UCLouvain

FACULTE DES SCIENCES

Faculté des sciences

Les algèbres de Hopf dans les catégories monoïdales tressées

Auteur : Amine Aït Said

Promoteur·rice : Marino Gran & Florence Sterck

Lecteurs : Pierre Bieliavsky & Tim Van der Linden

Année académique 2020-2021

Master[120] en sciences mathématiques, à finalité approfondie

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
FACULTÉ DES SCIENCES
ÉCOLE DE MATHÉMATIQUES

Les algèbres de Hopf dans les catégories monoïdales tressées

Amine Aït Said
Promoteur · rice : Marino Gran & Florence Sterck
Lecteurs : Pierre Bieliavsky & Tim Van der Linden

Mémoire de master
2020-2021

Remerciements

Je tiens, tout d'abord, à remercier mes promoteurs, Marino Gran et Florence Sterck, pour leur disponibilité exceptionnelle, leur enthousiasme et leurs conseils très précieux. Je leur suis également reconnaissant d'avoir patiemment répondu à toutes mes questions, d'avoir lu et commenté toutes les versions intermédiaires de ce travail. Merci d'avoir eu la patience et le temps de me faire découvrir ce thème passionnant de la théorie des catégories.

Je voudrais aussi adresser ma gratitude aux professeurs Pierre Bieliavsky et Tim Van der Linden pour le temps qu'ils consacreront à la lecture de ce mémoire.

Enfin, je remercie toute ma famille, en particulier mon Père, El Hassan Aït Said, pour avoir suggéré quelques modifications et pour ses relectures orthographiques courageuses.

Grâce à toutes ces personnes, la réalisation de ce document a été possible. Je leur exprime toute ma gratitude.

Introduction

Les algèbres de Hopf sont des algèbres associatives et unitaires dotées de structures supplémentaires, à savoir une comultiplication, une counité et surtout un antipode pour pouvoir la différencier d'une bigèbre. Elles ont vu le jour dans les années 1940, sous une première forme, dans les travaux des topologues (notamment ceux du mathématicien Heinz Hopf) traitant de la cohomologie des groupes de Lie compacts. Poussé par les travaux de Jean Dieudonné sur les groupes de Lie formels, Pierre Cartier arrive à donner la première définition formelle de l'algèbre de Hopf sous le nom d'« hyperalgèbre », en 1955. Cette définition inclut le morphisme de comultiplication et en dualisant ce morphisme, il obtient la multiplication d'un groupe formel. Quant à l'expression « algèbre de Hopf », elle a été inventée par Armand Borel en 1953, en hommage aux travaux fondateurs de Heinz Hopf dans les années 1940. La définition que nous connaissons et utilisons aujourd'hui, c'est-à-dire une bigèbre munie un antipode, est apparue dans un ouvrage de Bertram Kostant en 1966. Les algèbres de Hopf sont ensuite devenues un objet d'étude d'un point de vue uniquement algébrique et, à la fin des années 1980, la recherche dans ce domaine a été propulsée par les liens avec la mécanique quantique notamment grâce aux nombreux travaux sur les groupes quantiques, qui sont des exemples particuliers d'algèbres de Hopf. De nos jours, les algèbres de Hopf sont très répandues dans plusieurs domaines des mathématiques tels que la théorie des nombres, la théorie de Galois, la théorie des représentations,... L'ensemble du développement de la notion d'algèbre de Hopf pour aboutir à la définition que l'on connait pour le moment, les origines, les mathématiciens et les motivations de la théorie des algèbres de Hopf est tiré de l'article [1].

Outre cette introduction, ce mémoire comporte deux chapitres. Le premier sera une sorte d'introduction générale mettant en place des concepts de base indispensables pour la suite. Dans cette première partie appelée catégories monoïdales, notre attention sera concentrée sur les deux points suivants : le contexte au sein duquel les objets mathématiques vont être étudiés, à savoir les catégories monoïdales, et les objets mathématiques en question, c'est-à-dire les algèbres et les cogèbres. Les catégories monoïdales ont été choisies grâce à leurs atouts : l'objet unité, l'associateur et le produit monoïdal, qui en font des candidats idéaux pour y observer la notion d'algèbre et de cogèbre. Un résultat important dans la théorie des catégories monoïdales, le théorème de cohérence de Mac Lane, a été présenté et permet la simplification des définitions d'algèbre et de cogèbre dans ce contexte. Exprimé de manière informelle, ce résultat permet de dire que tout diagramme composé uniquement d'associateurs et d'unités sera commutatif dans une catégorie monoïdale. En exprimant ce résultat plus précisément, toute catégorie monoïdale est monoïdalement équivalente à une catégorie monoïdale stricte par l'intermédiaire d'un foncteur monoïdal. Après avoir posé le contexte et lui avoir appliqué la simplification mentionnée, les objets mathématiques que sont les algèbres associatives et unitaires et les cogèbres coassociative et counitaire ont pu être introduites, c'est-à-dire les constructions de base afin d'être en mesure de définir correctement les algèbres de Hopf. De plus, une multitude d'exemples dédiés à la catégorie des algèbres ainsi que celle des cogèbres dans une catégorie monoïdale ont été présentées afin d'appréhender ces notions.

Le second chapitre est centré sur les bigèbres dont les algèbres de Hopf sont des exemples particuliers. L'une des étapes fondamentales fut de définir une structure d'algèbre (cogèbre) sur le produit monoïdal de deux algèbres (cogèbres) et cela n'est possible que pour les catégories monoïdales dites tressées, qui possèdent une structure additionnelle : celle du morphisme de tressage. Il est intéressant de noter que les catégories monoïdales tressées, définies à la Section 2.1, sont à la base de nombreuses applications des groupes quantiques, notamment en topologie de basse dimension et en théorie des champs conformes. Par l'intermédiaire de ce morphisme de tressage, les bigèbres dans des catégories monoïdales tressées ont pu être étudiées et leurs relations à différents niveaux sont examinées dans la Section 2.2. Quant à la troisième section de ce chapitre, elle permettra de mettre en lumière la correspondance existant entre les structures de bigèbres $(B, \mu_B, \eta_B, \Delta_B, \eta_B)$ sur l'algèbre (B, μ_B, η_B) et les structures monoïdales sur la catégorie des modules Mod_B. En ce qui concerne le dernière section, les algèbres de Hopf dans les catégories monoïdales tressées ont été présentées avec une série d'exemples afin de se familiariser avec cette notion répandue dans de multiples branches des mathématiques. Finalement, en utilisant cette dernière notion et en développant certains résultats, la catégorie $Hopf_{\mathcal{C}}$ des algèbres de Hopf dans une catégorie monoïdale tressée $\mathcal{C}$ a pu être définie.

Ce mémoire est destiné à être lisible par tout étudiant en master en sciences mathématiques. Les seuls prérequis sont des notions de base en théorie des catégories (catégories, foncteurs, transformations naturelles,...) qui peuvent également être retrouvées en annexe, dans la section 2.0.1.

Table des matières

Chapitre 1

Catégories monoïdales

Dans un premier temps, nous allons spécifier le genre d'environnements dans lesquels nous découvrirons des objets mathématiques dont nous avons l'habitude de croiser le chemin. Ces environnements se nomment les catégories monoïdales. Un modèle typique d'une catégorie monoïdale à avoir à l'esprit est celui des espaces vectoriels avec le produit tensoriel.

La seconde section présente le premier résultat important de la théorie des catégories monoïdales, c'est-à-dire que toute catégorie monoïdale est monoïdalement équivalente à une catégorie monoïdale stricte par l'intermédiaire d'un foncteur monoïdal.

La dernière section de ce chapitre introducteur à pour but de poser les bases de l'étude des algèbres et des cogèbres dans le contexte des catégories monoïdales. Pour des explications plus détaillées sur ces notions, le lecteur est invité à consulter le livre de Mac Lane [7], l'ouvrage de Dascalescu, Nastasescu et Raianu [4] ou encore l'article de Street [11] sur lesquels ce chapitre est basé.

1.1 Catégories monoïdales

La catégorie des espaces vectoriels sur un corps K, où les objets sont des espaces vectoriels et les morphismes sont des applications K-linéaires, est notée $Vect_K$. Pour toute paire d'espaces vectoriels $V, W \in Vect_K$, il est possible de former l'espace vectoriel $V \otimes_K W$ et d'observer une application bilinéaire $f : V \times W \to V \otimes_K W$, $(v, w) \mapsto v \otimes_K w$ ayant la propriété universelle : pour tout espace vectoriel Z et pour toute application bilinéaire $h : V \times W \to Z$, il existe une unique application linéaire $\tilde{h} : V \otimes_K W \to Z$ telle que $h = \tilde{h} \circ f$. L'espace $V \otimes_K W$ est le produit tensoriel de V et W.

L'application $V \times W \to V \otimes_K W$ détermine un foncteur

$$\otimes_K : Vect_K \times Vect_K \to Vect_K.$$

Pour toute paire d'applications K-linéaire $\varphi : V \to V'$, $\psi : W \to W'$, il existe une unique application linéaire $\varphi \otimes_K \psi : V \otimes_K W \to V' \otimes_K W'$ telle que

$$(\varphi \otimes_K \psi)(v \otimes_K w) = \varphi(v) \otimes_K \psi(w).$$

Pour tout triplet d'espaces vectoriels $U, V, W \in Vect_K$, on observe un isomorphisme canonique

$$a_{U,V,W} : U \otimes_K (V \otimes_K W) \xrightarrow{\sim} (U \otimes_K V) \otimes_K W,$$

tel que $a_{U,V,W}(u \otimes_K (v \otimes_K w)) = (u \otimes_K v) \otimes_K w$ pour tout $u \in U$, $v \in V$ et $w \in W$.

Dans cette catégorie $Vect_K$, on observe un objet particulier : le corps K avec le morphisme à gauche l_K et le morphisme à droite r_K, définis par

$$\begin{array}{rcrcl} l_K & : & K \otimes_K V & \to & V \\ & & k \otimes_K v & \mapsto & kv, \end{array} \qquad \begin{array}{rcrcl} r_K & : & V \otimes_K K & \to & V \\ & & v \otimes_K k & \mapsto & kv. \end{array}$$

De plus, on note que ces morphismes à gauche l_K et à droite r_K sont des isomorphismes.

En général, étant donnée $\mathcal{C}$ une catégorie, la catégorie $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ possède comme objets des paires d'objets (X, Y) où $X, Y \in \mathcal{C}$, et comme morphismes des paires de morphismes (f, g) où $f : X \to X'$ et $g : Y \to Y'$ sont des morphismes dans $\mathcal{C}$.

L'élément principal d'une catégorie monoïdale est le concept de produit $\otimes$, donné par un foncteur $\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ et qui possède la propriété d'associativité. Celle-ci n'est pas toujours la simple égalité $(X \otimes Y) \otimes Z = X \otimes (Y \otimes Z)$. Dans le cas du produit tensoriel d'espaces vectoriels, nous observons plutôt un isomophisme naturel $(X \otimes_K Y) \otimes_K Z \simeq X \otimes_K (Y \otimes_K Z)$.

Le foncteur $\otimes$ engendre deux foncteurs allant de $\mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C}$ vers $\mathcal{C}$,

$$\begin{array}{rcrcl} (-\otimes -)\otimes - & : & \mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C} & \to & \mathcal{C} \\ & & (X,Y,Z) & \mapsto & (X\otimes Y)\otimes Z, \end{array}$$

$$\begin{array}{rcrcl} -\otimes (-\otimes -) & : & \mathcal{C}\times\mathcal{C}\times\mathcal{C} & \to & \mathcal{C} \\ & & (X,Y,Z) & \mapsto & X\otimes (Y\otimes Z) \end{array}$$

et l'associativité pour $\otimes$ est définie comme un isomorphisme naturel de foncteurs

$$a : (-\otimes -)\otimes - \to -\otimes (-\otimes -),$$

appelé l'**associateur**. Ce dernier doit satisfaire la condition de commutativité du **pentagone de Mac Lane**, c'est-à-dire que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
 & (W\otimes X)\otimes(Y\otimes Z) \arrow[dr, "a_{W,X,Y\otimes Z}"] & \\
((W\otimes X)\otimes Y)\otimes Z \arrow[ur, "a_{W\otimes X,Y,Z}"] \arrow[d, "a_{W,X,Y}\otimes Id_Z"'] & & W\otimes(X\otimes(Y\otimes Z)) \\
(W\otimes(X\otimes Y))\otimes Z \arrow[rr, "a_{W,X\otimes Y,Z}"'] & & W\otimes((X\otimes Y)\otimes Z) \arrow[u, "Id_W\otimes a_{X,Y,Z}"']
\end{tikzcd} \tag{1.1}$$

Le triplet $(\mathcal{C},\otimes,a)$, où a est un associateur satisfaisant le pentagone de Mac Lane (1.1), est appelé une catégorie semi-groupe.

Pour obtenir une catégorie monoïdale, il suffit d'ajouter une unité à la catégorie semi-groupe. Dans $\mathcal{C}=(\mathcal{C},\otimes,a)$, une **unité** est un triplet (I,l,r) constitué d'un objet I dans $\mathcal{C}$ et deux isomorphismes naturels

$$l : I\otimes(-)\to Id_{\mathcal{C}} \qquad r : (-)\otimes I\to Id_{\mathcal{C}},$$

appelés **contraintes d'unité** à gauche et à droite, tels que

$$\begin{tikzcd}
(X\otimes I)\otimes Y \arrow[rr, "a_{X,I,Y}"] \arrow[dr, "r_X\otimes Id_Y"'] & & X\otimes(I\otimes Y) \arrow[dl, "Id_X\otimes l_Y"] \\
 & X\otimes Y &
\end{tikzcd} \tag{1.2}$$

pour tout objet X et Y. Dans la suite, l'objet unité sera noté I au lieu de (I, l, r) pour plus de simplicité.

L'exemple de la catégorie des espaces vectoriels avec le produit tensoriel usuel nous a permis de découvrir l'ensemble des ingrédients qui définissent une catégorie monoïdale, à savoir un produit monoïdal, un associateur et un objet unité avec un isomorphisme à gauche et à droite.

Par conséquent, une catégorie monoïdale est définie comme suit :

Définition 1.1. Une **catégorie monoïdale** est une catégorie $\mathcal{C}$ équipée

— d'un bifoncteur
$$\otimes : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$$
appelé le *produit tensoriel*,

— d'un objet $I \in \mathcal{C}$ appelé l'*objet unité*,

— d'un isomorphisme naturel
$$a : (- \otimes -) \otimes - \to - \otimes (- \otimes -)$$
appelé l'*associateur*,

— de deux isomorphismes naturels
$$l : I \otimes (-) \to Id_{\mathcal{C}} \quad \text{et} \quad r : (-) \otimes I \to Id_{\mathcal{C}}$$
appelés l'*unité à gauche et à droite.*

tels que les diagrammes (1.1) et (1.2) commutent. La catégorie monoïdale est dite **stricte** si l'associateur, l'unité à gauche ainsi que l'unité à droite sont des identités.

Remarque 1.2. Un **bifoncteur** est un foncteur dont le domaine est un produit de deux catégories. Par exemple, $Hom(-,-) : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to Set$ est un bifoncteur.

Maintenant que le concept de catégorie monoïdale est défini, de nombreux exemples vont être examinés pour mieux assimiler cet objet mathématique.

De manière générale, si $\mathcal{C}$ est une catégorie possédant les produits finis, soit le foncteur $\times : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ qui envoie (X, Y) vers le produit $X \times Y$, et soit I un objet terminal qui est le produit d'une famille vide. Alors, $(\mathcal{C}, \times, I)$ est une catégorie monoïdale et est généralement appelée **catégorie cartésienne**.

Exemple 1.3. La catégorie des ensembles Set est une catégorie monoïdale, où le produit tensoriel correspond au produit cartésien, noté $\times$, l'objet terminal est un singleton $\{*\}$ et l_S ainsi que r_S sont données trivialement, pour tout $S \in Set$, par les bijections
$$l_S \;:\; \{*\} \times S \;\to\; S \quad \text{et} \quad r_S \;:\; S \times \{*\} \;\to\; S.$$

On remarque qu'une catégorie peut avoir plusieurs structures de catégorie monoïdale, comme c'est le cas avec la catégorie des espaces vectoriels.

Exemple 1.4. La catégorie $Vect_K$ des espaces vectoriels possède une autre structure monoïdale que celle présentée dans l'introduction du chapitre. Cette fois-ci au lieu de considérer le produit tensoriel usuel, nous allons prendre le bifoncteur $\times : Vect_K \times Vect_K \to Vect_K$ qui envoie une paire d'espaces vectoriels (V, W) vers la somme directe $V \times W$.

