

Faculté des sciences

# Un exemple de convergence Gamma dans le contexte de la conception optimale de structures

Auteure : Adélaïde Mouthuy

Promoteur : Heiner Olbermann

Lecteurs : Augusto Ponce, Pierre Bieliavsky

Année académique 2023-2024



UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN  
FACULTÉ DES SCIENCES  
ÉCOLE DE MATHÉMATIQUES

---

# Un exemple de convergence Gamma dans le contexte de la conception optimale de structures

---

Adélaïde Mouthuy  
Promoteur : Heiner Olbermann  
Lecteurs : Augusto Ponce, Pierre Bieliavsky

Master thesis  
Juin 2024



# Remerciements

Je souhaite remercier le professeur Heiner Olbermann, promoteur de mon mémoire, pour m'avoir proposé ce sujet il y a un an. J'ai adoré découvrir la puissance de la convergence Gamma dans le calcul des variations et je n'aurais pas pu y arriver sans son aide. Son soutien tout au long de mon travail fût extrêmement utile pour me guider dans mes analyses et définir les priorités. Je salue tout particulièrement sa disponibilité et sa réactivité.

Je voudrais également remercier Augusto Ponce pour son cours de Calcul des Variations, qui m'a fait découvrir ce domaine de l'analyse.

Enfin, je remercie ma famille et Félix qui m'ont soutenue jusqu'au bout, ainsi que les mafys qui m'ont aidée tout au long du processus.

# Introduction

L'objectif de ce travail est d'explorer une notion propre au calcul des variations, la convergence Gamma, et d'en découvrir un exemple concret, discuté dans l'article de Heiner Olbermann [35] : la convergence de certains problèmes de conception optimale de structures vers le problème des poutrelles de Michell en deux dimensions [34], comme remarqué par Allaire et Kohn [1]. Plus particulièrement, il s'agit des problèmes de minimisation de l'énergie absorbée par un corps élastique soumis à une force extérieure pour un poids donné. On modélise cette condition sur le poids par un paramètre de Lagrange et on observe le comportement variationnel lorsque ce paramètre tend vers l'infini [1] [6] [39].

Le but a donc été d'apporter le maximum possible de justifications et de contexte mathématique au théorème principal de l'article "Michell trusses in two dimensions as a Gamma-limit of optimal design problems in linear elasticity" de Heiner Olbermann. L'exhaustivité et l'originalité des démonstrations n'étaient donc pas une fin en soi. L'intention a davantage été d'entourer ce résultat principal de plusieurs principes mathématiques clés, comme la convergence Gamma, la relaxation, la quasiconvexité, etc. Ce sont donc pas moins de 19 théorèmes et 11 lemmes qui ont été préalablement explicités avec plus ou moins de profondeur avant d'aborder les deux théorèmes finaux (20 et 21) de l'article. Quelques simplifications par rapport à l'article initial ont cependant été nécessaires pour pouvoir aborder son contenu. On a donc utilisé des hypothèses différentes pour les conditions aux bords dénotées par  $g$  et  $f$ , et un ouvert  $\Omega$  plus régulier.

Pour atteindre cet objectif, on a d'abord parcouru la théorie associée à la convergence Gamma, ainsi qu'une introduction aux concepts de relaxation et quasiconvexité. On s'est ensuite intéressé à l'espace de fonctions à variation bornée  $BV$ , qui apparaîtrait dans notre exemple de convergence Gamma. Enfin, on a pu s'attaquer à la compréhension de cet exemple.

Ce mémoire se divisera en six chapitres. Premièrement, on rappellera la philosophie générale du calcul des variations. On en profitera pour introduire notre exemple avec une motivation physique non-rigoureuse. Deuxièmement, on définira la convergence Gamma, qui est un outil très puissant pour le calcul des variations, et on discutera de quelques-unes de ces principales propriétés, preuves à l'appui. On donnera également quelques exemples illustratifs. On discutera ensuite brièvement des notions de relaxation et quasiconvexité, en énonçant notamment deux résultats nécessaires pour la preuve de la convergence Gamma de notre exemple. Le chapitre 4 parlera des espaces de fonctions à variation bornée et à hessienne bornée. Ces espaces seront également importants dans

l'énoncé de notre exemple et on apportera quelques résultats utiles pour notre preuve, sans les démontrer. Dans la même logique, on continuera d'énoncer des outils importants dans le chapitre qui suivra. Enfin, on pourra énoncer notre théorème principal qui traite de la convergence Gamma de ces problèmes de conception optimale de structure, et en fournir une preuve partielle.

## Notations

Avant de commençons, on donne quelques notations qui seront utilisées tout au long de ce mémoire.

On définit le produit scalaire : sur  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$  comme

$$A : B = \sum_{i,j=1}^2 A_{i,j} B_{i,j}$$

pour  $A, B \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . Ici,  $A_{i,j}$  dénote l'élément de  $A$  à la ligne  $i$  et colonne  $j$ . On utilise alors la notation  $|A|^2 = A : A$ .

On note  $A \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}$  si  $A^T = A$  et  $B \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}$  si  $B^T = -B$ .

On utilise le symbole  $f \lesssim g$  lorsqu'il existe une constante  $C > 0$  telle que  $f \leq Cg$ .

La fonction caractéristique d'un ensemble  $E$  est représentée par  $\chi_E$ , c'est-à-dire que

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in E \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour un ouvert borné  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ,  $1 \leq p \leq \infty$  et  $k \in \mathbb{N}$ , on équipe les espaces de Sobolev de la norme

$$\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \|\partial^\alpha u\|_{L^p(\Omega)}.$$

De plus, on distingue les espaces de Sobolev de Hilbert en notant  $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega)$ .

On définit également

$$\begin{aligned} H^{1/2}(\Omega) &= \{u|_{\partial\Omega} : u \in H^2(\Omega)\} \\ H^{3/2}(\Omega) &= \{u|_{\partial\Omega} : u \in H^1(\Omega)\} \end{aligned}$$

où  $u|_{\partial\Omega}$  désigne la trace de  $u$  au sens de Sobolev (voir [28]).

On réserve le symbole  $\mathcal{H}^n$  pour la mesure de Hausdorff en dimension  $n$ .

Pour un ensemble Borel  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ , on note  $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^m)$  les mesures de Radon vectorielles sur  $\Omega$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^m$ . La variation totale de ces mesures  $\mu$  est dénotée par  $|\mu|$ . De plus,  $\mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}) = \{\mu \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^{2 \times 2}) : \mu_{ij} = \mu_{ji}, i \neq j\}$ .

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>5</b>
<b>Introduction</b>	<b>6</b>
<b>1 Motivation</b>	<b>10</b>
1.1 Calcul des variations . . . . .	10
1.2 Explication du problème physique . . . . .	12
<b>2 Convergence Gamma</b>	<b>18</b>
<b>3 Relaxation et quasiconvexité</b>	<b>28</b>
<b>4 Espaces de fonctions <math>BV</math> et <math>BH</math></b>	<b>38</b>
<b>5 Boîte à outils</b>	<b>45</b>
<b>6 Résultat principal</b>	<b>51</b>
<b>Conclusion</b>	<b>65</b>

# Chapitre 1

## Motivation

Dans ce chapitre, on parle d'abord du cadre du calcul des variations, le domaine de l'analyse mathématique dans lequel on va voyager. Dans la deuxième section, on tente de motiver le problème physique qui se cache derrière notre exemple de convergence Gamma.

### 1.1 Calcul des variations

Cette section est grandement inspirée du cours de Calcul des Variations de l'UCLouvain, donné par Augusto Ponce [4].

Dans beaucoup de domaines tels que l'ingénierie, la physique et l'économie, on est intéressé par la minimisation d'une certaine quantité. Mathématiquement, les problèmes de minimisation consistent à trouver la fonction qui minimise une fonctionnelle. Une fonctionnelle  $F$  est une fonction  $X$  sur un espace de fonction, à valeur dans les réels étendus.

$$F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}.$$

Trouver le minimiseur de cette fonctionnelle veut dire trouver la fonction  $u \in X$  telle que  $F(u) = \min_X F$ . Pour cela, il faut montrer que l'infimum est atteint,  $F(u) = \min_X F = \inf_X F$ .

Comme exemple basique ([4] [exemple 1.1]), supposons que l'on veuille aller d'un point  $A$  à un point  $B$ .

Ici,  $X$  sera l'ensemble des chemins continûment différentiables de  $A$  à  $B$ ,  $X = \{v : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2 \text{ de classe } C^1; v(0) = A, v(1) = B\}$ , et  $F(v)$  sera la longueur du chemin  $v$ ,

$$F(v) = \int_0^1 |v'(t)| dt.$$

Bien évidemment, le minimiseur de  $F$  sera la ligne droite,  $u(t) = A(1-t) + Bt$ .

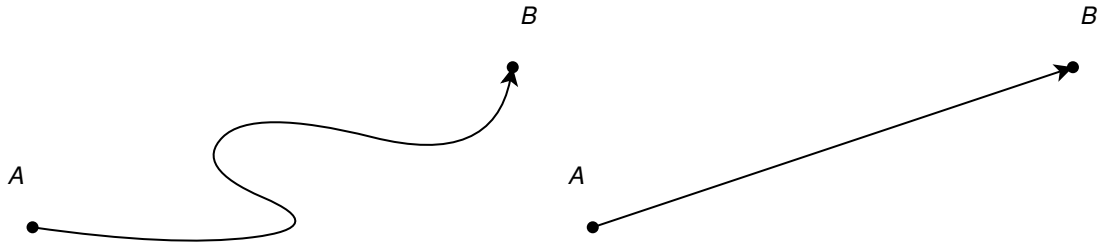


FIGURE 1.1 – Deux manières possibles de relier  $A$  et  $B$ .

Pour résoudre ce genre de problème de manière plus systématique, Hilbert proposa la méthode directe en 1897. Celle-ci comporte trois étapes.

Premièrement, puisque l'objectif est de prouver que l'infimum est atteint, il est naturel de prendre une suite minimisante, c'est-à-dire

$$(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ telle que } \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = \inf_X F.$$

Ensuite, un bon candidat pour être le minimiseur de  $F$  serait la limite de cette suite, si elle existe. Le but est donc de choisir une topologie faible cohérente sur  $X$ , de sorte qu'il existe une sous-suite convergente,

$$(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}} \text{ telle que } u_{n_k} \rightharpoonup u \in X.$$

L'étape finale de la méthode doit maintenant prouver que ce candidat  $u$  minimise bien  $F$ . Pour cela, on a besoin d'une condition sur  $F$ . Exiger la continuité de  $F$  serait trop demander par rapport à la topologie choisie précédemment, comme expliqué dans le cours [4]. Une hypothèse plus faible suffit : la semicontinuité inférieure séquentielle de  $F$  par rapport à la topologie choisie. Cela se traduit par

$$\text{si } v_n \rightharpoonup v, \text{ alors } F(v) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(v_n).$$

Il n'est pas trop compliqué de voir que cette méthode fournit un minimiseur. En effet, par définition d'infimum, on a que

$$\inf_X F \leq F(u),$$

et ceci est valable pour tout  $u \in X$ , donc en particulier pour la limite de la sous-suite

$(u_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ . Maintenant, par l'hypothèse de semicontinuité inférieure, on a que

$$F(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(u_{n_k}) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = \inf_x F$$

car la sous-suite d'une suite minimisante est aussi une suite minimisante. En combinant ces deux inégalités, on obtient que  $F(u) = \inf_X F$ , ce qui prouve que l'infimum est bien atteint par  $u$ .

## 1.2 Explication du problème physique

Le travail de ce mémoire se base sur l'article "Michell trusses in two dimensions as a Gamma-limit of optimal design problems in linear elasticity" de Heiner Olbermann [35]. Le théorème central de cet article annonce que ces problèmes de conception optimale Gamma-convergent vers le problème de "Michell trusses" (poutrelles de Michell) en deux dimensions. La notion de convergence Gamma sera traitée dans le prochain chapitre. Les problèmes de conception optimale recherchent la meilleure solution possible pour une structure mécanique satisfaisant des exigences, et menant aux meilleures performances [31]. Dans le cadre de cet article, le problème de conception optimale vise à minimiser l'énergie absorbée d'un corps élastique soumis à une charge. Les poutrelles de Michell sont quant à elles des structures élastiques constituées d'éléments de charpente linéaires, qui peuvent chacun résister à une certaine force compressive. Le problème de minimisation est alors de trouver la structure de Michell de plus petit volume qui résiste à une charge donnée. La charge est une force appliquée en un nombre fini de points de la structure (voir [34]).

Cette section est dédiée à l'explication du problème de minimisation de l'énergie absorbée par un matériau élastique (en anglais, "compliance"). Le but ici est d'introduire la fonction de minimisation qu'on utilisera plus tard, et non de faire toute une analyse physique de la question. Ce chapitre est donc hautement non-rigoureux et sert uniquement de motivation aux fonctions qu'on utilisera plus tard. L'explication ci-après se base sur l'article d'Allaire et Kohn [1].

Supposons qu'on ait un corps élastique  $\Omega$  dans le plan  $\mathbb{R}^2$ . On lui associe un tenseur inversible  $A_0 \in \text{Lin}(\mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}, \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2})$ . Une force que l'on dénotera par une fonction  $g \in L^2(\partial\Omega, \mathbb{R}^2)$  est appliquée sur le bord  $\partial\Omega$ . On souhaite maintenant retirer une partie de  $\Omega$ ,  $H$ , qui formera des trous dans notre matériau. Cela crée un nouveau bord,  $\partial H$  qui sera libre de toutes forces dans notre problème.

Le déplacement du matériau suscité par la force qui lui est appliquée sera dénoté par une fonction  $u : \Omega \setminus H \rightarrow \mathbb{R}^2$ . Il s'agit de la solution unique du système linéaire élastique :

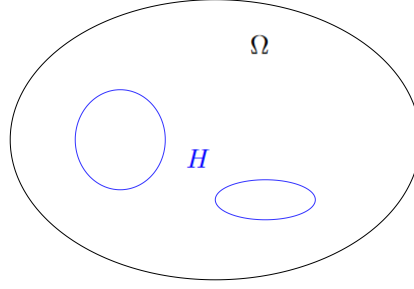


FIGURE 1.2 – Corps élastique  $\Omega$  privé de  $H$ .

$$\begin{cases} e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \\ \sigma = A_0 e(u) \\ \operatorname{div}(\sigma) = 0 \text{ sur } \Omega \setminus H \\ \sigma \cdot n = g \text{ sur } \partial\Omega \\ \sigma \cdot n = 0 \text{ sur } \partial H \end{cases} \quad (1.1)$$

où  $n$  représente la normale extérieure à  $\partial\Omega$ ,  $e(u)$  est appelé le gradient symétrisé de  $u$ ,  $\sigma$  est la matrice de stress et  $g \in L^2(\partial\Omega, \mathbb{R}^2)$  est la force appliquée sur le matériau. L'équation  $\operatorname{div}(\sigma) = 0$  sur  $\Omega \setminus H$  signifie que les forces sont à l'équilibre au sein du matériau. Pour une justification de l'existence de solution et de l'équivalence avec la formulation faible et variationnelle du problème, il faudrait se référer à l'article de Long Chen [13] et utiliser le théorème de Lax-Milgram (voir p314 [22]) à l'aide de l'inégalité de Korn, mais cela n'a pas été réalisé ici.

L'énergie absorbée par le matériau (ou "compliance") est définie comme

$$c(H) = \int_{\partial\Omega} g \cdot u \, d\mathcal{H}^1 \quad (1.2)$$

où  $u$  est toujours la solution unique du système (1.1), pour un  $H$  donné.

En appliquant le théorème de la divergence à  $\sigma \cdot u$ , on obtient

$$\int_{\Omega \setminus H} \operatorname{div}(\sigma \cdot u) \, dx = \int_{\partial\Omega} (\sigma \cdot u) \cdot n \, d\mathcal{H}^1 + \int_{\partial H} (\sigma \cdot u) \cdot n \, d\mathcal{H}^1.$$

Grâce aux équations dans (1.1), on voit que le premier terme à droite est égal à  $c(H)$  et le dernier terme est nul. On sait également que  $\operatorname{div}(\sigma \cdot u) = \operatorname{div}(\sigma) \cdot u + \sigma : \nabla(u)$ .

Comme  $\sigma \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}$ ,  $\sigma : \nabla(u) = \sigma : e(u)$  et comme  $\text{div}(\sigma) = 0$  sur  $\Omega \setminus H$ , l'énergie absorbée par le matériau (1.2) devient

$$c(H) = \int_{\Omega \setminus H} \sigma : e(u) \, dx. \quad (1.3)$$

Notre but est de minimiser le "poids"  $\mathcal{L}^2(\Omega \setminus H)$ , avec une contrainte sur l'énergie absorbée. Cela signifie que pour une constante  $M$ , notre problème est

$$\min_{c(H) \leq M} \mathcal{L}^2(\Omega \setminus H). \quad (1.4)$$

On applique à présent un raisonnement qui n'est pas rigoureux mathématiquement, mais qui nous permettra de trouver la fonction avec laquelle on pourra travailler de manière rigoureuse dans les autres chapitres. Etant donné que diminuer la quantité de matériau augmente l'énergie absorbée par le corps restant, on peut tout aussi bien transformer le problème en

$$\min_{\mathcal{L}^2(\Omega \setminus H) \leq N} c(H) \quad (1.5)$$

pour une constante  $N$ .

On souhaite résoudre ceci grâce à la méthode des multiplicateurs de Lagrange. On introduit donc un paramètre  $\lambda$  positif et on se retrouve avec un problème de minimisation pour chaque valeur de  $\lambda$ . Plus particulièrement, on souhaite résoudre

$$\min_H \left( c(H) + \lambda \mathcal{L}^2(\Omega \setminus H) \right). \quad (1.6)$$

pour un  $\lambda$  donné.

Lorsque le paramètre  $\lambda$  augmente, le "poids"  $\mathcal{L}^2(\Omega \setminus H)$  diminue et l'énergie absorbée  $c(H)$  augmente. La limite  $\lambda \rightarrow \infty$  correspond donc à la limite où le poids tendrait vers zéro. Rappelons une fois encore que cet argumentaire n'est pas rigoureux.

On réexprime maintenant le problème en utilisant un tenseur dépendant de la position,  $A(x) = \theta(x)A_0$  où  $\theta \in L^\infty(\Omega; \{0, 1\})$  est la fraction de volume de  $A(x)$ , prenant la valeur 0 sur  $H$  et 1 sur  $\Omega \setminus H$ .

Ce nouveau tenseur  $A(x)$  exprime à lui seul le matériau et il n'y a plus besoin de  $H$  pour représenter les trous dans le matériau. Le système élastique (1.1) devient donc

$$\begin{cases} e(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + \nabla u^T) \\ \sigma = A(x)e(u) \\ \text{div}(\sigma) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \sigma \cdot n = g \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.7)$$

L'énergie absorbée est à présent une fonctionnelle sur l'espace des tenseurs  $A(x)$  admis,

$$c(A) = \int_{\Omega} \sigma : e(u) \, dx = \int_{\Omega} (A(x)e(u)) : e(u) \, dx. \quad (1.8)$$

Comme la quantité totale de matériau est donnée par l'intégrale de la fraction de volume de  $A(x)$ , notre problème (1.6) avec des matériaux composites se réécrit comme

$$\min_{\theta(x)} \left( c(A) + \lambda \int_{\Omega} \theta(x) \, dx \right). \quad (1.9)$$

Grâce au principe d'énergie complémentaire minimale, l'énergie absorbée (1.8) se réécrit comme

$$C(A) = \int_{\Omega} G(A(x), \sigma(x)) \, dx \quad (1.10)$$

avec

$$G(M, \xi) = \begin{cases} +\infty & \text{si } \xi \neq 0 \text{ et } M = 0 \\ 0 & \text{si } \xi = 0 \text{ et } M = 0 \\ (M^{-1}\xi) : \xi & \text{sinon} \end{cases}$$

et où  $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}$  est la solution de

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\sigma) = 0 \text{ sur } \Omega \\ \sigma \cdot n = g \text{ sur } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.11)$$

Cette réécriture n'est pas l'objet de ce travail, le lecteur intéressé peut se référer au chapitre 4 du livre d'Ekeland et Temam [20] pour mieux comprendre le raisonnement derrière. Plus particulièrement, il faudrait utiliser le théorème 2 du chapitre 3 et adapter la discussion à notre problème.

On définit l'ensemble des stress autorisés comme

$$S_g(\Omega) = \left\{ \sigma \in L^2(\Omega, \mathbb{R}^{2 \times 2}) : -\operatorname{div}(\sigma \mathcal{L}^2) = g \mathcal{H}^1 \llcorner \partial\Omega \right\}. \quad (1.12)$$

Lorsque  $\sigma$  est suffisamment lisse, cela revient à ce que  $\sigma$  soit une solution de (1.11), comme expliqué en (5.2).

