



Mémoire de fin d'études
Année universitaire 2019-2020

Master en Sciences Actuarielles

Détermination de l'assurance optimale pour un risque corrélé au
patrimoine

Ndeye Arame SECK / Noma: 5665-17-00

Promoteur: Professeur Michel DENUIT
Lecteur: Cindy COURTOIS

1	Introduction et motivations	1
2	Détermination de l'assurance optimale: cas d'un risque isolé	7
2.1	Cas des couvertures d'assurance proportionnelle : théorème de Mossin (1968)	7
2.2	Extension à un type quelconque de couverture d'assurance	8
2.3	Remarques sur le théorème de Mossin (cas d'un risque isolé)	12
3	Détermination de l'assurance optimale en présence d'un background risk	15
3.1	Assurance optimale en présence d'un background risk: cas des contrats d'assurance proportionnelle	18
3.1.1	Hypothèses de base et notations	18
3.1.2	Vers la généralisation du théorème de Mossin	18
3.1.3	Le « Generalized Mossin's Theorem » et ses enseignements en termes de gestion du risque	21

3.2	Assurance optimale en présence d'un background risk: cas des contrats avec franchise	29
3.2.1	Hypothèses de base et notations	30
3.2.2	Quelle structure de dépendance stochastique pour les contrats avec franchise?	30
3.2.3	Détermination de la couverture optimale pour les contrats avec franchise . . .	32
3.3	Forme optimale de couverture en présence d'un background risk et « high order degree risk attitudes »	36
3.3.1	Hypothèses du modèle	37
3.3.2	Notions d'ordre et de dépendance stochastiques de degré n	39
3.3.3	Détermination de la forme optimale dans le contexte de « High degree order attitudes »	40
4	Application numérique: cas d'une dépendance positive entre X et Y	45
5	Conclusion	49
A	Preuves en complément	51
A.1	Preuve de la proposition (3.3.0.2)	51
A.2	Preuve de la proposition (3.3.0.3)	52
	Bibliographie	54

Introduction et motivations

Pendant longtemps, la théorie de la demande d'assurance par un individu (particulier ou entreprise) faisant face à l'incertitude et à un risque a été construite avec l'idée selon laquelle la décision d'assurance est parfaitement disjointe des autres décisions financières de l'individu. En l'occurrence, jusqu'en 1983, les différents travaux portant sur la détermination de la stratégie optimale d'assurance, reposaient sur l'hypothèse qu'une seule source d'aléa ne pouvait affecter la richesse finale de l'individu, à savoir le risque que l'individu voudrait céder. Donc, les résultats qui en ont découlé, ont été établis sur base d'un modèle à un risque isolé (« single risk model »). Notamment, le célèbre théorème de Mossin (1968) [17] nous indique que, pour un individu averse au risque, souhaitant se couvrir à l'aide d'un contrat d'assurance proportionnelle (quote-part), l'assurance optimale est une couverture complète si la prime d'assurance ne comporte pas de chargement de sécurité (prime équitable), une couverture partielle si la prime est adossée à un chargement proportionnel à l'indemnité espérée.

En revanche, comme le suggère la littérature moderne, la prise en compte du portefeuille d'actifs de l'individu - notamment des autres sources d'aléas pouvant affecter sa richesse, parmi lesquels se trouve au moins un risque non assurable, appelé « background risk » - s'avère être plus réaliste et conduit à des résultats plus efficaces en termes de gestion du risque. Dès lors, il devient pertinent de prendre en compte plutôt que d'ignorer les multiples sources de risque, surtout de considérer les interactions entre ces risques, lors de l'étude de la stratégie optimale de couverture sur le marché de l'assurance. La décision d'assurance devient donc indéniablement inséparable de la décision financière: l'étude de l'assurance optimale en présence de plusieurs sources de risques, ne

devrait être faite en considérant chaque risque individuellement mais plutôt en adoptant une ou des stratégies de Risk Management. D'autant que la contribution marginale du risque assurable au risque total du portefeuille d'actifs serait plus petite que si l'on considérait le risque isolément.

L'existence d'un « background risk » s'explique par le fait que les marchés, sont incomplets, en particulier le marché de l'assurance où l'offre de couverture est absente pour certains types de risque. A titre d'exemple, le risque de marché est réputé non assurable, le risque d'investissement, le risque lié à son propre capital humain, les risques appelés « social risks » tels que le risque de guerre, les exclusions de couverture par la législation, les risques liés à l'asymétrie d'information (hasard moral, sélection adverse), mais aussi le risque de défaut de l'assureur peut être vu comme un background risk.

C'est au cours de ces quarante dernières années que la prise en considération de plusieurs sources de risque dans l'étude de la couverture optimale d'assurance a débuté avec Schlesinger & Doherty (1983) [8], Schlesinger & Doherty (1985) [9] et Mayer & Smith (1983) [16] qui furent les premiers à s'être penchés sur le ré-examen du théorème de Mossin (1968) [17] en présence d'un « background risk », notamment pour la classe des contrats quote-part et celle des contrats avec franchise. Leurs travaux ont donné lieu à plusieurs raffinements et extensions par d'autres auteurs, notamment Hong & Al. (2011) [18], Aboudi & Thon (1995)[2], et tout récemment nous avons les contributions de Chi & Wei (2018) [6], de Hong L. (2018) [11] et de Hong L. (2019) [12].

Notons d'ores et déjà que la présence d'un « background risk » indépendant du risque assurable, n'a pas d'impact sur les résultats du théorème de Mossin (1968); En revanche, elle pourrait influencer sur la part optimale du risque que l'individu devra transférer à un assureur lorsque la prime est chargée. En effet, comme indiqué et démontré dans Schlesinger H. (2012) [20], lorsque la richesse de l'individu est affectée par un « background risk » non corrélé avec le risque assurable et que sa fonction d'utilité reflète une « standard risk aversion »¹ alors l'individu va céder une part plus importante du risque que celle qu'il aurait transférée en l'absence d'un « background risk » ,

¹Définition de la « standard risk aversion » telle dans Kimball (1993) p.589: une fonction d'utilité $u(\cdot)$ reflète une « standard risk aversion » si tout risque qui interagit négativement avec une légère baisse au niveau de la richesse, interagit aussi négativement avec n'importe quel risque indépendant. Par "interagit négativement", on veut dire amplifie la réduction de l'espérance d'utilité.

du fait que la « standard risk aversion » entraîne une fonction d'utilité dérivée (« derived utility function »)² plus concave.

Cependant, lorsque le « background risk » et le risque assurable ne sont pas indépendants, la décision d'assurance est régie par la structure et le type de dépendance entre les deux risques : la couverture optimale, dans le cas d'une prime équitable, varie selon que la dépendance entre les risques est positive ou négative. Cela nous indique déjà que la partie 1 du théorème de Mossin communément connue n'est plus systématiquement valide dès lors qu'on est en présence d'un « background risk » et que l'on prend en compte tout le portefeuille d'actifs de l'individu. Plus précisément, lorsque le risque assurable et le « background risk » sont négativement corrélés et que la prime est équitable, l'assurance optimale n'est plus une couverture complète mais plutôt une couverture partielle, en raison d'un mécanisme naturel de "homemade insurance" induit dans le portefeuille d'actifs par l'effet de diversification. On peut donc doré et déjà entrevoir les conséquences d'une omission ou d'une non prise en considération de la présence d'un background risk, sur la gestion du risque d'une entreprise.

Les résultats qui ont découlé des travaux de Schlesinger & Doherty (1983) [8] - qui sont les prémices du ré-examen du théorème de Mossin- utilisent le coefficient de corrélation linéaire comme mesure de dépendance entre le risque assurable et le risque non assurable. Cependant, comme nous le verrons, Hong et Al. (2011) [18] ont soulevé et montré à travers des contre-exemples que le coefficient de corrélation n'est pas une mesure adéquate dans le cadre de la détermination de l'assurance optimale en présence d'un « background risk », à l'exception du cas particulier où la distribution jointe des deux risques est gaussienne bivariée. En d'autres termes, choisir de travailler avec la mesure de corrélation linéaire contraint à supposer que la distribution jointe du risque assurable et du « background risk » suit une loi normale bivariée . Ainsi, pour pallier cette restriction afin de pouvoir travailler avec des familles de distributions plus générales, les travaux de Hong et Al. (2011) [18] et ceux qui ont suivi utilisent des structures de dépendance, de nature stochastique et plus riches que le coefficient de corrélation linéaire, à savoir principalement celles définies dans Lehmann (1966) [13] et Wright (1987) : « Quadrant dependence », « Expectation dependence » et « Regression dependence » . Ces structures de dépendance stochastiques ont servi de condition

²La « derived utility function » $v(\cdot)$ d'une fonction d'utilité $u(\cdot)$ est définie par $v(x) = \mathbb{E}[u(w - \alpha(1 + \rho)x - (1 - \alpha)x - Y)]$

nécessaires et/ou suffisantes dans certains travaux visant à ré-examiner et étendre le théorème de Mossin en présence de plusieurs sources de risque. A titre illustratif, le « Generalized Mossin's theorem » établi par Hong & AL. (2011) [18] pour les contrats quote-part, utilise la dépendance positive/négative en espérance (« positive/negative expectation dependence ») comme condition nécessaire et suffisante à la généralisation du théorème de Mossin. La «quadrant dependence » a été identifiée par Hong L. (2018)[11] et Hong L. (2019)[12], comme condition nécessaire, respectivement pour la classe des contrats avec plafond de couverture et celle des contrats avec franchise.

Nous soulignons que certains des résultats établis dans le cadre de l'étude de la couverture et forme optimales d'assurance et que nous présenterons en détails dans ce document, font l'hypothèse parfois implicite que le chargement de sécurité est proportionnel à la prime pure et considèrent l'aversion générale au risque (dominance stochastique du second ordre) de l'individu. L'hypothèse d'un chargement proportionnel, bien que reflétant la pratique du marché de l'assurance non-vie, pourrait toutefois constituer une restriction dans les développements théoriques actuariels. La considération d'autres types de prime, tels que listés dans Young (2004) [1], pourrait être envisagée ainsi que leur impact sur les résultats découlant de l'hypothèse d'une prime basée uniquement sur l'espérance de l'indemnité ("Expected Value Premium Principle"). Certains travaux tels que ceux de Chi Yichun (2017) [4] mettent en évidence l'impact du choix de calcul de la prime sur la forme optimale de couverture.

Par ailleurs, il est également important de souligner que, bien que le cas où l'on considère la présence d'une seule source d'aléa dans la richesse de l'individu, soit une vision irréaliste, purement théorique, il n'est pas dénué d'intérêt car les résultats qui en découlent sont suffisamment robustes pour nous permettre de comprendre l'effet de la présence d'un risque non assurable dans le portefeuille d'actifs d'un individu averse au risque sur la forme et quantité optimales d'assurance à acheter pour se couvrir contre le risque assurable.

L'objet de ce document est de passer en revue la littérature existante sur la détermination de la couverture et forme optimales d'assurance lorsque l'agent économique fait face à un « background risk » affectant sa richesse en fin de période; nous commencerons par un tour d'horizon sur le cas d'une seule source de risque affectant la richesse de l'individu , à savoir le risque assurable.

Notre travail sera principalement articulé sur deux axes: il sera montré dans un premier temps que l'assurance optimale en présence d'un background risk est une couverture partielle si la prime est chargée; dans un second lieu, nous nous intéresserons à la question de la détermination de la forme optimale de couverture, tout en mettant en exergue les conditions cruciales, par exemple celles dites « *incentive compatibility* », sur lesquelles repose fondamentalement la forme optimale de couverture.

Tout au long de notre travail de synthèse des contributions récentes apportées à ce sujet, nous effectuerons une analyse comparative avec les travaux antérieurement effectués sur le même sujet. Un volet sera consacré à l'interprétation des principaux résultats ainsi qu'aux enseignements que l'on peut en tirer en termes de gestion du risque; enfin, nous étayerons notre travail par une application numérique aussi bien dans une vision d'entreprise afin d'illustrer l'applicabilité des résultats.

Pour circonscrire le périmètre de notre travail, nous resterons dans le cadre de la théorie de l'utilité où l'agent économique, supposé rationnel et averse au risque, va chercher à maximiser l'utilité espérée de sa richesse finale. Toutefois, dans l'une de nos applications numériques, axée sur une vision d'entreprise disposant d'un département Risk Management où l'usage d'une mesure de risque a tout son sens, nous avons fait le choix de travailler avec une mesure de risque particulière, compatible avec notre périmètre de travail.

Une dernière hypothèse centrale mais moins évidente, que nous faisons ici est que l'assureur et l'individu partagent la même information sur le risque à céder, autrement dit nous supposons que le risque assurable suit la même loi de probabilité aussi bien du point de vue de l'assuré que de celui de l'assureur. Or en réalité, bien qu'il s'agisse de la même variable aléatoire, il n'en est pas de même pour la distribution du risque car l'assuré a une connaissance du risque beaucoup plus sommaire que celle de la partie qui est prête à l'absorber (l'assureur). En effet, l'assuré est empreint soit d'optimisme soit de pessimisme, mais il lui est (presque) impossible d'arriver à déterminer la vraie loi de probabilité du risque tandis que l'assureur dispose généralement de suffisamment de données historiques pour accéder à la distribution du risque. La complexité de formaliser l'optimisme ou le pessimisme d'un assuré nous a conduit à poser cette hypothèse.

Avant de démarrer, nous tenons tout d'abord à lever un amalgame portant à confusion et que l'on retrouve dans la majeure partie de la littérature traitant de la question de l'assurance

optimale: les auteurs utilisent l'appellation « optimal insurance with a random initial wealth » (resp. « optimal insurance with a nonrandom initial wealth ») pour designer les sujets traitant de l'assurance optimale lorsqu'un « background risk » est présent dans le patrimoine de l'individu (resp. cas où le « background risk » est absent ou est ignoré). En réalité, la richesse initiale d'un individu - au moment où il se pose la question de transférer ou non le risque auquel il face à un assureur - étant connue, la distinction entre les cas de présence et d'absence d'un « background risk » se situe plutôt au niveau des sources d'aléas dans sa richesse en fin de période. En d'autres termes, ce qui est très couramment surnommé par « assurance optimale : cas d'une richesse initiale déterministe » désigne en réalité le cas où la richesse de l'individu en fin de période est affectée par un seul risque, en l'occurrence le risque assurable. Et l'appellation « assurance optimale : cas d'une richesse initiale aléatoire » correspond plutôt au cas où la richesse en fin de période comporte plusieurs sources de risque dont le risque assurable et au moins un « background risk ». Par raccourci et abus de langage, nous aurons parfois recours à ces terminologies dans la suite du document.

Remerciements

À Edward WUILQUOT, pour ton soutien moral et ta bienveillance tout au long de ma formation.

Détermination de l'assurance optimale: cas d'un risque isolé

2.1 Cas des couvertures d'assurance proportionnelle : théorème de Mossin (1968)

Notations du modèle de base:

On suppose qu'un individu, averse au risque, détient une richesse initiale $w > 0$ et souhaiterait se couvrir, à l'aide d'un contrat d'assurance quote-part, contre un risque auquel il fait face et dont le coût est modélisé par la variable aléatoire X . Nous supposons que X est le seul risque affectant son patrimoine.

L'assureur va payer une indemnité $\mathcal{I}(X)$ en cas de survenance du risque, contre le paiement d'une prime d'assurance $\Pi_{\mathcal{I}}(X) = \pi(E[\mathcal{I}(X)])$ par l'assuré, où $\mathcal{I}(X) = \alpha X$, $\pi(\cdot)$ est la fonction de prime et $\alpha \in [0, 1]$ désigne la proportion du risque X à céder à l'assureur.

On suppose que la fonction indemnitaires $\mathcal{I}(\cdot)$ est positive et croissante telle que $\mathcal{I}(x) \leq x$ pour toute réalisation x de la variable aléatoire X .

Soit ρ le chargement de sécurité, que l'on suppose proportionnel à la prime pure: $\pi(x) = (1 + \rho)x$ donc $\Pi_{\mathcal{I}}(X) = (1 + \rho)E[\mathcal{I}(X)] = \alpha(1 + \rho)E[X]$.

La fonction d'utilité u de l'individu est supposée positive, croissante et concave. L'assureur est supposé neutre au risque.