Dans cette structure-ci, l'associateur est donné par l'isomorphisme canonique suivant

$$\begin{array}{rcccc} a_{U,V,W} & : & (U \times V) \times W & \to & U \times (V \times W) \\ & & ((u,v),w) & \mapsto & (u,(v,w)) \end{array}$$

et l'objet unité est le vecteur trivial 1_K avec les morphismes

$$\begin{array}{rcccc} l_V & : & K \times V & \to & V \\ & & (1_K, v) & \mapsto & v \end{array} \qquad \begin{array}{rcccc} r_V & : & V \times K & \to & V \\ & & (v, 1_K) & \mapsto & v. \end{array}$$

Cette seconde structure monoïdale sur $Vect_K$ provient de la définition catégorique du produit.

Exemple 1.5. Soit G un groupe, K un corps commutatif et V un espace vectoriel sur K. Une **représentation K-linéaire** de G est un espace vectoriel avec un morphisme de groupes ρ de G vers $GL(V)$, le groupe linéaire des opérateurs inversibles dans V. Un **morphisme de représentations** de G d'une représentation (V, ρ_V) vers une représentation (W, ρ_W) est une application K-linéaire $f : V \to W$ telle que $f(\rho_V(g)v) = \rho_W(g)f(v)$ pour tout $v \in V$ et $g \in G$.

Soit G un groupe, K un corps commutatif et $Rep_{G,K}$ la catégorie des représentations K-linéaires. Si V et W sont des représentations, alors $V \otimes_K W$ est aussi une représentation avec un morphisme $G \to GL(V \otimes_K W)$ défini par $g \cdot (v \otimes_K w) = (g \cdot v) \otimes_K (g \cdot w)$. Le produit tensoriel de morphismes de représentations est aussi un morphisme de représentations.

Si U est une autre représentation, alors l'isomorphisme canonique de $Vect_K$

$$\begin{array}{rcccc} a_{U,V,W} & : & (U \otimes_K V) \otimes_K W & \to & U \otimes_K (V \otimes_K W) \\ & & (u \otimes_K v) \otimes_K w & \mapsto & u \otimes_K (v \otimes_K w) \end{array}$$

est également un isomorphisme de représentations, qui est naturel par rapport à U, V, W et satisfait l'identité du pentagone (vu qu'elle est satisfaite dans le cas $Vect_K$).

L'objet unité de cette catégorie est la représentation triviale, c'est-à-dire le corps K avec le morphisme $G \otimes_K K \to K$ où $g.1_K = 1_K, \forall g \in G$. De plus, les contraintes d'unité $l_V : K \otimes_K V \to V$ et $r_V : V \otimes_K K \to V$ sont identiques à celles des espaces vectoriels.

De manière analogue aux catégories cartésiennes, si $\mathcal{C}$ est une catégorie avec des coproduits finis, alors si $\coprod$ dénote le coproduit et I est l'objet initial qui est le coproduit d'une famille vide, alors $(\mathcal{C}, \coprod, I)$ est une catégorie monoïdale et est appelé **catégorie cocartésienne**.

1.2 Catégories monoïdales strictes

1.2.1 Foncteurs monoïdaux

Définition 1.6. Soit $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, I_\mathcal{C})$ et $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, \boxtimes, I_\mathcal{D})$ deux catégories monoïdales. Un **foncteur monoïdal** $F = (F, \phi, \phi^I)$ consiste en un foncteur $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$, une transformation naturelle $\phi : F(-) \boxtimes F(-) \to F(- \otimes -)$ et un morphisme $\phi^I : I_\mathcal{D} \to F(I_\mathcal{C})$ dans $\mathcal{D}$ tels que

$$\begin{tikzcd}
(F(X) \boxtimes F(Y)) \boxtimes F(Z) \arrow[r, "a^{\mathcal{D}}_{F(X),F(Y),F(Z)}"] \arrow[d, "\phi_{X,Y} \boxtimes Id_{F(Z)}"'] & F(X) \boxtimes (F(Y) \boxtimes F(Z)) \arrow[d, "Id_{F(X)} \boxtimes \phi_{Y,Z}"] \\
(F(X \otimes Y)) \boxtimes F(Z) \arrow[d, "\phi_{X \otimes Y, Z}"'] & F(X) \boxtimes (F(Y \otimes Z)) \arrow[d, "\phi_{X, Y \otimes Z}"] \\
F((X \otimes Y) \otimes Z) \arrow[r, "F(a^{\mathcal{C}}_{X,Y,Z})"'] & F(X \otimes (Y \otimes Z))
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
I_\mathcal{D} \boxtimes F(X) \arrow[r, "l_{F(X)}"] \arrow[d, "\phi^I \boxtimes Id_{F(X)}"'] & F(X) \\
F(I_\mathcal{C}) \boxtimes F(X) \arrow[r, "\phi_{I_\mathcal{C}, X}"'] & F(I_\mathcal{C} \otimes X) \arrow[u, "F(l_X)"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
F(X) \boxtimes I_\mathcal{D} \arrow[r, "r_{F(X)}"] \arrow[d, "Id_{F(X)} \boxtimes \phi^I"'] & F(X) \\
F(X) \boxtimes F(I_\mathcal{C}) \arrow[r, "\phi_{X, I_\mathcal{C}}"'] & F(X \otimes I_\mathcal{C}) \arrow[u, "F(r_X)"']
\end{tikzcd}$$

commutent pour tout objet $X, Y, Z \in \mathcal{C}$. De plus, la composition de deux foncteurs monoïdaux reste un foncteur monoïdal.

Définition 1.7. Un foncteur monoïdal $F = (F, \phi, \phi^I)$ est **fort** lorsque la transformation naturelle ϕ et le morphisme ϕ^I sont des isomorphismes. De plus, le foncteur monoïdal F est dit **strict** si ϕ ainsi que ϕ^I sont l'identité.

Exemple 1.8. Le foncteur d'oubli $U : (Ab, \otimes_{\mathbb{Z}}, \mathbb{Z}) \to (Set, \times, \{*\})$, qui va de la catégorie des groupes abéliens vers la catégorie des ensembles, est un foncteur monoïdal. Celui-ci est déterminé par la transformation naturelle $\phi_{A,B} : U(A) \times U(B) \to U(A \otimes_{\mathbb{Z}} B)$, $(a, b) \mapsto U(a \otimes_{\mathbb{Z}} b)$ ainsi que le morphisme $\phi^I : \{*\} \to U(\mathbb{Z})$.

Exemple 1.9. Soit G un groupe, K un corps commutatif et $Rep_{G,K}$ la catégorie des représentations K-linéaires de G. Le foncteur d'oubli $U : Rep_{G,K} \to Vect_K$ qui envoie la représentation (V, ρ) vers son espace vectoriel V est un foncteur monoïdal strict.

1.2.2 Équivalence entre catégories monoïdales

Dans cette section, nous allons prouver que toute catégorie monoïdale est équivalente à une catégorie monoïdale stricte grâce à un foncteur monoïdal.

Définition 1.10. Soit deux catégories monoïdales $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, I_{\mathcal{C}})$ et $\mathcal{D} = (\mathcal{D}, \boxtimes, I_{\mathcal{D}})$, et soit (F, ϕ, ϕ^I), (G, ψ, ψ^I) deux foncteurs monoïdaux de $\mathcal{C}$ vers $\mathcal{D}$. Une **transformation monoïdale naturelle** $\alpha : (F, \phi, \phi^I) \to (G, \psi, \psi^I)$ est une transformation naturelle $\alpha : F \to G$ telle que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd} I_{\mathcal{D}} \arrow[r, "\phi^I"] \arrow[dr, "\psi^I"'] & F(I_{\mathcal{C}}) \arrow[d, "\alpha_I"] \\ & G(I_{\mathcal{C}}) \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} F(X) \boxtimes F(Y) \arrow[r, "\phi_{X,Y}"] \arrow[d, "\alpha_X \boxtimes \alpha_Y"'] & F(X \otimes Y) \arrow[d, "\alpha_{X \otimes Y}"] \\ G(X) \boxtimes G(Y) \arrow[r, "\psi_{X,Y}"'] & G(X \otimes Y) \end{tikzcd}$$

pour toute paire d'objets (X, Y) dans la catégorie $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$.

Un **isomorphisme monoïdal naturel** est une transformation monoïdale naturelle qui est également un isomorphisme.

Définition 1.11. Une **équivalence monoïdale** entre deux catégories monoïdales $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ est un foncteur monoïdal $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ tel qu'il existe un foncteur monoïdal $G : \mathcal{D} \to \mathcal{C}$ et deux isomorphismes monoïdaux naturels $\eta : Id_{\mathcal{D}} \to FG$ et $\theta : GF \to Id_{\mathcal{C}}$.

Notre objectif étant de mettre en évidence que toute catégorie monoïdale est équivalente à une catégorie monoïdale stricte, afin de l'atteindre, nous allons construire une catégorie monoïdale stricte $\mathcal{S}$ à partir d'une catégorie monoïdale $\mathcal{M} = (\mathcal{M}, \otimes, a, I)$.

Les *objets* de la catégorie $\mathcal{S}$ seront des séquences finies $(X_1, \ldots, X_k)$ d'objets de $\mathcal{M}$ dont la séquence vide $\emptyset$ (qui jouera le rôle d'unité de la catégorie). Soit $(\mathcal{R}, \star, \emptyset)$, où $\mathcal{R}$ est la classe de toutes ces séquences et $\star$ l'opération de concaténation de séquences.

Soit deux séquences non vides $(X_1, \ldots, X_k)$ et $(Y_1, \ldots, Y_l)$, l'opération $\star$ est définie par

$$(X_1, \ldots, X_k) \star (Y_1, \ldots, Y_l) = (X_1, \ldots, X_k, Y_1, \ldots, Y_l).$$

De plus, la séquence vide joue le rôle du neutre pour cette opération $R \star \emptyset = R = \emptyset \star R$, $\forall R \in \mathcal{R}$. Le produit est associatif $(R_1 \star R_2) \star R_3 = R_1 \star (R_2 \star R_3)$, $\forall R_1, R_2, R_3 \in \mathcal{R}$.

Après avoir défini les objets de la catégorie $\mathcal{S}$ comme étant les éléments de la classe $\mathcal{R}$, les morphismes entre ces objets seront définis à l'aide de la fonction F qui va de la classe $\mathcal{R}$ vers la classe des objets de $\mathcal{M}$. Cette fonction assigne à chaque séquence $R = (X_1, X_2, \ldots, X_k)$ d'objets de $\mathcal{M}$ l'objet $(\ldots((X_1 \otimes X_2) \otimes X_3) \otimes \ldots) \otimes X_k$. La fonction F est définie de manière récursive comme suit

$$F(\emptyset) = I, \qquad F([X]) = X, \qquad F(R \star [X]) = F(R) \otimes X, \tag{1.3}$$

où la notation $[X]$ signifie qu'il s'agit d'une séquence composée d'un seul élément, X.

Étant donné deux séquences R_1 et R_2 d'objets de $\mathcal{M}$, l'ensemble des *morphismes* $\mathcal{S}(R_1, R_2)$ est défini comme l'ensemble $\mathcal{M}(F(R_1), F(R_2))$. Cela signifie qu'un morphisme de $\mathcal{S}$ est donné par un morphisme de $\mathcal{M}$.

La concaténation des séquences induit une structure monoïdale sur la catégorie $\mathcal{S}$. Celle-ci est déjà définie pour les objets, et en ce qui concerne les morphismes, le produit tensoriel s'obtient grâce à la transformation naturelle

$$\phi : F(-) \otimes F(-) \to F(- \star -)$$

qui garde les éléments inchangés des séquences et déplace seulement toutes leurs parenthèses vers la gauche. Analysons ce que cela signifie à travers un exemple :

Soit deux séquences $X = (X_1, \ldots, X_k)$ et $Y = (Y_1, \ldots, Y_l)$. Alors, la transformation $\phi_{X,Y} : F(X) \otimes F(Y) \to F(X \star Y)$ prend l'élément

$$[(\ldots(X_1 \otimes X_2) \otimes \ldots) \otimes X_k] \otimes [(\ldots(Y_1 \otimes Y_2) \otimes \ldots) \otimes Y_l]$$

et le renvoie en déportant toutes les parenthèses vers la gauche

$$(\ldots((((\ldots(X_1 \otimes X_2) \otimes \ldots) \otimes X_k) \otimes Y_1) \otimes Y_2) \otimes \ldots) \otimes Y_l.$$

À présent, en utilisant le produit tensoriel de la catégorie $\mathcal{M}$, le produit tensoriel entre deux morphismes $f : S \to T$ et $g : U \to V$ dans $\mathcal{S}$ peut être défini par

$$f \star g = \phi_{T,V}(f \otimes g)\phi_{S,U}^{-1}.$$

Ce produit $f \star g : (S_1, \ldots, S_k, U_1, \ldots, U_l) \to (T_1, \ldots, T_m, V_1, \ldots, V_n)$ est explicité par le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
{[(\ldots((((\ldots(S_1 \otimes S_2) \otimes \ldots) \otimes S_k) \otimes U_1) \otimes U_2) \otimes \ldots) \otimes U_l]} \arrow[d, "\phi^{-1}_{S,U}"] \arrow[ddd, bend left, dotted, "f \star g"] \\
{[(\ldots(S_1 \otimes S_2) \otimes \ldots) \otimes S_k] \otimes [(\ldots(U_1 \otimes U_2) \otimes \ldots) \otimes U_l]} \arrow[d, "f \otimes g"] \\
{[(\ldots(T_1 \otimes T_2) \otimes \ldots) \otimes T_m] \otimes [(\ldots(V_1 \otimes V_2) \otimes \ldots) \otimes V_n]} \arrow[d, "\phi_{T,V}"] \\
{[(\ldots((((\ldots(T_1 \otimes T_2) \otimes \ldots) \otimes T_m) \otimes V_1) \otimes V_2) \otimes \ldots) \otimes V_n]}
\end{tikzcd}$$

À présent, puisque les morphismes de la catégorie $\mathcal{S}$ et leur concaténation ont bien été définis, on observe que le produit est associatif $(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$ pour tout morphisme f, g, h dans $\mathcal{S}$.

Comme $\mathcal{M}$ est une catégorie monoïdale, il s'ensuit que $\mathcal{S}$ l'est également. De plus, la proposition suivante montre que la catégorie $\mathcal{S}$, construite via $\mathcal{M}$, est une catégorie monoïdale stricte.

Proposition 1.12. *La catégorie $\mathcal{S}$ est une catégorie monoïdale stricte.*

Démonstration. En premier lieu, l'associateur a est simplement l'identité par définition de celui-ci dans $\mathcal{S}$: $\forall R, S, T \in \mathcal{S}$, on observe

$$(R \star S) \star T = R \star (S \star T).$$

Ensuite, puisque l'unité I dans la catégorie $\mathcal{S}$ est le vide $\emptyset$, il est clair que $\forall R \in \mathcal{S}$, on a $R \star \emptyset = R$ et $\emptyset \star R = R$. Par conséquent, l'unité à gauche et à droite sont les identités. En conclusion, la catégorie monoïdale $\mathcal{S}$ est stricte. $\square$

Pour mettre en lumière l'équivalence monoïdale entre la catégorie monoïdale $\mathcal{M}$ et la catégorie monoïdale stricte $\mathcal{S}$, nous allons montrer que le foncteur $F = (F, \phi, \phi^I) : \mathcal{S} \to \mathcal{M}$, où la transformation naturelle est donnée par $\phi : F(-) \otimes F(-) \to F(- \star -)$ et le morphisme par $\phi^I = Id_I : I \to F(\emptyset) = I$, est un foncteur monoïdal. On rappelle que le foncteur $F : \mathcal{S} \to \mathcal{M}$ est défini sur les objets comme au point (1.3) et par la définition des morphismes dans $\mathcal{S}$, le foncteur F sur les morphismes est simplement l'identité.

Lemme 1.13. *Soit R, R', R'' des objets de $\mathcal{M}$. Alors, les diagrammes suivants commutent avec la transformation $\phi : F(-) \otimes F(-) \to F(- \star -)$ et le morphisme $\phi^I : I \to F(\emptyset)$*

$$\begin{tikzcd}
(F(R) \otimes F(R')) \otimes F(R'') \arrow[r, "a_{F(R),F(R'),F(R'')}"] \arrow[d, "\phi_{R,R'} \otimes F(R'')"'] & F(R) \otimes (F(R') \otimes F(R'')) \arrow[d, "F(R) \otimes \phi_{R',R''}"] \\
(F(R \star R')) \otimes F(R'') \arrow[d, "\phi_{R \star R', R''}"'] & F(R) \otimes (F(R' \star R'')) \arrow[d, "\phi_{R, R' \star R''}"] \\
F(R \star R' \star R'') \arrow[r, equal] & F(R \star R' \star R'')
\end{tikzcd}$$

et

$$\begin{tikzcd}
I \otimes F(R) \arrow[d, "\phi^I \otimes Id_{F(R)}"'] \arrow[dr, "l_{F(R)}"] & \\
F(\emptyset) \otimes F(R) \arrow[r, "\phi_{\emptyset,R}"'] & F(R)
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
& F(R) \otimes I \arrow[d, "Id_{F(R)} \otimes \phi^I"] \arrow[dl, "r_{F(R)}"'] \\
F(R) & F(R) \otimes F(\emptyset) \arrow[l, "\phi_{R,\emptyset}"]
\end{tikzcd}$$

Ce lemme est trivial, car il s'agit simplement de déplacements de parenthèses et de l'utilisation de la définition de ϕ.

