

# Interaction d'anneaux vortex de circulations différentes

Mémoire présenté par  
**Gaëtan JACQUEMIN**

en vue de l'obtention du grade de Master  
**ingénieur civil mécanicien**

Promoteur(s)  
**Grégoire WINCKELMANS, Philippe CHATELAIN**

Lecteur(s)  
**Miltiadis PAPALEXANDRIS, Vincent LEGAT**

Année académique 2016-2017



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>1</b>
<b>1 Avant-propos</b>	<b>3</b>
1.1 Notions de base . . . . .	3
1.2 Les méthodes vortex . . . . .	4
<b>2 L’anneau vortex</b>	<b>7</b>
2.1 L’anneau gaussien . . . . .	7
2.1.1 Condition initiale et paramètres de la simulation . . . . .	8
2.1.2 Analyse des résultats . . . . .	9
2.2 L’anneau compact . . . . .	11
2.2.1 Le profil gaussien compact . . . . .	12
2.2.2 Condition initiale et paramètres de la simulation . . . . .	14
2.2.3 Analyse des résultats . . . . .	14
2.3 Conclusion . . . . .	21
<b>3 Reconnexion d’anneaux vortex</b>	<b>23</b>
3.1 Les échelles de Kolmogorov . . . . .	23
3.2 La reconnexion anti-parallèle . . . . .	24
3.2.1 Condition initiale et paramètres de la simulation . . . . .	25
3.2.2 Analyse des résultats . . . . .	27
3.3 Anneaux entrelacés . . . . .	38
3.3.1 Condition initiale et paramètres de la simulation . . . . .	41
3.3.2 Analyse des résultats . . . . .	42
3.4 Conclusion . . . . .	45
<b>4 Interaction d’anneaux vortex de circulations différentes</b>	<b>47</b>
4.1 Condition initiale et paramètres de la simulation . . . . .	47
4.2 Analyse des résultats . . . . .	48
4.3 Conclusion . . . . .	56
<b>Conclusion</b>	<b>57</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>59</b>



# Table des figures

2.1	Coupe de la condition initiale dans le plan x-z en $y = L_{0,y}/2$ . Les traits discontinus représentent la taille initiale du domaine de calcul. Les points représentent la position (en $x$ ) des particules. . . . .	9
2.2	Coupe de $\ \omega\ t_0$ dans le plan $y/L_{0,y} = 1/2$ . La taille des images représente le domaine de calcul. . . . .	10
2.3	Isocontours de $\omega_z t_0$ dans le plan où $\ \omega\ $ est maximum à $\tau = 70$ . Les lignes continues et discontinues représentent respectivement des valeurs positives et négatives. Les isocontours sont représentés par pas de $\Delta\omega_z t_0 = 0.02$ . . . . .	11
2.4	Reynolds de maille basés sur la vitesse (gauche) et la vorticité (droite) pour l'anneau gaussien. . . . .	11
2.5	Fonctions gaussiennes compactes pour différents paramètres $\beta$ en fonction de $\rho$ (A) et $\rho_R$ (B). . . . .	13
2.6	Comparaison entre la fonction gaussienne de la section 2.1 et différentes fonctions gaussiennes compactes pour plusieurs valeurs de $\beta$ . . . . .	14
2.7	Coupe de la condition initiale dans le plan x-z en $y = L_{0,y}/2$ . Les traits discontinus représentent la taille initiale du domaine de calcul. Les points représentent la position (en $x$ ) des particules. . . . .	15
2.8	Isocontours de $\omega_z t_0$ dans le plan où $\ \omega\ $ est maximum. Les lignes continues et discontinues représentent respectivement des valeurs positives et négatives. Les contours sont représentés par pas de $\Delta\omega_z t_0 = 0.01$ ou $\Delta\omega_z t_0 = 0.05$ (le changement d'échelle est indiqué). . . . .	17
2.9	Isosurfaces $\ \omega\ t_0 = 1.0$ (opaque) et $\ \omega\ t_0 = 0.686$ (semi-transparent). L'échelle de gris est proportionnelle à $ \omega_z $ . . . . .	18
2.10	Comparaison de l'évolution de la circulation pour l'anneau compact et gaussien. . . . .	19
2.11	Comparaison de l'évolution de l'enstrophie pour l'anneau compact et gaussien. . . . .	19
2.12	Reynolds de maille basés sur la vitesse (gauche) et la vorticité (droite) pour l'anneau compact. . . . .	20
3.1	Profil de vorticité de l'anneau utilisé pour la simulation de reconnexion. Les points représentent la position (en $x$ ) des particules pour une discrétisation $h/R = 0.006$ . . . . .	26

3.2	Coupe de la condition initiale dans le plan $x$ - $z$ en $y = L_y/2$ . Les traits discontinus représentent la taille initiale du domaine de calcul. . . . .	26
3.3	Conservation de la composante du moment d'inertie $I_z$ (gauche) et des composantes du moment angulaire d'inertie $A_x$ et $A_y$ (droite) au long de la simulation. . . . .	27
3.4	Isosurfaces de la norme de vorticité à $\ \omega\ /\omega_0 = 0.4$ (bleu, translucide) et $\ \omega\ /\omega_0 = 2$ (rouge, opaque) . . . . .	30
3.5	Évolution des circulations dans les directions $x$ et $y$ . Les lignes tangentes sont représentées en gris et les différentes phases sont indiquées par les lignes grises en pointillés. . . . .	31
3.6	Coupe $\omega_x t_0$ dans le plan $x = L_{0,x}/2$ . Les isocontours des valeurs élevées sont représentés par pas de $\Delta\omega_x t_0 = 20$ . . . . .	34
3.7	Coupe $\omega_y t_0$ dans le plan $y = L_{0,y}/2$ . Les isocontours sont représenté par pas de $\Delta\omega_y t_0 = 15$ , $\Delta\omega_y t_0 = 5$ ou $\Delta\omega_y t_0 = 2$ (les changements d'échelle sont indiqués). . . . .	36
3.8	Évolution de l'énstrophie. . . . .	37
3.9	Reynolds de maille basés sur la vitesse (gauche) et la vorticité (droite) pour la reconnexion des anneaux. . . . .	37
3.10	Différentes composantes de l'hélicité. (A) : entrelacement, (B) : torsion, (C) : bobinage et (D) : nouage. Pour (B) et (C), les anneaux de circulation $\Gamma$ sont séparés en deux anneaux de circulation $\Gamma/2$ . . . . .	39
3.11	Coupe de $\ \omega\ $ dans le plan $x$ - $z$ en $y = L_y/2$ . Les traits discontinus représentent la taille initiale du domaine de calcul. . . . .	42
3.12	Isosurfaces de la norme de vorticité à $\ \omega\ /\omega_0 = 0.4$ (bleu, translucide) et $\ \omega\ /\omega_0 = 2$ (rouge, opaque) . . . . .	43
3.13	Évolution de l'hélicité des anneaux entrelacés . . . . .	44
3.14	Reynolds de maille basés sur la vitesse (gauche) et la vorticité (droite) pour les anneaux entrelacés. . . . .	44
4.1	Coupe de la condition initiale dans le plan $x$ - $z$ en $y = L_y/2$ . Les traits discontinus représentent la taille initiale du domaine de calcul. Anneau 1 (droite) et anneau 2 (gauche). . . . .	48
4.2	Isosurfaces de la norme de vorticité à $\ \omega\ /\omega_0 = 0.2$ (cyan, $\alpha = 0.2$ ), $\ \omega\ /\omega_0 = 0.4$ (bleu, $\alpha = 0.5$ ) et $\ \omega\ /\omega_0 = 1$ (rouge, $\alpha = 1$ ) . . . . .	51
4.3	Zoom sur la zone d'initiation de l'interaction. Les isosurfaces $\ \omega\ /\omega_0 = 0.4$ (translucide) et $\ \omega\ /\omega_0 = 1$ (opaque) sont représentées et l'échelle de couleur est proportionnelle à $\omega_y$ . . . . .	51
4.4	Coupe $\omega_y t_0$ dans le plan $y = L_{0,y}/2$ . Les isocontours sont représenté par pas de $\Delta\omega_y t_0 = 5$ ou $\Delta\omega_y t_0 = 10$ (les changements d'échelle sont indiqués). . . . .	53
4.5	Coupe de $\ \omega\  t_0$ dans le plan $y = L_{0,y}/2$ . . . . .	54
4.6	Évolution de l'énstrophie. . . . .	54

4.7	Variations des composantes du moment d'inertie $I_x$ et $I_z$ (gauche) et des composantes du moment angulaire d'inertie $A_x$ , $A_y$ et $A_z$ (droite) au long de la simulation. . . . .	55
4.8	Reynolds de maille basés sur la vitesse (gauche) et la vorticité (droite) pour la reconnexion des anneaux. . . . .	55



# Liste des abréviations et symboles

## Lettres romanes

$\mathbf{A}$ ( $A_x, A_y, A_z$ )	Moment angulaire d'inertie (composantes cartésiennes)
$B_x, B_y, B_z$	Taille du buffer
$E$	Énergie cinétique
$\mathcal{E}$	Enstrophie
FFT	Transformée de Fourier Rapide (Fast Fourier Transform)
$g$	Fonction de perturbation
$h$	Pas de discrétisation
$H$	Distance entre les centres des anneaux dans la direction $z$
$\mathbf{I}$ ( $I_x, I_y, I_z$ )	Moment d'inertie (composantes cartésiennes)
$\mathcal{I}$	Hélicité
$\mathcal{I}_c$	Hélicité de la ligne centrale
$L_x, L_y, L_z$ ( $L_{0,x}, L_{0,y}, L_{0,z}$ )	Taille du domaine de calcul (taille initiale)
$\mathcal{L}$	Nombre d'entrelacement
$N_x, N_y, N_z$ ( $N_{0,x}, N_{0,y}, N_{0,z}$ )	Nombre de points dans le domaine de calcul (nombre initial)
$n_k$	Nombre de modes perturbés
$r$	Distance par rapport à l'axe de l'anneau
$r_{pert}$	Distance $r$ perturbée
$R$	Rayon d'anneau vortex
$R_c$	Rayon de tube vortex
$Re_\Gamma$	Nombre de Reynolds basé sur la circulation
$Re_h$	Nombre de Reynolds de maille du champ de vitesse
$Re_{\omega,h}$	Nombre de Reynolds de maille du champ de vorticité
$s$	Coordonnée toroïdale
$S$	Distance entre les centres des anneaux dans la direction $x$
SND (DNS)	Simulation Numérique Directe (Direct Numerical Simulation)
$t_0$	Temps caractéristique
$Tw$	Nombre de torsion
$\mathbf{u}$ ( $u_x, u_y, u_z$ )	Vitesse (composantes cartésiennes)
$u_\eta$	Vitesse caractéristique de l'échelle de Kolmogorov
$V_p$	Volume d'une particule
$Wr$	Nombre d'entortillement
$\mathbf{x}$	Coordonnées spatiales
$\mathbf{x}_p$	Position d'une particule

**Lettres grecques**

$\alpha_p$	Intensité d'une particule
$\Gamma$	Circulation
$\epsilon$	Dissipation d'énergie
$\epsilon_p$	Amplitude de perturbation
$\eta$	Longueur caractéristique de l'échelle de Kolmogorov
$\nu$	Viscosité cinématique
$\xi$	Vorticité adimensionnelle
$\rho$	Coordonnée toroïdale adimensionnalisée par l'écart-type
$\rho R$	Coordonnée toroïdale adimensionnalisée par le rayon du tube
$\sigma$	Écart-type
$\sigma_g$	Écart-type gaussien
$\tau$	Temps adimensionnel
$\phi_{rand}$	Phase aléatoire
$\omega (\omega_r, \omega_\theta, \omega_z)$	Vorticité (composantes polaires)
$\omega (\omega_x, \omega_y, \omega_z)$	Vorticité (composantes cartésiennes)
$\tilde{\omega}$	Vorticité adimensionnelle
$\omega_0$	Vorticité initiale maximale
$\omega_\eta$	Vorticité caractéristique de l'échelle de Kolmogorov

# Introduction

L'étude de la dynamique des vortex trouve ses origines dans les travaux d'Helmholtz (1821-1894). Elle connaît alors un engouement certain avec notamment la contribution de figures renommées telles que Kelvin, Prandtl et Poincaré [16]. Le paradigme des vortex est entre autre la possibilité de décrire des structures vorticales organisées au sein des écoulements. L'anneau vortex est l'une de ces structures et sera étudié ici.

L'anneau vortex est une structure fondamentale de la mécanique des fluides. Il peut naturellement faire son apparition dans divers contextes : une goutte tombant à la surface de l'eau, les mouvements de la queue d'un poisson, les fumées rejetées par un volcan, ... Pour l'ingénieur, l'étude des anneaux vortex prend son intérêt dans les applications industrielles dans lesquelles ils peuvent être observés : le forage sous-marin, l'écoulement dans le sillage d'un avion, ...

Malgré les nombreuses années de recherches sur le sujet, certains points restent obscurs et seront abordés ici.

Les objectifs du travail présenté ici sont multiples. L'évolution de l'instabilité d'un simple anneau sera étudiée dans un premier temps mais l'essentiel du contenu de ce document vise à mettre en lumière les mécanismes d'interaction entre deux anneaux. Dans ce document, ces interactions se divisent en deux catégories : la reconnexion de deux anneaux de même intensité et l'interaction d'anneaux d'intensités différentes.

À cet effet, ces comportements seront étudiés via la simulation numérique de différentes configurations d'anneaux. Il s'agit de simulations numériques directes (SND) adéquatement résolues à nombre de Reynolds modéré.

Dans un premier temps, les simulations de l'évolution d'anneaux isolés seront présentés. Un profil de vortacité classique gaussien sera utilisé puis un profil gaussien compact. Ensuite, l'interaction d'anneaux de même intensité sera étudiée dans deux configurations différentes : anti-parallèle et entrelacée. Enfin, les résultats de l'interaction d'anneaux de circulations différentes dans une configuration anti-parallèle seront présentés.

Chaque chapitre suit une même structure : présentation et état de l'art, description de la condition initiale et des paramètres de la simulation, description et analyse des résultats et termine par une conclusion sur les points abordés durant le chapitre.



## Chapitre 1

# Avant-propos

Dans ce court chapitre, quelques notions de bases sont exposées et différents aspects des méthodes vortex sont brièvement expliqués. Le but n'est pas de revoir en détail la théorie ou l'algorithme complet utilisé mais plutôt d'aborder les points cruciaux aux simulations réalisées durant ce mémoire.

### 1.1 Notions de base

Le champ de vorticité est défini comme le rotationnel du champ de vitesse :

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$$

Pour un écoulement incompressible ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ), l'équation de conservation de quantité de mouvement en terme de vorticité est la suivante :

$$\frac{D\boldsymbol{\omega}}{Dt} = (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$$

avec  $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla$ , la dérivée temporelle mati rielle (ou Lagrangienne). Le terme  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  est le terme d'étirement et  $\nu \nabla^2 \boldsymbol{\omega}$  le terme de diffusion visqueuse.

L'on introduit à présent quelques définitions car elles seront fréquemment utilisées.

Une ligne vortex est une ligne dans l'espace qui est tangente en tout point vecteur  $\boldsymbol{\omega}$ .

Un tube vortex est un tube formé par l'ensemble des lignes vortex intersectant une surface  $S$ . Celui-ci est caractérisé par un profil de vorticité défini sur sa section.

La circulation  $\Gamma$  sur un contour fermé  $C$  est l'intégrale de la projection de  $\mathbf{u}$  sur ce contour ou, de façon équivalente, il s'agit du flux de vorticité à travers la surface  $S$  définie par  $C$  :

$$\Gamma = \oint_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{l} = \int_S \boldsymbol{\omega} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS$$

Le premier théorème d'Helmholtz stipule que la circulation  $\Gamma$  prise à une position quelconque le long d'un tube vortex sera toujours la même.

Le second théorème d'Helmholtz dicte que pour un écoulement non-visqueux, un vecteur de vorticité se comporte comme un élément infinitésimal d'une ligne mati rielle. Il en découle qu'un tube vortex se comporte comme un tube mati riel. Cela

signifie que le tube vortex sera transporté et déformé à la manière d'un tube matériel. Dans le cas d'un écoulement visqueux, un tube isolé verra son profil de vorticité diffusé par le terme  $\nu \nabla^2 \omega$  [21].

## 1.2 Les méthodes vortex

L'on reprend les équations précédemment exprimées :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (1.1)$$

$$\frac{D\omega}{Dt} = (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \nabla^2 \omega \quad (1.2)$$

La particularité des méthodes vortex est qu'elles utilisent des particules pour discrétiser le champ de vorticité. Ces particules sont caractérisées par une position  $\mathbf{x}_p$ , un volume  $V_p$  et une intensité  $\alpha_p = \int_{V_p} \omega \, d\mathbf{x} \simeq \omega V_p$ . Ces particules sont transportées par l'écoulement et leur intensité  $\alpha_p$  est modifiée par l'équation 1.2 de conservation de la quantité de mouvement. Cela donne :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{x}_p}{dt} &= \mathbf{u}(\mathbf{x}_p) \\ \frac{d\alpha_p}{dt} &= \int_{V_p} (\omega \cdot \nabla)\mathbf{u} + \nu \nabla^2 \omega \, d\mathbf{x} \\ &\simeq ((\omega \cdot \nabla)\mathbf{u}(\mathbf{x}_p) + \nu \nabla^2 \omega(\mathbf{x}_p)) V_p \end{aligned}$$

Ces équations sont intégrées dans le temps en utilisant un schéma Runge-Kutta d'ordre 3 à basse consommation de mémoire. Le champ de vorticité est ainsi obtenu. En prenant le rotationnel de l'égalité  $\omega = \nabla \times \mathbf{u}$  et en y injectant 1.1, on obtient l'équation de Poisson suivante :

$$\nabla^2 \mathbf{u} = -\nabla \times \omega \quad (1.3)$$

Cette équation est résolue (voir ci-dessous) pour obtenir le champ de vitesse.

Les particules étant transportées par le champ de vitesse, il est fort probable qu'elles se trouvent réparties de façon non-homogène. Cela fausse évidemment les résultats obtenus aux endroits dénués de particules. Pour pallier à ce problème, des remaillages sont effectués après un certain nombre de pas de temps. Cela consiste à réinitialiser la position des particules de façon homogène sur un maillage uniforme. Les intensités  $\alpha_p$  sont interpolées sur le maillage puis les particules sont réinitialisées et une interpolation est effectuée du maillage vers les particules.

Le choix de la fréquence de remaillage est un compromis entre la précision sur le champ de vorticité et le coût de calcul qu'engendre le remaillage.

La description Lagrangienne de la convection des particules utilisée dans les méthodes vortex permet d'utiliser un pas de temps d'ordre bien supérieur aux problèmes dont la description est Eulérienne. En effet, la contrainte de stabilité CFL habituelle ( $\Delta t \|\mathbf{u}\|_\infty / h < \mathcal{O}(1)$ ) n'a plus besoin d'être respectée. La condition de stabilité est dictée par le fait que les trajectoires des particules ne peuvent se croiser :  $\Delta t \|\nabla \mathbf{u}\|_\infty < \mathcal{O}(1)$ . Une autre contrainte de stabilité est introduite par le terme de diffusion :  $\Delta t \nu / h^2 < \mathcal{O}(1)$ . Une dernière contrainte liée à la vorticité est utilisée :  $\Delta t \|\boldsymbol{\omega}\| < \mathcal{O}(1)$ . En pratique, les valeurs suivantes ont été utilisées dans les simulations :

$$\Delta t \|\nabla \mathbf{u}\|_\infty = 0.125$$

$$\Delta t \nu / h^2 = 0.16$$

$$\Delta t \|\boldsymbol{\omega}\| = 0.125$$

Le pas de temps utilisé est le minimum obtenu par l'une de ces trois équations. Une borne maximum du pas de temps est aussi spécifiée pour chaque simulation.

Les simulations réalisées ici sont toutes dans des domaines tridimensionnels non-bornés. L'équation de Poisson 1.3 exprimée plus haut doit être résolue dans ces conditons. La solution peut être exprimée comme suit (dans l'une des trois directions) :

$$u(\mathbf{x}) = -G_0^{3D}(\mathbf{x}) \otimes (\nabla \times \boldsymbol{\omega}) \quad \text{avec} \quad G_0^{3D}(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi \|\mathbf{x}\|}$$

L'algorithme consiste à résoudre cette équation dans le domaine spectral, ainsi  $\hat{u}(\mathbf{k}) = -\widehat{G_0^{3D}(\mathbf{k})}(\nabla \times \boldsymbol{\omega})$ . Cela est réalisé en utilisant des transformées de Fourier rapides (ci-après dénommées FFT pour "Fast Fourier Transform") dont le coût de calcul est en  $\mathcal{O}(N \log N)$ . Cependant, la méthode FFT a l'effet, ici indésirable, d'imposer des conditions limites périodiques sur le domaine. Pour pallier à cela, la taille domaine de calcul est préalablement doubl e. Cette extension de  $\nabla \times \boldsymbol{\omega}$  est remplie de zéros afin que l'influence des conditions limites soit négligeable.

Un domaine de calcul non-borné doit aussi pouvoir s'agrandir pour capturer l'évolution complète de l'écoulement. Un seuil de vorticité est spécifié au-dessus duquel la présence d'une telle valeur de vorticité   proximité d'une limite du domaine agrandira celle-ci. Cela signifie néanmoins que la vorticité inférieure à ce seuil peut quitter le domaine, ce qui produit un champ de vorticité à divergence non-nulle<sup>1</sup> :  $\nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \neq 0$ .

Cette divergence est contrôlée en reprojettant le champ de vorticité sur un champ à divergence nulle. Cette étape est réalisée dans le domaine spectral :

$$\hat{\boldsymbol{\omega}}' = \hat{\boldsymbol{\omega}} - \frac{\mathbf{k} \cdot \hat{\boldsymbol{\omega}}}{\|\mathbf{k}\|^2} \mathbf{k}$$

1. Ce qui n'a pas de sens physique étant donné que  $\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}$ .

[6, 5]. Cette reprojction a lieu après un certains nombre de remaillages.

Pour s'assurer de la précision des simulations, deux indicateurs sont considérés. Il s'agit des Reynolds de maille basés sur la vitesse et la vorticité :

$$Re_h = \frac{\sqrt{u_x^2 + u_y^2 + u_z^2} h}{\nu} \quad Re_{\omega,h} = \frac{\sqrt{\omega_x^2 + \omega_y^2 + \omega_z^2} h^2}{\nu}$$

Leur valeur maximale est monitorée dans l'espace de calcul et doit être modérée pour garantir la précision des simulations.

