

Faculté des sciences

Le théorème de capacabilité et l'intégrale de Choquet

Auteur : Anton Doumont

Promoteur : Augusto Ponce

Lecteurs : Jean Van Schaftingen et Christian Hagendorf

Année académique 2022-2023

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
FACULTÉ DES SCIENCES
ÉCOLE DE MATHÉMATIQUES

Le théorème de capacitabilité et l'intégrale de Choquet

Anton Doumont
Promoteur : Augusto Ponce
Lecteurs : Jean Van Schaftingen et Christian Hagendorf

Mémoire de master
Septembre 2023

Table des matières

Introduction	7
1 Le théorème de capacitabilité	10
1.1 Capacité	10
1.2 Capacitabilité	32
2 Exemples de capacités	47
2.1 Capacité de Sobolev	47
2.2 Capacité de Bessel	56
2.3 Capacité de Hausdorff dyadique	69
3 L'intégrale de Choquet	82
3.1 Définitions et propriétés	82
3.2 Théorème de convergence	90
3.3 L'espace L^1	96
Conclusion	103

Remerciement

Je tiens tout naturellement à exprimer ma profonde gratitude envers le professeur Augusto Ponce pour m'avoir introduit ce sujet de mémoire qui m'aura captivé tout au long de cette année. Je le remercie également pour sa disponibilité et ses conseils judicieux.

En cette dernière étape de ma vie universitaire, je tiens aussi à remercier toutes les personnes qui ont rendu cette expérience aussi remarquable. Un merci tout d'abord à l'ensemble de mes professeurs qui m'ont permis d'étoffer ma passion pour les mathématiques mais aussi à mes amis envers qui je suis redevables de cinq années de joies partagées, sans lesquelles cette expérience aurait perdu de son éclat.

J'aimerais également remercier toutes les personnes qui ont contribué de près ou de loin à la rédaction de ce mémoire, vos conseils et remarque ont contribué à rendre ce travail meilleur. En particulier, je remercie Kevin et Coline dont les relectures minutieuses ont sans nul doute amélioré la qualité de ce travail.

Finalement, je remercie les professeurs Jean Van Schaftingen et Christian Hagendorf d'avoir accepté de lire ce mémoire. J'espère que celui-ci vous intéressera tout autant que moi.

Introduction

Depuis de nombreuses années les mathématiciens se sont intéressés à la théorie du potentiel, une discipline trouvant ses motivations dans la physique et s'intéressant à l'étude des fonctions harmoniques. Dans ce mémoire, nous allons nous intéresser à l'un des concepts fondamentaux de cette théorie, celui de capacité.

Parmi les différents exemples de capacités que nous pouvons trouver dans la littérature, l'une d'elle a particulièrement intéressé le mathématicien français Henri Cartan : la capacité newtonienne. Considérons un conducteur K (par exemple une sphère métallique) dans notre espace usuel que nous relions à une machine électrostatique. Ce conducteur va se charger d'une certaine quantité d'électricité notée Q et va atteindre un certain potentiel noté V . On peut vérifier expérimentalement que la quantité d'électricité et le potentiel sont deux quantités proportionnelles, il existe donc une constante k telle que $Q = kV$, cette constante est appelée la capacité newtonienne de K .

La construction de cette capacité est étroitement liée au domaine de la physique et n'est pas satisfaisante pour le mathématicien. Trop de notions sont en effet mal définies : conducteur, potentiel ou même le concept d'électricité. Il est donc important de donner une autre définition, indépendante de toute considération physique.

Nous nous détachons donc du concept de conducteur et allons considérer que K est un ensemble compact dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$. Nous définissons alors la capacité newtonienne de cet ensemble par

$$\text{cap}(K) = \inf \left\{ \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla u|^2 dx \mid u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^3) \text{ et } u \geq 1 \text{ sur } K \right\}.$$

Nous avons défini la capacité newtonienne pour des compacts, il est également possible de donner une définition pour un sous-ensemble arbitraire de l'espace tridimensionnel $\mathbb{R}^3$. Il existe plusieurs manières de faire cela. Une première approche consiste à évaluer la capacité d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^3$ en prenant la borne supérieure des capacités des compacts contenu dans cet ensemble. Une autre approche serait de dire que la capacité de E est la borne inférieure des capacités des ouverts contenant celui-ci. Ces deux approches nous conduisent aux définitions des capacités intérieures et extérieures. Celles-ci sont définies pour $E \subset \mathbb{R}^3$ par

$$\text{cap}_*(E) = \sup \{ \text{cap}(K) \mid K \text{ est compact et } K \subset E \}$$

et

$$\text{cap}^*(E) = \inf\{\text{cap}(U) \mid U \text{ est ouvert et } E \subset U\}$$

respectivement. Un ensemble E satisfaisant $\text{cap}_*(E) = \text{cap}^*(E)$ sera appelé capacitable.

On peut observer à partir de la définition que les ouverts et les compacts sont capacitables, mais en existe-t-il d'autres ? Cette question est intéressante à bien des égards. En effet, si en théorie de l'intégration les ensembles de mesures nulles jouent un rôle important, en théorie du potentiel ce sont les ensembles de capacités nulle qui auront un intérêt. Mais se pose alors la question suivante : parlons nous de capacité intérieure ou extérieure ? Bien sûr la question ne se pose pas pour les compacts qui comme mentionné précédemment sont évidemment capacitables, mais les ensembles qui se présentent naturellement ne sont en général pas de cette forme. Il serait donc intéressant de savoir si tout ensemble (ou en tout cas une large classe d'entre eux) est capacitable. Plus précisément, nous avons le problème suivant énoncé en 1945 par Henri Cartan dans l'article [4] :

Si un ensemble borélien E satisfait $\text{cap}_(E) = 0$, avons nous aussi $\text{cap}^*(E)$?*

Ce problème est resté ouvert durant plusieurs années et résolu par Gustave Choquet dans les années 1950 avec son article [5]. Dans celui-ci, Choquet a résolu non seulement ce problème pour le cas de la capacité newtonienne mais il a aussi considéré des théorèmes de représentations intégrales en introduisant ce que l'on connaît aujourd'hui sous le nom d'intégrale de Choquet.

Dans ce mémoire, nous résolverons le problème évoqué par Cartan en démontrant le théorème de capacitabilité et étudierons certains exemples de capacité. Une fois que ceci sera fait, nous nous intéresserons à étudier les propriétés de l'intégrale de Choquet.

Dans le chapitre 1, nous introduirons la notion de capacité au sens de Choquet dans le but de pouvoir démontrer le théorème de capacitabilité pour de telles applications. Nous donnerons quelques exemples et montrerons que la capacité newtonienne satisfait toutes les conditions nécessaires pour être une telle capacité. Nous nous intéresserons ensuite à la preuve du théorème de capacitabilité. Pour cela, nous introduirons une nouvelle classe d'ensembles appelée ensemble de Suslin. Nous montrerons dans un premier temps que tout ensemble borélien est un ensemble de Suslin et montrerons ensuite que les ensembles susliniens sont capacitables. En particulier, ceci nous permettra de déduire que tout borélien est capacitable pour la capacité newtonienne.

Nous verrons dans le chapitre 2 d'autres exemples de capacité. Nous énoncerons des applications de ces dernières dans l'étude des équations aux dérivées partielles et pour l'étude des espaces de Sobolev. Pour chacune de ces capacités, nous montrerons si les conditions nécessaires pour être une capacité au sens de Choquet sont satisfaites. Si tel n'est pas le cas, nous regarderons si nous pouvons effectuer une modification de la

définition de la capacité en question pour que les conditions soient satisfaites pour cette capacité modifiée.

Nous terminerons ce mémoire avec le chapitre 3 en nous intéressant à l'intégrale de Choquet. Nous verrons que certaines propriétés classiques comme la linéarité ne sont pas satisfaites pour cette intégrale. Cependant, nous montrerons que sous certaines hypothèses, nous pouvons avoir une propriété plus faible, celle de sous-linéarité. Au delà de cela, nous nous intéresserons à démontrer les résultats classiques de théorie de l'intégration comme les théorèmes de convergence.

Nous avons pris soin de faire les rappels nécessaires pour que ce mémoire soit accessible au plus grand nombre de lecteurs. Nous supposons cependant que celui-ci est familier avec les notions de bases de l'analyse mathématique tels que les théorèmes de convergence et les inégalités fonctionnelles classiques comme l'inégalité de Hölder et de Minkowski. Le lecteur non familier avec ces notions trouvera un rappel de ces dernières dans [22, Chapter 4].

Chapitre 1

Le théorème de capacabilité

Dans ce premier chapitre, nous introduisons la capacité au sens de Choquet et montrons que la capacité Newtonienne satisfait les conditions requises pour être une telle capacité. Nous nous intéresserons ensuite à la preuve du théorème de capacabilité sur les boréliens en introduisant une classe d'ensemble plus générale appelée ensemble de Suslin.

1.1 Capacité

Nous commençons par donner la définition de capacité que nous utiliserons dans ce mémoire.

Définition 1.1. Une application $\text{cap} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ est une capacité au sens de Choquet si elle satisfait les conditions suivantes,

C1 $\text{cap}(\emptyset) = 0$.

C2 Si $E_1 \subset E_2$ alors $\text{cap}(E_1) \leq \text{cap}(E_2)$.

C3 Pour toute suite $(E_n)_{n \geq 1}$ nous avons

$$\text{cap}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{cap}(E_n).$$

C4 Pour toute suite décroissante de compacts $(K_n)_{n \geq 1}$ nous avons

$$\text{cap}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}(K_n).$$

C5 Pour toute suite croissante $(E_n)_{n \geq 1}$ nous avons

$$\text{cap}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}(E_n).$$

Si une telle application satisfait uniquement les conditions C1, C2 et C3, alors on parlera de capacité au sens de Meyers. Nous verrons au Chapitre 2 avec la capacité de Hausdorff dyadique qu'une capacité au sens de Meyers n'est pas toujours une capacité au sens de Choquet.

Un premier exemple de capacité au sens de la définition 1.1 est donné par la mesure de Dirac. Pour $a \in \mathbb{R}^N$ fixé, celle-ci est définie pour $E \subset \mathbb{R}^N$ par

$$\delta_a(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } a \in E \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Puisque δ_a est une mesure finie, il suit des théorèmes classiques de théorie de la mesure que les conditions C1 à C5 sont satisfaites. Nous serions naturellement tenté d'affirmer que toute mesure finie est une capacité étant donné que ces objets satisfont toutes les conditions de la définition 1.1. Nous devons cependant être prudent : une mesure étant généralement définie sur une tribu strictement contenue dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$, elle ne constitue pas un candidat raisonnable pour être une capacité au sens de Choquet selon notre définition.

Nous nous intéressons maintenant à un exemple moins trivial de capacité donné par la capacité p -variationnelle. Le lecteur pourra observer que cette dernière est une généralisation de la capacité newtonienne.

Définition 1.2. *Pour $1 \leq p < +\infty$ et $K \subset \mathbb{R}^N$ compact, la capacité p -variationnelle est définie par*

$$\text{cap}_p(K) = \inf_{u \in \mathcal{D}(K)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \quad (1.1)$$

avec

$$\mathcal{D}(K) = \{u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N) \mid u \geq 1 \text{ sur } K\}$$

où $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ désigne l'ensemble des fonctions lisses de $\mathbb{R}^N$ dans $\mathbb{R}$ à support compact.

Notre objectif est de montrer que cap_p est une capacité au sens de Choquet définie sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$. Celle-ci étant seulement définie sur les compacts, nous devons tout d'abord trouver une manière d'étendre cette capacité sur les sous-ensembles arbitraires de $\mathbb{R}^N$. Nous cherchons donc à définir une application $\widetilde{\text{cap}}_p : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ telle que $\widetilde{\text{cap}}_p|_{\mathcal{K}(\mathbb{R}^N)} = \text{cap}_p$ où $\mathcal{K}(\mathbb{R}^N)$ désigne la classe des sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^N$. Nous procédons en deux étapes : on étend tout d'abord la capacité sur les ouverts et on utilise cette dernière extension pour définir l'extension générale. Plus précisément, on pose pour U ouvert

$$\widetilde{\text{cap}}_p(U) = \sup\{\text{cap}_p(K) \mid K \text{ est compact et } K \subset U\} \quad (1.2)$$

et on vérifie directement que ceci forme une extension des compacts vers les ouverts. On

définit maintenant pour $E \subset \mathbb{R}^N$

$$\widetilde{\text{cap}}_p(E) = \inf\{\widetilde{\text{cap}}_p(U) \mid U \text{ est ouvert et } E \subset U\}. \quad (1.3)$$

Pour montrer que $\widetilde{\text{cap}}_p|_{\mathcal{K}(\mathbb{R}^N)} = \text{cap}_p$ on observe que pour tout ouvert U contenant K nous avons $\text{cap}_p(K) \leq \text{cap}_p(U)$. Une minimisation du côté droit par rapport à tout ouvert contenant K nous donne alors

$$\text{cap}_p(K) \leq \inf\{\widetilde{\text{cap}}_p(U) \mid U \text{ est ouvert et } K \subset U\}. \quad (1.4)$$

L'inégalité inverse est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 1.3. *Étant donné un compact $K \subset \mathbb{R}^N$ et $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U contenant K et tel que*

$$\widetilde{\text{cap}}_p(U) \leq \text{cap}_p(K) + \varepsilon.$$

Démonstration. Soit un compact $K \subset \mathbb{R}^N$ et $\varepsilon > 0$. Par définition de la capacité p -variationnelle nous pouvons trouver $u \in \mathcal{D}(K)$ tel que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \leq \text{cap}_p(K) + \varepsilon.$$

Posons $U = \{u > 1\}$ et montrons que cet ouvert satisfait les conditions requises. Il est clair que U contient K . De plus, pour tout compact $L \subset U$ nous avons $u \in \mathcal{D}(L)$ et donc

$$\text{cap}_p(L) \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \leq \text{cap}_p(K) + \varepsilon.$$

Ceci étant vrai pour tout compact L contenu dans U nous obtenons

$$\widetilde{\text{cap}}_p(U) \leq \text{cap}_p(K) + \varepsilon. \quad \square$$

Il suit de ce lemme que si K est un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^N$

$$\inf\{\widetilde{\text{cap}}_p(U) \mid U \text{ est ouvert et } K \subset U\} \leq \widetilde{\text{cap}}_p(U) \leq \text{cap}_p(K) + \varepsilon$$

et un passage à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ implique donc que

$$\inf\{\widetilde{\text{cap}}_p(U) \mid U \text{ est ouvert et } K \subset U\} \leq \text{cap}_p(K).$$

En combinant cette inégalité avec (1.4) on déduit que $\widetilde{\text{cap}}_p|_{\mathcal{K}(\mathbb{R}^N)} = \text{cap}_p$ et donc $\widetilde{\text{cap}}_p$ forme bien une extension de la capacité p -variationnelle sur les compacts. Dans la suite, nous noterons simplement cap_p cette extension.

Nous allons maintenant montrer que la capacité p -variationnelle respecte les conditions de la définition 1.1, nous suivons pour cela [9, Chapter 2].

Théorème 1.4. *La capacité p -variationnelle est une capacité au sens de Choquet.*

Les deux premières conditions suivent directement de la définition : la fonction identiquement nulle étant un élément de $\mathcal{D}(\emptyset)$, nous avons $\text{cap}_p(\emptyset) \leq 0$ et donc $\text{cap}_p(\emptyset) = 0$. Pour la monotonie, nous pouvons observer que si $E_1 \subset E_2$ alors tout ouvert V contenant E_2 contiendra aussi E_1 . Nous avons alors

$$\text{cap}_p(E_1) = \inf\{\text{cap}_p(U) \mid U \text{ est ouvert et } E_1 \subset U\} \leq \text{cap}_p(V)$$

ce qui implique en prenant l'infimum par rapport à tout ouvert contenant E_2 que $\text{cap}_p(E_1) \leq \text{cap}_p(E_2)$.

La condition C4 est elle aussi satisfaite par la capacité p -variationnelle. Pour le démontrer, nous pouvons utiliser directement la définition sur les compacts donnée par (1.1), c'est d'ailleurs la démarche qui est suivie dans [9]. Nous allons ici donner une preuve différente qui utilisera la forme particulière de l'extension de cette capacité sur les sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$.

Avant de montrer ceci, nous précisons le vocabulaire que nous utiliserons dans la suite. Étant donné que la capacité de $E \subset \mathbb{R}^N$ est calculée en approchant cet ensemble par l'extérieur, celle-ci est appelée capacité régulière extérieure. De manière analogue, nous pouvons définir la régularité intérieure.

Définition 1.5. *Une application $\text{cap} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ est appelée régulière extérieure si pour tout $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ nous avons*

$$\text{cap}(E) = \inf\{\text{cap}(U) \mid U \text{ est ouvert et } E \subset U\}.$$

Similairement, cette application est dite régulière intérieure si pour tout $E \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ nous avons

$$\text{cap}(E) = \inf\{\text{cap}(K) \mid K \text{ est compact et } K \subset E\}$$

Nous allons montrer que toute capacité régulière extérieure (et donc en particulier la capacité p -variationnelle) satisfait la condition C4.

Proposition 1.6. *Si $\text{cap} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ est une application régulière extérieure, alors pour toute suite décroissante de compacts $(K_n)_{n \geq 1}$ dans $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ nous avons*

$$\text{cap}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}(K_n).$$

La preuve de ce résultat reposera sur le lemme topologique suivant.

Lemme 1.7. Soient $(K_n)_{n \geq 1}$ une suite décroissante de sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^N$ et U un ensemble ouvert. Si U contient $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$, alors il existe $n_0 \geq 1$ tel que $K_n \subset U$ pour tout $n \geq n_0$.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il n'existe pas de $n \geq 1$ tel que $K_n \subset U$. Nous pouvons alors construire une suite $(x_n)_{n \geq 1}$ telle que $x_n \in K_n \cap U^c$. Puisque les K_n forment une suite décroissante, cette suite est contenue dans K_1 et par compacité nous pouvons extraire une sous-suite $(x_{n_k})_{k \geq 1}$ convergeant vers $x \in K \cap U^c$. Cela implique alors que $K \cap U^c \neq \emptyset$ et donc $K \not\subset U$ ce qui est absurde. $\square$

Démonstration de la proposition 1.6. Puisque cap est régulière extérieure, elle est monotone et nous avons donc pour $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$

$$\text{cap}(K) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}(K_n).$$

Pour montrer l'inégalité inverse, prenons $\varepsilon > 0$ et U un ouvert contenant K avec $\text{cap}(U) \leq \text{cap}(K) + \varepsilon$. La suite de compact étant décroissante, le lemme 1.7 nous permet de trouver $n_0 \geq 1$ tel que $K_n \subset U$ pour tout $n \geq n_0$. Dès lors, par monotonie nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}(K_n) \leq \text{cap}(K). \quad \square$$

Pour établir les autres conditions de la définition 1.1 nous allons montrer que la capacité p -variationnelle satisfait une autre propriété appelée *sous-additivité forte* : pour E_1 et E_2 des sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$ nous avons

$$\text{cap}_p(E_1 \cup E_2) + \text{cap}_p(E_1 \cap E_2) \leq \text{cap}_p(E_1) + \text{cap}_p(E_2).$$

Nous montrerons tout d'abord que cette inégalité est vérifiée sur les compacts, nous déduirons ensuite le cas général en utilisant l'extension définie par (1.3).

Dans le cas où E_1 et E_2 sont des ensembles compacts, nous désirons montrer dans un premier temps que si $u_1 \in \mathcal{D}(E_1)$ et $u_2 \in \mathcal{D}(E_2)$, alors $\max(u_1, u_2)$ et $\min(u_1, u_2)$ appartiennent aux ensembles $\mathcal{D}(E_1 \cup E_2)$ et $\mathcal{D}(E_1 \cap E_2)$ respectivement, ceci nous permettra de déduire la sous-additivité forte. Il n'y a cependant pas de grand espoir de montrer ceci étant donné que le maximum de deux fonctions dérivables n'est en général pas dérivable (on peut par exemple penser aux fonctions $u(x) = x$ et $v(x) = -x$ qui sont dérivables contrairement à $\max(u, v) = |x|$). Pour pallier ce problème, nous allons montrer que nous pouvons travailler avec des fonctions moins régulières dans la définition de la capacité p -variationnelle. Nous aurons besoin pour cela de certaines notions d'analyse fonctionnelle que nous rappelons maintenant.

Pour $1 \leq p < +\infty$ et U un ouvert de $\mathbb{R}^N$, on désigne par $\mathcal{L}^p(U)$ l'ensemble des fonctions $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ mesurables et telle que

$$\int_U |u|^p dx < +\infty.$$

On définit ensuite les espaces de Lebesgue en posant $L^p(U) = \frac{\mathcal{L}^p(U)}{\sim}$ où $\sim$ est la relation d'équivalence d'égalité presque partout. Bien qu'un élément de L^p soit une classe d'équivalence, pour des raisons de commodité nous identifierons toujours une fonction avec sa classe. Ceci nous permettra de travailler avec des fonctions concrètes tout en bénéficiant des propriétés de ces classes. Si on munit $L^p(U)$ de la norme

$$\|u\|_{L^p(U)} = \left(\int_U |u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$$

alors $(L^p(U), \|\cdot\|_{L^p(U)})$ forme un espace normé et complet [22, Theorem 4.2.9]. Nous dirons qu'une fonction $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ est p -intégrable si $u \in L^p(U)$ (ou plus simplement intégrable dans le cas où $p = 1$). Par exemple, toute fonction lisse à support compact est p -intégrable. En effet, toute fonction continue sur un compact étant bornée, nous avons pour $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx = \int_{\text{supp}(u)} |u|^p dx \leq C \mu(\text{supp}(u)) < +\infty$$

de sorte que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset L^p(\mathbb{R}^N)$. L'argument utilisé ici repose essentiellement sur le fait que notre fonction s'annule en dehors d'un compact. En général même des fonctions suffisamment régulières ne seront pas intégrables, particulièrement quand nous travaillons sur des domaines non-bornés comme $\mathbb{R}^N$. Nous pouvons cependant donner une notion plus faible d'intégrabilité en définissant l'intégrabilité locale : nous dirons que u est localement intégrable si $u \in L^p(V)$ pour tout $V \Subset U$ (c'est-à-dire pour tout ouvert V avec $\bar{V} \subset U$), nous noterons $L_{\text{loc}}^p(U)$ l'ensemble de ces fonctions.

Nous avons défini ci-dessus les normes L^p pour $1 \leq p < +\infty$, nous pouvons aussi donner une définition pour le cas $p = \infty$ en posant

$$\|u\|_{L^\infty(U)} = \inf\{M \mid |u(x)| \leq M \text{ pour presque tout } x \in U\}.$$

De plus, nous pouvons définir

$$L^\infty(U) = \{u : U \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ est mesurable et } \exists M \geq 0 \text{ tel que } |u| \leq M \text{ presque partout}\}.$$

Nous introduisons maintenant un autre espace fonctionnel qui aura une importance capitale dans la suite : les espaces de Sobolev. Ceux-ci sont définis comme l'espace des fonctions intégrables avec dérivée (dans un sens qu'il faudra définir) intégrable. Étant donné que toutes les fonctions p -intégrable ne sont pas continues (on peut par

exemple penser à la fonction $\chi_{\mathbb{Q}} \in L^p(\mathbb{R}^N)$, nous ne pouvons généralement pas parler de dérivabilité des fonctions vivant dans les espaces de Lebesgue et nous devons donc trouver une notion de dérivée adaptée pour ces dernières. Remarquons pour cela que si $u \in \mathcal{C}^1(U)$, nous avons pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ et pour $1 \leq k \leq N$

$$\int_U u \partial_k \varphi dx = - \int_U (\partial_k u) \varphi dx \quad (1.5)$$

où ∂_k désigne la k -ième dérivée partielle. En effet, en posant pour $x \in \mathbb{R}^N$

$$v(x) = \begin{cases} u(x) \varphi(x) & \text{si } x \in U \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

nous avons par le théorème fondamental de l'analyse pour tout $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$

$$\int_{\mathbb{R}} \partial_N v(x', x_N) dx_N = 0.$$

Donc, par la formule de dérivation du produit et le théorème de Fubini

$$\int_{\mathbb{R}^N} (u(\partial_N \varphi) + (\partial_N u) \varphi) dx = \int_{\mathbb{R}^N} \partial_N v dx = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \int_{\mathbb{R}} \partial_N v(x', x_N) dx_N dx' = 0.$$

Cela montre (1.5) pour la N -ième dérivée partielle, l'argument pour $1 \leq k \leq N-1$ est similaire. Ceci motive la définition suivante : la dérivée faible par rapport à la k -ième variable d'une fonction $u \in L_{\text{loc}}^1(U)$ (si elle existe) est une fonction $v \in L_{\text{loc}}^1(U)$ telle que pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$

$$\int_U u \partial_k \varphi dx = - \int_U v \varphi dx.$$

Observons que si la fonction v existe, alors elle est unique. En effet, s'il existe une fonction w satisfaisant la même propriété que v , nous avons

$$\int_U v \varphi dx = \int_U w \varphi dx \iff \int_U (v - w) \varphi dx = 0.$$

Cette égalité étant valable pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$, on déduit du théorème d'annulation [22, Theorem 4.3.10] que $v - w = 0$ et donc $v = w$ presque partout. Cela a donc bien du sens de parler de la dérivée faible de u et nous écrirons $v = \partial_k u$ la dérivée faible de cette fonction par rapport à la k -ième variable, le gradient faible quant à lui sera noté $\nabla u = (\partial_1 u, \dots, \partial_N u)$. Remarquons que la notion de dérivée faible correspond à la dérivée au sens classique (et donc le gradient faible correspond au gradient usuel) lorsque l'on travaille avec des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Nous pouvons maintenant définir les espaces de Sobolev par

$$W^{1,p}(U) = \{u \in L^p(U) \mid \partial_k u \text{ existe et } \partial_k u \in L^p(U) \text{ pour tout } 1 \leq k \leq N\}.$$

Tout comme pour les espaces de Lebesgue, deux fonctions égales presque partout seront identifiées dans les espaces de Sobolev. On munit cet espace de la norme $\|\cdot\|_{W^{1,p}(U)}$ définie par

$$\|u\|_{W^{1,p}(U)}^p = \|u\|_{L^p(U)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(U,\mathbb{R}^N)}^p$$

où

$$\|\nabla u\|_{L^p(U,\mathbb{R}^N)}^p = \int_U |\nabla u|^p dx = \int_U \left| \sum_{n=1}^N (\partial_k u)^2 \right|^{\frac{p}{2}} dx.$$

Proposition 1.8. *Pour $1 \leq p < +\infty$ les espaces de Sobolev $W^{1,p}(U)$ munis de la norme $\|\cdot\|_{W^{1,p}(U)}$ forment un espace vectoriel normé et complet.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que $W^{1,p}(U)$ est stable par combinaison linéaire. Soient $u, v \in W^{1,p}(U)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, nous avons pour $1 \leq k \leq N$

$$\begin{aligned} \int_U (\lambda u + \mu v) \partial_k \varphi dx &= \lambda \int_U u \partial_k \varphi dx + \mu \int_U v \partial_k \varphi dx \\ &= -\lambda \int_U (\partial_k u) \varphi dx - \mu \int_U (\partial_k v) \varphi dx \\ &= - \int_U (\lambda \partial_k u + \mu \partial_k v) \varphi dx \end{aligned}$$

ce qui implique que $\partial_k(\lambda u + \mu v) = \lambda \partial_k u + \mu \partial_k v$. Dès lors, puisque $\lambda u + \mu v \in L^p(U)$ et $\partial_k(\lambda u + \mu v) \in L^p(U)$, on en déduit que $\lambda u + \mu v \in W^{1,p}(U)$ ce qui montre la stabilité.

Le fait que $\|\cdot\|_{W^{1,p}(U)}$ soit une norme suit directement des propriétés de la norme L^p , seule l'inégalité de Minkowski nécessite un argument. En utilisant que cette inégalité est satisfaite pour $\|\cdot\|_{L^p(U)}$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \|u + v\|_{W^{1,p}(U)} &= (\|u + v\|_{L^p(U)}^p + \|\nabla u + \nabla v\|_{L^p(U,\mathbb{R}^N)}^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq ((\|u\|_{L^p(U)} + \|v\|_{L^p(U)})^p + (\|\nabla u\|_{L^p(U,\mathbb{R}^N)} + \|\nabla v\|_{L^p(U,\mathbb{R}^N)})^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq (\|u\|_{L^p(U)}^p + \|\nabla u\|_{L^p(U,\mathbb{R}^N)}^p)^{\frac{1}{p}} + (\|v\|_{L^p(U)}^p + \|\nabla v\|_{L^p(U,\mathbb{R}^N)}^p)^{\frac{1}{p}} \\ &= \|u\|_{W^{1,p}(U)} + \|v\|_{W^{1,p}(U)} \end{aligned}$$

ce qui montre l'inégalité de Minkowski pour les espaces de Sobolev.

Nous terminons par montrer que les espaces de Sobolev sont complets. Prenons $(u_n)_{n \geq 1}$ une suite de Cauchy dans $W^{1,p}(U)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ nous pouvons trouver $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $m, n \geq n_0$

$$\left(\int_U (|u_n - u_m|^p + |\nabla(u_n - u_m)|^p) dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq \varepsilon.$$

En particulier, cela implique que les suites $(u_n)_{n \geq 1}$ et $(\nabla u_n)_{n \geq 1}$ sont de Cauchy dans $L^p(U)$ et $L^p(U, \mathbb{R}^N)$ respectivement. Par complétude des espaces de Lebesgue nous pouvons trouver $u \in L^p(U)$ et $v \in L^p(U, \mathbb{R}^N)$ tels que dans ces espaces nous avons

$$u_n \rightarrow u \quad \text{et} \quad \nabla u_n \rightarrow v.$$

Montrons que $\nabla u = v$. Pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(U)$ nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^N} u \partial_k \varphi dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} u_n \partial_k \varphi dx = - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} \partial_k u_n \varphi dx = - \int_{\mathbb{R}^N} \partial_k u \varphi dx.$$

Par unicité nous déduisons que $\nabla u = v \in L^p(U, \mathbb{R}^N)$ ce qui montre que $u \in W^{1,p}(U)$ et donc que les espaces de Sobolev sont complets. $\square$

Après ce détour dans le monde de l'analyse fonctionnelle, revenons à l'étude de la capacité p -variationnelle. Rappelons que sur les compacts, celle-ci est définie en prenant l'infimum sur un ensemble de fonctions infiniment continûment différentiables. Nous allons montrer que cette condition peut être remplacée par celle de différentiabilité faible sans affecter la valeur de la capacité. Plus précisément, si on pose pour K compact

$$\overline{\mathcal{D}}(K) = \{u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N) \mid u \geq 1 \text{ sur } K\},$$

alors nous avons le résultat suivant.

Proposition 1.9. *Pour $1 \leq p < +\infty$ et K un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^N$*

$$\inf_{u \in \mathcal{D}(K)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx = \inf_{u \in \overline{\mathcal{D}}(K)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx.$$

Nous allons montrer que le membre de gauche est à la fois supérieur et inférieur au membre de droite, cela nous permettra de déduire qu'il y a effectivement égalité. Il n'est pas difficile de montrer l'inégalité $\leq$, il suffit d'observer que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Pour l'inégalité inverse nous aurons besoin d'approximer des fonctions de Sobolev par des fonctions lisses à support compact, nous utiliserons pour cela le principe de régularisation par convolution. Définissons pour $x \in \mathbb{R}^N$

$$\rho(x) = \begin{cases} C^{-1} \exp(\frac{1}{|x|^2-1}) & \text{si } |x| < 1 \\ 0 & \text{si } |x| \geq 1 \end{cases} \quad (1.6)$$

où $C > 0$ est une constante choisie telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho(x) dx = 1.$$

On pose ensuite pour tout $n \geq 1$, $\rho_n(x) = n^N \rho(nx)$. Il suit de la définition de ρ_n que $\text{supp}(\rho_n) = B[0, \frac{1}{n}]$ et $\rho_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. La suite $(\rho_n)_{n \geq 1}$ est appelée suite régularisante,

elle permet en effet de régulariser, de rendre plus lisse une fonction intégrable comme l'affirme le théorème suivant.

Théorème 1.10. [22, Theorem 4.3.9]

1. Si $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, alors $\rho_n * u \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$.
2. Si $u \in L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ pour $1 \leq p < +\infty$, alors $\rho_n * u \rightarrow u$ dans $L^p_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$, c'est-à-dire $\rho_n * u \rightarrow u$ dans $L^p(V)$ pour tout $V \Subset \mathbb{R}^N$.
3. Si $u \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R}^N)$, alors $\rho_n * u \rightarrow u$ uniformément sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^N$.

En d'autres mots, convoluer une fonction intégrable avec ρ_n nous donne une fonction lisse permettant d'approximer localement la fonction initiale dans les espaces de Lebesgue. Nous montrons dans la proposition suivante que nous pouvons rendre cette convergence globale.