Notre problème de minimisation (1.9) peut donc se voir comme le problème variationnel de trouver l'infimum

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} (G(A(x), \sigma(x)) + \lambda \theta(x)) \, dx : \theta \in L^\infty(\Omega, \{0, 1\}), \sigma \in S_g(\Omega) \right\}.$$

Par (1.10), s'il existe un ensemble de mesure non-nulle tel que  $\theta = 0$  et  $\sigma \neq 0$ , l'énergie absorbée sera infinie. On peut donc réécrire le problème comme

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} F_{\lambda}^{A_0}(\sigma(x)) \, dx : \sigma \in S_g(\Omega) \right\}$$

avec

$$F_{\lambda}^{A_0}(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma = 0 \\ (A_0^{-1}\sigma) : \sigma + \lambda & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme expliqué dans l'article d'Allaire et Kohn [1], ce problème a besoin de relaxation pour s'assurer de l'existence d'une solution. Le concept de relaxation sera discuté dans le chapitre 3.

Pour simplifier les calculs, on supposera ici que  $A_0$  est la matrice identité. On définit alors

$$F_{\lambda}(\sigma) = \begin{cases} 0 & \text{si } \sigma = 0 \\ |\sigma|^2 + \lambda & \text{sinon.} \end{cases}$$

Notre problème variationnel devient donc

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} F_{\lambda}(\sigma(x)) \, dx : \sigma \in S_g(\Omega) \right\}.$$

Pour  $\lambda > 0$  fixé, on définit

$$\mathcal{G}_{g,\lambda}(\sigma) = \begin{cases} \lambda^{-1/2} \int_{\Omega} F_{\lambda}(\sigma(x)) \, dx & \text{si } \sigma \in S_g(\Omega) \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme  $\lambda > 0$ , notre problème devient équivalent à

$$\inf_{\sigma} (\mathcal{G}_{g,\lambda})$$

et c'est cette dernière formulation qui sera utilisée par la suite.

Pour le problème variationnel associé aux poutrelles de Michell, on utilisera comme espace de stress autorisés

$$\Sigma_g(\Omega) = \left\{ \sigma \in \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}) : -\text{div}(\sigma) = g\mathcal{H}^1 \llcorner \partial\Omega \right\} \quad (1.13)$$

où  $\text{div}(\sigma)$  est à comprendre au sens de (5.1).

On utilisera également la fonction  $\rho : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  qui retourne la somme des valeurs absolues des valeurs propres d'une matrice. Soit  $\xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , dénotons par  $\ell_1(\xi), \ell_2(\xi)$  ses deux valeurs propres. Alors,

$$\rho(\xi) = |\ell_1(\xi)| + |\ell_2(\xi)|. \quad (1.14)$$

On définit ici notre fonctionnelle comme

$$\mathcal{G}_g(\sigma) = \begin{cases} 2\rho(\sigma)(\bar{\Omega}) & \text{si } \sigma \in \Sigma_g(\Omega) \\ \infty & \text{sinon} \end{cases}$$

avec  $\rho(\sigma)$  à comprendre au sens de (5.4). Ce choix de fonctionnelle est motivé dans [1][2], et on n'en discutera pas ici.

# Chapitre 2

## Convergence Gamma

Ce chapitre est consacré à la découverte de la convergence Gamma, une notion particulièrement intéressante lorsque l'on travaille avec des suites de fonctionnelles. On discutera de plusieurs exemples illustratifs pour mieux comprendre son utilité et son comportement. Le point le plus important sera le théorème (2) qui sera fondamental dans tout ce travail.

Une fois que l'on sait résoudre certains problèmes de minimisation, une question naturelle d'un point de vue analyste est de s'intéresser au comportement limite de ces objets. Ainsi, supposons qu'on ait une suite de fonctionnelles  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et qu'on ait trouvé un minimiseur pour chacune d'entre elles. On a donc une suite de minimiseurs  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  telle que  $F_1(u_1) = \min_x F_1, F_2(u_2) = \min_X F_2$ , etc. Si la suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une fonctionnelle  $F$ , que peut-on dire sur les minimiseurs de  $F$ ? On serait tenté de dire que la limite de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  minimise  $F$ , si elle existe. Malheureusement, ce n'est généralement pas le cas, en tout cas pour des convergences "classiques".

Cet exemple est inspiré de la remarque 1.1.3 des notes d'Andrea Braides [9].

**Exemple 1.** Soit  $X$  l'ensemble des fonctions réelles constantes positives. Définissons

$$F_n(u) = \begin{cases} -1 & \text{si } u = \frac{1}{n} + 1 \\ u(0)^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On observe que la fonction  $F_n$  converge ponctuellement vers  $F$  définie comme  $F(u) = u(0)^2$ . Cela peut se prouver à l'aide de la propriété d'Archimède (pour tout réel  $x$ , il existe un naturel  $N$  tel que  $x < N$ ).

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la fonction constante  $u_n = \frac{1}{n} + 1$  est un minimiseur de  $F_n$ . On voit également que  $(u_n)_n$  converge uniformément vers la fonction constante  $u = 1$ .

Cependant,  $u$  ne minimise pas  $F$ !

On a  $F(u) = u(0)^2 = 1 > F(v) = 0$ , avec  $v$  la fonction nulle.

Pour obtenir le comportement désiré, on a besoin d'introduire une nouvelle notion de convergence : la convergence Gamma. Plusieurs définitions équivalentes existent, mais on utilisera celle ci-dessous pour plus de facilité. Pour le lecteur intéressé, une discussion des équivalences de définitions peut être trouvée dans les deux premiers chapitres de l'article de revue d'Andrea Braides [8].

Pour la suite de ce chapitre,  $X$  n'est plus forcément un espace de fonctions, mais simplement un espace métrique (en particulier, les résultats sont applicables dans le cas d'un espace métrique de fonctions).

**Définition 1.** Soit  $X$  un espace métrique,  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}} : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  une suite de fonctions et  $F : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ . On dit que  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  Gamma-converge vers  $F$  et on note  $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$  si

- Pour tout  $u \in X$  et toute suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $u$ ,  

$$F(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n)$$
- Pour tout  $u \in X$  il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  convergeant vers  $u$  telle que  

$$F(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(u_n)$$

Notons que similairement à la semicontinuité séquentielle inférieure évoquée au chapitre précédent, la convergence Gamma dépend fortement de la topologie choisie sur  $X$ .

La convergence Gamma sera la plus appropriée lorsque l'on traite de suite de fonctionnelles associées à des problèmes de minimisation. Bien que cette nouvelle notion de convergence soit amenée pour répondre à un besoin spécifique (dans le but que la minimisation se comporte bien sous passage à la limite), elle possède toutefois des propriétés désirables. Ces propriétés nous rassurent quant à la nature cohérente de cette nouvelle convergence. Sauf mention contraire, les résultats qui suivent sont issus du résumé de cours de Sergio Conti [14]. Seul le théorème (1) et les définitions ont été écrites plus explicitement. On a cependant tenté d'ajouter le plus de détails possibles dans les preuves et les exemples.

On a vu dans la méthode directe que la semicontinuité séquentielle inférieure est une propriété souhaitée lorsque l'on traite de problèmes de minimisation.

**Lemme 1.** Si  $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$ , alors  $F$  est séquentiellement semicontinue inférieure.

*Démonstration.* Soit  $(x_k)_k \subset X$  une suite convergeant vers  $x \in X$ . Montrons que  $F(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(x_k)$ .

Par le deuxième point de la définition (1), on a que pour chaque  $k \in \mathbb{N}$  il existe une suite  $(x_n^k)_n$  convergeant vers  $x_k$  telle que  $F(x_k) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n^k)$ .

Par définition de la limite, à partir d'un  $n$  assez grand (dépendant de  $k$ ), on aura  $\text{dist}(x_n^k, x_k) < \frac{1}{k}$  et  $F_n(x_n^k) \leq F(x_k) + \frac{1}{k}$ , et ce pour chaque  $k \in \mathbb{N}$ .

Définissons donc  $n(k)$  comme le maximum entre ce  $n$  assez grand et  $k$ . Alors, la suite  $(x_{n(k)}^k)_k$  converge vers  $x$  et

$$F(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F_{n(k)}(x_{n(k)}^k)$$

par le premier point de la définition (1).

Par définition de notre  $n(k)$ , on obtient

$$F(x) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F_{n(k)}(x_{n(k)}^k) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F(x_k),$$

ce qui montre la semicontinuité séquentielle inférieure.  $\square$

En particulier, ce lemme nous dit que si  $F_n = F$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$  si et seulement si  $F$  est séquentiellement semicontinue inférieure.

**Lemme 2.** Si  $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$  et  $G$  est une fonction continue, alors  $F_n + G \xrightarrow{\Gamma} F + G$

*Démonstration.* Prouvons que les deux points de la définition (1) sont bien satisfaits.

Premièrement, soient  $x \in X$  et  $(x_n)_n$  convergeant vers  $x$ . On a alors en utilisant la convergence Gamma de  $(F_n)_n$  et la continuité de  $G$  que

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n) + G(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n) + \liminf_{n \rightarrow \infty} G(x_n) \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} (F_n(x_n) + G(x_n)). \end{aligned}$$

Ensuite, soit  $x \in X$ . Comme  $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$ , on sait qu'il existe une suite  $(x_n)_n$  convergeant vers  $x$  telle que  $F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n)$ . Vu que  $G$  est continue, on peut reprendre cette même suite  $(x_n)_n$  et obtenir

$$F(x) + G(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} F(x_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} G(x_n).$$

$\square$

Cette propriété assure que la convergence Gamma possède une certaine stabilité face aux fonctions continues.

Pour mieux saisir cette nouvelle notion de convergence, examinons quelques exemples en une dimension. Pour simplifier les choses, travaillons avec des fonctions sur  $X = \mathbb{R}$ , équipé de la métrique usuelle. Les deux prochains exemples sont inspirés de la présentation de Tim Sullivan [41].

**Exemple 2.** Soit  $(f_n)_n$  la suite de fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = \cos(nx)$ . On a  $f_n \xrightarrow{\Gamma} f$  avec  $f$  la fonction constante  $f(x) = -1$ .

En effet, vérifions les deux points de la définition (1).

Premièrement, soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $(x_n)_n$  convergeant vers  $x$ . Comme  $\cos(y) \geq -1$  pour tout  $y \in \mathbb{R}$ , on a bien

$$f(x) = -1 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \cos(nx_n).$$

Ensuite, soit  $x \in \mathbb{R}$ . On peut poser

$$x_n = \frac{\pi}{n} + 2 \left\lceil \frac{nx}{2\pi} \right\rceil \frac{\pi}{n}$$

où  $\lceil y \rceil$  désigne la partie entière de  $y$  pour un  $y \in \mathbb{R}$ . Comme  $y \leq \lceil y \rceil < y + 1$ , on a

$$\frac{\pi}{n} + x \leq x_n < \frac{\pi}{n} + x + \frac{2\pi}{n}.$$

Par l'étau,  $x_n$  converge vers  $x$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . De plus, en notant  $k_n = \left\lceil \frac{nx}{2\pi} \right\rceil \in \mathbb{Z}$ , on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \cos(\pi + 2k_n\pi) = \cos(\pi) = -1$$

et cela finit de montrer la convergence Gamma de  $f_n$ .

Notons également que  $f_n \xrightarrow{\Gamma} f$  n'implique pas  $-f_n \xrightarrow{\Gamma} -f$ . On peut le voir en effectuant le même genre de raisonnement que dans l'exemple précédent pour montrer que  $-\cos(nx) \xrightarrow{\Gamma} -1$ .

**Exemple 3.** Soit  $(f_n)_n$  la suite de fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = x^2 - \cos(nx)$ . On a  $f_n \xrightarrow{\Gamma} f$  avec  $f$  la fonction définie par  $f(x) = x^2 - 1$ .

Cela suit directement de l'application du lemme (2).

Remarquons le lien fort qui relie la convergence Gamma et la limite des minimiseurs. Une suite de fonctions qui exploserait vers l'infini dans sa limite pour des types de convergence "classiques" peut tout de même Gamma-converger vers une fonction qui atteint son minimum en la limite des minimiseurs comme l'illustre l'exemple ci-dessous de la page 20 du résumé de cours de Sergio Conti [14].

**Exemple 4.** Soit  $(f_n)_n$  la suite de fonctions définies sur  $\mathbb{R}$  par  $f_n(x) = (nx - 1)^2$ . On a  $f_n \xrightarrow{\Gamma} f$  avec  $f$  la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x = 0 \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Prouvons de nouveau les deux points de la définition (1). Premièrement, soient  $x \in \mathbb{R}$  et  $(x_n)_n$  une suite convergeant vers  $x$ . Comme  $f_n$  est une fonction positive pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$\begin{aligned} f(0) &= 0 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \\ f(x) &= \infty = \liminf_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n) \text{ si } x \neq 0. \end{aligned}$$

Pour le deuxième point de la définition, supposons que  $x \in \mathbb{R}$ . Si  $x = 0$  on peut prendre la suite définie comme  $x_n = \frac{1}{n}$  qui converge vers  $x = 0$ . On a alors  $f_n(x_n) = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Cela montre que  $f(x) = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$ . Maintenant, si  $x \neq 0$ , on peut simplement prendre la suite constante  $x_n = x$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  pour obtenir  $f(x) = \infty = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_n)$ .

Pour revenir à l'exemple 1, on peut en fait montrer que sa Gamma-limite est

$$G(u) = \begin{cases} -1 & \text{si } u = 1 \\ u(0)^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Enfin, notons que la convergence Gamma est bien différente de la convergence uniforme, comme l'illustre l'exemple ci-dessous issu du commentaire du travail d'Antonin Chambolle [11].

**Exemple 5.** Soit  $F$  une fonctionnelle sur un espace métrique  $X$ . Posons  $F_n = F + \frac{1}{n}$ . Alors,  $F_n$  converge uniformément vers  $F$ .

Cependant, par le lemme (1), si  $F$  n'est pas séquentiellement semicontinue inférieure, il est impossible d'avoir  $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$ .

Grâce à cette nouvelle notion, on peut maintenant répondre à notre question, qui était de savoir quelle information sur les minimiseurs la convergence des fonctionnelles pouvait nous apporter.

**Théorème 1.** *Si*

- $F_n \xrightarrow{\Gamma} F$ ,

- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est la suite de minimiseurs associée à  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  possède une sous-suite convergeant vers  $u \in X$ ,

alors,  $u$  minimise  $F$ .

*Démonstration.* Soit  $(u_{n_k})_k$  la sous-suite convergeant vers  $u$  dans  $X$ . Par le premier point de la définition (1), on voit que

$$F(u) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} F_{n_k}(u_{n_k}) = \liminf_{k \rightarrow \infty} \min_X (F_{n_k}) \quad (2.1)$$

car par hypothèse chaque  $u_{n_k}$  minimise  $F_{n_k}$ .

Ensuite, on peut utiliser le deuxième point de la définition (1) pour trouver une suite  $(\tilde{u}_n)_n \subset X$  convergeant vers  $u$  telle que

$$F(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(\tilde{u}).$$

Vu que la limite existe et par définition du minimum, on peut réécrire cela comme

$$F(u) = \limsup_{n \rightarrow \infty} F_n(\tilde{u}) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \min_X (F_n). \quad (2.2)$$

En combinant les inégalités (2.2) et (2.1), on a

$$F(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} \min_X (F_n). \quad (2.3)$$

Il reste à montrer qu'il s'agit bien du minimum de  $F$ . Pour cela, soit  $v \in X$ . Par le deuxième point de la définition (1), on sait qu'il existe une suite  $(v_n)_n$  convergeant vers  $v$  telle que  $F(v) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(v_n)$ . Comme pour la construction de l'inégalité (2.2), on peut réécrire cela comme

$$F(v) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \min_X (F_n).$$

Mais grâce à l'équation (2.3), on sait que cette limite existe et vaut  $F(u)$ . On en conclut que  $F(v) \geq F(u)$ . Comme ceci est valable pour tout  $v \in X$ , on a bien montré que  $u$  minimise  $F$ .  $\square$

Le théorème ci-dessus assure donc le comportement désiré de la convergence Gamma. Les limites des suites convergeantes de minimiseurs sont bien des minimiseurs de la fonctionnelle limite. En fait, il s'agit d'une version simplifiée du théorème suivant, que l'on énoncera après deux petites définitions.

**Définition 2.** La suite  $(F_n)_n$  est appelée équicoercive si, pour toute suite  $(x_n)_n \subset X$  telle que  $(F_n(x_n))_n$  est bornée dans  $\mathbb{R}$ , il existe une sous-suite  $(x_{n_k})_k$  convergeant vers un certain  $x \in X$ .

**Définition 3.** On dit que  $(x_n)_n$  est une suite minimisante asymptotique de  $(F_n)_n$  s'il existe une fonction réelle  $h$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = 0$  telle que  $F_n(x_n) = \inf_X(F_n) + h(x_n)$ . Autrement dit,  $F_n(x_n) = \inf_X(F_n) + o(1)$ .

**Théorème 2.** Si

- $F_n \xrightarrow{X} F$ ,
- $(F_n)_n$  est équicoercive,
- $(\inf_X(F_n))_n$  est une suite bornée dans  $\mathbb{R}$ ,

alors, les minimiseurs de  $F$  sont les points d'accumulation des suites minimisantes asymptotiques de  $(F_n)_n$ .

*Démonstration.* Soit  $(x_n)_n$  une suite minimisante asymptotique de  $(F_n)_n$ . Grâce à la définition (3), on sait alors qu'il existe une fonction réelle  $h$  telle que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $F_n(x_n) = \inf_X(F_n) + h(x_n)$  avec  $\lim_{n \rightarrow \infty} h(x_n) = 0$ . Choisissons notre constante préférée, 42. Par définition de la limite, on sait que pour  $n$  assez grand  $|h(x_n)| < 42$ . Donc, pour  $n$  assez grand,

$$|F_n(x_n)| \leq |\inf_X(F_n)| + 42.$$

Ceci montre que la suite  $(F_n(x_n))_n$  est bornée. Par l'hypothèse d'équicoercivité, on peut trouver une sous-suite (sans renommage des indices) convergeant vers un certain  $x \in X$ . Ce  $x$  est un point d'accumulation de la suite minimisante asymptotique  $(x_n)_n$ .

En utilisant le premier point de la définition (1), on a

$$F(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F_n(x_n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \left( \inf_X(F_n) + h(x_n) \right) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_X(F_n). \quad (2.4)$$

Gardons cette inégalité à l'esprit et prenons maintenant un  $y \in X$ . Par le deuxième point de la définition (1), on sait qu'il existe une suite  $(y_n)_n$  convergeant vers  $y$  telle que  $F(y) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(y_n)$ .

Avec la même petite manipulation que précédemment, on obtient facilement que

$$F(y) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} \inf_X(F_n). \quad (2.5)$$

Similairement à la démonstration précédente, en remplaçant  $y$  par  $x$  dans l'inégalité (2.5) et en combinant avec l'inégalité (2.4), on a  $F(x) = \liminf_{n \rightarrow \infty} \inf_X(F_n)$ . Comme l'inégalité (2.5) est respectée par tout  $y \in X$ , on a  $F(y) \geq F(x)$ , ce qui montre que le point d'accumulation  $x$  de la suite minimisante asymptotique  $(x_n)_n$  minimise bien  $F$ .

Soit maintenant  $z$  un minimiseur de  $F$ . Montrons alors que  $z$  est un point d'accumulation d'une suite minimisante asymptotique de  $(F_n)_n$ . Grâce au deuxième point de la définition (1), on trouve une suite  $(z_n)_n$  convergeant vers  $z$  telle que  $F(z) = \min_X(F) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z_n)$ .

Par définition de l'infimum, on peut trouver pour tout  $n \in \mathbb{N}$  un  $x_n \in X$  tel que  $|F_n(x_n) - \inf_X(F_n)| < \frac{1}{n}$ . La suite  $(x_n)_n$  est alors une suite minimisante asymptotique de  $(F_n)_n$ . On peut donc réutiliser le début de la preuve pour en déduire que

$$\min_X(F) = F(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_X(F_n).$$

Comme  $z$  minimise également  $F$ , on a  $F(z) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(z_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \inf_X(F_n)$ , ce qui prouve que  $(z_n)_n$  est une suite minimisante asymptotique de  $(F_n)_n$ .  $\square$

Maintenant que l'on saisit l'importance de la convergence Gamma, énonçons un dernier résultat qui assure son existence lorsque l'on travaille sur des espaces métriques séparables.

**Théorème 3.** *Soient  $X$  un espace métrique séparable et  $(F_n)_n$  une suite de fonctions positives sur  $X$ ,  $F_n : X \rightarrow [0, \infty] \forall n \in \mathbb{N}$ . Alors, il existe une sous-suite  $(F_{n_k})_k$  et une fonction  $F : X \rightarrow [0, \infty]$  telles que  $F_{n_k} \xrightarrow{\Gamma} F$ .*

*Démonstration.* Comme  $[0, \infty]$  est compact dans  $\bar{\mathbb{R}}$ , on sait qu'il existe une sous-suite  $(F_{n_k})_k$  telle que, pour chaque  $(x, r) \in X \times \mathbb{R}_0^+$ , la limite

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \inf_{B(x,r)} F_k$$

existe (dans  $\bar{\mathbb{R}}$ ).

