

Analyse de la performance de portefeuilles internationaux en période de crise

Mémoire recherche réalisé par
Jean SEGIKWIYE

en vue de l'obtention du titre de
Master en ingénieur de gestion, à finalité spécialisée

Promoteur(s)
Frédéric Vrins et Mikael PetitJean

Année académique 2016-2017

Chaussée de Binche, 151 - 7000 Mons, Belgique www.uclouvain.be/lsm



PREFACE

Chers lecteurs,

Ce mémoire est un aboutissement de mes recherches et parachève ainsi mon master en ingénieur de gestion à l'UCL. Il est le résultat d'un travail portant sur l'analyse de la performance des portefeuilles internationaux en période de crise. J'ai voulu, dans ce mémoire, comparer la performance des portefeuilles internationaux aux portefeuilles nationaux, tout en analysant le risque du taux de change lié et voir la manière dont un investisseur peut se couvrir contre la volatilité des devises par rapport à ces portefeuilles. En m'appuyant sur la théorie de portefeuilles de Markowitz et le Capital Asset Pricing Model, j'ai pu démontrer pourquoi la diversification est nécessaire. Enfin, pour réellement examiner l'impact de la diversification, différentes mesures de la performance ont été introduites et testées en pratique. Ce mémoire n'est pas seulement des résultats de recherche, c'est le plaisir qu'offre l'accomplissement d'un mémoire qui restera à jamais gravé en moi et me servira sans doute dans ma future carrière professionnelle. Après quelques mois de travail individuel, je pense enfin me connaître un peu mieux et me sens prêt à affronter de nouveaux défis de la vie. Cependant, je pense, que je n'aurai pas pu achever ce mémoire sans l'appui de certaines personnes que je tiens à exprimer ma sincère gratitude :

- Mes deux promoteurs Pr Frédéric Vrins et Pr Mikael PetitJean, pour leur confiance et leur soutien qu'ils m'ont accordés tout au long.
- L'Université Catholique de Louvain et tout le corps enseignant de la LSM dans son ensemble, qui m'ont offert les moyens de m'instruire, les ressources pour grandir et l'espace pour m'épanouir intellectuellement.
- Je remercie à tous mes amis qui m'ont soutenu durant toutes ces années : Lionel, Tim, Marie, Marie Rose, Laurine, Victor, Gustave, Jean Philippe, Kelian, Prince, Hugues, Estime, Jean Philippe, Norman, Albert, Youssouf, Gregory, Mme Alaime...
- Enfin, je remercie Dr Espérance Segikwiye et Claudette Segikwiye, mes deux grandes sœurs qui m'ont éduqué durant toutes ces années et appris les valeurs humaines et à persévérer dans un monde où règne l'incertitude, et la violence humaine.

Dédicace

*Je dédie ce mémoire à mes défunts
parents, et grand-mère : Nyiramabende
Languide*

Table des matières

Introduction Générale	1
Chapitre I Diversification des Portefeuilles Financiers	3
1.1 Introduction.....	3
1.2 Qu'est-ce qu'un portefeuille financier privé ?.....	3
1.3 Pourquoi est-il important de diversifier ?	4
1.3.1 La théorie de portefeuille de Markowitz	4
1.3.2 Le théorème des deux fonds mutuels	13
1.3.3 Optimisation en tenant compte de l'actif sans risque	14
1.3.4 Impact de la diversification	18
1.4 Mesures de performance	19
1.4.1 Le ratio de Sharpe	19
1.4.2 Le ratio de Treynor	19
1.4.3 La mesure de Jensen	20
1.4.4 La mesure de Modigliani-Modigliani	21
1.4.5 Relations entre les différentes mesures de performance	21
1.5 Les différentes stratégies de diversification	23
1.6 Risque de change	24
1.7 Conclusion	30
Chapitre II Profils de Risque & Mesures de Risque.....	31
2.1 Introduction.....	31
2.2 Fonctions d'utilité	31
2.3 Mesures d'aversion au risque	37
2.4 Profils de risque dans la théorie de Markowitz.....	40
2.5 Impact de l'horizon	45

2.6	Mesures de risque	47
2.7	Conclusion	47
Chapitre III La Parité de Risque		48
La Construction des Portefeuilles		48
3.1	Introduction.....	48
3.2	Les classes d'actifs considérées	48
3.2.1	Modèles utilisées pour l'évaluation des actions	48
3.2.2	Modèles utilisés pour l'évaluation des obligations	51
3.3	La stratégie du « Buy & Hold »	53
3.4	La stratégie du rebalancement constant.....	54
3.5	La stratégie de la parité de risque	56
3.5.1	Principe d'allocation d'Euler	56
3.5.2	Calcul implicite des quotités des différents actifs	62
3.5.3	Interprétation de la parité de risque	63
3.5.4	Calcul explicite des quotités des différents actifs	64
3.6	Conclusion	68
Chapitre IV Analyse Empirique		69
4.1	Introduction.....	69
4.2	Collection des données	69
4.3	Analyse des données	70
4.4	Portefeuilles nationaux et internationaux analysés	75
4.5	Analyse des performances des portefeuilles	78
4.6	Conclusion	87
Conclusion Générale		89
Bibliographie.....		92
Annexes		95
Annexe A : Dérivation des formules du premier chapitre		95

Annexe B : Dérivation des formules du deuxième chapitre.....	97
Annexe C : Mesures de risque alternatives	99
Valeur-à-risque	99
Valeur-à-risque conditionnelle	102
Moments centraux de degré supérieure à deux	104
Valeur-à-risque modifiée	106
Moments partiels inférieurs	107
Annexe D : Modèle stochastique qui simule des obligations.....	108
Annexe E : Parité de risque : dérivations des formules.....	110
Annexe F : Simulations : formules et exemples.....	115

Liste des Graphiques

Figure 1 : Frontière de Markowitz.....	7
Figure 2 : Frontière de Markowitz et courbes d'indifférence	12
Figure 3 : Portefeuilles conservateurs et agressifs	40
Figure 4 : Frontières efficace dans un monde avec deux actifs sans risque	43
Figure 5 : Evolution des indices boursiers 11/2005 – 11/2016	72
Figure 6 : Evolution des rendements d'obligations d'états 11/2005 – 11/2016.....	73
Figure 7 : Evolution des taux de change 11/2005 – 11/2016.....	74
Figure 8 : Evolution des taux sans risque 11/2005 – 11/2016	75

Liste des Tableaux

Tableau 1: Coefficients de risque	38
Tableau 2: Coefficients de risque (a, b).....	39
Tableau 3: Portefeuilles nationaux	77
Tableau 4: Portefeuilles internationaux.....	78
Tableau 5: Portefeuilles de marché.....	79
Tableau 6: Taux sans risque	79
Tableau 7: Mesures de performance obtenues pour la période avant la crise	80
Tableau 8: Mesures de performance obtenues pour la période de crise	81
Tableau 9: Mesures de performance obtenues pour la période après la crise	82
Tableau 10: Portefeuilles nationaux couvert contre le risque de change (avant la crise).....	83
Tableau 11: Portefeuilles internationaux couvert contre le risque de change (avant la crise) .	84
Tableau 12: Mesures de performance obtenues pour la période avant la crise (couvert)	85
Tableau 13: Expositions optimales au risque de change pour la période avant la crise.....	86
Tableau 14: Mesures de performance (risque minimal).....	86

Introduction Générale

Ce mémoire a comme but de connaître l'impact de la diversification internationale et en particulier son impact pendant la période allant de novembre 2005 à novembre 2016. Avant que cet impact puisse être étudié, il faudra d'abord introduire la théorie de portefeuille de Markowitz. Ceci sera fait dans le premier chapitre, dans lequel premièrement une définition du concept du « portefeuille financier privé » sera donnée. Puis il sera démontré pourquoi la diversification est nécessaire, à l'aide de la théorie de portefeuille de Markowitz et le Capital Asset Pricing Model. Pour que l'impact de la diversification puisse être examiné, il nous faudra également des mesures de performance, les plus importantes seront traitées vers la fin du premier chapitre. Vu que le sujet de ce mémoire est principalement la diversification au niveau international, nous parcourrons également le risque lié au taux de change, et une méthode qui peut aider à contourner ce risque sera expliquée.

Dans le deuxième chapitre les différents profils de risque seront traités à l'aide de la théorie de l'utilité espérée de von Neumann & Morgenstern, par laquelle les fonctions d'utilité seront introduites. A partir de ces fonctions d'utilité différents profils de risque seront développés et le lien entre la théorie de von Neumann & Morgenstern et celle de Markowitz sera faite. A la fin de ce deuxième chapitre les défauts de la théorie de Markowitz seront traités et des mesures de risque alternatives seront proposées.

Dans le troisième chapitre l'évaluation des différentes classes d'actifs considérées sera abordée : les actions, les obligations et l'actif sans risque. Différentes méthodes d'évaluation et de simulation seront expliquées. Ensuite les différents types de construction de portefeuille qui seront utilisés dans le quatrième chapitre seront traités : la stratégie du Buy & Hold, la stratégie du rebalancement constant et la stratégie de la parité de risque. Cette dernière stratégie sera traitée en détail.

Dans le quatrième chapitre les performances de ces différents types de portefeuilles, seront analysées sur la période de novembre 2005 à novembre 2016. Dans une première partie les différentes données seront analysées de façon globale sur toute la période. Après analyse, il s'avérera qu'il sera nécessaire de scinder cette grande période en deux périodes de hausse (novembre 2005 à juillet 2007 et août 2009 à novembre 2016) et une période de crise (août 2007 à juillet 2009). La méthode de construction des différents types de portefeuilles sera

expliquée, et puis les résultats seront analysés : les portefeuilles internationaux seront comparés aux portefeuilles nationaux et l'impact du taux de change sera analysé.

Chapitre I

Diversification des Portefeuilles Financiers

1.1 Introduction

Nous entamons, ce premier chapitre en donnant une définition au concept du « portefeuille financier privé ». Ensuite, nous expliquerons pourquoi il est nécessaire de bien diversifier ce portefeuille : d'abord nous expliquerons la théorie de portefeuille de Markowitz et le *Capital Asset Pricing Model*, puis une analyse de l'impact de la diversification sur les portefeuilles financiers en utilisant ces modèles sera faite. Dans la section suivante les mesures de performance les plus importantes seront définies de sorte qu'elles puissent être utilisées dans les prochains chapitres afin de connaître l'impact de la diversification géographique sur la performance des portefeuilles financiers. Finalement le risque lié au taux de change sera parcouru, et nous montrerons une méthode qui peut aider à contourner ce risque.

1.2 Qu'est-ce qu'un portefeuille financier privé ?

Un portefeuille financier privé peut être défini comme une collection d'actifs financiers détenue par un individu ou une société privée. Un portefeuille financier P peut être constitué de différents types d'actifs : des actions, des obligations, des certificats immobiliers, des produits dérivés...

Le portefeuille financier P peut être représenté par un vecteur $\vec{w}_P$ reprenant les nombres d'unité w_i de chaque actif i repris dans le portefeuille :

$$\vec{w}_P = (w_1, w_2, \dots, w_{i-1}, w_i, w_{i+1}, \dots, w_{n-1}, w_n)$$

Supposons alors qu'il existe n actifs différents dans le monde, en ce qui concerne les actifs j non repris dans le portefeuille, prenons $w_j = 0$.

Le vecteur des prix $\vec{p}$ reprenant les prix unitaire p_i de chaque actif i , est défini de manière suivante :

$$\vec{p} = (p_1, p_2, \dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \dots, p_{n-1}, p_n)$$

Alors la valeur $W(P)$ du portefeuille financier P peut être calculée de la manière suivante :

$$W(P) = \vec{w}_P \cdot \vec{p} = \sum_{i=1}^n w_i p_i$$

1.3 Pourquoi est-il important de diversifier ?

1.3.1 La théorie de portefeuille de Markowitz

Avant que nous puissions expliquer pourquoi il est tellement important de diversifier son portefeuille financier, il faudra que nous abordions d'abord la théorie de portefeuille. Cette théorie fut formellement introduite par Harry Markowitz en 1952 dans son essai « *Portfolio Selection* ». Il y démontre qu'il n'existe pas un seul portefeuille efficace, mais qu'il existe un ensemble de portefeuilles efficaces, qui sera dès lors appelé la frontière efficiente de Markowitz (F_M). L'existence de cet ensemble peut être démontrée de différentes manières.

Supposons d'abord que l'individu cherche à maximiser l'espérance du rendement μ_P de son portefeuille et à minimiser la variance du rendement σ_P^2 de son portefeuille. Ces deux valeurs peuvent être exprimées en utilisant le vecteur des espérances des rendements de tous les actifs $\vec{\mu}$ et la matrice de covariance des rendements de tous les actifs Σ :

$$\mu_P = \vec{w}_P^T \vec{\mu}$$

$$\sigma_P^2 = \vec{w}_P^T \Sigma \vec{w}_P$$

Afin de simplifier les calculs, nous supposerons que tous les actifs sont infiniment divisibles et que le prix unitaire de chaque actif vaut € 1,00 (c.-à-d. au lieu d'acheter par exemple une action de € 100,00, nous achèterions 100 centièmes de cette action, le prix unitaire de chaque centième valant € 1,00). Finalement il sera supposé que le capital que notre individu investira, vaille également € 1,00 (les résultats applicables à chaque autre capital pouvant être calculés en multipliant le vecteur des poids des actifs par ce capital). Ceci peut être formalisé de manière suivante :

$$1 = \vec{w}_P \cdot \vec{1}$$

Une première manière de dériver la frontière efficace de Markowitz consiste en maximisant l'espérance du rendement en supposant que la variance du rendement reste constante (Perchet, R., Lu, X., Leote de Carvalho, R., Heckel, T., 2015)¹ :

$$\begin{cases} \max_{\vec{w}_P} \vec{\mu}^T \vec{w}_P \\ \vec{w}_P^T \vec{1} = 1 \\ \vec{w}_P^T \Sigma \vec{w}_P = \sigma^2 \end{cases}$$

Il est alors possible de calculer le lagrangien et la hessienne de ce problème, ce qui nous donne :

$$L(\vec{w}_P) = \vec{\nabla} \left(\vec{\mu}^T \vec{w}_P - \lambda (\vec{w}_P^T \vec{1} - 1) - \kappa (\vec{w}_P^T \Sigma \vec{w}_P - \sigma^2) \right) = \begin{pmatrix} \vec{\mu} - \lambda \vec{1} - 2\kappa \Sigma \vec{w}_P \\ 1 - \vec{w}_P^T \vec{1} \\ \sigma^2 - \vec{w}_P^T \Sigma \vec{w}_P \end{pmatrix}$$

$$H(\vec{w}_P) = \begin{pmatrix} -2\kappa \Sigma & -\vec{1}^T & -2\vec{w}_P^T \Sigma \\ -\vec{1} & 0 & 0 \\ -2\Sigma \vec{w}_P & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Nous trouvons alors :

$$L(\vec{w}_P) = \vec{0} \Rightarrow \kappa \vec{w}_P = \frac{\Sigma^{-1} \vec{\mu} - \Sigma^{-1} \lambda \vec{1}}{2} \quad (A)$$

En multipliant l'équation (A) de gauche avec $\vec{1}^T$, nous trouvons :

$$\kappa = \frac{\vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu} - \vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{1} \lambda}{2}$$

En remplissant l'équation (A) dans la deuxième condition :

$$\kappa^2 \vec{w}_P^T \Sigma \vec{w}_P = \kappa^2 \sigma^2 = \frac{1}{4} \left(\vec{\mu}^T \Sigma^{-1} - \vec{1}^T \Sigma^{-1} \lambda \right) \Sigma \left(\Sigma^{-1} \vec{\mu} - \Sigma^{-1} \lambda \vec{1} \right)$$

¹ Nous noterons $\sigma^2 = \sigma_P^2$ et $\mu = \mu_P$

Ce qui nous donne :

$$\begin{aligned}
 (\vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu} - \vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{1} \lambda)^2 \sigma^2 &= (\vec{\mu}^T \Sigma^{-1} - \vec{1}^T \Sigma^{-1} \lambda)(\vec{\mu} - \lambda \vec{1}) \\
 \Leftrightarrow (\vec{1}^T \Sigma^{-2} \vec{1} \sigma^2 - \vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{1}) \lambda^2 + 2(\vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu} - (\vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu})(\vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{1}) \sigma^2) \lambda &+ (\vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu})^2 \sigma^2 \\
 - \vec{\mu}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu} &= 0
 \end{aligned}$$

En définissant les quantités suivantes (B) :

$$a = \vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{1} > 0$$

$$b = \vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu}$$

$$c = \vec{\mu}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu} > 0$$

Cette équation peut être réécrite de manière suivante :

$$a(a\sigma^2 - 1)\lambda^2 - 2b(a\sigma^2 - 1)\lambda + b^2\sigma^2 - c = 0$$

La solution de cette équation est :

$$\lambda = \frac{2b(a\sigma^2 - 1) \pm \sqrt{D}}{2a(a\sigma^2 - 1)}$$

$$D = 4a^2b^2\sigma^4 - 8ab^2\sigma^2 + 4b^2 - 4a^2b^2\sigma^4 + 4a^2c\sigma^2 + 4ab^2\sigma^2 - 4ac$$

$$\Leftrightarrow D = 4a(ac - b^2)\sigma^2 - 4(ac - b^2) = 4(ac - b^2)(a\sigma^2 - 1)$$

Ce qui nous apprend :

$$\kappa = \frac{b - a\lambda}{2} = \mp \frac{\sqrt{D}}{4(a\sigma^2 - 1)}$$

Remarquons que la matrice hessienne est définie négative pour une des deux solutions (le maximum) et qu'elle est définie positive pour l'autre solution (le minimum). Il y a donc exactement une solution (choisissons κ afin que la hessienne soit définie négative) :

$$\vec{w}_P = \Sigma^{-1} \frac{\vec{\mu} - \lambda \vec{1}}{2\kappa}$$

Maintenant une relation explicite entre σ^2 et μ peut être calculée (développement voir en annexe A).

En définissant :

$$d = ac - b^2$$

Cette équation peut être écrite comme :

$$\sigma^2 = \frac{a\mu^2 - 2b\mu + c}{d}$$

Cette fonction atteint un minimum lorsque :

$$\mu_{min} = \frac{b}{a}$$

Ce qui nous apprend également :

$$\sigma_{min}^2 = \frac{1}{a}$$

La frontière efficace de Markowitz correspond alors à la branche supérieure d'une parabole dans l'espace (σ^2, μ) (figure 1) :

$$F_M \leftrightarrow \sigma^2 = \frac{a\mu^2 - 2b\mu + c}{d} \quad \left(\mu \geq \frac{b}{a} \right)$$

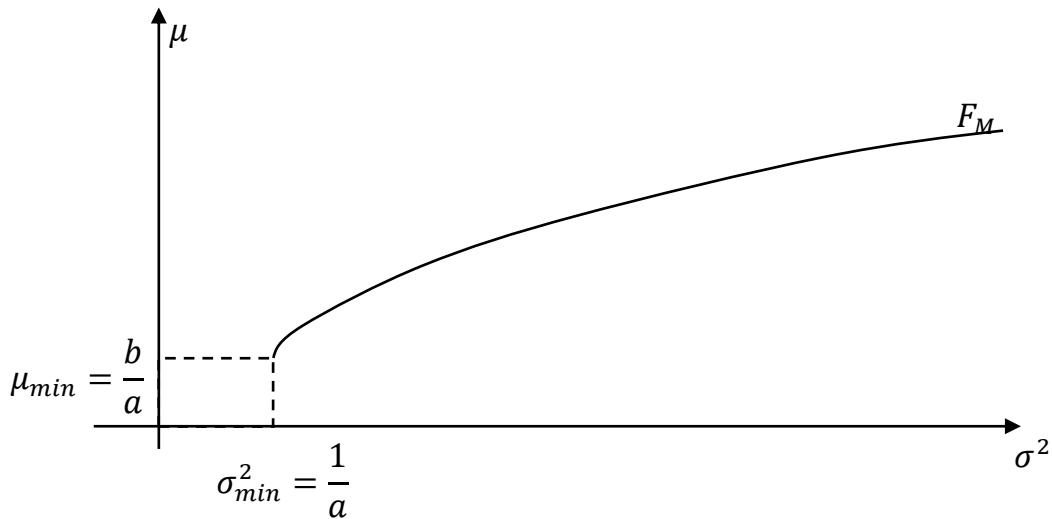


Figure 1 : Frontière de Markowitz

Une deuxième façon de procéder consiste en minimisant la variance de rendement en supposant que le rendement attendu reste constant :

$$\begin{cases} \min_{\vec{w}_P} \vec{w}_P^T \Sigma \vec{w}_P \\ \vec{w}_P^T \vec{1} = 1 \\ \vec{\mu}^T \vec{w}_P = \mu \end{cases}$$

Il est alors possible de calculer le lagrangien et la hessienne de ce problème, ce qui nous donne :

$$L(\vec{w}_p) = \vec{\nabla} \left(\vec{w}_p^T \Sigma \vec{w}_p - \lambda (\vec{w}_p^T \vec{1} - 1) - \kappa (\vec{\mu}^T \vec{w}_p - \mu) \right) = \begin{pmatrix} 2\Sigma \vec{w}_p - \lambda \vec{1} - \kappa \vec{\mu} \\ 1 - \vec{w}_p^T \vec{1} \\ \mu - \vec{\mu}^T \vec{w}_p \end{pmatrix}$$

$$H(\vec{w}_p) = \begin{pmatrix} 2\Sigma & -\vec{1}^T & -\vec{\mu}^T \\ -\vec{1} & 0 & 0 \\ -\vec{\mu} & 0 & 0 \end{pmatrix} > 0 \text{ (la matrice est positive définie)}$$

Ce qui nous donne :

$$L(\vec{w}_p) = \vec{0} \Rightarrow \vec{w}_p = \frac{1}{2} \Sigma^{-1} (\lambda \vec{1} + \kappa \vec{\mu}) \quad (C)$$

En multipliant l'équation (C) de gauche avec $\vec{1}^T$, il devient clair que :

$$1 = \frac{1}{2} \vec{1}^T \Sigma^{-1} (\lambda \vec{1} + \kappa \vec{\mu}) \quad (D)$$

En multipliant l'équation (C) de gauche avec $\vec{\mu}^T$, il devient clair que :

$$\mu = \frac{1}{2} \vec{\mu}^T \Sigma^{-1} (\lambda \vec{1} + \kappa \vec{\mu}) \quad (E)$$

En combinant les équations (D) et (E), les solutions suivantes ont été trouvées :

$$\lambda = 2 \frac{\vec{\mu}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu} - (\vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu}) \mu}{(\vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{1})(\vec{\mu}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu}) - (\vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu})^2}$$

$$\kappa = 2 \frac{(\vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{1}) \mu - \vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu}}{(\vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{1})(\vec{\mu}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu}) - (\vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu})^2}$$

Ce qui nous donne comme solution finale :

$$\vec{w}_p = \Sigma^{-1} \frac{(\vec{\mu}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu} - (\vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu}) \mu) \vec{1} + ((\vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{1}) \mu - \vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu}) \vec{\mu}}{(\vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{1})(\vec{\mu}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu}) - (\vec{1}^T \Sigma^{-1} \vec{\mu})^2}$$

Cette équation peut être réécrite comme :

$$\vec{w}_P = \Sigma^{-1} \frac{(c - b\mu)\vec{1} + (a\mu - b)\vec{\mu}}{d}$$

Souvent cette manière est préférée, vu qu'elle permet de construire de manière relativement simple un portefeuille optimisé en présupposant un return *target* μ .

En utilisant la formule trouvée pour $\vec{w}_P$ il est de nouveau possible de trouver une relation explicite entre σ^2 et μ , vu que nous savons :

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \vec{w}_P^T \Sigma \vec{w}_P = \frac{(c - b\mu)\vec{1}^T + (a\mu - b)\vec{\mu}^T}{d} \Sigma^{-1} \frac{(c - b\mu)\vec{1} + (a\mu - b)\vec{\mu}}{d} \\ &\Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{a(c - b\mu)^2 + 2b(c - b\mu)(a\mu - b) + c(a\mu - b)^2}{d^2} \\ &\Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{a\mu^2 - 2b\mu + c}{d} \end{aligned}$$

La solution trouvée correspond exactement à la solution du premier problème.

Une troisième façon de résoudre le problème d'optimisation d'un portefeuille financier, consiste en utilisant des fonctions d'utilité. La fonction d'utilité est alors définie comme étant :

$$u(P) = \mu_P - \frac{A\sigma_P^2}{2} = \vec{\mu}^T \vec{w}_P - \frac{A\vec{w}_P^T \Sigma \vec{w}_P}{2} \quad (\vec{w}_P^T \vec{1} = 1)$$

Le coefficient A est une mesure d'aversion au risque : le plus grand ce coefficient, le plus averse l'investisseur soit au risque. Trois types d'individus peuvent alors être distingués :

$A > 0$: un individu averse au risque

$A = 0$: un individu neutre au risque

$A < 0$: un individu cherchant le risque

La maximalisation de la fonction d'utilité correspond alors à la solution du problème suivant :

$$\begin{cases} \max_{\vec{w}_P} \left(\vec{\mu}^T \vec{w}_P - \frac{A \vec{w}_P^T \Sigma \vec{w}_P}{2} \right) \\ \vec{w}_P^T \vec{1} = 1 \end{cases}$$

Le lagrangien et la hessienne sont les suivants :

$$L(\vec{w}) = \vec{\nabla} \left(\vec{\mu}^T \vec{w}_P - \frac{A \vec{w}_P^T \Sigma \vec{w}_P}{2} - \lambda (\vec{w}_P^T \vec{1} - 1) \right) = \begin{pmatrix} \vec{\mu}^T - A \Sigma \vec{w}_P - \lambda \vec{1} \\ 1 - \vec{w}_P^T \vec{1} \end{pmatrix}$$

$$H(\vec{w}) = \begin{pmatrix} -A \Sigma & -\vec{1} \\ -\vec{1}^T & 0 \end{pmatrix} < 0 \text{ (cette matrice est définie négative si } A > 0)$$

La solution est alors la suivante :

$$\vec{w}_P = \frac{\Sigma^{-1} \vec{\mu} - \lambda \Sigma^{-1} \vec{1}}{A}$$

En multipliant cette équation de gauche avec $\vec{1}^T$, ceci devient :

$$1 = \vec{1}^T \vec{w}_P = \frac{b - a\lambda}{A} \Leftrightarrow \lambda = \frac{b - A}{a}$$

Ce qui nous donne la solution finale :

$$\vec{w}_P = \frac{a \Sigma^{-1} \vec{\mu} - (b - A) \Sigma^{-1} \vec{1}}{aA}$$

Ceci nous permet de trouver un système d'équations paramétriques de la frontière de Markowitz :

$$F_M \leftrightarrow \begin{cases} \mu = \vec{\mu}^T \vec{w}_P = \frac{ac - (b - A)b}{aA} \\ \sigma^2 = \vec{w}_P^T \Sigma \vec{w}_P = \frac{a^2 c - 2ab(b - A) + a(b - A)^2}{(aA)^2} \end{cases}$$

Ce système d'équations peut être simplifié ainsi :

$$F_M \leftrightarrow \begin{cases} \mu = \frac{b}{a} + \frac{d}{a} A^{-1} \\ \sigma^2 = \frac{1}{a} + \frac{d}{a} A^{-2} \end{cases}$$

Remarquons de nouveau :

$$\mu_{min} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{b}{a} + \frac{d}{a} A^{-1} \right) = \frac{b}{a}$$

$$\sigma_{min}^2 = \lim_{A \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{a} + \frac{d}{a} A^{-2} \right) = \frac{1}{a}$$

$$\vec{w}_{min} = \lim_{A \rightarrow +\infty} \frac{a\Sigma^{-1}\vec{\mu} - (b - A)\Sigma^{-1}\vec{1}}{aA} = \frac{\Sigma^{-1}\vec{1}}{a}$$

En éliminant A^{-1} de ce système d'équations paramétriques, l'équation de la frontière efficace devient :

$$F_M \leftrightarrow \sigma^2 = \frac{a\mu^2 - 2b\mu + c}{d} \quad \left(\mu \geq \frac{b}{a} \right)$$

Ce qui correspond à la solution déjà trouvée.

L'utilité maximale correspondante est :

$$u_{max} = \frac{b}{a} + \frac{d}{a} A^{-1} - \frac{A}{2} \left(\frac{1}{a} + \frac{d}{a} A^{-2} \right) = \frac{b}{a} - \frac{A}{2a} + \frac{dA^{-1}}{2a}$$

Remarquons que la solution de ce problème correspond à trouver le niveau d'utilité u_{max} , pour lequel la courbe d'indifférence I est tangente à la frontière efficace de Markowitz :

$$I \leftrightarrow u_{max} = \mu - \frac{A}{2} \sigma^2$$

$$F_M \leftrightarrow \sigma^2 = \frac{a\mu^2 - 2b\mu + c}{d} \quad \left(\mu \geq \frac{b}{a} \right)$$

Ce système n'a qu'une solution si le discriminant de l'équation quadratique suivante vaut 0 :

$$\frac{a\mu^2 - 2b\mu + c}{d} = 2 \frac{\mu - u_{max}}{A}$$

$$\Leftrightarrow aA\mu^2 - 2(bA + d)\mu + cA + 2du_{max} = 0$$

Le discriminant de cette équation est :

$$D = 4(b^2A^2 + 2bdA + d^2) - 4acA^2 - 8adAu_{max}$$

Pour que le discriminant vaille zéro, il nous faut :

$$u_{max} = \frac{2bd}{2ad} + \frac{b^2 - ac}{2ad}A + \frac{d^2}{2ad}A^{-1} = \frac{b}{a} - \frac{A}{2A} + \frac{d}{2a}A^{-1}$$

Ce qui correspond avec la solution trouvée ci-avant.