Proposition 1.11. Pour $1 \leq p < +\infty$ et $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$, nous avons $\rho_n * u \rightarrow u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration. Observons tout d'abord que si $w \in L^p(\mathbb{R}^N)$ alors

$$\|\rho_n * w\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|w\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}. \quad (1.7)$$

En effet, il suit de l'inégalité de Hölder que

$$|(\rho_n * w)(x)| = \left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)w(y)dy \right| \leq \left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)|w(y)|^p dy \right|^{\frac{1}{p}}.$$

Dès lors, on obtient par le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} |(\rho_n * w)(x)|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)|w(y)|^p dy dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x-y)|w(y)|^p dx dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |w(y)|^p dy \end{aligned}$$

ce qui montre que $\|\rho_n * w\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|w\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$.

Prenons maintenant $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $\varepsilon > 0$. Puisque $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ [3, Théorème IV.12], nous pouvons trouver $v \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^N)$ tel que

$$\|u - v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon.$$

Par le théorème 1.10, nous avons $\rho_n * v \rightarrow v$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ et il existe donc $n_0 \geq 1$ tel que

$$\|\rho_n * v - v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon$$

pour tout $n \geq n_0$. Dès lors en utilisant (1.7) avec $w = u - v$ nous obtenons pour tout $n \geq n_0$

$$\|u - \rho_n * u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|u - v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|v - \rho_n * v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} + \|\rho_n * (u - v)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq 3\varepsilon.$$

□

Nous pouvons donc approcher une fonction p -intégrable par une fonction lisse dans les espaces de Lebesgue, nous montrons maintenant que cela est aussi possible dans les espaces de Sobolev.

Proposition 1.12. *Pour $1 \leq p < +\infty$ et $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, il existe une suite $(u_n)_{n \geq 1}$ avec $u_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.*

Démonstration. Nous procédons en plusieurs étapes, tout d'abord nous montrons qu'une fonction de Sobolev peut être approximée par une fonction lisse, nous utiliserons ensuite la troncature pour approcher cette dernière par une fonction lisse à support compact.

Etape 1 : régularisation

Prenons $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et posons $u_n = \rho_n * u$. Nous avons alors par le théorème 1.10 et la proposition 1.11 que $u_n \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $u_n \rightarrow u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. En utilisant la définition de dérivée faible nous obtenons

$$\begin{aligned} \partial_k(\rho_n * u)(x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \partial_k^x \rho_n(x - y) u(y) dy \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} \partial_k^y \rho_n(x - y) u(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \rho_n(x - y) \partial_k^y u(y) dy \\ &= (\rho_n * \partial_k u)(x). \end{aligned}$$

Donc, puisque $\partial_k u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ nous avons $\partial_k u_n = \rho_n * \partial_k u \rightarrow \partial_k u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. On en déduit alors que $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Etape 2 : troncature

Soit $\theta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$ tel que $0 \leq \theta \leq 1$ et

$$\theta(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t \leq 1 \\ 0 & \text{si } t \geq 2 \end{cases}.$$

Prenons $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ et posons pour $x \in \mathbb{R}^N$, $\theta_n(x) = \theta\left(\frac{|x|}{n}\right)$. On remarque alors que $\theta_n v \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et que $\theta_n v \rightarrow v$ ponctuellement sur $\mathbb{R}^N$. Puisque $0 \leq \theta_n \leq 1$ nous avons $|v - \theta_n v|^p \leq |v|^p |1 - \theta_n|^p \leq 2^p |v|^p$ et la fonction $2^p |v|^p$ étant intégrable nous obtenons par le théorème de convergence dominée de Lebesgue

$$\|v - \theta_n v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \rightarrow 0.$$

De plus, puisque $\nabla \theta_n(x) = \theta'\left(\frac{|x|}{n}\right) \frac{x}{n|x|}$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\nabla(v - \theta_n v)\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} &= \|\nabla v - (\nabla \theta_n)v - \theta_n \nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|\nabla v - \theta_n \nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} + \|(\nabla \theta_n)v\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} \\ &= \|\nabla v - \theta_n \nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} + \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left| \frac{1}{n} \theta'\left(\frac{|x|}{n}\right) \right|^p |v(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \|\nabla v - \theta_n \nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} + \frac{1}{n} \|\theta'\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} \|v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

Dès lors, nous avons $\theta_n v \rightarrow v$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ ce qui implique que $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ est dense dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Etape 3 : conclusion

Prenons $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et $\varepsilon > 0$. Par l'étape 1, il existe $v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ tel que $\|u - v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon$. De plus, par l'étape 2, il existe $w \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ tel que $\|v - w\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon$. Dès lors,

$$\|u - w\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq \|u - v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} + \|v - w\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq 2\varepsilon. \quad \square$$

Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaire pour redéfinir la capacité p -variationnelle.

Démonstration de la proposition 1.9. De l'inclusion $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N) \subset W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, il suit que $\mathcal{D}(K) \subset \overline{\mathcal{D}}(K)$. Dès lors, si $v \in \mathcal{D}(K)$

$$\inf_{u \in \overline{\mathcal{D}}(K)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p dx$$

et une minimisation du côté droit par rapport à toutes fonctions dans $\mathcal{D}(K)$ nous donne

$$\inf_{u \in \overline{\mathcal{D}}(K)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \leq \inf_{u \in \mathcal{D}(K)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx. \quad (1.8)$$

Dans l'autre sens, prenons $v \in \overline{\mathcal{D}}(K)$ et supposons dans un premier temps que $v = 1$ sur un voisinage U de K avec $U \Subset \mathbb{R}^N$. Prenons $\eta \in \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec $\eta = 1$ sur $\mathbb{R}^N \setminus U$ et

$\eta = 0$ sur un voisinage de K . De plus, on choisit $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ convergeant vers v dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ qui existe par la proposition 1.12.

Posons $\psi_n = 1 - \eta(1 - \varphi_n)$, nous avons alors que $\psi_n \in \mathcal{D}(K)$ car $\eta = 0$ sur un voisinage de K . De plus, $\psi_n \rightarrow v$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. En effet, puisque $v = 1$ sur U nous avons

$$\begin{aligned}
\|\psi_n - v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |\psi_n - v|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N \setminus U} |1 - \eta(1 - \varphi_n) - v|^p dx + \int_U |1 - \eta(1 - \varphi_n) - v|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N \setminus U} |\varphi_n - v|^p dx + \int_U |\eta|^p |1 - \varphi_n|^p dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus U} |\varphi_n - v|^p dx + \|\eta\|_{L^\infty(U)}^p \int_U |v - \varphi_n|^p dx \\
&\leq (1 + \|\eta\|_{L^\infty(U)}^p) \int_{\mathbb{R}^N} |v - \varphi_n|^p dx \\
&\rightarrow 0.
\end{aligned}$$

De plus, puisque $\nabla \psi_n = -\nabla \eta(1 - \varphi_n) + \eta \nabla \varphi_n$ et que $v = 1$ sur U et $\eta = 1$ sur $\mathbb{R}^N \setminus U$ nous obtenons par l'inégalité de Minkowski

$$\begin{aligned}
\|\nabla \psi_n - \nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \psi_n - \nabla v|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N \setminus U} |\nabla \varphi_n - \nabla v|^p dx + \int_U |\nabla \eta(1 - \varphi_n) - \eta \nabla \varphi_n|^p dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N \setminus U} |\nabla \varphi_n - \nabla v|^p dx + \|\nabla \eta(1 - \varphi_n) - \eta \nabla \varphi_n\|_{L^p(U)}^p \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus U} |\nabla \varphi_n - \nabla v|^p dx \\
&\quad + \left[\left(\int_U |\nabla \eta|^p |1 - \varphi_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_U |\eta|^p |\nabla \varphi_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N \setminus U} |\nabla \varphi_n - \nabla v|^p dx \\
&\quad + \left[\|\nabla \eta\|_{L^\infty(U)} \left(\int_U |v - \varphi_n|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right. \\
&\quad \left. + \|\eta\|_{L^\infty(U)} \left(\int_U |\nabla \varphi_n - \nabla v|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \right]^p \\
&\rightarrow 0.
\end{aligned}$$

Ceci nous permet de conclure que $\psi_n \rightarrow v$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$.

Dans le cas général, considérons pour tout $m \geq 1$ l'ouvert

$$U_m = \left\{ x \in \mathbb{R}^N \mid v(x) > 1 - \frac{1}{m} \right\}.$$

Nous avons alors que $U = \bigcup_{m=1}^{\infty} U_m$ est un ouvert tel que $K \subset U \Subset \mathbb{R}^N$. De plus, par le théorème de convergence dominée de Lebesgue nous obtenons

$$\begin{aligned} \|\psi_n - v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} &= \|\psi_n - v\|_{W^{1,p}(U)} + \|\psi_n - v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N \setminus U)} \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \left\| \psi_n - \frac{v}{1 - 1/m} \right\|_{W^{1,p}(U)} + \|\psi_n - v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N \setminus U)} \\ &\leq \|\psi_n - 1\|_{W^{1,p}(U)} + \|\psi_n - v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N \setminus U)} \end{aligned}$$

et le cas précédent nous permet de déduire que le membre de droite converge vers 0 quand $n \rightarrow \infty$.

Puisque pour $v \in \overline{\mathcal{D}}(K)$ nous pouvons trouver une suite $(\psi_n)_{n \geq 1}$ dans $\mathcal{D}(K)$ telle que $\psi_n \rightarrow v$ dans $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ nous avons

$$\begin{aligned} \inf_{u \in \mathcal{D}(K)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \psi_n|^p dx \\ &= \|\nabla \psi_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)}^p \\ &\leq (\|\nabla \psi_n - \nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)} + \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)})^p \\ &\leq (\|\psi_n - v\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} + \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)})^p \\ &\rightarrow \|\nabla v\|_{L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)}^p \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla v|^p dx. \end{aligned}$$

En maximisant le côté droit par rapport à toute fonction dans $\overline{\mathcal{D}}(K)$ nous déduisons que

$$\inf_{u \in \mathcal{D}(K)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx \leq \inf_{u \in \overline{\mathcal{D}}(K)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx. \quad (1.9)$$

En combinant (1.8) et (1.9) nous obtenons le résultat. $\square$

Revenons à l'idée de la preuve de la sous-additivité forte de la capacité p -variationnelle. Grâce à la proposition précédente, la stratégie que nous avons donnée peut se reformuler comme suit : si $u_1 \in \overline{\mathcal{D}}(E_1)$ et $u_2 \in \overline{\mathcal{D}}(E_2)$ avec E_1 et E_2 compacts, nous désirons montrer que $\max(u_1, u_2)$ et $\min(u_1, u_2)$ appartiennent à $\overline{\mathcal{D}}(E_1 \cup E_2)$ et à $\overline{\mathcal{D}}(E_1 \cap E_2)$ respectivement. Pour ce faire, nous aurons besoin d'étudier la dérivée faible d'une composition.

Proposition 1.13. *Soient $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ tel que $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ et $f(0) = 0$. Alors $f \circ u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et pour $1 \leq k \leq N$, $\partial_k(f \circ u) = (f' \circ u) \partial_k u$.*

Démonstration. Montrons tout d'abord que $f \circ u \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Par le théorème des accroissements finis, pour $t \in \mathbb{R}$ il existe $c \in]0, t[$ tel que

$$|f(t)| = |f(t) - f(0)| = |f'(c)| \cdot |t - 0| \leq \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |t|$$

et donc $|f \circ u| \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})} |u|$. Dès lors,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f \circ u|^p dx \leq \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^p \int_{\mathbb{R}^N} |u|^p dx < +\infty$$

car $u \in L^p(\mathbb{R}^N)$. De plus, $(f' \circ u) \partial_k u \in L^p(\mathbb{R}^N)$ car

$$\int_{\mathbb{R}^N} |(f' \circ u) \partial_k u|^p dx \leq \|f'\|_{L^\infty(\mathbb{R})}^p \int_{\mathbb{R}^N} |\partial_k u|^p dx < +\infty$$

où nous avons utilisé que $\partial_k u \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

Il reste à vérifier que $\partial_k(f \circ u) = (f' \circ u) \partial_k u$. Soient $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et U un ouvert tel que $\text{supp}(\varphi) \subset U \Subset \mathbb{R}^N$. Par la proposition 1.12 nous pouvons trouver une suite de fonctions lisses à support compact $(u_n)_{n \geq 1}$ telle que $u_n \rightarrow u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ et $\nabla u_n \rightarrow \nabla u$ dans $L^p(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$. De plus, quitte à passer à une sous-suite, nous pouvons supposer que $u_n \rightarrow u$ ponctuellement presque partout sur $\mathbb{R}^N$.

Observons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_U (f \circ u_n) \partial_k \varphi dx = \int_U (f \circ u) \partial_k \varphi dx. \quad (1.10)$$

En effet, par le théorème des accroissements finis nous avons

$$\begin{aligned} \|(f \circ u_n) \partial_k \varphi - (f \circ u) \partial_k \varphi\|_{L^p(U)}^p &= \int_U |(f \circ u_n) \partial_k \varphi - (f \circ u) \partial_k \varphi|^p dx \\ &\leq \|\partial_k \varphi\|_{L^\infty(U)}^p \int_U |f \circ u_n - f \circ u|^p dx \\ &\leq \|\partial_k \varphi\|_{L^\infty(U)}^p \|f'\|_{L^\infty(U)}^p \|u_n - u\|_{L^p(U)}^p \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

Dès lors, en utilisant l'inégalité de Hölder nous obtenons

$$\|(f \circ u_n) \partial_k \varphi - (f \circ u) \partial_k \varphi\|_{L^1(U)} \leq \mu(U)^{1-\frac{1}{p}} \|(f \circ u_n) \partial_k \varphi - (f \circ u) \partial_k \varphi\|_{L^p(U)} \rightarrow 0$$

ce qui montre (1.10).

De plus,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_U (f' \circ u_n) (\partial_k u_n) \varphi dx = \int_U (f' \circ u) (\partial_k u) \varphi dx. \quad (1.11)$$

Pour voir cela, nous avons par l'inégalité de Minkowski

$$\begin{aligned} \|(f' \circ u_n)(\partial_k u_n)\varphi - (f' \circ u)(\partial_k u)\varphi\|_{L^1(U)} &\leq \|(f' \circ u_n)(\partial_k u_n)\varphi - (f' \circ u)(\partial_k u_n)\varphi\|_{L^1(U)} \\ &\quad + \|(f' \circ u)(\partial_k u_n)\varphi - (f' \circ u)(\partial_k u)\varphi\|_{L^1(U)}. \end{aligned}$$

En posant $C = \sup_{n \geq 1} \|\partial_k u_n\|_{L^\infty(U)}$ et en utilisant le théorème de convergence dominée nous obtenons

$$\begin{aligned} \|(f' \circ u_n)(\partial_k u_n)\varphi - (f' \circ u)(\partial_k u_n)\varphi\|_{L^1(U)} &= \int_U |(f' \circ u_n)(\partial_k u_n)\varphi - (f' \circ u)(\partial_k u_n)\varphi| dx \\ &\leq C \|\varphi\|_{L^\infty(U)} \int_U |f' \circ u_n - f' \circ u| dx \\ &\rightarrow 0. \end{aligned}$$

En utilisant à nouveau l'inégalité de Hölder nous avons

$$\begin{aligned} \|(f' \circ u)(\partial_k u_n)\varphi - (f' \circ u)(\partial_k u)\varphi\|_{L^1(U)} &= \int_U |(f' \circ u)(\partial_k u_n)\varphi - (f' \circ u)(\partial_k u)\varphi| dx \\ &\leq \|\varphi\|_{L^\infty(U)} \int_U |f' \circ u| |\partial_k u_n - \partial_k u| dx \\ &\leq \|\varphi\|_{L^\infty(U)} \|f'\|_{L^\infty(U)} \|\nabla(u_n - u)\|_{L^1(U, \mathbb{R}^N)} \\ &\leq \mu(U)^{1-\frac{1}{p}} \|\varphi\|_{L^\infty(U)} \|f'\|_{L^\infty(U)} \|\nabla u_n - \nabla u\|_{L^p(U, \mathbb{R}^N)} \\ &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

ce qui nous permet de déduire l'égalité (1.11).

Dès lors, en utilisant les équations (1.10) et (1.11) nous obtenons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} (f \circ u) \partial_k \varphi dx &= \int_U (f \circ u) \partial_k \varphi dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_U (f \circ u_n) \partial_k \varphi dx \\ &= - \lim_{n \rightarrow \infty} \int_U (f' \circ u_n) (\partial_k u_n) \varphi dx \\ &= - \int_U (f' \circ u) (\partial_k u) \varphi dx \\ &= - \int_{\mathbb{R}^N} (f' \circ u) (\partial_k u) \varphi dx \end{aligned}$$

ce qui montre que $\partial_k(f \circ u) = (f' \circ u) \partial_k u$. □

Nous allons maintenant utiliser cette proposition pour calculer le gradient faible de la fonction $u^+ = \max(0, u)$.

Proposition 1.14. Si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, alors $u^+ \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ et presque partout sur $\mathbb{R}^N$

$$\nabla u^+ = \begin{cases} \nabla u & \text{si } u > 0 \\ 0 & \text{si } u \leq 0 \end{cases} . \quad (1.12)$$

De plus, $\nabla u = 0$ presque partout sur $\{u = 0\}$.

Démonstration. Fixons $\varepsilon > 0$ et définissons

$$v_\varepsilon(t) = \begin{cases} (t^2 + \varepsilon^2)^{\frac{1}{2}} - \varepsilon & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} .$$

On remarque alors que $v_\varepsilon \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ avec

$$v'_\varepsilon(t) = \begin{cases} \frac{t}{\sqrt{t^2 + \varepsilon^2}} & \text{si } t > 0 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et nous avons donc $v'_\varepsilon \in L^\infty(\mathbb{R})$. Donc, en utilisant la proposition précédente nous obtenons pour tout $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et pour $1 \leq k \leq N$

$$\int_{\mathbb{R}^N} (v_\varepsilon \circ u) \partial_k \varphi dt = - \int_{\mathbb{R}^N} (v'_\varepsilon \circ u) (\partial_k u) \varphi dt.$$

Puisque $v_\varepsilon \circ u \rightarrow u^+$ et $v'_\varepsilon \circ u \rightarrow \chi_{\{u>0\}}$ ponctuellement quand $\varepsilon \rightarrow 0$ nous obtenons par le théorème de convergence dominée

$$\int_{\mathbb{R}^N} u^+ \partial_k \varphi dx = - \int_{\mathbb{R}^N} (\partial_k u) \chi_{\{u>0\}} \varphi dx.$$

Par unicité on déduit que $\partial_k u^+ = (\partial_k u) \chi_{\{u>0\}}$ ce qui montre (1.12).

Il reste à calculer le gradient de la fonction u sur l'ensemble $\{u = 0\}$. Posons pour cela $u^- = \min(0, u)$ et observons que $u^- = -(u^+)$ de sorte que

$$\nabla u^- = \begin{cases} 0 & \text{si } u \geq 0 \\ -\nabla u & \text{si } u < 0 \end{cases} .$$

Donc, $\nabla u = 0$ presque partout sur $\{u = 0\}$ car $\nabla u = \nabla u^+ - \nabla u^-$. □

Si $u, v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, alors puisque $\max(u, v) = (u - v)^+ + v$ et $\min(u, v) = u - (u - v)^+$, nous avons que $\max(u, v), \min(u, v) \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ avec

$$\nabla \max(u, v) = \begin{cases} \nabla u & \text{si } u \geq v \\ \nabla v & \text{si } u \leq v \end{cases} \quad (1.13)$$

et

$$\nabla \min(u, v) = \begin{cases} \nabla v & \text{si } u \geq v \\ \nabla u & \text{si } u \leq v \end{cases} . \quad (1.14)$$

Cela implique en particulier que si $u_1 \in \overline{\mathcal{D}}(K_1)$ et $u_2 \in \overline{\mathcal{D}}(K_2)$, alors les fonctions $\max(u_1, u_2) \in \overline{\mathcal{D}}(K_1 \cup K_2)$ et $\min(u_1, u_2) \in \overline{\mathcal{D}}(K_1 \cap K_2)$. Nous avons maintenant tous les ingrédients nécessaires pour démontrer la sous-additivité forte sur les ensembles compacts. Pour déduire que cette propriété est aussi satisfaite sur les ouverts, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 1.15. *Soient U_1 et U_2 des sous-ensembles ouverts de $\mathbb{R}^N$ et K un compact tel que $K \subset U_1 \cup U_2$. Il existe alors des compacts K_1 et K_2 tels que $K_n \subset U_n$ pour $n \in \{1, 2\}$ et $K \subset K_1 \cup K_2$.*

Démonstration. Considérons les compacts disjoints $L_1 = K \setminus U_2$ et $L_2 = K \setminus U_1$ et montrons qu'il existe deux ouverts U et V avec $L_1 \subset U$, $L_2 \subset V$ et $U \cap V = \emptyset$.

Supposons dans un premier temps que $L_2 = \{b\}$ avec $b \notin L_1$. Si $a \in L_1$, alors $a \neq b$ et il existe donc U_a un voisinage ouvert de a et V_a un voisinage ouvert de b avec $U_a \cap V_a = \emptyset$. Dès lors, la collection $(U_a)_{a \in L_1}$ forme un recouvrement de L_1 par des ouverts et par compacité nous pouvons trouver un sous-recouvrement fini $(U_a)_{a \in \mathcal{E}}$ tel que $L_1 \subset \bigcup_{a \in \mathcal{E}} U_a$.

En définissant

$$U_b = \bigcup_{a \in \mathcal{E}} U_a \quad \text{et} \quad V_b = \bigcap_{a \in \mathcal{E}} V_a,$$

on observe que ces deux ouverts satisfont les conditions requises.

Supposons maintenant que L_2 ne se réduit pas à un singleton. Nous savons que pour chaque $b \in L_2$ nous pouvons trouver des ouverts disjoints U_b et V_b contenant L_1 et $\{b\}$ respectivement. Dès lors, la collection $(V_b)_{b \in L_2}$ forme un recouvrement de L_2 par des ouverts et par compacité de cet ensemble, nous pouvons trouver un ensemble fini $\mathcal{G} \subset L_2$ tel que $L_2 \subset \bigcup_{b \in \mathcal{G}} V_b$. On pose alors

$$U = \bigcap_{b \in \mathcal{G}} U_b \quad \text{et} \quad V = \bigcup_{b \in \mathcal{G}} V_b$$

et ces deux ouverts satisfont les conditions requises. Pour conclure, il suffit de prendre $K_1 = K \setminus V$ et $K_2 = K \setminus U$ et nous obtenons alors deux ensembles compacts tels que $K = K_1 \cup K_2$. $\square$

Nous démontrons maintenant la sous-additivité forte.

Proposition 1.16. *Pour tout $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^N$ nous avons*

$$\text{cap}_p(E_1 \cup E_2) + \text{cap}_p(E_1 \cap E_2) \leq \text{cap}_p(E_1) + \text{cap}_p(E_2).$$

Démonstration. Nous commençons par montrer la sous-additivité forte dans le cas où E_1 et E_2 sont des sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^N$. Si $u_1 \in \overline{\mathcal{D}}(E_1)$ et $u_2 \in \overline{\mathcal{D}}(E_2)$ nous avons en utilisant (1.13) et (1.14),

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \max(u_1, u_2)|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \min(u_1, u_2)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_2|^p dx.$$

Puisque $\max(u_1, u_2) \in \overline{\mathcal{D}}(E_1 \cup E_2)$ et $\min(u_1, u_2) \in \overline{\mathcal{D}}(E_1 \cap E_2)$, nous obtenons

$$\text{cap}_p(E_1 \cup E_2) + \text{cap}_p(E_1 \cap E_2) \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_2|^p dx$$

ce qui montre la sous-additivité forte pour des ensembles compacts puisque les fonctions u_1 et u_2 sont arbitraires.

Considérons maintenant le cas où E_1 et E_2 sont ouverts. Soient L_1 et L_2 des sous-ensembles compacts de $E_1 \cup E_2$ et $E_1 \cap E_2$ respectivement. Par le lemme 1.15 nous pouvons trouver des compacts $K_1 \subset E_1$ et $K_2 \subset E_2$ avec $L_1 \subset K_1 \cup K_2$. De plus, quitte à remplacer K_n par $K_n \cup L_2$ pour $n \in \{1, 2\}$ nous pouvons supposer que $L_2 \subset K_1 \cap K_2$. Nous avons donc par monotonie et en utilisant la sous-additivité forte sur les compacts

$$\begin{aligned} \text{cap}_p(L_1) + \text{cap}_p(L_2) &\leq \text{cap}_p(K_1 \cup K_2) + \text{cap}_p(K_1 \cap K_2) \\ &\leq \text{cap}_p(K_1) + \text{cap}_p(K_2) \\ &\leq \text{cap}_p(E_1) + \text{cap}_p(E_2) \end{aligned}$$

où la dernière inégalité est une conséquence de la définition de la capacité sur les ouverts. Puisque ceci est vrai pour tout compact L_1 et L_2 contenu dans $E_1 \cup E_2$ et $E_1 \cap E_2$ nous déduisons que

$$\text{cap}_p(E_1 \cup E_2) + \text{cap}_p(E_1 \cap E_2) \leq \text{cap}_p(E_1) + \text{cap}_p(E_2).$$

Prenons maintenant E_1 et E_2 des sous-ensembles arbitraires de $\mathbb{R}^N$ et U_1, U_2 des ouverts contenant E_1 et E_2 respectivement. Nous avons alors en utilisant (1.3)

$$\begin{aligned} \text{cap}_p(E_1 \cup E_2) + \text{cap}_p(E_1 \cap E_2) &\leq \text{cap}_p(U_1 \cup U_2) + \text{cap}_p(U_1 \cap U_2) \\ &\leq \text{cap}_p(U_1) + \text{cap}_p(U_2). \end{aligned}$$

Cette estimation étant valable pour tout ouvert contenant E_1 et E_2 , on conclut la preuve en minimisant le côté droit.

□

Remarquons que la propriété de sous-additivité forte implique par récurrence la sous-

additivité finie pour la capacité p -variationnelle :

$$\text{cap}_p\left(\bigcup_{n=1}^m E_n\right) \leq \sum_{n=1}^m \text{cap}_p(E_n).$$

Pour pouvoir déduire la sous-additivité dénombrable nous utiliserons la condition C5, la preuve de cette dernière condition reposera sur l'inégalité suivante.

Corollaire 1.17. *Soit $m \geq 1$ et des suites $(E_n)_{1 \leq n \leq m}$, $(F_n)_{1 \leq n \leq m}$ telles que $F_n \subset E_n$ pour chaque $1 \leq n \leq m$. Alors, si $\text{cap}_p\left(\bigcup_{n=1}^m F_n\right) < +\infty$ on a*

$$\text{cap}_p\left(\bigcup_{n=1}^m E_n\right) - \text{cap}_p\left(\bigcup_{n=1}^m F_n\right) \leq \sum_{n=1}^m (\text{cap}_p(E_n) - \text{cap}_p(F_n)). \quad (1.15)$$

Démonstration. Considérons A, B et C des sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$ avec $C \subset A$. Nous avons par monotonie et sous-additivité forte

$$\begin{aligned} \text{cap}_p(A \cup B) + \text{cap}_p(C) &\leq \text{cap}_p(A \cup (B \cup C)) + \text{cap}_p(A \cap (B \cup C)) \\ &\leq \text{cap}_p(A) + \text{cap}_p(B \cup C) \end{aligned}$$

ou de manière équivalente

$$\text{cap}_p(A \cup B) - \text{cap}_p(B \cup C) \leq \text{cap}_p(A) - \text{cap}_p(C). \quad (1.16)$$

Nous allons utiliser cette estimation pour démontrer (1.15) par récurrence. Le cas $m = 1$ est clairement satisfait, supposons donc que l'inégalité soit vraie pour un certain $m \geq 1$ et montrons là pour $m + 1$. Nous avons

$$\begin{aligned} \text{cap}_p\left(\bigcup_{n=1}^{m+1} E_n\right) - \text{cap}_p\left(\bigcup_{n=1}^{m+1} F_n\right) &= \text{cap}_p\left(\bigcup_{n=1}^m E_n \cup E_{m+1}\right) - \text{cap}_p\left(E_{m+1} \cup \bigcup_{n=1}^m F_n\right) \\ &\quad + \text{cap}_p\left(E_{m+1} \cup \bigcup_{n=1}^m F_n\right) - \text{cap}_p\left(\bigcup_{n=1}^m F_n \cup F_{m+1}\right) \\ &\leq \text{cap}_p\left(\bigcup_{n=1}^m E_n\right) - \text{cap}_p\left(\bigcup_{n=1}^m F_n\right) + \text{cap}_p(E_{m+1}) - \text{cap}_p(F_{m+1}) \\ &\leq \sum_{n=1}^m (\text{cap}_p(E_n) - \text{cap}_p(F_n)) + \text{cap}_p(E_{m+1}) - \text{cap}_p(F_{m+1}) \\ &= \sum_{n=1}^{m+1} (\text{cap}_p(E_n) - \text{cap}_p(F_n)) \end{aligned}$$

où pour obtenir la première inégalité nous avons appliqué une première fois (1.16) avec $A = \bigcup_{n=1}^m E_n$, $B = E_{m+1}$ et $C = \bigcup_{n=1}^m F_n$ et une seconde fois avec $A = E_{m+1}$, $B = \bigcup_{n=1}^m F_n$ et $C = F_{m+1}$. $\square$

Nous sommes maintenant prêt à montrer que la capacité p -variationnelle respecte les conditions de la définition 1.1.

Démonstration du théorème 1.4. Les conditions C1 et C2 ont déjà été démontrées, la condition C4 est une conséquence de la régularité extérieure de la capacité p -variationnelle et de la proposition 1.6.

Soit $(E_n)_{n \geq 1}$ une collection croissante de sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$, montrons que

$$\text{cap}_p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}_p(E_n).$$

Puisque par monotonie

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}_p(E_n) \leq \text{cap}_p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$$

il nous suffit de montrer l'inégalité inverse. Cette dernière étant clairement satisfaite dans le cas où il existe un ensemble E_n avec $\text{cap}_p(E_n) = \infty$, nous pouvons supposer que $\text{cap}_p(E_n) < +\infty$ pour chaque $n \geq 1$. Soit $\varepsilon > 0$, par régularité extérieure pour tout $n \geq 1$ nous pouvons trouver un ouvert U_n contenant E_n et tel que

$$\text{cap}_p(U_n) \leq \text{cap}_p(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Par le corollaire 1.17 nous avons alors

$$\text{cap}_p\left(\bigcup_{k=1}^n U_k\right) - \text{cap}_p\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) \leq \sum_{k=1}^n \frac{\varepsilon}{2^k} \leq \varepsilon.$$

Soit K un compact contenu dans $\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k$. Par compacité nous avons $K \subset \bigcup_{k=1}^n U_k$ pour un certain $n \geq 1$ ce qui implique que

$$\text{cap}_p(K) \leq \text{cap}_p\left(\bigcup_{k=1}^n U_k\right) \leq \text{cap}_p\left(\bigcup_{k=1}^n E_k\right) + \varepsilon \leq \text{cap}_p(E_n) + \varepsilon$$

et donc $\text{cap}_p(K) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}_p(E_n) + \varepsilon$. Dès lors, toujours en utilisant la monotonie

$$\begin{aligned} \text{cap}_p(E) &\leq \text{cap}_p\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} U_k\right) \\ &= \sup\left\{\text{cap}_p(K) \mid K \text{ est compact et } K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} U_k\right\} \\ &\leq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}_p(E_n) + \varepsilon. \end{aligned}$$

ce qui montre la condition C5 puisque $\varepsilon > 0$ peut être choisi suffisamment petit.

Il nous reste à démontrer la condition C3. Remarquons que par sous-additivité forte nous avons pour $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^N$, $\text{cap}_p(E_1 \cup E_2) \leq \text{cap}_p(E_1) + \text{cap}_p(E_2)$ et on en déduit par induction que pour $m \geq 1$

$$\text{cap}_p\left(\bigcup_{n=1}^m E_n\right) \leq \sum_{n=1}^m \text{cap}_p(E_n).$$

Puisque la suite $\left(\bigcup_{n=1}^m E_n\right)_{m \geq 1}$ est une suite d'ensembles croissants nous avons

$$\text{cap}_p\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \text{cap}_p\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=1}^m E_n\right) = \lim_{m \rightarrow \infty} \text{cap}_p\left(\bigcup_{n=1}^m E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{cap}_p(E_n)$$

ce qui montre la propriété de sous-additivité dénombrable. $\square$

Nous pouvons observer que la démonstration du théorème 1.4 découle essentiellement de la régularité extérieure et de la sous-additivité forte. En effet, les conditions C2 et C4 sont des conséquences directes de cette régularité, les autres conditions se déduisent ensuite de cette régularité combinée avec la sous-additivité forte.

Remarquons d'ailleurs que la définition de la capacité p -variationnelle sur les compacts a uniquement été utilisée pour démontrer la régularité extérieure et la sous-additivité forte, nous avons donc la conclusion importante suivante.

Théorème 1.18. *Si $\text{cap} : \mathcal{K}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ est une application fortement sous-additive et telle que $\text{cap}(\emptyset) = 0$, nous pouvons étendre cette application aux ouverts en posant*

$$\text{cap}(U) = \sup\{\text{cap}(K) \mid K \text{ est compact } K \subset U\}.$$

De plus, si pour $K \subset \mathbb{R}^N$ compact et $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U contenant K et tel que $\text{cap}(U) \leq \text{cap}(K) + \varepsilon$, nous pouvons étendre cap à $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ par

$$\text{cap}(E) = \inf\{\text{cap}(U) \mid U \text{ est ouvert et } E \subset U\}.$$

Cette application est alors une capacité au sens de Choquet.

