

Faculté des sciences

Quelle place accorder à la logique dans l'enseignement secondaire des mathématiques ?

Auteur-es : **NAJI Bouchra**

Promoteur-rices : Enrico Vitale

Lecteur-rices : Sonia GHORBAL et Philippe RUELLE

Année académique 2023-2024

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
FACULTÉ DES SCIENCES
ÉCOLE DE MATHÉMATIQUES

**Quelle place accorder à la logique
dans l'enseignement secondaire des
mathématiques ?**

NAJI Bouchra
Advisor: Enrico Vitale
Readers: Sonia GHORBAL et Philippe RUELLE

Master thesis
June 2021

Remerciements

Je ne peux entamer ces remerciements sans exprimer ma profonde reconnaissance à mon cher promoteur de mémoire, Monsieur Enrico Vitale . Son soutien indéfectible, sa disponibilité hors pair et son dévouement exceptionnel ont été des guides précieux tout au long de la rédaction de ce mémoire, mais aussi durant l'entièreté de mon parcours universitaire. Sa contribution a été inestimable, et je lui serai éternellement reconnaissante pour son soutien indéfectible.

Je tiens également à remercier chaleureusement Madame Sonia Ghorbal et Monsieur Philippe Ruelle d'avoir accepté d'être les lecteurs de ce mémoire. Leurs précieux conseils ont contribué à enrichir considérablement la qualité de ce travail.

Ma gratitude s'adresse ensuite à ma famille, et plus particulièrement à mon mari Redouane et mes enfants Jad et Ilias. Leur amour inconditionnel, leur soutien et leur foi en moi ont été ma force motrice tout au long de ces années d'études. Je n'ai pas de mots pour exprimer ma reconnaissance envers eux.

Je remercie également de tout cœur ma famille au Maroc. Leur croyance en mes capacités, bien plus forte que la mienne parfois, a été une source d'inspiration constante.

Je suis reconnaissante à M. El Moussaoui, Mme Lebrun, Mme Masse, Mme Letroye et Mme Ochoa d'avoir consacré une partie de leurs heures de cours pour soumettre leurs élèves à mon questionnaire de logique. Leur collaboration a été précieuse pour la collecte de données.

Enfin, je remercie chaleureusement M. Van Schaftingen, M. Claeys et M. Dall'Olio d'avoir accepté de participer à mon enquête. Leur temps et leurs précieux retours ont contribué à enrichir la recherche.

A tous ceux qui ont contribué de près ou de loin à la réalisation de ce mémoire, j'exprime ma plus profonde gratitude.

Introduction

L'apprentissage des mathématiques et d'autres disciplines se heurte souvent à des obstacles pour de nombreux élèves, et parmi les raisons identifiées, le déficit dans la maîtrise des règles du raisonnement logique est fréquemment souligné. En effet, la capacité à formuler des arguments clairs et structurés, à identifier les hypothèses et les conclusions, et à évaluer la validité des raisonnements est un élément crucial de la réussite scolaire.

Face à ce constat, l'introduction de notions de logique dès l'école primaire, voire même depuis la maternelle, comme le suggèrent Gfrachet et Clerc, apparaît comme une solution prometteuse. En effet, « dès l'école maternelle, des activités ludiques et manipulatoires peuvent être proposées aux enfants pour les familiariser avec les notions de logique : en proposant aux enfants des situations qui leur offrent l'occasion d'effectuer des tris, des rangements, des mises en relation, on les aide à structurer leurs représentations et à se dégager de leurs perceptions immédiates. Ces situations vécues dans la classe vont les obliger à focaliser leur attention sur tel ou tel aspect de l'objet, à privilégier la relation ou les relations entre les objets. . . ».[1]

Contrairement à la vision linéaire du développement cognitif avancée par Piaget, des recherches récentes ont montré que ce processus est plutôt irrégulier et spiralaire, nécessitant une intégration progressive des notions logiques tout au long du cursus scolaire. Il est donc crucial d'incorporer ces concepts de manière transversale dans les différentes matières, tout en maintenant un équilibre entre le langage naturel et le langage symbolique.

En effet, l'idée est plutôt de procéder par petites touches, en intégrant des notions de logique dans les différents cours, sous forme de bilans, de synthèses ou de généralisations. Cette approche permet aux élèves de s'approprier progressivement les concepts logiques sans se sentir submergés.

Les situations d'apprentissage, qu'il s'agisse de questions, d'erreurs des élèves ou de situations évoquées, constituent des opportunités précieuses pour faire émerger et approfondir les notions de logique. En s'appuyant sur des exemples concrets et familiers, les élèves peuvent développer une compréhension plus solide des concepts logiques et apprendre à les appliquer dans différents contextes.

Dans ce travail, nous exposerons lors premier chapitre la position du référentiel de mathématiques vis-à-vis des notions de logique à aborder. Nous analyserons comment ces concepts sont intégrés dans le cadre pédagogique et quelles sont les attentes de ce dernier en matière d'enseignement de la logique.

Dans le deuxième chapitre, nous examinerons les attentes des institutions universitaires et des hautes écoles concernant l'enseignement de la logique. Cette analyse sera basée sur une enquête menée auprès d'enseignants et sur divers documents de la littérature scientifique. L'objectif est de comprendre les besoins et les exigences de ces institutions en termes de compétences logiques chez les étudiants au moment où ils entament un cursus dans une université ou Haute école.

Le troisième chapitre se penchera sur les résultats des tests soumis à trois groupes d'apprenants : des élèves de sixième année du secondaire, des étudiants en devenir enseignants en secondaire inférieur (haute école) et finalement ceux en première année bachelier (ingénieur en informatique à l'Université catholique de Louvain). Cette analyse nous permettra d'évaluer les compétences et les lacunes dans la compréhension de la logique chez ces trois groupes, ainsi que les implications pour l'enseignement futur de la logique.

Dans le quatrième chapitre, nous proposerons des séquences de cours et des exemples d'activités à insérer dans le cours de mathématiques pour aborder différentes notions de logique. Ces séquences et activités seront conçues pour être accessibles et engageantes pour les élèves. De plus, nous fournirons également des exercices pratiques pour renforcer la compréhension des concepts logiques.

Enfin, dans le cinquième chapitre, une petite fenêtre théorique sur les différentes notions de logique sera présentée. Cette section, volontairement vulgarisée, permettra aux futurs enseignants du secondaire inférieur et supérieur d'appréhender les concepts de manière claire et accessible auprès de leurs futurs élèves. L'objectif est de fournir une base solide pour l'enseignement de la logique, sans recourir à des définitions complexes, afin que tous les enseignants puissent les intégrer dans leur pratique pédagogique.

Contents

Remerciements	5
Introduction	6
1 Analyse du programme de mathématiques du secondaire.	10
2 Une Analyse des Attentes des Enseignants de l'Enseignement Supérieur envers la Logique Mathématique	15
3 Analyse des tests	18
3.1 Test à l'intention des élèves de sixième secondaire	18
3.2 Tests à l'intention des étudiants « futurs professeurs de mathématiques » en secondaire inférieur.	38
3.3 Résultats du test soumis à des étudiants en Bac 1	44
4 Quelques pistes didactiques : introduire la logique en secondaire	47
4.1 ACTIVITE : Où construire le pont ?	99
4.2 Bilan de l'activité : Notion de fonction et vocabulaire.	104
5 Propositions d'exercices et activités évolutives pour l'apprentissage progressif des élèves.	141
5.1 Implication et équivalence	141
5.2 Quantificateurs universel et existentiel	146
5.3 Négation de propositions quantifiées ou non	149
6 Quelques éléments théoriques de logique	151
6.1 L'implication dans le langage courant vs la logique mathématique .	151
6.2 Equivalence	153
6.3 Négation	153
6.4 Quantification et quantificateurs [13]	155
Conclusion	157

A	Questionnaire à l'intention des élèves de 6ème	159
B	Questionnaire à l'intention des étudiants	162

Chapter 1

Analyse du programme de mathématiques du secondaire.

Pour cette tâche, nous nous sommes fondés sur le nouveau référentiel de mathématiques. En effet, il s'agit d'un document édité par la WBE (Wallonie-Bruxelles Enseignement) décrivant les objectifs attendus, ce qu'il convient d'apprendre, soit le "quoi apprendre". Il s'agit d'un référentiel commun à tous les réseaux d'enseignement, garantissant l'uniformité des connaissances de base pour tous les élèves. Sa valeur légale en fait un contrat tacite entre l'école et la société, incluant les parents.

Quant au programme, il est élaboré à partir de ce référentiel pour aider les enseignants à structurer leurs cours, en fournissant des conseils pédagogiques sur la manière d'enseigner et de préparer les leçons en classe. Il est important de noter qu'il varie selon les réseaux d'enseignement, d'où notre décision de nous appuyer sur le référentiel commun.

Le référentiel de mathématiques de la WBE suit généralement une structure organisée et exhaustive, visant à définir les objectifs d'apprentissage pour les élèves à chaque niveau d'enseignement [2]. Il est structuré de la manière suivante :

- **Un préambule** comportant une introduction et une présentation : Cette section expose généralement les objectifs globaux du référentiel, ainsi que les principes pédagogiques et les valeurs fondamentales qui le sous-tendent.

Nous relevons ainsi un passage de ce préambule :

Mathématique et logique

Les concepts et méthodes de la logique ne font pas l'objet d'un cours spécifique, mais prennent naturellement leur place dans la plupart des unités.

Une bonne formation à la logique permet de mieux maîtriser le débat démocratique: reconnaître la différence entre une cause et une conséquence, enchaîner des raisonnements, tirer une conséquence de plusieurs causes...

La pratique de la logique en mathématique favorise la construction de l'argumentation, la compréhension de textes, le développement de l'esprit critique...

Fig-1, référentiel page 7/60

Le texte de la Fig-1 met en avant le rôle transversal de la logique dans l'enseignement des mathématiques, en soulignant qu'elle n'est pas enseignée de manière spécifique mais qu'elle est incorporée de manière « naturelle » dans diverses matières.

Mathématique et communication

La communication intervient lors de différentes étapes d'une démarche mathématique notamment dans

- la reformulation orale ou écrite dans l'appropriation d'une situation;
- la traduction du langage mathématique en un langage usuel et réciproquement;
- la production d'un dessin, d'un graphique, d'un schéma, d'un tableau;
- la formulation d'une conjecture, d'une stratégie, d'une procédure, d'une argumentation, d'une démonstration, d'une généralisation, d'une synthèse, d'un résultat...;
- la discussion dans la confrontation de points de vue;
- la présentation structurée des données, des arguments, des solutions... .

Dans toute communication, orale ou écrite, l'exigence de rigueur s'impose tant pour le langage mathématique que pour la langue française: choix du terme exact, recours aux connecteurs logiques, utilisation de symboles, respect de la syntaxe mathématique, qualité de la présentation, orthographe correcte.

Fig-2, Référentiel page 8/60

Ici, l'importance est accordée à la manière dont le raisonnement est organisé et justifié, mettant l'accent sur la compétence des élèves à structurer les éléments mathématiques tels que les arguments et les solutions. De plus, il est souligné dans l'extrait de la Fig-2 que les élèves doivent être capables d'utiliser un langage adapté à la démonstration et de développer une rigueur tant dans la syntaxe mathématique que dans l'utilisation des symboles, ainsi que dans l'expression en langue française.

- Analysons maintenant le contenu **des fiches** qui décrivent les Compétences et connaissances par UAA (Unités d'Acquis d'Apprentissage), des objectifs spécifiques pour chaque compétence ou domaine mathématique, décrivant en détail ce que les élèves devraient être capables de faire ou de comprendre à la fin de chaque niveau d'enseignement.

Nous avons identifié exactement cinq UAAs du référentiel qui font appel à des outils logiques dans la catégorie : Ressources.

Cas de similitude des triangles (y compris le cas des triangles à côtés parallèles)

Outils logiques (utilisation en contexte)
 Implication (condition nécessaire, suffisante)
 Équivalence
 Réciproque

Fig-3, Référentiel page15/60

3UUA1 Figures isométriques et figures semblables

Trigonométrie
 Définition du sinus, cosinus et tangente d'un angle dans le triangle rectangle
 Nombres trigonométriques de 30° , 45° et 60°
 Angle correspondant à une pente, à une inclinaison exprimée en %

Outils logiques (utilisation en contexte)
 Réciproque
 Implication
 Équivalence
 Négation
 Contraposition

Fig-4, Référentiel page16/60

3UUA2 Le triangle rectangle

<p>Éléments caractéristiques d'une fonction exclusivement à partir de son graphique</p> <ul style="list-style-type: none"> • Domaine et ensemble-image • Image d'un réel • Zéro(s) • Signe <p>Outil logique (utilisation en contexte) Quantificateur</p> <p>Vocabulaire ensembliste (utilisation en contexte) Union Intersection Différence</p>

Fig-5, Référentiel page18/60

3UUA3 Approche graphique d'une fonction

<p>Intersection de deux fonctions du premier degré et/ou constantes</p> <p>Outils logiques (utilisation en contexte) Connecteurs (et, ou) Équivalence</p>

Fig-6, Référentiel page 19/60

3UUA4 Le premier degré

<p>Propriétés utiles aux constructions des points de percée et des sections planes</p> <p>Outil logique (utilisation en contexte) Implication</p> <p>Vocabulaire ensembliste (utilisation en contexte) Appartenance, inclusion, intersection</p>
--

Fig-7, Référentiel page22/60

4UUA2 géométrie dans l'espace

Nous avons aussi identifié 5 endroits où l'on fait référence à la logique dans la catégorie « stratégies transversales » : Communiquer en respectant la syntaxe de la logique mathématique.

Ces extraits nous fournissent des indications sur l'utilisation du langage de la logique. Dans le contexte des fonctions, le langage mathématique est employé pour définir la notion de fonction à travers l'utilisation de quantificateurs. De même, dans le chapitre sur le triangle rectangle et la trigonométrie, le langage mathématique est utilisé pour élaborer des démonstrations à travers l'utilisation des notions de : Réciproque, Contraposée, Négation, Implication et Equivalence.

En dehors des UAAs mentionnées ci-dessus, la notion de langage mathématique et de quantificateur ne semble pas être abordée, offrant ainsi une liberté aux enseignants quant à la manière dont ils mettent en œuvre le langage mathématique, conformément au préambule du document.

Pour résumer, bien qu'il soit mentionné un langage approprié, la façon dont il est mis en œuvre et interprété est laissée à l'appréciation des lecteurs, ce qui pourrait entraîner des disparités dans l'utilisation du langage de la logique par

les enseignants et potentiellement expliquer des différences de maîtrise chez les étudiants arrivant à l'université.

En revanche, dans certaines UAAs, l'utilisation des outils de logique est spécifiée avec précision, les idées mathématiques étant traduites à l'aide de ces outils, ce qui suggère que les étudiants ayant suivi ce programme disposent au moins des compétences de traduction à partir de situations mathématiques ou d'énoncés en langage courant.

Ces analyses suggèrent donc que les étudiants possèdent des compétences en matière de démonstration et peuvent rédiger des arguments en utilisant des termes appropriés, bien que des différences dans l'utilisation et la maîtrise du langage mathématique puissent exister d'un étudiant à l'autre.

Cependant, ces aspects restent problématiques, comme le souligne l'analyse des copies de tests effectués auprès d'élèves de 6ème année secondaire et d'étudiants de 1ère bachelier, mettant en lumière plusieurs difficultés récurrentes.

Chapter 2

Une Analyse des Attentes des Enseignants de l'Enseignement Supérieur envers la Logique Mathématique

Les transitions vers les études supérieures, notamment en mathématiques, sont un sujet d'intérêt pour les chercheurs et les enseignants. En France, des études ont examiné les difficultés rencontrées par les étudiants universitaires lors de leurs premiers cours d'analyse et d'algèbre linéaire, en mettant en évidence les défis liés au formalisme mathématique.[3]

De même, dans les pays anglo-saxons, la recherche en éducation mathématique s'est concentrée sur les cours de transition vers les preuves formelles : « les enquêtes menées de 1987 à 1994 par Robert et Robinet (1989), par Dorier (1990a) puis par Rogalski (1991, 1994) précisent les difficultés auxquelles sont confrontées les étudiants lors d'un premier enseignement d'algèbre linéaire. Ces auteurs montrent que ces difficultés sont révélatrices de ce que Dorier et al. (1997) appellent « l'obstacle du formalisme » (Dorier 1991), obstacle associé à la nature de la généralisation qui a lieu.[3]

En examinant les réponses des enseignants du secondaire et du collégial au Québec, il apparaît que les difficultés de transition sont souvent liées à une maîtrise insuffisante des bases de logique et de théorie des ensembles.[3]

Nous avons également mené une petite enquête auprès d'enseignants universitaires (UCLouvain et Haute Ecole Provinciale de Hainaut Condorcet). Lors de cette enquête, Nous avons posé 3 questions aux enseignants :

1. Selon votre expérience, quelles sont les principales difficultés auxquelles sont confrontés les étudiants lors de leur transition de l'enseignement secondaire à l'université ?
2. Pensez-vous que la maîtrise des outils logiques joue un rôle important dans ces difficultés ? Si oui, pourriez-vous préciser en quoi ?
3. Quels prérequis en logique estimez-vous essentiels pour que les étudiants soient mieux préparés à aborder les cours de mathématiques ?

Cette enquête a également révélé plusieurs défis pour les étudiants lors de leur passage du secondaire aux études supérieures. Ces défis comprennent une plus grande autonomie nécessaire à l'université, une évaluation basée sur les compétences et la nécessité de rédiger des arguments et des démonstrations.

Comme le souligne Praslon (2000) : « dans l'enseignement supérieur un langage formel est utilisé, le temps didactique s'accélère, une autonomie plus grande est attendue de la part des étudiants, il y a une séparation entre cours et exercices, il n'y a plus de répétition systématique de tâches et plusieurs techniques pour une même tâche ... ». [4]

Concernant l'importance des outils logiques dans ces défis, les opinions divergent. Certains enseignants estiment que la logique formelle peut aider à résoudre des problèmes mathématiques complexes, tandis que d'autres doutent que sa maîtrise soit la solution à ces difficultés.

En ce qui concerne les prérequis en logique pour une meilleure préparation aux cours de mathématiques à l'université, les enseignants soulignent l'importance de comprendre les méthodes de démonstration telles que la démonstration par l'absurde et la démonstration par induction, ainsi que la différence entre implication et équivalence. De plus, ils insistent sur la nécessité d'être conscient de l'ambiguïté du langage naturel et de développer une approche formelle dans les raisonnements.

En somme, la transition vers l'université exige de la part des étudiants une autonomie accrue, une réflexion critique et une maîtrise des outils logiques pour réussir notamment dans le domaine des mathématiques.

À la suite de cette petite enquête, nous avons soumis un test de logique, disponible en annexe (questionnaire 1), à un échantillon de 120 élèves de sixième année secondaire provenant de différentes écoles. Cet échantillon comprenait une école du Brabant wallon (Athénée royal de Waterloo), ainsi que deux écoles du Hainaut (Athénée royal de Pont-à-Celles et Athénée royal de Marcinelle), toutes options confondues

(4heures de mathématiques/semaine, 6heures de mathématiques/semaine et (6+2)heures/semaine)

De plus, un deuxième questionnaire (questionnaire 2) a été distribué à des étudiants de bachelier (UCLouvain) en ingénieur informatique, dans le but d'évaluer leur niveau de maîtrise des outils logiques.

Les résultats de ces tests seront analysés dans le chapitre III de ce mémoire.

Chapter 3

Analyse des tests

Les questionnaires comprenaient des exercices mathématiques qui exigeaient, en plus de quelques compétences mathématiques requises, l'application des concepts fondamentaux de la logique tels que la négation, l'implication, l'équivalence et la quantification, la démonstration par l'absurde. . . .

Notre principal objectif était d'évaluer, à partir des réponses des élèves et des étudiants, leur capacité à utiliser les concepts de logique lorsque cela était nécessaire pour résoudre les problèmes posés.

3.1 Test à l'intention des élèves de sixième secondaire

Présentation du questionnaire : Le questionnaire 1 comportait 10 questions , il a été réalisé pendant une heure de cours, de manière individuelle et par écrit.

1. **La négation** : Les exercices 1, 2, 5, 6 et 8 du questionnaire portent sur la négation . Nous focalisons notre attention sur les énoncés « complexes », qui impliquent l'utilisation de connecteurs logiques et/ou de quantificateurs. Dans ce contexte, la construction de la négation nécessite l'utilisation de schémas plus sophistiqués, impliquant notamment l'identification de la structure de l'énoncé à nier.

Les variables didactiques que nous avons prises en considération comprennent : le choix du langage utilisé : langage naturel, formel, ou une combinaison des deux ; et le type de quantification : explicite ou implicite. En cas de quantification explicite, nous examinons si l'énoncé est existentiel ou universel.

2. **L'implication** : les exercices 3 et 10 du questionnaire portent sur l'implication. Dans l'exercice 3, il s'agit de déterminer les éléments qui satisfont ou non une implication ouverte ; l'exercice 10 consiste à établir le sens de l'implication entre deux propositions. Les variables didactiques retenues sont :
 - type d'énoncé : quantifié, ou non
 - langage utilisé : formel, mixte, naturel.
3. **La réciproque et la contraposée** : les exercices 4 et 9 portent sur la réciproque et/ou la contraposée d'une implication. Il s'agit d'établir la valeur de vérité d'implications partant d'implications supposées vraies. La variable didactique :
 - type d'énoncé : non quantifié
 - langage utilisé : langage naturel.
4. **La quantification** :. L'exercice 7 se concentre sur la notion de quantification. Il a pour objectif de déterminer si une proposition contenant des quantificateurs est vraie ou fausse.
 - Langage utilisé : langage formel.
 - Type d'énoncé : doublement quantifiée (universel et existentiel)

Analyse des réponses des élèves

1. Question 1 :

Cet exercice vise à examiner comment les élèves formulent la négation de propositions. Les élèves étaient invités à fournir des réponses libres plutôt qu'à simplement choisir parmi des options prédéfinies.

Les cinq phrases présentent des propositions quantifiées utilisant les quantificateurs "toutes ou tous", "certains" et "un". En mathématiques, le quantificateur "toutes ou tous" est moins couramment utilisé, tandis que l'expression "quel que soit" est plus familière aux élèves.

"Certains" est un quantificateur existentiel qui est rarement rencontré en classe de mathématiques, où le quantificateur existentiel est généralement exprimé sous la forme "il existe".

La quatrième phrase présente une quantification implicite avec la présence de "un", pouvant donner lieu à diverses interprétations en termes d'élément générique ou singulier, ainsi que de quantification universelle ou existentielle.

La cinquième phrase est une double quantification universelle. De plus, les Troisième et quatrième propositions contiennent les conjonctions « et » et « ou ».

Toutes ces phrases sont exprimées en langage courant.

- Enoncé : Donner la négation des phrases suivantes

La première phrase à nier est : « toutes les filles de la classe de 6A sont brunes. »

Parmi les réponses attendues et qui sont correctes :

(P1) il existe au moins une fille de 6A qui n'est pas brune. Ou tout autre réponse équivalente telle que : (P2) parmi les filles de 6A, il y a au moins une fille qui n'est pas brune. . .

les 120 réponses obtenues sont :

Réponses	Nombre d'élèves
Aucune des filles de la classe de 6A n'est brune	26
Toutes les filles de la classe de 6A ne sont pas brunes	58
Certaines filles de 6A ne sont pas brunes	1
Pas toutes les filles de la classe de 6A sont brunes	1
Les filles de 6A ne sont pas toutes brunes	1
Au moins une fille de 6A n'est pas brune	29
Il existe au moins une fille de 6A qui est blonde	1
Une fille de la classe de 6A est brune	3

La deuxième phrase est : « Certains nombres entiers sont impairs. »

Les réponses attendues qui seraient correctes : (P1) tous les nombres entiers ne sont pas impairs (ou sont pairs) ou (P2) Aucun nombre entier n'est impair ou toute autre formulation équivalente.

Voici les réponses obtenues :

Réponses	Nombre d'élèves
Certains nombres entiers ne sont pas pairs	79
Tous les nombres entiers ne sont pas pairs	9
Tous les nombres entiers sont pairs	5
Aucun nombre entier n'est pair	22
Les nombres entiers ne sont pas que pairs	1
D'autres nombres entiers sont pairs	1
Au moins un nombre entier n'est pas pair	2
Les nombres entiers ne sont pas pairs	1

La troisième phrase est : « Tous les élèves portent des lunettes et une montre. »

La réponse attendue et qui est correcte : « Il existe au moins un élève qui ne porte pas de lunettes ou de montre » ou toute formulation équivalente.

Réponses obtenues	Nombre d'élèves
Au moins un élève ne porte pas de lunettes et une montre	16
Au moins un d'entre eux ne possède pas de montre ou pas de lunettes	7
Tous les élèves ne portent pas de lunettes, ni de montre	61
Aucun élève ne porte des lunettes et une montre	21
Au moins un élève porte des lunettes ou une montre	2
Certains élèves portent des lunettes et une montre	4
Pas tous les élèves portent des lunettes et une montre	3
Aucun des élèves ne portent des lunettes ou de montre	3
Un élève ne porte pas de lunettes	2
Tous les élèves portent des lunettes ou une montre	1

La quatrième phrase est : « Un habitant de Louvain-la-Neuve gagnera au loto ou partira en retraite à 40 ans. »

Réponse attendue et qui est correcte : (P1) Tous les habitants de Louvain-la-Neuve ne gagneront pas au loto et ne partiront pas en retraite à 40 ans, ou une autre formulation qui serait correcte : (P2)Aucun habitant de Louvain-la-Neuve ne gagnera au Lotto et aucun habitant de Louvain-la-Neuve ne partira en retraite à 40 ans, ou toute autre formulation équivalente.

Réponses obtenues :

Réponses obtenues	Nombre d'élèves
Un habitant de Louvain-la-Neuve ne gagnera pas au loto ou ne partira pas en retraite	73
Aucun habitant de Louvain-la-Neuve ne gagnera au loto, ni ne partira en retraite	5
Un habitant de Louvain-la-Neuve ne gagnera pas au loto et ne partira pas en retraite à 40 ans	12
Il n'y a pas d'habitant de Louvain-la-Neuve qui gagnera au loto ou partira en retraite à 40 ans	1
Aucun habitant de Louvain-la-Neuve ne gagnera au loto ou ne partira en retraite	8
L'habitant de Louvain-la-Neuve ne gagnera pas au loto et ne partira pas en retraite	1
Un habitant de Louvain-la-Neuve gagnera au loto et partira en retraite à 40 ans	8
Tous les habitants de Louvain-la-Neuve gagneront au loto ou partiront en retraite à 40 ans	3
Au moins un habitant de Louvain-la-Neuve ne gagnera pas au loto et ne partira pas en retraite	1
Tous les habitants de Louvain-la-Neuve ne gagneront pas au loto ou ne partiront pas en retraite à 40 ans	2
Abstention	6

La cinquième phrase : « Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs »

Les réponses attendues et qui seraient correctes : (P1) il existe au moins une écurie, où au moins un des chevaux n'est pas noirs » ou tout autre formulation équivalente.

Voici les réponses obtenues :

Réponses obtenues	Nombre d'élèves
Dans toutes les écuries, tous les chevaux ne sont pas noirs	44
Dans au moins une écurie, au moins un des chevaux n'est pas noir	12
Dans au moins une écurie, au moins un cheval est blanc	4
Dans au moins une écurie, tous les chevaux sont blancs (ou n'est pas noir)	22
Dans toutes les écuries, il y a au moins un cheval qui n'est pas noir	4
Dans toutes les écuries, aucun cheval n'est noir	6
Dans toutes les écuries, n'ont pas tous un cheval noir	1
Il existe une écurie, où tous les chevaux ne sont pas noirs	3
Il existe une écurie, où tous les chevaux sont noirs	3
Il existe une écurie, où il y a un cheval brun	1
Dans toutes les écuries, aucun cheval n'est noir	4
Dans certaines écuries, tous les chevaux ne sont pas noirs	1
Dans aucune écurie, aucun cheval n'est noir	6
Dans aucune écurie, tous les chevaux ne sont pas noirs	3
Dans aucune écurie, tous les chevaux sont noirs	2
Aucune écurie ne possède de chevaux noirs	1
Dans aucune écurie, tous les chevaux sont noirs	2
Abstention	1

Analyse de cet exercice

Il est clair que pour beaucoup d'étudiants, parler de négation ou de forme négative revient au même. Cette confusion découle souvent de l'enseignement du français, où l'accent est généralement mis sur la forme négative avec l'utilisation de "ne... pas", "ne... plus", aucun ... etc.

En effet, si nous considérons des exemples de propositions simples, sans quantificateurs ni connecteurs, la négation dans ce contexte peut être facilement obtenue en remplaçant simplement le verbe par "ne + verbe + pas". Cette méthode est similaire à celle que les élèves utilisent lorsqu'ils doivent former des phrases négatives en français. Par exemple, si (P) est "J'aime les chats", alors (Non P) devient "Je n'aime pas les chats".

Cependant, si nous passons au langage formel, la phrase "J'aime les chats" doit se lire "J'aime tous les chats". Par conséquent, sa négation devient "Il y a au moins un chat que je n'aime pas".

Lorsque nous traitons des propositions complexes, cette approche simpliste n'est plus aussi efficace.. Tout d'abord, elle peut conduire à des propositions ambiguës. Par exemple, la négation de la phrase : « tous les nombres sont pairs » devient « tous les nombres ne sont pas pairs" qui peut être interprétée de différentes manières, ce qui crée une ambiguïté. De plus, l'application de cette technique devient plus complexe dans le cas de propositions complexes. Par exemple, lorsqu'on demande aux élèves de nier une proposition telle que "tout nombre entier est un multiple de 2 ou un multiple de 3", certains élèves remplacent simplement "est" par "n'est pas", ce qui conduit à une formulation ambiguë. D'autres élèves "dédoublent" la négation sur le verbe, créant ainsi une autre ambiguïté. Il est donc difficile de déterminer si les élèves comprennent réellement la négation demandée ou s'ils appliquent simplement une procédure syntaxique sans considération sémantique.

Ces exemples mettent en lumière la difficulté de distinguer entre la tâche de "donner la forme négative" en français et celle de "donner la négation" en mathématiques. Les procédures syntaxiques sont d'autant plus efficaces pour obtenir la négation d'une proposition lorsqu'elle est exprimée dans un langage formalisé. Cependant, le langage formalisé est généralement évité dans l'enseignement secondaire, ce qui rend la tâche de donner la négation plus complexe. Plutôt que d'exiger des élèves qu'ils maîtrisent seuls un langage formalisé, il est préférable de travailler collectivement sur de nombreux exemples de propositions et de leurs négations au fur et à mesure qu'ils sont rencontrés, comme nous allons proposer plus loin.

Il est donc essentiel d'aborder avec les élèves, la distinction entre négation et contraire, qui n'est pas toujours très claire. C'est pourquoi l'apparition de "aucune" dans la négation de ces phrases peut s'expliquer par le fait que l'étudiant pense qu'il faut appliquer le contraire à toutes les propositions et à la propriété pour construire la négation de la phrase.

On peut supposer que soit l'étudiant ne sait pas que cela marque un quantificateur universel, soit qu'il ne sait pas que la négation d'une proposition universelle est une proposition existentielle.

D'autre part, la majorité des élèves n'ont pas changé le quantificateur « certains » quand ils ont effectué la négation de la deuxième phrase, cela pourrait découler du fait qu'il n'a pas été reconnu comme quantificateur , ou même s'il l'a été, les élèves ont peut-être eu du mal à appliquer leurs connaissances concernant la construction de la négation des énoncés quantifiés. Une autre possibilité est l'influence persistante du langage courant comme dit précédemment, où la négation est souvent associée à la forme négative.

En ce qui concerne le quantificateur implicite "un", 73 élèves sur 120 ne le reconnaissent pas comme un quantificateur existentiel, car il n'a pas été modifié lors du passage à la négation. Cependant, seuls 18 élèves sur 120 ont saisi son rôle, mais la difficulté persistait toujours avec la présence de la conjonction "ou". Le même constat reste valable pour la négation d'une phrase contenant la conjonction « et »

2. Question 2 :

Deux phrases sont données en langage courant. Cette fois, nous nous plaçons dans un cadre mathématique : nous considérons les ensembles des quadrilatères et celui des polygones comme cadres de référence.

Dans chacune des phrases apparaît le mot « un » qui peut être interprété de plusieurs manières, comme expliqué dans la question 1.

Il s'agit encore une fois de fournir la négation de définitions que ce soit celle d'un rectangle ou d'un polygone régulier, contenant toutes les deux la conjonction « et ».

Les élèves étaient invités à fournir des réponses libres plutôt qu'à simplement choisir parmi des options prédéfinies.

- a) Question 1 : Un quadrilatère est rectangle si ses diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu. Donner les conditions pour qu'un quadrilatère ne soit pas rectangle ?

Il est clair que pour ne pas être un rectangle, il suffit de ne pas avoir les diagonales qui sont de même longueur ou qui ne se coupent pas en leur milieu.

