

Faculté des sciences
École de Physique
CP3

Nœuds topologiques entrelacés de champs électromagnétiques et trajectoires de particules chargées

Auteure :
Clémentine Dassy

Promoteur :
Prof. Jan Govaerts

Lecteurs :
Prof. Christian Hagendorf
Prof. Philippe Ruelle

*Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade académique
de Master [120] en sciences physiques, finalité approfondie*

Année 2019-2020

Table des matières

Introduction	3
1 Équations de Maxwell	6
1.1 Conventions et généralités	6
1.2 Dualité des équations de Maxwell	7
1.3 Un espace-temps courbe	8
1.4 Covariance des équations de Maxwell sous les transformations de Poincaré	10
1.5 Covariance des équations de Maxwell sous transformation conforme	12
1.6 Le vecteur de Riemann-Silberstein	14
1.7 Le tenseur de Riemann-Silberstein électromagnétique	16
2 Hopfion généré par inversion conforme	17
2.1 Inversion conforme	17
2.2 Shift dans le temps complexe	18
2.3 Énergie et quantité de mouvement totales du nœud	21
2.4 Boost de Lorentz sur le hopfion	23
2.5 Densité d'énergie et énergie totale dans le repère inertiel du hopfion	28
3 Formulation de Bateman	32
3.1 Notre hopfion	33
3.2 Familles de nœuds	33
3.3 Potentiels de jauge	33
3.4 Quantités conservées	34
4 Hopfion généré par topologie	35
4.1 Le modèle topologique de l'électromagnétisme	35
4.2 Compactification de \mathbb{R}^3 et \mathbb{C}	37
4.3 L'index de Hopf	37
4.4 Le nœud de Hopf-Rañada	39
5 L'index de Hopf et l'hélicité	42
5.1 L'hélicité	42
5.2 Formulation de Bateman	44
6 Particule chargée relativiste dans un champ électromagnétique externe	45
6.1 L'action scalaire de la particule	45
6.1.1 Action lagrangienne	45
6.1.2 Action hamiltonienne	46

6.2	Équation du mouvement	48
6.3	Vérifications pour la force de Lorentz	50
6.4	Trajectoire dans un champ électromagnétique critique homogène statique	50
7	Trajectoire d'une particule dans un nœud	53
7.1	Potentiel de Bateman linéaire	53
7.2	La transformation complexe	54
7.3	Transformation conforme complexe et boost de Lorentz	56
7.4	Les potentiels de Bateman et l'hopfion dans le référentiel inertiel R	57
7.5	Les potentiels de Bateman et l'hopfion dans le référentiel inertiel R_0	59
7.6	Linéarisation du hopfion dans l'inverse de son échelle de longueur L	61
7.7	Trajectoire d'une particule chargée en présence du hopfion dans le référentiel inertiel R_0	62
	Appendices	69
A	Intégrales	69
B	Forme explicite des champs électrique et magnétique du hopfion dans son repère	71
	Bibliographie	74

Introduction

Les équations de Maxwell dans le vide acceptent de curieuses solutions connues sous le nom de nœuds électromagnétiques. Leur caractéristique principale est que chaque paire de lignes de champs électrique ou magnétique constitue un entrelacement. Cet entrelacement constitue en fait un invariant topologique, émergeant par exemple de la formulation topologique de l'électromagnétisme.

Au XIX^{ème} siècle, Faraday et Maxwell pensaient que les lignes de champ électromagnétique étaient de réels objets physiques. On tentait d'expliquer leur existence en termes de lignes de flot et de vortex de l'éther. D'autre part, Lord Kelvin, au même moment, essaya d'expliquer les différences entre les atomes, qui étaient alors considérés comme des particules élémentaires, en postulant qu'ils ne sont autres que des nœuds faits de tubes de vortex dans l'éther, chaque élément étant alors un type de nœud différent. Pendant environ une vingtaine d'années, cette proposition motiva l'étude des propriétés des nœuds, notamment par le célèbre écossais Peter Tait, dont les travaux furent une contribution importante à l'émergence de la théorie des nœuds en mathématiques.

Les nœuds électromagnétiques sont analogues à des solutions caractéristiques de familles de solitons pour des modèles de champs non linéaires. Dans ce dernier cas, il s'agit de solutions classiques à des modèles non linéaires : des configurations de champ régulières et localisées disposant d'une énergie associée finie. Ces solitons ont été le sujet de beaucoup de recherches depuis des décennies, car ils émergent dans plusieurs domaines différents, tels que, en physique et en physique mathématique, pour des modèles de physique statistique, en théorie des cordes et en physique des cristaux ; et en biologie et en chimie moléculaires, où les nœuds formés par les chaînes d'ADN interfèrent avec les processus de réplication, transcription et recombinaison.

Plus généralement, les solitons sont la source d'énormément d'études, mais presque toutes les recherches ont été effectuées en une et deux dimensions, comme par exemple, en deux dimensions, avec le soliton "vortex" et le modèle sigma non linéaire, et en trois dimensions, avec les skyrmions et les monopôles de 't Hooft-Polyakov.

Des solitons stables topologiques apparaissent notamment dans la famille des théories scalaires de type Skyrme. Globalement, on peut considérer ces théories comme des déformations du modèle sigma. Cependant, toutes ces configurations sont "point-like", et ne peuvent donc pas être directement associées à des structures de nœuds.

Un autre exemple pertinent de solitons se trouve dans les solutions du modèle de Faddeev-Skyrme [1], dont la topologie est définie par la première fibration, ou carte, de Hopf $S^3 \rightarrow S^2$, avec le groupe d'homotopie correspondant, qui est associé à une charge topologique appelée "nombre d'entrelacement".

Jusqu'à présent, les investigations à propos des structures de nœuds ont été peu présentes dans la littérature, surtout parce qu'il y a peu de principes dynamiques permettant la génération de nœuds stables.

Tous ces exemples et recherches dans le domaine des nœuds nous démontrent que de telles configurations topologiquement stables sont appelées à jouer un rôle important dans les dynamiques, classiques et quantiques, non perturbatives, pour toutes les interactions fondamentales.

D'autre part, la topologie a joué et joue toujours un rôle important dans le développement de nombreux domaines de la physique. Elle fut, par exemple en 1931, à la base du modèle des monopôles de Dirac, qui contenait alors une mécanisme de quantification de la charge électrique, ce qui fut plus tard à nouveau abordé, toujours grâce à la topologie, mais cette fois par Rañada dans son modèle topologique de l'électromagnétisme [2]. Ce modèle permet de construire des champs dits "admissibles", c'est-à-dire avec $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$ (appelés champs de radiation) construits à partir de deux champs complexes $S^3 \rightarrow S^2$. De plus, il montra que n'importe quel champ électromagnétique standard de radiation est localement équivalent à un champ admissible, à part peut être sur un ensemble de mesure zéro [3]. On peut donc reconstruire un champ standard complet en "collant" ensemble différents champs admissibles.

D'autres exemples existent : les instantons de $SU(2)$ et $SU(3)$ comme mécanisme non perturbatif contribuant au confinement des quarks ; en supraconductivité, les vortex magnétiques engendrant les supraconducteurs de type I et de type II.

D'autres exemples de quantifications dues à la topologie sont encore le nombre d'enroulements ("winding number") autour d'un vortex magnétique, la quantification de la conductivité dans le "integer quantum Hall effect" qui ne sont donc pas des effets quantiques liés à des symétries continues.

Pour notre part, nous allons nous concentrer sur les nœuds électromagnétiques (que nous appellerons de manière interchangeable "hopfions") formés à partir d'une configuration de champs électriques et magnétiques tels que $(\mathbf{E}/c)^2 - \mathbf{B}^2 = \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$. Nous allons en construire de différentes manières, puis examiner la quantification de leur hélicité grâce à la topologie. Nous allons également dériver les équations pour la trajectoire d'une particule relativiste plongée dans un champ électromagnétique externe homogène, et les résoudre. L'intention première était d'observer comment se comporte la trajectoire d'une telle particule plongée dans un nœud électromagnétique, mais par manque de temps, ces projets sont reportés à une étude ultérieure. Dans la littérature n'existe qu'une seule étude fort sommaire de cette question, d'un grand intérêt dans un contexte gravitationnel [4].

D'autres développements ont également ont été étudiés, comme la généralisation de nœuds électromagnétiques à des champs dont le produit scalaire est non nul, dont l'hélicité électromagnétique reste constante mais où l'on a un échange entre les hélicités électrique et magnétique. Nous n'en parlerons pas.

Dans le chapitre 1, nous précisons nos conventions et effectuons quelques rappels élémentaires de l'électromagnétisme, dont la dualité des champs électriques et magnétiques dans le vide. Nous explicitons les formulations vectorielles, covariantes et l'écriture dans le langage des formes différentielles. Nous rappelons le concept de vecteur de Riemann-Silberstein, qui sera abondamment utilisé dans la suite.

Dans les trois chapitres suivants nous allons utiliser différentes méthodes pour construire toujours le même nœud, en l'abordant à chaque fois d'une manière différente. Ces différentes méthodes mettront en exergue diverses propriétés du hopfion. Dans le chapitre 2, nous créons des nœuds à l'aide d'un champ électromagnétique non physique mais trivial, sur lequel nous appliquons une inversion conforme spatio-temporelle, puis une translation

complexe dans le temps pour obtenir un nœud. Nous immobilisons ensuite ce nœud en nous plaçant dans son repère inertiel propre à l'aide d'une transformation de Lorentz. Le chapitre 3 décrit les nœuds électromagnétiques grâce à la formulation de Bateman, c'est-à-dire à l'aide de potentiels d'Euler complexes. Cette formulation alternative permet d'effectuer des manipulations de manière plus aisée qu'avec les expressions complètes en terme de champs électriques et magnétiques. Enfin, le chapitre 4 montre comment exprimer l'électromagnétisme sous la forme d'un modèle topologique. Nous décrivons les cartes de Hopf, dont le hopfion est issu, et considérons la notion d'index de Hopf.

Dans le chapitre 5, nous abordons la notion d'hélicité pour un champ, son lien avec l'hélicité de la physique des particules, et la quantification qui en est ainsi engendrée.

Le chapitre 6, reprend la dérivation des équations de la trajectoire d'une particule relativiste, massive ou non, plongée dans un champ électromagnétique, avec leur solution analytique exacte dans le cas d'un champ homogène et statique critique comme c'est le cas pour le hopfion.

Dans le chapitre 7, nous effectuons le développement en puissances de l'inverse de l'échelle de longueur du hopfion et calculons au premier ordre la trajectoire d'une particule plongée dans un champ de hopfion, dans un repère inertiel indépendant du hopfion.

La conclusion offre un résumé des points abordés. Nous parlons également des tentatives essayées puis abandonnées, et des points restant à éclaircir concernant la trajectoire de la particule dans le hopfion. Enfin, nous exposons des pistes pour les perspectives futures.

Chapitre 1

Équations de Maxwell

1.1 Conventions et généralités

Nous nous plaçons dans un espace-temps de Minkowski de dimension 4, et nous allons utiliser des notations 3-vectorielles, tensorielles et de formes différentielles. Nos conventions sont les suivantes :

- ◇ métrique de Minkowski de signature négative : $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(+ - - -)$,
- ◇ les indices grecs $\mu, \nu, \dots = 0, 1, 2, 3$ parcourent l'espace-temps de Minkowski,
- ◇ les indices latins $i, j, k, \dots = 1, 2, 3$ parcourent seulement l'espace euclidien,
- ◇ pseudo-tenseur de Levi-Civita $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$ tel que $\epsilon^{0123} = +1$ et ϵ^{ijk} tel que $\epsilon^{123} = +1$,
- ◇ convention d'Einstein : on somme sur les indices répétés,
- ◇ les indices de 4-vecteurs sont montés/descendus avec la métrique de Minkowski,
- ◇ les indices euclidiens des 3-vecteurs (pour la partie spatiale de l'espace-temps, donc indexés par des lettres latines) sont écrits uniquement en indices supérieurs,
- ◇ on notera, pour simplifier les expressions, $\partial_\mu \equiv \frac{\partial}{\partial x^\mu}$,
- ◇ potentiel vecteur $A^\mu(x^\mu) = \left(\frac{\Phi(x^\mu)}{c}, A^i(x^\mu) \right) = \left(\frac{\Phi(x^\mu)}{c}, \mathbf{A}(x^\mu) \right)$
 $A_\mu(x^\mu) = \left(\frac{\Phi(x^\mu)}{c}, -A^i(x^\mu) \right)$,
- ◇ champ électrique $\frac{\mathbf{E}}{c} = -\frac{\nabla\Phi}{c} - \frac{\partial}{\partial(ct)}\mathbf{A}$; $\frac{E^i}{c} = -\frac{\partial}{\partial x^i} \frac{\Phi}{c} - \frac{\partial}{\partial x^0} A^i$,
- ◇ champ magnétique $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$; $B^i = \frac{1}{2}\epsilon^{ijk} \left(\frac{\partial A^k}{\partial x^j} - \frac{\partial A^j}{\partial x^k} \right)$, $\frac{\partial A^j}{\partial x^i} - \frac{\partial A^i}{\partial x^j} = \epsilon^{ijk} B^k$,
- ◇ tenseur covariant de Faraday/Maxwell : $F_{\mu\nu} = \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} - \frac{\partial A_\mu}{\partial x^\nu}$, invariance de jauge :
 $A'_\mu = A_\mu + \partial_\mu \chi(x^\mu)$.

Nous allons considérer les équations de Maxwell dans le vide et sans source. En notation vectorielle, elles sont données par

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, & \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} &= \mathbf{0}, & \nabla \times \mathbf{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} &= \mathbf{0}.\end{aligned}\tag{1.1}$$

En notation covariante, on a alors

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0,\tag{1.2}$$

$$\partial_\mu F_{\nu\rho} + \partial_\nu F_{\rho\mu} + \partial_\rho F_{\mu\nu} = 0.\tag{1.3}$$

Ces équations dérivent de l'action

$$S[A^\mu] = \int d^4x^\mu \left\{ -\frac{1}{4} \eta^{\mu\rho} \eta^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \right\},\tag{1.4}$$

dont le tenseur-énergie impulsion correspondant est donné par

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0} \left(F^{\mu\rho} F_\rho{}^\nu + \frac{1}{4} \eta^{\mu\nu} F_{\rho\sigma} F^{\rho\sigma} \right),\tag{1.5}$$

avec μ_0 la perméabilité magnétique du vide. On a, entre autres,

$$T^{\mu\nu} = T^{\nu\mu}, \quad \partial_\mu T^{\mu\nu} = 0 \quad T_\mu{}^\mu = 0,\tag{1.6}$$

et en particulier

$$\begin{aligned}T^{00} &= \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2, & T^{0i} &= \frac{1}{\mu_0 c} (\mathbf{E} \times \mathbf{B})^i, \\ E &= \int d^3\mathbf{x} T^{00}, & \mathbf{P}^i{}_c &= \int d^3\mathbf{x} T^{0i},\end{aligned}\tag{1.7}$$

avec ϵ_0 la permittivité électrique du vide et c la vitesse de la lumière, telles que $\epsilon_0 \mu_0 c^2 = 1$, E l'énergie électromagnétique totale et \mathbf{P} la quantité de mouvement électromagnétique totale.

1.2 Dualité des équations de Maxwell

Dans le langage des formes différentielles, on peut écrire le quadripotential comme la 1-forme $A = A_\mu dx^\mu$, et le champ électromagnétique s'écrit alors comme une 2-forme :

$$F = \frac{1}{2} F_{\mu\nu} dx^\mu \wedge dx^\nu,\tag{1.8}$$

avec \wedge le produit extérieur entre formes. Nous avons alors que la dérivée extérieure de A donne $F = dA$. Par la propriété de la dérivée extérieure, nous obtenons alors naturellement

$$d^2 A = dF = 0,\tag{1.9}$$

ce qui donne en langage tensoriel

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} \partial_\nu F_{\alpha\beta} = 0,\tag{1.10}$$

ce qui est équivalent à l'éq. (1.3), l'identité de Bianchi. Cette dérivation montre donc que les équations de la colonne de gauche de (1.1) viennent simplement d'une identité géométrique.

L'éq. (1.2) constitue en la contribution dynamique aux équations de Maxwell. On peut l'écrire, dans le langage des formes différentielles, avec le dual de la forme F , qu'on notera $*F$:

$$d*F = 0, \quad (1.11)$$

avec

$$*F = \frac{1}{4}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\mu\nu}dx^\alpha \wedge dx^\beta = \frac{1}{2}*F_{\alpha\beta}dx^\alpha \wedge dx^\beta, \quad (1.12)$$

où l'on définit

$$*F_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}F^{\alpha\beta}. \quad (1.13)$$

Les composantes du tenseur $*F$ sont alors données par

$$*F_{0i} = B^i, \quad *F^{ij} = \epsilon^{ijk}\frac{E^k}{c}, \quad (1.14)$$

par analogie avec F :

$$F_{0i} = \frac{E^i}{c}, \quad F^{ij} = -\epsilon^{ijk}B^k. \quad (1.15)$$

Notons de plus que nous avons $*(F_{\mu\nu}) = -F_{\mu\nu}$.

Dans le langage des formes différentielles, l'électromagnétisme est donc régi par une équation d'origine géométrique $dF = 0$, et une équation dynamique, $d*F = 0$.

Ces considérations nous amènent à la dualité des champs électrique et magnétique. Dans le vide, les équations de Maxwell sont invariantes sous l'échange $(\frac{\mathbf{E}}{c}, \mathbf{B}) \leftrightarrow (\mathbf{B}, -\frac{\mathbf{E}}{c})$.

L'éq. (1.11) permet d'écrire

$$*F = \frac{dC}{c}, \quad (1.16)$$

par analogie avec $F = dA$. En langage tensoriel, on obtient donc que

$$*F = -\frac{1}{c}(\partial_\mu C_\nu - \partial_\nu C_\mu), \quad (1.17)$$

et donc $\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{C}$, par analogie avec $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

1.3 Un espace-temps courbe

Revenons à la notation tensorielle des équations. Considérons-les dans un espace-temps de géométrie pseudo-Riemannienne de dimension D arbitraire avec une structure métrique de signature $(+ - - \dots -)$, que l'on représente dans un système de coordonnées locales $\{x^\mu\}(\mu = 0, 1 \dots D-1)$ par un tenseur métrique symétrique donné par la matrice fonctionnelle $g_{\mu\nu}(x^\mu)$ avec l'élément de longueur suivant :

$$ds^2 = g_{\mu\nu}(x^\mu)dx^\mu dx^\nu. \quad (1.18)$$

La métrique inverse s'écrit $g^{\mu\nu}$ et est la matrice inverse de la représentation matricielle de $g_{\mu\nu}$. Pour l'espace-temps de Minkowski, nous avons $g_{\mu\nu}(x^\mu) = \eta_{\mu\nu}$, en accord avec la section 1.1.

Le tenseur antisymétrique de Faraday s'écrit encore

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad (1.19)$$

tandis que l'action pour la dynamique du champ électromagnétique dans le vide, sans source, devient

$$S[A_\mu; g_{\mu\nu}] = \int d^D x^\mu \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} \left\{ -\frac{1}{4} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \right\}, \quad (1.20)$$

le tenseur métrique $g_{\mu\nu}$ jouant alors le rôle d'un champ extérieur.

Considérons à présent un changement non singulier et local de coordonnées

$$x^\mu \rightarrow \tilde{x}^\mu(x), \quad \det \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} \neq 0. \quad (1.21)$$

Par invariance géométrique, on doit avoir

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = g_{\rho\sigma} \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu, \quad (1.22)$$

ce qui entraîne comme transformation pour le tenseur métrique :

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} g_{\rho\sigma}(x), \quad g_{\mu\nu}(x) = \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\sigma}{\partial x^\nu} \tilde{g}_{\rho\sigma}(\tilde{x}), \quad (1.23)$$

ainsi que pour la métrique inverse :

$$\tilde{g}^{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial \tilde{x}^\mu}{\partial x^\rho} \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\sigma} g^{\rho\sigma}(x), \quad g^{\mu\nu}(x) = \frac{\partial x^\mu}{\partial \tilde{x}^\rho} \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\sigma} \tilde{g}^{\rho\sigma}(\tilde{x}). \quad (1.24)$$

Nous obtenons ainsi pour le déterminant de la métrique :

$$\det g_{\mu\nu} = \left(\det \frac{\partial \tilde{x}}{\partial x} \right)^2 \det \tilde{g}_{\mu\nu}. \quad (1.25)$$

De plus, l'élément d'intégration de dimension D se transforme de la manière suivante :

$$d^D x^\mu = d^D \tilde{x}^\mu \det \left(\frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} \right). \quad (1.26)$$

En assemblant les éq. (1.25) et (1.26), on obtient finalement :

$$d^D x^\mu \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} = \text{sign} \left(\det \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} \right) d^D \tilde{x}^\mu \sqrt{|\det \tilde{g}_{\mu\nu}|}. \quad (1.27)$$

Le signe de $\left(\det \frac{\partial x}{\partial \tilde{x}} \right)$ dépend du changement de coordonnées, c'est-à-dire si celui-ci préserve (+) ou non (-) l'orientation de l'espace-temps.

Quant aux champs A_μ et $F_{\mu\nu}$, ils se transforment comme

$$\tilde{A}_\mu = \frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} A_\nu; \quad A_\mu = \frac{\partial \tilde{x}^\nu}{\partial x^\mu} \tilde{A}_\nu, \quad (1.28)$$

$$\tilde{F}_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} F_{\rho\sigma}, \quad F_{\mu\nu} = \frac{\partial \tilde{x}^\rho}{\partial x^\mu} \frac{\partial \tilde{x}^\sigma}{\partial x^\nu} \tilde{F}_{\rho\sigma}. \quad (1.29)$$

Avec ces transformations, on alors que

$$g^{\mu\rho}(x)g^{\nu\sigma}(x)F_{\mu\nu}(x)F_{\rho\sigma}(x) = \tilde{g}^{\mu\rho}(\tilde{x})\tilde{g}^{\nu\sigma}(\tilde{x})\tilde{F}_{\mu\nu}(\tilde{x})\tilde{F}_{\rho\sigma}(\tilde{x}), \quad (1.30)$$

prouvant donc que cette double contraction du tenseur de Faraday avec lui-même est une grandeur scalaire sous les difféomorphismes d'espace-temps.

Enfin, on peut vérifier que l'action de Maxwell définie par l'éq. (1.20) est un scalaire sous de tels difféomorphismes :

$$\begin{aligned} S[A_\mu; g_{\mu\nu}] &= \int d^D x^\mu \sqrt{|\det g_{\mu\nu}|} \left\{ -\frac{1}{4} g^{\mu\rho} g^{\nu\sigma} F_{\mu\nu} F_{\rho\sigma} \right\}, \\ &= \int d^D \tilde{x}^\mu \sqrt{|\det \tilde{g}_{\mu\nu}|} \left\{ -\frac{1}{4} \tilde{g}^{\mu\rho} \tilde{g}^{\nu\sigma} \tilde{F}_{\mu\nu} \tilde{F}_{\rho\sigma} \right\} = S[\tilde{A}_\mu; \tilde{g}_{\mu\nu}] \end{aligned} \quad (1.31)$$

Cette dernière équation signifie que dans le cas d'une configuration $(A_\mu(x), F_{\mu\nu}(x))$ qui obéit aux équations de Maxwell en présence de la métrique $g_{\mu\nu}(x)$ pour le système local de coordonnées $\{x^\mu\}$, alors la configuration $(\tilde{A}_\mu(\tilde{x}), \tilde{F}_{\mu\nu}(\tilde{x}))$ obéit aux équations de Maxwell en présence de la métrique $\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x})$ dans le système de coordonnées $\{\tilde{x}^\mu\}$. Une solution ainsi transformée reste donc une solution.

En fait, il s'agit de la même solution (c'est-à-dire la même configuration abstraite du champ électromagnétique) mais dans deux systèmes de coordonnées différents, et donc représentées par des fonctions différentes dépendant de systèmes de coordonnées différents.

1.4 Covariance des équations de Maxwell sous les transformations de Poincaré

Les transformations de Poincaré sont définies par le changement de coordonnées

$$\tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu_\nu x^\nu + a^\mu, \quad (1.32)$$

où Λ^μ_ν représente une transformation de Lorentz générale et a^μ un quadrivecteur de translation. Λ^μ_ν et a^μ sont indépendants du temps et de l'espace. En prenant toutes les composantes de $a^\mu = 0$, on retrouve bien sûr une transformation de Lorentz pure.

Afin que de telles transformations laissent la géométrie de Minkowski invariante, il faut que

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\nu_\sigma \eta^{\rho\sigma} &= \eta^{\mu\nu}, \\ \eta_{\rho\sigma} \Lambda^\rho_\mu \Lambda^\sigma_\nu &= \eta_{\mu\nu}. \end{aligned} \quad (1.33)$$

On déduit de ces deux relations que $\det \Lambda^\mu_\nu = \pm 1$, et qu'on peut monter et descendre les indices de Λ^μ_ν avec la métrique de Minkowski. On a par exemple les relations suivantes :

$$\begin{aligned} \Lambda^\mu_\rho \Lambda^\rho_\nu &= \delta^\mu_\nu, \\ (\Lambda^{-1})^\mu_\nu &= \Lambda^\mu_\nu, \\ x^\mu &= (\tilde{x}^\nu - a^\nu) \Lambda^\mu_\nu = (\Lambda^{-1})^\mu_\nu (\tilde{x}^\nu - a^\nu). \end{aligned} \quad (1.34)$$

Les quadrivecteurs potentiel et tenseur de Faraday étant covariants de Lorentz, nous avons également que

$$\begin{aligned}\tilde{A}_\mu &= \Lambda_\mu^\nu A_\nu, \\ \tilde{F}_{\mu\nu} &= \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma F_{\rho\sigma}.\end{aligned}\tag{1.35}$$

Pour de telles transformations, le tenseur métrique de Minkowski est laissé invariant :

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \Lambda_\mu^\rho \Lambda_\nu^\sigma \eta_{\rho\sigma} = \eta_{\mu\nu}.\tag{1.36}$$

Comme on l'a dit dans la section précédente, toute solution $F_{\mu\nu}(x)$ aux équations de Maxwell sans source dans le vide pour le tenseur métrique $\eta_{\mu\nu}$ est transformée en une solution $\tilde{F}_{\mu\nu}(\tilde{x})$ aux mêmes équations de Maxwell pour donc ici le même tenseur métrique $\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \eta_{\mu\nu}$. Les deux configurations $\tilde{F}_{\mu\nu}(\tilde{x})$ et $F_{\mu\nu}(x)$ représentent physiquement le même champ, mais il est vu dans deux repères différents, qui sont eux-mêmes reliés par la transformation de Poincaré correspondant aux paramètres Λ_μ^ν et a^μ .

Nous allons étudier plus particulièrement le cas d'un boost de Lorentz dans la direction z , notée \hat{e}_3 , avec une vitesse de $\frac{v}{c} = \beta = \beta\hat{e}_3$, avec $\beta \in \mathbb{R}$, sans translation dans l'espace-temps, c'est-à-dire $a^\mu = 0$. Nous avons alors

$$\Lambda_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad \Lambda_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & -\gamma \end{pmatrix},\tag{1.37}$$

$$\Lambda_\mu^\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix},$$

avec $\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$. Nous avons donc comme transformations pour les coordonnées $\{x^\mu\}$:

$$\begin{aligned}\tilde{x}^0 &= c\tilde{t} = \gamma(ct - \beta x^3), & x^0 &= ct = \gamma(c\tilde{t} + \beta\tilde{x}^3), \\ \tilde{x}^1 &= x^1, & x^1 &= \tilde{x}^1, \\ \tilde{x}^2 &= x^2, & x^2 &= \tilde{x}^2, \\ \tilde{x}^3 &= \gamma(-\beta ct + x^3), & x^3 &= \gamma(\beta c\tilde{t} + \tilde{x}^3).\end{aligned}\tag{1.38}$$

En exprimant le tenseur électromagnétique sous sa forme matricielle,

$$F^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & \frac{E^1}{c} & \frac{E^2}{c} & \frac{E^3}{c} \\ \frac{E^1}{c} & 0 & B^3 & -B^2 \\ \frac{E^2}{c} & -B^3 & 0 & B^1 \\ \frac{E^3}{c} & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix},\tag{1.39}$$

et par les équations précédentes, nous savons que

$$\tilde{F}^\mu{}_\nu = \Lambda^\mu{}_\rho F^\rho{}_\sigma (\Lambda^\sigma{}_\nu)^\mu; \quad (1.40)$$

le tenseur de Faraday se transforme donc de la manière suivante :

$$\tilde{F}^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & \frac{E^1}{c} & \frac{E^2}{c} & \frac{E^3}{c} \\ \frac{E^1}{c} & 0 & B^3 & -B^2 \\ \frac{E^2}{c} & -B^3 & 0 & B^1 \\ \frac{E^3}{c} & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & \beta\gamma \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \beta\gamma & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad (1.41)$$

et nous obtenons, pour les champs électrique et magnétique,

$$\begin{aligned} \frac{\tilde{E}^1}{c} &= \gamma \left(\frac{E^1}{c} - \beta B^2 \right), & \tilde{B}^1 &= \gamma \left(B^1 + \beta \frac{E^2}{c} \right), \\ \frac{\tilde{E}^2}{c} &= \gamma \left(\frac{E^2}{c} + \beta B^1 \right), & \tilde{B}^2 &= \gamma \left(B^2 - \beta \frac{E^1}{c} \right), \\ \frac{\tilde{E}^3}{c} &= \frac{E^3}{c}, & \tilde{B}^3 &= B^3, \end{aligned} \quad (1.42)$$

que l'on peut écrire sous la forme vectorielle

$$\frac{\tilde{\mathbf{E}}_\perp}{c} = \gamma \left(\frac{\mathbf{E}_\perp}{c} + \boldsymbol{\beta} \times \mathbf{B}_\perp \right), \quad \frac{\tilde{\mathbf{E}}_\parallel}{c} = \frac{\mathbf{E}_\parallel}{c}, \quad (1.43)$$

$$\tilde{\mathbf{B}}_\perp = \gamma \left(\mathbf{B}_\perp - \boldsymbol{\beta} \times \frac{\mathbf{E}_\perp}{c} \right), \quad \tilde{\mathbf{B}}_\parallel = \mathbf{B}_\parallel. \quad (1.44)$$

1.5 Covariance des équations de Maxwell sous transformation conforme

On peut appliquer d'autres types de transformations aux équations de Maxwell. Dans cette section, nous allons considérer le cas des transformations conformes, et montrer que les équations de Maxwell sont invariantes sous celles-ci.