Démonstration. Par régularité extérieure, l'application $\text{cap} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ est monotone et satisfait la condition C4 par la proposition 1.6. De plus, en adaptant la preuve du théorème 1.4, on déduit que les conditions C3 et C5 sont satisfaites. $\square$

Cette méthode sera utilisée au chapitre 2 pour étudier la capacité de Sobolev.

1.2 Capacitabilité

Étant donné $\text{cap} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ une capacité au sens de Choquet, nous pouvons définir deux nouvelles applications $\text{cap}_\star$ et $\text{cap}^\star$ pour tout $E \subset \mathbb{R}^N$ par

$$\text{cap}_\star(E) = \sup\{\text{cap}(K) \mid K \text{ est compact et } K \subset E\}$$

et

$$\text{cap}^\star(E) = \inf\{\text{cap}(U) \mid U \text{ est ouvert et } E \subset U\}.$$

Ceci nous permet de définir la capacitabilité d'un ensemble.

Définition 1.19. Soit $\text{cap} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ une capacité au sens de Choquet. Un ensemble $E \subset \mathbb{R}^N$ est capacitabile si

$$\text{cap}^\star(E) = \text{cap}_\star(E) \tag{1.17}$$

De tels ensembles existent bien, on peut par exemple observer que tout ouvert est capacitabile. En effet, si E est ouvert, il suit directement de la définition que $\text{cap}^\star(E) = \text{cap}(E)$. D'un autre côté, pour tout compact K contenu dans E nous avons par monotonie $\text{cap}(K) \leq \text{cap}(E)$ et donc $\text{cap}_\star(E) \leq \text{cap}(E)$. De plus, pour tout $n \geq 1$ nous pouvons trouver K_n un compact contenu dans E et tel que

$$\text{cap}_\star(E) \leq \text{cap}(K_n) + \frac{1}{n}.$$

Dès lors, puisque $K_n \subset E$ nous obtenons par monotonie

$$\text{cap}_\star(E) \leq \text{cap}(E) + \frac{1}{n}$$

et un passage à la limite nous donne alors $\text{cap}_\star(E) \leq \text{cap}(E)$. Cela montre donc la capacitabilité des ouverts puisque

$$\text{cap}^\star(E) = \text{cap}(E) = \text{cap}_\star(E).$$

L'exemple suivant montre que nous pouvons construire des capacités pour lesquelles tout ensemble ne sera pas capacitabile.

Exemple 1.20. [19, Theorem 3.6] Considérons m la mesure extérieure définie pour tout $K \subset \mathbb{R}^N$ compact par

$$m(K) = \inf\left\{\sum_{n=1}^{\infty} \text{vol}(Q_n) \mid (Q_n)_{n \geq 1} \text{ est un recouvrement de } K \text{ par des cubes fermés}\right\}$$

Il suit de la définition que m est monotone et que nous avons pour tout $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^N$ compacts

$$m(K_1 \cup K_2) + m(K_1 \cap K_2) = m(K_1) + m(K_2).$$

De plus, on peut montrer que pour K compact et $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U contenant K avec $m(U) \leq m(K) + \varepsilon$ [19, Observation 3]. Par le théorème 1.18, nous pouvons donc étendre m à $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ en une capacité au sens de Choquet.

Définissons maintenant l'ensemble de Vitali. On considère $\sim$ la relation d'équivalence définie sur $[0, 1]$ par $x \sim y$ si et seulement si $x - y \in \mathbb{Q}$. Ceci nous permet de partitionner l'intervalle $[0, 1]$ en classe d'équivalence que nous notons $(\mathcal{E}_\alpha)_{\alpha \in A}$. Par l'axiome du choix, pour chacune de ces classes nous pouvons choisir un unique $x_\alpha \in \mathcal{E}_\alpha$ et nous définissons alors l'ensemble de Vitali par

$$\mathcal{V} = \bigcup_{\alpha \in A} \{x_\alpha\}.$$

Nous allons montrer que $m_\star(\mathcal{V}) = 0$ et $m^\star(\mathcal{V}) > 0$.

Prenons $(r_k)_{k \geq 1}$ une énumération de $\mathbb{Q} \cap [-1, 1]$ et définissons $\mathcal{V}_k = \mathcal{V} + r_k$. De plus, pour un compact E contenu dans $\mathcal{V}$ on définit $E_k = E + k$. Observons que les $\mathcal{V}_k$ sont disjoints. En effet, si $k \neq k'$ et $\mathcal{V}_k \cap \mathcal{V}_{k'} \neq \emptyset$, nous pouvons trouver des rationnels $r_k \neq r_{k'}$ et α, β tels que $x_\alpha + r_k = x_\beta + r_{k'}$ et nous avons alors $x_\alpha - x_\beta = r_{k'} - r_k$. Donc, $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \sim \beta$ ce qui contredit le fait que $\mathcal{V}$ contient un seul élément par classe d'équivalence. Les $\mathcal{V}_k$ sont donc bien disjoints et cela implique en particulier que les E_k le sont aussi. De plus,

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{V}_k \subset [-1, 2].$$

Donc, par mesurabilité des E_k et invariance par translation de la mesure extérieure nous obtenons

$$\sum_{k=1}^{\infty} m(E) = \sum_{k=1}^{\infty} m(E_k) = m\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) \leq 3$$

ce qui n'est possible que dans le cas où $m(E) = 0$.

Nous avons donc montré que tout compact contenu dans $\mathcal{V}$ a une mesure nulle. Par définition de $m_\star$, cela implique que $m_\star(\mathcal{V}) = 0$.

Regardons maintenant $m^\star(\mathcal{V})$. Observons tout d'abord que

$$[0, 1] \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{V}_k.$$

En effet, si $x \in [0, 1]$ alors $x \sim x_\alpha$ pour un certain $\alpha \in A$ et il existe donc $r_k \in \mathbb{Q}$ tel que $x - x_\alpha = r_k$ pour un certain k . Mais alors $x = x_\alpha + r_k$ ce qui implique que $x \in \mathcal{V}_k$.

Dès lors,

$$1 \leq m^\star\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{V}_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} m^\star(\mathcal{V}_k) = \sum_{k=1}^{\infty} m^\star(\mathcal{V})$$

ce qui implique $m^*(\mathcal{V}) > 0$. On en déduit que l'ensemble de Vitali n'est pas capacitabale.

Notre objectif est de trouver une classe suffisamment grande d'ensembles capacitables. Plus précisément, nous souhaitons montrer que tout borélien de $\mathbb{R}^N$ satisfait la relation (1.17).

Rappelons que la tribu des borélien est la plus petite tribu contenant tous les ouverts de $\mathbb{R}^N$. Étant donné que tout ouvert est capacitabale, une stratégie naturelle serait de montrer que la classe des ensembles capacitables forme une tribu, le résultat suivrait directement. Cependant, la capacitabilité n'étant pas stable sous l'intersection finie, il n'y a pas d'espoir de montrer que cette classe est une tribu.

Exemple 1.21. Considérons $\text{cap} : \mathcal{K}(\mathbb{R}^2) \rightarrow [0, +\infty]$ définie pour tout $E \subset \mathbb{R}^2$ compact par $m(P_1(E))$ où m est la capacité définie dans l'exemple 1.20 et P_1 est la projection sur la première coordonnée. On observe alors que cap est monotone et que nous avons

$$\begin{aligned} \text{cap}(E_1 \cup E_2) + \text{cap}(E_1 \cap E_2) &= m(P_1(E_1 \cup E_2)) + m(P_1(E_1 \cap E_2)) \\ &\leq m(P_1(E_1) + P_1(E_2)) + m(P_1(E_1)) + m(P_1(E_2)) \\ &= m(P_1(E_1)) + m(P_1(E_2)) \\ &= \text{cap}(E_1) + \text{cap}(E_2). \end{aligned}$$

Par le théorème 1.18, nous pouvons donc étendre cap à $\mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ en une capacité au sens de Choquet.

Prenons $\mathcal{V}$ l'ensemble de Vitali, $E = [0, 1] \times \{0\}$ et $F = [0, 1] \times \{1\}$. Puisque les ensembles E et $\mathcal{V} \cup F$ ont des projections mesurables, ils sont capacitables [15, Corollaire 4.27]. Cependant, $\mathcal{V} = (\mathcal{V} \cup F) \cap E$ et nous avons donc trouver un ensemble non-capitabale qui peut s'écrire comme intersection d'ensemble capacitabale

Nous devons donc trouver une autre manière de démontrer ce théorème. Nous considérerons pour cela une classe d'ensemble plus générale, appelée ensemble de Suslin. Nous montrerons dans un premier temps que cette classe contient les boréliens et nous montrerons ensuite que tout ensemble de Suslin est capacitabale. La capacité des boréliens en découlera alors directement.

1.2.1 Ensemble de Suslin

Soit $\mathcal{M}$ une classe de sous-ensembles d'un ensemble X . On désigne par $\mathcal{N}$ l'ensemble des suites de naturels et par $\tilde{\mathcal{N}}$ l'ensemble des k -uples de naturels. Plus précisément, on pose

$$\mathcal{N} = \{(n_1, n_2, \dots) \mid n_i \in \mathbb{N} \text{ pour tout } i \geq 1\}$$

et

$$\tilde{\mathcal{N}} = \{(n_1, \dots, n_k) \mid k \in \mathbb{N} \text{ et } n_i \in \mathbb{N} \text{ pour tout } 1 \leq i \leq k\}.$$

On suppose qu'à tout k -uplet $(n_1, \dots, n_k) \in \tilde{\mathcal{N}}$ est associé un ensemble $M_{n_1, \dots, n_k} \in \mathcal{M}$. Ceci est équivalent à l'existence d'une application $\nu : \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{M}$ appelée système déterminant pour $\mathcal{M}$ et définie par $\nu(n_1, \dots, n_k) = M_{n_1, \dots, n_k}$. Étant donné un système déterminant nous pouvons considérer son noyau, $N(\nu)$ défini par

$$N(\nu) = \bigcup_{\substack{n \in \mathcal{N} \\ n = (n_1, n_2, \dots)}} (M_{n_1} \cap M_{n_1, n_2} \cap \dots \cap M_{n_1, \dots, n_k} \cap \dots). \quad (1.18)$$

Nous dirons que $N(\nu)$ est un ensemble de Suslin¹ généré par la classe $\mathcal{M}$. Dans la suite, nous noterons par $\mathcal{M}_{(\mathcal{A})}$ la classe des ensembles de Suslin générés par $\mathcal{M}$ et nous appellerons ensemble de Suslin d'un espace métrique les ensembles de Suslin générés par la collection des ensembles fermés de cet espace.

Nous consacrons le reste de cette sous-section à démontrer que tout borélien est un ensemble de Suslin, nous suivrons pour cela les développements exposés dans [14, Section 1.7].

Nous désirons dans un premier temps montrer le théorème suivant.

Théorème 1.22. *La tribu des boréliens est la plus petite classe d'ensembles contenant les fermés et stable sous l'union et l'intersection dénombrable.*

Une fois que nous aurons montré ceci, il suffira de vérifier que la classe des ensembles de Suslin est elle aussi fermée sous l'union et l'intersection dénombrable pour déduire que tout ensemble borélien est également suslinien.

La preuve du théorème 1.22 reposera sur une caractérisation des borélien, nous utiliserons pour cela le principe d'induction transfinie sur le plus petit ordinal non-dénombrable que nous rappelons maintenant.

Si $<$ est une relation sur un ensemble X , alors nous dirons que la paire $(X, <)$ est bien ordonnée (ou que $<$ forme un bon ordre pour X) si les conditions suivantes sont respectées,

- (i) Pour tout $x, y \in X$, soit $x < y$, soit $y < x$ soit $x = y$.
- (ii) Pour tout $x, y, z \in X$, si $x < y$ et $y < z$, alors $x < z$.
- (iii) Pour tout sous-ensemble A non-vidé de X il existe $a \in A$ tel que pour tout $x \in A$ avec $x \neq a$, $a < x$. Un tel a sera appelé un minimum de A .

Autrement dit, la paire $(X, <)$ est bien ordonnée si $<$ est un ordre sur X et si tout sous-ensemble non-vidé de X possède un minimum. Puisque le a dans la condition (iii) est unique (en conséquence de la condition (i)), nous pouvons parler du minimum de A et nous écrirons $a = \min A$. En acceptant l'axiome du choix nous pouvons montrer que tout ensemble peut être bien ordonné [20, Proposition 7.9].

1. L'opération N est aussi appelée $\mathcal{A}$ -opération en hommage au mathématicien russe Alexandroff.

Étant donné un ensemble X non-dénombrable, il existe donc une relation $<$ sur X qui est un bon ordre. Dès lors, si $\alpha \in X$ nous pouvons définir l'ensemble des prédécesseurs de α comme

$$X_\alpha = \{\beta \in X \mid \beta < \alpha\}.$$

On définit alors ω_1 comme le plus petit élément de X dont l'ensemble des prédécesseurs est non-dénombrable. Plus précisément, on pose

$$\omega_1 = \min\{\alpha \in X \mid X_\alpha \text{ est non-dénombrable}\}.$$

Remarquons qu'il n'est à priori pas clair que ω_1 existe étant donné que l'ensemble dans la définition pourrait être vide. Si tel est le cas, nous pouvons poser $\tilde{X} = X \cup \{x^*\}$ avec $x^* \notin X$ et étendre la relation $<$ à $\tilde{X}$ en imposant que $x < x^*$ pour tout $x \in X$. Avec cette extension, $<$ forme un bon ordre sur $\tilde{X}$ et il nous reste alors à remplacer X par $\tilde{X}$ dans la définition de ω_1 et l'ensemble $\{\alpha \in \tilde{X} \mid \tilde{X}_\alpha \text{ est non-dénombrable}\}$ est maintenant non-vide.

Grâce à l'existence d'un bon ordre sur X , nous pouvons définir $1 = \min X$, $2 = \min\{X \setminus \{1\}\}$ et continuer de la sorte par induction sur les naturels. Nous décrivons maintenant l'induction sur un ensemble de cardinalité strictement supérieure à celle des naturels.

Lemme 1.23 (Induction transfinie). *Supposons que $P(\alpha)$ est une propriété qui est soit vraie soit fausse pour $\alpha < \omega_1$. Alors si*

(i) *$P(1)$ est vrai.*

(ii) *Pour $\alpha < \omega_1$, $P(\alpha)$ est vrai lorsque $P(\beta)$ est vrai pour tout $\beta < \alpha$.*

Alors, $P(\alpha)$ est vrai pour tout $\alpha < \omega_1$.

Démonstration. Supposons qu'il existe $\alpha < \omega_1$ tel que $P(\alpha)$ ne soit pas vérifiée. L'ensemble

$$A = \{\alpha \in X \mid \alpha < \omega_1 \text{ et } P(\alpha) \text{ est faux}\}$$

est alors non-vide et le principe du bon ordre nous assure alors l'existence de $\tilde{\alpha} = \min A$. Puisque $P(1)$ est vrai, $\tilde{\alpha} \neq 1$, ce qui nous permet de trouver $\beta < \tilde{\alpha}$. De plus, puisque $\tilde{\alpha}$ est le minimum de A , tout tel β ne peut être un élément de A et nous avons alors que $P(\beta)$ est vrai avec $\beta < \tilde{\alpha}$. Par (ii), cela implique que $P(\tilde{\alpha})$ est vrai et donc $\tilde{\alpha} \notin A$ ce qui est absurde. $\square$

En utilisant le principe d'induction transfinie, nous allons pouvoir définir les ensembles Σ_α^0 et Π_α^0 qui joueront un rôle important dans la suite de nos développements. Définissons Σ_1^0 comme la collection des ouverts de $\mathbb{R}^N$ et Π_1^0 comme la collection des fermés de cet espace. Soit $\alpha < \omega_1$ et supposons que Σ_β^0 et Π_β^0 ont été définis pour $\beta < \alpha$. On pose alors

$$\Sigma_\alpha^0 = \left\{ \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in \Pi_\beta^0 \text{ pour un certain } \beta < \alpha \right\} \quad (1.19)$$

et

$$\Pi_\alpha^0 = \{A^c \mid A \in \Sigma_\alpha^0\}. \quad (1.20)$$

Remarquons que si $A \in \Pi_\alpha^0$ alors nous pouvons trouver $B \in \Sigma_\alpha^0$ tel que $A = B^c$ et donc

$$A = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} C_n \right)^c = \bigcap_{n=1}^{\infty} C_n^c$$

où $C_n \in \Pi_\beta^0$ avec un certain $\beta < \alpha$. Par définition, cela implique que $C_n^c \in \Sigma_\beta^0$ et nous pouvons alors écrire

$$\Pi_\alpha^0 = \left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \mid A_n \in \Sigma_\beta^0 \text{ pour un certain } \beta < \alpha \right\}. \quad (1.21)$$

Le prochain résultat établit une propriété de croissance des Σ_α^0 et Π_α^0 .

Lemme 1.24. *Pour $1 \leq \beta < \alpha < \omega_1$ nous avons les inclusions suivantes,*

$$\Sigma_\beta^0 \subset \Pi_\alpha^0, \quad \Pi_\beta^0 \subset \Sigma_\alpha^0, \quad \Sigma_\beta^0 \subset \Sigma_\alpha^0, \quad \Pi_\beta^0 \subset \Pi_\alpha^0. \quad (1.22)$$

Démonstration. Les deux premières inclusions suivent directement de (1.19) et (1.21), les deux dernières se montrent par induction transfinie.

Considérons tout d'abord le cas $\beta = 1$. Pour $2 < \alpha$ nous avons par les deux premières inclusions de (1.22), $\Sigma_1^0 \subset \Pi_2^0 \subset \Sigma_\alpha^0$ ce qui nous permet de déduire que $\Sigma_1^0 \subset \Sigma_\alpha^0$. De plus, nous avons que $\Pi_1^0 \subset \Sigma_2^0$ ce qui implique par la première inclusion de (1.22) que $\Pi_1^0 \subset \Pi_\alpha^0$. Dès lors, $\Sigma_1^0 \subset \Sigma_\alpha^0$ et $\Pi_1^0 \subset \Pi_\alpha^0$ quand $2 < \alpha$, il nous reste donc à montrer que $\Sigma_1^0 \subset \Sigma_2^0$ et $\Pi_1^0 \subset \Pi_2^0$.

Si $A \in \Sigma_1^0$, alors A est ouvert et nous pouvons donc trouver une collection de fermé $(F_n)_{n \geq 1}$ tels que

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n.$$

Dès lors, $\Sigma_1^0 \subset \Sigma_2^0$. De plus, si $A \in \Pi_1^0$, nous pouvons trouver U ouvert tel que $A = U^c$. Puisque $\Sigma_1^0 \subset \Sigma_2^0$, nous avons $U = \bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$ avec $U_n \in \Pi_0^1$. Donc,

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} U_n^c.$$

Puisque $U_n \in \Pi_1^0$, on a $U_n^c \in \Sigma_1^0$ ce qui montre que $A \in \Pi_2^0$. Les deux dernières inclusions de (1.22) sont donc vérifiées pour tout $1 < \alpha < \omega_1$.

On considère maintenant $1 \leq \beta < \alpha < \omega_1$. Supposons que pour tout $\gamma < \beta$ nous avons $\Sigma_\gamma^0 \subset \Sigma_\alpha^0$ et $\Pi_\gamma^0 \subset \Pi_\alpha^0$ et montrons que $\Sigma_\beta^0 \subset \Sigma_\alpha^0$ et $\Pi_\beta^0 \subset \Pi_\alpha^0$. Si $A \in \Sigma_\beta^0$ alors, nous

pouvons écrire

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ avec } A_n \in \Pi_{\gamma}^0 \text{ pour } \gamma < \beta.$$

Puisque $\gamma < \beta < \alpha$, on en déduit que $A \in \Sigma_{\alpha}^0$ ce qui montre que $\Sigma_{\beta}^0 \subset \Sigma_{\alpha}^0$. Maintenant, si $A \in \Pi_{\beta}^0$ alors nous pouvons écrire

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ avec } A_n \in \Sigma_{\gamma}^0 \text{ pour } \gamma < \beta.$$

Étant donné que $\gamma < \beta < \alpha$, on en déduit que $A \in \Pi_{\alpha}^0$ ce qui montre que $\Pi_{\beta}^0 \subset \Pi_{\alpha}^0$. $\square$

Nous avons mentionné ci-dessus que notre objectif est de trouver une caractérisation des borélien, celle-ci se fera en terme des Σ_{α}^0 et Π_{α}^0 .

Par le lemme que nous venons de montrer, il suit que l'égalité

$$\bigcup_{\alpha < \omega_1} \Sigma_{\alpha}^0 = \bigcup_{\alpha < \omega_1} \Pi_{\alpha}^0. \quad (1.23)$$

est satisfaite. Notons $\mathcal{T}$ la classe des ensembles apparaissant dans cette égalité, nous allons montrer que cette classe coïncide avec la tribu des boréliens notée $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. L'inclusion de $\mathcal{T}$ dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est démontrée dans la prochaine proposition.

Proposition 1.25. *Les ensembles contenu dans Σ_{α}^0 et Π_{α}^0 pour $\alpha < \omega_1$ sont des boréliens.*

Démonstration. Nous faisons la preuve par induction transfinie. Si $A \in \Sigma_1^0$, alors A est ouvert et est donc un borélien par définition. De plus, si $A \in \Pi_1^0$, alors A est un fermé et nous pouvons écrire $A = U^c$ avec U un ouvert. L'ensemble U étant ouvert, il appartient à la classe des boréliens et on en déduit donc que A est lui aussi borélien en utilisant la stabilité par passage au complémentaire.

Supposons maintenant que pour $\beta < \alpha$, les éléments de Σ_{β}^0 et Π_{β}^0 sont des boréliens et montrons que c'est aussi le cas pour Σ_{α}^0 et Π_{α}^0 . Par définition, $A \in \Sigma_{\alpha}^0$ s'écrit comme

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \text{ avec } A_n \in \Pi_{\beta}^0 \text{ pour un certain } \beta < \alpha.$$

Puisque chaque A_n est un borélien (par hypothèse), cela implique que A est aussi un borélien par stabilité sous le passage à l'union dénombrable. De plus, si $A \in \Pi_{\alpha}^0$ alors par l'équation (1.21), nous pouvons écrire

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ avec } A_n \in \Sigma_{\beta}^0 \text{ pour un certain } \beta < \alpha.$$

Dès lors, puisque A s'écrit comme une intersection dénombrable de borélien, c'est aussi un borélien. $\square$

Pour montrer l'inclusion inverse, nous aurons besoin du résultat suivant.

Lemme 1.26. *Si $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ est une suite dans X tel que $\alpha_n < \omega_1$ pour tout $n \geq 1$. Alors, il existe $\alpha^* < \omega_1$ avec $\alpha_n < \alpha^*$.*

Démonstration. Puisque $\alpha_n < \omega_1$, l'ensemble des prédécesseurs de α_n est dénombrable. Donc, l'ensemble,

$$A = \{\alpha_n \mid n \geq 1\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X \mid x < \alpha_n\}$$

est dénombrable (en tant qu'union dénombrable d'ensemble dénombrable). Donc, puisque l'ensemble $\{x \in X \mid x < \omega_1\}$ est non-dénombrable, nous pouvons trouver

$$\alpha^* \in \{x \in X \mid x < \omega_1\} \setminus A.$$

Pour chaque n , α^* est différent de α_n et n'est pas un prédécesseur de α_n , ce qui implique que $\alpha_n < \alpha^*$. $\square$

Proposition 1.27. *La famille des ensembles dans l'équation (1.23) coïncide avec la tribu des boréliens.*

Démonstration. Par la proposition 1.25, nous savons que $\mathcal{T} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, il nous reste donc à montrer que l'inclusion inverse est satisfaite.

Par définition de Σ_1^0 , nous savons que $\mathcal{T}$ contient tout les ouverts de $\mathbb{R}^N$, donc si nous montrons que $\mathcal{T}$ est une tribu, elle contiendra les boréliens.

Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite d'éléments de $\mathcal{T}$, en regardant le membre de droite de l'équation (1.23), pour chaque $n \geq 1$ il existe $\alpha_n < \omega_1$ tel que $A_n \in \Pi_{\alpha_n}^0$. Par le lemme 1.26 il existe $\alpha^* < \omega_1$ avec $\alpha_n < \alpha^*$. Nous concluons donc que

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \Sigma_{\alpha^*}^0 \in \mathcal{T}.$$

Maintenant, si A est un ensemble dans la famille $\mathcal{T}$, alors, il existe $\alpha < \omega_1$ tel que $A \in \Sigma_{\alpha}^0$ et donc, par définition, $A^c \in \Pi_{\alpha}^0 \in \mathcal{T}$. Dès lors, $\mathcal{T}$ est bien une tribu qui contient tout les ouverts, ce qui montre que $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \subset \mathcal{T}$. $\square$

Démonstration du théorème 1.22. Nous savons déjà que la tribu des boréliens contient tout les fermés et est stable sous l'union et l'intersection dénombrable. Il nous reste donc à montrer que si $\mathcal{T}$ est une classe d'ensembles contenant les fermés et stable sous l'union et l'intersection dénombrable, alors les boréliens sont contenu dans $\mathcal{T}$. Pour cela, prenons $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$, la proposition 1.27 implique que $A \in \Pi_\alpha^0$ avec $\alpha < \omega_1$. Montrons par induction transfinie que pour tout $\alpha < \omega_1$ si $A \in \Pi_\alpha^0$, alors, $A \in \mathcal{T}$. Si $\alpha = 1$, alors $A \in \mathcal{T}$ car A est fermé. Maintenant, nous supposons que pour tout $\beta < \alpha$, si $A \in \Pi_\beta^0$, alors $A \in \mathcal{T}$. Si $A \in \Pi_\alpha^0$, nous pouvons écrire,

$$A = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \text{ avec } A_n \in \Sigma_\beta^0 \text{ pour } \beta < \alpha$$

et, par l'équation (1.19), nous pouvons écrire,

$$A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \text{ avec } B_n \in \Pi_\gamma^0 \text{ pour } \gamma < \beta.$$

Par l'hypothèse d'induction, $B_n \in \mathcal{T}$ et par stabilité sous l'union dénombrable, nous avons que, $A_n \in \mathcal{T}$. Maintenant, en utilisant que $\mathcal{T}$ est stable sous l'intersection dénombrable, nous avons que $A \in \mathcal{T}$. $\square$

Il nous reste maintenant à montrer que la classe des ensembles de Suslin est stable sous l'union et l'intersection dénombrable. Nous commençons par montrer que l'union et l'intersection d'éléments de $\mathcal{M}$ nous donne un ensemble de Suslin.

Proposition 1.28. *Soit $(M_n)_{n \geq 1}$ une collection d'ensembles de $\mathcal{M}$, alors*

$$\bigcup_{n \geq 1} M_n \quad \text{et} \quad \bigcap_{n \geq 1} M_n$$

sont des ensembles de Suslin.

Démonstration. Posons $\nu_{\mathcal{U}}(n_1, \dots, n_k) = M_{n_1}$ et $\nu_{\mathcal{I}}(n_1, \dots, n_k) = M_k$. On a alors,

$$\begin{aligned} N(\nu_{\mathcal{U}}) &= \bigcup_{\substack{n \in \mathcal{N} \\ n=(n_1, n_2, \dots)}} (\nu_{\mathcal{U}}(n_1) \cap \nu_{\mathcal{U}}(n_1, n_2) \cap \dots \cap \nu_{\mathcal{U}}(n_1, \dots, n_k) \cap \dots) \\ &= \bigcup_{\substack{n \in \mathcal{N} \\ n=(n_1, n_2, \dots)}} M_{n_1} \\ &= \bigcup_{n \geq 1} M_n \end{aligned}$$

et,

$$\begin{aligned}
N(\nu_{\mathcal{I}}) &= \bigcup_{\substack{n \in \mathcal{N} \\ n=(n_1, n_2, \dots)}} (\nu_{\mathcal{I}}(n_1) \cap \nu_{\mathcal{I}}(n_1, n_2) \cap \dots \cap \nu_{\mathcal{I}}(n_1, \dots, n_k) \cap \dots) \\
&= \bigcup_{\substack{n \in \mathcal{N} \\ n=(n_1, n_2, \dots)}} (M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k \cap \dots) \\
&= \bigcap_{n \geq 1} M_n.
\end{aligned}$$

□

Nous aimerions appliquer la proposition précédente à une suite $(M_n)_{n \geq 1}$ d'ensemble de Suslin, il n'est cependant pas sûr que l'ensemble de Suslin obtenu soit encore un élément de $\mathcal{M}_{(\mathcal{A})}$. La proposition suivante résous ce problème.

Proposition 1.29. *Si $\mathcal{M}$ est une collection de sous-ensemble de X et si $\emptyset \in \mathcal{M}$, alors, tout ensemble de Suslin généré par $\mathcal{M}_{(\mathcal{A})}$ est déjà un élément de $\mathcal{M}_{(\mathcal{A})}$. Autrement dit,*

$$(\mathcal{M}_{(\mathcal{A})})_{(\mathcal{A})} = \mathcal{M}_{(\mathcal{A})}.$$

Démonstration. Soit $\nu : \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{M}_{(\mathcal{A})}$ un système déterminant pour $\mathcal{M}_{(\mathcal{A})}$ définit par $\nu(n_1, \dots, n_k) = M_{n_1, \dots, n_k}$. Nous désirons montrer que $M_{n_1, \dots, n_k}$ est un ensemble de Suslin généré par $\mathcal{M}$. Pour chaque $(n_1, \dots, n_k) \in \tilde{\mathcal{N}}$, il existe $\nu_{n_1, \dots, n_k} : \tilde{\mathcal{N}} \rightarrow \mathcal{M}$ définit par $\nu_{n_1, \dots, n_k}(q_1, \dots, q_l) = M_{n_1, \dots, n_k}^{q_1, \dots, q_l}$ et tel que l'on a,

$$M_{n_1, \dots, n_k} = \bigcup_{\substack{q \in \mathcal{N} \\ q=(q_1, q_2, \dots)}} (M_{n_1, \dots, n_k}^{q_1} \cap M_{n_1, \dots, n_k}^{q_1, q_2} \cap \dots \cap M_{n_1, \dots, n_k}^{q_1, \dots, q_l} \cap \dots).$$

Nous pouvons écrire,

$$N(\nu) = \bigcup_{\substack{n \in \mathcal{N} \\ n=(n_1, n_2, \dots)}} (M_{n_1} \cap M_{n_1, n_2} \cap \dots \cap M_{n_1, \dots, n_k} \cap \dots).$$

Cet ensemble peut se réécrire comme l'union sur $n \in \mathcal{N}$ et $(q^i)_{i \geq 1} \subset \mathcal{N}$ des ensembles suivants,

$$\begin{aligned}
& \left(M_{n_1}^{q_1^1} \cap M_{n_1}^{q_1^1, q_2^1} \cap \dots \cap M_{n_1}^{q_1^1, \dots, q_l^1} \cap \dots \right) \\
\cap & \left(M_{n_1, n_2}^{q_1^2} \cap M_{n_1, n_2}^{q_1^2, q_2^2} \cap \dots \cap M_{n_1, n_2}^{q_1^2, \dots, q_l^2} \cap \dots \right) \\
& \vdots \\
& \vdots \\
\cap & \left(M_{n_1, \dots, n_k}^{q_1^k} \cap M_{n_1, \dots, n_k}^{q_1^k, q_2^k} \cap \dots \cap M_{n_1, \dots, n_k}^{q_1^k, \dots, q_l^k} \cap \dots \right)
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Les indices et exposant dans l'équation ci-dessus respectent les conditions suivantes,

- La liste des indices dans chaque ligne est constante.
- La liste des exposants dans chaque ligne croît par concaténation. (1.25)
- La liste des indices dans chaque colonne croît par concaténation.

Soient $p_1, p_2, \dots$ les nombres premiers écrit dans l'ordre croissant. Nous allons utiliser ces nombres premier pour pouvoir encoder les indices dans l'équation (1.24) de manière plus compacte. Pour cela, on pose,

$$m = p_1^k \cdot p_2^l \cdot p_3^{n_1} \cdot p_4^{n_2} \cdots p_{k+2}^{n_k} \cdot p_{k+3}^{q_1^k} \cdot p_{k+4}^{q_2^k} \cdots p_{l+k+2}^{q_l^k}. \quad (1.26)$$

Étant donné un nombre entier positif m , l'unique factorisation de m en nombre premier détermine si m est de la forme (1.26) ou non. Il n'est certainement pas vrai que chaque entier est de la forme (1.26) ou que de tels entiers $m_1, m_2, \dots$ respectant la condition (1.26) vont respecter les conditions (1.25). Cependant, toute suite d'ensemble comme dans l'équation (1.24), va donner lieu à des entiers $m_1, m_2, \dots$ respectant les conditions (1.26) et (1.25).

