

Faculté des sciences

Théorie de l'homotopie rationnelle appliquée aux espaces de configuration

Auteur : HAYA ENRIQUEZ Rodrigue

Promoteurs : HOREL Geoffroy, LAMBRECHTS Pascal

Lecteurs : VAZ Pedro, DARNE Jacques

Année académique 2021-2022

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
FACULTÉ DES SCIENCES
ÉCOLE DE MATHÉMATIQUES

Théorie de l'homotopie rationnelle appliquée aux espaces de configuration

HAYA ENRIQUEZ Rodrigue
Promoteurs : HOREL Geoffroy, LAMBRECHTS Pascal
Lecteurs : VAZ Pedro, DARNE Jacques

Mémoire de Master
Juin 2022

Table des matières

Introduction	7
1 Théorie de l'homotopie rationnelle	9
1.1 Type d'homotopie et groupes d'homotopie	9
1.2 Objets (co)simpliciaux	12
1.3 Algèbres différentielles graduées commutatives	16
1.4 Formes linéaires par morceaux	19
1.5 Modèles et formalité	23
1.6 Théorème de Sullivan	26
2 Notions préliminaires	31
2.1 Compactifié de Fulton-MacPherson	31
2.2 Formes algébriques par morceaux	33
2.3 Modèle à dualité de Poincaré	36
2.4 Complexes de graphes	38
3 Validité du modèle	43
3.1 Un premier complexe de graphes	43
3.2 Structure d'ADGC	47
3.3 Lien avec les formes algébriques par morceaux	53
3.4 Construction du zigzag	62
4 Applications du modèle	69
4.1 Cas de la sphère S^n	69
4.2 Tentative de généralisation	72
Conclusion	77
A Glossaire des notations	79

Remerciements

Je remercie mes promoteurs, Geoffroy Horel et Pascal Lambrechts, pour m'avoir accompagné dans la rédaction de ce mémoire.

Plus spécifiquement, je remercie le premier pour sa disponibilité et ses précieux conseils donnés lors de nos nombreux entretiens ; je garde un très bon souvenir de nos rencontres à Paris.

Quant au second, je le remercie pour m'avoir donné l'opportunité de mener ce mémoire et pour son aide, malgré son emploi du temps chargé.

Je remercie également Najib Idrissi pour avoir pris le temps de répondre à certaines questions, aidant à la compréhension du sujet.

Introduction

Les *espaces de configuration* forment une classe d'espaces importante en topologie. Comme le nom l'indique, un espace de configuration englobe toutes les configurations d'un certain nombre de points distincts dans un espace. Formellement, étant donné un espace topologique M et un entier positif k , l'*espace de configuration* de k points dans M est défini par

$$C_M(k) := \{x \in M^k \mid x_i \neq x_j, i \neq j\}.$$

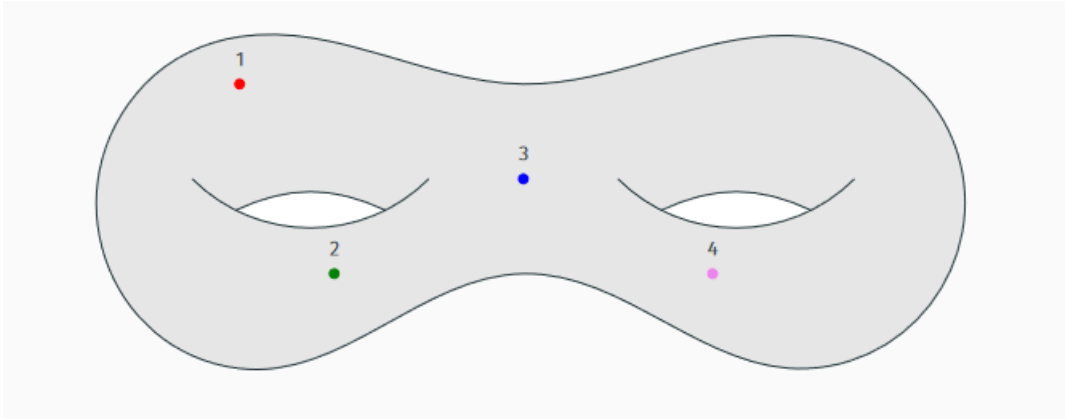


FIGURE 0.1 – Élément de $C_{\mathbb{T}}(4)$.

Ces espaces de configuration ont des applications dans des domaines très divers. En physique, plus précisément en mécanique statistique et quantique, ils permettent de modéliser des systèmes de particules ([17]). En ingénierie, notamment en robotique, ils permettent d'aborder des problèmes de *planification de mouvement* ([8],[16]). Enfin en topologie et géométrie, ils interviennent dans le *calcul de plongements*, à savoir étudier la topologie de l'espace de plongements $\text{Emb}(M, N)$ entre deux variétés lisses M et N ([14]).

Une première question qui survient concerne l'invariance homotopique de ces espaces : si deux espaces M et N ont le même type d'homotopie, en va-t-il de même pour leurs espaces de configuration $C_M(k)$ et $C_N(k)$? La question est trop naïve et donc a peu de chance d'être vraie. En fait on a un contre-exemple simple : l'espace $\mathbb{R}$ a le même type d'homotopie que le singleton $\{*\}$ mais $C_{\mathbb{R}}(2) \neq \emptyset$ tandis que $C_{\{*\}}(2) = \emptyset$ et donc leurs espaces de configuration n'ont pas le même type d'homotopie.

La question doit donc être affinée. Naturellement, on peut la restreindre au cas des variétés, et même des variétés compactes sans bord. Las, là encore la réponse est négative.

Néanmoins, le contre-exemple trouvé est nettement moins trivial que le précédent ([30]). Un énième raffinement fournit la conjecture suivante

Si k est un entier positif et M et N sont des variétés sans bord, compactes et simplement connexes avec le même type d'homotopie, les espaces de configuration $C_M(k)$ et $C_N(k)$ ont-ils également le même type d'homotopie ?

À ce jour, la conjecture est toujours ouverte. Toutefois nous avons de bonnes raisons de penser qu'elle est vraie, notamment grâce au théorème suivant

Théorème 0.0.1 (Idrissi/Campos, Willwacher). *Si k est un entier positif et M et N sont des variétés sans bord, compactes et simplement connexes avec le même type d'homotopie réelle, alors les espaces de configuration $C_M(k)$ et $C_N(k)$ ont également le même type d'homotopie réelle.*

Ce résultat a été prouvé indépendamment par N. Idrissi ([24, Corollary 79]) et R. Campos et T. Willwacher ([4, Corollary 2]). Le but de ce mémoire est de donner les outils pour comprendre l'énoncé du théorème et d'expliquer les idées de [24]. Ce papier donne en fait un résultat plus précis dont le théorème précédent est un corollaire : la *validité du modèle de Lambrechts-Stanley* et le but est de comprendre la preuve de la validité de ce modèle. A cet égard le mémoire se présente comme suit.

Dans le premier chapitre, nous expliquons les bases de la théorie de l'homotopie rationnelle. Le but principal est d'énoncer le théorème de Sullivan, qui permet d'encoder une donnée topologique, le *type d'homotopie rationnelle*, en une donnée algébrique, une *algèbre différentielle graduée commutative*.

Le deuxième chapitre vise à établir des prérequis plus spécifiques à [24]. En particulier nous y introduisons les formes algébriques par morceaux, qui justifient le fait d'utiliser le type d'homotopie réelle et non rationnelle d'une variété.

Le troisième chapitre est le cœur du mémoire. Nous y expliquons la preuve de la validité du modèle. Nous mettons en lumière les arguments principaux et originaux, en laissant de côté certains détails techniques moins instructifs.

Enfin, le dernier chapitre est une contribution plus originale du sujet. Il s'agit de répondre à une question émise par P. Lambrechts et de tenter de la généraliser. Guidé par G. Horel, l'auteur a pu aboutir aux résultats présentés dans le chapitre.

Le mémoire se veut accessible à des étudiants de master familiers avec des bases de topologie algébrique et de théorie des catégories.

Chapitre 1

Théorie de l'homotopie rationnelle

En topologie algébrique, le type d'homotopie d'un espace topologique constitue un intérêt considérable. À cet égard, l'étude des groupes d'homotopie de cet espace est importante. Toutefois calculer ces groupes est loin d'être une tâche aisée : rien que pour la sphère S^n , il n'y a même pas de conjecture quant à la forme générale de ces groupes.

Une relaxation du problème s'impose alors. C'est ici qu'intervient la théorie de l'homotopie rationnelle. Dans ce contexte, nous allons négliger la torsion intervenant dans les groupes d'homotopie d'un espace. Ce faisant, nous perdons une part importante d'information. En revanche, il existe une caractérisation purement algébrique du type d'homotopie rationnelle d'un espace simplement connexe donnée par *un modèle de Sullivan*.

Dans ce chapitre, nous commençons par donner un rappel sur les groupes d'homotopie d'un espace topologique avant de motiver l'intérêt de la théorie de l'homotopie rationnelle. Les sections suivantes viseront à établir le bagage nécessaire afin d'énoncer le théorème de Sullivan.

1.1 Type d'homotopie et groupes d'homotopie

Nous rappelons d'abord des notions de base.

Définition 1.1.1. Étant donné deux espaces topologiques X, Y , deux applications continues $f, g : X \rightarrow Y$ sont *homotopes* s'il existe une application continue $H : X \times I \rightarrow Y$ telle que $H(\cdot, 0) = f$ et $H(\cdot, 1) = g$. Nous appelons une telle application une *homotopie* entre f et g . Si f et g sont homotopes, nous notons $f \simeq g$.

Remarque 1.1.2. La relation $\simeq$ définit une relation d'équivalence sur $\mathcal{C}^0(X, Y)$. L'ensemble de ces classes d'équivalence est noté $[X, Y]$.

Définition 1.1.3. Deux espaces topologiques X, Y sont *homotopiquement équivalents* s'il existe des applications continues $f : X \rightarrow Y$ et $g : Y \rightarrow X$ telles que $1_X \simeq g \circ f$ et $1_Y \simeq f \circ g$.

Remarque 1.1.4. Les définitions ci-dessus s'adaptent dans le cas d'espaces *pointés*. Un espace pointé (X, x_0) est un espace topologique X muni d'un point de base x_0 . Un morphisme d'espaces pointés $f : (X, x_0) \rightarrow (Y, y_0)$ est une application continue préservant les points de base. Ces notions fournissent une nouvelle catégorie, la catégorie des espaces pointés $\mathbf{Top}_*$.

De nouveau il s'agit d'une relation d'équivalence entre les espaces, une des plus importantes en topologie. Afin de déterminer si deux espaces *ne* sont *pas* homotopiquement équivalents, une stratégie commune est de construire des invariants relatifs au type d'homotopie d'un espace, de préférence calculables.

Le premier tel invariant défini, probablement le plus connu, est bien entendu le *groupe fondamental* introduit par Henri Poincaré à la fin du XIXe siècle dans son *Analysis Situs*, l'ouvrage qui a ouvert la voie à la topologie algébrique.

Définition 1.1.5. Soit (X, x_0) un espace pointé. Le *groupe fondamental* $\pi_1(X, x_0)$ de (X, x_0) est l'ensemble $[(S^1, s_0), (X, x_0)]$ (dont les éléments sont appelés *lacets*) muni d'une structure de groupe où

- L'élément neutre est $e = [s \mapsto x_0]$ la classe d'homotopie de l'application constante envoyant chaque point sur x_0 .
- L'inverse d'un lacet $[\gamma]$ est le lacet $[\gamma \circ \iota]$ où $\iota : (S^1, s_0) \rightarrow (S^1, s_0)$ est défini par $\iota(e^{2i\pi t}) = e^{-2i\pi t}$. Autrement dit l'inverse d'un lacet est obtenu en le parcourant en sens inverse.
- La composition d'éléments est donnée par la concaténation de lacets.

Une définition plus rigoureuse peut être trouvée par exemple ici [19, Chapter 1]. On y montre également qu'il s'agit bien d'un groupe.

Par ailleurs, un autre fait standard est que pour un espace X connexe par arcs, la classe d'isomorphisme du groupe fondamental ne dépend pas du choix de point de base x_0 . Par conséquent, par abus de notation, on parle souvent du groupe fondamental de X .

Comme dit plus haut, le groupe fondamental est un invariant du type d'homotopie d'un espace, c'est-à-dire que si deux espaces sont homotopiquement équivalents alors leurs groupes fondamentaux sont isomorphes. La réciproque n'est hélas (ou heureusement) pas vraie : par exemple les sphères S^n de dimensions $n \geq 2$ ont toutes un groupe fondamental trivial mais ne sont pas homotopiquement équivalentes deux à deux. Ceci peut se montrer en calculant un autre invariant, leurs homologies singulières.

Pour remédier à ce problème, nous pouvons tenter de généraliser le concept de groupe fondamental pour obtenir un invariant plus précis. Ceci inspire la définition ci-dessous :

Définition 1.1.6. Soient (X, x_0) un espace pointé et $n \geq 0$ un entier. Le n -ième *groupe d'homotopie* $\pi_n(X)$ est l'ensemble $[(S^n, s_0), (X, x_0)]$ muni de la structure de groupe décrite dans [19, Section 4.1] si $n \geq 1$.

De nouveau il s'agit là d'invariants homotopiques. En particulier pour un espace pointé (X, x_0) , la collection $(\pi_0(X, x_0), \pi_1(X, x_0), \pi_2(X, x_0), \pi_3(X, x_0), \dots)$ est également un invariant, *a priori* bien plus précis que le groupe fondamental seul. Toutefois il y a deux soucis :

- De nouveau, deux espaces non homotopiquement équivalents peuvent avoir les mêmes groupes d'homotopie. C'est par exemple le cas d'un singleton $\{*\}$ et de la longue droite qui ont tous les deux des groupes d'homotopie triviaux, voir [36, 46]. Néanmoins, si X et Y sont des CW-complexes (ce qui est le cas de la plupart des espaces intéressants) et $f : X \rightarrow Y$ induit des isomorphismes sur les groupes d'homotopie, alors le théorème de Whitehead ([19, Theorem 4.5]) assure que f est une équivalence d'homotopie.
- Les groupes d'homotopie sont difficilement calculables. Pour des espaces relativement simples comme les sphères, nous avons les résultats suivants obtenus grâce à des outils avancés de topologie algébrique. On remarque un comportement assez sauvage au-dessus de la diagonale.

		$\pi_i(S^n)$											
		$i \rightarrow$											
n		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
1		$\mathbb{Z}$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
↓ 2		0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
3		0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$
4		0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}_{12}$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24} \times \mathbb{Z}_3$	$\mathbb{Z}_{15}$	$\mathbb{Z}_2$
5		0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{30}$
6		0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$
7		0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0	0
8		0	0	0	0	0	0	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_2$	$\mathbb{Z}_{24}$	0

En revanche, nous pouvons observer dans le tableau précédent que, à la torsion près, les groupes d'homotopie sont relativement sympathiques : la plupart deviennent triviaux lorsque la torsion est tuée.

Cette idée d'éliminer la torsion est à la base de la théorie de l'homotopie rationnelle. Moralement, cette théorie vise à relaxer le problème de déterminer si deux espaces ont les mêmes groupes d'homotopie ou non. Les prochaines sections visent à donner les bases de cette nouvelle théorie.

1.2 Objets (co)simpliciaux

La triangulation d'un espace X permet de le décomposer en “triangles” (plus formellement des *simplexes*) qui sont des objets relativement simples à étudier. Cette technique permet donc d'étudier cet espace par *divide and conquer*. Dans un premier temps, nous obtenons de l'information sur chaque simplexe, ce qui est plus simple à faire que sur l'espace entier. Ensuite nous regroupons toutes ces données ensembles pour en tirer de l'information sur l'espace entier.

Cette idée est à la base des formes linéaires par morceaux, qui sont elles-mêmes au coeur du théorème de Sullivan.

Toutefois il y a un double inconvénient. D'une part, tout espace n'admet pas de triangulation. Pire encore : toute variété n'admet pas de triangulation. C'est par exemple le cas de la variété de dimension 4 appelée E_8 , voir [12, Corollary 1.5]. D'autre part, bien que l'idée soit intuitive, la définition manque de formalisme et à cet égard n'est guère manipulable, ce qui limite son intérêt.

Pour pallier ces deux inconvénients, la notion d'*ensembles simpliciaux et cosimpliciaux* est apparue dans les années 50 dans un papier d'Eilenberg et Zilber, voir [6]. Un des buts est de généraliser et formaliser l'idée de décomposition en simplexes. Par la suite, nous utiliserons un formalisme catégorique pour présenter cette théorie. Cette section s'appuie principalement sur les références suivantes : [20], [23], [33].

Étant donné un nombre entier positif n , nous noterons par la suite $[n] = \{0, 1, \dots, n\}$.

Définition 1.2.1. La catégorie des simplexes Δ est la catégorie telle que

- ses objets sont $\{[n]\}_{n \in \mathbb{N}}$.
- pour $m, n \in \mathbb{N}$, les morphismes $[m] \rightarrow [n]$ sont les fonctions croissantes, c'est-à-dire $\Delta([m], [n]) = \{f : [m] \rightarrow [n] : i < j \Rightarrow f(i) \leq f(j)\}$.

Il s'agit donc d'une sous-catégorie de **Set** la catégorie des ensembles et même une sous-catégorie pleine de **PoSet** la catégorie des ensembles partiellement ordonnés.

Parmi les morphismes, il en existe deux types particuliers, les *cofaces* et *codégénérescences* :

Définition 1.2.2. Soit $n \in \mathbb{N}$.

- Pour $0 \leq i \leq n$, l'application $\delta^i : [n-1] \rightarrow [n]$ est définie par

$$\delta^i(k) = \begin{cases} k & \text{si } k < i \\ k+1 & \text{si } k \geq i \end{cases}$$

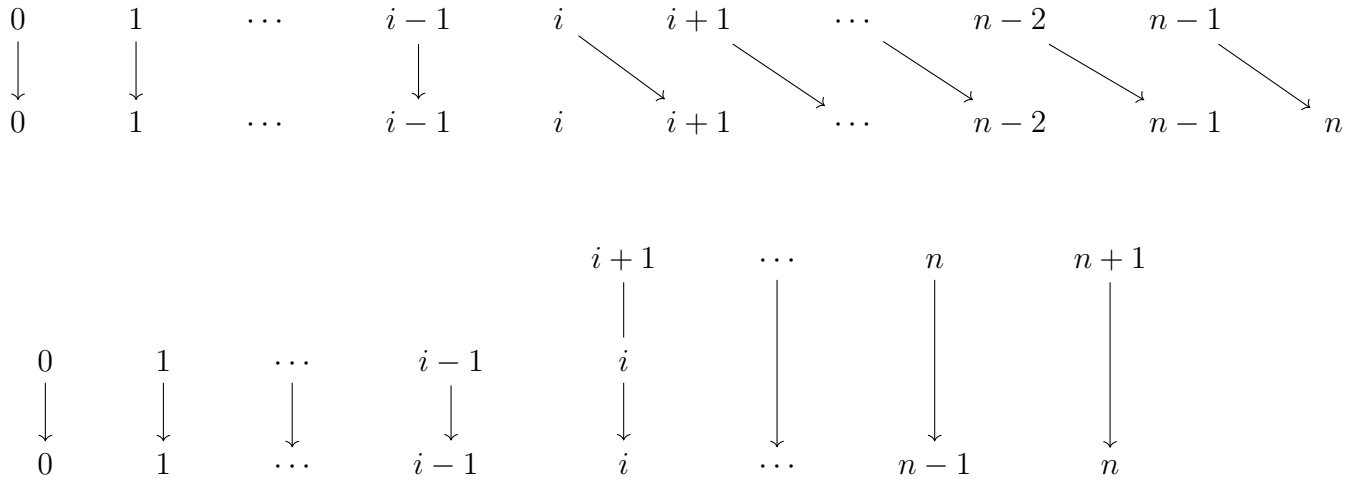
et est appelée une application de “coface”.

- Pour $0 \leq i \leq n-1$, l'application $\sigma^i : [n] \rightarrow [n-1]$ est définie par

$$\sigma^i(k) = \begin{cases} k & \text{si } k \leq i \\ k-1 & \text{si } k > i \end{cases}$$

et est appelée une application de “codégénérescence”.

L'idée est que les applications de coface δ^i sont des injections qui “évitent” l'élément i tandis que celles de codégénérescence σ^i sont des surjections qui “doublent” l'élément i .



Ces applications satisfont les relations cosimpliciales suivantes :

- $\delta^j \delta^i = \delta^i \delta^{j-1}$ si $i < j$.
- $\sigma^j \sigma^i = \sigma^i \sigma^{j+1}$ si $i \leq j$.
- $\sigma^j \delta^i = \delta^i \sigma^{j-1}$ si $i < j$.
- $\sigma^j \delta^i = \text{Id}$ si $j = i, i+1$.
- $\sigma^j \delta^i = \delta^{i-1} \sigma^j$ si $j < i-1$.

Par ailleurs, mentionnons le résultat remarquable suivant :

Proposition 1.2.3. *Tout morphisme de Δ s'écrit de manière unique comme la composée d'applications de codégénérescence suivie d'une composée d'applications de coface.*

Cette proposition justifie l'intérêt d'insister sur ces deux types d'application. En effet lorsque nous manipulons la catégorie des simplexes, nous pouvons nous contenter de manipuler ses objets et les applications de coface et codégénérescence.

Fort de cette définition abstraite, nous pouvons à présent lui donner un sens plus concret en introduisant la notion d'ensemble cosimplicial :

Définition 1.2.4. Un ensemble cosimplicial est la donnée d'un foncteur $X : \Delta \rightarrow \mathbf{Set}$.

Plus explicitement, un ensemble cosimplicial X est la donnée d'une collection $(X^n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles et d'applications de "coface" $\delta^i : X^n \rightarrow X^{n+1}$ et "codégénérescence" $\sigma^i : X^n \rightarrow X^{n-1}$ satisfaisant les relations cosimpliciales.

Un morphisme d'ensemble cosimpliciaux $f : X \rightarrow Y$ est une collection d'applications $(f^n : X^n \rightarrow Y^n)_{n \in \mathbb{N}}$ compatibles avec les applications de coface et de codégénérescence c'est-à-dire $f^{n+1} \circ \delta^i = \delta^i \circ f^n$ et $f^{n-1} \circ \sigma^i = \sigma^i \circ f^n$.

L'exemple suivant devrait aider à y voir plus clair et comprendre les terminologies de "coface" et "codégénérescence".

Définition 1.2.5. Soit $n \in \mathbb{N}$. Le n -simplexe topologique est le sous-ensemble de $\mathbb{R}^{n+1}$

$$\Delta^n = \{(t_0, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_i \geq 0, \sum_{i=0}^n t_i = 1\}$$

muni de la topologie de sous-espace.

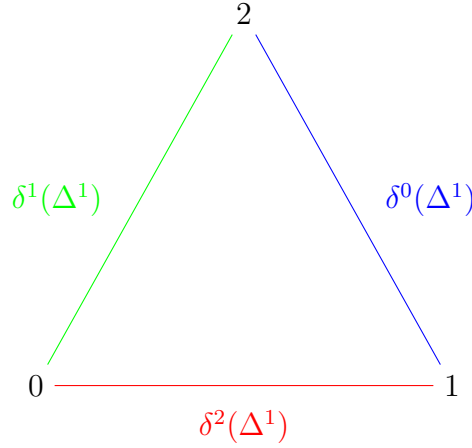
Pour le moment, nous ne nous préoccupons pas de la structure d'espace topologique.

Définition 1.2.6. L'espace cosimplicial standard Δ est l'ensemble cosimplicial donné par la collection (Δ^n) des n -simplexes topologiques avec les opérations de coface et codégénérescence suivantes :

- $\delta^i(t_0, \dots, t_{n-1}) = (t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_i, \dots, t_{n-1})$.
- $\sigma^i(t_0, \dots, t_{n+1}) = (t_0, \dots, t_i + t_{i+1}, \dots, t_{n+1})$.

Géométriquement, Δ^0 correspond à un point, Δ^1 un segment, Δ^2 un triangle, Δ^3 un tétraèdre... De plus les sommets de Δ^n sont indexés par $0, 1, \dots, n$.

Étudions à présent les applications de cofaces et codégénérescences entre Δ^1 et Δ^2 . Chacune des 3 applications de coface $\delta^0, \delta^1, \delta^2$ envoie le segment Δ^1 sur les segments $[1, 2], [0, 2], [0, 1] \subset \Delta^2$, à savoir les faces de Δ^2 .



Les applications de codégénérescence σ^0, σ^1 projettent les points du triangle sur la face $\delta^2(\Delta^1)$ parallèlement aux faces $\delta^0(\Delta^1), \delta^1(\Delta^1)$ respectivement.

L'espace cosimplicial standard est l'exemple à garder en tête, et il s'agit en fait du seul ensemble cosimplicial dont nous aurons besoin.

De manière duale nous avons la notion d'ensembles simpliciaux :

Définition 1.2.7. La catégorie **sSet** des ensembles simpliciaux est la catégorie $\text{Fun}(\Delta^{op}, \mathbf{Set})$ c'est-à-dire la catégorie dont les objets sont les foncteurs $\Delta^{op} \rightarrow \mathbf{Set}$ et les morphismes les transformations naturelles entre ces foncteurs.

Plus explicitement, un ensemble simplicial X est la donnée d'une collection $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'ensembles et d'applications de "face" $d_i : X_n \rightarrow X_{n-1}$ et "dégénérescence" $s_i : X_n \rightarrow X_{n+1}$ satisfaisant les relations simpliciales suivantes :

- $d_i d_j = d_{j-1} d_i$ si $i < j$.
- $s_i s_j = s_{j+1} s_i$ si $i \leq j$.
- $d_i s_j = s_{j-1} d_i$ si $i < j$.
- $d_i s_j = \text{Id}$ si $j = i, i + 1$.
- $d_i s_j = s_j d_{i-1}$ si $j < i - 1$.

Le lecteur averti observera que ces relations sont obtenues à partir des relations cosimpliciales en inversant l'ordre des compositions, conséquence de travailler dans le dual Δ^{op} .

Un morphisme d'ensemble simpliciaux $f : X \rightarrow Y$ est une collection d'applications $(f_n : X_n \rightarrow Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ compatibles avec les applications de face et de dégénérescence, c'est-à-dire $f_{n-1} \circ d_i = d_i \circ f_n$ et $f_{n+1} \circ s_i = s_i \circ f_n$.