L'objectif est de déterminer, sur base du critère de l'espérance d'utilité, la part optimale, α^* , que l'individu va transférer à l'assureur: Va-il tout transférer? ou retenir une partie de X ?

Notons par $W_f(\alpha)$ la richesse finale de l'individu. $W_f(\alpha) = w - \alpha(1 + \rho)E[X] - (1 - \alpha)X$.

On remarque que l'individu détenant une richesse connue, va introduire de l'aléa dans sa richesse finale s'il se couvre partiellement contre le risque X . Mais cet aléa est réduit, contrairement à s'il gardait tout le risque pour lui.

Le théorème de Mossin (1968)[17] ci-après, nous fournit une réponse sur la décision optimale d'assurance que pourrait adopter l'individu dans ce cas d'espèce:

Théorème 2.1.1. Mossin (1968): *Tout individu averse au risque détenant une richesse initiale w et souhaitant se couvrir à l'aide d'un contrat d'assurance quote-part, va:*

1/ céder tout le risque ($\alpha^ = 1$) si la prime est équitable ($\rho = 0$)*

2/ transférer une partie du risque ($\alpha^ < 1$) si la prime contient un chargement de sécurité $\rho > 0$ proportionnel à la prime pure.*

Remarques:

- Comme dans Schlesinger (2006) , nous utiliserons dans la suite les appellations « *partie 1 du théorème de Mossin* » pour désigner le cas où $\rho = 0$ et « *partie 2 du théorème de Mossin* » pour le cas $\rho > 0$.
- Une quote-part n'est pas le type de couverture d'assurance apprécié ni par un individu averse au risque ni par l'assureur dans la mesure où il ne permet pas à l'individu d'avoir une maîtrise sur le montant de sa rétention, de plus l'assureur va devoir intervenir dans les petits sinistres.
- Dans Schlesinger (1981) et (2006), il a été démontré que le théorème de Mossin (1968) reste valide pour les contrats avec franchise et pour ceux limitant le montant de la couverture.
- Cependant, la validité du théorème de Mossin (1968) pour tous types de couverture d'assurance a longtemps été présumée jusqu'en 2019 où Hong L. [12] en établit formellement la preuve.

2.2 Extension à un type quelconque de couverture d'assurance

Rappelons que nous sommes toujours en l'absence de background risk; nous nous intéressons ici à montrer que le théorème de Mossin (1968) établi pour les couvertures d'assurance de type

quote-part, reste en effet valide pour tous types de couverture, moyennant certaines hypothèses. Ici on ne spécifie donc pas le type de la couverture contre le risque assurable X . Cependant, nous introduisons quelques notations et les hypothèses sur lesquelles reposent la démonstration.

Notations:

Soient W_f^{full} la richesse finale si l'individu cède tout le risque et W_f^{part} la richesse finale s'il se couvre partiellement. Nous notons par π^f la prime correspondant à une couverture complète et par π^p celle relative à couverture partielle à un certain niveau l_p et dont l'indemnité correspondante est notée par $\mathcal{I}_{l_p}(X)$.

Remarquons qu'une couverture complète correspond au niveau maximal l_p^{max} que l'on notera par l_f .

Hypothèses:

1. On travaille avec une prime basée sur l'espérance de l'indemnité: $\pi^p = \mathbb{E}[\mathcal{I}_{l_p}(X)]$ et $\pi^f = \mathbb{E}[\mathcal{I}_{l_f}(X)] = \mathbb{E}[X]$. Donc on a : $W_f^{full} = w - \pi^f$ et $W_f^{part} = w - \pi^p - (X - \mathcal{I}_{l_p}(X))$.
2. L'individu est supposé être averse au risque : u est croissante concave.
3. $0 \leq X \leq L$ où L est la valeur maximale de X ; L est supposée finie.
4. Pour toute couverture partielle, on suppose que la rétention est positive: $x - \mathcal{I}_{l_p}(x) \geq 0$, ce qui équivaut au principe indemnitaire.
5. La fonction de rétention $x - \mathcal{I}_{l_p}(x)$ est en outre supposée croissante.
6. Pour un $x \leq L$ fixé, la fonction indemnitaire $\mathcal{I}_{l_p}(x)$ est considérée continue en l_p . Donc quand $l_p \rightarrow l_f$, $\mathcal{I}_{l_p}(x) \rightarrow x$, par conséquent $\pi^p \rightarrow \pi^f$.

Démonstration. Preuve de la partie 1 (cas $\rho = 0$).

Pour montrer qu'une couverture complète est optimale, il suffit d'établir l'inégalité:

$$\mathbb{E}[u(W_f^{part})] \leq \mathbb{E}[u(W_f^{full})]$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[u(W_f^{part})] &= \mathbb{E}[u(w - \pi^p - (X - \mathcal{I}^p(X)))] \\
&= \int_0^L u[w - \pi^p - (x - \mathcal{I}^p(x))] dF_X(x) \\
&\leq u\left(\int_0^L [w - \pi^p - (x - \mathcal{I}^p(x))] dF_X(x)\right) \text{ par l'inégalité de Jensen, car } u \text{ concave.} \\
&= u(\mathbb{E}[w - \pi^p - (X - \mathcal{I}^p(X))]) \\
&= u(w - \pi^p - \mathbb{E}[X - \mathcal{I}^p(X)]) \\
&= u(w - \pi^p + \mathbb{E}[\mathcal{I}^p(X)] - \mathbb{E}[X]) \text{ .Or } \pi^p = \mathbb{E}[\mathcal{I}^p(X)] \\
&= u(w - \mathbb{E}[X]) = \mathbb{E}[u(W_f^{full})]
\end{aligned}$$

Ce qui implique:

$$\mathbb{E}[u(W_f^{part})] \leq \mathbb{E}[u(W_f^{full})]$$

Donc quel que soit le type de couverture d'assurance, lorsque la prime n'est pas chargée et que la richesse de l'individu est affectée par une seule source de risque, l'assurance optimale est une couverture complète. \square

Pour la preuve de la deuxième partie (cas $\rho > 0$), nous allons montrer que l'utilité espérée de la richesse finale de l'individu en cas de couverture partielle sera toujours supérieure à celle obtenue en cas de couverture complète.

Démonstration. Preuve de la partie 2 (cas $\rho > 0$).

On a: $\pi^f = (1 + \rho)\mathbb{E}[X]$ et $\pi^p = (1 + \rho)\mathbb{E}[\mathcal{I}_p(X)]$

On veut montrer que $\mathbb{E}[u(W_f^{full})] - \mathbb{E}[u(W_f^{part})] < 0$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[u(W_f^{part})] - \mathbb{E}[u(W_f^{full})] &= \int_0^L u(w - \pi^f) - u(w - \pi^p - (x - \mathcal{I}_p(x))) dF_X(x) \\
&= \int_0^L u'(\xi_x^p) [\pi^p - \pi^f + (x - \mathcal{I}_p(x))] dF_X(x) \text{ où } a_x^p \leq \xi_x^p \leq b_x^p \text{ avec :}
\end{aligned}$$

$$a_x^p := \min(w - \pi^f, w - \pi^p - (x - \mathcal{I}_p(x))) \text{ et } b_x^p := \max(w - \pi^f, w - \pi^p - (x - \mathcal{I}_p(x)))$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[u(W_f^{part})] - \mathbb{E}[u(W_f^{full})] &\leq \max_{0 \leq x \leq L} u'(\xi_x^p) \int_0^L (x - \mathcal{I}_p(x)) dF_X(x) - \min_{0 \leq x \leq L} u'(\xi_x^p) (\pi^f - \pi^p) \\
&= \left[\max_{0 \leq x \leq L} u'(\xi_x^p) - (1 + \rho) \right] \left(\mathbb{E}[X] - \mathbb{E}[\mathcal{I}_p(X)] \right) \\
&\leq \left[\max_{0 \leq x \leq L} u'(a_x^p) - (1 + \rho) \right] \left(\mathbb{E}[X - \mathcal{I}_p(X)] \right)
\end{aligned}$$

car $u(\cdot)$ est concave donc $u'(\cdot)$ est décroissante et par définition de a_x^p et de b_x^p .

Or $\mathbb{E}[X - \mathcal{I}^p(X)] \geq 0$ car la fonction de rétention $x - \mathcal{I}^p(x)$ est positive; donc il nous suffit de montrer que:

$$\max_{0 \leq x \leq L} u'(a_x^p) - (1 + \rho) \min_{0 \leq x \leq L} u'(b_x^p) \leq 0 \quad (2.1)$$

Grâce à l'hypothèse de croissance de la fonction de rétention $x - \mathcal{I}^p(x)$, à la concavité de $u(\cdot)$ (donc décroissance de $u'(\cdot)$) et au fait que $0 \leq X \leq L$, on peut écrire:

$$\max_{0 \leq x \leq L} u'(a_x^p) = u' \left(\min \left[w - \pi^f, w - \pi^p - (L - \mathcal{I}_{l_p}(L)) \right] \right) \quad (2.2)$$

$$\min_{0 \leq x \leq L} u'(b_x^p) = u' \left(\min \left[w - \pi^f, w - \pi^p \right] \right) \quad (2.3)$$

En nous servant de notre hypothèse que $\mathcal{I}_{l_p}(x)$ est continue en l_p pour un $x \leq L$ fixé, et en passant à la limite quand $l_p \rightarrow l_f$ on a: $\pi^p \rightarrow \pi^f$ et $L - \mathcal{I}_{l_p}(L) \rightarrow 0$.

Donc $\max_{0 \leq x \leq L} u'(a_x^p) \rightarrow u'(w - \pi^f)$ et $\min_{0 \leq x \leq L} u'(b_x^p) \rightarrow u'(w - \pi^f)$, quand $l_p \rightarrow l_f$.

Par conséquent,

$$\max_{0 \leq x \leq L} u'(a_x^p) - (1 + \rho) \min_{0 \leq x \leq L} u'(b_x^p) \rightarrow u'(w - \pi^f) - (1 + \rho).u'(w - \pi^f) = -\rho.u'(w - \pi^f).$$

Or on sait que $u'(\cdot)$ est positive car u croissante et que $\rho > 0$, cela nous conduit à l'inégalité (2.1) qu'on voulait montrer. \square

Remarquons que nous venons de démontrer que, dans le cas d'un risque isolé, l'assurance optimale est une couverture partielle, lorsque la prime est chargée. Ce résultat ne nous indique rien sur la forme optimale de la couverture partielle.

Cependant, l'optimalité des contrats de franchise a été démontrée par Arrow (1971) dans le cas d'un risque isolé, lorsqu'il y a des frais de chargement. Raviv (1979) va plus loin en montrant que la franchise optimale est croissante lorsque le coût d'assurance (pour l'assureur) augmente plus rapidement que la couverture d'assurance. En revanche, comme montré par Mayers et Smith (1983) [16], si les frais de chargement sont moins que proportionnels alors un contrat avec franchise décroissante est optimal. Toutefois, les contrats avec franchise décroissante ne sont pas commodes du côté de l'assureur dans la mesure où ils peuvent engendrer un aléa moral en incitant à la réalisation de dommages élevés.

Impact de la variation du risque sur le niveau de la franchise optimale:

Notons également que Eeckhoudt, Gollier et Schlesinger (1991) ont appliqué la notion d'*accroissement*

de risque préservant la moyenne telle que introduite par les auteurs Rothschild et Stiglitz (1970, 1971) ¹, aux contrats avec franchise, et ont abouti aux trois résultats suivants:

1. Pour une variation du risque préservant la moyenne sur la franchise et concentrée sur les réalisations de perte élevées (supérieures à la franchise initiale), l'assuré ne va pas modifier le niveau de franchise optimale initiale.
2. Une hausse du risque n'est pas incompatible avec une diminution de la couverture d'assurance. En effet, un accroissement de risque préservant la moyenne et qui n'affecte que les situations de petites pertes (inférieures à la franchise) amène l'assuré à augmenter sa franchise. Ce résultat suppose que l'utilité marginale soit strictement convexe. Ainsi, l'individu fait preuve de prudence en diminuant la prime et en acceptant que la franchise augmente.
3. Pour une variation du risque tendant à accroître les pertes extrêmes tout en préservant la moyenne sur la franchise, l'assuré va augmenter sa couverture d'assurance.

2.3 Remarques sur le théorème de Mossin (cas d'un risque isolé)

Nous précisons que les remarques suivantes portent sur les contrats quote-part.

- Prise en compte du risque de défaut dans le théorème de Mossin

Comme relevé dans Schlesinger H. (2012) [20], le théorème de Mossin (1968) [17] ne devient plus nécessairement vrai lorsqu'on tient compte du risque de défaut de l'assureur. Le risque de défaut d'une compagnie d'assurance est un risque qui subsiste toujours et qui nécessite d'être prise en considération dans les développements, même si la réglementation européenne Solvency 2 limite la probabilité de défaut de l'assureur à 0.5%.

Nous illustrons à travers le contre exemple ci-après, l'impact de la prise en compte de la probabilité de défaut sur les résultats du théorème de Mossin (1968) dans le cas d'un contrat

¹X est préféré à n'importe quel autre risque Z si Z présente plus de poids sur ses queues de distribution que X c-à-d si la densité de Z peut être obtenue à partir du centre de la distribution de X auquel se rajoute la queue de distribution de X.

quote-part; nous allons voir que cet exemple va nous conduire à une couverture partielle (plutôt qu'à une couverture complète) comme assurance optimale lorsque la prime n'est pas chargée.

Soit q la probabilité que l'assureur soit solvable. Supposons que le sinistre survienne avec une probabilité p et que son coût vaut L en cas de survenance.

On distingue donc 3 cas de figure: 1) soit le sinistre ne survient pas, 2) soit le sinistre survient et l'assureur est solvable et 3) soit le sinistre survient et l'assureur n'est pas en mesure de payer l'indemnité. Dans ce cas, la prime et la richesse finale sont données par:

$$\Pi(\alpha) = pq\alpha L \text{ car } \rho = 0;$$

$$W_F =$$

$$\begin{cases} W_1 := w - pq\alpha L & \text{avec proba } 1-p \\ W_2 := w - pq\alpha L - (1-\alpha)L & \text{avec proba } pq \\ W_3 := w - pq\alpha L - L & \text{avec une proba } p(1-q) \end{cases}$$

$$\mathbb{E}[u(W_f)] = (1-p)u(W_1) + pq u(W_2) + p(1-q)u(W_3) \implies \frac{\partial \mathbb{E}[u(W_f(\alpha))]}{\partial \alpha} = -(1-p)pqLu'(W_1 + pq(1-pq)Lu'(W_2) - p(1-q)pqLu'(W_3)$$

On évalue la dérivée première en $\alpha=1$. Si $\alpha=1$ alors $W_1 = W_2 > W_3$ et on a:

$$\frac{\partial \mathbb{E}[u(W_f(\alpha))]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=1} = -(1-p)pqLu'(W_1 + pq(1-pq)Lu'(W_1) - p(1-q)pqLu'(W_3) = p^2qL(1-q)[u'(W_1) - u'(W_3)] < 0 \text{ car } W_1 > W_3$$

$\mathbb{E}[u(W_f)]$ étant concave du fait de la concavité de u , donc $\alpha^* < 1$.

Nous en concluons qu'en l'absence de frais de chargement et face au risque de défaut de l'assureur, l'individu averse au risque ne va pas nécessairement céder tout le risque. Ce résultat n'est pas surprenant car la prise en considération du risque de défaut de l'assureur, ne va pas favoriser la cession de l'entièreté du risque.

- Effets d'un changement de paramètre du modèle sur l'assurance optimale

En économie de l'assurance, il est d'une utilité pratique d'analyser l'effet d'un changement au niveau de la richesse, de l'aversion au risque et/ou du chargement de sécurité, sur la quantité optimale de couverture α^* . Ici, nous nous limitons à mettre en exergue les impacts; pour les démonstrations de ces résultats, jugées peu utiles dans le cadre de notre travail, nous référons le lecteur à Schlesinger (2012) [20].

