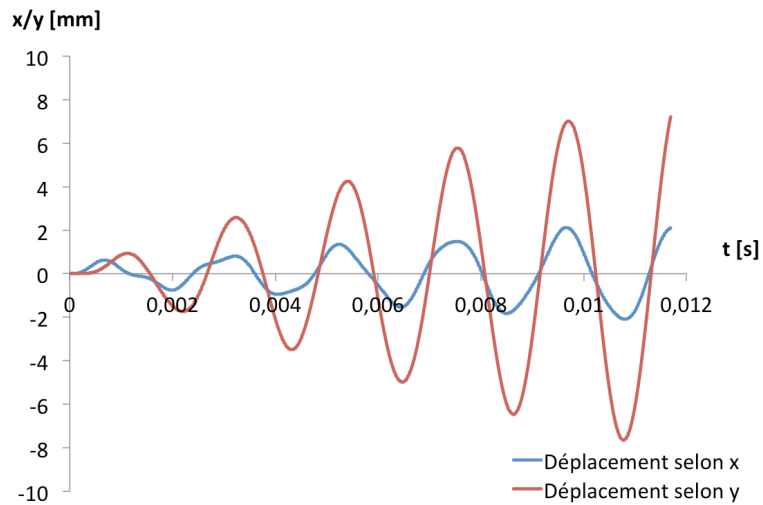


Figure 22 : Déplacement du nœud 3 lors de l'entrée en résonance du treillis suite à une fréquence d'excitation de 3000 [Hz] proche de la première fréquence naturelle 2831 [Hz]

Le graphe illustre bien l'amplification du déplacement à chaque oscillation. Cet effet progressif est dû au facteur amplificateur du mode 1 dont la fréquence naturelle est approchée par la fréquence d'excitation.

$$\begin{cases} \omega_1 = 2831 \text{ [rad/s]} \\ \omega = 3000 \text{ [rad/s]} \end{cases} \rightarrow R_{d,1} = \frac{1}{|1 - (\omega/\omega_1)^2|} = 8,13 [-]$$

$$\begin{cases} \omega_2 = 6980 \text{ [rad/s]} \\ \omega = 3000 \text{ [rad/s]} \end{cases} \rightarrow R_{d,2} = \frac{1}{|1 - (\omega/\omega_2)^2|} = 1,23 [-]$$

# Chapitre 5 :

## Aspect didactique du logiciel

---

Comme expliqué dans l'introduction de ce travail, l'objectif premier du logiciel créé est d'introduire son utilisateur à la dynamique des structures de manière didactique.

Le chapitre suivant a pour but de montrer le caractère interactif du logiciel et les fonctions que celui-ci offre à son utilisateur.

Un document à consulter en parallèle au logiciel a été rédigé et est disponible en annexe. Celui-ci doit servir, d'une part, de mode d'emploi, et d'autre part, de lien entre la réponse dynamique fournie par le logiciel et les concepts théoriques qui y sont associés.

## 5.1. Présentation générale du logiciel

Lorsque le logiciel est lancé, la fenêtre suivante est ouverte.

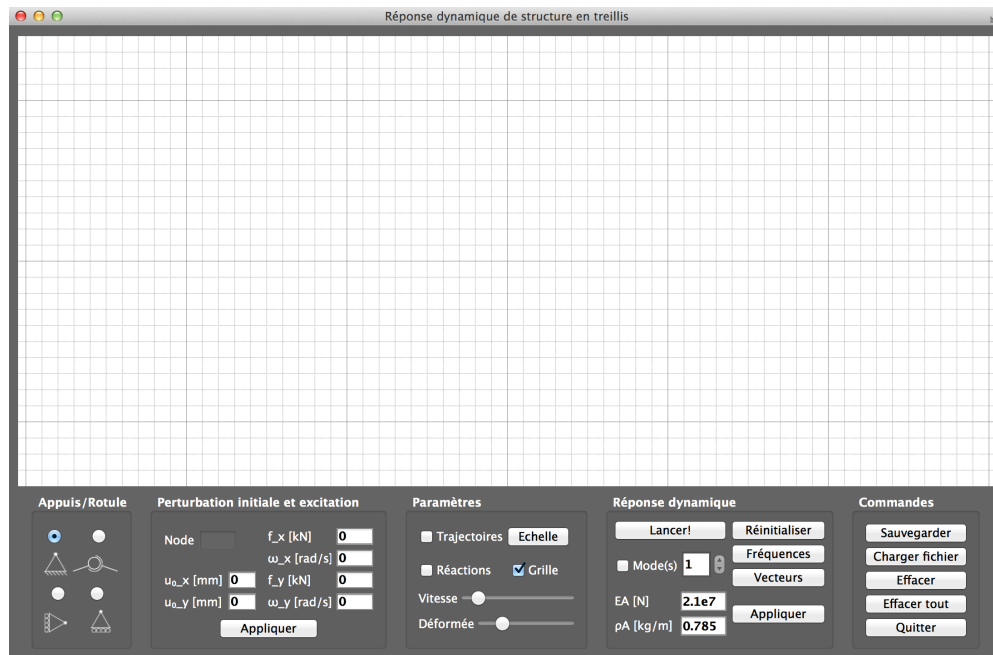


Figure 23 : Fenêtre d'ouverture du logiciel comprenant une zone de construction de la structure ainsi qu'un panel d'outils.

Nous remarquons une zone destinée à la construction de la structure en-dessous de laquelle figure l'ensemble des outils proposés à l'utilisateur.

Ceux-ci sont répartis en cinq cadres différents.

- **"Appuis/rotule"** : destiné à la construction du treillis.
- **"Perturbation initiale et excitation"** : définit les charges ou déformations imposées à la structure.
- **"Paramètres"** : modifie les paramètres d'affichage.
- **"Réponse dynamique"** : permet de lancer l'animation de la réponse dynamique, d'extraire les valeurs des modes propres et de modifier les propriétés du matériau.
- **"Commandes"** : offre diverses commandes destinées à faciliter l'utilisation du logiciel.

## 5.2. Construction de la structure

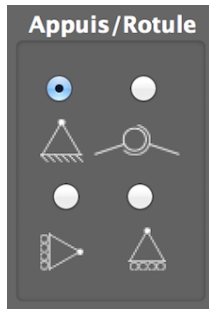


Figure 24 : Types de nœuds disponibles afin de construire le treillis

Dans un second temps, par le biais d'un clic droit maintenu enfoncé tout en déplaçant la souris, l'utilisateur peut lier les nœuds par des barres. Il a ensuite la possibilité de connaître la longueur de celles-ci en cliquant dessus.

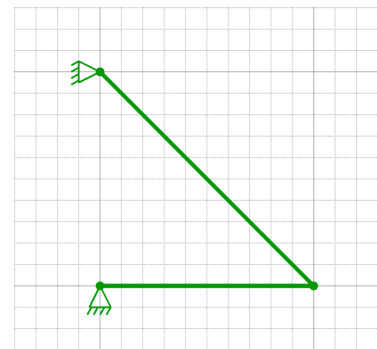


Figure 25 : Représentation du treillis dans le logiciel

## 5.3. Modélisation des efforts et déformations

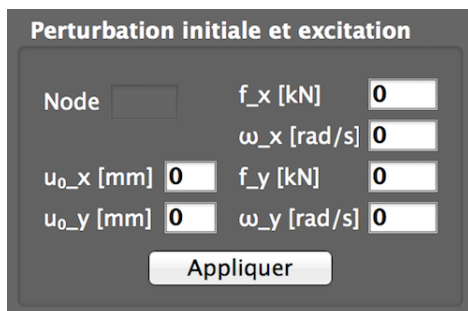


Figure 26 : Interface offrant la possibilité de définir la perturbation initiale et l'excitation du treillis

Comme nous avons eu l'occasion de le voir précédemment, une structure peut être soumise à une perturbation initiale caractérisée par sa vitesse et sa déformation au temps  $t = 0$ . En vue d'éviter une surcharge de la zone d'outils et de maintenir ainsi le caractère épuré du logiciel, le choix a été fait de limiter l'utilisateur à fixer la déformation initiale uniquement. La vitesse initiale est, quant à elle, imposée nulle. La perturbation est donc définie dans le logiciel en imposant au nœud un déplacement initial en  $x$  et en  $y$ .