Ceci est montré sur le graphique suivant (figure 2) :

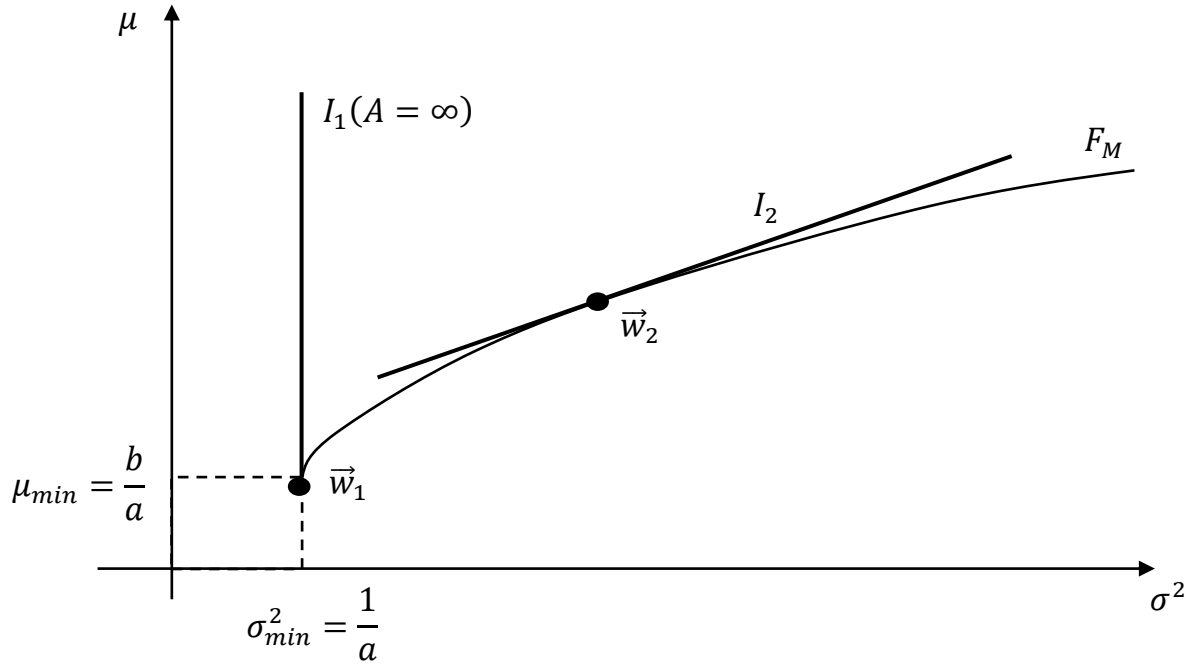


Figure 2 : Frontière de Markowitz et courbes d'indifférence

Une dernière méthode consiste en résolvant le problème suivant :

$$\begin{cases} \min_{\vec{w}_P} (\vec{w}_P^T \Sigma \vec{w}_P - 2q\vec{\mu}^T \vec{w}_P) \\ \vec{w}_P^T \vec{1} = 1 \end{cases}$$

Il est claire que ce problème est identique au celui expliqué ci-avant.

En substituant :

$$q = \frac{1}{A}$$

Nous obtenons alors de manière analogue :

$$F_M \leftrightarrow \begin{cases} \mu = \frac{b}{a} + \frac{d}{a}q \\ \sigma^2 = \frac{1}{a} + \frac{d}{a}q^2 \end{cases}$$

$$\vec{w}_p = \frac{a\Sigma^{-1}\vec{\mu} - (b - q^{-1})\Sigma^{-1}\vec{1}}{aq^{-1}}$$

Cette dernière expression peut être simplifiée ainsi :

$$\vec{w}_p = q \left(\Sigma^{-1}\vec{\mu} - \frac{b}{a}\Sigma^{-1}\vec{1} \right) + \frac{\Sigma^{-1}\vec{1}}{a}$$

1.3.2 Le théorème des deux fonds mutuels

En utilisant la dernière équation qui nous permet de trouver des portefeuilles financiers optimaux, différents portefeuilles optimaux peuvent être construits de façon suivante :

$$\vec{w}_i = q_i \left(\Sigma^{-1}\vec{\mu} - \frac{b}{a}\Sigma^{-1}\vec{1} \right) + \frac{\Sigma^{-1}\vec{1}}{a}$$

En considérant maintenant trois différents portefeuilles optimaux, nous remarquons :

$$\vec{w}_3 = x\vec{w}_1 + (1-x)\vec{w}_2 \Leftrightarrow x = \frac{q_3 - q_2}{q_1 - q_2}$$

La conséquence de cette équation est que si l'on considère deux différents fonds mutuels qui eux-mêmes sont des portefeuilles optimaux, alors chaque autre portefeuille optimal pourrait être construit en combinant ces deux fonds mutuels. Ce théorème est alors appelé *le théorème des deux fonds mutuels* ou *le théorème de séparation*. Une conséquence directe de ce théorème est que la stratégie passive est alors efficace.

1.3.3 Optimisation en tenant compte de l'actif sans risque

La solution trouvée ci-avant ne tient pas compte de l'éventuelle existence d'un actif sans risque. Un actif sans risque F a comme propriété :

$$\sigma_F = 0$$

Pour chaque portefeuille C étant une combinaison entre l'actif sans risque F et un actif risqué P , il faut :

$$C = (1 - x)F + xP$$

$$\mu_C = (1 - x)\mu_F + x\mu_P$$

$$\sigma_C = x\sigma_P$$

En éliminant x l'équation suivante sera trouvée :

$$CAL_P \leftrightarrow \mu_C - \mu_F = (\mu_P - \mu_F) \frac{\sigma_C}{\sigma_P}$$

Cette équation est appelée la *Capital Allocation Line* : elle nous donne la relation entre le rendement attendu d'un actif et le risque lié à cet actif.

L'utilité correspondant à cet actif, peut être calculée de manière suivante :

$$u = \mu_C - \frac{A\sigma_C^2}{2} = \mu_F + x(\mu_P - \mu_F) - \frac{A\sigma_P^2}{2}x^2$$

Ce qui nous permet de calculer la proportion x optimale :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \mu_P - \mu_F - A\sigma_P^2 x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\mu_P - \mu_F}{A\sigma_P^2}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -A\sigma_P^2 < 0 \quad (A > 0)$$

La *Capital Allocation Line* vient d'être dérivée en utilisant un actif risqué. Cependant il nous semble plus utile de connaître le portefeuille optimal en prenant en considération tous les actifs risqués. Il nous faut alors que la pente de la *Capital Allocation Line* soit la plus grande possible. Il faut alors que nous résolvions le problème suivant :

$$\max_P \frac{\mu_P - \mu_F}{\sigma_P}$$

En remplissant le système d'équations paramétriques représentant la frontière efficace de Markowitz, il peut être démontré que ce problème correspond à :

$$\max_q \frac{\frac{b}{a} + \frac{d}{a}q - \mu_F}{\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{d}{a}q^2}}$$

Cette fonction atteint son maximum lorsque (développement en annexe A) :

$$\bar{q} = \frac{1}{b - a\mu_F}$$

Le portefeuille risqué optimal est donc :

$$\begin{aligned}\vec{w}_M &= \frac{1}{b - a\mu_F} \left(\Sigma^{-1} \vec{\mu} - \frac{b}{a} \Sigma^{-1} \vec{1} \right) + \frac{\Sigma^{-1} \vec{1}}{a} = \frac{1}{b - a\mu_F} (\Sigma^{-1} \vec{\mu} - \mu_F \Sigma^{-1} \vec{1}) \\ \mu_M &= \frac{b}{a} + \frac{d}{a} \frac{1}{b - a\mu_F} = \frac{c - b\mu_F}{b - a\mu_F} \\ \sigma_M^2 &= \frac{1}{a} + \frac{d}{a} \left(\frac{1}{b - a\mu_F} \right)^2 = \frac{a\mu_F^2 - 2b\mu_F + c}{(b - a\mu_F)^2}\end{aligned}$$

Ce portefeuille s'appelle le *portefeuille de marché*. La capital allocation line correspondante s'appelle la *Capital Market Line* ou la *droite du marché des capitaux*. Elle a alors l'équation suivante :

$$CML \leftrightarrow \mu_C - \mu_F = (\mu_M - \mu_F) \frac{\sigma_C}{\sigma_M}$$

En utilisant les valeurs de μ_M et σ_M^2 trouvées si avant :

$$\begin{aligned}\sigma_C &= \frac{\mu_C - \mu_F}{\mu_M - \mu_F} \sigma_M = \frac{\mu_C - \mu_F}{\mu_M - \mu_F} \frac{\sqrt{a\mu_F^2 - 2b\mu_F + c}}{b - a\mu_F} \\ &= \frac{\mu_C - \mu_F}{c - 2b\mu_F + a\mu_F^2} \sqrt{a\mu_F^2 - 2b\mu_F + c} \\ &= \frac{\mu_C - \mu_F}{\sqrt{a\mu_F^2 - 2b\mu_F + c}}\end{aligned}$$

La capital market line contient alors tous les actifs optimaux dans un environnement qui contient un actif sans risque :

$$CML \leftrightarrow \sigma = \frac{\mu - \mu_F}{\sqrt{a\mu_F^2 - 2b\mu_F + c}}$$

Cette courbe correspond à une droite dans l'espace (σ, μ) . Elle est tangente à la frontière efficace de Markowitz de l'environnement sans actif sans risque (sinon nous aurions trouvé plusieurs portefeuilles risqués optimaux).

Il fut déjà démontré que la proportion optimale du portefeuille risqué qu'un individu doit posséder est :

$$x = \frac{\mu_P - \mu_F}{A\sigma_P^2}$$

Cependant en globalité tous les individus ensemble posséderont 100% du portefeuille de marché, ce qui nous apprend :

$$1 = \frac{\mu_M - \mu_F}{\bar{A}\sigma_M^2}$$

$$\bar{A} = \frac{1}{\bar{q}} = b - a\mu_F$$

Alors nous pourrions réécrire l'équation de la droite du marché des capitaux :

$$CML \leftrightarrow \mu - \mu_F = \bar{A}\sigma_M\sigma$$

Si maintenant nous décidons d'ajouter un actif X au portefeuille du marché, nous observerions que le risque et le rendement liés au portefeuille du marché changeront de manière suivante (si l'actif X est valorisé correctement) :

$$\Delta\sigma^2 = w_X^2\sigma_X^2 + 2w_Mw_X\sigma_{XM} \approx 2w_Mw_X\sigma_{XM} \quad (w_X \ll w_M)$$

$$\Delta\mu = w_X\mu_X$$

L'actif X pourrait alors être acheté en empruntant au taux sans risque μ_F . Il faut alors que le rapport entre le risque et le rendement attendu équivaille celui du marché :

$$\frac{w_X(\mu_X - \mu_F)}{2w_Mw_X\sigma_{XM}} = \frac{w_X(\mu_M - \mu_F)}{2w_Mw_X\sigma_{MM}} = \frac{w_X(\mu_M - \mu_F)}{2w_Mw_X\sigma_M^2}$$

$$\Leftrightarrow \mu_X - \mu_F = (\mu_M - \mu_F) \frac{\sigma_{XM}}{\sigma_M^2}$$

La mesure du risque suivante peut alors être définie :

$$\beta_X = \frac{\sigma_{XM}}{\sigma_M^2}$$

Notons que pour le portefeuille de marché lui-même :

$$\beta_M = 1$$

Nous trouverons alors la relation suivant entre le rendement et le risque liés à l'actif X :

$$SML_X \Leftrightarrow \mu_X - \mu_F = (\mu_M - \mu_F)\beta_X$$

Cette droite est appelée la *Security Market Line* ou la *droite de marché des titres*. Il est possible de la lier à l'équation de régression entre un seul actif et le portefeuille de marché. En effectuant cette régression, nous obtenons la *Security Characteristic Line* :

$$SCL_X \Leftrightarrow \hat{\mu}_X = \alpha_X + \mu_F + (\hat{\mu}_M - \mu_F)\beta_X + \varepsilon_X \quad (\varepsilon_X \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\varepsilon_X}^2))$$

1.3.4 Impact de la diversification

Afin de montrer l'impact de la diversification sur le risque lié à un portefeuille financier, supposons que l'on investisse dans un portefeuille financier dans lequel chaque actif a un poids identique :

$$\forall i: w_i = \frac{1}{n}$$

Calculons maintenant la variance liée à ce portefeuille P :

$$\sigma_P^2 = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\sigma_i}{n}\right)^2 + \sum_i^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \frac{\sigma_{ij}}{n^2}$$

Définissons maintenant la variance moyenne $\bar{\sigma}_i^2$ et la covariance moyenne $\bar{\sigma}_{ij}$:

$$\bar{\sigma}_i^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sigma_i^2$$

$$\bar{\sigma}_{ij} = \frac{1}{n(n-1)} \sum_i^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \sigma_{ij}$$

Alors ceci donne :

$$\sigma_P^2 = \frac{\bar{\sigma}_i^2}{n} + \frac{n-1}{n} \bar{\sigma}_{ij}$$

Ce qui nous donne l'équation suivante :

$$\sigma_M^2 = \lim_{n \rightarrow +\infty} \sigma_P^2 = \bar{\sigma}_{ij}$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$\sigma_P^2 = \frac{\bar{\sigma}_i^2}{n} + \frac{n-1}{n} \sigma_M^2$$

Le premier terme est appelé le *risque diversifiable* ou *risque non-systématique*, ce terme tend vers zéro lorsque le nombre d'actifs dans notre portefeuille augmente. Le deuxième terme est appelé le *risque non-diversifiable*, le *risque systématique* ou le *risque du marché*. En outre notons que la

covariance elle-même tend plus vers zéro si l'on inclut plus d'actifs, le seul risque qui nous restera sera alors le risque qui est inhérent au marché.

1.4 Mesures de performance

Afin de pouvoir mesurer l'impact de la diversification, il faut que nous définissions des mesures qui nous rendront capables de mesurer la performance de différents portefeuilles financiers construits. Les mesures suivantes seront traitées : le ratio de Sharpe, le ratio de Treynor, la mesure de Jensen et la mesure de Modigliani-Modigliani (M²).

1.4.1 Le ratio de Sharpe

Ce ratio fut utilisé pour la première fois par William Sharpe en 1966. Il peut être dérivé de manière suivante : reprenons l'équation de la *Capital Allocation Line* :

$$CAL_P \leftrightarrow \mu - \mu_F = \frac{\mu_P - \mu_F}{\sigma_P} \sigma$$

La pente de cette équation est appelée le *ratio de Sharpe* (S) (Bodie, Z., Kane, A., Marcus, A.J., 2005) :

$$S_P = \frac{\mu_P - \mu_F}{\sigma_P}$$

Le ratio de Sharpe est un bon indicateur de performance si le risque non-systématique encore capté dans le dénominateur n'est pas trop élevé, il peut donc être utilisé afin de mesurer la performance de portefeuilles bien diversifiés (ce qui est bien l'objet de ce mémoire). Il nous indique si le risque qui a été couru a bien été récompensé par un rendement assez supérieur au taux sans risque.

1.4.2 Le ratio de Treynor

En 1965 Jack L. Treynor développa une nouvelle méthode pour mesurer la performance de portefeuilles financiers en reprenant l'équation de la *Security Market Line* :

$$SML \leftrightarrow \mu - \mu_F = (\mu_M - \mu_F)\beta$$

Vu que $\beta_M = 1$, cette équation peut être réécrite de manière suivante :

$$\frac{\mu_P - \mu_F}{\beta_P} = \frac{\mu_M - \mu_F}{\beta_M}$$

Ce ratio est appelé le *ratio de Treynor* (T) (Bodson, L., Grandin, P., Hübner, G., Lambert, M., 2010) :

$$T_P = \frac{\mu_P - \mu_F}{\beta_P}$$

Ce ratio exprime donc le return en excès de l'actif sans risque en fonction du risque systématique (capté dans β_P). Trois cas peuvent être distingués :

$T_P > T_M$: le portefeuille P est sous-valorisé

$T_P = T_M$: le portefeuille P est valorisé correctement ($P \in SML$)

$T_P < T_M$: le portefeuille P est survalorisé

Le ratio de Treynor nous indique si le risque systématique ayant été couru a bien été récompensé par un rendement assez supérieur au taux sans risque.

1.4.3 La mesure de Jensen

Si nous reprenons l'équation de la *Security Characteristic Line* :

$$SCL_P \leftrightarrow \hat{\mu}_P = \alpha_P + \mu_F + (\hat{\mu}_M - \mu_F)\beta_P + \varepsilon_P \quad \left(\varepsilon_P \sim \mathcal{N}(0, \sigma_{\varepsilon_P}^2) \right)$$

Les situations suivantes peuvent être distinguées:

$\alpha_P > 0$: le portefeuille P est sous-valorisé

$\alpha_P = 0$: le portefeuille P est correctement valorisé ($P \in SML$)

$\alpha_P < 0$: le portefeuille P est survalorisé

La valeur α_P est appelée la mesure de Jensen, vu qu'elle fut utilisée pour la première fois par Michael Jensen en 1968 afin de mesurer la performance des fonds mutuels. Il s'agit d'une comparaison du rendement réel avec le rendement attendu selon le modèle CAPM : une mesure de Jensen négative nous apprend que le rendement réel a été inférieur au rendement attendu selon le modèle CAPM, tandis qu'une mesure de Jensen positive nous indique que le rendement réel fut supérieur au rendement attendu.

1.4.4 La mesure de Modigliani-Modigliani

Souvent il est difficile d'interpréter les mesures de performance définies ci-avant, en plus il n'est pas possible de directement comparer les ratios obtenus pour deux portefeuilles financiers. Alors, afin de trouver une mesure qui est directement interprétable, Franco Modigliani et Leah Modigliani (desquels le nom de la mesure aura alors été dérivé) développèrent en 1997 une nouvelle mesure qu'ils appelaient le *risk-adjusted performance* (RAP), cependant cette mesure est devenue connue sous le nom de la mesure de Modigliani-Modigliani (M^2) (Bodson, L., Grandin, P., Hübner, G., Lambert, M., 2010).

Le raisonnement est le suivant : pour que les performances de deux portefeuilles financiers P, Q puissent être mesurées et comparées directement, il faut d'abord créer des portefeuilles ajustés en mixant les portefeuilles fictivement avec l'actif sans risque F afin que les portefeuilles ajustés P^*, Q^* aient la même volatilité que le portefeuille du marché :

$$P^* = \frac{\sigma_M}{\sigma_P} P + \left(1 - \frac{\sigma_M}{\sigma_P}\right) F$$

$$Q^* = \frac{\sigma_M}{\sigma_Q} Q + \left(1 - \frac{\sigma_M}{\sigma_Q}\right) F$$

Alors le rendement ajusté pour le risque des deux portefeuilles peut être calculé :

$$M_P^2 = \frac{\sigma_M}{\sigma_P} \mu_P + \left(1 - \frac{\sigma_M}{\sigma_P}\right) \mu_F = \mu_F + \frac{\sigma_M}{\sigma_P} (\mu_P - \mu_F)$$

$$M_Q^2 = \mu_F + \frac{\sigma_M}{\sigma_Q} (\mu_Q - \mu_F)$$

Maintenant les deux portefeuilles peuvent être comparés directement en comparant leur rendements ajustés M^2 .

1.4.5 Relations entre les différentes mesures de performance

Il existe des liens entre les différentes mesures de performance. Analysons d'abord la relation entre les ratios de Sharpe et de Treynor. Nous savons :

$$T_P = \frac{\mu_P - \mu_F}{\beta_P} = \frac{\sigma_M^2}{\sigma_{PM}} (\mu_P - \mu_F) = \frac{\sigma_M}{\rho_{PM} \sigma_P} (\mu_P - \mu_F) = \frac{\sigma_M}{\rho_{PM}} S_P$$

Il peut donc être conclu que les ratios de Treynor et de Sharpe donneront la même décision si les corrélations entre les deux portefeuilles et le portefeuille du marché sont identiques¹ :

$$T_P : T_Q = S_P : S_Q \Leftrightarrow \varrho_{PM} = \varrho_{QM}$$

Regardons deuxièmement la relation entre le ratio de Sharpe et la mesure de Jensen :

$$\begin{aligned}\mu_P &= E[\hat{\mu}_P] = \alpha_P + \mu_F + (\mu_M - \mu_F)\beta_P \\ S_P &= \frac{\mu_P - \mu_F}{\sigma_P} = \frac{\alpha_P + (\mu_M - \mu_F)\beta_P}{\sigma_P} = \frac{\alpha_P}{\sigma_P} + \frac{(\mu_M - \mu_F)\varrho_{PM}}{\sigma_M} \\ \Leftrightarrow \alpha_P &= S_P \sigma_P - \frac{(\mu_M - \mu_F)\varrho_{PM}}{\sigma_M} \sigma_P \\ \Leftrightarrow \alpha_P &= (S_P - \varrho_{PM} S_M) \sigma_P\end{aligned}$$

Remarquons donc que la mesure de Jensen et le ratio de Sharpe donneront les mêmes résultats si les corrélations entre les portefeuilles et le portefeuille du marché sont identiques et les écarts types des deux portefeuilles sont identiques.

Afin d'obtenir la relation entre la mesure de Jensen et le ratio de Treynor, il suffit de réécrire la dernière équation de manière suivante :

$$\alpha_P = \left(T_P \frac{\varrho_{PM}}{\sigma_M} - T_1 \frac{\varrho_{PM}}{\sigma_M} \right) \sigma_P = (T_P - T_M) \beta_P$$

Le ratio de Treynor et la mesure de Jensen donneront alors le même résultat si les bêtas des deux portefeuilles sont identiques, il en est de même pour le ratio de Sharpe² :

$$(\alpha_P = \alpha_Q \wedge T_P = T_Q \wedge S_P = S_Q) \Leftrightarrow \beta_P = \beta_Q$$

Si l'on reprend maintenant la mesure de Modigliani-Modigliani, l'on observe :

$$\begin{aligned}M_P^2 &= \mu_F + \frac{\sigma_M}{\sigma_P} (\mu_P - \mu_F) = \mu_F + \sigma_M S_P \\ \Leftrightarrow M_P^2 - \mu_M &= \sigma_M S_P - \frac{\mu_M - \mu_F}{\sigma_M} \sigma_M = (S_P - S_M) \sigma_M\end{aligned}$$

¹ A : B dénote le ratio de A sur B

² $\wedge$ Pour la conjonction de deux propositions

Ce qui nous donne le résultat suivant en fonction des ratios de Treynor :

$$M_P^2 - \mu_M = (T_P - T_M)Q_{PM}$$

La relation entre la mesure de Jensen et la mesure de Modigliani-Modigliani peut alors être décrite par l'équation suivante :

$$M_P^2 - \mu_M = \frac{\alpha_P \sigma_M}{\sigma_P}$$

1.5 Les différentes stratégies de diversification

Ci-avant il a été remarqué qu'il est important qu'un portefeuille financier soit diversifié. La diversification en soi peut être faite de différentes manières.

D'abord il est nécessaire que l'on n'investisse pas seulement dans une seule classe d'actifs. Deux grandes classes d'actifs peuvent être distinguées : une première classe d'actifs sont les actions, ce sont des titres de propriété d'une société qui n'ont pas de garanti de revenu fixe. Le revenu de ces actifs, qui est appelé dividende, dépendra de la performance de la société en question, désormais la valeur de ces titres y dépendra aussi. Une deuxième classe sont alors les obligations, ici il s'agit de titres à revenu fixe : n'importe la performance de la société, elle sera toujours obligée de payer l'intérêt annuel, qui est appelé coupon, aux détenteurs de ces titres et de leur rembourser au terme du contrat la valeur nominale de l'obligation. Les détenteurs des obligations sont alors sûrs du rendement de leurs investissements, sauf en cas de faillite de la société. Il en suit que des investissements dans des actions d'une société sont plus risqués que des investissements dans des obligations de cette même société, ceci a pour conséquence que les rendements attendus des actions devront être supérieurs à ceux des obligations. Vu que l'on voudrait minimiser le risque (la variance des titres) en maximisant en même temps le rendement attendu, il est alors important que notre portefeuille soit bien diversifié : il faut alors que l'on inclue tant des actions que des obligations dans le portefeuille. Vu que ceci n'est pas le sujet de ce mémoire, on utilisera dans le futur toujours des portefeuilles qui sont bien diversifiés en ce qui concerne les classes des actifs.

Deuxièmement il faut bien que le portefeuille soit diversifié au niveau des différentes industries : le plus d'industries incluses dans le portefeuille, le plus que la covariance entre les différentes titres tende vers zéro. De cette façon-ci le risque lié aux différents secteurs d'industrie sera limité : une crise émergente dans un des secteurs pourrait être une opportunité pour un autre. Puisqu'il n'est pas le but d'examiner l'impact de ce type de

diversification, dans ce qui suit, nous utiliserons toujours des indices groupant toutes les industries d'une seule région. En faisant le lien avec la diversification au niveau des classes d'actifs, nous créerons deux indices par région : un indice d'actions et un indice d'obligations.

Le sujet qui sera examiné dans ce qui suivra, sera alors l'impact de la diversification géographique. Il nous semble qu'afin de limiter le risque et de maximiser le rendement il vaut mieux investir dans les différentes régions du monde. Le raisonnement est le même pour les secteurs industriels : il n'est pas nécessaire qu'une crise soit mondiale, elle peut bien être locale et donner des opportunités aux autres parties du monde. Dans ce qui suit, ce type de diversification sera analysé en détail et son impact sera quantifié.

1.6 *Risque de change*

Dans le cas d'une diversification géographique, il est important à savoir que l'on investisse dans des titres qui ont une dénomination en différentes devises : l'investisseur n'achètera donc pas seulement des actions et obligations dénommées en la devise de sa région (par exemple en euro), mais également des titres dénommés en devises étrangères (par exemple dollars ou yen). En ne considérant qu'une période, il faut que l'équation suivante soit valable :

$$1 + r_{\text{€}} = (1 + r_{\text{\$}}) \frac{E_1^{\text{€}/\$}}{E_0^{\text{€}/\$}}$$

$r_{\text{€}}$: le taux d'intérêt en €

$r_{\text{\$}}$: le taux d'intérêt en \\$

$E_0^{\text{€}/\$}$: le taux de change au début de la période

$E_1^{\text{€}/\$}$: le taux de change à la fin de la période

L'équation peut être interprétée de manière suivante : la valeur exprimée en euros d'un titre est égale à la valeur exprimée en dollars multipliée avec l'appréciation du dollar vis-à-vis de l'euro. Cette équation est connue sous le nom de la *parité des taux d'intérêt*.

Le taux d'appréciation du dollar vis-à-vis de l'euro est défini de manière suivante :

$$e_i^{\$(\epsilon)} = \frac{E_i^{\epsilon/\$}}{E_{i-1}^{\epsilon/\$}} - 1$$

Ceci nous permet de réécrire la première équation :

$$r_{\epsilon} = r_{\$} + e_i^{\$(\epsilon)} + r_{\$}e_i^{\$(\epsilon)}$$

Le rendement d'un titre américain exprimé en euros, dépend donc des facteurs suivants:

- le rendement exprimé en dollars
- l'appréciation du dollar vis-à-vis de l'euro

Ceci nous donne la formule suivante pour la variance :

$$Var[r_{\epsilon}] = Var[r_{\$}] + Var[e_i^{\$(\epsilon)}] + 2Cov[r_{\$}, e_i^{\$(\epsilon)}] + \Delta Var$$

$$\Delta Var = Var[r_{\$}e_i^{\$(\epsilon)}] + 2Cov[r_{\$}, r_{\$}e_i^{\$(\epsilon)}] + 2Cov[e_i^{\$(\epsilon)}, r_{\$}e_i^{\$(\epsilon)}]$$

Multiple études (Eun & Resnick, 1994) ont montré que l'influence du dernier terme n'est pas significative, alors la formule pourrait être simplifiée :

$$Var[r_{\epsilon}] \approx Var[r_{\$}] + Var[e_i^{\$(\epsilon)}] + 2Cov[r_{\$}, e_i^{\$(\epsilon)}]$$

Considérons maintenant un portefeuille qui contient des titres exprimés en plusieurs devises différentes, la variance du rendement peut alors être décomposée de manière suivante :

$$Var[R_P^{\epsilon}] \approx \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (w_i w_j Cov[R_i, R_j] + w_i w_j Cov[e^{i(\epsilon)}, e^{j(\epsilon)}] + 2w_i w_j Cov[R_i, e^{j(\epsilon)}])$$

Supposons maintenant que nous ayons investi de nouveau en un seul titre étranger et que nous ayons en même temps vendu un contrat forward de sorte que l'appréciation incertaine du dollar soit remplacée par une appréciation certaine (Eun & Resnick, 1991) :

$$r_{\epsilon}^H = (1 + E[r_{\$}]) (1 + f^{\$(\epsilon)}) + (r_{\$} - E[r_{\$}]) (1 + e^{\$(\epsilon)}) - 1$$

r_{ϵ}^H : le rendement du portefeuille couvert de risque (en anglais : *hedged portfolio*)

$f^{\$(\epsilon)}$: le forward de l'appréciation du dollar

Alors cette formule devient :

$$r_{\epsilon}^H = r_{\$} + f^{\$(\epsilon)} + r_{\$} e^{\$(\epsilon)} + E[r_{\$}] (f^{\$(\epsilon)} - e^{\$(\epsilon)})$$

Cette formule peut être simplifiée, vu que :

$$r_{\$} e^{\$(\epsilon)} \approx 0$$

$$f^{\$(\epsilon)} \approx e^{\$(\epsilon)}$$

Ce qui nous apprend :

$$r_{\epsilon}^H \approx r_{\$} + f^{\$(\epsilon)}$$

Nous avons alors (à peu près) couvert le risque de change dans ce portefeuille. Le risque de change apporte sa propre volatilité dans le portefeuille et il interagit avec le portefeuille en fonction de sa corrélation avec l'actif étranger.

Il peut être intéressant de ne couvrir qu'une partie du risque de change. La variance d'un titre exprimé en devises étrangères peut être décrite par la formule ci-dessous ($w_{\$}$ représente la partie du titre américain non-couvert) (Peterson Labarge, K., Thomas, C., Polanco, F., Schlanger, T., 2014) :

$$\sigma_{P(\epsilon)}^2 = \sigma_{P(\$)}^2 + w_{\$}^2 \sigma_{\$}^2 + 2w_{\$} \rho_{P(\$),\$} \sigma_{\$} \sigma_{P(\$)}$$

Afin de minimiser le risque, il suffit de prendre la première et deuxième dérivée :

$$\frac{d\sigma_{P(\text{€})}^2}{dw_{\$}} = 2w_{\$}\sigma_{\$}^2 + 2\rho_{P(\$),\$}\sigma_{\$}\sigma_{P(\$)}$$

$$\frac{d^2\sigma_{P(\text{€})}^2}{dw_{\$}^2} = 2\sigma_{\$}^2 > 0$$

Ce qui nous donne comme minimum :

$$w_{\$}\sigma_{\$}^2 + \rho_{P(\$),\$}\sigma_{\$}\sigma_{P(\$)} = 0 \Leftrightarrow w_{\$}^* = -\rho_{P(\$),\$}\frac{\sigma_{P(\$)}}{\sigma_{\$}}$$

Avec $w_{\$}^*$: *Exposition optimal minimisant la volatilité du portefeuille p*

Il est alors possible de minimiser la variance d'un portefeuille contenant des devises étrangères en ne couvrant que partiellement le risque de change. Deux facteurs composent donc la principale source de l'impact de la devise sur le portefeuille : la volatilité de la devise par rapport à celle de l'actif et la corrélation de la devise et l'actif sous-jacent. Remarquons dans l'équation ci-dessus, que plus le ratio de volatilité $\frac{\sigma_{P(\$)}}{\sigma_{\$}}$ est important, plus l'exposition au risque du portefeuille sera élevée. Différentes études (Solnik, 1997 ; Perold et Schulman, 1988), ont montré que les volatilités des actifs et des devises ne peuvent s'additionner.