1. Lorsque la prime d'un contrat quote-part n'est pas chargée, un individu averse au risque détenant une richesse initiale plus importante - toutes choses restant égales par ailleurs - va préférer acheter plus de couverture α^* si sa fonction d'utilité reflète un IARA (Increasing Absolute Risk Aversion : la mesure de Arrow-Pratt du risk d'aversion local $r(y) = -\frac{u''(w)}{u'(w)}$ est croissante en la richesse w).
En revanche, si sa fonction d'utilité reflète un DARA (Decreasing Absolute Risk Aversion), alors il va céder une part moins importante du risque. Autrement dit, sous DARA, la quantité optimale de couverture est décroissante en la richesse initiale. Cela qualifie l'assurance de bien inférieur.
Si la fonction d'utilité reflète un CARA (Constant Absolute Risk Aversion) alors la quantité optimale de couverture reste inchangée, c-à-d une hausse de la richesse initiale n'a pas d'impact sur la part optimale du risque à transférer.
2. En présence d'un chargement strictement positif, l'agent achètera d'autant plus d'assurance que son aversion au risque est élevé, ceteris paribus.
3. Une augmentation du chargement de sécurité ρ n'augmente pas la demande d'assurance si la fonction d'utilité reflète un CARA; mais sous DARA, la demande d'assurance augmente malgré la hausse des prix parce que l'assurance serait perçue comme un bien essentiel en général donc l'individu est prêt à diminuer les revenus attribués aux autres biens pour se couvrir. L'assurance est un bien supérieur.

Dans la suite, nous allons nous placer dans un contexte plus réaliste en prenant en compte l'existence d'un background risk, c'est à dire le cas où la richesse finale de l'individu est affectée par plusieurs sources de risques parmi lesquels se trouvent le risque assurable et au moins un risque non assurable. Par ailleurs, nous mettrons en relief l'impact de la présence d'un background risk corrélé au risque assurable sur les principaux résultats découlant du modèle à risque isolé.

Détermination de l'assurance optimale en présence d'un background risk

L'individu fait face à une autre source de risque non assurable et affectant sa richesse en fin de période, en sus du risque dont il voudrait se faire couvrir à l'aide d'un contrat d'assurance. Dès lors, son patrimoine ne contient plus qu'une seule source de risque mais au moins deux sources d'aléas qui devront être prises en considération en vue de ré-examiner le théorème de Mossin (1968). Notons par Y la variable aléatoire qui représente le montant du background risk à valeurs dans $]0, +\infty[$; X modélisant toujours le montant du risque assurable. La richesse de l'individu est donc $W = w - Y$ où w est la partie déterministe de la richesse. Ici, nous considérons un seul background risk à la fois.

Remarquons que les risques auxquels font face les particuliers sont en général positivement et fortement corrélés, du fait de la forte concentration de leur richesse. De ce fait, il est difficile pour un particulier de créer une stratégie de diversification dans son portefeuille d'actifs. Généralement, si son patrimoine contient un background risk, ce dernier est soit positivement corrélé avec le risque assurable, soit indépendant du risque assurable (voir les exemples ci-dessous). Par conséquent, pour le cas des particuliers, une augmentation du risque assurable va très souvent être accompagnée simultanément d'une hausse du risque associé à son patrimoine.

En revanche, du côté des entreprises, il est plus probable de trouver des risques négativement corrélés.

Quelques exemples de background risks

Avant d'entamer les développements, commençons par illustrer quelques exemples de background risk et le type de lien qu'il pourrait y avoir avec le risque assurable X :

- Exemple 1: Supposons un individu souhaitant s'assurer contre le risque d'invalidité qui pourrait survenir durant sa période d'activité professionnelle. Il fait face à un background risk qui est par exemple le risque de voir une partie de ses revenus non compensée par l'assurance en cas d'invalidité (risque d'une perte partielle de revenus) ou bien le risque lié à son propre capital humain. En effet, même s'il a souscrit auprès d'un assureur une couverture invalidité contre le risque de perte de revenus, cette assurance ne couvre pas nécessairement l'entièreté du manque à gagner et il n'en demeure pas moins que sa réactivation puisse être accompagnée de séquelles à long terme pouvant réduire ses capacités (donc ses revenus, ou encore l'espoir d'une promotion en vue). Dans notre exemple, X et Y sont positivement dépendants.
- Exemple 2: (Cas d'une indépendance)
Un particulier détenant des actions fait face au risque d'investissement (=background risk) qui, néanmoins, n'est pas corrélé au risque d'accident par exemple. C'est un cas où le background risk est indépendant du risque assurable. Toutefois, cette indépendance n'est pas sans effet sur la part optimale du risque qu'il va céder.
- Exemple 3: (Cas de dépendance positive)
Un individu souhaitant se couvrir contre le risque d'incendie, mais que le marché de l'assurance ne couvre pas les dégâts engendrés sur les objets d'antiquité en cas de sinistre (parce que cela risque d'être trop coûteux pour l'assureur ou engendre une prime trop élevée pour l'assuré). Un incendie d'une grande ampleur va potentiellement être accompagné d'une perte importante sur ses biens d'antiquité et en même temps d'une grande réalisation de X .
- Exemple 4: (Cas de dépendance négative)
Considérons un producteur de riz faisant face au risque d'inondation de sa maison qu'il souhaiterait transférer à un assureur. En cas de forte pluie, le risque d'inondation de sa maison est plus grand mais en même temps sa production de riz devient plus abondante, si l'on suppose qu'une pluie ne peut avoir un effet délétère sur la récolte de riz. Dans ce cas-ci, une hausse du risque assurable (risque d'inondation) va simultanément être accom-

pagnée d'une baisse du background risk (risque d'une faible récolte). Par conséquent, une compensation se crée déjà au niveau de son portefeuille d'actifs.

Nous allons, à présent, aborder la généralisation du théorème de Mossin en présence d'un background risk corrélé avec le risque assurable, en adoptant une démarche graduelle pour fournir au lecteur une vision holistique et lui faire percevoir les tenants et aboutissants de la détermination de l'assurance optimale en présence d'un background risk.

Pour ce faire, nous allons commencer dans un premier lieu, par le cas d'une quote-part car c'est avec ce type de couverture qu'a démarré effectivement la prise en compte de plusieurs sources de risques dans l'étude de l'assurance optimale, en passant par la corrélation linéaire puis par des structures de dépendance stochastiques entre les risques. C'est suite à cela que d'autres études et raffinements ont été réalisés, allant de différents types de couvertures d'assurance spécifiques à un type quelconque de couverture. A travers les contrats quote-part, nous allons également faire percevoir au lecteur pourquoi le coefficient de corrélation linéaire n'est pas une mesure adéquate pour étudier l'assurance optimale en présence d'un background risk, par conséquent la nécessité de recourir à des structures de dépendance plus élaborées (stochastiques).

De surcroît, avec les quote-share, la détermination de l'assurance optimale est relativement moins complexe que si l'on considère un type quelconque de couverture; notre objectif étant de mettre en relief plus simplement l'impact de la présence d'un background risk sur l'assurance optimale en comparant avec le cas d'une seule source de risque et en fournissant des interprétations concrètes du résultat du « Generalized Mossin's theorem ».

Dans un second temps, nous considérerons la question de l'assurance optimale, cette fois-ci en regardant les contrats avec franchise. Nous accordons un intérêt tout particulier à ce type de contrat, parce que non seulement, comme nous le verrons plus loin (voir section 3.3) , il s'est avéré que la forme optimale de couverture est un contrat avec franchise.

La seconde raison justifiant le choix d'examiner les contrats avec franchise est de mettre en évidence via des contre-exemples concrets l'importance de bien identifier la structure de dépendance stochastique lorsqu'il est question de déterminer l'assurance optimale en présence d'un background risk pour un type de couverture spécifique. Comme nous le verrons à travers lesdits contre-exemples, le choix d'une mauvaise structure de dépendance pourrait conduire à des conclusions fausses sur la décision d'assurance, par conséquent à une mauvaise gestion du risque.

Enfin, nous traiterons, dans un cadre plus générale, de la détermination de la forme optimale de couverture en partant d'un type de couverture quelconque admissible.

3.1 Assurance optimale en présence d'un background risk: cas des contrats d'assurance proportionnelle

3.1.1 Hypothèses de base et notations

Soit X une variable aléatoire positive modélisant le montant du risque contre lequel, un individu détenant une richesse initiale $w > 0$ et exposé à un background risk $0 \leq Y < +\infty$, voudrait se couvrir à l'aide d'un contrat quote-part. Nous notons par $W = w - Y$ sa richesse (aléatoire) en fin de période.

$F(x,y)$ représente la distribution jointe de X et Y avec pour distributions marginales $F_X(x)$ et $F_Y(y)$; $f(x,y)$ désigne la densité jointe des deux variables aléatoires. Soit $\alpha \geq 0$ la part du risque à transférer à l'assureur.

On note par $\rho \geq 0$ le coefficient de chargement de sécurité que l'on suppose proportionnel à l'indemnité attendue de la part de l'assureur. Donc, la prime à payer par l'individu est $\mathcal{P} = (1 + \rho)\mathbb{E}[\alpha X]$ et la richesse finale de l'individu vaut:

$$W_f = w - Y - (1 + \rho)\mathbb{E}[\alpha X] - (1 - \alpha)X \quad (3.1)$$

$$\text{Si } \rho = 0 : W_f = W - \alpha\mathbb{E}[X] - (1 - \alpha)X \quad (3.2)$$

Soit α^* la part optimale du risque que l'individu doit céder. Le résultat suivant, établi dans Doherty & Schlesinger (1983) [9], constitue les prémices de la généralisation du théorème de Mossin en présence de multiples sources de risque.

3.1.2 Vers la généralisation du théorème de Mossin

Lemme 3.1.1. *Sous notre modèle, lorsque la prime n'est pas chargée, et que la distribution jointe de (X, Y) est gaussienne bivariée, alors tout individu averse au risque va:*

- se céder une partie du risque si le risque assurable X et le background risk Y sont négativement corrélés: $COV(X, Y) < 0 \implies \alpha^* < 1$
- céder tout le risque si le risque assurable X et le background risk Y ne sont pas corrélés ou sont positivement corrélés :
 $COV(X, Y) \geq 0 \implies \alpha^* = 1$

Remarque. 1. $COV(X, Y) = 0$ peut correspondre au cas d'une absence de background risk ou au cas d'une présence de background risk indépendant.

2. On constate que ce résultat généralise bien le théorème de Mossin; en effet, le cas d'une seule source de risque correspond ici au cas $cov(X, Y) = 0$. On retrouve ainsi le résultat de la partie 1 du théorème de Mossin qui nous dit que l'assurance optimale est une couverture complète. En revanche, lorsque la richesse de l'individu comporte plusieurs sources d'aléa, le lemme (3.1.1) nous indique clairement que la décision d'assurance va dépendre du type de dépendance entre X et Y .
3. Le grand point faible du lemme (3.1.1) est qu'il repose sur la forte hypothèse que la distribution jointe est une gaussienne bivariée. Or nous savons que ceci est assez restrictif et n'est généralement pas le cas. Plus loin, comme nous l'illustrerons à travers des contre-exemples, nous verrons que l'absence de l'hypothèse de normalité, va contredire le résultat du lemme (3.1.1) si l'on travaille avec la corrélation linéaire comme mesure de dépendance. Cela nous conduit à la conclusion selon laquelle le coefficient de corrélation n'est pas une mesure adéquate pour généraliser le théorème de Mossin lorsqu'on est en présence d'un background risk. C'est ainsi qu'une autre structure de dépendance plus élaborée que la corrélation linéaire, permettant de travailler avec une distribution quelconque, a été identifiée dans Hong et Al. (2011) [18] afin de déterminer la solution optimale pour les contrats quote-part.

Démonstration. (du lemme (3.1.1))

$$\mathbb{E}[u(W_f)](\alpha) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} u(w - y - \alpha\mathbb{E}(X) - (1 - \alpha)x) f(x, y) dx dy \quad (3.3)$$

Les conditions du premier-ordre et du second ordre sont données par:

$$(\mathbb{E}[u(W_f)](\alpha))' = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} u'(w - y - \alpha\mathbb{E}(X) - (1 - \alpha)x)(x - \mathbb{E}(X)) f(x, y) dx dy = 0 \quad (3.4)$$

$$(\mathbb{E}[u(W_f)](\alpha))'' = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} u''(w-y-\alpha\mathbb{E}(X)-(1-\alpha)x)(x-\mathbb{E}(X))^2 f(x,y) dx dy < 0$$

Cette dérivée seconde est négative car $u'' \leq 0$; donc $\mathbb{E}[u(W_f)](\alpha)$ est concave.

D'autre part, en partant de (3.4), on évalue l'expression de la dérivée de $\mathbb{E}[u(W_f)](\alpha)$ en $\alpha = 1$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbb{E}[u(W_f(\alpha))]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=1} &= \mathbb{E}[u'(W - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))] \\ &= \mathbb{E}[u'(W - \mathbb{E}(X))] \cdot (\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(X)) + COV(u'(W - \mathbb{E}(X)), X) \\ &\quad \text{car } COV(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \\ \implies \frac{\partial \mathbb{E}[u(W_f(\alpha))]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=1} &= COV(u'(W - \mathbb{E}(X)), X) \end{aligned} \quad (3.5)$$

Par hypothèse (X, Y) suit une gaussienne bivarirée alors $(W - \mathbb{E}(X), X)$ suit une gaussienne bivarirée aussi. On peut donc appliquer le théorème de Rubinstein (1976)¹ au couple de v.a $(X, W - \mathbb{E}(X))$:

$$\frac{\partial \mathbb{E}[u(W_f(\alpha))]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=1} = \mathbb{E}[u''(W - \mathbb{E}(X))] COV(X, W)$$

Du fait de la concavité de u (par conséquent de celle de $\mathbb{E}[u(W_f(\alpha))]$) on a:

$$\begin{aligned} \text{Si } COV(X, W) < 0 \text{ alors } \frac{\partial \mathbb{E}[u(W_f(\alpha))]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=1} &> 0, \text{ donc } \alpha^* \geq 1 \\ \text{Si } COV(X, W) > 0 \text{ alors } \frac{\partial \mathbb{E}[u(W_f(\alpha))]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=1} &< 0, \text{ donc } \alpha^* < 1 \\ \text{Si } COV(X, W) = 0 \text{ alors } \frac{\partial \mathbb{E}[u(W_f(\alpha))]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=1} &= 0, \text{ donc } \alpha^* = 1 \end{aligned}$$

□

A travers le contre-exemple ci-dessous, il est mis en évidence la non-adéquation de la mesure de corrélation pour généraliser le théorème de Mossin (1968) lorsqu'on prend en compte la présence d'un background risk. Pour ce faire, en partant d'un risque assurable X et d'un background risk Y positivement corrélés avec (X, Y) suivant une distribution quelconque, on arrive à montrer que la décision optimale d'assurance est une couverture partielle et non une couverture pleine, ce qui est en contradiction avec le résultat du lemme (3.1.1).

Supposons $w = 3$, $Y = -Z$ (donc $W = Z + 3$) et $X = -12Z^2 + 10Z + 2$ où Z est uniformément distribué sur $[0, 1]$, et que la fonction d'utilité est de type puissance $u = \sqrt{x}$.

¹Si X et Y sont normalement distribués, alors $cov(u'(Y), X) = \mathbb{E}u''(Y)cov(Y, X)$

Alors: $\mathbb{E}(X) = -12(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}) + 10(\frac{1}{2}) + 2 = 3$

$$\text{Corr}(X, Y) = \frac{\text{cov}(X, Y)}{\sigma_X \sigma_Y} = -0.5443$$

$$\text{cov}(X, Y) = \mathbb{E}(-XZ) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(-Z) = -\mathbb{E}(XZ) + \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Z)$$

$$\text{Or } \mathbb{E}(Z) = \frac{1}{2} \quad \mathbb{E}(X) = 3 \quad \mathbb{E}(XZ) = \mathbb{E}[-12Z^2 + 10Z + 2Z^2] = -12(\frac{1}{2}) + 10(\frac{1}{3}) + 2(\frac{1}{2}) = \frac{4}{3}$$

$$\implies \text{cov}(X, Y) = -\frac{4}{3} + 3(\frac{1}{2}) = \frac{1}{6} > 0$$

$$\begin{aligned} \text{D'autre part, on a : } \frac{\partial \mathbb{E}[u(W_f(\alpha))]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=1} &= \mathbb{E}[u'(W - \mathbb{E}(X))(X - \mathbb{E}(X))] \\ &= \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}Z^{-\frac{1}{2}}(X - 3)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[-6Z^{\frac{3}{2}} + 5Z^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}Z^{-\frac{1}{2}}\right] \\ &= \int_0^1 \left(-6z^{\frac{3}{2}} + 5z^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}z^{-\frac{1}{2}}\right) dz = -\frac{1}{15} < 0 \end{aligned}$$

Donc l'assurance optimale une couverture l'assurance partielle.