Proposition 1.14. *Le foncteur $F : \mathcal{S} \to \mathcal{M}$ est un foncteur monoïdal.*

Démonstration. Comme garanti par le Lemme 1.13, le foncteur $F : \mathcal{S} \to \mathcal{M}$ est un foncteur monoïdal. □

L'objectif, qui était de montrer l'équivalence entre une catégorie monoïdale et une catégorie monoïdale stricte, va pouvoir être réalisé. Ce résultat a été montré par Mac Lane [7].

Théorème 1.15. *Soit la catégorie monoïdale $\mathcal{M}$ et la catégorie monoïdale stricte $\mathcal{S}$. Le foncteur $F : \mathcal{S} \to \mathcal{M}$ est une équivalence de catégories.*

Démonstration. Afin de montrer que F est une équivalence de catégories, il suffit de démontrer qu'il existe un foncteur $G : \mathcal{M} \to \mathcal{S}$ tel que FG et GF sont naturellement isomorphes à $Id_{\mathcal{M}}$ et $Id_{\mathcal{S}}$ respectivement.

Dans ce but, nous allons définir $G : \mathcal{M} \to \mathcal{S}$ comme un foncteur qui envoie un objet $X \neq I$ sur la séquence $[X] \in \mathcal{R}$, composée uniquement de l'élément X. À propos de l'unité, on définit $G(I) = \emptyset$. En ce qui concerne les morphismes, le foncteur G est le foncteur identité puisque chaque morphisme dans $\mathcal{S}$ est envoyé sur lui-même dans $\mathcal{M}$ comme souligné lors de la définition des morphismes dans la catégorie $\mathcal{S}$. De plus, par définition, le foncteur G est également un foncteur monoïdal.

À l'aide de la définition des foncteurs F et G, il est clair que $FG = Id_{\mathcal{M}}$ et $GF = Id_{\mathcal{S}}$. Ceci définit donc une équivalence monoïdale entre la catégorie monoïdale $\mathcal{M}$ et la catégorie monoïdale stricte $\mathcal{S}$. $\square$

Remarque 1.16. En supposant que le Théorème de cohérence de Mac Lane est vrai, la catégorie monoïdale $\mathcal{M}$ et la catégorie monoïdale stricte $\mathcal{S}$ sont monoïdalement équivalente par l'intermédiaire d'un foncteur monoïdal $F : \mathcal{S} \to \mathcal{M}$.

Étant donné une séquence d'objets $X_1, \dots, X_n$ dans une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$, il est possible de former un produit tensoriel $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$. Les parenthèses de ce produit peuvent être agencées de manières différentes, par exemple

$$(X_1 \otimes X_2) \otimes \cdots \otimes (X_{n-1} \otimes X_n) \text{ ou } ((\dots(X_1 \otimes X_2) \otimes \dots) \otimes X_{n-1}) \otimes X_n.$$

En général, ces derniers ne sont pas égaux. Ce sont des objets distincts dans la catégorie monoïdale $\mathcal{C}$.

Néanmoins, pour $n = 3$, les objets $(X_1 \otimes X_2) \otimes X_3$ et $X_1 \otimes (X_2 \otimes X_3)$ sont identifiés par l'associateur. Par contre, lorsque $n \geq 4$, il peut y avoir deux ou plusieurs suites d'associateurs reliant par exemple $(\dots(X_1 \otimes X_2) \otimes \dots) \otimes X_n$ et $X_1 \otimes (\cdots \otimes (X_{n-1} \otimes X_n) \dots)$. À priori, ces suites d'associateurs ne commutent pas. Cependant, le cas $n = 4$ est traité par le pentagone de Mac Lane. Mais qu'en est-il lorsque $n > 4$?

Ce problème est résolu par Mac Lane et ce fut le premier résultat important de la théorie des catégories monoïdales. Le théorème de cohérence affirme que, dans une catégorie monoïdale, tout diagramme composé uniquement d'associateurs et d'unités sera commutatif. L'énoncé de ce théorème est trivial lorsque $\mathcal{C}$ est une catégorie monoïdale stricte. En fin de compte, le théorème de cohérence de Mac Lane est équivalent à dire que chaque catégorie monoïdale est monoïdalement équivalente à une catégorie monoïdale stricte par l'intermédiaire d'un foncteur monoïdal.

1.3 Algèbres et Cogèbres dans les catégories monoïdales

En général, une **algèbre associative et unitaire** dans une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, a, I)$ est un triplet (A, μ_A, η_A) constitué d'un objet A, d'un morphisme $\mu_A : A \otimes A \to A$ et un morphisme $\eta_A : I \to A$ tels que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd}
(A \otimes A) \otimes A \arrow[r, "a_{A,A,A}"] \arrow[d, "\mu_A \otimes Id_A"'] & A \otimes (A \otimes A) \arrow[r, "Id_A \otimes \mu_A"] & A \otimes A \arrow[d, "\mu_A"] \\
A \otimes A \arrow[rr, "\mu_A"'] & & A
\end{tikzcd} \tag{1.4}$$

et

$$\begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[d, "\mu_A"] & \\ I \otimes A \arrow[ur, "\eta_A \otimes Id_A"] \arrow[dr, "l_A"'] & & A \otimes I \arrow[ul, "Id_A \otimes \eta_A"'] \arrow[dl, "r_A"] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{1.5}$$

Le morphisme μ_A est appelé le **produit** ou la **multiplication** de l'algèbre A, et η_A est appelé l'**unité** de A.

Remarque 1.17. Grâce au Théorème 1.15, les objets $(A \otimes A) \otimes A$ et $A \otimes (A \otimes A)$ sont identifiés par l'associateur $a_{A,A,A}$, ce qui simplifie la définition d'algèbre décrite plus haut.

Définition 1.18. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale. Une **algèbre associative et unitaire** est un objet A dans $\mathcal{C}$ équipé de deux morphismes linéaires : un morphisme de multiplication $\mu_A : A \otimes A \to A$ et un morphisme unitaire $\eta_A : I \to A$ qui satisfont les conditions de compatibilité suivantes

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \otimes A \arrow[r, "Id_A \otimes \mu_A"] \arrow[d, "\mu_A \otimes Id_A"'] & A \otimes A \arrow[d, "\mu_A"] \\ A \otimes A \arrow[r, "\mu_A"'] & A \end{tikzcd} \tag{1.6}$$

et

$$\begin{tikzcd} I \otimes A \arrow[r, "\eta_A \otimes Id_A"] \arrow[dr, equal] & A \otimes A \arrow[d, "\mu_A"] & A \otimes I \arrow[l, "Id_A \otimes \eta_A"'] \arrow[dl, equal] \\ & A & \end{tikzcd} \tag{1.7}$$

exprimant l'associativité de la multiplication et l'existence de l'unité.

Exemple 1.19. Dans la catégorie des espaces vectoriels $Vect_K$, les algèbres sont exactement les K-algèbres unitaires.

Si $A = (A, \mu_A, K)$ est une algèbre dans $Vect_K$, alors A est un K-espace vectoriel avec la multiplication

$$(a \otimes b) \mapsto \mu_A(a \otimes b) = ab$$

qui est K-bilinéaire et associative au sens du diagramme (1.6). Si l'on définit le morphisme unitaire $\eta_A : K \to A$ par $\eta_A(1) = 1_A$, alors au sens du second diagramme (1.7), on observe

$$1_A a = a = a 1_A$$

pour tout $a \in A$. Par conséquent, A est une K-algèbre unitaire.

Exemple 1.20. Une algèbre dans la catégorie monoïdale des ensembles $(Set, \times, \{*\})$ n'est rien d'autre qu'un monoïde, c'est-à-dire un ensemble muni d'une loi binaire associative qui possède un neutre.

Les objets de la catégorie des algèbres sont décrits par la Définition 1.18 et ses morphismes seront définis par la définition suivante

Définition 1.21. Soit deux algèbres $A = (A, \mu_A, \eta_A)$ et $B = (B, \mu_B, \eta_B)$ dans une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$. Un **morphisme d'algèbres** $f : A \to B$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$ tel que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd} A \otimes A \arrow[r, "f \otimes f"] \arrow[d, "\mu_A"'] & B \otimes B \arrow[d, "\mu_B"] \\ A \arrow[r, "f"'] & B \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] & B \\ I \arrow[u, "\eta_A"] \arrow[ur, "\eta_B"'] & \end{tikzcd}$$

Ces diagrammes vérifient que le morphisme f préserve la multiplication ainsi que l'unité.

Exemple 1.22. Un morphisme d'algèbres dans $Vect_K$ est exactement un morphisme de K-algèbres unitaires. Si $f : A \to B$ est un morphisme d'algèbres dans $Vect_K$, alors

$$f(a)f(b) = \mu_B(f \otimes f)(a \otimes b) = f(\mu_A(a \otimes b)) = f(ab)$$

et

$$f(1_A) = f(\eta_A(1)) = \eta_B(1) = 1_B.$$

Exemple 1.23. Un morphisme d'algèbres dans la catégorie des ensembles $(Set, \times, \{*\})$ est un morphisme de monoïdes.

L'identité est un morphisme d'algèbres et la composition de deux morphismes d'algèbres est de nouveau un morphisme d'algèbre. La catégorie des algèbres dans une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ se notera $Alg_{\mathcal{C}}$.

L'avantage de définir le concept d'algèbre associative à l'aide de diagrammes est qu'il est simple de « dualiser » la définition. Pour ce faire, nous inversons simplement toutes les flèches afin d'obtenir la définition d'une cogèbre :

Définition 1.24. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie monoïdale. Une **cogèbre coassociative et counitaire** est un objet C dans $\mathcal{C}$ équipé d'un morphisme $\Delta_C : C \to C \otimes C$ et d'un morphisme $\epsilon_C : C \to I$ qui satisfont les conditions suivantes

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "\Delta_C"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & C \otimes C \arrow[d, "\Delta_C \otimes Id_C"] \\ C \otimes C \arrow[r, "Id_C \otimes \Delta_C"'] & C \otimes C \otimes C \end{tikzcd} \tag{1.8}$$

et

$$\begin{tikzcd} I \otimes C & C \otimes C \arrow[l, "\epsilon_C \otimes Id_C"'] \arrow[r, "Id_C \otimes \epsilon_C"] & C \otimes I \\ & C \arrow[ul, equal] \arrow[u, "\Delta_C"'] \arrow[ur, equal] & \end{tikzcd} \tag{1.9}$$

exprimant la coassociativité de la comultiplication et l'existence de la counité.

Le morphisme Δ_C est appelé le **coproduit** ou la **comultiplication** de la cogèbre C, et ϵ_C est appelé la **counité** de C.

Remarque 1.25.

1. Une cogèbre dans une catégorie $\mathcal{C}$ est une algèbre dans la catégorie opposée $\mathcal{C}^{op}$.
2. Dans toute cogèbre $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$, un élément g qui satisfait $\Delta(g) = g \otimes g$ et $\epsilon(g) = 1$ est appelé **grouplike**. L'ensemble des éléments grouplike de C est noté $G(C)$.
3. Dans le cas de la comultiplication dans $Vect_K$, l'introduction de la **notation de Sweedler**, instaurée par Sweedler lui-même [12], permet la simplification des formules. Si C est une K-cogèbre, alors pour tout $c \in C$, la comultiplication Δ_C est une somme de la forme

$$\Delta_C(c) = \sum_i c_{1i} \otimes c_{2i} := \sum c_1 \otimes c_2.$$

Le signe de sommation sera souvent abandonné et nous écrirons simplement $\Delta_C(c) = c_1 \otimes c_2$.

Exemple 1.26. Dans la catégorie des ensembles $(Set, \times, \{*\})$, tout objet $S \in Set$ est une cogèbre avec Δ_S étant le morphisme diagonal et l'unité ϵ_S étant l'unique morphisme qui envoie les éléments de la cogèbre sur le singleton.

Exemple 1.27. Soit V un espace vectoriel. Considérons une K-cogèbre V munie de la comultiplication notée par l'application linéaire

$$\begin{array}{rcccc} \Delta_V & : & V & \rightarrow & V \otimes_K V \\ & & b & \mapsto & \Delta_V(b) = b_1 \otimes b_2 \end{array}$$

et de la counité déterminée par l'application linéaire

$$\begin{array}{rcccc} \epsilon_V & : & V & \rightarrow & K \\ & & v & \mapsto & \epsilon_V(v). \end{array}$$

Par définition, ces applications vérifient la coassociativité et la counité, c'est-à-dire les propriétés suivantes

$$\sum \epsilon_V(b_1)b_2 = b = \sum \epsilon_V(b_2)b_1$$

et

$$\sum b_1 \otimes b_{21} \otimes b_{22} = \sum b_{11} \otimes b_{12} \otimes b_2.$$

Alors, on peut remarquer que $(V, \Delta_V, \epsilon_V)$ fait commuter les diagrammes (1.8) et (1.9) et donc, présente un exemple de cogèbre dans la catégorie $Vect_K$.

Exemple 1.28. L'espace vectoriel des polynômes $\mathbb{C}[x]$ est un exemple de cogèbre dans la catégorie des espaces vectoriels. La comultiplication sur des éléments d'une base $\{x^n \mid n \in \mathbb{N}\}$ est donnée par

$$\Delta_{\mathbb{C}[x]}(x^n) = \sum_{i=0}^{n} x^i \otimes x^{n-i},$$

où $x^0 = 1$. Par exemple,

$$\Delta_{\mathbb{C}[x]}(x^2) = 1 \otimes x^2 + x \otimes x + x^2 \otimes 1$$

et il n'est pas difficile de vérifier la coassociativité sur cet exemple.

Le premier terme est donné par

$$
\begin{aligned}
(Id_{\mathbb{C}[x]} \otimes \Delta_{\mathbb{C}[x]})(\Delta_{\mathbb{C}[x]}(x^2)) &= 1 \otimes (1 \otimes x^2 + x \otimes x + x^2 \otimes 1) + x \otimes (1 \otimes x + x \otimes 1) \\
&+ x^2 \otimes (1 \otimes 1) \\
&= 1 \otimes 1 \otimes x^2 + 1 \otimes x \otimes x + 1 \otimes x^2 \otimes 1 + x \otimes 1 \otimes x \\
&+ x \otimes x \otimes 1 + x^2 \otimes 1 \otimes 1
\end{aligned}
$$

et d'autre part, on obtient

$$
\begin{aligned}
(\Delta_{\mathbb{C}[x]} \otimes Id_{\mathbb{C}[x]})(\Delta_{\mathbb{C}[x]}(x^2)) &= (1 \otimes 1) \otimes x^2 + (1 \otimes x + x \otimes 1) \otimes x \\
&+ (1 \otimes x^2 + x \otimes x + x^2 \otimes 1) \otimes 1 \\
&= 1 \otimes 1 \otimes x^2 + 1 \otimes x \otimes x + x \otimes 1 \otimes x + 1 \otimes x^2 \otimes 1 \\
&+ x \otimes x \otimes 1 + x^2 \otimes 1 \otimes 1.
\end{aligned}
$$

Les deux résultats sont identiques après une réorganisation des termes. Pour ceux qui seraient intéressés par le cas généralisé, il est exposé en Annexe, au point 2.0.2.

De plus, la counité est définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par,

$$\epsilon_{\mathbb{C}[x]}(x^n) = \delta_{n,0} = \begin{cases} 1 & if\ n = 0 \\ 0 & if\ n \neq 0. \end{cases}$$

Cette cogèbre est appelée « the divided power coalgebra » notamment dans le livre [4] de Dascalescu, Nastasescu et Raianu.

Définition 1.29. Soit deux cogèbres $C = (C, \Delta_C, \epsilon_C)$ et $D = (D, \Delta_D, \epsilon_D)$ dans la catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, I)$. Un **morphisme de cogèbres** $f : C \to D$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$ qui préserve la comultiplication ainsi que la counité, c'est-à-dire un morphisme tel que les diagrammes suivants commutent :

$$
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\Delta_C"'] & D \arrow[d, "\Delta_D"] \\
C \otimes C \arrow[r, "f \otimes f"'] & D \otimes D
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
C \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\epsilon_C"'] & D \arrow[dl, "\epsilon_D"] \\
I &
\end{tikzcd}
$$

Similairement au cas de la catégorie des algèbres $Alg_{\mathcal{C}}$, l'identité ainsi que la composition de deux morphismes de cogèbres restent des morphismes de cogèbres. La catégorie des cogèbres dans une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$ se notera $CoAlg_{\mathcal{C}}$.