Les simulations ont été réalisées sur le cluster NIC4 de l'Université de Liège (ULg). Il comporte 128 noeuds de calcul pourvus de deux processeurs Intel E5-2650 à 8 coeurs à 2GHz avec 64GB de RAM (4GB/coeur).

## Chapitre 2

# L'anneau vortex

Un anneau vortex peut être décrit comme un tube vortex formant une boucle fermée. Ce tube possède un profil de vorticité axisymétrique autour d'une ligne imaginaire appelée "ligne centrale" de l'anneau. Ce mémoire se concentre uniquement sur les anneaux toroïdaux, c'est-à-dire dont la ligne centrale est un cercle. L'axe perpendiculaire au plan de la ligne centrale et passant par le centre du tore sera ci-après dénommé comme l'axe de l'anneau.

Un anneau vortex isolé se déplace dans la direction parallèle à son axe par son mouvement proprement induit. Widnall, Bliss & Tsai (1974) [20] ont montré qu'une légère perturbation azimutale de la ligne centrale par une sinusoïde provoquait la croissance de certains modes propres, menant à des instabilités.

Différentes simulations et expériences ont montré que l'évolution d'un anneau se déroulait en plusieurs phases [7, 3, 8] :

- Phase transitoire : l'anneau dissipe de l'énergie en se déformant légèrement afin d'initier son mouvement.
- Phase linéaire : certains modes sont amplifiés de façon linéaire et on observe l'apparition de vorticité axiale. On peut noter l'apparition de déformations azimutales, aussi appelées instabilités de Widnall.
- Phase non-linéaire : les modes amplifiés lors de la phase précédente transfèrent leur énergie à des modes plus élevés, donnant naissance à des structures vorticales secondaires appelées dipôles sur la circonférence intérieure et extérieure de l'anneau.
- Saturation : il s'agit de la transition entre la phase non-linéaire et turbulente. Les dipôles dominent la géométrie de l'anneau qui ne présente plus la p riodicite azimutale des phases antécédentes.
- Phase turbulente : la structure de l'anneau a perdu toute cohérence et l'écoulement est turbulent.

### 2.1 L'anneau gaussien

Dans cette première section, la simulation d'un anneau à  $Re_\Gamma = 5500$  est présentée. Il s'agit d'une simulation numérique directe (SND) d'un anneau dont le profil

de vorticité est une fonction gaussienne. Le profil de vorticité sur la section du tube est le suivant :

$$\omega_\theta(s) = \frac{\Gamma}{\pi\sigma_g^2} \exp\left(-\frac{s^2}{\sigma_g^2}\right)$$

avec  $s^2 = z^2 + (r - R)^2$ ,  $r$  étant la distance entre l'axe de l'anneau et un point quelconque et  $R$  le rayon de courbure la ligne centrale. Les autres composantes de la vorticité sont nulles :  $\omega_r(s) = \omega_z(s) = 0$ . Ce profil peut être récrit sous forme adimensionnelle de la façon suivante :

$$\frac{\pi\omega_\theta(s)\sigma_g^2}{\Gamma} = \tilde{\omega} = \xi(\rho) = \exp(-\rho^2)$$

avec  $\rho = s/\sigma_g$ . Cet anneau est le même que simulé par Cocoli (2007) dans sa thèses [7]. Il a déterminé les durées des différentes phases :

- $\tau < 25$  : phase transitoire
- $25 < \tau < 80$  : phase linéaire
- $80 < \tau < 150$  : phase non-linéaire
- $\tau \simeq 150$  : saturation
- $\tau > 150$  : phase turbulente

### 2.1.1 Condition initiale et paramètres de la simulation

La condition initiale est présentée à la figure 2.1. L'anneau étudié possède  $\sigma_g/R = 0.4131$ . La discrétisation est  $h/R = 0.04$ . Le pas de temps est adaptatif et borné par  $\Delta\tau_{max} = \Delta t/t_0 = 0.05$  (avec  $t_0 = R^2/\Gamma$ ). Les remaillages se font tous les 5 pas de temps et les reprojctions tous les 4 remaillages. Le domaine de calcul est non-borné. Sa taille initiale est  $[L_{0,x}/R, L_{0,y}/R, L_{0,z}/R] = [5.57, 5.57, 2.57]$  avec  $[N_{0,x}, N_{0,y}, N_{0,z}] = [142, 142, 72]$ . Le seuil de vorticité pour l'agrandissement du domaine a été fixé à  $2.5 \times 10^{-3}\omega_0$  avec  $\omega_0 = \|\omega\|_{max}(\tau = 0)$ . Les bords du domaine de calcul initial se situent à une distance  $[B_x/\sigma_x, B_y/\sigma_y, B_z/\sigma_z] = [4.32, 4.32, 3.11]$  de la ligne centrale, comme illustré ci-dessous. Cet espace sera appelé "buffer" par la suite.

Concernant la perturbation de la ligne centrale, deux choix sont possibles. Le premier consiste à itérer sur les points du maillage et à leur attribuer un vecteur de vorticité en fonction de leur position  $s$  augmentée de la valeur locale de la perturbation. Cela a néanmoins deux désavantages : un tube de circulation non-constante (ce qui contredit le premier théorème d'Helmoltz) ainsi que de la vorticité sur l'axe de l'anneau. Ce dernier problème peut cependant être réglé en superposant un anneau de vorticité opposée comme proposé par Shariff et al (1994) [19]. Le second choix, utilisé ici, consiste à initialiser l'anneau non-perturbé et à modifier ensuite la position des particules en remplaçant leur position  $r$  par  $r_{pert}$  :

$$r_{pert}(\theta) = r(1 + \epsilon_p g(\theta)) \quad \text{avec} \quad g(\theta) = \sum_{k=1}^{n_k} \sin(k\theta + \phi_{rand})$$

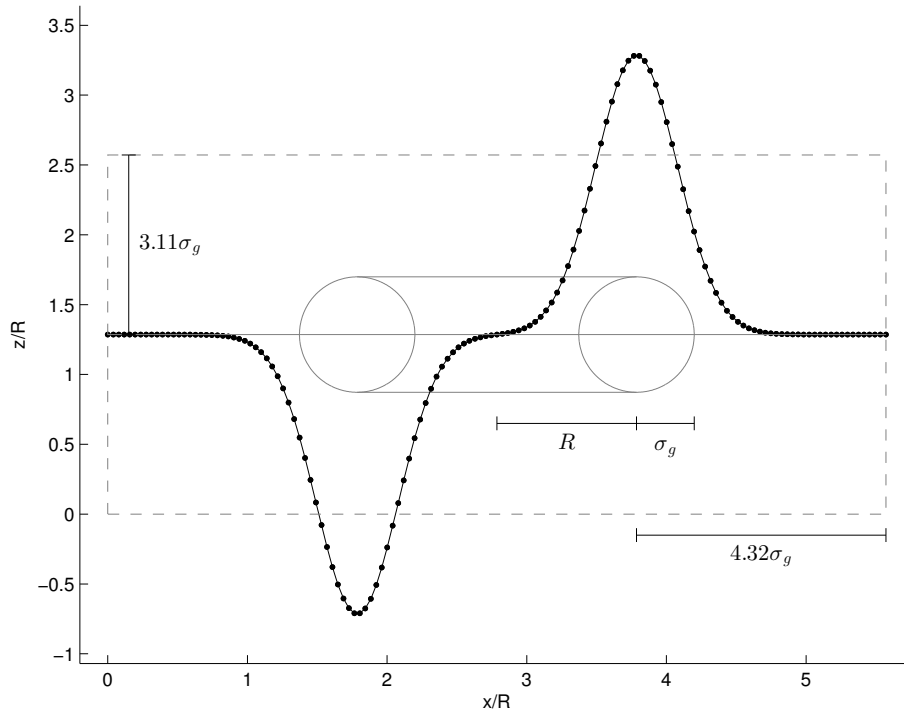


FIGURE 2.1 – Coupe de la condition initiale dans le plan  $x$ - $z$  en  $y = L_{0,y}/2$ . Les traits discontinus représentent la taille initiale du domaine de calcul. Les points représentent la position (en  $x$ ) des particules.

avec  $\epsilon_p = 0.0002$ ,  $n_k = 24$  et  $\phi_{rand}$  la phase aléatoire uniformément distribuée entre 0 et  $2\pi$ . Après la perturbation des particules, un remaillage est effectué suivi d'une reprojction pour obtenir un champ de vorticit      divergence nulle.

### 2.1.2 Analyse des r  sultats

La simulation visait    capturer l'  volution de l'anneau jusqu'   la fin de la phase lin  aire :  $\tau = 80$ . Elle a tourn   sur 16 processeurs ( $2 \times 2 \times 4$ ) durant  $\sim 4$  heures. Le nombre de mailles initial   tait de  $\sim 1.5$  millions et a augment   jusqu'    $\sim 9$  millions.

Une coupe de  $\|\omega\|t_0$  dans le plan  $y/L_{0,y} = 1/2$  est pr  sent  e aux figures 2.2a-2.2e. L'agrandissement du domaine de calcul peut   tre observ      mesure que l'anneau se d  place.

La figure 2.3 montre les isocontours de  $\omega_z t_0$  dans le plan de vorticit   maximum     $\tau = 70$ . Comme remarqu   par Cocoli, les modes azimutaux  $n = 7$  et  $n = 8$  sont amplifi  s dans cette phase lin  aire. Le mode  $n = 6$  est aussi amplifi   mais ne peut encore   tre observ      ce stade. On peut aussi observer la signature radiale du mode  $n = 2$ .

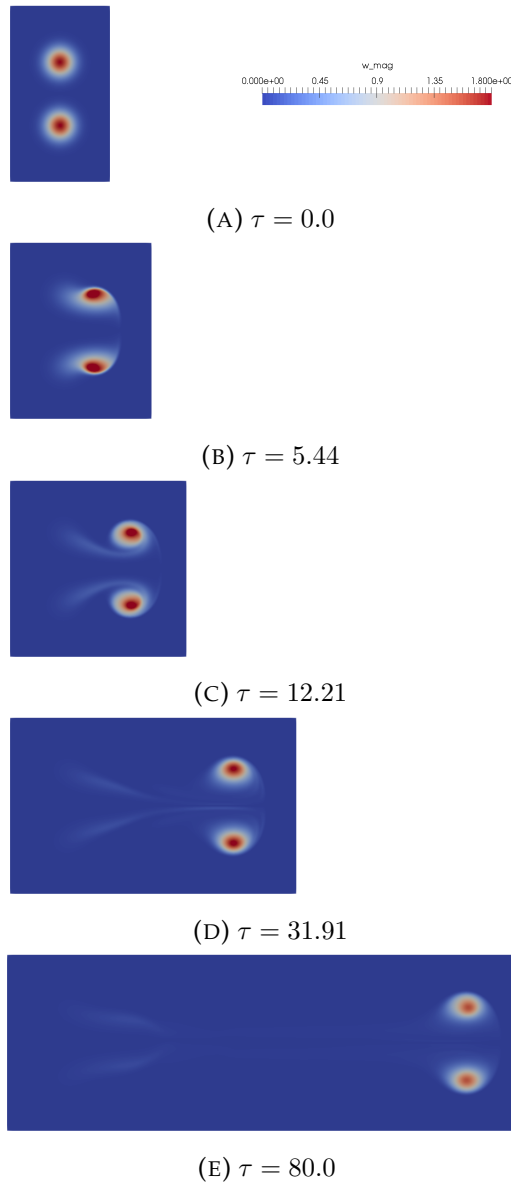


FIGURE 2.2 – Coupe de  $\|\omega\|_{t_0}$  dans le plan  $y/L_{0,y} = 1/2$ . La taille des images représente le domaine de calcul.

Les Reynolds de maille sont donnés aux figures 2.4a-2.4b. On notera qu'ils prennent leurs valeurs les plus importantes au début de la simulation, soit pendant la phase transitoire. La valeur de  $Re_{\omega,h}$  reste modérée tandis que  $Re_h$  prend des valeurs importantes. Les résultats obtenus restent néanmoins cohérents avec ceux des sources citées dans cette section.



FIGURE 2.3 – Isocontours de  $\omega_z t_0$  dans le plan où  $\|\omega\|$  est maximum à  $\tau = 70$ . Les lignes continues et discontinues représentent respectivement des valeurs positives et négatives. Les isocontours sont représentés par pas de  $\Delta\omega_z t_0 = 0.02$ .

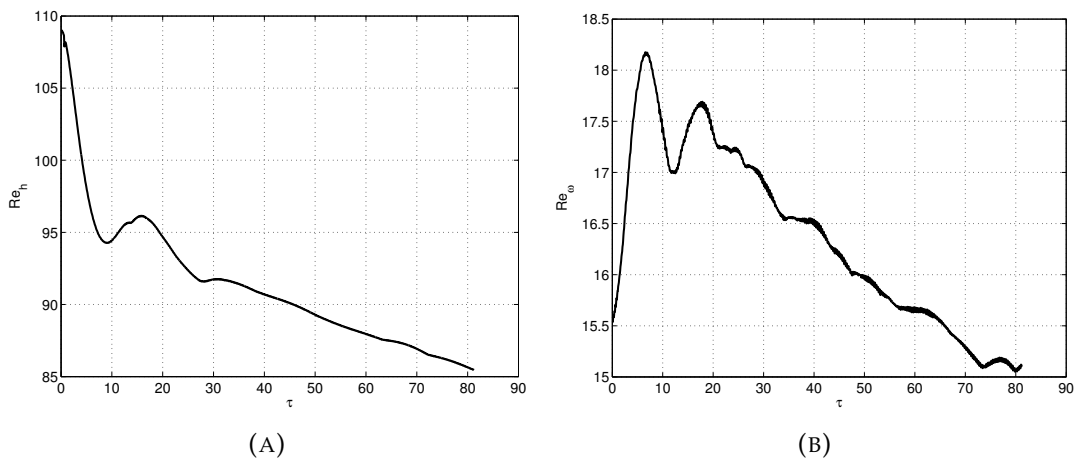


FIGURE 2.4 – Reynolds de maille basés sur la vitesse (gauche) et la vorticité (droite) pour l'anneau gaussien.

## 2.2 L'anneau compact

Le fait d'avoir une fonction gaussienne comme condition initiale de profil pour un anneau nous contraint à choisir une taille de domaine de calcul dont les limites se situent à une distance suffisamment grande pour y considérer la valeur de vorticité comme étant négligeable. Dans cette section, un anneau dont le champ de vorticité s'étend à une distance finie de sa ligne centrale est étudié : un anneau compact.

### 2.2.1 Le profil gaussien compact

Dans leur article, Liksa et Colonius (2016) [11] présentent un profil de vorticité gaussien "compact" défini uniquement sur le tube vortex de rayon  $R_c$  :

$$\frac{\pi\omega_\theta(s)\sigma^2}{\Gamma} = \xi(\rho) = \begin{cases} C(\beta^2) \exp\left(-\frac{\rho^2}{1-\rho_R^2}\right) & \text{si } \rho_R \leq 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $\omega_r(s) = \omega_z(s) = 0$ ;  $\beta = \sigma/R_c$  et  $\rho_R = s/R_c = \beta\rho$ . La constante  $C(\beta^2)$  est telle que l'intégrale de la vorticité sur la section de l'anneau vaut  $\Gamma$ . Elle peut être trouvée comme suit :

$$\int_S \omega_\theta(s) dS = \Gamma$$

avec  $S$  étant la surface d'une section de l'anneau. De là,

$$\int_0^{2\pi} \int_0^{R_c} \omega_\theta(s)s d\theta ds = \Gamma$$

$$2\pi \int_0^{R_c} \omega_\theta(s)s ds = \Gamma$$

En substituant  $\omega_\theta(s)$ ,

$$2\pi \int_0^{R_c/\sigma} \frac{\Gamma}{\pi} \xi\left(\frac{s}{\sigma}\right) \frac{s}{\sigma} d\left(\frac{s}{\sigma}\right) = \Gamma$$

$$2 \int_0^{1/\beta} \xi(\rho)\rho d\rho = 1$$

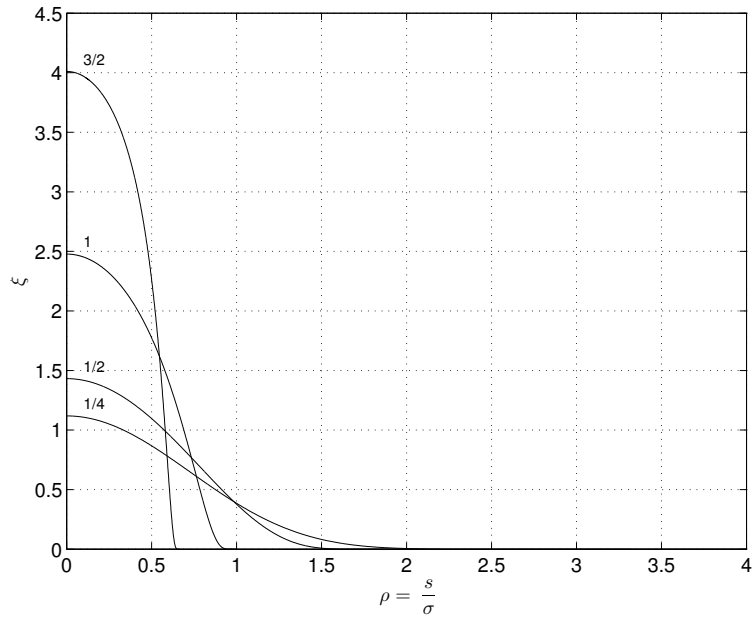
Enfin,

$$C(\beta^2) = \frac{1}{2 \int_0^{1/\beta} \exp\left(-\frac{\rho^2}{1-\beta^2\rho^2}\right) \rho d\rho} \quad (2.1)$$

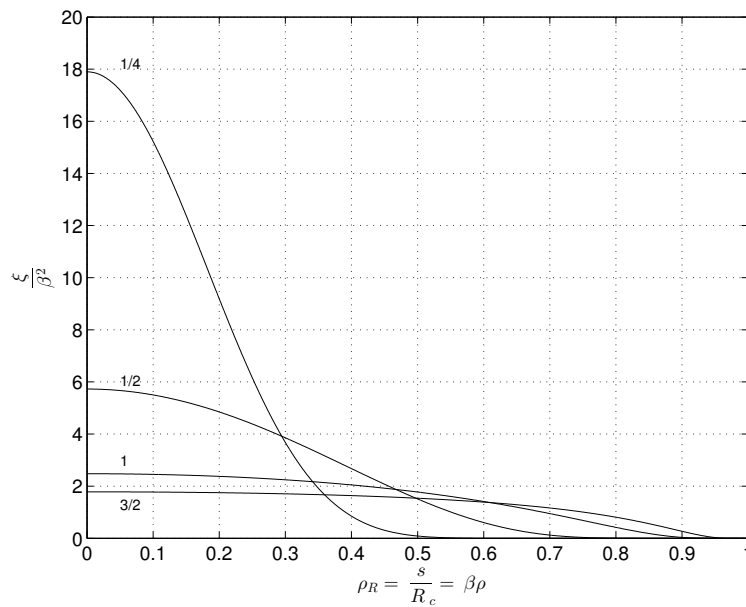
Les figures 2.5a et 2.5b montrent ces fonctions pour différentes valeurs du paramètre  $\beta$ . L'on peut en déduire que la vorticité au centre  $\xi(\rho = 0)$  augmente avec  $\beta$ . Ce dernier cont le également l'écart-type des fonctions.

Afin de comparer l'anneau gaussien observé à la section précédente avec un anneau gaussien compact, l'on cherche à trouver le paramètre  $\beta$  tel que les deux anneaux aient la même vorticité en  $s = 0$  :

$$\begin{aligned} \omega_{gaussien,\theta}(s=0) &= \omega_\theta(s=0) \\ \frac{\Gamma}{\pi\sigma_g^2} &= \frac{\Gamma}{\pi\sigma^2} C(\beta^2) \\ \frac{\sigma_g^2}{R^2} &= \frac{\beta^2}{C(\beta^2)} \end{aligned}$$



(A)



(B)

FIGURE 2.5 – Fonctions gaussiennes compactes pour différents paramètres  $\beta$  en fonction de  $\rho$  (A) et  $\rho_R$  (B).

En injectant 2.1,

$$\frac{\sigma_g^2}{R^2} = 2\beta^2 \int_0^{1/\beta} \exp\left(-\frac{\rho^2}{1-\beta^2\rho^2}\right) \rho d\rho$$

Cette équation est résolue numériquement pour obtenir les paramètres désirés. Pour une valeur  $R_c/R = 0.8262$  (correspondant à  $R_c/\sigma_g = 2$ ), l'on trouve  $\beta = 0.6504095167$  avec  $C(\beta^2) = 1.692131288$ . Cette courbe est représentée à la figure 2.6.

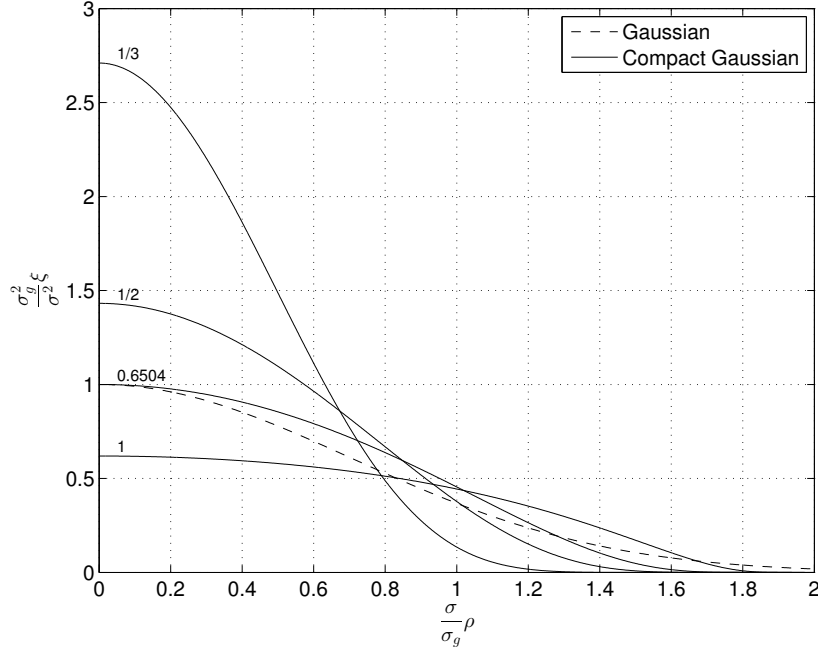


FIGURE 2.6 – Comparaison entre la fonction gaussienne de la section 2.1 et différentes fonctions gaussiennes compactes pour plusieurs valeurs de  $\beta$ .