Dans le cas concret de ce mémoire, il y aura trois devises qui s'interagiront. Si le risque de change est couvert partiellement, ça nous permettra d'approximer le rendement du portefeuille de façon suivante :

$$r_{P(\epsilon)} = w_{EUR} \cdot r_{EUR}^{\epsilon} + w_{USD} \cdot r_{USD}^{\$} + w_{JPY} \cdot r_{JPY}^{\text{¥}} + w_{\$} \cdot w_{USD} \cdot e^{\$(\epsilon)} + w_{\text{¥}} \cdot w_{JPY} \cdot e^{\text{¥}(\epsilon)}$$

w_{EUR} = la portion du portefeuille investie en titres européens

w_{USD} = la portion du portefeuille investie en titres américains

w_{JPY} = la portion du portefeuille investie en titres japonais

r_{EUR}^{ϵ} = le rendement en euro des titres européens

$r_{USD}^{\$}$ = le rendement en dollar des titres américains

$r_{JPY}^{\text{¥}}$ = le rendement en yen des titres japonais

$w_{\$}$ = exposition au dollar

$w_{\text{¥}}$ = exposition au yen

$e^{\$(\epsilon)}$ = appréciation du dollar relative à l'euro

$e^{\text{¥}(\epsilon)}$ = appréciation du yen relative à l'euro

Ceci peut être réécrit comme suit :

$$r_{P(\epsilon)} = r_P + w_{\$} \cdot w_{USD} \cdot e^{\$(\epsilon)} + w_{\text{¥}} \cdot w_{JPY} \cdot e^{\text{¥}(\epsilon)}$$

$$r_P = w_{EUR} \cdot r_{EUR}^{\epsilon} + w_{USD} \cdot r_{USD}^{\$} + w_{JPY} \cdot r_{JPY}^{\text{¥}}$$

La variance correspondante est alors :

$$\begin{aligned} \sigma_{P(\epsilon)}^2 = & \sigma_P^2 + w_{\$}^2 \cdot w_{USD}^2 \cdot \sigma_{\$}^2 + w_{\text{¥}}^2 \cdot w_{JPY}^2 \cdot \sigma_{\text{¥}}^2 + 2w_{\$}w_{USD}\rho_{P,\$}\sigma_S\sigma_{\$} + 2w_{\text{¥}}w_{JPY}\rho_{P,\text{¥}}\sigma_P\sigma_{\text{¥}} \\ & + 2w_{\$}w_{\text{¥}}w_{JPY}w_{USD}\rho_{\$, \text{¥}}\sigma_{\$}\sigma_{\text{¥}} \end{aligned}$$

Maintenant on voudrait bien connaître les niveaux d'exposition optimale :

$$\vec{\nabla} \sigma_{P(\epsilon)}^2 = \begin{pmatrix} 2w_{\$}w_{USD}^2\sigma_{\$}^2 + 2w_{USD}\rho_{P,\$}\sigma_P\sigma_{\$} + 2w_{¥}w_{JPY}w_{USD}\rho_{\$,¥}\sigma_{\$}\sigma_{¥} \\ 2w_{¥}w_{JPY}^2\sigma_{¥}^2 + 2w_{JPY}\rho_{P,¥}\sigma_P\sigma_{¥} + 2w_{\$}w_{JPY}w_{USD}\rho_{\$,¥}\sigma_{\$}\sigma_{¥} \end{pmatrix}$$

$$H(\sigma_{P(\epsilon)}^2) = 2 \begin{pmatrix} w_{USD}^2\sigma_{\$}^2 & w_{JPY}w_{USD}\rho_{\$,¥}\sigma_{\$}\sigma_{¥} \\ w_{JPY}w_{USD}\rho_{\$,¥}\sigma_{\$}\sigma_{¥} & 2w_{JPY}^2\sigma_{¥}^2 \end{pmatrix} > 0 \text{ (Cette matrice est définie positive)}$$

Il suffit alors de résoudre le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} & \begin{cases} w_{\$}w_{USD}\sigma_{\$} + \rho_{P,\$}\sigma_P + w_{¥}w_{JPY}\rho_{\$,¥}\sigma_{¥} = 0 \\ w_{¥}w_{JPY}\sigma_{¥} + \rho_{P,¥}\sigma_P + w_{\$}w_{USD}\rho_{\$,¥}\sigma_{\$} = 0 \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} w_{\$}w_{USD}\sigma_{\$} + w_{¥}w_{JPY}\rho_{\$,¥}\sigma_{¥} = -\rho_{P,\$}\sigma_P \\ w_{\$}w_{USD}\rho_{\$,¥}\sigma_{\$} + w_{¥}w_{JPY}\sigma_{¥} = -\rho_{P,¥}\sigma_P \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} w_{¥}w_{JPY}(\rho_{\$,¥}^2 - 1)\sigma_{¥} = -\rho_{P,\$}\rho_{\$,¥}\sigma_P + \rho_{P,¥}\sigma_P \\ w_{\$}w_{USD}(1 - \rho_{\$,¥}^2)\sigma_{\$} = -\rho_{P,\$}\sigma_P + \rho_{P,¥}\rho_{\$,¥}\sigma_P \end{cases} \\ & \Leftrightarrow \begin{cases} w_{¥}w_{JPY} = \frac{\rho_{P,¥} - \rho_{P,\$}\rho_{\$,¥}}{(\rho_{\$,¥}^2 - 1)\sigma_{¥}} \sigma_P \\ w_{\$}w_{USD} = \frac{\rho_{P,\$} - \rho_{P,¥}\rho_{\$,¥}}{(\rho_{\$,¥}^2 - 1)\sigma_{\$}} \sigma_P \end{cases} \end{aligned}$$

Les expositions optimales sont alors données par les expressions suivantes :

$$\begin{aligned} w_{¥}^* &= \frac{1}{w_{JPY}} \frac{\rho_{P,¥} - \rho_{P,\$}\rho_{\$,¥}}{(\rho_{\$,¥}^2 - 1)\sigma_{¥}} \sigma_P \\ w_{\$}^* &= \frac{1}{w_{USD}} \frac{\rho_{P,\$} - \rho_{P,¥}\rho_{\$,¥}}{(\rho_{\$,¥}^2 - 1)\sigma_{\$}} \sigma_P \end{aligned}$$

Remarquez que dans le cas simple où les deux devises ne sont pas corrélées et que le portefeuille est entièrement investi dans la devise étrangère, ces équations se simplifient vers le cas simple.

1.7 Conclusion

Nous avons commencé ce chapitre en définissant le concept du « portefeuille financier privé ». Puis la théorie de portefeuille de Markowitz et le *Capital Asset Pricing Model* furent abordés, et il a été démontré que la diversification est importante afin d'optimiser un portefeuille financier. Ensuite des mesures de performance ont été définies qui nous permettront d'analyser l'impact de la diversification : le ratio de Sharpe, le ratio de Treynor, la mesure de Jensen et la mesure de Modigliani-Modigliani. Finalement le risque de taux de change a été traité et nous avons abordé une stratégie qui nous permettra de contourner ce risque.

Chapitre II

Profils de Risque & Mesures de Risque

2.1 Introduction

Dans ce chapitre les différents profils de risque et les mesures de risque seront traités. Premièrement nous introduirons la théorie de l'utilité espérée de von Neumann & Morgenstern et les fonctions d'utilité en général. A partir de ces fonctions d'utilité les différents profils de risque seront dérivés et nous ferons le lien avec la théorie de Markowitz. Puis nous contemplerons l'impact de l'horizon sur le rendement attendu et sur le risque couru. Finalement les défauts de la théorie de Markowitz seront expliqués ce qui nous amènera à des mesures de risque alternatives.

2.2 Fonctions d'utilité

Dans le premier chapitre, il a déjà été découvert qu'il existe différents profils d'investisseurs. Selon le modèle de Markowitz (1952), la fonction d'utilité que l'investisseur utilisera afin de faire des choix entre différents portefeuilles est la suivante :

$$u(P) = \mu_P - \frac{A\sigma_P^2}{2}$$

Plus généralement, von Neumann et Morgenstern (1948) ont développé une théorie qui s'appelle *la théorie de l'utilité espérée*. Selon le théorème principal de cette théorie, un investisseur préférera un portefeuille P au portefeuille Q si l'utilité espérée du portefeuille P est supérieure à l'utilité espérée du portefeuille Q ¹ :

$$u: \wp \rightarrow \mathbb{R}: \forall P, Q \in \wp: P \succ Q \Leftrightarrow E[u(W_T^P)] \geq E[u(W_T^Q)]$$

Dans cette équation $\wp$ représente l'ensemble de tous les portefeuilles possibles et $W_T^A = \vec{w}_A \cdot \vec{p}_A^T$ représente la valeur finale (au temps final T) du portefeuille A . En outre, von Neumann et Morgenstern démontrèrent que deux fonctions d'utilité sont équivalentes si l'une peut être transformée en l'autre en utilisant une transformation linéaire positive² :

$$u, v \in \wp: u \sim v \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}_0^+: u = a + bv$$

¹ $P \succ Q$ dénote que le portefeuille P est préféré au portefeuille Q

² $P \sim Q$ dénote que l'investisseur est indifférent envers les portefeuilles P et Q

Alors ces fonctions sont appelées fonctions d'utilités *cardinales*. En appliquant n'importe quelle fonction d'utilité équivalente, tous les portefeuilles de l'ensemble $\mathcal{P}$ seront classés dans le même ordre.

En utilisant cette propriété, il devient clair que :

$$u \sim v \Leftrightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial W^2} = b^2 \frac{\partial^2 v}{\partial W^2}$$

Vu que $b^2 > 0$, les situations suivantes peuvent être distinguées :

- L'investisseur recherche le risque :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial W^2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial W^2} \geq 0$$

- L'investisseur est neutre vis-à-vis du risque :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial W^2} = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial W^2} = 0$$

- L'investisseur est averse au risque :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial W^2} \leq 0 \Leftrightarrow \frac{\partial^2 v}{\partial W^2} \leq 0$$

Supposons maintenant que l'investisseur soit averse au risque. Ceci nous apprend alors que la fonction d'utilité est concave dans son domaine :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial W^2} \leq 0 \Rightarrow \forall x_1, x_2 \in \text{dom } u: u(w_1 x_1 + w_2 x_2) \geq w_1 u(x_1) + w_2 u(x_2)$$

$$(w_1, w_2 \in]0,1[\wedge w_1 + w_2 = 1)$$

Alors ceci nous apprend :

$$u\left(\sum_{i=1}^n w_i x_i\right) \geq (1 - w_n)u\left(\sum_{i=1}^{n-1} \frac{w_i}{1 - w_n} x_i\right) + w_n u(x_n)$$

$$\left(w_i \in]0,1[\wedge \sum_{i=1}^n w_i = 1\right)$$

Maintenant il suit :

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{w_i}{1 - w_n} = \frac{1}{1 - w_n} \sum_{i=1}^{n-1} w_i = \frac{1}{1 - w_n} (1 - w_n) = 1$$

Alors par induction :

$$u\left(\sum_{i=1}^n w_i x_i\right) \geq \sum_{i=1}^n w_i u(x_i)$$

Ce qui nous donne pour chaque distribution de probabilité discrète :

$u(E[W_P]) \geq E[u(W_P)]$

Cette inégalité est appelée l'inégalité de Jensen (1906) pour un investisseur averse au risque.

De manière analogue, il peut être démontré :

- Pour l'investisseur neutre au risque :

$$u(E[W_P]) = E[u(W_P)]$$

- Pour l'investisseur cherchant le risque :

$$u(E[W_P]) \leq E[u(W_P)]$$

Les fonctions d'utilité les plus souvent utilisées sont les suivantes :

- La fonction d'utilité linéaire :

$$u: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}: W \mapsto a + \beta W \quad (\beta > 0)$$

- La fonction d'utilité quadratique :

$$u:]-\infty, \alpha] \rightarrow]-\infty, 0]: W \mapsto -(\alpha - W)^2$$

- La fonction d'utilité exponentielle :

$$u: \mathbb{R} \rightarrow]-\infty, 0[: W \mapsto -\alpha e^{-\alpha W} \quad (\alpha > 0)$$

- La fonction d'utilité logarithmique :

$$u:]-\alpha, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}: W \mapsto \ln(\alpha + W)$$

- La fonction d'utilité iso-élastique :

$$u: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+: W \mapsto \frac{W^\alpha}{\alpha} \quad (0 < \alpha < 1)$$

Si l'on prend une fonction d'utilité générale, on trouve, en prenant la série de Taylor dans le point a :

$$u(W) = u(a) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{(W-a)^k}{k!} \cdot \frac{d^k u}{dW^k} \Big|_{W=a} \right)$$

En définissant les coefficients d'aversion au risque A_k :

$$A_k = -(-1)^k \frac{d^k u}{dW^k} \Big|_{W=a}$$

Nous obtenons :

$$u(W) = u(a) + A_1(W-a) - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k A_k (W-a)^k}{k!} \right)$$

Le théorème de l'utilité espérée nous apprend alors que :

$$E[u(W_P)] = u(a) + A_1 \cdot E[W_P - a] - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k A_k E[(W_P - a)^k]}{k!} \right)$$

Sachant que deux fonctions d'utilité cardinales u, v sont équivalentes lorsque l'une peut être transformée en l'autre en appliquant une transformation linéaire positive, la fonction d'utilité u peut être remplacée par la fonction suivante :

$$v = [a - u(a)] + u$$

Ceci nous donne :

$$E[v(W_P)] = a + A_1 \cdot E[W_P - a] - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k A_k E[(W_P - a)^k]}{k!} \right)$$

Si maintenant $a = E[W_P] = \mu_P$, il devient clair que :

$$E[v(W_P)] = \mu_P - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k A_k \mu_{P,k}'}{k!} \right)$$

En supposant que tous les coefficients d'aversion au risque équivalentent zéro si k est supérieure à 2, nous retrouvons la fonction d'utilité de Markowitz :

$$\forall k > 2: A_k = 0 \Rightarrow u(P) = \mu_P - \frac{A\sigma_P^2}{2} \quad (A = A_2)$$

La fonction d'utilité sous-jacente est donc une fonction d'utilité quadratique (toutes les dérivées ayant des degrés supérieures à deux, valant zéro). Cette fonction est alors la suivante :

$$v(W) = v(E[W]) + A_1(W - E[W]) - \frac{A_2(W - E[W])^2}{2}$$

La valeur de A_1 n'ayant pas d'importance, on peut la faire équivaloir à moins un, vu que :

$$E[(W - E[W])] = 0$$

Ce qui nous donne :

$$v(W) = v(E[W]) - (W - E[W]) - \frac{A(E[W] - W)^2}{2}$$

Ceci correspond bien à la définition d'une fonction d'utilité quadratique.

En définissant :

$$v(E[W]) = W - W_0$$

La fonction d'utilité devient :

$$v(W) = E[W] - W_0 - \frac{A(E[W] - W)^2}{2}$$

Vu que :

$$\mu_P = E[W - W_0] = E[W] - W_0$$

$$\sigma_P^2 = E \left[(E[W - W_0] - (W - W_0))^2 \right] = E[(E[W] - W)^2]$$

$$u = E[v(W)]$$

Nous retrouvons la fonction habituelle :

$$u = \mu_P - \frac{A\sigma_P^2}{2}$$

L'ensemble de portefeuilles ayant la même utilité, est appelé une *courbe d'indifférence* :

$$I_P = \{Q \in \mathcal{P} | Q \sim P\}$$

Dans l'espace (μ, σ) , chaque courbe d'indifférence peut être décrite comme :

$$I_P(u) \leftrightarrow \mu_P - \frac{A\sigma_P^2}{2} = u$$

En prenant la dérivée totale sur cette courbe, nous obtenons :

$$d\mu_P - A\sigma_P d\sigma_P = du$$

Vu que sur une courbe d'indifférence, l'utilité reste constante :

$$du = 0 \Leftrightarrow \frac{d\mu_P}{d\sigma_P} = A\sigma_P$$

La valeur $A\sigma_P$ peut alors être interprétée comme le prix d'échange entre rendement et écart type.

2.3 Mesures d'aversion au risque

En dérivant la formule de la fonction d'utilité utilisée par Markowitz, il a été montré que la fonction d'utilité peut être écrite de manière suivante :

$$u = \mu_P - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k A_k \mu'_{P,k}}{k!} \right)$$

Si nous supposons maintenant que le niveau d'utilité soit stable, le rendement attendu peut être décrit en fonction des moments centraux :

$$\mu_P = u + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k A_k \mu'_{P,k}}{k!} \right) = u + \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k A_k \left(\sqrt[n]{\mu'_{P,k}} \right)^n}{k!} \right)$$

Ce qui nous donne :

$$\frac{\partial^k \mu_P}{\left(\partial^k \sqrt[n]{\mu'_{P,k}} \right)^k} = (-1)^k A_k$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$A_k = (-1)^k \frac{\partial^k \mu_P}{\left(\partial^k \sqrt[n]{\mu'_{P,k}} \right)^k}$$

Et spécifiquement si $n = 2$:

$$A = A_2 = \frac{\partial^2 \mu_P}{\partial \sigma_P^2}$$

Alors le radical de chaque moment central représente un type de risque différent dont l'aversion est mesurée par le coefficient A_k .

Une autre façon de mesurer l'aversion au risque sont les coefficients d'aversion au risque d'Arrow-Pratt. Ces coefficients furent définis par Kenneth Arrow (1967) et John W. Pratt. Ils définirent deux coefficients d'aversion au risque différents : celui du risque absolu (*ARA : absolute risk aversion*) et celui du risque relatif (*RRA : relative risk aversion*) :

$$ARA = -\frac{\frac{\partial^2 u}{\partial W^2}}{\frac{\partial u}{\partial W}}$$

$$RRA = -W \frac{\frac{\partial^2 u}{\partial W^2}}{\frac{\partial u}{\partial W}}$$

Les coefficients d'aversion au risque des fonctions d'utilité définies ci-avant, sont les suivants (tableau 1) :

Fonction d'utilité	ARA	RRA
Linéaire	0	0
Quadratique	$\frac{1}{\alpha - W}$	$\frac{W}{\alpha - W}$
Exponentielle	α	αx
Logarithmique	$\frac{1}{\alpha + W}$	$\frac{W}{\alpha + W}$
Iso-élastique	$\frac{1 - \alpha}{W}$	$1 - \alpha$

Tableau 1: Coefficients de risque

Concernant la fonction d'utilité de Markowitz :

$$u = \mu_P - \frac{A\sigma_P^2}{2}$$

Les différentes aversions au risque selon Markowitz ont été définies ainsi :

$$A_k = -(-1)^k \frac{d^k u}{dW^k}$$

Nous notons immédiatement :

$$A_1 = \frac{du}{dW} = 1$$

$$A = A_2 = -\frac{d^2u}{dW^2}$$

Ce qui nous apprend pour la fonction d'utilité de Markowitz :

$$ARA = A$$

$$RRA = A \cdot W$$

Remarquons en outre que toutes ces fonctions peuvent être réécrites de la façon suivante (tableau 2) :

$$ARA = \frac{1}{a + bx}$$

$$RRA = \frac{x}{a + bx}$$

Fonction d'utilité	a	b
Linéaire	∞	b
Quadratique	α	-1
Exponentielle	$\frac{1}{\alpha}$	0
Logarithmique	α	1
Iso-élastique	0	$\frac{1}{1 - \alpha}$
Markowitz	$\frac{1}{A}$	0

Tableau 2: Coefficients de risque (a, b)

2.4 Profils de risque dans la théorie de Markowitz

Si l'on présuppose que l'investisseur soit averse au risque, deux types d'investisseurs peuvent être distingués dans le modèle de Markowitz : les investisseurs qui investissent dans les portefeuilles situés à gauche du portefeuille de marché sont des investisseurs conservateurs : ils investiront une partie de leur patrimoine dans le portefeuille de marché et l'autre partie de leur patrimoine dans l'actif sans risque, c.-à-d. qu'ils épargneront ; par contre ceux qui investissent dans les portefeuilles situés à droite du portefeuille de marché sont des investisseurs agressifs : ils prêteront de l'argent au taux sans risque afin d'investir plus que 100% de leur patrimoine dans le portefeuille de marché (figure 3) (Bodie, Z., Kane, A., Marcus, A.J., 2005).

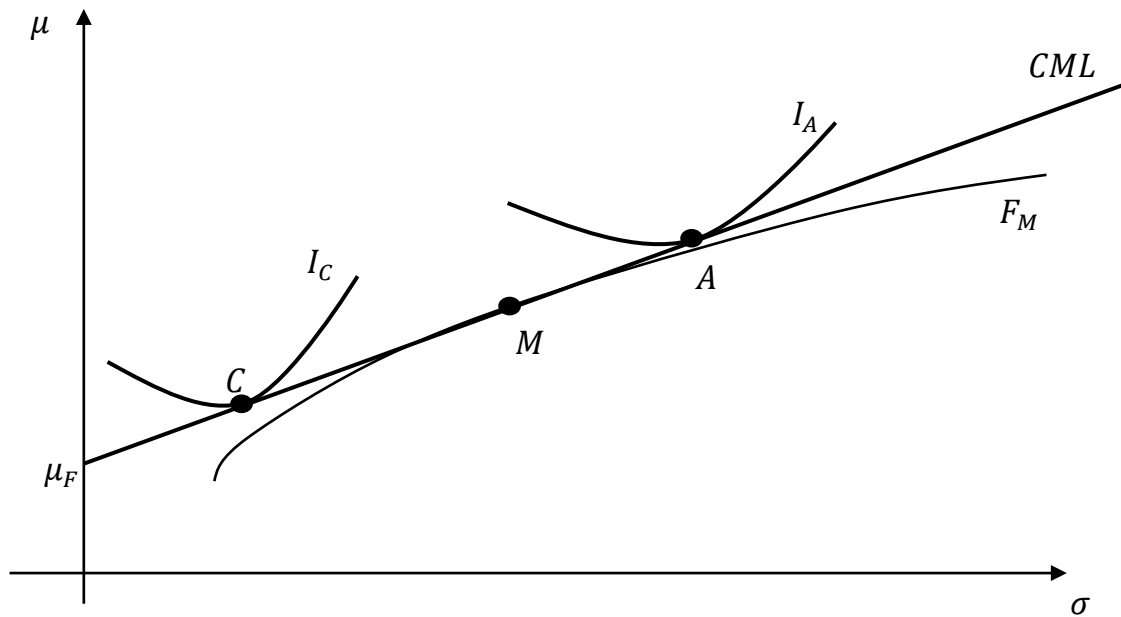


Figure 3 : Portefeuilles conservateurs et agressifs

Remarquons que pour les portefeuilles se trouvant à gauche du portefeuille de marché :

$$\mu_F \leq \mu_C < \mu_M$$

Vu que le portefeuille C est une combinaison entre l'actif sans risque et le portefeuille de marché, nous avons :

$$\mu_F \leq (1 - x)\mu_F + x\mu_M < \mu_M \Leftrightarrow 0 \leq x < 1$$

De façon analogue nous trouvons pour les portefeuilles A situés à droite du portefeuille de marché :

$$x > 1$$

Remarquons également que :

$$\sigma_{(1-x)F+xM,M} = x\sigma_M^2$$

Ce qui nous apprend :

$$\beta_{(1-x)F+xM} = \frac{x\sigma_M^2}{\sigma_M^2} = x$$

Nous aurions également pu dériver ceci de l'équation du SML :

$$SML_X \leftrightarrow \mu_X - \mu_F = (\mu_M - \mu_F)\beta_X$$

Alors :

$$\beta_X = \frac{\mu_X - \mu_F}{\mu_M - \mu_F} = \frac{(1-x)\mu_F + x\mu_M - \mu_F}{\mu_M - \mu_F} = x$$

Alors remarquons :

- Pour les portefeuilles conservateurs :

$$\beta_C < 1$$

- Pour les portefeuilles agressifs :

$$\beta_A > 1$$

En réalité il n'est pourtant pas possible d'épargner et de prêter au même taux sans risque. Nous introduirons alors deux taux différents : un taux d'épargne μ_F^L et un taux d'emprunte μ_F^B :

$$\mu_F^L < \mu_F^B$$

Ceci nous amène aux équations suivantes. Si nous ne considérons que les investisseurs conservateurs, leur ensemble de portefeuilles efficaces coïncidera avec le segment de droite suivant :

$$CAL_L \leftrightarrow \mu_C - \mu_F^L = (\mu_L - \mu_F^L) \frac{\sigma_C}{\sigma_L} \quad (0 \leq \sigma_C \leq \sigma_L)$$

Ceci veut dire que les portefeuilles tenus par les investisseurs conservateurs seront tous des combinaisons entre l'actif sans risque et le portefeuille L se situant sur la frontière efficace de Markowitz.

Cependant, si l'on ne considère que les investisseurs agressifs, leur ensemble de portefeuilles efficaces coïncidera avec la demi-droite suivante :

$$CAL_B \leftrightarrow \mu_A - \mu_F^B = (\mu_B - \mu_F^B) \frac{\sigma_A}{\sigma_B} \quad (\sigma_A \geq \sigma_B)$$

Les portefeuilles tenus alors par les investisseurs agressifs seront tous des combinaisons entre l'actif sans risque et le portefeuille B se situant sur la frontière efficace de Markowitz.

En outre il existera une troisième catégorie d'investisseurs considérée neutre. Ceux-là posséderont alors tous des combinaisons des actifs L et B , ils n'épargneront ni prêteront :

$$0 \leq x \leq 1 : F_{LB} \leftrightarrow \mu_N = \frac{b + \sqrt{d(a\sigma_N^2 - 1)}}{a} \quad (\sigma_L \leq \sigma_N \leq \sigma_B)$$

Il est également possible d'exprimer cette courbe F_{LB} en fonction des actifs L et B . Vu que ces deux actifs appartiennent à cet ensemble, et l'équation de cette courbe est une demi-parabole, il nous faut que les tangentes à ces deux points coïncident avec des deux capital allocation lines :

$$F_{LB} \leftrightarrow \sigma_N^2 = a_1 \mu_N^2 + a_2 \mu_N + a_3$$

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{2\sigma_N}{2a_1\mu_N + a_2}$$

La solution est la suivante (développement voir en annexe B) :

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{\mu_L - \mu_B} \left(\frac{\sigma_L^2}{\mu_L - \mu_F^L} - \frac{\sigma_B^2}{\mu_B - \mu_F^B} \right) \\ a_2 &= \frac{2}{\mu_L - \mu_B} \left(\frac{\sigma_B^2 \mu_L}{\mu_B - \mu_F^B} - \frac{\sigma_L^2 \mu_B}{\mu_L - \mu_F^L} \right) \\ a_3 &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_B^2 (\mu_L - \mu_F^B)}{\mu_B - \mu_F^B} + \frac{\sigma_L^2 (\mu_B - \mu_F^L)}{\mu_L - \mu_F^L} \right) \end{aligned}$$

Le portefeuille du marché M se trouvera sur la parabole F_{LB} mais son rôle n'a plus la même importance que dans le modèle dans lequel il n'existe qu'un actif sans risque :

$$M \in F_{LB}$$

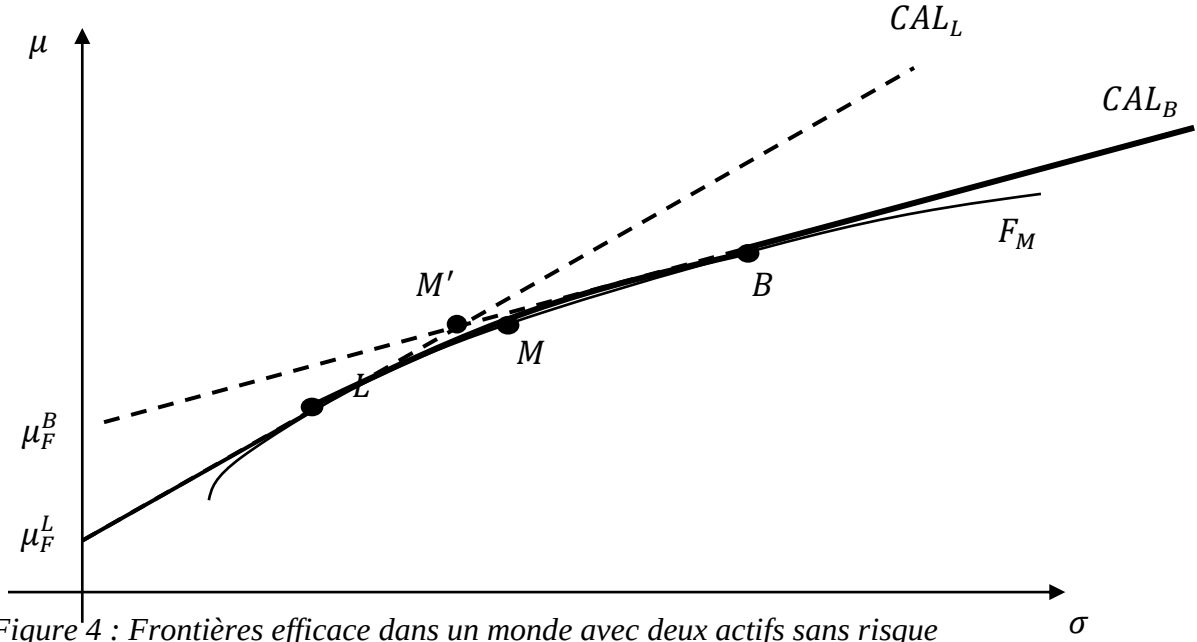


Figure 4 : Frontières efficace dans un monde avec deux actifs sans risque

Nous remarquons cependant que le portefeuille fictif $M'(\mu_{M'}, \mu_{\sigma'})$ remplit le rôle de portefeuille de marché sur les demi-droites CAL_L et CAL_B (figure 4).

$$CAL_L \leftrightarrow \mu - \mu_F^L = (\mu_L - \mu_F^L) \frac{\sigma}{\sigma_L} \quad (0 \leq \sigma \leq \sigma_L)$$

$$CAL_B \leftrightarrow \mu - \mu_F^B = (\mu_B - \mu_F^B) \frac{\sigma}{\sigma_B} \quad (\sigma \geq \sigma_B)$$

En prolongeant ces deux demi-droites, nous trouverions que leur intersection contiendrait le point suivant :

$$\mu_{M'} = \frac{(\mu_L - \mu_F^L)\sigma_B\mu_F^B - (\mu_B - \mu_F^B)\sigma_L\mu_F^L}{(\mu_L - \mu_F^L)\sigma_B - (\mu_B - \mu_F^B)\sigma_L}$$

$$\sigma_{M'} = \frac{(\mu_F^B - \mu_F^L)\sigma_B\sigma_L}{(\mu_L - \mu_F^L)\sigma_B - (\mu_B - \mu_F^B)\sigma_L}$$

Remarquons que ces équations sont parfaitement symétriques.