L'exemple d'une réponse dynamique quelconque en vibration libre présenté dans le chapitre précédent figure ci-contre.

La perturbation initiale est définie comme ceci.

$$\begin{pmatrix} u_{3,x,0} \\ u_{3,y,0} \end{pmatrix} = \alpha \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0,0005 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ [m]}$$

La structure à l'équilibre reste affichée en vert tandis que la structure déformée est en bleu.

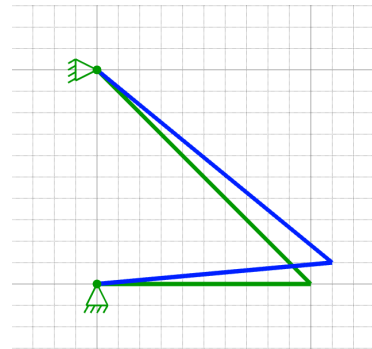


Figure 27 : Représentation d'une perturbation initiale par déplacement imposé au nœud 3

Si l'utilisateur souhaite ensuite étudier la réponse dynamique en vibration forcée d'un treillis, il a également la possibilité d'imposer une force harmonique en  $x$  et/ou en  $y$ . Il est alors invité à définir les intensités des forces  $f_x$  et  $f_y$  ainsi que leurs fréquences angulaires  $\omega_x$  et  $\omega_y$ .

L'exemple d'une réponse dynamique quelconque en vibration forcée présenté dans le chapitre précédent figure ci-contre.

L'excitation harmonique est définie comme ceci.

$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_{3,x} \sin(\omega_x t) \\ f_{3,y} \sin(\omega_y t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10000 \cdot \sin(4000t) \\ 0 \end{pmatrix} \text{ [N]}$$

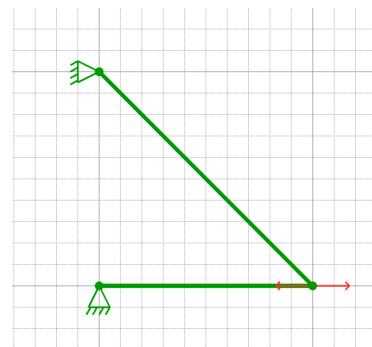


Figure 28 : Représentation d'une force harmonique horizontale appliquée au nœud 3

Elle est initialement symbolisée par une double flèche rouge. Lors de l'animation, elle se réduit à une unique flèche dont la longueur est proportionnelle à l'intensité de la force à l'instant  $t$ .

Le logiciel permet d'étudier le cas d'une perturbation initiale conjointe à une excitation harmonique.

## 5.4. Paramètres d'affichages

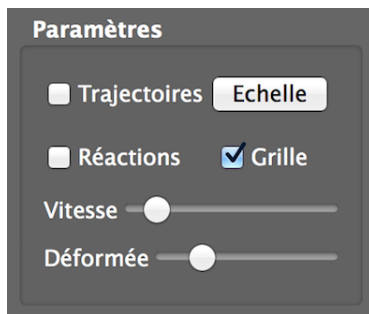


Figure 29 : Paramètres d'affichage de la fenêtre d'animation

L'utilisateur a la possibilité de modifier les paramètres d'affichage de l'animation.

Il peut en effet :

- afficher les réactions d'appuis
- afficher les trajectoires suivies des nœuds
- masquer la grille servant à construire le treillis
- consulter l'échelle des longueurs
- modifier la vitesse de l'animation
- modifier l'amplification de la structure déformée

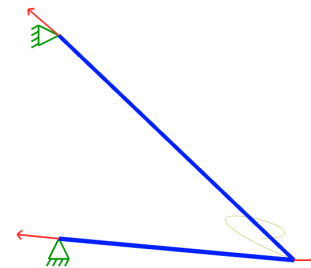


Figure 30 : Représentation d'une animation en cours

## 5.5. Animation de la réponse dynamique

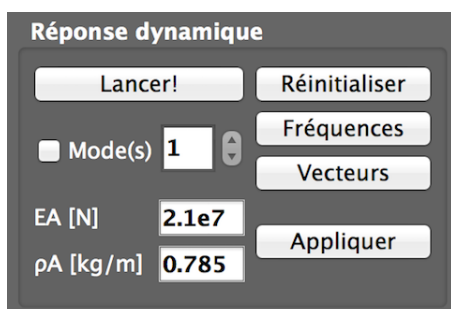


Figure 31 : Outils de gestion de l'animation et de l'analyse théorique de celle-ci

Les outils de cette section sont particulièrement intéressants. A l'aide du document annexe fourni à l'utilisateur, il est en mesure d'observer l'animation de la réponse dynamique et de la mettre en lien avec les concepts théoriques qui la définissent. S'il le souhaite, il peut obtenir, sous forme de pop-up, les fréquences et les vecteurs propres associés à la structure qu'il a modélisée.

Le treillis étudié comme exemple jusqu'ici entraîne l'ouverture des deux fenêtres ci-dessous en cliquant sur les boutons "Fréquences" et "Vecteurs".

$$\begin{cases} \omega_1 = 2831 \text{ [rad/s]} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3178 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \omega_2 = 6980 \text{ [rad/s]} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,3178 \end{pmatrix} \end{cases}$$

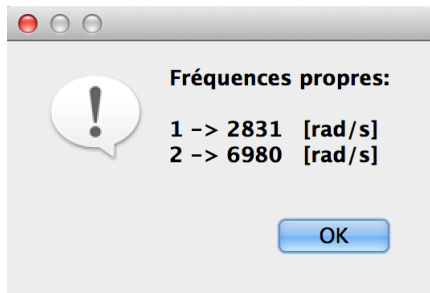


Figure 32 : Pop-up ouvert par le logiciel affichant les fréquences propres

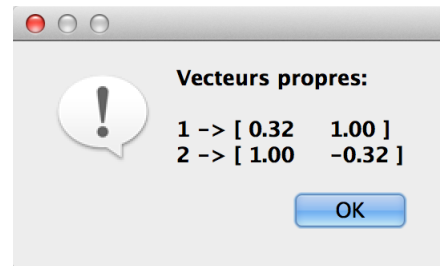


Figure 33 : Pop-up ouvert par le logiciel affichant les vecteurs propres

L'utilisateur peut ensuite visualiser l'animation de la réponse dynamique indépendante de chacun des modes propres ou de la réponse dynamique résultante.

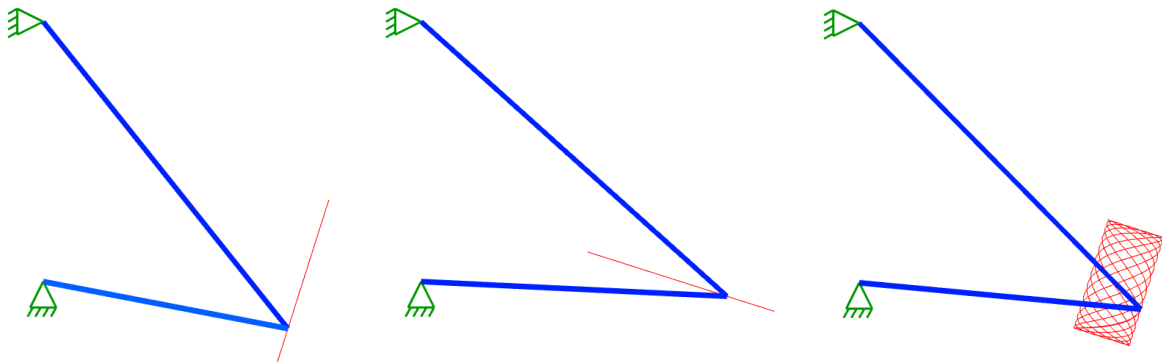


Figure 34 : Animations de la réponse dynamique du mode propre 1 (à gauche), du mode propre 2 (milieu) et d'une réponse dynamique quelconque (à droite)

Nous identifions facilement sur ces 3 animations les déplacements correspondants aux trois graphes obtenus au chapitre précédent (cfr p. 58-59).

A tout moment de l'animation, en cliquant sur une barre quelconque, l'utilisateur peut afficher l'effort normal maximal repris par cette barre depuis sa mise en mouvement.