Réponses obtenues	Nombre d'élèves
Un quadrilatère n'est pas rectangle si ses diagonales ne sont pas de même longueur ou ne se coupent pas en leur milieu	24
Un quadrilatère n'est pas rectangle si ses diagonales ne sont pas de même longueur et ne se coupent pas en leur milieu	56
Un quadrilatère n'est pas rectangle si ses diagonales sont de longueurs différentes	9
Un quadrilatère n'est pas rectangle si ses diagonales ne se coupent pas en leur milieu	3
Un quadrilatère n'est pas rectangle s'il n'a pas 4 angles droits	15
Un quadrilatère n'est pas rectangle si tous ses côtés sont de même longueur	7
Un quadrilatère n'est pas rectangle si ses diagonales forment 2 angles aigus et 2 angles obtus	1
Abstention	5

- b) Question 2 : On appelle polygone régulier, un polygone dont tous les côtés sont de même longueur et dont tous les angles sont de même amplitude. Donner les conditions pour qu'un polygone ne soit pas régulier.

Pour qu'un polygone ne soit pas régulier, il suffit que ses côtés ne soient pas de même longueur ou que ses angles ne soient pas de même amplitude.

Réponses obtenues	Nombre d'élèves
Pour qu'un polygone ne soit pas régulier, il faut qu'il n'ait pas tous ses côtés de même longueur ou que tous ses angles ne soient pas de même amplitude	45
Pour qu'un polygone ne soit pas régulier, il faut qu'il n'ait pas tous ses côtés de même longueur et que tous ses angles ne soient pas de même amplitude	54
Pour qu'un polygone ne soit pas régulier, il faut qu'il n'ait pas tous ses côtés de même longueur et/ou que tous ses angles ne soient pas de même amplitude	5
Il suffit qu'au moins un côté ne soit pas de la même longueur que les autres	7
Il suffit qu'au moins un angle ne soit pas de la même amplitude que les autres	3
Abstention	6

Analyse des réponses des questions a) et b) :

Dans la question b), il est intéressant de noter qu'un nombre plus élevé d'élèves, soit 45 sur 120, ont réussi à effectuer correctement la négation par rapport à la question a), où seuls 24 sur 120 ont réussi. Cette observation est intrigante, car les deux questions impliquent la négation d'un type similaire de propositions. On peut donc supposer que les élèves ont une meilleure maîtrise du concept des polygones réguliers dans le contexte de la question b).

Cependant, il est inquiétant de constater que 54 élèves sur 120 pour le b) ont simplement reproduit la forme négative de la phrase, sans tenir compte du sens du connecteur logique "et". Cette tendance est également observée dans les réponses à la question a). Cette récurrence de réponses souligne un besoin de renforcer la compréhension des élèves quant à l'importance du sens des connecteurs logiques dans la logique mathématique.

Nous constatons également un exemple pertinent de réponse qui stipule : « Un polygone n'est pas régulier s'il ne possède pas tous ses côtés de même longueur **et/ou** si tous ses angles ne sont pas de même mesure."

Cette réponse dénote une compréhension de la notion de négation, cependant, elle met en lumière une lacune dans la distinction entre le "ou" inclusif et le "ou" exclusif. Il est essentiel de comprendre que le connecteur logique "OU" dans ce contexte signifie que les conditions

peuvent être satisfaites individuellement ou simultanément, ce qui diffère du sens plus restrictif et exclusif du "ou" dans le langage courant.

Parmi les 120 élèves interrogés, une minorité a exprimé l'idée selon laquelle : « un polygone n'est pas régulier si au moins un de ses côtés n'est pas de la même longueur que les autres » ou que « Un quadrilatère n'est pas rectangle si ses diagonales sont de longueurs différentes » ou « Un quadrilatère n'est pas rectangle si tous ses côtés sont de même longueur ». . . Ces réponses suggèrent une compréhension partielle de la négation, car elle ne prend pas en compte tous les contraires possibles. En d'autres termes, ces élèves semblent croire que la négation ne doit pas être « EXHAUSTIVE ».

Cette interprétation incomplète de la négation met en évidence un besoin de clarifier le concept pour une compréhension plus approfondie.

3. Question 3 : Cet exercice consiste à vérifier la véracité de 4 implications, dont deux sont en langage formel et les deux autres en langage naturel.

Variable didactique : la forme sous laquelle l'implication apparaît : la forme courante (si . . . , alors . . .), le symbole \Rightarrow , la forme implicite .

a) Si $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

Réponses des élèves :

Réponses obtenues	Nombre d'élèves
Vrai	60
Faux	43
On ne peut pas se prononcer	3
Abstention	14

Parmi les 60 élèves qui ont répondu « vrai », 23 n'ont pas apporté de justification et parmi ceux qui ont apporté une justification, on retrouve pour la majorité :

$$\begin{aligned} \text{Vraie} \rightarrow x^2 = 1 \quad \sqrt{1} = 1 \\ x = \sqrt{1} \\ x = 1 \end{aligned}$$

Ce raisonnement met en lumière l'application persistante du théorème-en-acte qu'ils ont rencontré en troisième année secondaire, à travers les exercices liés au théorème de Pythagore, qui consistait à : "pour enlever le carré dans une équation , on prend la racine carrée". Cependant, ce théorème perd sa

validité dès lors que l'on dépasse le cadre géométrique pour travailler avec l'ensemble complet des nombres réels.

Tandis que ceux qui ont répondu « faux », ils ont tous pensé à exhiber le contre-exemple $x = -1$.

b) Si $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$

Réponses des élèves :

Réponses obtenues	Nombre d'élèves
Vrai	102
Faux	3
On ne peut pas se prononcer	1
Abstention	13

Parmi ceux qui ont répondu « vrai », 64 ont justifié leur choix , par le fait que $1^2 = 1$, alors que les 38 restants n'ont rien justifié.

c) Un quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.

Réponses des élèves :

Réponses obtenues	Nombre d'élèves
Vrai	54
Faux	35
On ne peut pas se prononcer	16
Abstention	15

Parmi les 54 étudiants ayant répondu "Vrai", 34 n'ont pas donné de justification. Aucun d'entre eux n'a fourni de dessin pour étayer sa réponse.

Dans cette série de réponses, 9 étudiants interprètent "un" comme une quantification existentielle : certains utilisent le carré comme exemple pour illustrer le quadrilatère en question, tandis que d'autres montrent que le quadrilatère mentionné dans l'énoncé est bien un losange.

Certains élèves traitent plutôt la réciproque en montrant que si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires.

Concernant les réponses "Faux", sur les 35 étudiants ayant répondu ainsi, 17 n'ont pas fourni de justification. Les 18 autres étudiants ont fourni diverses

justifications, notamment en citant le carré comme contre-exemple ou en fournissant des dessins de trapèzes ou de cerfs-volants.

Ces réponses sont classées en quatre catégories : celles citant le carré comme contre-exemple, celles présentant des dessins de trapèzes ou de cerfs-volants, celles réfutant l'énoncé sans support, et celles donnant d'autres types de justifications dues à une mauvaise connaissance des termes utilisés : « un quadrilatère ne peut être convexe, il est plat » ou « un losange ne peut être convexe »...

Parmi les 16 qui ont répondu « on ne peut pas se prononcer », 8 ont justifié leur choix par : « car ça peut être aussi un carré qui a aussi ses diagonales perpendiculaires », on peut donc interpréter cette réponse par le fait que ces élèves distinguent la classe des carrés de la classe des losanges.

En conclusion, une partie des étudiants interprètent "un" comme une quantification universelle. Les justifications sont généralement basées sur la désignation d'un objet ou la présentation d'un contre-exemple, bien que cela ne soit pas toujours explicite.

- d) Si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle, alors ce quadrilatère est un carré.

Réponses des élèves :

Réponses obtenues	Nombre d'élèves
Vrai	45
Faux	45
On ne peut pas se prononcer	22
Abstention	8

Dans cette question, on peut observer un nombre de « on ne peut pas se prononcer » particulièrement , plus élevé, par rapport autres questions. La majorité n'ayant pas fourni de justifications, on se demande si les élèves ne l'ont pas mis juste dans le cadre du « contrat didactique ».

En effet, Selon Guy Brousseau, le contrat didactique représente : « un ensemble implicite de règles, d'attentes et de conventions qui régissent les interactions entre l'enseignant et les élèves, ainsi que la manière dont le savoir mathématique est enseigné et appris. Ces règles déterminent ce qui est attendu de chaque partie dans le processus d'enseignement-apprentissage des mathématiques. »[5]

D'autre part, parmi ceux qui ont répondu « vrai » et qui ont justifié, plusieurs ont mobilisé la réciproque : « vrai, car un carré est un rectangle », d'autres ont utilisé une méthode de justification par exemple : en illustrant un rectangle qui n'est pas un carré, en précisant que ses diagonales ne sont pas perpendiculaires, puis en dessinant un carré avec des diagonales perpendiculaires. Ils ont montré implicitement que tout rectangle dont les diagonales sont perpendiculaires doit nécessairement être un carré et finalement certains ont donné une justification non valide : « Vrai, car un carré est un rectangle et les diagonales du rectangle ne sont pas perpendiculaires »

Par ailleurs, parmi ceux qui ont répondu « faux », la principale justification avancée par ces étudiants repose sur la distinction entre la classe des carrés et celle des rectangles : « Faux, un rectangle n'est pas un carré car il n'a pas les côtés de même longueur » ou « Impossible d'avoir un rectangle et un carré en même temps » ou « faux, un carré n'est pas un rectangle »...

D'autres ont répondu « Faux, car les diagonales doivent être aussi de même longueur » et cela prouve une mauvaise connaissance des propriétés des quadrilatères.

Concernant les résultats des phrases c) et d) :

On remarque des similitudes dans les démarches observées chez les élèves :

- Ils ont tendance à examiner la réciproque de l'énoncé en question, conduisant parfois à des conclusions invalides.
- Bien que souvent implicite, l'idée de contre-exemple est présente dans leurs raisonnements.
- Leurs réponses sont influencées par leurs connaissances sur les propriétés des quadrilatères, révélant ainsi des lacunes dans ces connaissances. La distinction entre les carrés, les rectangles et les losanges ont conduit parfois à des réponses incorrectes, souvent en raison de l'interprétation erronée de l'hypothèse.

4. Question 4 : Il s'agit de déterminer la proposition qui est équivalente à celle qui est donnée au départ.

On considère la proposition : "Les personnes qui parlent trop ne réfléchissent pas souvent".

Parmi les propositions suivantes, laquelle est équivalente à la proposition ci-dessus ?

Réponses choisies par les élèves	Nombre d'élèves ayant choisi cette réponse
a) Les personnes qui parlent trop ne réfléchissent pas.	18
b) Les personnes qui réfléchissent souvent ne parlent pas trop.	41
c) Les personnes qui réfléchissent souvent parlent trop.	3
d) Les personnes qui ne parlent pas trop réfléchissent souvent.	57
Aucune des propositions n'est correcte	1

Parmi les réponses données, 57 élèves ont opté pour la proposition affirmant que la négation d'une déclaration est équivalente à la déclaration elle-même, en choisissant : "Les personnes qui ne parlent pas trop réfléchissent souvent". En revanche, 41 élèves ont identifié que la contraposée était équivalente à la proposition initiale.

Il est remarquable que cette question soit parmi les quelques questions qui ont généré le taux le plus élevé (34%) de réponses correctes parmi toutes les questions posées.

Cela peut être attribuée à une meilleure compréhension du concept de la réciproque et de la contraposée.

5. Question 5 : cette question concerne aussi la négation de la proposition « les ensembles A et B ont au moins un élément en commun »

Variable didactique : les propositions sont en langage formel.

Réponses des élèves :

Réponses choisies par les élèves	Nombre d'élèves ayant choisi cette réponse
a) $A \cup B = \emptyset$	17
b) $A \cap B = \{x\}$	53
c) $\exists x : x \in (A \cap B)$	19
d) $A \cap B = \emptyset$	22
e) Abstention	8
Aucune des propositions n'est correcte	1

La majorité des élèves ont opté pour la réponse b). Ceci suggère une éventuelle lacune dans la compréhension du langage symbolique, en plus d'une méconnaissance du concept de la négation.

6. Question 6 : Déterminer l'ensemble des nombres entiers inférieurs ou égaux à vingt ne vérifiant pas la propriété « si x est un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier ».

Réponses choisies par les élèves	Nombre d'élèves ayant choisi cette réponse
{0, 8, 14, 20}	6
{8, 14, 20}	2
Autre que {0, 8, 14, 20}	44
Abstention	68

Cet exercice est repris de Durand-Guerrier (2005, p.47) sous la version : « Déterminer l'ensemble des nombres entiers inférieurs ou égaux à vingt vérifiant la propriété « si x est un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier ».[6]

Cet exercice vise à identifier un groupe spécifique de nombres définis par une caractéristique particulière, exprimée sous forme conditionnelle, indiquée par des propositions telles que "si..., alors...".

L'objectif est de transformer une définition basée sur des critères en une liste exhaustive des éléments qui satisfont cette caractéristique. C'est la question qui a rencontré le plus d'abstentions : 68 élèves sur 120 (56,7%).

La réponse attendue est l'ensemble : 0,8,14,20, seulement 6 élèves sur 120 (5%) sont parvenus à ce résultat et 2 élèves sur 120 (1,7%) ont donné 8,14,20, ils ont donc omis le nombre 0. On peut interpréter cet omission par le fait que certains élèves considèrent son successeur 1 comme un nombre premier.

On peut donc supposer que seulement 6,7% connaissent les valeurs de vérité d'une implication et de sa négation.

Il est difficile d'interpréter le reste des réponses, car elles étaient assez disparates : certains se sont juste contentés d'écrire l'ensemble de tous les nombres de 0 jusqu'à 22 sans aucune sélection et d'autres n'ont pas répondu ou ont répondu : « je ne sais pas »

La difficulté pourrait découler du fait que les concepts logiques enseignés pendant leur scolarité ne leur permettent pas de saisir l'énoncé de cet exercice et d'y répondre de manière appropriée. Les notions de logique propositionnelle, telles que les tables de vérité, ne sont pas incluses dans le programme. On peut supposer que le manque de familiarité avec la démonstration d'énoncés conditionnels sous hypothèse pourrait expliquer ces difficultés. Il ne faut

pas, non plus négliger, le fait que la formulation de cette question est particulièrement difficile pour les élèves puisqu'on leur demande d'identifier des éléments qui ne satisfont pas une condition, alors qu'il est plus naturel pour eux de chercher des éléments qui satisfont à une condition.

7. Question 7 : Il s'agit de déterminer la valeur de vérité d'une proposition à quantification multiple, dans le cadre d'un ensemble donné en langage formel.

Réponses obtenues	Nombre d'élèves
Vrai	22
Faux	48
Je ne sais pas	45
Abstention	5

Soit $B = \{1, 2, 3\}$. La proposition suivante est-elle vraie ou fausse : $\exists x \in B, \forall y \in B : x^2 < y + 1$?

42% des élèves n'ont pas répondu ou ont répondu « je ne sais pas », ce qui suggère une incompréhension des consignes due à une mauvaise connaissance du langage formel.

40% ont répondu faux, on peut distinguer un raisonnement d'élèves assez récurrent :

Question 7:

Soit $B = \{1, 2, 3\}$. La proposition suivante est-elle vraie ou fausse :
 $\exists x \in B, \forall y \in B : x^2 < y + 1$?

Souligne la réponse choisie

- a) Vrai \rightarrow si $x = 1$
- b) Faux \rightarrow si $x = 2$ ou 3
- c) Je ne sais pas
- } \rightarrow donc c'est faux

Cela suggère une interprétation erronée de la double quantification (\exists suivi de \forall) ; les élèves ont considéré la proposition comme étant doublement universellement quantifiée.

8. Question 8 : Il s'agit de déterminer la négation d'une proposition doublement quantifiée, en langage formel.

La négation de la proposition " $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x + y > 0$ "

$\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x + y < 0$	19
$\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x + y \leq 0$	24
$\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x + y < 0$	47
$\exists x \notin \mathbb{N}, \exists y \notin \mathbb{N} : x + y \leq 0$	18
Abstention	12

Seuls 20% des réponses sont correctes, ce qui témoigne certainement d'une double lacune dans la compréhension de la négation et du langage formel.

Question 9 : Il s'agit de déterminer la valeur de vérité de propositions en langage naturel, à partir de 3 affirmations supposées vraies.

Voici 3 affirmations vraies.

- a) Les araignées sont des arachnides.
- b) Les scorpions sont des arachnides.
- c) Les arachnides subissent des mues.

Voici 5 raisonnements ; dire s'ils sont vrais ou faux en précisant la propriété utilisée.

	VRAI	FAUX	Abstention
cet animal subit une mue donc c'est un arachnide	30	84	6
cet animal est une araignée donc il subit une mue	106	8	6
cet animal subit une mue et est un arachnide donc c'est une araignée	10	103	7
cet animal ne subit pas de mue donc ce n'est pas un scorpion	78	31	11
Si un animal n'est pas un arachnide alors il ne mue pas	20	89	11

Cette question se classe parmi les trois questions ayant obtenu le plus haut taux de bonnes réponses. Cela peut s'expliquer par le fait que les affirmations sont formulées dans un contexte de la vie réelle qui dépasse le cadre strictement mathématique.

La compréhension du contexte dans lequel nous nous sommes placés les a aidés, mais cela ne signifie pas nécessairement qu'ils maîtrisent l'art de l'inférence.

D'ailleurs, les résultats de la question suivante peut étayer nos observations.

9. Question 10 : **Complète par « car » ou « donc »** :

- a) ABCD est un parallélogramme AB et CD sont parallèles.
- b) Le nombre réel x est supérieur à 3 il est supérieur à 2.
- c) Le quadrilatère ABCD a deux angles droits c'est un rectangle.
- d) Le triangle ABC est équilatéral il est isocèle.
- e) Le nombre x appartient à l'intervalle $[-1, 4]$ x appartient à l'intervalle $[-2, 5]$.

	« car »	« donc »	Abstention
a)	59	58	3
b)	13	104	3
c)	63	54	3
d)	30	84	6
e)	67	47	6

On observe que le taux de bonnes réponses augmente quand on se place dans le contexte des nombres, mais diminue dès qu'on est dans le contexte géométrique.

Synthèse des résultats

Question	Taux de réussite	Question	Taux de réussite
Question 1	P1 : 27% P2 : 4% P3 : 68% P4 : 4% P5 : 10%	Question 6	5%
Question 2	P1 : 20% P2 : 37.5%	Question 7	18%
Question 3	a) 36% b) 85% c) 29% d) 37.5%	Question 8	20%
Question 4	47.5%	Question 9	a) 70% b) 88% c) 86% d) 65% e) 74%
Question 5	18%	Question 10	a) 48% b) 87% c) 52.5% d) 70% e) 39%

Bilan de l'analyse :

Les résultats de nos questionnaires corroborent l'idée que la maîtrise de la négation dans les énoncés demeure une difficulté persistante chez les élèves, mettant en lumière les aspects à approfondir dans l'enseignement des mathématiques afin d'améliorer les compétences des élèves et des étudiants dans l'utilisation de la négation.

Nous avons observé des difficultés dans la manipulation des quantificateurs : certains étudiants modifient systématiquement les quantificateurs présents dans les énoncés sans toujours prendre en compte leur portée, et pour certains d'entre eux, omettent de nier le verbe. Lorsque les énoncés sont formulés dans la langue naturelle, certains proposent simplement le contraire pour nier des énoncés universels, tandis que d'autres utilisent une forme négative qui peut conduire à une ambiguïté sémantique, comme nous l'avons constaté. L'observation de ces phénomènes nous amène à examiner la portée des quantificateurs, la structure logique des énoncés, ainsi que la prise en compte des aspects sémantiques et syntaxiques dans la construction de la négation.

Quant à la quantification implicite, elle semble être interprétée de manière variable ; un terme peut être compris à la fois comme un quantificateur universel et un quantificateur existentiel, ou bien seulement comme l'un des deux, voire comme introduisant un élément générique. Cette ambiguïté concernant le statut des termes n'est pas toujours évidente. Il est essentiel de souligner les ambiguïtés induites par la quantification implicite, car celles-ci ont des répercussions sur la négation de propositions conditionnelles, et il arrive qu'un même étudiant utilise plusieurs règles tacites, ce qui reflète une certaine instabilité pouvant être réduite en initiant les étudiants à l'analyse logique des énoncés.

3.2 Tests à l'intention des étudiants « futurs professeurs de mathématiques » en secondaire inférieur.

Nous avons soumis le même questionnaire à un échantillon de 18 étudiants de 2ème et 3ème bacheliers de la haute école Léonard de Vinci de Louvain-la-Neuve. Les étudiants ont effectué le test dans les mêmes conditions que les élèves de sixième, c'est-à-dire en travaillant individuellement en classe. Cependant, ils ont simplement utilisé moins de temps que les élèves de sixième pour le compléter (moins de 50 min).

Les résultats méritent d'être notés dans un objectif de comparaison avec ceux des élèves du secondaire, sans pour autant fournir une analyse détaillée afin d'éviter toute répétition.

Nous obtenons ainsi les résultats suivants :

Question 1 :

1.

Réponses	Nombre d'élèves
Aucune des filles de la classe de 6A n'est brune	6
Toutes les filles de la classe de 6A ne sont pas brunes	11
Pas toutes les filles de la classe de 6A sont brunes	1

2.

Réponses	Nombre d'élèves
Certains nombres entiers ne sont pas pairs	14
Aucun nombre entier n'est pair	4

3.

Réponses	Nombre d'élèves
Tous les élèves ne portent pas de lunettes, ni de montre	15
Aucun élève porte de lunettes et une montre	3

4.

Réponses	Nombre d'élèves
Un habitant de Louvain-la-Neuve ne gagnera pas au loto ou ne partira pas en retraite	12
Il n'y a pas d'habitant de Louvain-la-Neuve qui gagnera au loto ou partira en retraite à 40 ans	1
Aucun habitant de Louvain-la-Neuve ne gagnera au loto ou ne partira en retraite	4
Abstention	1

5.

Réponses	Nombre d'élèves
Dans toutes les écuries, tous les chevaux ne sont pas noirs	12
Pas dans toutes les écuries, tous les chevaux ne sont pas noirs	1
Il existe des écuries, où il y a des chevaux qui ne sont pas noirs	1
Dans aucune écurie, aucun cheval n'est noir	2
Dans aucune écurie, tous les chevaux sont noirs	2

Il est clair que les étudiants, tout comme les élèves de sixième rencontrent les mêmes difficultés quant à la négation d'une proposition : confusion avec la forme négative, certains remplacent automatiquement le quantificateur existentiel par l'universel sans effectuer la négation de la propriété qui succède au quantificateur . . . et surtout sans se soucier du sens de la phrase obtenue.

Question 2 :

1.

Réponses	Nombre d'élèves
Un quadrilatère n'est pas rectangle si ses diagonales ne sont pas de même longueur ou ne se coupent pas en leur milieu	6
Un quadrilatère n'est pas rectangle si ses diagonales ne sont pas de même longueur et ne se coupent pas en leur milieu	4
Un quadrilatère n'est pas rectangle si ses diagonales ne sont pas de même longueur et/ou ne se coupent pas en leur milieu	1
Un quadrilatère n'est pas rectangle si ses diagonales sont de longueurs différentes	2
Un quadrilatère n'est pas rectangle si ses diagonales ne se coupent pas en leur milieu	3
Un quadrilatère n'est pas rectangle s'il n'a pas 4 angles droits	2

2.

Réponses	Nombre d'élèves
Pour qu'un polygone ne soit pas régulier, il faut qu'il n'ait pas tous ses côtés de même longueur ou que tous ses angles ne soient pas de même amplitude	9
Pour qu'un polygone ne soit pas régulier, il faut qu'il n'ait pas tous ses côtés de même longueur et que tous ses angles ne soient pas de même amplitude	5
Si tous les côtés ne sont pas de même longueur	2
Il suffit qu'au moins un angle ne soit pas de la même amplitude que les autres	1
Si aucun des côtés ne soit de même longueur et aucun angle ne soit de même amplitude	1

Certains étudiants ont saisi que la négation de la conjonction "et" est "ou", cependant, on observe qu'un étudiant a ajouté "et/ou". Cela suggère peut-être une incompréhension quant à l'inclusivité du "ou" en mathématiques. En outre, certains remplacent à nouveau "tous" par "aucun" sans tenir compte du sens de la phrase obtenue

Question 3 :

1.

Vrai	5
Faux	12
On ne peut pas se prononcer	0
Abstention	1

Parmi les étudiants qui ont répondu « vrai », 2 étudiants ont donné la justification : « vrai, car 1 est le seul nombre qui élevé au carré donne 1 », il est aussi intéressant de relever la justification suivante : « vrai, mais il manque une partie des solutions », l'étudiant n'a sûrement pas compris la validité d'une implication, pour lui l'implication est vraie même si le conséquent est partiellement vrai.

Les étudiants qui ont répondu « faux », ont tous exhibé la deuxième solution (-1) comme contre-exemple.

Vrai	18
Faux	0
On ne peut pas se prononcer	0
Abstention	0

2.

Vrai	7
Faux	9
On ne peut pas se prononcer	1
Abstention	1

Tous ceux qui ont répondu faux , ont apporté un contre-exemple (un cerf-volant, un quadrilatère quelconque...) par contre, on ne peut analyser les réponses de ceux qui ont estimé que la proposition était vraie, puisqu'ils n'ont fourni aucune justification.

3.

Vrai	13
Faux	4
On ne peut pas se prononcer	0
Abstention	1

Parmi ceux qui ont répondu « faux », on retrouve la justification : « car les carrés ne sont pas des rectangles » .

Question 4 :

Réponses choisies par les élèves	Nombre d'élèves ayant choisi cette réponse
a) Les personnes qui parlent trop ne réfléchissent pas	1
b) Les personnes qui réfléchissent souvent ne parlent pas trop	8
c) Les personnes qui réfléchissent souvent parlent trop	0
d) Les personnes qui ne parlent pas trop réfléchissent souvent	8
Abstention	1

44% des étudiants estiment que la réciproque est vraie !

Question 5 :

Réponses choisies par les élèves	Nombre d'élèves ayant choisi cette réponse
a) $A \cup B = \emptyset$	3
b) $A \cap B = \{x\}$	8
c) $\exists x : x \in (A \cap B)$	0
d) $A \cap B = \emptyset$	6
e) Abstention	1

Le fait que la majorité ait choisi le b), serait-il dû à une mauvaise lecture de l'énoncé ?

Question 6 :

{0, 8, 14, 20}	0
{8, 14, 20}	3
Autre que {0, 8, 14, 20}	6
Abstention	9

Question 7 :

Vrai	3
Faux	7
Je ne sais pas	8

Question 8 :

Réponses choisies par les élèves	Nombre d'élèves ayant choisi cette réponse
$\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x + y < 0$	4
$\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x + y \leq 0$	6
$\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x + y < 0$	6
$\exists x \notin \mathbb{N}, \exists y \notin \mathbb{N} : x + y \leq 0$	1
Abstention	1

Question 9 :

	VRAI	FAUX	Abstention
cet animal subit une mue donc c'est un arachnide	7	10	1
cet animal est une araignée donc il subit une mue	18	0	0
cet animal subit une mue et est un arachnide donc c'est une araignée	5	12	1
cet animal ne subit pas de mue donc ce n'est pas un scorpion	12	4	1
Si un animal n'est pas un arachnide alors il ne mue pas	5	12	1

Question 10 :

	« car »	« donc »	Abstention
1.	9	10	0
2.	4	15	0
3.	9	9	0
4.	2	16	0
5.	11	7	0

À la phrase 1 un étudiant a répondu : « donc/car », pour lui, il n'y pas de différence entre les deux sens d'implications.

Bilan de l'analyse :

Les deux groupes rencontrent de nombreuses difficultés dans la construction des preuves et raisonnements. On observe notamment des confusions entre la réciproque et l'énoncé initial, des inférences invalides, ainsi qu'une mauvaise maîtrise de la négation de propositions quantifiées.

3.3 Résultats du test soumis à des étudiants en Bac 1

Pour ce questionnaire, la participation des candidats a été limitée en raison de sa nature volontaire. Nous avons distribué le questionnaire à un auditoire de 120 élèves, mais seuls 17 d'entre eux ont choisi de le remplir à domicile et de le rendre la semaine suivante.

Sans nous attarder excessivement sur l'analyse des questions (le questionnaire 2 sera joint en annexe), ce qui nous importe ici, ce sont les résultats de ce test. Les étudiants de première année bachelier rencontrent-ils les mêmes obstacles en logique ?

Questions	Taux de réussite	Taux d'abstention
Question 1 : sens de l'implication	76%	0%
Question 2 : écrire en langage formel	17%	17%
Question 3 : déterminer la valeur de vérité d'une proposition quantifiée	29%	0%
Question 4 : déterminer un ensemble d'entiers ne vérifiant pas une propriété donnée	12%	17%
Question 5 : donner la négation et la contraposée de 2 propositions (la première est en langage naturel et la deuxième en langage formel)		
1) Négation	17%	17%
Contraposée	23%	17%
2) Négation	12%	41%
Contraposée	12%	47%
Question 6 : évaluer la validité d'un raisonnement (avec implications)	12%	12%
Question 7 : compléter la définition d'une fonction majorée puis écrire en langage formel		
1) Choix de la phrase	5%	71%
2) Écrire en langage formel	5%	71%
Question 8 : déterminer si une proposition quantifiée est vraie et choisir la bonne justification	5%	5%
Question 9 : savoir décrire le schéma d'un raisonnement par l'absurde	64%	12%
Question 10 : déterminer si un raisonnement par l'absurde est correct	11% ont répondu correctement mais n'ont fourni aucune justification	64%

L'analyse rapide des résultats du test de logique pour les élèves de bac 1 révèle des faiblesses significatives dans leur compréhension des concepts logiques et mathématiques.

A part le fait qu'ils ont montré une bonne compréhension du raisonnement par l'absurde et de l'implication, ainsi qu'une familiarité avec les concepts de base de la théorie des fonctions, des lacunes importantes ont été observées dans plusieurs domaines. Les élèves ont des difficultés à exprimer des concepts mathématiques en langage formel, à analyser des propositions logiques complexes et à raisonner

par la négation. De plus, ils ont du mal à évaluer la validité des raisonnements impliquant des implications et à déterminer la vérité des propositions quantifiées, ce qui indique des besoins en développement dans la maîtrise des concepts de quantification et de justification mathématique.

Chapter 4

Quelques pistes didactiques : introduire la logique en secondaire

À la lumière des résultats obtenus des deux questionnaires, il apparaît impérieux d'intégrer les concepts logiques tout au long du parcours scolaire de l'élève, depuis l'école primaire (voire même maternelle) jusqu'en rhéto, dans le dessein de les préparer de manière plus adéquate aux études universitaires. Ci-joint, je présente quelques séquences où il serait opportun d'incorporer diverses notions de logique au sein des différentes UAAs, allant de la première secondaire jusqu'en rhéto. Il est important de noter que l'on peut bien sûr intégrer de la logique dans toutes les UAAs, mais dans le mémoire, je me limite à quelques exemples et idées pour éviter d'empiéter excessivement sur l'espace disponible.

Dans le tableau ci-dessous, sont répertoriés des points du programme où il serait opportun d'aborder diverses notions de logique.

Niveaux Notions de Logique	1ère	2ème	3ème	4ème	5ème	6ème
Quantificateurs: Universel et existentiel	Objectifs: Comprendre la nécessité de quantifier Être capable d'expliciter les quantificateurs/ prendre conscience de l'existence des quantificateurs qui sont souvent implicites Le contre-exemple pour infirmer une proposition universelle					Rédiger avec des quantificateurs
	Découverte : Thème : Classe- ment des figures géométriques: Thème 1 découverte de quantificateurs implicites dans le cadre des défini- tions + le contre exemple.	Réinvestissement : Exercice 1.B à insérer dans le thème la famille des quadrilatères.	Réinvestissement : Exemple de syn- thèse à insérer dans l'UAA4 : Outils algébriques	Réinvestissement : UAA Généralités sur les fonctions : Thème 3	Réinvestissement : UAA3: asymptotes et limites (nous ex- aminons la notion de discontinuité puis de continuité d'une fonction) Thème 5	Réinvestissement : Exercice : ré- daction formelle de propositions quantifiées
Négation d'une proposition (avec « et » et « ou »), avec ou sans quantificateurs	Découverte : Classement des fig- ures planes Classe- ment des figures planes Thème 1	Réinvestissement :	Réinvestissement : UAA4 : le premier degré Exercice 2.C	Réinvestissement :	Réinvestissement : UAA3: asymptotes et limites Thème 5	Réinvestissement : Exercice 1.C À insérer dans l'UAA1 : Probabil- ités

Implications et équivalences	Objectifs: Comprendre le sens d'une implication et l'utiliser correctement. Formuler et comprendre l'implication réciproque Comprendre l'équivalence comme une double implication			Objectifs: Comprendre les notions de conditions nécessaires et suffisantes. Raisonnement par équivalence.		
	Découverte : Classement des triangles et des quadrilatères. Activité de découverte 1.A: Création d'implications et d'équivalences	Réinvestissement : Les Distances Activité 2.A	Réinvestissement : UAA5 : les outils algébriques : résolution d'équations, d'inéquations et de systèmes. Activité de réinvestissement 3.A	Réinvestissement : UAA2 : géométrie dans l'espace . <u>Exercice 1.A</u>	Réinvestissement : <u>Exercice 3 : transversal</u>	
La réciproque et la contraposée			Découverte : UAA2 : Le théorème de Pythagore <u>Thème 3</u>			
Modus ponens Principe du tiers-exclu Démonstration par l'absurde(initiation)		Découverte : les angles <u>Thème 2</u>				

Première occasion de rencontrer la négation d'une proposition – le contre-exemple
Thème 1 : Figures géométriques planes.