Une transformation conforme est une transformation qui préserve les angles, sans nécessairement préserver les distances. Par définition, on a

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = e^{\varphi(\tilde{x})} g_{\mu\nu}(\tilde{x}), \quad (1.45)$$

$$ds^2 = dx^\mu dx^\nu g_{\mu\nu}(x) = e^{\varphi(\tilde{x})} d\tilde{x}^\mu d\tilde{x}^\nu g_{\mu\nu}. \quad (1.46)$$

Comment se transforme notre action ? En D dimensions, nous pouvons utiliser les considérations de la section 1.3,

$$\begin{aligned} S[A_\mu; g_{\mu\nu}] &= \int d^D x^\mu \sqrt{|\det g_{\mu\nu}(x)|} \left(-\frac{1}{4} g^{\mu\rho}(x) g^{\nu\sigma}(x) F_{\mu\nu}(x) F_{\rho\sigma}(x) \right) \\ &= \int d^D \tilde{x}^\mu \sqrt{|\det g_{\mu\nu}(\tilde{x})|} e^{(D/2-2)\varphi(\tilde{x})} \left(-\frac{1}{4} g^{\mu\rho}(\tilde{x}) g^{\nu\sigma}(\tilde{x}) \tilde{F}_{\mu\nu}(\tilde{x}) \tilde{F}_{\rho\sigma}(\tilde{x}) \right). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Dans notre cas, à $D = 4$ dimensions d'espace-temps, nous avons donc pour une telle transformation conforme,

$$S[A_\mu(x); g_{\mu\nu}(x)] = S[\tilde{A}_\mu(\tilde{x}); g_{\mu\nu}(\tilde{x})] \quad (1.48)$$

car $\frac{D}{2} - 2 = 0$ quand $D = 4$, et donc l'exponentielle de $\varphi(\tilde{x})$ vaut 1.

On en déduit que si $F_{\mu\nu}(x)$ est une solution aux équations de Maxwell sans source dans le vide en présence d'une métrique $g_{\mu\nu}(x)$, alors $\tilde{F}_{\mu\nu}(\tilde{x})$ est également solution aux mêmes équations de Maxwell, cette fois en présence d'une métrique $g_{\mu\nu}(\tilde{x})$. Les équations de Maxwell sans source dans le vide dans un espace-temps de dimension $D = 4$ sont donc covariantes sous transformations conformes.

Dans notre cas, c'est-à-dire dans l'espace-temps de Minkowski, où $g_{\mu\nu}(x) = \eta_{\mu\nu}$, nous avons donc que si $F_{\mu\nu}(x)$ est une solution pour cette métrique, alors $\tilde{F}_{\mu\nu}(\tilde{x})$ est également solution aux mêmes équations pour cette même métrique, avec

$$\tilde{F}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} F_{\rho\sigma}(x), \quad (1.49)$$

où \tilde{x}^μ est obtenu à partir de la transformation conforme appliquée sur x^μ .

Le groupe des transformations de Poincaré (qui comprend donc les transformations de Lorentz) est en fait un sous-groupe des transformations conformes. Dans un espace-temps de Minkowski de dimension 4, le groupe de Poincaré dispose de dix générateurs, auxquels correspondent dix grandeurs conservées appelées charges de Noether. Ces grandeurs conservées sont les quatre composantes du quadri-vecteur énergie-quantité de mouvement $P^\mu = (E, \mathbf{P}c)$ (translation dans l'espace-temps) et les six composantes du moment angulaire total généralisé, $M^{\mu\nu}$ (générateur des transformations de Lorentz générales). Le groupe conforme comprend en tout quinze dimensions, c'est-à-dire les dix du groupe de Poincaré et cinq autres générateurs supplémentaires, le générateur D des dilatations, et les quatre générateurs des transformations conformes spéciales, K^μ , donc encore associés à cinq grandeurs conservées.

Toutes ces grandeurs conservées peuvent s'exprimer en tant qu'intégrales sur tout l'espace spatial euclidien des densités correspondantes. Nous écrivons cette densité de courant conservée J^α , elle obéit à l'équation $\partial_\alpha J^\alpha = 0$. La grandeur conservée correspond alors à l'intégrale de la composante temporelle ($\alpha = 0$) de la densité de courant correspondante.

$$\begin{aligned} P^\mu : J^{\alpha;\mu} &= T^{\alpha\mu}, & \partial_\alpha J^{\alpha;\mu} &= 0, & P^\mu &= \int d^3\mathbf{x} J^{0;\mu}, \\ M^{\mu\nu} : J^{\alpha;\mu\nu} &= T^{\alpha\mu} x^\nu - T^{\alpha\nu} x^\mu, & \partial_\alpha J^{\alpha;\mu\nu} &= 0, & M^{\mu\nu} &= \int d^3\mathbf{x} J^{0;\mu\nu}, \\ D : J_D^\alpha &= T^\alpha{}_\mu x^\mu, & \partial_\alpha J_D^\alpha &= 0, & D &= \int d^3\mathbf{x} J_D^0, \\ K^\mu : J_K^{\alpha;\mu} &= T^{\alpha\mu} x \cdot x - 2T^\alpha{}_\nu x^\mu x^\nu, & \partial_\alpha J_K^{\alpha;\mu} &= 0, & K^\mu &= \int d^3\mathbf{x} J_K^{0;\mu}. \end{aligned} \quad (1.50)$$

Les propriétés de conservation des expressions ci-dessus s'obtiennent directement des deux relations suivantes,

$$\begin{aligned} \partial_\mu T^{\mu\nu} &= 0, \\ T^\mu{}_\mu &= 0. \end{aligned} \quad (1.51)$$

Nous allons étudier, dans la suite, l'inversion conforme. Il s'avère utile d'introduire un paramètre de dimension de longueur physique, afin que les coordonnées transformées gardent la même dimension physique que les coordonnées non transformées.

On aura

$$\tilde{x}^\mu = \lambda_0^2 \frac{x^\mu}{x \cdot x}, \quad x^\mu = \lambda_0^2 \frac{\tilde{x}^\mu}{\tilde{x} \cdot \tilde{x}}. \quad (1.52)$$

λ_0 est le paramètre de dimension physique de longueur mentionné ci-dessus. Nous avons de plus que

$$\frac{\partial x^\nu}{\partial \tilde{x}^\mu} = \frac{\lambda_0^2}{(\tilde{x} \cdot \tilde{x})^2} (\delta_\mu^\nu (\tilde{x} \cdot \tilde{x}) - 2\tilde{x}_\mu \tilde{x}^\nu), \quad (1.53)$$

ce qui entraîne pour la métrique

$$\tilde{g}_{\mu\nu}(\tilde{x}) = \frac{\lambda_0^4}{(\tilde{x} \cdot \tilde{x})^2} \eta_{\mu\nu}, \quad (1.54)$$

ce qui montre qu'un tel changement de coordonnée est bien une transformation conforme sur la métrique.

1.6 Le vecteur de Riemann-Silberstein

Historiquement, Silberstein a commencé par écrire ce vecteur $B + iE$, qu'il appelait alors bivecteur. Peu après, Riemann, l'a redécouvert avec une autre convention, qui est celle que nous allons utiliser :

$$\mathbf{R}_0(x^\mu) = \frac{\mathbf{E}}{c}(x^\mu) + i\mathbf{B}(x^\mu). \quad (1.55)$$

On peut réécrire les équations de Maxwell dans le vide sans source en terme de ce vecteur,

$$\nabla \cdot \mathbf{R}_0(x^\mu) = 0, \quad (1.56)$$

$$\nabla \times \mathbf{R}_0(x^\mu) - i \frac{\partial}{\partial x^0} \mathbf{R}_0(x^\mu) = 0. \quad (1.57)$$

Un boost de Lorentz de vitesse relative $\frac{\mathbf{v}}{c} = \boldsymbol{\beta} = \beta \hat{e}_3$ est donné, pour le vecteur de Riemann-Silberstein (RS), par

$$\begin{aligned} \mathbf{R}'_{0\parallel} &= \frac{\mathbf{E}'_{\parallel}}{c} + i\mathbf{B}'_{\parallel} = \frac{\mathbf{E}_{\parallel}}{c} + i\mathbf{B}_{\parallel} = \mathbf{R}_{0\parallel}, \\ \mathbf{R}'_{0\perp} &= \frac{\mathbf{E}'_{\perp}}{c} + i\mathbf{B}'_{\perp} \\ &= \gamma \left(\frac{\mathbf{E}_{\perp}}{c} + i\mathbf{B}_{\perp} \right) - i\beta \times \left(\frac{\mathbf{E}}{c} + i\mathbf{B} \right) \\ &= \gamma (\mathbf{R}_{0\perp} - i\beta \times \mathbf{R}_0). \end{aligned}$$

Nous allons à présent considérer une configuration spécifique de champs $F_{\mu\nu}$ (et donc des champs $(\mathbf{E}(x^\mu)/c, \mathbf{B}(x^\mu))$ et $\mathbf{R}_0(x^\mu)$) vérifiant les équations de Maxwell. Celles-ci sont linéaires en l'opérateur différentiel $\partial/\partial x^\mu$, on peut donc considérer une extension analytique sur le plan complexe des coordonnées $\{x^\mu\}$. Nous allons prendre $x^\mu \in \mathbb{R} \rightarrow z^\mu \in \mathbb{C}$ et

considérer ces champs comme des fonctions holomorphes des variables complexes $\{z^\mu\}$. Ces fonctions vérifient alors les mêmes équations, avec cependant les opérateurs différentiels $\partial/\partial x^\mu$ remplacés par $\partial/\partial z^\mu$.

Lorsque ces opérateurs différentiels agissent sur ces champs, et si x^μ désigne la partie réelle de z^μ , on a alors $\partial/\partial x^\mu = \partial/\partial z^\mu$.

C'est-à-dire que si $\mathbf{R}_0(z^\mu)$ obéit aux équations de Maxwell en terme des variables complexes, alors $\mathbf{R}_0(x^\mu + iy^\mu)$ (avec $z^\mu = x^\mu + iy^\mu$) obéit à ces mêmes équations, cette fois par rapport aux variables réelles x^μ . Il est donc possible, à partir d'une solution $\mathbf{R}_0(x^\mu)$, de générer de nouvelles solutions en rendant les coordonnées x^μ complexes, puis en considérant les équations par rapport aux parties réelles de ces nouvelles coordonnées complexes. On peut ensuite simplement séparer les parties réelles et imaginaires de $\mathbf{R}_0(x^\mu + iy^\mu)$ pour obtenir les nouveaux champs électrique et magnétique qui sont solutions aux équations de Maxwell en les considérant uniquement comme des fonctions de x^μ .

Considérons les vecteurs de RS suivants :

$$\mathbf{R}_\pm(x^\mu; a^\mu) = \mathbf{R}_0(x^\mu \pm ia^\mu) = \frac{\mathbf{E}}{c}(x^\mu \pm ia^\mu) + i\mathbf{B}(x^\mu \pm ia^\mu), \quad (1.58)$$

avec a^μ un quadrivecteur constant, quelconque. Ces vecteurs sont tels que

$$\mathbf{R}_\pm(x^\mu; -a^\mu) = \mathbf{R}_\mp(x^\mu; a^\mu) \quad (1.59)$$

$$\mathbf{R}_\pm^*(x^\mu; a^\mu) = \frac{\mathbf{E}}{c}(x^\mu \mp ia^\mu) - i\mathbf{B}(x^\mu \mp ia^\mu). \quad (1.60)$$

Ils définissent donc de nouveaux champs électrique et magnétique qui sont solutions aux équations de Maxwell :

$$\frac{\mathbf{E}_\pm}{c}(x^\mu; a^\mu) = \frac{1}{2} \{ \mathbf{R}_\pm(x^\mu; a^\mu) + \mathbf{R}_\pm^*(x^\mu; a^\mu) \}, \quad (1.61)$$

$$\mathbf{B}(x^\mu; a^\mu) = \frac{1}{2i} \{ \mathbf{R}_\pm(x^\mu; a^\mu) - \mathbf{R}_\pm^*(x^\mu; a^\mu) \}. \quad (1.62)$$

Comme nous avons que

$$\mathbf{R}_\pm(x^\mu; -a^\mu) = \mathbf{R}_\mp(x^\mu; a^\mu) \quad (1.63)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \mathbf{E}_\pm(x^\mu; -ia^\mu) = \mathbf{E}_\mp(x^\mu; +a^\mu) \\ \mathbf{B}_\pm(x^\mu; -a^\mu) = \mathbf{B}_\mp(x^\mu; +ia^\mu) \end{cases}, \quad (1.64)$$

nous allons observer uniquement les champs $\mathbf{E}(x^\mu; a^\mu) \equiv \mathbf{E}_+(x^\mu; a^\mu)$ et $\mathbf{B}(x^\mu; a^\mu) \equiv \mathbf{B}_+(x^\mu; a^\mu)$. Pour ceux-ci, nous avons de manière totalement explicite :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{E}}{c}(x^\mu; a^\mu) &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\mathbf{E}}{c}(x^\mu + ia^\mu) + \frac{\mathbf{E}}{c}(x^\mu - ia^\mu) \right\} + \frac{i}{2} \left\{ \mathbf{B}(x^\mu + ia^\mu) - \mathbf{B}(x^\mu - ia^\mu) \right\}, \\ \mathbf{B}(x^\mu; a^\mu) &= \frac{1}{2i} \left\{ \frac{\mathbf{E}}{c}(x^\mu + ia^\mu) - \frac{\mathbf{E}}{c}(x^\mu - ia^\mu) \right\} + \frac{1}{2} \left\{ \mathbf{B}(x^\mu + ia^\mu) + \mathbf{B}(x^\mu - ia^\mu) \right\}. \end{aligned} \quad (1.65)$$

Dans la suite, nous allons utiliser cette méthode pour construire de nouvelles solutions à partir des solutions $\mathbf{R}_0(x^\mu)$. Nous choisirons de prendre $a^\mu = -i\delta^{\mu 0}$, afin d'avoir une translation complexe purement temporelle.

1.7 Le tenseur de Riemann-Silberstein électromagnétique

Si nous combinons le tenseur de Faraday $F_{\mu\nu}$ avec son dual, $*F_{\mu\nu}$ en un seul tenseur complexe, considérons alors le tenseur de Riemann-Silberstein :

$$R_{\mu\nu} = F_{\mu\nu} + i *F_{\mu\nu}, \quad *R_{\mu\nu} = -i R_{\mu\nu}, \quad R_{\mu\nu} = i *R_{\mu\nu}. \quad (1.66)$$

Les équations de Maxwell de la section 1.1 correspondent alors aux parties réelles et imaginaires de l'équation

$$\partial_\mu R^{\mu\nu} = 0. \quad (1.67)$$

Nous obtenons comme expressions explicites pour les champs électrique et magnétique

$$\begin{aligned} R_{0i} &= \frac{E^i}{c} + iB^i = R^i, & *R_{0i} &= -i R^i, \\ R_{ij} &= i\epsilon^{ijk} R^k, & *R_{ij} &= \epsilon^{ijk} R^k. \end{aligned} \quad (1.68)$$

Notons que nous avons également la relation suivante :

$$-\frac{1}{4}R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = \left[\left(\frac{\vec{E}}{c} \right)^2 - \vec{B}^2 \right] + 2i \frac{\vec{E}}{c} \cdot \vec{B}. \quad (1.69)$$

Comme pour le vecteur de Riemann-Silberstein, nous utiliserons le tenseur de RS ultérieurement. Chacune de ces formes sera employée pour simplifier au maximum les calculs effectués.

Chapitre 2

Hopfion généré par inversion conforme

Dans ce chapitre, nous allons construire un nœud électromagnétique, que nous appellerons de manière interchangeable hopfion, à l'aide des trois transformations applicables aux équations de Maxwell, que nous avons vues dans le chapitre précédent. Nous allons appliquer successivement l'inversion conforme puis le shift complexe temporel du vecteur de RS [5] sur une configuration de champs (\mathbf{E}, \mathbf{B}) , tels que $(\mathbf{E}/c)^2 - \mathbf{B}^2 = 0$ et $(\mathbf{E}/c) \cdot \mathbf{B} = 0$. Le hopfion ainsi créé sera ensuite remis dans son repère inertiel à l'aide d'un boost de Lorentz.

2.1 Inversion conforme

Considérons un vecteur de Riemann-Silberstein composé de deux champs statiques $\vec{E} = E_0 \hat{e}_1$ et $\vec{B} = B_0 \hat{e}_2$ constants dans tout l'espace. On prend le cas limite $cE_0 = B_0$. On a :

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} B_0 \\ iB_0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (2.1)$$

On doit ensuite lui appliquer l'inversion conforme. Pour ce faire, nous devons d'abord déterminer comment celle-ci agit sur le vecteur de Riemann-Silberstein.

Le tenseur de Faraday s'exprime, en terme des champs \mathbf{E} et \mathbf{B} , comme

$$F_{0i} = \frac{\mathbf{E}^i}{c} = B_0 \delta^{i1}, \quad F_{ij} = -\epsilon^{ijk} B^k = -B_0 \epsilon^{ij2}. \quad (2.2)$$

Définissons à présent le paramètre réel positif λ_0 , qui a la dimension physique d'une longueur. Considérons une inversion conforme en terme de ce paramètre :

$$\tilde{x}^\mu = \lambda_0^2 \frac{x^\mu}{x \cdot x}, \quad x^\mu = \lambda_0^2 \frac{\tilde{x}^\mu}{\tilde{x} \cdot \tilde{x}}, \quad (x \cdot x)(\tilde{x} \cdot \tilde{x}) = \lambda_0^4. \quad (2.3)$$

Nous avons vu dans le chapitre précédent que le tenseur de Faraday se transforme de la manière suivante :

$$\tilde{F}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\mu) = \frac{\partial x^\rho}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} F_{\rho\sigma}. \quad (2.4)$$

Dans le cas de l'inversion, nous avons que

$$\frac{\partial x^\sigma}{\partial \tilde{x}^\nu} = \frac{\lambda_0^2}{(\tilde{x} \cdot \tilde{x})^2} \{ \delta_\nu^\sigma (\tilde{x} \cdot \tilde{x}) - 2\tilde{x}^\sigma \tilde{x}_\nu \}. \quad (2.5)$$

En introduisant l'éq. (2.5) dans l'éq. (2.4), on obtient

$$\tilde{F}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\mu) = B_0 \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^\nu} - B_0 \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^0}{\partial \tilde{x}^\nu} - B_0 \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^\nu} + B_0 \frac{\partial x^1}{\partial \tilde{x}^\mu} \frac{\partial x^3}{\partial \tilde{x}^\nu}. \quad (2.6)$$

On a, entre autres,

$$\tilde{F}_{0i} = \frac{\tilde{E}^i}{c}, \quad \tilde{F}_{ij} = -\epsilon^{ijk} \tilde{B}^k. \quad (2.7)$$

Dans les expressions suivantes, on procède immédiatement au remplacement suivant, pour éviter les surcharges de notations :

$$\tilde{x}^\mu = (c\tilde{t}, \tilde{x}^1, \tilde{x}^2, \tilde{x}^3) \rightarrow (ct, x^1, x^2, x^3) = (ct, x, y, z), \quad (2.8)$$

de même que

$$\tilde{F}_{\mu\nu}(\tilde{x}^\mu) \rightarrow F_{\mu\nu}(x^\mu), \quad \frac{\tilde{E}^i}{c}(\tilde{x}^\mu) \rightarrow \frac{E^i}{c}(x^\mu), \quad \tilde{B}^i(\tilde{x}^\mu) \rightarrow B^i(x^\mu). \quad (2.9)$$

On a ainsi pour les nouveaux champs, dans les nouvelles coordonnées :

$$\frac{\mathbf{E}}{c}(x^\mu) = \frac{\lambda_0^4 B_0}{((ct)^2 - \mathbf{x}^2)^3} \begin{pmatrix} x^2 - y^2 - (z - ct)^2 \\ 2xy \\ 2x(z - ct) \end{pmatrix}, \quad (2.10)$$

$$\mathbf{B}(x^\mu) = \frac{\lambda_0^4 B_0}{((ct)^2 - \mathbf{x}^2)^3} \begin{pmatrix} -2xy \\ x^2 - y^2 + (z - ct)^2 \\ -2y(z - ct) \end{pmatrix}. \quad (2.11)$$

Le vecteur de Riemann-Silberstein est alors donné par

$$\mathbf{R}(x^\mu) = \frac{\lambda_0^4 B_0}{((ct)^2 - \mathbf{x}^2)^3} \begin{pmatrix} (x - iy)^2 - (z - ct)^2 \\ i(x - iy)^2 + i(z - ct)^2 \\ 2(x - iy)(z - ct) \end{pmatrix}. \quad (2.12)$$

Les champs sont toujours de même norme et perpendiculaires entre eux, c'est-à-dire que $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = 0$, puisqu'une transformation conforme préserve les angles.

La fig. 2.1 représente l'état actuel du champ électrique. Le champ magnétique a exactement la même configuration, si ce n'est qu'il est pivoté de $\pi/2$ autour de l'axe \hat{e}_3 . On peut remarquer que toutes les lignes de champs se sont "refermées" sur elles-mêmes, à part celle qui coïncide avec l'axe \hat{e}_3 , et qui part en l'infini vers le haut et vers le bas.

2.2 Shift dans le temps complexe

Introduisons maintenant un paramètre T_0 , ayant la dimension physique d'un temps, et un paramètre de longueur associé, L_0 . Introduisons un deuxième paramètre de longueur

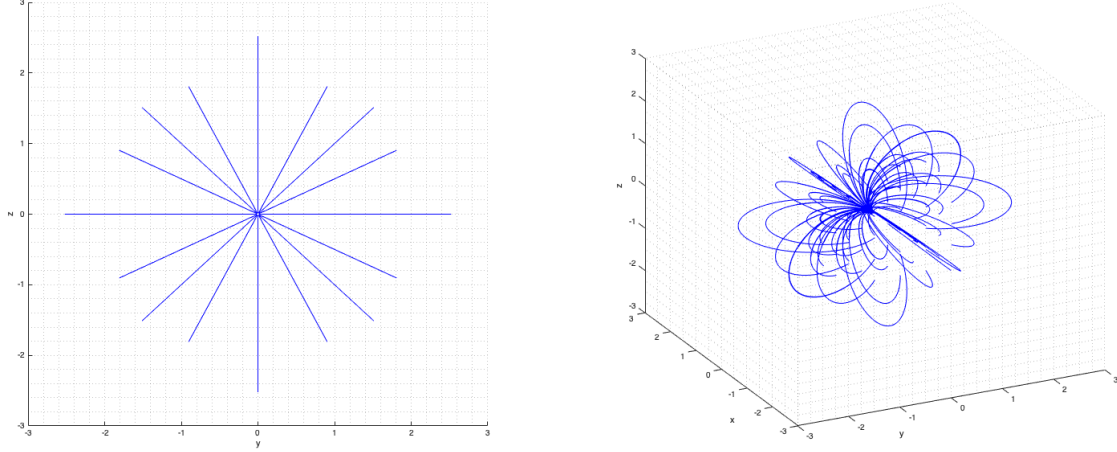


FIGURE 2.1 – Le champ électrique après inversion conforme pour $B_0 = \lambda_0 = 1$, $t = 0$. La figure de gauche représente la coupe dans le plan $x = 0$. La figure de droite décrit la même configuration de champ, mais d’une perspective rotatée légèrement vers le haut et la gauche, pour mettre en exergue la structure “nouée” du champ.

J_0 tel que $ct_0 = J_0$ et tel que $\frac{J_0}{L_0} = \alpha$, avec α un paramètre adimensionnel. On applique le shift complexe suivant au vecteur de Riemann-Silberstein (2.12),

$$ct \rightarrow ct - icT_0 = ct - iJ_0, \quad (2.13)$$

c’est-à-dire

$$\mathbf{R}_+(x^\mu) \equiv \mathbf{R}(ct - iJ_0, \mathbf{x}). \quad (2.14)$$

On sait que si le vecteur de RS résout les équations de Maxwell sans source dans le vide, alors $\mathbf{R}_+(x^\mu)$ les vérifie également. $\mathbf{R}_+(x^\mu)$ définit alors un champ électrique et un champ d’induction magnétique, respectivement $\mathbf{E}_+(x^\mu)$ et $\mathbf{B}_+(x^\mu)$, qui obéissent donc également à ces mêmes équations de Maxwell, avec

$$\mathbf{R}_+(x^\mu) = \mathbf{E}_+(x^\mu) + i\mathbf{B}_+(x^\mu). \quad (2.15)$$

Cette dernière transformation correspond au nœud électromagnétique de Rañada. À partir de maintenant, ces deux champs seront notés respectivement \mathbf{E}/c et \mathbf{B} , sans l’indice +.

Nous allons maintenant user de notre paramètre L_0 , pour rendre nos résultats plus clairs et pouvoir manipuler le rapport entre la translation dans le temps et l’échelle des longueurs, α , explicitement. Nous obtenons ainsi des coordonnées d’espace-temps sans dimension.

$$X = \frac{x}{L_0}, \quad Y = \frac{y}{L_0}, \quad Z = \frac{z}{L_0}, \quad T = \frac{ct}{L_0}. \quad (2.16)$$

On aura finalement effectué la translation dans le temps suivante :

$$T \rightarrow T - i\alpha, \quad (2.17)$$

ce qui signifie que notre quantité A devient

$$A = \frac{\alpha^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2}{2}. \quad (2.18)$$

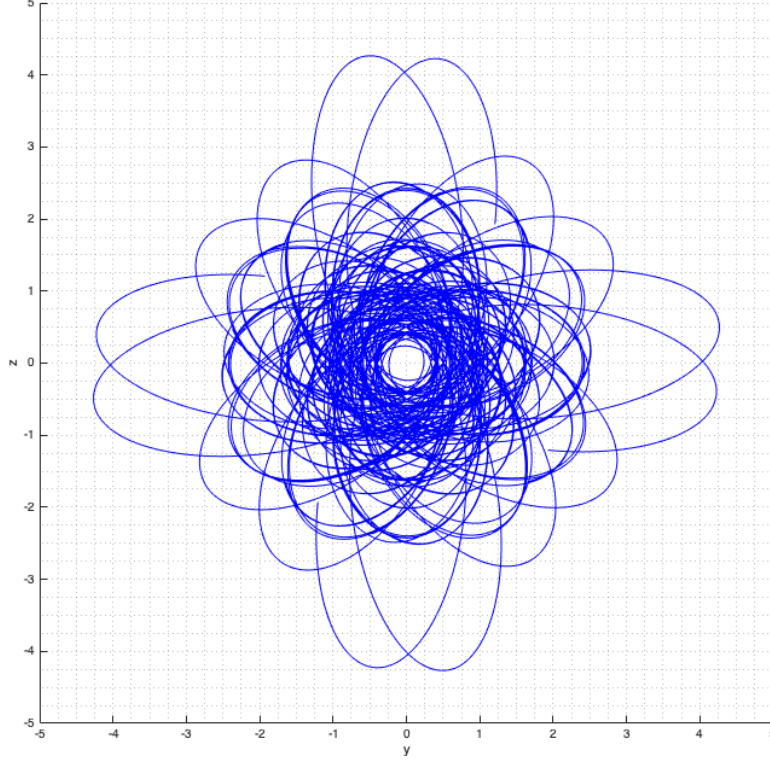


FIGURE 2.2 – Le champ électrique du hopfion après shift complexe dans le temps pour $T = 0, B_0 = \lambda_0 = L_0 = \alpha = 1$.