Exemple 1.30. Considérer $\mathbb{C}[G]$ l'algèbre du groupe G. Les vecteurs de base sont les éléments du groupe $g \in G$. Un élément de $\mathbb{C}[G]$ sera de la forme

$$\sum_g a_g g = a_1 g_1 + a_2 g_2 + \dots$$

où $a_i \in \mathbb{C}$ sont des scalaires complexes et $g_i \in G$. Cet espace est une algèbre associative et unitaire. La multiplication sur les éléments de base est simplement le produit de groupe $\mu(g_i \otimes g_j) = g_i g_j$ avec l'élément identité $e \in G$ comme unité, $\eta(1) = e$. Par linéarité, ces fonctions peuvent être étendues à l'espace vectoriel tout entier.

La structure de cogèbre est donnée par la comultiplication $\Delta(g) = g \otimes g$ et la counité $\epsilon(g) = 1$ pour tout $g \in G$. Elles sont également étendues par linéarité à tout l'espace.

Par conséquent, l'espace $\mathbb{C}[G]$ est à la fois une algèbre et une cogèbre. Dans le chapitre suivant, nous allons nous intéresser de plus près à ce type d'objets mathématiques, qui s'avère particulièrement important.

Chapitre 2

Algèbres de Hopf

Dans la Section 2.2, nous allons aborder les bigèbres qui vont permettre, dans la dernière section, d'introduire les fameuses algèbres de Hopf. Préalablement, l'environnement doit être modifié afin qu'il puisse accueillir les bigèbres sans encombre, car les catégories monoïdales ne sont plus adaptées. Ces nouveaux environnements s'appellent les catégories monoïdales tressées et sont définis dans la Section 2.1 qui s'appuie sur le travail de Joyal et Street [6]

Dans la section 2.3, basée sur les notes de cours de Caenepeel et Vercruysse [3], le lien entre les structures de bigèbres $(B, \mu_B, \eta_B, \Delta_B, \eta_B)$ sur l'algèbre (B, μ_B, η_B) et les structures monoïdales sur la catégorie des modules Mod_B a été exposées.

Pour des explications plus détaillées sur les bigèbres, les algèbres de Hopf ou les modules, le lecteur est invité à consulter le livre de Dascalescu, Nastasescu et Raianu [4] ou l'ouvrage de Montgomery [9] sur lesquels ce chapitre est basé.

2.1 Catégories monoïdales tressées

Comme vu dans le chapitre précédent, dans toute catégorie monoïdale, il peut y avoir des algèbres et des cogèbres. Il arrive même que certains objets dans une catégorie monoïdale possèdent les deux structures, c'est-à-dire qu'ils sont à la fois une algèbre et une cogèbre. Dans ce chapitre-ci, nous étudierons les objets mathématiques où les deux structures existent de manière à être compatibles. Plus précisément, soit un objet B dans une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, a, I)$ qui est à la fois une algèbre et une cogèbre dans la catégorie $\mathcal{C}$. Alors, il y existe quatre morphismes $\mu_B : B \otimes B \to B$, $\eta_B : I \to B$, $\Delta_B : B \to B \otimes B$ et $\epsilon_B : B \to I$ de telle manière à ce que (B, μ_B, η_B) soit une algèbre et $(B, \Delta_B, \epsilon_B)$ une cogèbre. Afin de dire que ces deux structures sont compatibles, il faut demander que la comultiplication $\Delta_B : B \to B \otimes B$ et la counité $\epsilon_B : B \to I$ soient des morphismes d'algèbres, tandis que la multiplication $\mu_B : B \otimes B \to B$ ainsi que l'unité $\eta_B : I \to B$ soient des morphismes de cogèbres. L'un des objectifs est de définir une structure d'algèbre sur le produit monoïdal de deux algèbres ainsi qu'une structure de cogèbre sur le produit monoïdal entre deux cogèbres. Cela n'est possible que pour les catégories monoïdales dites tressées.

Définition 2.1. Une catégorie monoïdale $(\mathcal{C}, \otimes, a, I)$ est une **catégorie monoïdale tressée** s'il existe pour toute paire d'objets $M, N \in \mathcal{C}$, un isomorphisme $\gamma_{M,N} : M \otimes N \to N \otimes M$, appelé **tressage**, tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} M \otimes N \arrow[r, "\gamma_{M,N}"] \arrow[d, "f\otimes g"'] & N \otimes M \arrow[d, "g \otimes f"] \\ M' \otimes N' \arrow[r, "\gamma_{M',N'}"'] & N' \otimes M' \end{tikzcd} \tag{2.1}$$

commute pour toute paire de morphismes $f : M \to M'$ et $g : N \to N'$. De plus, les deux axiomes de commutativité suivants doivent être satisfaits

$$\begin{tikzcd} M \otimes N \otimes P \arrow[r, "\gamma_{M,N\otimes P}"] \arrow[d, "\gamma_{M,N}\otimes Id_P"'] & N \otimes P \otimes M \\ N \otimes M \otimes P \arrow[ur, "Id_N \otimes \gamma_{M,P}"'] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} M \otimes N \otimes P \arrow[r, "\gamma_{M\otimes N,P}"] \arrow[d, "Id_M\otimes \gamma_{N,P}"'] & P \otimes M \otimes N \\ M \otimes P \otimes N \arrow[ur, "\gamma_{M,P} \otimes Id_N"'] & \end{tikzcd} \tag{2.2}$$

Remarque 2.2. En ce qui concerne ces deux axiomes de commutativité, Mac Lane [7] a noté que si l'on inverse le premier diagramme, c'est-à-dire que l'expression

$$\gamma_{M,N\otimes P} = (Id_N \otimes \gamma_{M,P}) \circ (\gamma_{M,N} \otimes Id_P)$$

devient

$$\gamma^{-1}_{M,N\otimes P} = (\gamma^{-1}_{M,N} \otimes Id_P) \circ (Id_N \otimes \gamma^{-1}_{M,P}).$$

Cela donne exactement le second diagramme avec γ^{-1} et en interchangeant M, N et P.

Définition 2.3. Une catégorie monoïdale tressée $(\mathcal{C}, \otimes, a, I, \gamma)$ est **symétrique** si $\gamma_{N,M} \circ \gamma_{M,N} = Id_{M\otimes N}$ pour toute paire d'objets $M, N \in \mathcal{C}$. Cela revient à demander que le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
M \otimes N \arrow[rr, "\gamma_{M,N}"] \arrow[dr, "Id_{M\otimes N}"'] & & N \otimes M \arrow[dl, "\gamma_{N,M}"] \\
& M \otimes N &
\end{tikzcd}$$

Afin de nous familiariser avec la notion de catégorie monoïdale tressée et symétrique, voici quelques exemples :

Exemple 2.4. La catégorie monoïdale $(Vect_K, \otimes_K, K, \gamma)$ des espaces vectoriels sur un corps K est naturellement tressée avec le morphisme de tressage $\gamma_{V,W} : V \otimes_K W \to W \otimes_K V$ défini par $\gamma(v \otimes_K w) = w \otimes_K v$, $v \in V, w \in W$. Cette catégorie est symétrique.

Exemple 2.5. La catégorie monoïdale $(Set, \times, \{*\}, \gamma)$ est tressée avec le morphisme $\gamma_{X,Y} : X \times Y \to Y \times X$, donné par $\gamma(x, y) = (y, x)$, $x \in X, y \in Y$. Cette catégorie est également symétrique.

Exemple 2.6. (Catégorie monoïdale tressée, mais non symétrique) Une catégorie monoïdale peut être tressée ou non. Ce nom n'est pas anodin ! Il a été choisi dû au lien existant entre les catégories monoïdales tressées et les groupes des tresses. En particulier, il existe une catégorie monoïdale tressée stricte, que l'on notera *Braid*. Les objets de cette catégorie sont les nombres naturels et les morphismes sont définis par

$$Hom(m, n) = \begin{cases} B_n & si\ m = n \\ \emptyset & sinon, \end{cases}$$

où B_n est le groupe des tresses à n brins. En particulier, les morphismes de n vers n sont donnés par les éléments du groupe des tresses à n brins.

Remarque 2.7. Le générateur σ_i agit sur les brins i et $i + 1$ en les croisant et en faisant passer le brin i au-dessus du brin $i + 1$.

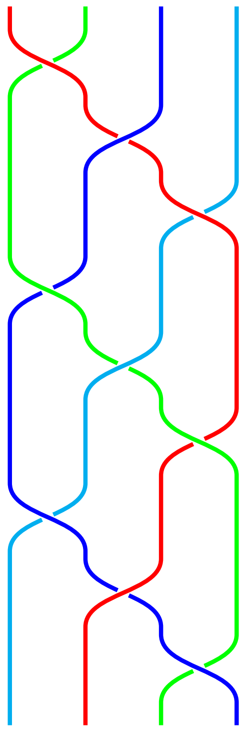
Pour $n \geq 2$, le **groupe de tresses à n brins** B_n est le groupe engendré par $n-1$ générateurs $\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-1}$ soumis aux relations suivantes :

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \text{ et } \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \text{ si } |i-j| \geq 2,$$

pour tout $i, j \in [1, n-1]$.

Pour $n \geq 1$ un entier, soit $p_1, \ldots, p_n \in]-1, 1[$ tels que $-1 < p_1 < \cdots < p_n < 1$. Une tresse β à n brins est une sous-variété lisse de $D^2 \times [0,1]$ à n composantes connexes $\beta^{(1)}, \ldots, \beta^{(n)}$, de bord $\partial\beta = \bigsqcup_{i=1}^{n} \{p_i\} \times \{0,1\}$, et telle que la projection canonique $D^2 \times [0,1] \to [0,1]$ envoie chaque $\beta^{(j)}$ sur $[0,1]$ par un difféomorphisme.

Pour $n = 4$, cela donne un diagramme, qui se lit de bas en haut, comme suit

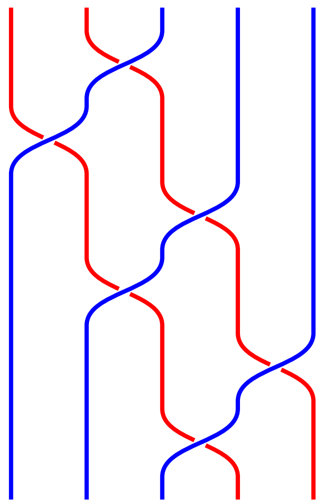


Afin de former une structure dite monoïdale, nous allons définir le produit monoïdal $\otimes$ sur les objets ainsi que sur les morphismes. Sur les objets, il s'agit d'une addition d'entiers et sur les morphismes, le produit est donné par l'homomorphisme de groupe $B_m \times B_n \to B_{m+n}$ qui est décrit comme une juxtaposition de tresses.

De plus, l'associateur a ainsi que les isomorphismes à gauche l et à droite r sont des identités.

Pour toute paire d'objets (m, n), le morphisme de tressage est un morphisme avec comme domaine $m+n$ et comme codomaine $n+m$. Cela revient à faire passer les m brins de gauche à droite en passant au-dessus des n brins.

Par exemple, pour les entiers $m = 3$ (bleu) et $n = 2$ (rouge), on observe la tresse à 5 brins suivante :



De plus, il est clair que la catégorie *Braid* n'est pas symétrique, car lorsqu'on compose le morphisme $n + m \to m + n$ suivi du morphisme $m + n \to n + m$, on obtient des brins emmêlés au lieu de simples brins verticaux.

Pour donner suite à l'introduction de la notion de morphisme de tressage $\gamma_{M,N} : M \otimes N \to N \otimes M$, pour tout $M, N \in \mathcal{C}$, nous pouvons joindre le concept de commutativité et de cocommutativité respectivement d'une algèbre associative et unitaire et d'une cogèbre coassociative et counitaire.

Définition 2.8. Dans une catégorie monoïdale tressée $\mathcal{C}$, une algèbre (A, μ_A, η_A) est dite **commutative** si le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} & A \otimes A \arrow[dr, "\mu_A"] & \\ A \otimes A \arrow[ur, "\gamma_{A,A}"] \arrow[rr, "\mu_A"'] & & A \end{tikzcd}$$

Dans le cas des espaces vectoriels, on observe

$$\begin{array}{rcccc} \gamma_{A,A} & : & A \otimes A & \to & A \otimes A \\ & & a \otimes b & \mapsto & \gamma_{A,A}(a \otimes b) = b \otimes a, \end{array}$$

pour tout $a, b \in A$. Ceci équivaut à demander que $\mu_A(a, b) = \mu_A(b, a)$, $\forall a, b \in A$. Donc, on remarque que la commutativité est similaire à la commutativité habituelle.

Définition 2.9. Dans une catégorie monoïdale tressée $\mathcal{C}$, une cogèbre $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ est dite **cocommutative** si la comultiplication fait commuter le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} & C \otimes C \arrow[dr, "\gamma_{C,C}"] & \\ C \arrow[ur, "\Delta_C"] \arrow[rr, "\Delta_C"'] & & C \otimes C \end{tikzcd}$$

c'est-à-dire que pour tout $c \in C$, $\gamma_{C,C} \circ \Delta_C(c) = \Delta_C(c)$.

Exemple 2.10. Considérons à nouveau l'Exemple 1.30, celui de l'algèbre du groupe G, $\mathbb{C}[G]$. Le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd} & \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G] \arrow[dr, "\gamma_{\mathbb{C}[G],\mathbb{C}[G]}"] & \\ \mathbb{C}[G] \arrow[ur, "\Delta_{\mathbb{C}[G]}"] \arrow[rr, "\Delta_{\mathbb{C}[G]}"'] & & \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G] \end{tikzcd}$$

Ce qui revient à dire que la cogèbre $\mathbb{C}[G]$ est cocommutative.

Le morphisme $\gamma : \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G] \otimes \mathbb{C}[G]$ est défini par $\gamma(g \otimes h) = h \otimes g$ pour tout $g, h \in \mathbb{C}[G]$.

2.2 Bigèbres dans les catégories monoïdales tressées

Comme souligné dans le chapitre précédent, les algèbres sont les monoïdes dans la catégorie des ensembles $(Set, \times, \{*\})$. Nous savons que la plupart des structures algébriques permettent de construire de façon simple une structure produit sur le produit cartésien d'ensembles sous-jacents. Afin de définir cette structure dans Set, nous avons besoin du morphisme de tressage $\gamma : Set \times Set \to Set \times Set, (x, y) \mapsto (y, x)$ qui est fourni par la catégorie monoïdale tressée Set. Par conséquent, pour $X, Y \in Set$, l'ensemble $X \times Y$ est un monoïde avec la multiplication $(x, y)(x', y') = (xx, yy')$, $x, x' \in X$, $y, y' \in Y$ et l'unité $1 = (1, 1)$. Cet exemple permet d'introduire le résultat suivant :

Proposition 2.11. *Soit une catégorie monoïdale (stricte) tressée* $(\mathcal{C}, \otimes, a, I, \gamma)$*. Alors, les deux énoncés suivants sont vérifiés :*

1. *Si* A *et* B *sont deux algèbres dans* $\mathcal{C}$*, alors on peut définir une structure d'algèbre sur le produit monoïdal* $A \otimes B$*.*
2. *Si* C *et* D *sont des cogèbres dans* $\mathcal{C}$*, alors on peut définir une structure de cogèbre sur le produit monoïdal* $C \otimes D$*.*

Démonstration. 1. Définissons la multiplication et l'application unité dans $A \otimes B$ comme

$$\mu_{A\otimes B} = (\mu_A \otimes \mu_B)(Id_A \otimes \gamma_{B,A} \otimes Id_B) \quad \text{et} \quad \eta_{A\otimes B} = \eta_A \otimes \eta_B.$$

Les relations suivantes vont être utiles et sont obtenues par naturalité du tressage

$$\gamma_{B,A}(\mu_B \otimes Id_A) = (Id_A \otimes \mu_B)\gamma_{B\otimes B,A}$$

et

$$\gamma_{B,A}(Id_B \otimes \mu_A) = (\mu_A \otimes Id_B)\gamma_{B,A\otimes A}.$$

L'associativité

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \otimes A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[r, "\mu_{A\otimes B}\otimes Id_A \otimes Id_B"] \arrow[d, "Id_A\otimes Id_B \otimes \mu_{A\otimes B}"'] & A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[d, "\mu_{A\otimes B}"] \\
A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[r, "\mu_{A\otimes B}"'] & A \otimes B
\end{tikzcd}$$

est bien définie puisque le diagramme (2.3), situé à la page suivante, commute. Dans le diagramme (2.3), nous avons volontairement omis de noter le symbole $\otimes$ pour plus de clarté. Par exemple, $A \otimes B \otimes A \otimes B$ sera désigné par $ABAB$.

De plus, l'axiome de l'unité est également vérifié puisque le diagramme suivant commute

$$\begin{tikzcd}
A \otimes B \otimes I \arrow[rr, "Id_A\otimes Id_B\otimes \eta_{A\otimes B}"] \arrow[dr, "Id_A\otimes \eta_A \otimes Id_B \otimes \eta_B"] \arrow[ddrr, equal] & & A \otimes B \otimes A \otimes B \arrow[dl, "Id_A\otimes \gamma_{B,A}\otimes Id_B"'] \arrow[dd, "\mu_{A\otimes B}"] \\
& A \otimes A \otimes B \otimes B \arrow[dr, "\mu_A\otimes\mu_B"] & \\
& & A \otimes B
\end{tikzcd}$$

L'autre partie de l'axiome est analogue. Par conséquent, $(A \otimes B, \mu_{A\otimes B}, \eta_{A\otimes B})$ est une algèbre.