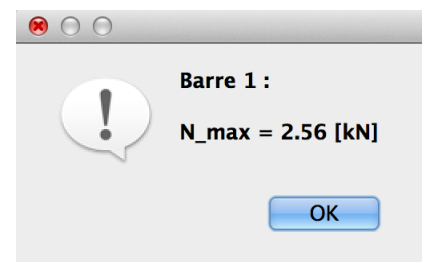


Figure 35 : Affichage de l'effort maximal d'une barre en cliquant dessus

Après chaque animation, via le bouton "Réinitialiser", il peut aussi ramener la structure à sa position d'équilibre afin de faire varier les paramètres et lancer une nouvelle animation.

Enfin, l'utilisateur a également l'opportunité de faire varier les propriétés du matériau et d'observer de ce fait l'influence du choix de celui-ci sur la réponse dynamique de la structure. Les propriétés initialement fixées dans le logiciel sont celles de l'acier pour des sections de barres carrées d'1 [cm] de côté.

Faisons une parenthèse dans la présentation du logiciel afin d'illustrer une réflexion d'analyse type qu'un utilisateur doit être en mesure d'opérer à l'aide de celui-ci.

Nous avons vu dans le chapitre précédent, à travers le phénomène de résonance, toute l'importance de maîtriser les fréquences entrant en jeu dans la réponse dynamique d'une structure. Pour rappel, les fréquences d'excitation doivent, dans la mesure du possible, être suffisamment différentes des fréquences naturelles de la structure afin d'éviter une amplification progressive des déplacements.

Sur logiciel, les valeurs des fréquences d'excitation peuvent être librement choisies, et donc, éviter tout risque de résonance. En revanche, il arrive régulièrement que les structures réelles soient soumises à des sollicitations dont les fréquences d'excitations sont difficilement maîtrisables. Une solution est d'essayer d'influencer, dans la mesure du possible, les valeurs des fréquences naturelles de la structure lors de sa conception.

En effet, nous avons pu voir précédemment que les fréquences naturelles sont directement dépendantes de la masse et de la raideur de la structure. Mathématiquement, cette dépendance s'exprime comme ceci.

$$\omega_i \propto \sqrt{\frac{k}{m}} \propto \sqrt{\frac{EA}{\rho AL^2}} = \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

- $E$  [N/m<sup>2</sup>], module de Young du matériau
- $\rho$  [kg/m<sup>3</sup>], masse volumique du matériau
- $L$  [m], longueur des barres composant le treillis

Grâce à cette expression, nous constatons que le choix du matériau n'est pas le seul facteur influençant les fréquences naturelles. Elles sont également dépendantes de la longueur des barres composant le treillis, et plus globalement, de la géométrie de celui-ci.

Par contre, nous constatons que les sections des barres n'ont pas d'importance dans ce problème car elles font varier la raideur et la masse de la structure dans des

proportions similaires. L'effet induit par une variation de la raideur balance exactement l'effet induit par la variation correspondante de la masse, et inversement.

Afin d'analyser l'impact que peut avoir le choix d'un matériau ou d'une géométrie, nous allons utiliser un problème concret.

Admettons que nous devons franchir une portée de 16 mètres et que, pour y parvenir, nous optons pour la passerelle en treillis suivante. Elle est isostatique et repose sur un appui à rotule et un appui à rouleau horizontal.

- Membrures inférieures : 4\*4 [m]
- Membrures supérieures : 3\*4 [m]
- Membrures diagonales : 8\*4,47 [m]

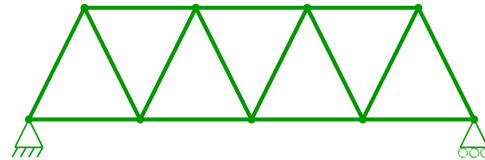


Figure 36 : Schéma de la structure choisie pour franchir une portée de 16 mètres

Une fois que la structure est représentée dans le logiciel, l'utilisateur doit entrer les propriétés du matériau et calculer les fréquences naturelles qui en résultent. La structure choisie comporte 15 degrés de liberté et, par conséquent, 15 fréquences propres distinctes.

Pour une structure en acier, les résultats du logiciel fournissent un domaine de fréquences propres tel que :

$$\omega_i \in [ 188 ; 2642 ] \quad [rad/s] \quad \text{avec } i = 1, \dots, 15$$

En pratique, des fréquences d'excitations si élevées se rencontrent rarement dans la vie courante. Dans cette optique, les fréquences naturelles les plus susceptibles d'être critiques sont les plus basses. Pour la suite de l'analyse, nous nous limitons donc à calculer la première fréquence propre de la structure  $\omega_1$ , dite fréquence fondamentale.

En utilisant 3 matériaux différents, nous calculons la fréquence fondamentale de la structure qui correspond à chacun d'eux.

Propriétés	Acier	Chêne	Bambou
E [GPa]	210	12	20
$\rho$ [kg/m <sup>3</sup> ]	7850	700	400
$\sqrt{E/\rho}$	5,17.10 <sup>3</sup>	4,14.10 <sup>3</sup>	7,07.10 <sup>3</sup>
$\omega_1$ [rad/s]	188	150	257

Tableau 1 : Propriétés des matériaux utilisés et fréquence fondamentale de la structure qui y correspond

Ces résultats nous permettent de confirmer que la fréquence naturelle d'une structure est directement proportionnelle à la racine du rapport de sa raideur sur sa masse.

Le choix du bambou comme matériau analysé dans ce problème peut sembler curieux étant donné qu'il est très peu utilisé dans nos pays. Cependant, il illustre bien la différence du comportement dynamique de la structure en comparaison aux deux autres matériaux. En effet, il présente une grande raideur proportionnellement à sa masse volumique, ce qui est moins le cas du chêne ou de l'acier. Par conséquent, nous observons qu'en utilisant du bambou, nous parvenons à augmenter la fréquence fondamentale d'un facteur de  $\pm 1,4$  par rapport à l'acier.

Le chêne présente un module de Young plus faible et une masse volumique plus importante que le bambou. Ceci implique que son rapport de raideur/masse est plus proche de celui de l'acier que celui du bambou. Par conséquent, le chêne modifie la fréquence fondamentale dans des moindres proportions et, de plus, à l'inverse de l'objectif recherché puisque cette dernière est plus basse que pour l'acier.

Cette première analyse nous permet de conclure que le matériau idéal pour augmenter les fréquences naturelles d'une structure est celui qui présentera une raideur la plus élevée possible tout en conservant une masse volumique faible.

Intéressons nous maintenant à l'influence de la géométrie de la structure. Dans le tableau ci-dessous figurent 8 variantes de structures proposées, toutes les 8 de 16 [m] de portée.


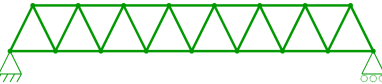
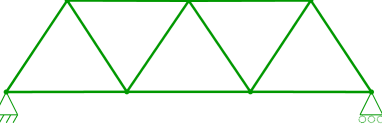

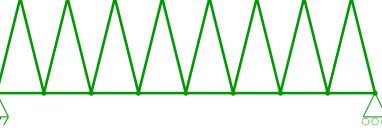
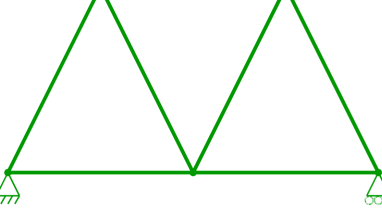
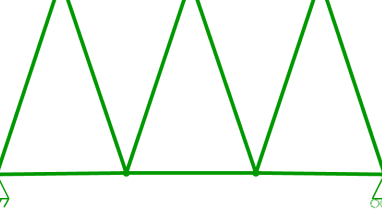
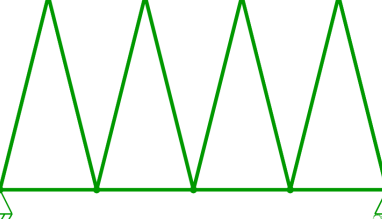
N°	Allure de la structure dans le logiciel	Hauteur [m]	Longueur moyenne de barre [m]	Longueur minimale de barre [m]	$\omega_1$ [rad/s]
1		2	3,4	2,8	137
2		2	2,1	2	<b>120</b>
3		4	5	4,8	204
4		4	4,3	4	188
5		4	3,1	2	141
6		8	8,5	8	<b>225</b>
7		8	7	5,3	184
8		8	6,3	4	175

Tableau 2 : 8 variantes de structures et leur fréquence fondamentale

Les variantes visent à analyser l'influence de 2 critères principaux sur la période fondamentale de la structure : d'une part, la hauteur et, d'autre part, le nombre de membrures diagonales.