1. **Niveau** : 1ère année secondaire
2. **Concepts mathématiques rencontrés pendant le thème** :
 - Classement des figures géométriques planes : polygones et non-polygones
 - Approche intuitive des polygones, des figures hybrides et des figures rondes
 - Utilisation des quantifications : exercices oraux
 - Initiation à la négation d'une proposition.
 - Initiation au contre-exemple.
3. **Compétences visées** :
 - Reconnaître et distinguer les différents types de figures géométriques planes
 - Comprendre et utiliser les classements en diagramme et en arbre
 - Dans le contexte de la logique : effectuer la négation d'une proposition quantifiée et/ou avec connecteurs.
4. **Matériel à prévoir pour le thème** :
 - Figures en carton de différentes couleurs
 - Polygones particuliers

Déroulement du thème 1.

1. Des figures numérotées sont placées au tableau.
2. Classement de ces figures en 2 groupes (figures planes et non planes).
3. Etablissement avec les élèves d'un critère de classement des figures planes.
4. Classement des figures planes selon les côtés. Deux groupes apparaissent.
5. Donner un nom à ces deux groupes de figures planes : les polygones et les non-polygones.

6. Classement des non-polygones en deux groupes : les figures hybrides et les figures rondes (explication du mot hybride : le mulet est un hybride, il est le fils mâle d'un âne et d'une jument, ou voiture hybride, etc. . .)
7. Exercices oraux sur les quantificateurs pour familiariser les élèves.
8. Afin d'élaborer les définitions des différentes formes géométriques, introduire quelques exemples de négation de propositions.
9. Elaboration des définitions oralement avec les élèves.
10. Donner la feuille de synthèse.
11. Compléter collectivement les différentes définitions.
12. Etablir un classement en arbre avec les élèves au tableau. Envoyer un élève au tableau pour placer des figures dans chacune des branches.
13. Exercices 1 et 2.
14. Relire les remarques de la feuille de synthèse et faire justifier les exemples par les élèves.(introduction de contre-exemples)

Pourquoi introduire la négation dans cette UAA ?

Cette UAA offre un avantage distinct : elle permet une manipulation concrète de divers figures. Cette approche pratique offre aux élèves la possibilité de réfléchir aux critères utilisés pour classer ces figures, tout en introduisant subtilement la notion de négation. Par exemple, en explorant ce qu'est un polygone, les étudiants peuvent alors examiner les conditions pour qu'un objet ne soit pas considéré comme un polygone. Cette transition naturelle vers la négation est renforcée par la manipulation directe des différentes figures, offrant ainsi un contexte concret pour la compréhension conceptuelle.

En poursuivant cette approche, les élèves peuvent être invités à formuler des propositions en langage naturel, puis à les traduire en langage mathématique pour les nier. Par exemple, après avoir manipulé des figures géométriques, ils pourraient discuter de la déclaration suivante : "Tous les côtés sont des segments de droites". En appliquant la notion de négation, ils pourraient alors explorer les conditions qui rendraient cette proposition fausse, tout en expérimentant visuellement avec différentes figures pour illustrer leurs arguments.

Cette approche interactive et pratique permet aux élèves de se familiariser avec la notion de négation de manière concrète et intuitive. En manipulant activement

les figures et en réfléchissant aux critères de classification, ils acquièrent une compréhension plus profonde des concepts mathématiques tout en développant leurs compétences en raisonnement et en résolution de problèmes.

Tout comme nous avons organisé le classement des différentes formes géométriques en fonction de leurs propriétés et de leurs caractéristiques lors de la structuration d'une leçon sur les solides en 1ère année secondaire, nous pouvons adopter une approche similaire pour aborder la négation de propositions quantifiées.

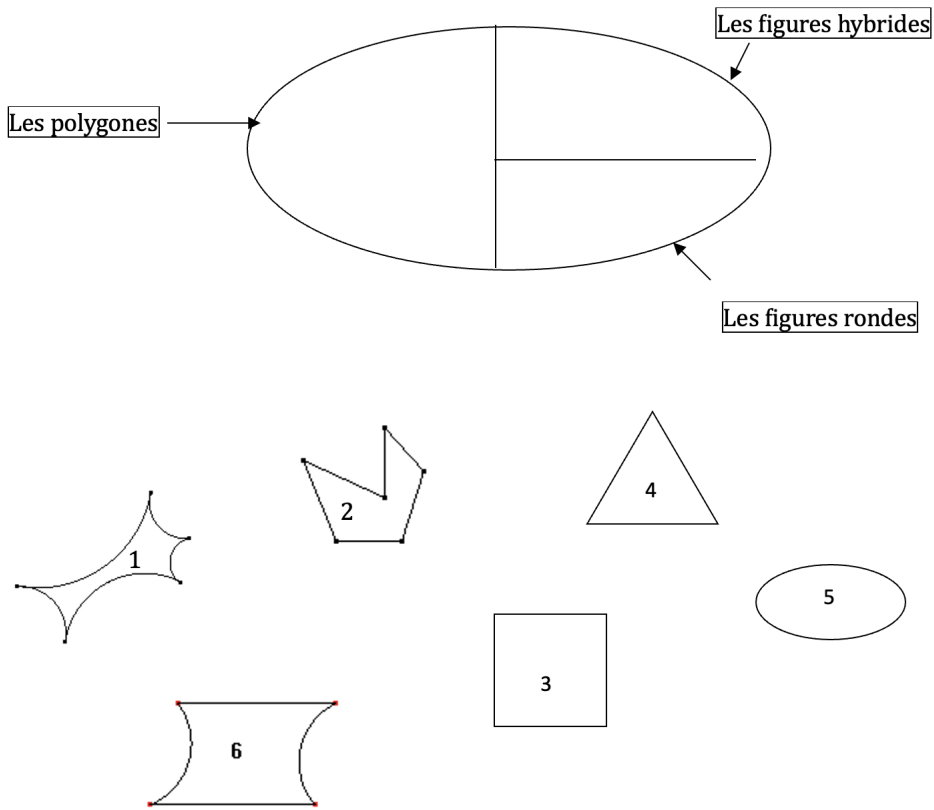
Dans notre démarche pour classer les solides, nous pouvons d'abord identifier un critère de classification, tel que le type de faces. De même, lors de l'analyse de la négation de propositions quantifiées, nous examinons les éléments de la phrase et repérons les mots-clés comme "tous", "certains", "aucun", ainsi que les conjonctions "et" ou "ou".

En associant ces deux processus, nous mettons en lumière le côté positif de la manipulation des solides en tant qu'outil pédagogique.

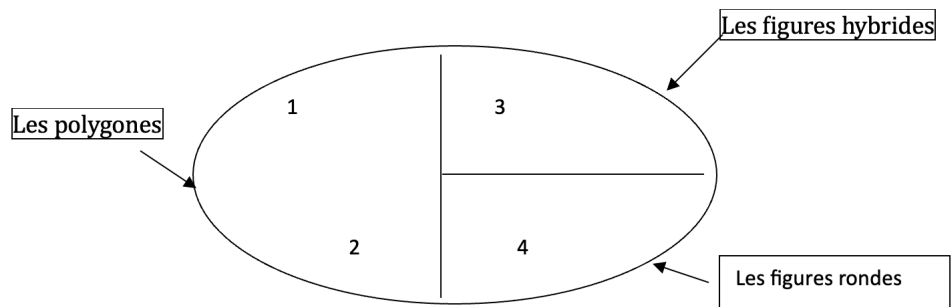
D'ailleurs, le rapport Villani-Torossian [7], présenté le 12 février 2018, accorde une importance significative à une approche éducative reposant sur la manipulation, l'expérimentation et la verbalisation des concepts mathématiques dès le plus jeune âge. Selon le rapport, l'apprentissage des mathématiques doit être fondé sur la manipulation concrète des concepts, leur expérimentation ainsi que leur verbalisation, en soulignant que ces éléments sont cruciaux pour accompagner les élèves dans la construction d'abstractions. Il insiste notamment sur l'importance des manipulations concrètes pour faciliter l'apprentissage des élèves et les aider à élaborer des concepts abstraits. En outre, le rapport souligne que l'enseignement des mathématiques aux jeunes enfants nécessite l'expérimentation de situations réelles, car l'expérience pratique et la manipulation favorisent l'acquisition et la mémorisation des connaissances mathématiques.

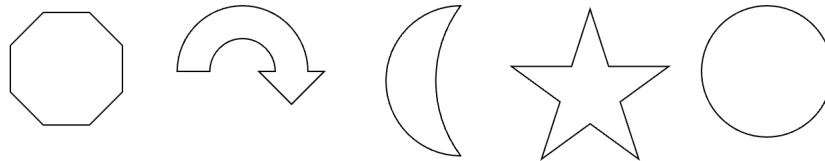
Activité : Classement Figures géométriques planes.

Exercice 1 : Indique dans chaque partie le numéro de la figure correspondante.



2. Indique le numéro de la figure correspondante à chaque partie.





3. Tentons d'établir la définition des différents objets rencontrés lors de l'activité , mais avant cela tentons de nous familiariser avec quelques notions préalables :

Nous allons considérer les phrases suivantes :

P1 : Le tableau de la classe est couvert de dessins colorés.

P2 : Tous les élèves de 1B sont des filles.

P3 : Certains élèves de 1B sont déguisés en clown.

P4 : Tous les élèves de la classe de 1B aiment les mathématiques.

P5 : Aucun élève de la classe de 1B ne parle le français.

P6 : Il existe au moins un élève de la classe de 1B qui parle cinq langues.

Chacune de ces phrases est une proposition, c'est-à-dire que chacune d'elles possède une valeur de vérité, vraie ou fausse. Lesquelles sont vraies et lesquelles sont fausses ?

Pour les propositions qui sont fausses , rédige leur négation :

Proposition	Valeur de vérité	Négation si fausse
P1		
P2		
P3		
P4		
P5		
P6		

Qu'en est-il des propositions suivantes ? établis leur négation.

P7 : Tous les élèves de la classe de 1B aiment les mathématiques et l'informatique.

P8 : Les élèves de la classe de 1B suivent les cours de musique ou de danse.

P7 :

P8 :

Petite fenêtre logique : Négation d'une proposition

La négation d'une proposition est une proposition qui est vraie (fausse) si la proposition de départ est fausse (vraie).

Attention : négation et contraire ne sont pas synonymes.

1. La négation d'une proposition comportant le quantificateur universel « tous, toutes » , donne une proposition contenant le quantificateur existentiel . Exemple : Nier que tous les élèves de la classe sont des filles revient à affirmer qu'il existe (au moins) un garçon dans la classe.
2. La négation d'une proposition comportant le quantificateur existentiel « il existe, certains » , donne une proposition contenant le quantificateur universel. Exemple : Nier qu'il existe un élève garçon dans la classe revient à affirmer que tous les élèves de la classe sont des filles.
3. la négation d'une proposition comportant la conjonction « et », revient à exprimer cette négation à l'aide d'une proposition contenant la conjonction « ou » et les négations des propositions p et q.

Exemple : Nier que « Alexis porte des lunettes et une casquette » revient à affirmer que « Alexis n'a pas de lunettes ou n'a pas de casquette » En effet, pour ne pas avoir « des lunettes et une casquette » en même temps, il suffit :

- Soit de ne pas avoir de lunettes mais une casquette ;
- Soit d'avoir des lunettes mais pas de casquette ;
- Soit de ne pas avoir de lunettes, ni de casquette en même temps.

4. la négation d'une proposition comportant la conjonction « ou », revient à exprimer cette négation à l'aide d'une proposition contenant la conjonction « et » et les négations des propositions p et q.

Exemple :

Nier que « Alexis porte des lunettes ou une casquette », revient à affirmer que Alexis ne porte pas de lunettes et pas de casquette ».

En effet, pour « porter des lunettes ou une casquette », il suffit :

- soit de porter des lunettes et pas de casquette ;
- soit de porter une casquette et pas de lunettes ;
- soit de porter des lunettes et une casquette en même temps.

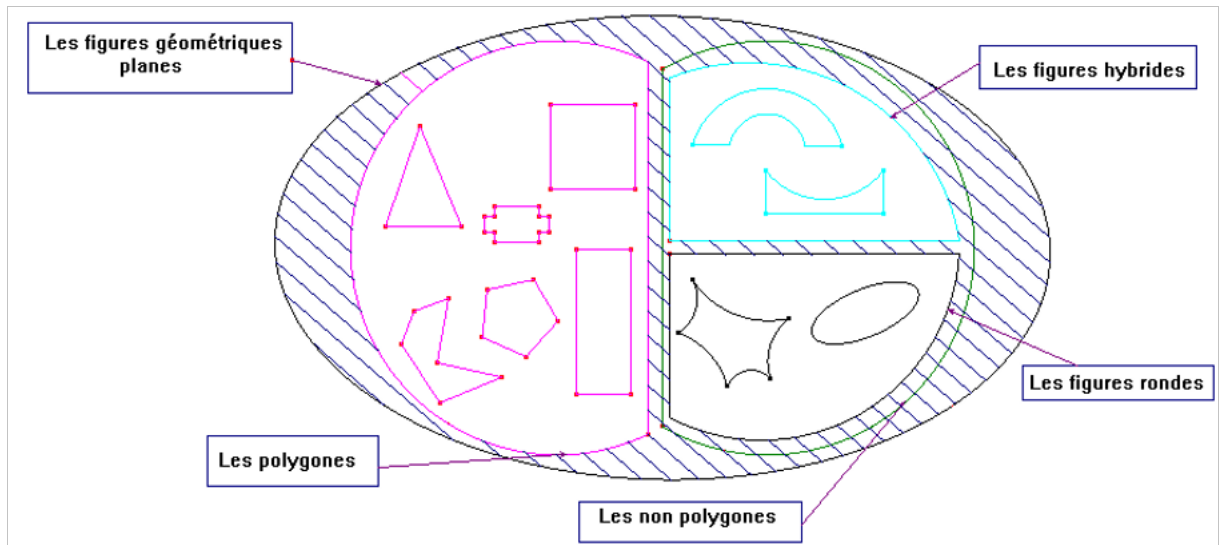
Dès lors, pour « ne pas porter des lunettes ou une casquette », il suffit de ne pas être dans une des trois situations ci-dessus, ce qui est équivalent à affirmer que Alexis ne porte pas de lunettes et n'a pas de casquette »

Synthèse de géométrie n°1 :
Les figures géométriques planes.

Les figures géométriques planes se partagent en polygones et non-polygones.

Les non-polygones se subdivisent en figures rondes et en figures hybrides.

Classement en diagramme :



→ Un polygone est une figure géométrique dont

→ Un non-polygone est une figure géométrique où

- Une figure hybride est une figure géométrique où il existe au moins un
et au moins un
- Une figure ronde est une figure géométrique dont tous les côtés sont.....

Remarques :

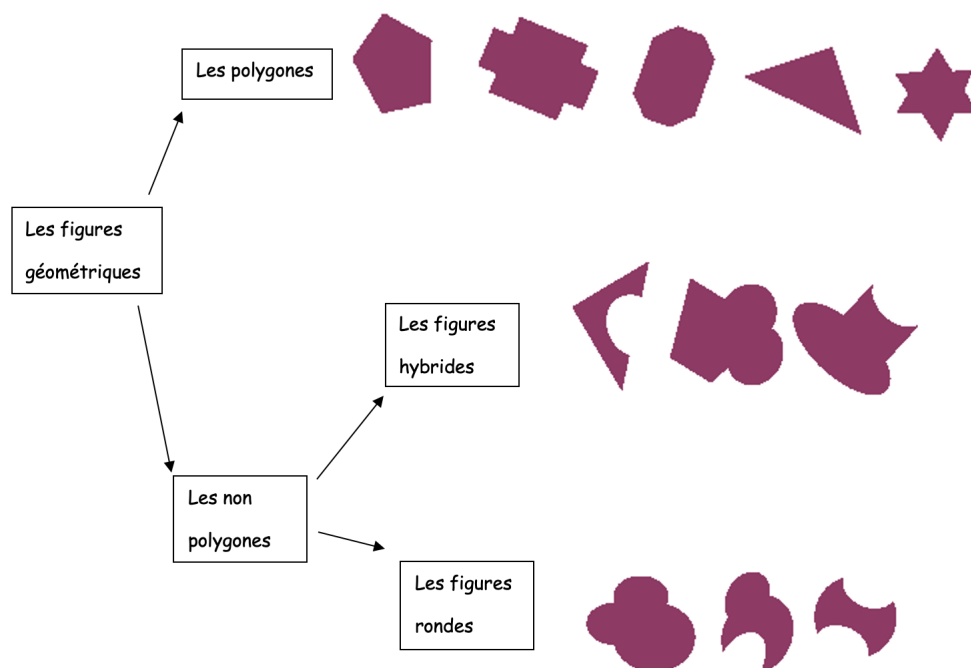
Une figure géométrique plane est une figure entièrement contenue dans un plan (qui « colle » à la table).

Une figure géométrique non plane est une figure qui n'est pas entièrement contenue dans un plan (qui ne « colle » pas entièrement à la table).

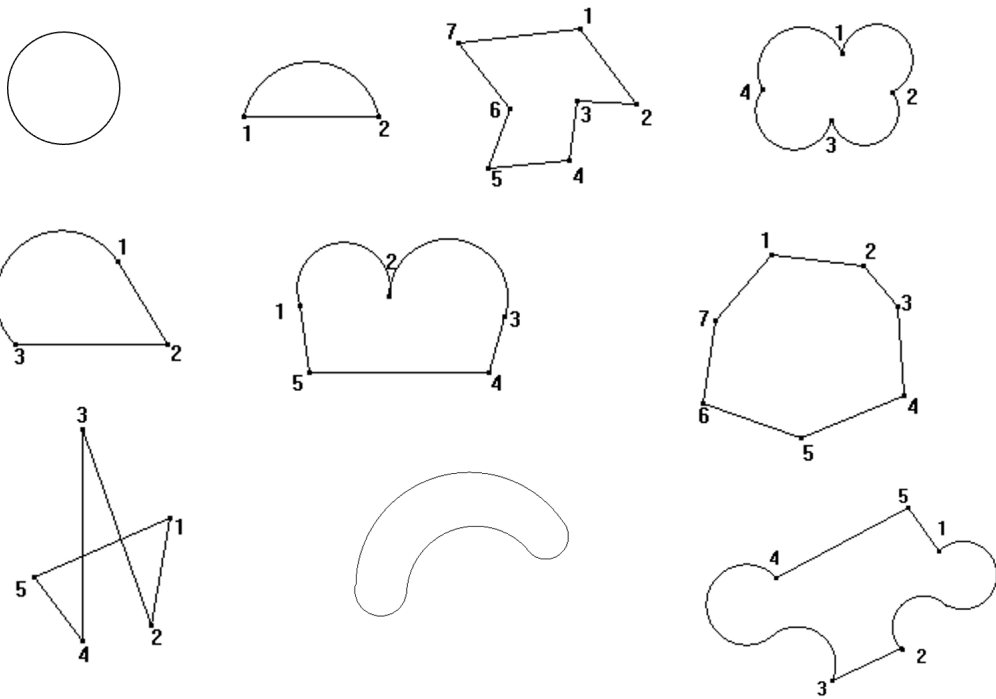
Une figure géométrique est en un seul morceau, fermée et telle que 2 côtés droits consécutifs ne sont jamais alignés.

De plus, en chaque sommet, il arrive exactement 2 côtés (droits et/ou courbes).

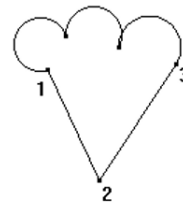
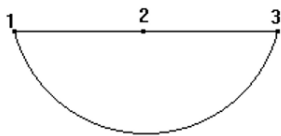
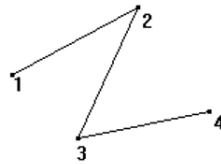
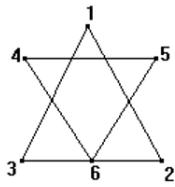
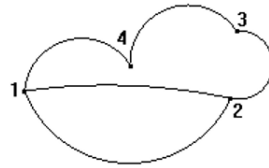
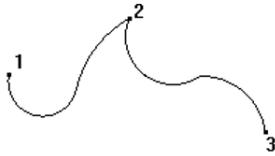
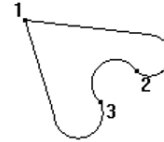
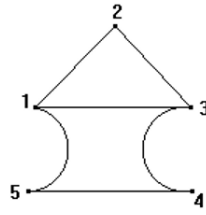
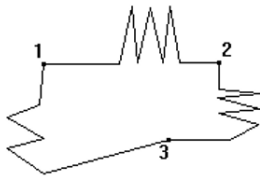
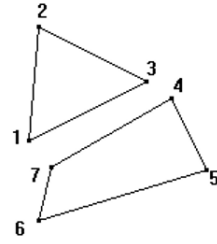
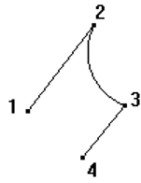
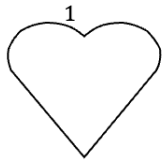
Classement en arbre :



Exemples de figures géométriques :



Contre-exemples : Dessins de figures qui ne sont pas des figures géométriques.



Première occasion de rencontrer le modus ponens- le raisonnement par l'absurde
– l'induction.

Thème 2 :Les angles.

1. **Niveau** : 2ème secondaire

2. **Concepts mathématiques rencontrés pendant le thème :**

- Détermination d'un angle (secteur angulaire)
- Distinction des différents types d'angles (droit – obtus - aigu)
- Comparaison d'angles (par superposition)
- Angles particuliers (adjacents – complémentaires – supplémentaires)
- Bissectrice d'un angle.
- Perception des angles dans les figures.
- Calcul de l'amplitude des angles (raisonnement)

3. **Concepts logiques rencontrés :**

- Le modus ponens
- Preuve par l'absurde
- Une inférence inductive

4. **Compétences visées :**

- Déterminer et nommer les angles internes d'une figure.
- Perception des angles internes d'une figure.
- Reconnaître et déterminer les différents types d'angles.
- Classer les angles par amplitude sans les mesurer.
- Utiliser le rapporteur pour mesurer un angle.
- Utiliser le rapporteur pour tracer un angle.
- Reconnaître les angles adjacents, supplémentaires, complémentaires.
- Reasonner sur l'amplitude des angles.
- Déterminer la somme des amplitudes des angles intérieurs dans tout triangle.

- Déterminer la somme des amplitudes des angles intérieurs dans tout quadrilatère simple et croisé.

5. Matériel à prévoir pour le thème :

- Angles découpés dans du carton représentant les différents types d'angles (obtus – aigu – droit)
- Angles de même amplitude possédant des côtés de longueurs différentes.

Pourquoi aborder le modus ponens dans cette UAA ?

Il est indéniable que la démonstration occupe une place de choix dans l'univers mathématique. Il est difficile de traiter de la démonstration en mathématiques sans évoquer le principe du tiers-exclu, le modus ponens ou la démonstration par l'absurde.

Lors de cette UAA nous mettrons en évidence la notion de modus ponens via le premier problème de recherche « des démonstrations folles ». En effet, la logique naturelle va nous offrir une porte d'entrée pertinente vers la logique mathématique. Dans ce contexte, il est intéressant de constater que la logique naturelle se conforme à la logique mathématique, notamment en ce qui concerne l'utilisation du modus ponens.

Le programme du secondaire inférieur semble accorder une importance particulière au domaine de la géométrie pour cultiver le raisonnement déductif des élèves. En effet, c'est dans le cadre de la géométrie que les élèves sont encouragés à se familiariser avec les définitions et les propriétés des figures géométriques, qu'ils utilisent ensuite pour résoudre des problèmes à l'aide de déductions simples. Ce travail, amorcé dès l'école primaire, prend de l'ampleur au niveau secondaire, offrant aux élèves l'opportunité de se rapprocher des raisonnements plus élaborés utilisés dans la démonstration mathématique.

Durant le deuxième cycle de l'école secondaire, les exigences concernant les preuves et les démonstrations se renforcent. Alors que le premier cycle cherche à initier l'élève à la notion de validation et de justification d'un résultat ou d'une méthode, le deuxième cycle demande à l'élève d'utiliser des formes plus spécifiques de validation et de justification : la preuve ou la démonstration mathématique.

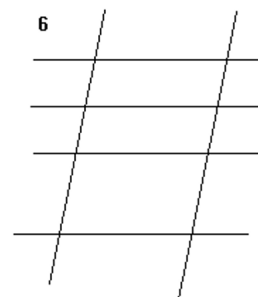
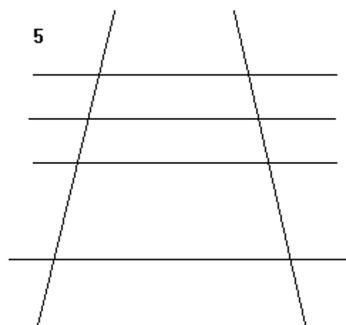
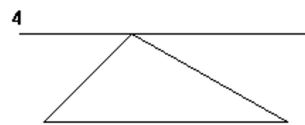
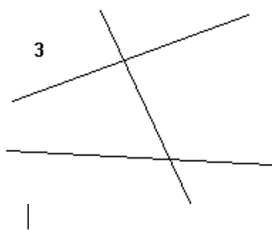
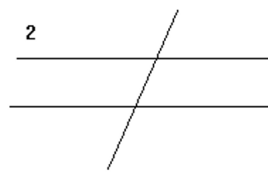
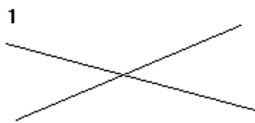
Thème 2 : Les angles.

1. Propriétés des angles remarquables

Introduction

a) Repérer les angles de même écartement.

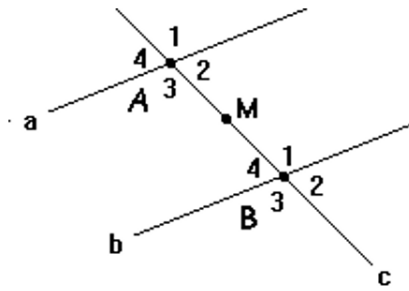
Repérer et colorier dans une même couleur les angles de la même amplitude.



b) Voici deux droites parallèles a et b coupées

- par une droite sécante c :
- c coupe a en A ; c et a forment 4 angles.
 - c coupe b en B ; c et b forment 4 angles.

Dans chacun des cas suivants, quelle transformation du plan permet de passer d'un angle à un autre ?



1^{er} cas :

$\hat{A}_2 \rightarrow \hat{B}_6$ par

2^{ème} cas :

$\hat{A}_4 \rightarrow \hat{B}_6$ par

3^{ème} cas :

$\hat{A}_2 \rightarrow \hat{B}_8$ par

4^{ème} cas :

$\hat{A}_1 \rightarrow \hat{A}_3$ par

$\hat{A}_2 \rightarrow \hat{A}_4$ par

Recherche

Partie 1 : Des démonstrations folles

Considérons les propositions suivantes. Chacune d'elles est considérée **vraie**.

Propriété 1:

S'il fait beau,
alors je pars me
promener.

Propriété 2:

Si des poules
chantent, alors
elles ont les dents

Propriété 3:

S'il fait nuit,
alors les chats

Propriété 4:

Si j'ai de l'argent et que je
passe devant une pâtisserie,
alors je m'achète des

Propriété 5:

Si j'ai des caries, alors je vais
chez le dentiste.

Propriété 6:

Si je chante à tue-tête,
alors mes voisins sont

Propriété 7:

Si je fais des
mathématiques, alors

Propriété 8:

Si je fais du sport,
alors je transpire.

Propriété 9:

Si je mange des
sucreries, alors j'ai

Propriété 10:

Si je me couche
tard, alors je suis

Propriété 13: Si je mets de l'eau partout dans une pièce, alors maman me fait nettoyer les sols.

Propriété 14: Si je sors de chez moi, alors je passe devant la boulangerie-pâtisserie à côté de ma maison.

Propriété 15: Si je sue, alors je me lave.

Propriété 16: Si je suis fatigué, alors je m'endors sur mon bureau.

Propriété 17: Si je travaille bien, alors je reçois de l'argent de poche.

Propriété 11:
Si je me douche, alors je mets de l'eau partout dans la salle de bain.

Propriété 12: Si je me lave, alors je suis propre.

Propriété 18: Si mes voisins sont heureux et que les chats sont gris, alors les poules chantent la brabançonne

Pour chacun des exercices suivants, on demande:

1. Ecrire en rouge les hypothèses.
2. Ecrire en vert ce qu'il faut démontrer.
3. Faire le schéma de démonstration. Pour les exercices 1 et 2, des schémas à compléter sont donnés.
4. Rédiger la démonstration

Exercice 1 :

Dimanche, Benjamin a joué au football toute l'après-midi. Son équipe a gagné sur le score de 3 - 0. Démontrer qu'il va nettoyer les sols de la salle de bain.

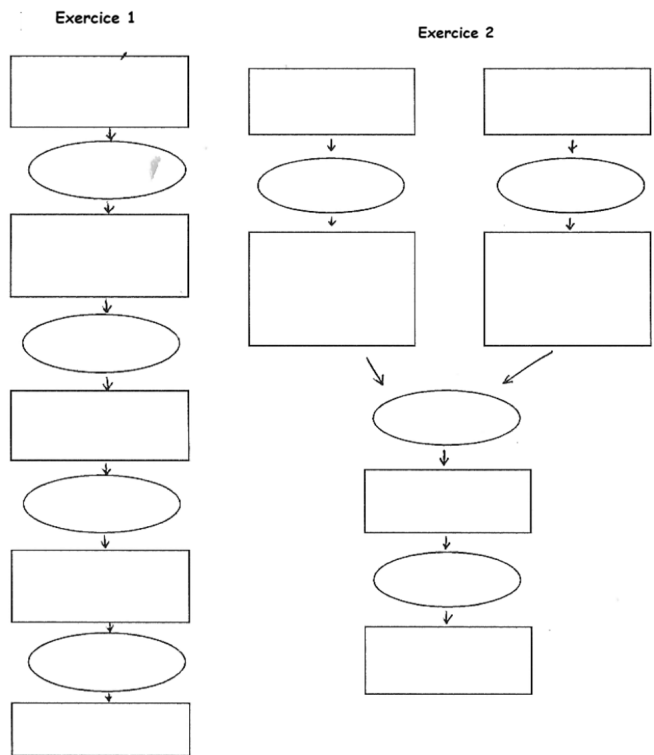
Exercice 2:

La nuit est tombée et Carole va se coucher. Comme elle ne trouve pas le sommeil, elle ouvre la fenêtre, branche son baladeur et écoute de la musique en observant les étoiles. Avec son casque sur les oreilles, elle ne se rend pas compte qu'elle chante très fort.

Démontrer que les poules auront des dents

Exercice 3:

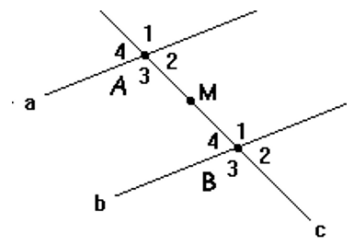
Nous sommes lundi, il est 10 heures et le soleil brille. Léo est heureux, car il a bien travaillé et a reçu un 18/20 en français. Démontrer qu'il va aller chez le dentiste.



Partie 2

Voici deux droites parallèles a et b coupées par une droite sécante c :

- c coupe a en A ; c et a forment 4 angles.
- c coupe b en B ; c et b forment 4 angles.



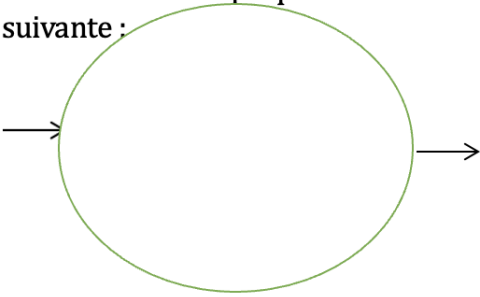
Par chacune des isométries suivantes, indique quels angles sont superposables entre eux et démontre en suivant le même schéma que précédemment .

On a :

$$T_{\overline{AB}}$$

.....
.....
.....
.....

Et connaissant la propriété suivante :



On peut donc conclure que :

⇒..... et ont la même amplitude.

⇒..... et ont la même amplitude.

⇒ et ont la même amplitude.

⇒ et ont la même amplitude.

On les appelle des **angles**
.....

S_A

.....
.....

→ et ont la même amplitude.

→ et ont la même amplitude.

On les appelle des **angles**
.....

Propriété utilisée : Les symétries centrales

S_B

.....
.....

→ et ont la même amplitude.

→ et ont la même amplitude.

On les appelle des **angles**
.....

Propriété utilisée : Les symétries centrales

S_M

.....		→ et	ont la même amplitude.
.....		→ et	ont la même amplitude.

On les appelle des **angles**
.....