3.1.3 Le « Generalized Mossin's Theorem » et ses enseignements en termes de gestion du risque

3.1.3.1 Quelques notions de dépendance stochastique:

Commençons par introduire les trois notions de dépendance stochastique ci-dessous définies par Lehmann (1966) [13] et Wright (1987):

Définition 3.1.1. Une variable aléatoire Z est dite « **positively regression dependent** » d'une autre variable aléatoire K , noté par **Z PRD K** si:

$$F_Z(Z|K = k) = \mathbb{P}[Z \leq z|K = k] \text{ est une fonction décroissante en } k. \quad (3.6)$$

Concrètement, considérons par exemple $K \equiv$ background risk et $Z \equiv$ risque assurable, alors une dépendance positive en régression entre les deux risques signifie que plus le BR prend des réalisations grandes, moins il probable que le risque assurable dépasse une certaine valeur z .

Par ailleurs, remarquons qu'il y a une autre façon équivalente de voir la définition de la PRD : $\mathbb{E}[v(Z)|K = k]$ est croissante en k pour toute fonction $v(\cdot)$ croissante.

De même, on peut définir la « negative regression dependence » comme suit:

Définition 3.1.2. Une variable aléatoire Z est dite « **negatively regression dependent** » d'une autre variable aléatoire K , noté par **Z NRD K** si:

$$F_Z(Z|K = k) = \mathbb{P}[Z \leq z|K = k] \text{ est une fonction croissante en } k. \quad (3.7)$$

ou, de manière équivalente $\mathbb{E}[v(Z)|K = k]$ est décroissante en k pour toute fonction $v(\cdot)$ croissante.

Définition 3.1.3. Une variable aléatoire Z est dite « **negatively quadrant dependent** » de K , noté par **Z NQD K** si:

$$F(z, k) \leq F_Z(z)F_K(k) \quad \forall z, k. \quad (3.8)$$

Remarque. Une autre façon équivalente de définir la « negative quadrant dependence » est la suivante:

$$Z \text{ NQD } K \text{ si } F_Z(z|K \leq k) \leq F_Z(z) \quad \forall z, k. \quad (3.9)$$

On voit que la « quadrant dependence » est une mesure de dépendance symétrique, ce qui n'est pas en général le cas pour les mesures de dépendance stochastique.

Si l'on prend $K \equiv$ Background risk et $Z \equiv$ risque assurable alors les deux risques sont NQD signifie: sachant que le background risk diminue alors la probabilité que le risque assurable diminue également devient plus petite.

Définition 3.1.4. Une variable aléatoire Z est dite « **strongly negatively expectation dependent** » de K , noté par **Z SNED K** si:

$$\mathbb{E}(Z|K = k) \text{ est une fonction décroissante en } k \quad (3.10)$$

Définition 3.1.5. Une variable aléatoire X est dite « **strongly positively expectation dependent** » de K , noté par **Z SPED K** si:

$$\mathbb{E}(Z|K = k) \text{ est une fonction croissante en } k \quad (3.11)$$

Notons, à présent, le lien entre ces mesures et leurs relations avec la covariance:

- **Z SNED K** \implies **COV(Z,K) < 0** (cf. dans Brumelle (1976))

- $\mathbf{Z NQD K} \implies \mathbf{COV(Z,K)} < \mathbf{0}$ (cf. Dans Lehmann (1966) [13])
- $\mathbf{Z NRD K} \implies \mathbf{Z NQD K}$.

Par ailleurs, il est important de mentionner qu'une version faible de la définition de la « expectation dependence » a été introduite par Wright(1987). Cette version faible nous intéressera tout particulièrement pour la généralisation du théorème de Mossin:

Définition 3.1.6. Une variable aléatoire Z est dite « **negatively expectation dependent** » d'une autre variable aléatoire K , noté par $\mathbf{Z NED K}$, si:

$$\mathbb{E}(Z|K \leq k) \geq \mathbb{E}(Z) \quad \forall k. \quad (3.12)$$

Une variable aléatoire Z est dite « **positively expectation dependent** » d'une variable aléatoire K , noté par $\mathbf{Z PED K}$, si:

$$\mathbb{E}(Z|K \leq k) \leq \mathbb{E}(Z) \quad \forall k \quad (3.13)$$

Le lemme suivant nous donne une condition nécessaire et suffisante pour avoir une « positive/negative expectation dependence » (version faible) entre deux variables aléatoires. De surcroît, une conséquence intéressante et directe de ce lemme est que la « positive/negative quadrant dependence » implique la version faible de la « positive/negative expectation dépendance » :

$$\mathbf{Z NQD (resp. PQD) K} \implies \mathbf{Z NED (resp. PED) K}$$

Lemme 3.1.2. $X \mathbf{NED} Y$ si et seulement si $\mathbf{COV}(X, g(Y)) \geq 0$ pour toute fonction g à valeurs réelles, positive et décroissante.

$X \mathbf{PED} Y$ si et seulement si $\mathbf{COV}(X, g(Y)) \leq 0$ pour toute fonction g à valeurs dans \mathbb{R} , positive et décroissante.

Démonstration. Par définition de la covariance,

$$\mathbf{COV}(X, g(Y)) = \mathbb{E}[Xg(Y)] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[g(Y)]$$

Par intégrations par partie, on peut montrer que:

$$\mathbb{E}[Xg(Y)] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[g(Y)] = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} [F(x, y) - F_X(x)F_Y(y)] dx dg(y)$$

En effet, d'une part une double intégration par parties sur le 1^{er} terme nous donne:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[Xg(Y)] &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} xg(y) dF(x, y) = - \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} g(y) dx dF(x, y) \\ &= - \int_0^{+\infty} \left(- \int_0^{+\infty} F(x, y) dg(y) \right) dx \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} F(x, y) dg(y) dx\end{aligned}$$

D'autre part:

$$\mathbb{E}[X] \cdot \mathbb{E}[g(Y)] = \left(- \int_0^{+\infty} F_X(x) dx \right) \cdot \left(- \int_0^{+\infty} F_Y(y) dg(y) \right) = \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} F_X(x) F_Y(y) dg(y) dx.$$

$$\begin{aligned}\text{Donc } \mathbb{E}[Xg(Y)] - \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[g(Y)] &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} [F(x, y) - F_X(x)F_Y(y)] dx dg(y) \\ &= \int_0^{+\infty} F_Y(y) \left[\int_0^{+\infty} (F_X(x|Y \leq y) - F_X(x)) dx \right] dg(y) \\ &= \int_0^{+\infty} F_Y(y) \alpha(y) dg(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{où } \alpha(y) &:= \int_0^{+\infty} (F_X(x|Y \leq y) - F_X(x)) dx = \int_0^{+\infty} -\bar{F}_X(x|Y \leq y) dx + \int_0^{+\infty} \bar{F}_X(x) dx \\ &= -\mathbb{E}[X|Y \leq y] + \mathbb{E}[X] = -(\mathbb{E}[X|Y \leq y] - \mathbb{E}[X])\end{aligned}$$

Or par définition $X \text{ NED } Y \implies \mathbb{E}[X|Y \leq y] - \mathbb{E}[X] \geq 0$, donc $\alpha(y) \leq 0$. Par conséquent, $COV(X, g(Y)) \leq 0$.

Dans le sens inverse, si $COV(X, g(Y)) \leq 0$ pour toute fonction g décroissante, donc en particulier pour la fonction $g_0(y) = I_{y \leq y_0}$ où y_0 est choisi arbitrairement. Ce qui nous donne:

$$\begin{aligned}cov(X, g_0(Y)) &= \int_0^{+\infty} F_Y(y) \alpha(y) dg_0(y) \\ &= -F_Y(y_0 \alpha(y_0)) \geq 0.\end{aligned}$$

Donc on a $\alpha(y) \leq 0 \forall y$ tel que $F_Y(y) > 0$. Ce qui implique la « negative expectation dependence ». La démonstration est similaire pour le cas de la « positive expectation dependence ». \square

Remarque. Deux résultats importants découlent directement du lemme (3.1.2):

- $X \text{ NED } Y \implies COV(X, Y) \leq 0$.

- D'une part, la « quadrant dependence » implique la « expectation dependence ». D'autre part, on avait que la « regression dependence » implique la « quadrant dependence », ce qui permet d'établir le lien suivant entre ces trois types de dépendance:

$$\mathbf{NRD} \implies \mathbf{NQD} \implies \mathbf{NED} \quad (3.14)$$

Idem pour la dépendance positive.

On voit que la version faible de la « expectation dependence », est plus forte que la corrélation linéaire mais elle a l'avantage d'être la structure de dépendance stochastique la moins forte parmi les trois évoquées ici. En d'autres termes, la famille des distributions dépendantes au sens de la « expectation dependence » (version faible) inclut celle des distributions « quadrant dependent » et celle des distributions « regression dependent ». La version faible de la « expectation dependence » a été identifiée dans les travaux de Hong et Al (2011). [18] comme structure de dépendance stochastique, constituant une condition nécessaire et suffisante à la généralisation du Théorème de Mossin pour les contrats quote-part, appelée le « Generalized Mossin's Theorem ».

3.1.3.2 Le « Generalized Mossin's Theorem »

Théorème 3.1.3. (*Generalized Mossin's Theorem*): *Si la prime d'un contrat quote-part n'est pas chargée, tout individu averse au risque va :*

- acheter une couverture partielle ($\alpha^* < 1$) si et seulement si le risque assurable X est « negatively expectation dépendant » du background risk Y ($X \text{ NED } Y$)
- céder tout le risque ($\alpha^* = 1$) si et seulement si le risque assurable X « positively expectation dépendant » du background risk Y ($X \text{ PED } Y$).

Interprétations et enseignements du « Generalized Mossin's Theorem » :

1. La première partie du théorème (3.1.3) décrit le cas des particuliers car ces derniers font face à des risques qui sont très souvent positivement corrélés et n'ont en général pas la possibilité

de générer une stratégie de hedge dans leur portefeuille d'actifs, pour se permettre de se couvrir partiellement ou bien de renoncer à l'assurance lorsque la prime n'est pas chargée. Même si le particulier investit dans des actions, ce qui engendre un risque d'investissement, en l'occurrence le background risk, ce dernier sera très probablement indépendant du risque assurable. Donc un particulier est en général contraint de céder tout le risque si la prime n'est pas chargée. Remarquons que la partie 1 du théorème de Mossin reste inchangée pour le cas des particuliers, nonobstant la présence d'un background risk. La seule différence est la structure de dépendance stochastique introduite pour mesurer le type de dépendance.

Par ailleurs, notons d'ores et déjà que, si la prime comporte un chargement, l'assurance optimale reste une couverture partielle pour un particulier tout comme pour une entreprise. Nous le verrons dans la suite lorsqu'on traitera la question de la forme optimale de couverture.

2. Quant à la seconde partie du théorème (3.1.3), elle est toute particulièrement intéressante en termes de Entreprise Risk Management (ERM) car elle concerne davantage le cas des entreprises dans la mesure où ces dernières disposent généralement d'un portefeuille d'actifs plus vaste avec une possibilité de se hedger sur le marché. Par conséquent, à l'inverse des particuliers, on peut facilement trouver dans leurs portefeuilles d'actifs des risques négativement dépendants. Ce résultat illustre bien l'influence de la présence d'un background risk interagissant négativement avec le risque assurable et surtout l'importance de sa prise en compte dans la détermination de la décision optimale d'assurance et pour une bonne gestion du risque: le background risk contribue, en effet, à compenser (hedger) une partie du risque que l'agent voudrait transférer, et donc à réduire la part optimale à céder, contrairement au cas d'une absence ou omission de background risk où la cession totale s'impose, lorsqu'il n'y a pas de frais de chargement. Mieux encore, si le background risk constitue un risque symétrique au risque couvrable, alors l'entreprise devrait conserver les deux risques dans son portefeuille plutôt que de supporter des coûts de transaction inutiles en cherchant à le transférer.

Intuitivement, on peut donc dire que c'est grâce à une sorte de "homemade insurance" qui se crée naturellement dans le portefeuille d'actifs d'une entreprise, que la cession partielle du risque ou le renoncement à l'assurance devient plus optimal que le transfert de sa totalité à un assureur, si la prime n'est pas chargée.

Une autre raison de l'importance de prendre en compte tout le portefeuille d'actifs dans la

détermination de l'assurance optimale est que la contribution incrémentale du risque assurable au risque total du portefeuille est plus petite que si l'on considérait le risque X isolément. Cela nous conduit à dire que les décisions d'assurance et les décisions financières ne devraient pas être dissociées.

Par ailleurs, notons que le résultat de la seconde partie du théorème peut également être interprété sous l'angle de la théorie économique de l'assurance, notamment à l'aide des travaux de Pratt (1982) et de Doherty & Schlesinger (1983 c) [8]. Dans Pratt (1982), il a été montré que lorsqu'un individu averse au risque fait face à une seule source de risque, alors il est prêt à payer n'importe quel prix pour transférer la totalité de son risque. En revanche, cela n'est plus vrai lorsque sa richesse est affectée par plusieurs sources d'aléa et qu'il y a une dépendance négative entre le(s) background risk(s) et le risque assurable: dans ce cas, l'individu n'est pas prêt à payer plus que la prime pure pour couvrir l'intégralité du risque assurable. Cette situation pourrait conduire à une prime négative, c-à-d qu'une sorte de compensation serait demandée à l'assureur par l'individu pour la cession totale du risque. Une prime ne pouvant être négative dans la réalité, l'individu va céder une part $\alpha \in [0, 1[$.

3. Enfin, nous notons que le résultat du "Generalized Mossin's theorem" pourrait également être appliqué à l'étude de la décision de réassurance pour un assureur averse aux (grands) risques. L'assureur, détenant un portefeuille de souscriptions risquées, et cherchant à maintenir un certain équilibre entre les risques qu'il a acceptés et la valeur espérée de tous les cash-flows, ne devrait prendre une décision de réassurance indépendamment de son activité d'investissement qui est soumis au risque d'investissement (= background risk). Cela nous rappelle toute la philosophie de la gestion d'actif/passif pour un assureur. Trois cas de figure se présentent:

- Si les résultats de souscription et d'investissement sont négativement dépendants, alors les deux portefeuilles se hedgent partiellement. Cette diversification pourrait ne pas être suffisamment forte pour se passer de la réassurance, mais elle va contribuer à baisser la part de son risque à céder au réassureur par rapport à celle qu'il aurait cédée si son portefeuille d'investissement n'avait pas été pris en compte dans la décision de réassurance.
- Dans le cas d'une dépendance positive entre les résultats d'investissement et ceux de souscriptions, il devra acheter plus de réassurance, ce qui aura pour effet de le protéger

partiellement contre un mauvais résultat d'investissement.

- Enfin, dans le cas où les résultats d'investissement et de souscription sont indépendants, la décision de réassurance n'est pas affectée par son activité d'investissement. En revanche, en combinant les deux portefeuilles, le risque total, mesuré à l'aide d'une mesure de risque sous-additive, va être plus petit ou égal à la somme des risques individuels. Ainsi, grâce à l'effet de diversification, la quantité optimale de réassurance à acheter en sera réduite.

Démonstration. (du Generalized Mossins theorem)

On avait établi à l'équation (3.5) que :

$$\frac{\partial \mathbb{E}[u(W_f(\alpha))]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=1} = COV(u'(W - \mathbb{E}(X)), X)$$

Du fait de la concavité de u , on a u' est une fonction positive et décroissante. Ce qui permet d'appliquer le lemme (3.14) en prenant $g = u'$ et $Y = W - \mathbb{E}(X)$:

$$\frac{\partial \mathbb{E}[u(W_f(\alpha))]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=1} \geq 0 \iff COV(u'(W - \mathbb{E}(X)), X) \geq 0 \iff X \text{ est NED de } W. \text{ Donc } \alpha^* \geq 1.$$

$$\frac{\partial \mathbb{E}[u(W_f(\alpha))]}{\partial \alpha} \Big|_{\alpha=1} < 0 \iff COV(u'(W - \mathbb{E}(X)), X) < 0 \iff X \text{ est PED de } W. \text{ Donc } \alpha^* < 1.$$

□

La « strongly expectation dependence » (SED) impliquant la version faible c'est à dire l'« expectation dependence », le corollaire suivant nous fournit une condition nécessaire (mais pas suffisante) à la généralisation du théorème de Mossin pour la classe des contrats quote-part :

Corollaire 3.1.3.1. *Si la prime d'un contrat quote-part n'est pas chargée, tout individu averse au risque va :*

- acheter une couverture partielle ($\alpha^* < 1$) si le risque assurable X est « strongly negatively expectation dependent » du background risk Y (X SNED Y).
- tout céder tout le risque ($\alpha^* = 1$) si le risque assurable X est « strongly positively expectation dependent » du background risk Y (X SPED Y).