La première observation est qu'une hauteur de structure plus importante permet d'obtenir une fréquence fondamentale plus élevée, et donc, plus favorable à la tenue de la structure. La seconde observation est que, pour une hauteur de structure constante, l'ajout de membrures diagonales, et longueur plus courtes donc, est défavorable.

Ces observations tendent à démentir que la fréquence fondamentale est inversement proportionnelle à la longueur des membrures du treillis. Elles montrent en effet une élévation de la fréquence fondamentale pour des longueurs de membrures plus importantes. Elles vont à l'encontre de l'expression mathématique suivante.

$$\omega_i \propto \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Pour tenter d'expliquer ceci, étendons notre analyse à toutes les fréquences naturelles dont les valeurs nous sont fournies par le logiciel.

Représentons le domaine des fréquences propres pour chaque structure sur le graphique logarithmique ci-dessous.

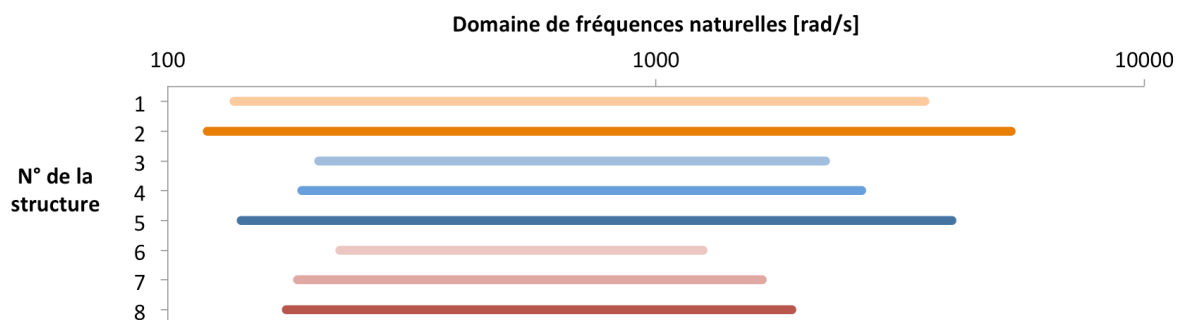


Figure 37 : Domaine des fréquences naturelles de chacune des 8 structures analysées

Ce graphique nous permet de tirer plusieurs conclusions.

Tout d'abord, l'hypothèse initiale, affirmant que les fréquences naturelles étaient inversement proportionnelles à la longueur des membrures, n'est que partiellement contredite par les résultats. Nous remarquons en effet que, pour les fréquences naturelles les plus élevées, augmenter la longueur moyenne des éléments a bien un effet réducteur sur celles-ci.

Cependant, nous n'avons toujours pas d'explication pour les fréquences naturelles plus faibles. Observons les structures n°1 et n°4 présentant le même nombre de membrures diagonales et des hauteurs différentes. Nous remarquons que la

fréquence fondamentale de la structure n°1 est plus petite que celle de la structure n°4 malgré une longueur d'élément moyenne plus petite.

Nous arrivons à la conclusion qu'un paramètre supplémentaire, non étudié jusqu'à maintenant, influence également les valeurs des fréquences naturelles.

En effet, lorsque nous avons affirmé initialement que les fréquences étaient inversement proportionnelles à la longueur des éléments, nous admettions implicitement que la géométrie globale de la structure était conservée. Tout en maintenant une portée de 16 [m], nous avons fait varier la longueur des membrures pour les différentes structures et, de ce fait, modifié leur géométrie générale. Les angles que forment les éléments entre eux ainsi que le nombre de degrés de liberté ne sont pas conservés de structure en structure.

Réécrivons notre hypothèse initiale comme ceci.

$$\omega_i = C_i \cdot \frac{1}{L} \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

- $C_i$  [-], constante pour une même géométrie de structure

En modifiant les angles et le nombre de degrés de liberté d'une structure, nous modifions également le nombre de fréquences propres et les constantes  $C_i$  de celles-ci. Nous pouvons donc affirmer que, toutes proportions gardées de la géométrie d'une structure, ses fréquences naturelles sont bien inversement proportionnelles à la longueur de ses éléments. Nous pourrions facilement observer que, pour deux structures de géométries similaires, celle, dont la longueur des éléments est doublée par rapport à l'autre, présente les mêmes fréquences propres à un facteur multiplicateur près égal à 2.

Nous constatons également que, pour des membrures d'un même ordre de grandeur, plus les angles se rapprochent de 60°, à savoir, une triangularisation équilatérale du treillis, moins le domaine de fréquences naturelles est étendu.

Nous arrivons donc à la seconde conclusion.

La structure qui permet d'éviter des fréquences naturelles trop basses, qui risqueraient d'entrer dans une gamme de fréquences d'excitation, est une structure qui présente les éléments les plus longs et formant les angles les plus proches de 60°.

Le sens physique de cette observation est que la géométrie de la structure définit sa raideur globale. Si nous élargissons notre analyse au treillis dans son ensemble, nous remarquons qu'il présente une raideur globale à l'image d'un élément de 16 [m]. Dans cette optique, il est logique qu'augmenter la hauteur atténue son élancement et que former des angles de 60° permet une meilleure répartition des efforts, et donc, une plus grande raideur. Une meilleure géométrie augmente le moment d'inertie globale de la structure.

Le choix d'opter pour des membrures diagonales plus longues est basé sur le comportement dynamique de la structure uniquement. En réalité, il faut trouver un compromis avec les critères de dimensionnement statique qui vise à limiter la longueur d'éléments en compression. Cependant, comme nous avons pu le voir précédemment, le flambement peut être limité en augmentant la section des éléments car celle-ci n'intervient pas dans la réponse dynamique d'une structure.

Finalemment, pour revenir à la mise en situation d'une passerelle devant franchir une portée de 16 mètres, nous opterions pour la structure n°6 en bambou qui semble être la plus appropriée d'un point de vue dynamique.

Nous allons étudier son comportement pour une force harmonique verticale d'une intensité de 10 [kN] et une fréquence d'excitation de 13 [Hz], soit 82 [rad/s].

Comparons sa déformation à celle de la passerelle la plus défavorable : structure n°2 en chêne.

Nous obtenons les résultats suivants.

	Structure n°6 en bambou	Structure n°2 en chêne
$\omega_1$ [rad/s]	301	96
$\omega/\omega_1$ [-]	0,27	0,85
$u_{y,max}$ à mi-travée [mm]	71	487
$\frac{u_{y,max}}{(L_{portée}/2)}$ [%]	0,9	6,1

Tableau 3 : Valeurs clés de la réponse dynamique de la structure la plus appropriée et de la plus défavorable pour une même excitation

Les résultats montrent explicitement l'intérêt du matériau et de la géométrie choisie pour assurer une bonne tenue dynamique de la structure. La passerelle en bambou présente une fréquence fondamentale assez élevée qui implique un déplacement vertical à mi-travée près de 7 fois plus petit que celle de la structure en chêne.

Ces résultats sont représentés sur le graphe ci-dessous.

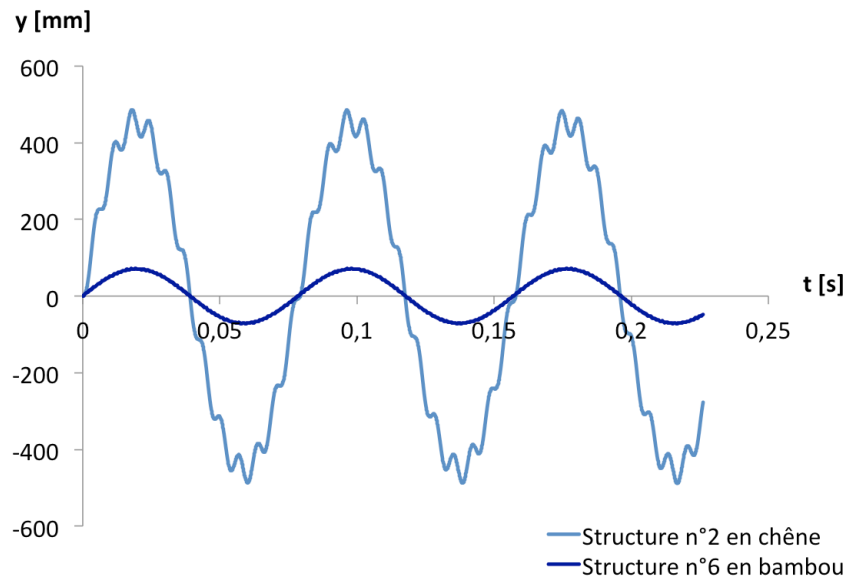


Figure 38 : Déplacement vertical à mi-travée des deux structures pour une excitation harmonique de 10 [kN] à une fréquence de 13 [Hz]

Les déformées maximales des 2 passerelles, amplifiées d'un facteur de 5, présentent les allures suivantes.