Contrairement aux ensembles cosimpliciaux, les ensembles simpliciaux seront d'une grande importance dans la suite puisque ce sont eux qui permettront dans le théorème de Sullivan de connecter une donnée topologique à une donnée algébrique.

Définition 1.2.8. Le foncteur de *réalisation géométrique* $|\cdot| : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{Top}$ est défini comme suit :

- Si $X \in \mathbf{sSet}$, alors $|X| = \sqcup_{n \geq 0} X_n \times \Delta^n / \sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence engendrée par les relations $(d_i x, t) \sim (x, \delta^i t)$ et $(s_i x, t) \sim (x, \sigma^i t)$.
- Si $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme dans $\mathbf{sSet}$, alors $|f| : |X| \rightarrow |Y|$ est défini par $|f|(x, t) = (f(x), t)$.

Notons que pour une application d'ensembles simpliciaux $f : X \rightarrow Y$, l'application $|f| : |X| \rightarrow |Y|$ est bien définie car f est compatible avec les faces et dégénérescences. En outre les relations $(d_i x, t) \sim (x, \delta^i t)$ indiquent comment coller des simplexes Δ^{n-1} le long du bord d'un simplexe Δ^n tandis que les relations $(s_i x, t) \sim (x, \sigma^i t)$ indiquent à quel point un simplexe Δ^n devient dégénéré.

Exemple : considérons l'ensemble simplicial X où $X_n = \{*_n\}$ est un singleton et les faces et dégénérescences sont triviales. Les relations de dégénérescence indiquent que $(*_1, t) \sim (*_0, 1)$ pour tout $t \in \Delta^1$. Nous notons $*$ l'élément correspondant dans $|X|$. Une récurrence immédiate montre alors que $(*_{n+1}, t) \sim (*_n, \sigma^0 t) \sim (*_0, 1)$ pour tous $n \geq 0, t \in \Delta^n$. Ceci signifie donc que $|X| = \{*\}$ est un singleton.

1.3 Algèbres différentielles graduées commutatives

Avant de définir les formes polynomiales par morceaux sur un espace, nous avons besoin du concept d'*algèbre différentielle graduée commutative* que nous introduisons dans cette section. Il s'agit d'un objet algébrique possédant une riche structure inspirée des formes différentielles sur une variété lisse.

La définition s'appuie sur différents concepts que nous définissons d'abord avant de les assembler. Nous fixons d'abord un anneau commutatif unitaire R et considérerons par la suite exclusivement des R -modules. En pratique nous prendrons $R \in \{\mathbb{Q}, \mathbb{R}\}$.

La première définition justifie le qualificatif *différentielle*.

Définition 1.3.1. Un *complexe de cochaînes* de R -modules est la donnée d'une collection de R -modules $(C^i)_{i \in \mathbb{Z}}$ et de morphismes $(d_i : C^i \rightarrow C^{i+1})_{i \in \mathbb{Z}}$ appelés différentielles telles que pour tout $i \in \mathbb{Z} : d^{i+1} \circ d^i = 0$.

Souvent les différentielles sont notées sans les indices i . À cet égard nous notons communément $d^2 = 0$.

La définition suivante justifie le qualificatif *graduée*.

Définition 1.3.2. Un R -module $\mathbb{N}$ -gradué V est un R -module de la forme $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^n$.

Un élément $v \in V^n$ est dit homogène de degré n .

Un morphisme de R -modules $\mathbb{N}$ -gradués est un morphisme $f : V \rightarrow W$ telle que $f(V^n) \subset W^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Par la suite nous noterons $|v|$ pour le degré d'un élément homogène v .

Exemple : l'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{R}[X] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}X^n$ est un espace $\mathbb{N}$ -gradué où le degré d'un monôme aX^n est n .

Par simplicité, nous avons considéré le cas d'une $\mathbb{N}$ -gradation mais la définition s'adapte facilement pour un ensemble quelconque. Par la suite, nous écrirons *gradué* pour désigner $\mathbb{N}$ -gradué.

La définition suivante justifie le qualificatif *algèbre*.

Définition 1.3.3. Une algèbre est un R -module muni d'une loi de multiplication associative.

Insistons sur le fait qu'une telle loi de multiplication n'est pas nécessairement commutative.

En combinant les deux définitions précédentes nous obtenons

Définition 1.3.4. Une algèbre graduée est une algèbre V munie d'une $\mathbb{N}$ -gradation $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^n$ telle que pour tous $d, d' \in \mathbb{N}$ et $v \in V^d, v' \in V^{d'}$, on a $vv' \in V^{d+d'}$.

Exemple : l'espace des polynômes $\mathbb{R}[X] = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{R}X^n$ est muni de la multiplication usuelle et elle additionne bien les degrés.

Combinons à présent la définition de complexe de cochaînes et d'algèbre graduée :

Définition 1.3.5. Une algèbre différentielle graduée (ADG) est une algèbre graduée $V = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} V^n$ avec une structure de complexe de cochaînes

$$V^0 \xrightarrow{d} V^1 \xrightarrow{d} V^2 \xrightarrow{d} \dots$$

où la différentielle satisfait la condition de Leibniz : pour tous $a, b \in V$ homogènes, $d(ab) = d(a)b + (-1)^{|a|}ad(b)$.

Exemple : soit M une variété lisse. Le complexe de de Rham $\Omega_{DR}(M)$ est une ADG. En effet nous avons la cochaîne

$$\Omega_{DR}^0(M) \xrightarrow{d} \Omega_{DR}^1(M) \xrightarrow{d} \dots$$

où $\Omega_{DR}^k(M)$ désigne le $\mathbb{R}$ –espace vectoriel des k –formes différentielles sur M et d est la différentielle usuelle. Le produit de deux formes est donné par le produit extérieur et si $\omega \in \Omega_{DR}^k(M)$ et $\omega' \in \Omega_{DR}^l(M)$, alors $\omega \wedge \omega' \in \Omega_{DR}^{k+l}(M)$.

Enfin ajoutons l'*anticommutativité* et nous obtenons un des objets les plus importants de ce mémoire.

Définition 1.3.6. Une algèbre différentielle graduée commutative (ADGC) est une algèbre différentielle graduée V telle que pour tous éléments homogènes $a, b \in V$: $ab = (-1)^{|a||b|}ba$.

Remarque. L'anticommutativité implique que $ab = ba$ si a ou b est de degré pair. En outre si a est de degré impair et $R = \mathbb{K}$ est un corps de caractéristique différente de 2, alors $a^2 = (-1)^{|a|^2}a^2$ et donc $a^2 = 0$.

Exemple : le complexe de de Rham d'une variété lisse est une ADGC. En effet nous avons vu précédemment que c'était une ADG. L'anticommutativité provient du fait que le produit extérieur est anticommutatif : pour deux formes ω, ω' nous avons bien $\omega \wedge \omega' = (-1)^{|\omega||\omega'|}\omega' \wedge \omega$.

Fort de cette définition, nous allons chercher à construire facilement des ADGC. Pour cela nous allons utiliser l'algèbre graduée commutative libre sur des variables. La construction présentée ici repose sur [9, Chapter 3, (b)].

Soit $\{v_i\}_{i \in I}$ un ensemble gradué, c'est-à-dire qu'à chaque élément v_i est assigné un degré $|v_i| \in \mathbb{N}$. Nous pouvons alors construire l'espace vectoriel libre sur cet ensemble que nous appelons V . La gradation des v_i en fait alors un espace gradué libre.

À partir de là, nous pouvons définir l'algèbre tensorielle $T(V) = \bigoplus_{k=0}^{+\infty} V^{\otimes k}$ où la multiplication est définie par $v \cdot w := v \otimes w$. Notons que par convention $V^{\otimes 0} = R$ de sorte que $R \subset T(V)$.

Notons I l'idéal engendré par les éléments de la forme $v_i \otimes v_j - (-1)^{|v_i||v_j|}v_j \otimes v_i$. L'algèbre graduée commutative libre sur la base $\{v_i\}_{i \in I}$ est alors définie par

$$\bigwedge V := T(V)/I.$$

Nous noterons également $\bigwedge V = \bigwedge (v_i)_{i \in I}$.

Si en outre nous pouvons définir une application $d : V \rightarrow V$ satisfaisant les conditions d'une différentielle, c'est-à-dire augmente le degré de 1, $d^2 = 0$ et d satisfait la relation de Leibniz, alors nous obtenons une ADGC dite *quasi-libre*.

Exemple : considérons deux variables x, y de degrés 2 et 3 respectivement. Fixons $R = \mathbb{Q}$ et considérons l'algèbre graduée commutative libre $\Lambda(x, y)$ munie de l'endomorphisme d où $dx = 0$, $dy = x^2$ et d est étendue aux produits par la relation de Leibniz. Nous avons bien que d augmente le degré de 1 et $d^2x = d0 = 0 = dx \cdot x + x \cdot x = d(x^2) = d^2y$ et donc il s'agit bien d'une différentielle. Par ailleurs puisque x est de degré pair et y est de degré impair, nous avons $y^2 = 0$ et x commute avec y de sorte que, à un scalaire près, l'unique élément de degré $2n + 3$ est $x^n y$ tandis que l'unique élément de degré $2n$ est x^n . Le complexe de cochaînes correspondant est donc

$$\mathbb{Q} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Q}x \rightarrow \mathbb{Q}y \rightarrow \mathbb{Q}x^2 \rightarrow \mathbb{Q}xy \rightarrow \dots$$

Par ailleurs nous pouvons calculer par récurrence que $dx^n = dx \cdot x^{n-1} + xdx^{n-1} = 0$ et $d(x^n y) = d(x^n)y + x^n dy = x^n x^2 = x^{n+2}$.

1.4 Formes linéaires par morceaux

Maintenant que les objets (co)simpliciaux et les ADGC sont définis, nous sommes enfin en mesure d'introduire les formes linéaires par morceaux sur un espace X en assemblant ces deux notions. Rappelons que la construction s'inspire de la notion de triangulation. À cet égard, nous commençons par définir l'espace des formes linéaires par morceaux sur les simplexes Δ^n . Jusqu'à la fin du chapitre, nous exposerons les idées de Sullivan exposées dans [37] et détaillées en long et en large dans [9], la Bible de la théorie de l'homotopie rationnelle. D'autres articles résument ces idées, voir [10], [21].

Par la suite nous travaillerons sur le corps $\mathbb{Q}$.

Définition 1.4.1. L'espace des *formes linéaires par morceaux* sur le simplexe Δ^n est l'ADGC

$$(\Omega_{PL})_n = \left(\frac{\Lambda(t_i, y_j)_{0 \leq i, j \leq n}}{\sum_{i=0}^n t_i = 1, \sum_{j=0}^n y_j = 0}, dt_i = y_i \right)$$

où $|t_i| = 0$.

Concrètement, un élément de $(\Omega_{PL})_n$ peut s'écrire comme une somme de termes de la forme $f(t_0, \dots, t_n) \cdot dt_{i_1} \wedge \dots \wedge dt_{i_k}$ où f est un polynôme à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Les variables $t_0, \dots, t_n$ s'interprètent comme les coordonnées d'un point du simplexe, d'où la condition $\sum_{i=0}^n t_i = 1$. Les variables y_j sont là pour représenter les différentielles et la relation $\sum_{j=0}^n y_j = 0$ provient du fait que différentier une constante, ici 1, donne 0.

Voyons à présent comment assembler ces espaces pour former un ensemble simplicial. Grâce aux opérations de coface $\delta^i : \Delta^{n-1} \rightarrow \Delta^n$ et codégénérescence $\sigma^i : \Delta^n \rightarrow \Delta^{n-1}$, nous obtenons par pullback des applications $(\delta^i)^* : (\Omega_{PL})_n \rightarrow (\Omega_{PL})_{n-1}$ et $(\sigma^i)^* : (\Omega_{PL})_{n-1} \rightarrow (\Omega_{PL})_n$.

Par exemple, en interprétant la variable t_k comme la 0-forme qui évalue la k -ième coordonnée d'un point, nous obtenons

$$((\delta^i)^* t_k)_{(t_0, \dots, t_{n-1})} = (t_k)_{\delta^i(t_0, \dots, t_{n-1})} = (t_k)_{(t_0, \dots, t_{i-1}, 0, t_{i+1}, \dots, t_{n-1})} = \begin{cases} t_k & \text{si } k < i \\ 0 & \text{si } k = i \\ t_{k-1} & \text{sinon} \end{cases}.$$

De même nous avons

$$((\sigma^i)^* t_k)_{(t_0, \dots, t_n)} = (t_k)_{\sigma^i(t_0, \dots, t_n)} = (t_k)_{(t_0, \dots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, t_{i+2}, \dots, t_n)} = \begin{cases} t_k & \text{si } k < i \\ t_k + t_{k+1} & \text{si } k = i \\ t_{k+1} & \text{sinon} \end{cases}.$$

De plus, les valeurs sur les variables y_j sont obtenues par compatibilité du pullback avec la différentielle.

Nous définissons alors les applications de face $d_i : (\Omega_{PL})_n \rightarrow (\Omega_{PL})_{n-1}$ et dégénérescence $s_i : (\Omega_{PL})_{n-1} \rightarrow (\Omega_{PL})_n$ par $d_i = (\delta^i)^*$ et $s_i = (\sigma^i)^*$ respectivement.

Par contravariance du pullback, les relations simpliciales sont respectées par les applications de face et dégénérescence de sorte que nous obtenons un ensemble simplicial $\Omega_{PL} = \{(\Omega_{PL})_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Voyons à présent comment étendre cette idée de formes linéaires par morceaux à un espace arbitraire.

Définition 1.4.2. Le foncteur d'ensemble singulier est le foncteur $S : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{sSet}$ où $S(X)_n = \mathbf{Top}(\Delta^n, X)$.

Par contravariance du foncteur $\mathbf{Top}(\cdot, X)$ pour X fixé, nous obtenons bien un ensemble simplicial où les applications de face $d_i : S(X)_n \rightarrow S(X)_{n-1}$ sont données par $d_i f = f \circ \delta^i$ et celles de dégénérescence $s_i : S(X)_{n-1} \rightarrow S(X)_n$ sont données par $s_i f = f \circ \sigma^i$.

Par ailleurs il est possible d'associer à un ensemble simplicial K une ADGC. Nous définissons pour cela l'ensemble $\Omega_{PL}(K) := \mathbf{sSet}(K, \Omega_{PL})$ avec la structure d'ADGC provenant de celle de Ω_{PL} . Plus précisément, $\Omega_{PL}^k(K) = \{f \in \Omega_{PL}(K), f(K_n) \subset (\Omega_{PL})_n^k\}$. Nous pouvons importer la différentielle de $(\Omega_{PL})_n$ pour définir $df \in \Omega_{PL}(K)$ par $(df)(k) = d(f(k))$ pour $k \in K$. Notons que $(d^2 f)(k) = d^2(f(k)) = 0$. De plus si $f \in \Omega_{PL}^k(K)$ alors $df(K_n) = d(f(K_n)) \subset (\Omega_{PL})_n^{k+1}$ de sorte que $df \in \Omega_{PL}^{k+1}(K)$. Nous avons donc un complexe de cochaînes

$$\Omega_{PL}^0(K) \rightarrow \Omega_{PL}^1(K) \rightarrow \Omega_{PL}^2(K) \rightarrow \dots$$

Similairement à la différentielle, la structure d'ADGC sur chaque $(\Omega_{PL})_n$ permet de définir le produit, la somme, la multiplication par un scalaire... d'éléments de $\Omega_{PL}(K)$. Par exemple si $f \in \Omega_{PL}^k(K)$ et $f' \in \Omega_{PL}^l(K)$, alors pour un élément $k \in K_n$ nous avons $(ff')(k) = f(k)f'(k') \in (\Omega_{PL})_n^{k+l}$. En particulier la multiplication est bien anticommutative.

Définition 1.4.3. Le foncteur $\Omega_{PL} : \mathbf{sSet} \rightarrow \mathbf{ADGC}^{op}$ est défini par $\Omega_{PL} = \mathbf{sSet}(\cdot, \Omega_{PL})$ avec la structure d'ADGC ci-dessus.

En précomposant avec le foncteur d'ensemble singulier S , nous obtenons alors un foncteur $\Omega_{PL} \circ S : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{ADGC}^{op}$ que nous notons simplement Ω_{PL} . Pour un espace topologique X , un élément de $\Omega_{PL}(X)$ est donc une application simpliciale ω qui à chaque application continue $f : \Delta^n \rightarrow X$ associe un élément de $(\Omega_{PL})_n$. Nous avons donc

$$\Omega_{PL}^k(X) = \{\omega = (\omega_f \in (\Omega_{PL})_n^k)_{f:\Delta^n \rightarrow X} \mid d_i \omega_f = \omega_{f \circ \partial_i}, s_j \omega_f = \omega_{f \circ \sigma_j}\}$$

Nous pouvons interpréter l'ADGC $\Omega_{PL}(X)$ de la manière suivante. Supposons que l'espace X soit triangulé. Sur chaque simplexe $f : \Delta^n \rightarrow X$ de X , supposons avoir une forme $\omega_f \in (\Omega_{PL})_n^k$, et supposons de plus que ces formes coïncident sur les faces communes. En recollant ces formes ensemble, nous obtenons alors un élément $\omega \in \Omega_{PL}(X)^k$. Cette interprétation n'est autre que notre motivation initiale.

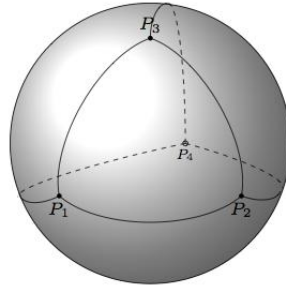


FIGURE 1.1 – Triangulation de la sphère

Nous allons à présent nous intéresser aux propriétés de ce foncteur. L'accent va être mis sur la cohomologie, dont nous rappelons la définition générale :

Définition 1.4.4. Soit

$$0 \xrightarrow{d^{-1}} C^0 \xrightarrow{d^0} C^1 \xrightarrow{d^1} C^2 \xrightarrow{d^2} \dots$$

un complexe de cochaînes. Pour $n \geq 0$, la *cohomologie* de degré n est définie par $H^n(C) := \frac{\ker(d^n)}{\text{im}(d^{n-1})}$. Si C et D sont des complexes de cochaînes, un *quasi-isomorphisme* est un morphisme $f : C \rightarrow D$ pour lequel les applications induites en cohomologie $H^n(f) : H^n(C) \rightarrow H^n(D)$ sont des isomorphismes.

Parmi les cohomologies les plus connues, citons la *cohomologie singulière* $H^*(X; G)$ d'un espace X à coefficients dans un groupe abélien G (voir [19, Section 3.1] pour la construction), ou encore la *cohomologie de de Rham* relative au complexe de de Rham d'une variété lisse X . Rappelons que dans ce cas, le théorème de de Rham stipule que $H^*(X; \mathbb{R}) \cong H_{DR}(X)$ où $H^*(X; \mathbb{R})$ est la cohomologie singulière de X à coefficients réels et $H_{DR}(X)$ est la cohomologie du complexe de de Rham de X ([2, Theorem 8.9]). Plus précisément il existe un quasi-isomorphisme naturel $\eta_X : \Omega_{DR}(X) \rightarrow C^*(X)$ entre le complexe de de Rham de X et le complexe de cochaînes singulières, obtenu par un procédé d'intégration.

Il s'avère que nous avons un résultat analogue pour les formes linéaires par morceaux.

Théorème 1.4.5. [9, Theorem 10.15] *Soit X un espace topologique. Alors il existe un quasi-isomorphisme naturel $\eta_X : \Omega_{PL}(X) \rightarrow C^*(X; \mathbb{Q})$ c'est-à-dire que le morphisme induit $H(\eta_X) : H(\Omega_{PL}(X)) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme et si $f : X \rightarrow Y$ est une application continue alors le diagramme suivant commute*

$$\begin{array}{ccc} \Omega_{PL}(Y) & \xrightarrow{\Omega_{PL}(f)} & \Omega_{PL}(X) \\ \eta_Y \downarrow & & \downarrow \eta_X \\ C^*(Y; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{C^*(f)} & C^*(X; \mathbb{Q}) \end{array} .$$

Par ailleurs l'isomorphisme $H(\eta_X)$ est également un isomorphisme de $\mathbb{Q}$ -algèbres graduées commutatives.

Le point à retenir de ce théorème est que nous avons des isomorphismes naturels $H(\Omega_{PL}(X)) \cong H^*(X; \mathbb{Q})$ d'algèbres graduées commutatives. Il s'agit d'un résultat crucial dans la preuve du théorème de Sullivan.

Une autre propriété intéressante du complexe Ω_{PL} est qu'il permet de définir un autre foncteur d'ensemble singulier $T : \mathbf{ADGC} \rightarrow \mathbf{sSet}^{op}$ par $T(A, d) = (T(A, d))_{n \geq 0}$ où $T(A, d)_n = \mathbf{ADGC}((A, d), (\Omega_{PL})_n)$, les opérations de face et dégénérescence étant obtenues en composant avec celles de l'ensemble simplicial Ω_{PL} . En particulier, en composant ce foncteur T avec le foncteur de réalisation géométrique, nous obtenons un foncteur de réalisation géométrique $|\cdot| : \mathbf{ADGC} \rightarrow \mathbf{Top}^{op}$.

Comme nous pouvons déjà le constater, cette ADGC est centrale dans la théorie de l'homotopie rationnelle. D'un point de vue théorique, elle est donc de la plus haute importance. En revanche elle n'est pas utilisable en pratique car "trop grande". Par conséquent, si on veut distinguer deux espaces par leurs types d'homotopie rationnelle, il faut développer d'autres outils qui nous permettront de faire des calculs concrets. C'est l'objet de la prochaine section.

1.5 Modèles et formalité

Dans cette section, nous présentons les concepts de *modèle* et *formalité* d'un espace qui sont à la base de l'étude d'un espace du point de vue de son type d'homotopie rationnelle. Brièvement, un modèle d'une ADGC (A, d) est une ADGC qui lui est quasi-isomorphe et manipulable.

Nous définissons d'abord ces notions pour les ADGC avant de les étendre aux espaces topologiques grâce au foncteur Ω_{PL} .

Définition 1.5.1. Une *algèbre de Sullivan* est une ADGC $(\Lambda V, d)$ telle que

- $V = \bigoplus_{n \geq 1} V^n$ est engendrée en degrés strictement positifs.
- $V = \bigcup_{k=0}^{+\infty} V(k)$ avec $V(k)$ un sous-espace, $V(k) \subset V(k+1)$ et $d(V(0)) = 0$, $dV(k+1) \subset \Lambda V(k)$ pour tout $k \geq 0$.

Exemples :

- Reprenons l'ADGC $(\Lambda(x, y), dx = 0, dy = x^2)$ avec $|x| = 2$. Définissons les sous-espaces $V(0) = \mathbb{Q}x$ et $V(k) = V = \mathbb{Q}x \oplus \mathbb{Q}y$ pour $k \geq 1$. Alors $V = \bigcup_{k=0}^{+\infty} V(k)$ et $V(k) \subset V(k+1)$ pour $k \geq 0$. En outre si $k \geq 1$ il est clair que $dV(k+1) \subset \Lambda V(k)$. Pour $k = 0$ nous avons $dy = x^2 \in \Lambda(\mathbb{Q}x)$ et donc $dV(1) \subset \Lambda V(0)$. Enfin $dV(0) = 0$ car $dx = 0$.
- L'ADGC $(\Lambda(x, y, z), d)$ avec $dx = yz, dy = zx, dz = xy$ et $|x| = |y| = |z| = 1$ n'est pas une algèbre de Sullivan. En effet supposons par l'absurde que ce soit le cas. Notons $V = \mathbb{Q}x \oplus \mathbb{Q}y \oplus \mathbb{Q}z$. Nous avons donc une union croissante $V = \bigcup_{k=0}^{+\infty} V(k)$ de sous-espaces $V(k)$. Notons k_x l'indice minimum pour lequel $x \in V(k)$ et de même pour k_y, k_z . La condition sur la différentielle implique que $k_x \geq k_y, k_z$ et de même pour k_y, k_z . Par conséquent $k_x = k_y = k_z := k$. Dans ce cas $V(k-1) = 0, V(k) = V$ ce qui est absurde car $dV \not\subset \Lambda V(k-1) = 0$.

Ceci donne une structure relativement simple à manipuler contrairement à des ADGC arbitraires (par exemple les formes linéaires par morceaux sur un espace), encore plus si le sous-espace V^n est de dimension finie pour chaque n et nul à partir d'un certain rang.

Définition 1.5.2. Une algèbre de Sullivan $(\Lambda V, d)$ est minimale si $d(\Lambda V) \subset (\bigoplus_{n \geq 1} (\Lambda V)^n)^{\otimes 2}$.

Autrement dit, la différentielle d'un élément est un mot de longueur au moins deux. L'ADGC $(\Lambda(x, y), dx = 0, dy = x^2)$ ci-dessus est un exemple d'algèbre minimale.

Définition 1.5.3. Un modèle de Sullivan d'une ADGC (A, d) est la donnée d'une algèbre de Sullivan $(\Lambda V, d)$ et d'un quasi-isomorphisme $(\Lambda V, d) \rightarrow (A, d)$.

Proposition 1.5.4. [9, Proposition 12.1] *Soit (A, d) une ADGC connexe càd $H^0(A) = \mathbb{K}$. Alors (A, d) admet un modèle de Sullivan.*

L'idée de la preuve est de partir d'un morphisme surjectif en cohomologie et de récursivement construire des algèbres graduées V_i qui permettront de tuer des cocycles en cobords afin de tuer les noyaux.

Démonstration. La preuve est constructive et se fait par récurrence. Définissons $V_0 = H^+(A)$ et $m_0 : (\wedge V, d) \rightarrow (A, d)$ par $m([z]) = z$ où z est un cocycle. Alors $H(m_0) : H^+(A) \rightarrow H^+(A)$ est l'identité. En outre $H^0(A) = \mathbb{Q}$ donc $H(m_0)$ est une surjection.

Supposons à présent avoir des sous-algèbres graduées $V_0, V_1, \dots, V_k$ et un morphisme $m_k : (\wedge(\oplus_{i=0}^k V_i), d) \rightarrow (A, d)$. Soient $(z_\alpha)_{\alpha \in I}$ des cocycles de $\wedge(\oplus_{i=0}^k V_i)$ tels que $([z_\alpha])_{\alpha \in I}$ soit une base de $\ker H(m_k)$.