Maintenant, nous nous penchons sur le cas des contrats avec franchise pour les motivations exposées en début de section.

3.2 Assurance optimale en présence d'un background risk: cas des contrats avec franchise

Un contrat avec franchise est souvent apprécié car il représente un bon compromis pour un agent économique qui veut se couvrir contre un risque tout en limitant le coût de l'assurance. Du côté de l'assureur, ce type de couverture incite ses assurés à gérer eux-mêmes les petits sinistres. La question de l'assurance optimale pour la classe des contrats avec franchise, en présence de multiple sources de risques, avait été étudiée par Aboudi & Thon (1995) [2] uniquement dans le cas où la prime n'est pas chargée. Or dans Hong L. (2018) [11], l'auteur a examiné également le cas d'un chargement non nul. Par ailleurs, Doherty & Schlesinger (1983b) [8] ont montré que lorsque la prime est chargée, alors l'assurance optimale est une couverture partielle (franchise >0) mais ils s'étaient restreints au cas où le risque assurable et le background risk sont indépendants. Tout récemment, Hong L. (2018) [11] montre qu'en réalité la partie 2 de théorème de Mossin reste valide indépendamment de la structure de dépendance entre les risques et indépendamment du degré d'aversion au risque de l'individu.

Concernant l'extension de la partie 1 du théorème de Mossin (1968) en présence d'un background risk, pour la classe des contrats avec franchise, Hong L. (2018) [11] identifie la « quadrant dépendance » comme mesure de dépendance adéquate entre le risque assurable et le risque non assurable. Notons qu'en lieu et place de cette structure de dépendance, Aboudi & Thon (1995) [2] avait eu recours à la « regression dependence » qui est structure de dépendance plus forte que la « quadrant dependence ». En ce sens, Hong L. (2018) [11] améliore les travaux de Aboudi & Thon (1995) [2] ainsi que ceux de Doherty & Schlesinger (1983b) [8] relatifs à la détermination de la couverture optimale pour la classes des contrats avec franchise, lorsqu'on est en présence de plusieurs sources de risque.

3.2.1 Hypothèses de base et notations

Soit $d \geq 0$ la franchise. Nous supposons que le chargement de sécurité est proportionnel à la prime pure.

$$\text{La prime est donnée par : } \mathcal{P}(d) = (1 + \rho)\mathbb{E}[(X - d)_+] = \int_d^{+\infty} (X - d)_+ dF_X(x) \quad (3.15)$$

$$\mathbb{E}[u(W_f(X, Y))] = \mathbb{E}[u(w - Y - \mathcal{P}(d) - \min(X, d))] = \int_{[0, +\infty] \times [0, +\infty]} u(w - y - \mathcal{P}(d) - \min(x, d)) dF(x, y) \quad (3.16)$$

Nous allons, à présent, illustrer que l'« expectation dependence » (ED), utilisée dans Lu et Al. (2011) [18] pour la classe des contrats d'assurance proportionnelle, n'est pas appropriée pour ré-examiner le cas des contrats avec franchise et surtout que ce type de dépendance nous mène à des conclusions fausses dans notre décision d'assurance.

3.2.2 Quelle structure de dépendance stochastique pour les contrats avec franchise?

Regardons les deux exemples suivants:

- L'exemple 1 ci-après illustre que le fait que le risque assurable et le background risk peuvent être « positively expectation dependent » (X PED Y) sans que la couverture optimale pour se protéger contre le risque X à l'aide d'un contrat offrant une possibilité de franchise $d=15$, ne corresponde à la cession totale du risque mais plutôt à une couverture partielle.
- L'exemple 2 est le cas inverse: les deux risques auxquels fait face l'individu sont « negatively expectation dependent » (X NED Y) mais l'assurance optimale est une couverture complète et non une couverture partielle.

Nous allons développer l'exemple 1 et laissons au lecteur le soin de vérifier l'exemple 2.

Exemple 1:

Supposons que:

- le risque X à assurer peut prendre les valeurs 10, 100 ou 120: $X=(10, 100, 120)$
- l'individu détient richesse initiale $w = 400$ et fait face à un background risk Y pouvant prendre les valeurs 150, 200 ou 210: $Y=(150, 200, 210)$; sa fonction d'utilité est $u(x) = \sqrt{x}$
- la distribution jointe de X et Y est donnée par la matrice:

$$\begin{pmatrix} p(x_1, y_1) & p(x_1, y_2) & p(x_1, y_3) \\ p(x_2, y_1) & p(x_2, y_2) & p(x_2, y_3) \\ p(x_3, y_1) & p(x_3, y_2) & p(x_3, y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.1 & 0 \\ 0.7 & 0 & 0.1 \end{pmatrix}$$

Nous devons vérifier que: $\mathbb{E}[X|Y \leq y] \leq \mathbb{E}[X] \forall y \in \{y_1, y_2, y_3\}$

$$\mathbb{E}[X] = x_1 p_X(x_1) + x_2 p_X(x_2) + x_3 p_X(x_3) = 10 \cdot 0.1 + 100 \cdot 0.1 + 120 \cdot 0.8 = 107$$

Pour $y=150$:

$$\mathbb{E}[X|Y \leq 150] = \frac{10(0.1) + 100(0) + 120(0.7)}{0.1 + 0.7} = 106.25 \leq 107$$

Pour $y=200$:

$$\mathbb{E}[X|Y \leq 200] = \frac{10(0.1) + 100(0.1) + 120(0.7)}{0.1 + 0.7 + 0.1} = 104 \leq 107$$

Pour $y=210$:

$$\mathbb{E}[X|Y \leq 210] = \frac{10(0.1) + 100(0.1) + 120(0.8)}{0.1 + 0.7 + 0.1 + 0.1} = \mathbb{E}[X]$$

Donc on a X PED Y.

D'autre part, on a:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u(W_f(0))] &= \mathbb{E}[u(W - \mathcal{P}(0) - \min(X, 0))] = \mathbb{E}[u(W - \mathbb{E}(X))] \\ &= 0.8\sqrt{150 - 107} + 0.1\sqrt{200 - 107} + 0.1\sqrt{210 - 107} = 7.2252 \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[u(W_f(15))] = \mathbb{E}[u(w - Y - \mathcal{P}(15) - \min(X, 15))]$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}(15) &= \mathbb{E}[(X - 15)_+] = \mathbb{E}[X - \min(X, 15)] = (10 - 10)0.1 + (100 - 15)0.1 + (120 - 15)0.8 = 92.5 \\
\implies \mathbb{E}[u(W_f(15))] &= \left(\sqrt{400 - 150 - 92.5}(0.1) + \sqrt{400 - 200 - 92.5}(0) + \sqrt{400 - 210 - 92.5}(0) \right) \\
&\quad + \left(\sqrt{400 - 150 - 92.5 - 15}(0) + \sqrt{400 - 200 - 92.5 - 15}(0.1) + \sqrt{400 - 210 - 92.5 - 15}(0) \right) \\
&\quad + \left(\sqrt{400 - 150 - 92.5 - 15}(0.7) + \sqrt{400 - 200 - 92.5 - 15}(0) + \sqrt{400 - 210 - 92.5 - 15}(0.1) \right) \\
&= 11.4812 > \mathbb{E}[u(W_f(0))]
\end{aligned}$$

Donc on en conclut que l'individu va céder une partie du risque X , au lieu de transférer la totalité à l'assureur.

Exemple 2:

La fonction d'utilité reste identique à celle considérée précédemment. On considère une franchise $d=1.01$, $X=(1,2,6)$, $Y=(10,10.1,10.11)$ et la distribution jointe de (X,Y) est décrite comme suit:

$$\begin{pmatrix} p(x_1, y_1) & p(x_1, y_2) & p(x_1, y_3) \\ p(x_2, y_1) & p(x_2, y_2) & p(x_2, y_3) \\ p(x_3, y_1) & p(x_3, y_2) & p(x_3, y_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.18 & 0 & 0.55 \\ 0 & 0.25 & 0 \\ 0.02 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Avec ces hypothèses, on peut vérifier qu'on a X NED Y mais que l'assurance optimale n'est pas une couverture partielle mais plutôt une couverture complète ($d = 0$).

3.2.3 Détermination de la couverture optimale pour les contrats avec franchise

Couverture optimale pour un contrat avec franchise: cas $\rho = 0$

Proposition 3.2.0.1. *Lorsque la prime d'un contrat d'assurance avec franchise n'est pas chargée, la stratégie optimale de couverture contre un risque assurable X est de transférer tout le risque à l'assureur ($d^* = 0$), si la richesse $W = w - Y$ et X sont « negatively quadrant dependent ».*

Remarques:

- Rappelons que la « quadrant dependence » est une mesure de dépendance symétrique: X NQD (resp. PQD) W équivaut à W NQD (resp. PQD) X . Ce qui n'est généralement pas le cas pour les mesures de dépendance stochastique.

- Dans l'étude de l'extension de la partie 1 du théorème de Mossin en présence d'un background risk et pour la classe des contrats avec franchise, Hong L. (2018) [11] identifie comme condition nécessaire la « quadrant dépendance » entre les deux risques. Or en lieu et place de cette condition, Aboudi & Thon (1995) [2] avait identifié la « regression dependence » qui est une condition plus forte que la « quadrant dependence ». En ce sens, Hong L. (2018) améliore les résultats de Aboudi & Thon (1995) et ceux de Doherty & Schlesinger (1983b) portant sur la détermination de la couverture optimale pour la classe des contrats avec franchise, en présence de plusieurs sources de risque.
- Enfin, bien que la « quadrant dependence » soit une condition plus forte que l'« expectation dependence », il s'avère qu'elle est la structure de dépendance adéquate pour la classe des contrats avec franchise.

Démonstration.

Partant de l'égalité (3.16) établie plus haut on a :

$$\mathbb{E}[u(W_f)](d) = \int_{[0,+\infty] \times X[0,+\infty]} u(w - \mathcal{P}(d) - \min(x, d)) dF(x, w).$$

Posons $g(x, w) = u(w - \mathcal{P}(d) - \min(x, d))$.

$\frac{\partial^2 g}{\partial x \partial w} = -u''(w - \mathcal{P}(d) - \min(x, d)) \geq 0$ car u concave. Donc la fonction g est super-modulaire.

La super-modularité de g et l'hypothèse X NQD W impliquent l'inégalité suivante:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u(W_f)](d) &= \mathbb{E}[g(X, W)] = \int_{[0,+\infty] \times X[0,+\infty]} u(w - \mathcal{P}(d) - \min(x, d)) dF(x, w) \\ &\leq \int_{[0,+\infty] \times X[0,+\infty]} u(w - \mathcal{P}(d) - \min(x, d)) d(F_X(x)F_W(w)) \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} u(w - \mathcal{P}(d) - \min(x, d)) dF_X(x) dF_W(w) \text{ après une double intégration par parties.} \\ &= \int_0^{+\infty} \left[\int_0^{+\infty} u(w - \mathcal{P}(d) - \min(x, d)) dF_X(x) \right] dF_W(w) \end{aligned}$$

En appliquant l'inégalité de Jensen à l'intégrale intérieure et sachant que $\int_0^{+\infty} dF_X(x) = 1$, on obtient finalement:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u(W_f)](d) &\leq \int_0^{+\infty} \left[u(w - \mathcal{P}(d) - \int_0^{+\infty} \min(x, d) dF_X(x)) \right] dF_W(w) \\ &= \int_0^{+\infty} \left[u(w - \mathcal{P}(d) - \mathbb{E}[\min(X, d)]) \right] dF_W(w) \end{aligned} \tag{3.17}$$

Or sait que: $(X - a)_+ = X - \min(X, a) \quad \forall a \geq 0$

donc $\mathcal{P}(0) = \mathbb{E}[X] = \mathbb{E}[(X - d)_+] + \mathbb{E}[\min(X, d)] = \mathcal{P}(d) + \mathbb{E}[\min(X, d)]$

Ainsi, l'inégalité (3.17) devient:

$$\mathbb{E}[u(W_f)](d) \leq \int_0^{+\infty} u(w - \mathcal{P}(0)) dF_W(w) = \mathbb{E}[u(W_f)](0)$$

On en conclut que l'individu averse au risque va renoncer à la franchise lorsque la prime n'est pas chargée. □

Comme « Regression dependence » \implies « Quadrant dependence », un corollaire direct de la proposition (3.2.0.1) est le suivant:

Corollaire 3.2.0.1. *Si la prime pour un contrat d'assurance avec franchise n'est pas chargée, tout individu averse au risque faisant face à un risque assurable X et à un background risk, va préférer céder tout le risque si on a X NRD W ou W NRD X .*

Couverture optimale pour un contrat avec franchise: cas $\rho > 0$

Rappelons que l'étude de l'assurance optimale pour la classe des contrats avec franchise, en présence de multiple sources de risque, avait été traitée par Aboudi & Thon (1995) [2] et Hong & Al. (2011) [18] uniquement dans le cas où la prime n'est chargée. Ici, Hong L. (2018) [11] examine également le cas où le chargement n'est pas nul. Antérieurement, Doherty & Schlesinger (1983b) [8] ont montré que lorsque la prime est chargée, alors la couverture optimale est l'assurance partielle si le risque assurable et la richesse initiale aléatoire sont indépendants. Mais mieux encore, Hong L. (2018) [11] montre qu'en réalité la partie 2 du théorème de Mossin (1968) reste valide indépendamment de la structure de dépendance entre le background risk et le risque assurable et du degré d'aversion au risque de l'individu (c-à-d qu'il soit averse ou pas au risque). Cela rejoint le fait que la présence d'un chargement explique la présence d'une franchise.

Proposition 3.2.0.2. *Lorsque la prime d'un contrat avec franchise est chargée, tout individu, averse au risque ou pas, va préférer un contrat avec franchise ($d^* > 0$), quelle que soit la structure de dépendance entre le risque à couvrir et le background risk.*

Démonstration. Pour cela, il suffit de montrer que:

$$\mathbb{E}[u(W_f)](d) - \mathbb{E}[u(W_f)](0) > 0 \text{ pour toute fonction d'utilité } u \text{ croissante}$$

et pas nécessairement concave.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[u(W_f)](d) - \mathbb{E}[u(W_f)](0) &= \mathbb{E}[u(w - \mathcal{P}(d) - \min(x, d))] - \mathbb{E}[u(w - \mathcal{P}(0))] \\ &\geq \mathbb{E}[u(w - \mathcal{P}(d) - d) - u(w - \mathcal{P}(0))] \text{ car } u \text{ croissante et } 0 \leq \min(x, d) \leq d \\ &= \int_0^{+\infty} [u(w - \mathcal{P}(d) - d) - u(w - \mathcal{P}(0))] dF_W(w) \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[u(W_f)](d) - \mathbb{E}[u(W_f)](0) > 0 \iff \exists d^* \geq 0 \text{ tel que } \mathcal{P}(d^*) + d^* < \mathcal{P}(0)$$

$$\iff (1 + \rho)\mathbb{E}[(X - d^*)_+] + d^* < (1 + \rho)\mathbb{E}[X]$$

$$\iff (1 + \rho) \int_{d^*}^{+\infty} (x - d^*) dF_X(x) + d^* < (1 + \rho) \int_0^{+\infty} x dF_X(x)$$

$$\iff (1 + \rho) \left[\int_{d^*}^{+\infty} x dF_X(x) - d^*(1 - F_X(d^*)) \right] + d^* < (1 + \rho) \int_0^{+\infty} x dF_X(x)$$

$$\iff (1 + \rho) \left[\int_0^{d^*} x dF_X(x) + d^*(1 - F_X(d^*)) \right] > d^*$$

$$\iff \frac{1}{1 + \rho} < \frac{\int_0^{d^*} x dF_X(x)}{d^*} + (1 - F_X(d^*)).$$

□

Remarquons que dans les approches présentées jusqu'ici, les auteurs sont partis de cas particuliers de forme de couverture puis ont identifié une structure de dépendance stochastique adéquate afin de déterminer l'assurance optimale. Cependant, nous avons constaté que la structure de dépendance varie en fonction de la forme de couverture. Aussi, ils ont travaillé avec la dominance stochastique d'ordre 2 et une fonction de prime particulière, $(1 + \rho)x$.