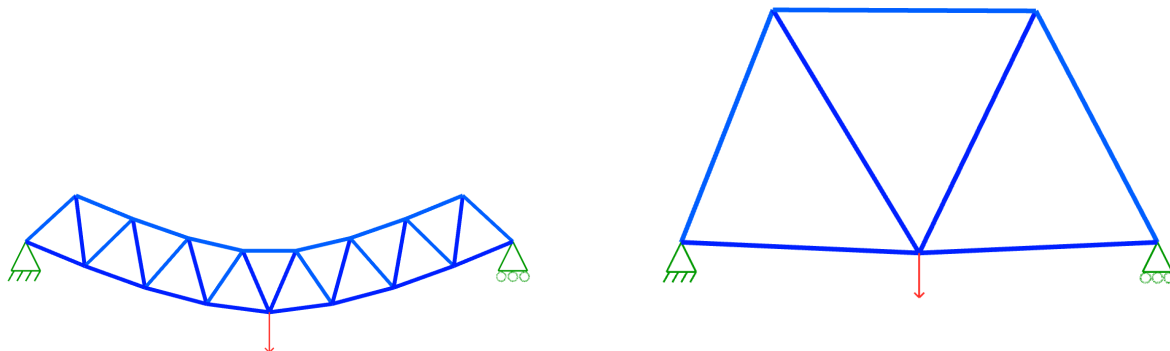


Figure 39 : Animations des réponses dynamiques des 2 structures pour une excitation harmonique de 10 [kN] à une fréquence de 13 [Hz].

Le déplacement maximal de la structure en chêne est très grand, avec une amplitude de près de 50 [cm]. Nous imaginons facilement qu'une telle structure n'est pas viable. Concernant la structure en bambou, la déformée laisse deviner un déplacement à peine perceptible pour une amplitude de 7 [cm] seulement. Cependant, en pratique, une telle structure n'est pas viable non plus au vu de sa fréquence d'oscillation de 13 [Hz].

Le problème provient d'une fréquence d'excitation difficilement imaginable dans un contexte réel. L'exemple utilisé ici avait pour simple but d'illustrer la démarche de raisonnement que tout utilisateur du logiciel pourrait opérer à l'aide de celui-ci.

## 5.6. Commandes du logiciel

Finalement, quelques commandes sont à disposition pour faciliter l'utilisation du logiciel.

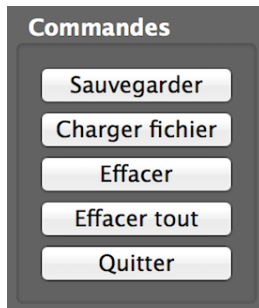


Figure 40 : Panel de commandes pour gérer la fenêtre de construction

- **"Sauvegarder"** : sauvegarde une structure et son cas de charge dans un fichier texte.
- **"Charger"** : charge une structure précédemment sauvegardée.
- **"Effacer"** : efface une barre ou un nœud et les éventuelles barres qui y sont liées.
- **"Effacer tout"** : ouvre une fenêtre de travail vierge en vue de commencer une nouvelle structure.
- **"Quitter"** : quitte le programme.

# Conclusion

---

L'objectif poursuivi à travers ce travail était de pouvoir offrir, à une personne souhaitant s'introduire à la dynamique des structures, un outil interactif et didactique en vue de l'accompagner dans sa démarche d'apprentissage.

Cet objectif passait par deux buts à atteindre : l'implémentation d'un programme de résolution et l'ajout d'un aspect pédagogique au travers de l'interface graphique.

En effet, dans un premier temps, la tâche principale a été de réaliser un programme capable de calculer la réponse dynamique de structures. Cette étape a d'abord demandé de fournir un travail de compréhension et d'assimilation de la matière. Effectivement, avant de pouvoir aborder l'écriture d'un programme, il était indispensable de maîtriser des sujets théoriques tels que la dynamique des systèmes élastiques, la modélisation par éléments finis et les méthodes numériques. Ensuite, il a fallu se familiariser à des outils informatiques comme l'OpenGL<sup>3</sup>, le langage C++ ou l'application Qt Creator. Et finalement, il a été question d'écrire un code informatique capable de traiter un problème dynamique.

Au terme de ce travail, nous pouvons constater que ce premier but est atteint pour des treillis non amortis et que les résultats obtenus sont corrects.

Dans un second temps seulement, le but a été d'ajouter au programme créé une dimension pédagogique. Pour ce faire, celui-ci devait être interactif et offrir à l'utilisateur une série d'outils mettant en avant les concepts théoriques clés. Dans cette optique, l'interface graphique a dû être pensée et optimisée de manière à ce qu'y figure uniquement l'essentiel. En effet, davantage de possibilités et de fonctions pouvaient y trouver place, mais ce, au détriment d'un aspect épuré favorisant une utilisation plus intuitive du programme. Les informations jugées utiles, et ne figurant pas directement sur l'interface du logiciel, sont reprises dans le document annexe. Celui-ci, parallèlement à son rôle de mode d'emploi, constitue ainsi un complément d'informations au programme.

À travers l'ensemble du travail, nous avons pu observer que le logiciel conjointement à son mode d'emploi permet à une personne de se familiariser avec les concepts fondamentaux de la dynamique des structures.

En effet, le programme permet une construction intuitive et simplifiée de la structure au moyen de barres et de nœuds.

Les notions de "réponse libre" et de "régime permanent", composantes de la réponse dynamique du système, sont alors introduites à l'utilisateur par l'intermédiaire

---

<sup>3</sup> Open Graphic Library

du mode d'emploi. Afin d'illustrer celles-ci, le logiciel offre la possibilité de définir une perturbation initiale et/ou une excitation et de lancer l'animation qui en résulte. De cette manière, la réponse dynamique peut être directement mise en lien avec sa formule analytique.

Ensuite, le mode d'emploi définit le concept de mode vibratoire propre, notion clé de la dynamique des structures. Quant au logiciel, il fournit les fréquences propres, les vecteurs propres et une animation de chacun des modes.

Finalement, le phénomène de résonance et l'importance de minimiser son risque d'apparition sont développés. Ce problème, qui tend à amplifier progressivement la déformation d'une structure au fil de ses oscillations, peut facilement être observé sur le logiciel en appliquant une excitation critique. L'utilisateur est alors invité à jouer sur les fréquences propres de sa structure en repensant sa géométrie, en changeant le matériau et en analysant la réponse qui en résulte.

En conclusion, l'ensemble des possibilités qu'offre le logiciel tend à démontrer son aspect interactif. Son utilisation conjointe à son mode d'emploi constitue une source d'apprentissage pragmatique complémentaire à un support écrit traditionnel.

Sur base de ce constat, le second but poursuivi à travers ce travail est lui aussi atteint.

Cependant, au-delà de son rôle introductif à la dynamique des structures, le logiciel est assez élémentaire, et son usage, très limité. Afin de constituer un réel outil de calcul, il serait intéressant d'étendre son champ d'application.

D'une part, les excitations auxquelles une structure peut être exposée présentent souvent un caractère plus complexe qu'une harmonique. Des forces périodiques composées de plusieurs harmoniques, ou même, des forces d'intensités aléatoires, pourraient être facilement implémentées.

D'autre part, il serait intéressant d'ajouter la composante d'amortissement au calcul. En effet, les amortisseurs constituent une des solutions au phénomène de résonance.

Enfin, il est possible d'ajouter un troisième degré de liberté à chaque nœud en prenant en compte leur rotation. En décomposant alors chaque barre en une série d'éléments finis, il est possible de faire intervenir une composante de flexion dans la réponse dynamique.