En comparant ces valeurs aux valeurs du portefeuille de marché réel, il devient clair que :

$$\Delta\mu = \mu_{M'} - \mu_M = \frac{(\mu_B - \mu_F^B)\sigma_L(\mu_M - \mu_F^L) - (\mu_L - \mu_F^L)\sigma_B(\mu_M - \mu_F^B)}{(\mu_L - \mu_F^L)\sigma_B - (\mu_B - \mu_F^B)\sigma_L}$$

$$\Delta\sigma = \frac{(\mu_B - \mu_F^B)\sigma_L\sigma_M + (\mu_F^B - \mu_F^L)\sigma_L\sigma_B - (\mu_L - \mu_F^L)\sigma_B\sigma_M}{(\mu_L - \mu_F^L)\sigma_B - (\mu_B - \mu_F^B)\sigma_L}$$

Si ces deux valeurs sont assez proches de zéro, le portefeuille de marché peut être remplacé par le portefeuille fictif calculé, alors la frontière efficace peut être approximée par l'union des deux demi-droites :

$$M \approx M'$$

$$F_M \approx [LM'] \cup [M'B]$$

Les deux *capital allocation lines* peuvent également être exprimées de manière suivante :

$$CAL_L \leftrightarrow \sigma = \frac{\mu - \mu_F^L}{\sqrt{a(\mu_F^L)^2 - 2b\mu_F^L + c}}$$

$$CAL_B \leftrightarrow \sigma = \frac{\mu - \mu_F^B}{\sqrt{a(\mu_F^B)^2 - 2b\mu_F^B + c}}$$

Ce qui nous apprend :

$$CAL_L \cap CAL_B = \{M'\}$$

$$\mu_{M'} = \frac{\mu_F^B \sqrt{a(\mu_F^B)^2 - 2b\mu_F^B + c} - \mu_F^L \sqrt{a(\mu_F^L)^2 - 2b\mu_F^L + c}}{\sqrt{a(\mu_F^L)^2 - 2b\mu_F^L + c} - \sqrt{a(\mu_F^B)^2 - 2b\mu_F^B + c}}$$

$$\sigma_{M'} = \frac{\mu_F^B - \mu_F^L}{\sqrt{a(\mu_F^L)^2 - 2b\mu_F^L + c} - \sqrt{a(\mu_F^B)^2 - 2b\mu_F^B + c}}$$

En calculant l'écart type des portefeuilles L et B , les proportions maximales et minimales qui peuvent être investies dans ce portefeuille fictif, deviennent :

$$\sigma_L = w_{max} \frac{(\mu_B^L - \mu_F^L)\sigma_B\sigma_L}{(\mu_L - \mu_F^L)\sigma_B - (\mu_B - \mu_F^B)\sigma_L}$$

$$\sigma_B = w_{min} \frac{(\mu_B^L - \mu_F^L)\sigma_B\sigma_L}{(\mu_L - \mu_F^L)\sigma_B - (\mu_B - \mu_F^B)\sigma_L}$$

Ce qui nous apprend :

$$w_{max} = \frac{(\mu_L - \mu_F^L)\sigma_B - (\mu_B - \mu_F^B)\sigma_L}{(\mu_B^L - \mu_F^L)\sigma_B}$$

$$w_{min} = \frac{(\mu_L - \mu_F^L)\sigma_B - (\mu_B - \mu_F^B)\sigma_L}{(\mu_B^L - \mu_F^L)\sigma_L}$$

$$w_{min}\sigma_L = w_{max}\sigma_B \quad (\sigma_B \geq \sigma_L)$$

$$w \in [0, w_{max}] \cup [w_{min}, +\infty[$$

Remarquez de nouveau la symétrie des équations. En outre, nous voyons que lors que l'équation vaut ($w_{max} = w_{min}$), nous retrouverons le cas simple :

$$\mu_F^L = \mu_F^B$$

$$M = M' = L = B$$

2.5 Impact de l'horizon

La période pendant laquelle l'on investit dans un certain portefeuille est également importante. Toutes les quantités définies jusqu'ici ont été des quantités annualisées. On se demande alors qu'est-ce qu'il se passera lorsque l'on investit sur une période différente d'une année (Campbell, J.Y, Viceira, L.M., 2004).

En ce qui concerne le rendement, nous voyons :

$$\mu_T = E[(1 + R)^T - 1] = E\left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{T}{k} R^k\right] - 1 = \sum_{k=1}^{\infty} \binom{T}{k} \mu_k$$

En ne prenant en compte que le premier moment, nous trouvons la formule simple :

$$\mu_T \approx \mu T$$

En annualisant cette formule, nous retrouvons bien :

$$\mu_1 = \frac{\mu_T}{T} \approx \mu$$

En ne prenant en compte que les deux premiers moments, nous trouvons :

$$\mu_T \approx \mu T + \frac{T(T-1)}{2} \mu_2$$

En annualisant cette formule, nous trouvons :

$$\mu_1 = \frac{\mu_T}{T} \approx \mu + \frac{(T-1)}{2} \mu_2 \quad (\mu_2 > 0)$$

Remarquons alors que le rendement annualisé augmente lorsque la période considérée est plus longue.

En ce qui concerne la variance, nous voyons :

$$\sigma_T^2 = E[((1+R)^T - 1 - E[(1+R)^T - 1])^2]$$

$$\Leftrightarrow \sigma_T^2 = E[((1+R)^T - E[(1+R)^T])^2]$$

$$\Leftrightarrow \sigma_T^2 = E \left[\left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{T}{k} R^k - E \left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{T}{k} R^k \right] \right)^2 \right]$$

$$\Leftrightarrow \sigma_T^2 = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{T}{2k} \mu_{2k} - \left(\sum_{k=0}^{\infty} \binom{T}{k} \mu_k \right)^2$$

Si seulement les deux premiers termes de la série de MacLaurin sont pris en considération :

$$\Leftrightarrow \sigma_T^2 \approx E[(1 + R \cdot T - E[1 + R \cdot T])^2]$$

$$\Leftrightarrow \sigma_T^2 \approx E[(R - E[R])^2] \cdot T^2$$

Ce qui nous donne l'approximation suivante :

$$\sigma_T^2 \approx \sigma^2 T^2$$

En annualisant cette formule, ceci devient :

$$\sigma_1^2 \approx \sigma^2 T$$

$$\sigma_1 \approx \sigma \sqrt{T}$$

De façon analogue, nous trouvons pour tous les moments centraux :

$$\mu'_{k,T} \approx \mu'_{k,1} T^k$$

2.6 Mesures de risque

Dans la théorie de portefeuille de Markowitz, comme nous venons de voir, le risque est mesuré par la variance du rendement de l'actif ou du portefeuille considéré. Il est important de savoir qu'en réalité il n'est pas vrai que toute variance est négative. Si le rendement réel du portefeuille peut valoir plus que le rendement attendu, cette variance devrait être considérée comme une chose positive. Dès lors cette partie de la théorie de portefeuille de Markowitz eut déjà été fort critiquée depuis les premiers développements de cette théorie, désormais plusieurs autres mesures de risque furent développées. Dans ce mémoire seulement la variance sera utilisée comme dans le modèle de Markowitz. Pourtant il y a une explication de différentes mesures de risque alternatives en annexe (voir annexe C).

2.7 Conclusion

Dans ce chapitre les différents profils de risque et les mesures de risque furent parcourus. Au début de ce chapitre la théorie de l'utilité espérée de von Neumann & Morgenstern a été introduite. Cette théorie a été utilisée afin d'introduire les différents profils de risque : les investisseurs conservateurs, les investisseurs neutres et les investisseurs agressifs. Il fut démontré qu'il existe un lien entre la théorie de l'utilité espérée et le modèle de Markowitz. L'impact de l'horizon de temps sur le rendement attendu et le risque couru, a également été examiné dans ce chapitre. Finalement des mesures de risque différentes à la variance ont été introduites.

Chapitre III

La Parité de Risque

La Construction des Portefeuilles

3.1 Introduction

Dans ce chapitre premièrement l'évaluation des différentes classes d'actifs considérées sera abordée : les actions, les obligations et l'actif sans risque. Puis les différents types de construction de portefeuille seront traités: la stratégie du *Buy & Hold*, la stratégie du *rebalancement constant* et la stratégie de la parité de risque seront prises en considération. Surtout cette dernière stratégie sera traitée en détail.

3.2 Les classes d'actifs considérées

Notre investigation se concentrera sur deux classes d'actif, lesquelles seront combinées afin d'obtenir une combinaison de performance – risque optimale. Les deux classes d'actifs prises en considération sont d'un côté les actions et d'autre côté les obligations.

3.2.1 Modèles utilisés pour l'évaluation des actions

Une première classe d'actif sont les actions. Cette classe d'actif a déjà été suffisamment définie lors du premier chapitre. Le rendement attendu d'une action est décrit par l'équation suivante :

$$E[R_A] = \frac{E[D_1] + (E[P_1] - P_0)}{P_0}$$

D_t = le dividende payable au moment t

P_t = le prix de l'action au moment t

Le rendement requis peut être calculé en utilisant l'équation de la droite de marché aux titres :

$$SML_A \leftrightarrow \mu_A - \mu_F = (\mu_M - \mu_A)\beta_A$$

Il est alors possible d'isoler le prix initial de l'action :

$$P_0 = \frac{E[D_1] + E[P_1]}{1 + E[R_A]}$$

Il est possible d'élargir ce modèle à plusieurs périodes, ce qui nous donne :

$$P_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E[D_k]}{\prod_{j=1}^k (1 + E[R_A^j])}$$

$E[R_A^j]$ = le rendement requis de l'action A dans la période j

Il existe différentes approximations qui nous donnent des équations plus simples. Par exemple si nous supposons que le rendement requis reste stable dans le temps, nous obtenons :

$$\forall j \in \mathbb{N}: E[R_A^j] = \mu_A \Rightarrow P_0 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E[D_k]}{(1 + \mu_A)^k}$$

Si en plus nous supposons que le dividende croisse avec un facteur constant g , nous obtenons :

$$\forall j \in \mathbb{N}: E[R_A^j] = \mu_A \wedge D_j = (1 + g)D_{j-1} \Rightarrow P_0 = \frac{D_0(1 + g)}{\mu_A - g}$$

Finalement en supposant que $g = 0$:

$$\forall j \in \mathbb{N}: E[R_A^j] = \mu_A \wedge D_j = D_{j-1} \Rightarrow P_t = \frac{D_0}{\mu_A}$$

Ces types de modèles sont appelés *Dividend Discount Models*, ils furent popularisés par Myron J. Gordon, parfois ils sont alors appelés des modèles de Gordon. Notons que ces modèles dépendent fort du taux de croissance supposé et qu'ils ne peuvent être utilisés que dans le cas d'actions payants des dividendes.

Un modèle utilisable pour la valorisation d'actions (en supposant que les dividendes soient réinvestis dans l'action-même), qui plus généralement peut être appliqué à tout actif, est le modèle suivant. Comme nous venons de voir dans le deuxième chapitre, on sait que le rendement annuel est indépendant de l'horizon, tandis que la variance annuelle est proportionnelle à l'horizon:

$$\begin{aligned} \mu_1 &\approx \mu_A \\ \sigma_1^2 &\approx \sigma_A^2 T \end{aligned}$$

Si maintenant nous supposons que le prix d'une telle action puisse être décrit selon l'équation différentielle stochastique suivante (mouvement géométrique brownien, B_t représente le mouvement brownien) :

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu_A dt + \sigma_A dB_t \quad (B_t \sim N(0, t))$$

Ce qui a comme conséquence que le rendement d'une telle action suit alors une distribution normale :

$$\frac{dP_t}{P_t} \sim N(\mu_A, \sigma_A^2 t)$$

La solution de l'équation stochastique est alors :

$$P_t = P_0 e^{\left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t + \sigma_A B_t}$$

Le prix de l'action est alors une variable aléatoire ayant une distribution log-normale :

$$P_t \sim \text{Log-}\mathcal{N}\left(\ln P_0 + \left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t, \sigma_A^2 t\right)$$

$$E[P_t] = P_0 e^{\mu_A t}$$

$$\text{Var}[P_t] = P_0^2 e^{2\mu_A t} (e^{\sigma_A^2 t} - 1)$$

Remarquons que si nous supposons que tous les dividendes de l'action aient été réinvestis dans l'action soi-même, la valeur de ce portefeuille peut également être décrite par ces équations. Ce modèle peut être utilisé pour tout actif, donc également pour des indices (en supposant que les dividendes payés aient été réinvestis dans le même indice) d'actions ou d'obligations.

Si plusieurs actifs sont évalués simultanément et les rendements de ces actifs sont corrélés ayant une corrélation $\rho_{i,j}$, il est possible de démontrer que :

$$\text{Cov}[P_t^i, P_t^j] = P_0^i P_0^j e^{(\mu_i + \mu_j)t} (e^{\rho_{i,j} \sigma_i \sigma_j t} - 1)$$

3.2.2 Modèles utilisés pour l'évaluation des obligations

Le rendement attendu d'une obligation est décrit par l'équation suivante :

$$E[R_B] = \frac{C_1 + (E[P_1] - P_0)}{P_0}$$

C_t = le coupon payable au moment t

P_t = le prix de l'obligation au moment t

Le rendement requis peut être calculé en utilisant l'équation de la droite de marché aux titres :

$$SML_B \leftrightarrow \mu_B - \mu_F = (\mu_M - \mu_B)\beta_B$$

Il est alors possible d'isoler le prix initial de l'action :

$$P_0 = \frac{C_1 + E[P_1]}{1 + E[R_B]}$$

Il est possible d'élargir ce modèle à plusieurs périodes, ce qui nous donne :

$$P_0 = \sum_{k=1}^T \frac{C_k}{\prod_{j=1}^k (1 + E[R_B^j])} + \frac{N}{\prod_{j=1}^T (1 + E[R_B^j])}$$

$E[R_B^j]$ = le rendement requis de l'obligation B dans la période j

T = la maturité de l'obligation B

N = la valeur nominale de l'obligation B

Cette équation peut être simplifiée en faisant certaines hypothèses. Par exemple en supposant que le rendement requis soit constant et que le coupon soit fixe :

$$C_k = iN$$

$$P_0 = N \left(\sum_{k=1}^T \frac{i}{(1 + \mu_B)^k} + \frac{1}{(1 + \mu_B)^T} \right)$$

Cette équation peut être simplifiée de manière suivante :

$$P_0 = N \left(\frac{i}{\mu_B} \left(1 - \frac{1}{(1 + \mu_B)^T} \right) + \frac{1}{(1 + \mu_B)^T} \right)$$

Si nous supposons que le rendement requis reste stable dans le temps, nous voyons :

$$P_0 = \sum_{k=1}^T \frac{C_k}{(1 + \mu_B)^k} + \frac{N}{(1 + \mu_B)^T}$$

$$dP_0 = \sum_{k=1}^T \frac{-kC_k}{(1 + \mu_B)^{k+1}} d\mu_B + \frac{-TN}{(1 + \mu_B)^{T+1}} d\mu_B$$

$$\Leftrightarrow dP_0 = -D \cdot P_0 \cdot \frac{d\mu_B}{(1 + \mu_B)}$$

En définissant :

$$D = \frac{1}{P_0} \left(\sum_{k=1}^T \frac{kC_k}{(1 + \mu_B)^k} + \frac{TN}{(1 + \mu_B)^T} \right)$$

On appelle D la duration de Macauly : elle représente la moyenne des maturités des futurs paiements. En effet pour tous les cashflows futurs, les équations suivantes seront d'application¹ :

$$PV(CF_k) = \begin{cases} \frac{C_k}{(1 + \mu_B)^k} & 0 < k < T \\ \frac{C_T + N}{(1 + \mu_B)^T} & k = T \end{cases}$$

Ce qui nous donne :

$$P_0 = \sum_{k=1}^T PV(CF_k)$$

$$D = \frac{\sum_{k=1}^T k \cdot PV(CF_k)}{\sum_{k=1}^T PV(CF_k)}$$

Remarquons que pour une obligation qui ne paie aucun coupon :

¹ La fonction $PV(x)$ dénote la valeur actuelle d'un cashflow futur

$$D = T$$

En générale, le changement du taux requis par le marché a l'influence suivante sur le prix de l'obligation :

$$\frac{dP_0}{P_0} = -D \cdot \frac{d\mu_B}{(1 + \mu_B)}$$

Ceci a comme conséquence qu'une hausse du taux requis diminuera le prix de l'obligation et que le changement est proportionnel à la duration restante.

Il est également possible de modéliser les obligations à l'aide de modèles stochastiques. Un tel modèle est montré en annexe F.

3.3 La stratégie du « Buy & Hold »

Une première stratégie consiste en le suivant : l'investisseur achète un portefeuille qui correspond à son aversion au risque, et dans le reste de la période l'investisseur ne changera plus rien dans ce portefeuille, cette stratégie est connue sous le nom du « Buy & Hold » ou également sous le nom de « Lump Sum ». Cette stratégie est relativement simple : il ne nécessite que l'investisseur détermine les différentes quotités qu'il aimerait investir dans de différentes actifs au début de la période, après l'investisseur ne changera plus rien dans son portefeuille jusqu'au terme de l'horizon d'investissement. Supposons maintenant que nous ayons investi dans n actifs risqués (plus exactement des indices d'actions et d'obligations dont les revenus sont réinvestis dans l'indice-même) et dans l'actif sans risque F , ceci nous donne alors comme valeur V_t du portefeuille combiné :

$$V_t = V_0 \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{w_0^k P_t^k}{P_0^k} + \left(1 - \sum_{k=1}^n w_0^k \right) e^{\mu_F t} \right)$$

Où :

V_t : la valeur du portefeuille au temps t

w_t^k : la proportion du portefeuille investit dans l'actif k au temps t

P_t^k : le prix de l'actif k au temps t

μ_F : le taux sans risque

Remarquons alors que l'espérance de la valeur du portefeuille au moment t vaut :

$$E[V_t] = V_0 \cdot \left(\sum_{k=1}^n \frac{w_0^k E[P_t^k]}{P_0^k} + \left(1 - \sum_{k=1}^n w_0^k \right) e^{\mu_F t} \right)$$

Ce qui peut être réécrit comme :

$$E[V_t] = V_0 \cdot \left(\sum_{k=1}^n w_0^k e^{\mu_k t} + \left(1 - \sum_{k=1}^n w_0^k \right) e^{\mu_F t} \right)$$

En ce qui concerne la variance de la valeur du portefeuille au moment t , nous trouvons :

$$Var[V_t] = V_0^2 \cdot \left(\sum_{k=1}^n \left(\frac{w_0^k}{P_0^k} \right)^2 Var[P_t^k] + 2 \sum_{j=1}^{n-1} \sum_{k=j+1}^n \frac{w_0^j w_0^k Cov[P_t^j, P_t^k]}{P_0^j P_0^k} \right)$$

Ce qui peut être simplifié de manière suivante :

$$Var[V_t] = V_0^2 \cdot \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n w_0^j w_0^k e^{(\mu_j + \mu_k)t} (e^{\rho_{j,k} \sigma_j \sigma_k t} - 1)$$

3.4 La stratégie du rebalancement constant

Une deuxième stratégie est la suivante : l'investisseur entame identiquement que dans la stratégie du « *Buy & Hold* », mais après chaque période l'investisseur réorganisera son portefeuille afin que les poids attribués aux différents actifs restent constants (dans le cas limite ceci se produira continuellement) :

- Dans le cas discret :

$$\forall t, k: \Delta w_t^k = 0 \Rightarrow \forall s, t, k: w_t^k = w_s^k = w^k$$

- Dans le cas continu :

$$\forall t, k: dw_t^k = 0 \Rightarrow \forall s, t, k: w_t^k = w_s^k = w^k$$

Dans le cas discret (lequel est plus réaliste, vu que l'investisseur essaiera en réalité de limiter le nombre de transactions nécessaires dû aux frais de transactions, taxes de transactions, impôts sur la plus-value, etc.), il faut que l'équation suivante vaille pour chaque période :

$$n_t^k = \frac{w^k V_t}{P_t^k}$$

n_t^k : le nombre d'unités de l'actif k investi dans le portefeuille au temps t

A la fin de chaque période il faut alors un rebalancement du portefeuille :

$$\Delta n_t^k = w^k \left(\frac{V_t}{P_t^k} - \frac{V_{t-1}}{P_{t-1}^k} \right)$$

Si l'on considère un rebalancement continu, l'on voit que cette stratégie est équivalente à un investissement permanent dans un portefeuille qui contient les différents actifs aux proportions constantes. Ce portefeuille peut alors être modélisé comme la combinaison d'un actif sans risque avec l'actif risqué suivant (B_t représente le mouvement brownien):

$$\frac{dP_t}{P_t} = \vec{\mu}^T \vec{w} dt + \vec{w}^T \Sigma \vec{w} dB_t \quad (B_t \sim N(0, t))$$

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w^1 \\ w^2 \\ \vdots \\ w^n \end{pmatrix} \quad \vec{\mu} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{pmatrix} \quad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} & \cdots & \sigma_{1n} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 & \cdots & \sigma_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sigma_{1n} & \sigma_{2n} & \cdots & \sigma_n^2 \end{pmatrix}$$

Ce qui nous apprend alors :

$$P_t = P_0 e^{\left(\vec{\mu}^T \vec{w} - \frac{\vec{w}^T \Sigma \vec{w}}{2} \right) t + B_t \sqrt{\vec{w}^T \Sigma \vec{w}}}$$

La valeur du portefeuille total équivaut alors :

$$V_t = V_0 \left[\left(\sum_{k=1}^n w^k \right) e^{\left(\vec{\mu}^T \vec{w} - \frac{\vec{w}^T \Sigma \vec{w}}{2} \right) t + B_t \sqrt{\vec{w}^T \Sigma \vec{w}}} + \left(1 - \sum_{k=1}^n w^k \right) e^{\mu_F t} \right]$$

Remarquons alors que l'espérance de la valeur du portefeuille au moment t vaut:

$$E[V_t] = V_0 \cdot \left(\left(\sum_{k=1}^n w^k \right) e^{\bar{\mu}^T \bar{w} t} + \left(1 - \sum_{k=1}^n w_0^k \right) e^{\mu_F t} \right)$$

Ce qui peut être également écrit comme :

$$E[V_t] = V_0 \cdot \left((1 - w^F) e^{\bar{\mu}^T \bar{w} t} + w^F e^{\mu_F t} \right)$$

En ce qui concerne la variance de la valeur du portefeuille au moment t , nous trouvons :

$$Var[V_t] = V_0^2 \left(\sum_{k=1}^n w^k \right)^2 \cdot e^{2\bar{\mu}^T \bar{w} t} (e^{\bar{w}^T \Sigma \bar{w} t} - 1)$$

Ce qui peut par alors être réécrit comme :

$$Var[V_t] = V_0^2 (1 - w^F)^2 \cdot e^{2\bar{\mu}^T \bar{w} t} (e^{\bar{w}^T \Sigma \bar{w} t} - 1)$$

3.5 La stratégie de la parité de risque

3.5.1 Principe d'allocation d'Euler

Définissons maintenant les quantités suivantes (Roncalli, 2013) :

- Le gain ou la perte du portefeuille : Π
- Le gain ou la perte du portefeuille dû à l' i -ième actif : Π_i
- Le risque du portefeuille : $\mathcal{R}(\Pi)$
- La mesure de performance ajustée au risque :

$$RAPM = \frac{E[\Pi]}{\mathcal{R}(\Pi)}$$

- La mesure de performance ajustée au risque dû à l' i -ième actif :

$$RAPM(\Pi_i | \Pi) = \frac{E[\Pi_i]}{\mathcal{R}(\Pi_i | \Pi)}$$

Il nous semble nécessaire que ces mesures aient les propriétés suivantes :

- Il faut que le risque du portefeuille équivaille la somme des contributions au risque des différents actifs présents dans le portefeuille :

$$\mathcal{R}(\Pi) = \sum_{i=1}^n \mathcal{R}(\Pi_i|\Pi)$$

- En ajoutant une petite quantité d'un actif ayant une performance supérieur au portefeuille considéré, la performance de ce portefeuille devrait s'améliorer :

$$RAPM(\Pi_i|\Pi) > RAPM(\Pi) \Rightarrow \exists \varepsilon_i > 0: \forall h \in]0, \varepsilon_i[: RAPM(\Pi + h\Pi_i) > RAPM(\Pi)$$

Afin que ces deux propriétés soient satisfaites, il faut que la contribution au risque obéisse aux équations suivantes¹ :

$$\mathcal{R}C_i = \mathcal{R}(\Pi_i|\Pi) = \left. \frac{d}{dh} \mathcal{R}(\Pi + h\Pi_i) \right|_{h=0}$$

$$\forall \Pi: \forall \lambda \in \mathbb{R}^+: \mathcal{R}(\lambda\Pi) = \lambda\mathcal{R}(\Pi)$$

En outre il peut être démontré que dans le cas où la mesure de risque est sub-additive :

$$\mathcal{R}(\Pi_i|\Pi) \leq \mathcal{R}(\Pi_i)$$

Remarquons maintenant que² :

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \dots, x_{n-1}, x_n)$$

$$\vec{x}_i = (0, 0, \dots, 0, x_i, 0, \dots, 0, 0)$$

$$\mathcal{R}C_i = \mathcal{R}(\Pi_i|\Pi) = \left. \frac{d}{dh} \mathcal{R}(\Pi + h\Pi_i) \right|_{h=0}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{R}C_i = \left. \frac{d}{dh} \mathcal{R}(\vec{x} + h\vec{x}_i) \right|_{h=0}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{R}C_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n \left(\frac{\partial \mathcal{R}(\vec{x} + h\vec{x}_i)}{\partial x_j} \cdot \frac{\partial x_j}{\partial h} \right) + \frac{\partial \mathcal{R}(\vec{x} + h\vec{x}_i)}{\partial (x_i + hx_i)} \cdot \frac{\partial (x_i + hx_i)}{\partial h}$$

¹ $\mathcal{R}C_i$ représente la contribution de l'i-ième actif au risque du portefeuille

² $\vec{x}$ représente le vecteur de portefeuille, $\vec{x}_i$ représente un portefeuille ne contenant que l'i-ième actif

Ceci nous apprend :

$$\mathcal{R}C_i = x_i \cdot \frac{\partial \mathcal{R}(\vec{x})}{\partial x_i}$$

En combinant le résultat obtenu ci-avant avec les propriétés demandées, nous obtiendrons le principe d'allocation d'Euler :

$$\mathcal{R}(\Pi) = \sum_{i=1}^n x_i \cdot \frac{\partial \mathcal{R}(\vec{x})}{\partial x_i}$$

Dans ce qui suit, nous utiliserons l'écart type comme mesure de risque. Une justification de ce choix est donnée dans l'annexe E (*cohérence des mesures de risque*).

Le principe d'Euler est la base de la stratégie de la parité de risque. En appliquant la stratégie de la parité de risque l'investisseur s'assure que le risque même est divisé de manière équilibrée à travers des actifs choisis. Ceci peut être expliqué en utilisant un exemple, supposons que nous disposions de deux actifs : une obligation et une action. La théorie standard de Markowitz nous apprend que si nous désirions une division équilibrée entre ses deux actifs, il faudrait investir la moitié du budget dans l'obligation et la moitié dans l'action. Si les deux actifs valaient tous les deux € 100,00 et le budget d'investissement était de € 2.000,00, alors il faudrait acheter 10 actions et 10 obligations (Qian, 2011, Brun, J., Roussel, O. et Babiarz, G., 2014) :

$$n_0^{obligations} = \frac{50\% \cdot € 2.000,00}{€ 100,00} = 10$$

$$n_0^{actions} = \frac{50\% \cdot € 2.000,00}{€ 100,00} = 10$$

Afin d'avoir un portefeuille équilibré, selon la théorie classique il faudrait que le portefeuille contînt exactement 10 actions et 10 obligations. Supposons maintenant que les rendements attendus soient de 8,00% pour l'action et de 2,00% pour l'obligation, en outre nous supposerons que l'écart type de l'action soit de 50%, l'écart type de l'obligation soit de 10,00% et la corrélation entre les deux actifs soit de -25%. Ceci nous permet de calculer le rendement attendu et l'écart type de notre portefeuille :

$$\mu_P = 50\% \cdot 8,00\% + 50\% \cdot 2,00\% = 5,00\%$$

$$\sigma_P = \sqrt{(50\%)^2 \cdot (50\%)^2 + (50\%)^2 \cdot (10\%)^2 - 2 \cdot 25\% \cdot (50\%)^2 \cdot 50\% \cdot 10\%} = 24,24\%$$

Si maintenant nous voulons calculer les contributions des deux actifs à la performance et au risque du portefeuille, il faut appliquer la formule d'allocation d'Euler¹ :

$$PC_i = x_i \cdot \frac{\partial P(\vec{x})}{\partial x_i}$$

$$\mathcal{RC}_i = x_i \cdot \frac{\partial \mathcal{R}(\vec{x})}{\partial x_i}$$

La performance du portefeuille étant calculée comme suit :

$$P(\vec{x}) = \vec{\mu} \cdot \vec{x}$$

Ce qui nous donne :

$$\vec{\nabla}(\vec{\mu} \cdot \vec{x}) = \vec{\mu}$$

$$PC_i = x_i \mu_i$$

Le risque du portefeuille est calculé comme suit :

$$\mathcal{R}(\vec{x}) = c\sqrt{\vec{x}^T \Sigma \vec{x}} - \vec{\mu}^T \vec{x}$$

Ceci devient alors :

$$\vec{\nabla} \left(c\sqrt{\vec{x}^T \Sigma \vec{x}} - \vec{\mu}^T \vec{x} \right) = \frac{c\Sigma \vec{x}}{\sigma} - \vec{\mu}$$

$$\mathcal{RC}_i = c \frac{\sigma_i^2 x_i^2 + \rho \sigma_1 \sigma_2 x_1 x_2}{\sigma} - x_i \mu_i$$

¹ PC_i représente la contribution de l'i-ième actif à la performance du portefeuille

En prenant par contre l'écart type comme mesure de risque, la formule en haut devient :

$$\lim_{c \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{RC}_i}{c} = \frac{\sigma_i^2 x_i^2 + \rho \sigma_1 \sigma_2 x_1 x_2}{\sigma}$$

Alors nous voyons que bien que le portefeuille consiste pour 50% d'obligations et pour 50% d'actions, les actions contribuent 80% à la performance du portefeuille :

$$\frac{PC_{actions}}{\mu_P} = \frac{50\% \cdot 8,00\%}{5,00\%} = 80,00\%$$

$$\frac{PC_{obligions}}{\mu_P} = \frac{50\% \cdot 2,00\%}{5,00\%} = 20,00\%$$

En prenant l'écart type comme mesure de risque, les contributions sont les suivantes :

$$\frac{\mathcal{RC}_{actions}}{\sigma_P} = \frac{(50\%)^2 \cdot (50\%)^2 - 25\% \cdot (50\%)^2 \cdot 50\% \cdot 10\%}{(24,24\%)^2} = 101,06\%$$

$$\frac{\mathcal{RC}_{obligions}}{\sigma_P} = \frac{(50\%)^2 \cdot (50\%)^2 - 25\% \cdot (50\%)^2 \cdot 50\% \cdot 10\%}{(24,24\%)^2} = -1,06\%$$

En prenant comme mesure de risque la différence entre l'écart type et le rendement attendu, nous obtenons :

$$\frac{\mathcal{RC}_{actions}}{\sigma_P - \mu_P} = \frac{101,06\% \cdot 24,24\% - 50\% \cdot 8,00\%}{24,24\% - 5,00\%} = 106,54\%$$

$$\frac{\mathcal{RC}_{obligions}}{\sigma_P - \mu_P} = \frac{-1,06\% \cdot 24,24\% - 50\% \cdot 2,00\%}{24,24\% - 5,00\%} = -6,54\%$$

Remarquons alors que les obligations ne rapportent pas 50% du risque ni du rendement. En réalité cette stratégie dépend fort des actions : 80% du rendement et plus de 100% du risque est généré par les actions. Le portefeuille construit en utilisant la théorie classique ne peut alors être considéré comme étant un portefeuille équilibré.