Définissons une nouvelle algèbre graduée V_{k+1} dont une base est donnée par $(v_\alpha)_{\alpha \in I}$ où $|v_\alpha| = |z_\alpha| - 1$. L'ADGC $\wedge(\oplus_{i=0}^k V_i)$ est alors étendue en $\wedge(\oplus_{i=0}^{k+1} V_i)$ en posant $dv_\alpha = z_\alpha$. Puisque $d^2 v_\alpha = dz_\alpha = 0$ ceci fournit bien une différentielle.

Par ailleurs, puisque $[z_\alpha] \in \ker H(m_k)$, nous pouvons écrire $m_k(z_\alpha) = dw_\alpha$. Étendons m_k en $m_{k+1} : (\wedge(\oplus_{i=0}^{k+1} V_i), d) \rightarrow (A, d)$ en posant $m_{k+1}(v_\alpha) = w_\alpha$. On a alors $(m_{k+1}d)(v_\alpha) = dw_\alpha = (dm_{k+1})(v_\alpha)$. Cette extension définit donc un morphisme d'ADGC.

Montrons à présent que chaque V_k est concentrée en degrés ≥ 1 . En inspectant la construction des V_k , on observe qu'il suffit de prouver que tout cocycle non trivial z tel que $[z] \in \ker H(m)$ est de degré au moins 2. Soit z un cocycle de degré 1. Nous pouvons alors écrire $z = \sum_{i=0}^k v_i$ où $v_i \in V_i$ est de degré 1. Alors $0 = dz = \sum_{i=0}^k dv_i$. En particulier $dv_k = -\sum_{i=0}^{k-1} dv_i \in \wedge(\oplus_{i=0}^{k-1} V_i)$. Ainsi $dv_k \in \wedge(\oplus_{i=0}^{k-1} V_i) \cap \ker H(m_{k-1}) = \ker H(m_{k-2})$. Toutefois par construction les éléments de $\ker H(m_{k-2})$ sont précisément des cobords d'éléments de $\wedge(\oplus_{i=0}^{k-1} V_i)$. Ceci implique que $dv_k = 0$. En répétant récursivement l'argument nous trouvons $z = v_0 \in V_0$ et donc $0 = H(m)([z]) = H(m_0)(v_0)$ ce qui implique que $v_0 = 0$ car $H(m_0)$ est un isomorphisme.

Ceci termine de prouver que $(\wedge V, d)$ est une algèbre de Sullivan où $V = \oplus_{i=0}^{+\infty} V_i$.

Montrons ensuite que m est un quasi-isomorphisme. La surjectivité provient du fait que $H(m_0)$ est une surjection et $m|_{V_0} = m_0$.

Pour l'injectivité soit z un cocycle tel que $H(m)([z]) = 0$. Il existe $k \geq 0$ tel que $z \in \wedge(\oplus_{i=0}^k V_i)$ et alors $H(m)(z) = H(m_k)(z)$. Par construction, il existe $v \in V_{k+1}$ tel que $dv = z$. Donc z est un cobord et alors $[z] = 0$. $\square$

Le lecteur averti aura remarqué que la cohomologie d'une ADGC est un objet de grand intérêt. À cet égard, nous souhaiterions définir une relation d'équivalence entre ADGC impliquant des quasi-isomorphismes. Nous pourrions d'abord définir une relation entre

ADGC par $(A, d) \sim (B, d)$ s'il existe un quasi-isomorphisme $(A, d) \xrightarrow{\sim} (B, d)$. Malheureusement cette relation n'est pas symétrique comme le montre l'exemple suivant : considérons les ADGC $(A, d) = (\wedge(x, y), dx = 0, dy = x^2)$ et $(H(A, d), 0)$ où $|x| = 2, |y| = 3$; nous avons eu l'occasion d'étudier cette ADGC précédemment et pour rappel elle ressemble à

$$\mathbb{Q} \xrightarrow{d} 0 \xrightarrow{d} \mathbb{Q}x \xrightarrow{d} \mathbb{Q}y \xrightarrow{d} \mathbb{Q}x^2 \xrightarrow{d} \dots$$

avec $A^{2n} = \mathbb{Q}x^n, A^{2n+3} = \mathbb{Q}x^ny$ et $d(x^ny) = x^{n+2}$. En particulier l'ADGC $(H(A, d), 0)$ ressemble à

$$\mathbb{Q} \rightarrow 0 \rightarrow \mathbb{Q}x \rightarrow 0 \rightarrow 0 \rightarrow \dots$$

Si un quasi-isomorphisme $f : (H(A, d), 0) \rightarrow (A, d)$ existait, nécessairement $f(x) = x$. Or nous aurions alors $0 = f(x^2) = f(x)^2 = x^2$. Absurde.

Pour résoudre ce problème de symétrie, il faut donc autoriser les morphismes à aller dans l'autre sens.

Définition 1.5.5. Deux ADGC $(A, d), (B, d)$ sont *faiblement équivalentes* s'il existe un zigzag

$$(A, d) \xleftarrow{\sim} (A_1, d) \xrightarrow{\sim} \dots \xleftarrow{\sim} (A_n, d) \xrightarrow{\sim} (B, d)$$

où chaque morphisme est un quasi-isomorphisme. Nous notons alors $(A, d) \sim (B, d)$.

Remarque 1.5.6. Il s'agit bien d'une relation d'équivalence. Pour la réflexivité, il suffit de prendre le zigzag $(A, d) \leftarrow (A, d) \rightarrow (A, d)$ où chaque morphisme est l'identité. La symétrie est triviale et la transitivité s'obtient en concaténant des zigzags : si nous avons deux zigzags

$$(A, d) \leftarrow (A_0, d) \rightarrow \dots \leftarrow (A_n, d) \rightarrow (B, d)$$

et

$$(B, d) \leftarrow (Z_0, d) \rightarrow \dots \leftarrow (Z_n, d) \rightarrow (C, d)$$

alors nous obtenons un zigzag entre (A, d) et (C, d) donné par

$$(A, d) \leftarrow (A_0, d) \rightarrow \dots \leftarrow (A_n, d) \rightarrow (B, d) \leftarrow (Z_0, d) \rightarrow \dots \leftarrow (Z_n, d) \rightarrow (C, d).$$

Définition 1.5.7. Une ADGC (A, d) est *formelle* s'il existe un zigzag de quasi-isomorphismes $(H(A), 0) \leftarrow \dots \rightarrow (A, d)$.

L'intérêt de ces ADGC est qu'avoir une différentielle nulle facilite grandement les calculs.

1.6 Théorème de Sullivan

Grâce aux outils développés précédemment, nous sommes en mesure d'énoncer le résultat principal de la théorie de l'homotopie rationnelle, à savoir le théorème de Sullivan qui encode univoquement une donnée topologique en une donnée algébrique.

Avant cela, explicitons de quelles données topologique et algébrique nous parlons. Tout commence avec le résultat suivant, qui est une conséquence du théorème de Whitehead-Serre, [9, Theorem 8.6], [9, Chapter 9, section c)] :

Proposition 1.6.1. *Soient X et Y des espaces simplement connexes et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Alors les énoncés suivants sont équivalents :*

- *Le morphisme induit $\pi_*(f) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est un isomorphisme.*
- *Le morphisme induit $H_*(f; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme.*
- *Le morphisme induit $H^*(f; \mathbb{Q})$ est un isomorphisme.*

Le cas échéant, f est appelée une équivalence d'homotopie rationnelle.

Remarque 1.6.2. Si X est un espace simplement connexe, alors les groupes d'homotopies $\pi_0(X), \pi_1(X)$ sont triviaux par définition, et donc sont munis d'une structure de groupe abélien. En outre les groupes d'homotopies $\pi_n(X)$ sont abéliens pour $n \geq 2$. Ceci montre que les groupes $\pi_n(X) \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ sont bien définis.

Par ailleurs, si G est un groupe abélien et $g \in G$ est un élément de torsion, alors pour un entier $n > 0$ tel que $n \cdot g = 0$ nous avons pour tout $q \in \mathbb{Q}$

$$g \otimes_{\mathbb{Z}} q = (n \cdot g) \otimes_{\mathbb{Z}} \frac{q}{n} = 0.$$

Par conséquent $g \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{Q}$ est trivial. Ceci justifie l'idée qu'en théorie de l'homotopie rationnelle, les éléments de torsion des groupes d'homotopie sont tués.

Fort de cette définition, nous pouvons définir une relation d'équivalence sur les espaces simplement connexes.

Définition 1.6.3. Deux espaces simplement connexes X et Y ont le même *type d'homotopie rationnelle* s'il existe un zigzag

$$X \leftarrow Z_0 \rightarrow \cdots \leftarrow Z_n \rightarrow Y$$

où chaque Z_i est un espace simplement connexe et chaque morphisme est une équivalence d'homotopie rationnelle.

Remarque 1.6.4. Il s'agit bien d'une relation d'équivalence ; l'argument du zigzag est le même que celui pour les ADGC.

Remarque 1.6.5. La définition ci-dessus n'est pas celle présentée dans la littérature autour de la théorie de l'homotopie rationnelle. Traditionnellement, on définit d'abord le type d'homotopie rationnelle d'un espace simplement connexe X grâce à la construction d'un nouvel espace $X_{\mathbb{Q}}$ appelé *rationalisation* de X , voir [9, Chapter 9, section c)]. Ensuite, [9, Proposition 9.8] stipule que notre définition de types d'homotopies égaux est compatible avec la définition usuelle. N'étant intéressés que par le fait de savoir si deux espaces ont le même type d'homotopie rationnelle ou non, nous nous contentons de notre définition.

Observons comme cette définition ressemble à celle de faible équivalence d'ADGC. En fait cette similarité nous donne la proposition suivante :

Proposition 1.6.6. *Si deux espaces simplement connexes X et Y ont le même type d'homotopie rationnelle, alors $\Omega_{PL}(X) \sim \Omega_{PL}(Y)$.*

La preuve est une conséquence du lemme suivant :

Lemme 1.6.7. *Soient X et Y deux espaces simplement connexes et $f : X \rightarrow Y$ une application continue. Si f est une équivalence d'homotopie rationnelle, alors le morphisme $\Omega_{PL}(f) : \Omega_{PL}(Y) \rightarrow \Omega_{PL}(X)$ est une équivalence faible.*

Démonstration. Rappelons que nous avons des isomorphismes naturels $H(\eta_X) : H(\Omega_{PL}(X)) \rightarrow H^*(X; \mathbb{Q})$ et $H(\eta_Y) : H(\Omega_{PL}(Y)) \rightarrow H^*(Y; \mathbb{Q})$. En particulier nous obtenons le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} H(\Omega_{PL}(Y)) & \xrightarrow{H(\Omega_{PL}(f))} & H(\Omega_{PL}(X)) \\ H(\eta_Y) \downarrow & & \downarrow H(\eta_X) \\ H^*(Y; \mathbb{Q}) & \xrightarrow{H^*(f; \mathbb{Q})} & H^*(X; \mathbb{Q}) \end{array}$$

où les trois morphismes du bas sont des isomorphismes. Nous en déduisons que $H(\Omega_{PL}(f))$ en est un également et donc $\Omega_{PL}(f)$ est un quasi-isomorphisme. $\square$

Preuve de la proposition. Considérons un zigzag d'équivalences d'homotopie rationnelle entre X et Y :

$$X \leftarrow Z_0 \rightarrow \cdots \leftarrow Z_n \rightarrow Y.$$

Nous obtenons alors un zigzag d'ADGC

$$\Omega_{PL}(X) \xleftarrow{=} \Omega_{PL}(X) \rightarrow \Omega_{PL}(Z_0) \leftarrow \cdots \rightarrow \Omega_{PL}(Z_n) \leftarrow \Omega_{PL}(Y) \xrightarrow{=} \Omega_{PL}(Y).$$

Par le lemme, les morphismes obtenus sont des équivalences faibles. Par conséquent $\Omega_{PL}(X) \sim \Omega_{PL}(Y)$. $\square$

En vertu de cette proposition, le type d'équivalence faible de $\Omega_{PL}(X)$ est un invariant relatif au type d'homotopie rationnelle de X . Autrement dit nous avons une correspondance

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Types d'homotopie} \\ \text{d'espaces simplement} \\ \text{connexes} \end{array} \right\} \rightarrow \{\text{Equivalences faibles d'ADGC}\}.$$

Nous pourrions nous contenter de ce résultat, mais il s'avère qu'on peut aller plus loin en obtenant une correspondance dans l'autre sens.

Notons tout d'abord, en vertu du théorème de Hurewicz [19, Theorem 4.32] que pour un espace simplement connexe X , $H_1(X; \mathbb{Z}) = 0$ et donc $H_1(X; \mathbb{Q}) = 0$ d'où $H^1(X; \mathbb{Q}) = 0$. Puisque $H^0(X; \mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ et $H^*(X; \mathbb{Q}) \cong H(\Omega_{PL}(X))$ nous en déduisons que $\Omega_{PL}(X)$ est une ADGC simplement connexe. Par la suite nous ne travaillerons donc plus qu'avec de telles ADGC.

Proposition 1.6.8. *Soit (A, d) une ADGC simplement connexe. Alors il existe une algèbre de Sullivan minimale $(\wedge V, d)$ qui est un modèle de (A, d) c'est-à-dire qu'elle est munie d'un quasi-isomorphisme $(\wedge V, d) \xrightarrow{\sim} (A, d)$. En outre si $(\wedge V, d)$ et $(\wedge W, d)$ sont deux tels modèles, alors $(\wedge V, d) \cong (\wedge W, d)$.*

Cette proposition est une conséquence de [9, Proposition 12.2] et [9, Proposition 12.10].

En particulier donner le type d'équivalence faible d'une ADGC simplement connexe est équivalent à donner la classe d'isomorphisme d'une algèbre de Sullivan minimale. La correspondance ci-dessus se transforme donc en une nouvelle correspondance

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Types d'homotopie} \\ \text{d'espaces simplement} \\ \text{connexes} \end{array} \right\} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{Classes d'isomorphismes} \\ \text{d'algèbres de Sullivan} \\ \text{minimales} \end{array} \right\}.$$

On a une correspondance dans l'autre sens en assignant à chaque algèbre minimale (A, d) sa réalisation géométrique $|(\wedge V, d)|$. Par [9, Theorem 17.10], cet espace est simplement connexe. En outre par fonctorialité de la réalisation géométrique, si deux algèbres minimales sont isomorphes alors leurs réalisations géométriques aussi et donc ont le même type d'homotopie rationnelle. Cette assignation est donc bien définie.

Nous avons donc la situation suivante :

$$\begin{array}{ccc} X & \longmapsto & \Omega_{PL}(X) \\ |(\wedge V, d)| & \longleftarrow & (\wedge V, d) \end{array}$$

où $(\wedge V, d)$ est un modèle minimal de $\Omega_{PL}(X)$. Par [9, Theorem 17.10], $(\wedge V, d)$ est un modèle de $\Omega_{PL}(|(\wedge V, d)|)$. Par [9, Theorem 17.12], il existe une équivalence d'homotopie rationnelle $h_X : |(\wedge V, d)| \rightarrow X$. Ces deux résultats impliquent que les deux correspondances sont inverses l'une de l'autre.

Pour résumer, nous obtenons les deux résultats suivants :

Théorème 1.6.9 (Sullivan 1). *Le foncteur $\Omega_{PL} : \mathbf{Top} \rightarrow \mathbf{ADGC}^{op}$ est tel que pour toute ADGC simplement connexe (A, d) de type fini, il existe au type d'homotopie rationnelle près un unique espace simplement connexe X de type fini tel que $\Omega_{PL}(X) \sim (A, d)$.*

Théorème 1.6.10 (Sullivan 2). *Toute ADGC simplement connexe (A, d) de type fini admet un modèle minimal, unique à isomorphisme près.*

Nous pouvons combiner ces deux résultats pour obtenir le mantra de la théorie de l'homotopie rationnelle.

Théorème 1.6.11 (Sullivan). *Les assignations ci-dessus fournissent une bijection*

$$\left\{ \begin{array}{ll} \text{Types} & \text{d'homotopie} \\ \text{rationnelle} & \text{d'espaces} \\ \text{simplement} & \text{connexes} \\ \text{de types finis} \end{array} \right\} \longleftrightarrow \left\{ \begin{array}{ll} \text{Classes} & \text{d'isomorphismes} \\ \text{d'algèbres} & \text{de Sullivan} \\ \text{minimales de types finis} \end{array} \right\}.$$

L'intérêt de ce résultat est qu'il permet de traduire une donnée purement topologique, à savoir le type d'homotopie rationnelle d'un espace simplement connexe de type fini, en une donnée purement algébrique, une ADGC appelée *modèle* de l'espace. En outre cette traduction est fonctorielle ; non seulement les espaces correspondent à des ADGC mais les applications continues entre ces espaces correspondent à des morphismes d'ADGC.

En pratique, l'étude de la théorie de l'homotopie rationnelle se fait donc en calculant des modèles pour différentes sortes d'espaces. Un large panel est notamment étudié dans [11]. Donnons tout de même un exemple basique.

Exemple : Calculons des modèles pour la sphère S^n de dimension $n \geq 2$. Distinguons deux cas :

- n est impair. Nous affirmons que l'ADGC $(A, d) := (\wedge(x), d = 0)$, où $|x| = n$, est un modèle de S^n .

Pour cela nous montrons que

- (A, d) est une algèbre de Sullivan minimale.
- $H(A, d) \cong H^*(S^n; \mathbb{Q})$.

Il s'agit d'une algèbre de Sullivan minimale ; il suffit de prendre $V(0) = 0$ dans la définition et les conditions relatives à la différentielle sont trivialement vérifiées. Ensuite puisque $d = 0$, $(A, d) \cong H(A, d)$. Or puisque n est impair, nous avons $A^0 = \mathbb{Q}$, $A^n = \mathbb{Q}x$ et $A^k = 0$ sinon. Il s'agit précisément de l'anneau de cohomologie $H^*(S^n; \mathbb{Q})$.

Par le théorème 2.4.5 et le théorème de Sullivan, nécessairement (A, d) est un modèle de S^n . En particulier la sphère est formelle. Ce résultat sera utile dans le chapitre 5.

— n est pair. La construction précédente ne marche plus puisque l'ADGC obtenue est non triviale en degrés pairs : $A^{kn} = \mathbb{Q}x^k$. Si la différentielle était nulle, nous aurions donc une cohomologie non triviale en degrés pairs, ce qui ne correspond pas à $H^*(S^n; \mathbb{Q})$. Pour corriger ce défaut, il faut transformer chaque élément de degré $> n$ en cobord afin de les tuer en passant à la cohomologie. Pour cela définissons plutôt $(A, d) = (\Lambda(x, y), d)$ où $|x| = n$ et $dx = 0, dy = x^2$. Nous avons $A^{kn} = \mathbb{Q}x^k, A^{(k+2)n-1} = \mathbb{Q}^k y$ pour $k \geq 0$ et $A^k = 0$ sinon. Comme avant, montrons que (A, d) est une algèbre de Sullivan minimale et que sa cohomologie est l'anneau de cohomologie de S^n . La structure d'algèbre de Sullivan s'obtient en posant $V = \mathbb{Q}x \oplus \mathbb{Q}y, V(0) = \mathbb{Q}x$ et $V(1) = V$: nous avons bien $dV(0) = 0$ et $dV(1) = dV \subset \Lambda(x)$. Par ailleurs l'égalité $dy = x^2$ indique que l'ADGC est minimale (la différentielle donne des mots de longueur au moins deux). Par ailleurs pour $k \geq 0, d(x^k y) = d(x^k)y + x^k dy = x^{k+2}$. Par conséquent tout élément x^k pour $k \geq 2$ est un cobord. Puisque chaque élément $x^k y$ n'est pas un cocycle, nous en déduisons que $H(A, d) \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}x \cong H^*(S^n; \mathbb{Q})$.

Chapitre 2

Notions préliminaires

Étant à présent familiers avec la notion de modèle, nous pouvons appliquer les outils développés dans le chapitre précédent afin d'étudier une classe d'espaces de configuration. Plus précisément, nous expliquons la preuve de [24] qui répond à une ancienne conjecture : le *modèle de Lambrechts-Stanley* d'une variété compacte, sans bord et simplement connexe M est un modèle pour l'espace de configuration $C_M(k)$. Le chapitre présent établit d'abord des prérequis à la preuve.

Remarque 2.0.1. Les concepts présentés dans la suite s'appuient sur le type d'homotopie *réelle* d'une variété M et non le type d'homotopie rationnelle. Il s'agit d'une seconde relaxation en étudiant non plus les types d'équivalence faible des ADGC $\Omega_{PL}(M)$ mais celles de $\Omega_{PL}(M) \otimes_{\mathbb{Q}} \mathbb{R}$. La nécessité d'utiliser des coefficients réels au lieu de rationnels vient du fait que nous utilisons une notion d'intégrale dans la preuve.

2.1 Compactifié de Fulton-MacPherson

Le compactifié de Fulton-MacPherson est une construction qui permet de compactifier $C_M(k)$, l'espace de configurations d'une variété M . L'appellation provient de la construction de Fulton et MacPherson dans le cas de variétés algébriques ([15]). Dans le cas de variétés arbitraires, la construction a été adaptée dans [1] et détaillée dans [35].

Fixons un entier $k \geq 0$ et une variété lisse M de dimension n . En particulier le théorème de Whitney assure que l'on peut la plonger dans un espace $\mathbb{R}^N$ pour N assez grand de sorte que la notion de distance sur M fait sens.

Définissons les applications suivantes :

$$\begin{cases} \iota' : C_M(k) \hookrightarrow M^k \\ \theta_{ij} : C_M(k) \rightarrow S^{n-1}, x \mapsto \frac{x_i - x_j}{\|x_i - x_j\|} \\ \delta_{ijl} : C_M(k) \rightarrow [0, +\infty], x \mapsto \frac{\|x_i - x_j\|}{\|x_i - x_l\|} \end{cases}$$

Nous pouvons combiner toutes ces applications pour définir une application

$$\iota : C_M(k) \rightarrow M^n \times (S^{n-1})^{\binom{k}{2}} \times [0, +\infty]^{\binom{k}{3}}.$$

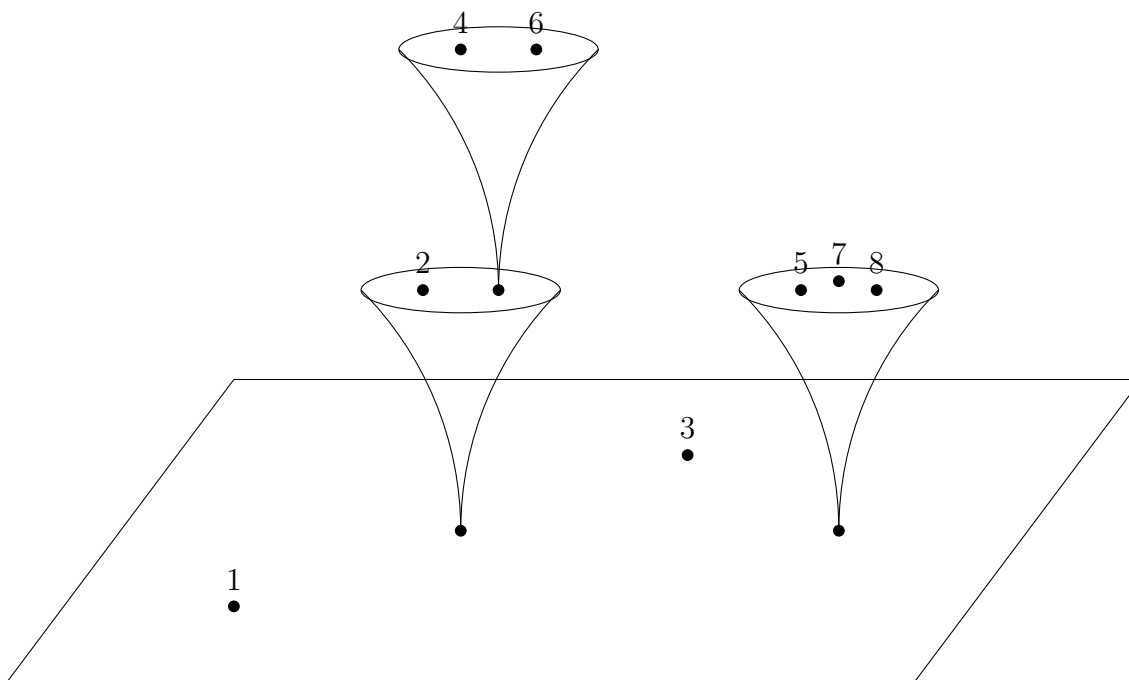
L'intérêt de cette application est que $C_M(k)$ est homéomorphe à son image $\iota(C_{\mathbb{R}^n}(k))$.

Définition 2.1.1. Le compactifié de Fulton-MacPherson $C_M[k]$ de $C_M(k)$ est défini par $\overline{\iota(C_M(k))}$.

Remarque 2.1.2. Si M est compact, le compactifié de Fulton-MacPherson l'est également puisqu'il s'agit d'un sous-espace fermé d'un espace compact.

Le compactifié de Fulton-MacPherson $C_M[k]$ est ce qu'on appelle une *variété à coins*, dont une description extensive se trouve dans [25]. On peut retrouver la preuve de ce résultat dans [35, Theorem 4.4] Comme le nom l'indique, il s'agit d'une variété avec un bord "anguleux". En particulier, d'un point de vue topologique, il s'agit simplement d'une variété à bord et donc se rétracte sur son intérieur. Autrement dit, $C_M[k]$ et $C_M(k)$ sont homotopiquement équivalents. Par conséquent les cohomologies de ces deux espaces coïncident.

Examinons plus en détail ce compactifié dans le cas $M = \mathbb{R}^n$ pour fixer les idées. Nous savons déjà que son intérieur s'identifie à $C_{\mathbb{R}^n}(k)$, c'est-à-dire des k -uples de points *distincts*. Dans le compactifié, les points ont la possibilité de se rencontrer : la composante de bord consiste donc en des collections de k points parmi lesquels certains sont en collision. Plus précisément, les applications δ_{ijl} sont étendues pour prendre les valeurs 0 et $+\infty$. Pour un élément $x \in C_{\mathbb{R}^n}[k]$, si $\delta_{ijl}(x) = 0$, alors les points x_i et x_j seront confondus *relativement* à x_l : nous notons dans ce cas $(x_i \simeq x_j) \text{ rel } x_l$. De même si $\delta_{ijl} = +\infty$, $(x_i \simeq x_l) \text{ rel } x_j$. Le fait que $x_i \simeq x_j \text{ rel } x_l$ peut s'interpréter de la manière suivante : en se plaçant au point x_j , les points x_i et x_j apparaissent confondus mais pour autant ne le sont pas. La figure ci-dessous illustre une représentation d'un élément de $x \in C_{\mathbb{R}^2}[8]$. Dans cet exemple, les trompettes indiquent la position relative de certains points. Par exemple $(x_5 \simeq x_7) \text{ rel } x_1$. De même $(x_4 \simeq x_6) \text{ rel } x_2$ mais $(x_5 \not\simeq x_7) \text{ rel } x_8$.