Comme  $X$  est séparable, il existe un ensemble dénombrable dense  $Z \subset X$ . Soit  $z \in Z$ . Par un argument diagonal, on peut trouver une sous-suite  $(F_{n_j})_j$  telle que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \inf_{B(z,r)} F_j$$

existe (dans  $\bar{\mathbb{R}}$ ) pour tout  $(z, r) \in Z \times \mathbb{Q} \cup (0, 1)$ . Ceci se fait en prenant une énumération  $(y_l)_l$  de  $Z \times \mathbb{Q} \cup (0, 1)$  (possible car il s'agit d'un ensemble dénombrable). En appliquant successivement la remarque faite en début de preuve, on peut construire une sous-suite qui fonctionne pour  $y_1$ , puis en extraire une sous-suite qui fonctionne à son tour pour  $y_2$  (et donc toujours pour  $y_1$ ), etc. Enfin, on sélectionne la diagonale du tableau ainsi créé. Pour chaque élément  $(z, r) \in Z \times \mathbb{Q} \cup (0, 1)$ , il existe  $m \in \mathbb{N}$  tel que  $(z, r) = y_m$  par définition d'une énumération. Alors, à partir de l'indice  $m$ , la suite diagonale sera une sous-suite de la sous-suite créée à la ligne  $m$ , et donc la limite existera.

Définissons

$$F(x) = \sup \left\{ \lim_{j \rightarrow \infty} \inf_{B(z,r)} F_j : x \in B(z,r), z \in Z, r \in \mathbb{Q} \cup (0,1) \right\}.$$

Avec cette définition,  $F : X \rightarrow [0, \infty]$ . Montrons maintenant que  $F_{n_k} \xrightarrow{\Gamma} F$ . Comme d'habitude, il faut prouver les deux parties de la définition (1).

Premièrement, soient  $x \in X$  et  $(x_j)_j$  une suite convergeant vers  $x$ . Alors, pour chaque boule  $B(z,r)$  admissible dans le suprémum ci-dessus, il existe un indice  $j$  assez grand à partir duquel les éléments de la suite  $(x_j)_j$  appartiennent à celle-ci. Pour ces  $j$ , on a

$$\inf_{B(z,r)} F_j \leq F_j(x_j).$$

En passant à la limite inférieure des deux côtés de cette inégalité, on obtient

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \inf_{B(z,r)} F_j = \lim_{j \rightarrow \infty} \inf_{B(z,r)} F_j \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \inf F_j(x_j).$$

Cette inégalité est valable pour toutes les boules acceptables dans le suprémum, donc en particulier

$$F(x) \leq \liminf_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j).$$

Pour le deuxième point à montrer, supposons  $x \in X$ . Si  $F(x) = \infty$ , alors

$$F(x) \geq \limsup_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j)$$

pour toute suite  $(x_j)_j$  convergeant vers  $x$ . En combinant avec le résultat précédent on obtient bien  $\lim_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j) = F(x)$ .

Maintenant, si  $F(x) \neq \infty$ , définissons la suite  $(h_n)_n$  par  $h_n = \frac{1}{n}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , choisissons  $z_n \in Z$  tel que  $x \in B(z_n, r_n)$  (ceci est possible car  $Z$  est dense dans  $X$ ). Par définition de  $F$ , on a pour tout  $n \in \mathbb{N}$

$$F(x) \geq \lim_{j \rightarrow \infty} \inf_{B(z_n, r_n)} F_j. \tag{2.6}$$

Par définition de l'infimum, on peut prendre pour chaque  $j \in \mathbb{N}$  une suite  $(x_h^j)_h \in B(z_n, r_n)$  telle que

$$F_h(x_h^j) \leq \inf_{B(z_n, r_n)} F_j + \frac{1}{h}.$$

En répétant cet argument pour tout  $j \in \mathbb{N}$ , on construit un tableau de  $(x_h^j)_{j,h}$ . On peut alors prendre la diagonale de ce tableau,  $(x_j^j)_j$  qui est telle que

$$F_j(x_j^j) \leq \inf_{B(z_j, r_j)} F_j + \frac{1}{j}.$$

En appliquant la limite supérieure des deux côtés de cette inégalité, on obtient

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j^j) \leq \lim_{j \rightarrow \infty} \inf_{B(z_j, r_j)} F_j \leq F(x)$$

où on a utilisé l'inégalité (2.6). Grâce à la première partie de cette preuve, on obtient  $\lim_{j \rightarrow \infty} F_j(x_j^j) = F(x)$  et donc  $(x_j^j)_j$  est la suite recherchée.

□

# Chapitre 3

## Relaxation et quasiconvexité

On aborde ici deux nouvelles notions, la relaxation et la quasiconvexité. La première permet d'assurer l'existence de minimiseurs tandis que la seconde donne une condition nécessaire et suffisante pour la faible semicontinuité inférieure de fonctionnelles intégrales, sous certaines hypothèses. On énoncera également deux théorèmes importants qui seront utiles pour la preuve de notre exemple de convergence Gamma.

Le début de cet chapitre est fortement inspiré du résumé de cours de Sergio Conti [14]. L'article de Norman Meyers [33] ajoute quelques précisions sur la définition de quasiconvexité, ainsi que d'autres résultats qui ne seront pas abordés ici.

Soit  $X$  un espace topologique, et soit  $F$  une fonctionnelle sur  $X$ .

Comme vu dans le chapitre précédent, la suite constante  $(F)_n$  Gamma-converge vers  $F$  si et seulement si  $F$  est semicontinue inférieurement. Définissons donc la relaxation de  $F$  comme étant la Gamma-limite de  $(F)_n$ .

**Définition 4.** La relaxation de  $F$  est la fonctionnelle  $F_{\text{rel}} : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  définie comme

$$F_{\text{rel}}(u) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_j) : u_j \rightharpoonup u \right\}.$$

Définissons également l'enveloppe semicontinue inférieure de  $F$ .

**Définition 5.**

$$F_{\text{lsc}}(u) = \sup \left\{ G(u) : G : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ est semicontinue inférieure et } G \leq F \right\}.$$

Ces deux notions sont en fait très fortement liées, comme le montre ce lemme.

**Lemme 3.** Si  $X$  est un espace métrique, alors  $F_{\text{rel}} = F_{\text{lsc}}$ .

*Démonstration.* Prouvons d'abord que  $F_{\text{lsc}} \leq F_{\text{rel}}$ . Soient  $u \in X$  et  $(u_n)_n$  une suite convergant vers  $x$ . Alors, toute fonction semicontinue inférieure  $G$  telle que  $G \leq F$  respecte l'inégalité

$$G(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} G(u_n) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n).$$

En prenant l'infimum sur toutes les suites  $(u_n)_n$  convergant vers  $u$ , on obtient  $G(u) \leq F_{\text{rel}}(u)$ . Cette inégalité étant valable pour toute fonction semicontinue inférieure  $G$  telle que  $G \leq F$ , on peut maintenant prendre le suprémum sur toutes ces fonctions  $G$  possibles pour conclure que  $F_{\text{lsc}}(u) \leq F_{\text{rel}}(u)$  pour tout  $u \in X$ .

Montrons à présent que  $F_{\text{rel}} \leq F_{\text{lsc}}$ . Pour ce faire, on va commencer par prouver que  $F_{\text{rel}}$  est semicontinue inférieure. Soient  $u \in X$  et  $(u_n)_n$  convergant vers  $u$ . Si  $\liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = \infty$ , il n'y a rien à montrer car l'inégalité de semicontinuité inférieure est alors toujours respectée. On peut donc supposer que  $\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) \in [-\infty, \infty[$ , en passant à une sous-suite si nécessaire, et que  $(F(u_n))_n$  est supérieurement bornée. Par définition de  $F_{\text{rel}}$ , pour chaque  $n \in \mathbb{N}$ , il existe une suite  $(u_k^n)_k$  convergant vers  $u_n$  telle que

$$F_{\text{rel}}(u_n) = \lim_{k \rightarrow \infty} F(u_k^n).$$

Comme  $(F(u_n))_n$  est supérieurement bornée, on peut également supposer que  $(F(u_k^n))_{k,n}$  est supérieurement bornée, quitte à prendre une sous-suite. Choisissons finalement les indices  $k$  en fonction des indices  $n$ , de manière à ce que  $(u_{k(n)}^n)$  converge vers  $u$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  et  $F_{\text{rel}}(u_n) = F(u_{k(n)}^n) + o\left(\frac{1}{n}\right)$ . Par définition du suprémum dans la définition de  $F_{\text{rel}}$ , on obtient ainsi

$$F_{\text{rel}}(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_{k(n)}^n) = \liminf_{n \rightarrow \infty} F_{\text{rel}}(u_n),$$

ce qui montre que  $F_{\text{rel}}$  est bien semicontinue inférieure.

Comme la suite constante  $(u)_n$  converge vers  $u$ , elle est acceptable dans l'infimum de la définition de  $F_{\text{lsc}}$ . En particulier, on sait que  $F_{\text{lsc}}(u) \leq F(u)$  pour tout  $u \in X$ .  $F_{\text{rel}}$  sera donc une fonction candidate dans le suprémum de la définition de  $F_{\text{lsc}}$  et donc  $F_{\text{rel}}(u) \leq F_{\text{lsc}}(u)$ .  $\square$

Comme vu dans le chapitre précédent, savoir montrer la faible semicontinuité inférieure d'une fonctionnelle  $F$  est un élément crucial pour le calcul des variations. Intéressons-nous à des fonctionnelles de la forme

$$F(u) = \int_{\Omega} f(\nabla u(x)) \, dx$$

pour  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ ,  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  et  $u \in W^{1,p}(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ . Un des nombreux résultats intéressants à ce sujet est que la convexité de la fonction  $f$  est une condition nécessaire et suffisante pour la faible semicontinuité inférieure de  $F$  dans  $W^{1,p}(\Omega)$ . Une

preuve peut être trouvée dans le cours de Jean-François Babadjian [5] (en combinant le théorème 2.1.2 et le corollaire 1.2.4). Pour rappel, une fonction  $f : \mathbb{R} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  est dite convexe si pour tout  $x, y \in \mathbb{R}$  et tout  $\lambda \in (0, 1)$ ,

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1 - \lambda)f(y).$$

Cependant, lorsqu'on s'écarte du cas scalaire pour travailler avec des fonctions  $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$  pour  $m > 1$  et  $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ , la convexité de  $f$  n'est alors plus une condition nécessaire. Par exemple, la fonction  $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  définie comme  $f(A) = \det(A)$  n'est pas convexe. Pourtant,

$$F(u) = \int_{(0,1)^2} \det(\nabla u(x)) dx$$

est faiblement continue dans  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^2)$  (et donc a fortiori également faiblement semi-continue inférieure). Le détail de cet exemple peut se lire dans le cours de Jean-François Babadjian (exemple 2.1.3 [5]).

Ceci nous motive à définir une nouvelle notion qui généralise le concept de convexité.

**Définition 6.** Une fonction  $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$  est dite quasiconvexe en  $\xi \in \mathbb{R}^{m \times n}$  si

$$f(\xi) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\xi + \nabla \psi(x)) dx \text{ pour tout } \psi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m), \quad (3.1)$$

pour tout  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  ouvert borné non-vide.

Ici,  $|\Omega| = \mathcal{L}^n(\Omega)$  et  $W_0^{1,\infty}$  est défini comme la fermeture de  $C_0^\infty$  pour la convergence  $W^{1,\infty}$  (voir [33]).

Comme expliqué dans l'article de Bernard Dacorogna [15], dans le cas scalaire, la quasiconvexité et la convexité sont des notions équivalentes. Dans les autres cas, la convexité implique la quasiconvexité.

En fait, il suffit de vérifier l'inégalité (3.1) pour un seul domaine. La preuve de ce lemme vient du cours de Sergio Conti, mais le cours de Jean-François Babadjian [5] a aidé à la comprendre.

**Lemme 4.** Lorsque  $f$  prend des valeurs finies, si l'inégalité (3.1) est respectée pour un  $\Omega$  ouvert borné non-vide, elle reste vraie pour tout autre ouvert borné non-vide.

*Démonstration.* Soit  $U$  un autre ouvert borné non-vide de  $\mathbb{R}^n$ . Il existe donc  $(x_n)_n \subset \mathbb{R}^n$ ,  $(r_n)_n \subset \mathbb{R}^+$  et un négligeable  $N$  tels que  $N \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (x_n + r_n U) = \Omega$ , et tous les sous-

ensembles sont disjoints. Pour  $\psi \in W_0^{1,\infty}(U; \mathbb{R}^m)$ , on définit

$$\varphi(x) = \begin{cases} r\psi\left(\frac{x-x_n}{r_n}\right) & \text{si } x \in x_n + r_n U \text{ pour un } n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On a donc  $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ . Par hypothèse, l'inégalité de quasiconvexité (3.1) est respectée pour  $\Omega$ , donc, pour  $\xi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ ,

$$\begin{aligned} |\Omega|f(\xi) &\leq \int_{\Omega} f(\xi + \nabla\varphi(x)) \, dx \\ &= |\Omega \setminus \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (x_n + r_n U)|f(\xi) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{(x_n + r_n U)} f\left(\xi + \nabla\psi\left(\frac{x-x_n}{r_n}\right)\right) \, dx \\ &= |N|f(\xi) + \sum_{n \in \mathbb{N}} r_n^n \int_U f(\xi + \nabla\psi(y)) \, dy \\ &= \frac{|\Omega|}{|U|} \int_U f(\xi + \nabla\psi(y)) \, dy. \end{aligned}$$

On en conclut que

$$|U|f(\xi) \leq \int_U f(\xi + \nabla\psi(y)) \, dy.$$

□

Similairement à la convexité, la quasiconvexité va nous permettre de trouver des fonctionnelles semicontinues inférieures.

La preuve de ce théorème est assez longue donc elle sera omise ici, mais le lecteur intéressé peut la trouver en combinant la proposition 4.3 et le théorème 5.16 du livre d'Andrea Braides et Anneliese Defranceschi [10].

**Théorème 4.** *Soit  $p \in [0, \infty[$ . Supposons que  $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfasse la condition de croissance*

$$0 \leq f(\xi) \leq c(|\xi|^p + 1)$$

*pour une constante  $c > 0$ . Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné Lipschitz. Soit la fonctionnelle*

$$F(u) = \int_{\Omega} f(\nabla u(x)) \, dx.$$

*Alors,  $F$  est faiblement séquentiellement semicontinue inférieure sur  $W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$  si et seulement si  $f$  est quasiconvexe.*

Lorsque  $f$  n'est pas quasiconvexe, on aimerait tout de même obtenir un résultat pour la fonctionnelle qui minimise les limites des suites minimisantes de  $F$ , autrement dit  $F_{\text{rel}}$ . Définissons tout d'abord une nouvelle notion.

**Définition 7.** Soit  $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ . L'enveloppe quasiconvexe de  $f$  est la fonction définie comme

$$Qf(\xi) = \sup \left\{ g(\xi) : g : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \bar{\mathbb{R}} \text{ est quasiconvexe et } g \leq f \right\}$$

pour  $\xi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

Cette définition nous donne directement la quasiconvexité de  $Qf$ , en excluant le cas dégénéré  $Qf = -\infty$ .

**Lemme 5.** Pour  $Qf \neq -\infty$ ,  $Qf$  est quasiconvexe. De plus, si  $f$  est quasiconvexe,  $Qf = f$ .

*Démonstration.* Soit  $g$  quasiconvexe telle que  $g \leq f$ . Par définition du suprémum, on sait que  $Qf \geq g$ . La quasiconvexité de  $g$  nous donne pour tout  $\psi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$

$$g(\xi) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} g(\xi + \nabla\psi(x)) \, dx \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Qf(\xi + \nabla\psi(x)) \, dx.$$

Il reste à prendre le suprémum sur tous les  $g$  possibles pour obtenir

$$Qf(\xi) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Qf(\xi + \nabla\psi(x)) \, dx.$$

Enfin, si  $f$  est quasiconvexe, elle est candidate dans le suprémum, et donc  $Qf = f$ .  $\square$

En pratique, il est souvent très compliqué de calculer une enveloppe quasiconvexe pour une fonction qui n'est pas quasiconvexe.

Le lemme suivant nous donne une caractérisation équivalente de l'enveloppe quasiconvexe, parfois utilisée pour définir celle-ci, dans le cas où  $f$  est à valeurs dans  $\mathbb{R}$ . La démonstration est tirée du cours de Sergio Conti mais les sources [42], [15] et [10] ont grandement aidé à la compréhension. Le lecteur intéressé peut d'ailleurs y trouver des approches légèrement différentes.

**Lemme 6.** Soit  $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ . Alors,

$$Qf(\xi) = \inf \left\{ \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\xi + \nabla\psi(x)) \, dx : \psi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m) \right\}.$$

*Démonstration.* Notons

$$Tf(\xi) = \inf \left\{ \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\xi + \nabla\psi(x)) \, dx : \psi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m) \right\}$$

et montrons que  $Qf(\xi) = Tf(\xi)$  pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^{m \times n}$ .

Remarquons premièrement que l'expression de  $Tf$  ne dépend pas de l'ouvert borné non-vidé  $\Omega$  choisi. En effet, soit  $U$  un autre ouvert borné non-vidé de  $\mathbb{R}^n$ . Par le même raisonnement que dans la preuve du lemme (4), pour chaque  $\psi \in W_0^{1,\infty}(U; \mathbb{R}^m)$ , on peut trouver  $\varphi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$  tel que

$$\int_{\Omega} f(\xi + \nabla\varphi(x)) \, dx = \frac{|\Omega|}{|U|} \int_U f(\xi + \nabla\psi(y)) \, dy.$$

On obtient donc par définition de l'infimum

$$Tf(\xi) \leq \frac{1}{|U|} \int_U f(\xi + \nabla\psi(y)) \, dy.$$

En prenant l'infimum sur tous les  $\psi \in W_0^{1,\infty}(U; \mathbb{R}^m)$ , on a

$$Tf(\xi) \leq \inf \left\{ \frac{1}{|U|} \int_U f(\xi + \nabla\psi(y)) \, dy : \psi \in W_0^{1,\infty}(U; \mathbb{R}^m) \right\}.$$

Interchanger le rôle de  $\Omega$  et  $U$  ci-dessous nous donne l'inégalité inverse.

Remarquons maintenant que pour toute fonction  $g$  quasiconvexe,  $Tg = g$ . Par définition de quasiconvexité, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^{m \times n}$  et tout  $\psi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ , on a

$$g(\xi) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} g(\xi + \nabla\psi(x)) \, dx.$$

Prendre l'infimum sur tous les  $\psi \in W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$  nous donne  $g(\xi) \leq Tg(\xi)$ . De plus, la fonction constante  $\psi = 0$  est acceptable dans l'infimum car elle appartient à  $W_0^{1,\infty}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ . On a donc

$$Tg(\xi) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} g(\xi) \, dx = g(\xi).$$

Pour montrer que  $Qf = Tf$ , prenons une fonction quasiconvexe  $g$  telle que  $g \leq f$ . Par la remarque précédente et la monotonie de l'intégrale, on sait alors que  $g = Tg \leq Tf$ . En prenant le suprémum sur toutes les fonctions quasiconvexes  $g$  telles que  $g \leq f$ , on obtient  $Qf \leq Tf$ .

Comme vu précédemment,  $\psi = 0$  est une fonction admissible dans l'infimum de  $Tf$  et donc  $Tf \leq f$ . Il reste donc à montrer que  $Tf$  est une fonction quasiconvexe pour terminer la preuve. Cela voudrait dire que  $Tf$  est une fonction acceptable dans le suprémum de  $Qf$ , et on aurait alors  $Qf \geq Tf$ .

Prouvons ce dernier point. Soit  $\psi \in W_0^{1,\infty}$  affine par morceaux, dans le sens où il existe des constantes  $(\alpha_n)_n$  telles que  $\xi + \nabla\psi(x) = \alpha_n$  sur  $\omega_n$ , avec  $(\omega_n)_n$  des sous-ensembles ouverts bornés non-vides disjoints tels que  $\Omega = N \cup \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \omega_n$  pour un négligeable  $N$ . Soit  $\delta > 0$ . Par définition d'infimum et comme  $Tf$  ne dépend pas de l'ensemble  $\Omega$  choisi, on

peut trouver des fonctions  $(\theta_n)_n \subset W_0^{1,\infty}(\omega_n; \mathbb{R}^m)$  telles que

$$Tf(\alpha_n) + \delta \geq \frac{1}{|\omega_n|} \int_{\omega_n} f(\alpha_n + \nabla\theta_n(x)) \, dx. \quad (3.2)$$

Posons  $\varphi = \psi + \sum_{n \in \mathbb{N}} \theta_n \chi_{\omega_n}$ . Alors,

$$\begin{aligned} Tf(\xi) &\leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f(\xi + \nabla\varphi(x)) \, dx = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\omega_n} f(\xi + \nabla\psi(x) + \sum_{n \in \mathbb{N}} \nabla\theta_n(x) \chi_{\omega_n}(x)) \, dx \\ &= \frac{1}{|\Omega|} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\omega_n|}{|\omega_n|} \int_{\omega_n} f(\alpha_n + \nabla\theta_n(x)) \, dx \stackrel{(3.2)}{\leq} \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{|\omega_n|}{|\Omega|} (Tf(\alpha_n) + \delta). \end{aligned} \quad (3.3)$$

On remarque que

$$\int_{\omega_n} Tf(\xi + \nabla\psi(x)) \, dx = \int_{\omega_n} Tf(\alpha_n) \, dx = Tf(\alpha_n) |\omega_n|.$$

En combinant cela avec l'inégalité (3.3), on obtient

$$Tf(\xi) \leq \frac{1}{|\Omega|} \sum_{n \in \mathbb{N}} \left( \int_{\omega_n} Tf(\xi + \nabla\psi(x)) \, dx + \delta |\omega_n| \right) = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{n \in \mathbb{N}} \int_{\omega_n} Tf(\xi + \nabla\psi(x)) \, dx + \delta.$$

Comme  $\delta$  était arbitraire, cela nous dit que

$$Tf(\xi) \leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Tf(\xi + \nabla\psi(x)) \, dx$$

pour toute fonction affine par morceaux  $\psi \in W^{1,\infty}(\Omega)$ .