D'un point de vue plus personnel, j'achève ce travail avec un sentiment accompli.

En effet, j'éprouve d'abord la fierté de m'être, dès le départ, fixé un objectif personnel en proposant mon sujet de mémoire.

N'ayant initialement aucune connaissance de la dynamique et des maigres notions d'informatique, il s'agissait pour moi d'un réel challenge. Seulement, l'idée de pouvoir

créer un produit fini a directement suscité chez moi un grand engouement. Cet aspect pragmatique m'a permis de pouvoir constater concrètement ma progression tout au long de mon travail. Ca a été une réelle source de détermination et de persévérance pour moi.

Ensuite, j'ai eu le plaisir de pouvoir contempler l'animation d'une structure en mouvement sur mon logiciel. Dans un premier temps, il y a eu une satisfaction d'avoir atteint un objectif. Et très vite, c'est l'envie d'aller plus loin qui a pris le dessus pour finalement proposer le logiciel tel qu'il est exposé dans ce travail.

Je terminerai en disant que, pour moi, le sentiment le plus agréable au terme d'un travail comme celui-ci est celui d'avoir réellement appris quelque chose et d'avoir été au bout d'une matière. J'ai souvent entendu qu'on ne pouvait être réellement sûr qu'on maîtrisait une matière que quand on était en mesure de pouvoir l'expliquer aux autres. Je partage tout à fait cette idée. J'ai voulu attendre de pouvoir jongler avec les notions de la dynamique avant de me lancer concrètement dans le travail et de réfléchir à la meilleure manière de transmettre celles-ci à un utilisateur du logiciel. Et maintenant qu'il est achevé, je me rends compte avoir appris encore bien davantage durant sa conception.

En fin de compte, ce logiciel didactique aura déjà rempli son rôle d'outil d'apprentissage de la dynamique des structures avant même d'être achevé.

# Bibliographie

---

- [1] J.-P. COYETTE and L. DELANNAY, Université Catholique de Louvain, "*Dynamics of elastic systems*", 2010
- [2] J.-F. REMACLE, "*Numerical analysis of civil engineering structures*", Université Catholique de Louvain, 2015
- [3] M. R. GOSZ, "*Finite element method : Applications in Solids, Structures, and Heat Transfer*", Taylor & Francis, 2015
- [4] H. P. GAVIN, Departement of Civil and Environmental Engineering Duke University, "*Structural Element Stiffness, Mass, and Damping Matrices*", 2016
- [5] H. MA, Guangzhou University, "*Exact solution of axial vibration problems of elastic bars*", 2008
- [6] H. OUDIN, Ecole Centrale de Nantes, "*Méthode des éléments finis*", HAL, 2008
- [7] J.-F. RABASSE, Ecole Normale Supérieure de Paris, "*Introduction à la programmation orientée objets, présentation du Langage C++* ", 2005

# Annexe : Mode d'emploi et tutoriel didactique

---

**LOGICIEL DE CALCUL  
DYNAMIQUE DE STRUCTURES**

Mode d'emploi et tutoriel didactique

## Table des matières

1

1.	Le logiciel : limites et objectifs	p.2
2.	Présentation générale	p.3
3.	Construction du treillis	p.4
4.	Oscillation libre	p.5
5.	Modes vibratoires propres	p.8
○	Illustration	p.9
6.	Oscillation forcée	p.16
○	Illustration	p.18
7.	Phénomène de résonance	p.20
○	Illustration	p.21
8.	Complément d'informations	p.24

# 1. Le logiciel : limites et objectifs

2

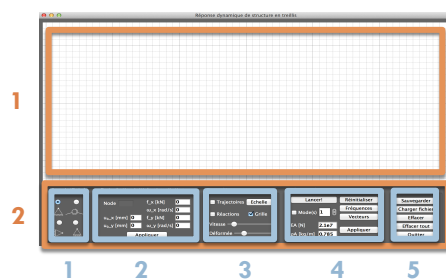
- Calcul de la réponse d'une structure en conditions dynamiques
- Valable pour des structures :
  - élastiques linéaires
  - de type « treillis »
    - Effort normal uniquement
    - Application des charges aux nœuds
  - non amorties
- Introduction aux notions fondamentales de la dynamique :
  - Mode vibratoire propre – Fréquence propre – Vecteur propre
  - Réponse libre – Perturbation initiale
  - Régime permanent – Excitation harmonique
  - Phénomène de résonance

# 2. Présentation générale

3

## Fenêtre principale

1. Fenêtre de construction
2. Barre d'outils



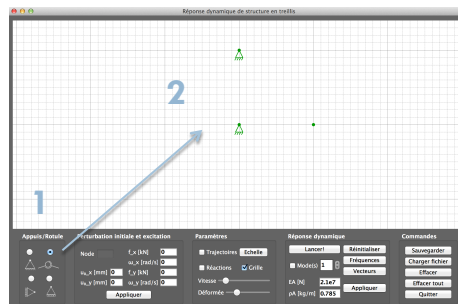
1. Appuis et rotules : choix du type de nœud du treillis
2. Perturbation initiale et excitation : définition des conditions dynamiques
3. Paramètres : affichage de la fenêtre de construction
4. Réponse dynamique : animation de la structure en mouvement
5. Commandes : fonctions supplémentaires pour la gestion du treillis

### 3. Construction du treillis

4

#### □ Représentation des nœuds

1. Sélection d'un type de nœud dans le cadre « Appuis/Rotule »
2. Clic gauche dans la fenêtre de construction pour ajouter le nœud sélectionné

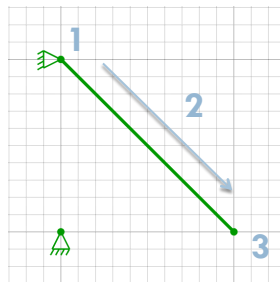


### 3. Construction du treillis

5

#### □ Représentation des membrures (barres)

1. Clic droit sur un nœud (clic maintenu enfoncé)
2. Faire glisser la souris vers le second nœud à relier
3. Relâcher le clic droit



## 4. Oscillation libre

6

### □ Définition : perturbation initiale

Au temps  $T=0$ ,

- déplacement imposé au treillis  
et/ou
- vitesse imposée au treillis

$$\begin{cases} u(t=0) = u_0 \text{ [m]} \\ \dot{u}(t=0) = v_0 \text{ [m/s]} \end{cases}$$

- Lorsqu'un treillis est soumis à une perturbation initiale en l'absence de toute force extérieure, il se met en mouvement. La trajectoire suivie par chacun des nœuds est une somme d'harmoniques du même nombre que les degrés de liberté de la structure.
- La structure oscille librement (= réponse libre).

## 4. Oscillation libre

7

Pour un treillis à  $N$  degrés de liberté :

### □ Equations des $N$ déplacements

$$\vec{X}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{\phi}_i (A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t))$$

- $\vec{\phi}_i$  sont les vecteurs propres et  $\omega_i$  [rad/s] les fréquences propres
- $A_i$  et  $B_i$  sont des coefficients dont les valeurs sont définies par la perturbation initiale

## 5. Modes vibratoires propres

8

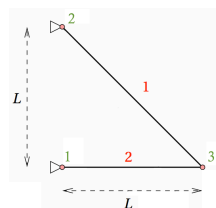
- Les **vecteurs propres**  $\vec{\phi}_i$  et les **fréquences propres**  $\omega_i$  sont des grandeurs propres au treillis. Elles dépendent des propriétés du matériau et de la géométrie de la structure.
- Une paire  $\{ \vec{\phi}_i, \omega_i \}$  décrit l'amplitude et la fréquence d'une harmonique. Il s'agit du  $i^{\text{ème}}$  **mode vibratoire propre** de la structure.
- La réponse libre d'une structure est la résultante des oscillations de ses  $N$  modes vibratoires. L'excitation d'un mode par rapport à un autre est définie par la perturbation initiale ( $A_i$  et  $B_i$ ).