En outre, Cohen a calculé l'homologie et la cohomologie de $C_{\mathbb{R}^n}[k]$. Nous pouvons en retrouver une preuve élégante dans [34]. Nous obtenons ainsi :

Théorème 2.1.3. *La cohomologie de $C_{\mathbb{R}^n}[k]$ est une ADGC donnée par*

$$H^*(C_{\mathbb{R}^n}[k]) = \frac{\bigwedge (\omega_{ij})_{1 \leq i \neq j \leq k}}{(\omega_{ji} = (-1)^n \omega_{ij}, \omega_{ij}^2 = 0, \omega_{ij} \omega_{jl} + \omega_{jl} \omega_{li} + \omega_{li} \omega_{ij} = 0)}$$

où $|\omega_{ij}| = n - 1$.

Nous la noterons $e_n(k)$.

Remarque 2.1.4. Pour un ensemble fini U , nous pouvons abuser de la notation pour écrire $C_M(U) := C_M(|U|)$ et $C_M[U] := C_M[|U|]$; autrement dit les éléments de $C_M(U)$ sont des configurations de points distincts étiquetés par des éléments de U . Cette notation a le bon goût d'alléger certaines formules.

2.2 Formes algébriques par morceaux

Dans la construction du zigzag, nous avons besoin d'une notion d'intégration.

Malheureusement, nous ne pouvons pas utiliser les formes de de Rham. En effet, même si les compactifiés de Fulton-MacPherson sont des variétés lisses à coins, les fibrés ne sont pas lisses en général (voir [29, 5.9]). Dès lors il faut utiliser une notion plus générale,

à savoir les formes algébriques par morceaux (formes PA), qui sont présentées en détails dans [18].

Dans cette section, nous décrivons brièvement ce que sont les formes PA et mentionnons des propriétés qui seront utilisées dans la preuve de la validité du modèle. Nous n'entrerons pas dans les détails techniques.

Définition 2.2.1. Soit $n \geq 0$ un entier. Un sous-ensemble X de $\mathbb{R}^n$ est dit *semi-algébrique* s'il est la réunion finie d'intersections finies d'ensembles de solutions d'équations ou d'inéquations polynomiales dans $\mathbb{R}^n$.

Une application continue $f : X \rightarrow Y$ entre ensembles semi-algébriques $X \subset \mathbb{R}^n, Y \subset \mathbb{R}^m$ est semi-algébrique si $\{(x, f(x)) | x \in X\} \subset \mathbb{R}^{m+n}$ est semi-algébrique.

Pour un ensemble semi-algébrique X , nous avons un complexe de *formes minimales* $\Omega_{min}(X)$. Une forme minimale de degré k est un élément $f_0 \cdot f_1 \wedge \cdots \wedge f_k$ avec les $f_i : X \rightarrow \mathbb{R}$ des applications semi-algébriques, ou une combinaison linéaire de tels éléments.

L'intérêt de ces formes est qu'il est possible de les intégrer, fournissant alors un nouveau complexe de formes dites *algébriques par morceaux*, que nous noterons Ω_{PA} . Cette affirmation est à nuancer mais nous n'entrerons pas dans des détails techniques donc nous nous contenterons de l'admettre.

Pour un ensemble semi-algébrique X , ce complexe $\Omega_{PA}(X)$ a la propriété remarquable qu'il caractérise le type d'homotopie réelle de X , c'est-à-dire que X et Y ont le même type d'homotopie réelle si et seulement si $\Omega_{PA}(X) \sim \Omega_{PA}(Y)$. C'est principalement pour cette raison que nous travaillons avec le type d'homotopie *réelle* d'une variété et non pas le type d'homotopie rationnelle.

Regardons à présent comment construire ces formes PA par intégration de formes minimales.

Définition 2.2.2. Une application continue $p : E \rightarrow B$ est une *fibration localement triviale* s'il existe un espace F appelé la *fibres* tel que pour tout $x \in B$, il existe un ouvert $\mathcal{U} \subset B$ contenant x et un homéomorphisme $h : \mathcal{U} \times F \rightarrow p^{-1}(\mathcal{U})$ faisant commuter le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{U} \times F & \xrightarrow{h} & p^{-1}(\mathcal{U}) \\ & \searrow \pi_{\mathcal{U}} & \swarrow p \\ & \mathcal{U} & \end{array}$$

où $\pi_{\mathcal{U}} : \mathcal{U} \times F$ est la projection canonique selon la première composante.

Une application continue $p : E \rightarrow B$ entre ensembles semi-algébriques est une *fibration semi-algébrique* s'il s'agit d'une fibration où les espaces et morphismes de la définition sont semi-algébriques.

Étant donné $\omega \in \Omega_{min}^k(E)$ et une fibration SA $p : E \rightarrow B$ dont la fibre est de dimension d , nous obtenons une forme $p_*\omega \in \Omega_{PA}^{k-d}(B)$ appelée *pushforward* en intégrant relativement au fibré p :

$$p_*\omega = \int_{p:E \rightarrow B} \omega.$$

La définition formelle est technique donc nous ne la présentons pas et passons immédiatement à des exemples pour cerner l'idée.

Exemple : Considérons la projection canonique sur la première composante $p : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow [0, 1]$. Bien sûr il s'agit d'une fibration SA de fibre $[0, 1]$ qui est de dimension 1.

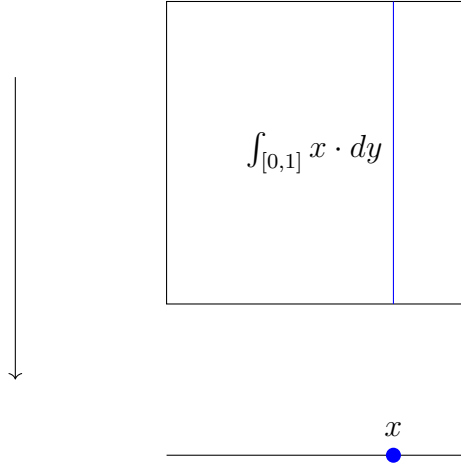
Considérons à présent la forme $x \cdot dy \in \Omega_{min}^1([0, 1]^2)$. Son pushforward selon p est alors

$$p_*(x \cdot dy) = \int_{p:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]} x \cdot dy = x$$

qui est bien un élément de $\Omega_{PA}^0([0, 1])$.

En revanche la forme $y \cdot dx$ aura un tout autre pushforward :

$$p_*(y \cdot dx) = \int_{p:[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]} y \cdot dx = 0$$



Exemple : Le pushforward d'une forme minimale n'est pas nécessairement une forme minimale à savoir une expression semi-algébrique. Pour cela considérons le fibré SA $p : E \rightarrow [2, 3]$ où $E = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | 2 \leq x \leq 3, 1 \leq y \leq x\}$ et p est la projection sur la première composante : la fibre est alors un intervalle fermé. Considérons la forme $\frac{1}{y} \cdot dy \in \Omega_{min}^1(E)$. Son pushforward est donné par

$$p_*\left(\frac{1}{y} \cdot dy\right) = \int_{p:E \rightarrow [2,3]} \frac{1}{y} \cdot dy = \ln(x)$$

qui n'est pas une forme minimale sur $[2, 3]$, car le logarithme n'est pas une application semi-algébrique (rappelons que de telles applications s'obtiennent à partir de polynômes).

Nous aurons besoin d'une variante de la formule de Stokes. Dans cette optique, nous avons besoin d'une notion de bord et d'orientation :

Définition 2.2.3. Soit $p : E \rightarrow B$ une fibration SA. Le *bord fibre à fibre* est la fibration restreinte $p^\partial : E^\partial \rightarrow B$ où

$$E^\partial = \bigcup_{b \in B} \partial p^{-1}(b).$$

Définition 2.2.4. Soient E et B des variétés orientées. Une fibration SA $p : E \rightarrow B$ est dite *orientée* si elle préserve les orientations.

Proposition 2.2.5. [18, Proposition 8.12] Si $p : E \rightarrow B$ est une fibration SA orientée dont la fibre est de dimension k et $\omega \in \Omega_{\min}(E)$, alors

$$d \int_{p:E \rightarrow B} \omega = \int_{p:E \rightarrow B} d\omega + (-1)^{|\omega|-k} \int_{p^\partial:E^\partial \rightarrow B} \mu|_{E^\partial}$$

Nous aurons besoin de la famille de fibrations SA suivante : pour une variété M de dimension n et des ensembles finis U, I , nous avons une fibration SA de dimension $n + |I|$ $p_U : C_M[U \sqcup I] \rightarrow C_M[U]$ donnée par la projection qui oublie les points de I . Il s'agit bien de fibrations SA, voir [24, Section 1.4], [29, Section 5.9].

Remarque 2.2.6. Les résultats énoncés dans [18, Chapter 8] et repris ici concernent les formes *minimales*. Toutefois, la preuve de la validité du modèle s'appuie sur un espace plus large appelé espace des formes *triviales* dont une description est présentée dans [4]. Brièvement, ces formes triviales s'obtiennent en intégrant des formes minimales et nous avons alors $\Omega_{\min} \hookrightarrow \Omega_{\text{triv}} \hookrightarrow \Omega_{PA}$. *A priori* il semblerait donc que les résultats énoncés ici ne soient pas valides dans la preuve. Cependant, après discussion avec l'auteur du papier [24], il semblerait que les résultats tiennent également pour les formes triviales ; les preuves seraient facilement adaptables. A cet égard la preuve reste valide.

2.3 Modèle à dualité de Poincaré

La référence principale pour cette section est [27].

Fixons une variété réelle lisse, compacte, simplement connexe et sans bord M de dimension n . Alors M est également orientable en vertu de [19, Proposition 3.25]. Par conséquent la dualité de Poincaré (voir [19, Theorem 3.30]) donne un isomorphisme $D : H^k(M; \mathbb{R}) \rightarrow H_{n-k}(M; \mathbb{R})$ pour tout entier k . En particulier $H_n(M; \mathbb{R})$ est générée

par un élément $[M]$ appelé classe fondamentale, qui dépend de l'orientation de M . Nous obtenons alors une application $\epsilon : H^n(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, \alpha \mapsto \alpha([M])$.

Ceci fournit alors un appariement non dégénéré $H^k(M; \mathbb{R}) \times H^{n-k}(M; \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, (\alpha, \beta) \mapsto \epsilon(\alpha \smile \beta) = \alpha(D(\beta))$. Cette construction inspire la définition suivante :

Définition 2.3.1. Une ADGC à *dualité de Poincaré* (A, d, ϵ) de dimension n est une ADGC connexe munie d'une application linéaire $\epsilon : A^n \rightarrow \mathbb{R}$ appelée *orientation* telles que :

- $\epsilon \circ d = 0$.
- Pour tout entier k , l'appariement $A^k \otimes A^{n-k} \rightarrow \mathbb{R}, a \otimes b \mapsto \epsilon(ab)$ est non dégénéré.

Théorème 2.3.2. [24, Theorem 14] *La variété M admet un modèle à dualité de Poincaré (A, d, ϵ) de dimension n c'est-à-dire qu'il existe un zigzag*

$$A \xleftarrow{\sim} R \xrightarrow{\sim} \Omega_{PA}(M)$$

où (R, d) est une ADGC quasi-libre simplement connexe.

Par ailleurs considérons l'inclusion $M \hookrightarrow M \times M, x \mapsto (x, x)$. La classe $[M]$ est donc envoyée sur un élément de $H_n(M \times M; \mathbb{R})$ qui est identifié à un élément de $H^n(M \times M, \mathbb{R})$ par dualité de Poincaré. Cet élément est appelé *classe diagonale*.

L'analogue pour les ADGC à dualité de Poincaré est défini comme suit : fixons une base $\{a_i\}_{i \in I}$ d'éléments homogènes de A . Nous obtenons alors une base homogène duale $\{a_i^*\}_{i \in I}$ satisfaisant $\epsilon(a_i a_i^*) = 1$.

Définition 2.3.3. Le *cocycle diagonal* Δ_A est défini par $\Delta_A = \sum_{i \in I} (-1)^{|a_i|} a_i \otimes a_i$.

Notons que ce cocycle diagonal est bien un cocycle et ne dépend pas du choix de base, voir [11, 8.1.4].

Nous avons un résultat supplémentaire relatif au théorème précédent ([24, Proposition 15]) : on peut supposer que R admet un cocycle Δ_R tel que $(\rho \otimes \rho)(\Delta_R) = \Delta_A$. Un tel élément peut s'écrire $\Delta_R = \sum_{i \in J} \Delta'_i \otimes \Delta''_i$. Nous noterons simplement $\Delta_R = \sum_{\Delta_R} \Delta'_R \otimes \Delta''_R$, qui est la même notation que dans [24] et [22].

2.4 Complexes de graphes

Au coeur de la preuve de la validité du modèle réside l'idée de *complexes de graphes*. L'idée initiale remonte à Kontsevitch et est introduite dans [26, Theorem 2].

Brièvement, un complexe de graphes est un ensemble de graphes muni d'une structure d'ADGC où le produit de deux graphes sera donné par leur recollement selon des sommets communs. Le degré d'un graphe dépendra quant à lui des sommets et arêtes le composant.

L'intérêt principal de ces complexes de graphes est le suivant : supposons que nous voulions prouver que deux ADGC (A, d) et (B, d) soient faiblement équivalents. Le but sera alors de construire un zigzag de la forme

$$(A, d) \xleftarrow{\sim} (G, d) \xrightarrow{\sim} (B, d)$$

où (G, d) est un complexe de graphes. À partir de là, une étude combinatoire de (G, d) couplée à des arguments algébriques permettra de prouver que les deux morphismes sont des quasi-isomorphismes. Nous pouvons retrouver ce schéma de preuve dans [24] mais également dans [26].

Exemple de complexe de graphes : fixons un entier $N \geq 2$ et soit

$G = \{\Gamma = (V, E) \mid V \subset \{1, \dots, N\}, E = \{[\{i, j\}, i, j \in V, i \neq j]\}\}$ l'ensemble des graphes sans boucle dont les sommets sont indexés par des entiers $1, \dots, N$ et E est un *multiset* d'arêtes non orientées i.e un élément peut apparaître plusieurs fois. Le degré d'un graphe $\Gamma = (V, E)$ est défini par $|\Gamma| = 2|E|$. Considérons alors le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel libre $\tilde{\mathcal{G}}$ sur G , qui est gradué. Définissons de plus le produit de deux graphes par leur concaténation :

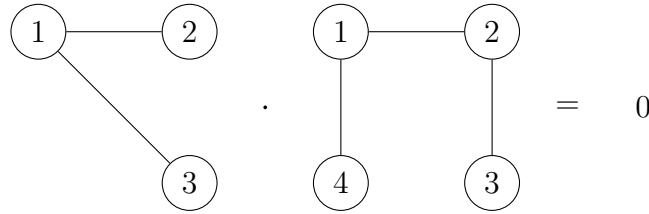
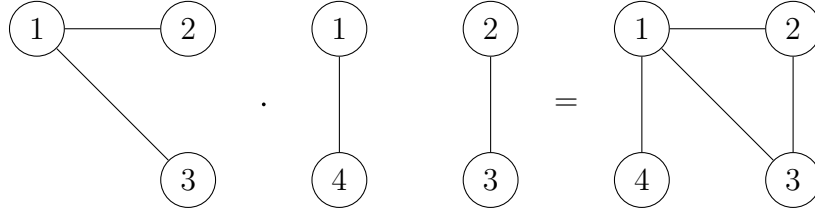
pour deux graphes $\Gamma = (V, E), \Gamma' = (V', E')$ leur produit est donné par

$$\Gamma \cdot \Gamma' := (V \cup V', E \sqcup E').$$

Ce produit est étendu à $\tilde{\mathcal{G}}$ par linéarité. L'algèbre $\tilde{\mathcal{G}}$ est également muni d'une différentielle nulle, ce qui en fait une ADGC. Considérons enfin l'idéal I engendré par les graphes avec au moins une arête double. Le complexe de graphes est l'ADGC définie par $\mathcal{G} := \tilde{\mathcal{G}}/I$.

Bien sûr, les complexes de graphes auront en général des différentielles non triviales, mais il est souvent non évident qu'il s'agit bien de différentielles.

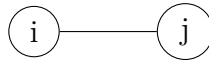
Les figures suivantes illustrent la multiplication de graphes. Notons que le deuxième produit est nul, car la concaténation de deux graphes avec une arête commune est nulle par quotient de l'idéal I .



Montrons à présent que ce complexe de graphes peut s'interpréter algébriquement en l'ADGC

$$(A, d) = \left(\frac{\Lambda(\omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq N}}{(\omega_{ii} = 0, \omega_{ij} = \omega_{ji}, \omega_{ij}^2 = 0)}, d = 0 \right)$$

où $|\omega_{ij}| = 2$. Considérons l'application qui associe à ω_{ij} l'arête



Cette application est bien définie et définit un isomorphisme. En effet

- La relation ω_{ii} signifie qu'il n'y a aucune boucle.
- La relation $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ indique que les arêtes sont non orientées.
- La relation $\omega_{ij}^2 = 0$ signifie qu'il n'y a pas d'arête double.
- Le fait que $|\omega_{ij}|$ soit pair implique que les ω_{ij} commutent, ce qui signifie que l'ordre des arêtes n'importe pas.

De plus, l'application inverse marche également grâce à la relation $\omega_{ij} = \omega_{ji}$ qui équivaut à avoir des arêtes non orientées. La conclusion est que tout élément de (A, d) s'identifie de manière univoque à un élément de $(\mathcal{G}, 0)$.

Par exemple les deux produits de graphes ci-dessus s'identifient aux produits

$$\begin{cases} \omega_{12}\omega_{13} \cdot \omega_{14}\omega_{23} = \omega_{12}\omega_{13}\omega_{14}\omega_{23} \\ \omega_{12}\omega_{13} \cdot \omega_{12}\omega_{14}\omega_{23} = \omega_{12}^2\omega_{13}\omega_{14}\omega_{23} = 0 \end{cases}$$

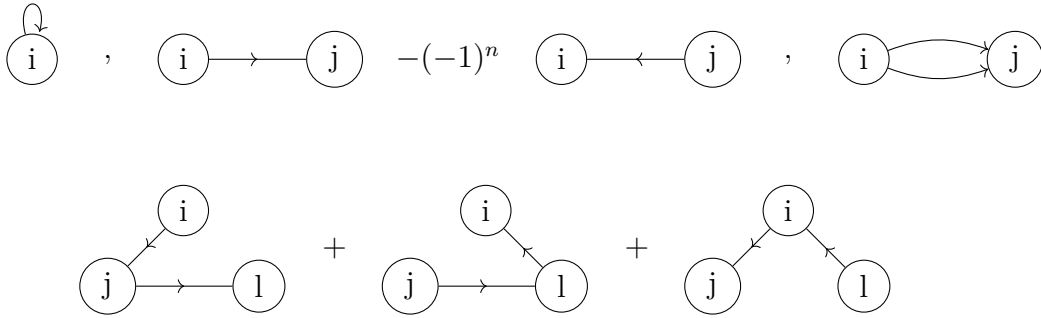
La morale de cet exemple est que nous avons transformé un objet *a priori* purement algébrique en objet combinatoire. Cette idée d'interpréter des ADGC en terme de complexes de graphes est centrale dans la preuve de la validité du modèle.

Exemple : l'exemple qui suit nous sera utile par la suite. Rappelons la définition de $e_n(k)$, où $n, k \geq 0$ sont des entiers fixés :

$$e_n(k) = \frac{\bigwedge (\omega_{ij})_{1 \leq i, j \leq k}}{(\omega_{ii} = 0, \omega_{ji} = (-1)^n \omega_{ij}, \omega_{ij}^2 = 0, \omega_{ij}\omega_{jl} + \omega_{jl}\omega_{li} + \omega_{li}\omega_{ij} = 0)}.$$

Cette ADGC peut s'interpréter en termes de graphes de la manière suivante. Fixons l'ensemble de sommets $V = \{1, \dots, k\}$ et définissons $G = \{\Gamma = (V, E) | E = \{[(i, j), i, j \in V, i \neq j]\}\}$ l'ensemble des graphes orientés avec possiblement des boucles ou des arêtes multiples. Nous définissons le degré d'un graphe Γ par $|\Gamma| = (n-1)|E|$. Notons $\mathcal{G}$ le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel libre sur G , qui est gradué. L'ensemble $\mathcal{G}$ est muni d'une multiplication par concaténation de graphes ainsi que d'une différentielle nulle.

Ceci fournit donc une structure d'ADGC sur $\mathcal{G}$. Définissons ensuite l'idéal I engendré par les graphes d'une des formes suivantes



et définissons $\mathcal{E} := \mathcal{G}/I$. Cette construction permet alors d'identifier $e_n(k)$ à $\mathcal{E}$ en identifiant l'élément ω_{ij} à l'arête $i \rightarrow j$. L'idéal I a en effet été défini en fonction des relations définissant $e_n(k)$. Le lecteur averti aura toutefois noté une légère imprécision : en effet, pour distinguer les éléments $\omega_{ij}\omega_{jl}$ de $\omega_{jl}\omega_{ij}$ par exemple, il faut tenir compte d'un ordre sur les arêtes. Toutefois, pour simplifier la présentation, nous n'en tenons pas compte dans le présent exemple.

Mentionnons enfin qu'il existe un large écosystème de complexes de graphes plus ou moins exotiques. L'étude de ces complexes et leurs applications est devenu un nouveau champ de recherche ces deux dernières décennies, voir par exemple [\[32\]](#), [\[39\]](#). Nous aurons l'occasion d'en rencontrer de nouveaux par la suite.

Chapitre 3

Validité du modèle

3.1 Un premier complexe de graphes

Pour le reste du chapitre, fixons une variété lisse simplement connexe, compacte et sans bord M de dimension n . Rappelons que notre motivation est de trouver un modèle réel de $C_M(k)$ pour un entier $k \geq 0$, c'est-à-dire une ADGC faiblement équivalente à $\Omega_{PA}(C_M(k))$. Fixons un modèle à dualité de Poincaré (A, d, ϵ) pour M . Nous allons de plus supposer avoir un zigzag comme dans le théorème 2.3.2

$$(A, d, \epsilon) \xleftarrow{\rho} (R, d) \xrightarrow{\sigma} \Omega_{PA}(M).$$

Le candidat modèle est alors le suivant :

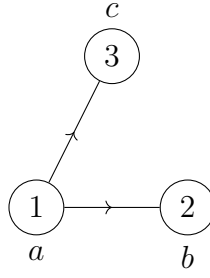
Définition 3.1.1. Le *modèle de Lambrechts-Stanley* d'ordre k d'une ADGC à dualité de Poincaré (A, d, ϵ) de dimension n est défini par

$$G_A(k) = \left(\frac{A^{\otimes k} \otimes e_n(k)}{\iota_i(a) \cdot \omega_{ij} = \iota_j(a) \cdot \omega_{ij}}, d\omega_{ij} = \iota_{ij}(\Delta_A) \ (i < j) \right)$$

où $\iota_i : A \rightarrow A^{\otimes k}$ est l'ADGC à coefficients réels définie par $\iota_i(a) = 1 \otimes \cdots \otimes \underbrace{a}_i \otimes \cdots \otimes 1$

et $\iota_{ij} : A \otimes A \rightarrow A^{\otimes k}$ est défini par $\iota_{ij}(a \otimes b) = \iota_i(a)\iota_j(b)$.

Ce modèle a le bon goût de s'interpréter en termes de graphes, et cette interprétation sera utile par la suite. Rappelons pour cela l'interprétation graphique de $e_n(k)$, expliquée à la fin du chapitre précédent. Un élément de $G_A(k)$ sera alors identifié à un graphe de $e_n(k)$ où chaque sommet $\{1, \dots, k\}$ est décoré d'un élément $a \in A$ et ces décorations contribuent au degré du graphe. Par exemple l'élément $a \otimes b \otimes c \cdot \omega_{12} \omega_{13} \in G_A(3)$ s'identifie au graphe



La relation $\iota_i(a) \cdot \omega_{ij} = \iota_j(a) \cdot \omega_{ij}$ s'interprète en la relation

$$\begin{array}{c} \textcircled{i} \\ a \end{array} \rightarrow \textcircled{j} = \textcircled{i} \rightarrow \begin{array}{c} \textcircled{j} \\ a \end{array}$$

autrement dit on peut faire “glisser” les décorations le long des arêtes.

Par ailleurs la différentielle $d\omega_{ij} = \iota_{ij}(\Delta_A)$ correspond à l'application

$$\begin{array}{c} \textcircled{i} \\ a \end{array} \rightarrow \textcircled{j} \mapsto \sum_{\Delta_A} (-1)^{|\Delta'_A|} \begin{array}{c} \Delta'_A \\ \textcircled{i} \end{array} \begin{array}{c} \Delta''_A \\ \textcircled{j} \end{array}$$

c'est-à-dire que la différentielle coupe l'arête et multiplie les extrémités par Δ_A .

Donnons à présent une brève esquisse de la preuve. L'idée principale est de définir un certain complexe de graphes, de lui donner une structure d'ADGC et d'établir certaines propriétés pour ensuite construire un zigzag de la forme

$$G_A(k) \xleftarrow{\sim} \cdots \xrightarrow{\sim} \Omega_{PA}(C_M[k]).$$

Contrairement à [24], nous n'allons pas recourir au formalisme opéradique. À cet égard, il faut redéfinir à notre sauce le complexe de graphes et prouver à la main qu'il est muni d'une structure d'ADGC. Pour cela nous allons nous inspirer des idées de [29, Chapter 6]. Les définitions sont presque identiques excepté qu'ici nous avons une notion en plus, celle de *décoration*.

Définition 3.1.2. Soient (R, d) une ADGC et U un ensemble fini linéairement ordonné. La famille de diagrammes $\mathcal{D}_R(U)$ est l'ensemble $\{(I, E, s, t, r)\}$ dont les éléments sont appelés *diagrammes* où

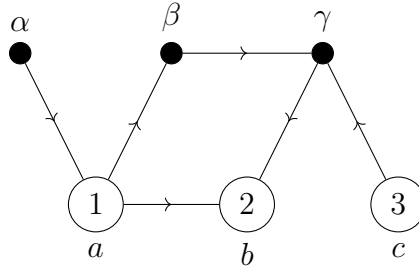
- I est un ensemble fini linéairement ordonné et disjoint de U dont les éléments sont appelés *sommets internes*.