2. Cette implication est duale à la première.

$\square$

$$
\begin{tikzcd}
ABABAB \arrow[rrrr, "\mu_{A\otimes B}\otimes Id_A\otimes Id_B"] \arrow[drr, "Id_A\otimes\gamma_{B,A}\otimes Id_B\otimes Id_A\otimes Id_B"] \arrow[ddddd, "Id_A\otimes Id_B\otimes\mu_{A\otimes B}"'] \arrow[dddr, bend right, "Id_A\otimes Id_B\otimes Id_A\otimes\gamma_{B,A}\otimes Id_B"] & & & & ABAB \arrow[ddddd, "\mu_{A\otimes B}"] \arrow[ddddl, "Id_A\otimes\gamma_{B,A}\otimes Id_B"] \\
& & AABBAB \arrow[urr, "\mu_A\otimes\mu_B\otimes Id_A\otimes Id_B"] \arrow[dl, "Id_A\otimes Id_A\otimes Id_B\otimes\gamma_{B,A}\otimes Id_B"'] \arrow[dr, "Id_A\otimes Id_A\otimes\gamma_{B\otimes B,A}\otimes Id_B"] & & \\
& AABABB \arrow[rr, "Id_A\otimes Id_A\otimes\gamma_{B,A}\otimes Id_B\otimes Id_B"] & & AAABBB \arrow[dd, bend right, "Id_A\otimes\mu_A\otimes Id_B\otimes\mu_B"'] \arrow[dd, bend left, "\mu_A\otimes Id_A\otimes\mu_B\otimes Id_B"] & \\
& ABAABB \arrow[u, "Id_A\otimes\gamma_{B,A}\otimes Id_A\otimes Id_B\otimes Id_B"] \arrow[urr, "Id_A\otimes\gamma_{B,A\otimes A}\otimes Id_B\otimes Id_B"'] \arrow[d, "Id_A\otimes Id_B\otimes\mu_A\otimes Id_B\otimes Id_B"] \arrow[ddl, bend right, "Id_A\otimes Id_B\otimes\mu_A\otimes\mu_B"'] & & & \\
& ABABB \arrow[rr, "Id_A\otimes\gamma_{B,A}\otimes Id_B\otimes\mu_B"] & & AABB \arrow[dr, "\mu_A\otimes\mu_B"] & \\
ABAB \arrow[urrr, "Id_A\otimes\gamma_{B,A}\otimes Id_B"] \arrow[rrrr, "\mu_{A\otimes B}"'] & & & & AB
\end{tikzcd}
$$

(2.3)

Lemme 2.12. *L'objet unité I possède naturellement une structure d'algèbre $(I, \mu_I = l_I = r_I, \eta_I = Id_I)$ et une structure de cogèbre $(I, \Delta_I = l_I^{-1} = r_I^{-1}, \epsilon_I = Id_I)$.*

À présent, on peut observer que grâce à la Proposition 2.11 et au Lemme 2.12, on peut déduire le corollaire suivant :

Corollaire 2.13. *La catégorie des algèbres $Alg_{\mathcal{C}}$ ainsi que la catégorie des cogèbres $CoAlg_{\mathcal{C}}$ sont des catégories monoïdales.*

Lorsqu'un objet possède à la fois une structure d'algèbre et de cogèbre, elles peuvent être compatibles entre elles.

Proposition 2.14. *Soit une catégorie monoïdale (stricte) tressée $(\mathcal{C}, \otimes, a, I, \gamma)$ et un objet $(B, \mu_B, \eta_B, \Delta_B, \epsilon_B)$ dans $\mathcal{C}$ qui est à la fois une algèbre et une cogèbre. Alors, les affirmations suivantes sont équivalentes :*

a) Les morphismes Δ_B et ϵ_B sont des morphismes d'algèbres.

b) Les morphismes μ_B et η_B sont des morphismes de cogèbres.

Démonstration. Considérons le diagramme

$$\begin{tikzcd}
B \otimes B \arrow[r, "\mu_B"] \arrow[d, "\Delta_B \otimes \Delta_B"'] & B \arrow[r, "\Delta_B"] & B \otimes B \\
B \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[rr, "Id_B \otimes \gamma_{B,B} \otimes Id_B"'] & & B \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[u, "\mu_B \otimes \mu_B"']
\end{tikzcd}$$

Ce diagramme peut être lu de deux manières différentes, soit comme

$$\begin{aligned}
\Delta_B \circ \mu_B &= (\mu_B \otimes \mu_B)(Id_B \otimes \gamma_{B,B} \otimes Id_B)(\Delta_B \otimes \Delta_B) \\
&= \mu_{B \otimes B}(\Delta_B \otimes \Delta_B)
\end{aligned}$$

ce qui signifie que Δ_B est un morphisme d'algèbre, ou soit comme

$$\begin{aligned}
\Delta_B \circ \mu_B &= (\mu_B \otimes \mu_B)(Id_B \otimes \gamma_{B,B} \otimes Id_B)(\Delta_B \otimes \Delta_B) \\
&= (\mu_B \otimes \mu_B)\Delta_{B \otimes B}
\end{aligned}$$

ce qui exprime que μ_B est un morphisme de cogèbre.

En ce qui concerne l'unité et la counité, nous avions constaté les morphismes suivants :

$$\mu_I = l_I = r_I, \quad \Delta_I = l_I^{-1} = r_I^{-1} \quad \text{et} \quad \eta_I = \epsilon_I = Id_I,$$

au Lemme 2.12. Nous supposons que la catégorie monoïdale est stricte. Ce qui implique que les morphismes l_I et r_I peuvent être vus comme des identités.

En observant les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[r, "\Delta_I"] \arrow[d, "\eta_B"'] & I \otimes I \arrow[d, "\eta_B \otimes \eta_B"] \\
B \arrow[r, "\Delta_B"'] & B \otimes B
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
B \otimes B \arrow[r, "\mu_B"] \arrow[d, "\epsilon_B \otimes \epsilon_B"'] & B \arrow[d, "\epsilon_B"] \\
I \otimes I \arrow[r, "\mu_I"'] & I
\end{tikzcd}$$

le premier peut être réécrit soit comme

$$(\eta_B \otimes \eta_B) \circ \Delta_I = \Delta_B \circ \eta_B$$

ce qui prouve, par définition, que le morphisme η_B respecte la comultiplication, ou soit comme

$$(\eta_B \otimes \eta_B) = \Delta_B \circ \eta_B$$

ce qui informe que Δ_B est unitaire.

De manière duale, le second schéma peut également être transcrit soit comme

$$\mu_I \circ (\epsilon_B \otimes \epsilon_B) = \epsilon_B \circ \mu_B$$

ce qui montre que le morphisme ϵ respecte la multiplication, ou soit comme

$$(\epsilon_B \otimes \epsilon_B) = \epsilon_B \circ \mu_B$$

ce qui indique que μ_B est counitaire.

Ce dernier diagramme montre que l'unité préserve la counité et inversement.

$$\begin{tikzcd}
I \arrow[rr, "Id_I"] \arrow[dr, "\eta_B"'] & & I \\
& B \arrow[ur, "\epsilon_B"'] &
\end{tikzcd}$$

□

Définition 2.15. Dans une catégorie monoïdale tressée, une **bigèbre** $(B, \mu_B, \eta_B, \Delta_B, \epsilon_B)$ est un objet B qui est à la fois une algèbre et une cogèbre, et de telle manière à ce que ces deux structures duales soient compatibles entre elles : la comultiplication Δ_B et la counité ϵ_B sont des morphismes d'algèbres (ou de manière équivalente, la multiplication μ_B et l'unité η_B sont des morphismes de cogèbres), c'est-à-dire de telle manière à ce que les morphismes Δ_B et ϵ_B font commuter les diagrammes suivants

$$\begin{tikzcd}
B \otimes B \arrow[r, "\mu_B"] \arrow[d, "\Delta_B \otimes \Delta_B"'] & B \arrow[r, "\Delta_B"] & B \otimes B \\
B \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[rr, "Id_B \otimes \gamma_{B,B} \otimes Id_B"'] & & B \otimes B \otimes B \otimes B \arrow[u, "\mu_B \otimes \mu_B"']
\end{tikzcd} \tag{2.4}$$

$$
\begin{tikzcd}
B \otimes B \arrow[r, "\epsilon_B \otimes \epsilon_B"] \arrow[d, "\mu_B"'] & I \otimes I \arrow[r, "\eta_B \otimes \eta_B"] \arrow[d, "\approx"] & B \otimes B \\
B \arrow[r, "\epsilon_B"'] & I \arrow[r, "\eta_B"'] & B \arrow[u, "\Delta_B"']
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
I \arrow[rr, "Id_I"] \arrow[dr, "\eta_B"'] & & I \\
& B \arrow[ur, "\epsilon_B"'] &
\end{tikzcd}
\tag{2.5}
$$

Définition 2.16. Un **morphisme de bigèbres** entre deux bigèbres A et B dans une catégorie monoïdale tressée $\mathcal{C}$ est un morphisme $f \in \mathcal{C}(A, B)$ qui est à la fois un morphisme d'algèbres et un morphisme de cogèbres.

Exemple 2.17. Dans la catégorie des ensembles $(Set, \times, \{*\})$, tout objet $X \in Set$ est une cogèbre définie de manière unique comme dans l'Exemple 1.26 avec comme comultiplication $\Delta_X : X \to X \times X$ définie par $\Delta_X(x) = (x, x)$ et la counité ϵ_X envoie tout élément sur le singleton. De plus, comme vu précédemment, les algèbres dans Set sont les monoïdes. Par conséquent, tout monoïde est une bigèbre dans la catégorie Set.

Pour confirmer cette affirmation, il suffit de vérifier que tout monoïde satisfait bien les quatre propriétés qui définissent une bigèbre : pour tout $b, c \in Set$, on observe

1.
$$
\begin{aligned}
(\mu_B \times \mu_B)(Id_B \times \gamma_{B,B} \times Id_B)(\Delta_B \times \Delta_B)(b, c) \\
&= (\mu_B \times \mu_B)(Id_B \times \gamma_{B,B} \times Id_B)(b, b, c, c) \\
&= (\mu_B \times \mu_B)(b, c, b, c) \\
&= (bc, bc) \\
&= \Delta_B(bc) \\
&= \Delta_B \circ \mu_B(b, c).
\end{aligned}
$$

2.
$$
\begin{aligned}
(\epsilon_B \times \epsilon_B)(b, c) &= (\epsilon_B(b), \epsilon_B(c)) \\
&= (*, *) \\
&\approx \ * \\
&= \epsilon_B(bc) \\
&= \epsilon_B \circ \mu_B(b, c).
\end{aligned}
$$

À la troisième ligne, le résultat est dû à l'isomorphisme qui existe entre les objets $I \otimes I$ et I, que l'on peut retrouver dans le diagramme (2.5).

3.

$$\begin{aligned}(\eta_B \times \eta_B)(*,*) &= (\eta_B(*), \eta_B(*)) \\ &= (1_B, 1_B) \\ &= \Delta_B(1_B) \\ &= \Delta_B \circ \eta_B(*).\end{aligned}$$

4.

$$\epsilon_B \circ \eta_B(*) = \epsilon_B(1_B) = *.$$

Exemple 2.18. Dans la catégorie des espaces vectoriels $(Vect_K, \otimes_K, K)$ sur un corps K, il existe plusieurs exemples bien connus de bigèbres. Nous allons en citer quelques uns :

1. Le premier exemple est l'algèbre du groupe G, $K[G]$. Comme mentionné dans l'Exemple 1.30 pour le cas $K = \mathbb{C}$, la multiplication est la multiplication induite par le groupe avec l'élément neutre du groupe comme unité. La structure de cogèbre est donnée par la comultiplication $\Delta_{K[G]}(g) = g \otimes_K g$ et la counité $\epsilon_{K[G]}(g) = 1$ pour tout $g \in G$.

   Cet espace est à la fois une algèbre et une cogèbre. De plus, $K[G]$ constitue une bigèbre si les structures d'algèbre et de cogèbre sont compatibles. Cela est bien le cas puisque $\Delta_{K[G]}$ et $\epsilon_{K[G]}$ sont des morphismes d'algèbres, c'est-à-dire qu'ils vérifient les égalités suivantes, pour tout $g, h \in G$,

$$\begin{aligned}\mu_{K[G]\otimes K[G]} \circ (\Delta_{K[G]} \otimes_K \Delta_{K[G]})(g \otimes_K h) &= \mu_{K[G]\otimes K[G]} \circ (\Delta_{K[G]}(g) \otimes_K \Delta_{K[G]}(h)) \\ &= \Delta_{K[G]}(g)\Delta_{K[G]}(h) \\ &= (g \otimes_K g)(h \otimes_K h) \\ &= gh \otimes_K gh \\ &= \Delta_{K[G]}(gh) \\ &= \Delta_{K[G]} \circ \mu_{K[G]}(g \otimes_K h),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mu_I \circ (\epsilon_{K[G]} \otimes_K \epsilon_{K[G]})(g \otimes_K h) &= \mu_I \circ (\epsilon_{K[G]}(g) \otimes_K \epsilon_{K[G]}(h)) \\ &= \mu_I \circ (1 \otimes_K 1) \\ &= 1 \\ &= \epsilon_{K[G]}(gh) \\ &= \epsilon_{K[G]} \circ \mu_{K[G]}(g \otimes_K h)\end{aligned}$$

ainsi que la condition concernant l'unité, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}\Delta_{K[G]} \circ \eta_{K[G]}(1) &= \Delta_{K[G]}(e)\\ &= e \otimes_K e\\ &= \eta_{K[G]\otimes K[G]}(1)\end{aligned}$$

et

$$\epsilon_{K[G]} \circ \eta_{K[G]}(1) = \epsilon_{K[G]}(e) = 1.$$

Par ailleurs, l'algèbre du groupe G est cocommutative. Elle est également commutative si et seulement si le groupe G est abélien.

2. Tout d'abord, notons le produit tensoriel de n copies d'un espace vectoriel V comme $V^{\otimes 0} = K$, $V^{\otimes 1} = V$, et pour $n \geq 2$ par $V^{\otimes n} = \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{n}$.

   L'**algèbre tensorielle** sur un K-espace vectoriel V est définie comme

   $$T(V) := \bigoplus_{n\geq 0} V^{\otimes n}.$$

   La multiplication sur $T(V)$ est donnée par la concaténation. Pour $x = u_1 \otimes \cdots \otimes u_m \in V^{\otimes m}$ et $y = v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes n}$, on définit

   $$\mu_{T(V)}(x \boxtimes y) := u_1 \otimes \cdots \otimes u_m \otimes v_1 \otimes \cdots \otimes v_n \in V^{\otimes(m+n)}.$$

   Nous désignerons le produit tensoriel externe de $T(V)$ par le symbole $\boxtimes$ pour le distinguer du produit tensoriel interne noté $\otimes$. De plus, l'unité n'est rien d'autre que le mot vide $1_K \in K = V^{\otimes 0}$. Cela signifie que l'algèbre tensorielle est une algèbre unitaire et associative.

   D'autre part, $T(V)$ possède également une structure de cogèbre définie par la comultiplication $\Delta_{T(V)}$, qui est définie comme l'unique morphisme d'algèbres de $T(V)$ dans $T(V) \boxtimes T(V)$ tel que

   $$\Delta_{T(V)}(1) = 1 \boxtimes 1, \qquad \Delta_{T(V)}(x) = x \boxtimes 1 + 1 \boxtimes x, x \in V.$$

   Nous définissons la counité comme un morphisme d'algèbres tel que $\epsilon_{T(V)}(1) = 1_K$ et $\epsilon_{|V} = 0$. Cela dote l'algèbre tensorielle $T(V)$ d'une structure de bigèbre cocommutative. L'algèbre tensorielle va permettre de définir l'algèbre symétrique et également l'algèbre enveloppante d'une algèbre de Lie.