## 2.2.2 Condition initiale et paramètres de la simulation

L'anneau correspondant a été simulé en SND également à  $Re_{\Gamma} = 5500$ . La condition initiale est illustrée à la figure 2.7. Le but était de capturer la phase non-linéaire d'un tel anneau. Pour cette raison, un maillage plus fin a été utilisé :  $h/R = 0.02$  ( $h/R = 0.04$  dans le section 2.1). Le pas de temps est adaptatif et borné par  $\Delta\tau_{max} = \Delta t/t_0 = 0.05$ . Les remaillages se font tous les 5 pas de temps et les reprojections tous les 4 remaillages. Le domaine de calcul est non-borné. Sa taille initiale est  $[L_{0,x}/R, L_{0,y}/R, L_{0,z}/R] = [5, 5, 3]$  avec  $[N_{0,x}, N_{0,y}, N_{0,z}] = [250, 250, 152]$ . La perturbation est la même que pour l'anneau gaussien ( $\epsilon_p = 0.0002$  et  $n_k = 24$ ). Le seuil de vorticité pour l'agrandissement du domaine a été fixé à  $2.5 \times 10^{-3}\omega_0$ . Le buffer est donné par rapport aux limites auxquelles le profil de vorticité est non-nul (illustré ci-dessous). On prend  $[B_x/R, B_y/R, B_z/R] = [0.67, 0.67, 0.67]$ .

## 2.2.3 Analyse des résultats

La simulation a tourné sur 32 processeurs ( $2 \times 2 \times 8$ ) durant  $\sim 5$  heures 30 minutes. Le nombre de mailles initial était de  $\sim 9.5$  millions et a augmenté jusque  $\sim 75$  millions.

Les figures 2.8a-2.8f montrent les contours de vorticité  $\omega_z t_0$  dans le plan où  $\|\omega\|$  est maximum. En comparaison avec la figure 2.3, le mode  $n = 7$  de l'anneau gaussien compact est plus marqué à  $\tau = 70$ . L'on note ensuite l'augmentation de la vorticité

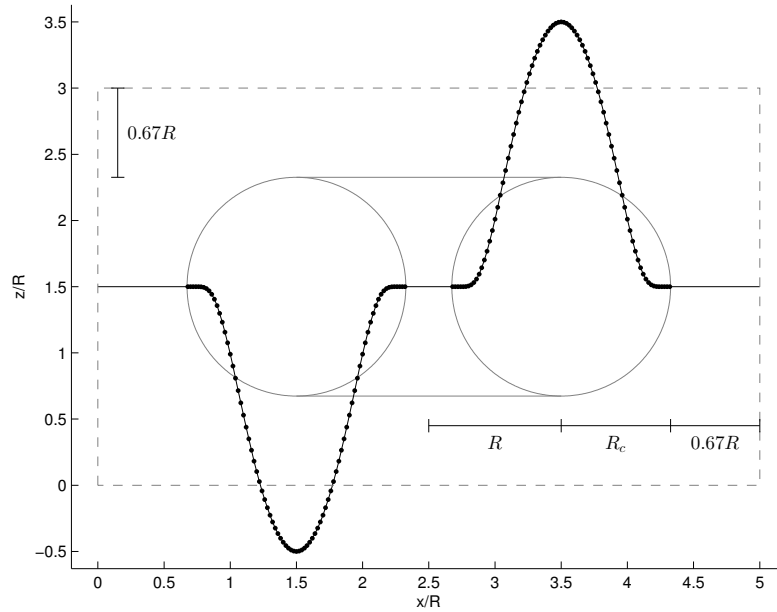


FIGURE 2.7 – Coupe de la condition initiale dans le plan  $x$ - $z$  en  $y = L_{0,y}/2$ . Les traits discontinus représentent la taille initiale du domaine de calcul. Les points représentent la position (en  $x$ ) des particules.

axiale aux temps suivants. À  $\tau = 120$ , l'anneau est fortement déformé mais présente néanmoins toujours des motifs réguliers. Cette configuration précède l'étape de saturation qui mène à la phase turbulente de déclin de l'anneau.

Une vue tri-dimensionnelle de ces temps peut être observée aux figures 2.9a-2.9f. Une faible déformation est présente au temps  $\tau = 100$  et est fortement amplifiée à  $\tau = 120$ . À ce temps, les dipôles évoqués précédemment sont clairement développés.

La circulation de l'anneau a été calculée dans le plan  $y = L_{0,y}/2$  comme suit :

$$\Gamma = \frac{1}{2} \int_{A^+} \omega_y \, dx dz - \frac{1}{2} \int_{A^-} \omega_y \, dx dz$$

avec  $A^+ = [L_x/2, L_x] \times [0, L_z]$  et  $A^- = [0, L_x/2] \times [0, L_z]$ . Son évolution est présentée à la figure 2.10 et comparée avec celle de l'anneau gaussien. La transition entre la phase transitoire et linéaire ( $\tau = 25$ ) est clairement marquée par le fait que la circulation commence à baisser à cet instant. On notera que la dissipation de circulation est légèrement plus rapide pour l'anneau gaussien. La dissipation abrupte de circulation en fin de simulation témoigne que l'anneau approche de la saturation.

L'entrophie  $\mathcal{E}$  d'un écoulement

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\omega} \cdot \boldsymbol{\omega} \, d\mathbf{x}$$

est une valeur intéressante à observer. En effet, elle quantifie la dissipation d'énergie. Pour un domaine périodique ou non-borné, l'on a :

$$\begin{aligned}\epsilon &= -\frac{dE}{dt} \\ &= 2\nu\mathcal{E}\end{aligned}$$

La figure 2.11 montre l'évolution de  $\mathcal{E}$  pour les deux types d'anneaux. On note que les courbes sont semblables mais présentent un offset. Cela est dû à la différence des profils initiaux. On observe deux pics durant la phase transitoire ce qui correspond bien à la dissipation d'énergie caractéristique à cette phase. L'énstrophie baisse ensuite avec la diffusion des profils puis augmente fortement en approchant de la saturation.

Les Reynolds de maille sont donnés aux figure 2.12a-2.12b. Grâce au maillage plus fin, on obtient des valeurs plus faibles que pour la simulation de l'anneau gaussien. La croissance rapide et les oscillations de  $Re_{h,\omega}$  en fin de simulation est imputable au fait qu'on se rapproche de la phase turbulente.

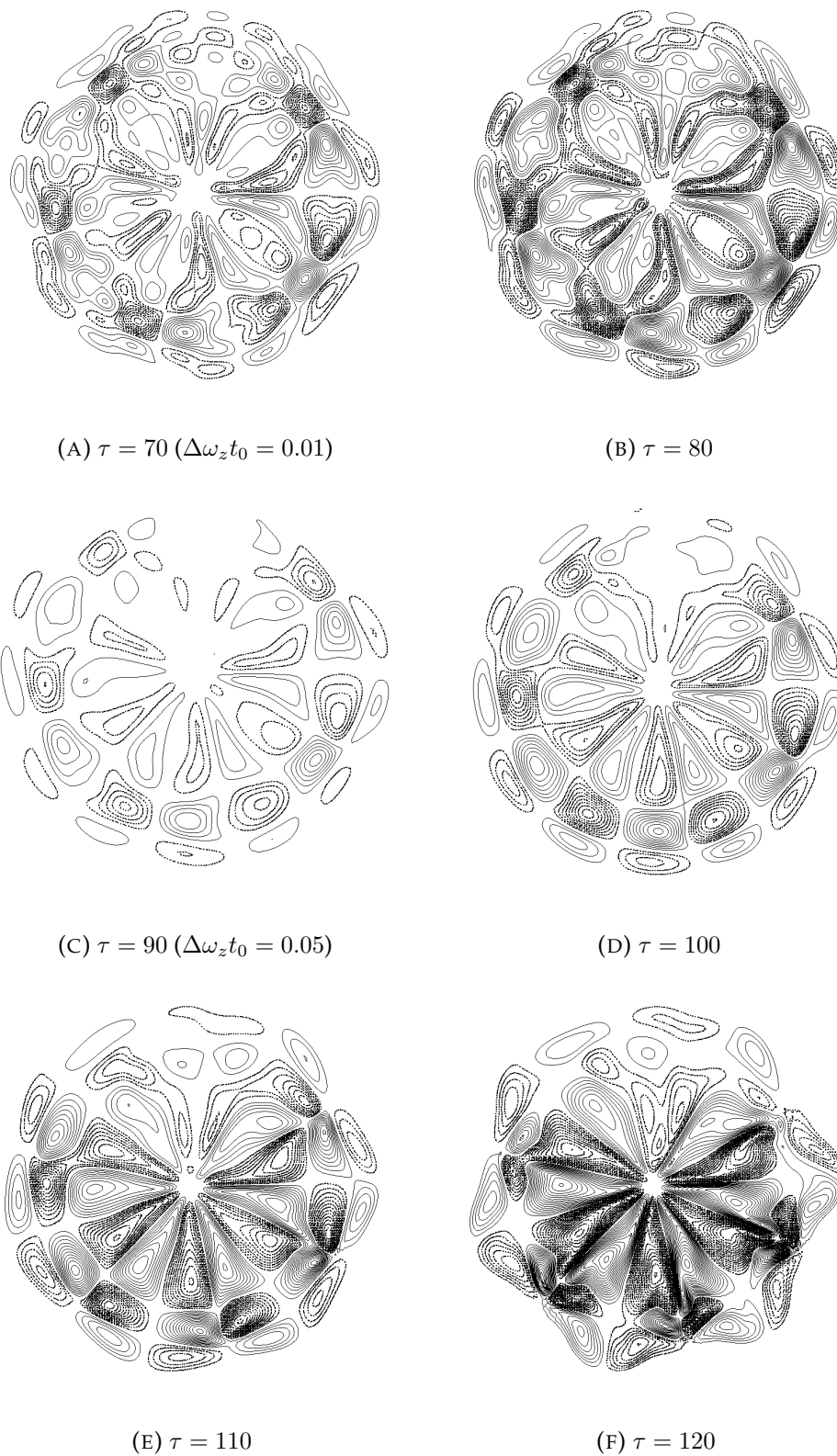


FIGURE 2.8 – Isocontours de  $\omega_z t_0$  dans le plan où  $\|\omega\|$  est maximum. Les lignes continues et discontinues représentent respectivement des valeurs positives et négatives. Les contours sont représentés par pas de  $\Delta\omega_z t_0 = 0.01$  ou  $\Delta\omega_z t_0 = 0.05$  (le changement d'échelle est indiqué).

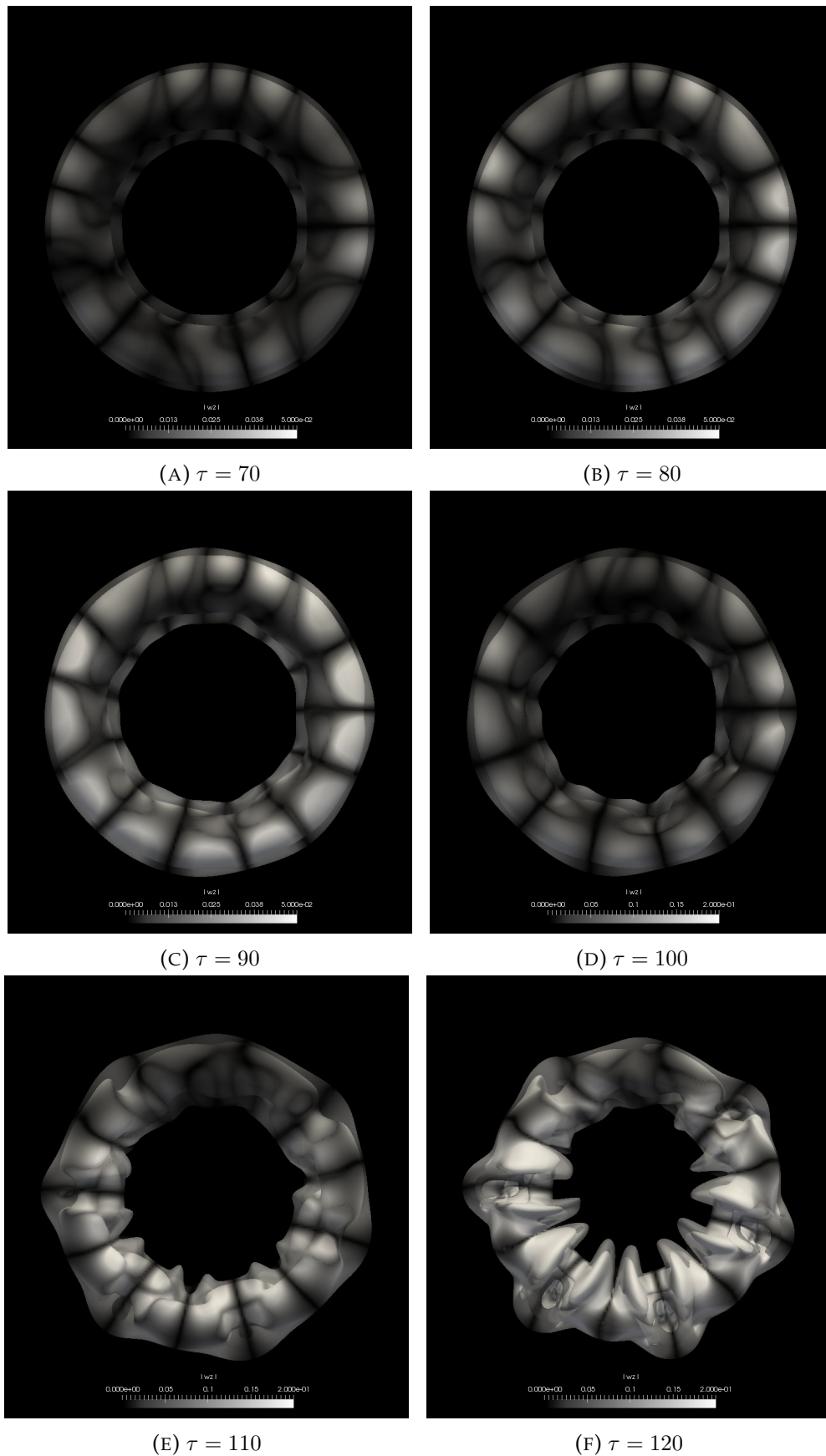


FIGURE 2.9 – Isosurfaces  $\|\omega\|t_0 = 1.0$  (opaque) et  $\|\omega\|t_0 = 0.686$  (semi-transparent). L'échelle de gris est proportionnelle à  $|\omega_z|$ .

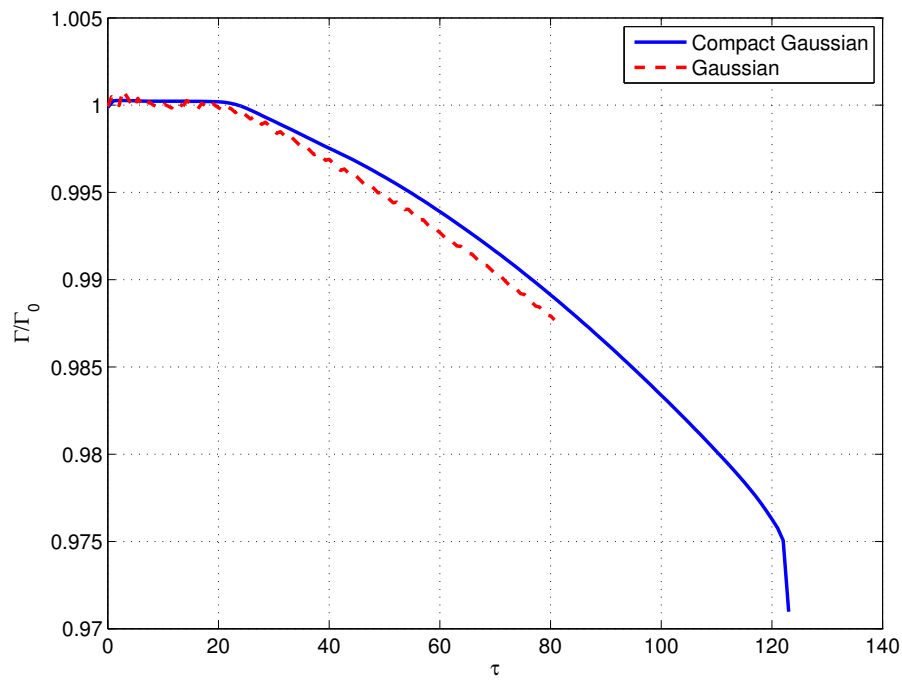


FIGURE 2.10 – Comparaison de l'évolution de la circulation pour l'anneau compact et gaussien.

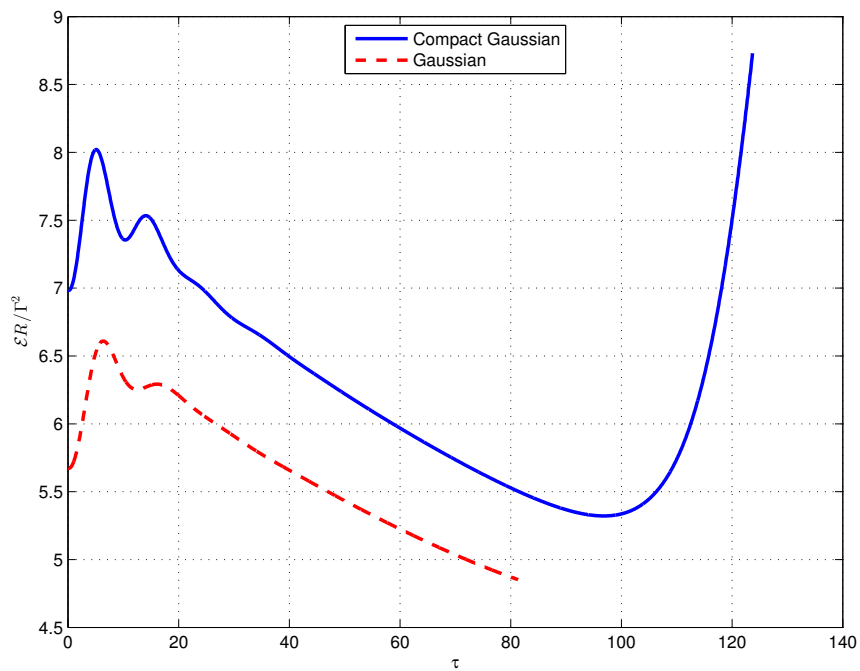


FIGURE 2.11 – Comparaison de l'évolution de l'enstrophie pour l'anneau compact et gaussien.

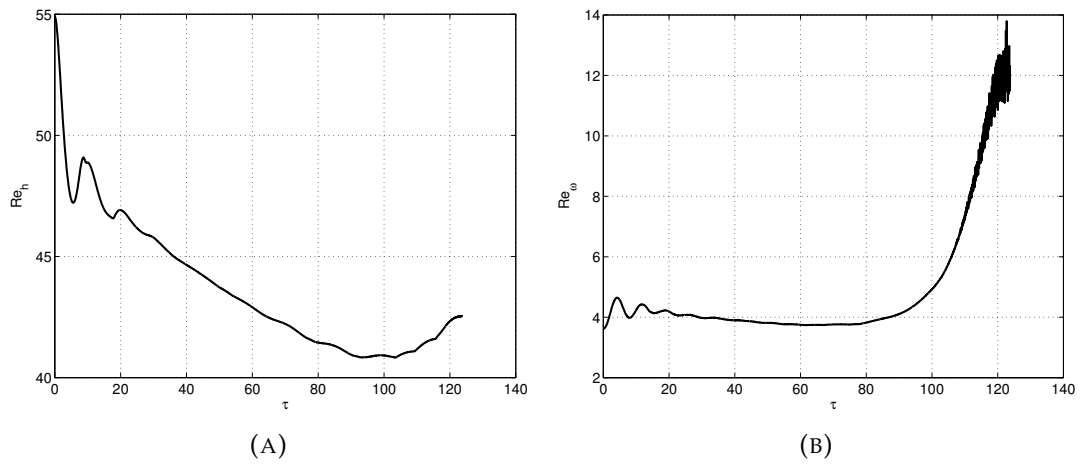


FIGURE 2.12 – Reynolds de maille basés sur la vitesse (gauche) et la vorticité (droite) pour l'anneau compact.

## 2.3 Conclusion

L'évolution d'anneaux isolés a été simulée avec deux types de profils de vorticité : gaussien et gaussien compact. L'anneau gaussien ayant été simulé jusqu'à la fin de sa phase linéaire, la comparaison de leur comportements s'arrête à ce temps là. Afin de rendre la comparaison des anneaux pertinente, un profil gaussien compact semblable au profil gaussien a été utilisé. La façon pour en obtenir les paramètres a été montr e avec toutefois un degré de liberté ( $R_c/\sigma_g$ ) devant être fixé. Malgré leur différence de profil, les anneaux ont une dynamique similaire. On note une différence au niveau du développement des instabilités par rapport aux modes excités. L'instabilité de Widnall ainsi que l'émergence des dipôles ont été capturés pour le profil compact.



## Chapitre 3

# Reconnexion d'anneaux vortex

### 3.1 Les échelles de Kolmogorov

Une notion importante à considérer par la suite est le phénomène de cascade d'énergie. Celle-ci exprime le fait que dans un écoulement, les tourbillons de grande échelle (dans notre cas, un anneau caractérisé par sa taille  $R$ ) sont instables<sup>1</sup> et se détériorent en transférant leur énergie aux plus petites échelles. Ce processus se poursuit jusqu'à ce que le nombre de Reynolds caractérisant ces petits tourbillons soit assez bas pour que leurs mouvements soient stables, la dissipation visqueuse étant alors beaucoup plus importante.

Les longueurs, vitesses et vorticités caractéristiques de ces petits tourbillons sont donnés par les échelles de Kolmogorov<sup>2</sup> :

$$\eta = \left( \frac{\nu^3}{\bar{\epsilon}} \right)^{1/4}$$

$$u_\eta = (\bar{\epsilon}\nu)^{1/4}$$

$$\omega_\eta = \left( \frac{\bar{\epsilon}}{\nu} \right)^{1/2}$$

Pour une simulation numérique de turbulence, il est donc essentiel de capturer le comportement de ces échelles. En SND, l'expérience montre que le maillage doit être tel que :

$$h \leq 2\eta$$

[14, 22].