On pose pour chaque entier positif m ,

$$T_m = \begin{cases} M_{n_1, \dots, n_k}^{q_1^k, \dots, q_l^k} & \text{si } m \text{ est de la forme (1.26)} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}.$$

On pose pour chaque suite d'entier $m_1, m_2, \dots$,

$$S_{m_1, \dots, m_k} = \begin{cases} T_{m_1} \cap T_{m_1, m_2} \cap \cdots \cap T_{m_1, \dots, m_k} & \text{si (1.25) est satisfait} \\ \emptyset & \text{sinon} \end{cases}$$

Définissons un système déterminant $\sigma(m_1, m_2, \dots, m_k) = S_{m_1, m_2, \dots, m_k}$ pour $\mathcal{M}$. Par construction, tout ensemble dans (1.24) donne lieu à une suite $(m_1, m_2, \dots) \in \mathcal{N}$ tel que

$$S_{m_1} \cap S_{m_1, m_2} \cap \cdots \cap S_{m_1, \dots, m_k} \cap \cdots$$

est égal à (1.24). Donc, nous avons $N(\nu) = N(\sigma)$.

□

Nous sommes maintenant prêt à démontrer que tout borélien est suslinien.

Théorème 1.30. *Tout ensemble borélien de $\mathbb{R}^N$ est un ensemble de Suslin.*

Démonstration. Soit $(M_n)_{n \geq 1} \subset \mathcal{M}_{(\mathcal{A})}$ une suite d'ensemble de Suslin généré par les ensembles fermés de $\mathbb{R}^N$. Par les propositions 1.28 et 1.29

$$\bigcup_{n \geq 1} M_n \in (\mathcal{M}_{(\mathcal{A})})_{(\mathcal{A})} = \mathcal{M}_{(\mathcal{A})}$$

ce qui montre la stabilité sous l'union dénombrable. Par le même argument, on montre que la suite $(M_n)_{n \geq 1}$ est stable sous l'intersection dénombrable. Puisque tout fermé est un ensemble de Suslin, par le théorème 1.22, tout borélien est un ensemble de Suslin. $\square$

1.2.2 Démonstration du théorème de capacitabilité

Nous allons maintenant démontrer le théorème de capacitabilité sur les ensembles de Suslin, nous généralisons pour cela la preuve faite par Hayman et Kennedy dans [8, Chapter 5].

Il n'est pas difficile de montrer que $\text{cap}_*(E) \leq \text{cap}^*(E)$. En effet, pour tout compact K contenu dans E , nous avons par monotonie $\text{cap}(K) \leq \text{cap}(E)$. Puisque ceci est vrai pour tout K et que pour une capacité régulière extérieure nous avons $\text{cap}(E) = \text{cap}^*(E)$, on en déduit que $\text{cap}_*(E) \leq \text{cap}^*(E)$.

Nous n'avons donc plus qu'à démontrer l'inégalité inverse, cette preuve reposera sur l'observation suivante. Si pour $\varepsilon > 0$ nous pouvons trouver des ensembles K et U qui sont respectivement compact et ouvert, tels que $K \subset E \subset U$ et $\text{cap}(U) \leq \text{cap}(K) + \varepsilon$, alors nous pouvons trouver des collections $(K_n)_{n \geq 1}$ et $(U_n)_{n \geq 1}$ d'ensembles compacts et ouverts respectivement, tels que $K_n \subset E \subset U_n$ et $\text{cap}(U_n) \leq \text{cap}(K_n) + \frac{1}{n}$. Dès lors,

$$\text{cap}^*(E) \leq \text{cap}(U_n) \leq \text{cap}(K_n) + \frac{1}{n} \leq \text{cap}_*(E) + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \text{cap}_*(E).$$

Nous avons donc l'observation importante suivante :

Si pour $\varepsilon > 0$ nous pouvons trouver des ensembles K et U qui sont respectivement compact et ouvert tels que $K \subset E \subset U$ et

$$\text{cap}(U) < \text{cap}(K) + \varepsilon,$$

alors E est capacitabile.

Nous construirons le compact K comme indiqué dans le lemme suivant.

Lemme 1.31. *Soit un ensemble de Suslin M généré par la classe des ensembles fermés de $\mathbb{R}^N$, c'est-à-dire de la forme*

$$M = \bigcup_{\substack{n \in \mathcal{N} \\ n = (n_1, n_2, \dots)}} (M_{n_1} \cap M_{n_1, n_2} \cap \dots \cap M_{n_1, \dots, n_k} \cap \dots)$$

où les $M_{n_1, \dots, n_k}$ sont des fermés. De plus, fixons $(h_i)_{i \geq 1}$ une suite d'entiers positifs et posons

$$K_p = \bigcup_{\substack{n_i \leq h_i \\ 1 \leq i \leq p}} M_{n_1} \cap M_{n_1, n_2} \cap \dots \cap M_{n_1, \dots, n_p}.$$

Alors, $K = \bigcap_{p \geq 1} K_p$ est un sous-ensemble fermé de M . De plus, si M est borné, alors les K_p et K sont compacts.

Démonstration. Remarquons que les K_p sont des réunions finies d'ensembles fermés puisqu'il y a $h_1 \cdots h_p$ ensemble dans l'union. Puisque l'union finie d'ensemble fermé est fermé, on en déduit que ce sont des ensemble fermés et donc K est lui aussi fermé. Il reste à montrer que c'est un sous-ensemble de M . Soit $x \in K$, pour tout $p \geq 1$, il existe $n_{i_p} \leq h_i$ pour $i \in \{1, \dots, p\}$ tel que

$$x \in M_{n_{1_p}} \cap M_{n_{1_p}, n_{2_p}} \cap \cdots \cap M_{n_{1_p}, \dots, n_{p_p}}. \quad (1.27)$$

Puisque pour i fixé $n_{i_p} \leq h_i$, la suite $(n_{i_p})_{p \geq i}$ est bornée et il existe donc une sous-suite $(n_{i_{p_k}})_{k \geq 1}$ qui converge vers $d_i \in \mathbb{N}$. En utilisant la définition de convergence et le fait que nous avons une suite de naturelle, pour chaque $i \geq 1$, nous pouvons trouver $D_i \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $k \geq D_i$, $n_{i_{p_k}} = d_i$. Par (1.27), nous avons pour tout $k \geq 1$

$$x \in M_{n_{1_{p_k}}} \cap M_{n_{1_{p_k}}, n_{2_{p_k}}} \cap \cdots \cap M_{n_{1_{p_k}}, \dots, n_{p_{p_k}}}.$$

En prenant $k = \max_{1 \leq i \leq p} D_i$, nous avons,

$$x \in M_{d_1} \cap M_{d_1, d_2} \cap \cdots \cap M_{d_1, \dots, d_p},$$

ceci étant vrai pour tout $p \geq 1$, on en déduit que $x \in M$. Maintenant, si M est borné, cela implique que les ensembles $M_{n_1} \cap M_{n_1, n_2} \cap \cdots \cap M_{n_1, \dots, n_p}$ sont bornés. Dès lors, les ensembles K_p sont eux aussi bornés et donc compacts. Puisque K est maintenant une intersection dénombrable d'ensembles compacts, il est aussi compact. $\square$

Nous sommes maintenant prêts à démontrer le théorème de capacibilité sur les ensembles de Suslin (et donc en particulier sur les ensembles boréliens).

Théorème 1.32 (Théorème de Capacibilité). *Si cap est une capacité régulière extérieure, alors tout les ensembles de Suslin de $\mathbb{R}^N$ sont capacitables.*

Démonstration. Nous montrons tout d'abord le résultat pour un ensemble de Suslin borné. Si $M \subset \mathbb{R}^N$ est un ensemble de Suslin borné, alors il est de la forme (1.18) et est généré par des ensembles fermés. Par la discussion effectuée au début de cette sous-section, nous devons montrer que nous pouvons trouver des ensembles K et U qui sont respectivement compacts et ouverts tels que $K \subset M \subset U$ et

$$\text{cap}(U) \leq \text{cap}(K) + \varepsilon.$$

Pour cela, nous commençons par construire un ensemble compact comme dans le lemme 1.31.

Posons,

$$M_1^h = \bigcup_{\substack{n \in \mathcal{N} \\ n=(n_1, \dots, n_p, \dots) \\ n_1 \leq h}} (M_{n_1} \cap M_{n_1, n_2} \cap \dots \cap M_{n_1, \dots, n_p} \cap \dots).$$

Il suit de la définition que M_1^h est une suite d'ensembles croissant vers M . Dès lors, en utilisant la condition C5, pour tout $\varepsilon > 0$, nous pouvons trouver $h_1 \geq 1$ tel que en posant $M_1 = M_1^{h_1}$, on a, $\text{cap}(M_1) \geq \text{cap}(M) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$. Supposons avoir construit une suite d'ensemble $M_1, \dots, M_{p-1}$ avec,

$$\text{cap}(M_j) \geq \text{cap}(M_{j-1}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2^j} \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, p-1\}.$$

Pour construire M_p , on définit,

$$M_p^h = \bigcup_{\substack{n \in \mathcal{N} \\ n=(n_1, \dots, n_p, \dots) \\ n_1 \leq h_1, \dots, n_{p-1} \leq h_{p-1}, n_p \leq h}} (M_{n_1} \cap M_{n_1, n_2} \cap \dots \cap M_{n_1, \dots, n_p} \cap \dots).$$

Alors, puisque M_p^h est une suite d'ensembles croissant vers M_{p-1} nous pouvons trouver $h_p \geq 1$ tel que en posant $M_p = M_p^{h_p}$, $\text{cap}(M_p) \geq \text{cap}(M_{p-1}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{\varepsilon}{2^p}$. Par construction, pour tout $p \geq 1$,

$$\text{cap}(M_p) \geq \text{cap}(M) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Grâce à la suite $(h_p)_{p \geq 1}$, nous pouvons construire des ensembles K_p comme dans le lemme 1.31. Puisque $M_p \subset K_p$, on a

$$\text{cap}(K_p) \geq \text{cap}(M) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

De plus, toujours en utilisant le lemme 1.31 et le fait que M est borné, $K = \bigcap_{p \geq 1} K_p$ est un sous-ensemble compact de M . Si U est un ouvert qui contient K , alors par le lemme 1.7, U contient K_p pour tout $p \geq p_0$. Donc,

$$\text{cap}(U) \geq \text{cap}(K_{p_0}) \geq \text{cap}(M) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Puisque cap est régulière extérieure, nous avons

$$\text{cap}(K) \geq \text{cap}(M) - \frac{\varepsilon}{2},$$

ce que nous pouvons réécrire comme,

$$\text{cap}(M) + \frac{\varepsilon}{2} \leq \text{cap}(K) + \varepsilon.$$

Puisque cap est une capacité extérieure, nous avons $\text{cap}(M) = \text{cap}^*(M)$ et nous pouvons donc trouver un ouvert $\tilde{U}$ contenant M tel que, $\text{cap}(U) \leq \text{cap}(M) + \frac{\varepsilon}{2}$. Donc, nous avons

trouvé K compact, $\tilde{U}$ ouvert tel que $K \subset M \subset \tilde{U}$ et,

$$\text{cap}(\tilde{U}) \leq \text{cap}(K) + \varepsilon,$$

ce qui montre la capacitabilité pour les ensembles de Suslin borné.

Supposons maintenant que $M \subset \mathbb{R}^N$ est non borné. Nous avons alors,

$$\begin{aligned} \text{cap}^*(M) &= \text{cap}^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M \cap B(0, n)\right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}^*(M \cap B(0, n)) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}_*(M \cap B(0, n)) \\ &\leq \text{cap}_*(M). \end{aligned}$$

L'inégalité inverse étant satisfaite, cela démontre la capacitabilité des ensembles de Suslin non borné. $\square$

Cela résous donc le problème posé par Cartan : puisque la capacité newtonienne est une capacité au sens de Choquet (théorème 1.4), il suit du théorème de capacitabilité que si $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ est tel que $\text{cap}_{2*}(E) = 0$, alors $\text{cap}_2^*(E) = 0$.

Chapitre 2

Exemples de capacités

Dans ce chapitre nous étudions les capacités de Sobolev, Bessel et Hausdorff dyadique. Nous nous intéresserons aux applications de ces capacités et vérifierons si celles-ci satisfont les conditions nécessaires pour être des capacités au sens de Choquet.

2.1 Capacité de Sobolev

Nous avons défini dans le premier chapitre la capacité p -variationnelle pour $1 \leq p < +\infty$, nous pouvons cependant observer que celle-ci devient triviale dès que $p > N$. Certains auteurs choisissent d'ailleurs de ne pas définir cette capacité pour de tels p , c'est par exemple la démarche suivie par Evans et Gariepy dans [7].

Proposition 2.1. *Pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$ et $p > N$ nous avons $\text{cap}_p(K) = 0$.*

Il suffit en effet d'établir que cette capacité est identiquement nulle sur les compacts pour pouvoir déduire grâce à l'extension (1.3) que $\text{cap}_p = 0$ sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$.

Démonstration. Prenons $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec $\varphi \geq 1$ sur $B(0, 1)$ et définissons pour $n \geq 1$ la fonction $\varphi_n(x) = \varphi\left(\frac{x}{n}\right)$. On observe alors que $\varphi_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ et $\varphi_n \geq 1$ sur $B(0, n)$ ce qui implique que $\varphi_n \in \mathcal{D}(K)$ pour n suffisamment grand. Dès lors, par le changement de variable $y = \frac{x}{n}$ nous obtenons

$$\text{cap}_p(K) \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_n(x)|^p dx = \frac{1}{n^{p-N}} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi(y)|^p dy.$$

Puisque $p - N > 0$, un passage à la limite quand $n \rightarrow \infty$ nous donne $\text{cap}_p(K) = 0$. $\square$

Nous pouvons modifier la définition de la capacité p -variationnelle de sorte à éviter que celle-ci s'annule dès que p excède la dimension de l'espace considéré, ceci nous amène à la définition de la capacité de Sobolev.

Définition 2.2. Pour $1 \leq p < +\infty$ et un compact $K \subset \mathbb{R}^N$ on définit la capacité de Sobolev par

$$\text{cap}_{W^{1,p}}(K) = \inf\{\|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p \mid \varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ telle que } \varphi \geq 0 \text{ et } \varphi > 1 \text{ sur } K\}$$

Pour étendre cette capacité à $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ nous pouvons procéder comme pour la capacité p -variationnelle : on pose tout d'abord pour U ouvert

$$\text{cap}_{W^{1,p}}(U) = \sup\{\text{cap}_{W^{1,p}}(K) \mid K \text{ est compact et } K \subset U\}. \quad (2.1)$$

Nous souhaiterions ensuite définir la capacité de $E \subset \mathbb{R}^N$ comme l'infimum des capacités des ouverts contenant cet ensemble. Pour assurer la cohérence de cette approche avec notre définition sur les compacts, nous devons montrer que la capacité de ces ensembles peut se calculer de manière similaire. Pour démontrer ceci, nous utiliserons le lemme suivant.

Lemme 2.3. Étant donné K un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^N$ et $\varepsilon > 0$ il existe un ouvert U contenant K et tel que

$$\text{cap}_{W^{1,p}}(U) \leq \text{cap}_{W^{1,p}}(K) + \varepsilon.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, nous pouvons trouver une fonction positive $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $\varphi > 1$ sur K et

$$\|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p \leq \text{cap}_{W^{1,p}}(K) + \varepsilon.$$

Montrons que l'ouvert $U = \{\varphi > 1\}$ satisfait les conditions requises. Pour tout compact L contenu dans U , la fonction φ est admissible dans la définition de $\text{cap}_{W^{1,p}}(L)$ et donc

$$\text{cap}_{W^{1,p}}(L) \leq \|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p \leq \text{cap}_{W^{1,p}}(K) + \varepsilon.$$

En minimisant le côté gauche par rapport à tous compacts contenus dans U nous obtenons

$$\text{cap}_{W^{1,p}}(U) \leq \text{cap}_{W^{1,p}}(K) + \varepsilon.$$

Puisque $\varphi > 1$ sur K , il suit que $K \subset U$ ce qui montre le résultat. $\square$

Avec un raisonnement similaire à celui que nous avons effectué pour la capacité p -variationnelle, on déduit de ce lemme que pour K compact

$$\text{cap}_{W^{1,p}}(K) = \inf\{\text{cap}_{W^{1,p}}(U) \mid U \text{ est ouvert et } K \subset U\}$$

et nous pouvons donc définir pour tout $E \subset \mathbb{R}^N$

$$\text{cap}_{W^{1,p}}(E) = \inf\{\text{cap}_{W^{1,p}}(U) \mid U \text{ est ouvert et } E \subset U\}. \quad (2.2)$$

La capacité de Sobolev étant régulière extérieure, il suit du théorème 1.18 qu'il suffit de démontrer la sous-additivité forte sur les compacts pour déduire que $\text{cap}_{W^{1,p}}$ est une capacité au sens de Choquet. La preuve de cette propriété nécessitera le lemme suivant.

Lemme 2.4. *Soient φ_1 et φ_2 des fonctions positives dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Pour tout $\varepsilon > 0$ il existe des fonctions positives ψ et ζ dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telles que sur $\mathbb{R}^N$*

$$|\psi - \max(\varphi_1, \varphi_2)| + |\zeta - \min(\varphi_1, \varphi_2)| \leq \varepsilon$$

et

$$\|\psi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \|\zeta\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p \leq \|\varphi_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \|\varphi_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p. \quad (2.3)$$

Démonstration. Puisque pour $\delta \geq 0$ les fonctions $\max(\varphi_1, \varphi_2 - \delta)$ et $\min(\varphi_1 + \delta, \varphi_2)$ sont continues, il suit du théorème 1.10 que sur tout sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^N$

$$\rho_n * \max(\varphi_1, \varphi_2 - \delta) \rightarrow \max(\varphi_1, \varphi_2 - \delta) \quad \text{et} \quad \rho_n * \min(\varphi_1 + \delta, \varphi_2) \rightarrow \min(\varphi_1 + \delta, \varphi_2)$$

ponctuellement quand $n \rightarrow \infty$. Dès lors, pour tout $\varepsilon > 0$ nous avons sur le compact

$$K = [\text{supp}(\max(\varphi_1, \varphi_1))] \cup [\text{supp}(\min(\varphi_1, \varphi_2))] \\ \cup [\text{supp}(\max(\varphi_1, \varphi_2 - \delta))] \cup [\text{supp}(\min(\varphi_1 + \delta, \varphi_2))]$$

et pour n_0 assez grand,

$$|\rho_{n_0} * \max(\varphi_1, \varphi_2 - \delta) - \max(\varphi_1, \varphi_2 - \delta)| \leq \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{et} \quad |\rho_{n_0} * \min(\varphi_1 + \delta, \varphi_2) - \min(\varphi_1 + \delta, \varphi_2)| \leq \frac{\varepsilon}{4}.$$

De plus,

$$0 \leq \max(\varphi_1, \varphi_2) - \max(\varphi_1, \varphi_2 - \delta) \leq \delta \quad (2.4)$$

et

$$0 \leq \min(\varphi_1, \varphi_2) - \min(\varphi_1 + \delta, \varphi_2) \leq \delta. \quad (2.5)$$

Donc si nous choisissons $\delta \leq \frac{\varepsilon}{4}$ et si nous définissons

$$\psi = \rho_{n_0} * \max(\varphi_1, \varphi_2 - \delta) \quad \text{et} \quad \zeta = \rho_{n_0} * \min(\varphi_1 + \delta, \varphi_2)$$

nous avons sur K

$$\begin{aligned} & |\psi - \max(\varphi_1, \varphi_2)| + |\zeta - \min(\varphi_1, \varphi_2)| \\ & \leq |\rho_{n_0} * \max(\varphi_1, \varphi_2 - \delta) - \max(\varphi_1, \varphi_2 - \delta)| \\ & \quad + |\max(\varphi_1, \varphi_2 - \delta) - \max(\varphi_1, \varphi_2)| \\ & \quad + |\rho_{n_0} * \min(\varphi_1 + \delta, \varphi_2) - \min(\varphi_1 + \delta, \varphi_2)| \\ & \quad + |\min(\varphi_1 + \delta, \varphi_2) - \min(\varphi_1, \varphi_2)| \\ & \leq \varepsilon. \end{aligned}$$

Et en observant que $\psi - \max(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ et $\zeta - \min(\varphi_1, \varphi_2) = 0$ sur $\mathbb{R}^N \setminus K$, nous déduisons que sur $\mathbb{R}^N$

$$|\psi - \max(\varphi_1, \varphi_2)| + |\zeta - \min(\varphi_1, \varphi_2)| \leq \varepsilon.$$

De plus, les fonctions $\max(\varphi_1, \varphi_2 - \delta)$ et $\min(\varphi_1 + \delta, \varphi_2)$ étant localement intégrables, le théorème 1.10 implique que ψ et ζ sont des fonctions $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Pour montrer (2.3) remarquons que pour $\delta \geq 0$

$$|\max(\varphi_1, \varphi_2 - \delta)|^p + |\min(\varphi_1 + \delta, \varphi_2)|^p = |\varphi_1|^p + |\varphi_2|^p. \quad (2.6)$$

En utilisant que pour $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\max(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta + |\alpha - \beta|}{2} \quad \text{et} \quad \min(\alpha, \beta) = \frac{\alpha + \beta - |\alpha - \beta|}{2}$$

on calcule que sur l'ensemble $\{\varphi_2 - \varphi_1 > \delta\}$

$$\max(\varphi_1, \varphi_2 - \delta) = \varphi_2 - \frac{\delta}{2} \quad \text{et} \quad \min(\varphi_1 + \delta, \varphi_2) = \varphi_1 + \delta$$

et sur $\{\varphi_2 - \varphi_1 < \delta\}$

$$\max(\varphi_1, \varphi_2 - \delta) = \varphi_1 + \frac{\delta}{2} \quad \text{et} \quad \min(\varphi_1 + \delta, \varphi_2) = \varphi_2 + \delta.$$

Dès lors, les fonctions $\max(\varphi_1, \varphi_2 - \delta)$ et $\min(\varphi_1 + \delta, \varphi_2)$ sont différentiables sur l'ouvert $\{\varphi_2 - \varphi_1 \neq \delta\}$ avec

$$\nabla \max(\varphi_1, \varphi_2 - \delta) = \begin{cases} \nabla \varphi_1 & \text{si } \varphi_2 - \varphi_1 < \delta \\ \nabla \varphi_2 & \text{si } \varphi_2 - \varphi_1 > \delta \end{cases}$$

et

$$\nabla \min(\varphi_1 + \delta, \varphi_2) = \begin{cases} \nabla \varphi_2 & \text{si } \varphi_2 - \varphi_1 < \delta \\ \nabla \varphi_1 & \text{si } \varphi_2 - \varphi_1 > \delta \end{cases}.$$

Puisque l'ensemble $\{\varphi_2 - \varphi_1 = \delta\}$ est négligeable (en tant que courbe de niveau de la fonction $\varphi_2 - \varphi_1$), nous avons presque partout sur $\mathbb{R}^N$

$$|\nabla \max(\varphi_1, \varphi_2 - \delta)|^p + |\nabla \min(\varphi_1 + \delta, \varphi_2)|^p = |\nabla \varphi_1|^p + |\nabla \varphi_2|^p. \quad (2.7)$$

En combinant (2.6) et (2.7) nous obtenons

$$\|\max(\varphi_1, \varphi_2 - \delta)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \|\min(\varphi_1 + \delta, \varphi_2)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p = \|\varphi_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \|\varphi_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p.$$

Donc, nous avons par l'inégalité de Jensen

$$\begin{aligned}\|\psi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \|\zeta\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p &= \|\rho_n * \max(\varphi_1, \varphi_2 - \delta)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \|\rho_n * \min(\varphi_1 + \delta, \varphi_2)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p \\ &\leq \|\max(\varphi_1, \varphi_2 - \delta)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \|\min(\varphi_1 + \delta, \varphi_2)\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p \\ &= \|\varphi_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p + \|\varphi_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p\end{aligned}$$

□

Nous allons maintenant utiliser les fonctions ψ et ζ pour démontrer la propriété de sous-additivité forte sur les compacts.

Proposition 2.5. *Pour tout $K_1, K_2 \subset \mathbb{R}^N$ compacts, nous avons*

$$\text{cap}_{W^{1,p}}(K_1 \cup K_2) + \text{cap}_{W^{1,p}}(K_1 \cap K_2) \leq \text{cap}_{W^{1,p}}(K_1) + \text{cap}_{W^{1,p}}(K_2).$$

Démonstration. Prenons pour $n = 1, 2$ une fonction positive φ_n dans $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ telle que $\varphi_n > 1$ sur K_n et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\varphi_n > 1 + \varepsilon$ sur K_n . Considérons les fonctions ψ et ζ données par le lemme précédent, nous avons alors $\psi > 1$ sur $K_1 \cup K_2$ et $\zeta > 1$ sur $K_1 \cap K_2$. Dès lors,

$$\begin{aligned}\text{cap}_{W^{1,p}}(K_1 \cup K_2) + \text{cap}_{W^{1,p}}(K_1 \cap K_2) &\leq \|\psi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} + \|\zeta\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \\ &\leq \|\varphi_1\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} + \|\varphi_2\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.\end{aligned}$$

ce qui montre la sous-additivité forte en minimisant le côté droit. □

Théorème 2.6. *La capacité de Sobolev est une capacité au sens de Choquet.*

Démonstration. Il est clair que la condition [C1](#) est satisfaite. De plus, la capacité de Sobolev étant régulière extérieure et fortement sous-additive sur les compacts, il suit du théorème [1.18](#) que cette capacité satisfait les conditions de la définition [1.1](#). □

A l'instar de la mesure de Lebesgue pour les fonctions intégrables, la capacité de Sobolev est la notion adaptée pour l'étude des fonctions dans $W^{1,p}$, facilitant l'étude de leurs propriétés. Cette capacité permet en effet de trouver des versions Sobolev de théorèmes valides dans les espaces de Lebesgue. On peut par exemple montrer l'analogue du théorème de différentiation de Lebesgue [[13](#), Theorem 4.27] : si $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ avec $1 \leq p < +\infty$, alors il existe $E \subset \mathbb{R}^N$ avec $\text{cap}_{W^{1,p}}(E) = 0$ tel que la limite

$$\lim_{r \rightarrow 0} \oint_{B(x,r)} u(y) dy$$

existe pour tout $x \in \mathbb{R}^N \setminus E$.

Le calcul explicite de la capacité d'un ensemble donné est souvent un problème difficile à résoudre. Il est plus souvent réalisable d'établir que celle-ci est nulle ou non plutôt que de parvenir à une valeur numérique exacte. Intéressons-nous à quelques exemples, nous avons montré au début de cette section que la capacité p -variationnelle est triviale dès que $p > N$, ce ne sera pas le cas pour la capacité de Sobolev : tout ensemble non-vide aura une capacité strictement positive pour de tels p .

Proposition 2.7. *Soit $x \in \mathbb{R}^N$, alors pour $p > N$ nous avons $\text{cap}_{W^{1,p}}(\{x\}) > 0$.*

Par monotonie de la capacité de Sobolev, ceci implique en effet que tout ensemble contenant au moins un point aura une capacité non-nulle.

Démonstration. Soient $x \in \mathbb{R}^N$, et $u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec $u(x) > 1$. Fixons $0 < r \leq 1$ et prenons une fonction $\eta \in \mathcal{C}_c^\infty(B(x, 2))$ telle que $0 \leq \eta \leq 1$ et $\eta = 1$ sur $B(x, r)$, on suppose de plus que $|\nabla \eta| \leq 2$. En étendant η à $\mathbb{R}^N$ par 0 en dehors de $B(x, 2)$, nous avons $\eta u \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$. Dès lors, par l'inégalité de Morrey [22, Lemma 6.4.3], il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $y, z \in \mathbb{R}^N$

$$|(\eta u)(y) - (\eta u)(z)| \leq C|y - z|^{1-\frac{N}{p}} \|\nabla(\eta u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Choisissons $y \in B(x, r)$ et $z \in B(x, 4) \setminus B(x, 2)$ tels que $(\eta u)(y) \geq 1$ et $(\eta u)(z) = 0$. Nous avons alors $1 \leq |y - z| \leq 5$ et donc

$$\int_{B(x, 2)} |\nabla(\eta u)(w)|^p dw = \|\nabla(\eta u)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \geq \frac{1}{C} |y - z|^{N-p} |(\eta u)(y) - (\eta u)(z)|^p \geq \frac{5^{N-p}}{C} = C' > 0.$$

D'un autre côté nous avons

$$\begin{aligned} \int_{B(x, 2)} |\nabla(\eta u)(y)|^p dy &= \int_{B(x, 2)} |\nabla \eta(y) u(y) + \eta(y) \nabla u(y)|^p dy \\ &\leq 2^p \left(\int_{B(x, 2)} |\nabla \eta(y)|^p |u(y)|^p dy + \int_{B(x, 2)} |\eta(y)|^p |\nabla u(y)|^p dy \right) \\ &\leq 2^p \left(2^p \int_{B(x, 2)} |u(y)|^p dy + \int_{B(x, 2)} |\nabla u(y)|^p dy \right) \\ &\leq 4^p \|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p. \end{aligned}$$

Cela montre l'existence d'une constante $C'' > 0$ telle que $\|u\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p \geq C'' > 0$. Ceci étant vrai pour u arbitraire on en déduit que pour $p > N$, $\text{cap}_{W^{1,p}}(\{x\}) > 0$. $\square$

Lorsque $p < N$, c'est le contraire qui se passe : tout singleton aura une capacité nulle. Encore une fois, nous pouvons utiliser la monotonie pour établir ce résultat : puisque pour tout $r > 0$ nous avons $\{x\} \subset B(x, r)$, il suffit de trouver une estimation de la capacité d'une boule pour déduire la capacité d'un singleton.

Proposition 2.8. *Pour $a \in \mathbb{R}^N$ et $0 < r \leq 1$ nous avons*

$$\text{cap}_{W^{1,p}}(B[a, r]) \leq r^{N-p} \text{cap}_{W^{1,p}}(B[0, 1]).$$

Démonstration. Prenons $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ avec $\varphi > 1$ sur $B[0, 1]$. En définissant la fonction $\varphi_{a,r}$ pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ par $\varphi_{a,r}(x) = \varphi\left(\frac{x-a}{r}\right)$, nous avons par le changement de variable $y = \frac{x-a}{r}$

$$\begin{aligned} \|\varphi_{a,r}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p &= \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_{a,r}(x)|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_{a,r}(x)|^p dx \\ &= r^N \int_{\mathbb{R}^N} |\varphi(y)|^p dy + r^{N-p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi(y)|^p dy. \end{aligned}$$

Donc, puisque $r \leq 1$ et que $\varphi_{a,r}$ est admissible pour $B[a, r]$ nous obtenons

$$\text{cap}_{W^{1,p}}(B[a, r]) \leq \|\varphi_{a,r}\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p \leq r^{N-p} \|\varphi\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}^p.$$

En prenant l'infimum par rapport à toute fonction admissible pour $B[0, 1]$ nous avons la conclusion. $\square$

Nous pouvons maintenant facilement calculer la capacité d'un singleton quand p est supérieur à N : si $x \in \mathbb{R}^N$, alors pour tout $0 < r \leq 1$ nous avons $\{x\} \subset B[x, r]$ et donc par monotonie,

$$\text{cap}_{W^{1,p}}(\{x\}) \leq \text{cap}_{W^{1,p}}(B[x, r]) \leq r^{N-p} \text{cap}_{W^{1,p}}(B[0, 1]).$$

Dès lors, puisque $N - p > 0$ un passage à la limite quand $r \rightarrow 0$ livre $\text{cap}_{W^{1,p}}(\{x\}) = 0$. En particulier, cela implique que tout ensemble dénombrable aura une capacité nulle dès que $p < N$.

Nous sommes donc capables de calculer explicitement la capacité des ensembles dénombrables, mais que pouvons nous dire pour des ensembles plus complexe ? Si nous nous intéressons à des ensembles borné et donc contenu dans une boule, nous pourrions être tenté d'utiliser la méthode employée ci-dessus pour calculer la capacité d'un singleton. Observons cependant que cet argument utilise qu'un singleton peut être inclu dans une boule de rayon arbitrairement petit, ce qui nous permet de passer à la limite quand ce rayon tend vers zéro. Ceci ne sera évidemment pas possible dans la cas d'un ensemble borné arbitraire et nous devons donc trouver une autre manière d'étudier la capacité de ces derniers.

Pour ce faire, nous allons comparer la capacité de Sobolev avec une notion plus géométrique comme la capacité de Hausdorff. Étant donné un exposant $0 \leq s < +\infty$ et une jauge $0 < \delta \leq +\infty$, celle-ci est définie pour $K \subset \mathbb{R}^N$ compact par

$$\mathcal{H}_\delta^s(K) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^k \omega_s r_n^s \mid K \subset \bigcup_{n=1}^k B(x_n, r_n) \text{ et } 0 < r_n \leq \delta \right\}$$

où $\omega_s = \pi^{\frac{s}{2}}/\Gamma(\frac{s}{2} + 1)$ et Γ est la fonction gamma d'Euler définie pour tout $z > 0$ par

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t} dt.$$

Le calcul de cette capacité est plus simple, on peut par exemple donner explicitement la capacité de Hausdorff d'une boule.