En appliquant le lemme 2.15 puis le lemme 2.17 du cours de Sergio Conti [14] qu'on ne démontrera pas ici, on peut voir que  $Tf \in \text{Lip}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{m \times n})$ . Ici,  $\text{Lip}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^{m \times n})$  désigne l'ensemble des fonctions localement Lipschitz sur  $\mathbb{R}^{m \times n}$ . Cela signifie que pour tout  $\zeta \in \mathbb{R}^{m \times n}$ , il existe un voisinage  $V_{\zeta}$  de  $\zeta$  tel que la restriction de  $Tf$  à  $V_{\zeta}$  est Lipschitz.

Par densité (voir théorème 12.15 du livre de Bernard Dacorogna [16]), on sait que pour tout  $\psi \in W_0^{1,\infty}(\Omega)$ , il existe une suite  $(\psi_n)_n \subset W_0^{1,\infty}(\Omega)$  de fonctions affines par morceaux uniformément bornées en norme  $W^{1,\infty}(\Omega)$  telle que  $\psi_n$  converge vers  $\psi$  en norme  $W^{1,1}(\Omega)$ .

On en conclut que

$$\begin{aligned}
Tf(\xi) &\leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Tf(\xi + \nabla\psi_n(x)) \, dx \\
&\leq \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} (Tf(\xi + \nabla\psi(x)) + L|\nabla\psi_n(x) - \nabla\psi(x)|) \, dx \\
&= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} Tf(\xi + \nabla\psi(x)) \, dx + \frac{L}{|\Omega|} \|\nabla\psi_n - \nabla\psi\|_{L^1(\Omega)},
\end{aligned}$$

où  $L$  est la constante de Lipschitz associée. En passant à la limite  $n \rightarrow \infty$ , on obtient le résultat souhaité. □

Enfin, on énonce le résultat souhaité, qui relie la relaxation de  $F$  et l'enveloppe quasiconvexe de  $f$ .

A nouveau, ce théorème ne sera pas prouvé ici, mais la preuve se trouve dans le cours de Sergio Conti [14].

**Théorème 5.** *Soit  $p \in [1, \infty]$ . Soit  $f : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que*

$$0 \leq f(\xi) \leq c(1 + |\xi|^p)$$

*pour une constante  $c > 0$ . Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un ouvert borné Lipschitz. Soit la fonctionnelle*

$$F(u) = \int_{\Omega} f(\nabla u(x)) \, dx.$$

*Alors,*

$$F_{rel}(u) = \int_{\Omega} Qf(\nabla u(x)) \, dx$$

*par rapport à la topologie faible de  $W^{1,p}$ .*

*De plus, la relaxation peut être restreinte aux fonctions qui coïncident avec  $u$  sur le bord, c'est-à-dire que*

$$F_{rel}(u) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow \infty} F(u_n) : u_n \rightharpoonup u, u_n - u \in W_0^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m) \right\}.$$

En particulier, sous les hypothèses du théorème, on sait que pour tout  $u \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ , il existe une suite  $(u_n)_n \subset W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^m)$  convergeant faiblement vers  $u$  telle que

$\lim_{n \rightarrow \infty} F(u_n) = F_{\text{rel}}(u) = \int_{\Omega} Qf(\nabla u(x)) \, dx$  et  $u_n|_{\partial\Omega} = u|_{\partial\Omega}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La dernière égalité est à comprendre au sens des traces pour les espaces de Sobolev (voir [28]).

Pour notre exemple de convergence Gamma, on devra jouer avec des fonctionnelles de la forme

$$F(u) = \int_{\Omega} f(\nabla^2 u(x)) \, dx.$$

La suite de ce chapitre est tirée de l'article [35].

Similairement à ce qu'on a vu précédemment, on définit la notion de  $k$ -quasiconvexité pour  $k \in \mathbb{N}_0$ .

**Définition 8.** Une fonction  $f : \mathbb{R}^{m \times n^k} \rightarrow \mathbb{R}$  est dite  $k$ -quasiconvexe si pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^{m \times n^k}$

$$f(\xi) = \inf \left\{ \int_{[-1/2, 1/2]^k} f(\xi + \nabla^k \psi(x)) \, dx : \psi \in W_0^{k, \infty}([-1/2, 1/2]^n; \mathbb{R}^m) \right\}.$$

De plus, la  $k$ -quasiconvexification de  $f$  est définie comme

$$Q_k f(\xi) = \inf \left\{ \int_{[-1/2, 1/2]^n} f(\xi + \nabla^k \psi(x)) \, dx : \psi \in W_0^{k, \infty}([-1/2, 1/2]^n; \mathbb{R}^m) \right\}.$$

Le résultat de relaxation dont on aura besoin est le suivant. Les preuves des deux prochains théorèmes se trouvent dans l'annexe de l'article [35].

**Théorème 6.** Soient  $1 \leq p < \infty$  et  $f : \mathbb{R}^{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}$  telle que

$$0 \leq f(A) \leq C(1 + |A|^p) \text{ pour tout } A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}. \quad (3.4)$$

Soient  $\Omega$  un ouvert borné connexe et simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$ ,  $u_0 \in W^{2,p}(\Omega)$ ,  $u = u_0 + h$  pour un  $h \in W_0^{2,p}(\Omega)$  et  $\epsilon > 0$ . Alors, il existe  $v = u_0 + k$  pour un  $k \in W_0^{2,p}(\Omega)$  tel que

$$\|u - v\|_{W^{1,p}(\Omega)} < \epsilon$$

et

$$\int_{\Omega} f(\nabla^2 v(x)) \, dx < \int_{\Omega} Q_2 f(\nabla^2 u(x)) \, dx + \epsilon.$$

Pour appliquer ce résultat, il nous faudra connaître la  $k$ -quasiconvexification de la fonction avec laquelle on travaillera, à savoir  $F_{\lambda}$  définie en (1.2).

**Théorème 7.** *Pour  $\lambda > 0$ , on a*

$$Q_2 F_\lambda(\sigma) = \begin{cases} 2\lambda^{1/2}\rho(\sigma) - 2|\det(\sigma)| & \text{si } \rho(\sigma) \leq \lambda^{1/2} \\ |\sigma|^2 + \lambda. & \end{cases} \quad (3.5)$$

# Chapitre 4

## Espaces de fonctions $BV$ et $BH$

On discute ici de deux nouveaux espaces de fonctions dont on aura besoin pour notre exemple principal de convergence Gamma (voir chapitre 6), les espaces  $BV$  et  $BH$ . Le premier contient les fonctions intégrables dont la dérivée distributionnelle définit une mesure de Radon. On tentera de donner une idée de la structure de ce genre de fonctions et on énoncera des résultats importants pour la suite. L'espace  $BH$  est quant à lui défini comme l'ensemble des fonctions intégrables dont la dérivée est dans  $BV$ . Cet espace sera très utile dans notre exemple principal et on aura donc besoin de plusieurs théorèmes, notamment concernant les traces de ces fonctions.

Sauf mention contraire, ce chapitre est tiré du livre de Lawrence C. Evans [21].

Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^n$ .

**Définition 9.** On définit  $BV(\Omega)$  comme l'ensemble des fonctions  $f \in L^1(\Omega)$  telles que

$$\sup \left\{ \int_{\Omega} f(x) \operatorname{div}(\varphi(x)) \, dx : \varphi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_{C^0} \leq 1 \right\} < \infty.$$

On appelle  $BV(\Omega)$  l'ensemble des fonctions à variation bornée sur  $\Omega$ .

On définit également la variation totale d'une fonction  $f \in BV(\Omega)$  comme étant

$$|Df|(\Omega) = \sup \left\{ \int_{\Omega} f(x) \operatorname{div}(\varphi(x)) \, dx : \varphi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n), \|\varphi\|_{C^0} \leq 1 \right\}.$$

Sur l'espace  $BV(\Omega)$ , on utilisera la norme

$$\|f\|_{BV(\Omega)} = \|f\|_{L^1(\Omega)} + |Df|(\Omega).$$

Pour une fonction à variation bornée, on peut trouver une mesure de Radon vectorielle qui jouera le rôle de dérivée distributionnelle. C'est l'objet de ce théorème qu'on énoncera simplement, souvent appelé le théorème de structure des fonctions  $BV$ .

**Théorème 8.** Soit  $f \in BV(\Omega)$ . Il existe une mesure de Radon  $\mu$  sur  $\Omega$  et une fonction  $\mu$ -mesurable  $\sigma : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$  telles que  $|\sigma(x)| = 1$  pour  $\mu$ -presque tout  $x \in \Omega$  et

$$\int_{\Omega} f(x) \operatorname{div}(\varphi(x)) \, dx = - \int_{\Omega} \varphi(x) \cdot \sigma(x) \, d\mu$$

pour tout  $\varphi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ .

Dans la suite, on notera souvent  $\int_{\Omega} \varphi(x) \cdot dDf$  pour désigner  $\int_{\Omega} \varphi(x) \cdot \sigma(x) \, d\mu$ .

Avant de continuer, explorons quelques exemples pour mieux comprendre les fonctions  $BV$ .

**Exemple 6.** Soit  $f \in W^{1,1}(\Omega)$ . On sait alors que  $f \in L^1(\Omega)$  et qu'il existe  $v \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$  telle que

$$\int_{\Omega} f(x) \operatorname{div}(\varphi(x)) \, dx = - \int_{\Omega} v(x) \cdot \varphi(x) \, dx \text{ pour tout } \varphi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n).$$

Pour  $\varphi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$  telle que  $\|\varphi\|_{C^0} \leq 1$ , on a donc, par l'inégalité de Hölder,

$$\int_{\Omega} f(x) \operatorname{div}(\varphi(x)) \, dx = - \int_{\Omega} v(x) \cdot \varphi(x) \, dx \leq \|v\|_{L^1(\Omega; \mathbb{R}^n)} \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty.$$

Ceci montre bien que  $f \in BV(\Omega)$ . De plus, la mesure de Radon vectorielle associée est donnée par  $Df = v \mathcal{L}^n$ . Elle est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^n$ .

Cet exemple nous montre que  $W^{1,1}(\Omega) \subset BV(\Omega)$ . Cependant, cette inclusion est stricte, comme le montre ce deuxième exemple.

**Exemple 7.** Soit  $f = \chi_{B(0,1)}$  et supposons que  $B(0,1) \subset \Omega$ . Pour  $\varphi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$  telle que  $\|\varphi\|_{C^0} \leq 1$ , on a alors, grâce au théorème de la divergence et à l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \chi_{B(0,1)}(x) \operatorname{div}(\varphi(x)) \, dx &= \int_{B(0,1)} \operatorname{div}(\varphi(x)) \, dx = \int_{\partial B(0,1)} \varphi(x) \cdot \nu(x) \, d\mathcal{H}^{n-1} \\ &\leq \mathcal{H}^{n-1}(\partial B(0,1)) \|\varphi\|_{L^\infty(\Omega)} \leq 2\pi. \end{aligned}$$

où  $\nu$  représente la normale extérieure à  $\partial B(0,1)$ .

Ceci montre que  $\chi_{B(0,1)} \in BV(\Omega)$ . Et la mesure de Radon associée est  $Df = \nu \mathcal{H}^{n-1}$ .

Cependant,  $\chi_{B(0,1)} \notin W^{1,1}(\Omega)$ , comme expliqué à la page 308 de [37].

Plus généralement, les fonctions "de saut" sont des fonctions à variation bornée. La remarque qui suit est tirée des notes d'Antoine Lemenant [30]. Prenons deux vecteurs distincts  $a, b \in \mathbb{R}^m$ . Soit  $T$  un hyperplan de  $\mathbb{R}^n$  orienté par un vecteur normal  $\nu_T$ . On définit les deux côtés de cet hyperplan comme

$$\begin{aligned} T^+ &= \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \nu_T > 0\}, \\ T^- &= \{x \in \mathbb{R}^n : x \cdot \nu_T < 0\}. \end{aligned}$$

Alors, la fonction définie par

$$u(x) = \begin{cases} a & \text{si } x \in T^+ \\ b & \text{si } x \in T^- \end{cases}$$

est dans  $BV(\Omega; \mathbb{R}^m)$  et  $Du = (a-b) \otimes \nu_T \mathcal{H}^{n-1} \llcorner T$ . Il est clair en effet que  $u \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^m)$ . De plus, pour  $\varphi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$  telle que  $\|\varphi\|_{C^0} \leq 1$  et  $\Omega \supset T$ , on a, grâce au théorème de la divergence,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u(x)_i \operatorname{div}(\varphi(x)) \, dx &= a_i \int_{\Omega \cap T^+} \operatorname{div}(\varphi(x)) \, dx + b_i \int_{\Omega \cap T^-} \operatorname{div}(\varphi(x)) \, dx \\ &= a_i \int_T \varphi(x) \cdot \nu_T \, d\mathcal{H}^{n-1} - b_i \int_T \varphi(x) \cdot \nu_T \, d\mathcal{H}^{n-1}, \end{aligned}$$

pour  $i = 1, \dots, m$ .

On observe que dans ce cas, la mesure de Radon vectorielle  $Du$  est absolument continue par rapport à la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^{n-1}$ . On voit également que  $\frac{dDu}{d\mathcal{H}^{n-1}} = (a-b) \otimes \nu_T$  est de rang 1.

Comme expliqué dans les notes d'Antoine Lemenant [30], on peut décomposer la mesure de Radon vectorielle  $Du$  associée à une fonction  $u \in BV(\Omega; \mathbb{R}^m)$  en une partie absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue  $\mathcal{L}^n$ , notée  $\nabla u$ , et une partie singulière que l'on notera  $D^s u$ . Ceci se montre en utilisant le théorème de différentiation de Lebesgue. Plus intéressant encore, la partie singulière  $D^s u$  peut à son tour être décomposée en une partie absolument continue par rapport à la mesure de Hausdorff  $\mathcal{H}^{n-1}$ , appelée la partie de saut, et une partie singulière, qu'on appellera la partie de Cantor  $D^c u$ . Cette deuxième décomposition utilise la notion de rectifiabilité, qu'on n'abordera pas ici, mais le lecteur intéressé peut se renseigner dans les références [29] [23] [27]. Aussi, il existe des vecteurs  $u^+, u^- \in \mathbb{R}^n$  et une fonction  $\mathcal{H}^{n-1}$ -mesurable  $\nu_u$  de norme 1 tels que la partie de saut est donnée par  $(u^+ - u^-) \otimes \nu_u \mathcal{H}^{n-1}$ . Résumons ces remarques dans un théorème, qui ne sera pas prouvé ici. Une démonstration peut être trouvée dans l'article [12].

**Théorème 9.** *Soit  $u \in BV(\Omega; \mathbb{R}^m)$ . Alors, il existe  $\nabla u \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^{m \times n})$ , des vecteurs*

$u^+, u^- \in \mathbb{R}^m$  et une fonction  $\nu_u \mathcal{H}^{n-1}$ -mesurable de norme 1 tels que

$$Du = \nabla u \mathcal{L}^n + (u^+ - u^-) \otimes \nu_u \mathcal{H}^{n-1} + D^c u.$$

Dans l'exemple (6), on a vu que les fonctions  $W^{1,1}(\Omega)$  ont uniquement la partie absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Par contre, dans l'exemple (7) et la remarque qui a suivi, on a vu des fonctions qui n'avaient que la partie de saut.

Pour un exemple de fonction n'ayant que la partie de Cantor, le lecteur peut aller voir la fonction de Cantor-Vitali [30] [12].

En toute généralité, une fonction  $BV(\Omega)$  aura les trois parties.

De plus, le théorème 1.2 de notes de Camillo De Lellis [3] nous dit que  $|D^s u|(E) = 0$  pour tout ensemble de Borel  $E$  tel que  $\mathcal{H}^{n-1} < \infty$ .

Enonçons aussi le théorème de rang 1 d'Alberti, dont la preuve peut être trouvée dans l'article de Annalisa Massaccesi et Davide Vittone [32].

**Théorème 10.** *Soit  $u \in BV(\Omega)$ . Alors,  $\frac{dD^s u}{|D^s u|}(x)$  est une matrice de rang 1 pour  $D^s u$ -presque tout  $x \in \mathbb{R}^n$ .*

On savait déjà que la partie de saut était de rang 1 mais ce théorème annonce que c'est en fait toute la partie singulière qui l'est.

Remarquons également que si  $f, h \in BH(\Omega)$  et  $g = h - f$ , alors  $g \in BH(\Omega)$  et  $Dg = Dh - Df$ . Cela se voit rapidement en regardant l'action de  $Dg$  sur des fonctions tests  $\varphi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$ .

Les deux théorèmes importants qui suivent sont issus du livre de Lawrence C. Evans [21], le dernier ne sera pas prouvé ici car la preuve est un peu longue.

Premièrement, la variation totale est semicontinue séquentielle inférieure par rapport à la convergence dans  $L^1(\Omega)$ .

**Théorème 11.** *Soient  $f \in L^1(\Omega)$  et une suite  $(f_n)_n \subset BV(\Omega)$  convergeant vers  $f$  dans  $L^1(\Omega)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$ . Alors,*

$$|Df|(\Omega) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |Df_n|(\Omega).$$

*Démonstration.* Soit  $\varphi \in C_c^1(\Omega; \mathbb{R}^n)$  telle que  $\|\varphi\|_{C^0} \leq 1$ .

Tout d'abord, remarquons que

$$\left| \int_{\Omega} f(x) \operatorname{div}(\varphi(x)) \, dx - \int_{\Omega} f_n(x) \operatorname{div}(\varphi(x)) \, dx \right| \leq \int_{\Omega} |f(x) - f_n(x)| |\operatorname{div}(\varphi(x))| \, dx \\ \leq \sup_{x \in \Omega} |\operatorname{div}(\varphi(x))| \|f - f_n\|_{L^1(\Omega)}.$$

L'hypothèse de convergence dans  $L^1(\Omega)$  nous donne donc

$$\int_{\Omega} f(x) \operatorname{div}(\varphi(x)) \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) \operatorname{div}(\varphi(x)) \, dx \\ = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f_n(x) \operatorname{div}(\varphi(x)) \, dx \\ \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |Df_n|(\Omega).$$

En prenant le suprémum sur tous les  $\varphi$  possibles, on obtient bien

$$|Df|(\Omega) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} |Df_n|(\Omega).$$

□

**Définition 10.** Soit  $U$  un Borel de  $\mathbb{R}^n$  et soit une suite de mesures de Radon vectorielles  $(\mu_n)_n \subset \mathcal{M}(U; \mathbb{R}^n)$ . On dit que  $\mu_n$  converge faiblement  $*$  en mesures vers  $\mu \in \mathcal{M}(U; \mathbb{R}^n)$  si

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_U \varphi(x) \cdot \frac{d\mu_n}{d|\mu_n|}(x) \, d\mu_n = \int_U \varphi(x) \cdot \frac{d\mu}{d|\mu|}(x) \, d\mu \text{ pour tout } \varphi \in C_c^0(U; \mathbb{R}^n).$$

Ensuite, on aura besoin de ce résultat d'approximation de fonctions dans  $BV(\Omega)$ .

**Théorème 12.** Soit  $f \in BV(\Omega)$ . Il existe une suite  $(f_n)_n \subset C^\infty(\Omega)$  telle que  $f_n$  converge vers  $f$  dans  $L^1(\Omega)$  lorsque  $n \rightarrow \infty$  et

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |Df_n|(\Omega) = |Df|(\Omega).$$

De plus,  $Df_n = \nabla f_n \mathcal{L}^n$  tend vers  $Df$  faiblement  $*$  en mesures.

Attention, cela n'implique pas la convergence dans  $BV(\Omega)$  !

Enfin, on aura besoin de la notion d'une trace pour les fonctions  $BV$ . Le théorème suivant ne sera pas prouvé mais la preuve se trouve dans le livre de Lawrence C. Evans. Notons  $n$  la normale extérieure à  $\partial\Omega$ .

**Théorème 13.** *Si  $\Omega$  est à bord Lipschitz, il existe une application linéaire bornée  $T : BV(\Omega) \rightarrow L^1(\partial\Omega, \mathcal{H}^{n-1})$  telle que*

$$\int_{\Omega} f(x) \operatorname{div}(\varphi(x)) \, dx = - \int_{\Omega} \varphi(x) \cdot dDf + \int_{\partial\Omega} (\varphi(x) \cdot n) Tf(x) \, d\mathcal{H}^{n-1}$$

pour tout  $f \in BV(\Omega)$  et  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$ .