Avec cette transformation, on obtient, pour le vecteur de Riemann-Silberstein, que

$$\mathbf{R} = \left(\frac{\lambda_0}{L_0} \right)^4 \frac{B_0}{((\alpha + iT)^2 + X^2 + Y^2 + Z^2)^3} \times \begin{pmatrix} (\alpha + i(T + X - iY)Z)(\alpha + i(T - X + iY - Z)) \\ (\alpha + i(T + iX + Y - Z))(i\alpha - T + iX + Y + Z) \\ 2(X - iY)(-i\alpha + T - Z) \end{pmatrix}. \quad (2.19)$$

On remarque que les deux échelles de distance, λ_0 pour l'inversion et L_0 le paramètre choisi pour obtenir des coordonnées sans dimension, se recombinent en un seul paramètre adimensionnel, qui vient renormaliser le paramètre B_0 , module du champ d'induction magnétique. Les champs électrique et magnétique restent encore de même norme et perpendiculaires entre eux, puisqu'on a toujours $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = 0$.

La fig. 2.2 représente le champ électrique du hopfion tel qu'il est à présent. Il manifeste maintenant cette forme caractéristique de tore entrelacé sur lui-même. Le champ magnétique a à nouveau la même forme, pivotée de $\pi/2$.

2.3 Énergie et quantité de mouvement totales du nœud

On souhaite maintenant calculer l'énergie électromagnétique totale correspondant à cette configuration. La densité s'y rapportant est donnée par

$$\epsilon = \frac{1}{2\epsilon_0} \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 = \frac{1}{2\mu_0} \left(\left(\frac{\mathbf{E}}{c} \right)^2 + \mathbf{B}^2 \right) \quad (2.20)$$

$$= \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{R}} \quad (2.21)$$

$$= \frac{1}{16\mu_0} \left(\frac{\lambda_0}{L_0} \right)^8 B_0^2 \frac{(A - T(T - Z))^2}{(A^2 + \alpha T^2)^3}. \quad (2.22)$$

L'énergie totale, c'est-à-dire l'intégrale sur tout l'espace euclidien de cette dernière quantité, est conservée dans le temps. On peut donc la considérer en $T = t = 0$ pour plus de simplicité. On notera $A(T = 0) \equiv A_0 = 1/2(\alpha^2 + R^2)$, avec $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2 = (x^2 + y^2 + z^2)/L_0^2 = r^2/L_0^2$.

On a

$$E = \int_{\infty} d^2\mathbf{x} \frac{1}{16\mu_0} \left(\frac{\lambda_0}{L_0} \right)^8 B_0 \frac{1}{A_0^4}. \quad (2.23)$$

Nous utilisons le changement de variables en coordonnées sphériques :

$$\int d^3\mathbf{x} = L_0^3 \int d^3\mathbf{X} = L_0^3 \int_0^{\infty} R^2 dR \int_0^{\pi} \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi. \quad (2.24)$$

Nous en déduisons que

$$E = \frac{1}{16\mu_0} \left(\frac{\lambda_0}{L_0} \right)^8 B_0^2 L_0^3 4\pi 2^4 \int_0^{\infty} dR \frac{R^2}{(\alpha^2 + R^2)^4}. \quad (2.25)$$

Cette dernière intégrale vaut $\frac{\pi}{32\alpha^5}$ (détaillée dans l'appendice A), et nous en concluons que l'énergie totale est donnée, en unité S.I., par

$$E = \frac{\pi^2}{8\mu_0\alpha^5} \frac{\lambda_0^8}{L_0^5} B_0^2. \quad (2.26)$$

Quant à la densité de quantité de mouvement totale, toujours en unité S.I., elle est donnée par le vecteur de Poynting. On a

$$\mathbf{p}c = \frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \times \mathbf{B} \right) = \frac{i}{2\mu_0} \mathbf{R} \times \bar{\mathbf{R}}. \quad (2.27)$$

Le produit vectoriel est alors formé des composantes suivantes :

$$p_{1c} = \frac{B_0^2}{4\mu_0} \left(\frac{\lambda_0}{L_0} \right)^8 \frac{(A^2 + T(T - Z))(\alpha Y + X(T - Z))}{(A^2 + \alpha^2 T^2)^3}, \quad (2.28)$$

$$p_{2c} = \frac{B_0^2}{4\mu_0} \left(\frac{\lambda_0}{L_0} \right)^8 \frac{(A^2 + T(T - Z))(-\alpha X + Y(T - Z))}{(A^2 + \alpha^2 T^2)^3}, \quad (2.29)$$

$$p_{3c} = \frac{B_0^2}{16\mu_0} \left(\frac{\lambda_0}{L_0} \right)^8 \frac{(A^2 + T(T - Z))(-\alpha^2 + X^2 + Y^2 - (T - Z)^2)}{(A^2 + \alpha^2 T^2)^3}. \quad (2.30)$$

Comme pour l'énergie, la quantité de mouvement totale est conservée dans le temps. On peut donc intégrer les expressions ci-dessus en $t = T = 0$, pour simplifier les calculs ainsi engendrés. On peut remarquer que les deux premières composantes sont chacune impaires soit en X , soit en Y et s'annulent donc lorsqu'elles sont intégrées sur tout l'espace.

Nous pouvons donc nous préoccuper d'intégrer uniquement la troisième composante :

$$\mathbf{P}_c = \hat{e}_3 \left(\frac{\lambda_0}{L_0} \right)^8 \frac{B_0^2}{\mu_0} L_0^3 \int_{\infty} d^3\mathbf{X} \frac{X^2 + Y^2 - Z^2 - \alpha^2}{(X^2 + Y^2 + Z^2 + \alpha^2)^5}. \quad (2.31)$$

À nouveau, nous pouvons passer en coordonnées sphériques.

$$\begin{aligned} X^2 + Y^2 - Z^2 - \alpha^2 &= R^2 - 2Z^2 - \alpha^2 \\ &= R^2 - 2R^2 \cos^2 \theta - \alpha^2. \end{aligned} \quad (2.32)$$

Commençons par effectuer l'intégrale angulaire, elle est de la forme

$$\begin{aligned} &\int_0^\pi \sin \theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi (R^2 - 2R^2 \cos^2 \theta - \alpha^2) \\ &= 2\pi \int_{-1}^1 (R^2 - 2R^2 \cos^2 \theta - \alpha^2) d \cos \theta \\ &= \frac{4\pi}{3} (R^2 - 3\alpha^2). \end{aligned} \quad (2.33)$$

$$(2.34)$$

Nous pouvons conclure en intégrant sur le rayon, à nouveau en utilisant l'intégrale de l'appendice A :

$$\mathbf{P}_c = \hat{e}_3 \frac{\lambda_0^8 B_0^2}{L_0^5 \mu_0} L_0^3 \frac{4\pi}{3} \int_0^\infty dR \frac{(R^2 - 3\alpha^2)R^2}{(R^2 + \alpha^2)^5} \quad (2.35)$$

$$= \frac{-\pi^2}{16} \frac{\lambda_0^8}{(\alpha L_0)^5} \frac{B_0^2}{\mu_0} \hat{e}_3 \quad (2.36)$$

$$= -\frac{E}{2} \hat{e}_3. \quad (2.37)$$

Selon la relation bien connue d'Einstein, la masse invariante du nœud électromagnétique est donnée par :

$$M^2 c^4 = E^2 - \mathbf{P}^2 c^2 = \left\{ \frac{\pi^2}{8} \frac{\lambda_0^8}{(\alpha L_0)^5} \frac{B_0^2}{\mu_0} \right\}^2 \left\{ 1 - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right\} = 3 \left\{ \frac{\pi^2}{16} \frac{\lambda_0^8}{(\alpha L_0)^5} \frac{B_0^2}{\mu_0} \right\}^2, \quad (2.38)$$

c'est-à-dire

$$M = \sqrt{3} \left\{ \frac{\pi^2}{16} \frac{\lambda_0^8}{(\alpha L_0)^5} B_0^2 \epsilon_0 \right\}, \quad (2.39)$$

ce qui nous permet de retrouver la vitesse de propagation de cette distribution par rapport au référentiel inertiel,

$$\frac{\mathbf{v}}{c} = \boldsymbol{\beta} = \frac{\mathbf{P}_c}{E} = -\frac{1}{2} \hat{e}_3, \quad (2.40)$$

et nous obtenons finalement :

$$|\boldsymbol{\beta}| = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\beta}^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (2.41)$$

Les fig. 2.3 et 2.4 montrent la distribution de l'énergie électromagnétique, dont on voit qu'elle se disperse. La variation du α de 1 à 3 caractérise le rapport entre l'échelle de longueur et la translation dans le temps complexe; plus le α est grand, plus le doughnut est ouvert. Les figs. 2.5 et 2.6 montrent la répartition de la quantité de mouvement.

2.4 Boost de Lorentz sur le hopfion

Pour se replacer dans le repère inertiel du hopfion, il suffit d'appliquer un boost de Lorentz de vitesse $\boldsymbol{\beta} = -1/2\hat{e}_2$ sur l'expression du champ électromagnétique que nous avons obtenue dans la section (2.2). Nous introduisons les notations suivantes :

$$\boldsymbol{\beta} = \beta\hat{e}_3, \quad \beta = -\frac{1}{2}, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (2.42)$$

Nous pouvons ainsi faire correspondre à un quadrivecteur contravariant $x^\mu = (ct, x, y, z)$ dans le premier référentiel, un quadrivecteur également contravariant $x'^\mu = (ct', x', y', z')$ dans le second référentiel, celui propre au nœud électromagnétique, avec,

$$\begin{aligned} ct' &= \gamma(ct - \beta z), & ct &= \gamma(ct' + \beta z'), \\ x' &= x, & x &= x', \\ y' &= y, & y &= y', \\ z' &= \gamma(-\beta ct + z), & z &= \gamma(\beta ct' + z'). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Pour les coordonnées du nœud, nous obtenons donc

$$\begin{aligned} T' &= \frac{1}{\sqrt{3}}(2T - 2), & T &= \frac{1}{\sqrt{3}}(2T' + Z'), \\ X' &= X, & X &= X', \\ Y' &= Y, & Y &= Y', \\ Z' &= \frac{1}{\sqrt{3}}(T + 2Z), & Z &= \frac{1}{\sqrt{3}}(-T' + 2Z'). \end{aligned} \quad (2.44)$$

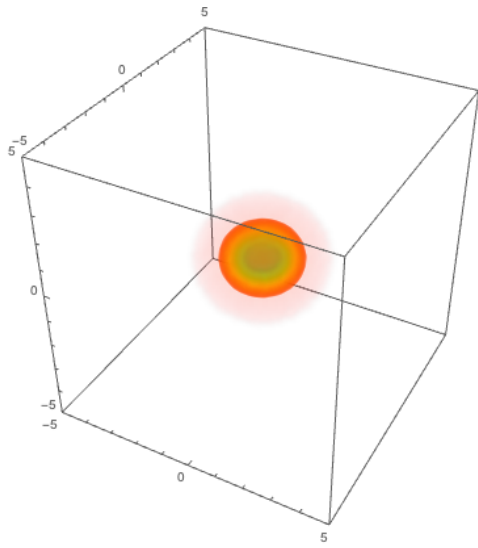
Nous avons notamment que

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2}(\alpha^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2) = \frac{1}{2}(\alpha^2 + X'^2 + Y'^2 + Z'^2 - T'^2), \\ T^2 &= \frac{1}{3}(2T' - Z')^2. \end{aligned} \quad (2.45)$$

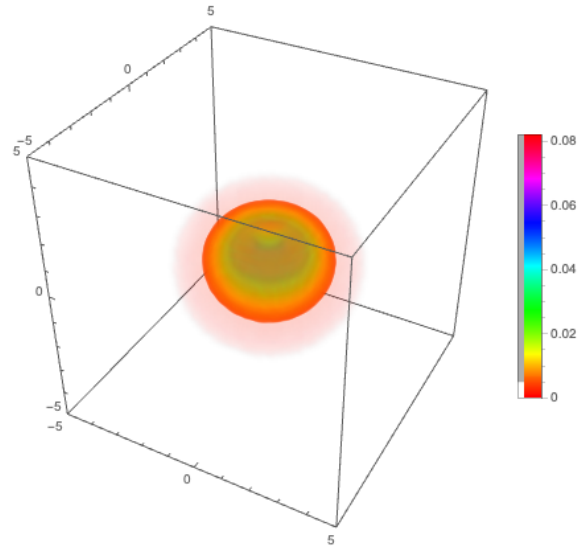
L'application du boost de Lorentz sur le vecteur de Riemann-Silberstein s'exprime, comme nous l'avons vu à l'éq. (1.58), par

$$\mathbf{R}'_{\parallel} = \mathbf{R}_{\parallel}, \quad \mathbf{R}'_{\perp} = \gamma(\mathbf{R}_{\perp} - i\boldsymbol{\beta} \times \mathbf{R}). \quad (2.46)$$

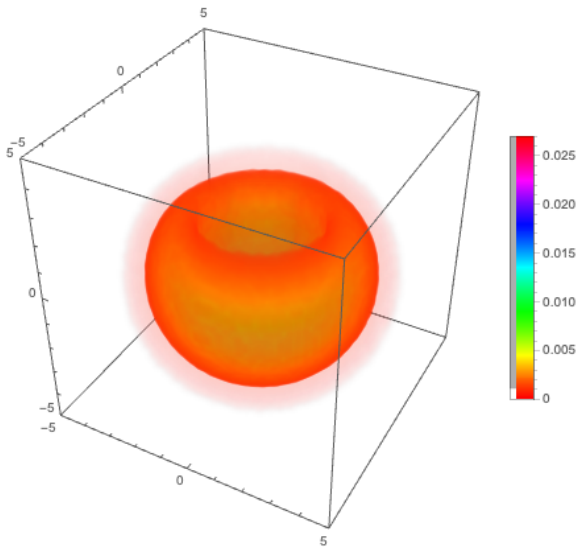
Nous allons dès à présent opérer les transformations de coordonnées et nous omettrons les primes de ces nouvelles coordonnées car nous n'utiliserons plus que celles-ci.



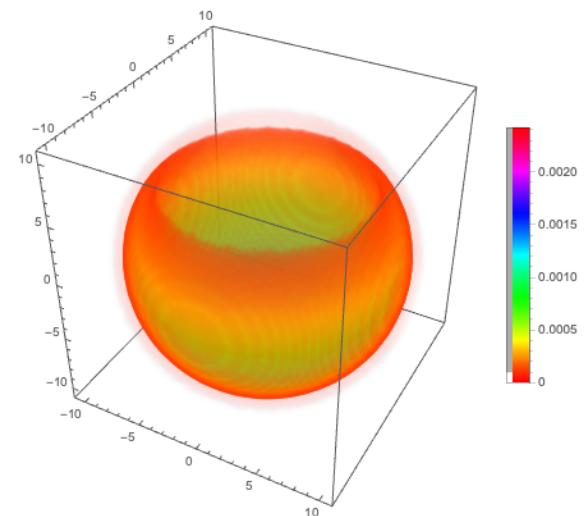
(a) $T = 0$



(b) $T = 1$



(c) $T = 3$



(d) $T = 10$

FIGURE 2.3 – Pour différentes valeurs de T , densité d'énergie du hopfion avant boost de Lorentz. On a pris $B_0 = \lambda_0 = L_0 = \mu_0 = 1$ et $\alpha = 1$. Attention, on a une échelle différente dans la subfig. 2.3d pour plus de clarté.

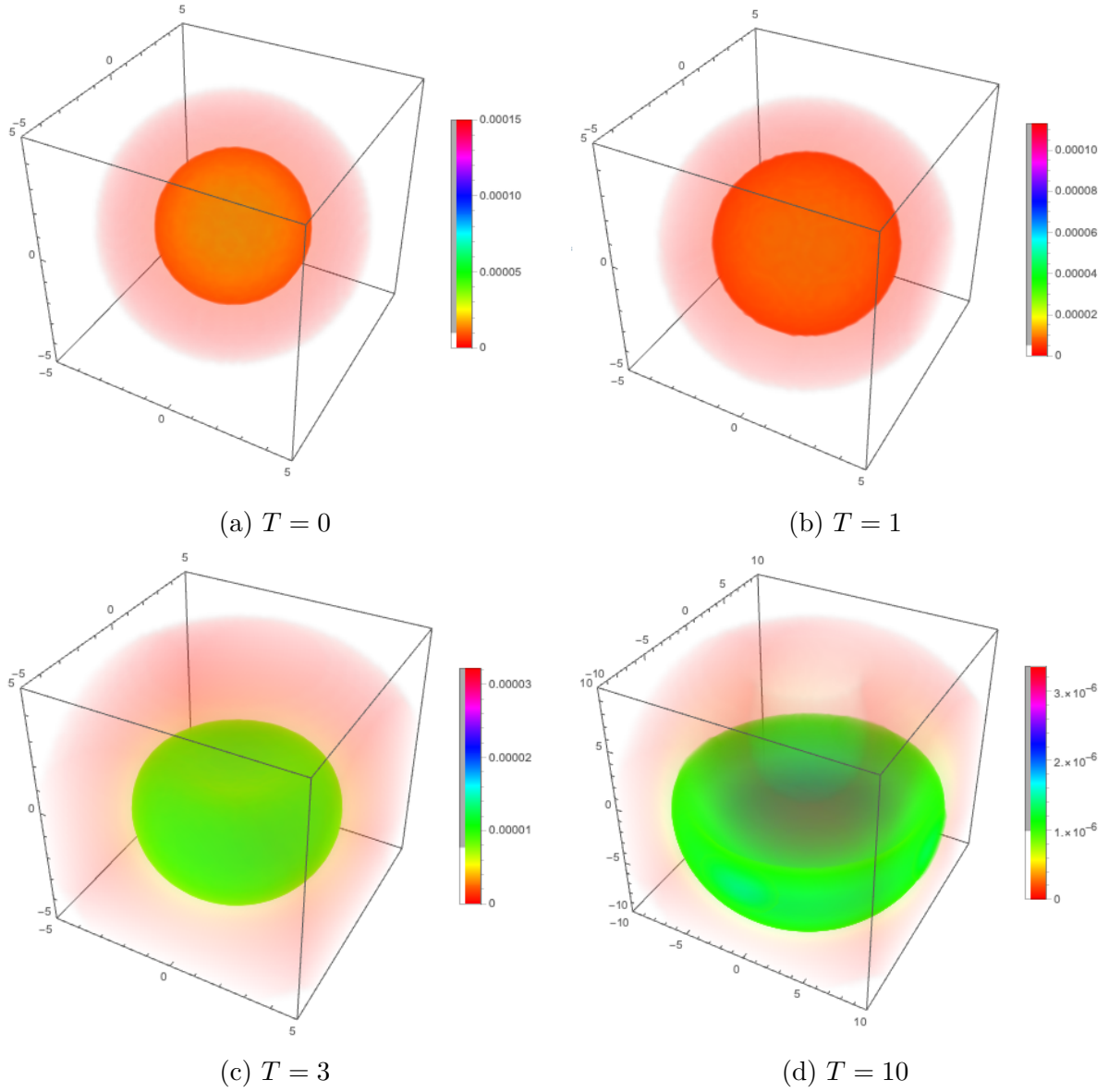


FIGURE 2.4 – Pour différentes valeurs de T , densité d'énergie du hopfion avant boost de Lorentz. On a pris $B_0 = \lambda_0 = L_0 = \mu_0 = 1$ et $\alpha = 3$. Attention, on a une échelle différente dans la subfig. 2.4d pour plus de clarté. On retrouve clairement la forme du doughnut.

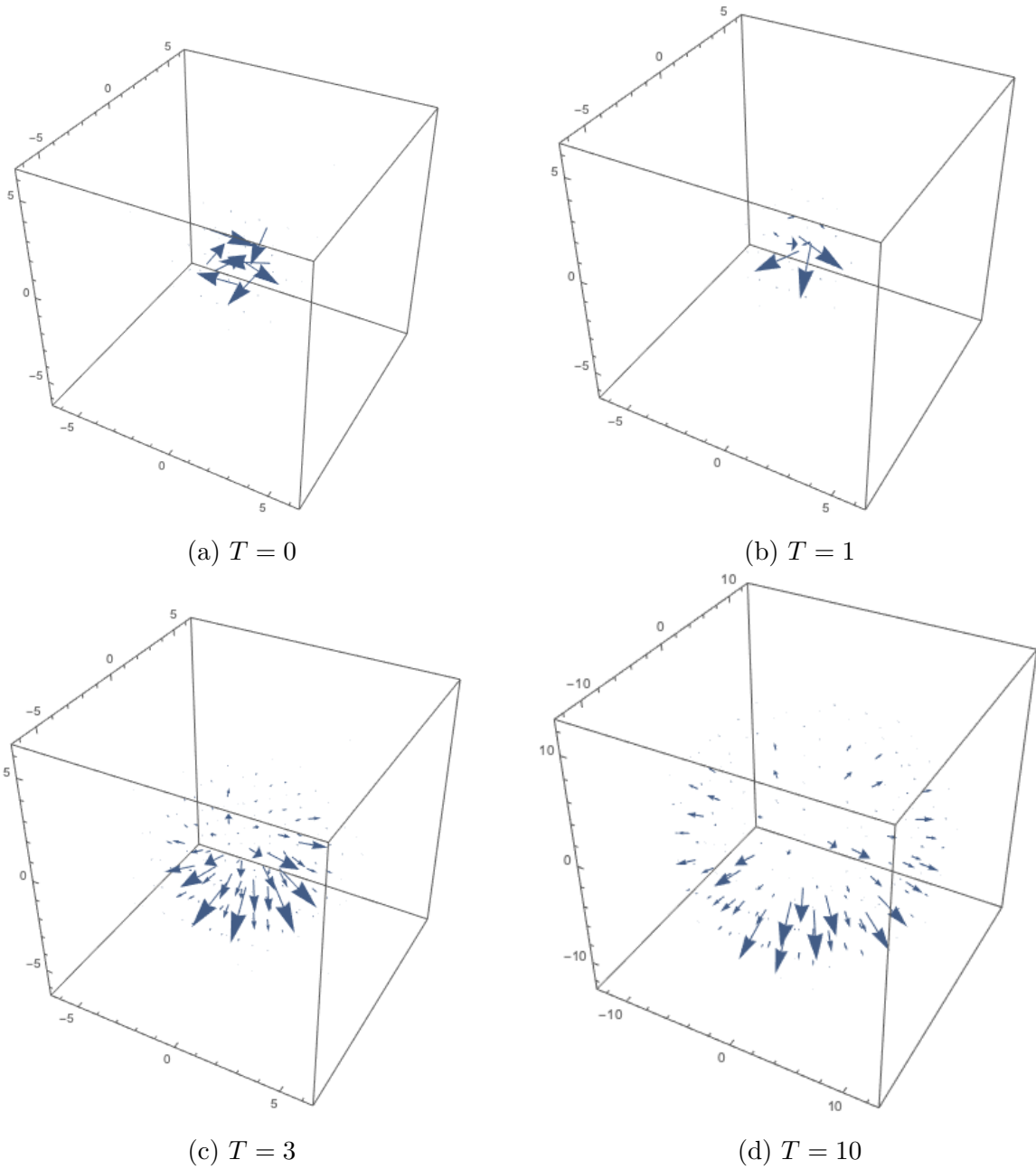


FIGURE 2.5 – Pour différentes valeurs de T , quantité de mouvement du hopfion avant boost de Lorentz. On a pris $B_0 = \lambda_0 = L_0 = \mu_0 = 1$ et $\alpha = 1$. Attention, on a une échelle différente dans la subfig. 2.5d pour plus de clarté. On voit clairement que la densité se déplace “vers le bas”.

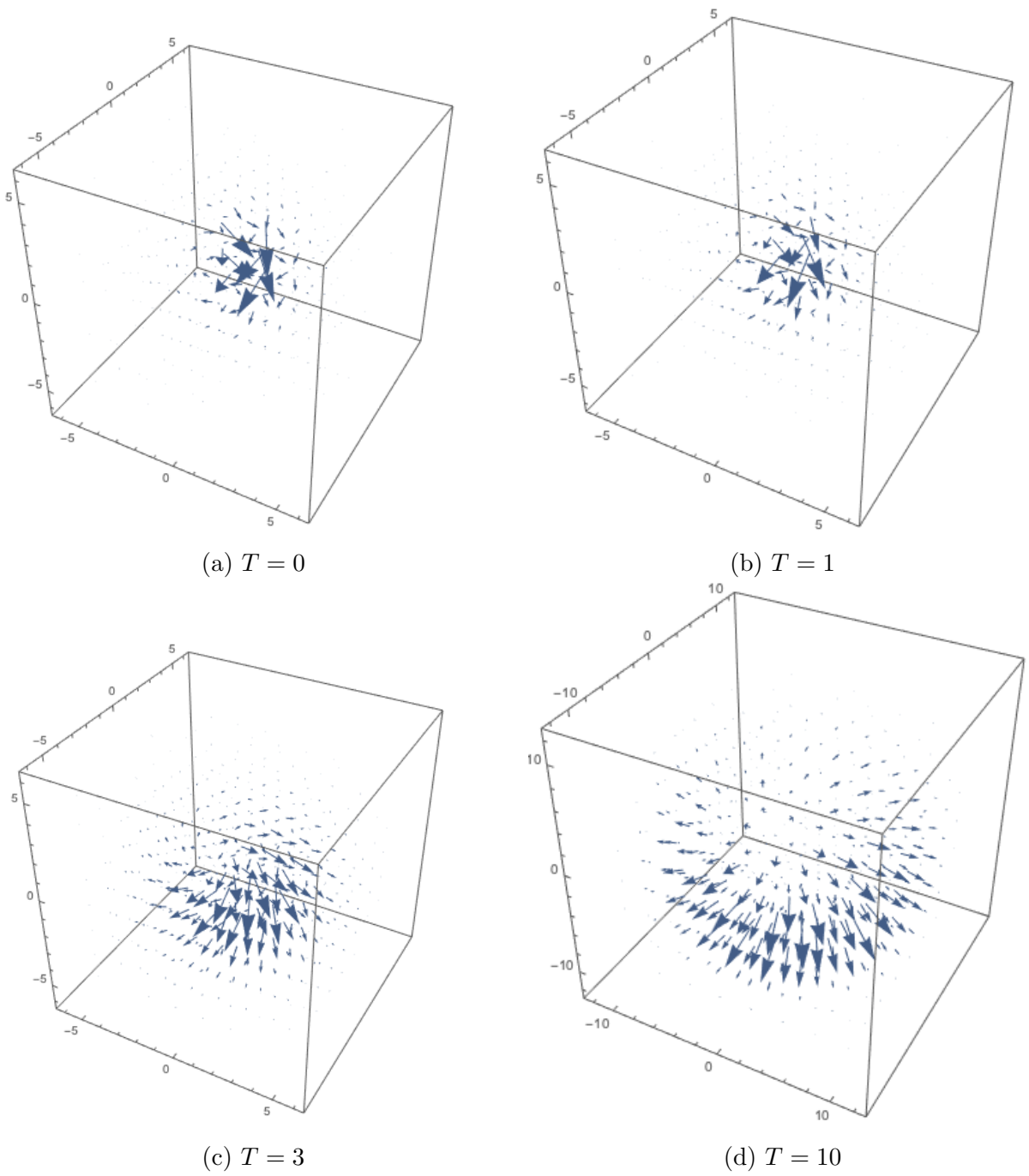


FIGURE 2.6 – Pour différentes valeurs de T , quantité de mouvement du hopfion avant boost de Lorentz. On a pris $B_0 = \lambda_0 = L_0 = \mu_0 = 1$ et $\alpha = 3$. Attention, on a une échelle différente dans la subfig. 2.6d pour plus de clarté. On voit clairement que la densité se déplace “vers le bas”.

Le vecteur de RS est donné, dans son nouveau repère, par

$$\mathbf{R} = \frac{B_0}{\sqrt{3}} \left(\frac{\lambda_0}{L_0} \right)^4 \left(\begin{array}{c} -(\alpha + i\sqrt{3}(T-Z))^2 - 3(X-iY)^2 \\ \left(\alpha^2 + \frac{2i\alpha(2T-Z)}{\sqrt{3}} - T^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 \right)^3 \\ i \left((\alpha + i\sqrt{3}(T-Z))^2 - 3(X-iY)^2 \right) \\ \left(\alpha^2 + \frac{2i\alpha(2T-Z)}{\sqrt{3}} - T^2 + X^2 + Y^2 + Z^2 \right)^3 \\ 54\sqrt{3}(X-iY)(\sqrt{3}(T-Z) - i\alpha) \\ \left(3\alpha^2 + 2i\sqrt{3}\alpha(2T-Z) + 3(-T^2 + X^2 + Y^2 + Z^2) \right)^3 \end{array} \right) \quad (2.47)$$

Les champs électrique et magnétique correspondants sont encore perpendiculaires entre eux et de même norme, car $\mathbf{R} \cdot \mathbf{R} = 0$.