Propriété utilisée : Les symétries centrales

S_M

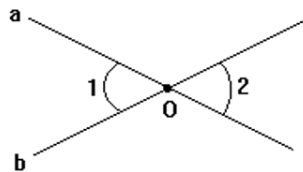
.....		→ et	ont la même amplitude.
.....		→ et	ont la même amplitude.

On les appelle des **angles**
.....

Propriété utilisée : Les symétries centrales

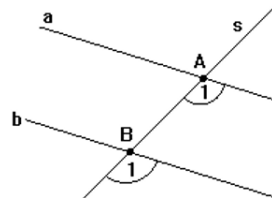
Propriétés

P1. Si deux droites sont sécantes, alors les angles opposés par le sommet ont la même amplitude.



Angles opposés par le sommet

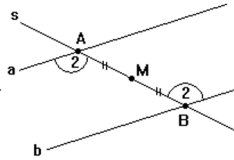
P2. Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles correspondants ont la même amplitude.



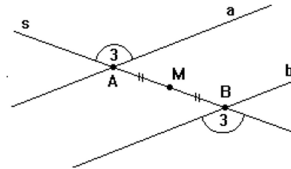
Angles correspondants

P3. Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-internes ont la même amplitude.

P4. Si deux droites parallèles sont coupées par une sécante, alors les angles alternes-externes ont la même amplitude.

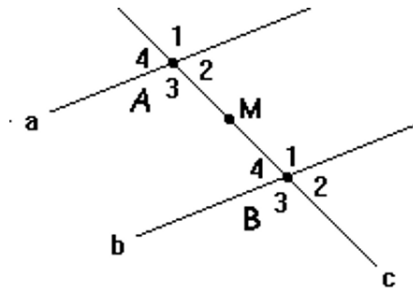


Angles alternes-internes



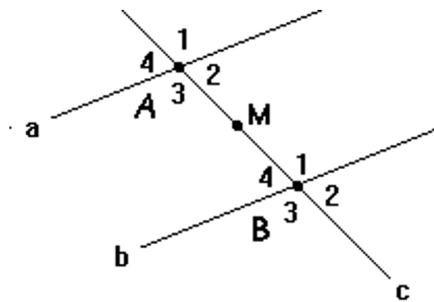
Angles alternes-externes

Remarque :



$$\widehat{A}_2 + \widehat{B}_1 = \dots$$

Si $\widehat{A}_2 + \widehat{B}_1 = 180^\circ$, que peut-on dire des droites a et b ?

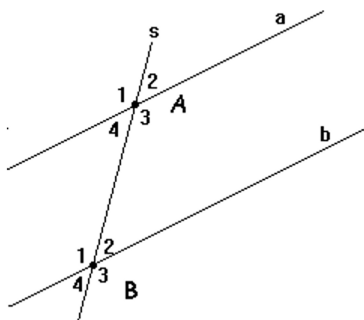


.....

On peut justifier que a et b sont parallèles.

P5. Si une sécante détermine avec deux droites des angles correspondants (ou alternes-internes ou alternes-externes) de même amplitude, alors les deux droites sont parallèles.

Démontrons cette propriété :



Si $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$
 ou
 $\widehat{A_4} = \widehat{B_2}$
 ou
 $\widehat{A_2} = \widehat{B_4}$
 alors $a // b$

Hypothèses : $\widehat{A_1} = \widehat{B_1}$
 $\widehat{A_2} = \widehat{B_2}$
 $\widehat{A_3} = \widehat{B_3}$
 $\widehat{A_4} = \widehat{B_4}$
 $\rightarrow \widehat{A_3} + \widehat{B_2} = 180^\circ$

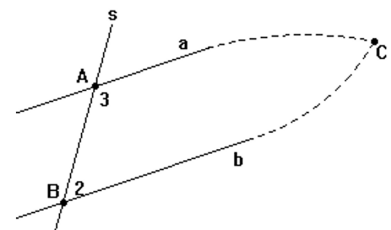
Thèse : $a // b$

Démonstration :

Démontrons que $a // b$ par l'absurde.

Pour cela, montrons que si $a \not// b$ alors on est en contradiction avec les hypothèses.

Si $a \not// b$ alors il apparaît un triangle ABC



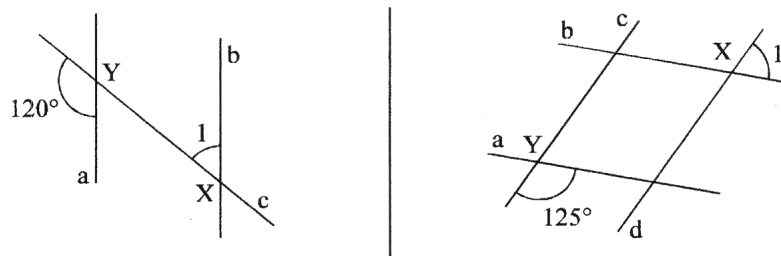
Où \widehat{A}_3 , \widehat{B}_2 et \widehat{C} sont des angles dont l'amplitude est non nulle.

- On sait déjà par hypothèse que $\widehat{A}_3 + \widehat{B}_2 = 180^\circ$
- Si $a \not\parallel b$, on a que dans le triangle ABC la somme des amplitudes des angles intérieurs vaut : $\widehat{A}_3 + \widehat{B}_2 + \widehat{C} = 180^\circ + \widehat{C}$
 $\widehat{A}_3 + \widehat{B}_2 + \widehat{C} > 180^\circ$
- Or on sait que dans tout triangle, la somme des amplitudes des angles intérieurs vaut 180° .
- Dès lors supposer que $a \not\parallel b$ fait apparaître une contradiction (une absurdité).
- Il faut donc conclure que a et b ne peuvent pas être sécantes ; ce qui signifie qu'elles sont parallèles.

2. Exercices

1. Dans les figures suivantes, $a \parallel b$ et $c \parallel d$. Calcule l'amplitude de l'angle \widehat{X}_1 .

Justifie tes résultats.



2. Soient:

- les droites a et b telles que $a \parallel b$
- la droite c telle que $c \not\parallel a$ et $c \not\parallel b$
- l'angle \widehat{X}_1 tel que $|\widehat{X}_1| = 65^\circ$.

Calcule l'amplitude de tous les angles formés par les droites a , b et c .

Justifie tes résultats.

$$|\widehat{X}_2| = \dots \text{ car } \dots$$

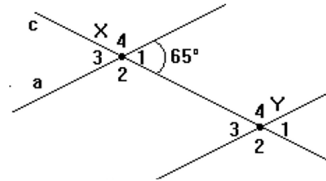
$$|\widehat{X}_3| = \dots \text{ car } \dots$$

$|\widehat{X}_4| = \dots \text{ car } \dots$

$|\widehat{Y}_1| = \dots \text{ car } \dots$

$|\widehat{Y}_2| = \dots \text{ car } \dots$

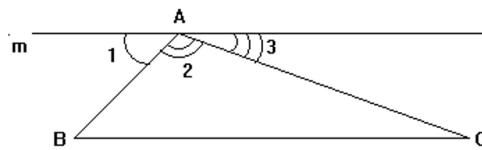
3. Tente de redémontrer la propriété suivante en utilisant les angles alternes-internes : La somme des amplitudes des angles intérieurs d'un triangle vaut 180° .



Soit le triangle ABC.

Par A, je construis la droite m parallèle à BC et je nomme les angles

\widehat{A}_1 , \widehat{A}_2 et \widehat{A}_3



Je sais que :

Je déduis que :

\widehat{B} et \widehat{A}_1 sont (1)

\widehat{C} et \widehat{A}_3 sont (2)

Les angles \widehat{A}_1 , \widehat{A}_2 et \widehat{A}_3 forment un angle (3)

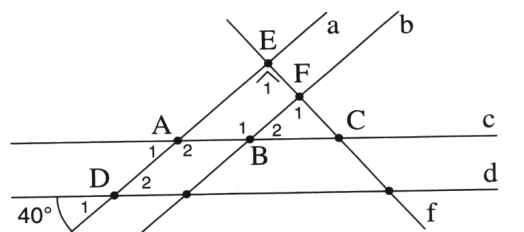
En remplaçant \widehat{A}_1 par \widehat{B} et \widehat{A}_3 par \widehat{C} ,
on obtient :

.....

4. Observe le dessin suivant: $a \parallel b$; $c \parallel d$; $a \perp f$.

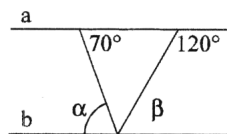
Détermine l'amplitude des angles suivants et justifie chaque fois ta réponse.

\widehat{D}_2 ; \widehat{A}_1 ; \widehat{A}_2 ; \widehat{B}_1 ; \widehat{B}_2 ; \widehat{F}_1

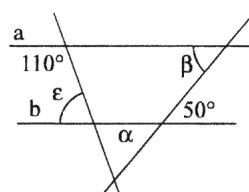


5. Calcule le plus simplement possible l'amplitude des angles dans les figures ci-dessous. Indique tes calculs.

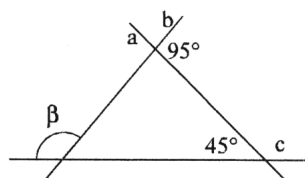
1) $a \parallel b$



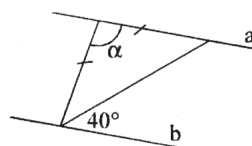
2) $a \parallel b$



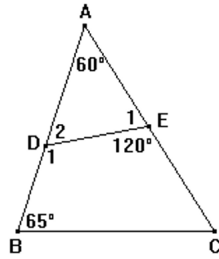
3)



4) $a \parallel b$



6. Observe la figure ci-dessous et calcule l'amplitude des angles suivants :



$|\widehat{C}| = \dots\dots\dots$

$|\widehat{D}_1| = \dots\dots\dots$

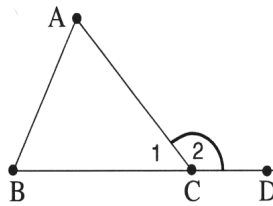
$|\widehat{E}_1| = \dots\dots\dots$

Quelle est la nature du triangle DAE ? Pourquoi ?

7. a) Détermine l'amplitude de l'angle \widehat{C}_2 si tu sais que :

$|\widehat{B}| = 50^\circ$ et $|\widehat{A}| = 70^\circ$

$|\widehat{B}| = 100^\circ$ et $|\widehat{A}| = 60^\circ$



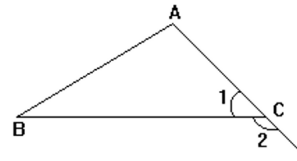
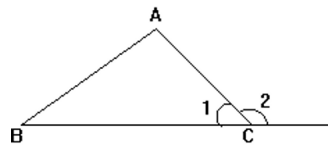
b) Trouve une règle facile qui permet de calculer rapidement l'amplitude de \widehat{C}_2 :

.....

c) Démontre la propriété suivante :

« L'amplitude d'un angle extérieur d'un triangle est égale à la somme des amplitudes des angles intérieurs non-adjacents. »

Remarques : - un angle extérieur d'un triangle est formé par un côté et le prolongement de l'autre côté, issus d'un même sommet.



- deux angles sont adjacents si :
 - i. ils ont le même sommet,
 - ii. ils ont un côté commun,
 - iii. ils sont situés de part et d'autre de ce côté commun.

Démonstration :

Je sais que :

Je déduis que :

La somme des amplitudes des angles intérieurs
d'un triangle vaut

\widehat{C}_1 et \widehat{C}_2 sont

.....

.....

En composant les deux égalités, on a :

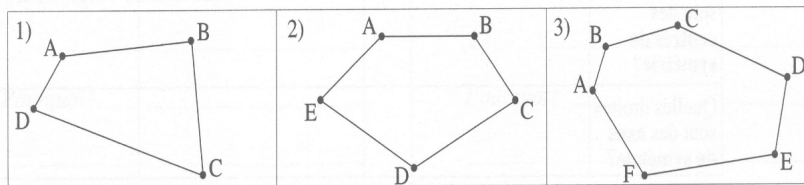
.....

En retirant $|\widehat{C}_1|$ aux deux membres,

on obtient

3. Angles de polygones convexes (notion d'inférence inductive)

Voici des polygones :

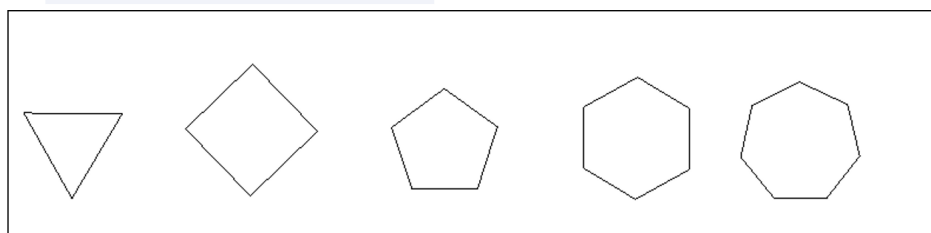


Polygone	Nombre de côtés	Nombre de triangles	Calcul de la somme des amplitudes des angles intérieurs	Somme des amplitudes des angles intérieurs
Quadrilatère				
Pentagone				
Hexagone				
Heptagone				
Octogone				
n-gone (polygone à "n" côtés)				

La somme des amplitudes des angles intérieurs d'un polygone convexe ayant "n" côtés est

4. Angle intérieur d'un polygone convexe régulier (inférence inductive)

Voici des polygones convexes réguliers :



Décompose chacun de ces polygones convexes réguliers en triangles qui, sans se chevaucher, recouvrent parfaitement le polygone. Les sommets des triangles sont ceux du polygone.

Complète le tableau suivant :

Polygone réguliers	Nombre de côtés	Nombre de triangles	Calcul de la somme des amplitudes des angles intérieurs	Somme des amplitudes des angles intérieurs	Calcul de l'amplitude d'un angle intérieur
Triangle équilatéral					
Carré					
Pentagone régulier					
Hexagone régulier					
Heptagone régulier					
n-gone régulier (polygone régulier à "n" côtés)					

La somme des amplitudes des angles intérieurs d'un polygone régulier ayant "n" côtés est

L'amplitude d'un angle intérieur d'un polygone régulier à "n" côtés vaut

Exercices

1. Calcule

- la somme des amplitudes des angles intérieurs des polygones réguliers suivants
- l'amplitude d'un angle intérieur

<u>Un décagone régulier :</u>	<u>Un dodécagone régulier :</u>	<u>Un polygone régulier à</u> <u>20 côtés</u>
Somme des amplitudes des angles :	Somme des amplitudes des angles :	Somme des amplitudes des angles :
.....
.....
Amplitude d'un angle :	Amplitude d'un angle :	Amplitude d'un angle :
.....
.....

2. Est-il possible de calculer :

- la plus petite amplitude possible de l'angle intérieur d'un polygone régulier.

Si oui, calcule-la.

.....
.....

- la plus grande amplitude possible de l'angle intérieur d'un polygone régulier.

Si oui, calcule-la.

.....
.....

Remarque

Si le polygone convexe n'est pas régulier, alors on sait calculer la somme des amplitudes des angles intérieurs mais on ne sait pas calculer l'amplitude d'un angle intérieur car les angles intérieurs n'ont pas tous la même amplitude.

Petite fenêtre de logique

Cette UAA met en lumière l'importance des règles fondamentales de la logique mathématique dans la démonstration d'énoncés mathématiques. Ces règles, telles que :

- Un énoncé mathématique est soit vrai, soit faux (le principe du tiers -exclu)
- Un contre-exemple suffit pour démontrer qu'une conjecture est fausse;
- Le fait que plusieurs exemples permettent de vérifier un énoncé mathématique ne suffit pas à prouver qu'il est vrai;
- Une constatation ou des mesures à partir d'un dessin ne prouvent pas qu'une conjecture est vraie mais peuvent toutefois servir à en formuler une;
- En mathématiques, lorsqu'on veut faire une démonstration, on utilise souvent des chaînons déductifs selon le schéma « je sais que A est vrai , or si A est vrai, alors B est vrai, donc B est vrai».

Exemple :

Je sais qu'il pleut

Or S'il pleut, alors les routes seront mouillées.(Propriété supposée vraie)

Conclusion : Par conséquent, les routes seront mouillées.

Découverte des notions de réciproque et de contraposée – modus Ponens
Thème 3 : Le théorème de Pythagore

1. **Niveau** : 3ème secondaire
2. **Concepts mathématiques rencontrés pendant le thème** :
 - Le théorème de Pythagore
 - La réciproque et la contraposée du théorème de Pythagore.
3. **Concepts logiques rencontrés** :
 - Le modus ponens
 - La réciproque et la contraposée
4. **Compétences visées** :
 - Démontrer le théorème de Pythagore
 - Distinguer la réciproque et la contraposée du théorème de Pythagore
 - Résoudre un problème en utilisant le théorème de Pythagore , sa réciproque ou sa contraposée .

Doit-on obligatoirement parler de réciproque et de contraposée du théorème de Pythagore ? (même question concernant le théorème de Thalès ?)

Le théorème de Pythagore offre une voie directe et efficace pour déterminer la nature d'un triangle, qu'il soit rectangle ou non. Souvent, les étudiants se retrouvent confrontés à un choix difficile entre différentes méthodes de rédaction, telles que l'utilisation de la contraposée, de la réciproque ou du sens direct, ce qui peut être source de confusion.

Dans ce contexte, le recours au théorème de Pythagore se révèle à la fois simple et exhaustif (via un raisonnement par l'absurde) : il permet à la fois de prouver qu'un triangle n'est pas rectangle et de démontrer qu'il l'est, sans nécessiter d'autres formulations complexes comme la réciproque.

On pourrait certes faire valoir que les élèves devraient être familiarisés avec des concepts tels que l'implication, la réciproque et l'équivalence. Cependant, étant donné la simplicité et l'efficacité du théorème de Pythagore dans ce contexte, il semble superflu de s'encombrer de ces notions. En transformant le théorème de Pythagore en une équivalence avec un "si et seulement si", il serait possible de démontrer

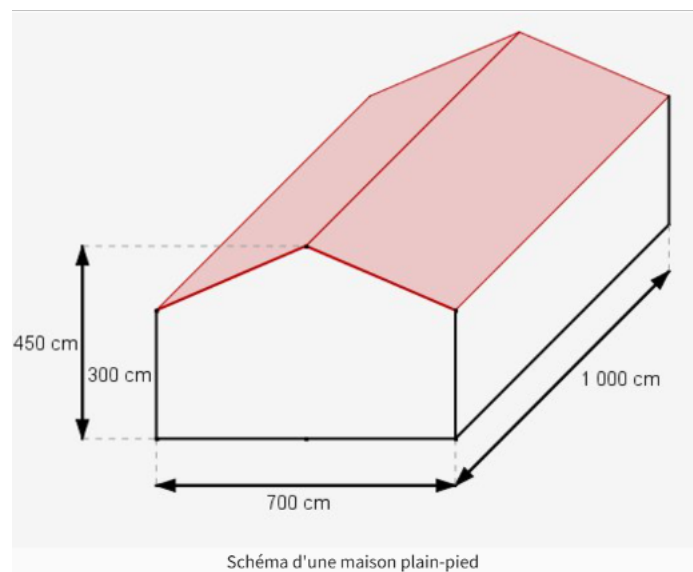
rapidement à la fois le sens direct et la réciproque, simplifiant ainsi le processus et assurant une uniformité dans l'approche pédagogique.

Découverte du théorème de Pythagore

1. Détermine l'amplitude des angles suivants et justifie chaque fois ta réponse.

Considérons un cas pratique :

la construction d'une maison et posons-nous deux questions :



1. Comment le maçon ou le charpentier font-ils pour s'assurer que les murs ou les éléments de la charpente sont bien perpendiculaires ?
2. Comment fait l'architecte (ou le maître d'œuvre) pour connaître les dimensions de la toiture d'une maison qui n'existe que sur le papier ? Par exemple la maison ci-contre :

L'architecte se base sur un simple dessin, une représentation réduite de ce que sera la maison : la moindre erreur de quelques millimètres sur le plan peut se traduire par plusieurs dizaines de centimètres dans la réalité. Pendant la construction, le maçon et le charpentier abandonnent leur équerre d'écolier, mais cela ne signifie pas pour autant qu'ils commettent des erreurs, qu'ils utilisent des outils modernes ou non. Comment font-ils ?

La réponse est simple : ils maîtrisent le théorème de Pythagore, sa réciproque et sa contraposée ! Alors, sans plus attendre, explorons ensemble ces notions essentielles.

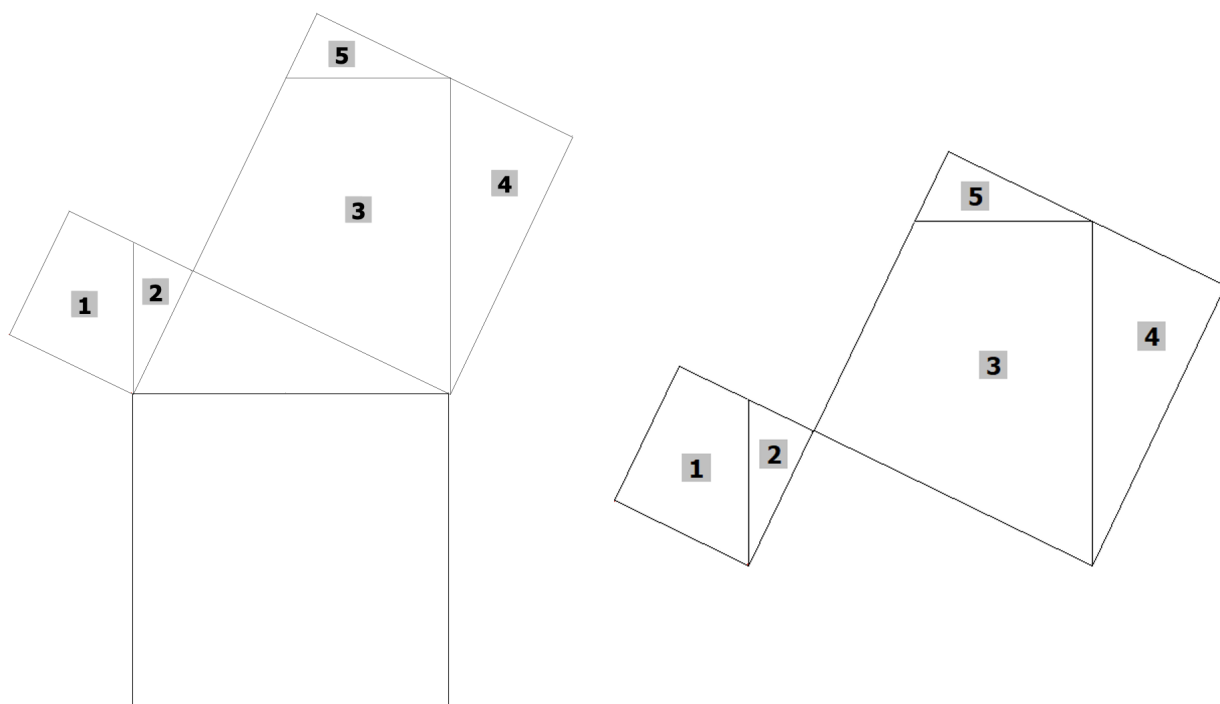
Découvrons un outil qui te permettra de répondre avec précision :

Première partie :

Consigne :

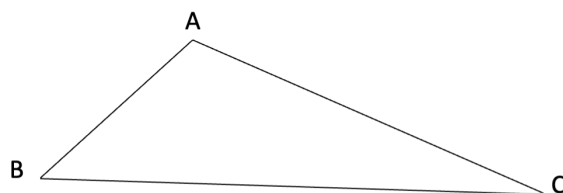
Découper, à partir de la page annexe, les cinq morceaux des deux petits carrés, en suivant les lignes tracées.

Ensuite assembler les pièces du puzzle pour recouvrir le grand carré dans la figure ci-dessous.



Quelle conjecture peut-on émettre ?

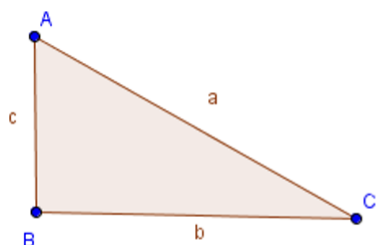
Est-ce pareil si le triangle n'est pas rectangle ?



Mesurer avec soin les longueurs des côtés, les écrire sur la figure et calculer $|AB|^2 + |AC|^2$ et $|BC|^2$.

Formulation du théorème de Pythagore

En français
.....
.....
.....



Si a, b et c représentent les longueurs des côtés d'un triangle rectangle. a étant celle de l'hypoténuse.

.....

Démonstration historique

On considère le carré MNOP ci-dessous. On a partagé chacun de ses côtés en 2 segments de longueur a et b (a et b sont 2 nombres positifs différents). L'unité est le centimètre.

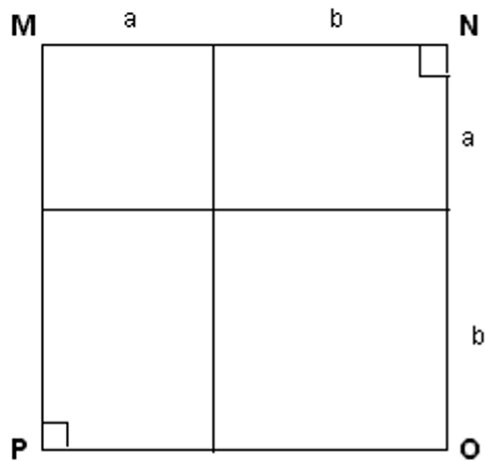


Figure 1

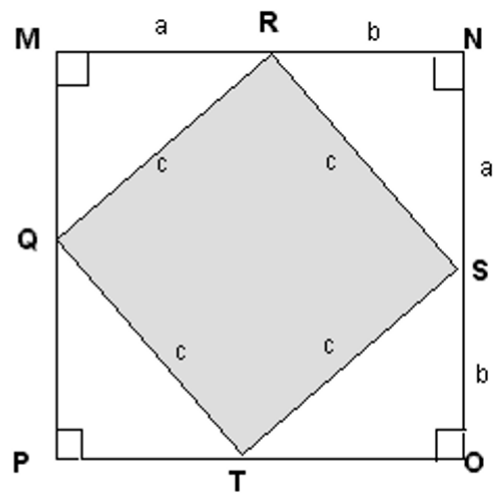


Figure 2

Etape 1 : Détermine l'aire A du carré MNOP en fonction de a et b . (voir figure 1)

$A = \dots\dots\dots = \dots\dots\dots$ (cm^2)

Que peut-on dire des 4 triangles rectangles de la figure 2 ? Justifie ta réponse.

.....

On note c l'hypoténuse de ces 4 triangles rectangles. Calcule l'aire de chacun d'eux et déduis-en l'aire totale des triangles (on l'appellera A').

.....

$$A' = \dots\dots\dots \text{cm}^2$$

En déduire l'aire du quadrilatère QRST.

.....

(Rappel : La somme des angles d'un triangle vaut degrés.)

Etape 2 : On note α l'angle \widehat{MQR} . Détermine la valeur de l'angle \widehat{MRQ} en fonction de α .

$|\widehat{MRQ}| = \dots\dots\dots$

Que peut-on dire de l'angle \widehat{RSN} ? Pourquoi ?

.....

Donc : $|\widehat{NRS}| = \dots\dots\dots$

L'angle \widehat{MRN} est un angle ; il vaut donc degrés.

En déduire la valeur de $|\widehat{QRS}|$.

.....

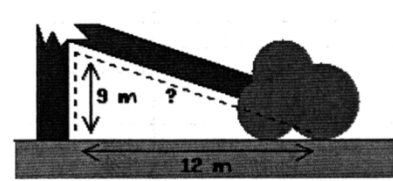
Etape 3 : Le quadrilatère QRST est un Son aire vaut : $\mathbf{A''} = \dots\dots\dots$ cm^2 .

Conclusion : Dans le triangle rectangle MRQ rectangle en M :

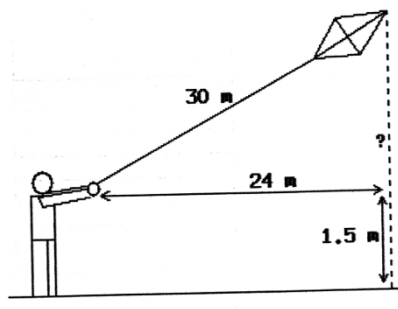
.....

Exercices

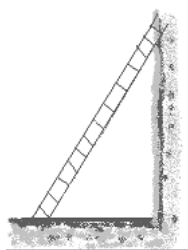
1. Un arbre a été abattu par la foudre. Quelle était la hauteur de l'arbre au départ ? (Exprime ta solution en mètres).



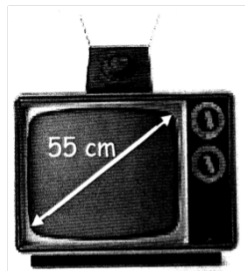
2. quelle hauteur plane le cerf-volant ? (Exprime ta réponse en mètre).



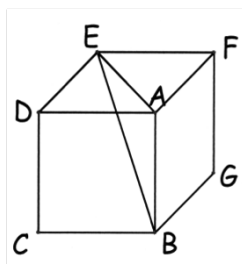
3. Quelle doit être la longueur de l'échelle pour atteindre une hauteur de 6 m si on lui donne 2 m de pied ?



4. Lorsque dans un catalogue, on lit : « Téléviseur de 55 cm », cela signifie que la diagonale de son écran (assimilé au rectangle) mesure 55 cm.



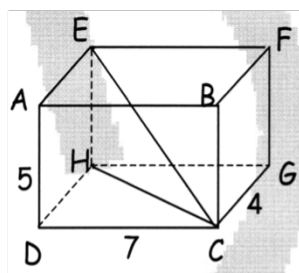
- a) Quelle est la hauteur de l'écran d'un téléviseur de 55 cm, dont la longueur est 44 cm ?
- b) Quelle est la longueur de l'écran d'un téléviseur de 70 cm dont la hauteur est 42 cm ?
- c) L'écran d'un téléviseur mesure 37,8 cm sur 50,4 cm. Comment sera-t-il répertorié dans le catalogue ?
5. Détermine la longueur de la diagonale [EB] d'un cube de 6 cm d'arête.



Calcule $|EA|$ en utilisant le triangle EFA rectangle en F.

Calcule $|EB|$ en utilisant le triangle EAB rectangle en A.

6. Détermine la longueur d'une diagonale $[EC]$ d'un parallélépipède rectangle.



Petit fenêtre de logique : Théorème, réciproque et contraposée du théorème de Pythagore.

1. Nicolas dit à son copain : « S'il n'y a plus d'essence dans le réservoir alors le moteur s'éteint ».

La phrase : « S'il n'y a plus d'essence dans le réservoir alors le moteur s'éteint » est une proposition.

« Une proposition en mathématique (en logique) est un énoncé qui peut être vrai ou faux , mais pas les deux au même temps »

En effet, les propositions vérifient les principes suivants :

- a) Principe du tiers exclu : toute proposition est soit vraie soit fausse
- b) Principe de non -contradiction : toute proposition ne peut être à la fois vraie et fausse en même temps
- c) Principe d'identité : dans un même contexte, toute proposition garde sa valeur. Si on change de contexte, la proposition peut éventuellement changer de valeur de vérité.

Dans ce cas, la proposition est vraie (il existe des cas où une proposition peut être fausse : la phrase "Si c'est un triangle, alors il a quatre côtés" est une proposition fausse !). Cette proposition est composée de deux conditions : "il n'y a plus d'essence dans le réservoir » et « le moteur s'éteint »

Si	Condition 1	Alors	Condition 2
	il n'y a plus d'essence dans le réservoir		le moteur s'éteint

On appelle réciproque d'une proposition la phrase qu'on obtient en échangeant la place des deux conditions. Cela donne :

Si	Condition 1	Alors	Condition 2
	Le moteur s'éteint		Il n'y a plus d'essence dans le réservoir

Enfin, on appelle contraposée d'une proposition la phrase qu'on obtient en prenant la négation des deux conditions de la réciproque. Cela donne :

Si	Condition 1	Alors	Condition 2
	Le moteur ne s'éteint pas		Il y a de l'essence dans le réservoir

Pour chacune des propositions suivantes, rédigez sur une feuille annexe, sa réciproque et sa contraposée, et précisez si cette proposition, sa réciproque et sa contraposée sont vraies ou fausses :

- a) Si c'est une poule, alors elle pond des œufs.
- b) Si c'est un carré, alors il a quatre angles droits.
- c) Si il a quatre côtés, alors c'est un quadrilatère.
- d) Si il n'est pas vieux, alors il est jeune.
- e) Si $|AB| = |BC|$, alors B est le milieu de $[AC]$.
- f) Si $a = b$ alors Si $a^2 = b^2$

Petite fenêtre de logique

Le principe même du raisonnement mathématique est l'implication (propriété directe) : un fait en implique un autre, une hypothèse entraîne une conclusion.
Une propriété et sa réciproque ne sont pas toujours équivalentes.
Une propriété et sa contraposée sont équivalentes.
Supposons que la propriété P suivante soit toujours vraie: «Si je suis habillé en bleu alors je suis heureux. » La réciproque de la propriété P est: «Si je suis heureux alors je suis habillé en bleu. » Cette propriété n'est pas nécessairement vraie car il y a peut-être d'autres raisons d'être heureux.
La contraposée de la propriété P est: «Si je ne suis pas heureux alors je ne suis pas habillé en bleu. » Cette propriété est nécessairement vraie, car si j'étais habillé en bleu, je serais heureux, or je ne suis pas heureux, donc je ne peux pas être habillé en bleu.
La propriété «Si je suis habillé en bleu alors je suis heureux» n'est pas équivalente à « Si je ne suis pas habillé en bleu alors je ne suis pas heureux », bien qu'on confonde souvent leur sens par un raisonnement trop hâtif. Lorsqu'une propriété et sa réciproque sont simultanément vraies, on dit que la propriété est **une équivalence.**

Enoncez alors la réciproque et la contraposée du théorème de Pythagore :

g) La réciproque du théorème de Pythagore :

Si dans un triangle,
.....

h) La contraposée du théorème de Pythagore :

Si dans un triangle,
.....