Notons qu'ici les fonctions de test  $\varphi$  ne s'annulent pas forcément sur le bord de  $\Omega$ , d'où l'apparition du dernier terme.

La fonction  $Tf$  est uniquement définie à des ensemble de mesure  $\mathcal{H}^{n-1} \llcorner \partial\Omega$  nulle près. Elle sera appelée la trace de  $f$ , et notée  $f|_{\partial\Omega}$  dans la suite.

Venons-en maintenant à notre deuxième espace de fonctions.

**Définition 11.** On définit  $BH(\Omega)$  comme l'ensemble des fonctions  $f \in W^{1,1}(\Omega)$  telles que  $\nabla f \in BV(\Omega; \mathbb{R}^n)$ . On appelle  $BH(\Omega)$  l'ensemble des fonctions à hessienne bornée.

Dans notre cas, on travaillera avec  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  un ouvert borné connexe et simplement connexe avec un bord de classe  $C^2$ . En particulier, on peut définir des opérateurs de traces pour ce cadre de travail. Pour la théorie des traces sur les espaces Sobolev et celle pour les fonctions  $BV$ , le lecteur peut se référer respectivement à [28] et [24].

**Définition 12.** Sur  $W^{1,1}(\Omega)$  aussi bien que sur  $BV(\Omega)$ , on peut définir

$$\gamma_0 : u \mapsto u|_{\partial\Omega}.$$

Sur  $W^{2,1}(\Omega)$  et  $BH(\Omega)$ , on peut également définir

$$\gamma_1 : u \mapsto \nabla u|_{\partial\Omega} \cdot n.$$

Le théorème suivant nous indiquera quels espaces de fonctions choisir pour notre résultat principal. Des références pour une preuve sont données dans l'article [35].

**Théorème 14.** •  $(\gamma_0, \gamma_1)$  est linéaire surjectif en tant qu'opérateur

$$H^2(\Omega) \rightarrow H^{3/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega) \tag{4.1}$$

et aussi

$$BH(\Omega) \rightarrow \gamma_0(W^{2,1}(\Omega)) \times L^1(\partial\Omega). \tag{4.2}$$

- Il existe un inverse continu  $(\gamma_0, \gamma_1)^{-1}$  en tant qu'opérateur

$$H^{3/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^2(\Omega) \quad (4.3)$$

et aussi

$$\gamma_0(W^{2,1}(\Omega)) \times L^1(\partial\Omega) \rightarrow BH(\Omega). \quad (4.4)$$

Il existe aussi une forme d'inégalité de Poincaré sur  $BH(\Omega)$  (voir [35]) :

**Lemme 7.** Soit  $u \in BH(\Omega)$  tel que  $\gamma_0(u) = f$  et  $\gamma_1 = g$ . Alors,

$$\|u\|_{W^{1,1}(\Omega)} \lesssim \|f\|_{W^{1,1}(\partial\Omega)} + \|g\|_{L^1(\partial\Omega)} + |D^2u|(\Omega).$$

On note également ce résultat de compacité, énoncé dans l'article [35] et prouvé dans le théorème 1.3 de l'article de Françoise Demengel [18].

**Théorème 15.** Soit  $(u_n)_n$  une suite bornée dans  $BH(\Omega)$ . Alors, il existe une sous-suite (sans renommage des indices) et  $u \in BH(\Omega)$  tels que  $u_n$  tend faiblement \* vers  $u$  dans le sens des mesures lorsque  $n \rightarrow \infty$ .

On énonce finalement ce résultat d'injection des fonctions à hessienne bornée dans les fonctions continues en deux dimensions, prouvé dans l'article de Françoise Demengel [17][théorème 3.3].

**Théorème 16.** Soit  $U \subset \mathbb{R}^2$  ouvert et borné, avec un bord de classe  $C^2$ . Alors,  $BH(U) \subset C^0(\bar{U})$ .

# Chapitre 5

## Boîte à outils

Dans ce chapitre, on discutera des derniers résultats nécessaires avant d'évoquer le théorème principal énonçant la convergence Gamma recherchée. Tous ces éléments viennent donc de l'article [35], et les preuves omises ici peuvent y être trouvées. On pose tout d'abord une fois pour toutes notre ouvert de travail  $\Omega$ . Ensuite, on définit quelques outils importants et on énonce des lemmes qui nous aideront à utiliser ces outils. On rappelle également le concept de convolution et l'inégalité de Young. Enfin, on définit mathématiquement les fonctionnelles qui seront présentes dans notre exemple.

A partir de maintenant,  $\Omega$  sera un ouvert borné connexe et simplement connexe de  $\mathbb{R}^2$ , avec un bord de classe  $C^2$ . On dénote par  $n = (n_1, n_2)$  la normale unitaire extérieure à  $\partial\Omega$ . Pour un vecteur  $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$ , on définit  $v^\perp = (-v_2, v_1)$ . On dénote le vecteur tangent à  $\partial\Omega$  par  $\tau = n^\perp = (-n_2, n_1)$ .

Pour  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , la matrice des cofacteurs de  $A$  est

$$\text{cof}(A) = \begin{pmatrix} A_{2,2} & -A_{2,1} \\ -A_{1,2} & A_{1,1} \end{pmatrix}.$$

Observons que  $\text{cof}$  est un opérateur linéaire sur les matrices  $\mathbb{R}^{2 \times 2}$ , et peut donc être défini sur des mesures de Radon à valeurs dans celles-ci. De plus,  $\text{cof}(\text{cof}(A)) = A$  et  $\text{rot}(A) = \text{div}(\text{cof}(A))$  lorsque ces notions existent.

Pour une mesure  $\mu \in \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^n)$  et une distribution  $f \in (C^1(\mathbb{R}^n))'$ , on dit que  $-\text{div}(\mu) = f$  si :

$$\int_{\bar{\Omega}} \nabla \varphi \cdot \frac{d\mu}{d|\mu|} d|\mu| = \langle f, \varphi \rangle \quad (5.1)$$

pour tout  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$ , où  $\langle f, \varphi \rangle$  désigne la paire de l'espace  $C^1(\mathbb{R}^n)$  avec son dual topologique (autrement dit, il s'agit de l'évaluation de  $f$  sur  $\varphi$ ).

Si  $\sigma$  est une fonction à valeurs dans  $\mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}$  continûment dérivable en tout point de  $\Omega$ , si  $\text{div}(\sigma) = 0$  sur  $\Omega$  et  $\sigma \cdot n = g$  sur  $\partial\Omega$ , pour  $g \in L^2(\partial\Omega, \mathbb{R}^2)$ , alors  $-\text{div}(\sigma \mathcal{L}^2) = g \mathcal{H}^1 \llcorner \partial\Omega$ . Cette dernière égalité est à comprendre au sens de (5.1).

En effet, soit  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$  et  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2)$ , avec  $\sigma_i$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^2$  pour  $i = 1, 2$ . Par le théorème de la divergence, on obtient

$$\int_{\bar{\Omega}} \nabla \varphi \cdot \sigma_i \, dx = \int_{\partial\Omega} \varphi \sigma_i \cdot n \, d\mathcal{H}^1 - \int_{\bar{\Omega}} \varphi \operatorname{div}(\sigma_i) \, dx \quad (5.2)$$

$$= \int_{\partial\Omega} \varphi g_i \, d\mathcal{H}^1 = \langle g_i, \varphi \rangle \quad (5.3)$$

où  $g_i$  représente la  $i^{\text{ème}}$  composante de  $g$ .

On définit maintenant deux opérateurs qui imiteront le rôle d'une intégrale sur le bord.

Comme  $\Omega$  a un bord de classe  $C^2$ , on peut définir la paramétrisation suivante :

Fixons  $x_0 \in \partial\Omega$  et posons  $L = \mathcal{H}^1(\partial\Omega)$ . Alors,  $\theta_{x_0} : [0, L] \rightarrow \partial\Omega$  est la courbe de classe  $C^2$  par morceaux positivement orientée satisfaisant  $|\theta'_{x_0}| = 1, \theta_{x_0}(0) = x_0 = \theta_{x_0}(L)$  et  $\theta_{x_0}([0, L]) = \partial\Omega$ .

**Définition 13.** Soit  $\varphi \in L^\infty(\partial\Omega)$  telle que  $\int_{\partial\Omega} \varphi \, d\mathcal{H}^1 = 0$ . On définit sa première intégrale  $\Phi_1(\varphi) \in W^{1,\infty}(\partial\Omega)$  par

$$\Phi_1(\varphi)(\theta_{x_0}(x)) = \int_0^x \varphi(\theta_{x_0}(t)) \, dt - c_\varphi$$

où  $c_\varphi$  est une constante choisie telle que  $\int_{\partial\Omega} \Phi_1(\varphi) \, d\mathcal{H}^1 = 0$ .

Il est possible d'étendre cette définition à  $g \in L^2(\partial\Omega) \subset (W^{1,\infty}(\partial\Omega))'$  telle que  $\langle g, \chi_{\partial\Omega} \rangle = 0$  de la manière suivante. On définit  $\Phi_1(g) \in (L^\infty(\partial\Omega))'$  comme

$$\langle \Phi_1(g), \varphi \rangle = - \left\langle g, \Phi_1 \left( \varphi - \frac{1}{L} \int_{\partial\Omega} \varphi(x) \, d\mathcal{H}^1 \right) \right\rangle$$

pour tout  $\varphi \in L^\infty(\partial\Omega)$ . Notons l'apparition d'un signe moins ici, à la manière d'une "intégrale sur le bord faible" qu'on définirait par parties. Pour  $g \in L^2(\partial\Omega; \mathbb{R}^n)$ , on définit  $\Phi_1 \in (L^\infty(\partial\Omega; \mathbb{R}^n))'$  par son action composante par composante.

Maintenant, si  $g \in L^2(\Omega; \mathbb{R}^2)$  est tel que  $\langle g_i, \chi_{\partial\Omega} \rangle = 0$  pour  $i = 1, 2$ , on peut interpréter  $\tau \cdot \Phi_1(g)$  comme un élément de  $(L^\infty(\partial\Omega))'$  :

$$\langle \tau \cdot \Phi_1(g), \varphi \rangle = \langle \Phi_1(g), \tau \varphi \rangle \text{ pour tout } \varphi \in L^\infty(\partial\Omega).$$

Si  $\langle \tau \cdot \Phi_1(g), \chi_{\partial\Omega} \rangle = 0$  on peut également définir sa deuxième intégrale  $\Phi_2(g) \in \Phi_1((L^\infty(\partial\Omega))')$  comme

$$\Phi_2(g) = \Phi_1(\tau \cdot \Phi_1(g)).$$

On aura également besoin de la définition suivante.

**Définition 14.** On dit qu'une fonction  $h : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  est positivement une-homogène si  $h(tx) = th(x)$  pour tout  $t \geq 0, x \in \mathbb{R}^m$ .

Par exemple, la fonction valeur absolue est positivement une-homogène. On remarque que c'est également le cas de la fonction  $\rho$  définie en (1.14).

Comme expliqué par Nicolas Bourbaki [7][chapitre 5.9] et Françoise Demengel [19], pour une fonction  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  positivement une-homogène Borel mesurable et une mesure de Radon vectorielle  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^m)$ , on peut définir la mesure de Radon  $\mu(h) \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R})$  comme

$$h(\mu) = h \left( \frac{d\mu}{d|\mu|} \right) |\mu|. \quad (5.4)$$

Par exemple, si  $h$  est la fonction valeur absolue, on a  $h(\mu) = |\mu|$ .

Le théorème suivant se prouve grâce au théorème 1.5 de l'article de Françoise Demengel [19].

**Théorème 17.** Soit  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction positivement une-homogène et continue. Soit  $(\mu_j)_j \subset \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^n)$  telle que  $\mu_j \rightarrow \mu$  et  $|\mu_j| \rightarrow |\mu|$  faiblement  $*$  dans le sens des mesures pour un  $\mu \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}^n)$ . Alors,  $h(\mu_j) \rightarrow h(\mu)$  faiblement  $*$  dans le sens des mesures.

Pour démontrer notre résultat principal, on utilisera le fait qu'il existe une représentation des stress  $\sigma$  de divergence nulle via des potentiels d'Airy  $u$  en deux dimensions (voir [25] [26]). Le lemme suivant établit ce lien de manière rigoureuse.

**Lemme 8.** On a

$$\left\{ \sigma \in \mathcal{M}(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}) : \text{rot}(\sigma) = 0 \right\} = \left\{ D^2 u : u \in BH(\Omega) \right\}$$

et

$$\left\{ \sigma \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}) : \text{rot}(\sigma) = 0 \right\} = \left\{ \nabla^2 u : u \in H^2(\Omega) \right\}$$

Ensuite, on aura besoin de cette définition et des lemmes associés pour assurer l'existence des intégrales sur le bord des conditions au bord (au sens de la définition (13)).

**Définition 15.** Soit  $g \in L^2(\partial\Omega; \mathbb{R}^2)$ . On dit que  $g$  est balancé si

$$\int_{\partial\Omega} (Mx + b) \cdot g(x) d\mathcal{H}^1 = 0$$

pour tout  $M \in \mathbb{R}_{\text{asym}}^{2 \times 2}$  et  $b \in \mathbb{R}^2$ .

**Lemme 9.** Soit  $g \in L^2(\partial\Omega; \mathbb{R}^2)$ . Si  $\Sigma_g(\Omega) \neq \emptyset$ , alors  $g$  est balancé.

*Démonstration.* Soit  $\sigma \in \Sigma_g(\Omega)$ . Par définition (voir (1.13)), on sait que  $-\operatorname{div}(\sigma) = g\mathcal{H}^1 \llcorner \partial\Omega$ , autrement dit

$$\int_{\bar{\Omega}} \nabla\varphi : d\sigma = \int_{\partial\Omega} g(x) \cdot \varphi(x) d\mathcal{H}^1$$

pour tout  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$ .

Choisissons premièrement  $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^2)$  définie comme la fonction constante  $\varphi(x) = (1, 0)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ . On obtient alors

$$\int_{\partial\Omega} g_1(x) d\mathcal{H}^1 = 0$$

où  $g_1$  représente la première composante de  $g$ . En effectuant la même opération avec la fonction constante  $\varphi(x) = (0, 1)$  pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ , on arrive à la même égalité pour la deuxième composante  $g_2$ . Donc,

$$\int_{\partial\Omega} g(x) d\mathcal{H}^1 = 0.$$

Finalement, on utilise la fonction test  $\varphi(x) = x^\perp = (-x_2, x_1)$  pour tout  $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ . On a alors

$$\nabla\varphi(x) = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

et on obtient

$$\int_{\bar{\Omega}} d(\sigma_{2,1} - \sigma_{1,2}) = \int_{\partial\Omega} x^\perp \cdot g(x) d\mathcal{H}^1.$$

Comme  $\sigma \in \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2})$ , on a  $\sigma_{2,1} = \sigma_{1,2}$  et l'équation nous donne également 0.

Toute matrice  $M \in \mathbb{R}_{\text{asym}}^{2 \times 2}$  est de la forme

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -a \\ a & 0 \end{pmatrix}$$

pour un  $a \in \mathbb{R}$ . Cela signifie que  $Mx = ax^\perp$ . On a donc bien prouvé que

$$\int_{\partial\Omega} (Mx + b) \cdot g(x) d\mathcal{H}^1 = 0$$

pour tout  $M \in \mathbb{R}_{\text{asym}}^{2 \times 2}$ ,  $b \in \mathbb{R}^2$ . □

**Lemme 10.** Soit  $g \in L^2(\partial\Omega; \mathbb{R}^2)$ . On a l'équivalence

$$g \text{ est balancé } \iff \langle g_i, \chi_{\partial\Omega} \rangle = 0 \text{ pour } i = 1, 2 \text{ et } \langle \tau \cdot \Phi_1(g^\perp), \chi_{\partial\Omega} \rangle.$$

Remarquons que si  $\sigma \cdot n = g$  sur  $\partial\Omega$  et  $\sigma = \text{cof}(\nabla^2 u)$  pour une fonction lisse  $u$  sur  $\bar{\Omega}$ , alors

$$g^\perp = (\text{cof}(\nabla^2 u) \cdot n)^\perp = \nabla^2 u \cdot \tau = \partial_\tau \nabla u.$$

On obtient alors que  $\Phi_1(g^\perp) = -\nabla u|_{\partial\Omega} + c$  et  $\Phi_2(g^\perp) = -u|_{\partial\Omega} + F$  où  $c$  est un vecteur constant de  $\mathbb{R}^2$  et  $F$  est une fonction affine sur  $\partial\Omega$ . Le lemme suivant généralise cette observation, qui nous aidera à gérer les conditions au bord dans la représentation par les potentiels d'Airy.

**Lemme 11.** Soit  $g \in L^2(\partial\Omega; \mathbb{R}^2)$ .

- Soient  $\sigma \in \Sigma_g(\Omega)$  et  $U$  un voisinage de  $\bar{\Omega}$  tel que  $u \in W^{1,1}(U)$  et  $D^2 u \llcorner \bar{\Omega} = \text{cof}(\sigma)$ . Alors, il existe  $\zeta \in L^1(\partial\Omega)$  et une fonction affine  $F$  telles que

$$\begin{aligned}\Phi_1(g^\perp) \cdot n &= -\gamma_1(u) - \zeta + \nabla F \cdot n \\ \Phi_2(g^\perp) &= -\gamma_0(u) + F.\end{aligned}$$

- Soient  $\sigma \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2})$  et  $u \in H^2(\Omega)$  tels que  $\sigma = \text{cof}(\nabla^2 u)$ . Alors, il existe une fonction affine  $F$  telle que

$$\begin{aligned}\Phi_1(g^\perp) \cdot n &= -\gamma_1(u) + \nabla F \cdot n \\ \Phi_2(g^\perp) &= -\gamma_0(u) + F.\end{aligned}$$

Dans notre preuve au prochain chapitre, on utilisera la convolution d'une fonction lisse avec aussi bien des fonctions que des mesures. Voici donc un léger rappel sans preuves, tiré du cours [36].

**Définition 16.** Soient  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  et  $g \in L^1(\mathbb{R}^2)$ . On définit leur convolution par

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x-y)g(y) \, dy$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ .

**Théorème 18.** On a  $f * g = g * f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $\text{supp}(f * g) \subset \text{supp}(f) + \text{supp}(g)$  et l'inégalité de Young nous donne

$$\begin{aligned}\|f * g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}, \\ \|f * g\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &\leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \|g\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}.\end{aligned}$$

**Définition 17.** Soient  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  et  $\mu \in \mathcal{M}((\mathbb{R}^2; \mathbb{R}))$ . On définit leur convolution par

$$(f * \mu)(x) = \int_{\mathbb{R}^2} f(x-y) \, d\mu(y)$$

pour tout  $x \in \mathbb{R}^2$ .

**Théorème 19.** *On a  $(f * \mu) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  et on peut généraliser l'inégalité de Young en*

$$\begin{aligned} \|f * \mu\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} &\leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} |\mu|(\mathbb{R}^2), \\ \|f * \mu\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &\leq \|f\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} |\mu|(\mathbb{R}^2). \end{aligned}$$

Définissons à présent les fonctionnelles avec lesquelles on va jouer pour notre résultat de convergence Gamma.

Pour rappel, pour  $\lambda > 0$  et  $\xi \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}$ , on a

$$F_\lambda(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{si } \xi = 0 \\ \lambda + |\xi|^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les deux fonctionnelles suivantes ont déjà été énoncées dans la motivation de ce travail, mais définissons-les rigoureusement à présent.

**Définition 18.** Pour  $\lambda > 0$  et  $g \in L^2(\partial\Omega; \mathbb{R}^2)$ , on définit  $\mathcal{G}_{g,\lambda} : L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}) \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\mathcal{G}_{g,\lambda}(\sigma) = \begin{cases} \lambda^{-1/2} \int_\Omega F_\lambda(\sigma(x)) \, dx & \text{si } \sigma \in S_g(\Omega) \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, on peut également définir  $\mathcal{G}_g : \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}) \rightarrow \mathbb{R}$  comme

$$\mathcal{G}_g(\sigma) = \begin{cases} 2\rho(\sigma)(\bar{\Omega}) & \text{si } \sigma \in \Sigma_g(\bar{\Omega}) \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour prouver notre résultat de convergence Gamma, on utilisera aussi ces deux fonctionnelles, qui agissent sur les potentiels d'Airy associés.

**Définition 19.** Pour  $\lambda > 0$  et  $f = (f_1, f_2) \in H^{3/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)$ , on définit  $\mathcal{F}_{f,\lambda} : H^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\mathcal{F}_{f,\lambda}(u) = \begin{cases} \lambda^{-1/2} \int_\Omega F_\lambda(\nabla^2 u(x)) \, dx & \text{si } \gamma_0(u) = f_1 \text{ et } \gamma_1(u) = f_2 \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, on peut également définir  $\mathcal{F}_f : BH(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$  comme

$$\mathcal{F}_f(u) = \begin{cases} 2\rho(D^2 u)(\Omega) + 2 \int_{\partial\Omega} |\gamma_1(u) - f_2| \, d\mathcal{H}^1 & \text{si } \gamma_0(u) = f_1 \\ \infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

# Chapitre 6

## Résultat principal

On est à présent en mesure d'énoncer le résultat principal de l'article [35]. Il s'agit du théorème (20) ci-dessous. Pour le prouver, on aura besoin du théorème (21), qui vit sur des espaces de fonctions différents, avec les fonctionnelles définies précédemment. Cependant, on ne prouvera pas ici la partie borne inférieure de ce dernier. La majorité de ce chapitre détaille la preuve du résultat.