3. Étant donnée une bigèbre B sur un corps K de comultiplication Δ_B, un sous-espace vectoriel I est un **biidéal** s'il est, à la fois, un idéal bilatère (c'est-à-dire pour tout $b \in B, bI \subseteq I$ et $Ib \subseteq I$) et un coidéal bilatère, (c'est-à-dire $\Delta(I) \subseteq I \otimes B + B \otimes I$ et $\epsilon(I) = 0$). Un résultat bien connu concernant les biidéaux est le suivant : les quotients de B par des biidéaux de B sont exactement les quotients de bigèbres B

(pour en savoir plus sur les notions de coidéal, quotient de cogèbre, biidéal ainsi que le quotient de bigèbre, voir les notes d'Alessandro [2] ou encore le livre [4] de Dascalescu, Nastasescu et Raianu).
Soit un K-espace vectoriel V et l'idéal bilatère I de l'algèbre tensoriel $T(V)$ généré par l'ensemble

$$\{x \otimes y - y \otimes x \mid x, y \in V\}.$$

De même, I est un coidéal bilatère de $T(V)$ puisque $\Delta_{T(V)}(x \otimes y - y \otimes x) = (x \otimes y - y \otimes x) \otimes 1_{S(V)} + 1_{S(V)} \otimes (x \otimes y - y \otimes x) \in T(V) \otimes I + I \otimes T(V)$ et $\epsilon_{T(V)}(x \otimes y - y \otimes x) = 0$. Donc, I est un biidéal.
L'**algèbre symétrique** de V est définie comme le quotient de bigèbre $S(V) = T(V)/I$. Par construction, $S(V)$ forme une algèbre commutative. De plus, on rappelle que la comultiplication $\Delta_{S(V)} : S(V) \to S(V) \otimes S(V)$ ainsi que la counité $\epsilon_{S(V)} : S(V) \to K$ sont données par

$$\Delta_{S(V)}(x) = x \otimes 1_{S(V)} + 1_{S(V)} \otimes x \text{ et } \epsilon_{S(V)}(x) = 0,$$

pour tout $x \in V$.

4. Une **algèbre de Lie** sur corps K est un K-espace vectoriel $\mathfrak{g}$ muni d'une application bilinéaire $(X, Y) \mapsto [X, Y]$ telle que
   a) Pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$, $[Y, X] = -[X, Y]$ (*Antisymétrie*).
   b) Pour tout $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$, [[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0 (*Identité de Jacobi*).

   L'axiome (a) est équivalent à $[X, X] = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{g}$, lorsque la caractéristique de $K \neq 2$.
   L'**algèbre enveloppante** d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, notée $U(\mathfrak{g})$, est le quotient de l'algèbre tensorielle $T(\mathfrak{g})$ par l'idéal bilatère I engendré par

$$\{x \otimes y - y \otimes x - [x, y] \mid x, y \in \mathfrak{g}\}.$$

   Cette algèbre enveloppante peut être munie d'une structure de bigèbre cocommutative, en choisissant la concaténation comme multiplication et la comultiplication $\Delta_{U(\mathfrak{g})} : U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g}) \otimes U(\mathfrak{g})$ ainsi que la counité $\epsilon_{U(\mathfrak{g})} : U(\mathfrak{g}) \to K$ définies sur les générateurs par

$$\Delta_{U(\mathfrak{g})}(1_{U(\mathfrak{g})}) = 1_{U(\mathfrak{g})} \otimes 1_{U(\mathfrak{g})} \text{ et } \epsilon_{U(\mathfrak{g})}(1_{U(\mathfrak{g})}) = 1_K$$

   et par

$$\Delta_{U(\mathfrak{g})}(x) = x \otimes 1_{U(\mathfrak{g})} + 1_{U(\mathfrak{g})} \otimes x \text{ et } \epsilon_{U(\mathfrak{g})}(x) = 0,$$

   pour tout $x \in \mathfrak{g}$. Il est simple de montrer que la comultiplication et la counité sont des morphismes d'algèbres.

Puisque l'identité ainsi que la composition de deux morphismes de bigèbres restent des morphismes de bigèbres, la catégorie des bigèbres dans la catégorie monoïdale tressée $\mathcal{C}$ sera notée par $BiAlg_{\mathcal{C}}$.

2.3 Bigèbres et catégorie des modules

Le concept de catégorie des modules dans une catégorie monoïdale englobe la notion familière des modules sur un anneau d'un point de vue catégorique. Il existe une notion de catégorie de modules dans une catégorie monoïdale $\mathcal{C}$. Étant donnée une algèbre A dans $\mathcal{C}$, on peut définir des modules sur A au sein de la catégorie $\mathcal{C}$.

Définition 2.19. Soit une catégorie monoïdale $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, a, I)$ et une algèbre $A = (A, \mu_A, \eta_A)$ dans $\mathcal{C}$. Un **module à gauche** sur A est une paire (M, α_M), où M est un objet de $\mathcal{C}$ et $\alpha_M : A \otimes M \to M$ est un morphisme de $\mathcal{C}$ (appelé l'action) tels que les diagrammes suivants commutent

$$\begin{tikzcd}
A \otimes A \otimes M \arrow[r, "Id_A \otimes \alpha_M"] \arrow[d, "\mu_A \otimes Id_M"'] & A \otimes M \arrow[d, "\alpha_M"] \\
A \otimes M \arrow[r, "\alpha_M"'] & M
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
A \otimes M \arrow[r, "\alpha_M"] & M \\
I \otimes M \arrow[u, "\eta_A \otimes Id_M"] \arrow[ur, "l_M"'] &
\end{tikzcd}$$

Ces diagrammes expriment l'associativité de l'action et l'existence de l'unité.

Notons que les A-modules à droite sont définis de manière similaire, en remplaçant $A \otimes M$ par $M \otimes A$.

Définition 2.20. Soit une algèbre A dans la catégorie $\mathcal{C}$ et deux A-modules à gauche (M, α_M), (N, α_N). Un **morphisme de A-modules** est un morphisme $f : M \to N$ dans $\mathcal{C}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd}
A \otimes M \arrow[r, "Id_A \otimes f"] \arrow[d, "\alpha_M"'] & A \otimes N \arrow[d, "\alpha_N"] \\
M \arrow[r, "f"'] & N
\end{tikzcd}$$

commute.

Si A est une K-algèbre, alors un A-module à gauche dans $Vect_K$ est identique au A-module à gauche habituel. L'exemple suivant est également simple, mais moins évident.

Exemple 2.21. Soit $S = (S, \mu_S, \eta_S)$ une algèbre dans la catégorie Set, c'est-à-dire un monoïde. Alors une structure de S-module à gauche sur un ensemble X est identique à une action à gauche de S sur X.

Si $X = (X, \alpha_X)$ est un S-module à gauche, alors le morphisme $\Phi : S \to End(X)$ définie par $\Phi(s)(x) = \alpha(s, x)$ est une action à gauche car

$$\begin{aligned}
\Phi(st)(x) &= \alpha_X(\mu_S(s,t), x) \\
&= \alpha_X(\mu_S, Id_X)(s,t,x) \\
&= \alpha_X(Id_S, \alpha_X)(s,t,x) \\
&= \alpha_X(s, \alpha_X(t,x)) \\
&= \Phi(s)(\Phi(t)(x)).
\end{aligned}$$

Inversement, si X est un ensemble, alors le morphisme de Set est donné par $\alpha_X(s,x) = \Phi(s)(x)$ où $\Phi : S \to End(X)$ est un morphisme de monoïdes.

Exemple 2.22. En considérant à nouveau l'Exemple 1.5, on remarque que la représentation K-linéaire de G coïncide avec les modules à gauche sur une K-algèbre de G, notée $K[G]$. Cette algèbre est constituée de combinaisons linéaires finies d'éléments de G à coefficients dans K et forme une K-algèbre associative dont la multiplication étend naturellement la loi du groupe G, c'est-à-dire

$$\left(\sum_g a_g g\right)\left(\sum_h b_h h\right) = \sum_{g,h} a_g b_h gh.$$

Ceci est une K-algèbre avec une unité, qui est l'élément neutre de G.

Si $\rho : G \to GL(V)$ est une représentation, alors le $K[G]$-module à gauche avec $K[G] \otimes V \to V$ est construit grâce à la formule $\left(\sum_g a_g g\right).v = \sum_g a_g \rho(g)(v)$. Inversement, si V est un $K[G]$-module à gauche avec $\alpha_V : K[G] \otimes V \to V$, alors on utilise la structure de $K[G]$-module pour construire une représentation K-linéaire de G, $G \to GL(V)$, $g \mapsto \alpha_V(g \otimes -)$. De plus, les morphismes de représentations correspondent aux morphismes de $K[G]$-modules et inversement.

Par conséquent, la catégorie des représentations K-linéaires de G, $Rep_{G,K}$, et la catégorie des $K[G]$-modules à gauche, ${}_{K[G]}Mod$, sont isomorphes.

La définition duale d'un module à gauche est donnée de manière équivalente par

Définition 2.23. Soit une catégorie monoïdale $\mathcal{C} = (\mathcal{C}, \otimes, a, I)$ et une cogèbre $C = (C, \Delta_C, \epsilon_C)$ dans $\mathcal{C}$. Un **comodule à droite sur** C est une paire (M, β_M), où M est un objet de $\mathcal{C}$ et $\beta_M : M \to M \otimes C$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$ (appelé la coaction) tels que les diagrammes suivants sont commutatifs

$$\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "\beta_M"] \arrow[d, "\beta_M"'] & M \otimes C \arrow[d, "Id_M \otimes \Delta_C"] \\
M \otimes C \arrow[r, "\beta_M \otimes Id_C"'] & M \otimes C \otimes C
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
M \arrow[r, "l_M^{-1}"] \arrow[d, "\beta_M"'] & M \otimes I \\
M \otimes C \arrow[ur, "Id_M \otimes \epsilon_C"'] &
\end{tikzcd}$$

Ces digrammes expriment la coassociativité de la coaction ainsi que l'existence de la counité.

La notion de C-comodule à gauche est définie de manière analogue avec $C \otimes M$ au lieu de $M \otimes C$.

Exemple 2.24. Une cogèbre $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ est un C-comodule à gauche (à droite) grâce à $\beta_M := \Delta_C$.

Définition 2.25. Soit une cogèbre C dans la catégorie $\mathcal{C}$ et deux C-comodules à droite (M, β_M), (N, β_N). Un **morphisme de C-comodules** est un morphisme $f : M \to N$ dans $\mathcal{C}$ tel que le diagramme est commutatif

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\beta_M"'] & N \arrow[d, "\beta_N"] \\ M \otimes C \arrow[r, "f \otimes Id_C"'] & N \otimes C \end{tikzcd}$$

Il est important de noter qu'il existe une autre manière utile de caractériser des bigèbres : cela se fait via leurs catégories de modules. Étudions le cas des bigèbres dans $Vect_K$. Soit B une K-algèbre, la catégorie des modules associée Mod_B est une sous-catégorie de $Vect_K$. On définit le foncteur d'oubli $U : Mod_B \to Vect_K$ comme le foncteur identité sur les objets et les morphismes, mais en ne gardant que leur structure sous-jacente, c'est-à-dire que chaque module B est un espace vectoriel et chaque morphisme de modules B est une application K-linéaire. On a alors le résultat suivant, tiré des notes de cours de S.Caenepeel et J.Vercruysse [3] :

Théorème 2.26. *Soit B une K-algèbre, alors B est une bigèbre sur K si et seulement si la catégorie des modules associée, Mod_B, est une catégorie monoïdale et le foncteur d'oubli $U : Mod_B \to Vect_K$ est un foncteur monoïdal strict.*

Démonstration. En disant que le foncteur d'oubli est un foncteur monoïdal strict, on sous-entend que le produit tensoriel de B-modules est donné par le produit tensoriel ordinaire sur K de leurs espaces vectoriels sous-jacents et que l'objet unitaire dans la catégorie Mod_B n'est rien de plus que le corps K, qui est l'objet unitaire de $Vect_K$.

Tout d'abord, supposons que B est une bigèbre. Alors, il existe deux morphismes d'algèbres $\Delta_B : B \to B \otimes B$ et $\epsilon_B : B \to K$ satisfaisant les axiomes de coassociativité et de counité. Soit deux B-modules à gauche M et N, définissons sur le produit tensoriel $M \otimes N$, la structure de B-module suivante :

$$\begin{array}{cccc} \cdot & : & B \otimes M \otimes N & \to & M \otimes N \\ & & a \otimes m \otimes n & \mapsto & a \cdot (m \otimes n) \end{array}$$

et est donnée par $a\cdot(m\otimes n) = (a_{(1)}\cdot m)\otimes(a_{(2)}\cdot n)$. On peut montrer que c'est bien une structure de B-module sur $M\otimes N$: en effet, on observe que

$$1_B\cdot(m\otimes n) = (1_B\cdot m)\otimes(1_B\cdot n) = m\otimes n,$$

et

$$\begin{aligned} a\cdot(b\cdot(m\otimes n)) &= a\cdot((b_{(1)}\cdot m)\otimes(b_{(2)}\cdot n)) \\ &= (a_{(1)}\cdot(b_{(1)}\cdot m))\otimes(a_{(2)}(b_{(2)}\cdot n)) \\ &= ((a_{(1)}b_{(1)})\cdot m)\otimes((a_{(2)}b_{(2)})\cdot n) \\ &= ((ab)_{(1)}\cdot m)\otimes((ab)_{(2)}\cdot n) \\ &= ab\cdot(m\otimes n). \end{aligned}$$

Sur le corps K, nous avons la structure de B-module suivante :

$$\begin{array}{cccc} \cdot & : & B\otimes K & \to & K \\ & & a\otimes\lambda & \mapsto & a\cdot\lambda = \epsilon_B(a)\lambda. \end{array}$$

De nouveau, il s'agit bien d'une structure de B-module puisque

$$1_B\cdot\lambda = \epsilon_B(1_B)\lambda = 1_K\cdot\lambda = \lambda,$$

et

$$a\cdot(b\cdot\lambda) = a\cdot(\epsilon_B(b)\lambda) = \epsilon_B(a)\epsilon_B(b)\lambda = \epsilon_B(ab)\lambda = ab\cdot\lambda.$$

L'associateur et les unités à gauche et à droite sont des morphismes de B-modules.

En effet, on observe grâce à la coassociativité que

$$\begin{aligned} a\cdot((m\otimes n)\otimes p) &= (a_{(1)}\cdot(m\otimes n))\otimes(a_{(2)}\cdot p) \\ &= (a_{(1)(1)}\cdot m)\otimes(a_{(1)(2)}\cdot n)\otimes(a_{(2)}\cdot p) \\ &= (a_{(1)}\cdot m)\otimes(a_{(2)(1)}\cdot n)\otimes(a_{(2)(2)}\cdot p) \\ &= (a_{(1)}\cdot m)\otimes(a_{(2)}(n\otimes p)) \\ &= a\cdot(m\otimes(n\otimes p)) \end{aligned}$$

et grâce à la counité, on constate que

$$\begin{aligned} a\cdot l_B(\lambda\otimes m) &= a\cdot(\lambda m) = \lambda(a\cdot m) \\ &= \lambda(\epsilon_B(a_{(1)})a_{(2)}\cdot m) \\ &= \epsilon_B(a_{(1)})\lambda(a_{(2)}\cdot m) \\ &= l_B((a_{(1)}\cdot\lambda)\otimes(a_{(2)}\cdot m)) \\ &= l_B(a\cdot(\lambda\otimes m)). \end{aligned}$$

Pour l'unité à droite r_B, on procède de manière analogue que l_B et on obtient

$$a \cdot r_B(m \otimes \lambda) = r_B(a \cdot (m \otimes \lambda)).$$

Par conséquent, Mod_B est une catégorie monoïdale et le foncteur d'oubli est un foncteur monoïdal strict.

D'autre part, considérons une algèbre B telle que la catégorie des modules associée Mod_B soit monoïdale et que le foncteur d'oubli soit monoïdal et strict. Comme B est un B-module à gauche par la multiplication à gauche, alors $B \otimes B \in Mod_B$. Définissons l'application linéaire

$$\begin{array}{cccc} \Delta_B & : & B & \to & B \otimes B \\ & & a & \mapsto & a \cdot (1_B \otimes 1_B). \end{array}$$

Il est facilement démontrable que ce morphisme est coassociatif. En effet, en notant $a \cdot (1_B \otimes 1_B) = a_{(1)} \otimes a_{(2)}$, on observe

$$\begin{aligned} a_{(1)} \otimes a_{(2)(1)} \otimes a_{(2)(2)} &= a_{(1)} \otimes (a_{(2)} \cdot (1_B \otimes 1_B)) \\ &= a \cdot (1_B \otimes (1_B \otimes 1_B)) \\ &= a \cdot ((1_B \otimes 1_B) \otimes 1_B) \\ &= (a_{(1)} \cdot (1_B \otimes 1_B)) \otimes a_{(2)} \\ &= a_{(1)(1)} \otimes a_{(1)(2)} \otimes a_{(2)}. \end{aligned}$$

Soit M et N des B-modules. Pour tout $m \in M$ et $n \in N$, nous pouvons définir les morphismes

$$\begin{array}{ccccc} f_m & : & B & \to & M \\ & & a & \mapsto & a \cdot m \end{array} \quad \text{et} \quad \begin{array}{ccccc} f_n & : & B & \to & N \\ & & a & \mapsto & a \cdot n. \end{array}$$

Ces morphismes sont clairement des morphismes de B-modules à gauche.