La fig. 2.7 montre cette dernière évolution du hopfion.

L'expression complète des champs électrique et magnétique est donnée dans l'appendice B.

2.5 Densité d'énergie et énergie totale dans le repère inertiel du hopfion

Nous pouvons recalculer la densité d'énergie et son intégrale l'énergie totale, dans le repère du hopfion, afin de voir comment celle-ci se distribue.

Comme nous avons l'expression explicite pour le vecteur de Riemann-Silberstein dans son référentiel, le plus simple revient à calculer directement la densité d'énergie avec

$$\epsilon = \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{R} \cdot \bar{\mathbf{R}}. \quad (2.48)$$

Nous obtenons

$$\epsilon = \frac{9B_0}{\mu_0} \left(\frac{\lambda_0}{L_0} \right)^8 \times \frac{(\alpha^2 + 3((T-Z)^2 + X^2 + Y^2))^2}{(3\alpha^4 + 2\alpha^2(5T^2 - 8TZ + 3(X^2 + Y^2) + 5Z^2) + 3(-T^2 + X^2 + Y^2 + Z^2))^3} \quad (2.49)$$

Dans la fig. 2.8, nous avons représenté la densité d'énergie dans l'espace pour différentes valeurs du temps. On voit que la densité d'énergie commence par être très localisée autour du centre du nœud, puis, à mesure que le temps passe, cette densité d'énergie s'homogénéifie dans tout l'espace, en tendant donc vers 0. Nous verrons cependant dans le chapitre 5 que le nœud ne disparaît pas.

Dans la fig. 2.9, on a pris $\alpha = 3$, et on voit que la densité d'énergie prend cette forme typique de tore qui s'élargit selon le temps T .

On peut de plus réintégrer la densité d'énergie sur tout l'espace, et on obtient bien pour l'énergie totale E :

$$\frac{E}{c} = \sqrt{3} \frac{B_0^2 \epsilon_0}{16} \frac{\lambda_0^8}{(\alpha L_0)^5}, \quad (2.50)$$

ce qui est égal à la masse invariante du nœud.

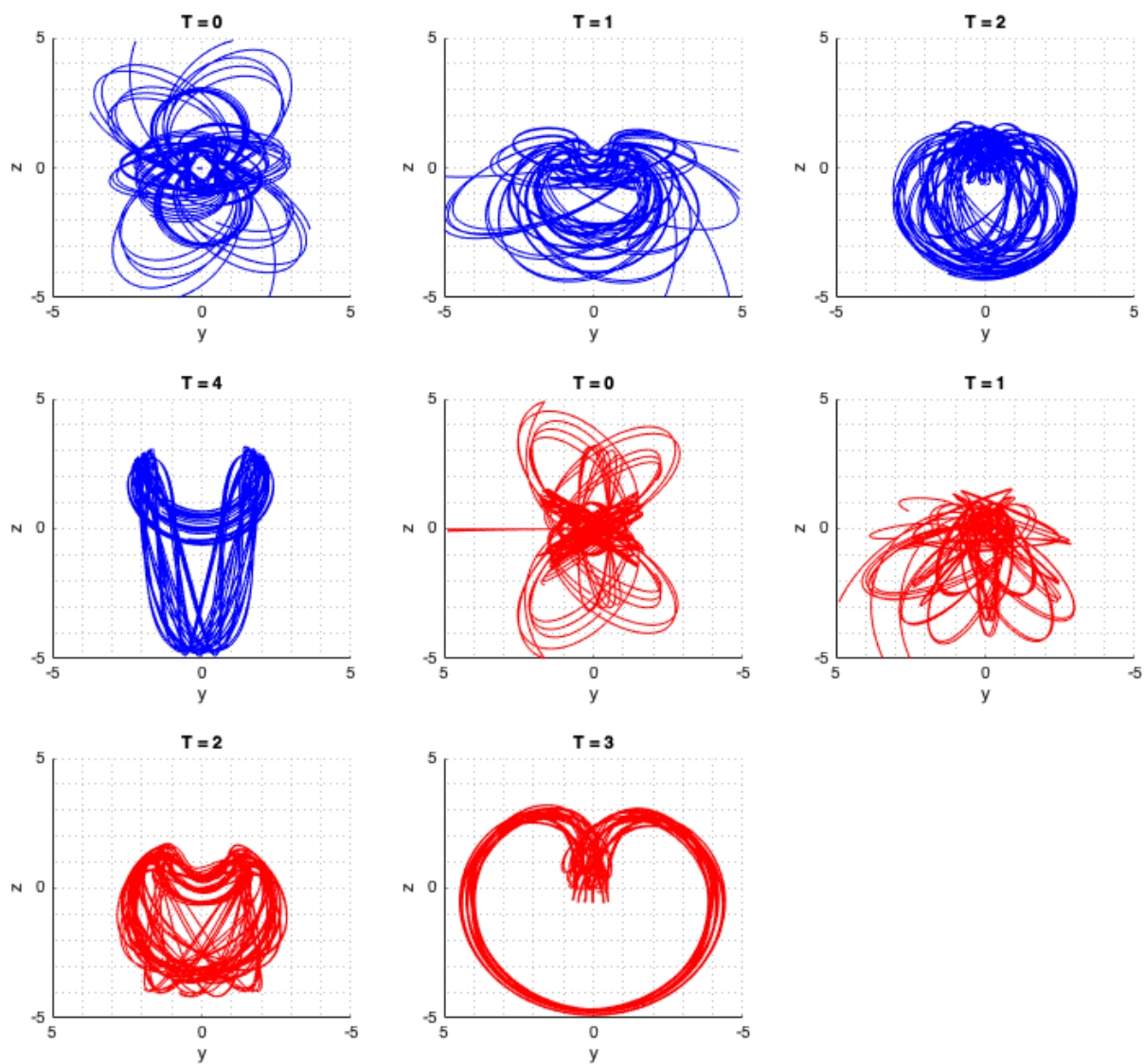
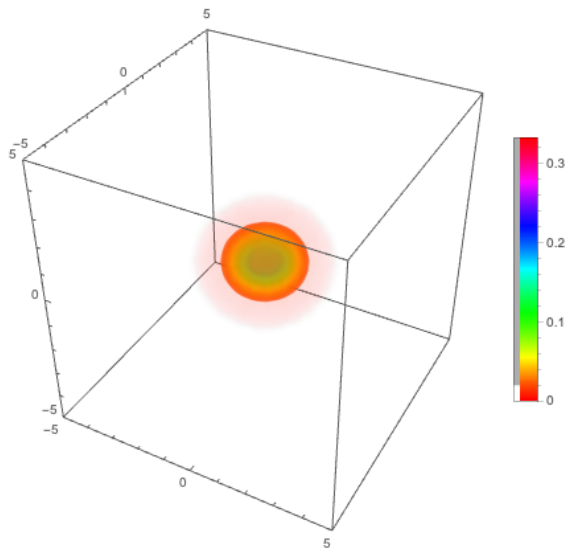
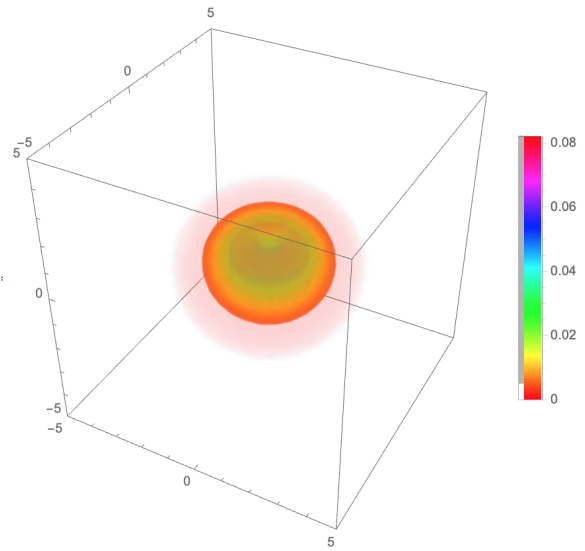


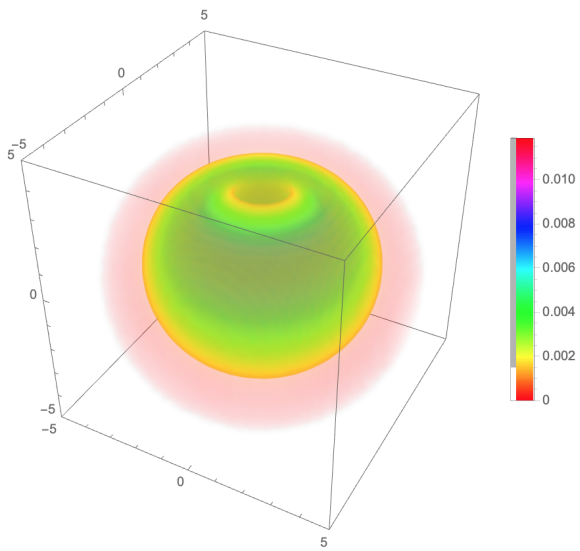
FIGURE 2.7 – Lignes de champ du hopfion dans son repère inertiel pour différentes valeurs de T , pour $B_0 = \lambda_0 = L_0 = \alpha = 1$. Le champ électrique est en bleu, le magnétique en rouge.



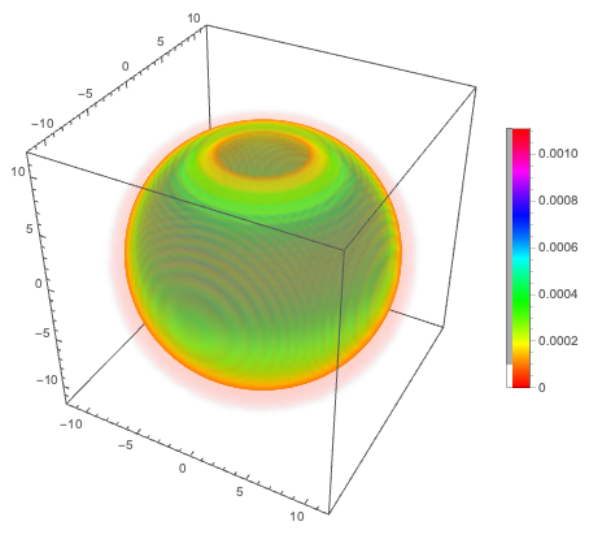
(a) $T = 0$



(b) $T = 1$



(c) $T = 3$



(d) $T = 10$

FIGURE 2.8 – Densités d'énergie du hopfon dans son repère propre pour différentes valeurs de T . On a pris $B_0 = \alpha = \lambda_0 = L_0 = \mu_0 = 1$.

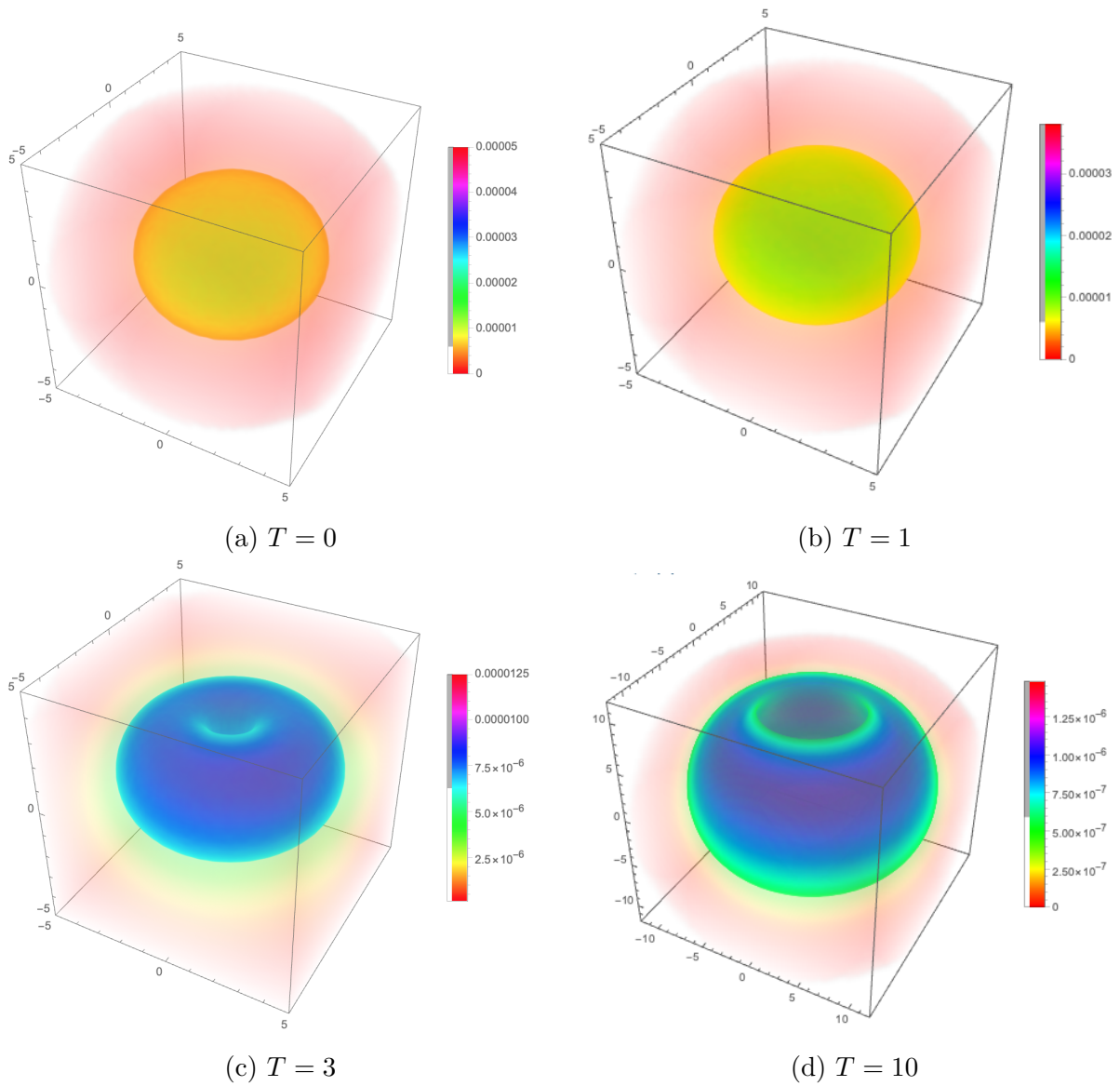


FIGURE 2.9 – Densités d'énergie pour différentes valeurs de T . On a pris $B_0 = \lambda_0 = L_0 = \mu_0 = 1$. Cette fois, on a pris $\alpha = 3$.

Chapitre 3

Formulation de Bateman

La construction de Bateman permet de générer un champ électromagnétique à l'aide de deux champs scalaires complexes.

Originellement, Bateman introduit un vecteur $\vec{M} = c\mathbf{B} \pm i\mathbf{E}$ et écrit ce \vec{M} en terme de deux potentiels scalaires complexes :

$$\vec{M} = \nabla\alpha \times \nabla\beta. \quad (3.1)$$

Cependant nous allons procéder de manière un peu différente, pour rester en accord avec nos conventions précédentes. Soient donc deux fonctions complexes $\alpha(x^\mu), \beta(x^\mu) \in \mathbb{C}$ et qui sont telles que

$$\partial_\mu\alpha \partial_\nu\beta - \partial_\nu\alpha \partial_\mu\beta = i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\rho\alpha \partial^\sigma\beta. \quad (3.2)$$

Si les fonctions (α, β) obéissent à ces équations “d’auto-dualité”, alors le tenseur anti-symétrique qu’elles définissent se trouve être un tenseur de Riemann-Silberstein et satisfait les équations de Maxwell. On a

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu\alpha \partial_\nu\beta - \partial_\nu\alpha \partial_\mu\beta = i \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \partial^\rho\alpha \partial^\sigma\beta, \quad (3.3)$$

avec l'équation

$$\partial_\mu R^{\mu\nu} = 0 \quad (3.4)$$

automatiquement satisfaite.

Nous allons à partir de maintenant appeler de telles fonctions (α, β) des potentiels de Bateman (on peut en réalité les associer à des potentiels d'Euler complexes [6], [7]). Ainsi, résoudre les équations de Maxwell dans le vide, sans source, revient à trouver deux scalaires obéissant à l'équation d'auto-dualité (3.2), ce qui s'avère nettement plus simple à manipuler que des tenseurs ou des vecteurs.-

Nous pouvons écrire le vecteur de Riemann-Silberstein de manière simple également

$$\vec{R} = -i \vec{\nabla}\alpha \times \vec{\nabla}\beta = \frac{\vec{E}}{c} + i\vec{B}, \quad (3.5)$$

nous permettant ainsi d'identifier les champs électrique et magnétique associés en séparant les parties réelles et imaginaires.

Par ailleurs, les conditions que nous avons imposées sur les champs, c'est-à-dire qu'ils doivent être de même norme et perpendiculaires entre eux, est trivialement satisfaite car

$$R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} = 0, \quad \left(\frac{\vec{E}}{c}\right)^2 = \vec{B}^2, \quad \frac{\vec{E}}{c} \cdot \vec{B} = 0. \quad (3.6)$$

3.1 Notre hopfion

Pour simple mention, le hopfion que nous avons construit dans le chapitre 2, avant qu'on ne lui applique un boost de Lorentz, et avec le facteur adimensionnel $\alpha = 1$, est généré par les potentiels de Bateman suivants :

$$\alpha = \frac{\sqrt{2B_0}\lambda_0^2}{L_0^2} \frac{A - 1 + iZ}{A + iT}, \quad (3.7)$$

$$\beta = \frac{\sqrt{2B_0}\lambda_0^2}{L_0^2} \frac{Y + iX}{A + iT}, \quad (3.8)$$

les deux premières fractions $\frac{\sqrt{2B_0}\lambda_0^2}{L_0^2}$ étant là afin d'obtenir les mêmes normalisations que dans le chapitre précédent.

3.2 Familles de nœuds

Cette manière de construire un nœud électromagnétique permet de générer des familles entières de nouveaux nœuds. En effet, pour toute paire (α, β) satisfaisant aux équations d'auto-dualité, les fonctions bi-holomorphes $(f(\alpha, \beta), g(\alpha, \beta))$ en ces deux variables y satisfont également.

En particulier, et cela va nous être utile par la suite, les transformations conformes des coordonnées $\{x^\mu\}$ peuvent engendrer de nouvelles solutions, qui peuvent être physiquement distinctes et donc non-triviales. De plus, de manière analogue au chapitre 1.1, puisque toutes les dérivées sont prises par rapport à x^μ , on peut procéder à une extension dans le plan complexe (en fait une continuation analytique, où toutes nos grandeurs correspondent à des fonctions holomorphes sur celui-ci). Par après, il suffit de séparer à nouveau les parties réelles et imaginaires du tenseur de Riemann-Silberstein associé pour récupérer de nouveaux champs électrique et magnétique.

3.3 Potentiels de jauge

Ces potentiels de Bateman définissent également des potentiels de jauge habituels, en effet :

$$\partial_\mu {}^*R^{\mu\nu} = 0 \quad (3.9)$$

permet de définir, dans l'espace-temps de Minkowski de topologie triviale, un potentiel vecteur complexe, $S_\mu \in \mathbb{C}$, tel que

$$R_{\mu\nu} = \partial_\mu S_\nu - \partial_\nu S_\mu. \quad (3.10)$$

Ce vecteur possède alors la symétrie locale de jauge suivante,

$$\tilde{S}_\mu = S_\mu + \partial_\mu \chi, \quad \chi(x^\mu) \in \mathbb{C}, \quad (3.11)$$

et on peut l'écrire en fonction des potentiels de jauge habituels pour les champs magnétique et électrique :

$$S_\mu = A_\mu + i C_\mu, \quad A_\mu, C_\mu \in \mathbb{R}, \quad (3.12)$$

comme discuté dans le chapitre 1.

Lorsque le tenseur de Riemann-Silberstein est donné par des potentiels de Bateman (α, β) , nous avons alors comme choix possibles

$$S_\mu = \frac{1}{2} (\alpha \partial_\mu \beta - \beta \partial_\mu \alpha) + \partial_\mu \gamma_1 = \alpha \partial_\mu \beta + \partial_\mu \gamma_2 = -\beta \partial_\mu \alpha + \partial_\mu \gamma_3, \quad (3.13)$$

où $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3 \in \mathbb{C}$ représentent des transformations de jauge complexes arbitraires. C'est donc bien la partie réelle de S^μ qui définit le potentiel de jauge vectoriel que l'on doit insérer dans l'action pour la particule. Mais nous verrons cela dans le chapitre 6.

3.4 Quantités conservées

Comme on l'a vu plus tôt, le hopfion a une énergie finie $E = \sqrt{3} \frac{B_0^2}{16\mu_0} \frac{\lambda_0^8}{(\alpha L_0)^5}$. On voit que pour les potentiels de Bateman correspondants, donnés dans la section 3.1, sa quantité de mouvement \mathbf{P} est donnée par $(0, 0, -\frac{E}{c})$ et son moment angulaire $\mathbf{L} = (0, 0, \frac{E}{2})$.

De plus, pour la famille de hopfions générée par

$$\mathbf{R} = (-i) \nabla f(\alpha, \beta) \times \nabla g(\alpha, \beta), \quad (3.14)$$

on peut relativement facilement retrouver comment se transforment ces quantités conservées à partir de l'énergie. Par exemple, pour la transformation la plus simple, on peut prendre $f(\alpha, \beta) = \alpha^p$ et $g(\alpha, \beta) = \beta^q$, où p et q sont premiers entre eux, et on obtient [6] que les quantités conservées quantité de mouvement et moment angulaire totaux s'expriment, en les calculant par rapport à $E_{(p,q)}$, l'énergie finie définie pour le nœud (p, q) , comme

$$\begin{aligned} \mathbf{P} &= \left(0, 0, -\frac{p}{p+q} E_{(p,q)} \right), \\ \mathbf{L} &= \left(0, 0, \frac{q}{p+q} E_{(p,q)} \right). \end{aligned} \quad (3.15)$$

Chapitre 4

Hopfion généré par topologie

Les premiers nœuds électromagnétiques ont été construits par Rañada à partir de son modèle topologique de l'électromagnétisme. Avec Trueba qui le rejoint peu après, ils ont écrit toute une série d'articles à partir de 1989 [2], [3], [8] - [15].

4.1 Le modèle topologique de l'électromagnétisme

Nous allons brièvement résumer les éléments de base constituant la théorie topologique de l'électromagnétisme. Cette théorie a été proposée pour la première fois par Rañada en 1989 [2]. Elle permet de créer des nœuds électromagnétiques. De plus, on peut montrer que tout champ électromagnétique de radiation (c'est-à-dire tel que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$) est localement égal à un nœud électromagnétique, et donc que le modèle topologique est localement équivalent à la théorie standard de radiation de Maxwell. Cependant, ces deux théories restent non équivalentes globalement. La différence se trouve au niveau du comportement des champs autour du point en l'infini [12].

Par ailleurs, le modèle donne une quantification naturelle de la charge électrique [13]. Ce mécanisme donne pour la charge fondamentale la valeur $q_0 = \sqrt{\hbar c}$, c'est-à-dire environ 3,3 fois la charge de l'électron.

Nous allons tout d'abord expliciter comment décrire le champ électromagnétique avec ses lignes de champ. Nous pouvons formaliser ces dernières en en prenant deux champs scalaires complexes lisses $\phi(\mathbf{r}, t), \theta(\mathbf{r}, t) : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$. Les lignes de champ électromagnétique se trouveront alors être les courbes de niveaux de ces deux champs scalaires ϕ et θ .

Commençons par considérer le champ magnétique $\mathbf{B}(\mathbf{r}, t)$, dont les lignes de champs sont les courbes de niveau de $\phi(\mathbf{r}, t)$. Nous représentons lesdites courbes par $\phi(t, x, y, z) = \phi_0$, où ϕ_0 est une constante labellisant chaque courbe/ligne de champ. Comme le champ magnétique est tangent en chaque point à ses lignes de champ, il est donné par

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = g(\mathbf{r}, t) \nabla \phi \times \nabla \bar{\phi}. \quad (4.1)$$

On sait que la divergence de \mathbf{B} doit être nulle,

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = \nabla g \cdot (\nabla \phi \times \nabla \bar{\phi}) = 0, \quad (4.2)$$

il suit que g doit dépendre uniquement de ϕ et $\bar{\phi}$. Nous pouvons réécrire \mathbf{B} comme

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = g(\phi, \bar{\phi}) \nabla \phi \times \nabla \bar{\phi}. \quad (4.3)$$

On peut écrire la partie spatiale du tenseur de Faraday F_{ij} sous la forme suivante :

$$F_{ij} = -\epsilon_{ijk}B_k = g(\phi, \bar{\phi})(\partial_i\bar{\phi}\partial_j\phi - \partial_j\phi\partial_i\bar{\phi}), \quad (4.4)$$

et en imposant la covariance, on obtient finalement

$$F_{\mu\nu} = g(\phi, \bar{\phi})(\partial_\mu\bar{\phi}\partial_\nu\phi - \partial_\nu\bar{\phi}\partial_\mu\phi). \quad (4.5)$$

On peut dériver le champ électrique à partir de cette dernière expression :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = g(\phi, \bar{\phi})(\partial_0\bar{\phi}\nabla\phi - \nabla\bar{\phi}\partial_0\phi). \quad (4.6)$$

Grâce à la dualité, nous pouvons procéder de manière analogue, mais cette fois en partant du champ électrique et du tenseur dual $*F_{\mu\nu}$. Nous définissons donc le champ électrique en termes du deuxième champ scalaire θ

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = h(\theta, \bar{\theta})\nabla\theta \times \nabla\bar{\theta}, \quad (4.7)$$

d'où on tire que

$$*F_{\mu\nu} = h(\theta, \bar{\theta})(\partial_\mu\bar{\theta}\partial_\nu\theta - \partial_\nu\bar{\theta}\partial_\mu\theta), \quad (4.8)$$

équation à partir de laquelle on obtient le champ magnétique \mathbf{B} en fonction de θ

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \frac{h(\theta, \bar{\theta})}{c}(\partial_0\bar{\theta}\nabla\theta - \nabla\bar{\theta}\partial_0\theta). \quad (4.9)$$

Ces quatre expressions pour \mathbf{E} et \mathbf{B} doivent bien entendu s'identifier deux par deux, ce qui permet d'obtenir des conditions sur g et h . On a

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = g(\phi, \bar{\phi})(\partial_0\bar{\phi}\nabla\phi - \nabla\bar{\phi}\partial_0\phi) = h(\theta, \bar{\theta})\nabla\theta \times \nabla\bar{\theta}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = g(\phi, \bar{\phi})\nabla\phi \times \nabla\bar{\phi} = \frac{h(\theta, \bar{\theta})}{c}(\partial_0\bar{\theta}\nabla\theta - \nabla\bar{\theta}\partial_0\theta). \quad (4.11)$$

Une solution possible à ces dernières équations prend la forme

$$\begin{aligned} g(\phi, \bar{\phi}) &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi i(1 + \bar{\phi}\phi)^2}, \\ h(\theta, \bar{\theta}) &= \frac{\sqrt{ac}}{2\pi i(1 + \bar{\theta}\theta)^2}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

où a est une constante dont nous trouverons l'expression exacte quand nous construirons explicitement le hopfion dans la section suivante.