Exemple 2.9. Pour $a \in \mathbb{R}^N$ et pour tout $0 < r < \delta$ nous avons

$$\mathcal{H}_\delta^s(B[a, r]) = \begin{cases} \omega_s r^s & \text{si } s \leq N \\ 0 & \text{si } s > N \end{cases}.$$

Nous montrons tout d'abord le cas $s \leq N$. Pour $n \geq 1$ suffisamment grand, nous avons $r < r + \frac{1}{n} \leq \delta$ et la boule $B[a, r]$ est alors recouverte par $B(a, r + \frac{1}{n})$. Nous avons donc $\mathcal{H}_\delta^s(B[a, r]) \leq \omega_s (r + \frac{1}{n})^s \rightarrow \omega_s r^s$ quand $n \rightarrow \infty$. Pour l'inégalité inverse, prenons $(B(x_n, r_n))_{1 \leq n \leq k}$ un recouvrement de $B[a, r]$ avec $r_n \leq \delta$. Nous avons en utilisant la sous-additivité de la mesure de Lebesgue

$$r^N \leq \sum_{n=1}^k r_n^N.$$

Donc, puisque $0 \leq \frac{s}{N} \leq 1$ nous obtenons

$$r^s = (r^N)^{\frac{s}{N}} \leq \left(\sum_{n=1}^k r_n^N \right)^{\frac{s}{N}} \leq \sum_{n=1}^k r_n^s.$$

En minimisant le côté droit par rapport à tout recouvrement fini de $B[a, r]$ par des boules ouvertes de rayon inférieur à δ , on déduit que $\omega_s r^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(B[a, r])$.

Maintenant, si $s > N$ prenons $0 < \theta \leq \delta$ et $(B(x_n, r_n))_{1 \leq n \leq k}$ un recouvrement de $B[a, r]$ avec $0 < r_n \leq \theta$. Nous avons alors

$$\mathcal{H}_\delta^s(B[a, r]) \leq \sum_{n=1}^k \omega_s r_n^s = \sum_{n=1}^k \omega_s r_n^{s-N} r_n^N \leq \omega_s \theta^{s-N} \sum_{n=1}^k r_n^N.$$

En choisissant le recouvrement tel que $\sum_{n=1}^k r_n^N \leq r^N + 1$, nous obtenons

$$\mathcal{H}_\delta^s(B[a, r]) \leq \omega_s \theta^{s-N} (r^N + 1).$$

On conclut en prenant la limite quand $\theta \rightarrow 0$.

Une nouvelle fois, nous avons défini une capacité uniquement sur les compacts. Nous pouvons l'étendre sur $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$ en suivant le même procédé que précédemment : on pose

pour U ouvert

$$\mathcal{H}_\delta^s(U) = \sup\{\mathcal{H}_\delta^s(K) \mid K \text{ est compact et } K \subset U\}$$

et ensuite pour $E \subset \mathbb{R}^N$

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf\{\mathcal{H}_\delta^s(U) \mid U \text{ est ouvert et } E \subset U\}.$$

Le lemme suivant justifie cette extension de $\mathcal{K}(\mathbb{R}^N)$ vers $\mathcal{P}(\mathbb{R}^N)$.

Lemme 2.10. *Soit K un sous-ensemble compact de $\mathbb{R}^N$. Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert U contenant K et tel que*

$$\mathcal{H}_\delta^s(U) \leq \mathcal{H}_\delta^s(K) + \varepsilon.$$

Démonstration. Soit $(B(x_n, r_n))_{1 \leq n \leq k}$ un recouvrement de K par des boules de rayon inférieure à δ et tel que

$$\sum_{n=1}^k \omega_s r_n^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(K) + \varepsilon.$$

Montrons que l'ouvert

$$U = \bigcup_{n=1}^k B(x_n, r_n)$$

satisfait les conditions requises. Pour tout compact L contenu dans U , la même collection de boules forme un recouvrement de L et donc

$$\mathcal{H}_\delta^s(L) \leq \sum_{n=1}^k \omega_s r_n^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(K) + \varepsilon.$$

En prenant l'infimum par rapport à tout compact L contenu dans U nous obtenons que

$$\mathcal{H}_\delta^s(U) \leq \mathcal{H}_\delta^s(K) + \varepsilon. \quad \square$$

Le lien entre les capacités de Sobolev et Hausdorff est donné par le résultat suivant.

Proposition 2.11. *Pour $1 \leq p \leq N$ et tout $0 < \delta < +\infty$, il existe une constante $C > 0$ dépendant seulement de δ , N et p telle que*

$$\text{cap}_{W^{1,p}} \leq C \mathcal{H}_\delta^{N-p}.$$

Démonstration. Nous montrons la proposition avec $\delta = 1$. Au vu de l'extension que nous avons faite de la capacité de Hausdorff, il suffit de démontrer le résultat sur les compacts. Soient $K \subset \mathbb{R}^N$ un compact et $(B(x_n, r_n))_{1 \leq n \leq k}$ une famille de boules recouvrant K

avec $r_n \leq 1$ pour tout $1 \leq n \leq k$. Par monotonie, sous-additivité dénombrable de la capacité de Sobolev et la proposition 2.8 nous avons

$$\text{cap}_{W^{1,p}}(K) \leq \sum_{n=1}^k \text{cap}_{W^{1,p}}(B[x_n, r_n]) \leq \text{cap}_{W^{1,p}}(B[0, 1]) \sum_{n=1}^k r_n^{N-p}.$$

Dès lors, en minimisant le côté droit par rapport à tout recouvrement de K par des boules, nous avons la conclusion en prenant

$$C = \frac{\text{cap}_{W^{1,p}}(B[0, 1])}{\omega_{N-p}}. \quad \square$$

Cette proposition implique que tout ensemble de capacité de Hausdorff nul aura aussi une capacité de Sobolev nulle. Dès lors, pour savoir si un ensemble donné a une capacité de Sobolev nulle, il suffit de regarder sa capacité de Hausdorff.

Dans le cas $p = 1$, nous avons une inégalité inverse : il existe une constante $C' > 0$ dépendant seulement de N telle que $\mathcal{H}_\delta^{N-1} \leq C' \text{cap}_{W^{1,1}}$. Nous ne démontrerons pas ce résultat, la preuve de ce dernier nous détournerais trop de nos objectifs, le lecteur intéressé par cette démonstration pourra la trouver dans [10, Proposition 16.12]. Ceci nous permet donc d'affirmer quand pour $p = 1$, les ensembles de capacités nulles coïncident pour les capacités de Sobolev et Hausdorff.

2.2 Capacité de Bessel

La section précédente a mis en évidence l'utilité des capacités dans l'étude des fonctions de Sobolev, elles trouvent également des applications dans l'étude des équations aux dérivées partielles.

Considérons l'équation de Laplace $\Delta u = 0$. Un compact K est dit effaçable dans L^p si toute solution u de cette équation sur $U \setminus K$ pour un certain voisinage ouvert borné U de K avec $u \in L^p(U \setminus K)$ peut être étendue en une fonction $\tilde{u} \in L^p(U)$ telle que $\Delta \tilde{u} = 0$.

On peut naturellement se demander quelles conditions sur K rendrait cette extension possible. Intuitivement, il semble raisonnable de dire que cette condition devrait dépendre de la taille de K . On pourrait en effet s'attendre à ce que cette extension soit possible pour un compact de taille suffisamment petite. Pour trouver la notion de taille adaptée, nous introduisons la capacité de Bessel.

Avant de définir cette capacité, nous aurons besoin de quelques notions préliminaires. Rappelons que pour une fonction intégrable f sur $\mathbb{R}^N$ sa transformée de Fourier est

définie pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ par

$$\mathcal{F}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(\xi) e^{-2\pi i(x|\xi)} d\xi$$

où $(\cdot|\cdot)$ désigne le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^N$.

Exemple 2.12. [17, Remark 2.1] *Considérons la fonction $f(x) = e^{-\pi t|x|^2}$ définie pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ avec $t > 0$ fixé. En faisant le changement de variable $x = \frac{y}{\sqrt{\pi t}}$ nous obtenons*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f(x)| dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi t|x|^2} dx = t^{\frac{-N}{2}} < +\infty$$

et donc $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Remarquons que par bilinéarité du produit scalaire nous avons pour tout $\xi \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} -\pi t|\xi|^2 - 2\pi i(x|\xi) &= -\pi t|\xi|^2 - 2\pi i(x|\xi) + \frac{\pi}{t}|x|^2 - \frac{\pi}{t}|x|^2 \\ &= -\pi t\left(|\xi|^2 + 2i\left(\frac{x}{t}|\xi\right) - \frac{|x|^2}{t^2}\right) - \frac{\pi}{t}|x|^2 \\ &= -\pi t\left|\xi + i\frac{x}{t}\right|^2 - \frac{\pi}{t}|x|^2. \end{aligned}$$

Nous avons alors

$$\mathcal{F}(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi t|\xi|^2} e^{-2\pi i(x|\xi)} d\xi = e^{-\frac{\pi}{t}|x|^2} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-\pi t|\xi + i\frac{x}{t}|^2} d\xi = e^{-\frac{\pi}{t}|x|^2} t^{\frac{-N}{2}}.$$

Étant donné $\alpha > 0$ on définit le noyau de Bessel comme la fonction $G_\alpha : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaisant $\mathcal{F}(G_\alpha)(x) = (1 + 4\pi|x|^2)^{\frac{-\alpha}{2}}$. Une telle fonction existe bien comme l'affirme la proposition suivante.

Proposition 2.13. *Le noyau de Bessel est donné par*

$$G_\alpha(x) = \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty e^{\frac{-\pi|x|^2}{t}} e^{\frac{-t}{4\pi}} t^{\frac{\alpha-N}{2}} \frac{dt}{t}.$$

Remarquons que la fonction G_α est bien intégrable et que cela a donc du sens d'en prendre sa transformée de Fourier. En effet, par le changement de variable $y = \sqrt{\frac{t}{\pi}}x$ nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{-\pi|x|^2}{t}} dx = t^{\frac{N}{2}}.$$

Donc, par le théorème de Fubini et le changement de variable $y = 4\pi t$ nous obtenons

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |G_\alpha(x)| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty e^{\frac{-\pi|x|^2}{t}} e^{\frac{-t}{4\pi} t^{\frac{\alpha-N}{2}}} \frac{dt}{t} dx \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{-\pi|x|^2}{t}} dx \right) e^{\frac{-t}{4\pi} t^{\frac{\alpha-N}{2}}} \frac{dt}{t} \\
&= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty e^{\frac{-t}{4\pi} t^{\frac{\alpha}{2}-1}} dt \\
&= \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-y} y^{\frac{\alpha}{2}-1} dy \\
&= 1 \\
&< +\infty
\end{aligned}$$

ce qui montre que G_α est intégrable.

Démonstration de la proposition 2.13. Calculons la transformée de Fourier de la fonction

$$x \in \mathbb{R}^N \mapsto \int_0^\infty e^{\frac{-\pi|x|^2}{t}} e^{\frac{-t}{4\pi} t^{\frac{\alpha-N}{2}}} \frac{dt}{t}.$$

Par le théorème de Fubini et l'exemple 2.12, on a

$$\begin{aligned}
\mathcal{F} \left(\int_0^\infty e^{\frac{-\pi|\cdot|^2}{t}} e^{\frac{-t}{4\pi} t^{\frac{\alpha-N}{2}}} \frac{dt}{t} \right) (x) &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_0^\infty e^{\frac{-\pi|\xi|^2}{t}} e^{\frac{-t}{4\pi} t^{\frac{\alpha-N}{2}}} \frac{dt}{t} \right) e^{-2\pi i(x|\xi)} d\xi \\
&= \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{-\pi|\xi|^2}{t}} e^{-2\pi i(x|\xi)} d\xi \right) e^{\frac{-t}{4\pi} t^{\frac{\alpha-N}{2}}} \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty \mathcal{F}(e^{\frac{-\pi}{t} |\cdot|^2})(x) e^{\frac{-t}{4\pi} t^{\frac{\alpha-N}{2}}} \frac{dt}{t} \\
&= \int_0^\infty e^{-\pi t|x|^2} e^{\frac{-t}{4\pi} t^{\frac{\alpha}{2}}} \frac{dt}{t}.
\end{aligned}$$

D'un autre côté, pour $y > 0$ nous avons

$$y^{\frac{-\alpha}{2}} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right)} \int_0^\infty e^{-yt} t^{\frac{\alpha}{2}-1} dt.$$

Dès lors, en posant $y = \frac{1+4\pi^2|x|^2}{4\pi}$ nous obtenons $\mathcal{F}(G_\alpha)(x) = (1 + 4\pi|x|^2)^{\frac{-\alpha}{2}}$. □

Nous sommes maintenant prêt à définir la capacité de Bessel.

Définition 2.14. Pour $1 < p < +\infty$, $\alpha > 0$ et $E \subset \mathbb{R}^N$ on définit

$$\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E) = \inf\{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \mid f \in L^p(\mathbb{R}^N), f \geq 0 \text{ et } G_\alpha * f \geq 1 \text{ sur } E\}.$$

Dans le cas où il n'existe pas de fonction f positive dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ telle que $G_\alpha * f \geq 1$ sur E , on pose $\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E) = \infty$.

Cette capacité nous permet de résoudre le problème énoncé au début de cette section : un compact K sera effaçable pour l'équation de Laplace si $\text{cap}_{B^{2,p}}(K) = 0$. Cette extension ne sera cependant pas réalisable dans le cas où $\text{cap}_{B^{2,p'}}(K) > 0$ avec p' l'exposant conjugué à p . Ceci est en fait un cas particulier d'un résultat plus général.

Théorème 2.15. [1, Theorem 2.7.4] Soient $K \subset \mathbb{R}^N$ compact et $\mathcal{L}$ un opérateur différentiel d'ordre $\alpha < N$ avec coefficient constant. De plus, considérons u une solution de l'équation $\mathcal{L}u = 0$ sur $U \setminus K$ avec U un certain voisinage ouvert borné de K et $u \in L^p(U \setminus K)$. Alors, si $\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(K) = 0$, il existe $\tilde{u} \in L^p(U)$ avec $\mathcal{L}\tilde{u} = 0$. Dans le cas où $\text{cap}_{B_{\alpha,p'}}(K) > 0$, il n'existe pas de telle fonction.

Nous montrons maintenant que la capacité de Bessel satisfait les conditions requises pour être une capacité au sens de Choquet, nous suivons pour cela [1, Chapter 2]. Comme nous l'avons observé au chapitre 1, il est commode de travailler avec des capacités régulières extérieures étant donné que les conditions C2 et C4 sont satisfaites pour de telles capacités. Nous avons vu que les capacités p -variationnelle, de Sobolev et de Hausdorff satisfont cette régularité, nous allons montrer que c'est aussi le cas pour la capacité de Bessel.

Proposition 2.16. Pour tout $E \subset \mathbb{R}^N$ nous avons

$$\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E) = \inf\{\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(U) \mid U \text{ est ouvert et } E \subset U\}.$$

Il suffit de démontrer que pour tout $\varepsilon > 0$, nous pouvons trouver un ouvert U tel que $E \subset U$ et $\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E) \leq \text{cap}_{B_{\alpha,p}}(U) + \varepsilon$. Pour établir l'existence de cet ouvert nous pouvons procéder comme suit : par définition de la capacité de Bessel il existe une fonction positive $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$G_\alpha * f \geq 1 \text{ sur } E \quad \text{et} \quad \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \leq \text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E) + \varepsilon.$$

Nous aimerions prendre l'ensemble

$$\{x \in \mathbb{R}^N \mid (G_\alpha * f)(x) > 1 - \varepsilon\}$$

comme candidat pour l'ensemble U . Pour montrer que celui-ci est effectivement ouvert, nous utiliserons la notion de fonction semi-continue inférieurement.

Définition 2.17. Une fonction $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est semi-continue inférieurement (s.c.i) en $a \in \mathbb{R}^N$ si pour tout $t < f(a)$, il existe un voisinage ouvert U de a tel que $t < f(x)$ pour tout $x \in U$. Nous dirons qu'une fonction est s.c.i si elle l'est en tout $a \in \mathbb{R}^N$.

Vérifier qu'une fonction est s.c.i en utilisant cette définition peut s'avérer assez complexe, nous commençons donc par donner une condition nécessaire et suffisante permettant de vérifier la semi-continuité inférieure d'une fonction.

Lemme 2.18. Une fonction $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est s.c.i en $a \in \mathbb{R}^N$ si et seulement si $\liminf_{x \rightarrow a} f(x) \geq f(a)$ où

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{\substack{x \in B(a, \varepsilon) \\ x \neq a}} f(x).$$

Démonstration. Supposons tout d'abord que f est s.c.i en $a \in \mathbb{R}^N$. Par définition, pour tout $t < f(a)$ il existe un voisinage U de a tel que pour tout $x \in U$ nous avons $t < f(x)$. De plus, U étant ouvert nous pouvons trouver $\varepsilon > 0$ tel que $B(a, \varepsilon) \subset U$ et $t < f(x)$ pour tout $x \in B(a, \varepsilon)$. Dès lors,

$$\inf_{\substack{x \in B(a, \varepsilon) \\ x \neq a}} f(x) \geq t$$

et un passage au suprénum pour $\varepsilon > 0$ nous donne donc

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{\substack{x \in B(a, \varepsilon) \\ x \neq a}} f(x) \geq t.$$

Il nous suffit maintenant de prendre la limite quand $t \rightarrow f(a)$ pour déduire que

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) \geq f(a).$$

Dans l'autre sens, soit $t \in \mathbb{R}$ tel que $t < f(a)$, nous avons alors par hypothèse

$$\liminf_{x \rightarrow a} f(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \inf_{\substack{x \in B(x, \varepsilon) \\ x \neq a}} f(x) \geq f(a) > t.$$

Par définition de supremum, il existe $\varepsilon_0 > 0$ tel que

$$\sup_{\varepsilon > 0} \inf_{\substack{x \in B(x, \varepsilon) \\ x \neq a}} f(x) \geq \inf_{\substack{x \in B(x, \varepsilon_0) \\ x \neq a}} f(x) > t$$

ce qui implique que pour tout $x \in B(a, \varepsilon_0)$ nous avons $f(x) > t$. On conclut donc que f est s.c.i en prenant $U = B(a, \varepsilon_0)$. $\square$

Il est bien connu que la pré-image d'un ouvert par une application continue est un ensemble ouvert, nous avons un résultat similaire pour les fonctions s.c.i.

Lemme 2.19. *Une fonction $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est s.c.i si et seulement si pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'ensemble*

$$U_t = \{x \in \mathbb{R}^N \mid f(x) > t\}$$

est ouvert.

Démonstration. Supposons dans un premier temps que f est s.c.i. Si $U_t = \emptyset$, alors c'est bien un ouvert. Dans le cas contraire, pour tout $y \in U_t$ nous avons $f(y) > t$ et nous pouvons donc trouver un voisinage V de y tel que si $x \in V$ alors $f(x) > t$. Cela implique que $V \subset U_t$ et donc U_t est ouvert.

Dans l'autre sens, prenons $a \in \mathbb{R}^N$ et $t \in \mathbb{R}$ tel que $f(a) > t$. Puisque U_t est ouvert et que $a \in U_t$, cet ensemble forme un voisinage de a . De plus, pour tout $x \in U_t$ nous avons par définition $f(x) > t$ ce qui montre que f est s.c.i. $\square$

Nous sommes maintenant prêt pour démontrer la régularité extérieure de la capacité de Bessel.

Démonstration de la proposition 2.16. Nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E) < +\infty$. Puisque pour tout ouvert U contenant E nous avons par monotonie $\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E) \leq \text{cap}_{B_{\alpha,p}}(U)$ on en déduit que

$$\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E) \leq \inf\{\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(U) \mid U \text{ est ouvert et } E \subset U\}. \quad (2.8)$$

Pour montrer l'inégalité inverse, prenons $0 < \varepsilon < 1$ et une fonction positive $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$G_\alpha * f \geq 1 \text{ sur } E \quad \text{et} \quad \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \leq \text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E) + \varepsilon.$$

Par le lemme de Fatou nous avons pour $a \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned} (G_\alpha * f)(a) &= \int_{\mathbb{R}^N} G_\alpha(a-y)f(y)dy \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^\infty e^{-\frac{\pi|a|^2}{t}} e^{-\frac{t}{4\pi}} t^{\frac{\alpha-N}{2}} \frac{dt}{t} f(y)dy \\ &= \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^\infty \liminf_{x \rightarrow a} e^{-\frac{\pi|x|^2}{t}} e^{-\frac{t}{4\pi}} t^{\frac{\alpha-N}{2}} \frac{dt}{t} f(y)dy \\ &\leq \frac{1}{(4\pi)^{\frac{\alpha}{2}}\Gamma(\frac{\alpha}{2})} \liminf_{x \rightarrow a} \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^\infty e^{-\frac{\pi|x|^2}{t}} e^{-\frac{t}{4\pi}} t^{\frac{\alpha-N}{2}} \frac{dt}{t} f(y)dy \\ &= \liminf_{x \rightarrow a} (G_\alpha * f)(x) \end{aligned}$$

ce qui montre que la fonction $G_\alpha * f$ est semi-continue inférieurement et donc l'ensemble

$$U = \{x \in \mathbb{R}^N \mid (G_\alpha * f)(x) > 1 - \varepsilon\}$$

est ouvert par le lemme 2.19. Puisque $G_\alpha * ((1 - \varepsilon)^{-1} f) \geq 1$ sur U , la fonction $(1 - \varepsilon)^{-1} f$ est admissible dans la définition de $\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(U)$ et nous avons alors

$$\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(U) \leq \frac{1}{(1 - \varepsilon)^p} \int_{\mathbb{R}^N} f^p dx \leq \frac{1}{(1 - \varepsilon)^p} (\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E) + \varepsilon).$$

Puisque $E \subset U$ nous obtenons

$$\inf\{\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(U) \mid U \text{ est ouvert et } E \subset U\} \leq \text{cap}_{B_{\alpha,p}}(U) \leq \frac{1}{(1 - \varepsilon)^p} (\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E) + \varepsilon)$$

et un passage à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ nous donne

$$\inf\{\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(U) \mid U \text{ est ouvert et } E \subset U\} \leq \text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E).$$

En combinant cette inégalité avec (2.8) on conclut que la capacité de Bessel est régulière extérieure. $\square$

La régularité de cette capacité nous permet de montrer les conditions C3 et C4 de la définition 1.1.

Corollaire 2.20. *Pour toute suite décroissante $(K_n)_{n \geq 1}$ de sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^N$, nous avons*

$$\text{cap}_{B_{\alpha,p}}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}_{B_{\alpha,p}}(K_n).$$

De plus, pour toute suite $(E_n)_{n \geq 1}$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$ nous avons

$$\text{cap}_{B_{\alpha,p}}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E_n).$$

Démonstration. Puisque la capacité de Bessel est régulière extérieure, par la proposition 1.6 la condition C4 est satisfaite.

Considérons maintenant $(E_n)_{n \geq 1}$ une collection de sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$. Étant donné $\varepsilon > 0$, nous pouvons trouver des fonctions positives $f_n \in L^p(\mathbb{R}^N)$ telles que $G_\alpha * f_n \geq 1$ sur E_n et

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n^p dx \leq \text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ posons

$$f(x) = \sup_{n \geq 1} f_n(x)$$

et montrons que f est admissible dans la définition de $\text{cap}_{B^{\alpha,p}(E)}$. Puisque

$$f^p(x) = \sup_{n \geq 1} f_n^p(x) \leq \sum_{n=1}^{\infty} f_n^p(x)$$

nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^p dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} \sum_{n=1}^{\infty} f_n^p dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{\mathbb{R}^N} f_n^p dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{cap}_{B^{\alpha,p}}(E_n) + \varepsilon < +\infty$$

ce qui montre que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. De plus, puisque $G_\alpha * f_n \geq 1$ sur chaque E_n nous déduisons que $G_\alpha * f \geq 1$ sur E et donc f est admissible dans la définition de la capacité de Bessel de E . Nous avons alors

$$\text{cap}_{B^{\alpha,p}}(E) \leq \int_{\mathbb{R}^N} f^p dx \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{cap}_{B^{\alpha,p}}(E_n) + \varepsilon$$

ce qui montre la sous-additivité dénombrable puisque $\varepsilon > 0$ est arbitraire. $\square$

Il nous reste à démontrer la condition C5. La preuve de celle-ci reposera sur la proposition suivante qui nous donne une représentation intégrale de la capacité d'un ensemble. Dans la suite, nous dirons qu'une propriété est vraie quasiment partout si elle est satisfaite sur $\mathbb{R}^N$ sauf sur un ensemble de capacité nulle.

Proposition 2.21. *Soit $1 < p < +\infty$ et supposons que $\text{cap}_{B^{\alpha,p}}(E) < +\infty$ avec $E \subset \mathbb{R}^N$. Alors il existe une fonction positive $f_E \in L^p(\mathbb{R}^N)$ (appelée fonction capacitaire pour E) telle que $G_\alpha * f_E \geq 1$ quasiment partout sur E et*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_E^p(x) dx = \text{cap}_{B^{\alpha,p}}(E). \quad (2.9)$$

La preuve de ce résultat se fera en plusieurs étapes. Nous allons dans un premier temps nous placer dans un cadre plus général, celui des espaces de Banach uniformément convexe.

Définition 2.22. *Un espace de Banach X est uniformément convexe si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que si $\|x\|_X \leq 1 + \delta$, $\|y\|_X \leq 1 + \delta$ et $\|\frac{x+y}{2}\|_X \geq 1$ alors $\|x - y\|_X \leq \varepsilon$.*

Intuitivement, un espace de Banach est uniformément convexe si les boules sont bien arrondies pour la norme de cet espace. Par exemple, $\mathbb{R}^2$ est uniformément convexe pour la norme euclidienne mais ne le sera pas si on le munit de la norme uniforme. Un autre exemple qui nous intéressera particulièrement dans la suite est donné par les espaces de Lebesgue.

Théorème 2.23. [22, Theorem 5.4.2] *Les espaces de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^N)$ sont uniformément convexes pour $1 < p < +\infty$.*

Remarquons que $L^p(\mathbb{R}^N)$ n'est pas uniformément convexe pour $p \in \{1, \infty\}$. En effet, en posant $u = \chi_{[0,1]}$ et $v = \chi_{[1,2]}$ nous avons

$$\|u\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = \|v\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 1, \left\| \frac{u+v}{2} \right\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 1 \quad \text{mais} \quad \|u-v\|_{L^1(\mathbb{R}^N)} = 2 > 0.$$

De plus, en prenant $w = u + v$ et $z = u - v$ nous avons

$$\|w\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = \|z\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 1, \left\| \frac{w+z}{2} \right\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 1 \quad \text{mais} \quad \|w-z\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} = 2 > 0.$$

Revenons à notre objectif initial : démontrer la proposition 2.21. Nous allons montrer dans un premier temps un résultat de minimisation dans les espaces de Banach uniformément convexes.

Proposition 2.24. *Si Y est un sous-ensemble convexe d'un espace de Banach uniformément convexe X , alors il existe $y \in \bar{Y}$ tel que*

$$\|y\|_X = \inf_{x \in Y} \|x\|_X.$$

Nous aurons besoin du lemme suivant.

Lemme 2.25. *Soit X un espace de Banach uniformément convexe et $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite dans X telle que pour $a > 0$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X = a \quad \text{et} \quad \liminf_{m, n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2}(x_n + x_m) \right\|_X \geq a.$$

Alors il existe $x \in X$ tel que $\|x_n - x\|_X \rightarrow 0$ et $\|x\|_X = a$.

Démonstration. Considérons tout d'abord le cas où $a = 1$, pour tout $\eta > 0$, il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $m, n \geq n_0$

$$\|x_n\|_X \leq 1 + \eta \quad \text{et} \quad \left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\|_X \geq 1 - \eta.$$

Prenons $y_n = \frac{x_n}{1-\eta}$, nous avons alors pour η suffisamment petit

$$\|y_n\|_X \leq \frac{1}{1-\eta} \|x_n\|_X \leq \frac{1+\eta}{1-\eta} \leq 1 + 5\eta$$

et

$$\left\| \frac{y_n + y_m}{2} \right\|_X = \frac{1}{1-\eta} \left\| \frac{x_n + x_m}{2} \right\|_X \geq 1.$$

Dès lors, en appliquant la définition de convexité uniforme à y_n nous obtenons que $\|x_n - x_m\|_X \leq \varepsilon$ ce qui montre que la suite $(x_n)_{n \geq 1}$ est de Cauchy et donc convergente. Dès lors il existe $x \in X$ tel que $\|x_n - x\|_X \rightarrow 0$ et puisque

$$|\|x\|_X - 1| \leq \|x - x_n\|_X + |\|x_n\|_X - 1| \rightarrow 0$$

on déduit que $\|x\|_X = 1$. Pour le cas général, puisque $a > 0$ nous avons par hypothèse

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left\| \frac{x_n}{a} \right\|_X = 1 \quad \text{et} \quad \liminf_{m, n \rightarrow \infty} \left\| \frac{1}{2a} (x_n + x_m) \right\|_X \geq 1.$$

Il existe donc $\tilde{x} \in X$ tel que $\left\| \frac{x_n}{a} - \tilde{x} \right\|_X \rightarrow 0$ et $\|\tilde{x}\|_X = 1$. Posons $x = a\tilde{x}$, nous avons alors

$$\|x_n - x\|_X = a \left\| \frac{x_n}{a} - \tilde{x} \right\|_X \rightarrow 0$$

et

$$|\|x\|_X - a| \leq \|x - x_n\|_X + |\|x_n\|_X - a| \rightarrow 0$$

ce qui montre que x satisfait les conditions requises. $\square$

Démonstration de la proposition 2.24. Si $0 \in \overline{Y}$ le résultat est clair. Supposons que $\inf_{x \in Y} \|x\| = a$ avec $a > 0$ et considérons $(x_n)_{n \geq 1}$ une suite dans Y telle que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|x_n\|_X = a$. Alors, par convexité de Y nous avons que $\frac{1}{2}(x_n + x_m) \in Y$ et donc $\left\| \frac{1}{2}(x_n + x_m) \right\|_X \geq a$ pour tout $n, m \geq 1$. Le lemme précédent implique l'existence de $y \in \overline{Y}$ tel que $\|y - x_n\|_X \rightarrow 0$. Dès lors,

$$|\|y\|_X - a| \leq \|y - x_n\|_X + |\|x_n\|_X - a| \rightarrow 0$$

ce qui montre que $\|y\|_X = a = \inf_{x \in Y} \|x\|_X$. $\square$

Puisque pour toute fonction intégrable f et g nous avons

$$G_\alpha * (\lambda f + (1 - \lambda)g) = \lambda(G_\alpha * f) + (1 - \lambda)(G_\alpha * g) \quad \text{pour tout } 0 \leq \lambda \leq 1,$$

on déduit que

$$\Omega_E = \{f \in L^p(\mathbb{R}^N) \mid f \geq 0 \text{ et } G_\alpha * f \geq 1 \text{ sur } E\}$$

est un sous-ensemble convexe de $L^p(\mathbb{R}^N)$. Dès lors, en prenant $Y = \Omega_E$ et $X = L^p(\mathbb{R}^N)$, la proposition 2.24 nous permettra de trouver une fonction satisfaisant (2.9). Pour connaître les propriétés satisfaites par celle-ci, nous allons chercher une caractérisation de $\overline{\Omega}_E$. Nous commençons par donner une caractérisation des ensembles de capacité de Bessel nulle.

Proposition 2.26. *Pour $E \subset \mathbb{R}^N$ nous avons $\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E) = 0$ si et seulement s'il existe une fonction positive $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ telle que $E \subset \{x \in \mathbb{R}^N \mid (G_\alpha * f)(x) = \infty\}$. De plus, f peut être choisie avec norme $L^p(\mathbb{R}^N)$ arbitrairement petite.*

Démonstration. Supposons tout d'abord qu'il existe une fonction positive $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ satisfaisant $E \subset \{x \in \mathbb{R}^N \mid (G_\alpha * f)(x) = \infty\}$. Étant donné $n \geq 1$, observons que pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $(G_\alpha * f)(x) \geq n$ nous avons $(G_\alpha * (n^{-1}f))(x) \geq 1$ et donc $n^{-1}f$ est admissible dans la définition de $\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(\{x \in \mathbb{R}^N \mid (G_\alpha * f)(x) \geq n\})$. Nous obtenons alors

$$\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(\{x \in \mathbb{R}^N \mid (G_\alpha * f)(x) \geq n\}) \leq \frac{1}{n^p} \int_{\mathbb{R}^N} f^p dx.$$

En définissant $K_n = \{x \in \mathbb{R}^N \mid (G_\alpha * f)(x) \geq n\}$ nous avons que $(K_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante de compacts et

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n = \{x \in \mathbb{R}^N \mid (G_\alpha * f)(x) = \infty\}.$$

Dès lors, par le corollaire 2.20 nous obtenons

$$\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(\{x \in \mathbb{R}^N \mid (G_\alpha * f)(x) = \infty\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}_{B_{\alpha,p}}(K_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^p} \int_{\mathbb{R}^N} f^p dx = 0.$$

Donc puisque $E \subset \{x \mid (G_\alpha * f)(x) = \infty\}$ nous déduisons par monotonie que $\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E) = 0$.