1. Activité : Est-ce le même théorème ?

Regroupez les théorèmes qui vous paraissent vouloir dire la même chose, en coloriant de la même couleur les petits carrés des théorèmes qui vont ensemble.

- a) Si un triangle ABC est rectangle en A alors $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$.
- b) Si la somme des carrés des longueurs de deux côtés d'un triangle est égal au carré de la longueur du troisième côté, alors ce triangle est rectangle et a pour hypoténuse ce troisième côté.

- c) Si on sait que MNP est un triangle tel que $|MP|^2 + |MN|^2 = |PN|^2$ alors on peut dire que MNP est un triangle rectangle en M.
- d) Si l'on constate que $|BC|^2 \neq |AB|^2 + |AC|^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle en A.
- e) Si un triangle est rectangle alors la somme des aires des carrés construits sur les côtés de l'angle droit est égal à l'aire du carré construit sur l'hypoténuse.
- f) Si un triangle ABC vérifie $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$ alors il est rectangle en A.
- g) Dans un triangle rectangle, dont la longueur de l'hypoténuse est a et dont les longueurs des autres côtés sont b et c, on a l'égalité $a^2 = b^2 + c^2$
- h) Dans un triangle rectangle ABC où $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$, les deux côtés [AB] et [AC] sont perpendiculaires.
- i) Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des deux côtés de l'angle droit.
- j) Dans un triangle ABC tel que, $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$, l'angle BAC est droit.
- k) Si le carré de la longueur du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés alors ce triangle n'est pas rectangle.

2. Activité : Triangle, es-tu rectangle ?

Enrico, Léo et Laure ont rédigé des démonstrations pour des problèmes que le professeur leur a donnés. Celui-ci, au moment de la correction, leur reproche de ne pas avoir indiqué dans leur démonstration le théorème qu'ils utilisent.

Enrico, Léo et Laure en consultant leur livre et leur cahier trouvent les énoncés de théorèmes qui sont dans le tableau.

Peux-tu les aider à compléter leurs démonstrations en indiquant, pour chaque énoncé de théorème, la démonstration dans laquelle il peut servir.

PROBLÈME DE ENRICO ET DE LEO :

Un triangle ABC a des côtés de longueur : $|AB| = 3$, $|AC| = 5$ et $|BC| = 6$.

Ce triangle est-il rectangle en A ?

- DÉMONSTRATION DE JADE :

Calculons $|AB|^2 + |AC|^2$ et $|BC|^2$.

On obtient : $|AB|^2 + |AC|^2 = 9 + 25 = 34$ et $|BC|^2 = 36$.

On constate que $|AB|^2 + |AC|^2 \neq |BC|^2$

Donc le triangle n'est pas rectangle en A.

- DÉMONSTRATION DE LEO :

Supposons que le triangle ABC soit rectangle en A. D'après le théorème de Pythagore, on aurait $|AB|^2 + |AC|^2 = |BC|^2$

Or $|AB|^2 + |AC|^2 = 9 + 25 = 34$ et $|BC|^2 = 36$.

Il y a donc une contradiction.

On en déduit que le triangle ABC n'est pas rectangle en A.

PROBLÈME DE LAURE

Un triangle ABC a des côtés de longueur : $|AB| = 65$, $|AC| = 72$ et $|BC| = 97$.

Ce triangle est-il rectangle en A ?

- DÉMONSTRATION LAURE :

Calculons $|AB|^2 + |BC|^2$ et $|AC|^2$

On obtient : $|AB|^2 + |BC|^2 = 65^2 + 72^2 = 4225 + 5184 = 9409$ et $|AC|^2 = 9409$.

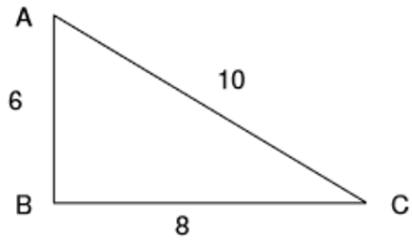
On constate que $|AB|^2 + |BC|^2 = |AC|^2$

Donc le triangle est rectangle en A.

	Enoncé du théorème	A qui peut servir le théorème ?
1	Si on sait que MNP est un triangle tel que : $ MP ^2 + MN ^2 = PN ^2$ alors on peut dire que MNP est triangle rectangle en M.	
2	Si un triangle ABC est rectangle en A alors $ AB ^2 + AC ^2 = BC ^2$	
3	Si la somme des carrés des longueurs de deux côtés d'un triangle est égal au carré de la longueur du troisième côté, alors ce triangle est rectangle et a pour hypoténuse ce troisième côté.	
4	Si l'on constate que $ BC ^2 + AB ^2 \neq AC ^2$, alors le triangle ABC n'est pas rectangle en B	
5	Dans un triangle MNP, rectangle en M et d'hypoténuse [PN], on a $ MP ^2 + MN ^2 = PN ^2$. Ce résultat est l'énoncé de Pythagore.	
6	Dans un triangle GAZ où $ GA ^2 + GZ ^2 = AZ ^2$, les deux côtés [GA] et [GZ] sont perpendiculaires.	
7	Dans un triangle rectangle, le carré de la longueur de l'hypoténuse est égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés.	
8	Si le carré de la longueur du plus grand côté n'est pas égal à la somme des carrés des longueurs des deux autres côtés, alors ce triangle n'est pas rectangle.	
9	Dans un triangle EAU tel que $ EA ^2 + EU ^2 = AU ^2$, l'angle \widehat{AEU} est droit.	

Exercices : réciproque ou contraposée du théorème de Pythagore

1. Les triangles suivants sont-ils rectangles ? Si oui, en quel sommet :



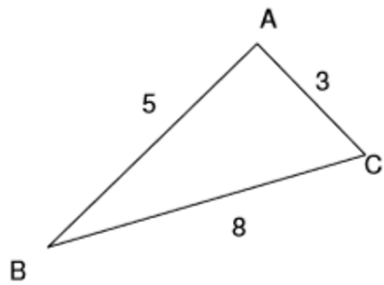
.....

.....

.....

.....

.....



.....

.....

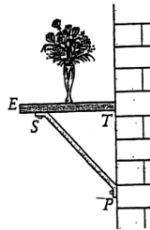
.....

.....

.....

2. L'étagère est-elle horizontale ? (On suppose le mur vertical).

$|ST| = 17,6 \text{ cm}$ $|TP| = 33 \text{ cm}$ $|SP| = 37,1 \text{ cm}$



3. On a dressé un mât qui s'élève exactement à 8,15 m du sol. Un tendeur de 9 m de long attaché à son sommet s'écarte de 4,05 m du pied du mât. Celui-ci est-il vertical ? Justifie

Réinvestissement : la quantification et les quantificateurs .
Thème 4 : Généralités sur les fonctions, fonctions usuelles et fonctions associées.

1. **Niveau** : 4ème secondaire

2. **Objectifs visés** :

Déterminer Algébriquement et à partir du graphe :

- le domaine, l'ensemble-image et les points d'intersection du graphique de cette fonction avec les axes.
- Réaliser une étude complète de fonction : tableau de signe, tableau de variation, extremum, points d'inflexion et asymptotes (uniquement à partir du graphique).

3. **Prérequis (matière vue en 3ème)**

À partir de graphiques de fonctions

- Rechercher le domaine, l'ensemble-image et les points d'intersection du graphique de cette fonction avec les axes
- Rechercher les points d'intersection des graphiques de deux fonctions
- Écrire les parties de \mathbb{R} où une fonction est positive, négative ou nulle et construire le tableau de signe correspondant
- Déterminer les parties de \mathbb{R} où une fonction est croissante ou décroissante.

4. **Notions logiques rencontrées** :

Quantification et quantificateurs existentiel et universel :

L'objectif est d' amener les élèves à comprendre la notion de quantification en utilisant des exemples concrets :

- Présenter aux élèves des exemples simples de phrases quantifiées,
- Demander aux élèves d'explicitier le sens de ces phrases et de les reformuler en utilisant un langage mathématique plus précis.
- Introduire les symboles mathématiques pour les quantificateurs universels ("pour tout") et existentiels ("il existe").

- Faire pratiquer les élèves en leur proposant d'autres exemples de phrases quantifiées à analyser et à reformuler.
- Faire prendre conscience aux élèves des ambiguïtés des quantificateurs implicites.
- Déterminer la vérité ou la fausseté d'une affirmation qui contient, ou pas, des quantificateurs.

5. Commentaires :

Dans le programme de mathématiques de quatrième année secondaire, les quantificateurs font principalement leur apparition de manière explicite dans certaines définitions, notamment celles relatives aux fonctions. Par exemple, dans les définitions de fonctions croissantes et décroissantes, les quantificateurs sont souvent utilisés pour exprimer formellement les propriétés de ces fonctions en termes d'implications universelles ou existentielles. En troisième année, les mêmes concepts sont abordés, mais l'utilisation des quantificateurs est souvent évitée. À la place, des définitions plus naïves ou intuitives sont privilégiées. Par exemple, pour définir une fonction croissante, on peut recourir à une formulation telle que : « lorsque la valeur de x augmente, la valeur correspondante de $f(x)$ augmente également ».

Il serait judicieux de planifier une série d'activités en classe afin d'introduire progressivement les notions de quantificateurs avant d'aborder la définition des fonctions croissantes et décroissantes, ou toute autre définition formelle nécessitant l'utilisation des quantificateurs. Cette approche permettrait aux élèves de se familiariser avec ces concepts de manière progressive, évitant ainsi les difficultés certaines rencontrées lors de leur introduction directe dans le contexte des fonctions.

4.1 ACTIVITE : Où construire le pont ?

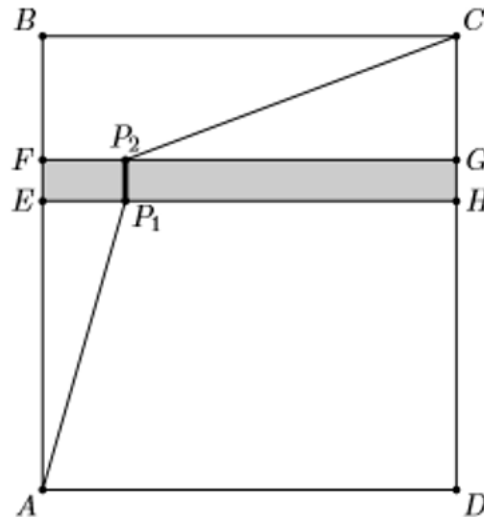
1. Présentation :



ABCD est un parc rectangulaire tel que :

$|AD| = 10$ mètres et

$|AB| = 11$ mètres.



Il passe un cours d'eau à travers ce parc.

On le matérialise par le rectangle EFGH, tel que $|EH| = 10$ mètres, $|EF| = 1$ mètre et $|AE| = 7$ mètres.

2. Votre mission

Déterminer où construire le pont pour que le trajet entre les points A et C soit le plus court possible. On suppose que l'on traverse le pont en ligne droite (selon le segment $[P_1P_2]$).

3. Déroulement :

- Partie 1

On note L la longueur du trajet qui sépare A et C ,en traversant le pont.
On a donc $L = \dots\dots\dots$

a) Étude d'un cas particulier :

Calculer la longueur du trajet entre A et C lorsque P1 est en E (faire un dessin à main levée).

b) De quoi dépend la longueur L ?

Nous dirons que L varie en fonction de $\dots\dots\dots$

c) Dans la suite l'activité, on notera $|EP_1| = x$.

Choisissons d'appeler $\dots\dots\dots$ la fonction qui $\dots\dots\dots$

d) À quel intervalle le nombre x appartient-il ou quelles sont les valeurs que peut prendre x ?

On dit que le $Dom_f = \dots\dots\dots$

- i. Calculer la longueur du segment $[AP_1]$ en fonction de x.
- ii. Déterminer la longueur L du trajet entre A et C en fonction de x.

- Partie 2

On désire désormais connaître quelle est la valeur de x pour laquelle L est le plus petit possible !

a) En vous aidant de la calculatrice, compléter le tableau de valeurs ci-dessous.

x (en m)	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$f(x) = L$ (en m)											

On dit queest.....de 1, et on note $f(1)=$

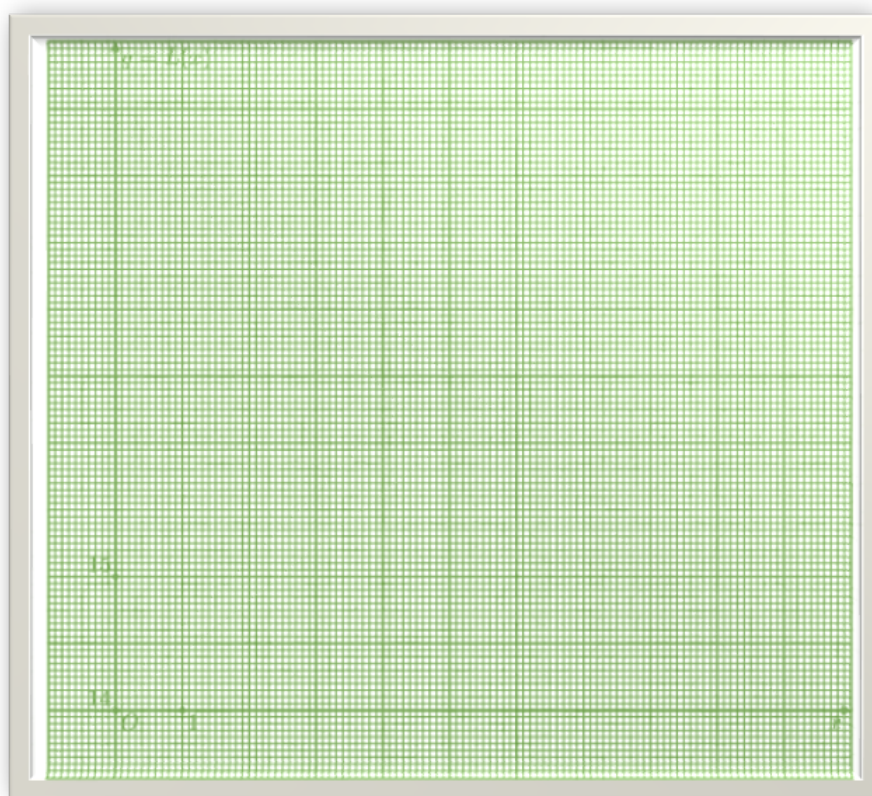
On dit queest.....de 2, et on note $f(2)=$

b) Pour quelle(s) valeur(s) de x , la distance L vaut $4+\sqrt{59}$

On dit quede $4+\sqrt{59}$

c) Placer les points de coordonnées $(x,f(x))$ dans le repère de la page suivante (attention aux unités sur les axes!!).

d) Entre quelles valeurs de x la longueur L semble-t-elle être la plus petite ?



Représentation graphique de L en fonction de x

4. Compléter ce nouveau tableau pour affiner vos recherches.

x (en m)											
L = f(x) (en m)											

Compléter votre représentation graphique avec ces nouveaux points et les relier afin d'avoir la représentation graphique de la fonction f.

- Partie 3 : Tableau de variations

a) Graphiquement, pour quelle valeur de x (que nous noterons x_0) le trajet entre A et C est-il de longueur minimale, et quelle est cette longueur ?
.....

1) Compléter :

A. Pour tout $x \in [0; x_0]$: si x augmente, alors f(x)

On dit que la fonction f est..... sur l'intervalle $[0; \alpha]$: les évolutions de x et f(x) s'effectuent dans des sens

Comment pourrait-on décrire l'allure de la représentation graphique de L lorsque x appartient à $[0; x_0]$?.....

Prendre au hasard sur l'axe des abscisses deux nombres a et b compris entre 0 et x_0 , et tels que $a < b$. Comparer alors graphiquement f(a) et f(b).

B. Pour tout $x \in [x_0; 10]$: si x augmente, alors f(x)

On dit que la fonction f est..... sur l'intervalle $[0; x_0]$: les évolutions de x et f(x) s'effectuent dans

Comment pourrait-on décrire l'allure de la représentation graphique de L lorsque x appartient à $[x_0; 10]$?.....

Prendre au hasard sur l'axe des abscisses deux nombres a et b compris entre 0 et α , et tels que $a < b$. Comparer alors graphiquement f(a) et f(b).

2) Complétez le tableau de variations suivant :

x	0	10
Variation de L(x)		

La fonction f est..... si $x \in [0; x_0]$
 puis si $x \in [x_0; 10]$. Ainsi, la fonction f ad-
 met un minimum lorsque x vautet ce minimum
 vaut.....

5. Déterminer la valeur de vérité des phrases suivantes :

- La fonction $L(x)$ est croissante sur l'intervalle $[x_0; 10]$ car Il existe 2 réels x_1 et x_2 dans $[x_0; 10]$ tels que $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.
- La fonction $L(x)$ est décroissante sur l'intervalle $[0; x_0]$ car pour tous réels x_1 et x_2 dans $[0; x_0] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.
- La fonction $L(x)$ est décroissante sur l'intervalle $[0; x_0]$ car pour tous réels x_1 et x_2 dans $[0; x_0] : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

4.2 Bilan de l'activité : Notion de fonction et vocabulaire.

1. Définition et vocabulaire

Dans l'exemple précédent, la distance L variait en fonction de la position du point P_1 (ou de la longueur x)

Chaque fois qu'une valeur y dépend d'une valeur x , on dit que la première est une fonction de la seconde.

Définition 1 :

Une fonction est une relation qui fait correspondre un élément donné d'un ensemble de départ (x) à **au maximum un élément** d'un ensemble d'arrivée (y) (donc à 0 ou 1 élément).

On note alors : $y = f(x)$.

Cela se traduit, en symbole, par :

$$f : X \rightarrow Y$$

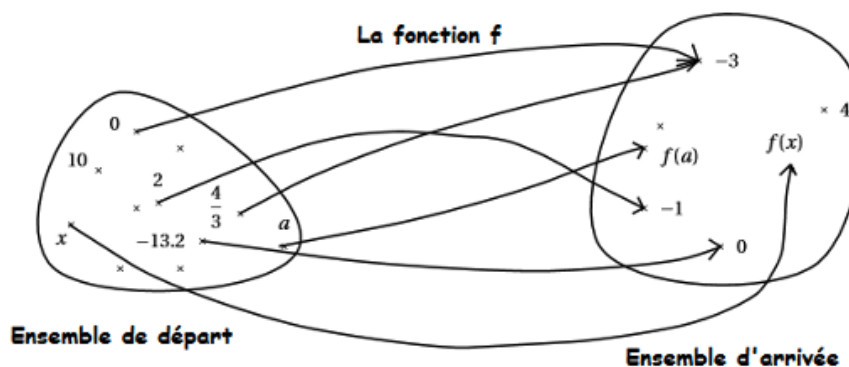
« f est définie d'un ensemble X dans un autre ensemble Y »

$$x \rightarrow y = f(x)$$

« à x on associe y tel que y est égal à f de x »

On dit alors que : y est l'**image** de x par la fonction f , x est un **antécédent** de y par la fonction f .

Illustration :



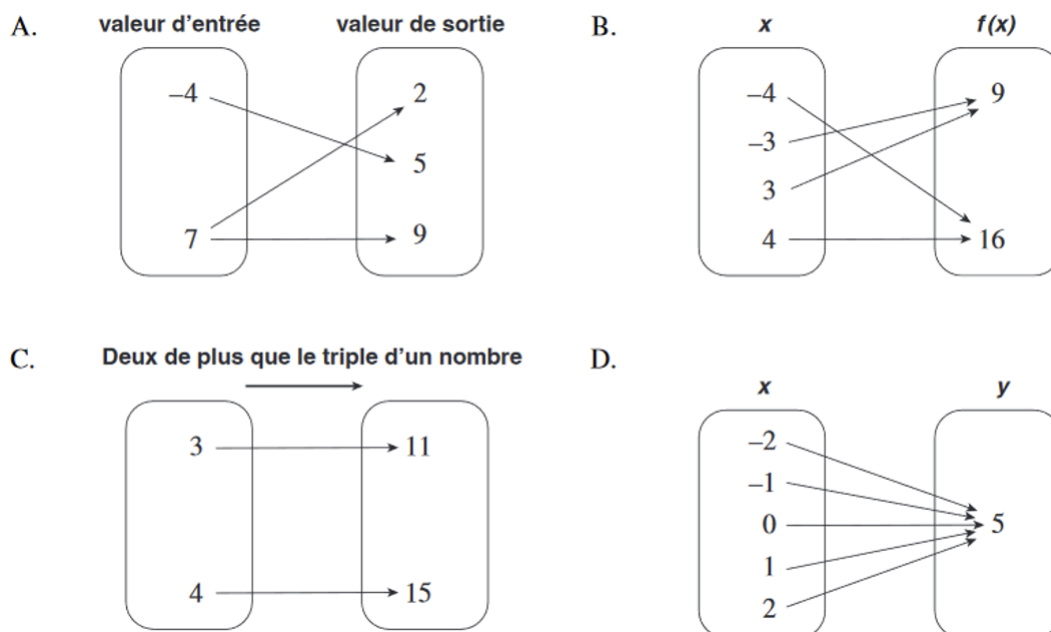
Ainsi, $f(2) = \dots\dots\dots$, $f(-13.2) = \dots\dots\dots$, $f(0) = \dots\dots\dots$, $f(\frac{4}{3}) = \dots\dots\dots$ et $f(10) = \dots\dots\dots$



Attention !

On ne peut pas faire partir deux flèches d'un même nombre de l'ensemble de départ.

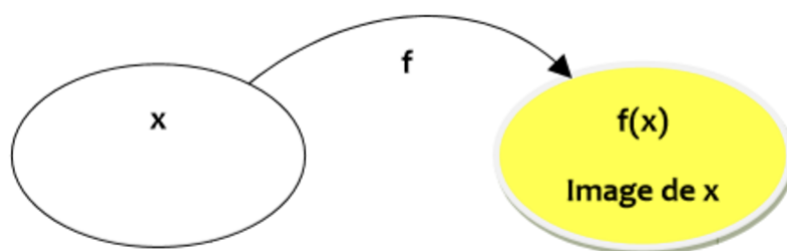
Exemples : Parmi les relations suivantes, laquelle n'est pas une fonction ? Justifie tes réponses , en utilisant les quantificateurs : « Pour tout... » ou « il existe... »



2. L'image.

Le nombre $f(x)$ est l'image de x

C'est le résultat $f(x)$ que donne la fonction f pour une certaine valeur de x .



NB : On appelle l'ordonnée à l'origine de la fonction f , l'image de 0 par cette fonction. Sur un graphe, on peut lire l'ordonnée à l'origine en recherchant l'ordonnée du point du graphe se trouvant sur l'axe des ordonnées. C'est-à-dire $f(0)$.

a) Voici quelques exemples pour calculer une image. Prenons les fonctions f et h définies par :

$$f(x) = 3x + 4 \quad ; \quad h(x) = \frac{2x - 5}{x + 3}$$

Si l'on cherche l'image de 2 et -1 par la fonction f , on remplace x par les valeurs considérées :

$f(2) = \dots\dots\dots$ et donc $f(2) = \dots\dots\dots$

$f(-1) = \dots\dots\dots$ et donc $f(-1) = \dots\dots\dots$

Enfin, calculons les images de 0 et -3 par la fonction h :

$h(0) = \dots\dots\dots$

$h(-3) = \dots\dots\dots$

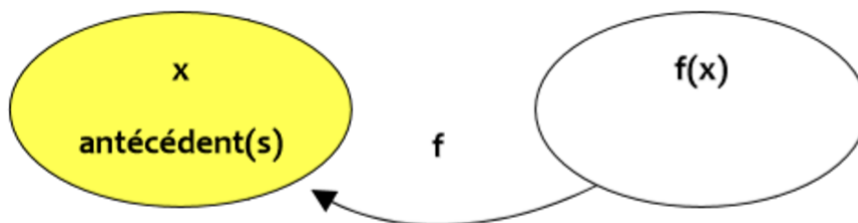
b) Soit f la fonction carré définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

Pour chacune des phrases suivantes, reformuler en faisant apparaître les quantificateurs appropriés, puis indiquer si elle est vraie ou fausse. Justifier la réponse.

- i. Les nombres réels ont exactement une image par f .
- ii. Au moins un nombre réel n'a pas un antécédent par f .
- iii. Les nombres réels ont au plus un antécédent par f .
- iv. Les nombres réels ont au moins un antécédent par f .

3. L'antécédent

Le ou le(s) l'antécédent(s) du nombre y sont le ou les nombres x tels que $f(x)=y$.



4. Domaine de définition.

Calculer l'image de 6 pour les fonctions suivantes. Cela est-il toujours possible ? Pourquoi ?

$f(x) = \frac{2x+3}{2x}$	$g(x) = \sqrt{1-x}$
$f(x) = 2x^2 + 5x - 7$	$g(x) = \sqrt[3]{1-x}$
$k(x) = \sqrt{\frac{x+10}{4-x}}$	$m(x) = \frac{x^2-1}{x-6}$

Définition :

Soit f une fonction.

L'ensemble des réels x qui ont une image par f constitue l'ensemble de définition de la fonction f , généralement noté Dom_f .

Quand une fonction f est donnée par une formule, le domaine de définition de f est l'ensemble des nombres x dont l'image $f(x)$ peut être calculée par cette formule, il faut donc déterminer les conditions d'existence.

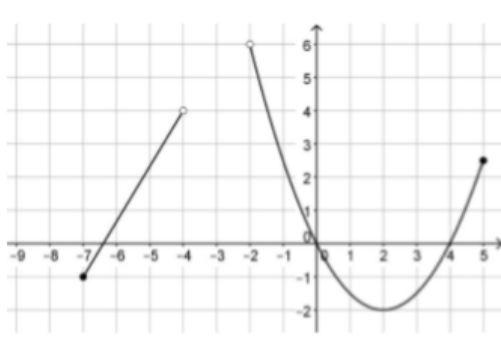
Quand une fonction est donnée par son graphique, il faut repérer sur l'axe des x , tous les réels qui ont une image.

À partir de la formule : Lorsque l'on cherche l'ensemble de définition, on se souviendra des commandements suivants :

- Il est interdit de diviser par zéro.
- Il est interdit de prendre la racine carrée d'un nombre négatif.

<p>Exemple 1 :</p> $h(x) = \frac{2x-5}{x+3}$ <p>$h(x)$ existe si donc si</p>	$Dom_h = \dots\dots\dots$
<p>Exemple 2:</p> $f(x) = \frac{3x}{x-2}$ <p>$f(x)$ existe si donc si</p>	$Dom_f = \dots\dots\dots$
<p>Exemple 3:</p> $g(x) = \sqrt{3 - 2x}$ <p>$g(x)$ existe si donc si</p>	$Dom_g = \dots\dots\dots$
<p>Exemple 4:</p> $k(x) = \frac{2x-1}{\sqrt{5-2x}}$ <p>$k(x)$ existe si donc si</p>	$Dom_k = \dots\dots\dots$

À partir du graphique : Pour trouver le domaine de la fonction f , on parcourt l'axe des x de gauche à droite et on repère les x qui ont une image. Astuce : Pour déterminer si x est dans le domaine de définition il suffit de tracer la droite verticale passant par x est vérifier si elle intersecte le graphe ;



$Dom_f =$

1. Ensemble image

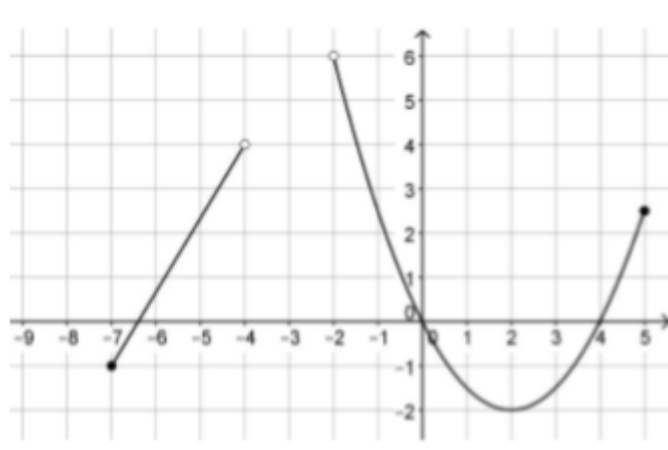
L'ensemble image d'une fonction f , notée Im_f est l'ensemble des images $f(x)$ obtenues lorsque x parcourt le domaine de définition.

Pour déterminer l'ensemble-image à partir de son graphique, il faut repérer, sur l'axe des y , l'ensemble des réels qui ont au moins un antécédent.

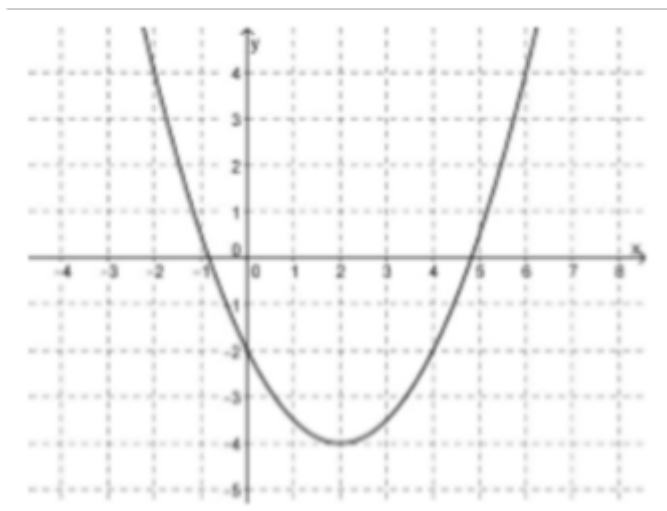
Astuce : pour déterminer si un y est dans l'ensemble image, il suffit de tracer une droite horizontale passant par cet y et vérifier si elle touche le graphe. Dans le cas affirmatif, les abscisses des points d'intersection donnent les antécédents de y .

Exemples :

Pour les fonctions représentées ci-dessous, on détermine l'ensemble image en parcourant l'axe des y de bas en haut et en repérant les valeurs qui ont au moins un antécédent :



$Im_f =$



$$lm_f =$$

2. Racine(s) d'une fonction

Les racines d'une fonction sont les réels dont l'image par f est nulle.
 Les racines sont donc les antécédents de 0.

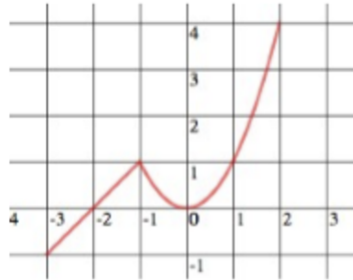
Pour trouver graphiquement les racines, il faut déterminer l'abscisse des points d'intersection du graphe de la fonction avec l'axe des abscisses

Pour déterminer analytiquement les racines d'une fonction f , il faut résoudre l'équation $f(x) = 0$

Exemples :

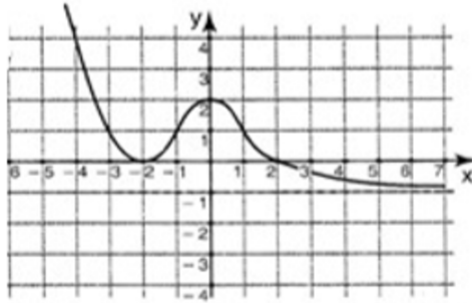
a) graphe cartésien de $f(x)$:

1)



Les racines sont :

2)



Les racines sont :

b) expression analytique de g :

1) $g(x) = x^2 - 4$

Les racines sont :

2) $f(x) = \sqrt{5 - 3x}$

Les racines sont :

3. Signe et tableaux de signes

Une fonction f est positive sur un intervalle si, pour toutes les valeurs de x de cet intervalle, les images de x sont positives.

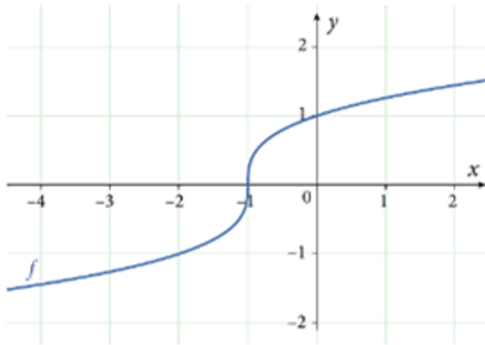
Une fonction f est négative sur un intervalle si, pour toutes les valeurs de x de cet intervalle, les images de x sont négatives.