F. Hussain (1983) [9] revendique que le phénomène de reconnexion joue un rôle majeur dans le déclenchement de cette cascade d'énergie. En effet, comme montré plus loin, la reconnexion de tube vortex n'est jamais complète car elle laisse derrière elle des parties non-reconnectées appelées "fils" ("threads") qui lient toujours entre eux les tubes initiaux. Ceux-ci subiraient des reconnexions successives, faisant apparaître des échelles de tourbillons toujours plus petites.

---

1. Comme on l'a vu au chapitre 2.

2. La notation  $\bar{X}$  réfère à la valeur de  $X$  par unité de volume :  $\bar{X} = X/V$ .

Ce phénomène est ce qui motive la capture des échelles de Kolmogorov pour les simulations présentées ci-dessous.

### 3.2 La reconnexion anti-parallèle

Lorsque deux tubes vortex dont les lignes centrales sont coplanaires interagissent fortement ensemble, plusieurs scénarios peuvent se produire [21] :

- S'ils sont de même signe, ils fusionnent et finissent par ne former qu'un seul tube.
- S'ils sont de signes opposés et d'intensités différentes, les deux tubes ne peuvent s'unifier et engendrent des turbulences.
- S'ils sont de signes opposés et de même intensité, il y a reconnexion des tubes. Ce dernier cas de figure est au coeur de notre prochaine étude.

En particulier, l'on s'intéresse à l'expérience réalisée par Schatzle (1987) [17]. Celle-ci montre comment deux anneaux vortex de même intensité et de signes opposés interagissent ensemble à  $Re_{\Gamma} \simeq 1800$ . Chaque anneau est généré à l'aide d'un canon à anneaux tourbillonnaires. Il s'agit grossièrement d'un piston coulissant dans un cylindre creux. Le mouvement du piston crée une discontinuité dans le champ de vitesse à la sortie du cylindre, ce qui engendre une couche de cisaillement qui s'enroule pour former un anneau tourbillonnaire. Après qu'ils aient été générés par le dispositif, les anneaux se dirigent l'un vers l'autre grâce à leur mouvement proprement induit. Leur collision enclenche un processus de reconnexion appelé fusion car elle résulte en une seule structure, un anneau déformé. Celui-ci évolue ensuite dans une configuration telle que deux parties du tube finissent par entrer en contact. Une seconde reconnexion, appelée fission, a lieu et l'anneau se sépare en deux anneaux distincts.

P.G. Saffman (1990) [15] a proposé un modèle de la reconnexion en se basant sur l'expérience de Schatzle : "Les tubes vortex se translatent [l'un vers l'autre] par leur mouvement proprement induit. On peut clairement le voir dans les photographies de Schatzle. Nous supposons que cette translation n'affecte pas significativement la dynamique des tubes. Par leur champ de vitesse induit, les tubes sont écrasés l'un contre l'autre à une vitesse exponentielle. Nous supposons que cela déforme les tubes en formes elliptiques (...) [dans le plan médian<sup>3</sup>]. Au même moment, la diffusion visqueuse entraîne une annulation de la vorticit   car la vorticit   des tubes est de signe oppos  . Cela r  duit la rotation et les forces centrifuges au sein des tubes, ce qui augmente la pression localement. Loin du [plan transversal<sup>4</sup>], les tubes seront moins m  l  s l'un    l'autre et la pression en leur sein sera plus faible. En cons  quence, un

3. Plan de symm  trie s  parant les anneaux.

4. Plan de symm  trie passant par les deux anneaux.

gradient de pression est créé dans les tubes, ce qui entraîne une déformation positive dans [la direction tangente aux tubes]. Cet effet, à son tour, intensifie la déformation rapprochant les tubes et augmente la diffusion de vorticité et la pression. Donc, nous nous attendons à un feedback positif pour l'annulation de vorticité. Ce processus va se propager le long des tubes et couper les vortex de façon efficace. La réassociation des lignes vortex n'est plus maintenant vue comme un processus de séparation mais comme une conséquence du théorème cinématique qui impose que les lignes vortex ne peuvent pas se finir au sein d'un fluide. Il s'agit ici du mécanisme physique dans lequel l'annulation visqueuse génère des accélérations axiales contrôlées par la pression."

La reconnexion des tubes vortex est, comme déjà mentionné, incomplète. Des parties reconnectées, appelées "ponts", se forment et des fils lient toujours les tubes initiaux. Les travaux récents de Beardsell, Dufresne et Dumas (2016) [2] ont mis en pratique une méthode permettant de visualiser la topologie lors de la reconnexion. Cette méthode a permis de mettre en lumière une nouvelle structure apparaissant au sein de la reconnexion de tubes anti-parallèle à nombre de Reynolds  lev  ( $Re_\Gamma = 9000$ ) : un anneau vortex. Celui-ci n'est ni reconnecté ni non-reconnecté, il est fermé sur lui-même, indépendant.

### 3.2.1 Condition initiale et paramètres de la simulation

L'on s'intéresse cette fois à un anneau plus fin que présenté précédemment (montré à la figure 3.1). Il s'agit toujours d'un anneau compact mais dont le paramètre  $\beta$  est plus faible. Il est caractérisé par  $\beta = 1/4$ ,  $R_c/R = 1/2$  et  $C(\beta^2) = 1.1118664828$ . Un tel anneau requiert plus de ressources de calcul à cause de sa finesse et de sa vorticité au centre plus importante. Bien que le profil soit défini sur  $s/R < 1/2$ , on peut se rendre compte visuellement que la vorticité ne reste pas significative jusqu'en  $s/R = 1/2$ . On considère dès lors que ce type d'anneau a un profil de vorticité significatif pour  $s/R < 1/4$  car la vorticité en  $s/R = 1/4$  représente  $\sim 0.5\%$  de la vorticité au centre.

L'expérience de Schatzle a été reproduite en SND    $Re_\Gamma = 5000$ . Comme représenté à la figure 3.2, les centres des anneaux sont initialement séparés de  $S/R = 3$ . Les anneaux ont un angle d'incidence  $\theta$  de  $15^\circ$ .

Une première simulation sous-résolue a été réalisée avec un maillage  $h/R = 0.01$ . Le but était d'avoir un aperçu de l'évolution des variables globales afin d'avoir une idée des ressources à utiliser pour la simulation résolue. Cela a permis de connaître la taille du buffer à utiliser pour que les dimensions du domaine en  $x$  et  $y$  ne croissent pas et ainsi garder le nombre de points spécifié initialement dans ces directions. La simulation a capturé les temps jusque  $\tau = 50$  et a révélé qu'une seule reconnexion avait lieu, la fusion des anneaux. Les temps  $\tau > 10$  capturent la convection d'un

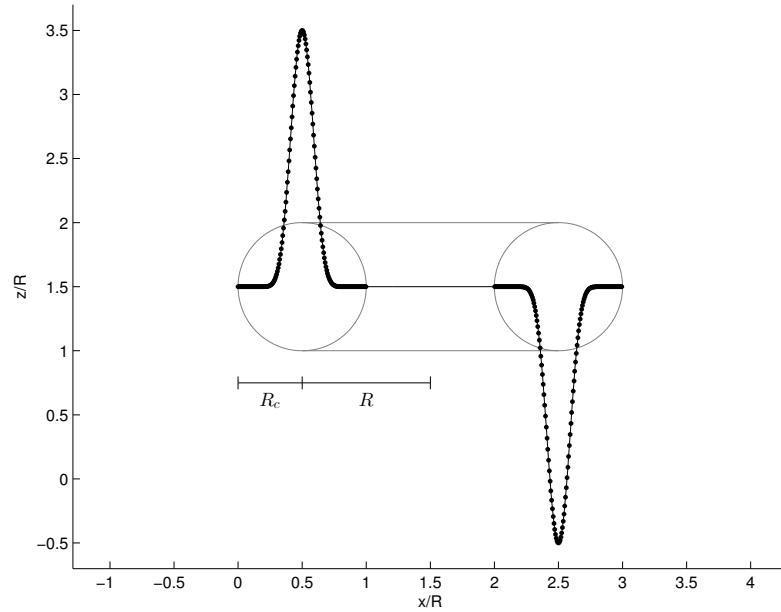


FIGURE 3.1 – Profil de vorticité de l'anneau utilisé pour la simulation de reconnexion. Les points représentent la position (en  $x$ ) des particules pour une discrétisation  $h/R = 0.006$ .

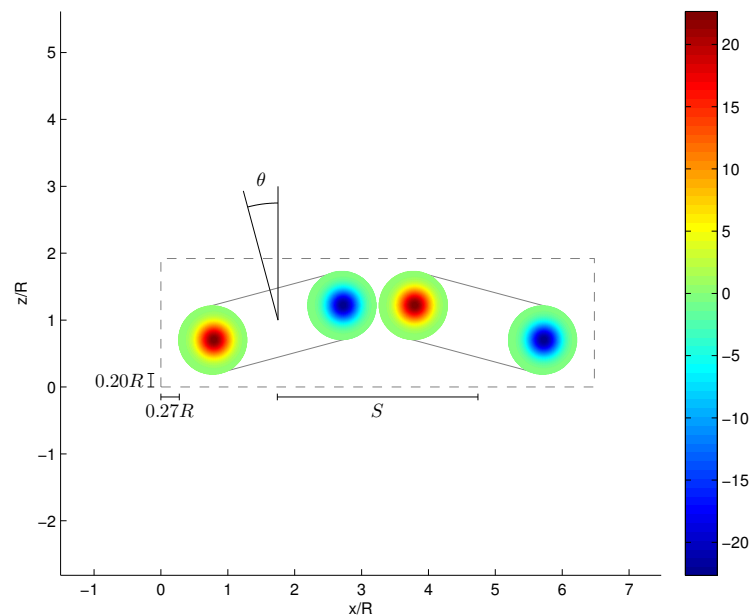


FIGURE 3.2 – Coupe de la condition initiale dans le plan  $x$ - $z$  en  $y = L_y/2$ . Les traits discontinus représentent la taille initiale du domaine de calcul.

anneau déformé et ne présentent pas d'intérêt ici. Finalement, cela a permis d'avoir une idée du maillage à utiliser pour capturer les échelles de Kolmogorov à partir de l'évolution de l'ensrophie.

Un maillage  $h/R = 0.006$  a été utilisé. Les remaillages se font tous les 5 pas de temps et les reprojctions tous les 4 remaillages. Le domaine de calcul est non-borné. Sa taille initiale est  $[L_{0,x}/R, L_{0,y}/R, L_{0,z}/R] = [6.48, 3.89, 1.92]$  et le nombre de points

initial dans chaque direction est  $[N_{0,x}, N_{0,y}, N_{0,z}] = [1080, 648, 320] = [2^3 3^3 5, 2^3 3^4, 2^6 5]$ . Le seuil de vorticité pour l'agrandissement du domaine a été fixé à  $2.0 \times 10^{-3} \omega_0$ . Le buffer est  $[B_x/R, B_y/R, B_z/R] = [0.2741, 0.4440, 0.2012]$ .

Pour s'assurer de la précision et véracité physique de la simulation, les valeurs du moment d'inertie  $\mathbf{I}$  et du moment angulaire d'inertie  $\mathbf{A}$  sont monitorées. Ils sont exprimés comme suit :

$$\mathbf{I} = \frac{1}{2} \int \mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega} \, d\mathbf{x} \quad \mathbf{A} = \frac{1}{3} \int \mathbf{x} \times (\mathbf{x} \times \boldsymbol{\omega}) \, d\mathbf{x}$$

Il s'agit de valeurs conservées en l'absence de forces non conservatives. Le pas de temps a été adapté selon ce critère. La simulation a d'abord été réalisée avec le pas de temps adaptatif décrit au chapitre 1, ce qui s'est avéré insuffisant car les moments n'étaient pas conservés. Le pas de temps a alors été fixé à  $\Delta\tau_{max} = \Delta t/t_0 = 0.002$ .

### 3.2.2 Analyse des résultats

La simulation a tourné sur 128 processeurs ( $8 \times 4 \times 4$ ) durant  $\sim 145$  heures. Le nombre de mailles initial était de  $\sim 224$  millions et a augmenté jusque  $\sim 525$  millions. Le domaine dans la direction  $z$  s'est agrandi en passant de  $z/R = [0 \ 1.92]$  à  $z/R = [-2.5 \ 1.92]$ .

La conservation des composantes non nulles de  $\mathbf{I}$  et  $\mathbf{A}$  est montr e aux figures 3.3a-3.3b. On note néanmoins de faibles variations.

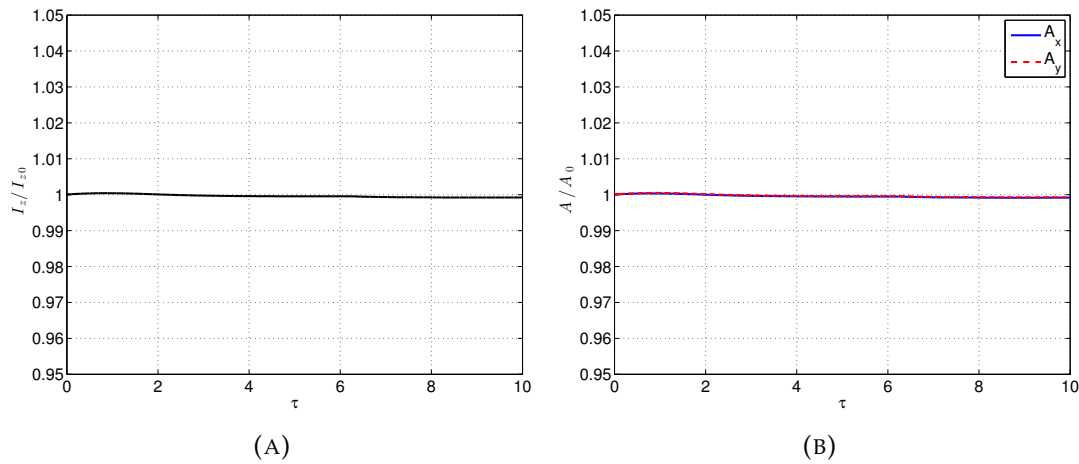


FIGURE 3.3 – Conservation de la composante du moment d'inertie  $I_z$  (gauche) et des composantes du moment angulaire d'inertie  $A_x$  et  $A_y$  (droite) au long de la simulation.

La reconnexion est représentée aux figures 3.4a-3.4g. On peut d'abord observer les anneaux entrer en collision et se déformer localement (3.4a). Les tubes sont

fortement aplatis l'un contre l'autre, ce qui engendre de hautes valeurs de vorticité (3.4b). Des ponts (parties reconnectées) sont formés entre les anneaux par réassociation des lignes vortex (3.4c). Ceux-ci s'éloignent rapidement l'un de l'autre grâce au mouvement proprement induit par leur courbure (3.4b-3.4d). Cela étire la structure aplatie et la sépare en deux dipôles (voir paragraphe sur la coupe en  $y = L_{0,y}/2$ ) ou fils non-reconnect s dans lesquels la vorticité est concentrée. Enfin, le champ de vitesse induit par les ponts fait s'enrouler les fils autour de ceux-ci (3.4d-3.4g).

L'évolution de circulation dans les directions  $x$  et  $y$  peut être vue à la figure 3.5. Elles ont été calculées dans les plans  $x = L_{0,x}/2$  et  $y = L_{0,y}/2$  et en valeur absolue, c'est à dire :

$$\Gamma_y = \int_S |\omega_y| dS$$

dans la direction  $y$  par exemple. L'évolution de  $\Gamma_y$  a permis d'identifier trois phases du processus de reconnexion comme l'ont fait Melander et Hussain (1988) [12] en traçant trois droites tangentes à  $\Gamma_y$  : une en début de simulation ( $\tau = 0$ ), une au point d'inflexion et une en fin de simulation ( $\tau = 10$ ). Les trois phases sont :

- Phase d'advection non-visqueuse en  $\tau < 5.68$  : les anneaux se rapprochent mutuellement avec une dissipation visqueuse négligeable.
- Phase de reconnexion ("bridging") en  $5.68 < \tau < 6.57$  : les lignes vortex sont r associ es de la direction  $y$  vers  $x$  ce qui provoque une baisse de circulation.
- Phase d'étirement des fils ("threading") en  $\tau > 6.57$  : les fils sont étirés par les ponts et se détériorent.

On remarque, comme annoncé pr c mment, que la reconnexion des tubes vortex est incomplète : on observe un saut de circulation  $\Delta\Gamma_y/\Gamma_0 \simeq -1$  et non  $\Delta\Gamma_y/\Gamma_0 = -2$  lors de la phase de reconnexion à cause des fils restants. Le saut  $\Delta\Gamma_x/\Gamma_0 \simeq 2$  est en fait une somme de la reconnexion incomplète des tubes et de la vorticité présente dans les fils (voir coupes ci-dessous). Après reconnexion,  $\Gamma_x$  n'augmente que très peu.

Les figures 3.6a-3.6l montrent l'évolution de  $\omega_x t_0$  dans le plan  $x = L_{0,x}/2$  lors de la reconnexion. L'augmentation de la vorticité axiale témoigne de la génèse des ponts. On voit dès lors que le processus de reconnexion est initié dans la partie supérieure de la structure aplatie et se poursuit à mesure que les ponts s'éloignent. En s'éloignant, ils ont un mouvement tourbillonnant et s'enroulent sur eux-mêmes pour former un tube dont la vorticité est concentrée sur les bords : un tube creux.

Les figures 3.7a-4.4n montrent l'évolution de  $\omega_y t_0$  dans le plan  $y = L_{0,y}/2$  lors de la reconnexion. L'aplatissement des tubes combiné à l'augmentation de  $|\omega_y|$  rendent le terme de diffusion  $\nu |\partial^2 \omega_y / \partial^2 x|$  important dans la direction  $x$ . L'annulation visqueuse opère et les lignes vortex sont r associ es, ce qui réduit fortement

les valeurs de  $|\omega_y|$  pour  $\tau > 6.3$ . On note également la formation de deux dipôles semblables à ceux observés par Beardsell, Dufresne et Dumas à  $Re_\Gamma = 2000$ .

L'annulation visqueuse est au coeur du phénomène de reconnexion, il est donc crucial de capturer adéquatement ce phénomène. Les dipôles présents ici ont une épaisseur minimale de l'ordre de  $\sim 0.066R$ , soit 11 points de maillage, on voit donc ici la raison pour laquelle cette simulation est coûteuse en terme de ressources de calcul : les échelles de l'ordre du rayon de l'anneau jusqu'à l'épaisseur de la nappe doivent être capturées. De plus, l'annulation visqueuse étant nécessaire à la reconnexion, on voit l'épaisseur des nappes de vorticité diminuer avec l'augmentation de  $Re_\Gamma$ . En effet, de plus grands gradients de vorticité sont nécessaires à rendre le terme visqueux  $\nu |\partial^2 \omega_y / \partial^2 x|$  important. La limite en  $Re_\Gamma = \infty$  est une nappe de vorticité d'épaisseur infinitésimale.

L'évolution de l'ensrophie est présentée à la figure 3.8. Deux pics peuvent être observés. Le premier a lieu à  $\tau = 1.36$  et correspond à la phase transitoire des anneaux comme il a été vu au chapitre précédent. L'on remarque que ce pic est significativement plus important que celui vu dans les simulations du chapitre 2 à cause de la différence d'épaisseur des deux types d'anneaux.   partir de  $\tau = 4.94$ , l'aplatissement des tubes entraîne une nouvelle croissance d'ensrophie qui mène au second pic à  $\tau = 6.16$ . Celui-ci est la manifestation de l'initiation des ponts et de la formation des fils. En prenant la valeur maximale de  $\mathcal{E}$ , on voit que l'on respecte la contrainte pour capturer l'échelle de Kolmogorov ( $h/\eta < 2$ ) car  $h/\eta = 0.6706$ .

Les Reynolds de maille sont montrés aux figures 3.9a-3.9b. Les pics de  $Re_h$  en  $\tau = 5.62$  et  $\tau = 6.53$  correspondent respectivement à l'écrasement des tubes et à l'éloignement brusque des ponts. Deux pics sont également présents pour  $Re_{\omega,h}$  en  $\tau = 6.32$  et  $\tau = 7.89$ . Le plus important a lieu à la formation des dipôles et le second après la phase de reconnexion à cause de la concentration de vorticité sur les bords des tubes reconnect s.