Nous obtenons finalement que deux champs scalaires complexes lisses $\phi(\mathbf{r}, t)$ et $\theta(\mathbf{r}, t)$ décrivent un champ électromagnétique sous la forme

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi i} \frac{\nabla\phi \times \nabla\bar{\phi}}{(1 + \bar{\phi}\phi)^2}, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\sqrt{ac}}{2\pi i} \frac{\nabla\theta \times \nabla\bar{\theta}}{(a + \bar{\theta}\theta)^2}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

qui doivent également obéir aux relations

$$\begin{aligned}\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi i c (1 + \theta\bar{\theta})^2} (\partial_0\bar{\theta}\nabla\theta - \partial_0\theta\nabla\bar{\theta}), \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\sqrt{a}}{2\pi i (1 + \phi\bar{\phi})^2} (\partial_0\bar{\phi}\nabla\phi - \partial_0\phi\nabla\bar{\phi}).\end{aligned}\tag{4.14}$$

Nous pouvons à nouveau réécrire ces équations de manière covariante :

$$F_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{a}}{2\pi i} \frac{\partial_\mu\bar{\phi}\partial_\nu\phi - \partial_\nu\bar{\phi}\partial_\mu\phi}{(1 + \phi\bar{\phi})^2}.\tag{4.15}$$

Une relation analogue vaut pour le tenseur dual :

$$*F_{\mu\nu} = \frac{\sqrt{a}}{2\pi i} \frac{\partial_\mu\bar{\theta}\partial_\nu\theta - \partial_\nu\bar{\theta}\partial_\mu\theta}{(1 + \theta\bar{\theta})^2}.\tag{4.16}$$

4.2 Compactification de \mathbb{R}^3 et \mathbb{C}

Pour construire un champ électromagnétique acceptable, il convient de choisir des champs ϕ , θ , tels que son énergie, son moment angulaire et sa quantité de mouvement soient tous finis. Deux conditions de régularité à imposer sont donc

$$|\phi(r)| \rightarrow 0, \quad \text{et} \quad |\theta(r)| \rightarrow 0, \quad \text{quand } r = |\mathbf{r}| \rightarrow \infty.\tag{4.17}$$

Ces conditions impliquent, d'un point de vue mathématique, que nous identifions tous les points à l'infini à un seul point, ce qui est appelé une compactification de \mathbb{R}^3 par ϕ ou θ , respectivement.

De plus, nous devons imposer que les images inverses de $\phi = \infty$ et $\theta = \infty$, ne dépendent pas de la direction par laquelle on les approche dans \mathbb{C} .

Nous nous sommes occupés des points en l'infini de \mathbb{R}^3 et \mathbb{C} , il ne nous reste donc plus qu'à trouver des cartes pour le reste des points.

4.3 L'index de Hopf

La carte de Hopf est historiquement la première carte [16] qui envoie une sphère sur une sphère de dimension inférieure, ici $f : S^3 \rightarrow S^2$. En quelques mots simples, chaque point distinct de la 2-sphère correspond à un cercle distinct de la 3-sphère. On peut donc dire que la 3-sphère est composée de fibres, chaque fibre étant un cercle.

Les coordonnées cartésiennes (x, y, z) d'un point $P \in \mathbb{R}^3$ peuvent être associées à quatre coordonnées (s, u, v, w) , qui sont les coordonnées cartésiennes de la 3-sphère plongée dans la dimension 4 ; on a donc la condition $s^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 1$ pour se trouver sur la 3-sphère. Les expressions explicites, pour la projection stéréographique à partir du pôle nord sont

$$s = \frac{2x}{r^2 + 1}, \quad u = \frac{2y}{r^2 + 1}, \quad v = \frac{2z}{r^2 + 1}, \quad w = \frac{r^2 - 1}{r^2 + 1},\tag{4.18}$$

avec $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$.

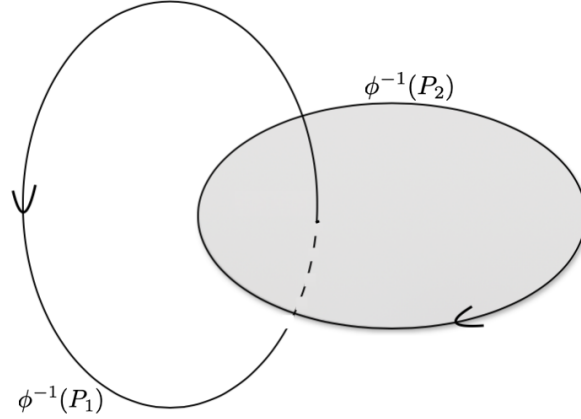


FIGURE 4.1 – Les deux courbes fermées $\phi^{-1}(P_1)$ et $\phi^{-1}(P_2)$. Leur indice de Hopf est $n = 1$.

Chaque point de \mathbb{C} peut être donné par un nombre complexe ξ , qui peut être représenté par trois coordonnées cartésiennes réelles, (k, l, m) , qui sont les coordonnées de la 2-sphère plongée dans la dimension trois, c'est-à-dire avec la condition $k^2 + l^2 + m^2 = 1$. La projection à partir du pôle nord donne

$$k = \frac{2 \operatorname{Re}(\xi)}{\xi \bar{\xi} + 1}, \quad l = \frac{2 \operatorname{Im}(\xi)}{\xi \bar{\xi} + 1}, \quad m = \frac{\xi \bar{\xi} - 1}{\xi \bar{\xi} + 1}. \quad (4.19)$$

Cela revient à compactifier \mathbb{R}^3 en S^3 et \mathbb{C} en S^2 , et on obtient finalement deux cartes $\phi, \theta : S^3 \rightarrow S^2$.

Ces cartes peuvent être divisées en classes d'homotopies, qui sont indexées par un invariant topologique que l'on appelle l'indice de Hopf.

Si on prend deux points P_1 et P_2 dans S^2 , nous pouvons prendre leurs images inverses par ϕ , $\phi^{-1}(P_1)$ et $\phi^{-1}(P_2)$, qui seront deux courbes fermées dans S^3 . Leur nombre d'entrelacement (de Gauss) est défini par le nombre d'intersections entre la surface orientée définie par l'une des courbes et l'autre courbe (voir fig. 4.1). Ce nombre ne dépend pas de la paire de points puisque, si on déplace de manière continue les points (P_1, P_2) vers (P'_1, P'_2) , les images inverses ne peuvent pas se nouer ou se dénouer, puisqu'elles devraient avoir pour cela des points communs, alors qu'on a défini que pour des points distincts dans S^2 , on a des images distinctes dans S^3 . De la même manière, si la carte ϕ évolue dans le temps, le nombre d'entrelacement doit rester le même.

L'indice de Hopf est défini comme le nombre d'entrelacement entre deux courbes images inverses de deux points quelconques de S^2 . Il est donc défini une fois pour toutes pour l'entièreté de la carte. Il s'agit d'une généralisation du nombre d'entrelacement de Gauss. Les cartes peuvent donc être divisées en classes d'homotopies, chacune représentée par son indice de Hopf n .

En 1947, Whitehead [17] montre que l'on pouvait écrire l'index de Hopf comme une intégrale, formulation qui va ici nous être utile.

$$n = \int_{S^3} A \wedge F, \quad (4.20)$$

avec $F = dA$ les formes définies précédemment. Rappelons-nous que, dans \mathbb{R}^3 , ces formes

s'écrivent

$$F = -\frac{1}{2}\epsilon_{ijk}B_k dx^i \wedge dx^j, \quad A = -A_i dx^i, \quad (4.21)$$

avec $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A}$.

On peut alors réécrire l'index de Hopf comme

$$H(\phi) = n = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3x, \quad (4.22)$$

ce qui est directement proportionnel à l'hélicité magnétique, moyennant des constantes dimensionnelles.

Par des manipulations similaires, en partant du champ θ on a également

$$H(\theta) = \int_{\mathbb{R}^3} \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} d^3x. \quad (4.23)$$

4.4 Le nœud de Hopf-Rañada

La solution explicite aux éqs. (4.13) et (4.14) décrivant les nœuds électromagnétiques est introduite pour la première fois par Rañada dans [3]. Avec nos conventions, nous avons

$$\begin{aligned} \phi &= \frac{(AX - TZ) + i(AY + t - T(A - 1))}{(AZ + TX) + i(A(A - 1) - TY)}, \\ \theta &= \frac{(AY + T(A - 1) + i(AZ + TX))}{(AX - TZ) + i(A(A - 1) - TY)}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

avec, définis comme précédemment, (T, X, Y, Z) sans dimensions :

$$\begin{aligned} X &= \frac{x}{L_0}, \quad Y = \frac{y}{L_0}, \quad Z = \frac{z}{L_0}, \quad T = \frac{ct}{L_0}, \\ A &= \frac{X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2 + 1}{2}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Nous obtenons alors pour les champs électrique et magnétique :

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\sqrt{a}}{\pi L_0^2} \frac{Q\mathbf{H}_1 + P\mathbf{H}_2}{(A^2 + T^2)^3}, \\ \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) &= \frac{c\sqrt{a}}{\pi L_0^2} \frac{Q\mathbf{H}_2 - P\mathbf{H}_1}{(A^2 + T^2)^3}, \end{aligned} \quad (4.26)$$

où les quantités P, Q sont définies par

$$Q = A(A^2 - 3T^2), \quad P = T(T^2 - 3A^2), \quad (4.27)$$

et

$$\mathbf{H}_1 = \begin{pmatrix} Y + T - XZ \\ -X - Z(Y + T) \\ \frac{1}{2}(X^2 - Z^2 + -1 + (T + Y)^2) \end{pmatrix} \quad \mathbf{H}_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}(X^2 - Z^2 + 1 - (T + Y)^2) \\ -Z + (T + Y)X \\ Y + XZ + T \end{pmatrix}. \quad (4.28)$$

Nous pouvons finalement identifier $a = \frac{\pi^4 B_0^2 \lambda_0^8}{4L_0^4}$, pour concorder avec notre hopfion construit par inversion conforme. Dimensionnellement, on a

$$[a] = \hbar c \mu_0.$$

Considérons maintenant l'index de Hopf du nœud. Nous avons écrit ici ϕ et θ comme des champs scalaires complexes $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$, essayons maintenant de les paramétriser en tant que cartes $S^3 \times \mathbb{R} \rightarrow S^2$.

Écrivons ϕ et θ en termes de

$$\phi = \frac{s + iu}{v + w}, \quad (4.29)$$

$$\theta = \frac{u + iv}{s + iw}, \quad (4.30)$$

avec

$$\begin{aligned} s(\mathbf{r}, t) &= \frac{AX - TZ}{(A^2 + T^2)}, \\ u(\mathbf{r}, t) &= \frac{AY + T(A - 1)}{(A^2 + T^2)}, \\ v(\mathbf{r}, t) &= \frac{AZ + TX}{(A^2 + T^2)}, \\ w(\mathbf{r}, t) &= \frac{A(A - 1) - TY}{(A^2 + T^2)}, \end{aligned} \quad (4.31)$$

toujours avec $s^2 + u^2 + v^2 + w^2 = 1$. On peut interpréter ces expressions comme se trouver sur la sphère S^3 plongée en quatre dimensions, qui se déforme de manière lisse avec le temps. Nous avons de plus

$$\phi = \frac{k + il}{1 - m}, \quad (4.32)$$

avec $k^2 + l^2 + m^2 = 1$. Les relations inverses sont

$$\begin{aligned} k &= \frac{\phi + \bar{\phi}}{\phi\bar{\phi} + 1}, \\ l &= \frac{i(\bar{\phi} - \phi)}{\phi\bar{\phi} + 1}, \\ m &= \frac{\phi\bar{\phi} - 1}{\phi\bar{\phi} + 1}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Nous pouvons donc établir, pour la carte $\phi = S^3 \times \mathbb{R} \rightarrow S^2$, la correspondance suivante :

$$\begin{aligned}
k &= 2(sv + uw) \\
&= \frac{2}{(A^2 + T^2)^2} \{ (A^2 - T^2)(XZ + Y(A - 1)) + AT(X^2 - Y^2 - Z^2 + (A - 1)^2) \}, \\
l &= 2(uv - sw) \\
&= \frac{2}{(A^2 + T^2)^2} \{ (A^2 - T^2)(YZ - X(A - 1)) + 2AT(XY + Z(A - 1)) \}, \\
m &= s^2 + u^2 - v^2 - w^2 \\
&= \frac{1}{(A^2 + T^2)^2} \{ (A^2 - T^2)(X^2 + Y^2 - Z^2 - (A - 1)^2) + 4AT(Y(A - 1) - XZ) \}.
\end{aligned} \tag{4.34}$$

Il s'agit de la carte de Hopf correspondant au champ magnétique du nœud. Hopf lui-même a démontré que son index de Hopf est de 1.

Il en va de même pour la carte correspondant à θ , qui peut être obtenue à partir de l'éq. (4.34) en procédant aux remplacements $s \rightarrow u, u \rightarrow v, v \rightarrow s$.

Chapitre 5

L'index de Hopf et l'hélicité

L'hélicité est utilisée dans deux contextes différents : pour caractériser la topologie des lignes de champs d'un champ sans divergence (c'est-à-dire la façon dont elles s'enroulent sur elles-mêmes) ; ou, dans le domaine de la physique des particules, pour caractériser le signe de la projection du spin sur la direction du mouvement.

5.1 L'hélicité

Intéressons-nous tout d'abord au domaine de la topologie.

Tout champ vectoriel de divergence nulle sur un domaine $D \subset \mathbb{R}^3$ définit une intégrale qu'on appelle son hélicité. Pour le champ magnétique, on parle d'hélicité magnétique où on choisit alors $D = \mathbb{R}^3$, elle est donnée par

$$h_B = \frac{1}{2c\mu_0} \int \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3x, \quad (5.1)$$

avec \mathbf{A} le potentiel vecteur magnétique tel que $\mathbf{B} = \nabla \times \mathbf{A} = -\frac{\partial \mathbf{C}}{\partial t}$.

Dans notre cas, comme nous sommes dans le vide et que \mathbf{E} est donc sans divergence, nous pouvons définir de manière analogue l'hélicité électrique,

$$h_E = \frac{1}{2c^3\mu_0} \int \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} d^3x, \quad (5.2)$$

avec \mathbf{C} le potentiel vecteur électrique tel que $\mathbf{E} = \nabla \times \mathbf{C} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$.

L'hélicité électromagnétique est définie uniquement dans le cas de champs dans le vide par $h = h_B + h_E$.

Commençons par montrer que ces trois quantités sont invariantes dans le temps. Si nous considérons le cas d'un "null-field", c'est-à-dire entre autres tel que $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B} = 0$, ce qui est le cas pour le hopfion, nous avons que

$$\begin{aligned} \frac{dh_B}{dt} &= -\frac{1}{c\mu_0} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} d^3x, \\ \frac{dh_E}{dt} &= \frac{1}{c\mu_0} \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{B} d^3x, \end{aligned} \quad (5.3)$$

qui sont nuls dans le cas de nos champs perpendiculaires l'un à l'autre. Les hélicités électrique et magnétique sont donc conservées séparément dans le temps. Nous avons de

plus la propriété agréable que, même pour un champ non nécessairement de radiation – c'est-à-dire où $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$ n'est pas nécessairement nul – l'hélicité électromagnétique $h = h_B + h_E$ reste conservée dans le temps.

En fait, les hélicités magnétique et électrique sont égales.

Tout d'abord, nous pouvons voir qu'elles ont le même signe, mais pas forcément la même valeur, en observant que

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{E} = 0, \quad (5.4)$$

où $\mathbf{B} \cdot \nabla \times \mathbf{B}$ et $\mathbf{E} \cdot \nabla \times \mathbf{E}$ ont le même signe.

La fin de la démonstration, qui identifie h_E et h_B , est un peu compliquée [3]. Nous utiliserons une autre formulation dans la section 5.2, qui la rendra plus simple. On en déduit ensuite que les index de Hopf des cartes ϕ et θ sont aussi égaux.

$$H(\phi) = H(\theta). \quad (5.5)$$

Or, nous savons que

$$\begin{aligned} h_B &= \frac{\pi^4 B_0^2 \lambda_0^8}{8L_0^4 c \mu_0} H(\phi), \\ h_E &= \frac{\pi^4 B_0^2 \lambda_0^8}{8L_0^4 c \mu_0} H(\theta), \end{aligned} \quad (5.6)$$

et donc

$$H(\phi) = H(\theta) \quad (5.7)$$

Nous allons maintenant observer quel est le lien entre l'hélicité topologique de notre hopfion et l'hélicité du point de vue des particules.

Écrivons le potentiel vecteur \mathbf{A} comme une intégrale de Fourier,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \frac{d^3k}{\sqrt{2\omega}} \{(\epsilon_R a_R + \epsilon_L a_L) e^{-ikx} + (\epsilon_R \bar{a}_R + \epsilon_L \bar{a}_L) e^{ikx}\}, \quad (5.8)$$

avec ϵ_R, ϵ_L les vecteurs unités de polarisation droite et gauche et a_R, a_L des fonctions de k . Nous avons bien entendu une expression similaire pour \mathbf{C} , avec $c_R = ia_r$ et $c_L = -ia_L$ puisque les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} sont duaux dans le vide, sans source. Nous avons alors, pour l'hélicité électromagnétique,

$$h = h_B + h_E = \hbar \int d^3k \{\bar{a}_R(\mathbf{k}) a_R(\mathbf{k}) - \bar{a}_L(\mathbf{k}) a_L(\mathbf{k})\} \quad (5.9)$$

En électrodynamique quantique, a_R et a_L sont les opérateurs d'annihilation (respectivement \bar{a}_R, \bar{a}_L , de création) des photons. Cette dernière intégrale est donc l'opérateur qui compte la différence entre le nombre de photons droits et de photons gauches, que l'on peut écrire simplement $\hbar(N_R - N_L)$.

En assemblant les éqs. (5.6) et (5.9), nous obtenons finalement que

$$\frac{\pi^4 B_0^2 \lambda_0^8}{8L_0^4 \hbar c \mu_0} (H(\phi) + H(\theta)) = N_R - N_L \quad (5.10)$$

En conclusion de cette section, on peut dire que les nœuds électromagnétiques sont stables, car leur index de Hopf, et donc leur hélicité magnétique et électrique, c'est-à-dire la façon dont ils sont enroulés sur eux mêmes, sont constants. Donc même si leur densité d'énergie tend vers zéro en fonction du temps, les nœuds conservent leur structure caractéristique.

De plus, l'éq. (5.10), appelée quantification topologique de l'hélicité électromagnétique, nous garantit que la différence en nombre entre les photons droits et gauches est conservée.

Finalement, pour en revenir à notre hopfion, à partir de la section 4.3 qui nous dit que l'index de Hopf de la carte correspondante est 1, et de la section 4.4 qui identifie index de Hopf et hélicité, on obtient finalement que les hélicités électrique et magnétique du hopfion valent $h_B = h_E = \frac{a}{2c\mu_0} = \frac{\pi^2 B_0^2 \lambda_0^8}{16\mu_0 L_0^5}$, et son hélicité électromagnétique vaut $h = \frac{a}{c\mu_0} = \frac{\pi^2 B_0^2 \lambda_0^8}{8\mu_0 L_0^5}$.

5.2 Formulation de Bateman

La formulation de Bateman permet de montrer facilement que, pour les nœuds électromagnétiques, les hélicités électrique et magnétique sont égales entre elles.

Pour plus de facilité, définissons simplement un nouveau vecteur potentiel complexe avec la convention $\mathbf{V} = \mathbf{C} + i\mathbf{A}$, tel que $\mathbf{R} = \nabla \times \mathbf{V}$. Nous avons alors, par simple identité vectorielle :

$$V = (-i)\alpha \nabla \beta. \quad (5.11)$$

On peut vérifier que les hélicités électrique et magnétiques sont égales en procédant au calcul suivant :

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} &= \alpha \nabla \beta \cdot (\nabla \alpha \times \nabla \beta) = 0 \\ \Rightarrow \mathbf{C} \cdot \mathbf{E} - \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= 0. \end{aligned} \quad (5.12)$$

De plus, avec nos familles de hopfions générées par les conventions du chapitre 3.2, nous pouvons exprimer les hélicités électrique et magnétique [7] comme dépendant uniquement de l'énergie totale du hopfion et des puissances auxquelles nous élevons α et β :

$$h_E = h_B = \frac{E}{p+q}. \quad (5.13)$$

Chapitre 6

Particule chargée relativiste dans un champ électromagnétique externe

Dans ce chapitre, nous dérivons les équations pour la trajectoire d'une particule relativiste, chargée, massive ou non, plongée dans un champ électromagnétique externe constant dans le temps et homogène.

6.1 L'action scalaire de la particule

6.1.1 Action lagrangienne

L'action scalaire habituelle pour une particule de masse m_0 , de charge q , dans un champ électromagnétique externe, est donnée par

$$S_1[x^\mu] = \int d\tau L_1(x^\mu, \dot{x}^\mu, \lambda; A^\mu(x^\mu)), \quad (6.1)$$

$$L_1(x^\mu, \dot{x}^\mu, \lambda; A^\mu(x^\mu)) = -m_0 c \sqrt{\eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu} - q \dot{x}^\mu A_\mu(x^\mu), \quad (6.2)$$

$$\dot{x}^\mu = \frac{dx^\mu}{d\tau}, \quad (6.3)$$

dans laquelle τ paramètre d'évolution temporelle de la particule, le long de sa ligne d'univers $x^\mu(\tau)$; il s'agit d'un paramètre sans dimension physique. x^μ a une dimension physique de longueur L . On a l'élément géométrique de la métrique de Minkowski $ds_M^2 \equiv \eta_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$, l'élément géométrique induit sur la ligne d'univers de la particule $ds^2 = \eta_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau} (d\tau)^2 = \dot{x}^2 (d\tau)^2$. La métrique de l'espace-temps de Minkowski dans laquelle la ligne d'univers est plongée induit une nouvelle métrique sur cette ligne d'univers : $ds^2 = g_{\tau\tau} (d\tau)^2$, avec $g_{\tau\tau} = \dot{x}^2 > 0$ (particule de genre temps de masse non nulle ou de genre lumière de masse nulle). On a comme *einbein* induit sur la ligne d'univers $e_\tau = \sqrt{g_{\tau\tau}} = \sqrt{\dot{x}^2} > 0$.

Cependant, nous souhaitons utiliser une action restant valable dans le cas d'une masse nulle, et le lagrangien (6.2) ne convient plus, car il devient dans ce cas trivial (il ne reste que le terme de bord dû au champ électromagnétique externe).

Prenons donc l'action définie par

$$S_2[x^\mu, \lambda] = \int d\tau L_2(x^\mu, \dot{x}^\mu, \lambda; A^\mu(x^\mu)), \quad (6.4)$$

avec le lagrangien

$$L_2(x^\mu, \dot{x}^\mu, \lambda; A^\mu(x^\mu)) = -\frac{1}{2\lambda}\eta_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu - \frac{\lambda}{2}(m_0c)^2 - q\dot{x}^\mu A_\mu(x^\mu). \quad (6.5)$$

$\lambda(\tau)$ est en fait un degré de liberté additionnel non dynamique. En effet, son équation différentielle ne dépend pas de $\dot{\lambda}$. $\lambda(\tau)$ correspond en fait à l'*einbein* d'une structure métrique intrinsèque à la ligne d'univers, $g_{\tau\tau}$ (contrairement à l'*einbein* introduit plus haut qui est, lui, induit par la métrique de Minkowski). On a alors $ds^2 = g_{\tau\tau}(d\tau)^2 = \gamma^2(\tau)(d\tau)^2$, qui a donc $\gamma(\tau) > 0$ comme *einbein*, indépendante des $x^\mu(\tau)$.

Essentiellement, $\lambda(\tau)$ correspond à $\gamma(\tau)$, avec notamment le fait que $\lambda(\tau)$ ne peut pas s'annuler ni changer de signe. En effet, si λ pouvait s'annuler pour un certain τ , cela voudrait dire que la métrique s'annule aussi pour ce τ et donc il y aurait une dégénérescence de la métrique riemannienne intrinsèque à la ligne d'univers pour cette valeur de τ .

On a donc construit une nouvelle action S_2 qui est plus générale que S_1 , puisque si, dans le cas d'une masse m_0 nulle, S_1 devient triviale, S_2 quant à elle est toujours valide. On peut se convaincre que dans le cas massif, les dynamiques décrites par les actions S_2 et S_1 sont équivalentes. Pour le montrer, il suffit de remplacer λ par sa solution à son équation du mouvement. En variant l'action linéairement avec $\delta\lambda$, on a

$$0 = \int d\tau \delta\lambda \left(\frac{1}{2\lambda^2} \eta_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - \frac{(m_0c)^2}{2} \right) \quad (6.6)$$

$$\Rightarrow \lambda(\tau) = \frac{\sqrt{\dot{x}^2}}{m_0c} > 0. \quad (6.7)$$

On a donc bien que dans le cas d'une masse non nulle, λ est directement proportionnel, à un facteur $1/(m_0c)$ près, à l'élément géométrique invariant sous les difféomorphismes de la ligne d'univers.

Si on remplace à présent cette dernière expression pour $\lambda(\tau)$ dans l'action S_2 , on obtient à nouveau l'action S_1 , ce qui démontre que ces deux actions décrivent la même dynamique pour le cas d'une particule de masse non-nulle.

Par ailleurs, d'après l'éq. (6.6), la dimension physique de λ est $M^{-1} \cdot T$ (car τ est adimensionnel).

6.1.2 Action hamiltonienne

Considérons une troisième forme d'action, on a

$$S[x^\mu, p_\mu, \lambda] = \int d\tau L(x^\mu, \dot{x}, p_\mu, \lambda; A^\mu(x^\mu)), \quad (6.8)$$

avec

$$\begin{aligned} L(x^\mu, \dot{x}, p_\mu, \lambda; A^\mu(x^\mu)) &= \dot{x}^\mu p_\mu - H(x^\mu, p_\mu, \lambda; A^\mu(x^\mu)) \\ &= \dot{x}^\mu p_\mu + \frac{\lambda}{2} \left((p_\mu + qA_\mu)^2 - (m_0c)^2 \right), \end{aligned} \quad (6.9)$$

et pour l'hamiltonien,

$$H(x^\mu, p_\mu, \lambda; A^\mu(x^\mu)) = -\frac{\lambda}{2} \left((p_\mu + qA_\mu(x^\mu))^2 - (m_0c)^2 \right). \quad (6.10)$$

Au niveau des dimensions physiques, on a bien, comme d'habitude pour nos conventions,

$$\begin{aligned} [S] &= M \cdot L^2 \cdot T^{-1}; & [x^\mu] &= L; & [p_\mu] &= M \cdot L \cdot T^{-1} \\ [qA_\mu] &= M \cdot L \cdot T^{-1}; & [qF_{\mu\nu}] &= M \cdot T^{-1}; & [\lambda] &= M^{-1} \cdot T. \end{aligned} \quad (6.11)$$

On a le crochet de Poisson $\{x^\mu, p_\nu\} = \delta_\nu^\mu$ et les équations hamiltoniennes du système

$$\begin{aligned} \frac{dx^\mu}{d\tau} &= \{x^\mu, H\} = -\lambda(p^\mu + qA^\mu), \\ \frac{dp^\mu}{d\tau} &= \{p^\mu, H\} = \lambda q(p^\nu + qA^\nu) \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu}. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Ici, λ définit un degré de liberté auxiliaire, non dynamique, qui joue le rôle de multiplicateur de Lagrange pour la contrainte correspondant à la valeur nulle que doit prendre le générateur des difféomorphismes de la ligne d'univers, qui est en fait une charge de Noether. Cette contrainte est donnée par

$$\phi(x^\mu, p_\mu) = \frac{1}{2} ((p_\mu + qA_\mu(x^\mu))^2 - (m_0c)^2) = 0. \quad (6.13)$$

En effet, par construction, les trois actions sont invariantes sous transformations de coordonnées dans la variable τ . La physique ici décrite doit être indépendante du choix de paramétrisation de la ligne d'univers en fonction de τ , et donc le générateur des difféomorphismes doit s'annuler pour les équations du mouvement qui sont indépendantes du choix de coordonnées τ .

S_1, S_2 et S décrivent la même dynamique dans le cas d'une particule relativiste de masse non-nulle. Pour une particule de masse nulle, S_2 et S décrivent encore la même dynamique. Pour le vérifier, commençons par éliminer les moments conjugués p^μ en les remplaçant par l'expression donnée par les équations hamiltoniennes :

$$p^\mu = -\frac{\dot{x}^\mu}{\lambda} - qA^\mu(x^\mu). \quad (6.14)$$

Remplaçons ensuite cette expression dans l'éq (6.9), on obtient

$$\begin{aligned} L &= -\frac{\dot{x}^2}{\lambda} - q\dot{x}^\mu A_\mu \lambda \left\{ \frac{\dot{x}^2}{\lambda^2} - (m_0c)^2 \right\} \\ &= -\frac{\dot{x}^2}{2\lambda} - \frac{\lambda}{2} (m_0c)^2 - q\dot{x}^\mu A_\mu = L_2 \end{aligned} \quad (6.15)$$

Par ailleurs, si on substitue cette même relation dans l'équation hamiltonienne pour p^μ , on obtient l'équation du mouvement pour x^μ obtenue avec l'action S_2 . Enfin, toujours en substituant cette relation pour p^μ , si on la replace dans la contrainte $\phi = 0$, on obtient

$$\frac{\dot{x}^2}{2\lambda^2} - \frac{(m_0c)^2}{2} = 0. \quad (6.16)$$

Ainsi, dans le cas de masse non nulle, nous avons à nouveau $\lambda = \frac{1}{m_0c} \sqrt{\dot{x}^2}$, ce qui conduit finalement aussi à l'action S_1 .