Le tableau de signe d'une fonction permet d'indiquer clairement les parties du domaine de cette fonction où elle est positive ou négative.

Il indique également les valeurs des racines.

Exemples : réaliser le tableau de signe des fonctions $f(x)$ et $g(x)$ définies ci-dessous

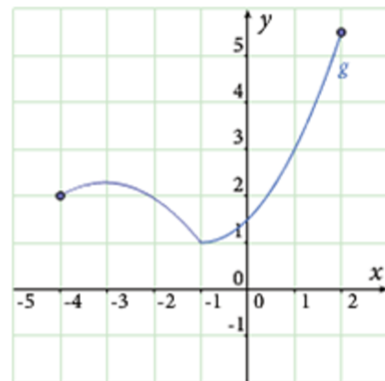
x	
$f(x)$	



Ici on pourra facilement trouver la résolution des équations :

- 1) $f(x) > 0 \rightarrow x \in \dots \dots \dots$
- 2) $f(x) \geq 0 \rightarrow x \in \dots \dots \dots$
- 3) $f(x) < 0 \rightarrow x \in \dots \dots \dots$
- 4) $f(x) \leq 0 \rightarrow x \in \dots \dots \dots$

x	
$f(x)$	



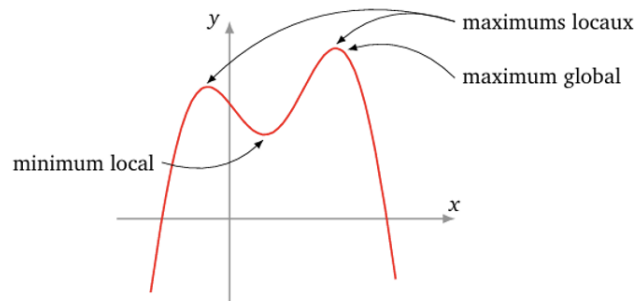
Ici on pourra facilement trouver la résolution des équations :

- 1) $f(x) > 0 \rightarrow x \in \dots \dots \dots$
- 2) $f(x) \geq 0 \rightarrow x \in \dots \dots \dots$
- 3) $f(x) < 0 \rightarrow x \in \dots \dots \dots$
- 4) $f(x) \leq 0 \rightarrow x \in \dots \dots \dots$

4. Les extrema : Maximum et minimum d'une fonction

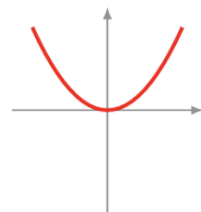
Soit une fonction $f : A \rightarrow B$

- f admet un **maximum local** en $x_0 \in A$ s'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que : pour tout $x \in I$ $f(x) \leq f(x_0)$.
- f admet un **minimum local** en $x_0 \in A$ s'il existe un intervalle ouvert I contenant x_0 tel que : pour tout $x \in I$ $f(x) \geq f(x_0)$.
- f admet un **extremum local** en $x_0 \in A$ si f admet un maximum local ou bien un minimum local en ce point.

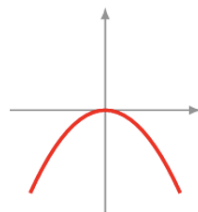


- f admet un maximum global en $x_0 \in A$, si pour tout $x \in A$ $f(x) \leq f(x_0)$.
- f admet un minimum global en $x_0 \in A$ si pour tout $x \in A$ $f(x) \geq f(x_0)$.
- f admet un extremum global en $x_0 \in A$ si f admet un maximum global ou bien un minimum global en ce point.

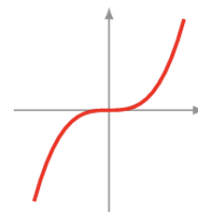
Exemple : Déterminez les extrema des 3 fonctions suivantes



$$f(x) = x^2$$



$$f(x) = -x^2$$

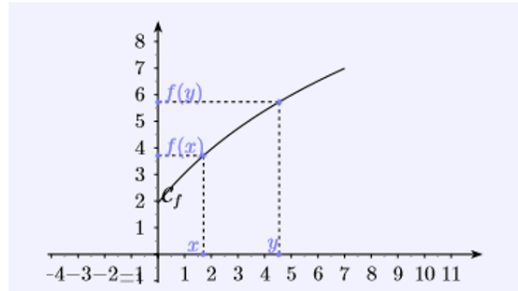


$$f(x) = x^3$$

5. Variation d'une fonction

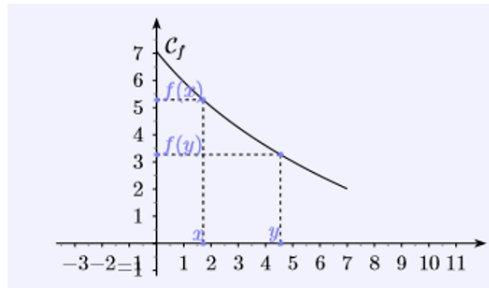
Soit f une fonction définie sur un intervalle I de \mathbb{R} .

↪ Dire que f est croissante (respectivement strictement croissante) sur I signifie que : (..... x et y de I , si $x < y$ alors $f(x) \leq f(y)$)



↪ Dire que f est décroissante (respectivement strictement décroissante) sur I signifie que : **Pour tout réels x et y de I , si $x < y$ alors $f(x) \geq f(y)$**

(..... $x < y, \Rightarrow f(x) > f(y)$).



↪ Dire que f est constante sur I signifie que : (..... x et y , si $x < y \Rightarrow f(x) = f(y)$)

- Remarque :
1. Une fonction croissante conserve l'ordre : si x augmente, $f(x)$ augmente, si x diminue, $f(x)$ diminue.
 2. Une fonction décroissante inverse l'ordre : si x augmente, $f(x)$ diminue, si x diminue, $f(x)$ augmente.

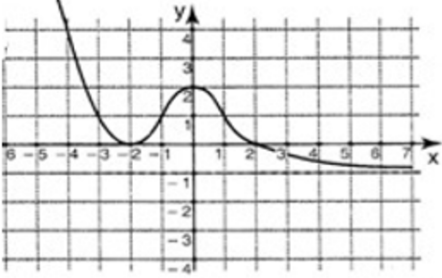
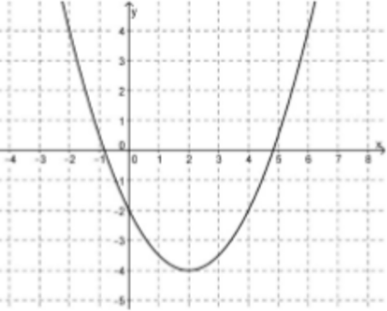
Tableau de variation

Un tableau de variation d'une fonction permet d'indiquer clairement les par-

ties du domaine de cette fonction où elle est croissante ou décroissante.

Il indique également l'emplacement et les valeurs des extrema (minimum ou maximum) globaux ou locaux.

a) Exemples :

	<p>Tableau de variation :</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">$f(x)$</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black;"></td> </tr> </tbody> </table>	x		$f(x)$	
x					
$f(x)$					
	<p>Tableau de variation :</p> <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tbody> <tr> <td style="padding: 5px;">x</td> <td style="border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black; width: 20px;"></td> </tr> <tr> <td style="border-top: 1px solid black; padding: 5px;">$f(x)$</td> <td style="border-top: 1px solid black; border-left: 1px solid black; border-right: 1px solid black;"></td> </tr> </tbody> </table>	x		$f(x)$	
x					
$f(x)$					

b) Le tableau de variation ci-contre est celui d'une fonction f définie sur l'intervalle $[-3 ; 3]$.

En exploitant les informations données, justifier pour chacune des propriétés suivantes, si elle est vraie ou fausse.

x	-3	-1	3
$f(x)$	-5	2	-2

- i. Il existe un nombre réel de l'intervalle $[-3 ; 3]$ qui a une image par f strictement inférieure à 0.
- ii. Tous les nombres réels de l'intervalle $[-3 ; 3]$ ont une image par f négative.
- iii. Tous les nombres réels de l'intervalle $[-3 ; 3]$ ont une image par f strictement inférieure à 3.

6. Parité d'une fonction:

Définitions :

Une fonction est paire si, pour tout x de son domaine de définition, l'image du nombre x est égale à l'image du nombre $-x$.
 On dit qu'une fonction est paire si et seulement si $f(x) = f(-x)$ pour tout x de son domaine de définition. (en langage formel :)
 Graphiquement, cela implique qu'une fonction paire possède l'axe des ordonnées comme axe de symétrie.

Une fonction est impaire si, pour tout x de son domaine de définition, l'image du nombre x est opposée à l'image du nombre $-x$.
 On dit qu'une fonction est impaire si et seulement si $f(x) = -f(-x)$ pour tout x de son domaine de définition. (en langage formel :)
 Graphiquement, cela implique qu'une fonction impaire possède l'origine comme centre de symétrie.

Exemples

Complète le tableau de valeurs donné pour les deux fonctions suivantes :

$$f(x) = x^2$$

$$g(x) = x^3$$

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
f(x)							

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
g(x)							

Quelles sont tes observations ?

Trace leur graphe :

$$f(x) = x^2$$



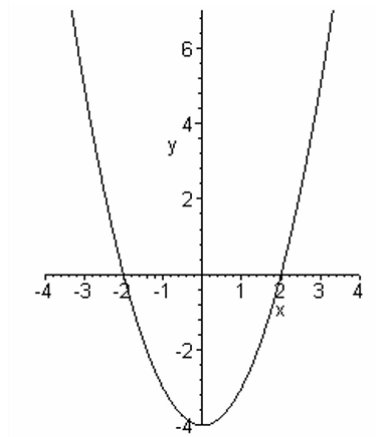
$$g(x) = x^3$$



Quelles sont tes observations ?

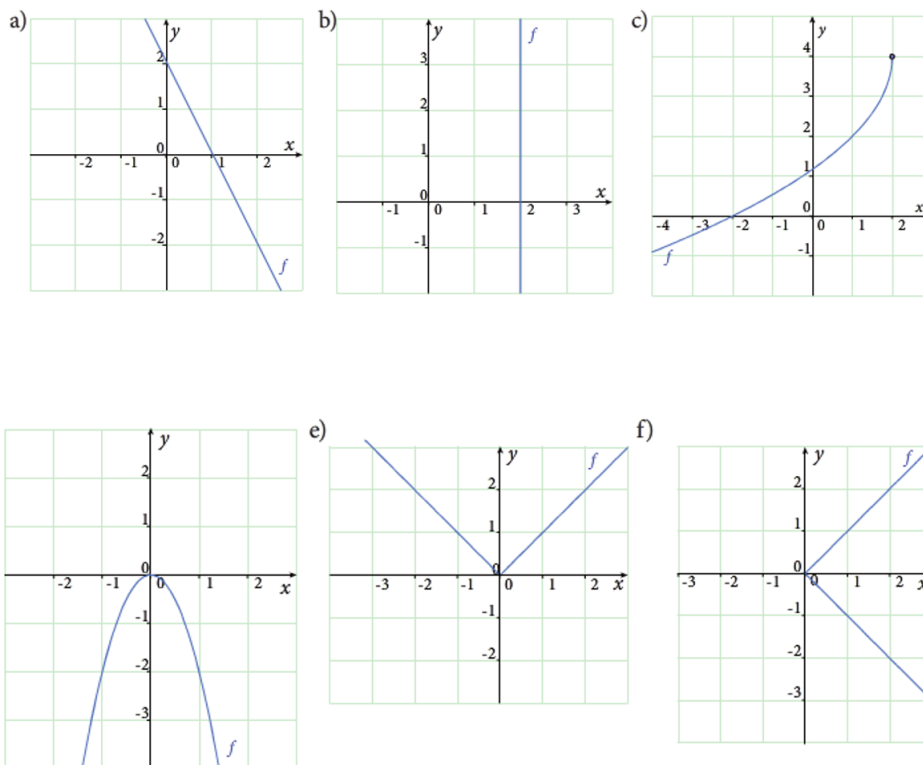
7. Exercices :

- 1) Reformuler les énoncés suivants en faisant apparaître les quantifications. (« pour tout... » ou « il existe... »)
 - Soit f la fonction définie sur \mathbb{R} par $f(x) = 2x + 5$.
 - L'équation $f(x) = 2x + 5$ a-t-elle des solutions ?
 - Résoudre l'équation $f(x) = 2x + 5$.
- 2) La courbe ci-contre représente la fonction f définie sur \mathbb{R} , $f : x \mapsto x^2 - 4$.

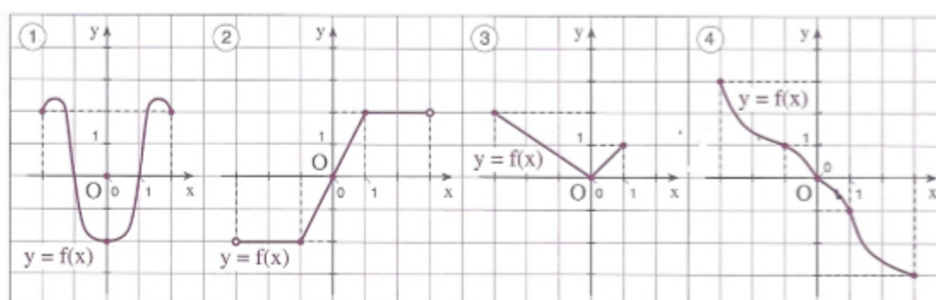


- Existe-t-il un nombre qui a pour image 3 par f ?
- Existe-t-il un nombre qui a pour image -4 par f ?
- Existe-t-il un nombre qui a pour image -6 par f ?

- 3) Pour chacune des courbes ci-dessous, indiquer si c'est celle d'une fonction. Justifie ton choix (utilise dans ta justification un des quantificateurs : « pour tout ... » ou « il existe... »)



- 4) Détermine le domaine de définition et l'ensemble image des fonctions suivantes et indique-le avec la notation appropriée :



5) Associer chaque fonction à son ensemble de définition :

$f : x \mapsto \frac{1}{x+5}$	•	•	$]5 ; +\infty[$
$g : x \mapsto (x-5)^2$	•	•	$]-\infty ; -5[\cup]-5 ; +\infty[$
$h : x \mapsto \frac{1}{x-5}$	•	•	$]-\infty ; +\infty[$
$k : x \mapsto \sqrt{x-5}$	•	•	$]5 ; +\infty[$
$l : x \mapsto \frac{1}{x^2-5}$	•	•	$]-\infty ; 5[\cup]5 ; +\infty[$
$m : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{x-5}}$	•	•	$]-\infty ; -\sqrt{5}[\cup]-\sqrt{5} ; \sqrt{5}[\cup]\sqrt{5} ; +\infty[$

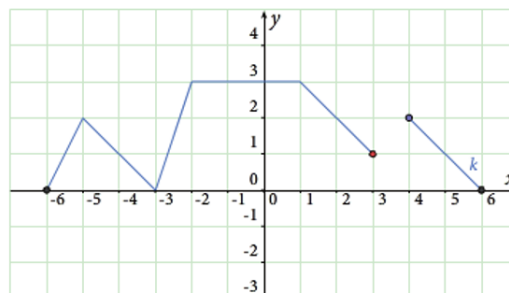
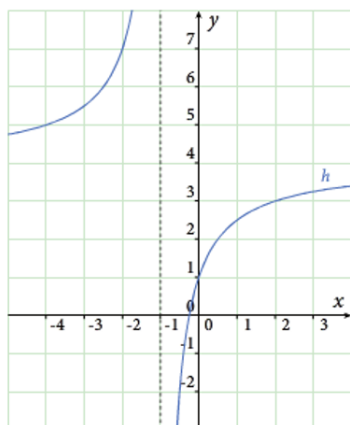
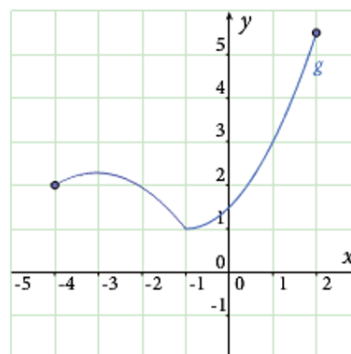
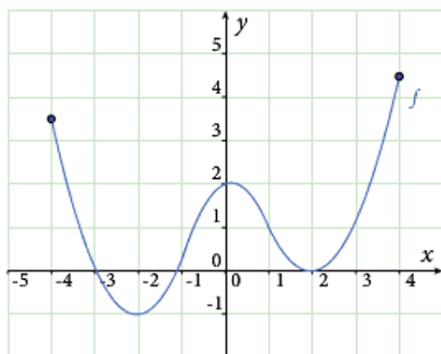
6) Dans chaque cas, déterminer l'ensemble de définition de la fonction f :

$f : x \mapsto \frac{1}{2x} + 3$ $D_f =$	$f : x \mapsto \frac{2}{x+1}$ $D_f =$	$f : x \mapsto \frac{x+1}{2}$ $D_f =$	$f : x \mapsto \frac{1}{x^2+5}$ $D_f =$
$f : x \mapsto \sqrt{2x+1}$ $D_f =$	$f : x \mapsto \frac{x+2}{x-3}$ $D_f =$	$f : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2x+1}}$ $D_f =$	$f : x \mapsto \frac{x-3}{x+2}$ $D_f =$

7) Pour les fonctions suivantes, détermine, par calcul, la ou les racines.

- | | | |
|-----------------------------|-----------------------------|--------------------------------|
| a) $f(x) = 4x + 2$ | b) $f(x) = \frac{3x+3}{5}$ | c) $f(x) = \frac{3}{7} + 2x$ |
| d) $f(x) = x^2$ | e) $f(x) = x^2 - 9$ | f) $f(x) = x^2 + 3$ |
| g) $f(x) = \frac{1}{x} + 4$ | h) $f(x) = \frac{1}{x+2}$ | i) $f(x) = \frac{1}{x+3} - 4$ |
| j) $f(x) = x^3$ | k) $f(x) = x^3 - 8$ | l) $f(x) = x^3 + 27$ |
| m) $f(x) = \sqrt{x}$ | n) $f(x) = \sqrt{x+3}$ | o) $f(x) = \sqrt{x} - 4$ |
| p) $f(x) = \sqrt[3]{x}$ | q) $f(x) = \sqrt[3]{x} - 8$ | r) $f(x) = \sqrt[3]{x+1} - 27$ |

8) Dresser le tableau de variation et de signes de chacune des fonctions dont la représentation graphique est donnée ci-dessous :



9) Exprimer les propriétés suivantes à l'aide de quantificateurs (f étant une fonction réelle) :

- L'équation $f(x) = 0$ n'a pas de solution.
- La fonction f est constante.
- Tout réel a (au moins) un antécédent par f.
- La fonction f ne prend pas de valeur négative.
- Tout réel a (au moins) deux antécédents par f.
- La fonction f ne prend jamais deux fois la même valeur.

- 10) On considère f une fonction définie sur l'intervalle $[0; +\infty[$ pour laquelle on ne connaît pas son expression. Cependant on est intéressé à tracer une possible courbe représentative.

Partie A

Les affirmations suivantes sont des propriétés de la fonction f . Reformuler chaque affirmation avec les quantificateurs appropriés.

- a) L'équation $f(x) = 5$ a au moins deux solutions dans l'intervalle $[0;3]$.
 x_1 et x_2 (distincts) dans l'intervalle $[0; 3]$ tels que $f(x_1) = f(x_2) = 5$.
- b) La fonction f est croissante sur l'intervalle $[3;7]$.
 a et b dans l'intervalle $[3; 7]$, si $a < b$ alors $f(a) < f(b)$.
- c) Un élément de l'ensemble $[7; +\infty[$ a comme image par la fonction f un nombre négatif.
 x dans l'intervalle $[7; +\infty[$ tel que $f(x) < 0$.

Partie B

Fournissez une représentation possible de la fonction f en utilisant les affirmations précédentes. Notez qu'il peut y avoir plusieurs réponses correctes.

- 11) On donne le tableau de variation d'une fonction f définie sur $[-8; 1]$:
- a) Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
- f est croissante sur $[-8; 1]$
 - f est décroissante sur $[-8; 1]$
 - $f(-6)$ est plus grande que $f(-2)$. . .
 - On ne peut pas comparer $f(-2)$ et $f(0)$. . .

x	-8	-1	1
f(x)	2	5	-3

- b) Quelle est la négation de la proposition : « f est croissante sur l'intervalle $[-8; 1]$ ».

c) Donner la définition quantifiée de : « f est croissante sur l'intervalle $[8; 1]$ ».

d) Donner la définition quantifiée de la négation de : « f est croissante sur l'intervalle $[-8; 1]$ ».

12) Soit la fonction f définie sur \mathbb{R} et c un nombre réel. [8]

a) Associer à chacune des propositions A_1 et A_2 une proposition équivalente parmi les propositions de B_1 à B_6 . Il peut y avoir plusieurs réponses possibles.

A_1 : **Aucun réel n'a pour image c par f .**

A_2 : **L'équation $f(x) = c$ d'inconnue réelle x a au moins une solution.**

B_1 : Pour tout réel x , $f(x) = c$

B_2 : Il existe au moins un réel x tel que $f(x) = c$.

B_3 : Il n'existe pas de réel x tel que $f(x) = c$.

B_4 : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \neq c$.

B_5 : $\exists x \in \mathbb{R}, f(x) \neq c$

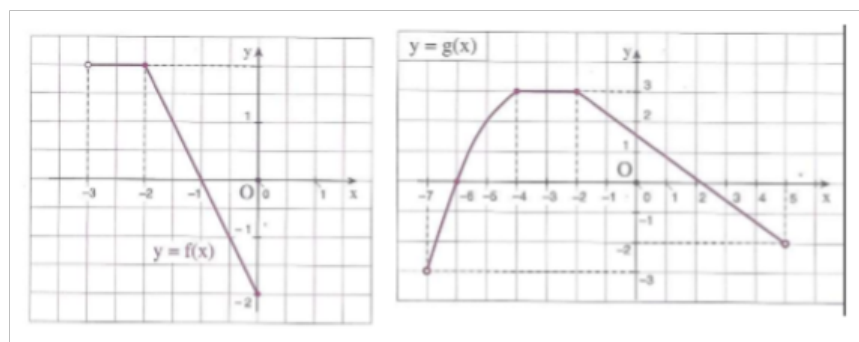
B_6 : $\nexists x \in \mathbb{R}$ tel que $f(x) \neq c$

b) Ecrire la négation de la proposition suivante :

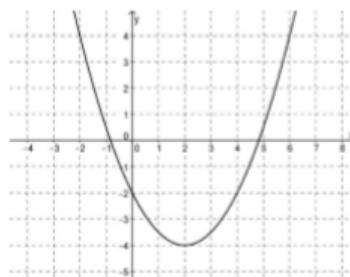
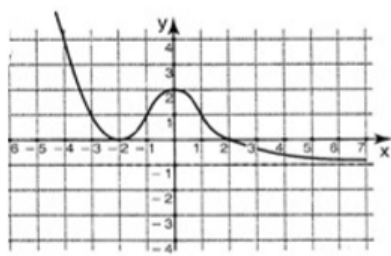
« Tous les réels ont une image par f positive ou nulle »

13) Pour les fonctions représentées, résoudre les inéquations demandées. Pour ce faire, dresser dans un premier temps leur tableau de signes.

a) résoudre $f(x) > 0$

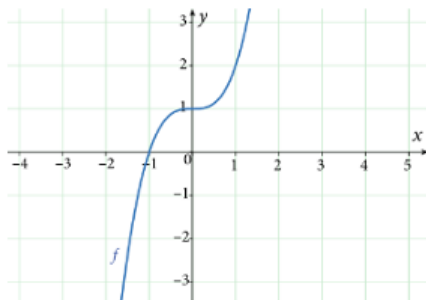


b) résoudre $f(x) \leq 0$

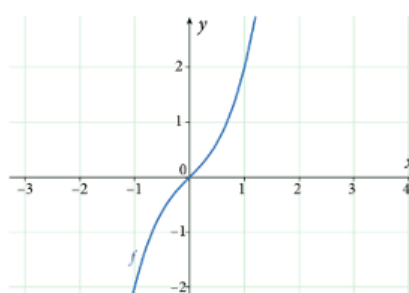


14) Déterminer si les fonctions suivantes sont paires, impaires ou quelconques. Justifier votre réponse **algébriquement** et **géométriquement**.

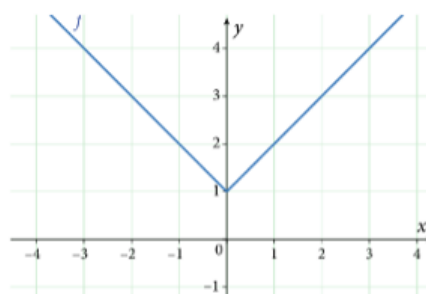
1. $f(x) = x^3 + 1$



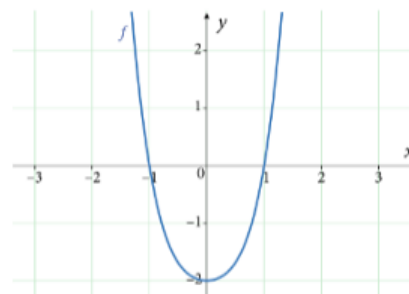
4. $f(x) = x^3 + x$



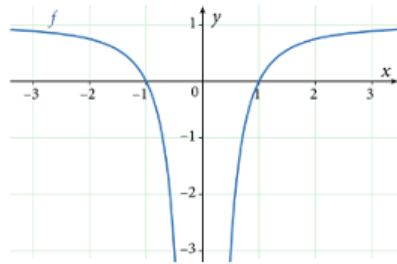
2. $f(x) = |x| + 1$



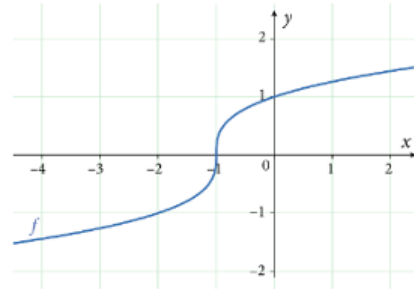
5. $f(x) = x^4 + x^2 - 2$



3. $f(x) = \frac{x^3 - x}{x^3}$



6. $f(x) = \sqrt[3]{x+1}$



15) Compléter le tableau de variation suivant sachant que f est paire :

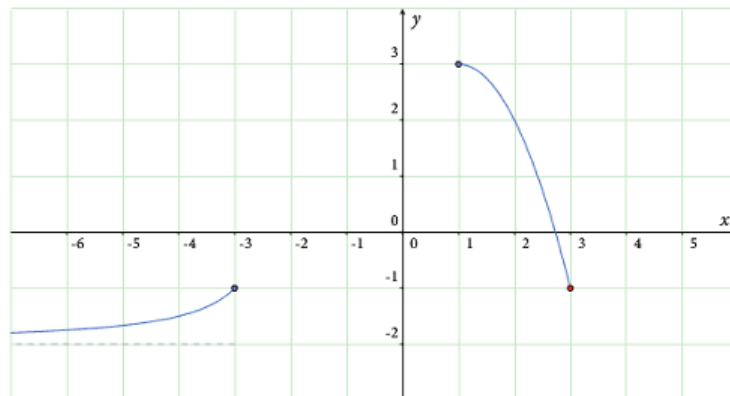
x		0	3	5		
$f(x)$		32	↘	0	↗	$\sqrt{2}$

16) Compléter le tableau de variation suivant sachant que f est impaire :

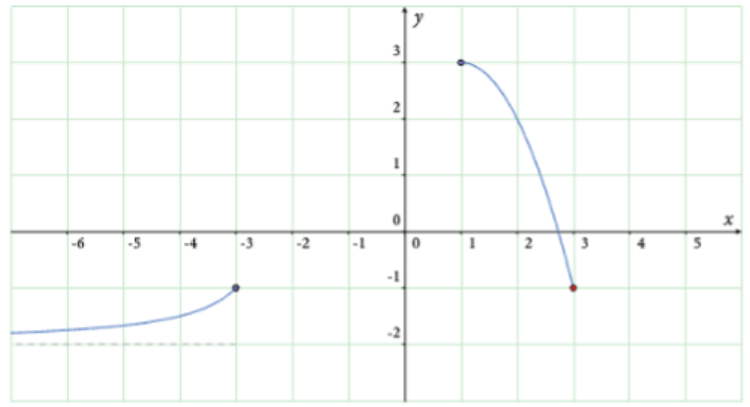
x		0	3	5		
$f(x)$		0	↘	-12	↗	$\sqrt{2}$

17) Compléter le graphique de la fonction suivante sachant que celle-ci est :

a) Paire :

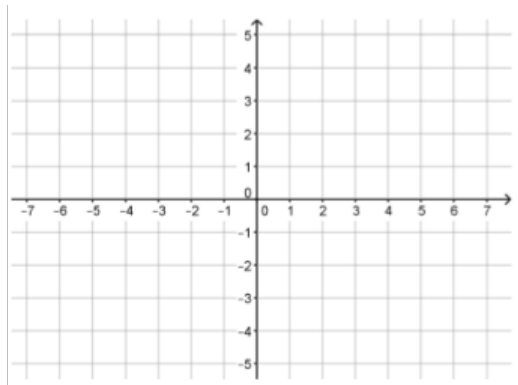


b) Impaire :



18) Trace une fonction répondant aux conditions suivantes :

- impaire, $lm_f = [-3; 3]$ et $Dom_f = [-5; 5]$, qui a -2 comme racine et 2 comme valeur maximale.
- paire, $Dom_f =]-4; 4[$, qui a 2 comme racine, croissante sur $[-2; 0]$, et qui a -1 comme valeur minimale.



Petite fenêtre de logique

Lors de cette UAA, nous avons rencontré plusieurs propositions quantifiées :
Les propositions quantifiées sont des propositions qui contiennent un ou plusieurs quantificateurs.

- Les propositions existentielles :

Les propositions existentielles sont des propositions qui sont vraies ou fausses pour certains objets d'une catégorie. On les utilise lorsqu'on veut affirmer l'existence d'objets ayant telle ou telle propriété.

Pour exprimer l'existence de tels objets, on utilise le quantificateur « il existe » (\exists). Ce quantificateur est à prendre au sens : « il existe au moins ».

Exemple : si on demande de dessiner 3 pièces de monnaie tel qu'il existe (au moins) une pièce en position face, on obtient les solutions suivantes :

F-P-P F-P-F F-F-F

Pour symboliser « il existe exactement », on écrit ($\exists!$), autrement dit : il existe une seule valeur qui satisfait la proposition.

- Les propositions universelles :

Les propositions universelles sont des propositions qui sont vraies ou fausses pour tous les objets d'une catégorie. On les utilise lorsqu'on veut exprimer le fait que tous les objets d'une catégorie possèdent telle ou telle propriété.

Pour exprimer l'existence de tels objets, on utilise le quantificateur universel « Pour tout » (\forall). Il est à prendre au sens de « pour chaque élément » ou « quel que soit l'élément »

Exemple : si on demande de dessiner 3 pièces de monnaie tel que toutes les pièces soient en position face, on obtient les solutions suivantes :

F-F-F

- Propositions à plusieurs quantificateurs :

Dans les propositions à plusieurs quantificateurs, l'ordre de ceux-ci a beaucoup d'importance : Conventionnellement en logique, un « pour tout » suivi d'un « il existe » ne signifie pas la même chose qu'un « il existe » suivi d'un « pour tout ». Exemple : « pour tout coffre, il existe une clef » et « il existe une clef pour tout coffre » ont des sens différents.

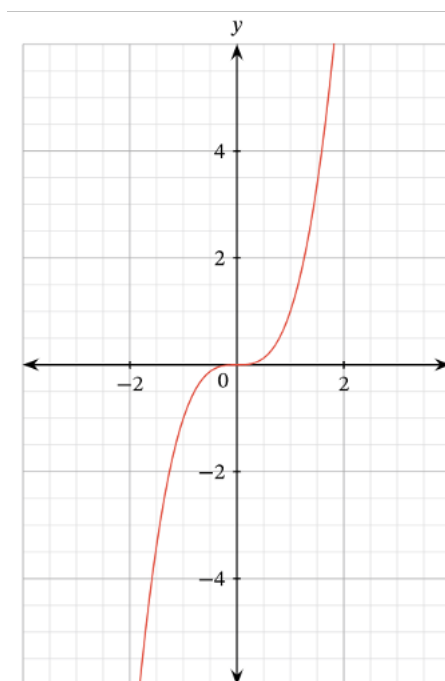
La première signifie que chaque coffre possède sa propre clef alors que la deuxième signifie qu'il existe une seule clef qui ouvre tous les coffres (un passe-partout).

On peut intuitivement retenir que :

- Si le même objet est valable pour chaque élément, alors on utilise un « il existe \exists » suivi d'un « pour tout \forall ».
- Si à chaque objet, correspond (au moins) un élément dépendant de l'objet considéré alors on utilise un « pour tout \forall » suivi d'un « il existe \exists ».

Quizz :

Considérez le graphe de la fonction $f : x \mapsto x^3$ ci-dessous. Laquelle des propositions suivantes est vraie ?



- Pour tout x il existe un y tel que $f(x) > y$
- Il existe un y tel que pour tout x on a $f(x) > y$

Réinvestissement : quantificateurs et ordre des quantificateurs.

Thème 5 : La continuité (UAA3)

Notions rencontrées : Continuité en un point

Niveau : 5ème année (6 ou 6+2 heures /semaine)

Notions de logique rencontrées :

- Propositions quantifiées : complexes (contenant plusieurs quantificateurs)
- Négation d'une proposition quantifiée.