La stratégie de la parité de risque a cependant comme but que le risque soit divisé de façon équilibrée entre les différents actifs : dans le cas simple d'un portefeuille qui ne contient que deux actifs, nous aimerions bien que le risque fût divisé de telle manière que tant les obligations que les actions portent la moitié du risque.

En considérant l'écart type comme mesure de risque, nous pouvons calculer (voir point 3.5.4) les quotités désirées. Il y a deux solutions possibles :

$$x_{actions}^1 = \frac{\sigma_{obligations}}{\sigma_{actions} + \sigma_{obligations}} = \frac{10,00\%}{50,00\% + 10,00\%} = 16,67\%$$

$$x_{obligations}^1 = \frac{\sigma_{actions}}{\sigma_{actions} + \sigma_{obligations}} = \frac{50,00\%}{50,00\% + 10,00\%} = 83,33\%$$

$$x_{actions}^2 = \frac{-\sigma_{obligations}}{\sigma_{actions} - \sigma_{obligations}} = \frac{-10,00\%}{50,00\% - 10,00\%} = -25\%$$

$$x_{obligations}^2 = \frac{-\sigma_{actions}}{\sigma_{actions} - \sigma_{obligations}} = \frac{-50,00\%}{50,00\% - 10,00\%} = 125\%$$

Si maintenant nous calculons l'écart type et le rendement attendu des deux portefeuilles, nous trouvons :

$$P^1(\mu_1 = 3,00\%, \sigma_1 = 10,21\%)$$

$$P^2(\mu_2 = 0,50\%, \sigma_2 = 19,67\%)$$

Il est clair que le premier portefeuille est meilleur que le deuxième ($3,00\% > 0,50\%$ et $10,21\% < 19,67\%$). Désormais nous ne considérerons que le premier portefeuille dans ce qui suit. Ce portefeuille est bien équilibré au niveau du risque, nous retrouvons bien que chaque actif contribue bien la moitié du risque :

$$\frac{\mathcal{RC}_{actions}}{\sigma_P} = \frac{(16,67\%)^2 \cdot (50\%)^2 - 25\% \cdot 16,67\% \cdot 83,33\% \cdot 50\% \cdot 10\%}{(10,21\%)^2} = 50,00\%$$

$$\frac{\mathcal{RC}_{obligations}}{\sigma_P} = \frac{(83,33\%)^2 \cdot (10\%)^2 - 25\% \cdot 16,67\% \cdot 83,33\% \cdot 50\% \cdot 10\%}{(10,21\%)^2} = 50,00\%$$

Nous observons alors que afin d'avoir un portefeuille équilibré, il faut que nous investissions beaucoup plus dans les obligations.

Nous remarquons également que les contributions au rendement attendu sont également divisées de manière plus équilibrée :

$$\frac{PC_{actions}}{\mu_P} = \frac{16,67\% \cdot 8,00\%}{3,00\%} = 44,44\%$$

$$\frac{PC_{obligions}}{\mu_P} = \frac{83,33\% \cdot 2,00\%}{3,00\%} = 55,56\%$$

La parité de risque nous semble alors une stratégie qui nous permettra de diviser le risque de manière équilibrée entre les différents actifs.

3.5.2 Calcul implicite des quotités des différents actifs

Si nous reprenons la définition de la mesure de risque cohérente basée sur l'écart type :

$$SD_c(\vec{x}) = c\sqrt{\vec{x}^T \Sigma \vec{x}} - \vec{\mu}^T \vec{x}$$

Nous pouvons alors calculer les différentes contributions au risque. Prenons d'abord le gradient de cette fonction :

$$\vec{\nabla} \left(c\sqrt{\vec{x}^T \Sigma \vec{x}} - \vec{\mu}^T \vec{x} \right) = \frac{c\Sigma \vec{x}}{\sqrt{\vec{x}^T \Sigma \vec{x}}} - \vec{\mu} = \frac{c\Sigma \vec{x}}{\sigma} - \vec{\mu}$$

Alors nous obtenons comme vecteur de contributions au risque :

$$\vec{\mathcal{RC}} = \left(\frac{cx_i(\Sigma \vec{x})_i}{\sigma} - \mu_i x_i \right)$$

On dit qu'il y a une parité de risque si les contributions au risque de tous les actifs considérés sont égales :

$\forall i, j \in \{1, \dots, n\}: \mathcal{RC}_i = \mathcal{RC}_j$

Remarquons que si nous multiplions le gradient de la mesure au risque considérée avec le vecteurs des poids, nous obtiendrons une matrice symétrique qui contient les contributions au risque des différents actifs au diagonal :

$$\mathcal{RC} = \vec{x} \left(\frac{c\Sigma \vec{x}}{\sigma} - \vec{\mu} \right)^T$$

Nous remarquons également que le principe d'allocation d'Euler est bien rempli :

$$\vec{x} \cdot \left(\frac{c\Sigma\vec{x}}{\sigma} - \vec{\mu} \right) = c\sqrt{\vec{x}^T \Sigma \vec{x}} - \vec{\mu}^T \vec{x} = SD_c(\vec{x})$$

3.5.3 Interprétation de la parité de risque

Définissons le risque marginal de l'actif i de manière suivante :

$$\mathcal{MR}_i = \frac{\partial \mathcal{R}(\vec{x})}{\partial x_i}$$

Alors nous constatons :

$$\mathcal{RC}_i = x_i \cdot \mathcal{MR}_i$$

Nous voyons alors que si l'on augmente le portefeuille avec une partie infinitésimale de x_i , le risque totale changera de manière suivante :

$$\mathcal{R}(\vec{x} + h\vec{e}_i) = \mathcal{R}(\vec{x}) + h \cdot \mathcal{MR}_i$$

Deuxièmement le suivant peut être observé. Considérons la fonction d'utilité suivante :

$$u = \vec{\mu}^T \vec{x} - \frac{A}{2} \mathcal{R}(\vec{x})$$

En maximisant cette fonction, nous trouvons :

$$\vec{\mu} = \frac{A}{2} \vec{\nabla} \mathcal{R}(\vec{x})$$

Ce qui nous apprend :

$$\mu_i = \frac{A}{2} \mathcal{MR}_i$$

Et par conséquence :

$$\sum_{i=1}^n x_i \mu_i = \frac{A}{2} \sum_{i=1}^n \mathcal{RC}_i$$

Comme la contribution au risque, nous pouvons également définir la contribution à la performance :

$$PC_i = x_i \mu_i$$

$$PC = \sum_{i=1}^n PC_i = \sum_{i=1}^n x_i \mu_i = \vec{\mu}^T \vec{x}$$

Finalement nous trouvons :

$$\frac{PC_i}{PC} = \frac{RC_i}{RC}$$

Cette équation nous apprend qu'il existe une dualité entre le rendement et le risque. En fait les approches de la parité de risque et de la parité de rendement sont équivalentes.

3.5.4 Calcul explicite des quotités des différents actifs

Il n'est pas possible de dériver une équation générale qui détermine les quotités des différents actifs. Cependant nous pouvons déterminer les quotités pour certains cas spécifiques. Prenons maintenant le cas où notre portefeuille financier ne contient que deux actifs. Comme mesure de risque nous prenons (Bruder, B. et Roncalli, T., 2013) :

$$\overrightarrow{RC} = \lim_{c \rightarrow \infty} \frac{1}{c} \left(\frac{c w_i (\Sigma \vec{w})_i}{\sigma} - \mu_i w_i \right) = \left(\frac{w_i (\Sigma \vec{w})_i}{\sigma} \right)$$

Ceci nous donne comme vecteur de contributions au risque :

$$\overrightarrow{RC} = \left(\frac{w_i (\Sigma \vec{w})_i}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sigma} \left(\sigma_1^2 w_1^2 + \rho \sigma_1 \sigma_2 w_1 w_2 \right)$$

Maintenant nous savons que¹ :

$$\overrightarrow{\mathcal{RC}}_i = b_i \sigma$$

$$b_1 + b_2 = 1$$

$$w_1 + w_2 = 1$$

$$b_1 > 0 \wedge b_2 > 0$$

Ce qui nous donne le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} b_1 \sigma_1^2 w_1^2 + 2b_1 \rho \sigma_1 \sigma_2 w_1 w_2 + b_1 \sigma_2^2 w_2^2 = \sigma_1^2 w_1^2 + \rho \sigma_1 \sigma_2 w_1 w_2 \\ b_2 \sigma_1^2 w_1^2 + 2b_2 \rho \sigma_1 \sigma_2 w_1 w_2 + b_2 \sigma_2^2 w_2^2 = \sigma_2^2 w_2^2 + \rho \sigma_1 \sigma_2 w_1 w_2 \\ b_1 + b_2 = 1 \\ w_1 + w_2 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (b_1 - 1) \sigma_1^2 w_1^2 + (2b_1 - 1) \rho \sigma_1 \sigma_2 w_1 (1 - w_1) + b_1 \sigma_2^2 (1 - w_1)^2 = 0 \\ (1 - b_1) \sigma_1^2 w_1^2 - (2b_1 - 1) \rho \sigma_1 \sigma_2 w_1 (1 - w_1) - b_1 \sigma_2^2 (1 - w_1)^2 = 0 \\ b_1 = 1 - b_2 \\ w_1 = 1 - w_2 \end{cases}$$

Alors nous pouvons réécrire la première équation de ce système :

$$[(b_1 - 1) \sigma_1^2 - (2b_1 - 1) \rho \sigma_1 \sigma_2 + b_1 \sigma_2^2] w_1^2 + [(2b_1 - 1) \rho \sigma_1 \sigma_2 - 2b_1 \sigma_2^2] w_1 + b_1 \sigma_2^2 = 0$$

Nous pouvons calculer le discriminant de cette équation quadratique :

$$\begin{aligned} D &= 4b_1^2 \varrho^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 - 4b_1 \varrho^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 + \varrho^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 - 4b_1 (2b_1 - 1) \varrho^2 \sigma_1^2 \sigma_2^3 + 4b_1^2 \sigma_2^4 \\ &\quad - 4b_1 (b_1 - 1) \varrho^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 4b_1 (2b_1 - 1) \varrho^2 \sigma_1^2 \sigma_2^3 - 4b_1^2 \sigma_2^4 \\ &\Leftrightarrow D = \varrho^2 \sigma_1^2 \sigma_2^2 + 4b_1 (b_1 - 1) (\varrho^2 - 1) \sigma_1^2 \sigma_2^2 \\ &\Leftrightarrow D = [(2b_1 - 1)^2 \varrho^2 + 4b_1 (1 - b_1)] \sigma_1^2 \sigma_2^2 \\ &\Leftrightarrow D = 4[(b_1 - b_2)^2 \varrho^2 + b_1 b_2] \sigma_1^2 \sigma_2^2 \end{aligned}$$

¹ $\vec{b}$ représente le vecteur des budgets de risque, $\vec{w}$ représente le vecteur des poids de portefeuille

Vu que tous les termes sont nécessairement positifs, il suit que le discriminant est toujours positif. Ceci nous donne alors les solutions suivantes :

$$w_1 = \frac{\left(b_1 - \frac{1}{2}\right)\rho\sigma_1\sigma_2 - b_1\sigma_2^2 \pm \sigma_1\sigma_2\sqrt{(b_1 - b_2)^2\rho^2 + b_1b_2}}{b_2\sigma_1^2 + (b_1 - b_2)\rho\sigma_1\sigma_2 - b_1\sigma_2^2}$$

$$w_2 = \frac{\left(b_2 - \frac{1}{2}\right)\rho\sigma_1\sigma_2 - b_2\sigma_1^2 \pm \sigma_1\sigma_2\sqrt{(b_1 - b_2)^2\rho^2 + b_1b_2}}{b_1\sigma_2^2 + (b_2 - b_1)\rho\sigma_1\sigma_2 - b_2\sigma_1^2}$$

Considérons maintenant le cas où il y a parité de risque :

$$b_1 = b_2 = \frac{1}{2}$$

Ceci nous donne :

$$w_1 = \frac{-\sigma_2^2 \pm \sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 - \sigma_2^2}$$

$$w_2 = \frac{-\sigma_1^2 \pm \sigma_1\sigma_2}{\sigma_2^2 - \sigma_1^2}$$

Ces solutions peuvent être simplifiées de manière suivante¹ :

$$\begin{cases} w_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \\ w_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \end{cases} \quad \vee \quad \begin{cases} w_1 = \frac{-\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \\ w_2 = \frac{-\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} \end{cases}$$

Si nous reprenons la solution générale pour les deux actifs, et nous supposons maintenant que ces deux actifs ne soient pas corrélés, nous obtiendrons comme solution :

$$w_1 = \frac{-b_1\sigma_2^2 \pm \sigma_1\sigma_2\sqrt{b_1b_2}}{b_2\sigma_1^2 - b_1\sigma_2^2} = \frac{\sigma_2\sqrt{b_1}(\pm\sigma_1\sqrt{b_2} - \sigma_2\sqrt{b_1})}{(\sigma_1\sqrt{b_2} - \sigma_2\sqrt{b_1})(\sigma_1\sqrt{b_2} + \sigma_2\sqrt{b_1})}$$

$$w_2 = \frac{-b_2\sigma_1^2 \pm \sigma_1\sigma_2\sqrt{b_1b_2}}{b_1\sigma_2^2 - b_2\sigma_1^2} = \frac{\sigma_1\sqrt{b_2}(\pm\sigma_2\sqrt{b_1} - \sigma_1\sqrt{b_2})}{(\sigma_2\sqrt{b_1} - \sigma_1\sqrt{b_2})(\sigma_2\sqrt{b_1} + \sigma_1\sqrt{b_2})}$$

¹ $\vee$ dénote « ou »

Ceci nous donne comme solutions :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 = \frac{\sigma_2 \sqrt{b_1}}{\sigma_1 \sqrt{b_2} + \sigma_2 \sqrt{b_1}} \\ w_2 = \frac{\sigma_1 \sqrt{b_2}}{\sigma_2 \sqrt{b_1} + \sigma_1 \sqrt{b_2}} \end{array} \right. \quad \vee \quad \left\{ \begin{array}{l} w_1 = \frac{-\sigma_2 \sqrt{b_1}}{\sigma_1 \sqrt{b_2} - \sigma_2 \sqrt{b_1}} \\ w_2 = \frac{-\sigma_1 \sqrt{b_2}}{\sigma_2 \sqrt{b_1} - \sigma_1 \sqrt{b_2}} \end{array} \right.$$

Nous apercevons clairement que la première solution trouvée nous donne deux poids positifs, tandis que la deuxième solution nous incite à prêter un des deux actifs afin d'investir dans l'autre. Si maintenant nous supposons de nouveau la parité de risque, les solutions deviennent :

$$\left\{ \begin{array}{l} w_1 = \frac{\sigma_2}{\sigma_1 + \sigma_2} \\ w_2 = \frac{\sigma_1}{\sigma_2 + \sigma_1} \end{array} \right. \quad \vee \quad \left\{ \begin{array}{l} w_1 = \frac{-\sigma_2}{\sigma_1 - \sigma_2} \\ w_2 = \frac{-\sigma_1}{\sigma_2 - \sigma_1} \end{array} \right.$$

Retournons maintenant au cas de n actifs différents. Il peut alors être démontré (voir annexe E) que dans le cas où il n'y a pas de corrélation entre les différents actifs, les quotités devront équivaleoir :

$$w_i = \frac{\sigma_i^{-1} \sqrt{b_i}}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^{-1} \sqrt{b_j}}$$

Si par contre nous supposons que la corrélation entre les actifs soit parfaite, il peut être démontré que les quotités vaudront (voir annexe E) :

$$w_i = \frac{b_i \sigma_i^{-1}}{\sum_{j=1}^n b_j \sigma_j^{-1}}$$

Dans les deux cas, si nous considérons le cas de la parité de risque :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: b_i = \frac{1}{n}$$

Nous trouverons comme solution :

$$w_i = \frac{\sigma_i^{-1}}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^{-1}}$$

3.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons d'abord expliqué les modèles qui servent à évaluer les différentes classes d'actifs considérées : les actions, les obligations et l'actif sans risque. En ce qui concerne les actifs, les modèles de Gordon et le modèle stochastique ont été élaborés. Nous avons également décrit des modèles qui nous serviront à évaluer des obligations et nous avons fait le lien avec la duration de Macauley. Dans la deuxième partie trois stratégies qui nous aideront à construire des portefeuilles, ont été décrites, ces stratégies sont : la stratégie du *Buy & Hold*, la stratégie du *rebalancement constant* et la stratégie de la parité de risque. Il a été montré comment de différentes portefeuilles peuvent être construits en utilisant ces stratégies et leurs principales propriétés ont été décrites. Après la dualité entre la parité de risque et la parité au rendement fut abordé. Il a été mentionné qu'il est impossible de trouver une formule explicite qui calcule les quotités pour la stratégie de la parité de risque. Nous avons par contre montré que pour certains cas, il est possible de trouver une solution explicite : notamment dans le cas où le portefeuille ne consiste que de deux actifs.

Chapitre IV

Analyse Empirique

4.1 Introduction

Dans ce chapitre la performance des différents type de portefeuilles, c.-à-d. les portefeuilles des types *Buy & Hold*, rebalancement constant et parité de risque sera analysée sur la période de novembre 2005 à novembre 2016. Dans une première partie les différentes données seront analysées de façon globale sur toute la période. Il deviendra clair qu'il sera nécessaire de scinder cette grande période en deux périodes de hausse (novembre 2005 à juillet 2007 et août 2009 à novembre 2016) et une période de crise (août 2007 à juillet 2009). Puis il sera expliqué comment les différents portefeuilles ont été construits de manière pratique. Finalement les performances de ces portefeuilles seront analysées par période.

4.2 Collection des données

Afin de pouvoir exécuter cette analyse empirique, il nous a fallu des données concernant les actions, les obligations, l'actif sans risque et les taux de change. En ce qui concerne les actions et les obligations : les données (valeur des indices S&P 500, Euronext 100 et Nikkei 225 pour les actions, et les rendements (*yield to maturity*) des obligations d'état avec une maturité de dix ans) ont été récoltées de *Bloomberg*. Les taux sans risque correspondent aux rendements (*yield to maturity*) des obligations d'état avec une maturité de trois mois qui ont également été récoltés de *Bloomberg* pour les Etats-Unis et le Japon, et qui ont été repris d'*Investing.com* en ce qui concerne l'Allemagne. Les taux de change ont été repris de la *Federal Reserve Bank of St. Louis* et de l'*ECB*. Toutes les données ont été reprises avec une fréquence hebdomadaire.

4.3 Analyse des données

Notre analyse empirique englobe la période de novembre 2005 à novembre 2016. Trois régions du monde y sont prises en compte : l'Europe, l'Amérique du Nord et le Japon. Afin de simuler les différentes classes d'actif, il a été décidé de retenir les actifs suivants pour cette analyse :

- Pour les actions :
 - américaines : l'indice S&P 500
 - européennes : l'indice Euronext 100
 - japonaises : l'indice Nikkei 225
- Pour les obligations :
 - américaines : les obligations d'état américaines (maturité de 10 ans)
 - européennes : les obligations d'état allemandes (maturité de 10 ans)
 - japonaises : les obligations d'état japonaises sur (maturité de 10 ans)
- Pour l'actif sans risque :
 - américaines : les obligations d'état américaines (maturité de 3 mois)
 - européennes : les obligations d'état allemandes (maturité de 3 mois)
 - japonaises : les obligations d'état japonaises (maturité de 3 mois)

Les données suivantes furent obtenues pour les différentes classes d'actifs sur une période hebdomadaire :

- Pour les actions : les valeurs des indices boursières
- Pour les obligations d'état : les rendements (*yield to maturity*)

S'il y avait des données manquantes, ces données ont été ajoutées en utilisant la technique de l'interpolation linéaire, par exemple si nous disposions des données pour la période i et pour la période $i+3$, mais les données des périodes $i+1$ et $i+2$ nous manquaient, elles ont été calculées de manière suivante :

$$Donnée_{i+1} = \frac{2 \times Donnée_i + 1 \times Donnée_{i+3}}{3}$$

$$Donnée_{i+2} = \frac{1 \times Donnée_i + 2 \times Donnée_{i+3}}{3}$$

Pour que les données soient facilement comparables, de nouveaux indices ont été créés, tous ayant une valeur de 100 au 31/10/2005. Dans le cas des actions, cet indice a été calculé de manière suivante :

$$\text{Indice à la date } x = \frac{\text{Valeur de l'indice boursière à la date } x}{\text{Valeur de l'indice boursière au 31/10/2005}} \times 100$$

Dans le cas des obligations, vu que nous ne disposons que des rendements y (*yield to maturity*), ces indices ont été composés en combinant l'effet du découlement du temps et du changement du rendement :

$$\text{Indice au 31/10/2005} = 100$$

$$\text{Effet du découlement du temps} = \text{Indice}_{i-1} \times \left(\sqrt[52]{1 + y_{i-1}} - 1 \right)$$

$$\text{Effet du changement du rendement} = -\text{Indice}_{i-1} \times D \times \frac{\Delta y}{1 + y_{i-1}}$$

L'effet du découlement de temps, doit être compris de manière suivante : s'il n'y a que la date de valorisation qui change (tous les autres paramètres, y compris le rendement, restant constants), la valeur de l'indice bougerait de façon suivante :

$$\text{Indice}_i = \text{Indice}_{i-1} \times \sqrt[52]{1 + y_{i-1}}$$

L'effet du changement du rendement, doit par ailleurs être compris ainsi : s'il n'y a que le rendement qui change (tous les autres paramètres, y compris la date, restant constants), la valeur de l'indice bougerait de façon suivante :

$$\text{Indice}_i = \text{Indice}_{i-1} \times \left(1 - D \times \frac{\Delta y}{1 + y_{i-1}} \right)$$

En combinant ces deux effets, nous obtenons l'équation suivante, qui a été utilisée afin de modéliser les valeurs des indices d'obligations :

$$\text{Indice}_i = \text{Indice}_{i-1} \times \left(\sqrt[52]{1 + y_{i-1}} - D \times \frac{\Delta y}{1 + y_{i-1}} \right)$$

Afin de calculer la duration, il a été supposé que les coupons des obligations fussent fixes et qu'elles fussent toujours payables à la fin de l'année. Ceci nous donne alors l'équation suivante :

$$D = \frac{1 + y}{y} - \frac{(1 + y) + T(i - y)}{i[(1 + y)^T - 1] + y}$$

La duration a été calculée en supposant que toutes les obligations aient été vendues au pair : le coupon de l'obligation équivaldrait alors le rendement de l'obligation, de sorte que l'équation de la duration puisse être simplifiée de manière suivante :

$$D = \frac{1 + y}{y} - \frac{1}{y(1 + y)^{T-1}}$$

En observant l'évolution des indices ainsi construites, nous pouvons remarquer (figure 5) qu'il y a trois périodes assez distinctes, marquées en rouge dans le graphique ci-dessous : une période de hausse boursière entre novembre 2005 et juillet 2007, une période de baisse entre août 2007 et juillet 2009 et une nouvelle hausse à partir d'août 2009.

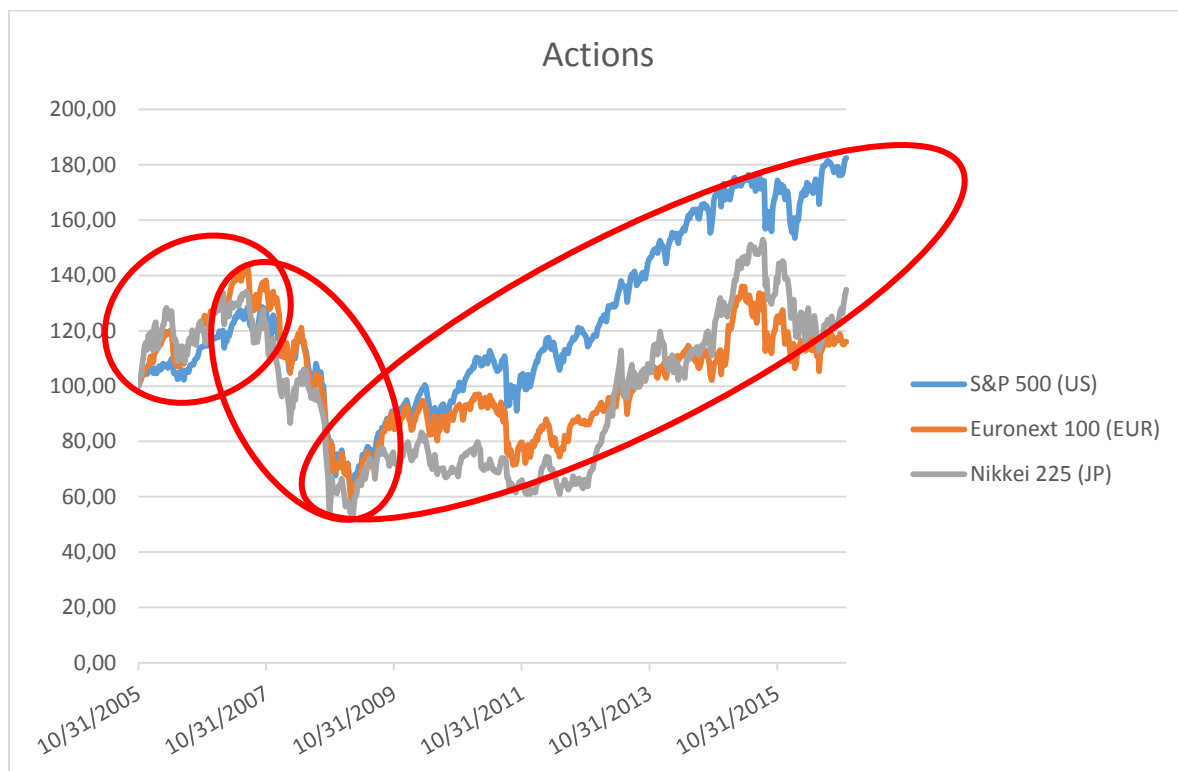


Figure 5 : Evolution des indices boursiers 11/2005 – 11/2016

En faisant la même analyse pour les obligations, il est important de remarquer (figure 6) qu'il y a une chute des taux à partir de juillet 2009 (avec un petit rebondissement à la fin). Remarquons en outre qu'il y a une divergence entre le taux des obligations américaines d'une côté et les taux des obligations japonaises et allemandes de l'autre côté, ces derniers devenant même négatifs à un certain moment. Lorsque nous observons l'évolution des rendements des obligations américaines et allemandes, il pourrait être remarqué que les taux montent avant la crise de juillet 2007, et qu'ils baissent pendant la crise jusqu'en juillet 2009. Après une courte remonte correspondant à la crise des obligations d'état, il y a eu une diminution forte des taux jusqu'à présent.



Figure 6 : Evolution des rendements d'obligations d'états (maturité de dix ans) 11/2005 – 11/2016

Le but de notre analyse étant la diversification internationale, il est important que nous connaissions l'évolution des taux de change (figure 7) vu que ceux-ci auront un grand impact sur nos choix d'investissement. Dans le graphique ci-dessous nous remarquons que dans la période novembre 2005 jusqu'en juillet 2008, il y avait eu une forte appréciation de l'euro vis-à-vis du dollar et du yen. Ensuite, dans la période de juillet 2008 à novembre 2009, il se produisit soudainement une forte appréciation du yen, majoritairement vis-à-vis de l'euro. La situation est alors restée plus ou moins stable jusqu'en août 2012, puis il s'est produit une lente

dépréciation du yen jusque mai 2014. A partir de mai 2014, nous voyons que le dollar s'est apprécié vis-à-vis de l'euro et du yen.