6.2 Équation du mouvement

Nous avons donc les équations du mouvement suivantes :

$$\begin{aligned}\frac{dx^\mu}{d\tau} &= \{x^\mu, H\} = -\lambda(p^\mu + qA^\mu), \\ \frac{dp^\mu}{d\tau} &= \{p^\mu, H\} = \lambda q(p^\nu + qA^\nu) \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu},\end{aligned}\quad (6.17)$$

avec la contrainte suivante :

$$(p^\mu + qA^\mu(x^\mu))^2 = (m_0c)^2. \quad (6.18)$$

La liberté de choix de paramétrisation de λ , fonction de τ , paramétrise la liberté de paramétrisation en τ de la ligne d'univers de la particule. On choisit de paramétriser λ tel que

$$\frac{ds(\tau)}{d\tau} = \lambda(\tau), \quad (6.19)$$

$$s(\tau) = \int_{\tau_0}^{\tau} d\tau' \lambda(\tau'), \quad (6.20)$$

avec pour condition initiale $s(\tau = \tau_0) = 0$. Puisque, comme nous l'avons précisé plus haut, $\lambda(\tau) > 0$ pour tout τ , alors $s(\tau)$ est une fonction strictement croissante et donc bijective sur son domaine, avec $s(\tau)$ sa réciproque unique. Comme λ est de dimension L , on en déduit que s est de dimension $M^{-1} \cdot T$.

Nous pouvons changer de paramétrisation en exprimant les dérivées comme

$$\frac{d}{d\tau} = \frac{ds}{d\tau} \frac{d}{ds} = \lambda \frac{d}{ds}, \quad (6.21)$$

avec en condition initiale

$$\tau = \tau_0, \quad s(\tau_0) = 0. \quad (6.22)$$

Comme $\lambda(\tau) > 0$, alors $s(\tau)$ est une fonction strictement croissante selon τ , avec une fonction réciproque unique $\tau(s)$. En raison de l'adimensionnalité de τ , la dimension de s est $M^{-1} \cdot T$.

Nous pouvons donc réécrire les équations (6.17) sous la forme

$$\frac{dx^\mu}{ds} = -(p^\mu + qA^\mu(x^\mu)) \quad (6.23)$$

$$\frac{dp^\mu}{ds} = q \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} (p^\nu + qA^\nu(x^\mu)), \quad (6.24)$$

équations toujours soumises à la même contrainte

$$(p^\mu + qA^\mu(x^\mu))^2 = (m_0c)^2. \quad (6.25)$$

Ces équations différentielles d'ordre 1 impliquent des équations différentielles d'ordre 2 de la forme

$$\frac{d^2x^\mu}{ds^2} = q \left(\frac{\partial A^\mu}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu}{\partial x_\mu} \right) \frac{dx^\nu}{ds} = q F^\mu{}_\nu \frac{dx^\nu}{ds}, \quad (6.26)$$

$$p^\mu = -\frac{dx^\mu}{ds} - q A^\mu(x^\mu), \quad (6.27)$$

$$\left(\frac{dx^\mu}{ds} \right)^2 = (m_0 c^2)^2. \quad (6.28)$$

Nous pouvons maintenant introduire le quadri-vecteur vitesse de la particule

$$u^\mu \equiv \frac{dx^\mu}{ds}. \quad (6.29)$$

Avec la contrainte (6.28), on a

$$u^\mu = \left(\frac{E}{c}, \mathbf{p}_0 \right), \quad u^2 = (m_0 c)^2, \quad \left(\frac{E}{c} \right)^2 - \mathbf{p}_0^2 = (m_0 c)^2, \quad (6.30)$$

avec E l'énergie et \mathbf{p}_0 la quantité de mouvement, deux quantités relativistes et invariantes de jauge de la particule.

Ces quantités ne sont pas conservées en présence du champ électromagnétique externe $F^{\mu\nu}$.

On a donc comme équations pour la dynamique du système

$$\frac{dx^\mu}{ds} = u^\mu \quad (6.31)$$

$$\frac{du^\mu}{ds} = q F^\mu{}_\nu(x^\mu(s)) u^\nu(s), \quad (6.32)$$

$$u^2(s) = (m_0 c)^2. \quad (6.33)$$

Les deux premières équations sont couplées entre elles si $F^\mu{}_\nu(x^\mu)$ dépend de la position dans l'espace-temps.

Les solutions de ces équations sont uniques si on précise leurs conditions initiales en $s = 0$ ou $\tau = \tau_0$,

$$x^\mu(s = 0) = \bar{x}^\mu, \quad u^\mu(s = 0) = \bar{u}^\mu. \quad (6.34)$$

De plus remarquons que si la contrainte (6.28) est vérifiée par les conditions initiales, alors elle le reste tout le long de la ligne d'univers de la particule. En effet, comme $F^\mu{}_\nu$ est antisymétrique, si on multiplie par u_μ l'équation (6.32), on obtient

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{ds} (u^2(s)) &= 0 \\ u^2(s) &= u^2(s = 0) = \bar{u}^2 = (m_0 c)^2. \end{aligned} \quad (6.35)$$

Enfin, notons que ces équations du mouvement soit valables que la masse de la particule soit nulle ou non. Seule la quadri-vitesse est influencée par la masse de la particule, nulle dans le cas d'une particule de genre lumière et non nulle pour une particule de genre temps.

6.3 Vérifications pour la force de Lorentz

Nous allons maintenant procéder à quelques vérifications dimensionnelles et physiques, afin de voir si les équations que nous avons établies précédemment sont équivalentes aux équations du mouvement habituelles dans le cas de force de Lorentz écrite en fonction des champs électrique et magnétique.

Nous avons

$$\frac{E}{c} = u^0 = \frac{dx^0}{ds} = c \frac{dt}{ds}, \quad \frac{dt}{ds} = \frac{E}{c^2}, \quad (6.36)$$

avec t le temps physique (que l'on mesure donc dans le référentiel inertiel). Nous pouvons exprimer les équations du mouvement en terme du temps physique t plutôt qu'en terme du temps propre s .

De l'éq. (6.32), nous avons pour $\mu = 0$ que

$$\frac{du^0}{ds} = qF^0{}_i u^i = \frac{q}{cd} \mathbf{p}_0 \cdot \mathbf{E}. \quad (6.37)$$

En y insérant l'éq. (6.36), on obtient

$$\frac{dE}{dt} = q \frac{d\mathbf{x}}{dt} \cdot \mathbf{E}. \quad (6.38)$$

Cette équation correspond à ce que la variation instantanée de l'énergie de la particule est égale au travail développé par le champ électrique, comme on l'attend.

Pour les composantes spatiales $\mu = i = 1, 2, 3$, nous avons

$$\frac{du^i}{ds} = qF^i{}_0 u^0 + qF^i{}_j u^j = q \frac{E^i}{c} c \frac{dt}{ds} + q \left(\frac{d\mathbf{x}}{ds} \times \mathbf{B} \right)^i. \quad (6.39)$$

En prenant $u^i = p_0^i$ et en multipliant chaque membre par dt/ds , nous obtenons

$$\frac{d\mathbf{p}_0}{dt} = q\mathbf{E} + q \frac{d\mathbf{x}}{dt} \times \mathbf{B}, \quad (6.40)$$

ce qui correspond, comme attendu, à l'équation du mouvement d'une particule chargée, soumise à la force de Lorentz.

Enfin, dans le cas d'une particule massive, il vient de $(E/c)^2 - \mathbf{p}_0^2 = (m_0 c)^2$ que

$$E = m_0 c^2 \gamma, \quad \mathbf{p}_0 = \gamma m_0 \frac{d\mathbf{x}}{dt}, \quad \text{avec } \gamma = \sqrt{\frac{1}{1 - \frac{1}{c^2} \left(\frac{d\mathbf{x}}{dt} \right)^2}}. \quad (6.41)$$

6.4 Trajectoire dans un champ électromagnétique critique homogène statique

Considérons un champ électromagnétique statique et homogène noté

$$\bar{F}_{\mu\nu} \equiv F_{\mu\nu}(x^\mu). \quad (6.42)$$

$\bar{F}_{\mu\nu}$ est donc un tenseur de Faraday constant dans le temps et l'espace. Nous choisissons la jauge pour le potentiel électromagnétique telle que

$$A_\mu(x^\mu) = -\frac{1}{2}\bar{F}_{\mu\nu}x^\nu, \quad (6.43)$$

pour avoir $\bar{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$.

Les équations du mouvement (6.31) à (6.33) se découpent alors et deviennent :

$$\frac{dx^\mu(s)}{ds} = u^\mu(s), \quad \frac{du^\mu(s)}{ds} = q\bar{F}^\mu{}_\nu u^\nu(s), \quad u^2(s) = (m_0c)^2. \quad (6.44)$$

Notons à présent le tenseur de Faraday comme une matrice 4×4 \mathbb{F} , de manière à ce que

$$\bar{\mathbb{F}} = [\bar{F}^\mu{}_\nu].$$

La solution générale aux équations du mouvement est alors de la forme suivante :

$$u^\mu(s) = [\exp(qs\bar{\mathbb{F}})]^\mu{}_\nu \bar{u}^\nu, \quad (6.45)$$

$$x^\mu(s) = \bar{x}^\mu + \int_0^s ds' [\exp(qs'\bar{\mathbb{F}})]^\mu{}_\nu \bar{u}^\nu, \quad (6.46)$$

$$\bar{u}^2 = (m_0c)^2. \quad (6.47)$$

La dépendance en s de ces équations sera en fonction du signe de $(\mathbf{E}/c)^2 - \mathbf{B}^2$ et de la valeur de $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$. Cette dépendance sera soit trigonométrique et donc périodique, ou hyperbolique et donc non bornée. Le troisième cas est celui qui nous intéresse ; dans le cas des champs critiques, nous nous trouvons juste "entre" ces deux possibilités.

Considérons donc le champ électromagnétique introduit par l'éq. (2.2), c'est-à-dire que

$$\frac{\mathbf{E}}{c} = \frac{E_0}{c}\hat{e}_1 = B_0\hat{e}_1; \quad \mathbf{B} = B_0\hat{e}_2. \quad (6.48)$$

Rappelons qu'il s'agit du champ électromagnétique que l'on utilise ensuite pour construire le hopfion, à l'aide d'une inversion conforme, d'une translation complexe dans le temps puis d'un boost de Lorentz.

Nous pouvons réécrire cette configuration comme

$$\begin{aligned} \frac{E^i}{c} &= \frac{E_0}{c}\delta^{i1} = B_0\delta^{i1}, \\ B^i &= B_0\delta^{i2}, \end{aligned} \quad (6.49)$$

ce qui donne les puissances du tenseur de Faraday sous sa forme matricielle suivante

$$\bar{\mathbb{F}} = B_0 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbb{F}}^2 = B_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \bar{\mathbb{F}}^3 = 0. \quad (6.50)$$

Nous avons que l'expansion de Taylor de l'exponentielle de l'éq. (6.45) s'arrête naturellement après le troisième terme, donnant l'expression exacte suivante :

$$\exp(qs\bar{\mathbb{F}}) = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}q^2s^2B_0^2 & qsb_0 & -\frac{1}{2}q^2s^2B_0^2 & \\ qsB_0 & 1 & 0 & -qsB_0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}qsB_0^2 & qsb_0 & 0 & 1 - \frac{1}{2}q^2s^2B_0^2 \end{pmatrix}. \quad (6.51)$$

Pour cette configuration de champs critiques, on a donc comme équations du mouvement

$$\begin{aligned}
u^0(s) &= \left(1 + \frac{1}{2}q^2s^2B_0^2\right)\bar{u}^0 + (qsB_0)\bar{u}^1 + \left(-\frac{1}{2}q^2s^2B_0^2\right)\bar{u}^3, \\
u^1(s) &= (qsB_0)\bar{u}^0 + \bar{u}^1 + (-qB_0s)\bar{u}^3, \\
u^2(s) &= \bar{u}^2, \\
u^3(s) &= \left(\frac{1}{2}q^2s^2B_0^2\right)\bar{u}^0 + (qsB_0)\bar{u}^2 + \left(1 - \frac{1}{2}q^2s^2B_0^2\right)\bar{u}^3.
\end{aligned} \tag{6.52}$$

avec les valeurs initiales \bar{u}^μ telles que $\bar{u}^2 = (m_0c)^2$. Finalement, la trajectoire de la particule suit donc la paramétrisation suivante (en temps propre) :

$$\begin{aligned}
x^0(s) &= \bar{x}^0 + \left(s + \frac{1}{6}q^2B_0^2s^3\right)\bar{u}^0 + \left(\frac{1}{2}qB_0s^2\right)\bar{u}^1 + \left(-\frac{1}{6}q^2B_0^2s^3\right)\bar{u}^3, \\
x^1(s) &= \bar{x}^1 + \left(\frac{1}{2}qB_0s^2\right)\bar{u}^0 + s\bar{u}^1 + \left(-\frac{1}{2}qB_0s^2\right)\bar{u}^3, \\
x^2(s) &= \bar{x}^2 + s\bar{u}^2, \\
x^3(s) &= \bar{x}^3 + \left(\frac{1}{6}q^2B_0^2s^3\right)\bar{u}^0 + \left(\frac{1}{2}qB_0s^2\right)\bar{u}^2 + \left(s - \frac{1}{6}q^2B_0^2s^3\right)\bar{u}^3,
\end{aligned} \tag{6.53}$$

Ces quatre formules donnent l'expression exacte, sans approximation, de la trajectoire de la particule relativiste, avec ou sans masse, plongée dans un champ électromagnétique externe.

Considérons à présent le cas d'une particule massive de masse $m_0 \neq 0$, avec les conditions initiales

$$\begin{aligned}
\bar{x}^\mu &= 0, \\
\bar{u}^\mu &= (m_0c, \vec{0}).
\end{aligned} \tag{6.54}$$

Cela correspond à une particule immobile posée au centre du référentiel inertiel en $s = 0$ ou $\tau = \tau_0$. Les équations du mouvement se simplifient alors en

$$\begin{aligned}
ct(s) = x^0(s) &= m_0c\left(s + \frac{1}{6}q^2B_0^2s^3\right), & \frac{E(s)}{c} = u^0(s) &= m_0c\left(1 + \frac{1}{3}q^2B_0^2s^2\right), \\
x^1(s) &= m_0c\frac{qB_0s^2}{2}, & u^1(s) &= m_0cqB_0s, \\
x^2(s) &= 0, & u^2(s) &= 0, \\
x^3(s) &= m_0c\left(\frac{1}{6}q^2B_0^2s^3\right), & u^3(s) &= m_0c\frac{q^2B_0^2s^2}{2}.
\end{aligned} \tag{6.55}$$

De ces équations, nous remarquons que la trajectoire se trouve dans un plan perpendiculaire au champ magnétique ($\mathbf{B} = B_0\hat{e}_2$).

Chapitre 7

Trajectoire d'une particule dans un nœud

A présent que nous avons regardé comment se comporte une particule relativiste, massive ou non, dans un champ électromagnétique externe homogène et statique, et que nous avons vu comment construire des nœuds électromagnétiques, nous aimerions dériver la trajectoire d'une telle particule cette fois dans le hopfion. Nous allons aborder ce problème avec une approche semi-perturbative, déterminer ce que nous pouvons en tirer, et conclure si nous devons réellement utiliser une approche totalement numérique.

7.1 Potentiel de Bateman linéaire

Considérons tout d'abord un exemple très simple et néanmoins non-trivial, des potentiels de Bateman linéaires en x^μ . Prenons

$$\alpha(x^\mu) = \alpha_\mu x^\mu + \alpha_c, \quad \beta(x^\mu) = \beta_\mu x^\mu + \beta_c, \quad \alpha_\mu, \beta_\mu, \alpha_c, \beta_c \in \mathbb{C}, \quad (7.1)$$

où les paramètres complexes $\alpha_\mu, \beta_\mu, \alpha_c$ et β_c sont constants. Nous vérifions facilement les équations d'auto-dualité, qui sont équivalentes à l'équation suivante :

$$\alpha_0 \boldsymbol{\beta} - \beta_0 \boldsymbol{\alpha} = i \boldsymbol{\alpha} \times \boldsymbol{\beta}. \quad (7.2)$$

Le produit vectoriel implique que les vecteurs $\boldsymbol{\alpha}$ et $\boldsymbol{\beta}$ ne peuvent pas avoir de composantes parallèles entre elles. Sans perte de généralité, nous choisissons la configuration suivante :

$$\boldsymbol{\alpha} = \alpha^3 \hat{e}_3, \quad \boldsymbol{\beta} = \beta^1 \hat{e}_1 + \beta^2 \hat{e}_2. \quad (7.3)$$

En substituant les deux expressions précédentes dans l'éq. (7.2), on obtient les potentiels de Bateman suivants :

$$\alpha_0 = \eta \alpha^3, \quad \beta^2 = i\eta \beta^1, \quad \eta = \pm 1, \quad (7.4)$$

avec un arbitraire de signe que l'on dénote $\eta = \pm 1$, et qui sera gardé tout au long de ce chapitre pour plus de généralité.

Nous pouvons alors écrire les champs électrique et magnétique en fonction des expressions pour les potentiels de Bateman, à partir de

$$\frac{\mathbf{E}}{c} + i\mathbf{B} = \mathbf{R} = -i\nabla\alpha \times \nabla\beta; \quad (7.5)$$

nous avons

$$\frac{\mathbf{E}}{c} = -\eta \alpha^3 \beta^1 \hat{e}_1, \quad \mathbf{B} = -\alpha^3 \beta^1 \hat{e}_2, \quad (7.6)$$

en ayant supposé que le produit $\alpha^3 \beta^1$ est réel, pour plus de simplicité dans la suite.

Comme il se doit, nous sommes toujours dans le cas où les normes des champs électriques sont égales et où ces derniers sont perpendiculaires entre eux. Comme nous l'avons déjà dit, ces propriétés sont conservées sous les transformations conformes.

Faisons maintenant le choix suivant :

$$\alpha^3 = \sqrt{B}, \quad \beta^1 = -\sqrt{B}, \quad B > 0, \quad (7.7)$$

avec donc,

$$\frac{\mathbf{E}}{c} = \eta B \hat{e}_1, \quad \mathbf{B} = B \hat{e}_2, \quad B > 0, \quad (7.8)$$

ce qui représente un champ magnétique aligné avec \hat{e}_2 , d'intensité $B > 0$, et un champ électrique lui étant perpendiculaire, car aligné avec $\eta \hat{e}_1$, et de même norme B . Le signe donné par η est donc directement lié à la direction du champ électrique par rapport au champ électromagnétique, et alors également la direction du vecteur de Poynting

$$\frac{1}{\mu_0} \frac{\mathbf{E}}{c} \times \mathbf{B} = \eta \frac{B^2}{\mu_0} \hat{e}_3. \quad (7.9)$$

Nous verrons plus loin que ce signe η dicte également dans quelle direction, le long de \hat{e}_3 , se déplace le hopfion.

Finalement, nous allons donc utiliser les potentiels de Bateman suivants :

$$\alpha(x^\mu) = \sqrt{B} (\eta x^0 - x^3) + \alpha_c = -\sqrt{B} (x^3 - \eta x^0) + \alpha_c, \quad \beta(x^\mu) = \sqrt{B} (x^1 + i\eta x^2) + \beta_c, \quad (7.10)$$

où (α_c, β_c) sont encore les deux constantes complexes laissées libres depuis le début.

7.2 La transformation complexe

Dans le chapitre 2, la stratégie que nous avons employée consistait à prendre deux champs \mathbf{E} et \mathbf{B} de même norme et perpendiculaires entre eux, de leur appliquer une inversion conforme de d'échelle de longueur λ_0 , puis une translation temporelle purement imaginaire de paramètre J_0 que l'on pouvait ramener à L_0 . Ces deux transformations conformes produisaient alors le hopfion avec une modification d'intensité du champ B_0 d'un facteur adimensionnel $(\lambda_0/L_0)^4$. De plus, l'inversion conforme produisait une inversion de l'espace.

On a ensuite procédé à un boost de Lorentz exactement opposé à la vitesse totale, qui se trouvait être $\frac{\eta}{2} \hat{e}_3$ (nos choix de notation correspondaient alors à $\eta = -1$).

Ici, nous allons procéder différemment : Désignons par R le référentiel de la configuration initiale, celui où le hopfion possède la vitesse $\frac{\eta}{2} \hat{e}_3$. Considérons également un second référentiel R_0 , obtenu à partir de R par un boost de Lorentz de vitesse, en unité c , de valeurs $\eta \beta \hat{e}_3$, et qui coïncide avec R aux temps $t = t_0 = 0$ tels que mesurés dans leurs référentiels respectifs. Donc le référentiel R_0 avec $\beta_0 = 1/2$ correspond au référentiel propre du hopfion que nous avons utilisé dans le chapitre 2. Cependant une valeur différente, arbitraire, de β_0 peut être considérée.

En effet, il est possible que les trajectoires de particules ressemblant le plus à des trajectoires circulaires ne soient pas des trajectoires possibles dans le référentiel inertiel du hopfion, et que nous devions donc les considérer dans d'autres référentiels, en mouvement par rapport à l'hopfion.

Quoi qu'il en soit, pour plus de généralité, nous allons garder ce paramètre β_0 explicite dans les développements qui suivent. Dans le référentiel R_0 , par le théorème d'addition relativiste des vitesses, le hopfion aura donc une vitesse, toujours en unité de c , $\eta\hat{e}_3(1 - 2\beta_0)/(2 - \beta_0)$.

De plus, nous allons mettre à profit les développements du chapitre 3, car il sera plus facile de manipuler ces potentiels scalaires plutôt que des vecteurs ou des tenseurs. Sous les transformations de Lorentz, ces scalaires se transforment en effet en scalaires, et il suffira donc de prendre leur valeur en fonction des nouvelles coordonnées exprimées à partir des anciennes. Il suffira ensuite d'utiliser le tenseur de Riemann-Silberstein en terme des potentiels de Bateman pour retrouver les configurations de champs électrique et magnétique associés.

Par ailleurs, nous allons procéder à une autre suite de transformations. Au lieu, comme dans le chapitre 2, de procéder à une inversion conforme puis à une translation complexe dans le temps, suivie du boost de Lorentz vers R_0 , nous allons ici procéder à une inversion conforme, puis une translation complexe dans le temps, puis à nouveau une inversion conforme, suivie du boost de Lorentz vers un référentiel R_0 . Comme nous l'avons vu dans le chapitre 3, procéder à une transformation conforme sur un nœud ne fait qu'engendrer un nouveau nœud.

Cette nouvelle méthode offre plusieurs avantages : le premier étant que les paramètres λ_0 et L_0 se recombinent en un seul paramètre de longueur L . De plus, comme on a deux inversions conformes, l'intensité du champ B_0 n'est pas renormalisée ; par ailleurs, on inverse deux fois l'orientation de l'espace, ce qui fait qu'au final on se retrouve dans la même orientation que celle avec laquelle on avait commencé. Enfin, dans la limite $L \rightarrow 0$, ou, de manière équivalente, $1/L \rightarrow \infty$, ce qui équivaut à la situation lorsque toute structure spatiale intrinsèque à l'hopfion est repoussée aux échelles à une distance infinie dans l'espace et l'espace-temps, nous retrouvons la configuration de champs électrique et magnétique statique et homogène.

Enfin, en appliquant un boost de Lorentz vers le référentiel R_0 aux potentiels de Bateman ainsi transformés, il est possible de construire le hopfion dans ledit référentiel. Il s'avère que cela correspond à appliquer ce même boost de Lorentz aux potentiels de Bateman avant qu'on leur applique notre suite de transformations, ainsi qu'au shift temporel pur qui acquiert alors une composante spatiale purement imaginaire. En appliquant cette nouvelle translation au hopfion boosté, on retrouve finalement les champs $(\mathbf{E}/c, \mathbf{B})$ du hopfion dans le référentiel R_0 , animé d'une vitesse $\eta\hat{e}_3(1 - 2\beta_0)/(2 - \beta_0)$.

Par ailleurs, cette stratégie dispose d'un dernier avantage : nous pouvons écrire toutes les expressions en fonction du facteur d'échelle L , dont nous pouvons nous servir de la valeur inverse, $1/L$, pour effectuer un développement de perturbation, autour de $1/L = 0$.

En effet, après avoir cherché dans toutes sortes de direction, nous avons compris qu'il n'était pas possible de trouver des solutions analytiques et exactes à ce problème, et choisissons donc une approche semi-analytique avant de nous résoudre à une approche totalement numérique.

Précisons à présent quelques-unes des conventions que nous allons utiliser dans les

sections suivantes :

- ◇ les coordonnées utilisées dans le référentiel R avant la transformation conforme seront dénotées $u^\mu = (u^0, u^1, u^2, u^3)$,
- ◇ une fois les transformations conformes complexes réalisées, toujours dans le référentiel R , les coordonnées seront dénotées $x^\mu = (x^0 = ct, x^1, x^2, x^3)$,
- ◇ dans le référentiel R_0 , les coordonnées seront dénotées $x_0^\mu = (x_0^0 = ct_0, x_0^1, x_0^2, x_0^3)$,
- ◇ en unité de L , ces coordonnées seront notées $X^\mu = x^\mu/L = (T, X, Y, Z)$ et $X_0^\mu = x_0^\mu/L = (T_0, X_0, Y_0, Z_0)$,
- ◇ le boost de Lorentz pour passer de R à R_0 transforme les coordonnées u^μ en $u_0^\mu = (u_0^0, u_0^1, u_0^2, u_0^3)$.

Nous allons utiliser les potentiels de Bateman définis dans la section 7.1, donnés sous la forme suivante dans le référentiel R :

$$\alpha(u^\mu) = -\sqrt{B}(u^3 - \eta u^0) + \alpha_c, \quad \beta(u^\mu) = \sqrt{B}(u^1 + i\eta u^2) + \beta_c. \quad (7.11)$$

7.3 Transformation conforme complexe et boost de Lorentz

Commençons par considérer la transformation conforme complexe par rapport au référentiel R . Il s'agit d'obtenir les coordonnées x^μ à partir des coordonnées u^μ , en réalisant la suite de transformations conformes suivantes : inversion conforme, puis translation, puis nouvelle inversion conforme. Le facteur d'échelle de longueur des deux inversions conformes est identique, et on le note λ_0 . La translation est d'un quadri-vecteur b^μ qui peut être complexe. Nous avons donc, pour les coordonnées,

$$u^\mu \rightarrow \lambda_0^2 \frac{u^\mu}{\underline{u}^2} \rightarrow \lambda_0^2 \frac{u^\mu}{\underline{u}^2} - b^\mu = y_1^\mu \rightarrow \lambda_0^2 \frac{y_1^\mu}{\underline{y}_1^2} = x^\mu, \quad (7.12)$$

avec $\underline{u}^2 = u \cdot u = \eta_{\mu\nu} u^\mu u^\nu$, $\underline{b}^2 = b \cdot b = \eta_{\mu\nu} b^\mu b^\nu$. Nous avons finalement la transformation conforme complexe suivante :

$$x^\mu = \frac{u^\mu - \frac{1}{\lambda_0^2} b^\mu \underline{u}^2}{1 - 2\frac{1}{\lambda_0^2} b \cdot u + \frac{1}{\lambda_0^4} \underline{b}^2 \underline{u}^2}. \quad (7.13)$$

La transformation conforme inverse, nous ramenant aux coordonnées u^μ , est celle correspondant à $-b^\mu$:

$$u^\mu = \frac{x^\mu + \frac{1}{\lambda_0^2} b^\mu \underline{x}^2}{1 + 2\frac{1}{\lambda_0^2} b \cdot x + \frac{1}{\lambda_0^4} \underline{b}^2 \underline{x}^2}. \quad (7.14)$$

Considérons maintenant la transformation de Lorentz qui nous envoie des coordonnées x^μ du repère R vers les x_0^μ dans le repère R_0 . On la note par une matrice 4×4 $\Lambda^\mu{}_\nu$,

$$x_0^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu. \quad (7.15)$$

Cette équation est également valable pour les vecteurs u^μ et b^μ , et on obtient donc, pour les x_0^μ exprimés à partir des u^μ :

$$x_0^\mu = \frac{u_0^\mu - \frac{1}{\lambda_0^2} b_0^\mu u_0^2}{1 - 2\frac{1}{\lambda_0^2} b_0 \cdot u_0 + \frac{1}{\lambda_0^4} b_0^2 u_0^2}, \quad u_0^\mu = \frac{x_0^\mu + \frac{1}{\lambda_0^2} b_0^\mu x_0^2}{1 + 2\frac{1}{\lambda_0^2} b_0 \cdot x_0 + \frac{1}{\lambda_0^4} b_0^2 x_0^2}, \quad (7.16)$$

avec

$$x_0^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu x^\nu, \quad u_0^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu u^\nu, \quad b_0^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu b^\nu. \quad (7.17)$$

Le boost de Lorentz de vitesse (toujours en unité c) $\eta\beta_0\hat{e}_3$, nous faisant passer du référentiel R vers R_0 , s'écrit comme

$$\Lambda^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 & -\eta\beta_0\gamma_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\eta\beta_0\gamma_0 & 0 & 0 & \gamma_0 \end{pmatrix}, \quad (\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & 0 & \eta\beta_0\gamma_0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \eta\beta_0\gamma_0 & 0 & 0 & \gamma_0 \end{pmatrix} = \Lambda_\mu{}^\nu, \quad (7.18)$$

avec $\gamma_0 = 1/\sqrt{1 - \beta_0^2}$.