- E est un ensemble fini linéairement ordonné dont les éléments sont appelés *arêtes*.
- s et t sont des applications $E \rightarrow U \sqcup I$ appelées *source* et *terminus* respectivement.
- r est une application $U \sqcup I \rightarrow R$ appelée *décoration*.

De plus pour un diagramme donné, nous dirons que U est l'ensemble des *sommets externes*.

L'idée de cette définition est qu'un diagramme est la donnée de sommets, externes et internes, reliés entre eux par des arêtes orientées. De plus chaque sommet est décoré par un élément de R . Nous ferons une supposition supplémentaire : pour deux ensembles linéairement ordonnés $(A, \leq_A), (B, \leq_B)$, nous pouvons construire un nouvel ensemble linéairement ordonné $A \otimes B = (A \sqcup B, \leq)$ donné par $A \sqcup B$ où $\leq|_A = \leq_A, \leq|_B = \leq_B$ et $a \leq b$ pour tous $a \in A, b \in B$. Pour un diagramme, nous supposons alors que l'ensemble $U \sqcup I$ est muni de l'ordre relatif à $U \otimes I$.

Voici un exemple de diagramme :



Ici nous avons $U = \{1, 2, 3\}$. Les sommets noirs indiquent des sommets internes. Les étiquettes $\alpha, \beta, \gamma, a, b, c$ représentent des décorations de R .

Nous dirons que deux diagrammes Γ, Γ' sont isomorphes si

- il existe une bijection $I \rightarrow I'$ préservant l'ordre.
- il existe une bijection $E \rightarrow E'$ préservant l'ordre et compatible avec les applications sources et terminus.

Par la suite, nous ne ferons plus attention à cette notion d'isomorphisme et par abus de notation, identifierons un diagramme avec sa classe d'isomorphisme.

Définition 3.1.3. Soient $\Gamma = (I, E, s, t, r)$ et $\Gamma' = (I', E', s', t', r')$ deux diagrammes. Leur produit $\Gamma \cdot \Gamma'$ est défini comme étant le diagramme $(\tilde{I}, \tilde{E}, \tilde{s}, \tilde{t}, \tilde{r})$ où

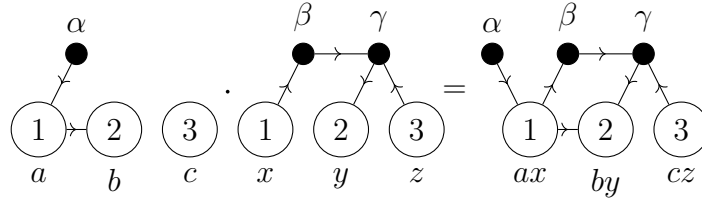
- $\tilde{I} = I \otimes I'$.
- $\tilde{E} = E \otimes E'$.
- $\tilde{s}|_E = s$ et $\tilde{t}|_{E'} = t'$, de même pour s', t' .

- l'application $\tilde{r} : U \sqcup I \sqcup I' \rightarrow R$ est définie par

$$\tilde{r}(u) = \begin{cases} r(u)r'(u) & \text{si } u \in U \\ r(u) & \text{si } u \in I \\ r'(u) & \text{si } u \in I' \end{cases}$$

L'idée est que la multiplication de deux diagrammes consiste à les concaténer en les recollant selon les sommets externes et à multiplier les décorations.

Voici un exemple :



Définition 3.1.4. L'espace de graphes $\mathcal{G}_R(U)$ est le $\mathbb{R}$ -espace vectoriel libre gradué engendré par les classes d'équivalences de diagrammes, avec les relations d'équivalence suivantes :

- $\Gamma \sim (-1)^{n+|r(u)||r(v)|} \Gamma'$ où Γ' est obtenu à partir de Γ par transposition dans l'ordre linéaire de I des sommets u et v .
- $\Gamma \sim (-1)^n \Gamma'$ où Γ' est obtenu à partir de Γ par inversion d'une arête.
- $\Gamma \sim (-1)^{n-1} \Gamma'$ où Γ' est obtenu à partir de Γ par une transposition dans l'ordre linéaire des arêtes.
- L'action de $\mathbb{R}$ sur $\mathcal{G}_R(U)$ consiste en la multiplication d'une décoration par un scalaire : si $a \in \mathbb{R}$ et $\Gamma \in \mathcal{G}_R(U)$ alors $a \cdot \Gamma \sim \Gamma'$ où Γ' est obtenu à partir de Γ en multipliant une décoration arbitraire par a .

Le degré d'un graphe $\Gamma = (I, E, s, t, r)$ est défini par $|\Gamma| = (n - 1) |E| + \sum_{u \in U \sqcup I} |r(u)| - n |I|$.

Remarque 3.1.5. Il ressort du dernier point de la définition que si un sommet d'un graphe est décoré par 0, alors ce graphe est nul.

Nous verrons plus loin d'où viennent ces relations d'équivalence.

Insistons sur le fait qu'un graphe est une classe d'équivalence de diagrammes. En particulier dans un graphe, les sommets internes sont (à un signe près) indistinguables les uns des autres en vertu de la première relation, alors qu'ils sont distincts dans un diagramme. En fait, nous n'aurons plus besoin par la suite de la notion de diagramme donc le lecteur peut se contenter de retenir celle de graphe.

3.2 Structure d'ADGC

Dans cette section nous définissons une différentielle sur notre complexe de graphes afin de le munir d'une structure d'ADGC.

Avertissement : les définitions et preuves relatives à la différentielle ci-dessous peuvent paraître lourdes. Nous invitons donc le lecteur à directement passer à la section suivante avant de revenir ici afin de comprendre la construction.

Etant donné le cocycle $\Delta_R = \sum_{\Delta_R} \Delta'_R \otimes \Delta''_R$, nous notons $D_R = \{\Delta'_R\}$ l'ensemble des facteurs Δ'_R intervenant dans la somme ; pour chaque élément Δ'_R nous tenons alors implicitement compte du facteur Δ''_R associé.

Soit Γ un graphe. Définissons $\epsilon : U \sqcup I \rightarrow \{-1, 1\}$ par

$$\epsilon(u) = (-1)^{\sum_{v < u} |r(v)|}.$$

Définissons ensuite $\partial : E \rightarrow \{-1, 1\}$ par $\partial(e) = (-1)^{\sum_{u \in U \sqcup I} |r(u)| + (n-1)\text{pos}(e)}$ et $\delta : E \times D_R \rightarrow \{-1, 1\}$ par $\delta(e, \Delta'_R) =$

$$\begin{cases} \partial(e) \cdot (-1)^{|\Delta'_R| + \sum_{u > s(e)} |r(u)| |\Delta'_R| + \sum_{u > t(e)} |r(u)| |\Delta''_R|} & \text{si } s(e) < t(e) \\ \partial(e) \cdot (-1)^{|\Delta'_R| + |\Delta'_R| |\Delta''_R| + \sum_{u > s(e)} |r(u)| |\Delta'_R| + \sum_{u > t(e)} |r(u)| |\Delta''_R|} & \text{si } s(e) > t(e) \end{cases}.$$

Enfin définissons $\eta : E \rightarrow \{-1, 1\}$ de la manière suivante :

- Si n est impair,

$$\eta(e) = \begin{cases} (-1)^{\text{pos}(\max(s(e), t(e)))} (\epsilon(s(e)) \epsilon(t(e)))^{|r(t(e))|} & \text{si } s(e) < t(e) \\ -(-1)^{\text{pos}(\max(s(e), t(e)))} (\epsilon(s(e)) \epsilon(t(e)))^{|r(s(e))|} & \text{si } s(e) > t(e) \end{cases}.$$

- Si n est pair,

$$\eta(e) = \begin{cases} (-1)^{\text{pos}(e)} (\epsilon(s(e)) \epsilon(t(e)))^{|r(t(e))|} & \text{si } s(e) < t(e) \\ (-1)^{\text{pos}(e)} (\epsilon(s(e)) \epsilon(t(e)))^{|r(s(e))|} & \text{si } s(e) > t(e) \end{cases}.$$

Définition 3.2.1. Soit $n > 1$ un entier.

- La *différentielle interne* est l'application $d_R : \mathcal{G}_R(U) \rightarrow \mathcal{G}_R(U)$ définie par

$$d_R(\Gamma) = \sum_{u \in U \sqcup I} \epsilon(u) \Gamma_u$$

où $\Gamma_u = (I, E, s, t, r_u)$ avec

$$r_u(v) = \begin{cases} r(v) & \text{si } v \neq u \\ d(r(v)) & \text{si } v = u \end{cases}.$$

- La *différentielle coupante* est l'application $d_{split} : \mathcal{G}_R(U) \rightarrow \mathcal{G}_R(U)$ définie par

$$d_{split}(\Gamma) = \sum_{e \in E} \sum_{\Delta'_R} \delta(e, \Delta'_R) \Gamma_{e, \Delta'_R}$$

où $\Gamma_{e, \Delta'_R} = (I, E \setminus \{e\}, s_{e, \Delta'_R}, t_{e, \Delta'_R}, r_{e, \Delta'_R})$ où $s_{e, \Delta'_R} = s|_{E \setminus \{e\}}, t_{e, \Delta'_R} = t|_{E \setminus \{e\}}$ et

$$r_{e, \Delta'_R}(u) = \begin{cases} r(u) \Delta'_R & \text{si } u = s(e) \\ r(u) \Delta''_R & \text{si } u = t(e) \\ r(u) & \text{sinon} \end{cases}.$$

- La *différentielle contractante* est l'application $d_{contr} : \mathcal{G}_R(U) \rightarrow \mathcal{G}_R(U)$ définie par

$$d_{contr}(\Gamma) = (-1)^{|\Gamma| - n|I|} \sum_{\substack{e \in E \\ \{s(e), t(e)\} \cap I \neq \emptyset}} \eta(e) \Gamma/e$$

où $\Gamma/e = (I \setminus \{\max(s(e), t(e))\}, E \setminus \{e\}, s_e, t_e, r_e)$ avec

- $s_e = \pi \circ s, t_e = \pi \circ t$ où $\pi : I \rightarrow I \setminus \{\max(s(e), t(e))\}$ est définie par $\pi(s(e)) = \pi(t(e)) = \min(s(e), t(e))$ et $\pi(v) = v$ sinon.
- $r_e : I \setminus \{\max(s(e), t(e))\} \rightarrow R,$

$$r_e(u) = \begin{cases} r(\max(s(e), t(e))) r(\min(s(e), t(e))) & \text{si } u = \min(s(e), t(e)) \\ r(u) & \text{sinon} \end{cases}.$$

Mentionnons que la définition de la différentielle contractante est fortement inspirée de celle de la différentielle définie dans [29, 6.4].

Le lecteur averti se demandera si ces différentielles sont bien définies, c'est-à-dire si elles sont compatibles avec les relations d'équivalence précédentes. Ceci est bien le cas. Dans la suite, étant donné deux graphes Γ et Γ' , nous noterons respectivement ϵ, ϵ' leurs applications de signe de la définition 3.2.1, de même pour δ, δ' ...

Lemme 3.2.2. *Les différentielles interne, coupante et contractante sont compatibles avec les relations d'équivalence définissant $\mathcal{G}_R(U)$.*

Démonstration. • La différentielle interne d_R ne dépend pas de l'ordre linéaire des arêtes ni de leurs directions donc il suffit de vérifier que si Γ et Γ' diffèrent d'une transposition de deux sommets internes u, v , alors

$$d_R \Gamma = (-1)^{n + |r(u)||r(v)|} d_R \Gamma'.$$

Si $w \neq u, v$ alors il est clair que $\epsilon(w) \Gamma_w = (-1)^{n + |r(u)||r(v)|} \epsilon'(w) \Gamma'_w$. Supposons à présent que $u < v$ dans I , ce qui implique $v < u$ dans I' . Alors $\epsilon(u) = (-1)^{\sum_{w < u} |r(w)|}$

tandis que $\epsilon'(u) = (-1)^{|r(v)| + \sum_{w < v} |r(w)|}$. De plus

$$\Gamma_u = (-1)^{n + |dr(u)| |r(v)|} \Gamma'_u.$$

En se rappelant que $|dr(u)| = |r(u)| + 1$, il vient finalement

$$\begin{aligned} & (-1)^{n + |r(u)| |r(v)|} \epsilon'(u) \Gamma'_u \\ &= (-1)^{n + |r(u)| |r(v)|} \epsilon(u) (-1)^{|r(v)|} (-1)^{n + (|r(u)| + 1) |r(v)|} \Gamma_u \\ &= (-1)^{2n + 2(|r(u)| + 1) |r(v)|} \epsilon(u) \Gamma_u \\ &= \epsilon(u) \Gamma(u). \end{aligned}$$

Un calcul analogue donne $\epsilon(v) \Gamma_v = (-1)^{n + |r(u)| |r(v)|} \epsilon'(v) \Gamma'_v$.

- La différentielle coupante ne dépend ni de l'ordre linéaire des sommets internes ni des directions des arêtes donc il suffit de vérifier que si Γ et Γ' diffèrent d'une transposition de deux arêtes e, f , alors

$$d_{split} \Gamma = (-1)^{n-1} d_{split} \Gamma'.$$

Si $g \in E \setminus \{e, f\}$ alors il est clair que $\sum_{\Delta_R} \delta(g, \Delta'_R) \Gamma_{g, \Delta'_R} = (-1)^{n-1} \delta'(g, \Delta'_R) \Gamma'_{g, \Delta'_R}$. Supposons à présent que $e < f$ dans E de sorte que $pos'(e) = pos(e) + 1$. Cette transposition modifie le facteur $\partial(e)$ d'un facteur $(-1)^{n-1}$ tandis que le second facteur de $\delta(e, \Delta'_R)$ est modifié d'un facteur $(-1)^{n(n-1)}$. Au total il y a donc un changement d'un facteur $(-1)^{(n-1)(n+1)} = (-1)^{n-1}$.

Un raisonnement analogue fonctionne pour f .

- La preuve de [29, Lemma 6.4.3] s'adapte facilement pour prouver la compatibilité de la différentielle contractante. En effet il est clair que la multiplication des décorations ne change rien à la preuve.

□

Les lemmes suivants justifient l'appellation *différentielle*.

Lemme 3.2.3. *La différentielle interne d_R est une différentielle.*

Démonstration. Nous avons

$$d_R^2(\Gamma) = d_R \sum_{u \in U \sqcup I} \epsilon(u) \Gamma_u = \sum_{u \in U \sqcup I} \sum_{v \in U \sqcup I} \epsilon(u) \epsilon_u(v) \Gamma_{u,v}.$$

où ϵ_u est la fonction ϵ relative au graphe Γ_u . Puisque $r_{u,u}(u) = d^2 r(u) = 0$ nous avons $\Gamma_{u,u} = 0$. Notons ensuite que $\Gamma_{u,v} = \Gamma_{v,u}$. Il suffit donc de montrer que $\epsilon(u) \epsilon_u(v) = -\epsilon(v) \epsilon_v(u)$. Supposons sans perte de généralité que $u < v$. Alors $\epsilon(u) = \epsilon_v(u) = (-1)^{\sum_{w < u} |r(w)|}$. De plus $\epsilon_u(v) = (-1)^{\sum_{w < v} |r(w)|} = (-1)^{|dr(u)| + \sum_{w < v, w \neq u} |r(w)|} = (-1)^{1 + |r(u)| + \sum_{w < v, w \neq u} |r(w)|} = -\epsilon(v)$. Le résultat en découle. □

Lemme 3.2.4. *La différentielle coupante d_{split} est une différentielle.*

Démonstration. Nous avons

$$d_{split}^2(\Gamma) = d_{split} \sum_{e \in E} \sum_{\Delta'_R \in D_R} \delta(e, \Delta'_R) \Gamma_{e, \Delta'_R} = \sum_{e \in E} \sum_{\Delta'_R \in D_R} \sum_{f \in E \setminus \{e\}} \sum_{\nabla'_R \in D_R} \delta(e, \Delta'_R) \delta_{e, \Delta'_R}(f, \nabla'_R) \Gamma_{e, \Delta'_R, f, \nabla'_R}$$

où δ_{e, Δ'_R} est la fonction δ relative au graphe Γ_{e, Δ'_R} .

Fixons deux arêtes distinctes e et f . Grâce aux relations des graphes, quitte à faire apparaître un signe, nous pouvons supposer sans perte de généralité que $e < f$ et $s(e) < t(e), s(f) < t(f), s(e) < s(f)$. Supposons de plus $t(e) \leq s(f)$, les autres cas de figure se traitant similairement. Distinguons alors deux cas :

- Si $t(e) < s(f)$, alors les arêtes e et f n'ont aucun sommet commun. Dans ce cas pour $\Delta'_R, \nabla'_R \in D_R$, $\Gamma_{e, \Delta'_R, f, \nabla'_R} = \Gamma_{f, \nabla'_R, e, \Delta'_R}$; il s'agit du graphe Γ privé des arêtes e et f dont les sommets sont multipliés par Δ'_R, Δ''_R et ∇'_R, ∇''_R respectivement. Remarquons en outre que

$$\partial_{f, \nabla'_R}(e) = (-1)^{|\nabla'_R| + |\nabla''_R| + \sum_{u \in U \sqcup I} |r(u)| + (n-1)pos(e)} = (-1)^n \partial(e)$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\delta(e, \Delta'_R)}{\delta_{f, \nabla'_R}(e, \Delta'_R)} &= \frac{\partial(e)}{\partial_{f, \nabla'_R}(e)} \frac{(-1)^{|\Delta'_R| + \sum_{u > s(e)} |r(u)| |\Delta'_R| + \sum_{t > t(e)} |r(u)| |\Delta''_R|}}{(-1)^{|\Delta'_R| + \sum_{u > s(e)} |r(u)| |\Delta'_R| + \sum_{t > t(e)} |r(u)| |\Delta''_R| + (|\nabla'_R| + |\nabla''_R|)(|\Delta'_R| + |\Delta''_R|)}} \\ &= (-1)^n (-1)^{n^2} \\ &= 1. \end{aligned}$$

Similairement

$$\partial_{e, \Delta'_R}(f) = (-1)^{|\Delta'_R| + |\Delta''_R| + \sum_{u \in U \sqcup I} |r(u)| + (n-1)(pos(f)-1)} = -\partial(f)$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\delta(f, \nabla'_R)}{\delta_{e, \Delta'_R}(f, \nabla'_R)} &= \frac{\partial(f)}{\partial_{e, \Delta'_R}(f)} \frac{(-1)^{|\nabla'_R| + \sum_{u > s(f)} |r(u)| |\nabla'_R| + \sum_{t > t(f)} |r(u)| |\nabla''_R|}}{(-1)^{|\nabla'_R| + \sum_{u > s(f)} |r(u)| |\nabla'_R| + \sum_{t > t(f)} |r(u)| |\nabla''_R|}} \\ &= -1. \end{aligned}$$

En combinant ces deux égalités nous obtenons $\delta(e, \Delta'_R) \delta_{e, \Delta'_R}(f, \nabla'_R) = -\delta(f, \nabla'_R) \delta_{f, \nabla'_R}(e, \Delta'_R)$ et donc le terme $\Gamma_{e, \Delta'_R, f, \nabla'_R}$ s'annule.

- Si $t(e) = s(f)$, alors les arêtes e et f ont un sommet commun. Dans ce cas pour $\Delta'_R, \nabla'_R \in D_R$, $\Gamma_{e, \Delta'_R, f, \nabla'_R} = (-1)^{|\Delta''_R| |\nabla'_R|} \Gamma_{f, \nabla'_R, e, \Delta'_R}$; permuter les facteurs de la décoration du sommet $t(e)$ fait apparaître le signe.

Remarquons en outre que

$$\partial_{f, \nabla'_R}(e) = (-1)^{|\nabla'_R| + |\nabla''_R| + \sum_{u \in U \sqcup I} |r(u)| + (n-1)\text{pos}(e)} = (-1)^n \partial(e)$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\delta(e, \Delta'_R)}{\delta_{f, \nabla'_R}(e, \Delta'_R)} &= \frac{\partial(e)}{\partial_{f, \nabla'_R}(e)} \frac{(-1)^{|\Delta'_R| + \sum_{u > s(e)} |r(u)| |\Delta'_R| + \sum_{t > t(e)} |r(u)| |\Delta''_R|}}{(-1)^{|\Delta'_R| + \sum_{u > s(e)} |r(u)| |\Delta'_R| + \sum_{t > t(e)} |r(u)| |\Delta''_R| + (|\nabla'_R| + |\nabla''_R|)(|\Delta'_R| + |\Delta''_R|) - |\nabla'_R| |\Delta''_R|}} \\ &= (-1)^n (-1)^{n^2} (-1)^{|\nabla'_R| |\Delta''_R|} \\ &= (-1)^{|\nabla'_R| |\Delta''_R|}. \end{aligned}$$

Similairement

$$\partial_{e, \Delta'_R}(f) = (-1)^{|\Delta'_R| + |\Delta''_R| + \sum_{u \in U \sqcup I} |r(u)| + (n-1)(\text{pos}(f)-1)} = -\partial(f)$$

d'où

$$\begin{aligned} \frac{\delta(f, \nabla'_R)}{\delta_{e, \Delta'_R}(f, \nabla'_R)} &= \frac{\partial(f)}{\partial_{e, \Delta'_R}(f)} \frac{(-1)^{|\nabla'_R| + \sum_{u > s(f)} |r(u)| |\nabla'_R| + \sum_{t > t(f)} |r(u)| |\nabla''_R|}}{(-1)^{|\nabla'_R| + \sum_{u > s(f)} |r(u)| |\nabla'_R| + \sum_{t > t(f)} |r(u)| |\nabla''_R|}} \\ &= -1. \end{aligned}$$

En combinant toutes ces égalités nous obtenons $\delta(e, \Delta'_R) \delta_{e, \Delta'_R}(f, \nabla'_R) \Gamma_{e, \Delta'_R, f, \nabla'_R} = -\delta(f, \nabla'_R) \delta_{f, \nabla'_R}(e, \Delta'_R) \Gamma_{f, \nabla'_R, e, \Delta'_R}$ et donc le terme $\Gamma_{e, \Delta'_R, f, \nabla'_R}$ s'annule.

En appliquant ce raisonnement à chaque couple d'arêtes nous en déduisons que $d_{split}^2(\Gamma) = 0$ et donc $d_{split}^2 = 0$. □

Lemme 3.2.5. *La différentielle contractante d_{contr} est une différentielle.*

Démonstration. Il suffit de reprendre la preuve de [29, Lemma 6.4.6], les décorations n'ayant pas d'influence sur celle-ci. □

Nous avons également les trois faits suivants. Les preuves sont assez techniques et il serait peu instructif de les donner toutes les trois. A cet égard nous en donnons une assortie d'un commentaire pour mettre en évidence l'idée récurrente dans les trois preuves.

Lemme 3.2.6. $d_R d_{split} + d_{split} d_R = 0$.

Démonstration. Soit $\Gamma \in \mathcal{G}_R(U)$ un graphe. D'une part

$$d_R d_{split}(\Gamma) = d_R \left(\sum_{e \in E} \sum_{\Delta'_R} \delta(e, \Delta'_R) \Gamma_{e, \Delta'_R} \right) = \sum_{u \in U \sqcup I} \sum_{e \in E} \sum_{\Delta'_R} \epsilon_{e, \Delta'_R}(u) \delta(e, \Delta'_R) \Gamma_{(e, \Delta'_R), u}.$$

où les facteurs $\epsilon_{e, \Delta'_R}(u)$ sont relatifs aux graphes Γ_{e, Δ'_R} .

D'autre part

$$d_{split} d_R(\Gamma) = d_{split} \left(\sum_{u \in U} \epsilon(u) \Gamma_u \right) = \sum_{e \in E} \sum_{\Delta'_R} \sum_{u \in U \sqcup I} \delta_u(e, \Delta'_R) \epsilon(u) \Gamma_{u, (e, \Delta'_R)}.$$

où les facteurs $\delta_u(e, \Delta'_R)$ sont relatifs aux graphes Γ_u .

Il suffit donc de prouver que pour tous $u \in U \sqcup I, e \in E, \Delta'_R \in D_R$ les termes $\epsilon_{e, \Delta'_R}(u) \delta(e, \Delta'_R) \Gamma_{(e, \Delta'_R), u}$ et $\delta_u(e, \Delta'_R) \epsilon(u) \Gamma_{u, (e, \Delta'_R)}$ s'annulent. Quitte à changer le signe de Γ nous pouvons supposer $s(e) < t(e)$.

Observons que

$$\epsilon_{e, \Delta'_R}(u) = \begin{cases} \epsilon(u) & \text{si } u \leq s(e) \\ (-1)^{|\Delta'_R|} \epsilon(u) & \text{si } s(e) < u \leq t(e) \\ (-1)^n \epsilon(u) & \text{si } t(e) < u \end{cases}$$

et $\partial_u(e) = -\partial(e)$ ce qui implique

$$\delta_u(e, \Delta'_R) = \begin{cases} -\delta(e, \Delta'_R) & \text{si } u \leq s(e) \\ -\delta(e, \Delta'_R) (-1)^{|\Delta'_R|} & \text{si } s(e) < u \leq t(e) \\ -\delta(e, \Delta'_R) (-1)^n & \text{si } t(e) < u \end{cases}.$$

Par conséquent $\epsilon_{e, \Delta'_R}(u) \delta(e, \Delta'_R) = -\delta_u(e, \Delta'_R) \epsilon(u)$. Il reste donc à montrer que les graphes $\Gamma_{(e, \Delta'_R), u}$ et $\Gamma_{u, (e, \Delta'_R)}$ sont égaux. Si $u \neq s(e), t(e)$ cela découle directement des définitions de d_R, d_{split} . Supposons à présent que $u = s(e)$. Alors les graphes $\Gamma_{(e, \Delta'_R), u}$ et $\Gamma_{u, (e, \Delta'_R)}$ ont les mêmes sommets, arêtes et décorations exceptées le sommet u qui est décoré par $d_R(r(u) \Delta'_R)$ dans le premier graphe et $d_R(r(u)) \Delta'_R$ dans le second. Or, puisque Δ'_R est un cocycle symétrique :

$$d_R(r(u) \Delta'_R) = d_R(r(u)) \Delta'_R + (-1)^{|r(u)|} d_R(\Delta'_R) = d_R(r(u)) \Delta'_R$$

ce qui prouve que les deux graphes sont bien égaux. Le cas $u = t(e)$ est similaire. □

Remarque 3.2.7. La preuve précédente montre que les applications $d_R d_{split}$ et $d_{split} d_R$ font apparaître les mêmes graphes $\Gamma_{e, \Delta'_R, u}$ assortis de facteurs opposés. Autrement dit couper une arête avant de différentier une décoration revient à différentier cette décoration avant de couper cette arête, au signe près. Le fait que ces deux opérations

“commutent” revient également dans la preuve des deux autres lemmes. Les signes proviendront de la différentielle d_R qui augmente le degré d’une décoration ou de la perte d’une arête dans d_{split}, d_{contr} .