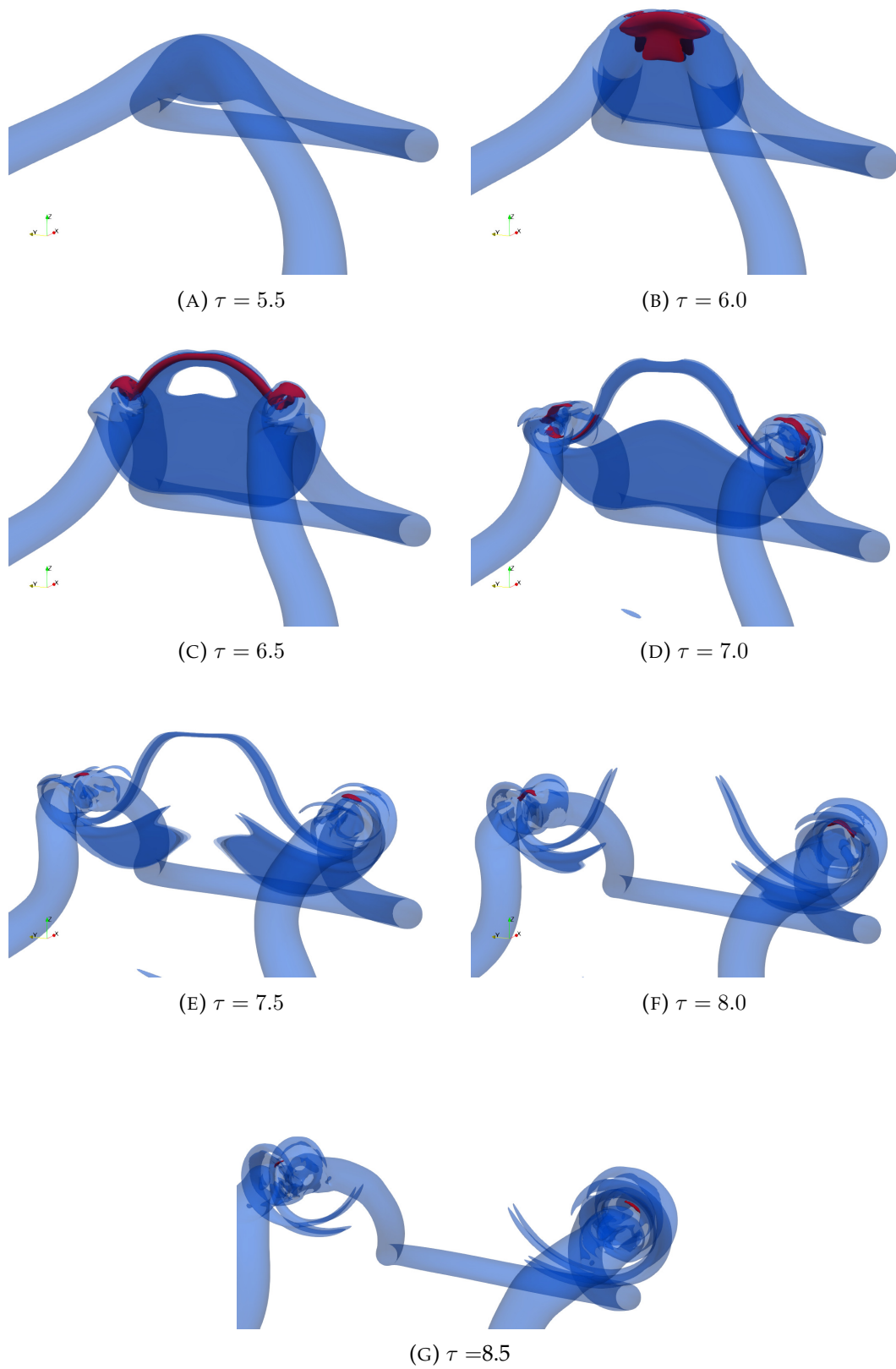


FIGURE 3.4 – Isosurfaces de la norme de vorticit       $\|\omega\|/\omega_0 = 0.4$  (bleu, translucide) et  $\|\omega\|/\omega_0 = 2$  (rouge, opaque)

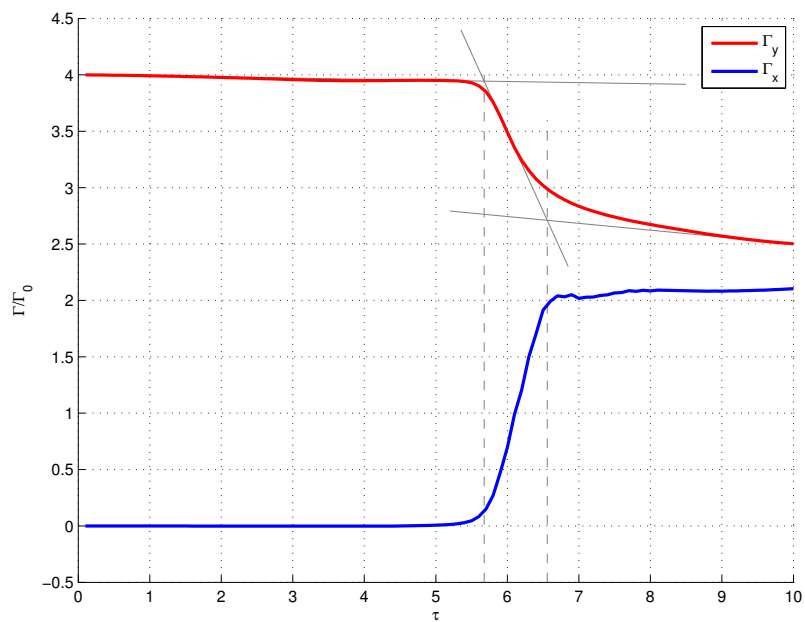
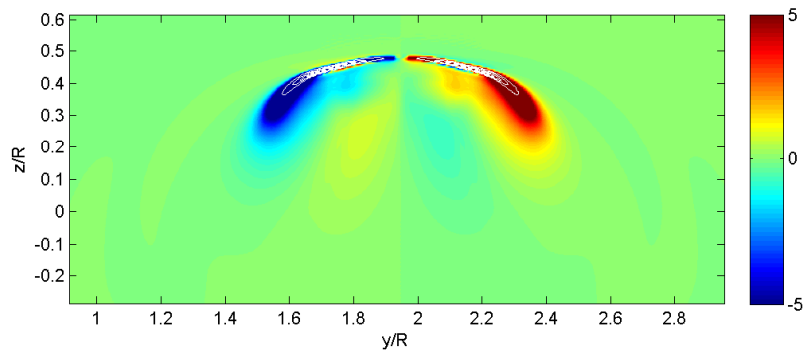
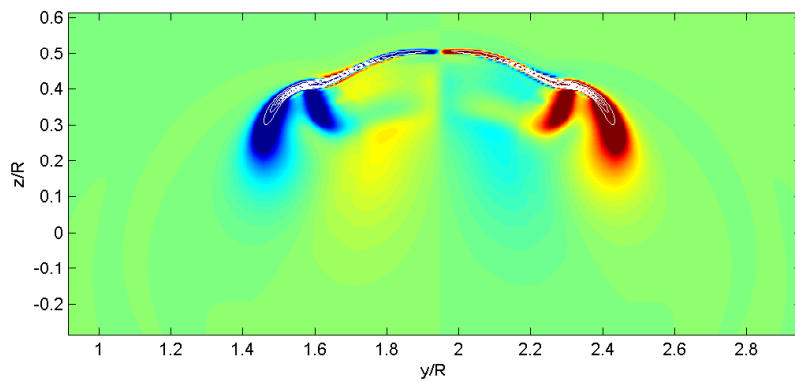
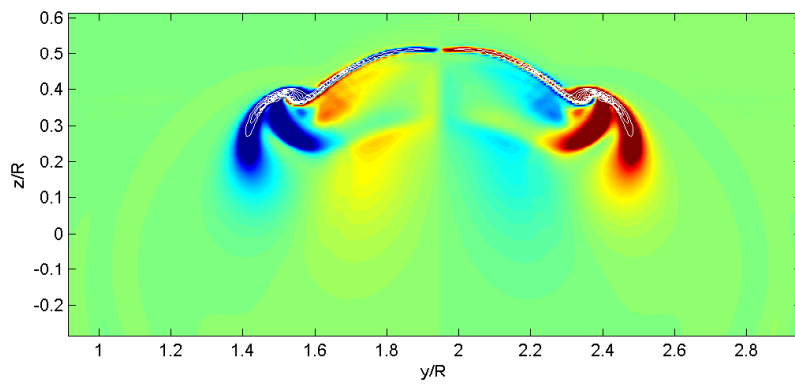
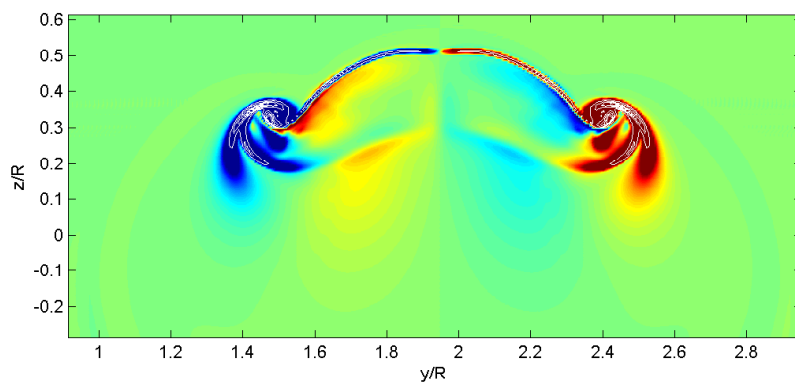
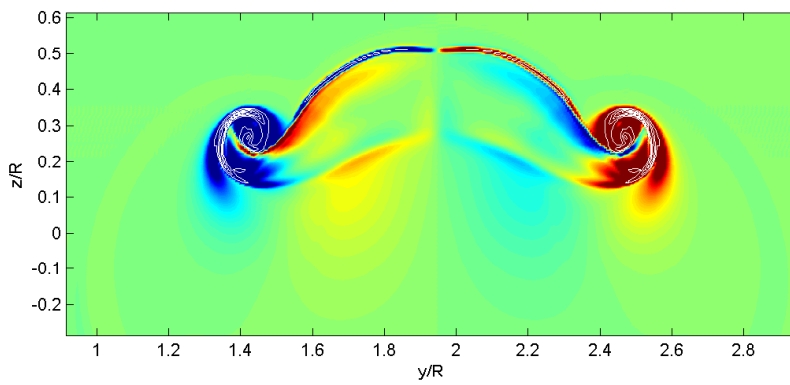
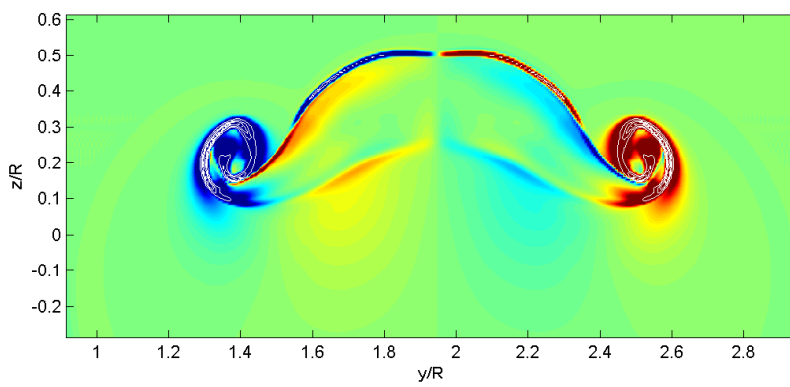
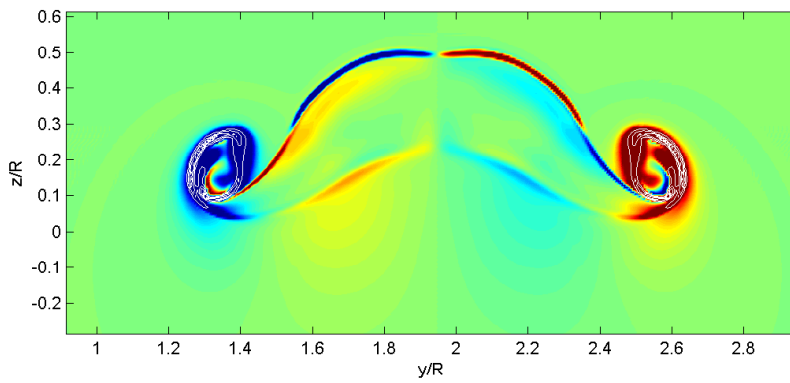
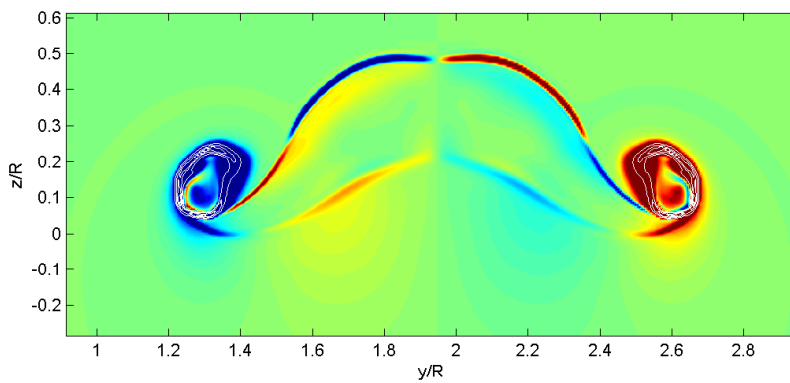


FIGURE 3.5 – Évolution des circulations dans les directions  $x$  et  $y$ . Les lignes tangentes sont représentées en gris et les différentes phases sont indiquées par les lignes grises en pointillés.

(A)  $\tau = 6.1$ (B)  $\tau = 6.3$ (C)  $\tau = 6.4$ (D)  $\tau = 6.5$

(E)  $\tau = 6.6$ (F)  $\tau = 6.7$ (G)  $\tau = 6.8$ (H)  $\tau = 6.9$

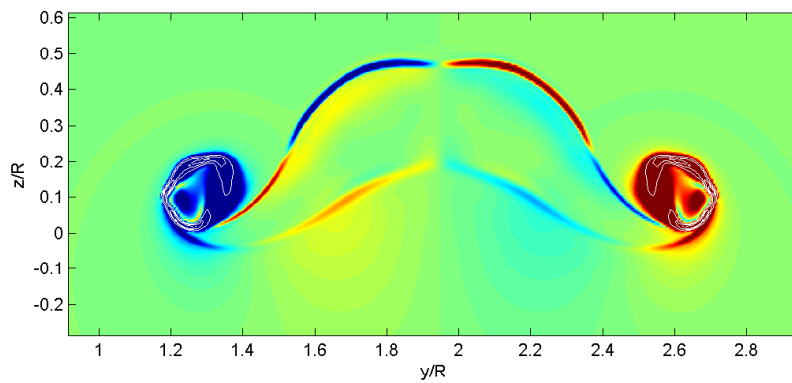
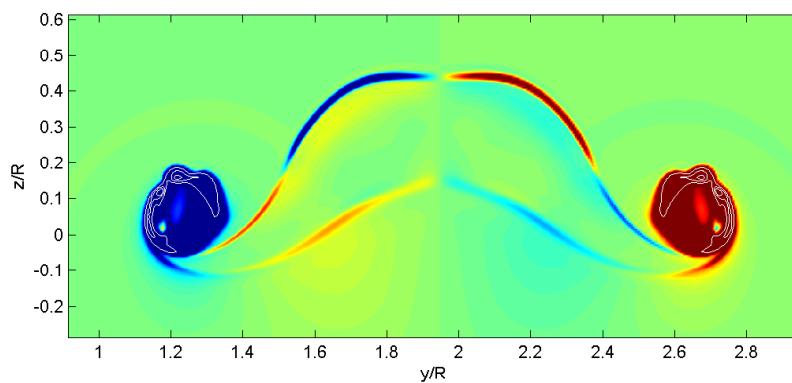
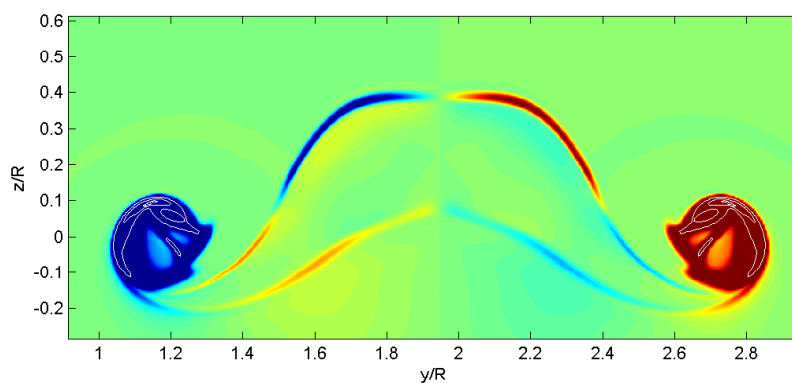
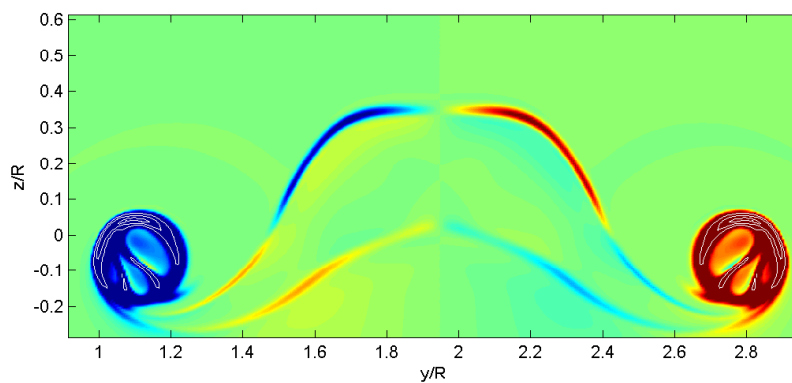
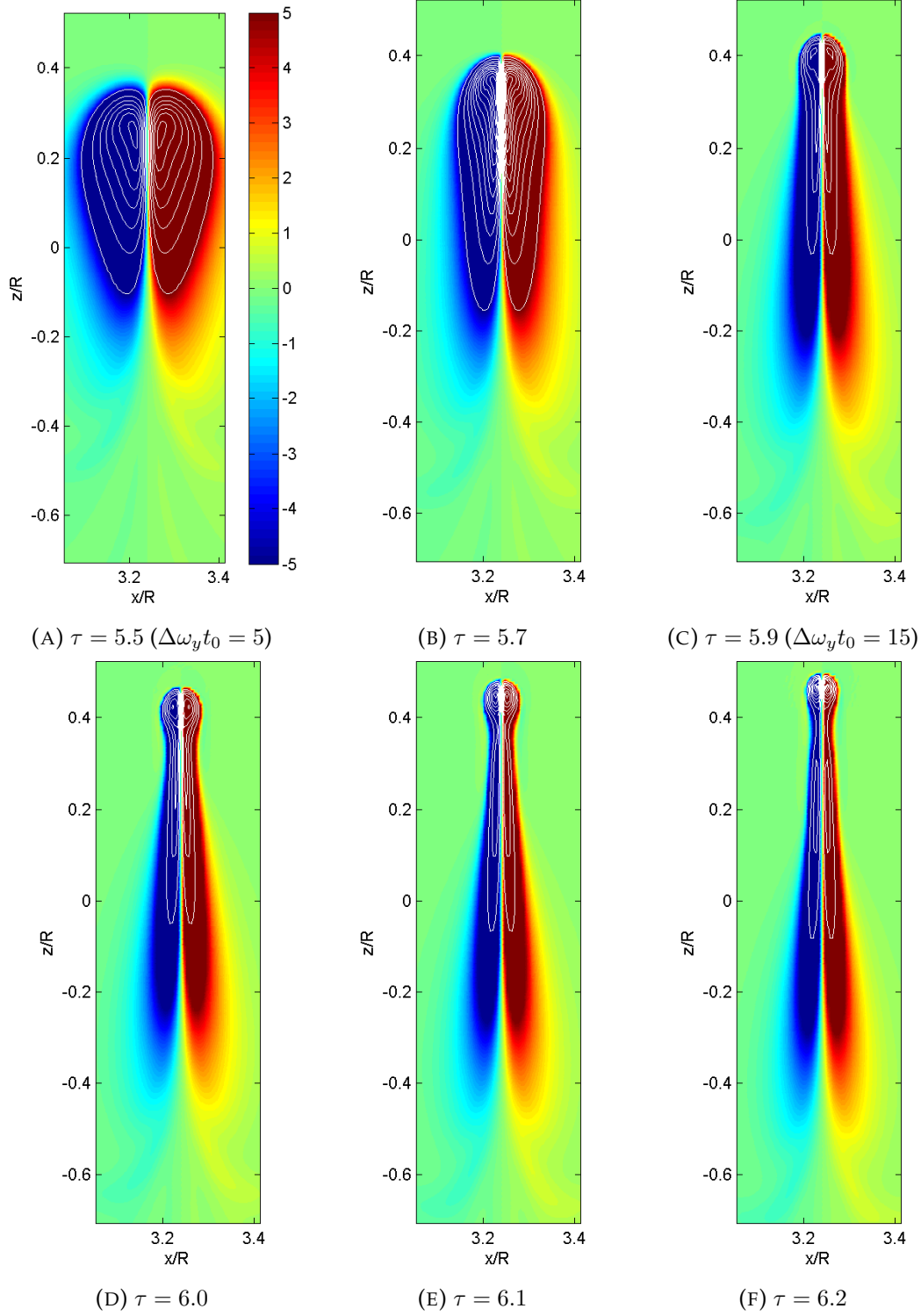
(I)  $\tau = 7.0$ (J)  $\tau = 7.2$ (K)  $\tau = 7.5$ (L)  $\tau = 7.7$ 

FIGURE 3.6 – Coupe  $\omega_x t_0$  dans le plan  $x = L_{0,x}/2$ . Les isocontours des valeurs élevées sont représentés par pas de  $\Delta\omega_x t_0 = 20$ .



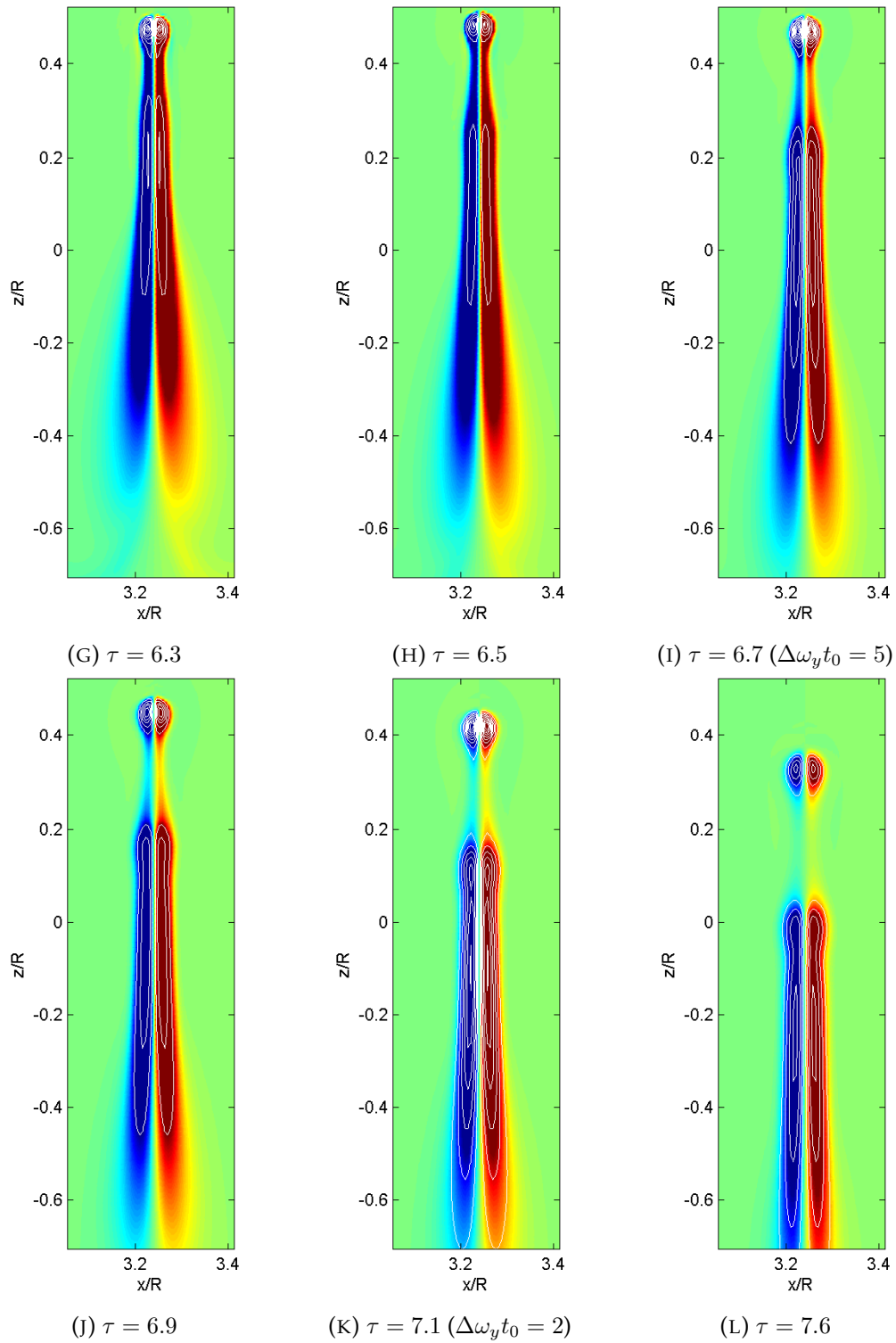


FIGURE 3.7 – Coupe  $\omega_y t_0$  dans le plan  $y = L_{0,y}/2$ . Les isocontours sont représenté par pas de  $\Delta\omega_y t_0 = 15$ ,  $\Delta\omega_y t_0 = 5$  ou  $\Delta\omega_y t_0 = 2$  (les changements d'échelle sont indiqués).