## 5. Modes vibratoires propres

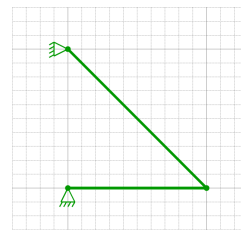
### Illustration par exemple

9

- **Exemple :**



$L = 1$  [m]



2 degrés de liberté :

- Déplacement vertical du nœud 3
- Déplacement horizontal du nœud 3

→ Structure à 2 modes vibratoires

## 5. Modes vibratoires propres

### Illustration par un exemple

10

#### □ Propriétés du treillis (acier par défaut) :

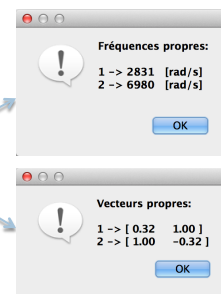
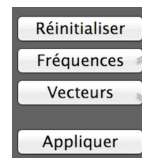
- Module de Young  $E = 210$  [GPa]
- Masse volumique  $\rho = 7850$  [kg/m<sup>3</sup>]
- Section de barre carrée de 1 [cm] de côté

EA [N]	2.1e7
$\rho A$ [kg/m]	0.785

#### □ Calcul des modes propres (de l'exemple)

- Fréquences propres
- Vecteurs propres

$$\left\{ \begin{array}{l} \omega_1 = 2831 \text{ [rad/s]} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,3178 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \omega_2 = 6980 \text{ [rad/s]} \rightarrow \begin{pmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -0,3178 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$



## 5. Modes vibratoires propres

### Illustration par un exemple

11

#### □ Mode propre 1

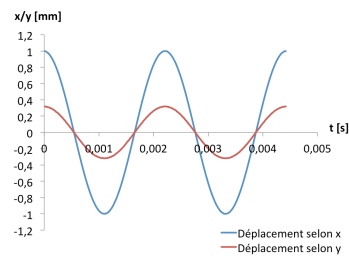
- Formule analytique ( $A_1=0,001$  et  $v_0=0$  [m/s])

$$\vec{X}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{\phi}_i (A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t))$$

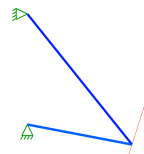
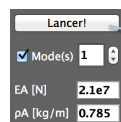
$$\downarrow$$

$$\begin{pmatrix} u_{3,x}(t) \\ u_{3,y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{pmatrix} (A_1 \cos(\omega_1 t))$$

$$= \begin{pmatrix} 0,3178 \\ 1 \end{pmatrix} (0,001 * \cos(2831 * t))$$



- Animation de la réponse dynamique



Le déplacement horizontal et le déplacement vertical du nœud 3 forment ensemble une oscillation le long d'une droite.

## 5. Modes vibratoires propres

### Illustration par un exemple

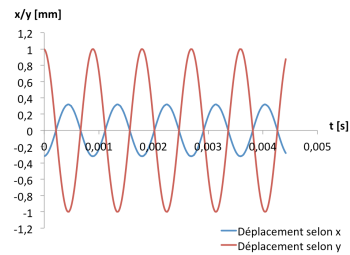
12

#### □ Mode propre 2

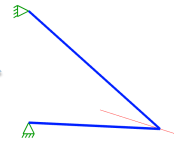
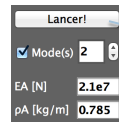
□ Formule analytique ( $A_1=0,001$  et  $v_0=0$  [m/s])

$$\vec{X}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{\phi}_i (A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t))$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{3,x}(t) \\ u_{3,y}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{pmatrix} (A_2 \cos(\omega_2 t)) \\ &= \begin{pmatrix} 1 \\ -0,3178 \end{pmatrix} (0,001 \cos(6980 * t)) \end{aligned}$$



□ Animation de la réponse dynamique



Le déplacement horizontal et le déplacement vertical du nœud 3 forment ensemble une oscillation le long d'une droite.

## 5. Modes vibratoires propres

### Illustration par un exemple

13

#### □ Réponse dynamique quelconque

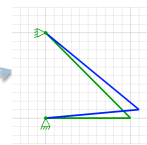
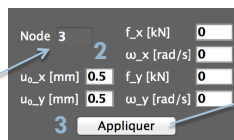
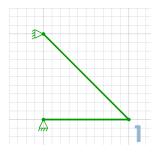
Pour rappel, en imposant un déplacement initial au treillis, celui-ci subit une perturbation et commence à osciller librement. Cette réponse libre est un mouvement résultant de l'excitation de ses 2 modes propres.

L'intensité d'excitation d'un mode varie dépend de la perturbation initiale.

□ Perturbation initiale quelconque

1. Clic sur le nœud 3
2. Entrer les valeurs de déplacement
3. Appliquer

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{3,x,0} \\ u_{3,y,0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,0005 \\ 0,0005 \end{pmatrix} [m] &\rightarrow \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0,0006 \\ 0,00031 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} \dot{u}_{3,x,0} \\ \dot{u}_{3,y,0} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} [m/s] &\rightarrow \begin{pmatrix} B_1 \\ B_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$



## 5. Modes vibratoires propres

### Illustration par un exemple

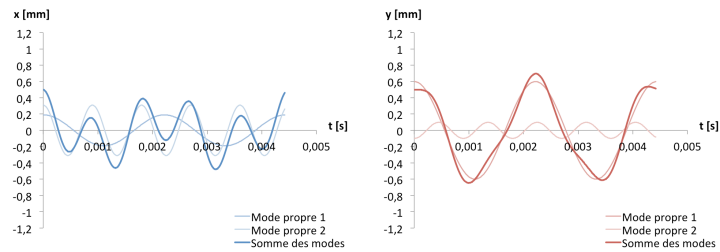
14

#### □ Réponse dynamique quelconque

##### □ Formule analytique

$$\vec{X}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{\phi}_i (A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t))$$

$$\begin{pmatrix} u_{3,x}(t) \\ u_{3,y}(t) \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 0,00019 \\ 0,0006 \end{pmatrix} \cos(2831 * t)}_{\text{mode propre 1}} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0,00031 \\ -0,0001 \end{pmatrix} \cos(6980 * t)}_{\text{mode propre 2}}$$



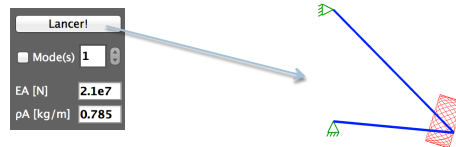
## 5. Modes vibratoires propres

### Illustration par un exemple

15

#### □ Réponse dynamique quelconque

##### □ Animation de la réponse dynamique



Le déplacement horizontal et le déplacement vertical du nœud 3 dessinent une trajectoire contenue dans un rectangle. Les médianes de ce rectangle sont les droites suivies par les oscillations des modes propres 1 et 2.

## 6. Oscillation forcée

16

- Une structure peut être exposée à différentes sortes d'excitations : impulsionnelle, harmonique, périodique, aléatoire, ...

- Définition : **excitation harmonique**

$$\vec{f}(t) = \vec{f}_0 \sin(\omega t)$$

- $\vec{f}_0$  [N] est l'intensité maximale de la force
  - $\omega$  [rad/s] est la fréquence angulaire d'excitation
- La réponse dynamique d'un treillis soumis à une excitation harmonique est la résultante de la réponse libre et de la réponse forcée.

## 6. Oscillation forcée

17

- La réponse forcée, aussi appelée **régime permanent**, est la résultante de N harmoniques oscillant à la fréquence d'excitation  $\omega$ . L'amplitude de chacune d'entre elle dépend du rapport de la fréquence d'excitation sur une fréquence naturelle  $\omega/\omega_i$ .