Lemme 3.2.8. $d_R d_{contr} + d_{contr} d_R = 0$.

Lemme 3.2.9. $d_{split} d_{contr} + d_{contr} d_{split} = 0$.

Corollaire 3.2.10. *L’application $d := d_R + d_{split} + d_{contr}$ est une différentielle.*

Démonstration. Les lemmes 3.2.3,4,5 assurent que d agit bien comme une différentielle au niveau des produits. De plus

$$\begin{aligned} d^2 &= (d_R + d_{split} + d_{contr})^2 \\ &= d_R^2 + d_{split}^2 + d_{contr}^2 + d_R d_{split} + d_{split} d_R + d_R d_{contr} + d_{contr} d_R + d_{split} d_{contr} + d_{contr} d_{split} \\ &= 0 \end{aligned}$$

en vertu des lemmes 3.2.6,8,9. □

Toute la machinerie développée en ce début de chapitre nous amène à la proposition suivante.

Proposition 3.2.11. *L’espace de graphes $\mathcal{G}_R(U)$ muni du produit défini ci-dessus et de la différentielle $d = d_R + d_{split} + d_{contr}$ admet une structure d’ADGC.*

3.3 Lien avec les formes algébriques par morceaux

À présent il est temps de donner un sens à cette définition totalement ad hoc. Cela passe par la définition suivante, qui va permettre de donner un sens aux arêtes d’un graphe.

Proposition 3.3.1. *Il existe une forme $\varphi \in \Omega_{PA}^{n-1}(C_M[2]) \cong \Omega_{PA}^{n-1}(C_M[\{u, v\}])$ appelée propagateur satisfaisant les conditions suivantes :*

- Si $\tau \in \Sigma_2$ est l’unique transposition agissant sur $C_M[\{u, v\}]$ par permutation des coordonnées, alors $\tau \cdot \varphi = (-1)^n \varphi$.
- $d\varphi = (p_u, p_v)^*((\sigma \otimes \sigma)(\Delta_R))$.
- La restriction à $\partial C_M[\{u, v\}] \cong S^{n-1}$ est une forme volume.
- Pour un élément $r \in R$ nous avons

$$\int_{p_v: C_M[\{u, v\}] \rightarrow C_M[\{v\}]} p_u^*(\sigma(r)) \wedge p_{uv}^*(\varphi) = 0. \quad (3.1)$$

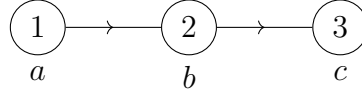
Ce propagateur va permettre de construire un élément de $\Omega_{PA}(C_M[U])$ à partir d'un graphe.

Avant cela considérons $\Gamma = (I, E, s, t, r)$ un graphe. Nous pouvons alors définir la forme

$$\omega'(\Gamma) = \left(\bigwedge_{u \in U \sqcup I} p_u^*(\sigma(r(u))) \right) \wedge \left(\bigwedge_{e \in E} p_{s(e)t(e)}^*(\varphi) \right)$$

où les ordres linéaires de $U \sqcup I$ et E définissent l'ordre du produit.

Exemple : l'application ω' envoie le graphe



sur la forme $p_1^*(\sigma(a)) \wedge p_2^*(\sigma(b)) \wedge p_3^*(\sigma(c)) \wedge p_{12}^*(\varphi) \wedge p_{23}^*(\varphi)$.

Notons que $\omega'(\Gamma) \in \Omega_{PA}(C_M[U \sqcup I])$, qui dépend donc de I . Pour s'en débarrasser, nous définissons

$$\omega(\Gamma) = \int_{p_U: C_M[U \sqcup I] \rightarrow C_M[U]} \omega'(\Gamma) \in \Omega_{PA}(C_M[U]).$$

Par [4, Corollary 83], cette intégrale est bien définie. Par ailleurs, nous avons le lemme suivant qui stipule que ω' est compatible avec les relations d'équivalence définissant les graphes.

Lemme 3.3.2. *L'application $\omega : \mathcal{G} \rightarrow \Omega_{PA}(C_M[U])$ est bien définie.*

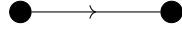
Démonstration. Il suffit de vérifier qu'elle est compatible avec les relations d'équivalence définissant $\mathcal{G}$.

- Soient Γ et Γ' des diagrammes différant d'une transposition de deux sommets u, v dans l'ordre linéaire de I . Alors les formes $\omega'(\Gamma)$ et $\omega'(\Gamma')$ diffèrent d'un facteur $(-1)^{|r(u)||r(v)|}$ puisque $p_u^*(\sigma(r(u))) \wedge p_v^*(\sigma(r(v))) = (-1)^{|r(u)||r(v)|}$. De plus par [29, Proposition 5.8.1], la transposition des deux sommets modifie l'orientation de $C_M[U \sqcup I]$ d'un facteur $(-1)^n$, ce qui change donc également le signe de l'intégrale d'un facteur $(-1)^n$. Finalement nous avons donc un changement de signe de $(-1)^{n+|r(u)||r(v)|}$ ce qui est cohérent avec la relation.
- En vertu de la première propriété du propagateur, changer la direction d'une arête e consiste à remplacer le facteur $p_{s(e)t(e)}^*(\varphi)$ en $p_{t(e)s(e)}^*(\varphi)$ ce qui modifie d'un signe $(-1)^n$, ce qui est cohérent avec la relation.
- La transposition de deux arêtes e, f modifie $\omega'(\Gamma)$ d'un facteur $(-1)^{n-1}$ car $p_{s(e)t(e)}^*(\varphi) \wedge p_{s(f)t(f)}^*(\varphi) = (-1)^{(n-1)^2} p_{s(f)t(f)}^*(\varphi) \wedge p_{s(e)t(e)}^*(\varphi)$.

- La compatibilité avec l'action réelle sur les décorations est triviale.

□

Ce morphisme ω nous permet d'interpréter des graphes en termes de formes PA et vice-versa. Fort de cette interprétation, regardons comment sont traduites les propriétés du propagateur en termes de graphes. Tout d'abord, le propagateur s'interprète comme un graphe de sommets u, v



- La preuve précédente exprime le fait que l'action de Σ_2 sur φ consiste à changer la direction de l'arête et que les changements de signes sont cohérents.
- Nous avons $d\varphi = (p_1, p_2)^*((\sigma \otimes \sigma)(\Delta_R)) = \sum_{\Delta_R} p_1^*(\sigma(\Delta'_R)) \wedge p_2^*(\sigma(\Delta''_R))$. Maintenant

$$d_{split} \quad \bullet \longrightarrow \bullet \quad = \quad \sum_{\Delta_R} \quad \begin{array}{c} \Delta'_R \\ \bullet \end{array} \quad \begin{array}{c} \Delta''_R \\ \bullet \end{array}$$

Le morphisme ω envoie le membre de droite sur $\sum_{\Delta_R} p_u^*(\sigma(\Delta'_R)) \wedge p_v^*(\sigma(\Delta''_R))$. Ceci montre que différentier le propagateur revient à prendre la différentielle coupante d'une arête.

Ensuite nous prouvons que ω est en fait un morphisme d'ADGC. En particulier nous allons comprendre d'où proviennent les signes dans les différentielles.

En vertu de [18, Proposition 8.12] et [4, Remark 84], nous avons la formule de Stokes

$$d \int_{p_U: C_M[U \sqcup I] \rightarrow C_M[U]} \omega'(\Gamma) = \int_{p_U: C_M[U \sqcup I] \rightarrow C_M[U]} d\omega'(\Gamma) + (-1)^{|\omega'(\Gamma)| - n|I|} \int_{p_U^\partial: C_M^\partial[U \sqcup I] \rightarrow C_M[U]} \omega'(\Gamma).$$

Nous pouvons disséquer le terme de droite en trois termes qui vont correspondre à $d_R(\omega'(\Gamma))$, $d_{split}(\omega'(\Gamma))$, $d_{contr}(\omega'(\Gamma))$.

Lemme 3.3.3. *Soient (A, d) une ADGC et $a_1, \dots, a_k \in A$. Alors*

$$d(a_1 \cdots a_k) = \sum_{i=1}^k (-1)^{\sum_{j<i} |a_j|} a_1 \cdots a_{i-1} d(a_i) a_{i+1} \cdots a_k.$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence. Le cas $k = 1$ est trivial. Pour $k > 1$ nous avons

$$\begin{aligned}
d(a_1 \cdots a_k) &= d((a_1 \cdots a_{k-1})k) \\
&= d(a_1 \cdots a_{k-1})a_k + (-1)^{|a_1 \cdots a_{k-1}|} a_1 \cdots a_{k-1} d(a_k) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} (-1)^{\sum_{j<i} |a_j|} a_1 \cdots a_{i-1} d(a_i) a_{i+1} \cdots a_{k-1} a_k + (-1)^{\sum_{j<k} |a_j|} a_1 \cdots a_{k-1} d(a_k) \\
&= \sum_{i=1}^k (-1)^{\sum_{j<i} |a_j|} a_1 \cdots a_{i-1} d(a_i) a_{i+1} \cdots a_k.
\end{aligned}$$

Ceci conclut la preuve. $\square$

Rappelons que $\omega'(\Gamma) = (\bigwedge_{u \in U \sqcup I} p_u^*(\sigma(r(u)))) \wedge (\bigwedge_{e \in E} p_{s(u)t(u)}^*(\varphi))$ et donc

$$\begin{aligned}
d\omega'(\Gamma) &= d \left(\bigwedge_{u \in U \sqcup I} p_u^*(\sigma(r(u))) \right) \wedge \left(\bigwedge_{e \in E} p_{s(u)t(u)}^*(\varphi) \right) \\
&\quad + (-1)^{\sum_{u \in U \sqcup I} |r(u)|} \left(\bigwedge_{u \in U \sqcup I} p_u^*(\sigma(r(u))) \right) \wedge d \left(\bigwedge_{e \in E} p_{s(e)t(e)}^*(\varphi) \right).
\end{aligned}$$

Les deux termes correspondent respectivement à $\omega'(d_R \Gamma)$ et $\omega'(d_{split} \Gamma)$. Ceci explique en particulier le choix des signes dans les définitions de ces deux différentielles. En effet, dans le premier terme on somme sur tous les graphes où exactement une décoration est différenciée. De plus par le lemme, en notant $u_1 < u_2 < \cdots < u_{|U \sqcup I|}$ les éléments de $U \sqcup I$,

$$d \left(\bigwedge_{u \in U \sqcup I} p_u^*(\sigma(r(u))) \right) = \sum_{u_i \in U \sqcup I} (-1)^{\sum_{j<i} |u_j|} p^*(\sigma(r(u_1))) \wedge \cdots \wedge p^*(\sigma(r(u_{i-1}))) \wedge p^*(\sigma(r(u_{i+1}))) \wedge \cdots \wedge p^*(\sigma(r(u_{|U \sqcup I|}))).$$

Le signe $(-1)^{\sum_{j<i} |u_j|}$ est exactement le signe $\epsilon(u_i)$ qui apparaît dans la définition de différentielle interne.

Pour le second terme, rappelons que $d\varphi = (p_1, p_2)^*(\sigma \otimes \sigma(\Delta_R))$. Ainsi

$$dp_{s(e)t(e)}^*(\varphi) = p_{s(e)t(e)}^*(d\varphi) = \sum_{\Delta_R} (-1)^{|\Delta'_R|} p_{s(u)}^*(\sigma(\Delta'_R)) \wedge p_{t(u)}^*(\sigma(\Delta''_R)).$$

Pour chaque terme de la somme, les décorations des sommets $s(u)$ et $t(u)$ sont bien multipliées par Δ'_R et Δ''_R respectivement. De nouveau, le signe $\delta(e, \Delta'_R)$ est une conséquence du lemme précédent et du fait qu'on met ces deux facteurs "à la bonne place", c'est-à-dire dans les facteurs correspondant aux sommets $s(u)$ et $t(u)$.

La preuve que $\int_{p_U^\partial: C_M^\partial[U \sqcup I] \rightarrow C_M[U]} \omega'(\Gamma)$ correspond au terme $\omega(d_{\text{contr}} \omega'(\Gamma))$ est plus technique. Il faut d'abord comprendre le domaine sur lequel nous intégrons. Nous avons pour cela le lemme suivant qui est une conséquence de [24, Lemma 34, Lemma 35]. Nous nous contenterons de l'admettre.

Lemme 3.3.4. *Pour des éléments $u, v \in U \sqcup I$ avec u ou $v \in I$, notons $W_{u,v} = \{x \in C_M[U \sqcup I] \mid (x_a \simeq x_b) \text{ rel } x_c \text{ ssi } a, b = u, v \text{ et } c \neq u, v\}$. Alors $\sqcup_{u,v \in U \sqcup I} W_{u,v} \subset C_M^\partial[U \sqcup I]$ et*

$$\int_{p_U^\partial: C_M^\partial[U \sqcup I] \rightarrow C_M[U]} \omega'(\Gamma) = \int_{p_U^\partial|_{\sqcup_{u,v \in U \sqcup I} W_{u,v}} \rightarrow C_M[U]} \omega'(\Gamma).$$

En outre Il existe un homéomorphisme $\mu : C_M[(U \sqcup I)/(u \sim v)] \times C_{\mathbb{R}^n}[\{u, v\}] \rightarrow W_{u,v}$.

L'ensemble $W_{u,v}$ correspond aux configurations de $C_M[U \sqcup I]$ où tous les points sont distincts exceptés les points u, v qui sont infinitésimalement proches. Le lemme stipule donc que lorsqu'on intègre l'intégrale de bord, il faut tenir uniquement compte de ces points-là.

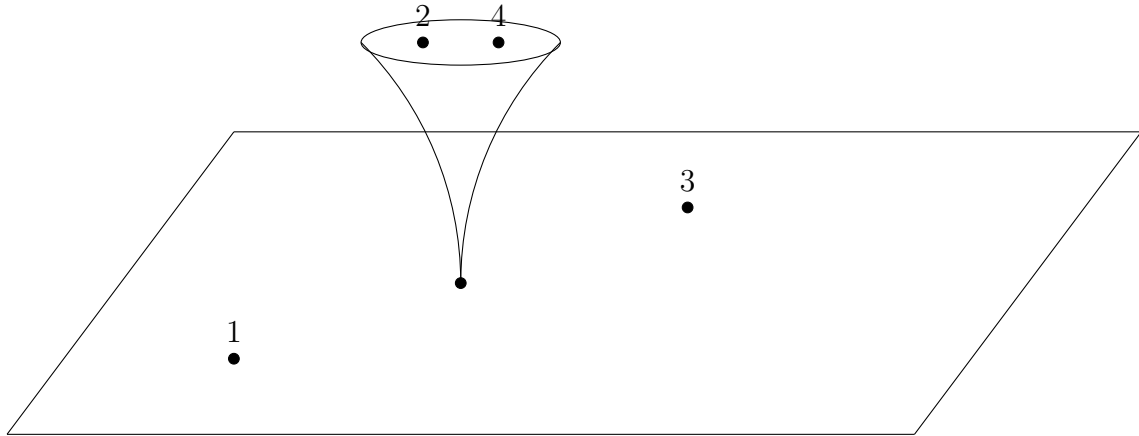


FIGURE 3.1 – Un élément de $W_{2,4} \subset C_M[4]$.

Proposition 3.3.5. *Nous avons l'égalité*

$$(-1)^{|\omega'(\Gamma)| - n|I|} \int_{p_U^\partial: C_M^\partial[U \sqcup I] \rightarrow C_M[U]} \omega'(\Gamma) = \omega(d_{\text{contr}} \Gamma).$$

Démonstration. Par le lemme nous avons

$$\int_{p_U^\partial: C_M^\partial[U \sqcup I] \rightarrow C_M[U]} \omega'(\Gamma) = \int_{p_U^\partial|_{\sqcup_{u,v \in U \sqcup I} W_{u,v}} \rightarrow C_M[U]} \omega'(\Gamma).$$

Nous avons en outre par [18, Proposition 8.11]

$$\int_{p_U^\partial|_{\sqcup_{u,v \in U \sqcup I} W_{u,v}} \rightarrow C_M[U]} \omega'(\Gamma) = \sum_{u,v \in U \sqcup I} \int_{p_U^\partial|_{W_{u,v}} \rightarrow C_M[U]} \omega'(\Gamma).$$

Fixons $u, v \in U \sqcup I$. Supposons $u < v$ et $v \in I$. Distinguons deux cas :

- Il n'y a pas d'arête entre u et v dans Γ : alors par [18, Proposition 8.13] nous avons

$$\int_{p_U^\partial|_{W_{u,v}} \rightarrow C_M[U]} \omega'(\Gamma) = \int_{p_U : C_M[(U \sqcup I)/(u \sim v)] \rightarrow C_M[U]} \omega'(\Gamma_e) \cdot \int_{C_{\mathbb{R}^n}[\{u,v\}]} p_{uv}^*(1) = 0$$

pour des raisons de dimensions (intégrer une 0-forme sur un espace de dimension > 0 donne 0).

- Il y a une arête e : par le lemme précédent, [18, Proposition 8.10], [18, Proposition 8.13] nous avons

$$\int_{p_U^\partial|_{W_{u,v}} \rightarrow C_M[U]} \omega'(\Gamma) = \int_{p_U : C_M[(U \sqcup I)/(u \sim v)] \rightarrow C_M[U]} \omega'(\Gamma_e) \cdot \int_{C_{\mathbb{R}^n}[\{u,v\}]} p_{uv}^*(\varphi).$$

Par la troisième propriété du propagateur, le dernier facteur du membre de droite consiste à intégrer une forme volume sur une sphère et donc vaut 1. L'autre facteur est précisément $\omega(\Gamma_e)$.

En sommant sur toutes les arêtes nous obtenons donc

$$(-1)^{|\omega'(\Gamma)| - n|I|} \int_{p_U^\partial : C_M^\partial[U \sqcup I] \rightarrow C_M[U]} \omega'(\Gamma) = \omega(d_{\text{contr}} \Gamma)$$

comme désiré. $\square$

Proposition 3.3.6. $\omega(\Gamma \cdot \Gamma') = \omega(\Gamma) \wedge \omega(\Gamma')$.

voir aussi [29, Proposition 9.2.1]. Considérons le diagramme suivant où le carré central est un pullback et chaque morphisme est une projection excepté ρ qui est le morphisme induit par l'égalité $p := p_U \circ \pi = p'_U \circ \pi'$.

$$\begin{array}{ccccc} C_M[U \sqcup I \sqcup I'] & & & & \\ & \searrow \rho & \xrightarrow{\pi'} & & \\ & & P & \xrightarrow{q'} & C_M[U \sqcup I'] \\ & \searrow \pi & \downarrow q & & \downarrow p'_U \\ & & C_M[U \sqcup I] & \xrightarrow{p_U} & C_M[U] \end{array}$$

Observons que nous avons un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} C_M[U \sqcup I \sqcup I'] & \xrightarrow{\rho} & P \\ & \searrow \psi \quad \swarrow p & \\ & C_M[U] & \end{array}$$

où ψ et p sont deux fibrés de dimension $n(|I| + |I'|)$. Par [29][Lemma 5.5.2] et [18][Proposition 8.10], nous avons $\psi_*(\rho^*(\mu)) = p_*(\mu)$ pour $\mu = q^*(\omega'(\Gamma)) \wedge q'^*(\omega'(\Gamma'))$.

Il vient alors

$$\begin{aligned} \omega(\Gamma \cdot \Gamma') &= \psi_*(\pi^*(\omega'(\Gamma)) \wedge \pi'^*(\omega'(\Gamma'))) \\ &= \psi_*(\rho^*(q^*(\omega'(\Gamma)) \wedge q'^*(\omega'(\Gamma')))) \\ &= p_*(q^*(\omega'(\Gamma)) \wedge q'^*(\omega'(\Gamma'))) \\ &= p_{U*}(\omega'(\Gamma)) \wedge p'_{U*}(\omega'(\Gamma')) && \text{par [18][Proposition 8.15]} \\ &= \omega(\Gamma) \wedge \omega(\Gamma') \end{aligned}$$

ce qui conclut. □

Corollaire 3.3.7. *Le morphisme $\omega : \mathcal{G}_R(U) \rightarrow \Omega_{PA}(C_M[U])$ est un morphisme d'ADGC.*

Le complexe de graphes $\mathcal{G}$ est le premier candidat pour le zigzag $G_A(U) \leftarrow \dots \rightarrow \Omega_{PA}(C_M[U])$. Malheureusement, les sommets internes le rendent "trop grand" de sorte que ω ne peut pas être un quasi-isomorphisme. Cette affirmation est rendue précise dans [39].

Il faut donc s'arranger pour tuer ces sommets internes en quotientant intelligemment.

Définition 3.3.8. Le complexe de graphe *détaché* est défini par $g_R = \mathcal{G}(\emptyset)$.

Les éléments sont des graphes sans sommet externe. En particulier, le produit de deux tels graphes est leur union disjointe (il n'y a pas de sommet externe pour les recoller).

Rappelons que $\Omega_{PA}(C_M[\emptyset]) = \Omega_{PA}(*) \cong \mathbb{R}$.

Définition 3.3.9. Le morphisme $\omega : \mathcal{G}(\emptyset) \rightarrow \Omega_{PA}(C_M[\emptyset])$ est appelé *fonction de partition* et est noté Z_φ . Nous avons donc $Z_\varphi : g_R \rightarrow \mathbb{R}$.

Il y a une inclusion évidente $g_R \hookrightarrow \mathcal{G}_R(U)$. Nous pouvons alors construire le pushout

$$\begin{array}{ccc} g_R & \xrightarrow{Z_\varphi} & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}_R(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}_R(U) \otimes_{g_R} \mathbb{R} \end{array}$$

Définition 3.3.10. Le complexe de graphes réduit est $\mathcal{G}_R^\varphi(U) := \mathcal{G}_R(U) \otimes_{g_R} \mathbb{R}$.

S'agissant d'un pushout, nous avons $\Gamma \sqcup \gamma = Z_\varphi(\gamma)\Gamma$ pour $\Gamma \in \mathcal{G}(U)$ et $\gamma \in g_R$. Un élément de $\mathcal{G}^\varphi(U)$ peut donc être représenté par un graphe où chaque sommet interne est connecté à un sommet externe : un tel graphe est dit *réduit*. Par la suite, lorsque nous travaillerons avec $\mathcal{G}_R^\varphi(U)$, nous supposerons les graphes représentés de cette manière.

L'intérêt de cette construction est que ce nouveau complexe $\mathcal{G}_R^\varphi(U)$ est assez “petit” pour avoir un quasi-isomorphisme $\mathcal{G}_R^\varphi(U) \rightarrow \Omega_{PA}(C_M[U])$. Dans ce qui suit nous présentons une construction similaire pour avoir un quasi-isomorphisme vers le modèle $G_A(U)$.

Définition 3.3.11. Le morphisme $Z_\epsilon : g_R \rightarrow \mathbb{R}$ est défini par $Z_\epsilon(\gamma) = 0$ si γ contient au moins une arête et

$$\bullet^r \longmapsto \epsilon(\rho(r))$$

où $\rho : R \rightarrow A$ est le morphisme du zigzag $A \xleftarrow{\rho} R \xrightarrow{\sigma}$.

Comme avant nous pouvons définir $\mathcal{G}_R^\epsilon(U)$ par le pushout

$$\begin{array}{ccc} g_R & \xrightarrow{Z_\epsilon} & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}_R(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}_R(U) \otimes_{g_R} \mathbb{R} \end{array}$$

La proposition suivante est cruciale mais la preuve est longue, technique et nécessite des outils non développés dans ce mémoire (des outils de théorie de l'homotopie). Nous nous contentons donc de la mentionner. Le lecteur intéressé pourra consulter [24, Section 4.1]. Néanmoins nous donnons la preuve d'un résultat intervenant dans la preuve, intéressant car la preuve s'appuie sur la combinatoire du graphe ; en particulier, elle met en avant la pertinence du complexe de graphes. En outre, cette preuve montre la nécessité d'avoir une variété de dimension ≥ 4 .

Proposition 3.3.12. *Supposons que $\dim(M) \geq 4$.*

Il existe une ADGC $\mathcal{G}'_R(U)$ et une équivalence faible

$$\mathcal{G}_R^e(U) \xleftarrow{\sim} \mathcal{G}'_R(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_R^\varphi(U).$$

Remarque 3.3.13. Le morphisme $\mathcal{G}_R^\varphi(U) \rightarrow \Omega_{PA}(C_M[U])$ induit par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} g_R & \xrightarrow{Z_\varphi} & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}_R(U) & \xrightarrow{\quad} & \mathcal{G}_R^\varphi(U) \\ & \searrow \omega & \nearrow \\ & & \Omega_{PA}(C_M[U]) \end{array}$$

permet, par abus de notation, d'étendre le morphisme ω à $\mathcal{G}_R^\varphi(U)$. Similairement, en précomposant avec le morphisme $\mathcal{G}'_R(U) \rightarrow \mathcal{G}_R^\varphi(U)$, nous pouvons étendre ω à $\mathcal{G}'_R(U)$.

Le lemme suivant permet d'écarter un type particulier de graphes, ce qui est nécessaire pour la preuve de la proposition après. Pour la preuve, voir [24, Corollary 44].

Lemme 3.3.14. *La fonction de partition s'annule sur les graphes avec un sommet interne univalent, c'est-à-dire ayant un seul sommet adjacent.*

La proposition suivante exploite réellement la structure de graphe, ce qui justifie l'intérêt de les avoir définis.

Proposition 3.3.15. *Supposons que $n = \dim M \geq 4$.*

Soit $\Gamma \in g_R$ un graphe satisfaisant les conditions suivantes :

- Γ est connexe.
- Γ contient au moins deux sommets.
- Si $v \in \Gamma$ est un sommet bivalent i.e $\deg v = 2$, alors v admet une décoration $r \neq 1_R$.