La section qui va suivre adopte une approche différente en s'inscrivant dans un cadre plus général.

3.3 Forme optimale de couverture en présence d'un background risk et « high order degree risk attitudes »

Nous savons que si la prime est chargée alors l'assurance optimale est une couverture partielle. Cependant, il existe plusieurs types de couverture partielle. Nous allons donc répondre à la question : quelle est la forme optimale d'assurance sachant que la couverture optimale est une couverture partielle? Pour y répondre, nous nous sommes référés principalement aux travaux Chi & Wei (2018) [6] qui s'inscrit dans un cadre général au niveau des hypothèses: les auteurs partent non seulement d'une forme quelconque de couverture (et admissible) pour déterminer la forme optimale, mais aussi ils travaillent avec une prime un peu moins restrictive théoriquement, bien qu'elle reste basée uniquement sur l'espérance de l'indemnité (« Expected Value Premium Principle »). Le 3^{ème} élément, qui constitue tout particulièrement une amélioration, est la prise en compte des autres attitudes de l'individu face au risque, en sus de son aversion générale au risque, désignées par le terme « high order degree risk attitudes ». En effet, comme expérimenté par Noussair et Al. (2014), il a été observé que la plupart des individus qui font face à un risque et à l'incertitude, manifeste également de la prudence et de la tempérance, en sus de leur aversion au risque. La prudence correspond à une fonction d'utilité dont la dérivée première est convexe et la tempérance à une fonction d'utilité dont la dérivée seconde est concave. Donc les individus qui reflètent en même temps de l'aversion au risque, de la prudence et de la tempérance ont une fonction d'utilité dont la dérivée seconde est concave. C'est dans ce contexte plus réaliste qui enrichit la modélisation des comportements de l'humain face au risque et à l'incertitude, que Chi & Wei (2018) [6] ont ré-examiné la détermination de l'assurance optimale en présence d'un background risk; ce qui constitue une généralisation des études qui ont été basées sur la dominance stochastique du second degré. Il en est ressorti que la forme optimale de couverture est un contrat de franchise. Mieux encore, une forme explicite du niveau optimal de la rétention a été établie par les auteurs. Notons que le cadre général dans lequel ces résultats ont été établis, nous procure une meilleure appréciation de la robustesse de l'optimalité des contrats de franchise qui, auparavant, avait été démontrée par d'autres auteurs dans un cadre plus restrictif et sur base de notions de dépendance stochastique qui sont en réalité des cas spéciaux.

3.3.1 Hypothèses du modèle

Considérons un individu détenant une richesse initiale w fait face à deux risques: un risque assurable X et le background risk Y . Ces deux variables aléatoires sont supposées définies sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et de moyennes finies.

Soit $I(X)$ la fonction indemnitaire qui régit ce que l'assureur doit payer en cas de survenance du risque, et $\mathcal{R}(X)$ la fonction de rétention c-à-d la part du risque que l'individu ne va pas céder et prendra à sa charge.

Donc, $\mathcal{R}(X) = X - I(X)$.

- On se place sous le principe indemnitaire : $I(x) \leq x$ pour toute réalisation x de X , avec $I(0) = 0$. Afin de contrer ou réduire le hasard moral ext post, on suppose que:

1. la fonction indemnitaire $I(X)$ est croissante; cela a pour effet de limiter l'incitation à ne pas déclarer tout le risque dans l'intention de percevoir une indemnité plus grande.
2. $I(X)$ est 1-Lipschitz et continue, signifiant que l'accroissement de l'indemnité est moins rapide que celui du montant du risque: $I(x) - I(y) \leq x - y$ pour tout $0 \leq y \leq x$.
De façon équivalente, supposer que la fonction indemnitaire est 1-Lipschitz revient à supposer que la fonction de rétention $R(x) = x - I(x)$ est croissante en x

- Dans la suite, nous allons travailler sur la classe des contrats admissibles qui est l'ensemble des contrats dont leur fonction indemnitaire $I(X)$ est croissante et leur fonction de rétention $\mathcal{R}(X)$ appartient à: $\mathcal{C} = \{0 \leq \mathcal{R}(x) \leq x \text{ et } \mathcal{R}(x) \text{ est une fonction croissante en } x\}$.

- On considère les primes calculées uniquement sur base de l'indemnité espérée:

$\pi(I(X)) = \mathcal{P}(\mathbb{E}[I(X)])$ où \mathcal{P} est la fonction prime; elle est supposée dérivable telle que $\mathcal{P}'(x) \geq 1$.

Remarquons que $\mathcal{P}(x) = (1 + \theta)x$ correspond au cas particulier où le chargement de sécurité est proportionnel à l'indemnité espérée. Ce sont les primes de type "Expected value premium principle".

L'objectif est de trouver dans la classe des rétentions admissibles, la fonction de rétention qui maximise l'utilité espérée de la richesse finale $W_f(X, Y) = w - Y - \mathcal{R}(X) - \pi(X - \mathcal{R}(X))$:

$$\max_{\mathcal{R} \in \mathcal{C}} \mathbb{E}[u(w - Y - \mathcal{R}(X) - \pi(X - \mathcal{R}(X)))] \quad (3.18)$$

Quelques notes importantes sur les hypothèses:

- Nous soulignons que l'hypothèse de croissance de la fonction de rétention ou bien le caractère 1-Lipschitz de la fonction indemnitaire joue un rôle crucial dans la détermination de la forme optimale de couverture. En effet, son omission dans certains travaux tels que ceux de Dana & Scarsini (2007) [7] et ceux de Gollier (1996) [10] a conduit à l'absence de franchise comme forme optimale de couverture.
- Par ailleurs, notons que selon Chi & Wei (2018) [6] la détermination de la forme optimale de couverture à l'aide d'une prime qui n'est pas basée sur l'indemnité espérée pourrait s'avérer "challenging", encore plus lorsqu'on est en présence d'un background risk; les résultats qui en découleront pourraient être assez différents. Nous illustrons ces propos avec les résultats des travaux de Young (1999): dans le cas d'une seule source de risque et avec une prime de Wang, il ressort de son ré-examen du théorème de Mossin, que l'assurance optimale est un contrat avec déductible sans coassurance au dessous de la franchise si la distorsion est linéaire par morceaux, avec coassurance au dessous de la franchise si la fonction de distorsion est de type "Puissance".
- Enfin, selon l'article Gollier C. (1996) [10], il est indiqué que l'hypothèse d'une prime basée uniquement sur l'espérance de l'indemnité et celle de la neutralité au risque de l'assureur constituent les hypothèses minimales pour que la forme optimale de couverture soit un contrat de franchise. En effet, si l'assureur n'était pas supposé neutre au risque, alors la partie du risque au dessus de la franchise pourrait faire l'objet de co-assurance.

Puisque nous allons travailler avec les "Higher order attitudes", nous aurons besoin de généraliser à l'ordre n , quelques notions d'ordre et de dépendance stochastique.

3.3.2 Notions d'ordre et de dépendance stochastiques de degré n

Définition 3.3.1. (Dominance stochastique d'ordre n) Soient W_1 et W_2 deux variables aléatoires positives. On dit que W_1 est supérieure à W_2 dans le sens de la dominance stochastique d'ordre n , noté par $W_1 \geq_{n-SD} W_2$ si on a :

$$\mathbb{E}[u(W_1)] \geq \mathbb{E}[u(W_2)] \text{ pour toute fonction } u(\cdot) \in \mathcal{U}_{n-icv}$$

où $\mathcal{U}_{n-icv} = \{u(\cdot) : (-1)^{k-1}u^{(k)} \geq 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n\}$, $u^{(k)}$ étant la dérivée k^{ime} de $u(\cdot)$.

Remarque. Si $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{n+1-icv}$ alors $-u'(\cdot) \in \mathcal{U}_{n-icv}$;

On voit que pour le cas $n=2$, \mathcal{U}_{n-icv} reflète les individus ayant une fonction d'utilité croissante et concave, c'est le cas de l'aversion générale au risque;

Si $n=3$: \mathcal{U}_{3-icv} reflète les individus averses au risque tels que la dérivée première de leur fonction d'utilité est convexe. C'est la Prudence.

La définition suivante, notamment le cas $n = 2$, est une généralisation de l'ordre convexe usuel où $v(x)$ correspond à $(x - t)_+$ qui est une fonction croissante convexe.

Définition 3.3.2. (Ordre convexe croissant de degré n) On dit qu'une variable aléatoire Z_1 est inférieure à une autre variable aléatoire Z_2 dans le sens de l'ordre convexe (croissant) de degré n , noté par $Z_1 \leq_{n-icx} Z_2$ si on a :

$$\mathbb{E}[v(Z_1)] \leq \mathbb{E}[v(Z_2)] \text{ pour toute fonction } v(\cdot) \in \mathcal{V}_{n-icx}$$

où $\mathcal{V}_{n-icx} = \{v(\cdot) : v^{(k)} \geq 0 \quad \forall k = 1, 2, \dots, n\}$ où $v^{(k)}$ est la dérivée k^{ime} de $v(\cdot)$

Définition 3.3.3. (Croissance stochastique suivant l'ordre convexe de degré n) On dit que Y croît stochastiquement par rapport à X suivant l'ordre convexe de degré n , noté par $Y \uparrow_{n-icx} X$ si: $\mathbb{E}[v(Y)|X = x]$ est croissante en x , $\forall v(\cdot) \in \mathcal{V}_{n-icx}$ tel que $\mathbb{E}[v(Y)] < \infty$.

Remarquons que le cas $n=1$ de la précédente définition (3.3.3) correspond à la notion de « PRD » vue plus haut à la définition (3.1.1).

Définition 3.3.4. (Right tail increasingness) On dit qu'une variable aléatoire Y «right tail increasing» par rapport à une autre variable aléatoire X , noté par $Y \uparrow_{n-icx}^{RTI} X$, si:

$$\mathbb{E}[v(Y)|X > x] \text{ est croissante en } x, \forall v(\cdot) \in \mathcal{V}_{n-icx} \text{ tel que } \mathbb{E}[v(Y)] < \infty$$

Il est important de souligner les liens suivants existant entre les notions qui viennent d'être définies et leurs liens avec les notions de dépendance vues dans la section précédente:

Proposition 3.3.0.1. 1. $Y \text{ PRD } X \implies Y \uparrow_{n-icx} X$

2. $Y \text{ PRD } X \implies Y \uparrow_{RTI} X$

3. $Y \uparrow_{RTI} X \implies Y \text{ PQD } X \text{ (} \implies X \text{ PED } Y \text{)}$

4. $Y \uparrow_{RTI} X \implies Y \uparrow_{n-icx}^{RTI} X$

5. $Y \uparrow_{n-icx} X \implies Y \uparrow_{n-icx}^{RTI} X$

En comparaison avec la relation (3.14) plus haut, on constate que la « Regression dependence » reste la structure de dépendance la plus forte. Cependant, ici il a été introduit une autre structure de dépendance - la « dépendance en RTI d'ordre $n > 1$ » - qui est plus faible que les précédentes et qui sera utilisée dans la détermination de la forme optimale de couverture (cf. plus bas). Rappelons que la « Regression dependence » a été utilisée par Thon & Aboudi (1995) [2] dans la détermination de l'assurance optimale pour la classe des contrats avec franchise, en présence d'un background risk. Lu & Al (2012) [14], Lu & Al. (2018) [15] et Chi (2015) [5] ont également utilisé cette même structure de dépendance pour déterminer la forme optimale, en partant d'un type quelconque de couverture et sur base de la dominance stochastique d'ordre 2.

3.3.3 Détermination de la forme optimale dans le contexte de « High degree order attitudes »

Proposition 3.3.0.2. *Supposons qu'un individu, ayant une fonction d'utilité $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{n+1-icv}$ et faisant face à un background risk Y , souhaiterait se couvrir contre un risque assurable X . Soient $\mathcal{R}_1(X)$ et $\mathcal{R}_2(X)$ deux rétentions admissibles (appartenant à la classe \mathcal{C}) telles que $\mathcal{R}_1(X) \leq_{cx} \mathcal{R}_2(X)$.*

Si $Y \uparrow_{n-icx} X$ alors $W_{R_1}(X, Y) \geq_{n+1-SD} W_{R_2}(X, Y)$.

Remarques:

- Cette proposition, dont la preuve est établie en annexe (A.2), nous indique que si l'on parvient à ordonner, suivant l'ordre stochastique convexe, deux rétentions (ou deux fonctions indemnitaires) possibles associées à un même risque X , alors sous certaines conditions nous pouvons trouver un ordre stochastique entre les deux richesses finales correspondantes.
- Considérons le cas usuel $n=1$, donc l'hypothèse $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{1+1-icv}$ correspond à une fonction d'utilité $u(\cdot)$ croissante concave. Dans ce cas, cette proposition nous indique qu'un changement de stratégie d'assurance de la rétention $\mathcal{R}_1(X)$ vers la rétention $\mathcal{R}_2(X)$ avec $\mathcal{R}_1(X) \leq_{cx} \mathcal{R}_2(X)$ fait augmenter le risque associé à la richesse finale si le background risk Y « croît stochastiquement par rapport au risque assurable X suivant l'ordre convexe de degré 1 », autrement dit si « Y PRD X ».
- Interprétation de la condition $\mathcal{R}_1(X) \leq_{cx} \mathcal{R}_2(X)$, $\mathcal{R}_1(X)$ étant la rétention associée à la 1^{ère} stratégie d'assurance dont la fonction indemnitaire est $I_1(X)$ et $\mathcal{R}_2(X)$ est la rétention de la seconde stratégie d'assurance de fonction indemnitaire $I_2(X)$: $\mathcal{R}_1(X) = X - I_1(X)$ et $\mathcal{R}_2(X) = X - I_2(X)$:
 $\mathcal{R}_1(X) \leq_{cx} \mathcal{R}_2(X) \iff I_2(X) \leq_{cx} I_1(X)$ qui, par définition, est vérifié si l'on a $\mathbb{E}[v(I_2(X))] \leq \mathbb{E}[v(I_1(X))]$ pour toute fonction $v(\cdot)$ convexe. En comparant avec la définition (3.3.2), on a $\mathbb{E}[v(I_2(X))] \leq \mathbb{E}[v(I_1(X))]$ si et seulement si $I_2(X) \leq_{2-icx} I_1(X)$ et $\mathbb{E}[I_2(X)] = \mathbb{E}[I_1(X)]$.
- Un résultat largement connu dans la littérature, indique que pour toute rétention admissible $R(X) \in \mathcal{C}$, il existe toujours un réel $d \geq 0$ tel que $R_d(X) \leq_{cx} R(X)$ où $R_d(x) = \min(x, d)$. Par conséquent, la proposition (3.3.0.2) nous permet de conclure que la forme optimale de couverture est un contrat avec stop-loss. Ce qui nous conduit au corollaire suivant:

Corollaire 3.3.0.1. *Si $Y \uparrow_{n-icx} X$, alors la solution au problème d'optimisation (3.18) avec $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{n+1-icv}$ est de la forme $R^*(x) = \min(x, d^*)$, pour un certain $d^* \geq 0$.*

Dès lors, nous pouvons noter la richesse $W_R(X, Y)$ par $W_d(X, Y)$, ce qui réduit notre problème d'optimisation sur la classe des contrats appartenant à \mathcal{C} au problème d'optimisation suivant sur les réels positifs:

$$\max_{d \geq 0} \mathbb{E} \left[u \left(w - Y - \min(X, d) - \pi(\mathbb{E}[(X - d)_+]) \right) \right] \quad (3.19)$$

Sous certaines hypothèses spécifiques ci-après, la proposition suivante établit une forme explicite du niveau optimal de rétention.

Hypothèses:

- (H1) L'individu a une fonction d'utilité $u \in \mathcal{U}_{n+1-icv}$;
- (H2) $Y \uparrow_{n-icx}^{RTI} X$;
- (H3) La fonction de prime $\mathcal{P}(\cdot)$ est convexe et deux fois dérivable avec $\mathcal{P}(0) = 0$ et $\mathcal{P}'(x) \geq 1 \quad \forall x \geq 0$.