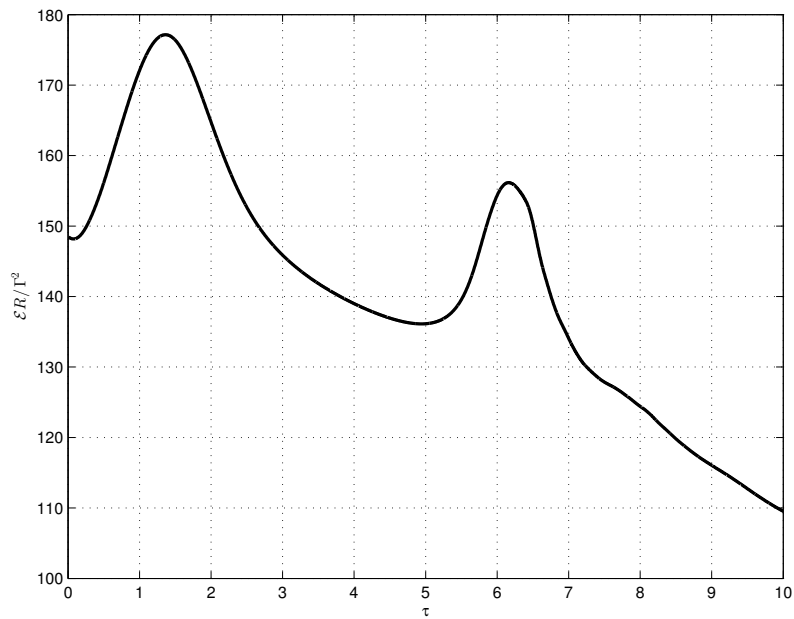


FIGURE 3.8 – Évolution de l'énstrophie.

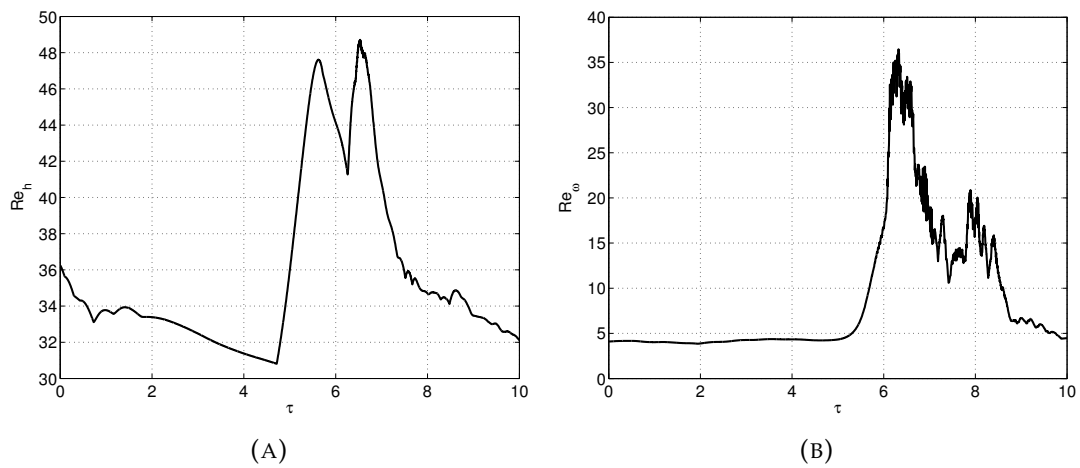


FIGURE 3.9 – Reynolds de maille basés sur la vitesse (gauche) et la vorticité (droite) pour la reconnexion des anneaux.

### 3.3 Anneaux entrelacés

Cette section étudie l'écoulement provoqués par deux anneaux entrelacés. Ils s'agit ici d'une topologie différente de celle de l'expérience de Schatzle car les deux anneaux sont liés. Dès lors, il est pertinent d'introduire une nouvelle quantité, l'hélicité :

$$\mathcal{I} = \int \boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{u} \, d\mathbf{x} \quad (3.1)$$

Afin de décrire cette grandeur, une nouvelle appellation est introduite : le filament vortex. Un filament vortex est un tube vortex de section infinitésimale. Comme remarqué par Moffat (1969) [13], l'hélicité représente le degré d'entrelacement des filaments vortex. En effet, après développement, il a exprimé pour un écoulement constitué de  $n$  filaments<sup>5</sup> :

$$\mathcal{I} = \sum_i \sum_j \Gamma_i \Gamma_j \frac{1}{4\pi} \oint_{C_i} \oint_{C_j} \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j|^3} \cdot (d\mathbf{l}_i \times d\mathbf{l}_j) \quad \text{pour } i, j \in [1, n] \quad (3.2)$$

Avec  $\Gamma_i$  et  $\Gamma_j$  les circulations des filaments de contour  $C_i$  et  $C_j$ , avec  $\mathbf{x}_i \in C_i$  et  $\mathbf{x}_j \in C_j$ . Cette double intégrale mesure le degré d'entrelacement entre  $C_i$  et  $C_j$  si  $i \neq j$  et d'entortillement (bobinage et nouage) d'un seul filament dans le cas où  $i = j$ . Les termes évoqués ici sont illustrés à la figure 3.10.

L'on peut étendre ce raisonnement à des tubes d'épaisseur finie en les divisant chacun en amas de  $N$  filaments d'intensité  $\Gamma/N$ . L'on peut ensuite caculer l'expression (3.2) dans le cas où  $N \rightarrow \infty$  [4, 1] et décomposer l'hélicité en trois termes distincts :

$$\mathcal{I} = \sum_i \sum_{j \neq i} \Gamma_i \Gamma_j \mathcal{L}_{ij} + \sum_i \Gamma_i^2 (Wr_i + Tw_i) \quad (3.3)$$

Où  $\mathcal{L}_{ij}$  est le nombre d'entrelacement ("linking") entre les amas  $i$  et  $j$ ,  $Wr_i$  le nombre d'entortillement ("writhe") de l'amas  $i$  et  $Tw_i$  le nombre de torsion ("twist") de l'amas  $i$ . Ces nombres sont des entiers : par exemple, pour une paire d'anneaux entrelacés, l'on a  $\sum \mathcal{L} = 2$ . L'entortillement et la torsion peuvent en fait être vus comme des entrelacements entre filaments d'un même amas de filaments. Pour s'en convaincre, il suffit de séparer un amas de circulation  $\Gamma$  en deux amas de circulation  $\Gamma/2$  et de noter qu'ils sont entrelacés comme montré à la figure 3.10 [18].

Par exemple, l'anneau bobiné qui y est illustré a  $\mathcal{I}/\Gamma^2 = 1$ . Pour s'en convaincre, on

5. Cette expression est obtenue en remplaçant  $\mathbf{u}$  par  $-\frac{1}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{x}-\mathbf{x}') \times \boldsymbol{\omega}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} d\mathbf{x}'$  (loi de Biot-Savart) dans (3.1). Ceci correspond au champ de vitesse induit par le champ de vorticité dans un domaine non-borné. L'expression (3.2) reste toutefois correcte pour un domaine borné.

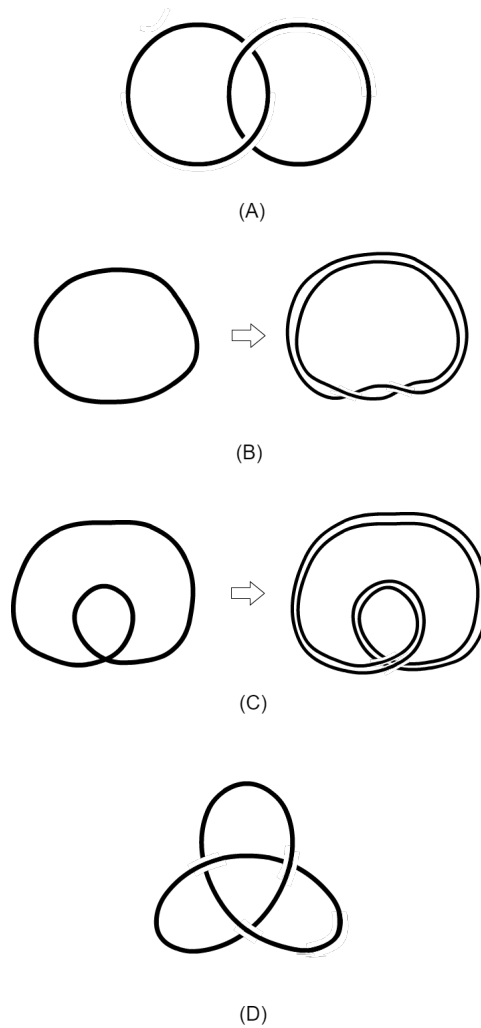


FIGURE 3.10 – Différentes composantes de l'hélicité. (A) : entrelacement, (B) : torsion, (C) : bobinage et (D) : nouage. Pour (B) et (C), les anneaux de circulation  $\Gamma$  sont séparés en deux anneaux de circulation  $\Gamma/2$

exprime :

$$\begin{aligned}
 \mathcal{I}/\Gamma^2 &= Wr_0 + Tw_0 \\
 &= \frac{1}{4} (\mathcal{L}_{1,2}^1 + \mathcal{L}_{2,1}^1 + Wr_1^1 + Tw_1^1 + Wr_2^1 + Tw_2^1) \\
 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (Wr_1^1 + Tw_1^1 + Wr_2^1 + Tw_2^1)
 \end{aligned}$$

Où  $Wr_i^n$  est le nombre d'entortillement de l'anneau  $i$  correspondant à la  $n$ -ième

séparation. Chaque anneau est ensuite divisé en une paire d'anneaux de demie circulation de façon récursive :

$$\begin{aligned}
\mathcal{I}/\Gamma^2 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \left( \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (Wr_1^2 + Tw_1^2 + Wr_2^2 + Tw_2^2) + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} (Wr_3^2 + Tw_3^2 + Wr_4^2 + Tw_4^2) \right) \\
&= \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} (Wr_1^2 + Tw_1^2 + Wr_2^2 + Tw_2^2 + Wr_3^2 + Tw_3^2 + Wr_4^2 + Tw_4^2) \\
&= \dots \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{4^n} \sum_{i=1}^{2n} Wr_i^n + Tw_i^n \\
&= 1 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n\mathcal{O}(1)}{4^n} \\
&= 1
\end{aligned}$$

Un raisonnement similaire peut être effectué pour l'anneau torsadé pour lequel  $\mathcal{I}/\Gamma^2 = 1$  également.

L'on est en droit de se demander si l'étude de tubes entrelacés ou noués a réellement un intérêt ou s'il s'agit de configurations artificielles qui n'apparaissent pas dans la nature. En fait, il est possible que la couche limite d'un fluide sur une paroi solide d'un corps immergé provoque une variation d'hélicité. Une partie de cette hélicité peut alors être transférée au fluide loin de la paroi, ce qui entrelace les lignes vortex [13].

Pour les fluides eulériens (ou parfaits), l'hélicité est une grandeur conservée. En effet, les lois d'Helmholtz dictent que les lignes vortex ne peuvent se croiser et que le flux de vortécité est conservé. Ceci empêche tout changement de topologie. Pour les fluides réels, la conservation d'hélicité est moins claire car, comme montré précédemment, la viscosité autorise des changements de topologie via reconnexion visqueuse.

Il est tentant de conclure que cela entraîne une variation d'hélicité. Par exemple, que deux anneaux entrelacés qui se reconnectent pour ne former qu'un anneau bobiné devrait produire un saut d'hélicité  $|\Delta\mathcal{I}| \sim 1\Gamma^2$ . Grâce à de récentes avancées technologiques, Scheeler et al. (2014) [18] ont été capables de recréer expérimentalement deux anneaux entrelacés de même circulation ainsi qu'un tube en noeud de trèfle. Parce qu'il est difficile de mesurer la torsion expérimentalement, ils la négligent et mesurent uniquement l'hélicité de la ligne centrale :  $\mathcal{I}_c/\Gamma^2 = \sum_{i \neq j} \mathcal{L}_{ij} + \sum_i Wr_i$ . Ceci est justifié par le fait que la torsion est naturellement dissipée par la viscosité à une vitesse inversement proportionnelle à l'aire du tube vortex. L'expérience étant réalisée avec des anneaux fins, cette dissipation est rapide ( $\frac{\partial Tw/\partial t}{Tw} \sim 5 \text{ s}^{-1}$ ) comparé à l'échelle de temps du mouvement général de la ligne centrale ( $\sim 1 \text{ s}$ ).

Remarquablement, les anneaux entrelacés ne montrent aucun saut d'hélicité malgré leurs changements de topologie. Au lieu de cela,  $\mathcal{I}_c$  varie de  $\sim 2\Gamma^2$  à  $\sim 1\Gamma^2$  sur une plus grande échelle de temps, vraisemblablement dû à des déformations géométriques. La seconde configuration, le noeud de trèfle, conserve quant à elle  $\mathcal{I}_c$  tout au long de son évolution.

Dans leur article, Scheeler et al. expliquent pourquoi aucun saut d'hélicité n'est observé : "Au moment de la reconnexion, la ré-association des lignes vortex crée du bobinage dans les régions où il n'y avait pas d'entortillement, ce qui convertit l'entrelacement en entortillement (ou vice-versa) à chaque reconnexion." Ils montrent en détail comment le nouage est converti en bobinage (noeud de trèfle) et l'entrelacement en bobinage (anneaux entrelacés) sur différentes échelles spatiales.

La même année, un article de Kimura et Moffat (2014) [10] semble cependant suggérer qu'il en est autrement. La reconnexion de deux tubes non-coplanaires y est étudié. À l'aide d'un modèle linéaire du champ de déformation, une expression analytique de l'évolution de  $\mathcal{I}(\tau)$  est proposée. Celle-ci indique que l'hélicité diminuerait de façon exponentielle à la reconnexion. Ceci semblant fort contradictoire avec l'expérience de Scheeler et al., la conclusion suivante est tirée : "Nous ne trouvons aucune preuve de la conservation d'hélicité lors de la reconnexion dans le cadre de notre modèle. Au contraire, l'hélicité est détruite lors du processus de reconnexion. (...) Tout ce que nous pouvons dire est que le modèle linéaire décrit dans cet article ne montre aucune preuve de la conservation d'hélicité lors de la reconnexion visqueuse des tubes vortex. (...) Nous noterons finalement que le modèle est beaucoup plus fiable dans un contexte magnétique."

### 3.3.1 Condition initiale et paramètres de la simulation

Les anneaux entrelacés ont été simulés en SND à  $Re_\Gamma = 5000$ . Comme représenté à la figure 3.11, les centres des anneaux sont initialement éloignés de  $S/R = 1$ .

Un maillage  $h/R = 0.01$  a été utilisé. La raison de ce maillage plus grossier est le fait que le domaine s'agrandit cette fois dans toutes les directions et pas seulement dans une comme c'était le cas précédemment. La borne du pas de temps a été fixée à  $\Delta\tau_{max} = \Delta t/t_0 = 0.002$ . Les remaillages se font tous les 5 pas de temps et les reprojections tous les 4 remaillages. Le domaine de calcul est non-borné. Sa taille initiale est  $[L_{0,x}/R, L_{0,y}/R, L_{0,z}/R] = [4.8, 3.6, 3.6]$  et le nombre de points initial dans chaque direction est  $[N_{0,x}, N_{0,y}, N_{0,z}] = [480, 360, 360] = [2^5 3^1 5^1, 2^3 3^2 5^1, 2^3 3^2 5^1]$ . Le seuil de vorticité pour l'agrandissement du domaine a été fixé à  $2.0 \times 10^{-3}\omega_0$ . Le buffer est  $[B_x/R, B_y/R, B_z/R] = [0.4, 0.3, 0.3]$ .

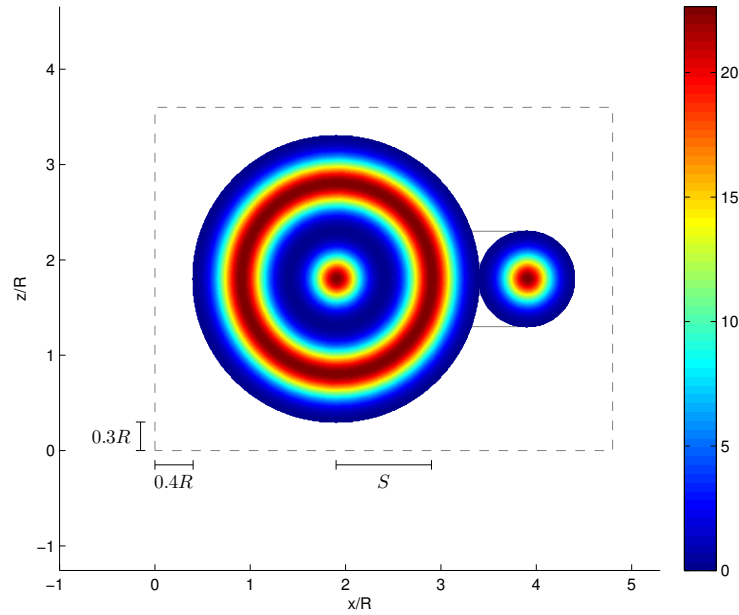


FIGURE 3.11 – Coupe de  $\|\omega\|$  dans le plan  $x$ - $z$  en  $y = L_y/2$ . Les traits discontinus représentent la taille initiale du domaine de calcul.

### 3.3.2 Analyse des résultats

Différentes vues de la simulation sont représentées aux figures 3.12a-3.12c. Comme dans l'expérience de Scheeler et al., on note que les anneaux se mettent naturellement dans une configuration telle que les tubes interagissant sont anti-parallèles (3.12b). Leur interaction produit de hautes valeurs de vortacité (3.12c).

Le domaine s'est agrandi de  $[L_x/R, L_y/R, L_z/R] = [4.8, 3.6, 3.6]$  à  $[L_x/R, L_y/R, L_z/R] = [7.05, 8.25, 8.01]$ , ce qui correspond à un rapport de volume d'environ  $\sim 7.5$ . (contre  $\sim 2.3$  dans la simulation de l'expérience de Schatzle)

Le graphe de l'hélicité est montré à la figure 3.13. On obtient le résultat étonnant d'une augmentation d'hélicité. Ce résultat n'est probablement pas physique car il contredit les sources citées plus haut.

La raison de ce résultat éronné est la grossièreté du maillage utilisé. Les Reynolds de maille montrés aux figures 3.14a-3.14b en sont la preuve vu les valeurs élevées qu'ils prennent. Cependant, vu l'augmentation importante de la taille du domaine de calcul, on ne peut pas se permettre une simulation DNS avec un maillage adéquatement fin sans provoquer une consommation excessive de ressources de calcul.