Supposons maintenant que $\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E) = 0$. Par définition de la capacité de Bessel, pour tout $n \geq 1$ nous pouvons trouver une fonction positive f_n dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ telle que $G_\alpha * f_n \geq 1$ sur E et

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_n^p dx \leq \frac{\varepsilon^p}{2^{np}}$$

avec $\varepsilon > 0$. Posons

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n$$

et montrons que cette fonction a les propriétés désirées. Puisque $G_\alpha * f = \sum_{n=1}^{\infty} (G_\alpha * f_n)$ nous avons que $G_\alpha * f = \infty$ sur E . De plus, par l'inégalité de Minkowski et le théorème de convergence monotone nous avons

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^p dx \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \right)^p \leq \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \right)^p = \varepsilon^p$$

ce qui montre que $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ et $\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \varepsilon$. □

Le prochain résultat donne une version capacitaire du théorème d'Egorov.

Proposition 2.27. *Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de Cauchy dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ convergeant vers $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ telle que $G_\alpha * f_{n_k} \rightarrow G_\alpha * f$ uniformément quasiment partout en dehors d'un ensemble ouvert de capacité de Bessel arbitrairement petite.*

Démonstration. Remarquons que par la proposition 2.26 et par la sous-additivité de la capacité de Bessel, $G_\alpha * f_{n_k}$ et $G_\alpha * f$ sont bien définies et finies en dehors d'un ensemble F avec $\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(F) = 0$. Prenons une suite $(n_k)_{k \geq 1}$ telle que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |f_{n_k} - f|^p dx < \frac{1}{4^{kp}}.$$

Posons $E_k = \{x \in \mathbb{R}^N \mid (G_\alpha * |f_{n_k} - f|)(x) > \frac{1}{2^k}\}$ et $G_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} E_k$. Nous avons alors

$$\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E_n) \leq 2^{kp} \int_{\mathbb{R}^N} |f_{n_k} - f|^p dx \leq \frac{1}{2^{kp}}$$

et on en déduit par monotonie que

$$\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(G_m) \leq \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^{np}}$$

ce qui implique que $\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(\bigcap_{m=1}^{\infty} G_m) = 0$.

Remarquons que pour tout $x \notin G_m \cup F$ nous avons

$$|(G_\alpha * f_{n_k})(x) - (G_\alpha * f)(x)| \leq (G_\alpha * |f_{n_k} - f|)(x) \leq \frac{1}{2^k}$$

et ce pour tout $k \geq m$. Donc $G_\alpha * f_{n_k} \rightarrow G_\alpha * f$ uniformément en dehors de $(\bigcap_{m=1}^{\infty} G_m) \cup F$. Puisque F est contenu dans un ouvert de capacité arbitrairement petite, cela démontre le résultat. $\square$

Nous sommes maintenant prêt à donner la caractérisation de l'adhérence de Ω_E .

Proposition 2.28. *Soient $1 < p < +\infty$ et $E \subset \mathbb{R}^N$. Alors*

$$\overline{\Omega}_E = \{f \in L^p(\mathbb{R}^N) \mid f \geq 0, (G_\alpha * f)(x) \geq 1 \text{ pour quasiment tout } x \in E\}.$$

Démonstration. Écrivons A l'ensemble de droite et montrons qu'il est fermé dans $L^p(\mathbb{R}^N)$. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions positives dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ telle que $(G_\alpha * f_n) \geq 1$ sur $E \setminus F_n$ où F_n est un ensemble de capacité nulle et supposons que cette suite converge dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ vers une fonction f . La suite $(f_n)_{n \geq 1}$ étant de Cauchy, par la proposition 2.27 il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ telle que $(G_\alpha * f_{n_k})_{k \geq 1}$ converge quasiment partout vers $G_\alpha * f$. Puisque

$$G_\alpha * f \geq 1 \quad \text{sur } E \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n \right)$$

le corollaire 2.20 implique que $G_\alpha * f \geq 1$ quasiment partout sur E ce qui montre que A est fermé. Puisque $\Omega_E \subset A$ on conclut que $\overline{\Omega}_E \subset A$.

Dans l'autre sens, prenons $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ une fonction positive telle que $G_\alpha * f \geq 1$ sur $E \setminus F$ avec $\text{cap}_{B^{\alpha,p}}(F) = 0$. En utilisant la proposition 2.26 nous pouvons trouver pour chaque $n \geq 1$ des fonctions $h_n \in L^p(\mathbb{R}^N)$ avec $\|h_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{n}$ et telle que $G_\alpha * h_n = \infty$ sur F . Nous avons alors que $f + h_n \in \Omega_E$ et

$$\|f - (f + h_n)\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \|h_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \frac{1}{n}$$

ce qui montre que $f + h_n \rightarrow f$ dans $L^p(\mathbb{R}^N)$ et donc $f \in \overline{\Omega}_E$. $\square$

Nous utilisons maintenant la caractérisation de $\overline{\Omega}_E$ pour établir l'existence de fonctions capacitaires.

Démonstration de la proposition 2.21. Par convexité de l'ensemble

$$\Omega_E = \{f \in L^p(\mathbb{R}^N) \mid f \geq 0 \text{ et } G_\alpha * f \geq 1 \text{ sur } E\}$$

la proposition 2.24 nous permet de trouver une fonction $f_E \in \overline{\Omega}_E$ telle que

$$\|f_E\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} = \inf_{f \in \Omega_E} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}.$$

Pour déduire que l'équation (2.9) est satisfaite avec cette fonction, on choisit pour tout $n \geq 1$ une fonction $f_n \in \Omega_E$ telle que

$$\inf_{f \in \Omega_E} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \leq \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \leq \inf_{f \in \Omega_E} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p + \frac{1}{n}$$

de sorte que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p = \inf_{f \in \Omega_E} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p$. Remarquons que nous avons

$$\|g\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \leq \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p \leq \inf_{f \in \Omega_E} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p + \frac{1}{n} \leq \|f_E\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p + \frac{1}{n}$$

de sorte que $\lim_{n \rightarrow \infty} \|f_n\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p = \|f_E\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p$. Par unicité de la limite nous obtenons que

$$\|f_E\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p = \inf_{f \in \Omega_E} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}^p$$

ce qui montre que

$$\int_{\mathbb{R}^N} f_E^p dx = \text{cap}_{B^{\alpha,p}}(E).$$

Par la proposition 2.28, f_E a les propriétés requises. $\square$

Nous pouvons maintenant revenir à l'objectif de base de cette section : montrer que la capacité de Bessel satisfait les conditions de la définition 1.1.

Théorème 2.29. *La capacité de Bessel est une capacité au sens de Choquet.*

Démonstration. Les conditions C1 à C4 ont déjà été montrées, il ne reste donc plus qu'à montrer que pour $(E_n)_{n \geq 1}$ une suite croissante de sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$ nous avons

$$\text{cap}_{B_{\alpha,p}}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E_n).$$

Puisque par monotonie nous avons

$$\text{cap}_{B_{\alpha,p}}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E_n)$$

il ne reste plus qu'à montrer que l'inégalité inverse est satisfaite. Sans perte de généralité, supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E_n) < +\infty$ et considérons une suite de fonctions capacitaire $(f_{E_n})_{n \geq 1}$ données par le corollaire 2.21. Remarquons que pour $n < m$ nous avons $f_{E_m} \in \overline{\Omega}_{E_n}$ et donc

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(\frac{1}{2}(f_{E_n} + f_{E_m})\right)^p dx \geq \text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E_n).$$

Les hypothèses de la proposition 2.25 étant satisfaites nous pouvons conclure que la suite $(f_{E_n})_{n \geq 1}$ converge en norme dans L^p vers une fonction f avec

$$\int_{\mathbb{R}^N} f^p dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E_n).$$

Par la proposition 2.28 nous avons que $G_\alpha * f \geq 1$ quasiment partout sur chaque E_n et donc $G_\alpha * f \geq 1$ sur E quasiment partout ce qui implique que $f \in \overline{\Omega}_E$. Nous pouvons donc trouver une suite $(g_n)_{n \geq 1}$ d'éléments de Ω_E tels que cette suite converge vers f dans L^p . Dès lors,

$$\text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} g_n^p dx = \int_{\mathbb{R}^N} f^p dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \text{cap}_{B_{\alpha,p}}(E_n). \quad \square$$

2.3 Capacité de Hausdorff dyadique

Nous nous intéressons dans cette section à la capacité de Hausdorff dyadique. Avant de définir cette capacité, rappelons la construction des cubes dyadiques. Considérons dans un premier temps $\mathcal{Q}_0$ la collection des cubes de $\mathbb{R}^N$ isométriques à $^1 [0, 1[^N$ et dont les sommets appartiennent à la grille $\mathbb{Z}^N$. On définit ensuite $\mathcal{Q}_k$ comme la famille des cubes $\mathcal{Q}_0$ dilatée d'un facteur 2^{-k} avec $k \in \mathbb{Z}$. Autrement dit, $\mathcal{Q}_k$ est la famille des cubes ouverts sur la droite dont les sommets sont adjacents aux points de la grille $(2^{-k}\mathbb{Z})^N$, les éléments de $\bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{Q}_k$ sont appelés les cubes dyadiques.

1. $[0, 1[^N$ désigne ici le produit cartésien de $[0, 1[$ effectué N fois : $[0, 1[^N = [0, 1[\times \cdots \times [0, 1[$.

Définition 2.30. Soient $0 < s \leq N$ et $E \subset \mathbb{R}^N$. On définit la capacité de Hausdorff dyadique de E par

$$\tilde{\mathcal{H}}^s(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(Q_n)^s \mid (Q_n)_{n \geq 1} \text{ sont des cubes dyadiques et } E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \right\}.$$

Il suit de cette définition que la capacité de Hausdorff dyadique est une capacité au sens de Meyers. En effet, pour tout naturel n l'ensemble vide est recouvert par le cube dyadique $[0, 2^{-n}[^N$ et donc

$$\tilde{\mathcal{H}}^s(\emptyset) \leq \frac{1}{2^{ns}}.$$

Un passage à la limite quand $n \rightarrow \infty$ nous donne alors $\tilde{\mathcal{H}}^s(\emptyset) = 0$. Pour la monotonie nous pouvons observer que si E_1 et E_2 sont des sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$ avec $E_1 \subset E_2$, tout recouvrement de E_2 formera aussi un recouvrement de E_1 . Dès lors, si $(Q_n)_{n \geq 1}$ est une collection de cube dyadique recouvrant E_2 nous avons

$$\tilde{\mathcal{H}}^s(E_1) \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(Q_n)^s$$

et une minimisation du côté droit par rapport à tout recouvrement de E_2 par des cubes dyadique nous donne $\tilde{\mathcal{H}}^s(E_1) \leq \tilde{\mathcal{H}}^s(E_2)$.

Nous montrons maintenant que la sous-additivité dénombrable est satisfaite pour $\tilde{\mathcal{H}}^s$.

Proposition 2.31. Pour toute suite $(E_n)_{n \geq 1}$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$ nous avons

$$\tilde{\mathcal{H}}^s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{H}}^s(E_n).$$

Démonstration. Étant donné $\varepsilon > 0$, pour chaque $n \geq 1$ nous pouvons trouver une suite de cube dyadique $(Q_{n,k})_{k \geq 1}$ telle que

$$E_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{n,k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} l(Q_{n,k})^s \leq \tilde{\mathcal{H}}^s(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Puisque la suite $(Q_{n,k})_{n,k \geq 1}$ est admissible dans la définition de $\tilde{\mathcal{H}}^s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right)$ nous avons

$$\tilde{\mathcal{H}}^s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} l(Q_{n,k})^s \leq \sum_{n=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{H}}^s(E_n) + \varepsilon$$

ce qui montre la sous-additivité dénombrable puisque $\varepsilon > 0$ peut être choisit arbitrairement petit. $\square$

Pour montrer que la capacité de Hausdorff dyadique est une capacité au sens de Choquet il nous reste à vérifier que les deux dernières conditions de la définition 1.1 sont satisfaites. Nous montrons tout d'abord la condition C5 en adaptant les développements fait par Rogers dans [18].

Proposition 2.32. *Pour tout suite croissante $(E_n)_{n \geq 1}$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$ nous avons*

$$\tilde{\mathcal{H}}^s\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{H}}^s(E_n).$$

Démonstration. Sans perte de généralité supposons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{H}}^s(E_n) < +\infty$ et observons que par monotonie il suffit de montrer que

$$\tilde{\mathcal{H}}^s(E) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{H}}^s(E_n)$$

où $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$.

Étant donné $\varepsilon > 0$, nous pouvons trouver pour chaque $n \geq 1$ une suite de cube dyadique $(Q_{n,k})_{k \geq 1}$ telle que

$$E_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{n,k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} l(Q_{n,k})^s \leq \tilde{\mathcal{H}}^s(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

Puisque

$$E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{n,k}$$

cela implique que chaque $x \in E$ appartiendra à un cube de la collection $(Q_{n,k})_{n,k \geq 1}$. Si $\mathcal{Q}_x$ désigne la sous-suite de $(Q_{n,k})_{n,k \geq 1}$ formée des cubes contenant x , alors

$$P = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}_x} Q$$

est l'unique cube dyadique maximal de la collection $(Q_{n,k})_{n,k \geq 1}$ contenant x . Notons $(P_k)_{k \geq 1}$ la collection des cubes maximaux contenant chaque point de E et remarquons que puisque cette collection forme un recouvrement de cet ensemble,

$$\tilde{\mathcal{H}}^s(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} l(P_k)^s. \tag{2.10}$$

Nous allons chercher une estimation du membre de droite. Étudions dans un premier temps

$$\sum_{k=1}^K l(P_k)^s$$

pour un certain $K \geq 1$. Pour chaque $1 \leq k \leq K$, on note $n(k)$ le plus petit entier n tel que le cube P_k apparaît dans la suite $(Q_{n,k})_{k \geq 1}$. On pose ensuite

$$m = \max_{1 \leq k \leq K} n(k)$$

et pour tout $1 \leq n \leq m$ on écrit $\mathcal{P}_n$ la sous-collection des cubes $P_1, \dots, P_K$ qui sont tels que $n(k) = n$. Nous pouvons alors écrire

$$\sum_{k=1}^K l(P_k)^s = \sum_{n=1}^m \sum_{P \in \mathcal{P}_n} l(P)^s \quad (2.11)$$

et

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_n} l(P)^s + \sum_{\substack{k=1 \\ Q_{n,k} \notin \mathcal{P}_n}}^{\infty} l(Q_{n,k})^s = \sum_{k=1}^{\infty} l(Q_{n,k})^s \leq \tilde{\mathcal{H}}^s(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \quad (2.12)$$

Notons $\mathcal{R}_{m,n}$ la sous-collection des cubes $(Q_{m,k})_{k \geq 1}$ qui rencontrent l'un des cubes de la collection $\mathcal{P}_n$. Plus précisément, on pose

$$\mathcal{R}_{m,n} = \{Q_{m,k} \mid k \geq 1 \text{ et il existe } P \in \mathcal{P}_n \text{ tel que } Q_{m,k} \cap P \neq \emptyset\}.$$

Puisque pour $n \leq m$ nous avons $E_n \subset E_m \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{m,k}$ on déduit que

$$E_n \cap \left(\bigcup_{P \in \mathcal{P}_n} P \right) \subset \bigcup_{R \in \mathcal{R}_{m,n}} R.$$

Dès lors, les cubes dans $\mathcal{R}_{m,n}$ avec les cubes $(Q_{n,k})_{k \geq 1}$ qui ne sont pas dans $\mathcal{P}_n$ recouvrent E_n ce qui implique que

$$\tilde{\mathcal{H}}^s(E_n) \leq \sum_{R \in \mathcal{R}_{m,n}} l(R)^s + \sum_{\substack{k=1 \\ Q_{n,k} \notin \mathcal{P}_n}}^{\infty} l(Q_{n,k})^s. \quad (2.13)$$

Donc, par les équations (2.12) et (2.13) nous obtenons

$$\sum_{P \in \mathcal{P}_n} l(P)^s \leq \sum_{R \in \mathcal{R}_{m,n}} l(R)^s + \frac{\varepsilon}{2^n}.$$

En sommant cette dernière inégalité sur n et en utilisant (2.11) nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^K l(P_k)^s &= \sum_{n=1}^m \sum_{P \in \mathcal{P}_n} l(P)^s \\ &\leq \sum_{n=1}^m \left(\sum_{R \in \mathcal{R}_{m,n}} l(R)^s + \frac{\varepsilon}{2^n} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{k=1}^{\infty} l(Q_{n,k})^s + \varepsilon \\ &\leq \tilde{\mathcal{H}}^s(E_n) + 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc

$$\sum_{k=1}^K l(P_k)^s \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{H}}^s(E_n) + 2\varepsilon$$

et en passant à la limite quand $K \rightarrow \infty$ nous obtenons

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(P_k)^s \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{H}}^s(E_n) + 2\varepsilon.$$

Dès lors, en utilisant (2.10) et en prenant la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ nous concluons que

$$\tilde{\mathcal{H}}^s(E) \leq \sum_{k=1}^{\infty} l(P_k)^s \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{H}}^s(E_n). \quad \square$$

La condition C4 quant à elle ne sera pas toujours satisfaite, cela dépendra de la valeur prise par s .

Proposition 2.33. *Pour toute collection $(K_n)_{n \geq 1}$ de sous-ensembles compacts de $\mathbb{R}^N$ et pour $N - 1 < s \leq N$ nous avons*

$$\tilde{\mathcal{H}}^s\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} K_n\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{H}}^s(K_n).$$

Démonstration. Posons $K = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n$ et observons que par monotonie il suffit d'établir que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{H}}^s(K_n) \leq \tilde{\mathcal{H}}^s(K).$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, prenons une collection de cubes dyadiques $(Q_k)_{k \geq 1}$ telle que

$$K \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{\infty} l(Q_k)^s \leq \tilde{\mathcal{H}}^s(K) + \varepsilon.$$

Pour chaque cube Q_k et $m \geq 1$, on considère le cube ouvert $Q_{k,m}$ de côté de longueur $(1 + 2^{-m+1})l(Q_k)$ et ayant le même centre que Q_k . L'ouvert $\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{k,m}$ contient alors K et il suit du lemme 1.7 que pour n assez grand

$$K_n \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{k,m}.$$

De plus, nous pouvons observer que $Q_{k,m}$ est recouvert par Q_k et $2^{mN}((1+2^{-m+1})^N - 1)$ cubes dyadiques de côté de longueur $2^{-m}l(Q_k)$ ce qui implique que

$$\tilde{\mathcal{H}}^s(Q_{k,m}) \leq l(Q_k)^s + 2^{mN}((1+2^{-m+1})^N - 1)2^{-ms}l(Q_k)^s.$$

Puisque $N-1 < s \leq N$, le second terme sur le côté droit converge vers 0 quand $m \rightarrow \infty$ et nous avons alors par monotonie et sous-additivité dénombrable

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{H}}^s(K_n) &\leq \sum_{k=1}^{\infty} \tilde{\mathcal{H}}^s(Q_{k,m}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{\infty} (l(Q_k)^s + 2^{mN}((1+2^{-m+1})^N - 1)2^{-ms}l(Q_k)^s) \\ &\rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} l(Q_k)^s \quad \text{quand } m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Ceci étant vrai pour tout recouvrement de K nous obtenons $\tilde{\mathcal{H}}^s(K_n) \leq \tilde{\mathcal{H}}^s(K) + \varepsilon$. En passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$ nous déduisons que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{H}}^s(K_n) \leq \tilde{\mathcal{H}}^s(K) + \varepsilon$ ce qui montre le résultat car $\varepsilon > 0$ peut être choisi arbitrairement petit.

□

Dans le cas où $N \geq 2$ et $0 < s \leq N-1$ la condition C4 n'est pas satisfaite et la capacité de Hausdorff dyadique n'est donc pas une capacité de Choquet comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 2.34. *Pour simplifier cet exemple, nous considérons le cas où $N = 2$. Posons pour tout $n \geq 1$, $K_n = [0, 1] \times [-2^{-n}, 2^{-n}]$. Il suit que $(K_n)_{n \geq 1}$ est une suite décroissante de compacts et*

$$K = [0, 1] \times \{0\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} K_n.$$

Nous allons montrer que

$$\tilde{\mathcal{H}}^s(K) = 1 < 2 = \lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{H}}^s(K_n).$$

Commençons par calculer $\tilde{\mathcal{H}}^s(K)$. Puisque pour tout $k \geq 1$ l'ensemble K est recouvert par les cubes dyadiques

$$Q_1 = [0, 1[\times [0, 1[\quad \text{et} \quad Q_2 = [1, 1 + 2^{-k}[\times [0, 2^{-k}[$$

il suit de la définition que $\tilde{\mathcal{H}}^s(K) \leq 1 + 2^{-ks}$ et un passage à la limite quand $k \rightarrow \infty$ nous donne $\tilde{\mathcal{H}}^s(K) \leq 1$. Considérons maintenant $(Q_n)_{n \geq 1}$ un recouvrement de K par

des cubes dyadiques. S'il existe $n_0 \geq 1$ tel que $l(Q_{n_0}) > 1$, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(Q_n)^s \geq l(Q_{n_0})^s > 1.$$

Dans le cas où $l(Q_n) \leq 1$ pour tout $n \geq 1$ notons N_i le nombre de cubes de côté de longueur 2^{-i} . En utilisant que $[0, 1] \times \{0\} \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ et que $0 < s \leq 1$ nous obtenons

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(Q_n)^s = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-is} N_i \geq \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} N_i = \sum_{n=1}^{\infty} l(Q_n) > 1.$$

Ceci étant vrai pour tout recouvrement de K par des cubes dyadiques nous avons que $\tilde{\mathcal{H}}^s(K) \geq 1$ ce qui implique que $\tilde{\mathcal{H}}^s(K) = 1$.

Regardons maintenant $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{H}}^s(K_n)$. Puisque les K_n sont chacun recouverts par les cubes

$$\begin{aligned} Q_1 &= [0, 1[\times [0, 1[\\ Q_2 &= [0, 1[\times [-1, 0[\\ Q_3 &= [1, 1 + 2^{1-n}[\times [0, 2^{1-n}[\\ Q_4 &= [1, 1 + 2^{1-n}[\times [-2^{1-n}, 0[\end{aligned}$$

nous déduisons que $\tilde{\mathcal{H}}^s(K_n) \leq 2 + 2^{(1-n)s+1}$ et donc en passant à la limite quand $n \rightarrow \infty$,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{H}}^s(K_n) \leq 2.$$

Soit $(Q_k)_{k \geq 1}$ un recouvrement de K_n par des cubes dyadiques. S'il existe plus de deux cubes dyadiques Q_k tels que $l(Q_k) \geq 2$ alors

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(Q_k)^s \geq 2^{1+s} > 2.$$

Dans la cas où il existe exactement un cube dyadique Q_{k_0} tel que $l(Q_{k_0}) \geq 2$, nous définissons $N_i^{k_0}$ comme le nombre de cubes de côté de longueur 2^{-i} parmi la collection $(Q_k)_{k \geq 1, k \neq k_0}$. Puisque soit $[0, 1] \times [0, 2^{-n}]$ soit $[0, 1] \times [-2^{-n}, 0]$ est recouvert par $(Q_k)_{k \geq 1, k \neq k_0}$ nous avons $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} N_i^{k_0} > 1$. Nous obtenons donc en utilisant que $0 < s \leq 1$

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(Q_k)^s = l(Q_{k_0})^s + \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-is} N_i^{k_0} > 1 + \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} N_i^{k_0} > 2.$$

Si $l(Q_k) \leq 1$ pour chaque $k \geq 1$, remarquons que par hypothèse $[0, 1] \times [0, 2^{-n}]$ et $[0, 1] \times [-2^{-n}, 0]$ sont recouverts par $(Q_k)_{k \geq 1}$. Donc, nous avons $\sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} N_i > 2$ avec N_i le

nombre de cubes de côté de longueur 2^{-i} . Dès lors,

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(Q_k)^s = \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-is} N_i > \sum_{i=0}^{\infty} 2^{-i} N_i > 2.$$

En prenant l'infimum sur tous les recouvrements de K_n par des cubes dyadiques nous obtenons que $\tilde{\mathcal{H}}^s(K_n) \geq 2$ ce qui nous permet de conclure que $\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{H}}^s(K_n) = 2$.

La capacité de Hausdorff dyadique n'est donc pas une capacité au sens de Choquet dans le cas où $0 < s \leq N - 1$. Nous pouvons néanmoins effectuer une légère modification de la définition de $\tilde{\mathcal{H}}^s$ pour que toutes les conditions soient satisfaites pour $0 < s \leq N$. Observons pour cela que pour tout $\varepsilon > 0$ nous pouvons trouver une suite de cubes dyadiques $(Q_n)_{n \geq 1}$ telle que $E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(Q_n)^s \leq \tilde{\mathcal{H}}^s(E) + \varepsilon.$$

Ceci implique par sous-additivité dénombrable que pour

$$U = \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$$

nous avons $\tilde{\mathcal{H}}^s(U) \leq \tilde{\mathcal{H}}^s(E) + \varepsilon$. Donc, si U peut être choisit ouvert, la capacité de Hausdorff dyadique sera une capacité régulière extérieure ce qui impliquerait par la proposition 1.6 que la condition C4 serait alors satisfaite pour tout $0 < s \leq N$. Ceci motive la définition suivante.

Définition 2.35. Pour $0 < s \leq N$ et $E \subset \mathbb{R}^N$ on définit la mesure de Hausdorff dyadique modifiée par

$$\overline{\mathcal{H}}^s(E) = \inf \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} l(Q_n)^s \mid (Q_n)_{n \geq 1} \text{ sont des cubes dyadiques et } E \subset \text{int} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \right) \right\}.$$

Remarquons que $\overline{\mathcal{H}}^s$ peut ne pas être égale à $\tilde{\mathcal{H}}^s$. Par exemple, dans le cas $N = 2$ on peut montrer en adaptant l'argument de l'exemple 2.34 que pour $E = [0, 1[\times \{0\}$ nous avons $\overline{\mathcal{H}}^s(E) = 2$ mais $\tilde{\mathcal{H}}^s(E) = 1$. Cependant, les ensembles de capacité nulle coïncident pour ces deux capacités, voir [23].

En adaptant les preuves faites pour $\tilde{\mathcal{H}}^s$, on peut montrer que $\overline{\mathcal{H}}^s$ est une capacité au sens de Meyers. Le reste de cette section sera consacrée à la démonstration des conditions C4 et C5, nous suivrons pour cela l'article de Yang et Yuan [23].

La démonstration de la condition C5 reposera sur la sous-additivité forte de $\overline{\mathcal{H}}^s$.

Proposition 2.36. *Pour tout $E_1, E_2 \subset \mathbb{R}^N$ nous avons*

$$\overline{\mathcal{H}}^s(E_1 \cup E_2) + \overline{\mathcal{H}}^s(E_1 \cap E_2) \leq \overline{\mathcal{H}}^s(E_1) + \overline{\mathcal{H}}^s(E_2).$$

Démonstration. Supposons sans perte de généralité que $\overline{\mathcal{H}}^s(E_1) + \overline{\mathcal{H}}^s(E_2) < +\infty$ et que $E_1 \cap E_2 \neq \emptyset$. Soient $(Q_{1,n})_{n \geq 1}$ et $(Q_{2,n})_{n \geq 1}$ des collections de cubes dyadiques tels que

$$E_1 \subset \text{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{1,n}\right) \quad \text{et} \quad E_2 \subset \text{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{2,n}\right).$$

Notons $(P_k)_{k \geq 1}$ la sous-suite des cubes maximaux de la suite $(Q_{1,n}, Q_{2,n})_{n \geq 1}$. Nous avons alors

$$E_1 \cup E_2 \subset \text{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{1,n}\right) \cup \text{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{2,n}\right) \subset \text{int}\left(\bigcup_{j=1}^2 \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{j,n}\right) = \text{int}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} P_k\right).$$

Considérons l'ensemble $\{Q_{1,n} \cap Q_{2,m} \mid Q_{1,n} \cap Q_{2,m} \neq \emptyset \text{ où } n, m \geq 1\}$ et notons $(R_k)_{k \geq 1}$ la suite formée par les cubes de cet ensemble. Par définition des cubes dyadiques, si $Q_{1,n} \cap Q_{2,m} \neq \emptyset$ alors soit $Q_{1,n} \cap Q_{2,m} = Q_{1,n}$ soit $Q_{1,n} \cap Q_{2,m} = Q_{2,m}$ et donc $(R_k)_{k \geq 1}$ est une sous-suite de $(Q_{1,n}, Q_{2,n})_{n \geq 1}$. Maintenant, puisque

$$\text{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{1,n}\right) \cap \text{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_{2,n}\right) = \text{int}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} R_k\right)$$

il suit que $E_1 \cap E_2 \subset \text{int}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} R_k\right)$ et donc

$$\overline{\mathcal{H}}^s(E_1 \cup E_2) + \overline{\mathcal{H}}^s(E_1 \cap E_2) \leq \sum_{k=1}^{\infty} l(P_k)^s + \sum_{k=1}^{\infty} l(R_k)^s.$$

Remarquons que s'il existe n_0 et m_0 tels que $Q = P_{n_0} = \tilde{P}_{m_0}$ alors il existe i_0 et j_0 tels que $Q = Q_{1,i_0} = Q_{2,j_0}$ et donc,

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(P_k)^s + \sum_{k=1}^{\infty} l(\tilde{P}_k)^s \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(Q_{1,n})^s + \sum_{n=1}^{\infty} l(Q_{2,n})^s.$$

On en déduit que

$$\overline{\mathcal{H}}^s(E_1 \cup E_2) + \overline{\mathcal{H}}^s(E_1 \cap E_2) \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(Q_{1,n})^s + \sum_{n=1}^{\infty} l(Q_{2,n})^s$$

et l'on conclut en minimisant le côté droit. □

Nous pouvons maintenant montrer que $\overline{\mathcal{H}}^s$ est une capacité au sens de Choquet.

Théorème 2.37. *La capacité de Hausdorff dyadique modifiée est une capacité au sens de Choquet.*

Démonstration. Les trois premières conditions sont des conséquences directes de la définition. Pour montrer la condition C4, nous montrons que la capacité de Hausdorff dyadique modifiée est régulière extérieure. Par monotonie, il suffit de montrer que pour tout $\varepsilon > 0$ nous pouvons trouver un ouvert U contenant E et tel que

$$\overline{\mathcal{H}}^s(U) \leq \overline{\mathcal{H}}^s(E) + \varepsilon.$$

Soit $E \subset \mathbb{R}^N$ et $\varepsilon > 0$. Par définition, nous pouvons trouver une suite de cubes dyadiques $(Q_n)_{n \geq 1}$ tel que $E \subset \text{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right)$ et

$$\sum_{n=1}^{\infty} l(Q_n)^s \leq \overline{\mathcal{H}}^s(E) + \varepsilon.$$

Posons $U = \text{int}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right)$, on remarque alors que U est un ouvert et que

$$\overline{\mathcal{H}}^s(U) \leq \sum_{n=1}^{\infty} l(Q_n)^s.$$

Dès lors,

$$\overline{\mathcal{H}}^s(U) \leq \overline{\mathcal{H}}^s(E) + \varepsilon.$$

Puisque $\tilde{\mathcal{H}}^s$ est régulière extérieure, il suit de la proposition 1.6 que la condition C4 est satisfaite.

Montrons maintenant que pour toute collection croissante $(E_n)_{n \geq 1}$ de sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$, nous avons avec $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$

$$\overline{\mathcal{H}}^s(E) = \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{H}}^s(E_n).$$

Par monotonie il suffit de montrer que $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{H}}^s(E_n) \leq \overline{\mathcal{H}}^s(E)$ et nous pouvons supposer sans perte de généralité que $\lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{H}}^s(E_n) < +\infty$. Supposons dans un premier temps que la collection $(E_n)_{n \geq 1}$ est formée d'ensembles ouverts. Pour tout $\varepsilon > 0$ et pour chaque $n \geq 1$, nous pouvons trouver une collection de cubes dyadiques $(Q_{n,k})_{k \geq 1}$ telle que $Q_{n,k} \cap E_n \neq \emptyset$, $E_n \subset \text{int}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{n,k}\right)$ et

$$\sum_{k=1}^{\infty} l(Q_{n,k})^s \leq \overline{\mathcal{H}}^s(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \quad (2.14)$$

Pour chaque $x \in E$, soit Q_x le plus grand cube contenant x parmi la collection $(Q_{n,k})_{n,k \geq 1}$

et écrivons la collection de ces cubes maximaux $(Q_i)_{i \geq 1}$. Nous avons alors

$$E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\text{int} \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{n,k} \right) \right) \subset \text{int} \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{n,k} \right) = \text{int} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i \right).$$

Pour $m \geq 1$ donné considérons la collection $(Q_{1,k})_{k \geq 1}$ constituée des cubes de la collection $(Q_i)_{i \geq 1}$ appartenant à la suite $(Q_{1,k})_{k \geq 1}$, (si cette suite est vide, alors on prend les cubes de la suite $(Q_{2,k})_{k \geq 1}$). Posons $U_1 = \text{int} \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i^{(1)} \right) \cap E_m$. Puisque $U_1 \subset E_m$, on peut trouver une sous-suite de $(Q_{m,k})_{k \geq 1}$ que l'on note $(Q_{m,k}^{(1)})_{k \geq 1}$ tel que $U_1 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{m,k}^{(1)}$ et $U_1 \cap Q_{m,k}^{(1)} \neq \emptyset$, pour tout $k \geq 1$. Par définition de $(Q_i^{(1)})_{i \geq 1}$ nous avons que $\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{m,k}^{(1)} \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} Q_i^{(1)}$.