Déroulement et description :

Pour clore notre exploration des différents thèmes, nous souhaitons accorder une attention particulière à la continuité. Il est souvent constaté que dans de nombreux cours et ouvrages, la continuité des fonctions est présentée de manière simpliste et parfois erronée. Une conception répandue, mais fautive, est celle qui associe la continuité à la capacité de tracer le graphe d'une fonction sans lever le crayon. Cette idée, bien qu'intuitive, déforme la véritable nature de la continuité.

En réalité, la continuité d'une fonction dépasse largement cette simple image. Elle est plutôt déterminée par la structure topologique de l'ensemble des réels sur lequel la fonction est définie. Cette notion de continuité n'a donc rien à voir avec la facilité de dessiner le graphique d'une fonction, mais plutôt avec la présence ou l'absence de sauts ou de discontinuités dans son comportement.

La question se pose alors de savoir s'il est nécessaire d'introduire un cours de topologie avant d'aborder la continuité en secondaire supérieur. Certains pourraient soutenir cette idée, ce qui est bien sûr hors de portée des élèves de secondaire, mais il est essentiel de ne pas sacrifier l'intuition au profit de la rigueur mathématique.

Il est également possible d'aborder la continuité de manière intuitive tout en introduisant des notions telles que le voisinage et la discontinuité. Cette approche plus holistique permet aux élèves de développer une compréhension plus profonde et plus nuancée des fonctions, sans pour autant les submerger de concepts trop avancés. Dans ce thème, nous proposons une approche basée sur l'intuition, qui me semble être la plus conforme à la définition donnée.

Nous commencerons donc par une approche intuitive de la discontinuité en un point, suivi d'une fenêtre logique sur les propositions quantifiées et leur négation

puis nous terminerons par l'énoncé de la définition de la notion de continuité en un point.

Thème 5 : La continuité

1. Continuité en un point

a) Idée intuitive :

Position du problème [9]: Imaginons que l'on mesure deux grandeurs, X et Y, et qu'elles sont liées entre elles par une règle mathématique. Si vous appelez x et y les mesures respectives de X et Y dans un système de référence donné, il existe une fonction spéciale, appelée f , qui permet de prédire la valeur théorique de y pour chaque valeur de x :

$$y = f(x).$$

Cependant, dans la pratique, nos instruments de mesure ne sont pas parfaits, et il y a toujours des erreurs possibles lorsqu'on manipule ces instruments. De plus, le simple fait de mesurer quelque chose peut influencer légèrement la valeur exacte que nous essayons de trouver, x .

Pour gérer ces erreurs et incertitudes, on utilise des techniques de calcul d'erreur. Ces techniques nous aident à déterminer une plage de valeurs autour de la mesure initiale de x , que l'on appelle α (alpha). C'est comme si on disait : "La vraie valeur de x se situe quelque part entre $x_0 - \alpha$ et $x_0 + \alpha$. α est une estimation de l'erreur que nous avons commise en mesurant x et en l'assimilant à x_0 .

Par exemple, si nous avons : $x \in]x_0 - \alpha; x_0 + \alpha[$, cela signifie que $|x - x_0| < \alpha$. On dit alors que x_0 est une estimation de x avec une incertitude de α .

Puisque nous ne connaissons pas la vraie valeur de x , nous ne connaissons pas non plus la vraie valeur de $y = f(x)$. Nous ne connaissons que x_0 , donc nous savons seulement que $y_0 = f(x_0)$. En outre, nous savons que x est dans une certaine plage autour de x_0 .

Le problème est de savoir si la valeur y_0 peut être suffisamment proche de la vraie valeur de y pour être utilisable à sa place. Autrement dit, si nous avons une incertitude ϵ sur y (nécessité par des considérations extérieures : par exemple pour des raisons comme un seuil de sécurité, des normes légales, une nécessité de fonctionnement, etc...), et en tenant compte de ce que nous pouvons raisonnablement espérer, est-ce que

nous pouvons réduire l'incertitude α sur x de manière à connaître y avec la précision souhaitée ?

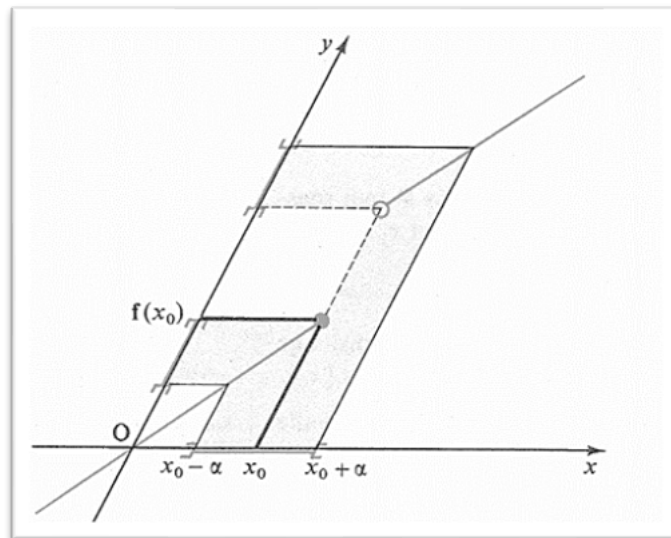
La réponse à cette préoccupation fréquente dépend en premier lieu des propriétés de la fonction f vis-à-vis de x_0 et des valeurs proches de x_0 . Une fonction f conviendra en x_0 si, pour être « proche de $y_0 = f(x_0)$ », il suffit d'être proche de x_0 .

Un exemple commenté : Soit f la fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} : \begin{cases} \text{si } x \leq 2 \Rightarrow f(x) = x + 1 \\ \text{si } x > 2 \Rightarrow f(x) = x + 2 \end{cases}$$

Soit $x_0 = 2$. Pour tout réel α positif non nul, l'intervalle $]2 - \alpha; 2 + \alpha[$ qui contient x , contient des nombres inférieurs à 2 et des nombres supérieurs à 2. Il en résulte :

$$\begin{aligned} f(]2 - \alpha, 2 + \alpha[) &= f(]2 - \alpha, 2] \cup]2, 2 + \alpha[) \\ &=]1 - \alpha, 3] \cup]4, 4 + \alpha[\end{aligned}$$



On ne peut donc pas être sûr que y est connue avec une précision inférieure à 2. On a en effet : $y_0 = f(x_0) = 3$, mais la valeur exacte x se situant dans l'intervalle $]2 - \alpha; 2 + \alpha[$, la valeur exacte y se trouve dans l'intervalle $]1 - \alpha, 3]$ ou dans l'intervalle $]4, 4 + \alpha[$, rien ne permet-

tant en l'absence de données supplémentaires, de dire laquelle des deux possibilités correspond à la réalité.

Si $y \in]4, 4 + \alpha[$, la valeur $y_0 = 3$ serait alors inacceptable comme valeur approchée de y .

Soit $x_0 = 1,99$. Dans ce cas, par contre, il suffit d'être sûr que x_0 est une valeur approchée de x à moins de $0,01$ près ($\alpha = 0,01$) pour affirmer que $y = f(x)$ est connue à $0,01$ près également.

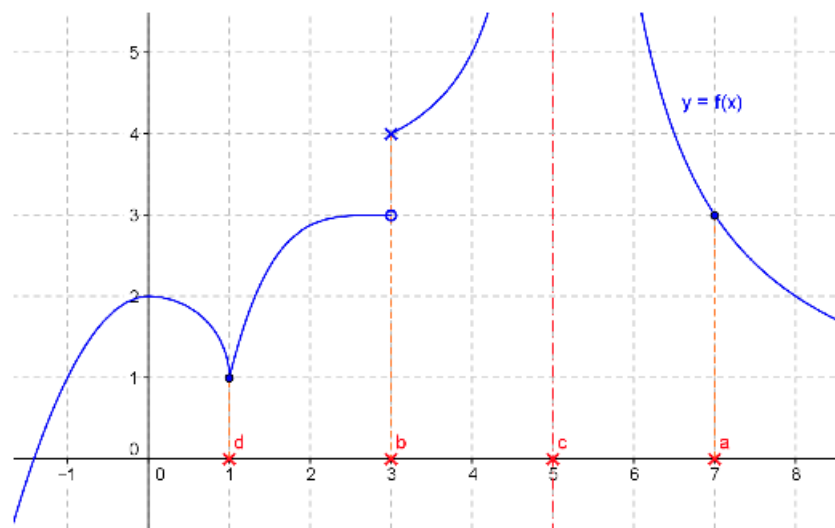
Si l'on veut connaître y avec une précision ϵ , il suffit de prendre pour α la plus petite des deux valeurs $0,001$ ou ϵ .

La fonction f possède donc pour $1,99$ une propriété qu'elle ne possède pas pour 2 . On constate alors (cf illustration ci-dessus) que l'absence de cette propriété se traduit par une discontinuité de la représentation de f pour $x = 2$.

Nous allons maintenant nous plonger dans l'étude systématique des propriétés liées à la « discontinuité ». Cette caractéristique, qui concerne les comportements de la fonction f pour les valeurs proches ou « voisines » de x_0 , va être scrutée de près dans la prochaine partie du cours.

b) La définition de continuité en un point :

Considérons la fonction dont le graphique est représenté ci-dessous :

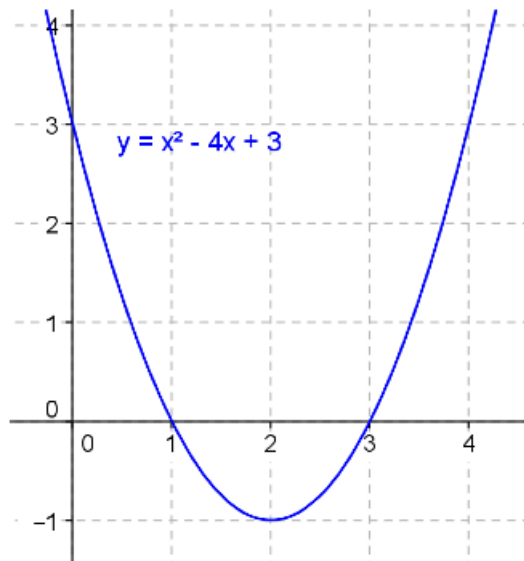


$$Dom_f = \mathbb{R} \setminus \{5\}$$

- La fonction f est continue en $x = 7$ et en $x = 1$;
- la fonction f est discontinue en $x = 3$ et en $x = 5$.

Afin de dégager une définition de la notion de discontinuité puis de continuité d'une fonction, prenons d'autres exemples de fonctions :

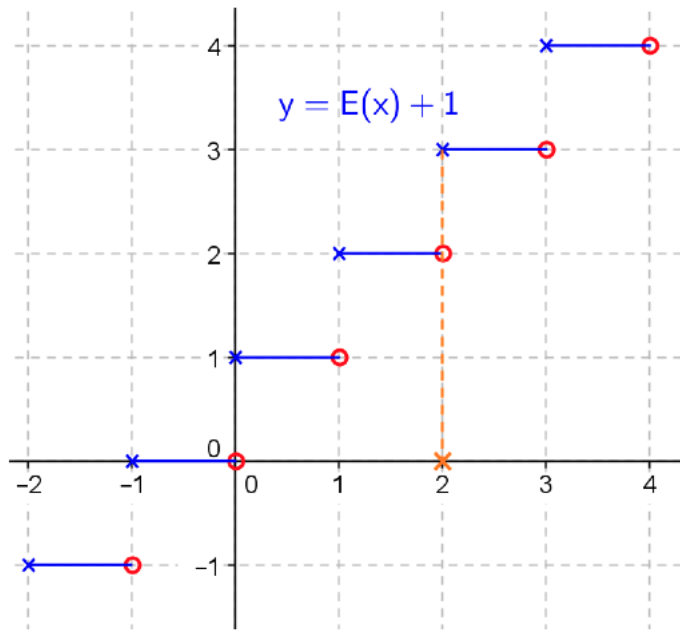
i. $f : x \rightarrow y = x^2 - 4x + 3$



$$\text{Dom}_f = \mathbb{R}$$

Choisissons par exemple $x = 4$: f est continue en $x = 4$

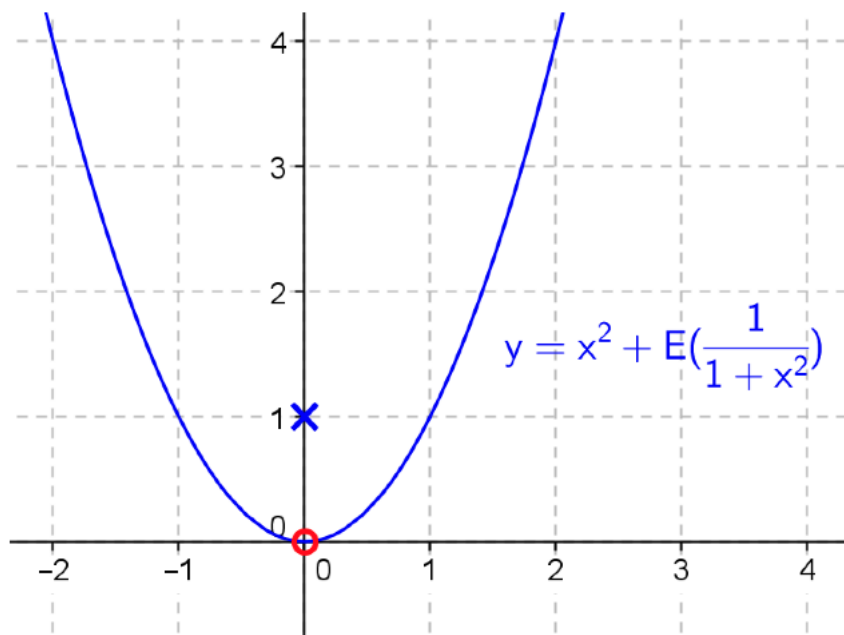
ii. $f : x \rightarrow y = E(x) + 1$, où $E(x)$ représente le partie entière de x .



$$\text{Dom}_f = \mathbb{R}$$

Choisissons par exemple $x = 2$: f est discontinue en 2

iii. $f : x \rightarrow y = x^2 + E\left(\frac{1}{1+x^2}\right)$.



$$\text{Dom}_f = \mathbb{R}$$

f est discontinue en $x = 0$,

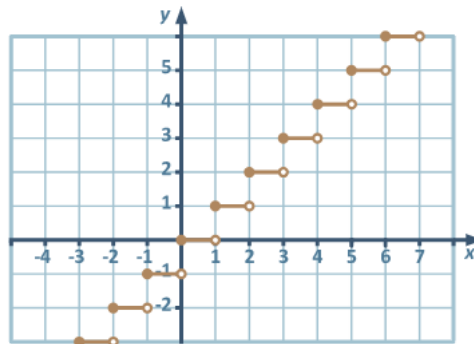
Définition : Fonction discontinue (à construire avec les élèves en s’inspirant de l’approche intuitive de la première partie du cours et des exemples précédents)

La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est discontinue en a , si elle n’y est pas continue, c’est-à-dire si $\exists \epsilon > 0, \forall \alpha \in \mathbb{R}_+, \exists x \in \mathbb{R}, |x - a| < \alpha$ et $|f(x) - f(a)| \geq \epsilon$.

Exemple :

Montrons que la fonction “partie entière” E est par exemple discontinue en 1.

Rappel de la discontinuité : $\exists \epsilon > 0, \forall \alpha > 0, \exists x \in \mathbb{R}, |x - 1| < \alpha$ et $|E(x) - 1| \geq \epsilon$.



Commentaires : Si on prend $\epsilon := \frac{1}{2}$:

Pour tout η , on doit donner x , on donne $x := 1 - \frac{\alpha}{2}$

Et on doit vérifier $|x - 1| < \alpha$ et $|E(x) - 1| \geq \epsilon$.

Les deux sont faciles (bien voir que $E(x)$ est négatif ou nul).

On aurait même pu prendre $\epsilon := 1$

Peut-on alors déduire la définition de fonction continue ?

c) Petite fenêtre de logique : [8]

Négation d'une proposition quantifiée (réinvestissement)

Qu'est-ce qu'une proposition quantifiée ?

On appelle **proposition quantifiée** une proposition de l'un des deux types suivants :

- 1) « Pour tout $x \in E P(x)$ » ou « Quel que soit $x \in E P(x)$ »
- 2) « Il existe $x \in E$ tel que $P(x)$ » où E est un ensemble et $P(x)$ une phrase qui dépend de x .

Dans le premier cas, l'expression « Pour tout $x \in E P(x)$ » marque **une quantification universelle**.

Dans le deuxième cas, l'expression « Il existe $x \in E$ tel que $P(x)$ » marque **une quantification existentielle**.

Il s'agit de deux propositions c'est-à-dire qu'il s'agit d'énoncés mathématiques qui possèdent une valeur de vérité (vraie ou fausse) [10] :

La proposition contenant une quantification universelle est vraie lorsque pour tous les éléments de E (sans exception) $p(x)$ est vraie et elle est

fausse dans le cas contraire c'est-à-dire s'il existe au moins un élément x de E tel que $p(x)$ soit fausse.

La proposition contenant une quantification existentielle est vraie lorsque pour au moins un élément x de E , $p(x)$ soit vraie et elle est fausse dans le cas contraire c'est-à-dire si pour tous les éléments x de E , $p(x)$ est fausse.

Quelle est la négation des propositions suivantes ?

- Proposition 1 : « Toutes les boules sont rouges »

Sa négation serait : « Il existe au moins une boule qui n'est pas rouge » et non « Toutes les boules ne sont pas rouges ».

- Proposition 2 : « Il existe un mouton du troupeau qui est noir »

Sa négation serait : « tous les moutons du troupeau ne sont pas noirs »

Retenons alors :

- La négation d'un « Il existe... » est « Pour tout ... ».
- La négation d'un « Pour tout... » est « Il existe... »

Ou de manière plus formelle :

- La négation d'une phrase du type « $\forall x \in E P(x)$ » est « $\exists x \in E$ tel que non $P(x)$ »
- La négation d'une phrase du type « $\exists x \in E P(x)$ » est « $\forall x \in E$ non $P(x)$ »
- Le symbole (\forall) signifiant pour tout ou quel que soit et le symbole (\exists) signifiant il existe au moins un.

Remarque :

Il arrive que l'on veuille signifier qu'il existe un unique élément, on utilise alors le symbole $\exists!$, le point d'exclamation signifie « un unique ».

Exemple : « $\exists! x \in \mathbb{R}_+ x^2 = 3$ » Signifie : « Il existe un unique réel positif ou nul tel que $x^2 = 3$ » ou « Il existe un et un seul réel x positif ou nul tel que $x^2 = 3$ »

Exercice 1: [9]

Donner la négation mathématique des phrases suivantes

- a) Toutes les boules contenues dans l'urne sont rouges.

- b) Certains nombres entiers sont pairs.
- c) Si un nombre entier est divisible par 4, alors il se termine par 4.

Soit $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$

- d) f est positive, c'est-à-dire « $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 0$ »
- e) f est paire sur \mathbb{R} , c'est-à-dire « $\forall x \in \mathbb{R}, f(-x) = f(x)$ »

Exercice 2 :

On considère la proposition (P) suivante :

(P) « Pour tout nombre réel x , il existe au moins un entier naturel N supérieur ou égal à x »

- a) Ecrire la proposition (P) avec des quantificateurs.
- b) Ecrire la négation avec des quantificateurs puis l'énoncer en français.

Exercice 3 :

Soient les 4 assertions suivantes :

- a) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x + y > 0$
- b) $\forall x \in \mathbb{R} \exists \mathbb{R} x + y > 0$
- c) $\forall x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} x + y > 0$
- d) $\exists x \in \mathbb{R} \forall y \in \mathbb{R} y^2 > x$
 - i. Les assertions a, b, c et d sont-elles vraies ou fausses ?
 - ii. Donner leur négation

Exercice 4 :

Soient $a \in \mathbb{R}$ et f une fonction de \mathbb{R} dans \mathbb{R} .

$\forall \epsilon > 0, \exists \alpha > 0, \forall x \in \mathbb{R}, |x - a| < \alpha \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \epsilon$

Donner la négation de cette phrase logique.

Exercice 5 : Comparer les deux propositions quantifiées suivantes :

$P : \langle \forall x \in \mathbb{R}, \exists y \in \mathbb{R} : x + y = 0 \rangle$ et $Q : \langle \exists y \in \mathbb{R}, \forall x \in \mathbb{R} : x + y = 0 \rangle$

Commentaires : Lorsqu'on manipule des affirmations avec quantificateurs, il importe de veiller à ne pas permuter l'ordre des quantificateurs.

La proposition P est vraie dans \mathbb{R} , cela signifie que : chaque réel x admet un opposé y dans \mathbb{R} .

Par contre la proposition Q est fausse. Elle signifie en effet qu'il existerait un nombre réel y qui serait l'opposé de n'importe quel nombre réel x . Un tel nombre réel y n'existe pas.

On peut cependant permuter l'ordre des quantificateurs si ceux-ci sont identiques et l'un à côté de l'autre.

Par exemple, l'affirmation :

$$\forall n \in N, \forall m \in N : n \neq 0 \Rightarrow n + m > m$$

est équivalente à l'affirmation :

$$\forall m \in N, \forall n \in N : n \neq 0 \Rightarrow n + m > m$$

A l'issue de ces exercices, peux-tu écrire la définition d'une fonction continue en un point a :

Une fonction est continue en $x = a$ ssi

Exercice 6 :

Représenter les fonctions suivantes et en déterminer les points de discontinuité :

$$1) f : \begin{cases} \text{si } x < -2: & y = x + 1 \\ \text{si } -2 < x \leq 3: & y = \frac{1}{x} \\ \text{si } x > 3: & y = 5 - x^2 \end{cases}$$

$$3) f : \begin{cases} \text{si } x < -1: & y = 3x \\ \text{si } -1 < x < 2: & y = 1 + x \\ \text{si } 2 < x \leq 5: & y = \sqrt{x + 4} \\ \text{si } x > 5: & y = \frac{1}{6 - x} \end{cases}$$

$$2) f : \begin{cases} \text{si } x < -4: & y = x + 1 \\ \text{si } -4 \leq x \leq 0: & y = -x - 6 \\ \text{si } 0 < x < 3 & y = \frac{1}{x - 2} \\ \text{si } x > 3: & y = x + 1 \end{cases}$$

Chapter 5

Propositions d'exercices et activités évolutives pour l'apprentissage progressif des élèves.

5.1 Implication et équivalence

5.1.1 Activité de découverte 1 : Création d'implications et d'équivalences

Objectif : Développer la capacité des élèves à analyser des propositions et à formuler des implications et des équivalences logiques.

Niveau : 1ère secondaire

Description de l'Activité :

Cette activité offre l'avantage de fournir à la notion d'implication plusieurs perspectives, allant d'un cadre de raisonnement déductif à un cadre ensembliste.

Partie 1 : Les élèves recevront un ensemble de propositions. Leur tâche sera de créer des implications et des équivalences vraies en utilisant ces propositions. Les élèves devront justifier leurs réponses en expliquant leur raisonnement logique. Les implications et les équivalences peuvent être écrites sous forme de phrases ou de schémas logiques. Le symbole de l'implication « \Rightarrow » peut être employé si la notion semble être comprise par les élèves. De plus lorsque l'implication et sa réciproque sont vraies, on introduit la notion de proposition équivalente. La notation n'est pertinente pour les élèves que si la notion qu'elle exprime est comprise.

Partie 2 : Une fois que les élèves auront répertorié les implications proposées, une discussion peut être initiée pour évaluer leur validité. Après avoir confirmé les implications vraies, l'attention se tournera vers leur réciproque. Cette étape permettra aux élèves de comprendre qu'une implication peut être vraie tandis que sa réciproque est fausse. Pour démontrer qu'une implication est fausse, nous mettrons l'accent sur l'utilisation de contre-exemples.

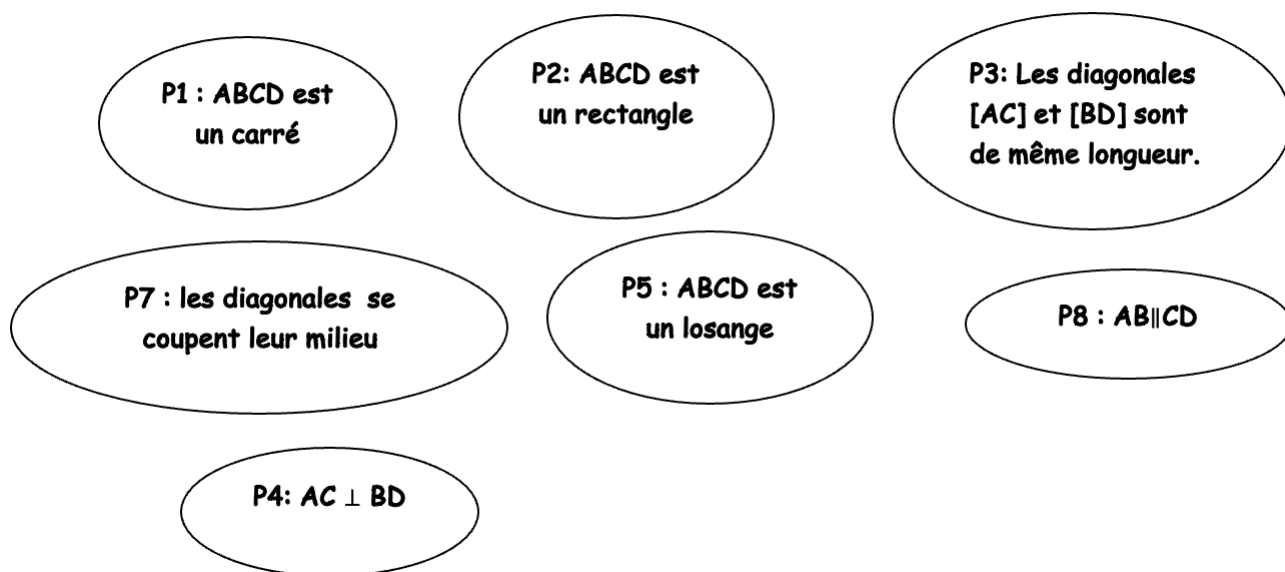
Partie 3 : L'objectif de cette section est de transposer la notion d'implication dans le cadre ensembliste.

Consignes à l'intention des élèves :

Partie 1 : Lisez attentivement les propositions suivantes. Utilisez ces propositions pour créer des implications vraies. (utilisez « si...alors... » ou « $\dots \Rightarrow \dots$ »)

Expliquez enfin votre raisonnement pour chaque implication ou équivalence que vous créez.

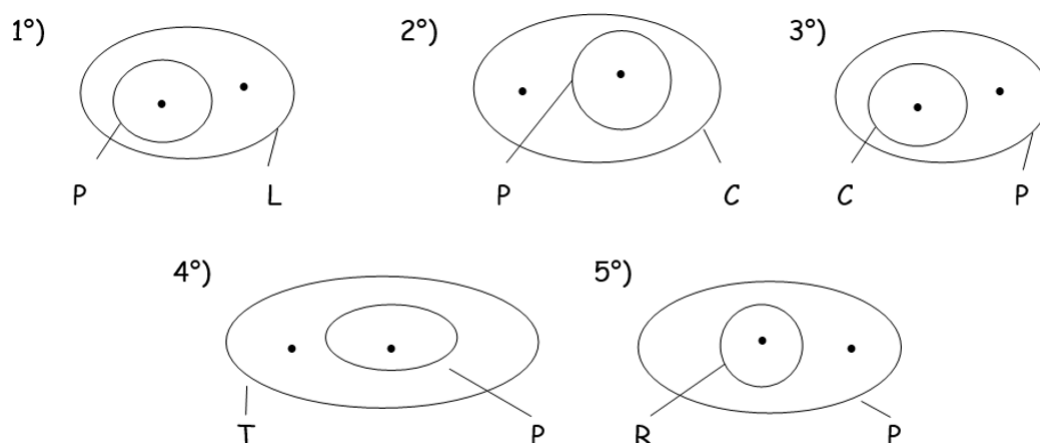
Les propositions :



Partie 2 : Les propositions ci-dessous sont-elles vraies? Si non, donner un contre-exemple.

1. Si un parallélogramme a un angle droit alors c'est un rectangle.
2. Si un quadrilatère est un rectangle alors c'est un carré.
3. Si un quadrilatère est un carré alors c'est un rectangle.
4. Si un quadrilatère est un carré alors il a au moins deux axes de symétrie.
5. Si un quadrilatère a au moins deux axes de symétrie alors c'est un carré.
6. Si un quadrilatère est un losange alors ses diagonales sont perpendiculaires.
7. Si un quadrilatère a ses diagonales qui sont perpendiculaires alors c'est un losange

Partie 3 : Soit C la famille des carrés, L la famille des losanges, R la famille des rectangles, P la famille des parallélogrammes, T la famille des trapèzes. Parmi les diagrammes suivants, lesquels traduisent la réalité ? Justifie tes choix.



5.1.2 Activité de réinvestissement : l'implication et l'équivalence

Niveau : 2ème secondaire

Objectif : identiques à l'activité précédente , sauf que cette activité est à aborder en deuxième

Consignes pour l'élève : Etudier si les affirmations suivantes sont vraies. Justifier.

1. Si M est le milieu de $[AB]$, alors $|MA| = |MB|$.
2. Si $|MA| = |MB|$, alors M est le milieu de $[AB]$.
3. Si M est le milieu de $[AB]$, alors $|AM| + |MB| = |AB|$.
4. Si $|AM| + |MB| = |AB|$, alors M est le milieu de $[AB]$.
5. Si $M \in [AB]$ alors $|MA| + |MB| = |AB|$.
6. Si $|MA| + |MB| = |AB|$, alors $K \in [AB]$.

5.1.3 Activité de réinvestissement 3 :

Niveau : 3^{ème} secondaire

Description :

Lors de cette activité , les élèves doivent résoudre une équation , on s'attendrait à ce qu'ils développent les deux membres de l'égalité pour supprimer les carrés puis qu'ils résolvent l'équation.

Au moment des discussions : Identifier l'erreur commise en supprimant les carrés et profiter de l'identification de l'erreur pour introduire le vocabulaire lié à la logique

(ajouter output attendu)

Consignes aux élèves : 1) résoudre l'équation suivante : $(x-3)^2 = (x+9)^2$

Voici quelques propositions, où a et b sont des nombres réels :

(P1) : $a^2 = b^2$

(P2) : $a = b$

(P3) : $a = -b$

(P4) : $(a + b)(a - b) = 0$

(P5) : $a = b$ ou $a = -b$

(P6) : $a = 0$ ou $b = 0$

1. Quelle sont les implications du type (P1) \Rightarrow vraies pour tout a, b réels ?

2. Parmi les propositions (P2), (P3), (P4) , (P5) et (P6) , identifier celles qui impliquent la proposition (P1) (pour tout a,b réels).
3. Quelles sont les propositions équivalentes (pour tout a,b réels) ?

5.1.4 Exercice de réinvestissement : Géométrie dans l'espace (d'après Déclic 2nde)

Niveau : 4ème secondaire

Répondre par vrai ou faux aux affirmations suivantes. Si l'implication est vraie, étudier sa réciproque (sauf 3 et 4)

1. Si deux droites sont sécantes, alors elles sont coplanaires.
2. Si deux droites sont parallèles, alors elles sont coplanaires.
3. Si deux plans sont parallèles alors toute droite de l'un est parallèle à toute droite de l'autre.
4. Si deux plans sont sécants, alors toute droite de l'un est sécante à toute droite de l'autre.
5. Si deux droites de l'espace sont non coplanaires, alors elles n'ont aucun point d'intersection

5.1.5 Exercice de réinvestissement : exercice transversal pour réinvestir plusieurs notions vues en 5ème et sixième secondaire

Consigne : Compléter le tableau avec les symboles \Rightarrow ; \Leftarrow ou \Leftrightarrow

$\cos x = \frac{1}{2}$		$x = \frac{\pi}{3}$
$\cos x = 1$		$\sin(2x) = 2 \sin(x)$
$x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi, (k \in \mathbb{Z})$		$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}$
Pour tout $x, f(x) = g(x)$		Pour tout $x, f'(x) = g'(x)$
$ x - 3 \leq 5$		$x \in [2; 8]$
f est une fonction continue		f est dérivable
f et g sont croissantes sur un intervalle I		$f + g$ est croissante sur un intervalle I
f et g sont monotones sur un intervalle I		$f + g$ est monotone sur un intervalle I
f et g sont croissantes sur un intervalle I		fg est croissante sur un intervalle I
$(x - 1)(x - 2) = 0$		$x = 1$
La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tend vers $+\infty$		La suite $(U_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée
$y^2 = x^2 + 1$		$y = \sqrt{x^2 + 1}$

5.2 Quantificateurs universel et existentiel

1. Exercice 1 : (à insérer dans le thème : la famille des quadrilatères)

Niveau : 1ère / 2ème secondaire

Consigne : les propositions suivantes sont-elles Vraies ou fausses ?