Le théorème qui suit énonce notre exemple principal de convergence Gamma. Comme expliqué en-dessous, il est important car il nous donne les hypothèses nécessaires pour appliquer le théorème fondamental (2).

**Théorème 20.** *Soit  $g \in L^2(\partial\Omega; \mathbb{R}^2)$  tel que  $\Phi_1(g^\perp) \cdot n \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  et  $\Phi_2(g^\perp) \in H^{3/2}(\partial\Omega)$ .*

- 1. Compacité : Soit  $(\sigma_\lambda)_\lambda \subset L^2(\Omega; \mathbb{R}_{sym}^{2 \times 2})$  telle que  $\mathcal{G}_{g,\lambda}(\sigma_\lambda) < C$ . Alors, il existe une sous-suite (sans renommage des indices) et  $\sigma \in \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}_{sym}^{2 \times 2})$  tels que  $\sigma_\lambda \rightarrow \sigma$  faiblement \* dans le sens des mesures.*
- 2. Borne inférieure : Soient  $(\sigma_\lambda)_\lambda \subset L^2(\Omega; \mathbb{R}_{sym}^{2 \times 2})$  et  $\sigma \in \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}_{sym}^{2 \times 2})$ . Si  $\sigma_\lambda \rightarrow \sigma$  faiblement \* dans le sens des mesures, alors  $\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{G}_{g,\lambda}(\sigma_\lambda) \geq \mathcal{G}_g(\sigma)$ .*
- 3. Borne supérieure : Pour tout  $\sigma \in \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}_{sym}^{2 \times 2})$  telle que  $\mathcal{G}_g(\sigma) < \infty$ , il existe une suite  $(\sigma_\lambda)_\lambda \subset L^2(\Omega; \mathbb{R}_{sym}^{2 \times 2})$  telle que  $\sigma_\lambda \rightarrow \sigma$  faiblement \* dans le sens des mesures et  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{G}_{g,\lambda}(\sigma_\lambda) = \mathcal{G}_g(\sigma)$ .*

L'énoncé de compacité nous donne l'équicoercivité (voir définition (2)) de notre suite de fonctionnelles  $(\mathcal{G}_{g,\lambda})_\lambda$  tandis que les énoncés de bornes supérieure et inférieure nous apportent la convergence Gamma.

Au vu du théorème (2), on peut en conclure que les minimiseurs de  $\mathcal{G}_g$ , la fonctionnelle associée au problème des poutrelles de Michell, sont les points d'accumulation des suites minimisantes asymptotiques de  $(\mathcal{G}_{g,\lambda})_\lambda$ , c'est-à-dire toutes les limites possibles des sous-suites de ces suites minimisantes asymptotiques.

Cela veut dire que si on réussit à trouver une suite  $(\sigma_\lambda)_\lambda \subset L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2})$  telle que  $\mathcal{G}_{g,\lambda}(\sigma_\lambda) = \inf_{L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2})} \mathcal{G}_{g,\lambda} + o(1)$ , et que cet infimum est borné, il existera une mesure de Radon  $\sigma \in \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2})$  et une sous-suite  $(\sigma_{\lambda_m})_m$  convergeant faiblement \* dans le sens des mesures vers  $\sigma$ . Et ce  $\sigma$  sera un minimiseur du problème de Michell  $\mathcal{G}_g$ .

Pour prouver ce résultat, on utilise le théorème suivant, dont l'énoncé est très similaire, qui travaille avec les potentiels d'Airy.

**Théorème 21.** *Soit  $f = (f_1, f_2) \in H^{3/2}(\partial\Omega) \times H^{1/2}(\partial\Omega)$ .*

1. *Compacité : Soit  $(u_\lambda)_\lambda \subset H^2(\Omega)$  telle que  $\mathcal{F}_{f,\lambda}(u_\lambda) < C$ . Alors, il existe une sous-suite (sans renommage des indices) et  $u \in BH(\Omega)$  tels que  $u_\lambda \rightarrow u$  faiblement \* dans  $BH(\Omega)$ .*
2. *Borne inférieure : Soient  $(u_\lambda)_\lambda \subset H^2(\Omega)$  et  $u \in BH(\Omega)$ . Si  $u_\lambda \rightarrow u$  faiblement \* dans  $BH(\Omega)$ , alors  $\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{f,\lambda}(u_\lambda) \geq \mathcal{F}_f(u)$ .*
3. *Borne supérieure : Pour tout  $u \in BH(\Omega)$  telle que  $\mathcal{F}_f(u) < \infty$ , il existe une suite  $(u_\lambda)_\lambda \subset H^2(\Omega)$  telle que  $u_\lambda \rightarrow u$  faiblement \* dans  $BH(\Omega)$  et  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{f,\lambda}(u_\lambda) = \mathcal{F}_f(u)$ .*

Prouvons donc que ce théorème implique notre résultat principal, énoncé plus haut.

*Démonstration.* Affirmation 1 : Pour tout  $\lambda > 0$ , pour  $\sigma \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2})$  tel que  $\mathcal{G}_{g,\lambda}(\sigma) < \infty$ , il existe  $v \in \bar{H}^2(\bar{\Omega})$  tel que  $\nabla^2 v = \text{cof}(\sigma)$  et  $\mathcal{G}_{g,\lambda}(\sigma) = \mathcal{F}_{f,\lambda}(v)$ .

Comme  $\mathcal{G}_{g,\lambda}(\sigma) < \infty$ , on sait que  $\sigma \in S_g(\Omega)$  par définition de  $\mathcal{G}_{g,\lambda}$ . Par le lemme 9, on a alors que  $g$  est balancé. Par le lemme 10, l'existence de  $\Phi_1(g^\perp)$  et  $\Phi_2(g^\perp)$  est assurée. On peut donc définir

$$f = - \left( \Phi_2(g^\perp), \Phi_1(g^\perp) \cdot n \right). \quad (6.1)$$

Posons  $\tilde{\sigma} = \text{cof}(\sigma)$ . Alors,  $\text{rot}(\tilde{\sigma}) = \text{div}(\text{cof}(\tilde{\sigma})) = \text{div}(\sigma) = -g\mathcal{H}^1 \llcorner \partial\Omega$ . Comme  $\text{rot}(\tilde{\sigma}) = 0$  sur  $\Omega$ , on peut appliquer le lemme (8) pour trouver  $w \in H^2(\Omega)$  tel que  $\nabla^2 w = \tilde{\sigma}$ . Cela signifie que  $\sigma = \text{cof}(\nabla^2 w)$ .

Par la deuxième partie du lemme (9), il existe une fonction affine  $F$  à valeurs sur  $\partial\Omega$  telle que

$$\begin{aligned} \gamma_1(w) &= \nabla F \cdot n + f_2 \\ \gamma_0(w) &= F + f_1. \end{aligned}$$

Posons enfin  $v = w - F$ . Comme  $F$  ne prend des valeurs que sur  $\partial\Omega$ , on a  $\|v\|_{W^{1,1}(\Omega)} = \|w\|_{W^{1,1}(\Omega)}$ . De plus,  $\nabla^2 v = \nabla^2 w$  car  $F$  est affine. Donc,  $v \in H^2(\Omega)$ .

Finalement, on observe que  $F_\lambda(\sigma) = F_\lambda(\tilde{\sigma})$  et donc

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{g,\lambda}(\sigma) &= \lambda^{-1/2} \int_{\Omega} F_\lambda(\sigma(x)) \, dx = \lambda^{-1/2} \int_{\Omega} F_\lambda(\nabla^2 w(x)) \, dx \\ &= \lambda^{-1/2} \int_{\Omega} F_\lambda(\nabla^2 v(x)) \, dx = \mathcal{F}_{f,\lambda}(v)\end{aligned}$$

car  $\gamma_0(v) = \gamma_0(w) - F = f_1$  et  $\gamma_1(v) = \gamma_1(w) - \nabla F \cdot n = f_2$ .

Affirmation 2 : Pour  $\sigma \in \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2})$  tel que  $\mathcal{G}_g(\sigma) < \infty$ , il existe  $v \in BH(\Omega)$  tel que  $D^2 v = \text{cof}(\sigma)$  et  $\mathcal{G}_g(\sigma) = \mathcal{F}_f(v)$ .

De manière totalement similaire, on sait que  $g$  est balancé et qu'on peut définir  $f$  comme à l'égalité (6.1). Toujours avec la même approche, on pose  $\tilde{\sigma} = \text{cof}(\sigma)$  et on observe que  $\text{rot}(\tilde{\sigma}) = 0$  sur  $\Omega$ . Par le lemme (8), on trouve alors  $w \in BH(\Omega)$  telle que  $D^2 w = \tilde{\sigma}$ , c'est-à-dire  $\sigma = \text{cof}(D^2 w)$ . On peut étendre  $w$  sur un voisinage  $U$  de  $\bar{\Omega}$  de façon à ce que  $w \in BH(U)$  et  $D^2 w \llcorner \partial\Omega = \text{cof}(\sigma) \llcorner \partial\Omega$  (voir section 5.4 [21]). Par la première partie du lemme (11), il existe une fonction affine  $F$  à valeurs sur  $\partial\Omega$  et  $\zeta \in L^1(\partial\Omega)$  telles que

$$\begin{aligned}\gamma_1(w) &= \nabla F \cdot n + f_2 - \zeta \\ \gamma_0(w) &= F + f_1.\end{aligned}$$

A nouveau, on pose  $v = w - F$  et on obtient  $\gamma_0(v) = f_1$ ,  $\gamma_1(v) = f_2 - \zeta$ . Finalement,

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_g(\sigma) &= 2\rho(\sigma)(\bar{\Omega}) = 2\rho(\sigma)(\Omega) + 2\rho(\sigma)(\partial\Omega) \\ &= 2\rho(\text{cof}(D^2 w))(\Omega) + 2\rho(\sigma \llcorner \partial\Omega)(\partial\Omega).\end{aligned}$$

Dans la preuve de la première partie du lemme (11), on observe que  $\zeta$  vient de la partie de saut  $\mu = \zeta n \otimes n \mathcal{H}^1$ . Comme  $\zeta n \otimes n$  est de rang 1, ses valeurs propres sont 0 et  $\zeta$ . De plus, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , on a  $\rho(\xi) = \rho(\text{cof}(\xi))$ . Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_g(\sigma) &= 2\rho(D^2 w)(\Omega) + 2 \int_{\partial\Omega} |\zeta(x)| \, dx \\ &= 2\rho(D^2 v)(\Omega) + 2 \int_{\partial\Omega} |\gamma_1 - f_2| \, dx = \mathcal{F}_f(v).\end{aligned}$$

On va maintenant prouver chaque partie l'une à la suite de l'autre.

1. Compacité : Par hypothèse,  $\sigma_\lambda \in L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2})$  et  $\mathcal{G}_{g,\lambda}(\sigma_\lambda) < \infty$  pour tout  $\lambda > 0$ . En utilisant l'affirmation 1, on obtient une suite  $(v_\lambda)_\lambda \subset H^2(\Omega)$  telle que  $\nabla^2 v_\lambda = \text{cof}(\sigma_\lambda)$  et  $\mathcal{G}_{g,\lambda}(\sigma_\lambda) = \mathcal{F}_{f,\lambda}(v_\lambda) < \infty$  pour tout  $\lambda > 0$ .

Grâce à la compacité du théorème (21), on sait qu'il existe une sous-suite (sans renommage des indices) de  $(v_\lambda)_\lambda$  convergeant faiblement  $*$  dans  $BH(\Omega)$  vers un

$v \in BH(\Omega)$ . En particulier, par définition de la convergence faible  $*$  dans  $BH(\Omega)$ , on a  $\text{cof}(\sigma_\lambda)\mathcal{L}^2 = \nabla^2 v_\lambda \mathcal{L}^2 = D^2 v_\lambda \rightarrow D^2 v$  faiblement  $*$  dans le sens des mesures.

On en conclut que  $\sigma_\lambda$  converge faiblement  $*$  dans le sens des mesures vers  $\text{cof}(D^2 v) = \sigma$ .

2. Borne inférieure : Par hypothèse, on a  $(\sigma_\lambda)_\lambda \subset L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2})$ ,  $\sigma \in \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2})$  et  $\sigma_\lambda \rightarrow \sigma$  faiblement  $*$  dans le sens des mesures. Grâce aux affirmations 1 et 2, on obtient une suite  $(v_\lambda)_\lambda \subset H^2(\Omega)$  et  $v \in BH(\Omega)$  tels que  $\mathcal{G}_{g,\lambda}(\sigma_\lambda) = \mathcal{F}_{f,\lambda}(v_\lambda)$  et  $\mathcal{G}_g(\sigma) = \mathcal{F}_f(v)$ . Par la borne inférieure du théorème (21), on conclut que

$$\liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{G}_{g,\lambda}(\sigma_\lambda) = \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{f,\lambda}(v_\lambda) \geq \mathcal{F}_f(v) = \mathcal{G}_g(\sigma),$$

en prenant une sous-suite si besoin.

3. Borne supérieure : Soit  $\sigma \in \mathcal{M}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2})$  tel que  $\mathcal{G}_g(\sigma) < \infty$ . A l'aide de l'affirmation 2, on trouve  $v \in BH(\Omega)$  tel que  $D^2 v = \text{cof}(\sigma)$  et  $\mathcal{G}_g(\sigma) = \mathcal{F}_f(v)$ . Grâce à la borne supérieure du théorème (21), on sait qu'il existe une suite  $(v_\lambda) \subset H^2(\Omega)$  convergeant faiblement  $*$  dans  $BH(\Omega)$  vers  $v$  avec

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{f,\lambda}(v_\lambda) = \mathcal{F}_f(v) = \mathcal{G}_g(\sigma) < \infty. \quad (6.2)$$

Similairement à la compacité, la convergence faible  $*$  dans  $BH(\Omega)$  implique la convergence faible  $*$  dans le sens des mesures de  $\sigma_\lambda = \text{cof}(D^2 v_\lambda)$  vers  $\sigma$ . De plus, on a une suite correspondante  $(\sigma_\lambda)_\lambda = (\text{cof}(\nabla^2 v_\lambda))_\lambda \subset L^2(\Omega; \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2})$  la borne  $C$  dans l'équation (6.2) assure que quitte à prendre une sous-suite on a  $\mathcal{F}_{f,\lambda}(v_\lambda) = \int_\Omega F_\lambda(\nabla^2 v_\lambda) = \int_\Omega F_\lambda(\text{cof}(\nabla^2 v_\lambda))$  pour tout  $\lambda > 0$ . Par définition de  $\mathcal{F}_{f,\lambda}$ , on a donc  $f_2 = \gamma_1(v_\lambda)$  et  $f_1 = \gamma_0(v_\lambda)$ . Ceci implique que  $\sigma_\lambda \in S_g(\Omega)$ , et ainsi on conclut que

$$\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{G}_{g,\lambda}(\sigma_\lambda) = \lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{f,\lambda}(v_\lambda) = \mathcal{F}_f(v) = \mathcal{G}_g(\sigma).$$

□

Il reste à prouver le théorème (21) pour finaliser ce travail. Cependant, on ne couvrira que les parties compacité et borne supérieure. Le lecteur intéressé trouvera la preuve de la borne inférieure dans l'article original [35]. Une brève description de la marche à suivre se trouve à la fin de la démonstration ci-dessous.

*Démonstration.* Preuve du théorème 21.

1. Compacité : Pour  $\xi \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}$ , on définit  $G_\lambda(\xi) = \lambda^{-1/2} Q_2 F_\lambda(\xi)$ .

Par le théorème (7), on a

$$G_\lambda(\xi) = \begin{cases} 2(\rho(\xi) - \lambda^{-1/2}|\det(\xi)|) & \text{si } \rho(\xi) \leq \sqrt{\lambda} \\ \lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2}|\xi|^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

- a) On montre d'abord que  $\frac{1}{2}\rho(\xi) \leq G_\lambda(\xi)$  pour  $\xi \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}$ . Notons  $a_i = |\lambda_i(\xi)|$  pour  $i = 1, 2$ .

Analysons d'abord le cas où  $\rho(\xi) = a_1 + a_2 \leq \sqrt{\lambda}$ . Comme  $\xi$  est une matrice symétrique, son déterminant est le produit de ses valeurs propres et donc  $|\det(\xi)| = a_1 a_2$ . On a donc

$$G_\lambda(\xi) = 2(a_1 + a_2 - \lambda^{-1/2}a_1 a_2) = a_1 + a_2 + (a_1 + a_2 - 2\lambda^{-1/2}a_1 a_2) \quad (6.3)$$

Puisque  $a_1 + a_2 \leq \sqrt{\lambda}$ , on a  $\lambda^{-1/2}(a_1 + a_2) \leq 1$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 - 2\lambda^{-1/2}a_1 a_2 &\geq \lambda^{-1/2}(a_1 + a_2)^2 - 2\lambda^{-1/2}a_1 a_2 \\ &= \lambda^{-1/2}(a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 - 2a_1 a_2) \\ &= \lambda^{-1/2}(a_1^2 + a_2^2) \geq 0. \end{aligned}$$

Combiné avec l'équation (6.3), cela nous donne bien  $\frac{1}{2}\rho(\xi) = \frac{1}{2}(a_1 + a_2) \leq a_1 + a_2 \leq G_\lambda(\xi)$ .

Analysons maintenant le cas où  $\rho(\xi) = a_1 + a_2 > \sqrt{\lambda}$ . Comme  $\xi$  est une matrice symétrique, on a  $|\xi|^2 = a_1^2 + a_2^2$ . En effet,

$$\begin{aligned} a_1^2 + a_2^2 &= \lambda_1(\xi)^2 + \lambda_2(\xi)^2 \\ &= \left( \frac{\text{tr}(\xi) - \sqrt{\text{tr}(\xi)^2 - 4\det(\xi)}}{2} \right)^2 + \left( \frac{\text{tr}(\xi) + \sqrt{\text{tr}(\xi)^2 - 4\det(\xi)}}{2} \right)^2 \\ &= \frac{1}{4} \left[ \left( \text{tr}(\xi)^2 + (\text{tr}(\xi)^2 - 4\det(\xi)) - 2\text{tr}(\xi)\sqrt{\text{tr}(\xi)^2 - 4\det(\xi)} \right) + \right. \\ &\quad \left. \left( \text{tr}(\xi)^2 + (\text{tr}(\xi)^2 - 4\det(\xi)) + 2\text{tr}(\xi)\sqrt{\text{tr}(\xi)^2 - 4\det(\xi)} \right) \right] \\ &= \frac{1}{4} [4\text{tr}(\xi)^2 - 8\det(\xi)] = \text{tr}(\xi)^2 - 2\det \xi \\ &= (\xi_{11} + \xi_{22})^2 - 2(\xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}^2) = \xi_{11}^2 + \xi_{22}^2 + 2\xi_{12}^2 = |\xi|^2. \end{aligned} \quad (6.4)$$

Dans ce cas-ci,  $G_\lambda(\xi) = \lambda^{1/2} + \lambda^{-1/2}|\xi|^2 = \lambda^{-1/2}(\lambda + a_1^2 + a_2^2)$ . Comme  $\lambda > 0$  et  $a_1^2 + a_2^2 \geq \frac{(a_1 + a_2)^2}{2}$ , on a  $G_\lambda(\xi) \geq \frac{\lambda^{-1/2}}{2}(a_1 + a_2)^2$ . De plus,  $\frac{a_1 + a_2}{\sqrt{\lambda}} > 1$  car  $a_1 + a_2 > \sqrt{\lambda}$ , et donc  $G_\lambda(\xi) \geq \frac{a_1 + a_2}{2} = \frac{1}{2}\rho(\xi)$ .

- b) Montrons maintenant la compacité du théorème. Comme  $a_1, a_2 \geq 0$ , on a  $|\xi| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \leq \sqrt{(a_1 + a_2)^2} = a_1 + a_2 = \rho(\xi)$ . Ainsi, grâce au point (a),

$G_\lambda(\nabla^2 u_\lambda(x)) \geq \frac{1}{2}\rho(\nabla^2 u_\lambda(x)) \geq \frac{1}{2}|\nabla^2 u_\lambda(x)|$ . On a donc

$$\frac{1}{2}|\mathbf{D}^2 u_\lambda|(\Omega) = \frac{2}{2}\|u_\lambda\|_{L^1(\Omega)} \leq \int_\Omega G_\lambda(\nabla^2 u_\lambda(x)) \, dx.$$

Par définition de l'enveloppe quasiconvexe, l'hypothèse  $\mathcal{F}_{f,\lambda}(u_\lambda) < C$  nous donne  $|\mathbf{D}^2 u_\lambda(\Omega)| \leq 2C$ . De plus, on sait que  $\gamma_0(u_\lambda) = f_1$  et  $\gamma_1(u_\lambda) = f_2$ . Ainsi, par le lemme (7)  $\|u_\lambda\|_{BH(\Omega)} = \|u_\lambda\|_{W^{1,1}(\Omega)} + |\mathbf{D}^2 u_\lambda(\Omega)| \lesssim \|f_1\|_{W^{1,1}(\partial\Omega)} + \|f_2\|_{L^1(\partial\Omega)} + 4C$ . Maintenant que la suite  $(u_\lambda)_\lambda$  est bornée dans  $BH(\Omega)$ , on peut appliquer le théorème (15) pour obtenir une sous-suite convergeant faiblement  $*$  vers un certain  $u \in BH(\Omega)$ .