Comme le produit tensoriel est un foncteur, nous pouvons observer que pour tout $m \in M$ et $n \in N$, le morphisme

$$\begin{array}{ccccc} (f_m \otimes f_n) & : & B \otimes B & \to & M \otimes N \\ & & a \otimes b & \mapsto & a \cdot m \otimes b \cdot n \end{array}$$

est également un morphisme de B-modules. En particulier,

$$\begin{aligned} a \cdot (m \otimes n) &= a \cdot ((f_m \otimes f_n)(1_B \otimes 1_B)) \\ &= (f_m \otimes f_n)(a \cdot (1_B \otimes 1_B)) \\ &= (f_m \otimes f_n)(a_{(1)} \otimes a_{(2)}) \\ &= (a_{(1)} \cdot m) \otimes (a_{(2)} \cdot n). \end{aligned}$$

Grâce à la définition des morphismes f_m, f_n et $f_m \otimes f_n$, nous pouvons montrer que Δ_B est un morphisme d'algèbres

$$\begin{aligned}
\Delta_B(a)\Delta_B(b) &= (a_{(1)} \otimes a_{(2)})(b_{(1)} \otimes b_{(2)}) \\
&= a_{(1)}b_{(1)} \otimes a_{(2)}b_{(2)} \\
&= f_{b_{(1)}}(a_{(1)}) \otimes f_{b_{(2)}}(a_{(2)}) \\
&= (f_{b(1)} \otimes f_{b(2)})(a_{(1)} \otimes a_{(2)}) \\
&= (f_{b(1)} \otimes f_{b(2)})(a \cdot (1_B \otimes 1_B)) \\
&= a \cdot ((f_{b(1)} \otimes f_{b(2)})(1_B \otimes 1_B)) \\
&= a \cdot (b_{(1)} \otimes b_{(2)}) \\
&= a \cdot (b \cdot (1_B \otimes 1_B)) \\
&= ab \cdot (1_B \otimes 1_B) \\
&= \Delta_B(ab).
\end{aligned}$$

Puisque K possède une structure de B-module, on considère le morphisme

$$\begin{array}{cccc}
\epsilon_B & : & B & \to & K \\
& & a & \mapsto & a \cdot 1_K,
\end{array}$$

qui définit la counité dans B.

En effet,

$$\begin{aligned}
(Id_B \otimes \epsilon_B) \circ \Delta_B(a) &= a_{(1)}\epsilon_B(a_{(2)}) \\
&= r_B(a_{(1)} \otimes \epsilon_B(a_{(2)})) \\
&= r_B(a_{(1)} \otimes (a_{(2)} \cdot 1_K)) \\
&= r_B((f_{1_B} \otimes f_{1_K})(a_{(1)} \otimes a_{(2)})) \\
&= r_B((f_{1_B} \otimes f_{1_K})(a \cdot (1_B \otimes 1_B))) \\
&= r_B(a \cdot (1_B \otimes 1_K)) \\
&= a \cdot (r_B(1_B \otimes 1_K)) \\
&= a \cdot 1_B \\
&= a,
\end{aligned}$$

et de manière similaire, on obtient $(\epsilon_B \otimes Id_B) \circ \Delta_B(a) = a$.

Enfin, la counité est également multiplicative,

$$\epsilon_B(ab) = ab \cdot 1_K = a \cdot (b \cdot 1_K) = a \cdot (\epsilon_B(b)) = \epsilon_B(a)\epsilon_B(b).$$

Par conséquent, B possède une structure de bigèbre sur K. $\square$

Corollaire 2.27. *Si B est une bigèbre cocommutative sur K, alors Mod_B est une catégorie monoïdale tressée symétrique.*

Le Théorème 2.26 se généralise à toute catégorie monoïdale tressée. Dans ce cas, nous avons un résultat similaire que nous énoncerons sans démonstration :

Théorème 2.28. *Soit une catégorie monoïdale tressée $(\mathcal{C}, \otimes, a, I, \gamma)$ et une algèbre (B, μ_B, η_B) dans la catégorie $\mathcal{C}$. Il existe alors une bijection entre :*

- *les structures monoïdales sur la catégorie des modules Mod_B tel que le foncteur d'oubli $U : Mod_B \to \mathcal{C}$ est un foncteur monoïdal strict.*
- *les structures de bigèbres $(B, \mu_B, \eta_B, \Delta_B, \epsilon_B)$ sur l'objet B.*

Remarque 2.29. Tout ce qui a été énoncé jusqu'à présent peut être appliqué si l'on considère la catégorie des B-modules à droite au lieu de la catégorie des B-modules à gauche.

De plus, il existe encore une autre variante du même résultat : à partir d'une cogèbre B sur une catégorie monoïdale tressée, si nous demandons que sa catégorie des comodules à gauche ou à droite soit une catégorie monoïdale et que le foncteur d'oubli soit un foncteur monoïdal strict, alors B est également une bigèbre.

2.4 Algèbres de Hopf dans les catégories monoïdales tressées

Dans cette section, nous allons présenter toutes les constructions dans la catégorie $Vect_K$ des espaces vectoriels sur un corps K. Soit une algèbre (A, μ_A, η_A) et une cogèbre $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$. Alors, l'espace vectoriel $Hom_K(C, A)$ des transformations K-linéaires allant de C vers A possède une structure d'algèbre associative munie du produit défini par

$$f \star h = \mu_A \circ (f \otimes h) \circ \Delta_C,$$

pour tout $f, h : C \to A$ et d'une unité donnée par

$$\eta_A \circ \epsilon_C = 1_{End_K(H)},$$

pour toute algèbre (A, μ_A, η_A) et cogèbre $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$. Cette algèbre est appelée l'**algèbre de convolution** et le morphisme linéaire $f \star h$ est appelé la **convolution** de f et h.

Si H est une bigèbre, alors l'espace vectoriel $End_K(H) = Hom_K(H, H)$ est une algèbre de convolution puisque H est à la fois une algèbre et une cogèbre.

L'algèbre de Hopf se différencie d'une bigèbre puisqu'elle est dotée d'une structure supplémentaire, à savoir l'antipode.

Définition 2.30. Dans $End_K(H)$, l'**antipode** d'une bigèbre $(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \epsilon_H)$ sur un corps K est l'inverse de l'identité pour la convolution, c'est-à-dire une application K-linéaire $S_H : H \to H$ tel que le diagramme suivant soit commutatif :

$$
\begin{tikzcd}
H \arrow[r, "\Delta_H"] \arrow[drr, "\epsilon_H"'] & H \otimes H \arrow[rr, shift left, "Id_H \otimes S_H"] \arrow[rr, shift right, "S_H \otimes Id_H"'] & & H \otimes H \arrow[r, "\mu_H"] & H \\
& & I \arrow[urr, "\eta_H"'] & &
\end{tikzcd}
$$

De manière équivalente,

$$
\begin{aligned}
S_H \star Id_H = \mu_H \circ (S_H \otimes Id_H) \circ \Delta_H &= \eta_H \circ \epsilon_H \\
&= \mu_H \circ (Id_H \otimes S_H) \circ \Delta_H = Id_H \star S_H.
\end{aligned}
$$

En utilisant la notation de Sweedler, on peut écrire le produit de convolution explicitement comme

$$
S_H(h_{(1)})h_{(2)} = \epsilon_H(h)1_H = h_{(1)}S_H(h_{(2)})
$$

pour tout $h \in H$.

Remarque 2.31. Si une bigèbre $(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \epsilon_H)$ possède un antipode, alors celui-ci est unique.

Supposons que S_H et T_H soient deux antipodes pour la bigèbre H. Par l'associativité et l'unité du produit de convolution (pour plus de précision, voir Annexe 2.0.3), on obtient

$$
\begin{aligned}
S_H = S_H \star (\eta_H \circ \epsilon_H) &= S_H \star (Id_H \star T_H) \\
&= (S_H \star Id_H) \star T_H \\
&= (\eta_H \circ \epsilon_H) \star T_H \\
&= T_H.
\end{aligned}
$$

Après avoir compris les différents ingrédients qui constituent une algèbre de Hopf et ce qui la distingue d'une bigèbre, nous sommes en mesure de donner la définition d'une algèbre de Hopf.

Définition 2.32. Dans une catégorie monoïdale tressée $\mathcal{C}$, une **algèbre de Hopf** $(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \epsilon_H, S_H)$ sur un corps K est une bigèbre $(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \epsilon_H)$ munie d'un antipode $S_H : H \to H$.

Exemple 2.33. Dans l'Exemple 2.18(1), nous avions déterminé qu'une algèbre de groupe G est une bigèbre. L'antipode de cette bigèbre $S : K[G] \to K[G]$ est donné par $S_{K[G]}(g) = g^{-1}$ car pour $g \in K[G]$, on observe que

$$\begin{aligned}(Id_{K[G]} \star S_{K[G]})(g) = \mu_{K[G]} \circ (Id_{K[G]} \otimes S_{K[G]}) \circ \Delta_{K[G]}(g) &= \eta_{K[G]} \circ \epsilon_{K[G]}(g) \\ \mu_{K[G]} \circ (Id_{K[G]} \otimes S_{K[G]})(g \otimes g) &= \eta_{K[G]}(1) \\ \mu_{K[G]}(g \otimes S_{K[G]}(g)) &= 1_{K[G]}.\end{aligned}$$

On peut donc conclure qu'une algèbre de groupes $K[G]$ est également une algèbre de Hopf d'antipode $S_{K[G]}(g) = g^{-1}$.

Exemple 2.34. Considérons de nouveau l'Exemple 2.17. Dans la catégorie *Set*, les objets de l'algèbre de Hopf ne sont rien d'autre que des groupes.

Exemple 2.35. Les exemples de bigèbres, présentés dans l'Exemple 2.18, sont également des exemples d'algèbres de Hopf :

1. L'algèbre tensoriel $T(V)$ munie de l'antipode $S_{T(V)} : T(V) \to T(V)$, défini par $S(v) = -v$, $\forall v \in V$ et qui peut être étendu à tout $T(V)$, forme une algèbre de Hopf.
2. Pour une algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ d'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$, l'antipode $S_{U(\mathfrak{g})}$: $U(\mathfrak{g}) \to U(\mathfrak{g})$ est défini pour tout $x \in \mathfrak{g}$ par $S_{U(\mathfrak{g})}(x) = -x$ et peut être également étendu à l'ensemble $U(\mathfrak{g})$. Par conséquent, l'algèbre enveloppante $U(\mathfrak{g})$ est une algèbre de Hopf.
3. L'algèbre symétrique $S(V)$ d'un K-espace vectoriel V est une algèbre de Hopf ayant comme antipode $S_{S(V)} : S(V) \to S(V)$ donné par $S_{S(V)}(v) = -v$ pour tout $v \in V$ et peut être étendu à $S(V)$.

Exemple 2.36. (Algèbre de Hopf non commutative et non cocommutative) Un exemple d'algèbre de Hopf non commutative et non cocommutative est l'**algèbre de Hopf de Sweedler**, H. C'est une bigèbre de dimension 4 (une base de H, comme K-espace vectoriel, est donnée par $\{1_H, x, g, xg\}$) constituée à l'aide de trois générateurs 1_H, x et g qui satisfont les relations $g^2 = 1_H$, $x^2 = 0$ et $xg = -gx$. Plus précisément, la structure de cogèbre est caractérisée par la comultiplication donnée par

$$\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H,\ \Delta(x) = g \otimes x + x \otimes 1_H,\ \Delta(g) = g \otimes g$$

et la counité

$$\epsilon(x) = 0,\ \epsilon(g) = 1_H.$$

De plus, afin de former l'algèbre de Hopf, l'antipode associé à cette bigèbre est défini par $S(g) = g^{-1}$, $S(x) = -gx$.

Afin de définir la catégorie des algèbres de Hopf sur le corps K, nous avons besoin du concept de morphisme d'algèbres de Hopf.

Définition 2.37. Soit H et G deux algèbres de Hopf dans une catégorie monoïdale tressée $\mathcal{C}$. Un morphisme $f : H \to G$ est appelé un **morphisme d'algèbres de Hopf** si c'est un morphisme de bigèbres.

Il est naturel de se demander si un morphisme des algèbres de Hopf doit préserver les antipodes. Le résultat suivant montre que c'est effectivement le cas.

Proposition 2.38. *Soit H et G deux algèbres de Hopf munies des antipodes S_H et S_G dans une catégorie monoïdale tressée $\mathcal{C}$. Si $f : H \to G$ est un morphisme de bigèbres, alors $S_G \circ f = f \circ S_H$.*

Démonstration. Considérons l'algèbre $Hom_K(H, G)$ avec le produit de convolution et les éléments $S_G \circ f$ et $f \circ S_H$ de cette algèbre. Nous allons montrer qu'ils sont tous deux inversibles et qu'ils ont le même inverse f. Il s'ensuit qu'ils sont égaux. En effet, pour tout $h \in H$, on a

$$\begin{aligned}[(S_G \circ f) \star f](h) &= (S_G \circ f)(h_{(1)})f(h_{(2)}) = S_G(f(h)_{(1)})f(h)_{(2)} \\ &= \epsilon_G(f(h))1_K = \epsilon_H(h)1_K\end{aligned}$$

donc, $S_G \circ f$ est un inverse à gauche pour f. De même, pour tout $h \in H$, on observe

$$\begin{aligned}[f \star (f \circ S_H)](h) &= f(h_{(1)})f(S_H(h_{(2)})) = f(h_{(1)}S_H(h_{(2)})) \\ &= f(\epsilon_H(h)1_H) = \epsilon_H(h)1_K.\end{aligned}$$

donc, $f \circ S_H$ est aussi un inverse à droite de f. Il s'ensuit que f est inversible (pour le produit de convolution) et que les inverses à gauche et à droite sont égaux, à savoir $S_G \circ f = f \circ S_H$. □

Cette proposition montre que les morphismes de bigèbres préservent l'antipode. Ce qui implique que les morphismes d'algèbres de Hopf sont exactement les morphismes de bigèbres.

Nous pouvons maintenant définir la catégorie des algèbres de Hopf, dans laquelle les objets sont des algèbres de Hopf et les morphismes sont ceux définis dans la Définition 2.37. De plus, l'identité d'algèbre de Hopf ainsi que la composition de deux morphismes d'algèbres de Hopf restent des morphismes d'algèbres de Hopf. La catégorie des algèbres de Hopf dans la catégorie monoïdale tressée $\mathcal{C}$ sera désignée par $Hopf_{\mathcal{C}}$.

Les propriétés basiques de l'antipode sont énumérées dans la proposition suivante :

Proposition 2.39. *Soit une algèbre de Hopf* $(H, \mu_H, \eta_H, \Delta_H, \epsilon_H, S_H)$ *dans une catégorie monoïdale tressée* $\mathcal{C}$*.*

(a) $S_H(hg) = S_H(g)S_H(h)$*, pour tout* $g, h \in H$*.*

(b) $S_H(h)_{(1)} \otimes S_H(h)_{(2)} = S_H(h_{(2)}) \otimes S_H(h_{(1)})$ *pour tout* $h \in H$*.*

(c) $S_H(1_H) = 1_H$*.*

(d) $\epsilon_H(S_H(h)) = \epsilon_H(h)$*, pour tout* $h \in H$*.*

Démonstration. (a) Considérons l'espace vectoriel $Hom(H \otimes H, H)$. Comme $H \otimes H$ possède une structure de cogèbre et que H a une structure d'algèbre, alors $Hom(H \otimes H, H)$ est une algèbre de convolution. Définissons deux morphismes $F, G : H \otimes H \to H$ donnés par

$$F(h \otimes g) = S_H(g)S_H(h), \quad G(h \otimes g) = S_H(hg).$$

Montrons que F et G sont respectivement l'inverse à droite et à gauche du produit de convolution avec la multiplication. D'un côté, nous observons

$$\begin{aligned}
F \star \mu_H(h \otimes g) &= F(h_{(1)} \otimes g_{(1)})\mu_H(h_{(2)} \otimes g_{(2)}) \\
&= F(h_{(1)} \otimes g_{(1)})h_{(2)}g_{(2)} \\
&= S_H(g_{(1)})S_H(h_{(1)})h_{(2)}g_{(2)} \\
&= S_H(g_{(1)})\epsilon_H(h)1_H g_{(2)} \text{ (Définition de } S \text{ pour } h) \\
&= \epsilon_H(h)S_H(g_{(1)})g_{(2)}1_H \\
&= \epsilon_H(h)\epsilon_H(g)1_H \text{ (Définition de } S \text{ pour } g) \\
&= \epsilon_{H\otimes H}(h \otimes g)1_H \\
&= \eta_H \circ \epsilon_{H\otimes H}(h \otimes g)
\end{aligned}$$

qui montre que $F \star \mu_H = \eta_H \circ \epsilon_{H\otimes H}$. De même, on obtient

$$\begin{aligned}
\mu_H \star G(h \otimes g) &= \mu_H(h_{(1)} \otimes g_{(1)})G(h_{(2)} \otimes g_{(2)}) \\
&= h_{(1)}g_{(1)}S_H(h_{(2)}g_{(2)}) \\
&= (hg)_{(1)}S_H((hg)_{(2)}) \\
&= \epsilon_H(hg)1_H \text{ (Définition de } S \text{ pour } hg) \\
&= \epsilon_H(h)\epsilon_H(g)1_H \\
&= \eta_H \circ \epsilon_{H\otimes H}(h \otimes g).
\end{aligned}$$

et donc, $\mu_H \star G = \eta_H \circ \epsilon_{H\otimes H}$. Donc, μ_H est un inverse à gauche de F et un inverse à droite de G dans l'algèbre de convolution et donc $F = G$.