Alors $Z_\varphi(\Gamma) = 0$.

Démonstration. Notons que $Z_\varphi(\Gamma) \in \mathbb{R} \cong \Omega_{PA}(*)$ et donc il suffit de prouver que $\deg \Gamma = \deg(Z_\varphi(\Gamma)) > 0$ (une forme PA de degré strictement positif définie sur un point doit être nulle, [18, Proposition 5.24]). Puisque Γ ne contient que des sommets internes, nous avons

$$\deg \Gamma = (n-1)|E| - n|I| + \sum_{v \in I} |r(v)|$$

où E est l'ensemble des arêtes et I celui des sommets internes. Soient b et t les nombres de sommets de degré 2 et degré au moins 3 respectivement. Le lemme précédent permet de supposer sans perte de généralité qu'il n'y a aucun sommet de degré 1 de sorte que $I = b + t$. Par ailleurs nous avons par un résultat élémentaire de théorie des graphes

$$2|E| = \sum_{v \in I} \deg v \geq 2b + 3t.$$

Ces deux relations et le fait que R ne contient aucun élément de degré 1 par simple connexité nous donnent

$$\deg \Gamma \geq \left(b + \frac{3t}{2}\right)(n-1) - n(b+t) + 2b = b + \frac{t}{2}(n-3).$$

Puisque $|I| > 0$, b ou t est strictement positif. En outre $n-3 > 0$ car $n = \dim M \geq 4$. Dès lors nous avons bien $\deg \Gamma > 0$. $\square$

3.4 Construction du zigzag

Ayant défini le complexe de graphes et ses variantes, nous pouvons à présent construire le zigzag nécessaire de la preuve. Plus précisément, si $n \geq 4$ nous avons une équivalence faible

$$G_A(U) \xleftarrow{\sim} \mathcal{G}_R^\epsilon(U) \xleftarrow{\sim} \mathcal{G}'_R(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_R^\varphi(U) \xrightarrow{\sim} \Omega_{PA}(C_M[U]).$$

Nous connaissons déjà l'existence des deux quasi-isomorphismes du centre. Il reste juste à montrer que nous avons des quasi-isomorphismes $\mathcal{G}_R^\epsilon(U) \xrightarrow{\sim} G_A(U)$ et $\mathcal{G}_R^\varphi(U) \xrightarrow{\sim} \Omega_{PA}(C_M[U])$. La preuve pour le premier morphisme est assez longue et technique donc nous nous contenterons d'en donner une esquisse en mettant en avant les idées clés. L'autre preuve est plus courte, bien qu'un poil technique également.

La suite de la preuve utilise extensivement des filtrations. Cet outil est employé pour prouver que certains morphismes de complexes de cochaînes sont des quasi-isomorphismes (voir proposition qui suit). L'intérêt est que filtrer un complexe permet de tuer une partie de la différentielle (dans notre cas d_R, d_{split} ou d_{contr}), ce qui a le bon goût de simplifier les calculs.

Définition 3.4.1. Soit C un complexe de cochaînes. Une *filtration* est une suite croissante $F_0C \subset F_1C \subset \dots$ de sous-complexes telle que

- $\bigcup_{s \geq 0} F_sC = C$.
- Pour $s \geq 0$, $dF_sC \subset F_sC$.
- Pour tout $n \geq 0$ il existe un indice s tel que $C^n \subset F_sC$.

Proposition 3.4.2. *Soient C et D des complexes de cochaînes de $\mathbb{R}$ –espaces vectoriels et $f : C \rightarrow D$ un morphisme de complexes de cochaînes. Supposons avoir des filtrations $F_0C \subset F_1C \subset \dots$ et $F_0D \subset F_1D \subset \dots$ telles que $f(F_sC) \subset F_sD$ pour $s \geq 0$. Supposons que les morphismes induits $f_0 : F_0C \rightarrow F_0D$ et $f_s : F_sC/F_{s-1}C \rightarrow F_sD/F_{s-1}D$ soient des quasi-isomorphismes. Alors f est un quasi-isomorphisme.*

La preuve de cette proposition découle de [3, VII, Proposition 2.6].

Il y a une factorisation

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_R^\epsilon(U) & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & G_A(U) \\ & \searrow \quad \quad \nearrow & \\ & \mathcal{G}_A^\epsilon(U) & \end{array}$$

où le morphisme $f : \mathcal{G}_R^\epsilon(U) \rightarrow \mathcal{G}_A^\epsilon(U)$ est obtenu en remplaçant chaque décoration r par $\rho(r)$; ceci définit bien un morphisme d'ADGC. Le morphisme $\mathcal{G}_A^\epsilon(U) \rightarrow G_A(U)$ est défini en tuant les graphes avec des sommets internes et en identifiant chaque graphe à un élément de $G_A(U)$ (en considérant l'interprétation graphique).

Ce morphisme est bien défini, car dans les graphes avec uniquement des sommets externes, la différentielle contractante n'intervient pas et donc nous avons bien la compacité de la différentielle.

Lemme 3.4.3. *Le morphisme $f : \mathcal{G}_R^\epsilon(U) \rightarrow \mathcal{G}_A^\epsilon(U)$ est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. Considérons les filtrations $(F_s\mathcal{G}_R^\epsilon(U))_{s \geq 0}$ et $(F_s\mathcal{G}_A^\epsilon(U))_{s \geq 0}$ données par $F_s\mathcal{G}_R^\epsilon(U) = \{\Gamma \in \mathcal{G}_R^\epsilon(U) \mid |E| \leq s\}$ et de même pour A , c'est-à-dire on filtre en fonction du nombre d'arêtes. Puisqu'il y a au plus une arête entre deux sommets et que les décorations sont de degrés au plus n , la filtration s'arrête bien en chaque degré. De plus il est clair que f préserve la filtration.

Examinons à présent le comportement de la différentielle à travers les quotients F_s/F_{s-1} . Pour rappel, la différentielle se décompose en 3 différentielles $d = d_R + d_{split} + d_{contr}$. La différentielle d_R ne change pas le nombre d'arêtes donc $d_R(F_s\mathcal{G}_R^\epsilon(U)) \subset F_s\mathcal{G}_A^\epsilon(U)$. En revanche, les différentielles d_{split} et d_{contr} diminuent le nombre d'arêtes de 1 dans chaque composante d'où $d_{split}F_s\mathcal{G}_R^\epsilon(U), d_{contr}F_s\mathcal{G}_R^\epsilon(U) \subset F_{s-1}\mathcal{G}_A^\epsilon(U)$. Autrement, ces deux différentielles s'annulent dans le quotient et donc la différentielle obtenue n'est rien d'autre que la différentielle d_R .

Dès lors, puisque $\rho : R \rightarrow A$ est un quasi-isomorphisme, nous pouvons en déduire que les applications induites $F_s\mathcal{G}_R^\epsilon(U)/F_{s-1}\mathcal{G}_R^\epsilon(U) \rightarrow F_s\mathcal{G}_A^\epsilon(U)/F_{s-1}\mathcal{G}_A^\epsilon(U)$ sont des quasi-isomorphismes. En effet, si $\Gamma \in \mathcal{G}_A^\epsilon(U)$ est tel que $d_A\Gamma = 0$ alors nous pouvons prendre

comme cocycle le même graphe Γ où les décorations a sont remplacées par des décorations r telles que $[\rho(r)] = [a]$. Notons que si $d_A \Gamma = 0$, alors chaque décoration a est un cocycle et donc de telles décorations r peuvent bien être choisies.

De plus, sur $F_0 \mathcal{G}_R^\epsilon(U)$ seule la différentielle d_R agit donc nous pouvons recycler l'argument pour avoir un quasi-isomorphisme $F_0 \mathcal{G}_R^\epsilon(U) \rightarrow F_0 \mathcal{G}_A^\epsilon(U)$.

La proposition précédente permet de conclure. $\square$

En vertu de ce lemme, prouver que le morphisme $\mathcal{G}_R^\epsilon(U) \rightarrow G_A(U)$ est un quasi-isomorphisme revient à prouver que le morphisme $\mathcal{G}_A^\epsilon(U) \rightarrow G_A(U)$ en est un. La preuve de ceci est assez longue donc nous en donnons plutôt une esquisse avec le fil rouge.

On définit d'abord une filtration $(F_s \mathcal{G}_A^\epsilon(U))_{s \geq 0}$ par

$$F_s \mathcal{G}_A^\epsilon(U) = \{\Gamma \in \mathcal{G}_A^\epsilon(U) \mid \Gamma \text{ est réduit et } |E| - |I| \leq s\}.$$

Notons que puisqu'il s'agit de graphes réduits, la filtration commence bien à $s = 0$. En effet, dans un graphe réduit, ajouter un sommet interne implique d'ajouter une arête adjacente à ce dernier.

Inspectons à présent le comportement de la différentielle sous cette filtration. La différentielle d_A ne change ni le nombre de sommets ni le nombre d'arêtes et donc est préservée dans les quotients. La différentielle d_{contr} diminue le nombre d'arêtes et de sommets internes de 1 donc est également préservée. Pour la différentielle d_{split} distinguons deux cas :

- L'arête coupée par d_{split} ne crée pas de composante interne : alors le nombre d'arêtes diminue de 1 et donc décroît strictement la filtration.
- L'arête coupée crée une composante interne : si cette composante interne contient au moins deux sommets alors elle est identifiée à 0. Autrement cette composante consiste en un sommet interne u décorée par un élément r et qui était univalent dans le graphe initial. Cette composante interne est identifiée avec $\epsilon(r)$. Cette identification diminue donc le nombre de sommets internes de 1 (seul u est perdu).

Au total une arête et un sommet interne sont perdus ce qui préserve la filtration.

Il est possible de montrer que l'opération de contraction d'une arête adjacente à un sommet interne univalent s'annule avec celle de couper cette même arête. Dès lors, dans la filtration, la différentielle obtenue est égale à $d' = d_A + d'_{contr}$ où d'_{contr} contracte toutes les arêtes sauf celles adjacentes à un sommet interne univalent.

On définit ensuite une filtration pour $G_A(U)$. Étant donné un élément de la forme $a \cdot v$ avec $a \in A^{\otimes U}$ et $v \in e_n^\vee(U)$ un produit de générateurs, on définit la *longueur* l de $a \cdot v$ par $l(a \cdot v) = \frac{|v|}{n-1}$. Concrètement il s'agit du nombre de générateurs apparaissant dans v . Nous obtenons alors une filtration $(F_s G_A(U))_{s \geq 0}$ où $F_s G_A(U)$ est engendré par les éléments de la forme $a \cdot v$ avec $l(v) \leq s$.

En considérant l'interprétation de $G_A(U)$ en terme de graphes, la filtration n'est rien d'autre que celle obtenue en filtrant le nombre d'arêtes.

On peut alors vérifier que le morphisme $\mathcal{G}_A^\epsilon(U) \rightarrow G_A(U)$ est compatible avec ces deux filtrations. Nous pouvons alors utiliser la proposition 3.4.2.

L'avantage d'utiliser la filtration est qu'elle permet de restreindre la preuve aux graphes connexes. Ceci permet de prouver que les nombres de Betti de $\mathcal{G}^\epsilon(U)$ et $G_A(U)$ sont égaux. La preuve se conclut alors en montrant que le morphisme $\mathcal{G}^\epsilon(U) \rightarrow G_A(U)$ est surjectif en cohomologie.

Avant de compléter la preuve en donnant la seconde moitié du zigzag, nous avons besoin d'un lemme, corollaire de [28][Theorem 10.1].

Lemme 3.4.4. *Les dimensions de $H(G_A(U); \mathbb{R})$ et $H(\Omega_{PA}(C_M[U]); \mathbb{R})$ sont finies et égales.*

Proposition 3.4.5. *Le morphisme $\omega : \mathcal{G}_R^\varphi(U) \rightarrow \Omega_{PA}(C_M[U])$ est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur $|U|$.

Traitons d'abord le cas $U = \emptyset$. Nous avons par définition $\mathcal{G}_R^\varphi(\emptyset) = g_R \otimes_{g_R} \mathbb{R} \cong \mathbb{R}$ et $\Omega_{PA}(C_M[\emptyset]) = \Omega_{PA}(\{*\}) \cong \mathbb{R}$ et le morphisme ω est la fonction de partition qui est ici l'identité.

Pour le cas général, il suffit de vérifier que le morphisme $\omega : \mathcal{G}_R'(U) \rightarrow \Omega_{PA}(C_M[U])$ est un quasi-isomorphisme. Nous savons que les nombres de Betti de $\mathcal{G}_R'(U)$ et $G_A(U)$ coïncident. Par ailleurs le lemme précédent assure que ceux de $G_A(U)$ et $C_M[U]$ sont également égaux. Par conséquent $\mathcal{G}_R'(U)$ et $\Omega_{PA}(C_M[U])$ ont les mêmes nombres de Betti. Il suffit donc de montrer que ω est surjectif en cohomologie.

Si $|U| = 1$ alors $\Omega_{PA}(C_M[U]) = \Omega_{PA}(M)$. Soit z un cocycle de $\Omega_{PA}(M)$. Il existe donc un cocycle $r \in R$ tel que $[\sigma(r)] = [z]$. Alors le cocycle $\Gamma \in \mathcal{G}_R^\varphi(U)$ composé d'un seul sommet externe décoré par r est tel que $\omega(\Gamma) = \sigma(r)$ et donc $[\omega(\Gamma)] = [z]$. Donc ω est surjectif en cohomologie.

Supposons à présent que $|U| > 1$ et écrivons $U = \{u\} \sqcup V$. Puisque $H(G_A(U)) \cong H^*(C_M[U]) \cong H(\Omega_{PA}(C_M[U]))$, tout élément de $H(\Omega_{PA}(C_M[U]))$ s'identifie à un élément de $H(G_A(U))$. Considérons alors un cocycle $z \in \Omega_{PA}(C_M[U])$ identifié à un cocycle $w \in G_A(U)$. En vertu de la relation d'Arnold

$$\omega_{ij}\omega_{jl} + \omega_{jl}\omega_{lk} + \omega_{lk}\omega_{ki} = 0,$$

tout facteur de w de la forme $\omega_{uv}\omega_{ut}$ peut être remplacé par un facteur $\pm(\omega_{uv}\omega_{vt} + \omega_{ut}\omega_{vt})$. Par ailleurs la relation $\iota_i(a)\omega_{ij} = \iota_j(a)\omega_{ij}$ nous permet de supposer qu'un élément de la forme $a \cdot \omega_{uv}$ est tel que $a \in A^{\otimes U}$ contient un 1_A en position u .

Par conséquent nous pouvons écrire w sous la forme

$$w = w' + \sum_{v \in V} \omega_{uv} w_v$$

où $w' \in A \otimes G_A(V) \hookrightarrow G_A(U)$ ne contient aucun facteur de la forme ω_{uv} et $w_v \in G_A(V)$. Nous obtenons alors

$$0 = dw = dw' + \sum_{v \in V} d\omega_{uv} w_v + (-1)^{n-1} \sum_{v \in V} \omega_{uv} dw_v.$$

Pour v fixé, le facteur ω_{uv} n'apparaît que dans le terme $\omega_{uv} dw_v$ et donc nécessairement $dw_v = 0$. Par ailleurs rappelons que $d\omega_{uv} = \sum_{\Delta_A} \iota_u(\Delta'_A) \cdot \iota_v(\Delta''_A)$. Ainsi

$$dw' = - \sum_{v \in V} \sum_{\Delta_A} \iota_u(\Delta'_A) \cdot \iota_v(\Delta''_A) w_v.$$

En outre chaque $w_v \in G_A(V)$ s'identifie à un cocycle $z_v \in \Omega_{PA}(C_M[V])$ partageant la même classe de cohomologie. Nous obtenons par hypothèse de récurrence un cocycle $\Gamma_v \in \mathcal{G}'_R(V)$ tel que le morphisme $\mathcal{G}'_R(V) \rightarrow \Omega_{PA}(C_M[V])$ envoie la classe Γ_v sur $[z_v]$.

Définissons ensuite $\Gamma_c \in R \otimes \mathcal{G}'_R(V)$ par

$$\Gamma_c = - \sum_{v \in V} \sum_{\Delta_R} p_u^*(\Delta'_R) \cdot p_v^*(\Delta''_R) \Gamma_v.$$

Puisque le morphisme $\tau : \mathcal{G}'_R(U) \rightarrow G_A(U)$ est un quasi-isomorphisme et envoie la classe $[\Gamma_c]$ sur $[dw']$ par construction, nous en déduisons que Γ_c est un cobord ; à cet égard nous pouvons écrire $\Gamma_c = d\Gamma_1$. Nous obtenons alors $d(w' - \tau(\Gamma_1)) = dw' - \tau(d\Gamma_1) = 0$ ce qui signifie que $w' - \tau(\Gamma_1)$ est un cocycle. Il s'agit d'un élément de $A \otimes G_A(V)$ et donc il existe un cocycle $\Gamma_2 \in R \otimes \mathcal{G}'_R(V)$ cohomologue i.e $\tau(\Gamma_2) = w' - \tau(\Gamma_1) + da$ pour un certain a . Définissons $\Gamma_3 = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Il s'ensuit que $\tau(\Gamma_3) = w' + da$.

Définissons finalement $\Gamma \in \mathcal{G}'_R(U)$ par

$$\Gamma = \Gamma_3 + \sum_{v \in V} e_{uv} \Gamma_v.$$

Dans ce cas

$$\tau(\Gamma) = \tau(\Gamma_3) + \sum_{v \in V} \omega_{uv} w_v = w + da.$$

Il s'ensuit que les classes de cohomologies de Γ et w coïncident. *A fortiori* ω envoie la classe de Γ sur celle de z et donc nous avons bien une surjection en cohomologie.

□

Jusqu'à présent, nous avons uniquement travaillé d'un point de vue algébrique. À présent, nous sommes en mesure de faire la passerelle entre le résultat obtenu et la topologie de la variété M de départ.

Proposition 3.4.6 ([24, Proposition 77]). *Si deux ADGC à dualité de Poincaré (A, d, ϵ) et (B, d, ϵ) sont faiblement équivalentes comme ADGC, alors les modèles $G_A(U)$ et $G_B(U)$ le sont également.*

Cette proposition nous assure d'abord que le choix de modèle (A, d, ϵ) n'influence pas le type d'équivalence du modèle de Lambrechts-Stanley.

Nous avons en fait un résultat encore plus fort : fixons deux variétés compactes, lisses, sans bord, simplement connexes et de dimension au moins 4 M et M' ayant le même type d'homotopie réelle. Par définition il existe une faible équivalence $\Omega_{PA}(M) \sim \Omega_{PA}(M')$.

Si $(A, d, \epsilon), (A', d, \epsilon')$ sont des modèles à dualité de Poincaré de M et M' respectivement, alors cette faible équivalence implique $(A, d, \epsilon) \sim (A', d, \epsilon')$. Par la proposition, les modèles $G_A(U)$ et $G_{A'}(U)$ sont faiblement équivalents. Par conséquent les ADGC $\Omega_{PA}(C_M[U])$ et $\Omega_{PA}(C_{M'}[U])$ le sont également.

Lemme 3.4.7. *Soit M une variété simplement connexe de dimension au moins trois. Alors $C_M(k)$ est simplement connexe pour tout $k \geq 0$.*

Démonstration. La preuve se fait par récurrence. Le cas $k = 0$ est trivial. En général, nous avons une fibration ([7, Theorem 3]) $M \setminus k \rightarrow C_M(k+1) \rightarrow C_M(k)$ où la notation $M \setminus k$ indique M privé de k points distincts. La longue suite exacte en groupes d'homotopie donne une suite exacte

$$\pi_1(M \setminus k) \rightarrow \pi_1(C_M(k+1)) \rightarrow \pi_1(C_M(k)).$$

Puisque M est simplement connexe et de dimension au moins trois, nous avons $\pi_1(M \setminus k) = 0$. En couplant ceci à l'hypothèse de récurrence, nous obtenons $\pi_1(C_M(k+1)) = 0$ comme désiré. □

Par le lemme, les espaces $C_M[U]$ et $C_{M'}[U]$ sont simplement connexes. Donc l'ADGC $\Omega_{PA}(C_M[U])$ encode le type d'homotopie réelle de $C_M[U]$, de même pour M' .

Théorème 3.4.8. *Si M et M' sont des variétés compactes, lisses, sans bord, simplement connexes et de dimension au moins 4 ayant le même type d'homotopie réelle, alors les espaces de configuration $C_M(U)$ et $C_{M'}(U)$ ont le même type d'homotopie réelle pour tout ensemble U fini.*

Remarque 3.4.9. En dimensions 2 et 3, le théorème est trivialement vérifié puisque les seules variétés compactes, lisses, sans bord et simplement connexes sont la sphère S^2 (classification des surfaces) et la sphère S^3 (théorème de Poincaré-Perelman) respectivement.

Chapitre 4

Applications du modèle

4.1 Cas de la sphère S^n

Dans cette section, nous utilisons le modèle de Lambrechts-Stanley pour calculer un modèle réel de $C_{S^n}(k)$ où $n \geq 3$ est un entier impair. Plus précisément nous prouvons la proposition suivante :

Proposition 4.1.1. *Soient $n \geq 3$ un entier impair et $k \geq 0$ un entier. Notons $A = H^*(S^n; \mathbb{R})$ qui est un modèle à dualité de Poincaré de S^n . Alors les ADGC $A \otimes e_n(k)$ et $G_A(k+1)$ sont quasi-isomorphes.*

La preuve est une adaptation de celle de [24, Proposition 80] qui prouve la proposition pour $n = 3$. La différence principale est qu'ici le fait que les deux ADGC aient la même cohomologie n'est pas triviale, contrairement au cas $n = 3$ où l'existence d'une structure de groupe de Lie sur S^3 fournissait directement cette information. Hormis ce détail, le reste de la preuve est identique.

Lemme 4.1.2. *Les ADGC $A \otimes e_n(k)$ et $G_A(k+1)$ ont la même cohomologie.*

Démonstration. La preuve se fait par récurrence sur k . Pour $k = 0$, les deux ADGC sont isomorphes à A puisque $e_n(0) \cong e_n(1) \cong \mathbb{R}$ et en particulier elles ont la même cohomologie.

Supposons à présent que $k > 0$ et l'énoncé est vrai pour $k-1$. En vertu de [7, Theorem 3], les projections par oubli du dernier point $C_{\mathbb{R}^n}(k) \rightarrow C_{\mathbb{R}^n}(k-1)$ et $C_{S^n}(k+1) \rightarrow C_{S^n}(k)$ sont des fibrations de fibres $\mathbb{R}^n \setminus \{c_1, \dots, c_{k-1}\}$ et $S^n \setminus \{s_1, \dots, s_k\}$ qui ont toutes les deux le type d'homotopie de $V_{k-1} S^{n-1}$. De même nous avons des fibrations $C_{S^n}(k+1) \rightarrow S^n$ et $C_{S^n}(k) \rightarrow S^n$ de fibres respectives $C_{\mathbb{R}^n}(k)$ et $C_{\mathbb{R}^n}(k-1)$. En résumé nous avons le diagramme suivant où chaque suite verticale ou horizontale est une fibration :

$$\begin{array}{ccccc}
V_{k-1} S^{n-1} & & V_{k-1} S^{n-1} & & \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
C_{\mathbb{R}^n}(k) & \longrightarrow & C_{S^n}(k+1) & \longrightarrow & S^n \\
\downarrow & & \downarrow & & \\
C_{\mathbb{R}^n}(k-1) & \longrightarrow & C_{S^n}(k) & \longrightarrow & S^n
\end{array}$$

Par ailleurs $C_{\mathbb{R}^n}(k-1)$ est simplement connexe et nous avons $H^i(V_{k-1} S^{n-1}) = H^i(C_{\mathbb{R}^n}(k-1)) = 0$ pour $0 < i < n-1$. Dès lors par [31, Exemple 5.D], nous avons une longue suite exacte (où les coefficients sont réels)

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^1(C_{\mathbb{R}^n}(k-1)) & \longrightarrow & H^1(C_{\mathbb{R}^n}(k)) & \longrightarrow & H^1(V_{k-1} S^{n-1}) \\
& & & & & & \downarrow \\
& & \hookrightarrow & H^2(C_{\mathbb{R}^n}(k-1)) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow H^{2n-2}(V_{k-1} S^{n-1}) \\
& & & & & & \downarrow \\
& & \hookrightarrow & H^{2n-1}(C_{\mathbb{R}^n}(k-1)) & \longrightarrow & H^{2n-1}(C_{\mathbb{R}^n}(k)) & \longrightarrow H^{2n-1}(V_{k-1} S^{n-1})
\end{array}$$

En particulier, puisque $H^n(C_{\mathbb{R}^n}(k-1)) = 0$ nous obtenons la suite exacte suivante :

$$H^{n-1}(C_{\mathbb{R}^n}(k)) \longrightarrow H^{n-1}(V_{k-1} S^{n-1}) \longrightarrow 0$$

ce qui signifie que le morphisme $H^{n-1}(C_{\mathbb{R}^n}(k)) \rightarrow H^{n-1}(V_{k-1} S^{n-1})$ induit par l'injection sur chaque fibre $V_{k-1} S^{n-1} \rightarrow C_{\mathbb{R}^n}(k)$ est surjectif. Puisque $H^*(V_{k-1} S^{n-1})$ est concentrée en degrés 0 et $n-1$, nous en déduisons que cette injection induit une surjection en cohomologie.