2. Borne supérieure : Par le théorème (14), on peut appliquer l'inverse de l'opérateur  $(\gamma_0, \gamma_1)$  sur  $f$  pour obtenir  $\bar{f} \in H^2(\Omega)$ . Par le théorème de prolongement des fonctions de Sobolev (voir théorème 1 de la section 5.4 du livre d'Evans [22]), on peut étendre  $\bar{f}$  à tout  $\mathbb{R}^2$ . On ne fera ici pas de distinction de notation entre  $\bar{f}$  et son extension. Définissons à présent  $v : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  comme

$$v(x) = \begin{cases} u(x) - \bar{f}(x) & \text{si } x \in \Omega \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On voit directement que  $v \in BH(\mathbb{R}^2)$ . Définissons également, pour  $\epsilon > 0$ ,  $\Omega_\epsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\} \subset \Omega$  et

$$v_\epsilon(x) = \begin{cases} u(x) - \bar{f}(x) & \text{si } x \in \Omega_\epsilon \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Affirmation 1 :  $v_\epsilon \rightarrow v$  dans  $W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

En effet,

$$\begin{aligned} \|v_\epsilon - v\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &= \int_\Omega |(u(x) - \bar{f}(x))\chi_{\Omega_\epsilon}(x) - (u(x) - \bar{f}(x))| \, dx \\ &= \int_\Omega |u(x) - \bar{f}(x)|\chi_{\Omega \setminus \Omega_\epsilon}(x) \, dx. \end{aligned}$$

Comme  $\chi_{\Omega \setminus \Omega_\epsilon}(x) \rightarrow 0$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^2$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ , on a bien la convergence dans  $L^1(\mathbb{R}^2)$ . On peut montrer de manière similaire que  $\nabla v_\epsilon$  tend vers  $\nabla v$  dans  $L^1(\mathbb{R}^2)$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Affirmation 2 :  $|\mathbf{D}^2 v_\epsilon(\mathbb{R}^2)| \rightarrow |\mathbf{D}^2 v|(\mathbb{R}^2)$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

On a  $\mathbf{D}^2 v_\epsilon = (\mathbf{D}^2 u - \nabla^2 \bar{f} \mathcal{L}^2) \llcorner \Omega_\epsilon$  et  $\mathbf{D}^2 v = (\mathbf{D}^2 u - \nabla^2 \bar{f} \mathcal{L}^2) \llcorner \Omega$ . Par l'affirmation 1, on sait que  $\nabla v_\epsilon \rightarrow \nabla v$  dans  $L^1(\mathbb{R}^2)$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . On peut donc utiliser la propriété de semicontinuité inférieure du théorème (11) pour obtenir  $\liminf_{\epsilon \rightarrow 0} |\mathbf{D}^2 v_\epsilon|(\mathbb{R}^2) \geq |\mathbf{D}^2 v|(\mathbb{R}^2)$ .

Il reste alors à montrer que  $\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} |D^2 v_\epsilon|(\mathbb{R}^2) \leq |D^2 v|(\mathbb{R}^2)$ . Par définition du suprémum, on peut prendre une fonction test  $\varphi_\epsilon \in C_c^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^{2 \times 2})$  avec  $\|\varphi_\epsilon\|_{C^0} \leq 1$  telle que

$$\left| |D^2 v_\epsilon|(\mathbb{R}^2) - \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_\epsilon : dD^2 v_\epsilon \right| < \epsilon.$$

Prenons à présent  $\psi_\epsilon \in C_c^1(\mathbb{R}^2; \mathbb{R}^{2 \times 2})$  telle que

$$\begin{cases} \operatorname{div}(\psi_\epsilon) = \operatorname{div}(\varphi_\epsilon) \text{ sur } \Omega_\epsilon \\ \int_{\Omega \setminus \Omega_\epsilon} (\nabla u(x) - \nabla \bar{f}(x)) \cdot \operatorname{div}(\psi_\epsilon(x)) \, dx \leq 0 \\ \|\psi_\epsilon\|_{C^0} \leq \|\varphi_\epsilon\|_{C^0}. \end{cases}$$

Alors,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_\epsilon : dD^2 v_\epsilon &= - \int_{\mathbb{R}^2} \nabla v_\epsilon(x) \cdot \operatorname{div}(\varphi_\epsilon(x)) \, dx \\ &= - \int_{\Omega_\epsilon} (\nabla u(x) - \nabla \bar{f}(x)) \cdot \operatorname{div}(\varphi_\epsilon(x)) \, dx \\ &= - \int_{\Omega_\epsilon} (\nabla u(x) - \nabla \bar{f}(x)) \cdot \operatorname{div}(\psi_\epsilon(x)) \, dx \\ &\leq - \int_{\Omega} (\nabla u(x) - \nabla \bar{f}(x)) \cdot \operatorname{div}(\psi_\epsilon(x)) \, dx \\ &= - \int_{\Omega} \nabla v(x) \cdot \operatorname{div}(\psi_\epsilon(x)) \, dx = \int_{\mathbb{R}^2} \psi_\epsilon : dD^2 v. \end{aligned}$$

On obtient ainsi que

$$\begin{aligned} \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} |D^2 v_\epsilon|(\mathbb{R}^2) &= \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left( |D^2 v_\epsilon|(\mathbb{R}^2) + \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_\epsilon : dD^2 v_\epsilon - \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_\epsilon : dD^2 v_\epsilon \right) \\ &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \left| |D^2 v_\epsilon|(\mathbb{R}^2) - \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_\epsilon : dD^2 v_\epsilon \right| + \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} \varphi_\epsilon : dD^2 v_\epsilon \\ &\leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \epsilon + \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^2} \psi_\epsilon : dD^2 v \leq |D^2 v|(\mathbb{R}^2) \end{aligned}$$

car  $\psi_\epsilon$  est une fonction test acceptable pour le suprémum dans  $|D^2 v|(\mathbb{R}^2)$ , et ce peu importe  $\epsilon$ .

En combinant nos deux résultats, on peut écrire

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} |D^2 v_\epsilon|(\mathbb{R}^2) \leq |D^2 v|(\mathbb{R}^2) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} |D^2 v|(\mathbb{R}^2),$$

ce qui équivaut à  $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |D^2 v_\epsilon|(\mathbb{R}^2) = |D^2 v|(\mathbb{R}^2)$ .

Choisissons maintenant  $\eta \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  telle que  $\eta \geq 0$ ,  $\int_{\mathbb{R}^2} \eta(x) dx = 1$  et  $\text{supp}(\eta) \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| \leq 1\}$ . Par exemple, on peut prendre la fonction

$$\eta(x) = \begin{cases} C \exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $C$  est une constante positive choisie telle que l'intégrale de  $\eta$  soit bien égale à 1. Définissons également la fonction  $\eta_\epsilon$  par  $\eta_\epsilon(x) = \frac{1}{\epsilon^2} \eta\left(\frac{x}{\epsilon}\right)$ . Un rapide changement de variable donne  $\|\eta_\epsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \int_{\mathbb{R}^2} \eta_\epsilon(x) dx = 1$ . Remarquons également que  $\text{supp}(\eta_\epsilon) \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < \epsilon\}$ .

On va maintenant convoluer cette suite régularisante  $\eta_\epsilon$  avec  $v_\epsilon$  pour gagner en régularité et travailler plus facilement. La définition de  $v_\epsilon$  avec l'ensemble  $\Omega_\epsilon \subset \Omega$  est justifiée par le fait que la régularisation "prend de la place". La particularité ici par rapport à une régularisation "classique" est que la fonction à convoluer,  $v_\epsilon$  dépend également de l'indice  $\epsilon$ .

Définissons donc  $\tilde{v}_\epsilon = \eta_\epsilon * v_\epsilon$ .

Si  $x \in \partial\Omega$ , on a  $\text{dist}(x - y, x) = |y|$ . Comme on doit avoir  $\text{dist}(x - y, \partial\Omega) > \epsilon$  pour que  $v_\epsilon(x - y)$  soit non-nul, on obtient la condition  $|y| > \epsilon$ . Or, dans ce cas,  $\eta_\epsilon(y) = 0$  car  $\text{supp}(\eta_\epsilon) \subset \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < \epsilon\}$ . On en conclut que  $\tilde{v}_\epsilon = 0$  sur  $\partial\Omega$ . On observe similairement que  $\nabla \tilde{v}_\epsilon = 0$  sur  $\partial\Omega$ .

Affirmation 3 :  $\tilde{v}_\epsilon \rightarrow v$  dans  $W^{1,1}(\mathbb{R}^2)$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Par densité des fonctions  $C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  dans  $L^1(\mathbb{R}^2)$  (voir la proposition 10.4 du cours [40]), on peut trouver  $g \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  telle que  $\|g - v\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} < \epsilon$ . On a alors

$$\|\tilde{v}_\epsilon - v\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|\tilde{v}_\epsilon - \eta_\epsilon * g\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|\eta_\epsilon * g - g\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|g - v\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Grâce à l'inégalité de Young pour la convolution (18), on sait que

$$\|\tilde{v}_\epsilon - \eta_\epsilon * g\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \|\eta_\epsilon * (v_\epsilon - g)\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|\eta_\epsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \|v_\epsilon - g\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \|v_\epsilon - g\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

De plus,

$$\|v_\epsilon - g\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|v_\epsilon - v\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \|v - g\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}$$

où le premier terme à droite tend vers 0 grâce à l'affirmation 1.

Posons  $V = \text{supp}(g)$  et  $V_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x, V) < \epsilon\}$ . Comme  $g$  est une fonction à support compact, ces ensembles sont bornés. Comme expliqué dans le théorème 11 du travail de Timo Rohner [38],  $\eta_\epsilon * g$  converge uniformément vers  $g$  sur tout compact de  $\mathbb{R}^2$ . En particulier, on a la convergence uniforme sur tout compact

$K_\epsilon \supset V_\epsilon$ . On obtient alors grâce à l'inégalité de Hölder

$$\begin{aligned} \|\eta_\epsilon * g - g\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} &= \int_{\mathbb{R}^2} |\eta_\epsilon * g(x) - g(x)| \, dx = \int_{V_\epsilon} |\eta_\epsilon * g(x) - g(x)| \, dx \\ &\leq \sup_{x \in V_\epsilon} |\eta_\epsilon * g(x) - g(x)| \mathcal{L}^2(V_\epsilon) \leq \sup_{x \in K_\epsilon} |\eta_\epsilon * g(x) - g(x)| \mathcal{L}^2(V_\epsilon). \end{aligned}$$

Par la convergence uniforme, on a  $\sup_{x \in K_\epsilon} |\eta_\epsilon * g(x) - g(x)| \rightarrow 0$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ . Comme  $V_\epsilon$  est borné pour tout  $\epsilon$ , cela montre que  $\eta_\epsilon * g \rightarrow g$  dans  $L^1(\mathbb{R}^2)$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

En rassemblant nos résultats, on obtient

$$\|\tilde{v}_\epsilon - v\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|v_\epsilon - v\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} + \sup_{x \in K_\epsilon} |\eta_\epsilon * g(x) - g(x)| \mathcal{L}^2(V_\epsilon) + 2\|g - v\|_{L^1(\mathbb{R}^2)},$$

ce qui tend vers 0 dans la limite  $\epsilon \rightarrow 0$  par les remarques précédentes et le choix de  $g$ .

On peut montrer de manière totalement similaire que  $\nabla \tilde{v}_\epsilon = \eta_\epsilon * \nabla v_\epsilon \rightarrow \nabla v$  dans  $L^1(\mathbb{R}^2)$ .

Affirmation 4 :  $\|\nabla^2 \tilde{v}_\epsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \rightarrow |D^2 v|(\mathbb{R}^2)$  lorsque  $\epsilon \rightarrow 0$ .

En utilisant l'affirmation 3 et la semicontinuité inférieure du théorème (11), on trouve facilement que

$$|D^2 v|(\mathbb{R}^2) \leq \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} |D^2 \tilde{v}_\epsilon|(\mathbb{R}^2) = \liminf_{\epsilon \rightarrow 0} \|\nabla^2 \tilde{v}_\epsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^2)}.$$

Grâce à l'inégalité de Young pour la convolution avec une mesure (19), on a également  $\|\nabla^2 \tilde{v}_\epsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} = \|\eta_\epsilon * D^2 v_\epsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \|\eta_\epsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} |D^2 v_\epsilon|(\mathbb{R}^2) = |D^2 v_\epsilon|(\mathbb{R}^2)$ . Par l'affirmation 2, on a alors

$$\limsup_{\epsilon \rightarrow 0} \|\nabla^2 \tilde{v}_\epsilon\|_{L^1(\mathbb{R}^2)} \leq \limsup_{\epsilon \rightarrow 0} |D^2 v_\epsilon|(\mathbb{R}^2) = |D^2 v|(\mathbb{R}^2).$$

Combiner ces deux résultats nous donne la limite espérée.

Affirmation 5 : Il existe une constante  $K > 0$  telle que  $\|\nabla \tilde{v}_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{K}{\epsilon^2} |D^2 v|(\mathbb{R}^2)$  pour  $\epsilon$  suffisamment petit.

En utilisant un argument similaire au théorème 1.5 du chapitre 6 du cours de l'Université Paris-Dauphine [36], on a

$$\|\nabla^2 \tilde{v}_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \|\eta_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} |D^2 v_\epsilon|(\mathbb{R}^2).$$

Notons que par définition de  $\eta_\epsilon$ ,  $\|\eta_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} = \frac{1}{\epsilon^2} \|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$ . De plus, par l'affirmation 2, pour tout  $\delta > 0$ , il existe  $\tilde{\epsilon} > 0$  tel que  $||D^2 v_\epsilon|(\mathbb{R}^2) - |D^2 v|(\mathbb{R}^2)|| < \delta$

pour tout  $\epsilon < \tilde{\epsilon}$ . Ainsi, en choisissant  $\delta = |D^2v|(\mathbb{R}^2)$  par exemple, on obtient  $|D^2v_\epsilon|(\mathbb{R}^2) < 2|D^2v|(\mathbb{R}^2)$  pour  $\epsilon$  suffisamment petit.

On conclut donc que  $\|\nabla^2\tilde{v}_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{2}{\epsilon^2}\|\eta\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}|D^2v|(\mathbb{R}^2)$ .

Cette inégalité va nous permettre de garder du contrôle sur  $\|\nabla^2\tilde{v}_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}$  en choisissant judicieusement la dépendance de  $\epsilon$  en fonction du paramètre  $\lambda$ . Posons donc  $\epsilon(\lambda) = \sqrt{\frac{4K}{\lambda^{1/2}}|D^2v|(\mathbb{R}^2)}$ . Ceci nous donne

$$\|\nabla^2\tilde{v}_{\epsilon(\lambda)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \leq \frac{\sqrt{\lambda}}{4}. \quad (6.5)$$

Le but de la preuve est de trouver la bonne suite. Commençons donc par définir

$$u_\lambda = \bar{f} + \tilde{v}_{\epsilon(\lambda)}.$$

Comme  $\tilde{v}_\epsilon(\lambda) \in C_c^\infty(\mathbb{R}^2)$  et  $\bar{f} \in H^2(\mathbb{R}^2)$ ,  $u_\lambda$  est bornée dans  $BH(\mathbb{R}^2)$ . Par le théorème (15), il existe donc une sous-suite (on ne renommera pas les indices ici) convergeant faiblement  $*$  dans  $BH(\mathbb{R}^2)$  vers un certain  $\bar{u} \in BH(\mathbb{R}^2)$ . Par unicité de la limite et les affirmations précédentes, on conclut que  $\bar{u} = \bar{f} + v$  sur  $\mathbb{R}^2$ , autrement dit

$$\bar{u}(x) = \begin{cases} u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ \bar{f}(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

En particulier,  $u_\lambda$  converge faiblement  $*$  vers  $u$  dans  $BH(\Omega)$ . Cette suite semble être le bon candidat, mais il reste à montrer l'égalité de la limite de  $\mathcal{F}_{f,\lambda}$ .

Affirmation 6 : Pour  $\xi \in \mathbb{R}_{\text{sym}}^{2 \times 2}$ , on a  $\rho(\xi) \leq 2|\xi|$ .

Notons comme précédemment les valeurs absolues des valeurs propres de  $\xi$  par  $a_1, a_2$ . On a déjà prouvé en (6.4) que  $|\xi|^2 = a_1^2 + a_2^2$ . Donc,

$$\begin{aligned} 2a_1^2 + 2a_2^2 + (a_1 - a_2)^2 &\geq 0 \\ \iff 3a_1^2 + 3a_2^2 &\geq 2a_1a_2 \\ \iff 4(a_1^2 + a_2^2) &\geq a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \\ \iff 4|\xi|^2 &\geq (a_1 + a_2)^2 \\ \iff 2|\xi| &\geq a_1 + a_2 = \rho(\xi). \end{aligned}$$

Définissons maintenant pour chaque  $\lambda > 0$  l'ensemble

$$E_\lambda = \left\{ x \in \Omega : |\nabla^2\bar{f}| > \frac{\sqrt{\lambda}}{4} \right\}.$$

Remarquons que  $F_\lambda \triangleq \{x \in \Omega : \rho(\nabla^2 u_\lambda) > \sqrt{\lambda}\} \subset E_\lambda$ . En effet, grâce à l'affirmation 6, on a

$$\begin{aligned} \rho(\nabla^2 u_\lambda) > \sqrt{\lambda} &\implies 2|\nabla^2 u_\lambda| = 2|\nabla^2 \bar{f} + \nabla^2 \tilde{v}_\epsilon| > \sqrt{\lambda} \\ &\implies 2|\nabla^2 \bar{f}| + 2|\nabla^2 \tilde{v}_\epsilon| > \sqrt{\lambda} \\ &\implies |\nabla^2 \bar{f}| > \frac{\sqrt{\lambda}}{2} - |\nabla^2 \tilde{v}_\epsilon| > \frac{\sqrt{\lambda}}{2} - \|\nabla^2 \tilde{v}_\epsilon\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)}. \end{aligned}$$

Grâce à l'inégalité (6.5), on obtient bien  $|\nabla^2 \bar{f}| > \frac{\sqrt{\lambda}}{2} - \frac{\sqrt{\lambda}}{4} = \frac{\sqrt{\lambda}}{4}$ .

Posons, pour tout  $\epsilon > 0$ ,  $A_\epsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x, \Omega) < \epsilon\} \supset \text{supp}(\tilde{v}_\epsilon)$ .

On a alors

$$\begin{aligned} \int_{A_\epsilon \setminus E_\lambda} G_\lambda(\nabla^2 u_\lambda(x)) \, dx &= \int_{A_\epsilon \setminus E_\lambda} 2 \left( \rho(\nabla^2 u_\lambda(x)) - \lambda^{-1/2} |\det(\nabla^2 u_\lambda(x))| \right) \, dx \\ &\leq \int_{A_\epsilon \setminus E_\lambda} 2\rho(\nabla^2 u_\lambda(x)) \, dx \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \int_{E_\lambda} G_\lambda(\nabla^2 u_\lambda(x)) \, dx &= \int_{F_\lambda} \left( \sqrt{\lambda} + \lambda^{-1/2} |\nabla^2 u_\lambda(x)|^2 \right) \, dx \\ &\quad + \int_{E_\lambda \setminus F_\lambda} 2 \left( \rho(\nabla^2 u_\lambda(x)) - \lambda^{-1/2} |\det(\nabla^2 u_\lambda(x))| \right) \, dx. \end{aligned}$$

Comme  $\rho(\nabla^2 u_\lambda) \leq \sqrt{\lambda}$  sur  $E_\lambda \setminus F_\lambda$ , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{E_\lambda} G_\lambda(\nabla^2 u_\lambda(x)) \, dx &\leq \int_{E_\lambda} \left( \sqrt{\lambda} + \lambda^{-1/2} |\nabla^2 u_\lambda(x)|^2 \right) \, dx \\ &\leq \sqrt{\lambda} \mathcal{L}^2(E_\lambda) \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_{E_\lambda} \left( |\nabla^2 \bar{f}(x)|^2 + 2|\nabla^2 \bar{f}(x)| |\nabla^2 \tilde{v}_{\epsilon(\lambda)}(x)| + |\nabla^2 \tilde{v}_{\epsilon(\lambda)}(x)|^2 \right) \, dx. \end{aligned}$$

Observons que  $\mathcal{L}^2(E_\lambda) \rightarrow 0$  lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$ . Cela est nécessaire pour avoir  $\bar{f} \in H^2(\Omega)$ . On en conclut que  $\chi_{E_\lambda}(x) \rightarrow 0$  pour presque tout  $x \in \mathbb{R}^2$ , et donc  $\|\nabla^2 \bar{f}\|_{L^1(E_\lambda)} \rightarrow 0$ .