- Equations des N déplacements

$$\vec{X}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{\phi}_i \left( \underbrace{A_i \cos(\omega_i t) + B_i \sin(\omega_i t)}_{\text{réponse libre}} + \underbrace{\frac{\vec{\phi}_i^T \vec{f}_0}{\vec{\phi}_i^T K \vec{\phi}_i} \cdot \frac{1}{1 - (\omega/\omega_i)^2} \sin(\omega t)}_{\text{régime permanent}} \right)$$

En l'absence de toute perturbation initiale ( $u_0 = v_0 = 0$ ),

$$\vec{X}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{\phi}_i \left( \underbrace{\frac{\vec{\phi}_i^T \vec{f}_0}{\vec{\phi}_i^T K \vec{\phi}_i}}_{v_{stat,i}} \cdot \underbrace{\frac{1}{1 - (\omega/\omega_i)^2}}_{R_{d,i}} \left( \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_i} \sin(\omega_i t) \right) \right)$$

## 6. Oscillation forcée

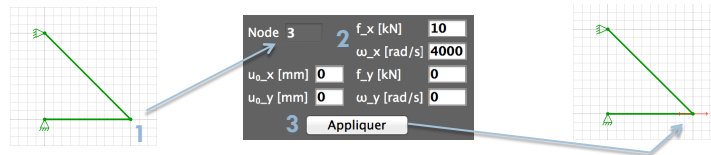
### Illustration par un exemple

18

#### □ Réponse dynamique quelconque

□ Excitation harmonique quelconque  $\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_{3,x} \\ f_{3,y} \end{pmatrix} \sin(\omega t) = \begin{pmatrix} 10000 \\ 0 \end{pmatrix} \sin(4000t)$

1. Clic sur le nœud 3
2. Entrer les valeurs de l'intensité maximale et de la fréquence d'excitation
3. Appliquer



## 6. Oscillation forcée

### Illustration par un exemple

19

#### □ Réponse dynamique quelconque

□ Formule analytique ( $u_0 = v_0 = 0$ )

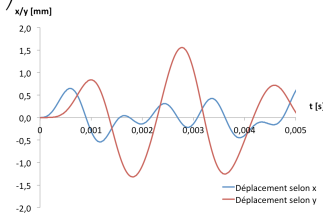
- Calcul des réponses statiques (= déplacements pour une application constante de  $\vec{f}_0$ )

$$u_{stat,1} = \frac{\begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{3,x} \\ f_{3,y} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \phi_{11} & \phi_{12} \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{12} \end{pmatrix}} = -0,00057 \text{ [m]} \quad \text{et} \quad u_{stat,2} = \frac{\begin{pmatrix} \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_{3,x} \\ f_{3,y} \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} \phi_{21} & \phi_{22} \end{pmatrix} K \begin{pmatrix} \phi_{21} \\ \phi_{22} \end{pmatrix}} = 0,00029 \text{ [m]}$$

- Réponse dynamique

$$\vec{X}(t) = \sum_{i=1}^N \vec{\phi}_i \left( \frac{\vec{\phi}_i^T \vec{f}_0}{\vec{\phi}_i^T K \vec{\phi}_i} \cdot \frac{1}{1 - (\omega/\omega_i)^2} \left( \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_i} \sin(\omega_i t) \right) \right)$$

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u_{3,x}(t) \\ u_{3,y}(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{pmatrix} \left( \frac{-0,00057}{1 - (\omega/\omega_1)^2} \left( \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_1} \sin(\omega_1 t) \right) \right) \\ &+ \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} \left( \frac{0,00029}{1 - (\omega/\omega_2)^2} \left( \sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_2} \sin(\omega_2 t) \right) \right) \end{aligned}$$



## 7. Phénomène de résonance

20

- Lorsque la fréquence d'excitation est suffisamment proche d'une fréquence naturelle, la structure dissipe difficilement l'énergie qui lui est fournie. En résulte une amplification progressive de sa déformation à chaque oscillation. Il s'agit d'une situation instable menant souvent à une rupture prématurée de la structure . On parle de **phénomène de résonance**.
- D'un point de vue analytique, le rapport de la fréquence d'excitation et de la fréquence naturelle définit directement la valeur du facteur amplificateur  $R_{d,i}$ .

$$|R_{d,i}| = \frac{1}{|1 - (\omega/\omega_i)^2|} \xrightarrow{\omega/\omega_i \approx 1} \infty \text{ (=résonance)}$$

## 7. Phénomène de résonance Illustration par un exemple

21

### □ Réponse dynamique en situation de résonance

Choix d'une fréquence d'excitation  $\omega = 3000$  [HZ], proche de la fréquence naturelle  $\omega_1 = 2831$  [HZ].

- **Formule analytique** ( $v_0 = v_0 = 0$ )
  - Réponse dynamique (expression de l'exemple précédent conservée)

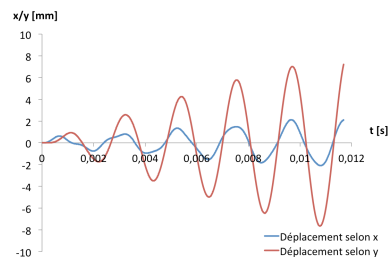
$$\begin{pmatrix} u_{3,x}(t) \\ u_{3,y}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \phi_{11} \\ \phi_{21} \end{pmatrix} \left( \frac{-0,00057}{1 - (\omega/\omega_1)^2} (\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_1} \sin(\omega_1 t)) \right) + \begin{pmatrix} \phi_{12} \\ \phi_{22} \end{pmatrix} \left( \frac{0,00029}{1 - (\omega/\omega_2)^2} (\sin(\omega t) - \frac{\omega}{\omega_2} \sin(\omega_2 t)) \right)$$

### ■ Facteurs amplificateurs

$$\begin{cases} \omega_1 = 2831 \text{ [rad/s]} \\ \omega = 3000 \text{ [rad/s]} \end{cases} \rightarrow R_{d,1} = \frac{1}{|1 - (\omega/\omega_1)^2|} = 8,13 \text{ [-]}$$

$$\begin{cases} \omega_2 = 6980 \text{ [rad/s]} \\ \omega = 3000 \text{ [rad/s]} \end{cases} \rightarrow R_{d,2} = \frac{1}{|1 - (\omega/\omega_2)^2|} = 1,23 \text{ [-]}$$

Le facteur amplificateur relatif au mode propre 1 implique une amplitude d'oscillation près de 8 fois supérieure à celle liée au mode propre 2.



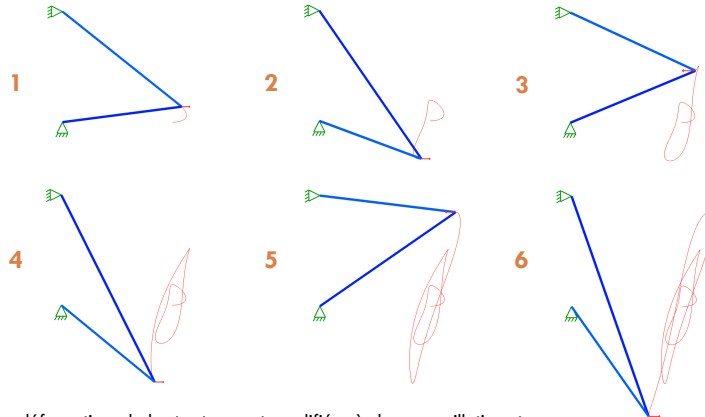
## 7. Phénomène de résonance

### Illustration par un exemple

22

#### □ Réponse dynamique quelconque

##### ▣ Animation de la réponse dynamique



Les déformations de la structure sont amplifiées à chaque oscillation et tendent vers une rupture prématurée de la structure.

## 7. Phénomène de résonance

23

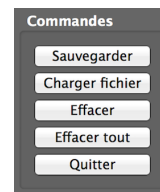
Afin d'éviter l'apparition de résonance dans un système, il faut intervenir sur ses fréquences naturelles ou sur les fréquences d'excitation. En pratique, il est souvent compliqué de maîtriser les excitations auxquelles la structure est exposée.

- Elever les fréquences naturelles d'une structure ?
  - ▣ Repenser sa géométrie afin d'augmenter sa raideur globale
  - ▣ Utiliser un matériau le plus raide et le plus léger possible

## 8. Complément d'informations

24

- Paramètres d'affichage
  - Afficher les réactions d'appuis
  - Afficher les trajectoires des nœuds
  - Masquer la grille
  - Consulter l'échelle de longueur
  - Modifier la vitesse d'animation
  - Modifier l'amplification de la déformée
- Commandes supplémentaires
  - Sauvegarder la structure
  - Charger une structure sauvegardée
  - Effacer un élément du treillis
  - Effacer tout (fenêtre de construction vierge)
  - Quitter le programme
- Clic sur une barre
  - Avant animation : affiche la longueur
  - Animation lancée : affiche l'effort normal maximal depuis  $T=0$



## Logiciel de calcul dynamique des structures

25

***Bon Amusement !***

Guillaume van der Elst  
Mémoire : « Réalisation d'un logiciel didactique  
pour le calcul dynamique de structures »

Promoteur: Pierre Latteur  
Année académique 2016-2017