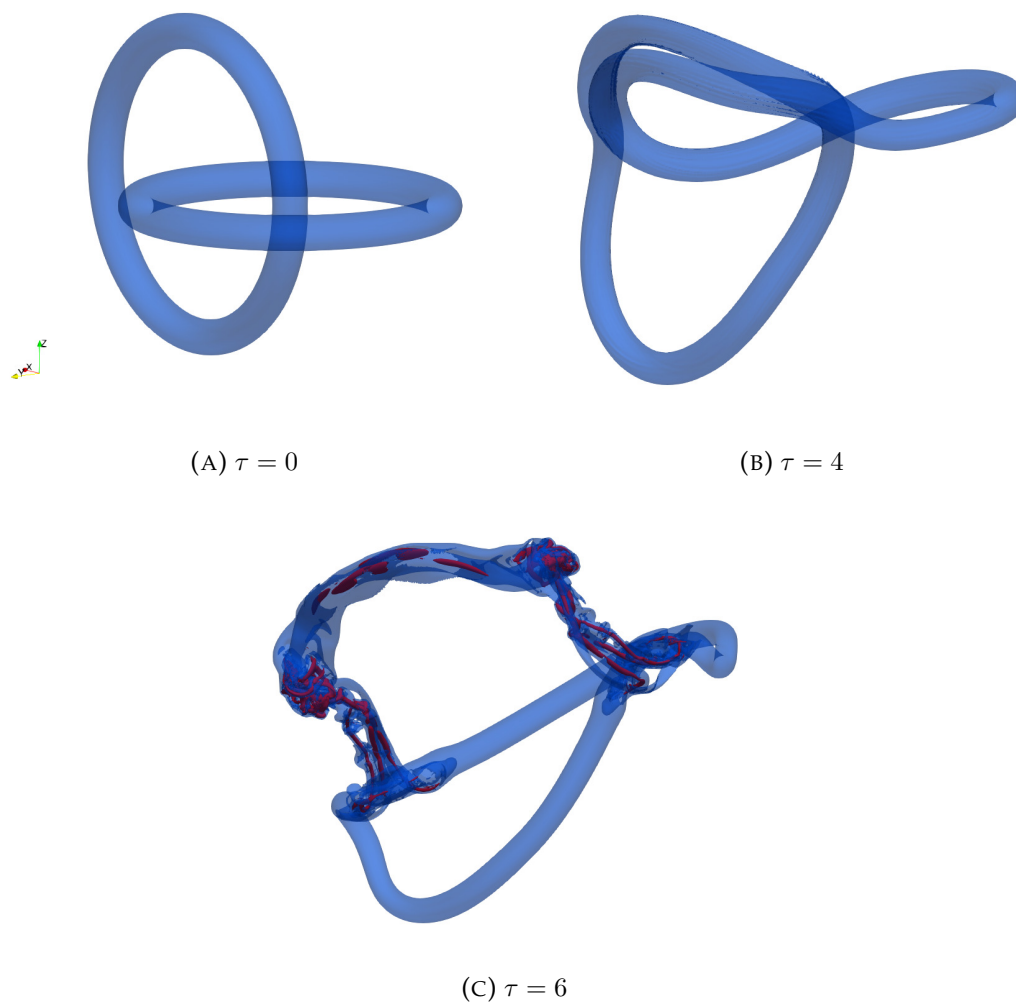


FIGURE 3.12 – Isosurfaces de la norme de vorticit       $\|\omega\|/\omega_0 = 0.4$  (bleu, translucide) et  $\|\omega\|/\omega_0 = 2$  (rouge, opaque)

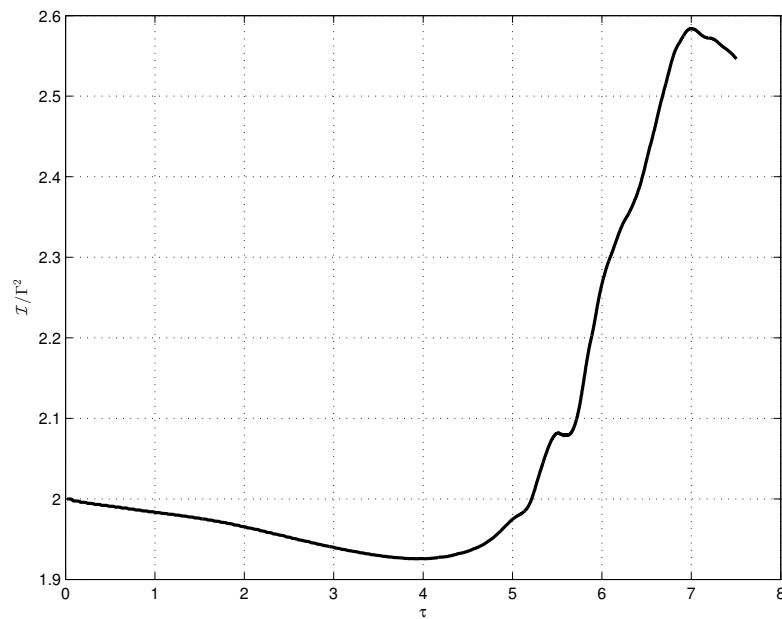


FIGURE 3.13 – Évolution de l'hélicité des anneaux entrelacés

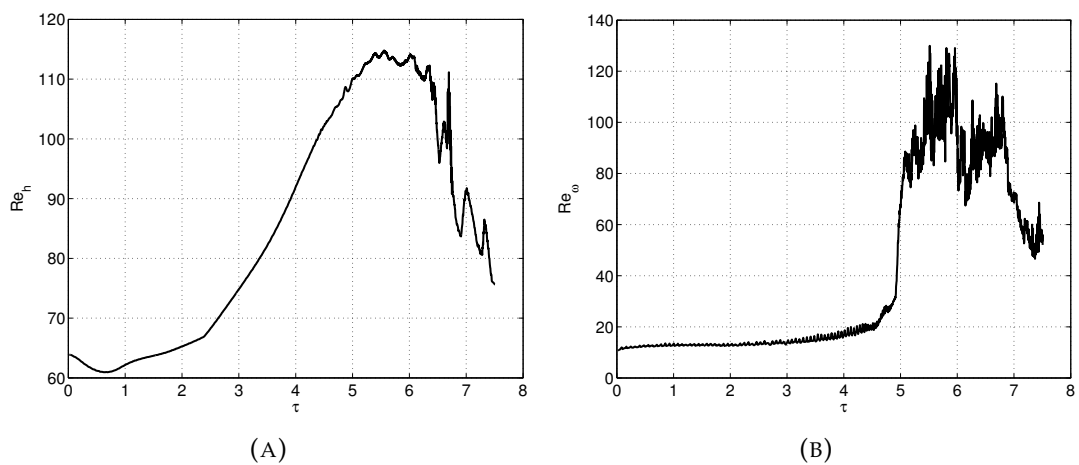


FIGURE 3.14 – Reynolds de maille basés sur la vitesse (gauche) et la vorticité (droite) pour les anneaux entrelacés.

### 3.4 Conclusion

La reconnexion d'anneaux vortex dans la configuration de l'expérience de Schatzle a été simulée. L'évolution spatiale des anneaux, leur écrasement, la formation de ponts et de fils correspond à ce qui se trouve dans les différentes sources citées. Différentes phases du phénomène de reconnexion ont été déduites à partir de l'évolution de la circulation. La formation des ponts et de dipôles dans les fils a été montré dans des coupes. L'apparition d'une structure annulaire au sein de la reconnexion n'a pas été notée. Soit cela est dû au fait que la simulation a été réalisée à Reynolds modéré alors que la simulation de Beardsell, Dufresne et Dumas était à Reynolds élevé. Soit le phénomène a toutefois lieu mais n'a pas été observé car une méthode de visualisation de topologie est requise.

La difficulté de cette simulation a été mise en évidence d'une part en montrant la différence d'ordre de grandeur entre les grandes échelles de tourbillons et les petites échelles qui sont au centre de la reconnexion. D'autre part, il a été montré que le pas de temps adaptatif avec la valeur des constantes exprimées au chapitre 1 n'était pas suffisant à conserver le moment et le moment angulaire d'inertie. Un pas de temps constant a dès lors été utilisé.

L'hélicité a été introduite. Ses différentes composantes ont été présentées : l'entrelacement, la torsion, le bobinage et le nouage des tubes vortex. Il a été montré qu'elles correspondent en fait au degré d'entrelacement des filaments vortex.

Le problème de conservation de l'hélicité dans les écoulements visqueux a été mis en évidence. Bien qu'intuitivement on associe un changement de topologie avec un saut d'hélicité, l'expérience de Scheeler et al. suggère qu'il n'en est rien. Malgré cela, le modèle proposé par Kimura et Moffat suggère tout de même un saut d'hélicité.

La simulation d'anneaux entrelacés n'a pas fourni de résultats probants à cause du maillage qui n'était pas assez fin. L'utilisation d'un maillage plus fin requiert trop de puissance de calcul à cause de l'agrandissement important du domaine. L'augmentation d'hélicité étant un résultat a priori erroné, l'on ne peut donc malheureusement rien en conclure.



## Chapitre 4

# Interaction d'anneaux vortex de circulations différentes

Dans ce chapitre, l'interaction d'anneaux de circulations différentes sera étudié. Comme dit précédemment, dans ce cas les anneaux ne peuvent se reconnecter et leur interaction engendre des turbulences. L'anneau faible et l'anneau fort se trouvent initialement dans une configuration proche de celle de l'expérience de Schatzle avec une différence de hauteur ajoutée pour que les anneaux interagissent entre eux.

### 4.1 Condition initiale et paramètres de la simulation

La condition initiale est montrée à la figure 4.1. Par la suite, les anneaux seront dénommés anneau 1 (droite) et anneau 2 (gauche). L'anneau 1 est le même que présenté dans le chapitre précédent. L'anneau 2 est tel que  $\Gamma_2/\Gamma_1 = 1/2$  mais présente le même profil adimensionnel que l'anneau 1, soit  $\xi_1(\rho) = \xi_2(\rho) = \xi(\rho)$ . L'angle d'incidence  $\theta$  a conservé sa valeur de  $15^\circ$ . La distance entre les anneaux est telle que  $S/R = 2.7083$ . De plus, une différence de hauteur  $H/R = 0.9659$  entre les centres des anneaux a été introduite pour les faire interagir ensemble.

Une simulation sous-résolue a été effectuée avec  $h/R = 0.01$  pour les mêmes raisons qu'expliqué au chapitre précédent : connaître la taille du buffer à utiliser pour que les dimensions du domaine dans les directions  $x$  et  $y$  restent constantes et capturer l'échelle de Kolmogorov.

Un maillage  $h/R = 0.006$  a été utilisé. Le pas de temps est adaptatif et borné par  $\Delta\tau_{max} = \Delta t/t_0 = 0.002$ . Les remaillages se font tous les 5 pas de temps et les reprojections tous les 4 remaillages. Le domaine de calcul est non-borné. Sa taille initiale est  $[L_{0,x}/R, L_{0,y}/R, L_{0,z}/R] = [6.144, 3.6, 3.072]$  et le nombre de points initial dans chaque direction est  $[N_{0,x}, N_{0,y}, N_{0,z}] = [1024, 600, 512] = [2^{10}, 2^3 3^1 5^2, 2^9]$ . Le seuil de vorticité pour l'agrandissement du domaine a été fixé à  $2.0 \times 10^{-3}\omega_0$ . Le buffer est  $[B_x/R, B_y/R, B_z/R] = [0.2519, 0.3000, 0.2942]$ .

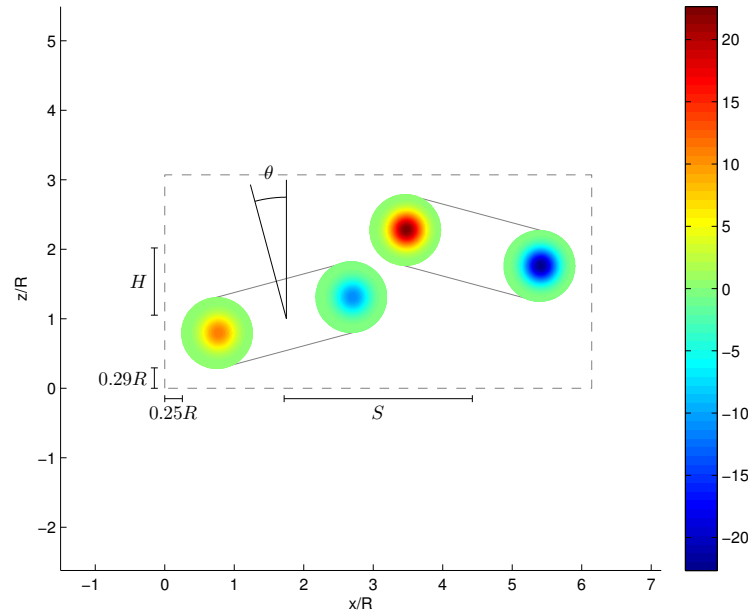


FIGURE 4.1 – Coupe de la condition initiale dans le plan  $x$ - $z$  en  $y = L_y/2$ . Les traits discontinus représentent la taille initiale du domaine de calcul. Anneau 1 (droite) et anneau 2 (gauche).

## 4.2 Analyse des résultats

La simulation a d'abord tourné sur 128 processeurs ( $8 \times 4 \times 4$ ) et ensuite sur 256 processeurs ( $8 \times 4 \times 8$ ) quand la taille du domaine en  $z$  s'est approché de celle dans la direction  $x$ . Le temps total de simulation est  $\sim 190$  heures. Le nombre de mailles initial était de  $\sim 315$  millions et a augmenté jusque  $\sim 645$  millions. Le domaine dans la direction  $z$  s'est agrandi en passant de  $z/R = [0 \ 3.072]$  à  $z/R = [-3.170 \ 3.072]$ .

L'évolution des anneaux est présentée aux figure 4.2a-4.2j. La vitesse proprement induite de l'anneau 1 étant plus élevé, celui-ci va se mettre au même niveau que l'anneau 2 et le déformer fortement à cause de son champ de vitesse induit. Cela entraîne l'enroulement de l'anneau 2 et la génération de turbulences. Cet effet va se propager de façon symétrique sur la circonférence de l'anneau 1 en partant de la zone d'initiation de l'interaction. Lors de cette propagation, on n'observe pas de phénomène de reconnexion comme c'était le cas pour deux anneaux de même intensité. S'en suit la collision des propagations turbulentes qui produit une structure annulaire dans la zone diamétralement opposée à la zone d'initiation.

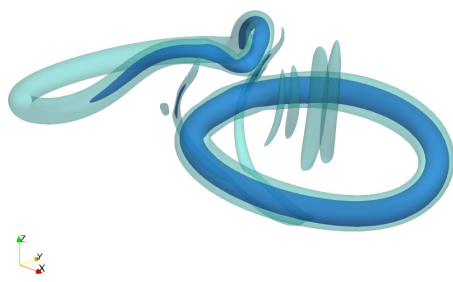
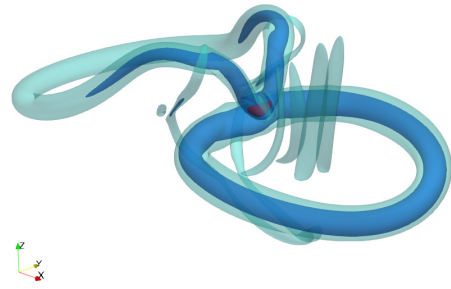
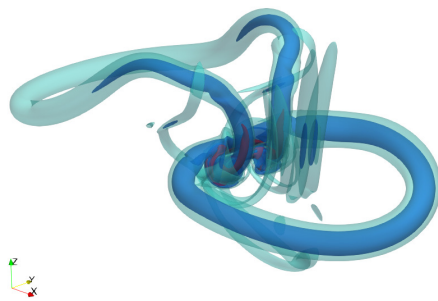
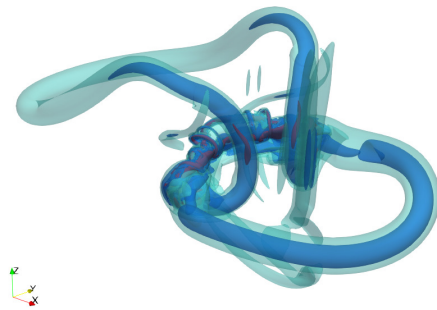
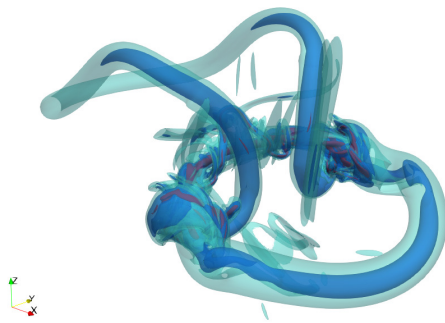
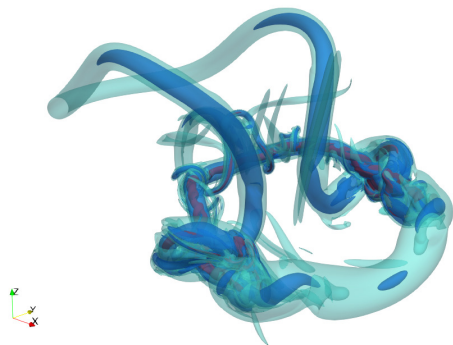
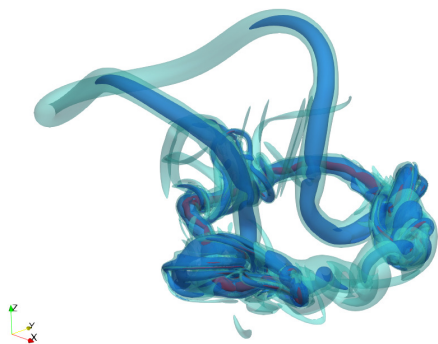
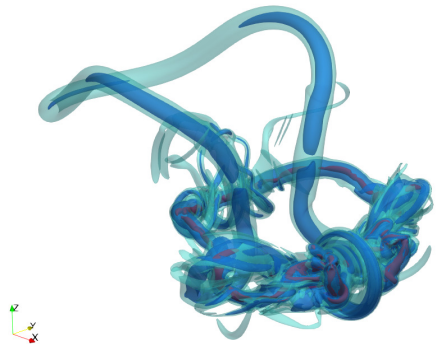
Un zoom sur la zone d'initiation de l'interaction est montré aux figures 4.3a-4.3e.

Les figures 4.4a-4.4o sont une coupe de  $\omega_y t_0$  dans le plan  $y = L_{0,y}/2$ . Elles capturent la première interaction entre les anneaux. Le tube de l'anneau 2 est d'abord advecté par l'anneau 1. Le tube 2 divise ensuite le tube 1 en deux parties qui finiront par se réunir. Les tubes finissent par s'éloigner et restent distincts. On note que leur rayon est significativement plus faible après l'interaction.

Une coupe de la formation de la structure annulaire est montré aux figure 4.5a-4.5d. On peut observer son augmentation de rayon ainsi que l'amincissement de son tube et enfin sa détérioration.

L'évolution de l'ensrophie peut être observée à la figure 4.6. Le premier pic correspond à la phase transitoire des anneaux. S'en suit une baisse d'ensrophie suivi d'une nouvelle augmentation à partir de  $\tau = 7.97$  menant au pic en  $\tau = 10.35$  probablement dû à l'initiation des turbulences. Il s'en suit un bref plateau et une production d'ensrophie due à la propagation. Un maximum local est atteint en  $\tau = 15.55$  suivi d'une nouvelle augmentation à partir de  $\tau = 16.01$ . L'échelle de Kolmogorov est capturée avec  $h/\eta = 0.5573$ .

Malgré le pas de temps imposé ( $\Delta\tau = 0.002$ ), des variations du moment d'inertie et moment angulaire d'inertie sont observées (voir figures 4.7a). Étonnamment, les plus grandes variations ont lieu lors de la phase transitoire des anneaux. Les Reynolds de maille sont présentés aux figures 4.8a-4.8b. Le premier pic de  $Re_h$  est causé par l'advection du tube 2 par le tube 1 comme montré dans les coupes. Il s'en suit une série de pics en décroissance générale. L'indicateur  $Re_{h,\omega}$  présente un seul pic significatif en  $\tau = 10.31$  correspondant au pic d'ensrophie.

(A)  $\tau = 8.0$ (B)  $\tau = 9.0$ (C)  $\tau = 10.0$ (D)  $\tau = 11.0$ (E)  $\tau = 12.0$ (F)  $\tau = 13.0$ (G)  $\tau = 14.0$ (H)  $\tau = 15.0$

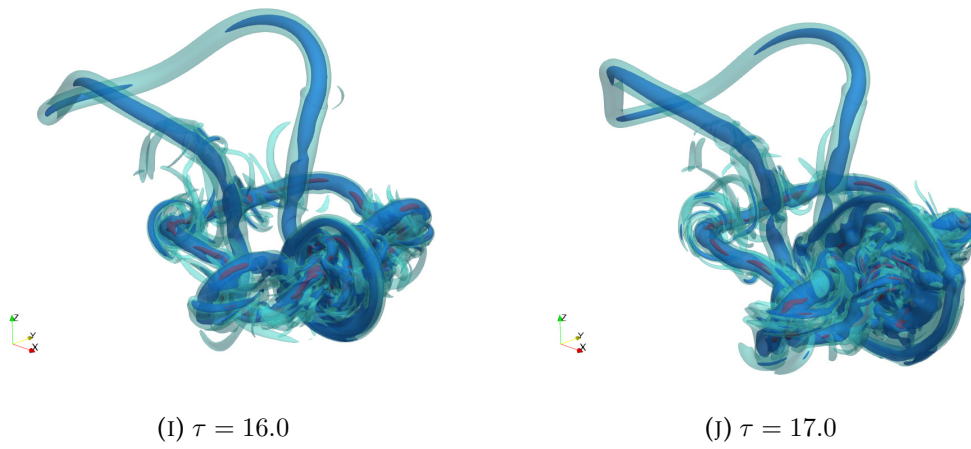


FIGURE 4.2 – Isosurfaces de la norme de vorticité à  $\|\omega\|/\omega_0 = 0.2$  (cyan,  $\alpha = 0.2$ ),  $\|\omega\|/\omega_0 = 0.4$  (bleu,  $\alpha = 0.5$ ) et  $\|\omega\|/\omega_0 = 1$  (rouge,  $\alpha = 1$ )