7.4 Les potentiels de Bateman et l'hopfion dans le référentiel inertiel R

Par rapport à nos conventions dans ce chapitre, la translation temporelle complexe appliquée sur les potentiels de Bateman pour obtenir le hopfion du chapitre 2 correspond au choix de b^μ tel que

$$\frac{1}{\lambda_0^2} b^\mu = \frac{i}{L} (1, \vec{0}), \quad (7.19)$$

avec $L > 0$ un facteur d'échelle de longueur particulier mais sinon choisi arbitrairement.

Comme nous allons le voir dans la suite, il s'avère en fait que L fixe l'échelle de distance sur laquelle, pour le hopfion, des variations spatiales et spatio-temporelles existent pour la distribution des champs électrique et magnétique. Le paramètre B , quant à lui, fixe l'amplitude de ces deux champs. Il s'agit donc des deux seuls paramètres physiques qui vont caractériser les solutions de type hopfion. Pour ces deux paramètres, toutes les valeurs réelles sont possibles.

En procédant de la manière analogue au chapitre 2, on obtient finalement que les potentiels de Bateman discutés dans les sections précédentes, s'écrivent, en fonction des coordonnées (T, X, Y, Z) , dans le repère R , comme

$$\begin{aligned} \alpha(x^\mu) &= -\sqrt{B} \frac{L}{2(A + iT)} (Z + i\eta(A - 1)) + \left(\alpha_c - i\eta\sqrt{B} \frac{L}{2} \right), \\ \beta(x^\mu) &= \sqrt{B} \frac{L}{2(A + iT)} (X + i\eta Y) + \beta_c, \end{aligned} \quad (7.20)$$

avec, comme d'habitude,

$$A = \frac{1}{2} (1 + X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2). \quad (7.21)$$

Dans la suite de nos calculs, nous choisissons finalement pour les deux constantes complexes α_c et β_c , par simplicité,

$$\alpha_c = \frac{1}{2}i\eta\sqrt{B}L, \quad \beta_c = 0. \quad (7.22)$$

Nous pouvons alors trouver les expressions des champs électrique et magnétique correspondants, à partir du vecteur de Riemann-Silberstein :

$$\frac{\vec{E}}{c} + i\vec{B} = \vec{R} = -i\nabla_{\mathbf{x}}\alpha \times \nabla_{\mathbf{x}}\beta. \quad (7.23)$$

Dans cette dernière équation les $\nabla_{\mathbf{x}}$ sont encore en termes des coordonnées x^μ . Nous pouvons cependant les convertir dans notre nouvelle base de coordonnées X^μ , ce qui donne

$$\nabla_{\mathbf{x}} = \frac{1}{L} \nabla_{\mathbf{X}}. \quad (7.24)$$

On obtient, à partir de ces potentiels de Bateman transformés, la même expression que pour le hopfion du chapitre 2, avec la correspondance $B = \left(\frac{\lambda_0}{L_0}\right)^4 B_0$ et $\eta = -1$.

Vérifions à présent que les valeurs pour la masse invariante et la vitesse de l'hopfion correspondent bien à celles dérivées dans le chapitre 2. Il suffit de travailler en $T = 0$, puisque ces quantités, par nature ou lorsqu'on prend leur intégrale sur tout l'espace, sont conservées dans le temps.

En $T = 0$, on a pour le vecteur de Riemann-Silberstein

$$\mathbf{R} = iB \left[\nabla_{\mathbf{x}} \frac{Z + \frac{1}{2}i\eta(R^2 - 1)}{R^2 + 1} \right] \times \left[\nabla_{\mathbf{x}} \frac{X + i\eta Y}{R^2 + 1} \right], \quad (7.25)$$

avec encore $R^2 = X^2 + Y^2 + Z^2$. Dans le référentiel inertiel R , on obtient, pour les champs électrique et magnétique, dans la base $\{\hat{e}_i\}$,

$$\frac{\mathbf{E}}{c}(T = 0, X, Y, Z) = B \frac{1}{(R^2 + 1)^3} \begin{pmatrix} \eta(1 + X^2 - Y^2 - Z^2) \\ \eta(2XY - 2Z) \\ \eta(2XZ + 2Y) \end{pmatrix}, \quad (7.26)$$

$$\mathbf{B}(T = 0, X, Y, Z) = B \frac{1}{(R^2 + 1)^3} \begin{pmatrix} 2XY + 2Z \\ 1 - X^2 + Y^2 - Z^2 \\ 2YZ - 2X \end{pmatrix}. \quad (7.27)$$

On peut remarquer en particulier qu'en l'origine du repère inertiel, pour $T = 0$, on a

$$\frac{\mathbf{E}}{c}(X^\mu = 0) = \eta B \hat{e}_1, \quad \mathbf{B}(X^\mu = 0) = B \hat{e}_2, \quad (7.28)$$

ce qui correspond à la configuration des champs dans ce référentiel avant qu'on ne leur applique les transformations conformes complexes, donc quand ils sont encore homogènes et statiques.

De ces dernières expressions pour les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} , on peut déduire la densité d'énergie électromagnétique, donnée en $T = 0$ par

$$\mathcal{E}(T = 0, X, Y, Z) = \left(\frac{1}{2}\epsilon_0 \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \right) (T = 0, \mathbf{X}) = \frac{B^2}{\mu_0} \frac{1}{(1 + R^2)^4}, \quad (7.29)$$

ce qui correspond à

$$E = \frac{\pi^2}{8\mu_0} L^3 B^2. \quad (7.30)$$

Remarquons la symétrie sphérique de la distribution spatiale de la densité d'énergie.

Pour la densité de quantité de mouvement, nous n'allons considérer que la composante suivant l'axe \hat{e}_3 , comme dans la section 2.3. Cette composante de sa densité est donnée par l'expression

$$\frac{1}{\mu_0} \left(\frac{\mathbf{E}}{c} \times \mathbf{B} \right)^3 (T = 0, \mathbf{X}) = \frac{1}{\mu_0} \frac{B^2}{(R^2 + 1)^6} \eta \{ (1 + Z^2)^2 - (X^2 + Y^2)^2 \}. \quad (7.31)$$

À nouveau, on a une symétrie axiale autour de \hat{e}_3 pour la distribution spatiale de la densité de quantité de mouvement en $T = 0$. L'intégrale spatiale donne

$$\vec{P}_c = \eta \frac{\pi^2}{16\mu_0} L^3 B^2 \hat{e}_3 = \frac{1}{2} \eta E \hat{e}_3. \quad (7.32)$$

Suivant la relation d'Einstein, la masse relativiste M du hopfion est finalement telle que

$$Mc^2 = \frac{\pi^2 \sqrt{3}}{16\mu_0} L^3 B^2, \quad (7.33)$$

et sa vitesse est donnée par

$$\frac{\vec{V}}{c} = \boldsymbol{\beta} = \frac{\vec{P}_c}{E} = \frac{1}{2} \eta \hat{e}_3, \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \boldsymbol{\beta}^2}} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \quad (7.34)$$

Cette pénultième relation montre en effet bien que le choix de signe η contrôle la direction de propagation par rapport à \hat{e}_3 du hopfion. Comme annoncé, nous voyons également que le η correspondant au choix de conventions du chapitre 2 est bien $\eta = -1$. Nous avons cependant ici obtenu l'expression explicite pour des choix de η et β_0 arbitraires.

7.5 Les potentiels de Bateman et l'hopfion dans le référentiel inertiel R_0

À partir de l'éq. (7.16), il est aisé de transformer les potentiels de Bateman exprimés dans le repère inertiel R en terme des coordonnées X^μ vers le repère R_0 en terme des coordonnées X_0^μ , puis en terme des coordonnées x_0^μ , grâce à la transformation conforme complexe en terme du vecteur b_0^μ qui est cette fois donné par

$$\frac{1}{\lambda_0^2} b_0^\mu = \frac{i}{L} \gamma_0 (1, 0, 0, -\eta \beta_0). \quad (7.35)$$

La quantité A est en fait un invariant relativiste et on a donc

$$A_0 = \frac{1}{2} (1 + X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 - T_0^2) = \frac{1}{2} (1 + X^2 + Y^2 + Z^2 - T^2) = A. \quad (7.36)$$

Ainsi, dans le repère inertiel R_0 et en terme des coordonnées X_0^μ/L , les potentiels de Bateman s'écrivent finalement

$$\begin{aligned}\alpha(x_0^\mu) &= -\frac{1}{2}L\sqrt{B} \frac{\gamma_0(Z_0 + \eta\beta_0 T_0) + i\eta(A_0 - 1)}{[A_0 + i\gamma_0(T_0 + \eta\beta_0 Z_0)]}, \\ \beta(x_0^\mu) &= \frac{1}{2}L\sqrt{B} \frac{X_0 + i\eta Y_0}{[A_0 + i\gamma_0(T_0 + \eta\beta_0 Z_0)]}.\end{aligned}\quad (7.37)$$

Les expressions de champs électrique et magnétiques sont données, dans ce référentiel, par le vecteur de Riemann-Silberstein correspondant,

$$\frac{\mathbf{E}_0}{c} + i\mathbf{B}_0 = \mathbf{R}_0^{\text{RS}} = -i \nabla_{\mathbf{x}_0} \alpha \times \nabla_{\mathbf{x}_0} \beta, \quad (7.38)$$

avec

$$\mathbf{R}_0^{\text{RS}} = iB \left[\nabla_{\mathbf{x}_0} \frac{\gamma_0(Z_0 + \eta\beta_0 T_0) + i\eta(A_0 - 1)}{2A_0 + 2i\gamma_0(T_0 + \eta\beta_0 Z_0)} \right] \times \left[\nabla_{\mathbf{x}_0} \frac{X_0 + i\eta Y_0}{2A_0 + 2i\gamma_0(T_0 + \eta\beta_0 Z_0)} \right]. \quad (7.39)$$

Pour trouver les expressions explicites des champs électrique et magnétique, il faut calculer les gradients $\nabla_{\mathbf{x}_0}$, ce qui n'est pas tout à fait simple. Nous ne détaillerons donc pas ici toutes les étapes intermédiaires.

Par analogie avec le chapitre 2, nous allons établir tout d'abord quelques quantités :

$$\begin{aligned}A_0 &= \frac{1}{2} (1 + X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2 - T_0^2), \\ P &= \gamma_0(T_0 + \eta\beta_0 Z_0) [\gamma_0^2(T_0 + \eta\beta_0 Z_0)^2 - 3A_0^2], \\ Q &= A_0 [A_0^2 - 3\gamma_0^2(T_0 + \eta\beta_0 Z_0)^2],\end{aligned}\quad (7.40)$$

qui sont telles que,

$$P^2 + Q^2 = (A_0^2 + \gamma_0^2(T_0 + \eta\beta_0 Z_0)^2)^3 = |A_0 + i\gamma_0(T_0 + \eta\beta_0 Z_0)|^6. \quad (7.41)$$

De plus, exprimés dans la base $\{\hat{e}_i\}$, nous introduisons les deux vecteurs

$$\mathbf{H}_1 : \begin{pmatrix} -\gamma_0(1 + \beta_0) X_0 Y_0 - (Z_0 + \eta T_0) \\ -\frac{1}{2}\gamma_0(1 + \beta_0)(1 - X_0^2 + Y_0^2 - (Z_0 + \eta T_0)^2) + \beta_0\gamma_0 \\ X_0 - \gamma_0(1 + \beta_0) Y_0(Z_0 + \eta Z_0) \end{pmatrix}, \quad (7.42)$$

$$\mathbf{H}_2 : \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\gamma_0(1 + \beta_0)(1 + X_0^2 - Y_0^2 - (Z_0 + \eta T_0)^2) - \beta_0\gamma_0 \\ \gamma_0(1 + \beta_0) X_0 Y_0 - (Z_0 + \eta T_0) \\ Y_0 + \gamma_0(1 + \beta_0) X_0(Z_0 + \eta Z_0) \end{pmatrix}, \quad (7.43)$$

qui sont tels que

$$\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{H}_2 = 0, \quad \mathbf{H}_1^2 = \mathbf{H}_2^2 = \gamma_0^2 [(1 + \beta_0)(A_0 + \eta T_0(Z_0 + \eta T_0)) - \beta_0]^2. \quad (7.44)$$

Les expressions des champs électrique et magnétique du hopfion dans le référentiel inertiel R_0 sont alors données par

$$\begin{aligned}\frac{\mathbf{B}_0}{c} &= \frac{1}{4}B \frac{1}{[A_0^2 + \gamma_0^2(T_0 + \eta\beta_0 Z_0)^2]^3} [P \mathbf{H}_1 + \eta Q \mathbf{H}_2], \\ \mathbf{B}_0 &= \frac{1}{4}B \frac{1}{[A_0^2 + \gamma_0^2(T_0 + \eta\beta_0 Z_0)^2]^3} [-Q \mathbf{H}_1 + \eta P \mathbf{H}_2].\end{aligned}\quad (7.45)$$

Nous avons également que ces champs sont perpendiculaires entre eux et de même norme, comme il se doit :

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{E}_0}{c} \cdot \mathbf{B}_0 &= 0, \\ \left(\frac{\mathbf{E}_0}{c}\right)^2 = \mathbf{B}_0^2 &= \frac{1}{16} B^2 \frac{\gamma_0^2 [(1 + \beta_0)(A_0 + \eta T_0(Z_0 + \eta T_0)) - \beta_0]^2}{[A_0^2 + \gamma_0^2(T_0 + \eta\beta_0 Z_0)^2]^3}. \end{aligned} \quad (7.46)$$

La densité d'énergie électromagnétique est alors donnée par

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_0(x_0^\mu) &= \left(\frac{1}{2}\epsilon_0 \mathbf{E}_0^2 + \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}_0^2\right) (T = 0, \vec{X}) = \frac{\mathbf{B}_0^2}{\mu_0}, \\ &= \frac{B^2}{16\mu_0} \gamma_0^2 \frac{[(1 + \beta_0)(A_0 + \eta T_0(Z_0 + \eta T_0)) - \beta_0]^2}{[A_0^2 + \gamma_0^2(T_0 + \eta\beta_0 Z_0)^2]^3}. \end{aligned} \quad (7.47)$$

En particulier à $T_0 = 0$ cette distribution se réduit à

$$\mathcal{E}_0(T_0 = 0, \mathbf{X}_0) = \frac{B^2}{16\mu_0} \gamma_0^2 \frac{\{(1 + \beta_0)A_0 - \beta_0\}^2}{\{A_0^2 + \beta_0^2 \gamma_0^2 Z_0^2\}^3}, \quad A_0(T_0 = 0, \mathbf{X}_0) = \frac{1}{2}(1 + X_0^2 + Y_0^2 + Z_0^2), \quad (7.48)$$

qui présente à nouveau cette symétrie axiale sous rotation par rapport à l'axe \hat{e}_3 , mais aussi une asymétrie entre la distribution le long de cet axe et dans la direction transverse à cet axe quand $\beta_0 \neq 0$.

Observons à nouveau les valeurs des champs électrique et magnétique au centre du hopfion, c'est-à-dire en l'origine et à l'instant $T_0 = 0$, là où la densité d'énergie est maximale,

$$\frac{\mathbf{E}_0}{c}(x_0^\mu = 0) = \eta \gamma_0(1 - \beta_0) B \hat{e}_1, \quad \mathbf{B}_0 = \gamma_0(1 - \beta_0) B \hat{e}_2. \quad (7.49)$$

Si l'on ignore le facteur $\gamma_0(1 - \beta_0) = \sqrt{(1 - \beta_0)/(1 + \beta_0)}$, on revient à nouveau aux valeurs des champs dans la configuration homogène et statique dans R de laquelle nous sommes partis.

Nous pouvons donc observer que c'est dans la limite $x_0^\mu = 0$, ou $X_0^\mu = x_0^\mu/L = 0$, donc quand $L \rightarrow \infty$ que les effets des translations complexes de quadri-vecteurs b^μ ou b_0^μ s'annulent et qu'alors on retrouve la configuration de champs électromagnétiques statiques et homogènes du début, qui est semblable à celle de l'hopfion à très courte échelle de distance, c'est-à-dire quand on est dans le "trou" du doughnut formé par le hopfion.

C'est cette dernière observation qui nous suggère de considérer un développement en puissances de $1/L$ des valeurs du champ électromagnétique dans le référentiel R_0 .

7.6 Linéarisation du hopfion dans l'inverse de son échelle de longueur L

Nous allons considérer les champs électrique et magnétique à l'ordre 0 en développement en puissances de $1/L$. À cet ordre, ils correspondent à l'éq. (7.49) et sont en fait indépendants des coordonnées x_0^μ , c'est-à-dire qu'ils sont homogènes et statiques.

Considérons à présent les premières corrections, c'est-à-dire à l'ordre 1 en $1/L$. Comme toutes nos coordonnées X_0^μ sont normalisées avec L , cela revient à prendre un développement en puissances de coordonnées de X_0^μ au premier ordre. Nous ne devons donc

garder que les contributions linéaires en X_0^μ . Ceci nous donne, pour les valeurs qui nous permettent d'écrire les champs électrique et magnétique

$$A_0 = \frac{1}{2}, \quad \gamma_0^2(T_0 + \eta\beta_0 Z_0)^2 = 0, \quad A_0^2 + \gamma_0^2(T_0 + \eta\beta_0 Z_0)^2 = \frac{1}{4},$$

$$Q = \frac{1}{8}, \quad \frac{B}{4} \frac{1}{[A_0^2 + \gamma_0^2(T_0 + \eta\beta_0 Z_0)^2]^3} = 16B, \quad P = -\frac{3}{4}\gamma_0(T_0 + \eta\beta_0 Z_0), \quad (7.50)$$

et pour les vecteurs \mathbf{H}_1 et \mathbf{H}_2 ,

$$\mathbf{H}_1 : \begin{pmatrix} -(Z_0 + \eta T_0) \\ -\frac{1}{2}\gamma_0(1 - \beta_0) \\ X_0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}_2 : \begin{pmatrix} \frac{1}{2}\gamma_0(1 - \beta_0) \\ -(Z_0 + \eta T_0) \\ Y_0 \end{pmatrix}. \quad (7.51)$$

En écrivant enfin les champs électrique et magnétique dans le repère inertiel R_0 à l'aide des expressions précédentes et de l'éq. (7.45), on obtient finalement comme expression, au premier ordre en $1/L$,

$$\frac{\mathbf{E}_0}{c} = B \begin{pmatrix} \eta\gamma_0(1 - \beta_0) \\ 6\gamma_0^2(1 - \beta_0)(T_0 + \eta\beta_0 Z_0) - 2\eta(Z_0 + \eta T_0) \\ 2\eta Y_0 \end{pmatrix}, \quad (7.52)$$

$$\mathbf{B}_0 = B \begin{pmatrix} 2(Z_0 + \eta T_0) - 6\eta\gamma_0^2(1 - \beta_0)(T_0 + \eta\beta_0 Z_0) \\ \gamma_0(1 - \beta_0) \\ -2X_0 \end{pmatrix}. \quad (7.53)$$

7.7 Trajectoire d'une particule chargée en présence du hopfion dans le référentiel inertiel R_0

Reprenons à présent les équations du mouvement de la section 6.4 :

$$\frac{dp^\mu(s)}{ds} = qF^\mu{}_\nu(x^\mu(s))p^\nu(s),$$

$$p^\mu(s) = \frac{dx^\mu(s)}{ds} = \left(\frac{E(s)}{c}, \mathbf{p}(s) \right), \quad (7.54)$$

$$\eta_{\mu\nu} p^\mu(s)p^\nu(s) = (m_0 c)^2.$$

Nous cherchons à résoudre ces équations de manière semi-analytique, afin de pouvoir en déduire quelques propriétés élémentaires de la trajectoire d'une particule en présence d'un hopfion. Nous allons effectuer ces développements dans le repère R_0 pour plus de généralité, et comme mentionné plus tôt, au cas où les trajectoires éventuellement semblables à des trajectoires circulaires ne se trouvent pas dans le repère propre du hopfion.

Dans cette section, nous allons écrire les x_0^μ comme x^μ , et de même pour toutes les quantités s'y rapportant, pour alléger les notations. Nous restons cependant bien dans le repère inertiel R_0 .

Puisque dans la limite où $1/L$ tend vers 0, les champs électrique et magnétique redeviennent des champs statiques et homogènes, nous savons déjà comment résoudre la situation à l'ordre 0 : nous l'avons explicité au chapitre précédent. Nous allons donc considérer des corrections linéaires en $1/L$ à cette dernière solution.

Pour le tenseur électromagnétique, ces développements au premier ordre en $1/L$ s'expriment donc

$$F^\mu{}_\nu(x^\mu) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{L}\right)^n F_{(n)}{}^\mu{}_\nu(x^\mu) = F_{(0)}{}^\mu{}_\nu + \frac{1}{L} F_{(1)}{}^\mu{}_\nu(x^\mu) + \dots \quad (7.55)$$

avec, comme nous l'avons vu dans la section ci-dessus, le fait qu'à l'ordre 0, les champs \mathbf{E} et \mathbf{B} du hopfion sont indépendants de x^μ .

Lorsque nous substituons cette dernière expression dans les équations du mouvement (7.54), on trouve qu'un développement en série analogue doit s'appliquer aux trajectoires $x^\mu(s)$, il est de la forme

$$x^\mu(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{L}\right)^n x_{(n)}^\mu(s) = x_{(0)}^\mu(s) + \frac{1}{L} x_{(1)}^\mu(s) + \dots \quad (7.56)$$

et donc aussi pour la quantité de mouvement

$$p^\mu(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{1}{L}\right)^n p_{(n)}^\mu(s) = p_{(0)}^\mu(s) + \frac{1}{L} p_{(1)}^\mu(s) + \dots, \quad p_{(n)}^\mu(s) = \frac{dx_{(n)}^\mu(s)}{ds}. \quad (7.57)$$

Ainsi, lorsque nous développons au premier ordre l'équation de la trajectoire (7.54), nous obtenons

$$\begin{aligned} \frac{dp_{(0)}^\mu(s)}{ds} &= q F_{(0)}{}^\mu{}_\nu p_{(0)}^\nu(s), & p_{(0)}^\mu(s) &= \frac{dx_{(0)}^\mu(s)}{ds}, \\ \frac{dp_{(1)}^\mu(s)}{ds} &= q F_{(0)}{}^\mu{}_\nu p_{(1)}^\nu(s) + q F_{(1)}{}^\mu{}_\nu(x_{(0)}^\mu(s)) p_{(0)}^\nu(s), & p_{(1)}^\mu(s) &= \frac{dx_{(1)}^\mu(s)}{ds}, \end{aligned} \quad (7.58)$$

avec

$$\left(p_{(0)}^\mu(s)\right)^2 = (m_0 c)^2, \quad \eta_{\mu\nu} \left(p_{(0)}^\mu(s)\right) \left(p_{(1)}^\nu(s)\right) = 0. \quad (7.59)$$

En raison de la nature de ces équations, si ces deux dernières conditions (7.59) sont remplies par les constantes d'intégrations pour les équations différentielles (7.58), alors ces contraintes restent satisfaites pour toutes les valeurs du temps propre s .

Cependant, les conditions initiales pour $x^\mu(s=0) = \bar{x}^\mu$ et $p^\mu(s=0) = \bar{p}^\mu$ (avec $\bar{p}^2 = (m_0 c)^2$) sont à considérer indépendamment du développement en $1/L$:

$$\begin{aligned} x_{(0)}^\mu(s=0) &= x^\mu(s=0) = \bar{x}^\mu, & p_{(0)}^\mu(s=0) &= p^\mu(s=0) = \bar{p}^\mu, \\ x_{(1)}^\mu(s=0) &= 0, & p_{(1)}^\mu(s=0) &= 0. \end{aligned} \quad (7.60)$$

Afin de représenter au moins de manière formelle la résolution de ces équations, introduisons la matrice constante suivante,

$$\mathbb{F}^\mu{}_\nu = q F_{(0)}{}^\mu{}_\nu. \quad (7.61)$$

À partir de l'éq. (6.4), on sait que cette matrice est telle que $\mathbb{F}^3 = 0$. Ainsi, toute exponentielle de cette matrice correspond en fait à une série finie, de seulement trois termes, les ordres 0, 1 et 2.

Observons à présent les équations du mouvement pour l'ordre 0. L'expression pour $p_{(0)}^\mu(s)$, donnée par l'équation du mouvement (7.58), est de la forme

$$p_{(0)}^\mu(s) = (e^{s\mathbb{F}})^\mu{}_\nu \bar{p}^\nu, \quad \bar{p}^2 = (m_0 c)^2, \quad (7.62)$$

avec $p_{(0)}^\mu(s=0) = \bar{p}^\mu$ sont des constantes d'intégration dans le système. Elles spécifient les valeurs de l'énergie et de la quantité de mouvement de la particule pour $s=0$. Cette exponentielle, grâce au fait que $\mathbb{F}^3 = 0$, est facilement calculable,

$$e^{s\mathbb{F}} = \mathbb{I} + s\mathbb{F} + \frac{1}{2}s^2\mathbb{F}^2, \quad \int_0^s ds' e^{s'\mathbb{F}} = s\mathbb{I} + \frac{1}{2}s^2\mathbb{F} + \frac{1}{6}s^3\mathbb{F}^2. \quad (7.63)$$

De plus, la trajectoire de la particule est alors donnée par

$$x_{(0)}^\mu(s) = \bar{x}^\mu + \int_0^s ds' (e^{s'\mathbb{F}})^\mu{}_\nu \bar{p}^\nu. \quad (7.64)$$

Intéressons-nous à présent aux équations du mouvement à l'ordre 1. On a

$$\frac{dp_{(1)}^\mu(s)}{ds} = \mathbb{F}_{(0)}{}^\mu{}_\nu p_{(1)}^\nu(s) + qF_{(1)}{}^\mu{}_\nu(x_{(0)}^\mu(s)) p_{(0)}^\nu(s), \quad p_{(1)}^\mu(s) = \frac{dx_{(1)}^\mu(s)}{ds}. \quad (7.65)$$

Introduisons le 4-vecteur auxiliaire $w^\mu(s)$ tel que,

$$p_{(1)}^\mu(s) = (e^{s\mathbb{F}})^\mu{}_\nu w^\nu(s), \quad w^\mu(s) = (e^{-s\mathbb{F}})^\mu{}_\nu p_{(1)}^\nu(s), \quad (7.66)$$

et dont la valeur initiale est $w^\mu(s=0) = 0$ (puisque $p_{(1)}^\mu(s=0) = 0$).

L'équation pour $p_{(1)}^\mu(s)$ devient alors,

$$\frac{dw^\mu(s)}{ds} = (e^{-s\mathbb{F}})^\mu{}_\nu qF_{(1)}{}^\nu{}_\rho(x_{(0)}^\mu(s)) (e^{s\mathbb{F}})^\rho{}_\sigma \bar{p}^\sigma. \quad (7.67)$$

Ainsi la solution pour $p_{(1)}^\mu(s)$ est donnée par,

$$p_{(1)}^\mu(s) = (e^{s\mathbb{F}})^\mu{}_\nu \int_0^s ds' (e^{-s'\mathbb{F}})^\nu{}_\rho qF_{(1)}{}^\rho{}_\sigma(x_{(0)}^\mu(s')) (e^{s'\mathbb{F}})^\sigma{}_\lambda \bar{p}^\lambda, \quad (7.68)$$

et finalement pour $x_{(1)}^\mu(s)$,

$$x_{(1)}^\mu(s) = \int_0^s ds' p_{(1)}^\mu(s') = \int_0^s ds' (e^{s'\mathbb{F}})^\mu{}_\nu \int_0^{s'} ds'' (e^{-s''\mathbb{F}})^\nu{}_\rho qF_{(1)}{}^\rho{}_\sigma(x_{(0)}^\mu(s'')) (e^{s''\mathbb{F}})^\sigma{}_\lambda \bar{p}^\lambda, \quad (7.69)$$

où, il faut encore substituer $x_{(0)}^\mu(s)$, dans le tenseur $F_{(1)}{}^\mu{}_\nu(x^\mu)$, par sa solution donnée plus haut.