Soit la suite² $(Q_{1,k}^*)_{k \geq 1} \equiv (Q_{1,k})_{k \geq 1} \setminus (Q_i^{(1)})_{i \geq 1}$. Puisque $E_1 \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{1,k}$ nous obtenons

$$E_1 = (U_1 \cap E_1) \cup \left[\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{1,k}^* \right) \cap E_1 \right] \subset \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{m,k}^{(1)} \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{1,k}^* \right).$$

Puisque E_1 est ouvert nous avons $E_1 \subset \text{int} \left(\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{m,k}^{(1)} \right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_{1,k}^* \right) \right)$ et donc

$$\overline{\mathcal{H}}^s(E_1) \leq \sum_{k=1}^{\infty} l(Q_{m,k}^{(1)})^s + \sum_{k=1}^{\infty} l(Q_{1,k}^*)^s.$$

Par l'équation (2.14) nous avons alors avec $n = 1$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} l(Q_i^{(1)})^s \leq \overline{\mathcal{H}}^s(E_1) + \frac{\varepsilon}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} l(Q_{1,k}^*)^s \leq \sum_{k=1}^{\infty} l(Q_{m,k}^{(1)})^s + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Considérons maintenant la collection $(Q_i^{(2)})_{i \geq 1}$ constituée des cubes de la suite $(Q_i)_{i \geq 1}$ pris de la suite $(Q_{2,k})_{k \geq 1}$ mais pas de la suite $(Q_{1,k})_{k \geq 1}$. Par le même raisonnement que précédemment, nous pouvons trouver $(Q_{m,k}^{(2)})_{k \geq 1}$ une sous-suite de $(Q_{m,k})_{k \geq 1} \setminus (Q_{m,k}^{(1)})_{k \geq 1}$ telle que

$$\sum_{i=1}^{\infty} l(Q_i^{(2)})^s \leq \sum_{k=1}^{\infty} l(Q_{m,k}^{(2)})^s + \frac{\varepsilon}{4}.$$

En répétant cet argument m fois, nous pouvons trouver pour $d \in \{1, \dots, m\}$ une collection $(Q_i^{(d)})_{i \geq 1}$ qui est une sous-suite de $(Q_{d,k})_{k \geq 1} \setminus \bigcup_{j=1}^{d-1} (Q_{j,k})_{k \geq 1}$ et une collection $(Q_{m,k}^{(d)})_{k \geq 1}$ qui

2. La notation $(Q_{1,k}^*)_{k \geq 1} \equiv (Q_{1,k})_{k \geq 1} \setminus (Q_i^{(1)})_{i \geq 1}$ signifie que la suite $(Q_{1,k}^*)_{k \geq 1}$ est constituée des cubes de $(Q_{1,k})_{k \geq 1}$ auquel on retire les cubes de $(Q_i^{(1)})_{i \geq 1}$.

est une sous-suite de $(Q_{m,k})_{k \geq 1} \setminus \bigcup_{j=1}^{d-1} (Q_{m,k}^{(j)})_{k \geq 1}$ telles que

$$\sum_{i=1}^{\infty} l(Q_i^{(d)})^s \leq \sum_{k=1}^{\infty} l(Q_{m,k}^{(d)})^s + \frac{\varepsilon}{2^d}.$$

Donc, par l'équation (2.14) nous avons

$$\sum_{d=1}^m \sum_{i=1}^{\infty} l(Q_i^{(d)})^s \leq \sum_{d=1}^m \left(\sum_{k=1}^{\infty} l(Q_{m,k}^{(d)})^s + \frac{\varepsilon}{2^d} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} l(Q_{m,k})^s + \varepsilon \leq \overline{\mathcal{H}}^s(E_m) + \frac{\varepsilon}{2^m} + \varepsilon.$$

Nous avons donc en prenant la limite quand $m \rightarrow \infty$

$$\sum_{d=1}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} l(Q_i^{(d)})^s \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{H}_0^s(E_m) + \varepsilon.$$

Donc, puisque $(Q_i^{(d)})_{d,i \geq 1} = (Q_i)_{i \geq 1}$

$$\overline{\mathcal{H}}^s(E) \leq \sum_{i=1}^{\infty} l(Q_i)^s \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \tilde{H}_0^s(E_m) + \varepsilon$$

et la condition C5 est donc satisfaite sur les ouverts en prenant la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$.

Pour le cas général, supposons que $(E_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante de sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$ et montrons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\mathcal{H}}_0^d(E_n) \leq \tilde{\mathcal{H}}_0^d(E). \quad (2.15)$$

Puisque $\overline{\mathcal{H}}^s$ est régulière extérieure, pour tout $\varepsilon > 0$ et pour chaque $n \geq 1$ nous pouvons trouver un ouvert U_n contenant E_n et tel que

$$\overline{\mathcal{H}}^s(U_n) \leq \overline{\mathcal{H}}^s(E_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}. \quad (2.16)$$

Posons $V_m = \bigcup_{n=1}^m U_n$ et $V = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$. Alors, pour tout $m \geq 1$, V_m est un ouvert et la suite $(V_m)_{m \geq 1}$ est croissante avec $V = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$. Montrons que pour chaque $m \geq 1$ nous avons

$$\overline{\mathcal{H}}^s(V_m) \leq \overline{\mathcal{H}}^s(E_m) + \left(1 - \frac{1}{2^m}\right)\varepsilon.$$

Pour $m = 1$, cette inégalité est une conséquence de l'équation (2.16). Supposons maintenant que l'inégalité est vraie pour un certain $m \geq 1$ et montrons qu'elle l'est aussi pour $m + 1$. Par la propriété de sous-additivité forte nous obtenons

$$\overline{\mathcal{H}}^s(V_m \cup U_{m+1}) + \overline{\mathcal{H}}^s(V_m \cap U_{m+1}) \leq \overline{\mathcal{H}}^s(V_m) + \overline{\mathcal{H}}^s(U_{m+1}) \leq \overline{\mathcal{H}}^s(E_m) + \overline{\mathcal{H}}^s(E_{m+1}) + \left(1 - \frac{1}{2^{m+1}}\right)\varepsilon.$$

Puisque $E_m \subset V_m \cap U_{m+1}$ nous obtenons par monotonicité de $\overline{\mathcal{H}}^s$

$$\overline{\mathcal{H}}^s(V_{m+1}) = \overline{\mathcal{H}}^s(V_m \cup U_{m+1}) \leq \overline{\mathcal{H}}^s(E_m) + \left(1 - \frac{1}{2^{m+1}}\right)\varepsilon.$$

Puisque $E \subset V$ et que la condition C5 est satisfaite sur les ouverts nous avons alors

$$\overline{\mathcal{H}}^s(E) \leq \overline{\mathcal{H}}^s(V) = \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{H}}^s(V_m) \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{H}}^s(E_m) + \varepsilon.$$

En prenant la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ nous obtenons que $\overline{\mathcal{H}}^s(E) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \overline{\mathcal{H}}^s(E_n)$. □

Chapitre 3

L'intégrale de Choquet

Nous nous intéressons dans ce chapitre à l'intégrale de Choquet. Nous démontrerons le théorème de sous-linéarité et établirons les principaux théorèmes de théorie de l'intégration pour cette intégrale. Ce chapitre se base principalement sur l'article [11].

3.1 Définitions et propriétés

Nous commençons par définir l'intégrale de Choquet d'une fonction positive par rapport à une application monotone.

Définition 3.1. Soient $\text{cap} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ une application monotone et une fonction $f : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$. L'intégrale de Choquet de f par rapport à cap est définie comme

$$\int f d\text{cap} = \int_0^\infty \text{cap}(\{f > t\}) dt$$

où l'intégrale de droite est vue comme l'intégrale au sens de Lebesgue de la fonction $t \in]0, +\infty[\mapsto \text{cap}(\{f > t\})$.

Observons que la monotonie de l'application cap assure l'intégrabilité de la fonction

$$t \in]0, +\infty[\mapsto \text{cap}(\{f > t\})$$

de sorte que l'intégrale sur la droite est bien définie.

L'intégrale de Choquet possède de nombreuses applications, elle permet notamment de trouver des inégalités pour des fonctions maximales, d'étudier la stabilité des solutions aux problèmes d'obstacles ou encore de raffiner la notion de différentiation ponctuelle des fonctions de Sobolev, le lecteur intéressé par ces sujets est invité à consulter l'article de Adams [2]. Il existe aussi des applications dans d'autres domaines que les mathématiques pures, comme en économie ou en théorie de la décision, voir [21].

Nous allons chercher à établir les propriétés principales de l'intégrale de Choquet tout en imposant un minimum d'hypothèses sur cap , de sorte que ces théorèmes soient valide pour un grand nombre de capacité.

Dans la suite, nous considérerons toujours sans le mentionner explicitement que cap est une application telle que $\text{cap}(\emptyset) = 0$. Avant d'entamer l'étude de l'intégrale, précisons le vocabulaire que nous utiliserons dans la suite. Nous dirons que cap est une application

- (i) Sous-additive finie si $\text{cap}(E_1 \cup E_2) \leq \text{cap}(E_1) + \text{cap}(E_2)$.
- (ii) Sous-additive dénombrable si $\text{cap}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \text{cap}(E_n)$.
- (iii) Fortement sous-additive si $\text{cap}(E_1 \cup E_2) + \text{cap}(E_1 \cap E_2) \leq \text{cap}(E_1) + \text{cap}(E_2)$.
- (iv) Evanescence si pour tout ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$ avec $\text{cap}(U) < +\infty$ et pour tout fermé $F \subset U$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \text{cap}(F \setminus B(0, r)) = 0$.

Nous commençons par montrer que la seule hypothèse de monotonie est suffisante pour obtenir les propriétés basiques de cette intégrale, comme la monotonie et l'homogénéité.

Proposition 3.2. *Supposons que $\text{cap} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ est monotone. Alors l'intégrale de Choquet par rapport à cap satisfait les propriétés suivantes.*

1. *Monotonie : Si $f, g : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ sont deux fonctions telles que $f \leq g$ alors*

$$\int f d\text{cap} \leq \int g d\text{cap}.$$

2. *1-homogénéité positive : pour tout $\alpha \geq 0$ et pour toute fonction $f : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ nous avons*

$$\int \alpha f d\text{cap} = \alpha \int f d\text{cap}.$$

3. *Si $E \subset \mathbb{R}^N$ alors*

$$\int \chi_E d\text{cap} = \text{cap}(E).$$

4. *Inégalité de Chebyshev : Si $f : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ et $a > 0$, alors*

$$\text{cap}(\{f > a\}) \leq \frac{1}{a} \int f d\text{cap}.$$

Démonstration. 1. Si $f \leq g$ nous avons $\{f > t\} \subset \{g > t\}$ et donc par monotonie de cap nous obtenons $\text{cap}(\{f > t\}) \leq \text{cap}(\{g > t\})$. Dès lors, en intégrant cette inégalité pour $t \in]0, \infty[$ nous déduisons

$$\int f d\text{cap} = \int_0^{\infty} \text{cap}(\{f > t\}) dt \leq \int_0^{\infty} \text{cap}(\{g > t\}) dt = \int g d\text{cap}.$$

2. L'égalité étant claire quand $\alpha = 0$, nous pouvons supposer que $\alpha > 0$. En faisant le changement de variable $s = \frac{t}{\alpha}$ nous avons

$$\int \alpha f d\text{cap} = \int_0^\infty \text{cap}(\{\alpha f > t\}) dt = \alpha \int_0^\infty \text{cap}(\{f > s\}) ds = \alpha \int f d\text{cap}.$$

3. Soit $E \subset \mathbb{R}^N$, observons que par définition de χ_E nous avons $\{\chi_E > t\} = \emptyset$ pour $t > 1$ et $\{\chi_E > t\} = E$ pour $0 < t < 1$. Dès lors,

$$\int \chi_E d\text{cap} = \int_0^\infty \text{cap}(\{\chi_E > t\}) dt = \int_0^1 \text{cap}(\{\chi_E > t\}) dt = \text{cap}(E).$$

4. Puisque $a\chi_{\{f>a\}} \leq f$ nous avons $\{a\chi_{\{f>a\}} > t\} \subset \{f > t\}$ et donc par monotonie de cap

$$\text{cap}(\{a\chi_{\{f>a\}} > t\}) \leq \text{cap}(\{f > t\}).$$

Dès lors,

$$\int a\chi_{\{f>a\}} d\text{cap} = \int_0^\infty \text{cap}(\{a\chi_{\{f>a\}} > t\}) dt \leq \int_0^\infty \text{cap}(\{f > t\}) dt = \int f d\text{cap}.$$

Donc, par homogénéité nous obtenons

$$a\text{cap}(\{f \geq a\}) \leq \int f d\text{cap}. \quad \square$$

Notons que lorsque cap est une mesure (par exemple la mesure de comptage) et f est une fonction mesurable, alors par la formule de Cavalieri [22, Corollary 2.2.34] l'intégrale de Choquet n'est rien d'autre que l'intégrale classique par rapport à une mesure. Bien que de telles intégrales puissent avoir des propriétés satisfaisantes, il n'est pas certain que ce soit aussi le cas pour l'intégrale de Choquet. En effet, étant donné que nous intégrons par rapport à une application satisfaisant uniquement une hypothèse de monotonie et non par rapport à une mesure, une application ayant des propriétés satisfaisantes comme l'additivité, il ne serait pas surprenant de perdre certaine propriété classique d'une intégrale.

Exemple 3.3. On définit pour tout $E \subset \mathbb{R}$, $\text{cap}(E) = \sup(E)$. De plus, on pose

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g(x) = \begin{cases} 1 - x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Nous avons alors

$$\int f dH = 1, \quad \int g dH = 1, \quad \text{et} \quad \int (f + g) dH = 1.$$

Dès lors,

$$\int (f + g) dH < \int f dH + \int g dH.$$

L'exemple précédent montre que l'intégrale de Choquet n'est en général pas linéaire mais nous pouvons cependant espérer avoir la sous-linéarité :

$$\int (f + g) d\text{cap} \leq \int f d\text{cap} + \int g d\text{cap}.$$

Nous allons montrer que cette propriété est équivalente à la sous-additivité forte de cap .

Théorème 3.4. *Supposons que $\text{cap} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ est une application monotone. Alors, l'intégrale de Choquet est sous-linéaire si et seulement si cap est fortement sous-additive.*

Avant de démontrer ce théorème observons que sous des hypothèses plus faible, celles de monotonie et de sous-additivité finie, nous avons la quasi sous-linéarité de l'intégrale :

$$\int (f + g) d\text{cap} \leq 2 \left(\int f d\text{cap} + \int g d\text{cap} \right). \quad (3.1)$$

En effet, puisque $\{f + g > t\} \subset \{f > \frac{t}{2}\} \cup \{g > \frac{t}{2}\}$, nous avons

$$\begin{aligned} \int (f + g) d\text{cap} &= \int_0^\infty \text{cap}(\{f + g > t\}) dt \\ &\leq \int_0^\infty \text{cap}(\{f > \frac{t}{2}\}) dt + \int_0^\infty \text{cap}(\{g > \frac{t}{2}\}) dt \\ &= 2 \left(\int f d\text{cap} + \int g d\text{cap} \right). \end{aligned}$$

Pour démontrer le théorème 3.4, nous montrerons dans un premier temps que la sous-linéarité est vérifiée pour des fonctions prenant leurs valeurs dans un ensemble discret, nous déduirons ensuite le cas général par approximation. Nous commençons avec deux lemmes qui nous aideront à montrer le cas discret.

Lemme 3.5. *Supposons que $\text{cap} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ est fortement sous-additive. Alors, pour tout $n \geq 1$ et des ensembles $C_1, \dots, C_n \subset \mathbb{R}^N$ il existe $D_1, \dots, D_n \subset \mathbb{R}^N$ tels que*

- (i) $D_1, \dots, D_{n-1} \subset D_n$
- (ii) $\sum_{k=1}^n \chi_{D_k} = \sum_{k=1}^n \chi_{C_k}$
- (iii) $\sum_{k=1}^n \text{cap}(D_k) \leq \sum_{k=1}^n \text{cap}(C_k).$

Démonstration. Nous faisons la preuve par induction sur n . Pour $n = 1$, il suffit de prendre $D_1 = C_1$, les conditions de la proposition sont alors clairement satisfaites. Supposons maintenant que le résultat soit vrai pour $n \geq 1$ et montrons le pour $n + 1$. Soient $C_1, \dots, C_{n+1} \subset \mathbb{R}^N$ et appliquons l'hypothèse d'induction aux n premiers ensembles. Nous trouvons alors $\tilde{D}_1, \dots, \tilde{D}_{n-1} \subset \tilde{D}_n$ tels que

$$\sum_{k=1}^n \chi_{\tilde{D}_k} = \sum_{k=1}^n \chi_{C_k} \quad (3.2)$$

et

$$\sum_{k=1}^n \text{cap}(\tilde{D}_k) \leq \sum_{k=1}^n \text{cap}(C_k). \quad (3.3)$$

Posons $D_k = \tilde{D}_k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$, $D_n = \tilde{D}_n \cap C_{n+1}$ et finalement $D_{n+1} = \tilde{D}_n \cup C_{n+1}$. Par construction pour tout $k \in \{1, \dots, n-1\}$ nous avons $D_k \subset \tilde{D}_n \subset D_{n+1}$ et $D_n = \tilde{D}_n \cap C_{n+1} \subset \tilde{D}_n \subset D_{n+1}$ ce qui montre que la condition (i) est satisfaite par les ensembles $D_1, \dots, D_{n+1}$. Pour montrer la condition (ii), nous pouvons observer que $\chi_{\tilde{D}_n \cap C_{n+1}} + \chi_{\tilde{D}_n \cup C_{n+1}} = \chi_{\tilde{D}_n} + \chi_{C_{n+1}}$ et nous obtenons donc par (3.2)

$$\sum_{k=1}^{n+1} \chi_{D_k} = \sum_{k=1}^{n-1} \chi_{\tilde{D}_k} + \chi_{\tilde{D}_n \cap C_{n+1}} + \chi_{\tilde{D}_n \cup C_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n-1} \chi_{\tilde{D}_k} + \chi_{\tilde{D}_n} + \chi_{C_{n+1}} = \sum_{k=1}^{n+1} \chi_{C_k}.$$

Il nous reste à démontrer la condition (iii). Nous avons en utilisant la sous-additivité forte de cap et (3.3)

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n+1} \text{cap}(D_k) &= \sum_{k=1}^{n-1} \text{cap}(\tilde{D}_k) + \text{cap}(\tilde{D}_n \cap C_{n+1}) + \text{cap}(\tilde{D}_n \cup C_{n+1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n-1} \text{cap}(\tilde{D}_k) + \text{cap}(\tilde{D}_n) + \text{cap}(C_{n+1}) \\ &= \sum_{k=1}^n \text{cap}(\tilde{D}_k) + \text{cap}(C_{n+1}) \\ &\leq \sum_{k=1}^{n+1} \text{cap}(C_k). \end{aligned}$$

□

Lemme 3.6. *Supposons que $\text{cap} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ est fortement sous-additive. Pour tout ensemble $C_1, \dots, C_n \subset \mathbb{R}^N$, la famille $A_1 \subset \dots \subset A_n$ telle que*

$$\sum_{k=1}^n \chi_{A_k} = \sum_{k=1}^n \chi_{C_k}$$

satisfait

$$\sum_{k=1}^n \text{cap}(A_k) \leq \sum_{k=1}^n \text{cap}(C_k).$$

Démonstration. Nous faisons la preuve par induction sur le nombre d'ensembles $C_1, \dots, C_n$. Pour le cas $n = 1$, il suffit de prendre $A_1 = C_1$. Supposons maintenant que le résultat soit vrai pour $n - 1$ ensembles avec $n \geq 2$ et montrons le pour n . Étant donné $C_1, \dots, C_n$, par le lemme précédent il existe $D_1, \dots, D_n \subset \mathbb{R}^N$ tels que

$$D_1, \dots, D_{n-1} \subset D_n, \quad \sum_{k=1}^n \chi_{D_k} = \sum_{k=1}^n \chi_{C_k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^n \text{cap}(D_k) \leq \sum_{k=1}^n \text{cap}(C_k).$$

Par l'hypothèse d'induction, la famille $A_1 \subset \dots \subset A_{n-1}$ est telle que

$$A_1 \subset \dots \subset A_{n-1}, \quad \sum_{k=1}^{n-1} \chi_{A_k} = \sum_{k=1}^{n-1} \chi_{D_k} \quad \text{et} \quad \sum_{k=1}^{n-1} \text{cap}(A_k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} \text{cap}(D_k).$$

En particulier, cela implique que $A_{n-1} = \bigcup_{k=1}^{n-1} D_k$ et donc en posant $A_n = D_n$ nous avons $A_{n-1} \subset A_n$. De plus,

$$\sum_{k=1}^n \chi_{A_k} = \sum_{k=1}^n \chi_{D_k} = \sum_{k=1}^n \chi_{C_k}$$

et

$$\sum_{k=1}^n \text{cap}(A_k) \leq \sum_{k=1}^n \text{cap}(D_k) \leq \sum_{k=1}^n \text{cap}(C_k). \quad \square$$

Pour montrer la sous-linéarité dans le cas où les fonctions prennent leurs valeurs dans un espace discret, nous supposons dans un premier temps que ces dernières sont bornées de sorte à pouvoir les exprimer en terme de fonctions caractéristiques. Le lemme précédent nous permettra alors de déduire la sous-linéarité de l'intégrale. Nous utiliserons ensuite la troncature de sorte à pouvoir approcher des fonctions non-bornées par des fonctions bornées, ceci nous permettra de conclure.

Proposition 3.7. *Supposons que $\text{cap} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ est monotone et fortement sous-additive. Si $f, g : \mathbb{R}^N \rightarrow \frac{\mathbb{N}}{m}$ pour un certain $m \geq 1$ alors*

$$\int (f + g) d\text{cap} \leq \int f d\text{cap} + \int g d\text{cap}.$$

Démonstration. Par homogénéité de l'intégrale, nous pouvons supposer sans perte de généralité que f et g prennent leurs valeurs dans $\mathbb{N}$. Supposons dans un premier temps que ces deux fonctions sont bornées par un certain $n \geq 1$, nous pouvons alors écrire

$$f = \sum_{k=1}^n \chi_{\{f \geq k\}} \quad \text{et} \quad g = \sum_{k=1}^n \chi_{\{g \geq k\}}. \quad (3.4)$$

Par définition de l'intégrale de Choquet et la proposition 3.2 nous obtenons

$$\int f \mathrm{d} \mathrm{cap} = \int_0^\infty H\left(\left\{\sum_{k=1}^n \chi_{\{f \geq k\}} > t\right\}\right) dt = \sum_{k=1}^n \int_{k-1}^k H\left(\left\{\chi_{\{f \geq k\}} > t\right\}\right) dt = \sum_{k=1}^n \mathrm{cap}(\{f \geq k\})$$

et une inégalité semblable est vérifiée pour g et $f + g$. Nous pouvons observer que cette dernière fonction est bornée par $2n$ et que

$$\sum_{k=1}^{2n} \chi_{\{f+g \geq k\}} = f + g = \sum_{k=1}^n \chi_{\{f \geq k\}} + \sum_{k=1}^n \chi_{\{g \geq k\}}. \quad (3.5)$$

Donc, puisque les ensembles $(\{f + g \geq k\})_{1 \leq k \leq 2n}$ sont croissants en k , nous pouvons appliquer le lemme 3.6 avec $\{f \geq k\}$ et $\{g \geq k\}$ pour $1 \leq k \leq n$ pour obtenir

$$\sum_{k=1}^{2n} \mathrm{cap}(\{f + g \geq k\}) \leq \sum_{k=1}^n \mathrm{cap}(\{f \geq k\}) + \sum_{k=1}^n \mathrm{cap}(\{g \geq k\}).$$

Ceci implique par (3.4) et (3.5)

$$\int (f + g) \mathrm{d} \mathrm{cap} \leq \int f \mathrm{d} \mathrm{cap} + \int g \mathrm{d} \mathrm{cap}$$

et donc la sous-linéarité est démontrée dans le cas où f et g sont bornées.

Dans le cas général, nous considérons la fonction troncature définie pour $n \geq 1$ et $t \in \mathbb{R}$ par

$$T_n(t) = \begin{cases} n & \text{si } t > n \\ t & \text{si } -n \leq t \leq n \\ -n & \text{si } t < -n \end{cases}.$$

Les fonctions $T_n(f)$ et $T_n(g)$ étant toutes deux bornées par n nous avons

$$\int T_n(f + g) \mathrm{d} \mathrm{cap} \leq \int T_n(f) \mathrm{d} \mathrm{cap} + \int T_n(g) \mathrm{d} \mathrm{cap}.$$

De plus, puisque $T_n(f) \leq f$, $T_n(g) \leq g$ et $T_n(f + g) \leq T_n(f) + T_n(g)$ nous obtenons par monotonie de l'intégrale de Choquet

$$\begin{aligned} \int T_n(f + g) \mathrm{d} \mathrm{cap} &\leq \int (T_n(f) + T_n(g)) \mathrm{d} \mathrm{cap} \\ &\leq \int T_n(f) \mathrm{d} \mathrm{cap} + \int T_n(g) \mathrm{d} \mathrm{cap} \\ &\leq \int f \mathrm{d} \mathrm{cap} + \int g \mathrm{d} \mathrm{cap}. \end{aligned} \quad (3.6)$$

En observant que

$$\int T_n(f+g)dcap = \int_0^n \text{cap}(\{f+g > t\})dt$$

nous obtenons par le lemme de Fatou pour l'intégrale de Lebesgue

$$\int (f+g)dcap = \int_0^\infty \text{cap}(\{f+g > t\})dt \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int T_n(f+g)dcap.$$

En combinant cette inégalité avec (3.6) nous obtenons alors

$$\int (f+g)dcap \leq \int fdcap + \int gdcap. \quad \square$$

Nous sommes maintenant prêt à démontrer le théorème de sous-linéarité.

Démonstration du théorème 3.4. Supposons dans un premier temps que l'intégrale de Choquet soit sous-linéaire et montrons que cap est alors fortement sous-additive. Nous avons

$$\begin{aligned} \int (\chi_E + \chi_F)dcap &= \int_0^\infty \text{cap}(\{\chi_E + \chi_F > t\})dt \\ &= \int_0^1 \text{cap}(\{\chi_E + \chi_F > t\})dt + \int_1^2 \text{cap}(\{\chi_E + \chi_F > t\})dt \\ &= \text{cap}(E \cup F) + \text{cap}(E \cap F). \end{aligned}$$

Dès lors, sous l'hypothèse de sous-linéarité nous obtenons

$$\text{cap}(E \cup F) + \text{cap}(E \cap F) = \int (\chi_E + \chi_F)dcap \leq \int \chi_E dcap + \int \chi_F dcap = \text{cap}(E) + \text{cap}(F).$$

Supposons maintenant que cap est fortement sous-additive. En notant $\lfloor \alpha \rfloor$ la partie entière d'un nombre $\alpha \geq 0$ nous pouvons appliquer la proposition 3.7 aux fonctions $\frac{\lfloor kf \rfloor}{k}, \frac{\lfloor kg \rfloor}{k} : \mathbb{R}^N \rightarrow \frac{\mathbb{N}}{k}$ pour obtenir

$$\int \left(\frac{\lfloor kf \rfloor}{k} + \frac{\lfloor kg \rfloor}{k} \right) dcap \leq \int \frac{\lfloor kf \rfloor}{k} dcap + \int \frac{\lfloor kg \rfloor}{k} dcap.$$

Puisque $\frac{\lfloor kf \rfloor}{k} \leq f$ et $\frac{\lfloor kg \rfloor}{k} \leq g$ nous avons par monotonie de l'intégrale de Choquet

$$\int \frac{\lfloor kf \rfloor}{k} dcap + \int \frac{\lfloor kg \rfloor}{k} dcap \leq \int f dcap + \int g dcap.$$

De plus, puisque pour $\alpha \geq 0$ nous avons $k\alpha - 1 \leq \lfloor k\alpha \rfloor$ nous déduisons que

$$f + g - \frac{2}{k} \leq \frac{\lfloor kf \rfloor}{k} + \frac{\lfloor kg \rfloor}{k}.$$

et donc

$$\left(f + g - \frac{2}{k}\right)^+ \leq \frac{\lfloor kf \rfloor}{k} + \frac{\lfloor kg \rfloor}{k}.$$

Dès lors, en utilisant que

$$\int \left(f + g - \frac{2}{k}\right)^+ d\text{cap} = \int_{\frac{2}{k}}^{\infty} \text{cap}(\{f + g > t\}) dt$$

nous obtenons par le lemme de Fatou

$$\int (f + g) d\text{cap} \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{2/k}^{\infty} \text{cap}(\{f + g > t\}) dt \leq \int f d\text{cap} + \int g d\text{cap}$$

ce qui montre la sous-linéarité de l'intégrale. $\square$

3.2 Théorème de convergence

Nous nous intéressons maintenant aux théorèmes de convergence pour l'intégrale de Choquet. Notre objectif est de trouver des analogues au lemme de Fatou et au théorème de convergence dominée de Lebesgue. Nous introduisons pour cela une nouvelle notion de convergence, la convergence quasi-uniforme.

Définition 3.8. Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions $f_n : \mathbb{R}^N \rightarrow [-\infty, +\infty]$. Nous dirons que cette suite converge quasi-uniformément vers une fonction $f : \mathbb{R}^N \rightarrow [-\infty, +\infty]$ si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe $E \subset \mathbb{R}^N$ tel que $\text{cap}(E) \leq \varepsilon$ et si les fonctions de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ sont finies et convergent uniformément vers f sur $\mathbb{R}^N \setminus E$.

Dans la suite, nous noterons $f_n \rightarrow f$ q.u pour désigner la convergence quasi-uniforme de la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ vers la fonction f .

Nous avons la version suivante du lemme de Fatou.

Proposition 3.9. Supposons que $\text{cap} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ satisfait la monotonie et la sous-additivité finie. Alors, si $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions positives définies sur $\mathbb{R}^N$ et convergeant quasi-uniformément vers une fonction f nous avons

$$\int f d\text{cap} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\text{cap}.$$

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$, il existe un ensemble $E \subset \mathbb{R}^N$ tel que $\text{cap}(E) \leq \varepsilon$ et $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $\mathbb{R}^N \setminus E$. Par définition de convergence uniforme, étant donné $\eta > 0$, nous pouvons trouver $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|f_n - f| \leq \eta$ sur $\mathbb{R}^N \setminus E$. Dès lors,

$$f \leq f_n + |f_n - f| \leq f_n + \eta \quad \text{sur } \mathbb{R}^N \setminus E.$$

Donc, si $x \in \mathbb{R}^N \setminus E$ est tel que $f(x) > t + \eta$ avec $t > 0$ nous avons $f_n > t$ et alors

$$\{f > t + \eta\} \setminus E \subset \{f_n > t\}$$

ce qui implique que

$$\{f > t + \eta\} \subset \{f_n > t\} \cup E.$$

On en déduit alors par monotonie et sous-additivité finie de l'application cap ,

$$\text{cap}(\{f > t + \eta\}) \leq \text{cap}(\{f_n > t\}) + \text{cap}(E).$$

Fixons $k \geq 1$, nous avons par le changement de variable $t = s - \eta$

$$\begin{aligned} \int_{\eta}^{\eta+k} \text{cap}(\{f > s\}) ds &= \int_0^k \text{cap}(\{f > t + \eta\}) dt \\ &\leq \int_0^k \text{cap}(\{f_n > t\}) dt + k \text{cap}(E) \\ &\leq \int f_n d\text{cap} + k\varepsilon. \end{aligned}$$

Cette estimation étant valable pour $n \geq n_0$, nous pouvons passer à la limite quand $n \rightarrow \infty$ pour obtenir

$$\int_{\eta}^{\eta+k} \text{cap}(\{f > s\}) ds \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\text{cap} + k\varepsilon$$

et un passage à la limite quand $\varepsilon \rightarrow 0$ livre

$$\int_{\eta}^{\eta+k} \text{cap}(\{f > s\}) ds \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\text{cap}.$$

Finalement, en utilisant le lemme de Fatou pour l'intégrale de Lebesgue, nous obtenons en prenant la limite quand $k \rightarrow \infty$ et $\eta \rightarrow 0$

$$\int f d\text{cap} = \int_0^{\infty} \text{cap}(\{f > t\}) dt \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\text{cap}. \quad \square$$

Nous avons montré dans la section précédente que sous l'hypothèse de sous-additivité forte, l'intégrale de Choquet est sous-linéaire. Par récurrence, cette sous-linéarité implique que

$$\int \sum_{n=1}^k f_n dH \leq \sum_{n=1}^k \int f_n dH.$$

En combinant cette inégalité avec le lemme de Fatou pour l'intégrale de Choquet, nous pouvons déduire la sous-linéarité dénombrable.