On définit la fonction $\phi(\cdot)$ de la manière suivante:

$$\phi(d) := \mathbb{P}(X > d)\mathcal{P}'(\mathbb{E}[(X - d)_+]), \quad 0 \leq d \leq \text{esssup}X \quad (3.20)$$

où $\text{esssup}X = \inf y \geq 0 : \mathbb{P}(X > y) = 0$. Par convention, $\inf \emptyset = \infty$.

Sous les hypothèses ci-dessus, $\phi(d)$ est décroissante, continue et on a:

$$\begin{cases} \phi(d) > 1 & \text{si } 0 \leq d \leq d_s \\ \phi(d) \leq 1 & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{où } d_s = \inf\{d \geq 0 : \phi(d) \leq 1\}$$

Proposition 3.3.0.3. *Sur base des hypothèses précédentes, on définit*

$$\Psi(d) = \mathcal{P}'(\mathbb{E}[(X - d)_+]) \frac{\mathbb{E}[u'(W_d(X, Y))]}{\mathbb{E}[u'(W_d(X, Y)) | X > d]} \quad \forall \quad 0 \leq d < \text{esssup}X \quad (3.21)$$

Alors $\Psi(d)$ est décroissante sur l'intervalle $[d_s, \text{esssup}X[$ et le niveau optimal de la franchise est donné par:

$$d^* = \inf \left\{ d \in [d_s, \text{esssup}X[\text{ tels que } \Psi(d) \leq 1 \right\} \quad (3.22)$$

Remarques:

1. Que l'on soit en présence ou en l'absence de background risk, la forme optimale de couverture reste un contrat de franchise lorsqu'il y a des frais de chargement. Cependant, les hypothèses sous-jacentes au cas de multiples sources de risque font appel à la structure de dépendance (RTI) entre le background risk et le risque assurable.

2. Par ailleurs, remarquons que l'expression de la franchise optimale dépend des trois éléments suivants, en sus de la richesse initiale: la prime, la préférence au risque de l'assuré et le type de la structure de dépendance stochastique entre le risque assurable et le background risk.
3. Enfin, comme nous l'avons évoqué plus haut, en économie de l'assurance, il est intéressant d'analyser l'effet d'un changement de la richesse initiale sur le niveau de la franchise optimale. Notons tout d'abord que cette question avait été étudiée par Schlesinger (1981) dans le cas d'absence de background risk. Il en est ressorti qu'un agent averse au risque détenant une richesse initiale moins importante, va choisir un niveau optimal de franchise plus petit si sa préférence au risque reflète un DARA. Ce résultat reste inchangé lorsqu'on est en présence d'un background risk indépendant du risque assurable, grâce au corollaire 3 dans Gollier C. (2001) indiquant que l'introduction d'un background risk indépendant préserve DARA. Mieux, les auteurs Chi & Wei (2018) [6] montrent que le résultat de Schlesinger (1981) précité - établi en l'absence de background risk - reste valide en présence d'un background risk positivement dépendant du risque assurable, suivant une structure de dépendance particulière (moins générale que la RTI) appelée "order rate hazard" ². Par ailleurs, ces auteurs montrent également que la substitution du background risk Y par un autre background risk Y_2 "plus dangereux" fait diminuer la franchise optimale. Ces deux résultats - intuitifs - ont fait l'objet de démonstrations dans Chi & Wei (2018) [6] où les auteurs spécifient les hypothèses nécessaires.

Nous allons, à présent, illustrer une application de la proposition (3.3.0.3) au cas particulier d'absence de frais de chargement. Rappelons qu'ici on est dans le cadre d'une dépendance positive entre X et Y .

Application de la proposition (3.3.0.3) au cas particulier d'une prime non chargée

Si la prime n'est pas chargée c-à-d $\mathcal{P}(x) = 1 \forall x$ alors en remplaçant dans la définition à (3.20) on a : $\phi(d) = \mathbb{P}(X > d) \leq 1 \quad \forall d$. Par conséquent $d_s = 0$

D'autre part, pour $d = 0$:

$$\Psi(0) = \frac{\mathbb{E}[u'(w - Y - \mathbb{E}[X])]}{\mathbb{E}[u'(w - Y - \mathbb{E}[X])|X > 0]} \text{ et on a } \Psi(0) \leq 1.$$

²Une variable aléatoire Z_1 est dite *inférieure* à Z_2 suivant l'ordre taux de hasard si $\frac{\mathbb{P}[Z_2 > z]}{\mathbb{P}[Z_1 > z]}$ est croissante en z .
Notons que si le background risk Y croît en X dans le sens taux de hasard alors Y croît en X dans le sens RTI.

En effet, $\mathbb{E}[u'(w - Y - \mathbb{E}[X])|X > 0] = \mathbb{E}[v(Y)|X > 0]$ où $v(y) = u'(w - y - \mathbb{E}[X])$. L'hypothèse $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{n+1-icv} \implies -u'(\cdot) \in \mathcal{U}_{n-icv}$ donc $v(\cdot) \in \mathcal{V}_{n-icx}$. D'autre part notre hypothèse $Y \uparrow_{n-icx}^{RTI}$ $X \implies \mathbb{E}[f(Y)|X > x]$ est croissante en x pour toute fonction $f(\cdot) \in \mathcal{V}_{n-icx}$. En particulier pour la fonction $f(y) = v(y)$ on a $\mathbb{E}[u'(w - Y - \mathbb{E}[X])] = \mathbb{E}[u'(w - Y - \mathbb{E}[X])|X > -\infty] \leq \mathbb{E}[u'(w - Y - \mathbb{E}[X])|X > 0]$. Donc $\Psi(0) \leq 1$.

Par conséquent, grâce à la proposition (3.3.0.3), la fonction $\Psi(d)$ étant décroissante sur $[d_s = 0; \text{esssup}X[$, alors $\Psi(d) \leq 1 \quad \forall d \in [0; \text{esssup}X[$; On en conclut que le niveau optimal de franchise d^* est égal à 0 lorsque la prime n'est pas chargée.

On retrouve ainsi le résultat de la partie 1 du théorème de Mossin (cas d'une seule source d'aléa) mais aussi celui du "Generalized Mossin's theorem" établi dans Hong & Al. (2011) [18] pour la classe des contrats quote-part lorsque la prime n'est pas chargée (voir section 3.1) et le résultat des travaux de Hong L. (2019) [12] pour la classe des contrats avec franchise (voir section 3.2). Notons que la particularité ici est que les auteurs de Chi & Wei (2018) [6] sont parvenus à ce même résultat en se plaçant dans un contexte plus général au niveau de la forme de la couverture et celle de la prime mais aussi et surtout en prenant en compte les autres attitudes de l'individu face à un risque, tout en travaillant avec une structure de dépendance moins forte.

La preuve de la proposition (3.3.0.3) est établie en annexe (A.2).

Application numérique: cas d'une dépendance positive entre X et Y

Dans cet exemple, nous nous plaçons:

1. d'une part, dans une vision d'entreprise qui dispose d'un département Risk Management, en choisissant de travailler avec une mesure de risque. Cependant, afin de rester dans le périmètre de notre travail, qui est la théorie de l'espérance d'utilité, nous considérons une mesure de risque particulière $\rho(X)$ qui, comme nous allons l'établir plus bas, est induite par une espérance d'utilité de type exponentiel négatif: $\rho(X) = \mathbb{E}[e^{\frac{X}{2}}]$. Les autres mesures de risque, telles que la VaR, TVaR par exemple, n'ont pas de liens établis avec l'espérance de l'utilité. La mesure de risque ρ représente le fait qu'une entreprise doit se comporter de manière rationnelle en définissant une tolérance au risque qui ne soit pas fonction de l'augmentation de son patrimoine.
2. d'autre part, dans une vision pratique du marché, en considérant un chargement proportionnel.

Sachant que la forme optimale de couverture est un contrat avec franchise, on s'intéresse à déterminer numériquement le niveau de franchise optimale puis analyser l'impact du chargement et celui du degré de dépendance entre les risques sur la franchise optimale.

Lien entre ρ et la fonction d'utilité de type exponentiel négatif: $u(x) = -2e^{-\frac{1}{2}x}$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[u(W)] &= \mathbb{E}[(w - Y - X + I(X) - \mathcal{P}(I(X)))] = -2\mathbb{E}[e^{-\frac{1}{2}(w-Y-X+I(X)-\mathcal{P}(I(X)))}] \\
&= -2e^{-\frac{1}{2}w}\mathbb{E}[e^{\frac{1}{2}(Y+X-I(X)+\mathcal{P}(I(X)))}] \\
&= -2e^{-\frac{1}{2}w}\mathbb{E}[e^{\frac{1}{2}\mathcal{T}_I(X,Y)}] \\
&= -2e^{-\frac{1}{2}w}\rho(\mathcal{T}_I(X,Y))
\end{aligned}$$

où $\mathcal{T}_I(X, Y)$ est l'exposition totale au risque de l'individu. Donc maximiser l'espérance de l'utilité de la richesse revient à minimiser son exposition totale au risque à l'aide de la mesure ρ définie plus haut.

Supposons que la variable aléatoire bivariable (X, Y) a pour copula C_α appartenant à la famille de copulas Farlie-Gumbel-Morgenstern:

$C_\alpha(u, v) = uv + \alpha uv(1-u)(1-v)$ où $\alpha \in [0, 1]$ peut être vu comme le paramètre de dépendance entre X et Y (cf. chapitre 2 dans Joe (1997)) ¹

Distribution de (X, Y) et type de dépendance entre le risque assurable et le background risk:

Supposons que les distributions marginales sont exponentielles de paramètre 1 :

$F(x) = 1 - e^{-x} \quad \forall x \geq 0$. Alors la distribution jointe de (X, Y) est donnée par:

$$F(x, y) = C_\alpha(F_X(x), F_Y(y)) = [(1 - e^{-x})(1 - e^{-y})] [1 + \alpha e^{-x} e^{-y}] \quad \forall x, y \geq 0$$

$$f(x, y) = c_\alpha(F_X(x), F_Y(y)) f_X(x) f_Y(y) = e^{-x} e^{-y} + \alpha(2e^{-2x} - e^{-x})(2e^{-2y} - e^{-y}) \quad \forall x, y \geq 0$$

$$\text{La densité conditionnelle } f_{Y|X}(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_X(x)} = e^{-y} + \alpha(2e^{-x} - 1)(2e^{-2y} - e^{-y}) \quad \forall y \geq 0$$

$$\text{et } F_{Y|X}(y|x) = 1 - e^{-y} + \alpha(2e^{-x} - 1)(e^{-y} - e^{-2y}) \quad \forall y \geq 0$$

Ce qui nous permet d'évaluer la quantité: $\mathbb{P}(Y > y|X = x)$

$$\mathbb{P}(Y > y|X = x) = e^{-y} - \alpha(2e^{-x} - 1)(e^{-y} - e^{-2y}).$$

$$\implies \frac{\partial \mathbb{P}(Y > y|X = x)}{\partial x} = 2\alpha e^{-x}(e^{-y} - e^{-2y}) \geq 0 \text{ car } \alpha \geq 0$$

On en conclut que Y PRD X .

Donc l'indemnité optimale pour couvrir le risque X est de la forme $I^*(x) = (x - d)_+$ dont nous allons déterminer numériquement le niveau optimal de la franchise d^* :

$$d^* = \operatorname{argmin}_{d \geq 0} \rho(\mathcal{T}_I(d))$$

¹Multivariate models and concepts of dependence

Notre fonction objective $\mathcal{T}_I(d)$ prenant en compte la forme optimale de l'indemnité $I^*(x)$ devient:

$$\mathcal{T}_I(d) = \mathbb{E}\left[e^{\frac{1}{2}(Y+X-(X-d)_++(1+\theta)\int_d^{+\infty}\mathbb{P}(X>x)dx)}\right]$$

. En utilisant la densité jointe de (X,Y) établie plus haut, et après calculs, on obtient que:

$$\mathcal{T}_I(d) = e^{\frac{1}{2}(1+\theta)e^{-d}}\left[\left(4 + \frac{4}{9}\alpha\right) - \left(2 + \frac{2}{3}\alpha\right)e^{-\frac{1}{2}d} + \frac{2}{9}\alpha e^{-\frac{3}{2}d}\right]$$

La résolution numérique pour différentes valeurs de α et θ fixées donne les résultats suivants:

	$\alpha=0$	$\alpha=0.2$	$\alpha=0.3$	$\alpha=0.5$	$\alpha=0.6$	$\alpha=0.8$	$\alpha=1$
$\theta=0$	0	0	0	0	0	0	0
$\theta=0.1$	0.7173	0.5963	0.5443	0.4618	0.4123	0.3472	0.2939
$\theta=0.2$	1.04885	0.9302	0.8723	0.7715	0.7345	0.6393	0.5643
$\theta=0.3$	1.3231	1.1813	1.1254	1.0243	0.9735	0.8729	0.8083
$\theta=0.4$	1.5252	1.4126	1.3468	1.2539	1.2046	1.1114	1.0251
$\theta=0.5$	1.7365	1.6068	1.5428	1.4505	1.4038	1.3069	1.2116

Table 4.1: Optimal deductible d^* level with the parameters α and θ varying

- On voit que s'il n'y a pas de chargement, l'individu faisant face à un background risk positivement dépendant du risque assurable, va tout céder, ce qui est conforme aux résultats des théorèmes et/ propositions établis dans les sections précédentes.
- Les chiffres obtenus confirment que l'existence d'un facteur de chargement explique la présence d'une franchise et montrent la relation croissante entre le chargement de sécurité et la décision optimale d'assurance: plus le chargement est élevé, c'est à dire le prix de l'assurance est coûte plus cher, plus le décideur averse au risque va retenir une part importante du risque à transférer.
- A l'inverse, on observe une relation décroissante entre le paramètre de dépendance et le niveau optimal de la franchise: plus la dépendance stochastique positive entre le risque assurable et le background risk est forte, plus la part du risque à céder est importante.

Remarque. Ces trois remarques qui découlent de cet exemple, ont fait l'objet d'une proposition démontrée dans Lu & Al. (2018) [15].

En présence tout comme en l'absence de background risk (BR), tout individu dont le comportement suit le critère de l'espérance de l'utilité (EU), va recourir à un contrat de franchise, dès lors que la prime est chargée. Cela expliquerait la prédominance des contrats de franchise sur le marché de l'assurance, en sus des contrats limitant le montant de la couverture. Cependant, lorsque la prime n'est pas chargée et que le BR interagit négativement avec le risque assurable suivant une certaine structure de dépendance stochastique adéquate, la solution optimale n'est pas en conformité avec celle prédite dans le cas d'une seule source de risque, à savoir la cession de tout le risque. La présence d'un BR peut donc altérer le résultat du théorème de Mossin. L'omission ou la non prise en compte de l'ensemble du portefeuille d'actifs de l'individu va en effet conduire à tort, au transfert de l'entièreté du risque, plutôt qu'à un transfert partiel ou simplement au renoncement à l'assurance; la prise en compte du BR pourrait donc éviter, particulièrement à une entreprise, de supporter des coûts de transaction inutiles ou plus élevés et lui permet d'opérer une gestion du risque plus efficiente.

L'optimalité des contrats de franchise, lorsqu'on est en présence d'un BR, est néanmoins subordonnée à certaines hypothèses essentielles à savoir: une fonction d'utilité au moins 2 fois dérivable, le type de prime (prime basée uniquement sur l'espérance de l'indemnité), un choix approprié du type de dépendance stochastique, mais aussi et surtout les hypothèses dites de "incentive compatibility" à savoir la croissance et le caractère 1-lipschitz de l'indemnité. La substitution ou l'omission d'une de ces hypothèses pourrait conduire à des résultats assez différents. D'ailleurs,

comme développé dans Chi & Liu (2017)[4], où les auteurs ont travaillé avec une prime basée uniquement sur l'indemnité espérée et une prime de Wang, il a été montré que la forme optimale de couverture varie en fonction du type de prime considéré. Avec une prime de Wang, une limite sur le montant de la couverture est adjointe au contrat de franchise tandis qu'avec une prime basée uniquement sur l'indemnité espérée - qui est un cas particulier de prime de Wang avec une fonction de distorsion égale à l'identité - cette limite devient infinie.