Pour la seconde fibration verticale, pour les mêmes raisons que précédemment nous avons une longue suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^1(C_{S^n}(k)) & \longrightarrow & H^1(C_{S^n}(k+1)) & \longrightarrow & H^1(V_{k-1} S^{n-1}) \\
& & & & & & \downarrow \\
& & \hookrightarrow & H^2(C_{S^n}(k)) & \longrightarrow & \dots & \longrightarrow H^{2n-2}(V_{k-1} S^{n-1}) \\
& & & & & & \downarrow \\
& & \hookrightarrow & H^{2n-1}(C_{S^n}(k)) & \longrightarrow & H^{2n-1}(C_{S^n}(k+1)) & \longrightarrow H^{2n-1}(V_{k-1} S^{n-1})
\end{array}$$

De nouveau $H^{n-2}(\bigvee_{k-1} S^{n-1}) = 0$. En outre, l'argument utilisé dans la preuve de [24, Proposition 80] pour calculer la cohomologie en degré 3 du modèle se généralise facilement pour montrer que $H^n(C_{S^n}(k)) \cong H^n(C_{S^n}(k+1)) \cong \mathbb{R}$. Notons que l'hypothèse que n soit impair intervient de manière cruciale ici. Nous obtenons donc la suite exacte suivante :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^{n-1}(C_{S^n}(k)) & \longrightarrow & H^{n-1}(Conf_{S^n}(k+1)) & \longrightarrow & H^{n-1}(\bigvee_{k-1} S^{n-1}) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & & & \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \longrightarrow 0 \end{array}$$

Le morphisme $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est donc un isomorphisme et par conséquent le morphisme $H^{n-1}(\bigvee_{k-1} S^{n-1}) \rightarrow \mathbb{R}$ est le morphisme nul. Nous en déduisons que le morphisme $H^{n-1}(C_{S^n}(k+1)) \rightarrow H^{n-1}(\bigvee_{k-1} S^{n-1})$ est une surjection. Pour la même raison qu'avant, nous avons donc que l'injection de chaque fibre $\bigvee_{k-1} S^{n-1} \rightarrow Conf_{S^n}(k+1)$ induit une surjection en cohomologie.

En outre, puisque $H^*(\bigvee_{k-1} S^{n-1})$ est de type finie, le théorème de Leray-Hirsch (voir par exemple [19, Theorem 4D.1]) assure qu'en tant que $\mathbb{R}$ -espaces vectoriels,

$$\begin{aligned} H^*(C_{\mathbb{R}^n}(k)) &\cong H^*\left(\bigvee_{k-1} S^{n-1}\right) \otimes H^*(C_{\mathbb{R}^n}(k-1)) \\ H^*(C_{S^n}(k+1)) &\cong H^*\left(\bigvee_{k-1} S^{n-1}\right) \otimes H^*(C_{S^n}(k)). \end{aligned}$$

Finalement, en combinant ces isomorphismes avec notre hypothèse de récurrence nous obtenons

$$\begin{aligned} H^*(C_{S^n}(k+1)) &\cong H^*\left(\bigvee_{k-1} S^{n-1}\right) \otimes H^*(C_{S^n}(k)) \\ &\cong H^*\left(\bigvee_{k-1} S^{n-1}\right) \otimes H^*(C_{\mathbb{R}^n}(k-1)) \otimes A \\ &\cong H^*(C_{\mathbb{R}^n}(k)) \otimes A. \end{aligned}$$

Le membre de droite est exactement $A \otimes e_n(k)$. Par ailleurs, par [28, Theorem 10.1], nous avons $H^*(G_A(k+1); \mathbb{Q}) \cong H^*(FM_{k+1}(S^n))$ d'où nous déduisons que $H^*(G_A(k+1); \mathbb{R}) \cong H^*(C_{S^n}(k+1); \mathbb{R})$. Ceci termine de prouver que $A \otimes e_n(k)$ et $G_A(k+1)$ ont les mêmes cohomologies.

□

Remarque. En dimension paire, le morphisme f n'est pas bien défini. En effet les relations d'Arnold donnent $\omega_{ij} = \omega_{ji}$. Or $f(\omega_{ij}) = \omega_{ij} + \omega_{0i} - \omega_{0j} \neq \omega_{ji} + \omega_{0j} - \omega_{0i} = f(\omega_{ji})$. En fait, il n'y a pas de scindement possible comme le montre la proposition suivante.

Proposition 4.1.3. Soient $n \geq 4$ un entier pair et $A = \mathbb{R}1 \oplus \mathbb{R}v$ un modèle à dualité de Poincaré de S^n où $|v| = n$. Alors pour $k \geq 2$: $H(G_A(k+1)) \not\cong H(A) \otimes e_n^\vee(k)$.

Démonstration. Notons que la cohomologie du membre de droite en degré n est non triviale. Il suffit donc de montrer que $H^n(G_A(k+1)) = 0$.

Puisque n est pair, $\Delta_A = 1 \otimes v + v \otimes 1$ de sorte que $d\omega_{ij} = \iota_i(v) + \iota_j(v)$ pour $1 \leq i, j \leq k+1$.

Pour des indices i, j, l distincts nous obtenons donc

$$\iota_i(v) = \frac{(\iota_i(v) + \iota_j(v)) + (\iota_i(v) + \iota_l(v)) - (\iota_j(v) + \iota_l(v))}{2} = d\left(\frac{\omega_{ij} + \omega_{il} - \omega_{jl}}{2}\right).$$

Nous en déduisons que la différentielle $d : G_A(k+1)^{n-1} \rightarrow G_A(k+1)^n$ est surjective et donc $H^n(G_A(k+1)) = 0$. $\square$

4.2 Tentative de généralisation

Naturellement, nous pourrions tenter d'étendre le résultat précédent au cas d'un produit de sphères de dimensions impaires. Hélas, l'argument précédent ne se généralise pas, du moins pas facilement.

En effet, fixons $M = \prod_{i=1}^t S^{n_i}$ un produit de sphères de dimensions impaires avec $t \geq 2$. Nous avons de nouveau un carré de fibrations

$$\begin{array}{ccccc} M \setminus k & & M \setminus k & & \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ C_{M \setminus 1}(k) & \longrightarrow & C_M(k+1) & \longrightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow & & \\ C_{M \setminus k}(k-1) & \longrightarrow & C_M(k) & \longrightarrow & M \end{array}$$

où la notation $M \setminus i$ désigne la variété M privée de i points distincts. Contrairement au cas d'une sphère, les deux constats suivants empêchent d'adapter la preuve précédente :

- L'espace $C_{M \setminus 1}(k)$ est bien moins évident à étudier que l'espace $C_{\mathbb{R}^n}(k)$, dont nous connaissons la cohomologie.

- La fibre $M \setminus k$ n'est pas suffisamment connectée. Plus précisément, la longue suite exacte en cohomologie précédente nécessite $D \leq 2d - 1$ où d et D sont les degrés non nuls minimal et maximal respectivement pour lesquels $H^d(M), H^D(M) \neq 0$. Ici $D \geq 2 \min_i \{n_i\} = 2d$.

Malgré ces constats, la suite propose des résultats partiels et des pistes de réflexion.

Définition 4.2.1. Soit M une variété de dimension n de type fini. Le *polynôme de Poincaré* de M est défini par

$$P_M(t) := \sum_{k=0}^n \dim(H^k(M))t^k.$$

Proposition 4.2.2. Soient $k \geq 1$ un entier, M une variété compacte, lisse, sans bord et simplement connexe de dimension $n \geq 2$ et $c_1, \dots, c_k$ des points distincts de M . Le polynôme de Poincaré de $M \setminus \{c_1, \dots, c_k\}$ est donné par $P_M(t) - t^n + (k-1)t^{n-1}$.

Démonstration. Notons $U = M \setminus \{c_1, \dots, c_k\}$ et $V = \sqcup_{i=1}^k V_i$ où chaque V_i est un voisinage de c_i tel que $V_i \cong \mathbb{R}^n$. Nous avons une longue suite exacte de Mayer-Vietoris ([19, P203]) donnée par

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & H^0(M) & \longrightarrow & H^0(U) \oplus H^0(V) & \longrightarrow & H^0(U \cap V) \\ & & & & \searrow & & \downarrow \\ & & & & H^1(M) & \longrightarrow & \dots \longrightarrow H^{n-1}(U \cap V) \\ & & & & & & \downarrow \\ & & & & H^n(M) & \longrightarrow & H^n(U) \oplus H^n(V) \longrightarrow H^n(U \cap V) \longrightarrow 0. \end{array}$$

D'une part $V \cong \sqcup_{i=1}^k \mathbb{R}^n$ et donc

$$H^i(V) \cong \bigoplus_{i=1}^k H^i(\mathbb{R}^n) \cong \begin{cases} \mathbb{R}^k & \text{si } i = 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

D'autre part $U \cap V \cong \sqcup_{i=1}^k (\mathbb{R}^n \setminus \{c_i\}) \simeq \sqcup_{i=1}^k S^{n-1}$ et donc

$$H^i(U \cap V) \cong \bigoplus_{i=1}^k H^i(S^{n-1}) \cong \begin{cases} \mathbb{R}^k & \text{si } i = 0, n-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Par conséquent, le début de la longue suite donne la suite exacte

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^k & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\
& & & & & & \downarrow \\
& & & & & & H^1(M) \longrightarrow H^1(U) \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Nécessairement le morphisme $\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ est surjectif et donc le morphisme $\mathbb{R}^k \rightarrow H^1(M)$ est nul. Il en découle que le morphisme $H^1(M) \rightarrow H^1(U)$ est un isomorphisme. Pour $1 < i < n - 1$, la portion

$$H^{i-1}(U \cap V) \longrightarrow H^i(M) \longrightarrow H^i(U) \longrightarrow H^i(U \cap V)$$

donne un isomorphisme $H^i(U) \cong H^i(M)$. Enfin la longue suite se termine par

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & H^{n-1}(M) & \longrightarrow & H^{n-1}(U) & \longrightarrow & \mathbb{R}^k \\
& & & & & & \downarrow \\
& & & & & & H^n(M) \longrightarrow H^n(U) \longrightarrow 0.
\end{array}$$

Puisque M est une variété simplement connexe, compacte et sans bord nous avons par dualité de Poincaré ([19, Theorem 3.30]) $H^n(M) \cong \mathbb{R}$ et $H^{n-1}(M) \cong 0$. De plus par [38, Lemma 2.1] et puisque U est non compact et lisse, il est homotopiquement équivalent à une variété de dimension $n - 1$ et donc $H^n(U) = 0$. Il s'ensuit que nous avons une suite exacte

$$0 \longrightarrow H^{n-1}(U) \longrightarrow \mathbb{R}^k \longrightarrow H^n(M) \longrightarrow 0.$$

Nous en déduisons que $H^{n-1}(U) \cong \mathbb{R}^{k-1}$. En combinant les résultats trouvés, nous obtenons l'énoncé.

□

Sur base de ce résultat, nous allons calculer une borne supérieure pour $H^*(C_M(k+1))$. Nous utilisons ici la *suite spectrale de Leray-Serre* ([19, Theorem 5.15]). De même que l'homologie permet de mesurer le manque d'exactitude d'une suite, cet outil permet de mesurer le manque de trivialité d'une fibration $F \rightarrow E \rightarrow B$ i.e à quel point E diffère du produit $B \times F$. Plus précisément nous avons la proposition suivante :

Proposition 4.2.3 (Conséquence de Leray-Serre). *Soit $F \rightarrow E \rightarrow B$ une fibration entre variétés de types finis où B est simplement connexe. Alors $P_E(t) \leq P_F(t)P_B(t)$ où l'inégalité s'applique degré par degré.*

Couplée au calcul précédent, cette proposition nous permet de calculer une borne supérieure pour $H^*(C_M(k+1))$.

Proposition 4.2.4. *Soient $k \geq 0$ un entier, M une variété compacte, lisse, sans bord et simplement connexe de dimension $n \geq 2$. Notons $P_k(t) := P_{C_M(k)}(t)$ et $Q(t) = P_M(t) - t^n$. Alors*

$$P_{k+1}(t) \leq P_M(t) \prod_{i=0}^{k-1} (Q(t) + it^{n-1}).$$

Démonstration. La preuve se fait par récurrence. Le cas $k = 1$ n'est rien d'autre que l'égalité $P_1(t) = P_M(t)$. Pour le cas général, les propositions 4.2.2 et 4.2.3 appliquée à la fibration $M \setminus k \rightarrow C_M(k+1) \rightarrow C_M(k)$ et l'hypothèse de récurrence donnent

$$P_{k+1}(t) \leq (Q + (k-1)t^{n-1})P_M(t) \prod_{i=0}^{k-2} (Q(t) + it^{n-1}) = P_M(t) \prod_{i=0}^{k-1} (Q(t) + it^{n-1}).$$

□

En fait, cette borne enterre nos derniers espoirs d'adapter l'argument de la section précédente au cas général d'un produit de sphère. En effet, l'argument montre en particulier que nous avons des scindements verticaux, ce qui implique que la borne supérieure est atteinte. Or ce n'est pas toujours le cas comme le montre l'exemple suivant.

Considérons $M = S^n \times S^n$ le produit de deux sphères de même dimension impaire $n \geq 3$. Un modèle à dualité de Poincaré est donné par $A = H^*(S^n \times S^n) \cong H^*(S^n) \times H^*(S^n)$. Autrement dit il s'agit de l'ADGC $(\Lambda(u, v), 0)$ avec $|u| = |v| = n$ et l'orientation ϵ univoquement définie par $\epsilon(uv) = 1$. Nous avons donc une base homogène $\{1, u, v, uv\}$ et la base duale $\{uv, v, -u, 1\}$ (le signe négatif vient de l'égalité $\epsilon(v(-u)) = -\epsilon(vu) = -(-1)^{|u||v|}\epsilon(uv) = 1$). La classe diagonale est donc donnée par

$$\Delta_A = 1 \otimes uv - u \otimes v + v \otimes u + uv \otimes 1.$$

Calculons à présent la cohomologie du modèle $G_A(k+1)$ en degrés n et $2n$. Pour rappel

$$G_A(k) = \left(\frac{A^{\otimes k} \otimes e_{2n}(k)}{\iota_i(a) \cdot \omega_{ij} = \iota_j(a) \cdot \omega_{ij}}, d\omega_{ij} = \iota_{ij}(\Delta_A) \ (i < j) \right).$$

La différentielle est triviale jusqu'en degré $2n - 2$. Par conséquent $H^n(G_A(k)) \cong (A^{\otimes k})^n$ qui est de dimension $2k$ puisqu'une base est donnée par $\{\iota_i(u), \iota_j(v)\}_{1 \leq i, j \leq k}$. La différentielle $G_A(k)^{n-1} \rightarrow G_A(k)^{2n}$ est injective. En effet pour $i < j$, le terme $\iota_{ij}(u \otimes v)$ ne peut apparaître que via le terme ω_{ij} . Ceci implique que les $d\omega_{ij}$ sont linéairement indépendants. De plus chaque élément de degré $2n$ est un cocycle car $G_A(k)^{2n+1} = 0$.

Nous en déduisons que $\dim H^{2n}(G_A(k)) = \dim G_A(k)^{2n} - \dim G_A(k)^{2n-1}$. Nous avons d'une part

$$\dim G_A(k)^{2n-1} = \dim e_{2n}(k)^{2n-1} = \binom{k}{2}.$$

D'autre part les éléments de degré $2n$ de $G_A(k)$ sont de la forme $\iota_i(uv), \iota_{ij}(u \otimes v), \iota_{ij}(v \otimes u), \iota_{ij}(u \otimes u)$ ou $\iota_{ij}(v \otimes v)$ pour $1 \leq i < j \leq k$. Par conséquent

$$\dim G_A(k)^{2n} = k + 4 \binom{k}{2} = 2k^2 - k.$$

Finalement

$$\dim H^{2n}(G_A(k)) = \dim G_A(k)^{2n} - \dim G_A(k)^{2n-1} = 2k^2 - k - \binom{k}{2} = \frac{k(3k-1)}{2}.$$

Or en degré $2n$, la borne supérieure de $P_k(t)$ a un coefficient égal à

$$1 + 4 \binom{k}{2} = 2k^2 - 2k + 1 > \frac{k(3k-1)}{2}$$

si $k > 2$; ceci vient du fait que chaque facteur $P(t), Q(t) + it^{n-1}$ admet un terme $2t^n$ et que seul le facteur $P(t)$ admet un terme de degré $2n$, qui a un coefficient égal à 1. Ceci montre donc que la borne est stricte et par conséquent, il n'y a en général pas de scindement vertical.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons eu l'occasion de nous familiariser avec la théorie de l'homotopie rationnelle. Nous avons alors appliqué les outils de cette théorie aux espaces de configuration, plus spécifiquement à la preuve de la validité du modèle de Lambrechts-Stanley. Ce faisant, nous avons rencontré le concept de *complexe de graphes*, objet élégant et étonnamment efficace pour aborder des problèmes en théorie de l'homotopie rationnelle. Enfin, une contribution plus personnelle a permis d'appliquer ce modèle et des outils de topologie algébrique abordables pour prouver un résultat original.

Le travail s'est voulu accessible à un étudiant de master avec quelques notions de topologie algébrique et théorie des catégories. À cet égard, certains concepts avancés mais pertinents n'ont pas été abordés. Nous pensons en particulier à l'*algèbre homotopique*, dont les rudiments apparaissent néanmoins implicitement dans la section sur les ensembles simpliciaux. Outre fournir une axiomatisation catégorique du concept d'homotopie, ce domaine donne un énoncé plus précis du théorème de Sullivan ([23]) et permet d'éclaircir certains passages de la preuve de la validité du modèle ([24, Section 4.1]). Il y a également la notion d'*opérade*, outil abondamment utilisé en topologie et algèbre ([13, Preface]), et qui permettait dans la preuve de la validité du modèle d'éviter les lourdeurs de signes de la définition du complexe de graphes ([24, Section 1.5]). C'est donc tout naturellement que l'étude de ces objets s'inscrit dans la continuité de ce mémoire.

Par ailleurs, le résultat du papier soulève également de nouvelles questions. Premièrement, est-il possible d'étendre la validité du modèle au cas rationnel ? De plus, quels résultats intéressants ce modèle permet-il de fournir ? Des applications sont étudiées à la fin de [24] et dans le chapitre 4 de ce mémoire, et il serait intéressant de poursuivre les recherches.

Nous espérons que le lecteur a pu apprécier les concepts et idées de preuves mises en avant dans ce mémoire, comme cela a été le cas pour l'auteur.

Annexe A

Glossaire des notations

Un récapitulatif des notations récurrentes.

Théorie de l'homotopie rationnelle

- Pour une catégorie $\mathcal{C}$ localement petite et $A, B \in \mathcal{C}$, nous notons $\mathcal{C}(A, B)$ l'ensemble des morphismes $A \rightarrow B$.
- **ADGC** : catégorie des algèbres différentielles graduées commutatives (Définition 1.3.6).
- **Set** : catégorie des ensembles.
- **sSet** : catégorie des ensembles simpliciaux (Définition 1.2.7).
- **Top** : catégorie des espaces topologiques.
- (A, d) : ADGC arbitraire.
- Ω_{PL} : foncteur des formes linéaires par morceaux (Définition 1.4.3).

Validité du modèle

- (A, d, ϵ) : ADGC à dualité de Poincaré (Définition 2.3.1).
- $C_M(k), C_M(U)$: espace de configurations dans M (Introduction, Remarque 2.1.4).
- $C_M[k], C_M[U]$: compactifié de Fulton-MacPherson de $C_M(k)$ (Définition 2.1.1, Remarque 2.1.4).
- $e_n(k)$: cohomologie de $C_{\mathbb{R}^n}(k)$ (Théorème 2.1.3).
- $G_A(k), G_A(U)$: modèle de Lambrechts-Stanley (Définition 3.1.1).
- $\mathcal{G}_R(U)$: complexe de graphes (Définition 3.1.4).
- $g_R : g_R = \mathcal{G}_R(\emptyset)$; graphes avec uniquement des sommets internes (Définition 3.3.8).

- $\mathcal{G}_R^\varphi(U)$: (Définitions 3.3.9, 3.3.10) pushout du diagramme

$$\begin{array}{ccc} g_R & \xrightarrow{Z_\varphi} & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}_R(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}_R^\varphi(U) \end{array}$$

- $\mathcal{G}_R^\epsilon(U)$: (Définition 3.3.11) pushout du diagramme

$$\begin{array}{ccc} g_R & \xrightarrow{Z_\epsilon} & \mathbb{R} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}_R(U) & \longrightarrow & \mathcal{G}_R^\epsilon(U) \end{array}$$

- $\mathcal{G}'_R(U)$: zigzag $\mathcal{G}_R^\epsilon(U) \xleftarrow{\sim} \mathcal{G}'_R(U) \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}_R^\epsilon(U)$ (Proposition 3.3.12).
- Δ_A : classe diagonale ; $\Delta_A = \sum_{\Delta'_A} \Delta'_A \otimes \Delta''_A$ (Définition 2.3.3).
- φ : propagateur (Proposition 3.3.1).
- Ω_{PA} : foncteur des formes algébriques par morceaux (Section 2.2).
- ω : morphisme $\mathcal{G}_R(U) \rightarrow \Omega_{PA}(C_M[U])$ (Lemme 3.3.2).

Bibliographie

- [1] S. Axelrod and I. M. Singer, *Chern-Simons perturbation theory. II*, Journal of Differential Geometry **39** (1994), no. 1, 173–213. ↑31
- [2] R. Bott, L. W. Tu, et al., *Differential forms in algebraic topology*, Vol. 82, Springer, 1982. ↑22
- [3] K. S. Brown, *Cohomology of groups*, Vol. 87, Springer Science & Business Media, 2012. ↑63
- [4] R. Campos and T. Willwacher, *A model for configuration spaces of points*, arXiv preprint arXiv :1604.02043 (2016). ↑8, 36, 54, 55
- [5] F. R. Cohen, *On configuration spaces, their homology, and Lie algebras*, Journal of Pure and Applied Algebra **100** (1995), no. 1-3, 19–42. ↑
- [6] S. Eilenberg and J. A. Zilber, *Semi-simplicial complexes and singular homology*, Annals of Mathematics (1950), 499–513. ↑12
- [7] E. Fadell and L. Neuwirth, *Configuration spaces*, Mathematica Scandinavica **10** (1962), 111–118. ↑67, 69
- [8] M. Farber, *Configuration spaces and robot motion planning algorithms*, Combinatorial and toric homotopy : Introductory lectures, 2018, pp. 263–303. ↑7
- [9] Y. Félix, S. Halperin, and J-C Thomas, *Rational homotopy theory*, Vol. 205, Springer Science & Business Media, 2012. ↑18, 19, 22, 24, 26, 27, 28
- [10] Y. Félix and S. Halperin, *Rational homotopy theory via Sullivan models : a survey*, arXiv preprint arXiv :1708.05245 (2017). ↑19
- [11] Y. Félix, J. Oprea, and D. Tanré, *Algebraic models in geometry*, OUP Oxford, 2008. ↑29, 37
- [12] M. H. Freedman, *The topology of four-dimensional manifolds*, Journal of Differential Geometry **17** (1982), no. 3, 357–453. ↑12
- [13] B. Fresse, *Modules over operads and functors*, Springer, 2009. ↑77
- [14] B. Fresse, V. Turchin, and T. Willwacher, *On the rational homotopy type of embedding spaces of manifolds in R^n* , arXiv preprint arXiv :2008.08146 (2020). ↑7
- [15] W. Fulton and R. MacPherson, *A compactification of configuration spaces*, Annals of Mathematics **139** (1994), no. 1, 183–225. ↑31
- [16] R. Ghrist, *Configuration spaces and braid groups on graphs in robotics*, arXiv preprint math (1999). ↑7
- [17] M. J. Hall and M. Reginatto, *Ensembles on configuration space*, Fundamental Theories of Physics. Springer Nature, Switzerland (2016). ↑7
- [18] R. Hardt, P. Lambrechts, V. Turchin, and I. Volić, *Real homotopy theory of semi-algebraic sets*, Algebraic & Geometric Topology **11** (2011), no. 5, 2477–2545. ↑34, 36, 55, 58, 59, 61
- [19] A. Hatcher, *Algebraic topology*, 2005. ↑10, 11, 22, 28, 36, 71, 73, 74
- [20] K. Hess, *Homotopical Algebra*, Ecole Polytechnique fédérale de Lausanne, 2020. ↑12
- [21] K. Hess, *Rational homotopy theory : a brief introduction*, Interactions between homotopy theory and algebra, 175-202, Contemp. Math **436** (2007). ↑19
- [22] N. Idrissi, *Real Homotopy of configuration spaces*, Springer Cham, 2020. ↑37
- [23] N. Idrissi, *Introduction à la théorie de l’homotopie*, Université de Paris, 2021. ↑12, 77

- [24] N. Idrissi, *The Lambrechts–Stanley model of configuration spaces*, *Inventiones mathematicae* **216** (2019), no. 1, 1–68. ↑8, 31, 36, 37, 38, 44, 57, 60, 61, 67, 69, 71, 77
- [25] D. Joyce, *On manifolds with corners*, arXiv preprint arXiv :0910.3518 (2009). ↑32
- [26] M. Kontsevich, *Operads and motives in deformation quantization*, *Letters in Mathematical Physics* **48** (1999), no. 1, 35–72. ↑38
- [27] P. Lambrechts and D. Stanley, *Poincaré duality and commutative differential graded algebras*, *Annales scientifiques de l’école normale supérieure*, 2008, pp. 497–511. ↑36
- [28] ———, *A remarkable DGmodule model for configuration spaces*, *Algebraic & Geometric Topology* **8** (2008), no. 2, 1191–1222. ↑65, 71
- [29] P. Lambrechts and I. Volić, *Formality of the little N -disks operad*, *American Mathematical Soc.*, 2014. ↑33, 36, 44, 48, 49, 51, 54, 58, 59
- [30] R. Longoni and P. Salvatore, *Configuration spaces are not homotopy invariant*, *Topology* **44** (2005), no. 2, 375–380. ↑8
- [31] J. McCleary, *A user’s guide to spectral sequences*, Cambridge University Press, 2001. ↑70
- [32] S. Merkulov, *Prop profile of deformation quantization and graph complexes with loops and wheels*, arXiv preprint math (2004). ↑41
- [33] E. Riehl, *Categorical homotopy theory*, Vol. 24, Cambridge University Press, 2014. ↑12
- [34] D. Sinha, *The homology of the little disks operad*, arXiv preprint math (2006). ↑33
- [35] D. P. Sinha, *Manifold-theoretic compactifications of configuration spaces*, *Selecta Mathematica* **10** (2004), no. 3, 391–428. ↑31, 32
- [36] L. A. Steen, J. A. Seebach, and L. A. Steen, *Counterexamples in topology*, Vol. 18, Springer, 1978. ↑11
- [37] D. Sullivan, *Infinitesimal computations in topology*, *Publications Mathématiques de l’IHÉS* **47** (1977), 269–331. ↑19
- [38] J. H. Whitehead, *The immersion of an open 3-manifold in euclidean 3-space*, *Proceedings of the London Mathematical Society* **3** (1961), no. 1, 81–90. ↑74
- [39] T. Willwacher, *M. Kontsevich’s graph complex and the Grothendieck–Teichmüller Lie algebra*, *Inventiones mathematicae* **200** (2015), no. 3, 671–760. ↑41, 59

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN

Faculté des sciences

Place des sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/sc