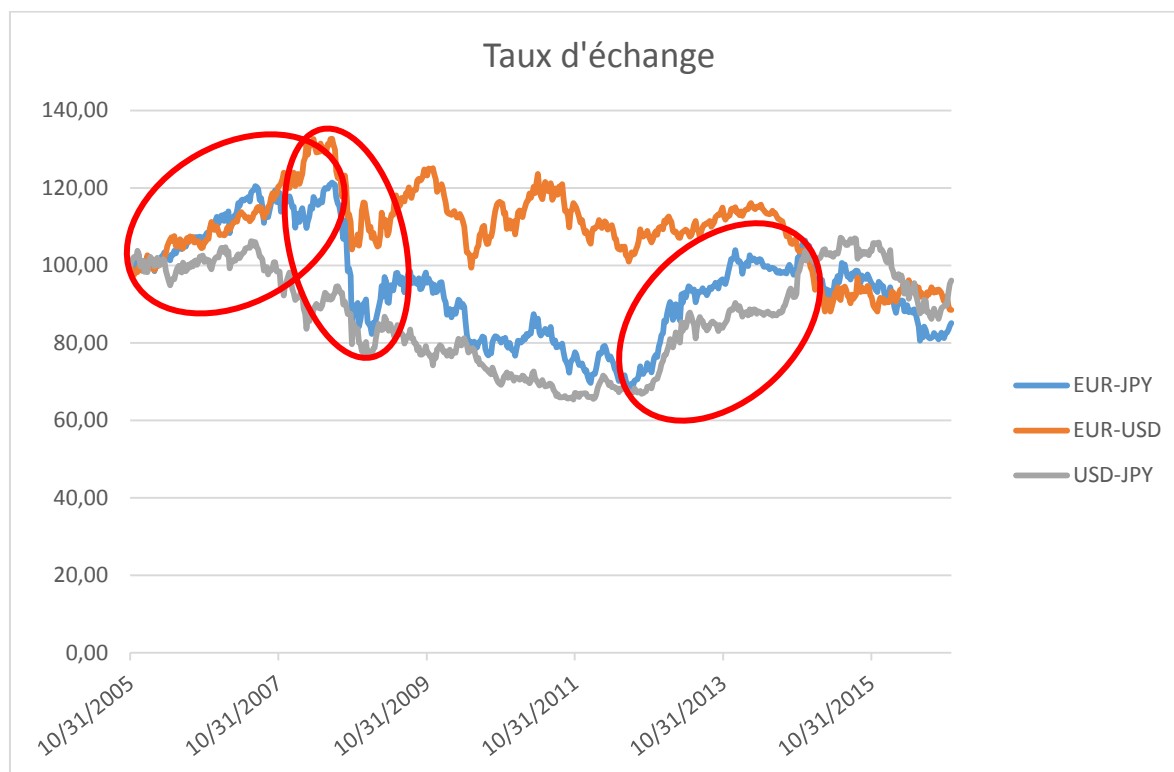


Figure 7 : Evolution des taux de change 11/2005 – 11/2016

Pour que les performances des différents portefeuilles puissent être analysées, il nous faut également l'évolution des taux sans risque (figure 8). Avant que la crise eût commencé, les taux sans risque étaient relativement élevés (en comparaison avec les taux actuels) et les différents taux sans risque continuaient à monter légèrement. Cette augmentation a duré jusqu'octobre 2007 (déjà quelque mois dans la crise). Puis les taux commencèrent brusquement à descendre, effectivement valant presque 0% en 2009. Cette situation n'a pas changé jusque fin 2015, à l'exception d'une brève remontée des taux allemands pendant la crise de l'euro en 2011. A partir de 2015, il y a de nouveau une descente des taux sans risque allemands et japonais, qui deviennent maintenant effectivement négatifs. En ce qui concerne le taux sans risque américain, nous remarquons par contre qu'il est en train de remonter ces derniers mois, ce qui peut être expliqué par les promesses faites par le nouveau président élu.

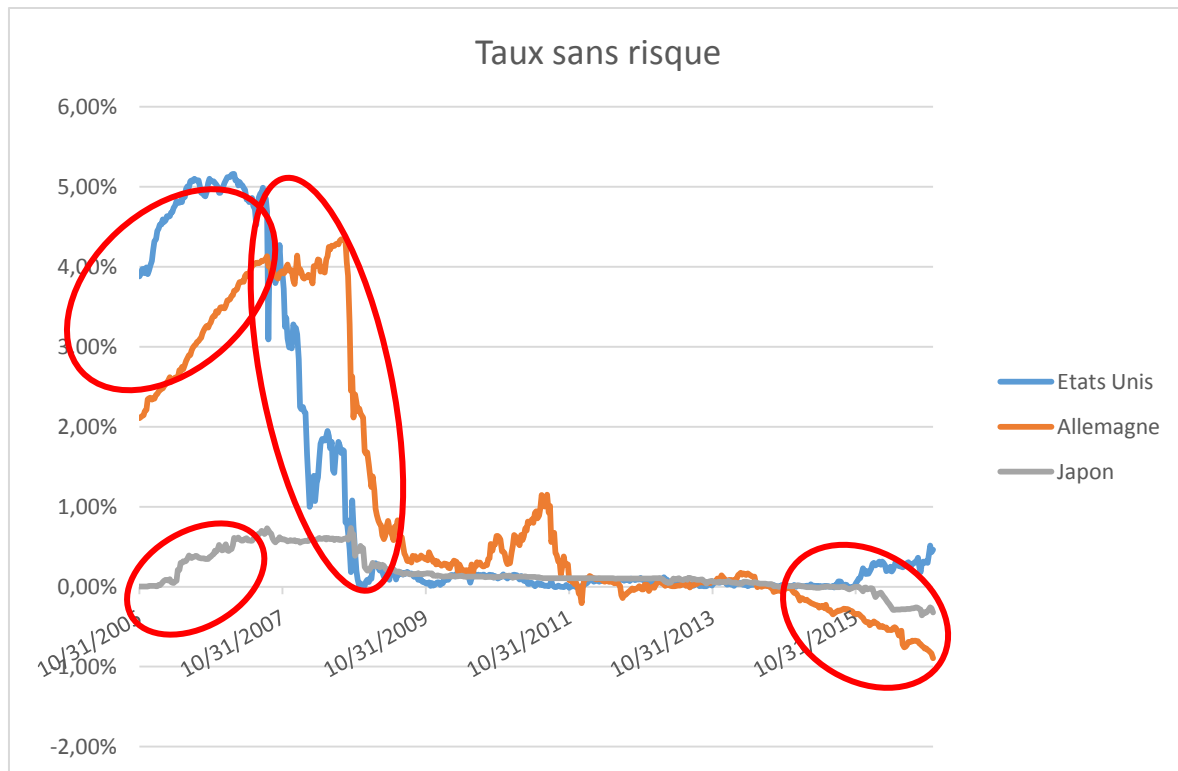


Figure 8 : Evolution des taux sans risque (obligation d'état d'une maturité de trois mois) 11/2005 – 11/2016

4.4 Portefeuilles nationaux et internationaux analysés

Les portefeuilles nationaux et internationaux qui seront analysés ont été construits selon les techniques suivantes, comme définis dans le troisième chapitre :

- La stratégie du *Buy & Hold*
- La stratégie du rebalancement constant
- La stratégie de la parité de risque

Afin d'analyser différents profils de risque, nous avons opté d'utiliser les profils suivants :

- Le profil conservateur : 75% en obligations et 25% en actions
- Le profil neutre : 50% en obligations et 50% en actions
- Le profil agressif : 25% en obligations et 75% en actions

En ce qui concerne le risque de change, dans une première analyse nous ne considérerons que le cas sans couverture contre le risque de change, après dans une analyse plus profonde, les scénarios suivants ont également été analysés pour la première période :

- Couverture parfaite contre le risque de change
- Couverture partielle contre le risque de change

En ce qui concerne la stratégie *Buy & Hold*, les portefeuilles ont été construits de manière suivante : ils sont tous construits au début de la période, c.-à-d. au 1/10/2005, au 1/8/2007 et au 1/8/2009 ; puis aucune adaptation à la composition du portefeuille n'aura lieu entre ces dates. Les compositions des portefeuilles nationaux correspondent aux profils d'investisseurs définis ci-avant, et les portefeuilles internationaux sont construits de sorte que chaque portefeuille national y contribue un tiers au début de la composition. Tous les rendements ont été exprimés vis-à-vis de l'euro. Les rendements des portefeuilles nationaux américains et japonais tant que les rendements des portefeuilles internationaux consistent donc partiellement des rendements des actifs exprimés en devise étrangère et partiellement des rendements suite à l'appréciation ou dépréciation du dollar/yen.

Concernant la stratégie du rebalancement constant, les simulations ont été faites en combinant les rendements des différents actifs sous-jacents suivant les différentes stratégies d'investissement (conservateur, neutre ou agressif), en outre, en ce qui concerne les actifs étrangers, ces rendements ont été augmentés avec les appréciations de la devise étrangère.

En ce qui concerne la stratégie de la parité de risque, les portefeuilles nationaux ont été construits en utilisant la formule développée dans le troisième chapitre (les portefeuilles ne possédant que des proportions positives ont été retenus) :

$$w_1 = \frac{\left(b_1 - \frac{1}{2}\right)\rho\sigma_1\sigma_2 - b_1\sigma_2^2 \pm \sigma_1\sigma_2\sqrt{\frac{1}{4}(b_1 - b_2)^2\varrho^2 + b_1b_2}}{b_2\sigma_1^2 + (b_1 - b_2)\rho\sigma_1\sigma_2 - b_1\sigma_2^2}$$

$$w_2 = \frac{\left(b_2 - \frac{1}{2}\right)\rho\sigma_1\sigma_2 - b_2\sigma_1^2 \pm \sigma_1\sigma_2\sqrt{\frac{1}{4}(b_1 - b_2)^2\varrho^2 + b_1b_2}}{b_1\sigma_2^2 + (b_2 - b_1)\rho\sigma_1\sigma_2 - b_2\sigma_1^2}$$

Ceci nous donne les portefeuilles nationaux suivants, en considérant la stratégie de la parité de risque :

	10/2005 – 7/2007		8/2007 – 7/2009		8/2009 – 11/2016	
	% Obligations	% Actions	% Obligations	% Actions	% Obligations	% Actions
C (\$)	75%	25%	70%	30%	70%	30%
C (€)	82%	18%	83%	17%	81%	19%
C (¥)	76%	24%	63%	37%	70%	30%
N (\$)	60%	40%	60%	40%	56%	44%
N (€)	76%	24%	79%	21%	75%	25%
N (¥)	72%	28%	58%	42%	57%	43%
A (\$)	43%	57%	49%	51%	42%	58%
A (€)	68%	32%	74%	26%	68%	32%
A (¥)	61%	39%	46%	54%	43%	57%

Tableau 3: Portefeuilles nationaux (C : conservateur, N : neutre (parité de risque), A : Agressif)

Remarquons que les portefeuilles obtenus (tableau 3) correspondent bien à la théorie : vu que même dans le cas d'un portefeuille agressif les obligations sont supposées à contribuer un quart du risque total, ces portefeuilles restent fort investis en obligations. Remarquez également que la composition des différents portefeuilles construits de cette façon reste relativement stable dans le temps.

Ensuite afin de tenir compte de la diversification internationale, il nous a fallu construire des portefeuilles auxquels les trois marchés mondiaux considérés contribuent chacun un tiers au risque total. Afin de résoudre ce problème, il a fallu résoudre le problème suivant pour chacun des portefeuilles construits :

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} \frac{\sigma}{3} \\ \frac{\sigma}{3} \\ \frac{\sigma}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{\sigma} \begin{pmatrix} \sigma_1^2 w_1^2 + \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 w_1 w_2 + \rho_{13} \sigma_1 \sigma_3 w_1 w_3 \\ \sigma_2^2 w_2^2 + \rho_{12} \sigma_1 \sigma_2 w_1 w_2 + \rho_{23} \sigma_2 \sigma_3 w_2 w_3 \\ \sigma_3^2 w_3^2 + \rho_{13} \sigma_1 \sigma_3 w_1 w_3 + \rho_{23} \sigma_2 \sigma_3 w_2 w_3 \end{pmatrix} \\ w_1 + w_2 + w_3 = 1 \end{cases}$$

Ce système d'équations a pour chacun des portefeuilles été résolu par Solver®, et nous a donné les résultats suivants (tableau 4) :

	10/2005 – 7/2007			8/2007 – 7/2009			8/2009 – 11/2016		
	\$	€	¥	\$	€	¥	\$	€	¥
C	27%	47%	26%	24%	54%	22%	25%	48%	27%
N	27%	46%	26%	25%	52%	23%	26%	46%	27%
A	30%	43%	27%	25%	51%	24%	27%	45%	28%

Tableau 4: Portefeuilles internationaux (C : conservateur, N : neutre (parité de risque), A : Agressif)

Remarquez que les poids attribués aux différents marchés internationaux ne dépendent pas du profil de l'investisseur ni de la période choisie : dans les trois cas la distribution des poids s'approche à 26% en dollar, 47% en euro et 26% en yen.

4.5 Analyse des performances des portefeuilles

Les différents portefeuilles ont été analysés en utilisant les quatre mesures de performance définies dans le premier chapitre, c.-à-d. le ratio de Sharpe, le ratio de Treynor, l'alpha de Jensen et la mesure de Modigliani-Modigliani. Afin de pouvoir calculer ces mesures de performance, il fallut connaître le portefeuille de marché. Afin de simuler ce portefeuille de marché, il est supposé que chacun des trois économies mondiales y représente un tiers, et que les marchés des obligations soient négligeables vis-à-vis des marchés d'actions. Alors le rendement du portefeuille de marché exprimé en euro peut être estimé sur base de la formule suivante :

$$r_M^{\text{€}} = \frac{r^{\text{Actions (€)}} + r^{\text{Actions ($)}} + e^{\text{\$(€)}} + r^{\text{Actions (¥)}} + e^{\text{¥(€)}}}{3}$$

Ceci nous donne les informations suivantes concernant le portefeuille de marché (tableau 5) :

	10/2005 – 7/2007	8/2007 – 7/2009	8/2009 – 11/2016
$\mu_M(\text{€})$	5,09%	-18,43%	15,75%
$\sigma_M(\text{€})$	6,19%	15,04%	8,32%
$T_M(\text{€})$	1,94%	-21,27%	15,71%

Tableau 5: Portefeuilles de marché

Une autre donnée qu'il nous faut est les taux sans risque. Comme nous avons vu au début de ce chapitre, les taux sans risque ont fort changé, alors il a fallu de différents taux pour les trois périodes (tableau 6) :

	10/2005 – 7/2007	8/2007 – 7/2009	8/2009 – 11/2016
$\mu_F(\$)$	4,78%	1,76%	0,09%
$\mu_F(\text{€})$	3,14%	2,84%	0,04%
$\mu_F(\text{¥})$	0,34%	0,47%	0,04%

Tableau 6: Taux sans risque

Les ratios que nous analyserons sont ceux que nous avons rencontrés dans le premier chapitre : le ratio de Sharpe, le ratio de Treynor, l'alpha de Jensen et la mesure de Modigliani-Modigliani. En se mettant dans la position de l'investisseur européen, les résultats suivants ont été obtenus (tableau 7) :

Période 10/2005 – 7/2007					
Portefeuille		S_P	T_P	α_P	M_P^2
Buy & Hold	C (EUR)	38%	19%	1,23%	4,24%
	C (INT)	-69%	-26%	-4,29%	-0,61%
	N (EUR)	101%	16%	6,21%	11,16%
	N (INT)	3%	0,60%	-0,54%	3,45%
	A (EUR)	119%	18%	10,77%	22,93%
	A (INT)	41%	7%	2,99%	10,15%
Rebalancement constant	C (EUR)	14%	11%	0,46%	3,51%
	C (INT)	-96%	-21%	-5,01%	-0,41%
	N (EUR)	87%	21%	5,22%	9,31%
	N (INT)	-6%	-1%	-1,20%	2,76%
	A (EUR)	107%	21%	9,86%	20,82%
	A (INT)	42%	6%	2,48%	8,52%
Parité de risque	C (EUR)	-26%	71%	-0,95%	2,55%
	C (INT)	-101%	-30%	-4,57%	0,20%
	N (EUR)	9%	8%	0,27%	3,37%
	N (INT)	-69%	-14%	-3,42%	1,02%
	A (EUR)	44%	18%	1,76%	4,59%
	A (INT)	-25%	-4%	-1,91%	2,11%

Tableau 7: Mesures de performance obtenues pour la période avant la crise

Le tableau ci-dessus reprend les résultats obtenus pour la période avant la crise. Pour toutes les stratégies le portefeuille international est moins performant que le portefeuille n'investissant que dans des titres européens. Ceci peut être expliqué par la forte appréciation de l'euro vis-à-vis du yen et du dollar pendant cette période. L'effet est plus grand pour la stratégie du *Buy & Hold*, vu que dans cette stratégie le portefeuille n'est pas adapté pendant la période considérée. En fait, la partie des titres exprimée en euro continue de croître pendant toute la période, ce qui renforce l'effet de l'appréciation de l'euro. Cette effet est le moindre dans la stratégie de la parité de risque, vu que dans cette stratégie-ci l'investisseur

investira fortement dans des obligations, même dans le cas d'un portefeuille agressif. Remarquons également que les performances des portefeuilles agressifs sont toutes supérieures aux rendements des portefeuilles conservateurs, ce qui indique que l'augmentation du risque pris amène une augmentation de rendement assez importante.

Période 8/2007 – 7/2009					
Portefeuille		S_P	T_P	α_P	M_P^2
Buy & Hold	C (EUR)	-15%	-48%	-1,59%	-0,82%
	C (INT)	-0,29%	-2,44%	0,36%	2,79%
	N (EUR)	-53%	-37%	-4,68%	-11,81%
	N (INT)	-41%	-30%	-2,15%	-6,08%
	A (EUR)	-100%	-34%	-7,95%	-24,72%
	A (INT)	-77%	-29,54%	-4,44%	-19,23%
Rebalancement constant	C (EUR)	-23%	-25%	-0,56%	-1,08%
	C (INT)	-7%	-9%	1,26%	2,12%
	N (EUR)	-72%	-32%	-3,99%	-10,24%
	N (INT)	-57%	-25%	-1,08%	-4,51%
	A (EUR)	-128%	-35%	-8,15%	-19,66%
	A (INT)	-96%	-29%	-4,07%	-14,20%
Parié de risque	C (EUR)	-10%	-16%	0,40%	1,89%
	C (INT)	-16%	-13%	0,87%	2,07%
	N (EUR)	-21%	-22%	-0,08%	0,94%
	N (INT)	-36%	-19%	0,87%	1,12%
	A (EUR)	-38%	-26%	-0,67%	0,11%
	A (INT)	-60%	-23%	-0,35%	-0,32%

Tableau 8: Mesures de performance obtenues pour la période de crise

Dans le tableau ci-dessus (tableau 8) les résultats obtenus pour la période de crise sont repris. Nous remarquons que les performances sont presque tous négatifs, à l'exception des portefeuilles fortement investis dans les obligations. Les portefeuilles conservateurs ont relativement bien prestés pendant cette période. La valeur de l'euro ayant eu resté stable pendant cette période, l'effet de la diversification se montre bien. Tous les portefeuilles diversifiés internationalement, ont presté mieux que leurs contreparties nationales. Vu que les portefeuilles investis majoritairement en obligations ont relativement bien presté pendant la crise, nous remarquons que les portefeuilles de parité de risque ont relativement bien résisté la crise. En ce qui concerne les portefeuilles *Buy & Hold*, nous voyons que ceux-là ont des

performances supérieures à ceux qui ont été construits selon la stratégie du rebalancement constant, vu que la proportion des obligations – qui ont presté bien pendant la crise – n’a cessé d’augmenter.

Période 8/2009 – 11/2016					
Portefeuille		S_P	T_P	α_P	M_P^2
Buy & Hold	C (EUR)	97%	27%	2,23%	3,62%
	C (INT)	98%	37%	4,27%	6,68%
	N (EUR)	60%	13%	-1,10%	6,01%
	N (INT)	89%	20%	1,73%	10,10%
	A (EUR)	40%	9%	-4,35%	9,40%
	A (INT)	75%	15%	-0,58%	15,40%
Rebalancement constant	C (EUR)	107%	43%	3,71%	3,87%
	C (INT)	98%	33%	3,86%	6,66%
	N (EUR)	68%	17%	0,53%	6,65%
	N (INT)	105%	20%	1,92%	8,60%
	A (EUR)	43%	11%	-2,98%	10,20%
	A (INT)	88%	63%	-0,23%	12,93%
Parité de risque	C (EUR)	111%	68%	4,41%	3,62%
	C (INT)	107%	36%	4,04%	5,73%
	N (EUR)	107%	43%	3,71%	3,87%
	N (INT)	114%	28%	3,33%	6,36%
	A (EUR)	97%	30%	2,86%	4,43%
	A (INT)	113%	38%	2,47%	7,56%

Tableau 9: Mesures de performance obtenues pour la période après la crise

Le dernier tableau (tableau 9) reprend les performances des différents portefeuilles après la crise. Remarquons de nouveau que pendant cette période les portefeuilles diversifiés de manière internationale ont mieux performés que leurs contreparties nationales, ce qui est en ligne avec la théorie de portefeuille de Markowitz. La stratégie de parité de risque performe moins bien que les stratégies du *Buy & Hold* et du rebalancement constant, ce qui nous semble logique vu que les portefeuilles construits selon la méthode de parité de risque investissent majoritairement en obligations. Les portefeuilles *Buy & Hold* agressif ont bien performé, ce qui s’explique par le fait qu’ils sont majoritairement investis en actions et que –

vu la bonne performance des marchés – la fraction d’actions dans ce type de portefeuille ne cesse de croître.

Dans l’analyse de la première période, il a été remarqué que l’appréciation de l’euro avait eu une forte influence sur les résultats obtenus, surtout en ce qui concerne la diversification. Afin d’analyser ceci plus en détail, l’analyse a été refaite pour cette période-là en supposant que le risque du change fût couvert. Si ce risque est couvert, les compositions des portefeuilles « parité de risque » a changé. Ci-dessous vous trouvez leurs nouvelles compositions (tableau 10) :

	10/2005 – 7/2007	
	% Obligations	% Actions
C (\$)	77%	23%
C (€)	82%	18%
C (¥)	86%	14%
N (\$)	66%	34%
N (€)	76%	24%
N (¥)	79%	21%
A (\$)	53%	47%
A (€)	68%	32%
A (¥)	74%	26%

Tableau 10: Portefeuilles nationaux avec couverture contre le risque de change (avant la crise)

Les compositions des portefeuilles européens n'ont pas changé (vu que pour ces portefeuilles-là il n'y a pas de risque de change), pour les autres portefeuilles les changements sont minimaux, dû au fait que l'effet du risque de change sur les obligations et sur les actions est quasi le même. Après avoir calculé les compositions des différents portefeuilles nationaux, nous avons calculé également les portefeuilles internationaux (tableau 11) :

	10/2005 – 7/2007		
	\$	€	¥
C	27%	33%	41%
N	28%	33%	39%
A	33%	31%	36%

Tableau 11: Portefeuilles internationaux couverts contre le risque de change (avant la crise)

La composition des portefeuilles est maintenant beaucoup plus équilibrée vu que les taux de change n'influencent plus cette composition : les titres japonais sont devenus beaucoup plus attrayants vis-à-vis des titres européens.

Période 10/2005 – 7/2007					
Portefeuille		S_P	T_P	α_P	M_P^2
Buy & Hold	C (EUR)	38%	19%	1,23%	4,24%
	C (INT)	21%	11%	1,78%	4,10%
	N (EUR)	101%	16%	6,21%	11,16%
	N (INT)	104%	14%	5,43%	9,31%
	A (EUR)	119%	18%	10,77%	22,93%
	A (INT)	122%	16%	9,12%	18,77%
Rebalancement constant	C (EUR)	14%	11%	0,46%	3,51%
	C (INT)	55%	20%	1,70%	3,83%
	N (EUR)	87%	21%	5,22%	9,31%
	N (INT)	105%	20%	5,44%	8,60%
	A (EUR)	107%	21%	9,86%	20,82%
	A (INT)	121%	21%	9,44%	18,28%
Parié de risque	C (EUR)	-26%	71%	-0,95%	2,55%
	C (INT)	25%	21%	0,69%	2,85%
	N (EUR)	9%	8%	0,27%	3,37%
	N (INT)	61%	20%	1,80%	3,66%
	A (EUR)	44%	18%	1,76%	4,59%
	A (INT)	85%	21%	2,98%	4,88%

Tableau 12: Mesures de performance obtenues pour la période avant la crise (complètement couvert)

La couverture contre le taux de change a eu un grand effet sur les performances des portefeuilles internationaux (tableau 12) : après la correction, ils performant mieux que les portefeuilles européens qui y correspondent. La bonne performance des portefeuilles européens vis-à-vis des portefeuilles internationaux était donc fortement liée à l'appréciation de l'euro.

Comme décrit dans le premier chapitre, il est également possible de trouver une exposition optimale vis-à-vis des devises étrangères, en utilisant les formules suivantes :

$$w_{¥}^* = \frac{1}{w_{JPY}} \frac{\rho_{P,¥} - \rho_{P,\$} \rho_{\$,¥}}{(\rho_{\$,¥}^2 - 1) \sigma_{¥}} \sigma_P$$

$$w_{\$}^* = \frac{1}{w_{USD}} \frac{\rho_{P,\$} - \rho_{P,¥} \rho_{\$,¥}}{(\rho_{\$,¥}^2 - 1) \sigma_{\$}} \sigma_P$$

Cette stratégie a été utilisée afin d'optimiser la stratégie du rebalancement constant pendant la période avant la crise (pendant laquelle il y a eu une forte influence liée au risque de change). En utilisant les formules données ci-dessus, les expositions suivantes furent trouvées (tableau 13) :

	10/2005 – 7/2007	
	% \$	% ¥
C	0,28%	4,44%
N	12,87%	1,46%
A	25,47%	-7,97%

Tableau 13: Expositions optimales au risque de change pour la période avant la crise

En calculant maintenant les mesures de performance pour les portefeuilles à rebalancement constant, nous trouvons les résultats suivants (tableau 14) :

Période 10/2005 – 7/2007					
Portefeuille		S_P	T_P	α_P	M_P^2
Rebalancement constant	C (EUR)	14%	11%	0,46%	3,51%
	C (INT)	41%	15%	1,23%	3,94%
	N (EUR)	87%	21%	5,22%	9,31%
	N (INT)	93%	17%	4,77%	8,24%
	A (EUR)	107%	21%	9,86%	20,82%
	A (INT)	104%	17%	8,35%	17,01%

Tableau 14: Mesures de performance obtenues pour la période avant la crise (risque minimal)

Les performances des portefeuilles internationaux sont maintenant de nouveau meilleures que dans le cas sans couverture. Pourtant leurs performances sont moindres que dans le cas d'une

couverture complète. Ce qui est expliqué de nouveau par la bonne performance de l'euro dans cette période : les portefeuilles internationaux couverts à 100% sont plus risqués, mais ils ont également obtenu de meilleurs rendements.

4.6 Conclusion

Dans ce chapitre la performance des différents type de portefeuilles, c.-à-d. les portefeuilles des types *Buy & Hold*, rebalancement constant et parité de risque a été analysée sur la période de novembre 2005 à novembre 2016. Cette période a été scindée en deux périodes de hausse (novembre 2005 à juillet 2007 et août 2009 à novembre 2016) et une période de crise (août 2007 à juillet 2009).

En ce qui concerne les résultats obtenus pour la période avant la crise, il a été remarqué que pour les trois stratégies, le portefeuille international fut moins performant que le portefeuille n'investissant que dans des titres européens. Ceci peut être expliqué par la forte appréciation de l'euro vis-à-vis du yen et du dollar pendant cette période, l'effet étant plus grand pour la stratégie du *Buy & Hold*, car l'investisseur qui suit cette stratégie n'adapte pas son portefeuille pendant toute la période considérée. En fait, la partie de titre exprimé en euro n'a cessé de croître dans toute la période, ce qui renforça l'effet de l'appréciation de l'euro. Cette effet fut le moindre dans la stratégie de la parité de risque, dans laquelle l'investisseur investit fortement dans des obligations.

Pendant la crise les performances furent presque tous négatifs, à l'exception des portefeuilles fortement investis dans les obligations. Les portefeuilles conservateurs ont relativement bien prestés pendant cette période. Vu que les portefeuilles investis majoritairement en obligations ont relativement bien presté pendant la crise, nous remarquons que les portefeuilles de parité de risque ont relativement bien résisté la crise. En ce qui concerne les portefeuilles *Buy & Hold*, nous remarquons de nouveau que ceux-là ont des performances supérieures à ceux qui ont été construits selon la stratégie du rebalancement constant, vu que la proportion des obligations – qui ont presté bien pendant la crise – n'a cessé d'augmenter.

Finalement en ce qui concerne la dernière période, la stratégie de parité de risque a performé moins bien que les stratégies du *Buy & Hold* et du rebalancement constant, ce qui nous semble logique vu que les portefeuilles construits selon la méthode de parité de risque

investissent majoritairement en obligations. Les portefeuilles *Buy & Hold* agressif ont bien performé, ce qui s'explique par le fait qu'ils sont majoritairement investis en actions et que – vu la bonne performance des marchés – la fraction d'actions dans ce type de portefeuille ne cessa de croître.

De façon générale dans les deux périodes de hausse boursière les performances des portefeuilles agressifs sont tous supérieurs aux rendements des portefeuilles conservateurs, ce qui indique que l'augmentation du risque pris amène une augmentation de rendement assez importante.

En ce qui concerne la stratégie du *Buy & Hold* il est important que nous fassions une remarque : elle semble bien performer dans toutes les périodes, mais ceci est notamment dû aux périodes choisies : les trois périodes ne comprennent que des hausses et des baisses boursières continues. La stratégie du *Buy & Hold* performe bien lorsque les marchés montent ou baissent, mais elle performera moins bien si elle est tenue après l'événement où le marché commence à baisser après une hausse ou commence à monter après une crise. Cette stratégie est alors plus risquée que celles de rebalancement constant ou de parité de risque, il est important de bien « savoir » quand le marché tournera.

En ce qui concerne la diversification au niveau internationale, nous avons vu que dû à l'appréciation de l'euro pendant la première période considérée, les portefeuilles diversifiés ont presté moins bien que les portefeuilles n'étant investis que dans des titres européennes. Pourtant tant que dans la période de crise que dans la période de hausse boursière qui la suivit, il a bien été constaté une meilleure performance des portefeuilles internationaux diversifiés, ce qui correspond bien à la théorie de Markowitz. En couvrant le risque lié aux taux de change par des couvertures de risque complètes ou partiel, il a été constaté qu'une stratégie diversifiée au niveau international eut été efficace par rapport à un portefeuille qui n'eût investi que dans des titres européens.

Conclusion Générale

Dans le premier chapitre la définition du concept principal du « portefeuille financier privé » a été donnée. La théorie de portefeuille de Markowitz et le Capital Asset Pricing Model ont été traités en détail et il a été démontré que la diversification est importante afin d'optimiser un portefeuille financier. Ensuite les mesures de performance qui nous ont permis d'analyser l'impact de la diversification ont été expliquées : le ratio de Sharpe, le ratio de Treynor, la mesure de Jensen et la mesure de Modigliani-Modigliani. A la fin de ce chapitre le risque de taux de change a été analysé et nous avons abordé des stratégies qui nous ont permis de contourner ce risque.

Ensuite, dans le deuxième chapitre les différents profils de risque et les mesures de risque ont été traités. Au début de ce chapitre la théorie de l'utilité espérée de von Neumann & Morgenstern a été introduite. Cette théorie a été utilisée afin d'introduire les différents profils de risque : les investisseurs conservateurs et les investisseurs agressifs. Nous avons également fait le lien entre cette théorie et le modèle de Markowitz. A la fin de ce chapitre nous avons analysé l'impact de l'horizon de temps tant sur le rendement attendu que sur le risque pris. Finalement des mesures de risque différentes à la variance, ont été expliquées : notamment la valeur-à-risque, la valeur-à-risque conditionnelle, la valeur-à-risque modifiée, les moments centraux de degré supérieure à deux et les moments partiels inférieurs.