Par définition de  $E_\lambda$ ,  $\|\nabla^2 \bar{f}\|_{L^1(E_\lambda)} = \int_{E_\lambda} |\nabla^2 \bar{f}(x)| \, dx > \int_{E_\lambda} \frac{\sqrt{\lambda}}{4} \, dx = \frac{\sqrt{\lambda}}{4} \mathcal{L}^2(E_\lambda)$ .

Autrement dit,  $\mathcal{L}^2(E_\lambda) < \frac{4\|\nabla^2 \bar{f}\|_{L^1(E_\lambda)}}{\sqrt{\lambda}}$ .

Par Hölder, on a également

$$\int_{E_\lambda} |\nabla^2 \bar{f}(x)| |\nabla^2 \tilde{v}_{\epsilon(\lambda)}(x)| dx \leq \|\nabla^2 \tilde{v}_{\epsilon(\lambda)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \|\nabla^2 \bar{f}\|_{L^1(E_\lambda)} \leq \frac{\sqrt{\lambda}}{4} \|\nabla^2 \bar{f}\|_{L^1(E_\lambda)}$$

grâce à l'inégalité (6.5).

Finalement,

$$\begin{aligned} \int_{E_\lambda} G_\lambda(\nabla^2 u_\lambda(x)) dx &\leq 4 \|\nabla^2 \bar{f}\|_{L^1(E_\lambda)} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|\nabla^2 \bar{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^2)} \\ &\quad + \frac{1}{2} \|\nabla^2 \bar{f}\|_{L^1(E_\lambda)} + \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \|\nabla^2 \tilde{v}_{\epsilon(\lambda)}\|_{L^2(E_\lambda)} dx, \end{aligned}$$

tend vers 0 lorsque  $\lambda \rightarrow \infty$ . Le dernier terme est géré par Hölder et l'inégalité (6.5),  $\|\nabla^2 \tilde{v}_{\epsilon(\lambda)}\|_{L^2(E_\lambda)} \leq \|\nabla^2 \tilde{v}_{\epsilon(\lambda)}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \mathcal{L}^2(E_\lambda) \leq \frac{\sqrt{\lambda}}{4} \mathcal{L}^2(E_\lambda)$ .

Maintenant, comme  $G_\lambda$  est une fonction positive,

$$\begin{aligned} \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\Omega} G_\lambda(\nabla^2 u_\lambda(x)) dx &\leq \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{A_\epsilon} G_\lambda(\nabla^2 u_\lambda(x)) dx \\ &\leq \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{A_\epsilon \setminus E_\lambda} G_\lambda(\nabla^2 u_\lambda(x)) dx \\ &\quad + \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{E_\lambda} G_\lambda(\nabla^2 u_\lambda(x)) dx \\ &\leq \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} 2 \int_{A_\epsilon \setminus E_\lambda} \rho(\nabla^2 u_\lambda(x)) dx \\ &\leq \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} 2 \int_{A_\epsilon} \rho(\nabla^2 u_\lambda(x)) dx. \end{aligned}$$

Fixons  $\epsilon$  suffisamment petit tel que nos affirmations précédentes tiennent et posons  $U = A_\epsilon$ . La convergence de  $u_\lambda$  vers  $\tilde{u}$  faiblement  $*$  dans  $BH(\mathbb{R}^2)$  implique en particulier cette même convergence dans  $BH(U)$ . Par le théorème (17), si on refait varier  $\epsilon(\lambda)$  tout en gardant  $U$  fixe, on obtient

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} 2 \int_U \rho(\nabla^2 u_\lambda(x)) dx = 2\rho(D^2 \tilde{u})(U).$$

Comme cet argument est valable pour tout  $\epsilon$  suffisamment petit, on en déduit que

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{A_\epsilon} G_\lambda(\nabla^2 u_\lambda(x)) dx \leq 2\rho(D^2 \tilde{u})(A_\epsilon).$$

Sur  $\partial A_\epsilon$ , on a  $D^2\tilde{u} = \nabla^2\bar{f}\mathcal{L}^2$ , donc  $\rho(D^2\tilde{u})(\partial A_\epsilon) = \int_{\partial A_\epsilon} \rho(\nabla^2\bar{f}(x)) dx = 0$  car  $\mathcal{L}^2(\partial A_\epsilon) = 0$ . On en conclut que  $\rho(D^2\tilde{u})(\bar{A}_\epsilon) = \rho(D^2\tilde{u})(A_\epsilon)$ .

On peut donc écrire

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{A_\epsilon} G_\lambda(\nabla^2 u_\lambda(x)) dx \leq 2\rho(D^2\tilde{u})(\bar{A}_\epsilon).$$

et dans la limite  $\epsilon \rightarrow 0$ ,

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\Omega} G_\lambda(\nabla^2 u_\lambda(x)) dx \leq 2\rho(D^2\tilde{u})(\bar{\Omega}) = 2\rho(D^2u)(\Omega) + 2\rho(D^2\tilde{u})(\partial\Omega).$$

Comme

$$\nabla\tilde{u}(x) = \begin{cases} \nabla u(x) & \text{si } x \in \Omega \\ \nabla f(x) & \text{sinon,} \end{cases}$$

on sait que la partie de saut de  $D^2\tilde{u}$  sur  $\partial\Omega$  sera  $(\nabla f - \nabla u) \otimes n \mathcal{H}^1$ . Alors,  $\rho(D^2\tilde{u})(\partial\Omega) = \rho((\nabla f - \nabla u) \otimes n) \mathcal{H}^1$ . Vu que  $(\nabla f - \nabla u) \otimes n$  est une matrice de rang 1, on sait que son unique valeur propre non-nulle est sa trace, autrement dit  $(\nabla f - \nabla u) \cdot n$ . On en conclut que  $\rho((\nabla f - \nabla u) \otimes n) = |(\nabla f - \nabla u) \cdot n| \leq |\nabla f - \nabla u| |n| = |\nabla f - \nabla u|$  par l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Ceci nous amène à

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\Omega} G_\lambda(\nabla^2 u_\lambda(x)) dx \leq 2\rho(D^2u)(\Omega) + 2 \int_{\partial\Omega} |\nabla u - \nabla \bar{f}| d\mathcal{H}^1.$$

Le théorème (16) nous informe que  $\tilde{u}$  est une fonction continue sur tout ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$  avec un bord de classe  $C^2$ . En particulier, cela nous dit que  $\gamma_0(u) = \gamma_0(\bar{f}) = f_1$ .

De plus,

$$\int_{\partial\Omega} |\nabla u - \nabla \bar{f}| d\mathcal{H}^1 = \int_{\partial\Omega} |\gamma_1(u) - \gamma_1(\bar{f})| d\mathcal{H}^1 = \int_{\partial\Omega} |\gamma_1(u) - f_2| d\mathcal{H}^1$$

par notre définition de  $\bar{f}$ .

Notre inégalité devient alors

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\Omega} G_\lambda(\nabla^2 u_\lambda(x)) dx \leq 2\rho(D^2u)(\Omega) + 2 \int_{\partial\Omega} |\gamma_1(u) - f_2| d\mathcal{H}^1.$$

Observons que pour  $\lambda$  fixé, pour tout  $\xi \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ , il existe une constante  $C > 0$  telle que  $0 \leq \lambda^{-1/2} F_\lambda(\xi) \leq C(1 + |\xi|)^2$ . En effet, par définition de  $F_\lambda(\xi)$ , on peut prendre  $C = \max(\lambda^{1/2}, \lambda^{-1/2})$ .

Grâce à cette observation, on peut appliquer le théorème (6) pour chaque  $\lambda$ , avec  $u_0 = \bar{f}$ , sur  $u_\lambda = \bar{f} + \tilde{v}_{\epsilon(\lambda)}$ . Comme on a prouvé précédemment que  $\tilde{v}_{\epsilon(\lambda)} = 0$  et  $\nabla \tilde{v}_{\epsilon(\lambda)} = 0$  sur  $\partial\Omega$ , on a bien que  $\tilde{v}_{\epsilon(\lambda)} \in W_0^{2,2}(\Omega)$ . On obtient ainsi  $U_\lambda \in H^2(\Omega)$  avec  $U_\lambda = \bar{f}$  sur  $\partial\Omega$  qui satisfait

$$\begin{aligned} \|U_\lambda - u_\lambda\|_{W^{1,2}(\Omega)} &< \frac{1}{\lambda} \\ \lambda^{-1/2} \int_{\Omega} F_\lambda(\nabla^2 U_\lambda(x)) \, dx &\leq \int_{\Omega} G_\lambda(\nabla^2 u_\lambda(x)) \, dx + \frac{1}{\lambda}. \end{aligned}$$

On remarque que  $U_\lambda \rightarrow u$  dans  $W^{1,1}(\Omega)$  en utilisant l'inégalité triangulaire et Hölder,

$$\begin{aligned} \|U_\lambda - u\|_{W^{1,1}(\Omega)} &\leq \|U_\lambda - u_\lambda\|_{W^{1,1}(\Omega)} + \|u_\lambda - u\|_{W^{1,1}(\Omega)} \\ &\leq \|U_\lambda - u_\lambda\|_{W^{1,2}(\Omega)} \mathcal{L}^2(\Omega) + \|u_\lambda - u\|_{W^{1,1}(\Omega)} \\ &\leq \frac{1}{\lambda} \mathcal{L}^2(\Omega) + \|u_\lambda - u\|_{W^{1,1}(\Omega)}, \end{aligned}$$

tend bien vers 0 car on sait que  $u_\lambda$  converge faiblement  $*$  vers  $u$  dans  $BH(\mathbb{R}^2)$ .

On obtient finalement que

$$\begin{aligned} \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{f,\lambda}(U_\lambda) &\leq \limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \int_{\Omega} G_\lambda(\nabla^2 u_\lambda(x)) \, dx \\ &\leq 2\rho(D^2u)(\Omega) + 2 \int_{\partial\Omega} |\gamma_1(u) - f_2| \, d\mathcal{H}^1 = \mathcal{F}_f(u) < K. \end{aligned}$$

Par la partie compacité qui a été prouvée juste au-dessus, il existe une sous-suite (sans renommage des indices) de  $(U_\lambda)_\lambda$  qui converge faiblement  $*$  dans  $BH(\Omega)$ . Grâce à la borne inférieure, on a

$$\limsup_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{f,\lambda}(U_\lambda) \leq \mathcal{F}_f(u) \leq \liminf_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{f,\lambda}(U_\lambda)$$

et donc  $\lim_{\lambda \rightarrow \infty} \mathcal{F}_{f,\lambda}(U_\lambda) = \mathcal{F}_f(u)$ .

□

La démonstration de la borne inférieure n'a pas été traitée dans ce travail, et les détails sont présents dans l'article [35]. L'idée générale est d'utiliser la technique de "blow-up" avec une dépendance dans le paramètre  $\lambda$ . La limite dans  $BH(\Omega)$  peut alors avoir une partie absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue et une partie singulière. En analysant le comportement dans chacun de ces deux cas, et en utilisant une renormalisation intelligente, on peut alors prouver le résultat attendu en utilisant la quasiconvexité de l'intégrande.

# Conclusion

Rappelons tout d'abord que la démarche entreprise a consisté à introduire un contexte mathématique ainsi qu'à expliciter et documenter une multitude de théorèmes, lemmes et définitions pour soutenir la démonstration finale.

Résumons ce qu'on a accompli. On a pu motiver la convergence Gamma dans le contexte du calcul des variations, avec notamment le résultat fondamental du théorème (2) qui assure que la Gamma-limite se comporte bien vis-à-vis des minimiseurs.

On a également pu discuter de la relaxation de fonctionnelles, qui nous éclaire sur le comportement limite des suites minimisantes de celles-ci. On s'est aussi intéressé aux fonctionnelles intégrales ainsi qu'aux conditions sur leur intégrande pour assurer leur faible semicontinuité inférieure. Ceci nous a motivé à définir la quasiconvexité, et on a pu énoncer des résultats liant la relaxation et l'enveloppe quasiconvexe.

Ensuite on a abordé les fonctions à variation bornée, dont la dérivée distributionnelle permet de définir une mesure de Radon, et on a ajouté quelques résultats importants sur leur structure. On a continué avec les fonctions à hessienne bornée, dont la dérivée faible est une fonction à variation bornée. Ces fonctions sont celles utilisées comme potentiels d'Airy pour les stress autorisés dans notre problème de minimisation de l'énergie absorbée par des corps élastiques en deux dimensions.

Avant de pouvoir énoncer notre résultat final, on a encore dû énoncer quelques théorèmes et définitions dans le chapitre Boîte à outils. On y définit notamment des opérateurs pour imiter le comportement d'une intégrale sur le bord et comment traiter une mesure d'une fonction positivement une-homogène. On y rappelle aussi l'opérateur convolution et on y énonce le lemme crucial (8) qui permet de relier les théorèmes finaux (21) et (20). On y mentionne également le lemme (11) qui aide à gérer les conditions aux bords de notre problème.

Enfin, on a pu définir rigoureusement nos fonctionnelles de travail et l'énoncé principal, le théorème (20). Celui-ci nous assure l'équicoercivité et la convergence Gamma de nos fonctionnelles. Pour le prouver, on passe par le théorème (21) qui nous donne un énoncé très similaire pour les potentiels d'Airy associés. L'importance de ce résultat principal réside dans le fait qu'il assure que les hypothèses du théorème fondamental (2) sont satisfaites.

En guise d'approfondissement, il pourrait être intéressant de compléter la dernière composante de la preuve relative à la borne inférieure du théorème (21), présente dans l'article de Heiner Olbermann [35].

Les problèmes variationnels intéressants ne manquent pas dans la littérature (voir [2] par exemple). Ce travail vise à mettre en avant l'importance de la convergence Gamma au travers d'un exemple spécifique, mais beaucoup de notions présentées ici se retrouvent également lorsqu'on travaille sur d'autres problèmes variationnels.

# Bibliographie

- [1] G. Allaire and R. V. Kohn. Optimal design for minimum weight and compliance in plane stress using extremal microstructures. *European Journal of Mechanics A-solids*, 12 :839–878, 1993. URL <https://api.semanticscholar.org/CorpusID:117428209>.
- [2] G. Allaire et al. *Shape Optimization by the Homogenization Method*, volume 146. New York, NY : Springer New York,, 2002. doi : <https://doi.org/10.1007/978-1-4684-9286-6>.
- [3] L. Ambrosio, G. Crippa, C. De Lellis, F. Otto, M. Westdickenberg, and C. De Lellis. *A note on Alberti's rank-one theorem*. Springer, 2008.
- [4] P. Augusto. *LMAT2250 - Calculus of variations*, pages 1–51. UCLouvain, 2023.
- [5] J.-F. Babadjian. Calcul des variations. *Université Paris-Sud*, 2020. URL <https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~jean-francois.babadjian/files/Poly-CalVa2020.pdf>.
- [6] M. Bendsøe and R. Haber. The michell layout problem as a low volume fraction limit of the perforated plate topology optimization problem : an asymptotic study. *Structural optimization*, 6 :263–267, 1993.
- [7] N. Bourbaki. *Elements of Mathematics*. Springer Berlin Heidelberg, 2004.
- [8] A. Braides. A handbook of  $\gamma$ -convergence, 2006. URL <http://cvgmt.sns.it/paper/57/>. cvgmt preprint.
- [9] A. Braides. *Local minimization, variational evolution and  $\Gamma$ -convergence*, volume 2094. Springer, 2014.
- [10] A. Braides and A. Defranceschi. *Homogenization of multiple integrals*. Number 12. Oxford University Press, 1998.
- [11] A. Chambolle. Introduction to the calculus of variations and gamma convergence. Master's thesis, CMAP, Ecole Polytechnique, CNRS, 2015.
- [12] A. Chambolle, V. Caselles, M. Novaga, D. Cremers, and T. Pock. An introduction to total variation for image analysis. 9, 01 2010. doi : 10.1515/9783110226157.263.
- [13] L. CHEN. Variational formulation of linear elasticity. 2024.

- [14] S. Conti. *V5B5 - Advanced Topics in Analysis and Calculus of Variations*. Université de Bonn, 2012.
- [15] B. Dacorogna. Quasiconvexity and relaxation of nonconvex problems in the calculus of variations. *Journal of functional analysis*, 46(1) :102–118, 1982.
- [16] B. Dacorogna. *Direct methods in the calculus of variations*, volume 78. Springer Science & Business Media, 2007.
- [17] F. Demengel. Fonctions à hessien borné. In *Annales de l'institut Fourier*, volume 34, pages 155–190, 1984.
- [18] F. Demengel. Compactness theorems for spaces of functions with bounded derivatives and applications to limit analysis problems in plasticity. *Archive for Rational Mechanics and Analysis*, 105(2) :123–161, June 1989. ISSN 1432-0673. doi : 10.1007/BF00250834. URL <https://doi.org/10.1007/BF00250834>.
- [19] F. Demengel and J. Rauch. Weak convergence of asymptotically homogeneous functions of measures. 1990.
- [20] I. Ekeland and R. Témam. *Convex Analysis and Variational Problems*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 1999. doi : 10.1137/1.9781611971088. URL <https://epubs.siam.org/doi/abs/10.1137/1.9781611971088>.
- [21] L. Evans. *Measure theory and fine properties of functions*. Routledge, 2018.
- [22] L. C. Evans. *Partial differential equations*, volume 19. American Mathematical Society, 2022.
- [23] H. Federer. *Geometric measure theory*. Springer, 2014.
- [24] C. Gerhardt. Trace and extensions of bv functions. *Lecture notes, Institut für Angewandte Mathematik*, 2011.
- [25] Q. Jiang, Z. Zhou, J. Chen, and F. Yang. The method of fundamental solutions for two-dimensional elasticity problems based on the airy stress function. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 130 :220–237, 2021. ISSN 0955-7997. doi : <https://doi.org/10.1016/j.enganabound.2021.05.021>. URL <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0955799721001508>.
- [26] S. Korotov and M. Křížek. Divergence-free finite element spaces for stress tensors. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 438 :115537, 2024.
- [27] S. G. Krantz and H. R. Parks. *Geometric integration theory*. Springer Science & Business Media, 2008.
- [28] P. D. Lamberti and L. Provenzano. On trace theorems for sobolev spaces. *arXiv preprint arXiv :1910.03971*, 2019.

- [29] U. Lang. Notes on rectifiability. *Consultable à [https://people.math.ethz.ch/~lang/rect\\_notes.pdf](https://people.math.ethz.ch/~lang/rect_notes.pdf)*, 2007.
- [30] A. Lemenant. Fonctions bv, théorème rang-1 et mesure a-free. 2022. URL <https://antoine-lemenant.perso.math.cnrs.fr/documents/>.
- [31] M. Li. *Optimal Design*, pages 1–10. Springer Singapore, Singapore, 2019. ISBN 978-981-10-6963-5. doi : 10.1007/978-981-10-6963-5\_64-1. URL [https://doi.org/10.1007/978-981-10-6963-5\\_64-1](https://doi.org/10.1007/978-981-10-6963-5_64-1).
- [32] A. Massaccesi and D. Vittone. An elementary proof of the rank-one theorem for bv functions, 2016.
- [33] N. G. Meyers. Quasi-convexity and lower semi-continuity of multiple variational integrals of any order. *Transactions of the American Mathematical Society*, 119(1) : 125–149, 1965.
- [34] A. G. M. Michell. Lviii. the limits of economy of material in frame-structures. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 8 (47) :589–597, 1904.
- [35] H. Olbermann. Michell trusses in two dimensions as a gamma-limit of optimal design problems in linear elasticity, 2017.
- [36] U. Paris-Dauphine. Cours de “intégrale de lebesgue et probabilités”, 2021-2022. URL <https://www.ceremade.dauphine.fr/~mischler/Enseignements/L3Lebesgue/ch6.pdf>.
- [37] J. Petitot. *Neurogéométrie de la vision : modeles mathematiques et physiques des architectures fonctionnelles*. Editions Ecole Polytechnique, 2008.
- [38] T. Rohner. Test functions, mollifiers and convolution. <https://timorohner.com/>, 2019.
- [39] G. Rozvany, T. Ong, W. Szeto, R. Sandler, N. Olhoff, and M. Bendsøe. Least-weight design of perforated elastic plates—i. *International journal of solids and structures*, 23(4) :521–536, 1987.
- [40] J. V. Schaftingen. *Functional analysis - Lecture notes*. UCLouvain, 2021.
- [41] T. Sullivan. A hitchhiker’s guide to gamma convergence. Ortiz Group Meeting Graduate - Aerospace Laboratories, California Institute of Technology, 2011. URL <https://www.zib.de/userpage//sullivan/pdf/2011-01-28-caltech-gamma.pdf>.
- [42] M. Wagner. On the lower semicontinuous quasiconvex envelope for unbounded integrands (i). *ESAIM : Control, Optimisation and Calculus of Variations*, 15(1) : 68–101, 2009.

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN  
Faculté des sciences

Place des sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | [www.uclouvain.be/sc](http://www.uclouvain.be/sc)