Pour le tenseur électromagnétique défini à partir des champs électrique et magnétique

$$F^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & E^1/c & E^2/c & E^3/c \\ E^1/c & 0 & B^3 & -B^2 \\ E^2/c & -B^3 & 0 & B^1 \\ E^3/c & B^2 & -B^1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.70)$$

nous avons au premier ordre

$$\mathbb{F}^\mu{}_\nu = \bar{F}_0 \begin{pmatrix} 0 & \eta & 0 & 0 \\ \eta & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.71)$$

avec la définition

$$\bar{F}_0 = q \gamma_0 (1 - \beta_0) B. \quad (7.72)$$

Nous pouvons ensuite calculer explicitement les expressions pour les puissances des matrices :

$$(\mathbb{F}^2)^\mu{}_\nu = \bar{F}_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -\eta \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \eta & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (\mathbb{F}^3)^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (7.73)$$

ce qui nous permet d'obtenir la représentation matricielle des deux opérateurs

$$e^{s\mathbb{F}} = \mathbb{I} + s\mathbb{F} + \frac{1}{2}s^2\mathbb{F}^2, \quad \int_0^s ds' e^{s'\mathbb{F}} = s\mathbb{I} + \frac{1}{2}s^2\mathbb{F} + \frac{1}{6}s^3\mathbb{F}^2, \quad (7.74)$$

à savoir,

$$(e^{s\mathbb{F}})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2}\bar{F}_0^2 s^2 & \eta\bar{F}_0 s & 0 & -\frac{1}{2}\eta\bar{F}_0^2 s^2 \\ \eta\bar{F}_0 s & 1 & 0 & -\bar{F}_0 s \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \frac{1}{2}\eta\bar{F}_0^2 s^2 & \bar{F}_0 s & 0 & 1 - \frac{1}{2}\bar{F}_0^2 s^2 \end{pmatrix}, \quad (7.75)$$

ainsi que,

$$\int_0^s ds' (e^{s'\mathbb{F}})^\mu{}_\nu = \begin{pmatrix} s + \frac{1}{6}\bar{F}_0^2 s^3 & \frac{1}{2}\eta\bar{F}_0 s^2 & 0 & -\frac{1}{6}\eta\bar{F}_0^2 s^3 \\ \frac{1}{2}\eta\bar{F}_0 s^2 & s & 0 & -\frac{1}{2}\bar{F}_0 s^2 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ \frac{1}{6}\eta\bar{F}_0^2 s^3 & \frac{1}{2}\bar{F}_0 s^2 & 0 & s - \frac{1}{6}\bar{F}_0^2 s^3 \end{pmatrix}. \quad (7.76)$$

Nous pouvons finalement construire les solutions pour $p_{(0)}^\mu(s)$ et $x_{(0)}^\mu(s)$ par simple multiplication matricielle à partir des équations données plus haut.

De plus, la contribution à l'ordre 1 est donnée

$$F_{(1)}^\mu{}_\nu(x^\mu) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2\eta(z + \eta x^0) + 6\gamma_0^2(1 - \beta_0)(x^0 + \eta\beta_0 z) & 2\eta y \\ 0 & 0 & -2x & 0 \\ -2\eta(z + \eta x^0) + 6\gamma_0^2(1 - \beta_0)(x^0 + \eta\beta_0 z) & 2x & 0 & 2(z + \eta x^0) - 6\eta\gamma_0^2(1 - \beta_0)(x^0 + \eta\beta_0 z) \\ 2\eta y & 0 & -2(z + \eta x^0) + 6\eta\gamma_0^2(1 - \beta_0)(x^0 + \eta\beta_0 z) & 0 \end{pmatrix}. \quad (7.77)$$

Il suffirait maintenant de remplacer dans cette matrice la solution $x_{(0)}^\mu(s)$ à la place $x^\mu = (x^0, x, y, z)$, puis de replacer la matrice dans les éq. (7.68) et (7.69). On obtiendrait ainsi la solution complète pour l'ordre du développement en $1/L$

$$p^\mu(s) \simeq p_{(0)}^\mu(s) + \frac{1}{L} p_{(1)}^\mu(s), \quad x^\mu(s) \simeq x_{(0)}^\mu(s) + \frac{1}{L} x_{(1)}^\mu(s). \quad (7.78)$$

Comme toutes les dépendances en s sont purement polynômiales, toutes les intégrales des éq. (7.68) et (7.69) peuvent être évaluées analytiquement. Cependant, réaliser ce genre de calcul conduirait à de longues expressions qui ne nous en apprendraient pas beaucoup car les expressions finales seraient peu propices à nous donner des leçons claires quant au comportement de la trajectoire de la particule en présence du hopfion.

Nous en concluons donc que pour comprendre les propriétés des trajectoires de particules chargées relativistes, massives ou non, dans le voisinage d'un hopfion, même cette approche semi-analytique ne nous mène pas très loin. Il semble donc que seule une approche totalement numérique de la résolution puisse nous approcher du but.

Conclusion

Nous avons souhaité construire des hopfions à partir de configurations de champs électrique et magnétique tels que ceux-ci sont perpendiculaires entre eux et de même norme. Ces champs conservent ces deux propriétés tout au long de leur évolution et des transformations que nous leur appliquons.

Nous avons considéré trois méthodes différentes pour construire des nœuds électromagnétiques ; une méthode très explicite, où l'on commence par observer un champ électromagnétique trivial et constant dans le temps mais non physique. On lui applique ensuite une inversion conforme, puis une translation complexe dans le temps. On obtient ainsi un hopfion qui se déplace dans le repère utilisé. On calcule ensuite son énergie et sa quantité de mouvement totales afin de lui appliquer un boost de Lorentz pour obtenir son expression dans son repère propre, où sa quantité de mouvement totale est nulle.

On a également construit ce même Hopfion avec la méthode de Bateman, qui consiste à utiliser des potentiels d'Euler complexes. On obtient alors le même hopfion que précédemment, celui qui ne se trouve pas dans son référentiel inertiel. Ce hopfion peut servir à en construire d'autres à partir de transformations conformes.

Troisièmement, on peut considérer l'électromagnétisme comme une théorie topologique. On utilise alors le langage des formes différentielles pour construire le hopfion comme les courbes de niveaux de deux champs scalaires complexes, qui se trouvent en fait être des cartes de Hopf entre S^3 et S^2 une fois qu'on a compactifié l'espace \mathbb{R}^3 et le plan des complexes \mathbb{C} .

Cette formulation topologique permet de calculer ce qu'on appelle l'index de Hopf, ou nombre d'entrelacement, c'est-à-dire la façon dont les courbes de niveaux des deux champs scalaires complexes s'entrelacent. Cet index de Hopf est constant (c'est un invariant topologique) et est égal à 1 pour les cartes de Hopf. De plus, on peut le réexprimer comme étant directement proportionnel (ou égal, en unités naturelles) aux hélicités magnétique et électrique du hopfion.

Nous avons développé plus avant le sujet des hélicités électrique et magnétique, et de leur conservation. En effet, chacune des dérivées temporelles de ces hélicités est directement proportionnelle à $\mathbf{E} \cdot \mathbf{B}$, et est donc nulle dans notre cas puisque nos hopfions sont construits avec des champs électromagnétiques de radiation. Ce qui prouve finalement que le nœud électromagnétique ne disparaît pas avec le temps. Nous avons également explicité le lien entre l'hélicité topologique (c'est-à-dire la façon dont les lignes de champs s'entrelacent) et l'hélicité des particules (c'est-à-dire dans quel sens le spin, ici du photon, est projeté sur sa direction de propagation). Nous avons donc un joli lien entre deux types de physiques qui ont souvent l'air en opposition.

Nous avons dérivé et résolu les équations de la trajectoire d'une particule relativiste, avec ou sans masse, quand elle est plongée dans un champ électromagnétique constant dans le temps et homogène.

Nous avons ensuite pu considérer une approche semi-analytique, en développement de puissances à l'ordre 1 de l'inverse du facteur d'échelle du hopfion, des trajectoires d'une particule chargée dans le voisinage d'un hopfion. Bien qu'étant faisable, cette approche ne nous apprend pas grand chose en tant que propriété générique du hopfion, et nous en avons conclu qu'il valait mieux s'en remettre à une approche numérique, chose qui pourrait être faite dans un travail ultérieur.

Diverses approches ont été envisagées, abordées mais n'ont finalement pas abouti, par manque de temps ou car celles-ci ne fonctionnaient pas. Pour la trajectoire de la particule, nous aurions d'abord voulu une solution totalement analytique, mais nous n'avons trouvé aucune solution concluante pour nos équations; par ailleurs nous avons essayé d'exprimer les potentiels vecteurs de Bateman sur une base de matrices de Pauli, mais les transformations de Lorentz n'étaient pas correctement exprimables sous cette forme.

Nous avons également voulu traiter le cas d'un champ électromagnétique engendré par une sphère chargée tournant sur elle-même (qui se ramène donc finalement à un dipôle magnétique – si l'on exclut le point de discontinuité constitué par celui-ci). Cela a engendré la recherche de quantités conservées et nous avons notamment essayé d'exprimer le vecteur de Laplace-Runge-Lenz se rapportant à cette sphère. La complexité de ces calculs ne nous a pas permis d'obtenir de solutions analytiques. Nous n'en avons donc rien repris dans ce texte.

Perspectives et recherches futures Il serait intéressant de poursuivre les calculs ici entamés afin de trouver numériquement la trajectoire de la particule dans le hopfion, mais aussi autour du dipôle magnétique chargé. Il s'agirait ensuite de superposer ces deux champs afin de considérer la nouvelle trajectoire ainsi engendrée.

Le but envisagé serait de pouvoir traduire ces solutions aux équations de Maxwell vers celles de la relativité générale d'Einstein, dans les approximations de la gravitation linéarisée propres au gravito-électromagnétisme. En effet, dans l'approximation de champ faible du champ gravitationnel et sur base d'un développement non relativiste en puissance de $1/c^2$, on peut ramener les équations d'Einstein à une forme analogue à celles de l'électromagnétisme de Maxwell.

Avec de telles approximations, appelées couramment “gravito-électromagnétisme” [18], il devrait exister des analogues aux nœuds électromagnétiques, sortes de “nœuds gravitationnels” avec lesquels les corps massifs peuvent interagir. Ceux-ci pourraient alors suivre des trajectoires non-soumises à la loi habituelle en $1/r^2$ pour la force gravitationnelle, qui prédit des courbes de rotation des galaxies en désaccord avec ce que les observations actuelles indiquent.

Appendices

A Intégrales

Nous allons procéder à la résolution de la forme générale de l'éq. (2.25). Écrivons-la comme

$$\int_0^\infty dx \frac{p(x^2)}{(1+x^2)^n}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (\text{A.1})$$

où $p(x^2)$ est un polynôme en x^2 d'ordre fini. Introduisons maintenant

$$I_n(\alpha) = \int_0^\infty dx \frac{1}{(1+\alpha x^2)^n}, \quad (\text{A.2})$$

une fonction génératrice de paramètre α réel positif. En dérivant un certain nombre de fois l'expression ci-dessus, puis en prenant $\alpha = 1$, on peut obtenir des intégrales de la forme (A.1), avec $p(x^2)$ un monôme de x^2 . En combinant linéairement ces dérivées de I_n , nous pouvons donc obtenir la forme générale de (A.1) pour tout polynôme $p(x^2)$.

Effectuons un changement de variable $x \rightarrow y/\sqrt{a}$, $dx \rightarrow dy/\sqrt{a}$, sur l'intégrale (A.2). Nous obtenons

$$I_n(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^\infty \frac{dy}{(1+y^2)^n}. \quad (\text{A.3})$$

Effectuons un nouveau changement de variable, $y \rightarrow \tan u$ $dy \rightarrow (1+y^2)du$ (notons que $1/(1+y^2) = \cos^2 u$) :

$$I_n(\alpha) = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_0^{\pi/2} du \cos^{2(n-1)} u. \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned}
\int_0^{\pi/2} du \cos^2 u &= \int_0^{\pi/2} du \left(\frac{e^{iu} + e^{-iu}}{2} \right)^{2m} \\
&= \frac{1}{2^{2m}} \sum_{j=0}^{2m} \frac{(2m)!}{j!(2m-j)!} \int_0^{\pi/2} du e^{iu(j-(2m-j))} \\
&= \frac{1}{2^{2m}} \sum_{j=0}^{2m} \frac{(2m)!}{j!(2m-j)!} \int_0^{\pi/2} du \frac{e^{2iu(m-j)} + e^{-2iu(m-j)}}{2} \\
&= \frac{1}{2^{2m}} \sum_{j=0}^{2m} \frac{(2m)!}{j!(2m-j)!} \int_0^{\pi/2} du \cos(j-m)u \\
&= \frac{1}{2^{2m}} \sum_{j=0}^{2m} \frac{(2m)!}{j!(2m-j)!} \delta_{mj} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{2^{m+1}} \frac{(2m-1)!!}{m!} = \frac{\pi}{2} \frac{(2m-1)!!}{(2m)!!}
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Nous avons donc pour notre intégrale (A.2) :

$$I_n(\alpha) = \int_0^\infty \frac{dx}{(1+\alpha x^2)^n} = \frac{1}{\sqrt{\alpha}} \frac{\pi}{2} \frac{(2n-3)!!}{(2n-2)!!}, \tag{A.6}$$

que nous pouvons dériver selon α , ce qui donne, par exemple

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^2 dx}{(1+\alpha x^2)^n} &= \frac{-1}{n-1} \frac{d}{d\alpha} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+\alpha x^2)^{n-1}} \\
&= \frac{1}{\alpha^{3/2}} \frac{1}{2(n-1)} \frac{\pi}{2} \frac{(2n-5)!!}{(2n-4)!!}
\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x^4 dx}{(1+\alpha x^2)^n} &= \frac{1}{(n-1)(n-2)} \frac{d^2}{d\alpha^2} \int_0^\infty \frac{dx}{(1+\alpha x^2)^{n-2}} \\
&= \frac{1}{\alpha^{5/2}} \frac{1}{4(n-1)(n-2)} \frac{\pi}{2} \frac{(2n-7)!!}{(2n-6)!!}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Nous pouvons donc maintenant calculer l'intégrale (2.25), qui est de la forme

$$I_E = \int_0^\infty dR \frac{R^2}{(R^2 + \alpha^2)^4}. \tag{A.9}$$

On effectue un changement de variable $R/\alpha \rightarrow x$, $dR/\alpha \rightarrow dx$, et on obtient

$$\begin{aligned}
I_E &= \frac{1}{\alpha^5} \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^4} dx \\
&= \frac{1}{\alpha^5} \frac{1}{2} \frac{3!!}{4!!} \frac{\pi}{2} \\
&= \frac{\pi}{32\alpha^5}.
\end{aligned} \tag{A.10}$$

Pour l'intégrale (2.35), on a

$$I_P = \int_0^\infty dR \frac{R^4 - 3\alpha^2 R^2}{(R^2 + \alpha^2)^5}, \quad (\text{A.11})$$

où l'on effectue également un changement de variable $R/\alpha \rightarrow x$, $dR/\alpha \rightarrow dx$. On a alors

$$\begin{aligned} I_P &= \frac{1}{\alpha^5} \int_0^\infty \frac{x^4 - 3x^2}{(1+x^2)^5} = \frac{1}{\alpha^5} \left\{ \frac{2}{4 \cdot 4 \cdot 3} \frac{3!! \pi}{4!! \cdot 2} - 3 \cdot \frac{1}{2 \cdot 4} \frac{5!! \pi}{6!! \cdot 2} \right\} \\ &= \frac{-3\pi}{64\alpha^5}. \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

B Forme explicite des champs électrique et magnétique du hopfion dans son repère

Le champ électrique est donné par

$$\begin{aligned} &E_x(t, x, y, z) \\ &= - \frac{3B_0 \lambda_0^4}{L_0^4 (3\alpha^4 + 2(5t^2 - 8zt + 5z^2 + 3(x^2 + y^2))\alpha^2 + 3(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2)^3} \times \\ &\times \left\{ \left(3\sqrt{3}\alpha^8 + 6\sqrt{3}(t^2 - 7zt + 3x^2 + 4z^2)\alpha^6 + 108xy(Z - 2t)\alpha^5 + \right. \right. \\ &+ 2\sqrt{3}(-22t^4 - 60x^2t^2 + 111y^2t^2 - 109z^3t + (t^2 + 15x^2 - 129y^2)zt + 18x^4 - 9y^4 + \\ &+ 31z^4 + 9x^2y^2 + 3(33t^2 + 7x^2 + 10y^2)z^2)\alpha^4 - 24xy(2t - Z)(-17t^2 + 8zt + 7z^2 + \\ &+ 9(x^2 + y^2))\alpha^3 - 6\sqrt{3}(t^2 - x^2 - y^2 - z^2)(17t^4 - 63zt^3(-22x^2 + 35y^2 + 83z^2)t^2 \\ &- 3z(-5x^2 + 11y^2 + 15z^2)t + 5x^4 - 4y^4 + 8z^4 + x^2y^2 + (x^2 + 4y^2)z^2)\alpha^2 - 108xy(2t - Z) \\ &\left. \left. (-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2\alpha - 9\sqrt{3}(-x^2 + y^2 + (t - z)^2)(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^3 \right) \right\} \quad (\text{B.1}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &E_y(t, x, y, z) \\ &= \frac{6B_0 \lambda_0^4}{L_0^4 (3\alpha^4 + 2(5t^2 - 8zt + 5z^2 + 3(x^2 + y^2))\alpha^2 + 3(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2)^3} \times \\ &\times \left\{ 9t\alpha^7 - 9\sqrt{3}xy\alpha^6 + (4z^3 + 57tz^2 - 6(19t^2 - 6x^2 + 3y^2)z + T(49t^2 - 45x^2 + 63y^2))\alpha^5 + \right. \\ &+ 9\sqrt{3}xy(19t^2 - 16zt + z^2 - 3(x^2 + y^2))\alpha^4 + 3(8z^5 + 17tz^4 + 4(-31t^2 + 8x^2 + y^2)z^3 + \\ &+ 2t(91t^2 - 3(5x^2 + y^2))z^2 - 4(25t^4 + 21x^2t^2 - 6x^4 + 3y^4 - 3(4t^2 + x^2)y^2)z + T(17t^4 + \\ &+ (86x^2 - 50y^2)t^2 - 39x^4 + 33y^4 - 6x^2y^2)\alpha^3 - 9\sqrt{3}xy(-19t^2 + 16zt - z^2 + \\ &+ 3(x^2 + y^2))(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)\alpha^2 - 9(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2(5t^3 - 14zt^2 + \\ &\left. + (7x^2 - 5y^2 + 13z^2)t + 2z(-2x^2 + y^2 - 2z^2))\alpha - 9\sqrt{3}xy(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^3 \right\} \quad (\text{B.2}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E_z(t, x, y, z) \\
= & \frac{6B_0\lambda_0^4}{L_0^4 (3\alpha^4 + 2(5t^2 - 8zt + 5z^2 + 3(x^2 + y^2))\alpha^2 + 3(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2)^3} \times \\
& \times \left\{ 9y\alpha^7 + 9\sqrt{3}x(3t - z)\alpha^6 + 9y(3(x^2 + y^2) - (7t - 5z)(t + z))\alpha^5 + \right. \\
& + \sqrt{3}x(35t^3 - 183zt^2 + 177z^2t + 45(x^2 + y^2)t - 37z^3 - 9(x^2 + y^2)z)\alpha^4 + \\
& + 3y(-79t^4 + 220zt^3 + 6(x^2 + y^2 - 27z^2)t^2 - 4z(z^2 + 15(x^2 + y^2))t + 25z^4 + \\
& + 9(x^2 + y^2)^2 + 42(x^2 + y^2)z^2)\alpha^3 + 9\sqrt{3}x(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)(15t^3 - 33zt^2 + \\
& + (x^2 + y^2 + 21z^2)t + z(x^2 + y^2 - 3z^2))\alpha^2 + 9y(x^2 + y^2 + (11t - 7z)(T - Z)) \times \\
& \left. \times (-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2 \alpha - 9\sqrt{3}x(T - Z)(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^3 \right\} \quad (B.3)
\end{aligned}$$

Le champ magnétique, quand à lui, est donné par

$$\begin{aligned}
& B_x(t, x, y, z) \\
= & \frac{6B_0\lambda_0^4}{L_0^4 (3\alpha^4 + 2(5t^2 - 8zt + 5z^2 + 3(x^2 + y^2))\alpha^2 + 3(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2)^3} \times \\
& \times \left\{ 9t\alpha^7 + 9\sqrt{3}xy\alpha^6 + (4z^3 + 57tz^2 - 6(19t^2 + 3x^2 - 6y^2)z + \right. \\
& + t(49t^2 + 63x^2 - 45y^2))\alpha^5 + 9\sqrt{3}xy(-19t^2 + 16zt - z^2 + 3(x^2 + y^2))\alpha^4 + \\
& + 3(17t^5 + (86y^2 - 50x^2)t^3 + 17z^4t + 2(91t^2 - 3(x^2 + 5y^2))z^2t + \\
& + 3(11x^2 - 13y^2)(x^2 + y^2)t + 8z^5 + 4(-31t^2 + x^2 + 8y^2)z^3 - \\
& + 4(25t^4 + 3(7y^2 - 4x^2)t^2 + 3(x^2 - 2y^2)(x^2 + y^2))z)\alpha^3 + \\
& + 9\sqrt{3}xy(-19t^2 + 16zt - z^2 + 3(x^2 + y^2))(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)\alpha^2 - \\
& - 9(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2(5t^3 - 14zt^2 + (-5x^2 + 7y^2 + 13z^2)t + \\
& \left. + 2z(x^2 - 2(y^2 + z^2)))\alpha + 9\sqrt{3}xy(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^3 \right\} \quad (B.4)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_y(t, x, y, z) \\
= & \frac{3B_0\lambda_0^4}{L_0^4 (3\alpha^4 + 2(5t^2 - 8zt + 5z^2 + 3(x^2 + y^2))\alpha^2 + 3(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2)^3} \times \\
& \times \left\{ 3\sqrt{3}\alpha^8 + 6\sqrt{3}(t^2 - 7zt + 3y^2 + 4z^2)\alpha^6 + 108xy(2t - z)\alpha^5 + 2\sqrt{3} \left(-22t^4 + \right. \right. \\
& + 111x^2t^2 - 60y^2t^2 - 109z^3t + (t^2 - 129x^2 + 15y^2)zt - 9x^4 + 18y^4 + 31z^4 + 9x^2y^2 + \\
& + 3(33t^2 + 10x^2 + 7y^2)z^2 \left. \right) \alpha^4 + 24xy(2t - z) \left(-17t^2 + 8zt + 7z^2 + 9(x^2 + y^2) \right) \alpha^3 - \\
& + 6\sqrt{3}(t^2 - x^2 - y^2 - z^2) \left(17t^4 - 63zt^3 + (35x^2 - 22y^2 + 83z^2)t^2 - \right. \\
& + 3z(11x^2 - 5y^2 + 15z^2)t - 4x^4 + 5y^4 + 8z^4 + x^2y^2 + (4x^2 + y^2)z^2 \left. \right) \alpha^2 + \\
& + 108xy(2t - z)(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2 \alpha - \\
& + 9\sqrt{3} \left((t - z)^2 + (x - y)(x + y) \right) (-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^3 \left. \right\} \quad (B.5)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& B_z(t, x, y, z) \\
= & - \frac{6B_0\lambda_0^4}{L_0^4 (3\alpha^4 + 2(5t^2 - 8zt + 5z^2 + 3(x^2 + y^2))\alpha^2 + 3(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2)^3} \times \\
& \times \left\{ 9x\alpha^7 + 9\sqrt{3}y(z - 3t)\alpha^6 + 9x(3(x^2 + y^2) - (7t - 5z)(t + z))\alpha^5 + \right. \\
& + \sqrt{3}y \left(-35t^3 + 183zt^2 - 177z^2t - 45(x^2 + y^2)t + 37z^3 + 9(x^2 + y^2)z \right) \alpha^4 + \\
& + 3x \left(-79t^4 + 220zt^3 + 6(x^2 + y^2 - 27z^2)t^2 - 4z(z^2 + 15(x^2 + y^2))t + 25z^4 + \right. \\
& + 9(x^2 + y^2)^2 + 42(x^2 + y^2)z^2 \left. \right) \alpha^3 - 9\sqrt{3}y(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)(15t^3 - 33zt^2 + + \\
& + (x^2 + y^2 + 21z^2)t + z(x^2 + y^2 - 3z^2))\alpha^2 + 9x(x^2 + y^2 + (11t - 7z)(t - z)) \times \\
& \times (-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2 \alpha + 9\sqrt{3}y(t - z)(-t^2 + x^2 + y^2 + z^2)^3 \left. \right\} \quad (B.6)
\end{aligned}$$

Bibliographie

- [1] Samoilenka A., Shnir Ya., 2018, 'Magnetic Hopfions in the Faddeev-Skyrme-Maxwell model', *Phys. Rev. D* 97, 125014.
- [2] Rañada A.F., 1989, 'A topological theory of the electromagnetic field', *Lett. Math. Phys* 18 :197-106.
- [3] Rañada A.F., Trueba J.L., 1997, 'Two properties of electromagnetic knots', *Phys. Lett. A* 232 :25-33.
- [4] Arrayás M., Trueba J.L., 2010, 'Motion of charged particles in a knotted electromagnetic field', *J. Phys A*, 43(23) :235401.
- [5] Dalhuisen J.W., 2014, 'The Robinson Congruence in Electrodynamics and General Relativity', *Ph.D. Thesis*, Leiden University, Leiden.
- [6] Arrayás M., Bouwmeester D., Trueba, J.L., 2017, 'Knots in electromagnetism', *Physics Reports*, 667 :1-61.
- [7] Hoyos C. *et al.*, 2015, 'New knotted solutions of Maxwell's equations', *J. Phys. A : Math. and Theor.*, 48(25)
- [8] Rañada, A.F., 1990, 'Knotted solutions of the Maxwell equations in vacuum', *J. Phys A : Math. Gen.* 23 :L815-L820.
- [9] Rañada A.F., 1992, 'Topological electromagnetism', *J. Phys. A : Math. Gen.* 25 : 1621-1641.
- [10] Rañada A.F., Trueba J.L., 1995, 'Electromagnetic knots', *Phys. Lett. A* 202 :337-342.
- [11] Rañada, A.F., Trueba J.L., 1996, 'The electromagnetic helicity', *Eur. J. Phys.* 17 :141-144.
- [12] Rañada A.F., Trueba J.L., 2001, 'Topological electromagnetism with hidden nonlinearity', *Modern Non Linear Optics Part III* vol. 119, ed. Evans M.W., Wiley, New York, pp. 197-253
- [13] Rañada A.F., Trueba J.L., 1998, 'A topological mechanism of discretization for the electric charge', *Phys. Lett. B* 422 :196-200.
- [14] Rañada A.F., 2003, 'Interplay of topology and quantization : topological energy quantization in a cavity', *Phys. Lett. A* 310 :434-444.
- [15] Rañada A.F., Trueba J.L., 2006, 'Topological quantization of the magnetic flux', *Foundations of Physics* 36(3) :427-436.
- [16] Hopf, H., 1931, 'Über die Abbildungen der dreidimensionalen Sphäre auf die Kugelfläche', *Mathematische Annalen*, Berlin : Springer, 104(1) :637-665,

- [17] Whitehead H.C., 1947, 'An expression of Hopf's invariant as an integral', *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 33(5)117-123
- [18] Heaviside O., 1893, 'A gravitational and electromagnetic analogy', *The Electrician* 31 :81-82.
- [19] Alves D.W.F. *et al.*, 2017, 'Knotted solutions for linear and non linear theories : Electromagnetism and fluid dynamics', *Phys. Lett. B*, 773 :412-416.
- [20] Bialynicki-Birula I., 2019, 'Helicity amplitudes, polarization of EM waves and Stokes parameters', *Journal of Optics*, 21(9).
- [21] Cameron R.P., 2018, 'Monochromatic knots and other unusual electromagnetic disturbances : light localised in 3D', *J. Phys. Commun.*, 2(1).
- [22] Faddeev L., Niemi J., 1996, 'Knots and particles', *Nature* 387 :58-66.
- [23] Irvine W.T.M., Bouwmeester D., 2008, 'Linked and knotted beams of light', *Nature Phys.*, 4 :716-720.
- [24] Kalashnikova Y.S., Nefediev A.V., 1997, 'Relativistic quantum mechanics in the ein-bein field formalism', *Phys. Atom. Nucl.*, 60 :1389-1394.
- [25] Kedia H. *et al.*, 2013, 'Tying knots in light fields', *Phys. Rev. Lett.*, 111(15) :150404.
- [26] Leach J. *et al.*, 2005, 'Vortex knots in light', *New Journal of Physics*, 7(55)
- [27] Moffatt H.K., M., Ricca, R.R., 1997, 'Helicity and the Călugăreanu invariant', *Proc. R. Soc. Lond. A* 439 :411-429.
- [28] Vancea I.V., 2019, 'Knots and the Maxwell's equations', *An Essential Guide to Maxwell's Equations*, edited by Casey Erickson, Nova Science Publishers.

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
Faculté des sciences

Place des sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/sc