Dans le troisième chapitre les modèles qui servent à évaluer les différentes classes d'actifs considérées : les actions, les obligations et l'actif sans risque, ont été expliqués. En ce qui concerne les actifs, il s'agissait des modèles de Gordon et le modèle stochastique. Pour les obligations nous avons expliqué le modèle en faisant le lien avec la duration de Macauley. Ensuite les trois stratégies utilisées pour construire les portefeuilles ont été élaborées : la stratégie du Buy & Hold, la stratégie du rebalancement constant et la stratégie de la parité de risque. Il a été montré comment ces différents portefeuilles peuvent être construits en utilisant ces stratégies et leurs principales propriétés ont été décrites. Puis la dualité entre la parité de risque et la parité au rendement a été démontré. Il a été mentionné qu'il est impossible de trouver une formule explicite qui calcule les quotités pour la stratégie de la parité de risque. Par contre nous avons démontré que pour certains cas, il est possible de trouver une solution

explicite : notamment dans le cas où le portefeuille ne consiste que de deux actifs, cette formule a ensuite été utilisée dans l'analyse empirique.

Dans le chapitre final la performance des différents type de portefeuilles, c.-à-d. les portefeuilles des types Buy & Hold, rebalancement constant et parité de risque a été analysée sur la période de novembre 2005 à novembre 2016. Cette période a dû être divisée en deux périodes de hausse (novembre 2005 à juillet 2007 et août 2009 à novembre 2016) et une période de crise (août 2007 à juillet 2009).

Vu que dans la période avant la crise il y a eu une forte appréciation de l'euro vis-à-vis du dollar et du yen, on constate que pour les trois stratégies, le portefeuille international était moins performant que le portefeuille n'investissant que dans des titres européens. A cause du fait que l'investisseur qui suit la stratégie du Buy & Hold n'adapte pas son portefeuille pendant toute la période considérée, l'effet a été plus grand pour cette stratégie. La partie des titres exprimée en euro n'a cessé de croître dans toute la période, ce qui a fortement renforcé l'effet de l'appréciation de l'euro. Compte tenu des trois stratégies, cet effet de croissance était inférieur pour la stratégie de la parité de risque, dans laquelle l'investisseur investit fortement dans des obligations.

Pendant la période de crise les performances de presque tous les portefeuilles étaient tous négatives, à l'exception des portefeuilles qui étaient majoritairement investis dans les obligations : ces portefeuilles conservateurs ont relativement bien presté pendant cette période. Ceci explique également pourquoi les portefeuilles de parité de risque ont relativement bien résisté à la crise. De nouveau on peut remarquer que les portefeuilles suivant la stratégie du Buy & Hold, ont eu des performances supérieures à ceux qui ont été construits selon la stratégie du rebalancement constant, vu que la proportion des obligations – qui ont presté bien pendant la crise – n'a cessé d'augmenter.

Après la crise, la stratégie de parité de risque a performé moins bien que les stratégies du Buy & Hold et du rebalancement constant, ce qui est logique car les portefeuilles construits selon la méthode de parité de risque investissent majoritairement en obligations. Les portefeuilles Buy & Hold agressifs ont bien performé, ceci s'explique par le fait qu'ils sont investis majoritairement en actions et que – vu la bonne performance des marchés – la fraction d'actions dans ce type de portefeuille n'a cessé de croître.

Si l'on ne considère que les deux périodes de hausse boursière, on remarque que les performances des portefeuilles agressifs sont tous supérieurs aux rendements des portefeuilles conservateurs, ceci indique que l'augmentation du risque considéré amène une augmentation de rendement assez importante.

En ce qui concerne la stratégie du Buy & Hold il est important de faire la remarque suivante : cette stratégie semble bien performer dans toutes les périodes considérées, mais ceci est notamment dû aux périodes choisies : les trois périodes ne comprennent que des hausses et des baisses boursières continues. La stratégie du Buy & Hold performe bien lorsque les marchés montent ou baissent, mais elle performera moins bien si elle est retenue après l'événement où le marché commence à baisser après une hausse ou commence à monter après une crise. Cette stratégie est alors plus risquée que celles de rebalancement constant ou de parité de risque, il est important de bien « savoir » quand le marché tournera.

En ce qui concerne la diversification au niveau international, les portefeuilles diversifiés ont moins bien presté pendant la période avant la crise, ce qui s'explique par la forte appréciation de l'euro vis-à-vis du yen et du dollar. Pourtant dans la période de crise et dans la période de hausse boursière qui la suivit, on constate une meilleure performance des portefeuilles internationaux diversifiés, ce qui correspond bien à la théorie de Markowitz. En plus, en couvrant le risque de change, on montre que les portefeuilles diversifiés au niveau international ont eu été plus performants que le portefeuille national.

Pour conclure, je pense qu'il serait intéressant d'investiguer la diversification internationale sur une plus grande période, cependant il sera peut-être plus difficile d'obtenir les données nécessaires afin de faire cette analyse. Une autre approche plus intéressante serait d'inclure des titres des marchés émergents dans cette analyse, vu que dans mon analyse je ne tiens compte que de titres occidentaux. Les marchés occidentaux étant fort liés, cela signifie qu'ils évoluent de façon similaire, c.-à-d. qu'ils sortent des périodes de crise plus au moins en même temps. Mais si dans mon analyse, j'avais inclus des marchés émergents comme le Brésil, la Russie ou l'Afrique du Sud, alors les résultats auraient pu être différents puisque certains de ces marchés auraient été en période de crise tandis que d'autres marchés auraient été en croissance.

Bibliographie

Ascerbi, C. et Tasche, D., 2001, "Expected Shortfall: a natural coherent alternative to Value at Risk", Milano, München

Arrow, K. J., 1965, "Aspects of the Theory of Risk Bearing". The Theory of Risk Aversion. Helsinki: Yrjö Jahnssonin Saatio. Reprinted in: *Essays in the Theory of Risk Bearing*, Markham Publ. Co., Chicago, 1971, p. 90–109

Bacon, C.R., 2008, Practical Portfolio Performance: Measurement and Attribution, 2^{ième} édition, John Wiley & Sons Ltd, The Atrium, Chichester

Bloomberg.com, EURJPY Spot Exchange EURJPY:CUR,
<https://www.bloomberg.com/quote/EURJPY:CUR>, consulté le 28 novembre 2016

Bloomberg.com, Germany Generic Govt 10Y Yield GDBR10:IND,
<https://www.bloomberg.com/quote/GDBR10:IND>, consulté le 28 novembre 2016

Bloomberg.com, German Rates & Bonds, <https://www.bloomberg.com/markets/rates-bonds/government-bonds/germany>, consulté le 28 novembre 2016

Brun, J., Roussel, O. et Babiarz, G., 2014, "Risk parity : quelle approche en risque choisir ? ", Papier de recherche #1, Natixis Asset Management

Bodie, Z., Kane, A., Marcus, A.J., 2005, Investments, 6^{ième} édition, McGraw-Hill, New York

Bodson, L., Grandin, P., Hübner, G., Lambert, M., 2010, Performance de portefeuille, 2^{ième} édition, Pearson Education France

Bruder, B. et Roncalli, T., 2013, "Managing Risk Exposures using the Risk Parity Approach", Lyxor Research

Campbell, J.Y, Viceira, L.M., 2004, "Long-Horizon Mean-Variance Analysis: A User Guide", Harvard

ECB, Euro exchange rates JPY,
<http://www.ecb.europa.eu/stats/exchange/eurofxref/html/eurofxref-graph-jpy.en.html#>, consulté le 28 novembre 2016

Eun, C.S., Resnick, B.G., 1991, “International diversification of investment portfolios: U.S. & Japanese perspectives”, Discussion Paper n° 18, Bond University School of Business, Gold Coast

Eun, C.S., Resnick, B.G., 1994, “International diversification of investment portfolios: U.S. & Japanese perspectives”, *Management Science*, Vol. 40 (1), p. 140-161

Federal Reserve Bank of St. Louis, U.S. / Euro Foreign Exchange Rate (DEXUSEU), <https://fred.stlouisfed.org/series/DEXUSEU/downloaddata>, consulté le 28 novembre 2016

Investing.com, Germany 3-Month Bond Yield, <http://www.investing.com/rates-bonds/germany-3-month-bond-yield-historical-data>, consulté le 28 novembre 2016

Jensen, J. L. W. V., 1906, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre les valeurs moyennes, *Acta Mathematica*, Vol. 30 (1), p. 175-193

Markowitz, H., 1952, Portfolio Selection, *Journal of Finance*, Vol. 7, p. 77-91

Perchet, R., Lu, X., Leote de Carvalho, R., Heckel, T., 2015, “Insights into Robust Portfolio Optimization: Decomposing Robust Portfolios into Mean-Variance and Risk-Based Portfolios”, BNP Paribas Investment Partners, Paris

Perold, A. F. et Schulman, E. C., 1988, “The Free Lunch in Currency Hedging : Implications for Investment Policy and Performance Standards”, *Financial Analysts Journal* 44 (3), p. 45-50

Peterson Labarge, K., Thomas, C., Polanco, F., Schlanger, T., 2014, “Couvrir ou ne pas couvrir? Evaluation de l'exposition de change dans les portefeuilles d'actions internationales”, Vanguard

Qian, E., 2011, “Risk Parity and Diversification”, *The Journal of Investing*, Vol. 20 (1), p. 1-10

Roncalli, T., 2014, “Introduction to Risk Parity and Budgeting”, CRC Press, Taylor & Francis group, Boca Raton

Solnik, B., 1997, “Integrating Global Asset Allocation and Currency Management. Dans des comptes-rendus de l'AIMR”, *Managing Currency Risk* (November), p. 60-70

von Neumann, J. et Morgenstern, O., 1947, Theory of games and economic behavior, Princeton University Press, Princeton

Annexes

Annexe A : Dérivation des formules du premier chapitre

Relation explicite entre σ^2 et μ :

$$\sigma^2 = \vec{w}_P^T \Sigma \vec{w}_P = \frac{\vec{\mu}^T - \lambda \vec{1}^T}{2\kappa} \vec{w}_P = \frac{\mu - \lambda}{2\kappa}$$

$$\Leftrightarrow 2\kappa\sigma^2 = \mu - \lambda$$

$$\Leftrightarrow \mp \frac{\sigma^2 \sqrt{D}}{2(a\sigma^2 - 1)} = \mu - \frac{b}{a} \mp \frac{\sqrt{D}}{2a(a\sigma^2 - 1)}$$

$$\Leftrightarrow \mp \frac{(a\sigma^2 - 1)\sqrt{D}}{2a(a\sigma^2 - 1)} = \mu - \frac{b}{a}$$

$$\Leftrightarrow \frac{D}{4a^2} = \frac{1}{a^2} (a^2\mu^2 - 2ab\mu + b^2)$$

$$\Leftrightarrow (ac - b^2)(a\sigma^2 - 1) = a^2\mu^2 - 2ab\mu + b^2$$

$$\Leftrightarrow a\sigma^2(ac - b^2) = a^2\mu^2 - 2ab\mu + ac$$

$$\Leftrightarrow \sigma^2 = \frac{a\mu^2 - 2b\mu + c}{ac - b^2}$$

Maximisation de la pente de la Capital Allocation Line :

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\frac{b}{a} + \frac{d}{a}q - \mu_F}{\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{d}{a}q^2}} \right) &= \frac{d \left(\frac{1}{a} + \frac{d}{a}q^2 \right)^{\frac{1}{2}} - q \left(\frac{b}{a} + \frac{d}{a}q - \mu_F \right) \left(\frac{1}{a} + \frac{d}{a}q^2 \right)^{-\frac{1}{2}}}{\left(\frac{1}{a} + \frac{d}{a}q^2 \right)} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\frac{b}{a} + \frac{d}{a}q - \mu_F}{\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{d}{a}q^2}} \right) &= \frac{d \left(\frac{1}{a} + \frac{d}{a}q^2 \right) - q \left(\frac{b}{a} + \frac{d}{a}q - \mu_F \right)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{d}{a}q^2 \right)^{\frac{3}{2}}} \\ \Leftrightarrow \frac{\partial}{\partial q} \left(\frac{\frac{b}{a} + \frac{d}{a}q - \mu_F}{\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{d}{a}q^2}} \right) &= \frac{d}{a^2} \frac{1 - q(b - a\mu_F)}{\left(\frac{1}{a} + \frac{d}{a}q^2 \right)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

Annexe B : Dérivation des formules du deuxième chapitre

Equation de la courbe F_{LB} en fonction des actifs L et B μ :

Il faut que les tangentes aux deux points L et B coïncident avec les deux capital allocation lines :

$$F_{LB} \leftrightarrow \sigma_N^2 = a_1 \mu_N^2 + a_2 \mu_N + a_3$$

$$\frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{2\sigma_N}{2a_1\mu_N + a_2}$$

$$\begin{cases} \frac{2\sigma_L}{2a_1\mu_L + a_2} = \frac{\mu_L - \mu_F^L}{\sigma_L} \\ \frac{2\sigma_B}{2a_1\mu_B + a_2} = \frac{\mu_B - \mu_F^B}{\sigma_B} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2a_1\mu_L + a_2 = \frac{2\sigma_L^2}{\mu_L - \mu_F^L} \\ 2a_1\mu_B + a_2 = \frac{2\sigma_B^2}{\mu_B - \mu_F^B} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1(\mu_L - \mu_B) = \frac{\sigma_L^2}{\mu_L - \mu_F^L} - \frac{\sigma_B^2}{\mu_B - \mu_F^B} \\ a_2(\mu_B - \mu_L) = \frac{2\sigma_L^2\mu_B}{\mu_L - \mu_F^L} - \frac{2\sigma_B^2\mu_L}{\mu_B - \mu_F^B} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = \frac{1}{\mu_L - \mu_B} \left(\frac{\sigma_L^2}{\mu_L - \mu_F^L} - \frac{\sigma_B^2}{\mu_B - \mu_F^B} \right) \\ a_2 = \frac{2}{\mu_L - \mu_B} \left(\frac{\sigma_B^2\mu_L}{\mu_B - \mu_F^B} - \frac{\sigma_L^2\mu_B}{\mu_L - \mu_F^L} \right) \end{cases}$$

Afin de trouver le coefficient a_3 nous remplissons les actifs L et B dans l'équation de la parabole, nous entamons par exemple avec l'actif L :

$$\sigma_L^2 = a_1\mu_L^2 + a_2\mu_L + a_3$$

$$\Leftrightarrow a_3 = \sigma_L^2 - (a_1\mu_L^2 + a_2\mu_L)$$

$$\Leftrightarrow a_3 = \sigma_L^2 - \frac{1}{\mu_L - \mu_B} \left(\frac{\sigma_L^2\mu_L^2}{\mu_L - \mu_F^L} - \frac{\sigma_B^2\mu_L^2}{\mu_B - \mu_F^B} - \frac{2\sigma_B^2\mu_L^2}{\mu_B - \mu_F^B} - \frac{2\sigma_L^2\mu_L\mu_B}{\mu_L - \mu_F^L} \right)$$

$$\Leftrightarrow a_3 = \sigma_L^2 - \frac{1}{\mu_L - \mu_B} \left(\frac{\sigma_L^2(\mu_L - \mu_B)^2}{\mu_L - \mu_F^L} - \frac{\sigma_B^2\mu_L^2}{\mu_B - \mu_F^B} - \frac{\sigma_L^2\mu_B^2}{\mu_L - \mu_F^L} \right)$$

$$\Leftrightarrow a_3 = \sigma_L^2 - \frac{\sigma_L^2(\mu_L - \mu_B)}{\mu_L - \mu_F^L} + \frac{1}{\mu_L - \mu_B} \left(\frac{\sigma_B^2\mu_L^2}{\mu_B - \mu_F^B} + \frac{\sigma_L^2\mu_B^2}{\mu_L - \mu_F^L} \right)$$

$$\Leftrightarrow a_3 = \frac{\sigma_L^2(\mu_B - \mu_F^L)}{\mu_L - \mu_F^L} + \frac{1}{\mu_L - \mu_B} \left(\frac{\sigma_B^2\mu_L^2}{\mu_B - \mu_F^B} + \frac{\sigma_L^2\mu_B^2}{\mu_L - \mu_F^L} \right)$$

En permutant les actifs L et B nous voyons que cette expression est équivalente à l'expression suivante, laquelle nous aurions trouvé, si nous eussions considéré l'actif B au lieu de L :

$$a_3 = \frac{\sigma_B^2(\mu_L - \mu_F^B)}{\mu_B - \mu_F^B} + \frac{1}{\mu_B - \mu_L} \left(\frac{\sigma_L^2\mu_B^2}{\mu_L - \mu_F^L} + \frac{\sigma_B^2\mu_L^2}{\mu_B - \mu_F^B} \right)$$

Remarquons que l'on aurait également pu écrire :

$$a_3 = \frac{1}{2} \left(\frac{\sigma_B^2(\mu_L - \mu_F^B)}{\mu_B - \mu_F^B} + \frac{\sigma_L^2(\mu_B - \mu_F^L)}{\mu_L - \mu_F^L} \right)$$

Annexe C : Mesures de risque alternatives

Valeur-à-risque

Une première mesure de risque différente de la variance, est la valeur-à-risque (en anglais : *value at risk* (VaR)). La valeur-à-risque mesure la pire perte possible sur un certain horizon donné T . L'investisseur choisit alors la probabilité α que telle catastrophe survienne sur la période considérée. Ceci nous donne l'équation suivante (Bodson, L., Grandin, P., Hübner, G., Lambert, M., 2010) :

$$P(R - R_t \geq -VaR_\alpha) = 1 - \alpha$$

R : le rendement aléatoire

R_t : le *target return* de l'investisseur

Cette équation peut être réécrite de manière suivante :

$$P(R_t - R \leq VaR_\alpha) = 1 - \alpha$$

Alors la définition de la valeur-à-risque peut être explicitée :

$$VaR_\alpha = \inf\{r \in \mathbb{R} | P(R_t - R \leq r) \geq 1 - \alpha\}$$

En supposant que le rendement suive une distribution normale, nous trouvons :

$$R_T \sim N(\mu_T, \sigma_T^2)$$

$$P(R_T \geq R_{t,T} - VaR_\alpha) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(\frac{R_T - \mu_T}{\sigma_T} \geq \frac{R_{t,T} - \mu_T - VaR_\alpha}{\sigma_T}\right) = 1 - \alpha$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z \geq \frac{R_{t,T} - \mu_T - VaR_\alpha}{\sigma_T}\right) = 1 - \alpha \quad (Z \sim N(0,1))$$

$$\Leftrightarrow P\left(Z \leq \frac{R_{t,T} - \mu_T - VaR_\alpha}{\sigma_T}\right) = \alpha$$

$$\Leftrightarrow \frac{-VaR_\alpha + R_{t,T} - \mu_T}{\sigma_T} = z_\alpha \quad (z_\alpha = \inf\{z \in \mathbb{R} | P(Z \leq z) \geq \alpha\})$$

$$\Leftrightarrow VaR_\alpha = R_{t,T} - \mu_T - z_\alpha \sigma_T$$

$$\Leftrightarrow VaR_\alpha = R_{t,T} - \mu_T + z_{1-\alpha} \sigma_T$$

En annualisant ce résultat et en le combinant avec les résultats obtenus au point 2.5, nous obtenons :

$$VaR_\alpha = (R_t - \mu) + z_{1-\alpha} \sigma \sqrt{T}$$

Si l'on considère la valeur-à-risque sur une période d'une année ($T = 1$), alors on remarque que si l'investisseur investit dans un portefeuille P dont le rendement attendu correspond au target return :

$$VaR_\alpha(P) = z_{1-\alpha} \sigma_P$$

Alors dans le cas où les rendements suivent une distribution normale, la valeur-à-risque et l'écart type sont proportionnels :

$$VaR_\alpha(P) \propto \sigma_P$$

En utilisant la valeur-à-risque comme mesure de risque, nous obtiendrons donc les mêmes résultats que ceux obtenus dans la théorie de portefeuille de Markowitz, si nous supposons que les rendements suivent une distribution normale :

- Un investisseur conservateur investira alors dans des portefeuilles qui se trouvent à gauche du portefeuille de marché :

$$w_C \in [0, 1[$$

$$C = (1 - w_C)F + w_C M$$

$$\mu_C = (1 - w_C)\mu_F + w_C \mu_M$$

$$VaR_\alpha(C) = w_C z_{1-\alpha} \sigma_M$$

- Un investisseur agressif investira alors dans des portefeuilles qui se trouvent à droite du portefeuille de marché :

$$w_A \in]1, +\infty[$$

$$A = (1 - w_A)F + w_A M$$

$$\mu_A = (1 - w_A)\mu_F + w_A \mu_M$$

$$VaR_\alpha(A) = w_A z_{1-\alpha} \sigma_M$$

Un défaut important de la valeur-à-risque est qu'elle n'est pas sub-additive. Une fonction f est dite être sub-additive si :

$$\forall A, B: \forall w \in [0,1]: f(wA + (1-w)B) \leq wf(A) + (1-w)f(B)$$

Il semble logique qu'une fonction mesurant le risque soit sub-additive : à cause de l'impact de la diversification, il faudrait que le risque lié à la combinaison de deux portefeuilles fût inférieur au risque moyen des portefeuilles. Prenons comme exemple l'écart type utilisé dans la théorie de Markowitz :

$$\sigma_{wA+(1-w)B} = \sqrt{w^2\sigma_A^2 + 2w(1-w)\rho_{AB}\sigma_A\sigma_B + (1-w)^2\sigma_B^2}$$

Vu que :

$$-1 \leq \rho_{AB} \leq 1$$

L'on sait que :

$$\sqrt{w^2\sigma_A^2 - 2w(1-w)\sigma_A\sigma_B + (1-w)^2\sigma_B^2} \leq \sigma_{wA+(1-w)B}$$

et

$$\sigma_{wA+(1-w)B} \leq \sqrt{w^2\sigma_A^2 + 2w(1-w)\sigma_A\sigma_B + (1-w)^2\sigma_B^2}$$

Ce qui nous apprend également :

$$\sqrt{(w\sigma_A - (1-w)\sigma_B)^2} \leq \sigma_{wA+(1-w)B} \leq \sqrt{(w\sigma_A + (1-w)\sigma_B)^2}$$

$$\Leftrightarrow |w\sigma_A - (1-w)\sigma_B| \leq \sigma_{wA+(1-w)B} \leq w\sigma_A + (1-w)\sigma_B$$

L'écart type est donc bien sub-additif.

Le fait que la valeur-à-risque n'est pas sub-additive peut être démontré de façon suivante : supposons qu'il y ait deux obligations, mutuellement indépendantes, B_1 et B_2 , chacune avec une probabilité de défaut de 3,00% (l'on suppose que lors du défaut l'obligation vaille € 0,00). Il est donc clair que :

$$VaR_{5\%}(B_1) = VaR_{5\%}(B_2) = 0,00\%$$

Si maintenant nous créons un portefeuille consistant en achetant les deux obligations, nous observons :

$$P(B_1 = 0 \vee B_2 = 0) = 0,03 \times 0,97 \times 2 + 0,03 \times 0,03 = 5,91\% > 5,00\%$$

$$VaR_{5\%}(50\%B_1 + 50\%B_2) = 50\% \times 100\% + 50\% \times 0\% = 50\%$$

Alors il peut être constaté :

$$VaR_{5\%}(50\%B_1 + 50\%B_2) > 50\%VaR_{5\%}(50\%B_1) + 50\%VaR_{5\%}(50\%B_2)$$

Valeur-à-risque conditionnelle

Une autre approche consiste en calculant l'espérance de la perte courue à condition que l'événement catastrophique ait été survenu. Cette mesure s'appelle la valeur-à-risque conditionnelle (en anglais : *conditional value at risk* ou *expected shortfall*) (Ascerbi, C. et Tasche, D., 2001 ; Bacon, C.R., 2008 ; Bodson, L., Grandin, P., Hübner, G., Lambert, M., 2010) :

$$CVaR_{\alpha} = E(R_t - R | R_t - R > VaR_{\alpha})$$

Un avantage de la valeur-à-risque conditionnelle vis-à-vis de la valeur-à-risque est qu'elle tient compte de la forme de la queue gauche de la distribution, c.-à-d. qu'elle nous apprend à quelle perte il faut s'attendre en cas d'un événement catastrophique. Suite à la définition, remarquons déjà :

$$\frac{dCVaR_\alpha}{d\alpha} \leq 0$$

$$CVaR_\alpha \geq VaR_\alpha$$

$$CVaR_{100\%} = R_t - \mu$$

Nous pouvons également calculer la valeur-à-risque conditionnelle de façon différente. En reprenant la définition :

$$CVaR_\alpha = E(R_t - R | R_t - R > VaR_\alpha)$$

$$\Leftrightarrow CVaR_\alpha = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{R_t - R | R_t - R > VaR_\alpha}(x) dx$$

$$\Leftrightarrow CVaR_\alpha = \frac{\int_{-\infty}^{R_t - r_\alpha} x f_{R_t - R}(x) dx}{P(R_t - R > VaR_\alpha)} \quad (r_\alpha = \inf\{r \in \mathbb{R} | P(R \leq r) \geq \alpha\})$$

$$\Leftrightarrow CVaR_\alpha = -\frac{1}{\alpha} \int_{-\infty}^{r_\alpha - R_t} x f_{R - R_t}(x) dx$$

Ce qui nous permet d'écrire :

$$CVaR_\alpha = -\frac{1}{\alpha} E[(R - R_t) 1_{\{r \in \mathbb{R} | r < r_\alpha\}}]$$

Deuxièmement, la substitution suivante est introduite :

$$x = VaR_\gamma(R)$$

$$-\infty = VaR_0(R)$$

$$R_t - r_\alpha = VaR_\alpha(R)$$

Ce qui nous donne :

$$CVaR_\alpha = \frac{1}{\alpha} \int_0^\gamma VaR_\gamma(R) d\gamma$$

L'avantage de la valeur-à-risque conditionnelle est qu'elle est au contraire de la valeur-à-risque elle-même, une mesure de risque cohérente : il n'y a plus de problème de sub-additivité : le risque lié à la combinaison de deux portefeuilles est alors inférieur ou égal à la somme des deux risques.

Moments centraux de degré supérieure à deux

Reprenons la définition complète de la fonction d'utilité de Markowitz :

$$E[v(W_P)] = \mu_P - \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{(-1)^k A_k \mu'_{P,k}}{k!} \right)$$

Dans la théorie de Markowitz il n'a été tenu compte que du premier moment (l'espérance) et du deuxième moment central (la variance). Désormais il est également possible de prendre en compte les moments centraux suivants. Si l'on tient également compte du troisième moment central (*coefficient de dissymétrie* ou *skewness*) et du quatrième moment central (*kurtosis*) on trouve :

$$E[v(W_P)] = \mu_P - \frac{A_2 \sigma_P^2}{2} + \frac{A_3 \mu'_{P,3}}{6} + \frac{A_4 \mu'_{P,4}}{24}$$

La théorie de portefeuille de Markowitz suppose que les rendements soient distribués de manière normale. Alors on peut conclure :

$$R_P \sim N(\mu_P, \sigma_P^2) \Rightarrow \mu'_{P,3} = 0 \wedge \mu'_{P,4} = 3$$

Ceci veut dire que l'utilisation des moments centraux aux degrés supérieures à deux ne nous apprendra rien dans le contexte de la théorie de portefeuille de Markowitz. Pourtant ces mesures nous prouveront utiles lorsque la distribution des rendements ne suit pas de distribution normale.

Le troisième moment nous apprend quelque chose sur l'asymétrie de la distribution : en analysant la formule du troisième moment, l'on remarque que celle-ci attribue plus de poids aux valeurs extrêmes. L'on observe alors :

- Si le troisième moment est négative, la distribution est décalée à la droite de la médiane, il y a donc une queue étalé à gauche
- Si le troisième moment est positive, la distribution est décalée à la gauche de la médiane, il y a donc une queue étalé à droite

Une standardisation de ce coefficient fut développée par Pearson. Celle-ci est alors appelée la *skewness de Pearson* :

$$Sk = \frac{\mu'_{P,3}}{\sigma_P^3}$$

Le quatrième moment centrale, souvent appelée *kurtosis* ou *coefficient d'aplatissement*, mesure l'aplatissement ou la pointicité d'une distribution. Comme pour le coefficient de dissymétrie, il existe une variante standardisée, inventé par Pearson, que l'on appelle le *kurtosis de Pearson* :

$$Ku = \frac{\mu'_{P,4}}{\sigma_P^4} - 3$$

Trois types de distribution peuvent être distingués :

- Les distributions ayant des kurtosis négatifs sont appelées *platikurtiques*. Ce sont des distributions ayant des queues moins épaisses dont les valeurs plus fréquentes sont centralisées autour du centre.
- Les distributions ayant un kurtosis valant zéro sont appelées *mésokurtiques*. Ce sont des distributions ayant des queues semblables à celles d'une distribution normales.
- Les distributions ayant des kurtosis positifs sont appelées *leptokurtiques*. Ce sont des distributions ayant des queues épaisses dont les valeurs extrêmes sont plus fréquentes que prévu par la loi de la distribution normale.

Remarquons également que sur l'horizon T :

$$Sk_T \approx \frac{\mu'_{P,3} T^3}{\sigma_P^3 T^3} \Rightarrow Sk_T \approx Sk$$

$$Ku_T \approx \frac{\mu'_{P,4} T^4}{\sigma_P^4 T^4} - 3 \Rightarrow Ku_T \approx Ku$$

Valeur-à-risque modifiée

Nous venons de constater que lorsque le rendement suit une loi de distribution normale, la valeur-à-risque courue sur une période d'une année peut être décrite de façon suivante (Bacon, C.R., 2008) :

$$VaR_\alpha = (R_t - \mu) + z_{1-\alpha} \sigma$$

Corner et Fisher ont développé une approximation qui permet également de tenir compte des coefficients d'asymétrie et d'aplatissement, la formule prenant la forme suivante :

$$MVaR_\alpha = (R_t - \mu) + \left(z_{1-\alpha} - \frac{z_{1-\alpha}^2 - 1}{6} Sk + \frac{z_{1-\alpha}^3 - 3z_{1-\alpha}}{24} Ku - \frac{2z_{1-\alpha}^2 - 5z_{1-\alpha}}{36} Sk^2 \right) \sigma$$

En appliquant cette formule sur un horizon T , ceci devient :

$$MVaR_\alpha \approx (R_t - \mu) + \left(z_{1-\alpha} - \frac{z_{1-\alpha}^2 - 1}{6} Sk + \frac{z_{1-\alpha}^3 - 3z_{1-\alpha}}{24} Ku - \frac{2z_{1-\alpha}^2 - 5z_{1-\alpha}}{36} Sk^2 \right) \sigma \sqrt{T}$$

Remarquons que lorsque le rendement suit la loi de la distribution normale :

$$Sk = 0$$

$$Ku = 0$$

$$MVaR_\alpha = VaR_\alpha = (R_t - \mu) + z_{1-\alpha} \sigma$$

Moments partiels inférieurs

Une autre mesure de risque qui peut directement répondre aux désavantages de la variance, sont les moments partiels inférieures. Là où la variance prend en compte tant les déviations du côté négatif que du côté positif, les moments partiels inférieurs ne prennent en compte que les déviations négatives. Le k-ième moment partiel inférieur est défini de manier suivant¹ :

$$MPI_k = E[(R - R_t)_-^k]$$

Alors nous pouvons écrire pour une variable continue :

$$MPI_k = \int_{-\infty}^{R_t} (R_t - x)^k dF_R(x)$$

Cette mesure a comme avantage que les déviations qui amèneront des rendements supérieurs au *target return* ne seront pas prises en compte.