- Les parallélogrammes ont leurs diagonales qui se coupent en leur milieu.
- il existe des parallélogrammes qui ont leurs diagonales perpendiculaires.
- Les quadrilatères qui ont une paire de côtés parallèles sont des parallélogrammes.
- Certains quadrilatères ont les diagonales perpendiculaires.
- Un quadrilatère qui a les diagonales de même longueur et se coupant en leur milieu est un rectangle.

Commentaires : l'objectif est de faire prendre conscience aux élèves que certains quantificateurs sont implicites, comme dans la première proposition, "les parallélogrammes...", le quantificateur universel est sous-entendu. Cela ajoute une complexité supplémentaire pour les élèves, qui peuvent parfois penser que cette proposition est vraie pour certains parallélogrammes et fausse pour d'autres.

2. Exemple de synthèse sur les quantificateurs à insérer dans l'UAA4 : outils algébriques

Niveau : 3ème année secondaire. (conf « irem d'Orléans : quelque éléments de logique)

On considère les deux égalités suivantes dans lesquelles x est un réel.

$$(1) (x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$$

$$(2) (x + 1)^2 = x^2 + 1$$

Consigne aux élèves : Examinez attentivement ces égalités. Sont-elles vraies ou fausses. Ajoutez un quantificateur universel(pour tout réel) ou existentiel (il existe certains réels) si nécessaire pour les rendre correctes si elles sont fausses.

Description : il s'agit de faire prendre conscience aux élèves qu'écrire des égalités sans préciser dans quel domaine elles sont vraies n'est pas significatif. Le sens de ces égalités varie en fonction de la quantification du réel x .

On peut donc expliquer aux élèves la nécessité de quantifier une proposition en utilisant les deux égalités suivantes de la manière suivante : Égalité 1 : $(x + 1)^2 = x^2 + 2x + 1$

On peut demander aux élèves de substituer x par différentes valeurs puis de vérifier l'égalité.

Par exemple, prenez $x = 1$: $(1 + 1)^2 = 1^2 + 2 \times 1 + 1$, ce qui est vrai ($4=4$).

Ensuite, on peut montrer que pour chaque valeur de x , l'égalité est vraie. On peut aussi développer $(x + 1)^2 = (x + 1).(x + 1) = x^2 + 2x + 1$

Égalité 2 : $(x + 1)^2 = x^2 + 1$

À nouveau, on peut leur demander de substituer x par différentes valeurs pour vérifier l'égalité. Par exemple, prenez $x = 1$: $(1 + 1)^2 = 1^2 + 1$, ce qui est faux ($4 \neq 2$) ;

puis de substituer x par 0 : $(0+1)^2 = 0^2 + 1$ et leur faire remarquer que cette égalité n'est pas toujours vraie (pour toutes les valeurs de x). C'est là que la quantification intervient : en ajoutant un quantificateur universel (pour chaque x) ou existentiel (il existe un x tel que...), on spécifie que l'égalité doit être vraie pour toutes les valeurs de x (universel) ou pour au moins une valeur de x (existantiel).

Dans le même contexte on peut demander aux élèves de déterminer si les affirmations suivantes deviennent vraies en remplaçant les pointillés par \exists (il existe) ou par \forall (pour tout) :

- a) $x \in \mathbb{R}, x^2 - 4 = 0$
- b) $x \in \mathbb{R}, x^2 + 4 \neq 0$
- c) $x \in \mathbb{R}, (x - 5)^2 = x^2 - 10x + 25$
- d) $x \in \mathbb{R}, (3x + 18)^2 \geq 0$
- e) $x \in \mathbb{R}, x^2 = x$
- f) $x \in \mathbb{R}, x^2 \geq x$
- g) $x \in \mathbb{R}, x^2 \geq 0$

3. Exercice : [17] rédaction formelle de propositions quantifiées à insérer en 6ème.

- a) Ecrire à l'aide de quantificateurs les propositions suivantes :
 - i. Le carré de tout réel est positif.
 - ii. Certains réels sont strictement supérieurs à leur carré.
 - iii. Aucun entier n'est supérieur à tous les autres.
 - iv. Tous les réels ne sont pas des quotients d'entiers.
 - v. Il existe un entier multiple de tous les autres.
 - vi. Entre deux réels distincts, il existe un rationnel.
 - vii. Etant donné trois réels, il y en a au moins deux de même signe.
- b) Peut-on intervertir les quantificateurs " $\forall n \in \mathbb{N}$ " et " $\exists m \in \mathbb{N}$ " dans les propositions suivantes (justifier proprement votre réponse).
 - i. $\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n \geq m$
 - ii. $\forall n \in \mathbb{N}; \exists m \in \mathbb{N}, n^2 \geq m$

5.3 Négation de propositions quantifiées ou non

Exercice 1 : Négation de propositions

Niveau : 6ème secondaire

Commentaire : on retrouve ce type d'exercices , dans l'UAA1 des probabilités . Le thème des probabilités offre une opportunité exceptionnelle d'aborder plusieurs concepts de logique de manière ludique et concrète. En effet, les notions de logique sont intrinsèquement liées aux probabilités à l'instar de la négation et la Complémentarité, les conjonctions et disjonctions (représentant des événements simultanés ou des événements alternatifs), etc,...

Et en utilisant des exemples concrets et des expériences ludiques : lancers de dé, jeux de cartes ... , le thème des probabilités offre un terrain fertile pour explorer ces notions de logique de manière interactive et stimulante.

De plus en utilisant, le cadre ensembliste (les diagrammes de Venn) on ne peut que renforcer la compréhension des élèves.

Exemples :

1. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Ecrire l'évènement contraire de l'évènement suivant : « Obtenir un trèfle » .
2. On tire une main au hasard dans un jeu de 32 cartes. Ecrire l'évènement contraire des évènements suivants : « obtenir au moins un as » ; « obtenir au plus deux as » ; « obtenir plus que deux as » ; « obtenir moins de trois as »
3. On tire une carte au hasard dans un jeu de 32 cartes. Ecrire l'évènement contraire des évènements suivants : obtenir « un trèfle et un roi » ; «obtenir un roi ou une dame » ;
4. Quelle est la condition contraire de « tous les murs de la pièce sont blancs »
5. On tire une main au hasard dans un jeu de 32 cartes. L'évènement contraire de l'évènement « toutes les cartes de la main sont des as » est-il « aucune carte n'est un as » ou « au moins une carte n'est pas un as »

Description: l'évènement contraire de l'évènement A est la négation de A.

Dans la question 1) on s'intéresse à la négation de A : « non A » ; les élèves formuleront cet évènement contraire de deux manières : « ne pas obtenir de trèfle » et « obtenir un carreau ou un pic ou un cœur ». Il s'agit de ne pas accepter la première formulation car les élèves prennent la phrase comme un tout et se

contentent de mettre « ne pas » devant ; il faut donc exiger que l'événement soit toujours exprimé sous la forme « obtenir... ».

Dans la question 2) la difficulté réside en la compréhension de « au moins un » et « au plus » et la distinction avec « moins de » et « plus de »

Dans la question 3) on s'intéresse à la négation de « A ou B » qui est « non A et non B » ; il est plus simple de déterminer l'évènement contraire de « A et B » que de « A ou B ».

Dans les questions 4) et 5) on va à l'encontre de l'intuition. Le côté visuel de la question 4) aide à la compréhension de cette négation

Exercice : A insérer dans l'UAA4: fonctions du premier degré .

Niveau : 3ème secondaire.

Commentaires : on peut fournir un graphe de fonction pour mieux aider l'élève à visualiser. L'objectif étant toujours de faire réfléchir les élèves sur la notion de négation d'une proposition.

Consigne : Soit f une fonction définie sur \mathbb{R} . Donner la négation des propositions :

1. « Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) \geq 1$ ».
2. « Il existe un $x \in \mathbb{R}, f(x) = 0$ »
3. « Pour tout $x \in \mathbb{R}, f(x) > 1$ »

Chapter 6

Quelques éléments théoriques de logique

Dans son article de 2003 [9] intitulé " The Role of Logic in Teaching Proof," la chercheuse et professeure américaine S. S. Epp effectue une analyse détaillée des manuels de mathématiques et des articles de didactique rédigés par ceux qui cherchent à combler le fossé entre les cours plus élémentaires axés sur les calculs et les cours de niveau avancé où le raisonnement déductif et l'abstraction sont primordiaux. Elle souligne la nécessité d'une instruction spécifique axée sur les compétences de base requises pour mener un raisonnement formel. Au centre de ces compétences se trouve la capacité à bien coordonner la logique et le langage écrit, ce qui semble poser problème même lorsqu'il s'agit simplement de vérifier la validité (et éventuellement de prouver) des énoncés mathématiques relativement simples.

6.1 L'implication dans le langage courant vs la logique mathématique

Le langage mathématique, même s'il est essentiellement basé sur des symboles et des notations formelles, est loin d'être dépourvu de traits linguistiques naturels. Il se situe à la croisée des chemins entre la langue naturelle et le formalisme, ce qui le rend particulièrement difficile à appréhender pour les élèves. Contrairement à l'approche purement formelle, le discours mathématique est souvent enrichi de termes et de structures linguistiques empruntés à la langue naturelle, ce qui crée une interconnexion complexe entre les deux.

Un exemple significatif de cette difficulté réside dans la compréhension du concept d'implication.

En logique mathématique, l'implication est une relation entre propositions où une proposition (appelée l'antécédent) entraîne logiquement une autre proposition (appelée le conséquent). Par exemple, la proposition "Si P, alors Q" signifie que la véracité de P implique la véracité de Q. [10]

Cependant, cette notion peut être difficile à saisir pour les élèves, en partie à cause de l'ambiguïté linguistique qui peut exister entre le langage mathématique et le langage naturel.

En langage naturel, l'implication est souvent utilisée de manière conditionnelle. Par exemple, une mère pourrait dire à son enfant : "Si tu manges les légumes, alors tu auras un chocolat." Cette déclaration implique une relation de cause à effet : manger les légumes (l'antécédent) conduit à obtenir un dessert (le conséquent). Cependant, cette utilisation informelle de l'implication peut parfois créer des confusions lors de sa transposition en logique mathématique, où les implications sont traitées de manière plus stricte et formelle.

En effet, l'intuition et l'expérience de la vie de tous les jours poussent à admettre que l'implication « $P \Rightarrow Q$ » est vraie lorsque les propositions P et Q sont vraies et que l'implication est fautive lorsque la proposition P est vraie et que la proposition Q est fautive. Par contre, il n'en est plus de même lorsqu'on doit admettre que l'implication est vraie lorsque la proposition P est fautive et ce, quelle que soit la valeur de vérité de la proposition Q.

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	?
V	F	?
F	V	?
F	F	?

Ainsi, bien que la logique mathématique puisse parfois défier notre intuition initiale, il est essentiel pour les élèves de comprendre cette distinction pour maîtriser pleinement les concepts mathématiques et leurs implications logiques.

Selon Piaget, on n'accède pas au stade formel de la pensée si l'on confond implication et équivalence et si on ne fait pas la différence entre les deux.[11]

6.2 Equivalence

D'une manière générale, si l'implication « $p \Rightarrow q$ » est vraie, sa réciproque « $q \Rightarrow p$ » est fausse. Exemple : « si $x = 2$ alors $x^2 = 4$ » est vraie mais sa réciproque « si $x^2 = 4$ alors $x = 2$ » est fausse.

Néanmoins, pour certaines propositions p et q , les implications « $p \Rightarrow q$ » et « $q \Rightarrow p$ » sont toutes les deux vraies ou toutes les deux fausses en même temps. Dans ce cas, les propositions p et q sont équivalentes, on note alors : « $p \Leftrightarrow q$ » et cela se lit :

- p si et seulement si q
- p est nécessaire et suffisant pour q ou q est nécessaire et suffisant pour p .
- Pour avoir p , il faut et il suffit d'avoir q ou pour avoir q il faut et il suffit d'avoir p .

Exemples d'équivalences :

- Dans un triangle, avoir les 3 côtés de même longueur est équivalent à avoir les 3 angles de même amplitude.
- $x+3=7$ est équivalent à $x=4$
- Le théorème de Pythagore est une équivalence.

Contre-exemple :

- « Si f est une fonction dérivable en un point a alors elle est continue en a » n'est pas une équivalence.
- « Si ABCD est un losange alors ABCD est un parallélogramme » n'est pas une équivalence.

6.3 Négation

La négation d'une proposition P est une proposition $\neg P$ qui est vraie (fausse) lorsque la proposition de départ est fausse (vraie) .

Exemples:

Si P est la proposition "Le soleil brille", alors $\neg P$ est la proposition "Le soleil ne brille pas".

Si Q est la proposition "Tous les nombres sont pairs", alors $\neg Q$ est la proposition "Il existe au moins un nombre qui n'est pas pair".

Propriétés de la négation:

Double négation: La négation de la négation d'une proposition est équivalente à la proposition elle-même: $\neg\neg P \equiv P$.

Lois de De Morgan: Les lois de De Morgan permettent de distribuer la négation sur les conjonctions et les disjonctions:

$$\neg (P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$$

$$\neg (P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$$

Valeur de vérité de la négation:

P	$\neg p$	$\neg(\neg p)$
1	0	1
0	1	0

Remarque : la double négation est utilisée pour justifier la véracité d'une proposition dans la conclusion d'une démonstration par l'absurde.

L'analyse du référentiel de mathématique et des manuels scolaires belges et français révèle une lacune concernant l'enseignement explicite de la négation logique en mathématiques. Contrairement à la négation grammaticale qui fait l'objet d'une attention explicite en français, la négation logique est souvent abordée de manière implicite, principalement lors de l'utilisation du raisonnement par l'absurde ou de la production de contre-exemples pour démontrer qu'un objet mathématique ne possède pas une certaine propriété.

Or la négation enseignée dans la classe de français transforme une phrase universelle en une phrase existentielle en ne faisant porter la négation que sur le prédicat. Remarquons que la plupart des élèves ayant été soumis au test, ont procédé de cette manière. Tandis qu'en mathématique, la négation d'une proposition universelle (existantiel) est une proposition existentielle (universelle).

D'autre part, dans la vie courante, une double négation tend souvent à renforcer la négation : « veux-tu manger un dessert ? réponse : non-non », alors qu'en mathématique, une double négation est une affirmation.

En effet, les travaux conduits en didactique des mathématiques comme ceux d'El Faquih (1991), de Duvert (1996), de Durand-Guerrier (2001), de Ben kilani (2001) confirment le fait que la négation des énoncés universels est problématique pour le non averti. « Dans notre travail, nous faisons l'hypothèse que ces difficultés tiennent en partie au fait que la négation n'est pas seulement un connecteur de la logique classique mais aussi un opérateur de la langue naturelle ». [12]

6.4 Quantification et quantificateurs [13]

La notion de quantification et de quantificateurs se manifeste de diverses manières :

1. Un nombre réel a un carré positif.
2. Tous les réels ont un carré positif.
3. Pour tout réel x , x^2 est un réel positif
4. $\forall x, x \in \mathbb{R} x^2 \geq 0$

En effet, dans la 1) l'affirmation qu'un nombre réel possède un carré positif implique une quantification implicite. D'ailleurs, l'utilisation de l'article indéfini "un" est souvent employée pour marquer une quantification universelle, même si cela peut parfois prêter à confusion, car "un" peut également indiquer une quantification existentielle. Ce qui engendre plusieurs confusions. Parfois même, les deux utilisations cohabitent dans une même proposition, comme par exemple dans « un réel positif possède une racine carrée », ou dans « un triangle rectangle est inscriptible dans un demi-cercle ».

Tandis que l'utilisation de "tous" dans l'énoncé 3) : "tous les réels ont un carré positif" rend la quantification universelle explicite.

Les propositions (3) et (4) se distinguent par l'introduction d'une variable. Bien que la formulation en mots de la proposition (3) puisse sembler plus accessible, elle partage la même structure que la proposition (4), qui utilise des symboles mathématiques. Cette structure consiste en un quantificateur portant sur une variable et opérant sur la proposition que " x^2 est un réel positif". Ainsi, la proposition (3) est également formalisée selon les règles mathématiques, bien que sans symbolisation explicite.

Les règles qui régissent l'utilisation des quantificateurs sont spécifiques aux mathématiques, car le langage courant ne fait généralement pas usage de variables, et donc, a fortiori, de quantificateurs.

Il est donc primordial d'enseigner aux élèves la nature des quantificateurs et de détailler leur fonctionnement, à la fois du point de vue syntaxique (en ce qui concerne leur forme) et sémantique (en ce qui concerne leur signification). Nous rencontrons deux principaux quantificateurs : le quantificateur universel et le quantificateur existentiel.

Le quantificateur universel, représenté par $\forall x$, lorsqu'il est appliqué à une variable x restreinte à un ensemble E , permet de formuler une proposition de la forme $\forall x P$, où P est une proposition dépendant de x . De même, le quantificateur existentiel, symbolisé par $\exists x$, permet de créer une proposition de la forme $\exists x P$, où P est également une proposition dépendant de x . Cette description met en lumière l'aspect syntaxique des quantificateurs : ils opèrent sur une variable et une proposition pour produire une nouvelle proposition.

Sur le plan sémantique, la proposition $\forall x P[x]$ est considérée vraie lorsque, pour chaque élément a de l'ensemble E , la proposition $P[a]$ est vraie. En revanche, la proposition $\exists x P[x]$ est vraie lorsqu'il existe au moins un élément a de l'ensemble E pour lequel la proposition $P[a]$ est vraie. Cette explication clarifie les conditions de vérité des propositions quantifiées.

Les quantificateurs agissent comme des "muteurs" ou « mutificateurs » : toute variable qui se trouve sous la portée d'un quantificateur devient muette dans la proposition quantifiée. Cela signifie que la variable est définie mais non spécifiée, laissant la proposition valable pour tout élément de l'ensemble sur lequel le quantificateur opère.

Conclusion

Notre étude, intitulée "Quelle place accorder à l'enseignement de la logique dans l'enseignement des mathématiques au secondaire ?", s'est penchée sur la question de l'intégration de la logique dans l'apprentissage des mathématiques. En s'appuyant sur des recherches scientifiques menées par des didacticiens et des analyses de tests, nous avons mis en lumière l'urgence de repenser la manière dont la logique est enseignée dans les écoles, dès le primaire.

En effet, nos investigations ont confirmé un constat alarmant, corroboré par des études antérieures (Dieudonné et Durand-Guerrier, 2011) [14], soulignant un déficit significatif en compétences logiques chez la majorité des élèves du secondaire et des étudiants universitaires. Ce constat est d'autant plus préoccupant que l'entrée dans l'enseignement supérieur représente pour l'étudiant un changement radical en termes de méthodes de travail et de pratiques, nécessitant davantage d'autonomie et de rigueur (Bridoux, 2014 [15]). « Les étudiants débutant leurs études en sciences mathématiques rencontrent de nombreuses difficultés, incluant des aspects logiques, des lacunes dans les connaissances de base et des insuffisances dans les démarches caractéristiques de l'activité mathématique » (Dieudonné et Durand-Guerrier, 2011) [14]. En analysant une évaluation donnée aux étudiants de l'Université de Mons le jour de la rentrée académique, Bridoux (2014) [15] a mis en évidence de grandes difficultés en matière d'organisation et d'explicitation des raisonnements, notamment en ce qui concerne la justification.

Ce constat souligne l'impérieuse nécessité de repenser les approches pédagogiques et de renforcer l'enseignement de la logique dès le plus jeune âge. Pour remédier à cette situation, nous avons exploré diverses pistes didactiques. Ces stratégies visent à intégrer la logique de manière fluide et cohérente dans l'apprentissage des mathématiques, sans en faire un cours à part qui risquerait d'être ressenti comme rébarbatif ou trop abstrait par bon nombre d'élèves. Elles mettent en avant l'importance de lier constamment les concepts logiques aux activités mathématiques concrètes, permettant ainsi aux élèves de comprendre pleinement l'utilité et la pertinence de la logique dans ce domaine.

Bien que ces pistes représentent un premier pas encourageant, il est essentiel de poursuivre les recherches et les expérimentations pédagogiques dans ce do-

main. De nombreuses questions restent en suspens, notamment en ce qui concerne l'évaluation efficace de l'apprentissage de la logique chez les élèves et la formation adéquate des enseignants à l'intégration de ces concepts dans leurs pratiques pédagogiques. Comme le souligne Durand-Guerrier (1996, p.293) [16], « le fait que la logique ne soit plus aujourd'hui un objet d'enseignement dans le secondaire ne signifie pas qu'un enseignant de mathématiques puisse se passer des connaissances en logique ; en effet, même si la logique doit rester un outil pour l'enseignant, encore faut-il que celui-ci ait une connaissance idoine de l'objet, faute de quoi, comme nous l'avons vu à plusieurs reprises, il risque de ne pas comprendre ce qui se joue devant lui. »

En conclusion, notre étude a permis de mettre en lumière l'importance fondamentale de la logique dans l'apprentissage des mathématiques et son rôle crucial pour le développement des compétences intellectuelles des élèves. Intégrer la logique de manière significative et contextualisée dès le plus jeune âge est indispensable pour préparer les élèves aux défis du monde en constante évolution et leur permettre de s'épanouir en tant que citoyens éclairés. Il est donc impératif de réaffirmer le rôle fondamental de la logique dans l'enseignement des mathématiques et de lui accorder la place qu'elle mérite dans les programmes scolaires.

Appendix A

Questionnaire à l'intention des élèves de 6ème

Question 1:

Donner la négation de chacune des phrases suivantes :

1. Toutes les filles de la classe de 6A sont brunes.
2. Certains nombres entiers sont pairs.
3. Tous les élèves portent des lunettes et une montre.
4. Un habitant de Louvain-la-Neuve gagnera au loto ou partira en retraite à 40 ans.
5. Dans toutes les écuries, tous les chevaux sont noirs.

Question 2:

1. Un quadrilatère est rectangle si ses diagonales sont de même longueur et se coupent en leur milieu. Donner les conditions pour qu'un quadrilatère ne soit pas rectangle ?
2. On appelle polygone régulier, un polygone dont tous les côtés sont de même longueur et dont tous les angles sont de même amplitude. Donner les conditions pour qu'un polygone soit non régulier.

Question 3:

Parmi les phrases suivantes, indiquer celles qui sont vraies ; celles qui sont fausses et celles pour lesquelles on ne peut pas se prononcer. Vous justifierez soigneusement vos réponses :

1. Si $x \in \mathbb{R}$ et $x^2 = 1 \implies x = 1$

2. Si $x \in \mathbb{R}$ et $x = 1 \implies x^2 = 1$
3. Un quadrilatère convexe dont les diagonales sont perpendiculaires est un losange.
4. Si un quadrilatère dont les diagonales sont perpendiculaires est un rectangle, alors ce quadrilatère est un carré.

Question 4:

On considère la proposition : "Les personnes qui parlent trop ne réfléchissent pas souvent". Parmi les propositions suivantes, laquelle est équivalente à la proposition ci-dessus ? (soulignez la proposition choisie.)

1. Les personnes qui parlent trop ne réfléchissent pas.
2. Les personnes qui réfléchissent souvent ne parlent pas trop.
3. Les personnes qui réfléchissent souvent parlent trop.
4. Les personnes qui ne parlent pas trop réfléchissent souvent.

Question 5:

La négation de la proposition "Les ensembles A et B ont au moins un élément en commun" est

1. $A \cup B = \emptyset$
2. $A \cap B = \{x\}$
3. $\exists x : x \notin (A \cap B)$
4. $A \cap B = \emptyset$

Question 6:

Déterminer l'ensemble des nombres entiers positifs inférieurs ou égaux à vingt-deux ne vérifiant pas la propriété « si x est un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier ».

Question 7:

Soit $B = \{1, 2, 3\}$. La proposition suivante est-elle vraie ou fausse : $\exists x \in B, \forall y \in B : x^2 < y + 1$?

1. Vrai
2. Faux

3. Je ne sais pas

Question 8:

La négation de la proposition $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x + y > 0$ est

1. $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x + y < 0$
2. $\exists x \in \mathbb{N}, \exists y \in \mathbb{N} : x + y \leq 0$
3. $\forall x \in \mathbb{N}, \forall y \in \mathbb{N} : x + y < 0$
4. $\exists x \notin \mathbb{N}, \exists y \notin \mathbb{N} : x + y \leq 0$

Question 9:

Voici 3 affirmations vraies.

1. Les araignées sont des arachnides.
2. Les scorpions sont des arachnides.
3. Les arachnides subissent des mues.

Voici 3 raisonnements ; dire s'ils sont vrais ou faux en précisant la propriété utilisée.

- Cet animal subit une mue donc c'est un arachnide.
- Cet animal est une araignée donc il subit une mue.
- Cet animal subit une mue et est un arachnide donc c'est une araignée.
- Cet animal ne subit pas de mue donc ce n'est pas un scorpion.
- Si un animal n'est pas un arachnide alors il ne mue pas.

Question 10:

Complétez par « car » ou « donc » :

1. ABCD est un parallélogramme _____ AB et CD sont parallèles.
2. Le nombre réel x est supérieur à 3 _____ il est supérieur à 2.
3. Le quadrilatère ABCD a deux angles droits _____ c'est un rectangle.
4. Le triangle ABC est équilatéral _____ il est isocèle.
5. Le nombre x appartient à l'intervalle $[-1, 4]$ _____ x appartient à l'intervalle $[-2, 5]$.

Appendix B

Questionnaire à l'intention des étudiants

Question 1:

Par quoi peut-on compléter les pointillés afin d'avoir les deux assertions vraies ? (noircir la case)

$$x \geq 2 \quad \dots \quad x^2 \geq 4$$

$$|y| \leq 3 \quad \dots \quad 0 \leq y \leq 3$$

\iff et \implies

\implies et \implies

\iff et \iff

\implies et \iff

Question 2:

Ecrire en langage formel l'énoncé suivant : « Tout entier pair n , supérieur ou égal à 4 est la somme de deux nombres premiers »

Question 3:

Un groupe de coureurs C chronomètre ses temps : $t(c)$ désigne le temps (en secondes) du coureur c . Dans ce groupe Valentin et Chloé ont réalisé le meilleur temps de 47 secondes.

Tom est déçu car il est arrivé troisième, avec un temps de 55 secondes. À partir de ces informations, quelles sont les assertions dont on peut déduire qu'elles sont vraies ? (noircir la case)

$\forall c \in C \quad t(c) \geq 47$

- $\exists c \in C \quad 47 < t(c) < 55$
- $\exists c \in C \quad t(c) > 47$
- $\forall c \in C \quad t(c) \leq 55$

Question 4:

Déterminer l'ensemble des nombres entiers naturels inférieurs ou égaux à vingt ne vérifiant pas la propriété « si x est un nombre pair, alors son successeur est un nombre premier ».

Question 5:

Donner la négation et la contraposée des deux énoncés suivants , indique ensuite si la réciproque est vraie.

a) Si un étudiant est déguisé en superman ou porte un nez de clown alors il pourra quitter l'école à midi.

b) $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, (x^2 + y^2 = 0) \implies (x = 0 \text{ et } y = 0)$

Question 6:

J'effectue le raisonnement suivant avec deux fonctions $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} & \forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) \cdot g(x) = 0 \\ \implies & \forall x \in \mathbb{R} \quad (f(x) = 0 \text{ ou } g(x) = 0) \\ \implies & (\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = 0) \text{ ou } (\forall x \in \mathbb{R} \quad g(x) = 0) \end{aligned}$$

- Ce raisonnement est valide.
- Ce raisonnement est faux car la première implication est fautive.

- Ce raisonnement est faux car la seconde implication est fausse.
- Ce raisonnement est faux car la première et la seconde implication sont fausses.

Question 7:

- a) Pour chacune des propositions ci-dessous, dire si elle peut être utilisée, ou non, pour compléter la phrase qui suit afin d'obtenir une définition mathématique correcte.

Vous justifierez soigneusement vos réponses :

« Une fonction numérique f de la variable réelle x est majorée sur un intervalle I de l'ensemble \mathbb{R} des nombres réels si et seulement si.....»,

- a) Pour tout x élément de I , $f(x) \leq M$
 - b) Si x est un élément de I , alors $f(x) \leq M$
 - c) Pour tout x élément de I , il existe un réel M tel que $f(x) \leq M$
 - d) Il existe un nombre réel M tel que pour tout x élément de I , $f(x) \leq M$
 - e) Si x est un élément de I , alors il existe un réel M tel que $f(x) \leq M$
- b) Ecrire en langage formelle la ou les phrases sélectionnées.

Question 8:

Pour montrer que l'assertion " $\forall n \in \mathbb{N}; n^2 > 3n - 1$ " est fausse, quels sont les arguments valables ?

- L'assertion est fausse, car pour $n = 0$ l'inégalité est fausse.
- L'assertion est fausse, car pour $n = 1$ l'inégalité est fausse.
- L'assertion est fausse, car pour $n = 2$ l'inégalité est fausse.
- L'assertion est fausse, car pour $n = 1$ et $n = 2$ l'inégalité est fausse.

Question 9:

Je veux montrer que $\sqrt{13} \notin \mathbb{Q}$ par un raisonnement par l'absurde. Quel schéma de raisonnement est adapté ?

- Je suppose que $\sqrt{13}$ est rationnel et je cherche une contradiction.

- Je suppose que $\sqrt{13}$ est irrationnel et je cherche une contradiction.
- J'écris $13 = \frac{p}{q}$ (avec p, q entiers) et je cherche une contradiction.
- J'écris $\sqrt{13} = \frac{p}{q}$ (avec p, q entiers) et je cherche une contradiction.

Question 10:

On a posé la question suivante à un étudiant :

La proposition suivante est-elle vraie ?

$(P) \ll \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \text{ si } y^2 - 2xy + 8x + 9 \leq 0 \text{ alors } |y| \leq 2|x| + 4 \gg$

Il a donné la réponse suivante : « l'assertion (P) est fausse.

En effet, l'hypothèse signifie que l'on a $(y - x)^2 \leq (x - 4)^2 - 25$; mais si $-1 < x < 9$ alors $(x - 4)^2 - 25 \leq 0$, donc l'hypothèse n'est pas vérifiée, et n'impose donc aucune contrainte à y (on est dans la bande $] - 1; 9[\times \mathbb{R}$); mais la conclusion, dans ce cas entraînerait sur y la contrainte $|y| \leq 22$, ce qui serait absurde ».

Le raisonnement de cet élève est-il correct ? justifie

Bibliography

- [1] [1] Vers les mathématiques : quel travail en maternelle ?
<https://www.arpeme.fr/documents/43AF66FB307D218B4415.pdf>
- [2] lien nouveau référentiel de mathématique : <http://www.wallonie-bruxelles-enseignement.be/progr/467-2015-240.pdf>
- [3] Dorier, J.-L., Harel, G., Hillel, J., Rogalski, M., Robinet, J., Robert, A. et Sierpinska, A. (1997). L'enseignement de l'algèbre linéaire en question. Coord. par J.-L. Dorier. Éditions La Pensée Sauvage, Grenoble, France.
- [4] PRASLON, F. (2000). Continuités et ruptures dans la transition Terminale S/ DEUG Sciences en analyse. Le cas de la notion de dérivée et son environnement. Thèse de doctorat de l'université de Paris 7.
- [5] <http://guy-brousseau.com/wp-content/uploads/2012/02/contrat-milieu1.pdf>
- [6] DURAND-GUERRIER, V. (2005). Recherches sur l'articulation entre la logique et le raisonnement mathématique dans une perspective didactique. Un cas exemplaire de l'interaction entre analyses épistémologique et didactique. Apports de la théorie élémentaire des modèles pour une analyse didactique du raisonnement mathématique. Habilitation à Diriger les Recherches, Université Claude Bernard Lyon 1.
- [7] https://www2.animath.fr/wpcontent/uploads/2018/08/Rapport_Villani_Torossian-1.pdf
- [8] https://irem.univ-grenoble-alpes.fr/medias/fichier/100x2_1568109408774-pdf
- [9] la continuité intuitive : La continuité — Les-mathematiques.net
- [10] <https://www.math.ens.psl.eu/pgervais/Documents/2019/MPInt1/TD1.pdf>
Epp, S. S. (2003). The Role of Logic in Teaching Proof. The Mathematical Association of America, Monthly 110, pp. 886-899, décembre 2003.
- [11] Logique et mathématique : pub_21.pdf (cellulegeometrie.eu)

[12] Ben Kilani I. (2001), Les conceptions des élèves de la 6ème année de l'enseignement secondaire tunisiens à propos de la négation des énoncés quantifiés. Mémoire de DEA de l'Université de Tunis.

[13] <http://www.dblottiere.org/mp2i/Chapitre01.pdf>

[14] Dieudonne, M. Droniou, J. Durand-Guerrier, V. Ray, B. Theret, D. (2011), Bilan de praticiens sur la transition lycée- université. REPERES-IREM, no85, 5–30.

[15] Bridoux, S. (2014), La transition secondaire-université : une expérience en belgique. REPERES- IREM, no95, 91–102.

[16] DURAND-GUERRIER, V.(1996), logique et raisonnement mathématique : Défense et illustration de la pertinence du calcul des prédicats pour une approche didactique des difficultés liées à l'implication. Thèse de Doctorat, Université de Lyon 1.

[17] https://pedagogie.ac-strasbourg.fr/fileadmin/pedagogie/mathematiques/Lycees/Ressources_lycee/JAP_Tale_Logique/Exercices_logique_raisonnement.pdf

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
Faculté des sciences

Place des sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/sc