Proposition 3.10. *Supposons que $\text{cap} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ satisfait la monotonie et la sous-additivité forte. Alors, si $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}^N$ et telle que $\left(\sum_{n=1}^k f_n\right)_{k \geq 1}$ converge quasi-uniformément vers $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ nous avons*

$$\int |f| dH \leq \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| dH.$$

Démonstration. Pour tout $k \geq 1$, nous avons par monotonie et sous-linéarité de l'intégrale de Choquet

$$\int \left| \sum_{n=1}^k f_n \right| dH \leq \int \sum_{n=1}^k |f_n| dH \leq \sum_{n=1}^k \int |f_n| dH.$$

Par la proposition 3.9 nous obtenons

$$\int |f| dH \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int \sum_{n=1}^k |f_n| dH \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \sum_{n=1}^k \int |f_n| dH = \sum_{n=1}^{\infty} \int |f_n| dH. \quad \square$$

Nous avons utilisé les hypothèses de monotonie et de sous-additivité finie pour obtenir une version du lemme de Fatou, ces deux conditions sont également suffisantes pour établir une version du théorème de convergence dominée de Lebesgue.

Proposition 3.11. *Supposons que $\text{cap} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ satisfait la monotonie et la sous-additivité finie. Si $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions à valeurs réelles définie sur $\mathbb{R}^N$ telle que $f_n \rightarrow f$ q.u et s'il existe une fonction $F : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ telle que*

$$\int F d\text{cap} < +\infty \quad \text{et} \quad |f_n| \leq F \text{ sur } \mathbb{R}^N \text{ pour tout } n \geq 1$$

alors

$$\int |f| d\text{cap} < +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\text{cap} = 0.$$

Démonstration. Par convergence quasi-uniforme de f_n vers f , nous avons $|f_n| \rightarrow |f|$ q.u et donc par la proposition 3.9 nous avons

$$\int |f| d\text{cap} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int |f_n| d\text{cap} \leq \int F d\text{cap} < +\infty.$$

Puisque $f_n \rightarrow f$ q.u, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $E \subset \mathbb{R}^N$ tel que $\text{cap}(E) \leq \varepsilon$ et $f_n \rightarrow f$ uniformément sur $\mathbb{R}^N \setminus E$. Dès lors, étant donné $\eta > 0$, nous pouvons trouver $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $n \geq n_0$, $|f_n - f| \leq \eta$ sur $\mathbb{R}^N \setminus E$. Donc, pour $t > \eta$ et $n \geq n_0$ nous avons

$$\{|f_n - f| > t\} \subset E$$

ce qui nous donne par monotonicité de cap

$$\text{cap}(\{|f_n - f| > t\}) \leq \text{cap}(E) \leq \varepsilon. \quad (3.7)$$

De plus, pour tout $x \in \mathbb{R}^N$ tel que $|f_n(x) - f(x)| > t$ nous avons par l'inégalité triangulaire

$$|f_n(x) - f(x)| \leq F(x) + |f(x)|$$

et donc $F(x) + |f(x)| \geq t$ ce qui implique que

$$\{|f_n - f| > t\} \subset \{F + |f| \geq t\}. \quad (3.8)$$

Dès lors, en utilisant (3.7) et (3.8) nous obtenons pour tout $k > \eta$ et $n \geq n_0$

$$\begin{aligned} \int |f_n - f| d\text{cap} &= \int_0^\infty \text{cap}(\{|f_n - f| > t\}) dt \\ &= \int_0^\eta \text{cap}(\{|f_n - f| > t\}) dt + \int_\eta^k \text{cap}(\{|f_n - f| > t\}) dt \\ &\quad + \int_k^\infty \text{cap}(\{|f_n - f| > t\}) dt \\ &\leq \int_0^\eta \text{cap}(\{F + |f| > t\}) dt + k\varepsilon + \int_k^\infty \text{cap}(\{F + |f| > t\}) dt \end{aligned}$$

et en prenant la limite quand $n \rightarrow \infty$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\text{cap} \leq \int_0^\eta \text{cap}(\{F + |f| > t\}) dt + k\varepsilon + \int_k^\infty \text{cap}(\{F + |f| > t\}) dt.$$

Puisque $\{F + |f| > t\} \subset \{F \geq \frac{t}{2}\} \cup \{|f| \geq \frac{t}{2}\}$ nous obtenons en utilisant la monotonicité et la sous-additivité finie de cap

$$\text{cap}(\{F + |f| > t\}) \leq \text{cap}(\{F \geq \frac{t}{2}\}) + \text{cap}(\{|f| \geq \frac{t}{2}\}).$$

Donc, en prenant la limite quand $\varepsilon, \eta \rightarrow 0$ et puis $k \rightarrow \infty$ nous avons la conclusion puisque $|f|$ et F ont des intégrales de Choquet finies. $\square$

La réciproque partielle du théorème de convergence dominée est aussi valable pour l'intégrale de Choquet, nous devons cependant ajouter une hypothèse sur la capacité.

Proposition 3.12. *Supposons que $\text{cap} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ satisfait la monotonicité et la sous-additivité dénombrable. Si $(f_n)_{n \geq 1}$ est une suite de fonctions à valeurs réelles et définie sur $\mathbb{R}^N$ telle que pour tout $n \geq 1$*

$$\int |f_n - f| d\text{cap} \leq \frac{1}{4^n}$$

où $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait

$$\int f d\text{cap} < +\infty.$$

Alors, $f_n \rightarrow f$ q.u et il existe $F : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ telle que

$$\int F d\text{cap} < +\infty \quad \text{et} \quad |f_n| \leq F \text{ dans } \mathbb{R}^N \text{ pour tout } n \geq 1.$$

L'exemple suivant montre que ce résultat n'est pas valable pour une capacité ne satisfaisant pas la sous-additivité dénombrable.

Exemple 3.13. Considérons $(a_n)_{n \geq 1}$ une suite de points distincts de $\mathbb{R}^N$ et définissons $f_n : \mathbb{R}^N \rightarrow [-\infty, +\infty]$ par

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x = a_n \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

De plus, nous considérons l'application monotone $\text{cap} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ définie pour $E \subset \mathbb{R}^N$ par

$$\text{cap}(E) = \begin{cases} 1 & \text{si } E \text{ est infini} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}.$$

Nous avons alors

$$\int |f_n - 0| d\text{cap} = \text{cap}(\{a_n\}) = 0$$

mais la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ ne converge pas quasi-uniformément vers 0.

En effet, si tel était le cas, il existerait $E \subset \mathbb{R}^N$ tel que $f_n \rightarrow 0$ uniformément en dehors de E avec $H(E) \leq \frac{1}{2}$. Or, par définition de f pour tout $k \geq 1$, l'ensemble E doit contenir

$$\bigcup_{n=k}^{\infty} \{a_n\} \subset E$$

et nous avons alors

$$1 = \text{cap}\left(\bigcup_{n=k}^{\infty} \{a_n\}\right) \leq \text{cap}(E) \leq \frac{1}{2}.$$

Pour démontrer la proposition 3.12, nous aurons besoin d'un résultat de convergence de série.

Lemme 3.14 (M-test de Weierstrass). Soit $(f_n)_{n \geq 1}$ une suite de fonctions $f_n : E \rightarrow \mathbb{R}$ et $(M_n)_{n \geq 1}$ une suite de nombre positifs telles que

1. $|f_n| \leq M_n$ pour tout $n \geq 1$
2. $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ converge.

Alors, la série $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ converge uniformément sur E .

Démonstration. Posons pour tout $x \in E$ et $n \geq 1$, $S_k(x) = \sum_{n=1}^k f_n(x)$. Puisque la suite $(M_n)_{n \geq 1}$ est sommable, par le critère de Cauchy, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $n_0 \geq 1$ tel que pour tout $m > k \geq n_0$

$$\sum_{n=k+1}^m M_n \leq \varepsilon.$$

Nous avons donc pour tout $x \in E$ et $m > k \geq n_0$

$$|S_m(x) - S_k(x)| = \left| \sum_{n=k+1}^m f_n(x) \right| \leq \sum_{n=k+1}^m |f_n(x)| \leq \sum_{n=k+1}^m M_n \leq \varepsilon.$$

Dès lors, la suite $(S_n(x))_{n \geq 1}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$ et par complétude, il existe $S(x)$ tel que $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) = S(x)$. Nous avons donc pour tout $k \geq n_0$

$$|S(x) - S_k(x)| = \left| \lim_{m \rightarrow \infty} S_m(x) - S_k(x) \right| = \lim_{m \rightarrow \infty} |S_m(x) - S_k(x)| \leq \varepsilon.$$

Puisque n_0 ne dépend pas de x , cela montre la convergence uniforme. $\square$

Démonstration de la proposition 3.12. Posons pour chaque $k \geq 1$

$$A_k = \bigcup_{n=k}^{\infty} \left\{ |f_n - f| > \frac{1}{2^n} \right\}.$$

La suite $(2^{-n})_{n \geq 1}$ étant sommable nous déduisons du M-test de Weierstrass que

$$\sum_{n=k}^{\infty} |f_n - f|$$

converge uniformément sur $\mathbb{R}^N \setminus A_k$ et la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge donc uniformément vers f sur cet ensemble. Pour montrer que cette convergence est quasi-uniforme, nous devons montrer que pour $\varepsilon > 0$ donné, nous pouvons choisir k assez grand tel que $\text{cap}(A_k) \leq \varepsilon$.

Nous avons par l'inégalité de Chebyshev

$$\frac{1}{2^n} \text{cap}(\{|f_n - f| > \frac{1}{2^n}\}) \leq \int |f_n - f| d\text{cap} \leq \frac{1}{4^n}$$

et nous obtenons alors par sous-additivité dénombrable de cap

$$\text{cap}(A_k) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \text{cap}(\{|f_n - f| > \frac{1}{2^n}\}) \leq \sum_{n=k}^{\infty} 2^n \int |f_n - f| d\text{cap} \leq \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{2^n} \leq \frac{1}{2^{k-1}}.$$

Dès lors, la suite $(f_n)_{n \geq 1}$ converge quasi-uniformément vers f .

Montrons maintenant que la fonction

$$F = |f| + \sum_{n=1}^{\infty} |f_n - f|$$

a une intégrale de Choquet finie. En appliquant k fois la quasi sous-linéarité de l'intégrale (3.1), nous obtenons

$$\int \sum_{n=1}^k |f_n - f| d\text{cap} \leq \sum_{n=1}^k 2^n \int |f_n - f| d\text{cap} \leq \sum_{n=1}^k \frac{1}{2^n} \leq 4.$$

En utilisant encore une fois la quasi sous-linéarité nous déduisons

$$\int F d\text{cap} \leq 2 \int |f| d\text{cap} + 8 < +\infty. \quad \square$$

3.3 L'espace L^1

Nous désirons maintenant définir un analogue des espaces de Lebesgue, nous travaillerons pour cela avec des fonctions quasi-continues.

Définition 3.15. Une fonction $f : \mathbb{R}^N \rightarrow [-\infty, +\infty]$ est quasi-continue si pour chaque $\varepsilon > 0$, il existe un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$ tel que $\text{cap}(U) \leq \varepsilon$ et $f|_{\mathbb{R}^N \setminus U}$ est finie et continue.

Dans le même esprit que pour les espaces de Lebesgue, nous pouvons définir une relation d'équivalence $\sim$ sur l'espace vectoriel des fonctions quasi-continues à valeurs réelles par $f \sim g$ si et seulement si $f = g$ quasiment partout sur $\mathbb{R}^N$, c'est-à-dire sur $\mathbb{R}^N \setminus E$ avec $\text{cap}(E) = 0$. Nous notons alors $[f]$ la classe d'équivalence contenant la fonction f et on pose

$$L^1(\text{cap}) = \left\{ [f] \mid f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R} \text{ est quasi-continue et } \int |f| d\text{cap} < +\infty \right\}.$$

Nous pouvons naturellement munir cet ensemble d'une structure d'espace vectoriel en posant

$$[f] + [g] = [f + g] \quad \text{et} \quad \lambda[f] = [\lambda f] \quad \text{avec } \lambda \in \mathbb{R}.$$

De plus, en munissant $L^1(\text{cap})$ de la norme

$$\|[f]\|_{L^1(\text{cap})} = \int |f| d\text{cap}$$

nous obtenons un espace normé complet.

Proposition 3.16. *Supposons que $\text{cap} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ soit une application monotone, fortement sous-additive et sous-additive dénombrable. Alors, $L^1(\text{cap})$ est un espace de Banach.*

Dans la preuve nous aurons besoin de l'observation suivante : si $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction quasi-continue et si U est l'ouvert tel que $f|_{\mathbb{R}^N \setminus U}$ est continue, alors, pour tout $t \in \mathbb{R}$ l'ensemble

$$\{f > t\} \cup U$$

est ouvert.

En effet, par continuité de la fonction $f|_{\mathbb{R}^N \setminus U}$, l'ensemble $\{f > t\} \setminus U$ est ouvert dans la topologie relative de $\mathbb{R}^N \setminus U$. Dès lors, il existe V un ouvert de $\mathbb{R}^N$ tel que $\{f > t\} \setminus U = V \setminus U$ et alors

$$\{f > t\} \cup U = V \cup U$$

est ouvert.

Démonstration de la proposition 3.16. Montrons tout d'abord que la norme sur $L^1(\text{cap})$ est bien définie. Si $f \sim g$ alors nous avons

$$\begin{aligned} \int f d\text{cap} &= \int_0^\infty \text{cap}(\{f > t\}) dt \\ &= \int_0^\infty \text{cap}(\{x \in \mathbb{R}^N \setminus E \mid f(x) > t\} \cup \{x \in E \mid f(x) > t\}) dt \\ &\leq \int_0^\infty \text{cap}(\{x \in \mathbb{R}^N \setminus E \mid f(x) > t\}) + \text{cap}(E) dt \\ &= \int_0^\infty \text{cap}(\{x \in \mathbb{R}^N \setminus E \mid g(x) > t\}) dt \\ &\leq \int g d\text{cap}. \end{aligned}$$

L'inégalité inverse étant satisfaite (en échangeant les rôles de f et g), nous déduisons que

$$\int f d\text{cap} = \int g d\text{cap}$$

ce qui montre que $\| [f] \|_{L^1(\text{cap})}$ est bien définie car elle ne dépend pas du choix de représentant. En combinant la proposition 3.2 et le théorème 3.4 nous déduisons que c'est bien une norme.

Montrons maintenant que cet espace est complet. Soit $([f_n])_{n \geq 1}$ une suite de Cauchy dans $L^1(\text{cap})$ où chaque $f_n : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ est quasi-continue. Nous pouvons trouver des entiers $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ tels que

$$\| [f_m - f_n] \|_{L^1(\text{cap})} = \| [f_m] - [f_n] \|_{L^1(\text{cap})} \leq \frac{1}{4^k} \quad \text{pour tout } m, n \geq n_k.$$

Dès lors, nous obtenons

$$\int_0^{1/2^k} \text{cap}(\{|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| > \frac{1}{2^k}\}) dt \leq \frac{1}{4^k}$$

ce qui implique que $\text{cap}(\{|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| > \frac{1}{2^k}\}) \leq \frac{1}{2^k}$.

Par quasi-continuité de $|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|$, il existe un ouvert $U_k \subset \mathbb{R}^N$ tel que $\text{cap}(U_k) \leq \frac{1}{2^k}$ et $|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}|$ est continue sur $\mathbb{R}^N \setminus U_k$. Posons

$$V_k = \{|f_{n_k} - f_{n_{k+1}}| > \frac{1}{2^k}\} \cup U_k$$

et observons que cet ensemble est ouvert et par sous-additivité finie de cap nous avons $\text{cap}(V_k) \leq \frac{1}{2^{k-1}}$. Posons $F_m = \bigcup_{k=m}^{\infty} V_k$ et définissons pour $x \in \mathbb{R}^N \setminus F_m$

$$f(x) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_{n_k}(x) = f_{n_1}(x) + \lim_{l \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^l (f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x)).$$

Puisque pour tout $x \in \mathbb{R}^N \setminus F_m$ nous avons

$$\sum_{j=m}^{\infty} |f_{n_j}(x) - f_{n_{j+1}}(x)| \leq \sum_{j=m}^{\infty} \frac{1}{2^j} < +\infty$$

il suit du M-test de Weierstrass que $(f_{n_k})_{k \geq 1}$ converge uniformément vers f dans $\mathbb{R}^N \setminus F_m$ ce qui implique que f est continue sur $\mathbb{R}^N \setminus F_m$. Puisque la suite $(F_m)_{m \geq 1}$ est croissante, la fonction f est bien définie sur $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathbb{R}^N \setminus F_m$. Posons $f(x) = 0$ pour tout $x \in \bigcap_{m=1}^{\infty} F_m$. Puisque par sous-additivité dénombrable

$$\text{cap}(F_m) \leq \sum_{k=m}^{\infty} \text{cap}(V_k) \leq \frac{1}{2^{m-2}} \rightarrow 0$$

on en déduit que f est quasi-continue et $f_{n_k} \rightarrow f$ q.u.

Pour montre la convergence de la suite $([f_n])_{n \geq 1}$ vers $[f]$ dans l'espace $L^1(\text{cap})$, il suffit de montrer que la sous-suite $([f_{n_k}])_{k \geq 1}$ converge quasi-uniformément vers $[f]$. Pour tout $i \geq j \geq 1$, nous avons

$$\int |f_{n_j} - f_{n_i}| d\text{cap} \leq \frac{1}{4^j}.$$

Puisque $(|f_{n_j} - f_{n_i}|)_{i \geq 1}$ converge vers $|f_{n_j} - f|$ quand $i \rightarrow \infty$, il suit de la proposition 3.9

$$\int |f_{n_j} - f| d\text{cap} \leq \liminf_{i \rightarrow \infty} \int |f_{n_j} - f_{n_i}| d\text{cap} \leq \frac{1}{4^j}.$$

Un passage à la limite quand $j \rightarrow \infty$ nous permet de conclure. □

Nous avons montré dans la section précédente une version du lemme de Fatou pour l'intégrale de Choquet. Si les termes de la suite $([f_n])_{n \geq 1}$ sont dans $L^1(\text{cap})$, il est naturel de se demander si c'est aussi le cas pour f . Ce sera en fait le cas si nous disposons d'une suite bornée dans $L^1(\text{cap})$.

Proposition 3.17. *Supposons que cap satisfait la monotonie et la sous-additivité forte. Si $([f_n])_{n \geq 1}$ est une suite bornée dans $L^1(\text{cap})$ telle que cette suite converge quasi-uniformément vers une fonction f quasi-continue, alors $[f] \in L^1(\text{cap})$ et*

$$\|[f]\|_{L^1(\text{cap})} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|[f_n]\|_{L^1(\text{cap})}.$$

Démonstration. Par le lemme de Fatou pour l'intégrale de Choquet nous avons

$$\int |f| d\text{cap} < +\infty$$

et donc $f \in L^1(\text{cap})$ par quasi-continuité de f . □

Nous terminons ce chapitre en étudiant un résultat de densité dans l'espace $L^1(\text{cap})$. Plus précisément, nous aimerions montrer que $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^N)$ est dense dans cet espace. Nous montrons dans un premier temps que toute fonction quasi-continue peut être approchée par une fonction continue bornée.

Proposition 3.18. *Supposons que $\text{cap} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ est monotone et sous-additive finie. Si $f : \mathbb{R}^N \rightarrow [-\infty, +\infty]$ est quasi-continue et a une intégrale de Choquet finie, alors il existe une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ de fonctions continues bornées dans $\mathbb{R}^N$ telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\text{cap} = 0.$$

Démonstration. Par quasi-continuité de f , pour tout $\varepsilon > 0$, nous pouvons trouver un ouvert $U \subset \mathbb{R}^N$ tel que $\text{cap}(U) \leq \varepsilon$ et $f|_{\mathbb{R}^N \setminus U}$ est continue. Alors, par composition la fonction $T_k(f)|_{\mathbb{R}^N \setminus U}$ est elle aussi continue et par le théorème d'extension de Tietze [16], nous pouvons étendre cette fonction en une fonction continue bornée $g_{k,\varepsilon} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ telle que $|g_{k,\varepsilon}| \leq k$. Nous avons alors par quasi-sous-linéarité de l'intégrale de Choquet

$$\int |g_{k,\varepsilon} - f| d\text{cap} \leq 2 \int |g_{k,\varepsilon} - T_k(f)| d\text{cap} + 2 \int |T_k(f) - f| d\text{cap}.$$

Observons que

$$\begin{aligned} \int |T_k(f) - f| d\text{cap} &= \int_0^\infty \text{cap}(\{|T_k(f) - f| > t\}) dt \\ &= \int_0^\infty \text{cap}(\{|f| > k + t\}) dt \end{aligned}$$

$$= \int_k^\infty \text{cap}(\{|f| > s\}) ds$$

Dès lors, puisque $|f|$ a une intégrale de Choquet finie, nous avons

$$\int |T_k(f) - f| d\text{cap} \rightarrow 0 \text{ quand } k \rightarrow \infty.$$

Donc, en prenant $n \in \mathbb{N}$, nous pouvons trouver $k = k_n > 0$ tel que

$$\int |T_k(f) - f| d\text{cap} \leq \frac{1}{n+1}.$$

Puisque $|g_{k_n, \varepsilon} - T_{k_n}(f)| \leq 2k_n$ et s'annule sur $\mathbb{R}^N \setminus U$ nous obtenons

$$\begin{aligned} \int |g_{k_n, \varepsilon} - T_{k_n}(f)| d\text{cap} &= \int_0^{2k_n} \text{cap}(\{|g_{k_n, \varepsilon} - T_{k_n}(f)| > t\}) dt \\ &\leq \int_0^{2k_n} \text{cap}(U) dt \\ &\leq 2k_n \varepsilon. \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\int |g_{k_n, \varepsilon} - f| d\text{cap} \leq 4k_n \varepsilon + \frac{2\varepsilon}{n+1}.$$

En choisissant $\varepsilon = \varepsilon_n > 0$ tel que $4k_n \varepsilon_n \leq \frac{1}{n+1}$ nous avons

$$\int |g_{k_n, \varepsilon} - f| d\text{cap} \leq \frac{3}{n+1}$$

et nous concluons en prenant $f_n = g_{k_n, \varepsilon}$ □

Nous pouvons maintenant montrer le résultat général.

Proposition 3.19. *Supposons que $\text{cap} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ est monotone, sous-additive finie et satisfait la propriété d'évanescence. Si $f : \mathbb{R}^N \rightarrow [-\infty, +\infty]$ est quasi-continue et a une intégrale de Choquet finie, alors il existe une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ dans $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^N)$ telle que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |f_n - f| d\text{cap} = 0$$

Démonstration. Par la proposition précédente et la quasi sous-linéarité de l'intégrale de Choquet, nous pouvons supposer que f est bornée et continue.

Soit $r > 0$ et prenons $g_r \in \mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^N)$ tel que $0 \leq g_r \leq 1$ dans $\mathbb{R}^N$ et $g_r = 1$ sur $B(0, r)$. Puisque $|fg_r - f| \leq |f|$ dans $\mathbb{R}^N$ et $|fg_r - f| = 0$ sur $B(0, r)$, nous avons pour tout $t > 0$

$$\{|fg_r - f| > t\} \subset \{|f| \geq t\} \setminus B(0, r).$$

Puisque f est bornée, il existe $M \geq 0$ tel que $|f| \leq M$. Nous avons pour tout $0 < \eta \leq M$

$$\begin{aligned} \int |fg_r - f| d\text{cap} &= \int_0^M \text{cap}(\{|fg_r - f| > t\}) dt \\ &= \int_0^\eta \text{cap}(\{|fg_r - f| > t\}) dt + \int_\eta^M \text{cap}(\{|fg_r - f| > t\}) dt. \end{aligned}$$

Par monotonie de cap nous obtenons

$$\int_0^\eta \text{cap}(\{|fg_r - f| > t\}) dt \leq \int_0^\eta \text{cap}(\{|f| > t\}) dt$$

et

$$\int_\eta^M \text{cap}(\{|fg_r - f| > t\}) dt \leq M \text{cap}(\{|fg_r - f| > \eta\}) \leq M \text{cap}(\{|f| \geq \eta\} \setminus B(0, r)).$$

Dès lors,

$$\int |f\psi_r - f| d\text{cap} \leq \int_0^\eta \text{cap}(\{|f| > t\}) dt + M \text{cap}(\{|f| \geq \eta\} \setminus B(0, r)).$$

Observons que l'ensemble $\{|f| \geq \eta\}$ est fermé et contient l'ouvert $\{|f| > \eta\}$ qui satisfait $\text{cap}(\{|f| > \eta\}) < +\infty$ par l'inégalité de Chebyshev. Donc, par la propriété d'évanescence, le second terme converge vers 0 quand $r \rightarrow \infty$ et puisque f a une intégrale de Choquet finie, le premier terme tend lui aussi vers 0 quand $\eta \rightarrow 0$. Donc, si nous prenons la limite quand $r \rightarrow 0$ et ensuite la limite quand $\eta \rightarrow 0$, nous obtenons

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int |fg_r - f| d\text{cap} = 0$$

et il nous suffit alors de prendre $f_n = fg_n$. □

Nous avons supposé l'hypothèse d'évanescence sur l'application cap , celle-ci est en fait nécessaire.

Proposition 3.20. *Supposons que $\text{cap} : \mathcal{P}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty]$ est monotone. Si toute fonction continue $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ avec intégrale de Choquet finie peut être approximée en terme de l'intégrale de Choquet par une suite dans $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^N)$, alors cap satisfait la propriété d'évanescence.*

Démonstration. Soient $U \subset \mathbb{R}^N$ un ouvert tel que $\text{cap}(U) < +\infty$, un fermé $F \subset U$ et $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue supportée sur U telle que $f = 1$ sur F et $0 \leq f \leq 1$ sur $\mathbb{R}^N$. Alors, par monotonie de cap nous avons

$$\int |f| d\text{cap} \leq \text{cap}(U) < +\infty.$$

Soit $k \in \mathbb{N}$ que nous choisirons plus tard et prenons $R > 0$ tel que $\text{supp}(f_k) \subset B(0, R)$. Par monotonie de cap nous obtenons

$$\int |f_k - f| d\text{cap} \geq \int |f_k - f| \chi_{F \setminus B(0, R)} d\text{cap} = \int \chi_{F \setminus B(0, R)} d\text{cap} = \text{cap}(F \setminus B(0, R)).$$

Soit $\varepsilon > 0$, puisque par hypothèse il existe une suite $(f_n)_{n \geq 1}$ dans $\mathcal{C}_c^0(\mathbb{R}^N)$ telle que

$$\int |f_n - f| d\text{cap} \rightarrow 0,$$

nous pouvons prendre $k \in \mathbb{N}$ tel que cette intégrale soit inférieure à ε . Alors, pour tout $r \geq R$ nous avons par monotonie de cap

$$\text{cap}(F \setminus B(0, r)) \leq \text{cap}(F \setminus B(0, R)) \leq \int |f_k - f| dH \leq \varepsilon. \quad \square$$

Conclusion

Dans ce mémoire, nous nous sommes intéressés à la notion de capacité et plus particulièrement à celle de capacitabilité. Notre objectif principal était de montrer que tout borélien de $\mathbb{R}^N$ est capacitable, c'est-à-dire, $\text{cap}^*(E) = \text{cap}_*(E)$ pour tout $E \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$. Nous avons pour cela considéré des capacités au sens de Choquet qui s'avèrent être des mesures extérieures soumises à des conditions de régularité.

Bien que nous désirions initialement montrer que les boréliens sont contenus dans la classe des ensembles capacitables, la non stabilité sous l'intersection finie de cette dernière nous a amené à considérer une classe plus étendue d'ensemble appelée ensemble de Suslin. Nous avons alors montré que ces ensembles sont capacitables ce qui nous a permis de déduire la capacitabilité des boréliens.

Nous avons ensuite abordé divers exemples de capacités et avons vérifié si ces dernières satisfont les conditions nécessaires pour être considérées comme des capacités au sens de Choquet. Notre analyse a révélé que les propriétés de régularité extérieure et de sous-additivité forte revêtent une importance particulière. Les conditions C2 et C4 sont en effet des conséquences directes de la régularité extérieure. On peut ensuite combiner cette dernière propriété avec celle de sous-additivité forte, pour pouvoir établir les conditions C3 et C5.

Pour la plupart des capacités que nous avons considérée, nous avons démontré la propriété de sous-additivité forte. Dans le cas de la capacité de Bessel, cette propriété n'a cependant pas été établie. Il n'est en fait pas connu (en tout cas à la connaissance de l'auteur) si cette capacité satisfait cette propriété pour tout $\alpha > 0$ et $1 < p < +\infty$. On peut cependant montrer que la sous-additivité forte est satisfaite pour certaines valeurs de α et p , par exemple quand $0 < \alpha \leq 1$ et $p = 2$, la preuve de ce résultat peut se trouver dans [12].

Dans le dernier chapitre, nous avons introduit l'intégrale de Choquet, une intégrale définie par rapport à une application satisfaisant uniquement une hypothèse de monotonie. Nous avons observé que cette intégrale ne satisfait généralement pas les propriétés classiques d'une intégrale comme par exemple la linéarité. Nous avons cependant montré que sous l'hypothèse de sous-additivité forte, cette intégrale est sous-linéaire.

Bibliographie

- [1] D. R. Adams and L. I. Hedberg, *Function spaces and potential theory*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, vol. 314, Springer-Verlag, Berlin, 1996. [↑59](#)
- [2] D. R. Adams, *Choquet integrals in potential theory*, Publ. Mat. **42** (1998), no. 1, 3–66. [↑82](#)
- [3] H. Brezis, *Analyse fonctionnelle Théorie et applications*, Birkhäuser/Springer, New York, 1999. [↑19](#)
- [4] H. Cartan, *Théorie du potentiel newtonien : énergie, capacité, suites de potentiels*, Bulletin de la Société Mathématique de France **73** (1945), 74–106 (fre). [↑8](#)
- [5] G. Choquet, *Theory of capacities*, Ann. Inst. Fourier (Grenoble) **5** (1953/54), 131–295 (1955). [↑8](#)
- [6] ———, *La naissance de la théorie des capacités : réflexion sur une expérience personnelle*, C. R. Acad. Sci. Sér. Gén. Vie Sci. **3** (1986), no. 4, 385–397 (French). [↑](#)
- [7] L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Measure theory and fine properties of functions*, Revised edition, Textbooks in Mathematics, CRC Press, Boca Raton, FL, 2015. [↑47](#)
- [8] W. K. Hayman and P. B. Kennedy, *Subharmonic functions. Vol. I*, Vol. No. 9., Academic Press [Harcourt Brace Jovanovich, Publishers], London-New York, 1976. [↑43](#)
- [9] J. Heinonen, T. Kilpeläinen, and O. Martio, *Nonlinear potential theory of degenerate elliptic equations*, Dover Publications, Mineola, NY, 2006. [↑12](#), [13](#)
- [10] A. C. Ponce, *Elliptic PDEs, measures and capacities*, EMS Tracts in Mathematics, vol. 23, European Mathematical Society (EMS), Zürich, 2016. [↑56](#)
- [11] A. C. Ponce and D. Spector, *Some Remarks on Capacitary Integrals and Measure Theory*, 2023. [↑82](#)
- [12] Keng Hao Ooi and Nguyen Cong Phuc, *Characterizations of predual spaces to a class of Sobolev multiplier type spaces*, Journal of Functional Analysis **282** (2022), no. 6, 109348. [↑103](#)
- [13] Juha Kinnunen, *Sobolev spaces*. Consulté le 02/06/2023. [↑51](#)
- [14] S. G. Krantz and H. R. Parks, *Geometric integration theory*, Cornerstones, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2008. [↑35](#)
- [15] P. Mironescu, *Mesure, intégrations, éléments d'analyse fonctionnelle*, Université Claude Bernard Lyon I, Unknown Month 2023. [↑34](#)
- [16] Erich Ossa, *A simple proof of the Tietze-Urysohn extension theorem*, Archiv der Mathematik **71** (1998), 331–332. [↑99](#)
- [17] Y. Mizuta, *Potential Theory in Euclidean Spaces*, Gakuto international series : Mathematical sciences and applications, Gakkōtoshō, 1996. [↑57](#)
- [18] C. A. Rogers, *Hausdorff measures*, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, Cambridge, 1998. [↑71](#)
- [19] E. M. Stein and R. Shakarchi, *Real analysis*, Princeton Lectures in Analysis, vol. 3, Princeton University Press, Princeton, NJ, 2005. [↑32](#), [33](#)
- [20] T. Van der Linden, *LMAT1235 - Notions de logique mathématique*, Louvain-la-Neuve, 2020. [↑35](#)
- [21] Z. a. Y. Wang Jia-An, *A selective overview of applications of Choquet integrals*, Advanced Lectures in Mathematics (2007). [↑82](#)

- [22] M. Willem, *Functional analysis*, Cornerstones, Birkhäuser/Springer, New York, 2013. [↑9](#), [15](#), [16](#), [19](#), [52](#), [64](#), [84](#)
- [23] D. Yang and W. Yuan, *A note on dyadic Hausdorff capacities*, Bull. Sci. Math. **132** (2008), no. 6, 500–509. [↑76](#)