¹ On définit $(x)_- = \begin{cases} -x & \text{si } x < 0 \\ 0 & \text{si } x \geq 0 \end{cases}$

Annexe D : Modèle stochastique qui simule des obligations

Le rendement d'une obligation peut-être modélisé en utilisant le modèle de Vašíček. Ce modèle fut développé par Oldřich Vašíček en 1977 et modélise le rendement en utilisant un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (W_t représente le mouvement brownien) (Roncalli, 2014) :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dW_t$$

Cette équation différentielle stochastique peut être résolue de manière suivante : prenons le différentiel de la fonction suivante :

$$f(r_t, t) = r_t e^{at}$$

$$df(r_t, t) = e^{at} dr_t + ar_t e^{at} dt$$

Alors nous obtenons :

$$df(r_t, t) = abe^{at} dt + \sigma e^{at} dW_t$$

Nous obtenons ensuite :

$$\int_0^t (e^{as} dr_s + ar_s e^{as} ds) = \int_0^t (abe^{as} ds + \sigma e^{as} dW_s)$$

$$\Rightarrow r_t e^{at} = r_0 + \int_0^t abe^{as} ds + \int_0^t \sigma e^{as} dW_s$$

Ce qui nous donne comme solution :

$$r_t = r_0 e^{-at} + b(1 - e^{-at}) + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s$$

Nous obtenons alors pour des obligations ayant une duration constante :

$$E[r_D] = r_0 e^{-aD} + b(1 - e^{-aD})$$

$$Var[r_D] = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2aD})$$

Notons également les cas limites :

$$E[r_\infty] = b$$

$$Var[r_\infty] = \frac{\sigma^2}{2a}$$

Le rendement de l'obligation peut alors être décrit par la formule suivante, dans laquelle π_B correspond à la prime de risque liée à l'obligation (Roncalli, 2014, p. 327) :

$$\mu_B = r_D + \pi_B$$

Nous pouvons également développer un modèle simple pour l'actif sans risque à partir du modèle des actifs risqués:

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu_A dt + \sigma_A dB_t \quad (B_t \sim N(0, t))$$

$$P_t = P_0 e^{\left(\mu_A - \frac{\sigma_A^2}{2}\right)t + \sigma_A B_t}$$

Pour un actif F qui ne porte pas de risque, nous trouvons alors :

$$\sigma_F^2 = 0$$

$$\frac{dP_t}{P_t} = \mu_A dt$$

$$P_t = P_0 e^{\mu_A t}$$

Annexe E : Parité de risque : dérivations des formules

Cohérence des mesures de risque

L'on dit qu'une mesure de risque $\mathcal{R}$ est cohérente lorsqu'elle remplit les conditions suivantes (Roncalli, 2013 ; Ascerbi, C. et Tasche, D., 2001) :

- La mesure de risque $\mathcal{R}$ est sub-additive :

$$\forall P_1, P_2: \mathcal{R}(P_1 + P_2) \leq \mathcal{R}(P_1) + \mathcal{R}(P_2)$$

- La mesure de risque $\mathcal{R}$ est homogène :

$$\forall P: \forall \lambda \in \mathbb{R}^+: \mathcal{R}(\lambda P) = \lambda \mathcal{R}(P)$$

- La mesure de risque $\mathcal{R}$ est monotone décroissante :

$$\forall P_1, P_2: P_1 < P_2 \implies \mathcal{R}(P_1) \geq \mathcal{R}(P_2)$$

- La mesure de risque est invariante aux translations :

$$\forall P: \forall m \in \mathbb{R}: \mathcal{R}(P + m) = \mathcal{R}(P) - m$$

En reprenant maintenant les mesures de risques définies dans l'annexe C, nous remarquons le suivant :

- L'écart type satisfait les trois premières conditions. Pourtant elle ne satisfait pas la condition de l'invariance aux translations :

$$\sigma_{P+m} = \sigma_P$$

- On peut trouver une autre mesure de risque basée sur l'écart type qui elle-même est une mesure de risque cohérente :

$$SD_c(P) = c\sigma_P - \mu_P$$

- La valeur-à-risque n'est pas une mesure de risque cohérente, vu qu'elle ne remplit pas la condition de sub-additivité. Cependant si nous considérons que les rendements sont distribués de manière normale, nous trouvons (voir annexe C) :

$$VaR_\alpha(P) = z_\alpha \sigma_P - \mu_P$$

Ceci nous apprend que dans le cas d'une distribution normale des rendements la valeur-à-risque est quand même une mesure de risque cohérente.

- La valeur-à-risque conditionnelle est une mesure de risque cohérent. En outre, en supposant que les rendements soient distribués de manière normale, nous trouvons :

$$CVaR_\alpha = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR_\gamma(R) d\gamma = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha (z_\gamma \sigma_P - \mu_P) d\gamma$$

$$\Leftrightarrow CVaR_\alpha = -\mu_P + \frac{\sigma_P}{\alpha} \int_0^\alpha z_\gamma d\gamma$$

Si nous considérons maintenant¹ :

$$z_\gamma = \Phi^{-1}(\gamma)$$

$$d\gamma = d\left(\Phi(\Phi^{-1}(\gamma))\right) = \phi(\Phi^{-1}(\gamma)) d\Phi^{-1}(\gamma)$$

Ceci nous apprend :

$$CVaR_\alpha = -\mu_P + \frac{\sigma_P}{\alpha} \int_{\gamma=0}^{\gamma=\alpha} \Phi^{-1}(\gamma) \phi(\Phi^{-1}(\gamma)) d\Phi^{-1}(\gamma)$$

$$\Leftrightarrow CVaR_\alpha = -\mu_P + \frac{\sigma_P}{\alpha} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(\alpha)} t \phi(t) dt \quad (t = \Phi^{-1}(\gamma))$$

$$\Leftrightarrow CVaR_\alpha = -\mu_P + \frac{\sigma_P}{\alpha \sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(\alpha)} t e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (t = \Phi^{-1}(\gamma))$$

$$\Leftrightarrow CVaR_\alpha = -\mu_P + \frac{\sigma_P}{\alpha \sqrt{2\pi}} \left[-e^{-\frac{t^2}{2}} \right]_{-\infty}^{\Phi^{-1}(\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow CVaR_\alpha = -\mu_P - \frac{\sigma_P}{\alpha \sqrt{2\pi}} \phi(\Phi^{-1}(\alpha))$$

Cette formule peut être réécrite de manière suivante :

$$CVaR_\alpha = -\mu_P + \frac{\sigma_P}{\alpha \sqrt{2\pi}} \phi(\Phi^{-1}(1 - \alpha))$$

Alors nous observons que dans le cas d'une distribution normale, ces trois mesures de risque sont liées : la valeur-à-risque et la valeur-à-risque conditionnel seront des cas spécifiques de la mesure de risque basée sur l'écart type.

¹ $\phi(t) = \frac{e^{-\frac{t^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}}, \quad \Phi(t) = \int_{-\infty}^t \phi(x) dx$

Calcul explicite des quotités : aucune corrélation entre les actifs

Supposons que l'on ait n actifs qui ne sont pas corrélés, ce qui nous donne comme système d'équations (Bruder, B. et Roncalli, T., 2013) :

$$\overrightarrow{\mathcal{RC}} = \left(\frac{w_i(\Sigma \vec{w})_i}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sigma} (\sigma_i^2 w_i^2)$$

Alors on sait que pour chaque actif :

$$b_i \sigma^2 = \sigma_i^2 w_i^2$$

On trouve alors pour deux actifs i, j :

$$\sigma^2 = \frac{\sigma_i^2 w_i^2}{b_i} = \frac{\sigma_j^2 w_j^2}{b_j}$$

En ajoutant la contrainte suivante :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: 0 < w_i \leq 1 \wedge 0 < b_i \leq 1$$

On sait également :

$$\sigma_i \sigma_j^{-1} w_i \sqrt{b_j} = w_j \sqrt{b_i}$$

En sommant sur tous les actifs j :

$$\sigma_i w_i \sum_{j=1}^n \sigma_j^{-1} \sqrt{b_j} = \sqrt{b_i} \sum_{j=1}^n w_j$$

Ceci nous donne comme solution :

$$w_i = \frac{\sigma_i^{-1} \sqrt{b_i}}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^{-1} \sqrt{b_j}}$$

Si nous prenons le cas de la parité de risque :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: b_i = \frac{1}{n}$$

Nous trouvons comme solution :

$$w_i = \frac{\sigma_i^{-1}}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^{-1}}$$

Calcul explicite des quotités : corrélation parfaite entre les actifs

Supposons maintenant que la corrélation entre les actifs soit parfaite, nous trouvons (Bruder, B. et Roncalli, T., 2013) :

$$\overrightarrow{\mathcal{RC}} = \left(\frac{w_i (\Sigma \overrightarrow{w})_i}{\sigma} \right) = \frac{1}{\sigma} \left(w_i \sigma_i \sum_{j=1}^n w_j \sigma_j \right)$$

Alors on sait que pour chaque actif :

$$b_i \sigma^2 = w_i \sigma_i \sum_{j=1}^n w_j \sigma_j$$

Nous trouvons alors pour deux actifs i, j :

$$\sigma^2 = \frac{w_i \sigma_i}{b_i} \sum_{k=1}^n w_k \sigma_k = \frac{w_j \sigma_j}{b_j} \sum_{k=1}^n w_k \sigma_k$$

Ce qui peut être simplifié :

$$b_j w_i \sigma_i = b_i w_j \sigma_j$$

Cette équation peut être réécrite de façon suivante :

$$b_j \frac{w_i}{\sigma_j} = b_i \frac{w_j}{\sigma_i}$$

En sommant sur tous les actifs j :

$$w_i \sum_{j=1}^n b_j \sigma_j^{-1} = \frac{b_i}{\sigma_i} \sum_{j=1}^n w_j$$

Ceci nous donne comme solution :

$$w_i = \frac{b_i \sigma_i^{-1}}{\sum_{j=1}^n b_j \sigma_j^{-1}}$$

Si nous prenons le cas de la parité de risque :

$$\forall i \in \{1, \dots, n\}: b_i = \frac{1}{n}$$

Nous trouvons comme solution :

$$w_i = \frac{\sigma_i^{-1}}{\sum_{j=1}^n \sigma_j^{-1}}$$

Remarquons que cette solution est identique à celle trouvée dans le cas où la corrélation était zéro.

Annexe F : Simulations : formules et exemples

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
		10/2005-7/2007		8/2007-7/2009		8/2009-11/2016			
75%-25%	Obligations	Actions	Obligations	Actions	Obligations	Actions			75%-25%
USD	$\text{RendementsIQ16}^* = -1-B3$	$\text{RendementsIQ16}^* = -1-B3$	$\text{RendementsIX16}^* = -1-D3$	$\text{RendementsIX16}^* = -1-D3$	$\text{Rendemen} = -1-F3$				USD
EUR	$\text{RendementsIR16}^* = -1-B4$	$\text{RendementsIR16}^* = -1-B4$	$\text{RendementsIY16}^* = -1-D4$	$\text{RendementsIY16}^* = -1-D4$	$\text{Rendemen} = -1-F4$				EUR
JPY	$\text{RendementsIS16}^* = -1-B5$	$\text{RendementsIS16}^* = -1-B5$	$\text{RendementsIZ16}^* = -1-D5$	$\text{RendementsIZ16}^* = -1-D5$	$\text{Rendemen} = -1-F5$				JPY
50%-50%	Obligations	Actions	Obligations	Actions	Obligations	Actions			50%-50%
USD	$\text{RendementsIQ16}^* = -1-B8$	$\text{RendementsIQ16}^* = -1-B8$	$\text{RendementsIX16}^* = -1-D8$	$\text{RendementsIX16}^* = -1-D8$	$\text{Rendemen} = -1-F8$				USD
EUR	$\text{RendementsIR16}^* = -1-B9$	$\text{RendementsIR16}^* = -1-B9$	$\text{RendementsIY16}^* = -1-D9$	$\text{RendementsIY16}^* = -1-D9$	$\text{Rendemen} = -1-F9$				EUR
JPY	$\text{RendementsIS16}^* = -1-B10$	$\text{RendementsIS16}^* = -1-B10$	$\text{RendementsIZ16}^* = -1-D10$	$\text{RendementsIZ16}^* = -1-D10$	$\text{Rendemen} = -1-F10$				JPY
1									
25%-75%	Obligations	Actions	Obligations	Actions	Obligations	Actions			25%-75%
USD	$\text{RendementsIQ16}^* = -1-B13$	$\text{RendementsIQ16}^* = -1-B13$	$\text{RendementsIX16}^* = -1-D13$	$\text{RendementsIX16}^* = -1-D13$	$\text{Rendemen} = -1-F13$				USD
EUR	$\text{RendementsIR16}^* = -1-B14$	$\text{RendementsIR16}^* = -1-B14$	$\text{RendementsIY16}^* = -1-D14$	$\text{RendementsIY16}^* = -1-D14$	$\text{Rendemen} = -1-F14$				EUR
JPY	$\text{RendementsIS16}^* = -1-B15$	$\text{RendementsIS16}^* = -1-B15$	$\text{RendementsIZ16}^* = -1-D15$	$\text{RendementsIZ16}^* = -1-D15$	$\text{Rendemen} = -1-F15$				JPY
5									
7			Quotées					Contributions au risque (%)	
75%-25%	10/2005-7/2007	8/2007-7/2009	8/2009-11/2016		75%-25%	10/2005-7/2007	8/2007-7/2009	8/2009-11/2016	
USD	0,26760455660894	0,212991580013781	0,250562237174001		USD	$\text{Rendement} = -1-B19$	$\text{Rendement} = -1-C19$	$\text{Rendement} = -1-D19$	
EUR	0,326530216543998	0,29792950727723	0,241699401462712		EUR	$\text{Rendement} = -1-B20$	$\text{Rendement} = -1-C20$	$\text{Rendement} = -1-D20$	
JPY	$\text{Rendement} = -1-B20$	$\text{Rendement} = -1-C20$	$\text{Rendement} = -1-D20$		JPY	$\text{Rendement} = -1-B21$	$\text{Rendement} = -1-C21$	$\text{Rendement} = -1-D21$	
2									
50%-50%	10/2005-7/2007	8/2007-7/2009	8/2009-11/2016		50%-50%	10/2005-7/2007	8/2007-7/2009	8/2009-11/2016	
USD	0,28043492735444	0,276569187162807	0,333235592715748		USD	$\text{Rendement} = -1-B24$	$\text{Rendement} = -1-C24$	$\text{Rendement} = -1-D24$	
EUR	0,334476766647786	0,377074346449857	0,296099845843715		EUR	$\text{Rendement} = -1-B25$	$\text{Rendement} = -1-C25$	$\text{Rendement} = -1-D25$	
JPY	$\text{Rendement} = -1-B25$	$\text{Rendement} = -1-C25$	$\text{Rendement} = -1-D25$		JPY	$\text{Rendement} = -1-B26$	$\text{Rendement} = -1-C26$	$\text{Rendement} = -1-D26$	
7									
25%-75%	10/2005-7/2007	8/2007-7/2009	8/2009-11/2016		25%-75%	10/2005-7/2007	8/2007-7/2009	8/2009-11/2016	
USD	0,3267383176993	0,291276233121499	0,36072437642909		USD	$\text{Rendement} = -1-B29$	$\text{Rendement} = -1-C29$	$\text{Rendement} = -1-D29$	
EUR	0,314243366143299	0,393499415322628	0,30999849391415		EUR	$\text{Rendement} = -1-B30$	$\text{Rendement} = -1-C30$	$\text{Rendement} = -1-D30$	

Correlations Rendement-Devises Calcul partiel de risque Portefeuilles partiel de risque Portefeuilles Buy & Hold Portefeuilles rebalancement Calcul partiel de r ... (+) (-) (x) (y) (z) (w) (v) (u) (t) (s) (r) (q) (p) (o) (n) (m) (l) (k) (j) (i) (h) (g) (f) (e) (d) (c) (b) (a)

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P	Q
	10/2005-7/2007		8/2007-7/2009		8/2009-11/2016				10/2005-7/2007	8/2007-7/2009	8/2009-11/2016			10/2005-7/2007	8/2007-7/2009	8/2009-11/2016
75%- Obligations	Actions		Obligations	Actions	Obligations	Actions		75%- 25%		Ecart type			75%- 25%		Covariance USD	
USD	77%	23%	79%	21%	74%	26%		USD	4,47%	8,34%	5,08%		USD	0,20%	0,70%	0,26%
EUR	82%	18%	83%	17%	81%	19%		EUR	3,73%	6,05%	5,18%		EUR	0,12%	0,34%	0,17%
JPY	86%	14%	91%	9%	91%	9%		JPY	3,25%	3,90%	2,73%		JPY	0,07%	0,17%	0,05%
50%- Obligations	Actions		Obligations	Actions	Obligations	Actions		50%- 50%		Ecart type			50%- 50%		Covariance USD	
USD	66%	34%	73%	27%	68%	32%		USD	4,67%	8,70%	5,21%		USD	0,22%	0,76%	0,27%
EUR	76%	24%	79%	21%	75%	25%		EUR	3,97%	6,35%	5,46%		EUR	0,14%	0,38%	0,18%
JPY	79%	21%	75%	25%	73%	27%		JPY	3,83%	7,47%	5,12%		JPY	0,08%	0,32%	0,06%
25%- Obligations	Actions		Obligations	Actions	Obligations	Actions		25%- 75%		Ecart type			25%- 75%		Covariance USD	
USD	53%	47%	67%	33%	61%	39%		USD	5,27%	9,64%	5,65%		USD	0,28%	0,93%	0,32%
EUR	68%	32%	74%	26%	68%	32%		EUR	4,54%	7,07%	6,14%		EUR	0,18%	0,49%	0,22%
JPY	74%	26%	69%	31%	65%	35%		JPY	4,50%	9,41%	6,64%		JPY	0,11%	0,50%	0,11%
		Quotités						Contributions au risque (%)								
75%- 10/2005-7/2007	8/2007-7/2009	8/2009-11/2016			75%- 25%	10/2005-7/2007	8/2007-7/2009	8/2009-11/2016								
USD	27%	21%	25%		USD	33%	33%	33%								
EUR	33%	30%	24%		EUR	33%	33%	33%								
JPY	41%	49%	51%		JPY	33%	33%	33%								
50%- 10/2005-7/2007	8/2007-7/2009	8/2009-11/2016			50%- 50%	10/2005-7/2007	8/2007-7/2009	8/2009-11/2016								
USD	28%	28%	33%		USD	33%	33%	33%								
EUR	33%	38%	30%		EUR	33%	33%	33%								
JPY	39%	35%	37%		JPY	33%	33%	33%								
25%- 10/2005-7/2007	8/2007-7/2009	8/2009-11/2016			25%- 75%	10/2005-7/2007	8/2007-7/2009	8/2009-11/2016								
USD	33%	29%	36%		USD	33%	33%	33%								
EUR	31%	39%	31%		EUR	33%	33%	33%								

Caractéristiques Rendement-Risque

Risque de crédit

Risque de crédit

Risque de crédit

Risque de crédit

Risque de crédit

Risque de crédit

[illegible]

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N	O	P
1	24/10/2005	USD 75%-25%	EUR 75%-25%	JPY 75%-25%	USD 50%-50%	EUR 50%-50%	JPY 50%-50%	USD 25%-75%	EUR 25%-75%	JPY 25%-75%	INT 75%-25%	INT 50%-50%	INT 25%-75%			USD 75%-25% EUR
1	31/10/2005	0,55%	0,21%	0,24%	-0,58%	0,09%	0,04%	0,62%	-0,06%	-0,11%	0,31%	0,21%	0,15%		Variance	0,20%
1	7/11/2005	-0,44%	-0,92%	0,20%	-0,29%	-0,80%	0,50%	-0,11%	-0,66%	0,71%	-0,34%	-0,16%	0,01%		Ecart type	4,47%
1	14/11/2005	-0,06%	-0,44%	-0,12%	0,13%	-0,29%	0,17%	0,35%	-0,12%	0,37%	0,21%	0,00%	0,21%		Rendement arithmétique	5,37%
1	21/11/2005	0,38%	0,07%	0,93%	0,46%	0,18%	0,88%	0,54%	0,31%	0,85%	0,50%	0,53%	0,58%		Rendement géométrique	5,37%
1	28/11/2005	1,34%	0,58%	0,88%	1,39%	0,60%	1,14%	1,45%	0,64%	1,32%	0,90%	1,03%	1,15%			
1	5/12/2005	0,45%	0,51%	0,47%	0,41%	0,47%	0,60%	0,37%	0,43%	0,70%	0,48%	0,51%	0,51%		μ	4,78%
1	12/12/2005	-0,85%	0,38%	-0,33%	-0,68%	0,49%	0,00%	-0,48%	0,62%	0,25%	-0,24%	-0,03%	0,12%		Sharpe Ratio	13%
1	19/12/2005	0,17%	0,12%	-0,05%	0,12%	0,16%	0,06%	0,08%	0,21%	0,13%	0,07%	0,11%	0,14%		β	3,22%
1	26/12/2005	0,71%	0,68%	0,20%	0,61%	0,66%	0,00%	0,48%	0,62%	-0,14%	0,49%	0,39%	0,30%		Treynor's Ratio	18,38%
1	2/01/2006	0,39%	0,22%	0,79%	0,45%	0,26%	1,10%	0,52%	0,30%	1,33%	0,50%	0,64%	0,74%		Jensen's Alpha	0,58%
2	9/01/2006	0,39%	0,16%	0,47%	0,45%	0,20%	0,46%	0,51%	0,24%	0,45%	0,35%	0,37%	0,41%		Modigliani-Modigliani	5,21%
3	16/01/2006	0,40%	0,97%	0,31%	0,46%	0,20%	0,31%	0,52%	1,21%	0,31%	0,55%	0,61%	0,66%			
4	23/01/2006	-0,10%	-0,09%	-0,04%	-0,23%	-0,10%	-0,01%	-0,38%	-0,10%	0,01%	-0,07%	-0,10%	-0,15%			
5	30/01/2006	-0,19%	-1,04%	-0,59%	-0,31%	-1,11%	-1,00%	-0,44%	-1,19%	-1,30%	-0,63%	-0,84%	-0,98%			
6	6/02/2006	-0,58%	0,05%	0,14%	-0,26%	0,30%	0,76%	0,11%	0,62%	1,21%	-0,09%	0,32%	0,66%			
7	13/02/2006	-0,41%	-0,03%	0,19%	-0,57%	-0,02%	0,27%	-0,76%	-0,02%	0,33%	-0,04%	-0,06%	-0,14%			
8	20/02/2006	-0,18%	0,16%	-0,64%	-0,18%	0,22%	-1,02%	-0,17%	0,28%	-1,29%	-0,25%	-0,37%	-0,43%			
9	27/02/2006	0,59%	0,60%	-0,13%	0,68%	0,63%	-0,34%	0,79%	0,66%	-0,50%	0,30%	0,27%	0,29%			
0	6/03/2006	0,03%	-0,28%	0,06%	0,19%	-0,11%	0,46%	0,39%	0,08%	0,75%	-0,06%	0,19%	0,42%			
1	13/03/2006	-1,19%	-0,52%	-0,50%	-1,19%	-0,57%	-0,61%	-1,20%	-0,64%	-0,68%	-0,69%	-0,76%	-0,84%			
2	20/03/2006	0,08%	-0,61%	-0,01%	0,13%	-0,47%	0,23%	0,19%	-0,31%	0,40%	-0,18%	-0,03%	0,11%			
3	27/03/2006	1,11%	0,56%	-0,06%	1,18%	0,60%	0,07%	1,27%	0,64%	0,17%	0,45%	0,56%	0,68%			
4	3/04/2006	-0,27%	0,26%	0,36%	-0,27%	0,27%	0,33%	-0,27%	0,27%	0,33%	0,16%	0,15%	0,12%			
5	10/04/2006	-0,95%	-0,88%	-0,65%	-0,86%	-0,68%	-0,24%	-0,75%	-0,45%	0,04%	-0,80%	-0,56%	-0,37%			
6	17/04/2006	-0,49%	-0,58%	-0,10%	-0,44%	-0,60%	-0,03%	-0,37%	-0,64%	0,02%	-0,36%	-0,34%	-0,32%			
7	24/04/2006	-0,43%	-0,28%	-1,00%	-0,49%	-0,23%	-1,13%	-0,56%	-0,15%	-1,23%	-0,61%	-0,65%	-0,67%			
8	1/05/2006	0,64%	0,25%	0,54%	0,80%	0,26%	0,46%	0,95%	0,29%	0,40%	0,47%	0,49%	0,56%			
9		-0,93%	0,05%	0,09%	-0,83%	0,07%	0,09%	-0,71%	0,09%	0,08%	-0,20%	-0,18%	-0,18%			

[illegible]

A	B	C	D	E	F	G
	Marché					
=Rendements (€)'1A266 = Rendements (€)'1B266/3+R				7/2005 - 7/2007		
=Rendements (€)'1A267 = Rendements (€)'1B267/3+R		Variance		=VAR.S(B\$2:B\$94)*52		Variance
=Rendements (€)'1A268 = Rendements (€)'1B268/3+R		Ecart type		=SORT(E3)		Ecart type
=Rendements (€)'1A269 = Rendements (€)'1B269/3+R		Rendement arithmétique		=AVERAGE(B\$2:B\$94)*52		Rendement arithmétique
=Rendements (€)'1A270 = Rendements (€)'1B270/3+R		Rendement géométrique		=GEOMEAN(1+B\$2:B\$93)-1)*		Rendement géométrique
=Rendements (€)'1A271 = Rendements (€)'1B271/3+R						
=Rendements (€)'1A272 = Rendements (€)'1B272/3+R		μ_*		=Rendements (€)'1Q48		μ_*
=Rendements (€)'1A273 = Rendements (€)'1B273/3+R		Sharpe Ratio		=(E6-E8)/E4		Sharpe Ratio
=Rendements (€)'1A274 = Rendements (€)'1B274/3+R		β		=COVARIANCE.S('Portefeuille		β
=Rendements (€)'1A275 = Rendements (€)'1B275/3+R		Treynor's Ratio		=(E6-E8)/E10		Treynor's Ratio
=Rendements (€)'1A276 = Rendements (€)'1B276/3+R		Jensen's Alpha		=E6-E8-E10*(E6-E8)		Jensen's Alpha
=Rendements (€)'1A277 = Rendements (€)'1B277/3+R		Modigliani-Modigliani		=E8+E4/E4*(E6-E8)		Modigliani-Modigliani
=Rendements (€)'1A278 = Rendements (€)'1B278/3+R						
=Rendements (€)'1A279 = Rendements (€)'1B279/3+R						
=Rendements (€)'1A280 = Rendements (€)'1B280/3+R						
=Rendements (€)'1A281 = Rendements (€)'1B281/3+R						
=Rendements (€)'1A282 = Rendements (€)'1B282/3+R						
=Rendements (€)'1A283 = Rendements (€)'1B283/3+R						
=Rendements (€)'1A284 = Rendements (€)'1B284/3+R						
=Rendements (€)'1A285 = Rendements (€)'1B285/3+R						
=Rendements (€)'1A286 = Rendements (€)'1B286/3+R						
=Rendements (€)'1A287 = Rendements (€)'1B287/3+R						
=Rendements (€)'1A288 = Rendements (€)'1B288/3+R						
=Rendements (€)'1A289 = Rendements (€)'1B289/3+R						
=Rendements (€)'1A290 = Rendements (€)'1B290/3+R						
=Rendements (€)'1A291 = Rendements (€)'1B291/3+R						
=Rendements (€)'1A292 = Rendements (€)'1B292/3+R						
=Rendements (€)'1A293 = Rendements (€)'1B293/3+R						
=Rendements (€)'1A294 = Rendements (€)'1B294/3+R						

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1		Marché												
2	24/10/2005	1,54%			7/2005 - 7/2007			8/2007 - 7/2009			8/2009 - 11/2016			
3	31/10/2005	1,80%		Variance	0,38%		Variance	2,26%		Variance	0,69%			
4	7/11/2005	2,07%		Ecart type	6,19%		Ecart type	15,04%		Ecart type	8,32%			
5	14/11/2005	0,81%		Rendement arithmétique	4,39%		Rendement arithmétique	-17,30%		Rendement arithmétique	16,09%			
6	21/11/2005	0,48%		Rendement géométrique	5,09%		Rendement géométrique	-18,43%		Rendement géométrique	15,75%			
7	28/11/2005	-0,49%												
8	5/12/2005	-0,37%		μ_F	3,14%		μ_F	2,84%		μ_F	0,04%			
9	12/12/2005	0,06%		Sharpe Ratio	31%		Sharpe Ratio	-141%		Sharpe Ratio	189%			
10	19/12/2005	0,90%		β	100,00%		β	100,00%		β	100,00%			
11	26/12/2005	0,58%		Treynor's Ratio	1,94%		Treynor's Ratio	-21,27%		Treynor's Ratio	15,71%			
12	2/01/2006	-0,59%		Jensen's Alpha	0,00%		Jensen's Alpha	0,00%		Jensen's Alpha	0,00%			
13	9/01/2006	-1,75%		Modigliani-Modigliani	5,09%		Modigliani-Modigliani	-18,43%		Modigliani-Modigliani	15,75%			
14	16/01/2006	-0,10%												
15	23/01/2006	0,16%												
16	30/01/2006	1,13%												
17	6/02/2006	0,26%												
18	13/02/2006	1,10%												

	correlations			Exposition
25%-75% \$	-25,15%	0,03	3,47%	0,09%
25%-75% ¥	-7,98%	0,43	3,47%	1,48%
50%-50% \$	-15,32%	0,73	5,87%	4,29%
50%-50% ¥	-26,76%	0,08	5,87%	0,49%
75%-25% \$	-10,14%	0,93	9,12%	8,49%
75%-25% ¥	-31,40%	-0,29	9,12%	-2,66%
				-7,97%