(b) À présent, considérons l'algèbre de convolution $Hom(H, H \otimes H)$ et deux morphismes $F, G : H \to H \otimes H$ donnés, pour tout $h \in H$, par

$$F(h) = S_H(h)_{(1)} \otimes S_H(h)_{(2)}, \quad G(h) = S_H(h_{(2)}) \otimes S_H(h_{(1)}).$$

Encore une fois, l'idée est de montrer que F et G sont respectivement l'inverse à droite et à gauche du produit de convolution avec la comultiplication et ainsi obtenir l'égalité $F = G$. En effet, pour tout $h \in H$, nous avons

$$\begin{aligned}
F \star \Delta_H(h) &= F(h_{(1)})\Delta_H(h_{(2)}) \\
&= \left(S_H(h_{(1)})_{(1)} \otimes S_H(h_{(1)})_{(2)}\right)\left(h_{(2)(1)} \otimes h_{(2)(2)}\right) \\
&= S_H(h_{(1)})_{(1)}h_{(2)(1)} \otimes S_H(h_{(1)})_{(2)}h_{(2)(2)} \\
&= \left(S_H(h_{(1)})h_{(2)}\right)_{(1)} \otimes \left(S_H(h_{(1)})h_{(2)}\right)_{(2)} \\
&= \Delta_H\left(S_H(h_{(1)})h_{(2)}\right) = \Delta_H\left(\epsilon_H(h)1_H\right) \\
&= \epsilon_H(h)\Delta_H\left(1_H\right) = \epsilon_H(h)\left(1_H \otimes 1_H\right) \\
&= \eta_{H\otimes H}\epsilon_H(h).
\end{aligned}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\Delta_H \star G(h) &= \Delta_H(h_{(1)})G(h_{(2)}) \\
&= \left(h_{(1)(1)} \otimes h_{(1)(2)}\right)\left(S_H(h_{(2)(2)}) \otimes S_H(h_{(2)(1)})\right) \\
&= h_{(1)(1)}S_H(h_{(2)(2)}) \otimes h_{(1)(2)}S_H(h_{(2)(1)}) \\
&= \epsilon_H(h)1_H \otimes \epsilon_H(h)1_H = \epsilon_H(h)(1_H \otimes 1_H) \\
&= \eta_{H\otimes H}\epsilon_H(h).
\end{aligned}$$

(c) Pour tout $h \in H$,

$$\begin{aligned}
S_H(1_H)h = S_H(1_H)\epsilon_H(h_{(1)})h_{(2)} &= S_H(1_H)S_H(h_{(1)})h_{(2)}h_{(3)} \\
&= S_H(h_{(1)})h_{(2)}h_{(3)} = \epsilon_H(h_{(1)})h_{(2)} = h.
\end{aligned}$$

De manière analogue, il est possible de montrer que $hS_H(1_H) = h$ pour tout $h \in H$ et donc, par unicité de l'unité, nous avons $S_H(1_H) = 1_H$.

(d) Finalement, pour tout $h \in H$,

$$\begin{aligned}
\epsilon_H(S_H(h_{(1)}))h_{(2)} = \epsilon_H(S_H(h_{(1)}))\epsilon_H(h_{(2)})h_{(3)} &= \epsilon_H(S_H(h_{(1)})h_{(2)})h_{(3)} \\
&= \epsilon_H(\epsilon_H(h_{(1)})1_H)h_{(2)} = \epsilon_H(h_{(1)})h_{(2)} = h.
\end{aligned}$$

Par des calculs identiques, pour tout $h \in H$, $h_{(1)}\epsilon_H(S_H(h_{(2)})) = h$ et donc, par l'unicité de la counité, nous en concluons que $\epsilon_H(S_H(h)) = \epsilon_H(h)$.

□

Conclusion

L'objectif de ce mémoire est de construire et d'étudier les algèbres de Hopf dans les catégories monoïdales tressées. Pour arriver à ce but, nous avons commencé par définir les catégories monoïdales et par étudier le lien existant entre une catégorie monoïdale et une catégorie monoïdale stricte. Nous avons ensuite construit les algèbres et les cogèbres dans les catégories monoïdales. À ces dernières, nous avons ajouté une structure additionnelle pour aboutir aux catégories monoïdales tressées. Par l'intermédiaire d'un exemple, nous avons découvert qu'il existe des objets qui sont à la fois une algèbre et une cogèbre, et cette découverte nous a permis d'introduire les bigèbres. Ensuite, dans le contexte des catégories monoïdales tressées, nous avons présenté la relation de bijection entre les structures de bigèbres $(B, \mu_B, \eta_B, \Delta_B, \epsilon_B)$ sur une algèbre (B, μ_B, η_B) et les structures monoïdales sur la catégorie des modules Mod_B. Pour finir, l'ensemble des résultats ont été rassemblés afin d'atteindre l'objectif, à savoir définir et analyser les algèbres de Hopf dans les catégories monoïdales tressées. Ce sujet, approfondi en théorie des catégories ainsi que dans d'autres domaines aussi bien mathématiques que physiques et même informatiques, nous a permis d'établir plusieurs liens entre divers champs d'études mathématiques. Cela nous permet d'envisager un questionnement assez large.

Si le lecteur est intéressé par la théorie des algèbres de Hopf, il est vivement encouragé à continuer son exploration passionnante. Une série d'études qui découlent des thèmes abordés dans ce mémoire peuvent être considérées. En voici deux parmi tant d'autres :

- Dans ce mémoire, nous avons observé que la catégorie des B-modules forme une catégorie monoïdale, si B est une bigèbre. Il serait donc intéressant, en suivant un procédé similaire, de construire une catégorie monoïdale tressée. Cela se fait grâce aux modules de Yetter-Drinfeld. Ceux-ci peuvent être découverts dans l'article [10] de Radford et Towber.

  Un **module de Yetter-Drinfeld** sur une K-bigèbre $B = (B, \mu_B, \eta_B, \Delta_B, \epsilon_B)$ est un K-module qui est à la fois un B-module et un B-comodule avec une certaine compatibilité entre l'action et la coaction. La catégorie des modules YD gauche-droite, dont les objets, les modules de Yetter-Drinfeld, sont simultanément des B-modules à gauche et des B-comodules à droite, est désignée par ${}_{\mathscr{B}}\mathscr{Y}\mathscr{D}^{\mathscr{B}}$. Cette catégorie est une catégorie monoïdale équipée de morphismes « prétressés », qui en font une catégorie monoïdale tressée si B est une algèbre de Hopf (et une catégorie monoïdale prétressée si B est simplement une bigèbre).

Les liens entre la catégorie ${}_{\mathscr{B}}\mathscr{Y}\mathscr{D}^{\mathscr{B}}$ et la catégorie des algèbres de Hopf ou celle avec les catégories monoïdales tressées peuvent être analysés et approfondis.

- Dans l'article de Gran, Sterck et Vercruysse [5], on y retrouve la preuve que la catégorie $Hopf_{K,coc}$ des algèbres de Hopf cocommutatives sur un champ K est une catégorie semi-abélienne. Ce résultat est une extension d'un cas particulier antérieur, basé sur le théorème de Milnor-Moore dans l'article [8], qui annonce que lorsque le corps K est de caractéristique nulle, la catégorie $Hopf_{K,coc}$ est semi-abélienne. De plus, le fait que cette dernière catégorie $Hopf_{K,coc}$ soit semi-abélienne entraine immédiatement le théorème de Takeuchi affirmant que la catégorie des algèbres de Hopf commutatives et cocommutatives sur un corps K est abélienne.

  Il existe deux perspectives attirantes et naturelles à développer. La première serait de réfléchir à la généralisation de ce résultat aux algèbres de Hopf cocommutatives dans une catégorie monoïdale tressée ou symétrique quelconque. L'autre possibilité serait d'analyser les propriétés catégoriques des algèbres de Hopf générales, ainsi que de plusieurs sous-catégories intéressantes de cette catégorie, par exemple celle des algèbres de Hopf commutatives.

Annexe

2.0.1 Rappel des définitions de théorie des catégories

Définition 2.1. Une **catégorie** est constituée de :

- une collection $ob(\mathcal{C})$ d'**objets** ;
- pour tout $A, B \in ob(\mathcal{C})$, une collection $\mathcal{C}(A, B)$ de **morphismes** (ou **flèches**) allant de A vers B ;
- pour tout $A, B, C \in ob(\mathcal{C})$, une fonction

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(B,C) \times \mathcal{C}(A,B) & \to & \mathcal{C}(A,C) \\ (g,f)) & \mapsto & g \circ f, \end{array}$$

  appelée **composition** ;
- pour tout $A \in \mathcal{C}$, un élément Id_A de $\mathcal{C}(A, A)$, appelé l'**identité** sur A,

satisfaisant les axiomes suivants :

- **associativité** : pour tout $f \in \mathcal{C}(A, B)$, $g \in \mathcal{C}(B, C)$ et $h \in \mathcal{C}(C, D)$, nous avons

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f);$$

- **loi de l'identité** : pour tout $f \in \mathcal{C}(A, B)$, nous avons

$$f \circ Id_A = f = Id_B \circ f.$$

Remarque 2.2. Si $f \in \mathcal{C}(A, B)$, nous appelons l'objet A le **domaine** et l'objet B le **codomaine** du morphisme f.

La définition porte sur l'interaction entre les objets au sein d'une catégorie.

Définition 2.3. Une fonction $f : A \to B$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ est un **isomorphisme** s'il existe un morphisme $g : B \to A$ dans $\mathcal{C}$ tel que $g \circ f = Id_A$ et $f \circ g = Id_B$.

Dans la définition ci-dessus, nous appelons g l'**inverse de** f et se note $g = f^{-1}$. S'il existe un isomorphisme de A dans B, on dit que A et B sont isomorphes et on l'écrit $A \cong B$.

Définition 2.4. Soit deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$. Un **foncteur** $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ est constitué de

- une fonction
$$\begin{array}{ccc} ob(\mathcal{C}) & \to & ob(\mathcal{D}) \\ A & \mapsto & F(A); \end{array}$$

- pour tout $A, A' \in \mathcal{C}$, une fonction
$$\begin{array}{ccc} \mathcal{C}(A, A') & \to & \mathcal{D}(F(A), F(A')) \\ f & \mapsto & F(f), \end{array}$$

satisfaisant les axiomes suivants :

- $F(f' \circ f) = F(f') \circ F(f)$ où $A \xrightarrow{f} A' \xrightarrow{f'} A''$ dans $\mathcal{C}$;
- $F(Id_A) = Id_{F(A)}$ pour tout $A \in \mathcal{C}$.

Remarque 2.5. Nous pouvons remarquer que les foncteurs peuvent être composés. Autrement dit, étant donnés deux foncteurs $F : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ et $G : \mathcal{B} \to \mathcal{C}$, la composée est donnée par $G \circ F : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$. De plus, pour chaque catégorie $\mathcal{A}$, il existe un foncteur d'identité $Id_{\mathcal{A}} : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$.

Définition 2.6. Soit deux catégories $\mathcal{C}$ et $\mathcal{D}$ et deux foncteurs $F : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ et $G : \mathcal{C} \to \mathcal{D}$. Une **transformation naturelle** $\alpha : F \to G$ est une famille $(\alpha_C : F(C) \to G(C))_{C \in \mathcal{C}}$ de morphismes dans $\mathcal{D}$ tel que pour tout morphisme $f : C \to C'$, le diagramme

$$\begin{tikzcd} F(C) \arrow[r, "F(f)"] \arrow[d, "\alpha_C"'] & F(C') \arrow[d, "\alpha_{C'}"] \\ G(C) \arrow[r, "G(f)"'] & G(C') \end{tikzcd}$$

commute. Les morphismes α_C sont appelés **composantes** de α.

2.0.2 Exemple 1.28 généralisé

Notons $\Delta(x^n) = \sum_{i+j=n} x^i \otimes x^j$ où $i, j \geq 0$ et $n \in \mathbb{N}$. En réarrangeant les termes dans $(\Delta \otimes Id_{\mathbb{C}[x]})\Delta(x^n)$ et $(Id_{\mathbb{C}[x]} \otimes \Delta)\Delta(x^n)$, on obtient

$$\begin{aligned} (\Delta \otimes Id_{\mathbb{C}[x]})\Delta(x^n) &= (\Delta \otimes Id_{\mathbb{C}[x]}) \sum_{i+j=n} x^i \otimes x^j \\ &= \sum_{i+j=n} \Delta(x^i) \otimes x^j \\ &= \sum_{i+j=n} \left(\sum_{k+l=i} x^k \otimes x^l \right) \otimes x^j \\ &= \sum_{k+l+j=n} x^k \otimes x^l \otimes x^j \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
(Id_{\mathbb{C}[x]} \otimes \Delta)\Delta(x^n) &= (Id_{\mathbb{C}[x]} \otimes \Delta) \sum_{i+j=n} x^i \otimes x^j \\
&= \sum_{i+j=n} x^i \otimes \Delta(x^j) \\
&= \sum_{i+j=n} x^i \otimes \left(\sum_{u+v=j} x^u \otimes x^v \right) \\
&= \sum_{i+u+v=n} x^i \otimes x^u \otimes x^v \\
&= \sum_{k+l+j=n} x^k \otimes x^l \otimes x^j.
\end{aligned}$$

Ce qui montre que la comultiplication Δ est bien coassociative.

2.0.3 Associativité du produit de convolution

Soit $(C, \Delta_C, \epsilon_C)$ une cogèbre et (A, μ_A, η_A) une algèbre. Nous définissons sur l'ensemble $Hom_K(C, A)$ une structure d'algèbre dans laquelle la multiplication, notée $\star$, est donnée comme suit : si $f, g \in Hom_K(C, A)$, alors

$$(f \star g)(c) = f(c_{(1)})g(c_{(2)}),$$

pour tout $c \in C$. La multiplication définie ci-dessus est associative puisque pour $f, g, h \in Hom(C, A)$ et $c \in C$, on a

$$\begin{aligned}
((f \star g) \star h)(c) &= (f \star g)(c_{(1)})h(c_{(2)}) \\
&= f(c_{(1)})g(c_{(2)})h(c_{(3)}) \\
&= f(c_{(1)})(g \star h)(c_{(2)}) \\
&= (f \star (g \star h))(c).
\end{aligned}$$

L'élément d'identité de l'algèbre $Hom(C, A)$ est $\eta_A \circ \epsilon_C \in Hom(C, A)$, puisque pour tout $c \in C$,

$$(f \star (\eta_A \circ \epsilon_C))(c) = f(c_{(1)})(\eta_A \circ \epsilon_C)(c_{(2)}) = f(c_{(1)})\epsilon_C(c_{(2)})1_A = f(c_{(1)}\epsilon_C(c_{(2)}) = f(c).$$

D'où, $f \star (\eta_A \circ \epsilon_C) = f$. Similairement, $(\eta_A \circ \epsilon_C) \star f = f$.

Bibliographie

[1] N. Andruskiewitsch and W. F. Santos. The beginnings of the theory of hopf algebras. *Acta Appl Math*, 3(2) :3–17, 2009.

[2] A. Ardizzoni. An overview on hopf algebra theory. Course LMAT 2220 – Special topics in category theory, Université Catholique de Louvain, 2018.

[3] S. Caenepeel and J. Vercruysse. Hopf algebras. Lecture notes, Vrije Universiteit Brussel & Universiteit Antwerpen, 2012.

[4] S. Dascalescu, C. Nastasescu, and S. Raianu. *Hopf algebras, an introduction.* Pure and applied mathematics - A Series of Monographs and Textbooks, 235, New York, 2001.

[5] M. Gran, F. Sterck, and J. Vercruysse. A semi-abelian extension of a theorem by takeuchi. *J. Pure Appl. Algebra*, 223(10) :4171–4190, 2019.

[6] A. Joyal and R. Street. *Braided monoidal categories.* Macquarie Math Reports, Australia, 1986.

[7] S. Mac Lane. *Categories for the Working Mathematician.* Springer-Verlag, New York, 2 edition, 1998.

[8] J. Milnor and J. Moore. On the structure of hopf algebras. *Ann. Math.*, 81(2) :211—-264, 1965.

[9] S. Montgomery. *Hopf algebras and their actions on rings.* American Mathematical Society, Los Angeles, 1993.

[10] D.E. Radford and J. Towber. Yetter-drinfel'd categories associated to an arbitrary bialgebra. *J. Pure Appl. Algebra*, 87 :259–279, 1993.

[11] R. Street. Monoidal categories in, and linking, geometry and algebra. *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 19(5) :769–820, 2012.

[12] M.E. Sweedler. *Hopf algebras.* W.A. Benjamin, Inc., New York, 1969.

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
Faculté des sciences
Place des sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | **www.uclouvain.be/sc**