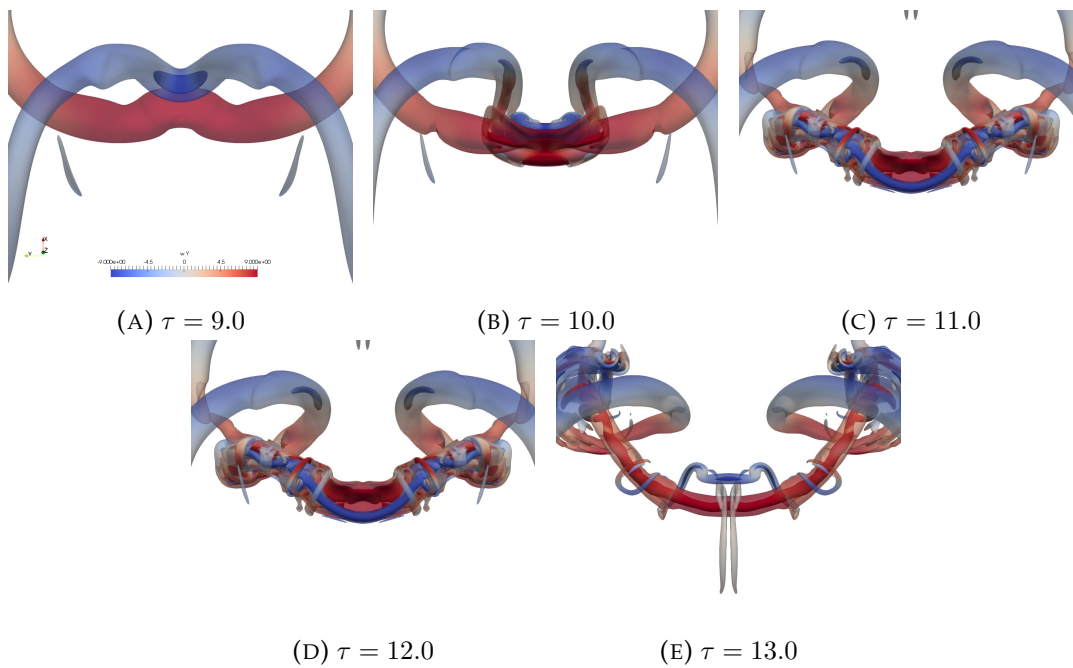
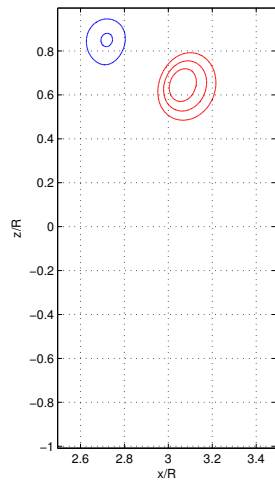
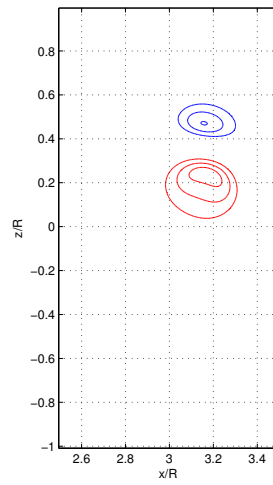
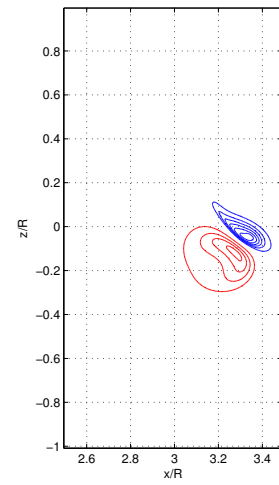
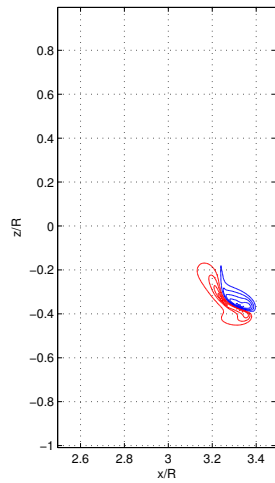
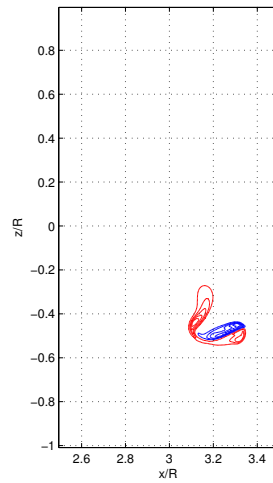
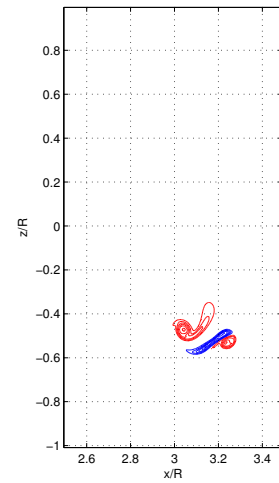
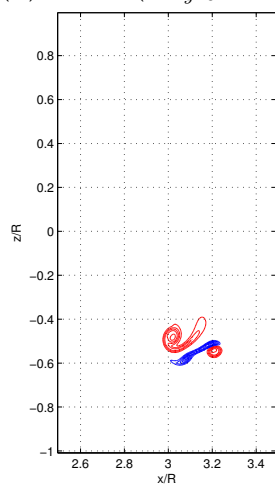
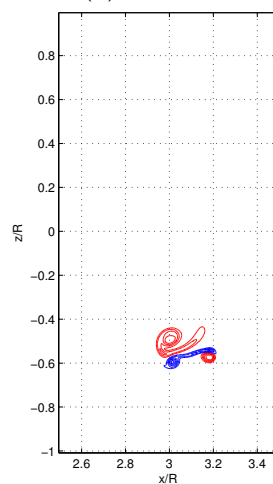
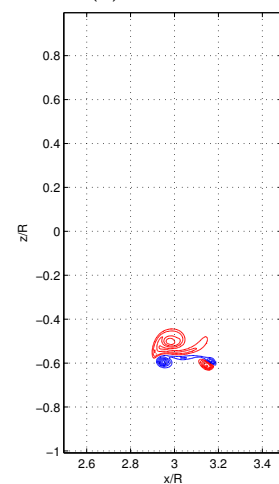


FIGURE 4.3 – Zoom sur la zone d'initiation de l'interaction. Les isosurfaces  $\|\omega\|/\omega_0 = 0.4$  (translucide) et  $\|\omega\|/\omega_0 = 1$  (opaque) sont représentées et l'échelle de couleur est proportionnelle à  $\omega_y$ .

(A)  $\tau = 6.0$  ( $\Delta\omega_y t_0 = 5$ )(B)  $\tau = 8.0$ (C)  $\tau = 9.0$ (D)  $\tau = 9.4$  ( $\Delta\omega_y t_0 = 10$ )(E)  $\tau = 9.7$ (F)  $\tau = 9.9$ (G)  $\tau = 10.0$ (H)  $\tau = 10.1$ (I)  $\tau = 10.2$

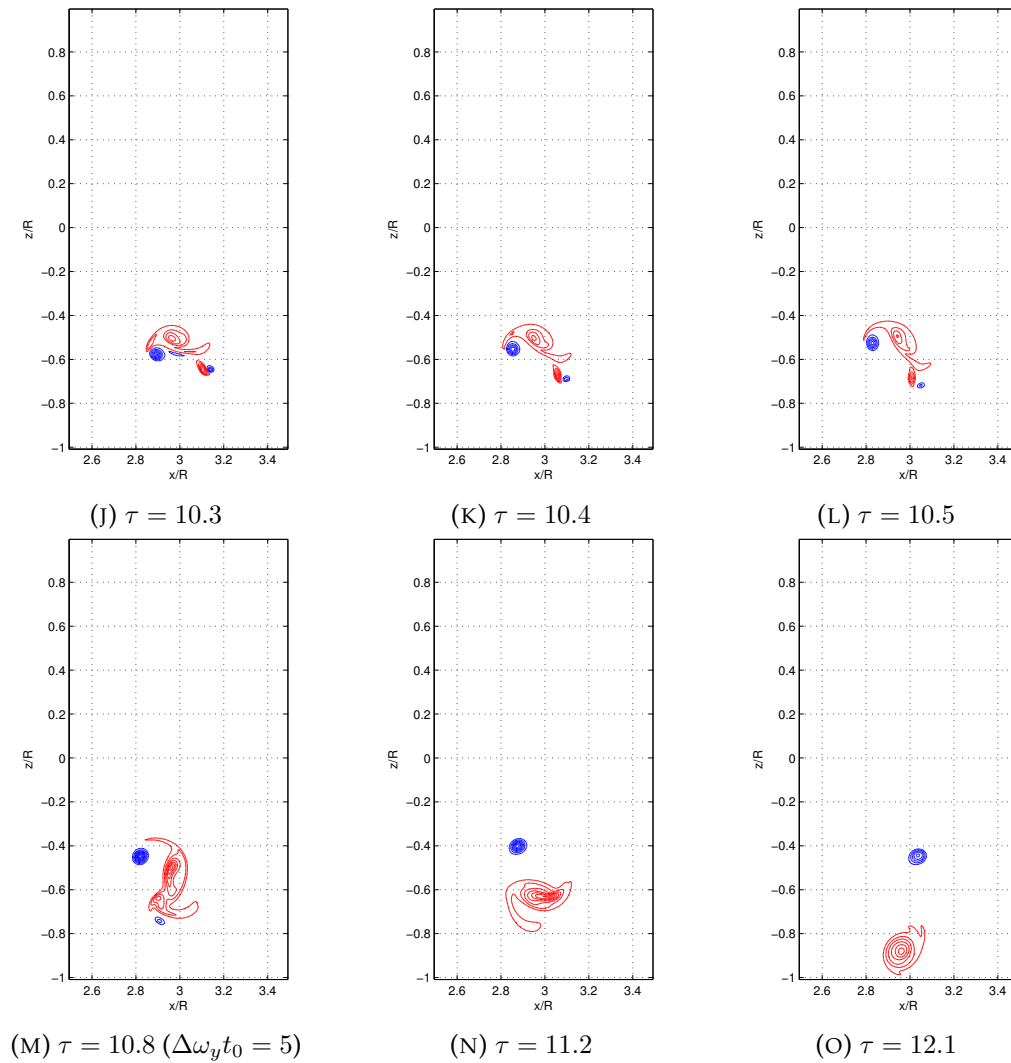


FIGURE 4.4 – Coupe  $\omega_y t_0$  dans le plan  $y = L_{0,y}/2$ . Les isocontours sont représenté par pas de  $\Delta\omega_y t_0 = 5$  ou  $\Delta\omega_y t_0 = 10$  (les changements d'échelle sont indiqués).

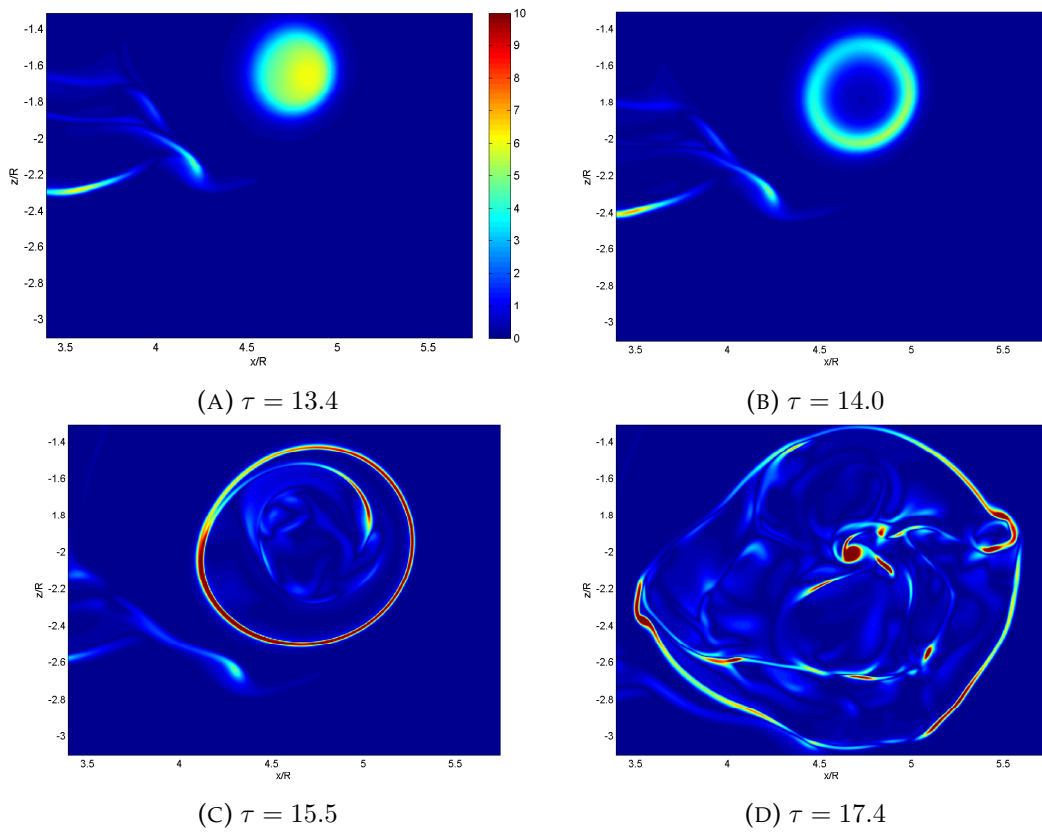
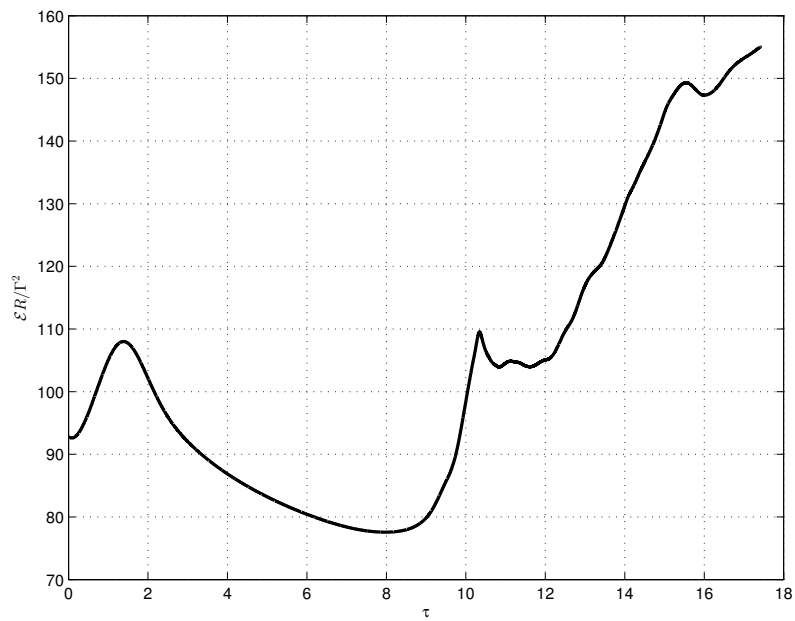
FIGURE 4.5 – Coupe de  $\|\omega\|t_0$  dans le plan  $y = L_{0,y}/2$ .

FIGURE 4.6 – Évolution de l'entropie.

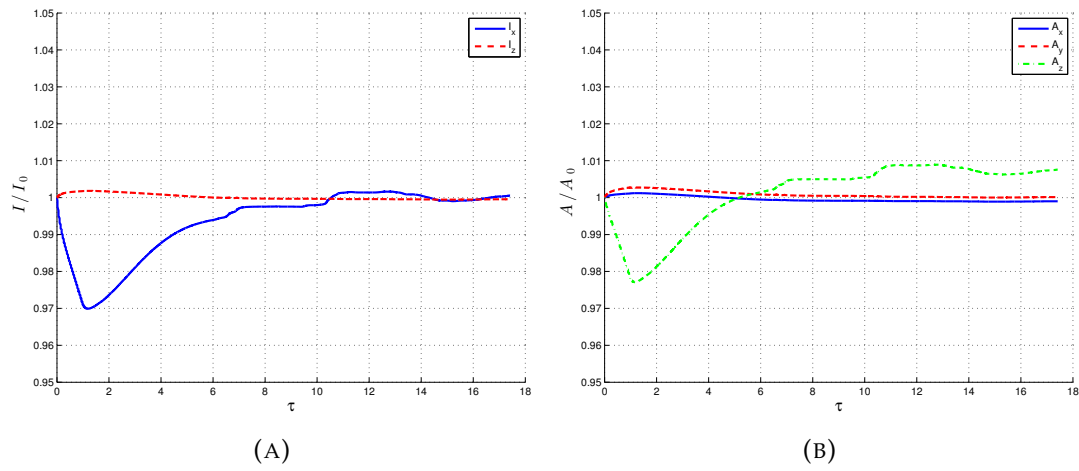


FIGURE 4.7 – Variations des composantes du moment d'inertie  $I_x$  et  $I_z$  (gauche) et des composantes du moment angulaire d'inertie  $A_x$ ,  $A_y$  et  $A_z$  (droite) au long de la simulation.

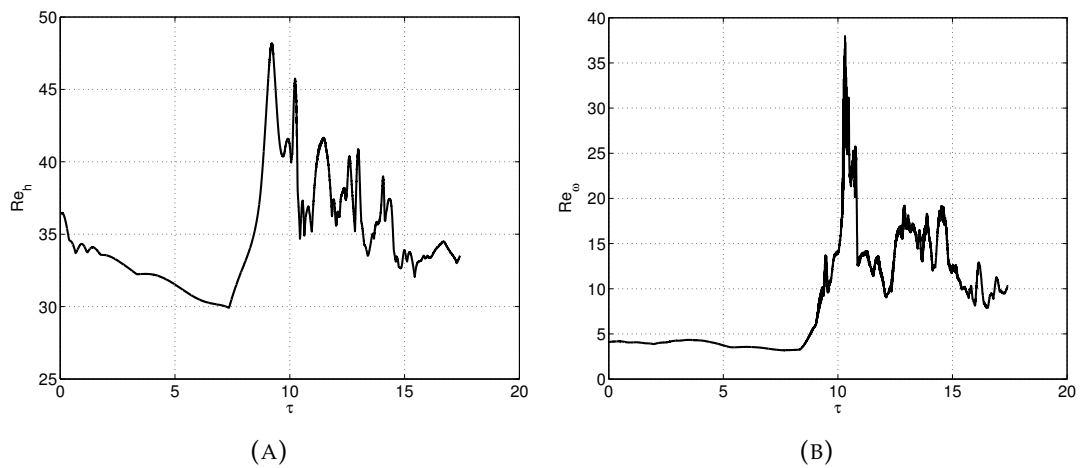


FIGURE 4.8 – Reynolds de maille basés sur la vitesse (gauche) et la vorticité (droite) pour la reconnexion des anneaux.

### 4.3 Conclusion

L'interaction de deux anneaux de circulations différentes a été simulée. Les tubes interagissant dans la zone d'initiation sont anti-parallèles, l'un ayant la moitié de la circulation de l'autre. Les vues montrent comment dans un premier temps, l'anneau faible s'enroule autour de l'anneau fort, interagit avec celui-ci et génère des turbulences. Ces turbulences se propagent ensuite de façon symétrique, ce qui engendre beaucoup de dissipation visqueuse jusqu'à entrer en collision et produire une structure annulaire.

Malgré l'imposition du pas de temps, des variations du moment et moment angulaire d'inertie sont observées.

# Conclusion

Les simulations d'anneaux vortex à profil gaussien compact ont été présentées dans ce travail. En comparaison avec un anneau gaussien, il n'y a pas de différence majeure dans leur comportement au niveau du développement des instabilités. Les déformations de l'anneau avec l'instabilité de Widnall ainsi que l'émergence des dipôles ont été observées. Les mêmes phases ont été observées : phase transitoire, linéaire et non-linéaire. L'évolution des variables globales laisse présager de la saturation et de la phase turbulente présentes mentionnées dans les diverses sources citées.

Le phénomène de reconnexion d'anneaux vortex anti-parallèles a également été simulé. L'écrasement des tubes, la formation des ponts et l'étirement des fils par éloignement des ponts ont été observés et leur durée a été quantifiée.

Les composantes de l'hélicité ont été présentées pour plusieurs tubes vortex. Le problème de conservation d'hélicité pour un écoulement visqueux a été mis en évidence par la contradiction de plusieurs sources.

L'interaction de deux anneaux de circulations différentes a été simulée. Dans ce cas, l'on a observé que la reconnexion était impossible et que leur interaction générerait des turbulences se propageant sur l'anneau de circulation plus élevée.

Les simulations d'anneaux isolés présentées ici ont demandé peu de ressources de calcul. D'une part, leur épaisseur permet d'avoir une faible valeur de  $\|\boldsymbol{\omega}\|_{\max}$  et d'autre part la phase turbulente n'a pas été capturée. Le seul bémol de ce type simulation est l'agrandissement du domaine de calcul qui consomme beaucoup de ressources si l'on souhaite capturer le développement des instabilités.

Par la suite, un anneau plus mince a été utilisé, ce qui complique la tâche. Les simulations d'interactions demandent, comme on l'a observé, un maillage fin pour capturer les petites échelles générées par le terme  $(\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla)\mathbf{u}$ . La reconnexion d'anneaux à Reynolds modéré présente des petites échelles très localisées près du plan de séparation des anneaux. Cela représente une consommation superflue de ressources (discrétisation et pas de temps) dans les zones éloignées de l'interaction. L'interaction d'anneaux de circulations différentes, quant à elle, génère des petites échelles qui se propagent dans une plus grande partie du domaine. Enfin, il est à noter que dans les deux cas la phase d'advection (le rapprochement des anneaux) représente un portion importante des simulations sur la durée simulée.



# Bibliographie

- [1] V. I. ARNOLD. « The asymptotic Hopf invariant and its applications ». In : *Selecta Math. Sov.* 5 (1986).
- [2] G. BEARDSSELL, L. DUFRESNE et G. DUMAS. « Investigation of the viscous reconnection phenomenon of two vortex tubes through spectral simulations ». In : *Physics of Fluids* 28 (2016).
- [3] M. BERGDORF, P. KOUMOUTSAKOS et A. LEONARD. « Direct numerical simulations of vortex rings at  $Re = 7500$  ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 581 (2007).
- [4] M. A. BERGER et G. B. FIELD. « The topological properties of magnetic helicity ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 147 (1984).
- [5] P. CHATELAIN et P. KOUMOUTSAKOS. « A Fourier-based elliptic solver for vortical flow with periodic and unbounded directions ». In : *Journal of Computational Physics* 229 (2010).
- [6] P. CHATELAIN et al. « Billion vortex particle direct numerical simulations of aircraft wakes ». In : *Computer methods in applied mechanics and engineering* 197 (2008).
- [7] R. COCLE. « Combining the vortex-in-cell and parallel fast multipole methods for efficient domain decomposition simulations : DNS and LES approaches ». Thèse de doct. Louvain-la-Neuve, Belgique : Université Catholique de Louvain, août 2007.
- [8] A. DAZIN, P. DUPONT et M. STANISLAS. « Experimental study of the instability of vortex rings ». In : ?? (?).
- [9] F. HUSSAIN. « Coherent structures - reality and myth ». In : *Physics of Fluids* 26 (1983).
- [10] Y. KIMURA et H. K. MOFFAT. « Reconnection of skewed vortices ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 750 (2014).
- [11] S. LISKA et T. COLONIUS. « A fast lattice Green's function method for solving viscous incompressible flows on unbounded domains ». In : *Journal of Computational Physics* 316 (2016).
- [12] M. V. MELANDER et F. HUSSAIN. *Cut-and-connect of two antiparallel vortex tubes*. 1988.
- [13] H. K. MOFFAT. « Degree of Knottedness of Tangled Vortex Lines ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 35 (1969).

- 
- [14] Stephen B. POPE. *Turbulent Flows*. New York : Cornell University, 2000.
- [15] P. G. SAFFMAN. « A model of vortex reconnection ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 212 (1990).
- [16] P. G. SAFFMAN. *Vortex Dynamics*. Cambridge University Press, 2012.
- [17] P. R. SCHATZLE. « An Experimental Study of Fusion of Vortex Rings ». Thèse de doct. Pasadena, California : California Institute of Technology, mai 1987.
- [18] M. W. SCHEELER et al. « Helicity conservation by flow across scales in reconnecting vortex links and knots ». In : *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 111 (2014).
- [19] K. SHARIFF, R. VERZICCO et P. ORLANDI. « A numerical study of three-dimensional vortex ring instabilities : viscous corrections and early nonlinear stage ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 279 (1994).
- [20] S. E. WIDNALL, D. B. BLISS et C. TSAI. « The instability of short waves on a vortex ring ». In : *Journal of Fluid Mechanics* 66 (1974).
- [21] G. WINCKELMANS et P. CHATELAIN. *Aerodynamics of External Flows*. University Lecture at Université Catholique de Louvain. 2016.
- [22] G. WINCKELMANS et E. DELEERSNIJDER. *Turbulence*. University Lecture at Université Catholique de Louvain. 2014.