Par ailleurs, notre périmètre de travail - le critère de l'EU - qui suppose un grand degré de rationalité de l'individu, est incriminé par certains auteurs qui suggèrent un cadre "Non-expected utility" (NEU). En effet, les résultats découlant de la théorie de l'EU s'accommoderaient mal des expérimentations faites sur le marché de l'assurance; par exemple, ils contredisent parfois la préférence pour l'assurance partielle car en réalité l'assuré se contenterait souvent d'une logique du tout ou rien: d'arbitrer entre assurance complète et rétention du risque.

Cependant, pour pallier les limites de l'EU, l'esprit de la démarche de Schlesinger (1997) [19] nous paraît pouvoir constituer une alternative dans l'étude de l'assurance optimale en présence de BR. En effet, au lieu d'opposer EU et NEU, l'auteur vise à fournir une meilleure appréciation de la robustesse des résultats découlant du critère de l'EU. Il ré-examine les théorèmes de Mossin (1968) et d'Arrow (1971) ainsi que le cas de la présence d'un BR indépendant, sans spécifier le type d'aversion au risque ¹ de l'individu qui peut être *d'ordre 1* ou *d'ordre 2*, et arrive à la conclusion qu'en présence de frais de chargement, l'assurance optimale est une couverture partielle ou une couverture complète.

Enfin, nous mettons l'accent sur l'importance de la perception du risque, notamment son influence sur la décision individuelle d'assurance. L'assuré, ayant une vision soit optimiste soit pessimiste du risque, a tendance à distordre les probabilités de survenance de manière subjective, contrairement à l'assureur qui dispose de suffisamment d'informations pour construire objectivement une distribution du risque. Cependant, pour l'heure, la modélisation de l'optimisme ou du pessimisme d'un assuré reste une tâche assez complexe. Ce qui amène à supposer une même vision du risque aussi bien du côté de l'assuré que de celui de l'assureur.

¹Dans *First order versus second order (1990)*, les auteurs Segal & Spivak distinguent 2 catégories d'aversion au risque: celle dite d'ordre 1 et celle d'ordre 2. L'aversion au risque sous l'EU satisfait l'aversion au risque d'ordre 2.

A.1 Preuve de la proposition (3.3.0.2)

Démonstration. Il suffit de montrer que:

$$\mathbb{E} \left[u(w - Y - \mathcal{R}_1(X) - \pi(X - \mathcal{R}_1(X))) \right] \geq \mathbb{E} \left[u(w - Y - \mathcal{R}_2(X) - \pi(X - \mathcal{R}_2(X))) \right] \quad \forall u(\cdot) \in \mathcal{U}_{n+1-icv} \quad (\text{A.1})$$

Or on sait que $\mathcal{R}_\infty(\mathcal{X}) \leq_{cx} \mathcal{R}_2(X) \implies \mathbb{E}[\mathcal{R}_1(X)] = \mathbb{E}[\mathcal{R}_2(X)]$

donc $\pi(X - \mathcal{R}_1(X)) = \pi(X - \mathcal{R}_2(X))$ du fait qu'on travaille avec des primes basées sur l'espérance de l'indemnité.

En se servant de la dualité entre convexité et concavité ($u(x)$ concave ssi $v(x) := -u(-x)$ convexe), montrer l'inégalité (A.1) équivaut à montrer l'inégalité suivante:

$$\mathbb{E}[v(\mathcal{R}_2(X) + Y)] \geq \mathbb{E}[v(\mathcal{R}_1(X) + Y)] \quad \forall v(\cdot) \in \mathcal{V}_{n-icx} \quad (\text{A.2})$$

La convexité de $v(\cdot)$ permet d'écrire :

$$v(\mathcal{R}_2 + Y) - v(\mathcal{R}_1(X) + Y) \geq v'(\mathcal{R}_1(X) + Y) \cdot (\mathcal{R}_2(X) - \mathcal{R}_1(X)) \quad (\text{A.3})$$

Ce qui implique

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[v(\mathcal{R}_2(X) + Y)] - \mathbb{E}[v(\mathcal{R}_1(X) + Y)] &\geq \mathbb{E}[v'(\mathcal{R}_1(X) + Y) \cdot (\mathcal{R}_2(X) - \mathcal{R}_1(X))] \\ &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[v'(\mathcal{R}_1(X) + Y) \cdot (\mathcal{R}_2(X) - \mathcal{R}_1(X)) | X]] \\ &= \mathbb{E}[p(X) \cdot (\mathcal{R}_2(X) - \mathcal{R}_1(X))] \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

où $p(X) := \mathbb{E}[v'(\mathcal{R}_1(X) + Y)|X]$ est une variable aléatoire.

Or la rétention étant $\mathcal{R}_1(x)$ est croissante en x , $v'(\cdot) \in \mathcal{V}_{n-icx}$ et $Y \uparrow_{n-icx} X$, cela implique que la fonction $\mathbb{E}[v'(\mathcal{R}_1(x) + Y)|X = x]$ est croissante en x

En se référant au lemme 3.3 dans Cai & Wei (2012) [3], on en conclut que $\mathbb{E}[p(X) \cdot (\mathcal{R}_2(X) - \mathcal{R}_1(X))] \geq 0$. Ce qui implique l'inégalité (A.2) qu'on voulait montrer.

□

A.2 Preuve de la proposition (3.3.0.3)

Démonstration. Rappelons les deux résultats de la proposition et que nous voulons montrer:

1. la fonction $\Psi(d)$ est décroissante sur l'intervalle $[d_s, \text{esssup}X[$ où:

$$\Psi(d) = \mathcal{P}'(\mathbb{E}[(X - d)_+]) \frac{\mathbb{E}[u'(W_d(X, Y))]}{\mathbb{E}[u'(W_d(X, Y))|X > d]} \quad \forall \quad 0 \leq d < \text{esssup}X \quad (\text{A.5})$$

2. la forme explicite du niveau optimal de la franchise est:

$$d^* = \inf \left\{ d \in [d_s, \text{esssup}X[\text{ tels que } \Psi(d) \leq 1 \right\} \quad (\text{A.6})$$

Preuve de la décroissance de $\Psi(d)$ est décroissante sur l'intervalle $[d_s, \text{esssup}X[$:

Définissons les deux fonctions suivantes:

$$g_1(d) := \mathcal{P}'(\mathbb{E}[(X - d)_+]) \cdot \mathbb{E}[u'(W_d(X, Y))] \quad \text{et} \quad g_2(d) = \mathbb{E}[u'(W_d(X, Y))|X > d].$$

La fonction Ψ peut se réécrire comme:

$$\Psi(d) = \frac{g_1(d)}{g_2(d)}$$

et sa dérivée première:

$$\Psi'(d) = \frac{g_1'(d)g_2(d) - g_1(d)g_2'(d)}{(g_2(d))^2}$$

$$\begin{aligned}
g'_1(d) &= -S_X(d)\mathcal{P}''(\mathbb{E}[(X-d)_+])\mathbb{E}[u'(W_d(X, Y))] \\
&\quad + S_X(d)\left(\mathcal{P}'(\mathbb{E}[(X-d)_+])\right)^2\mathbb{E}[u''(W_d(X, Y))] \\
&\quad - \mathcal{P}'(\mathbb{E}[(X-d)_+])\mathbb{E}[u''(W_d(X, Y)\mathbb{I}_{[X>d]})] \\
&\leq \left(\mathcal{P}'(\mathbb{E}[(X-d)_+])\right)^2 S_X(d)\mathbb{E}[u''(W_d(X, Y))] \\
&\quad - \mathcal{P}'(\mathbb{E}[(X-d)_+])\mathbb{E}[u''(W_d(X, Y)\mathbb{I}_{[X>d]})] \tag{A.7} \\
&\quad \text{car } \mathcal{P}''(\cdot) \geq 0 \text{ et } u'(\cdot) \geq 0 \\
&\leq \phi(d)\mathcal{P}'(\mathbb{E}[(X-d)_+])\mathbb{E}[u''(W_d(X, Y)\mathbb{I}_{[X>d]})] \\
&\quad \text{car } u''(\cdot) \leq 0 \\
&= (\phi(d) - 1)\mathcal{P}'(\mathbb{E}[(X-d)_+])\mathbb{E}[u''(W_d(X, Y)\mathbb{I}_{[X>d]})]
\end{aligned}$$

où S_X est la fonction de survie de X et ϕ est la fonction définie plus haut à (3.20).

Pour analyser la dérivée de $g_2(d)$, on introduit une fonction auxiliaire :

$$l(x, y) = \mathbb{E}\left[u'(w - Y - x - \mathcal{P}(\mathbb{E}[(X-x)_+]))\mathbb{I}_{X > y}\right] \tag{A.8}$$

Ainsi on a :

$$g_2(d) = l(d, d) \text{ et}$$

$$g'_2(d) = \frac{\partial l(x, y)}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(d,d)} + \frac{\partial l(x, y)}{\partial y}\Big|_{(x,y)=(d,d)} = \left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y}\right)l(x, y)\Big|_{(x,y)=(d,d)}$$

Or $Y \stackrel{RTI}{\uparrow}_{n-icx} X$ et $u(\cdot) \in \mathcal{U}_{n+1-icv}$, donc $l(x, y)$ est une fonction croissante en y . Par conséquent, on

a :

$$g'_2(d) \geq \frac{\partial l(x, y)}{\partial x}\Big|_{(x,y)=(d,d)} = (\phi(d) - 1)\mathbb{E}[u''(W_d(X, Y))\mathbb{I}_{X > d}] \tag{A.9}$$

En combinant les équations (A.7) et (A.9) on obtient que pour tout $d \geq d_s$:

$$\begin{aligned}
& \Psi'(d) \cdot (g_2(d))^2 = g_1'(d)g_2(d) - g_1(d)g_2'(d) \\
& \leq (\phi(d) - 1) \cdot \mathcal{P}'\left(\mathbb{E}[(X - d)_+]\right) \cdot \mathbb{E}[u''(W_d(X, Y)) | X > d] \cdot \mathbb{E}[u'(W_d(X, Y)) \mathbb{I}_{[X > d]}] \\
& \quad - (\phi(d) - 1) \cdot \mathbb{E}[u''(W_d(X, Y)) | X > d] \cdot \mathcal{P}'\left(\mathbb{E}[(X - d)_+]\right) \cdot \mathbb{E}[u'(W_d(X, Y))] \\
& = -(\phi(d) - 1) \cdot \mathcal{P}'\left(\mathbb{E}[(X - d)_+]\right) \cdot \mathbb{E}[u''(W_d(X, Y)) | X > d] \cdot \mathbb{E}[u'(W_d(X, Y)) \cdot \mathbb{I}_{[X \leq d]}] \\
& \leq 0 \text{ du fait que } \mathcal{P}'(\cdot) \geq 0, u''(\cdot) \leq 0 \text{ et } \phi(d) \leq 1 \quad \forall d \geq d_s
\end{aligned}$$

Donc $\Psi'(d) \leq 0$ pour tout $d \in [d_s, \text{esssup}X)$.

Preuve de l'expression du niveau optimal de franchise: On rappelle notre problème d'optimisation réduit établi à l'équation (3.19) :

$$\max_{d \geq 0} \mathbb{E} \left[u \left(w - Y - \min(X, d) - \pi(\mathbb{E}[(X - d)_+]) \right) \right]$$

$$\text{Soit } f(d) =: \mathbb{E} \left[u \left(w - Y - \min(X, d) - \pi(\mathbb{E}[(X - d)_+]) \right) \right]$$

$$\begin{aligned}
\implies f'(d) &= \mathcal{P}'(\mathbb{E}[(X - d)_+]) S_X(d) \cdot \mathbb{E}[u'(W_d(X, Y))] - \mathbb{E}[u'(W_d(X, Y)) \cdot \mathbb{I}_{[X > d]}] \\
&\geq \phi(d) \mathbb{E}[u'(W_d(X, Y)) \cdot \mathbb{I}_{[X > d]}] - \mathbb{E}[u'(W_d(X, Y)) \cdot \mathbb{I}_{[X > d]}] \\
&= (\phi(d) - 1) \cdot \mathbb{E}[u'(W_d(X, Y)) \cdot \mathbb{I}_{[X > d]}]
\end{aligned}$$

Donc $f'(d) \geq 0 \quad \forall d < d_s$. par conséquent, la fonction $f(d)$ est croissante sur $[0, d_s]$ La dérivée de $f(d)$ peut également être exprimée en faisant intervenir la fonction $\Psi(d)$ définie à (A.5), et dont la décroissance sur $[d_s, \text{esssup}X)$ a été démontrée dans la première partie de cette démonstration:
 $f'(d) = \mathbb{E}[u'(W_d(X, Y)) \cdot \mathbb{I}_{[X > d]}] \cdot (\Psi(d) - 1)$.

Donc f atteint son maximum en d^* tel que défini à l'équation (3.3.0.3). □

Bibliographie

- [1] Y. 2014. *Optimal reinsurance with general premium principles* | Elsevier Enhanced Reader. en.
- [2] R. Aboudi and D. Thon. *Second-degree stochastic dominance decisions and random initial wealth with applications to the economics of insurance*. English. Mar. 1995.
- [3] J. Cai and W. Wei. “Optimal reinsurance with positively dependent risks”. en. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 50.1 (Jan. 2012), pp. 57–63. ISSN: 0167-6687.
- [4] Y. Chi and F. Liu. “Optimal insurance design in the presence of exclusion clauses”. en. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 76 (Sept. 2017), pp. 185–195. ISSN: 0167-6687.
- [5] Y. Chi and K. S. Tan. *Optimal incentive compatible insurance with background risk*. en. SSRN Scholarly Paper ID 2589438. Rochester, NY: Social Science Research Network, Apr. 2015.
- [6] Y. Chi and W. Wei. “OPTIMUM INSURANCE CONTRACTS WITH BACKGROUND RISK AND HIGHER-ORDER RISK ATTITUDES”. en. In: *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA* 48.3 (Sept. 2018), pp. 1025–1047. ISSN: 0515-0361, 1783-1350.
- [7] R.-A. Dana and M. Scarsini. “Optimal risk sharing with background risk”. en. In: *Journal of Economic Theory* 133.1 (Mar. 2007), pp. 152–176. ISSN: 0022-0531.
- [8] N. A. Doherty and H. Schlesinger. “Optimal Insurance in Incomplete Markets”. In: *Journal of Political Economy* 91.6 (Dec. 1983), pp. 1045–1054. ISSN: 0022-3808.

- [9] N. A. Doherty and H. Schlesinger. “The Optimal Deductible for an Insurance Policy When Initial Wealth is Random”. In: *The Journal of Business* 56.4 (1983), pp. 555–565. ISSN: 0021-9398.
- [10] C. Gollier. “Optimum Insurance of Approximate Losses”. In: *The Journal of Risk and Insurance* 63.3 (1996), pp. 369–380. ISSN: 0022-4367.
- [11] L. Hong. “A note on Mossin’s theorem for deductible insurance given random initial wealth”. In: *Scandinavian Actuarial Journal* 2018.5 (May 2018), pp. 404–411. ISSN: 0346-1238.
- [12] L. Hong. “Remarks on the Mossin Theorem”. In: *North American Actuarial Journal* 23.1 (Jan. 2019), pp. 1–10. ISSN: 1092-0277.
- [13] E. L. Lehmann. “Some Concepts of Dependence”. In: *The Annals of Mathematical Statistics* 37.5 (1966), pp. 1137–1153. ISSN: 0003-4851.
- [14] Z. Lu et al. “Optimal insurance under multiple sources of risk with positive dependence”. en. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 51.2 (Sept. 2012), pp. 462–471. ISSN: 0167-6687.
- [15] Z. Lu et al. “Optimal insurance design under background risk with dependence”. en. In: *Insurance: Mathematics and Economics* 80 (May 2018), pp. 15–28. ISSN: 01676687.
- [16] D. Mayers and C. W. Smith. “The Interdependence of Individual Portfolio Decisions and the Demand for Insurance”. In: *Journal of Political Economy* 91.2 (1983), pp. 304–311. ISSN: 0022-3808.
- [17] J. Mossin. “Aspects of Rational Insurance Purchasing”. In: *Journal of Political Economy* 76.4, Part 1 (July 1968), pp. 553–568. ISSN: 0022-3808.
- [18] “Mossin’s Theorem Given Random Initial Wealth - Hong - 2011 - Journal of Risk and Insurance - Wiley Online Library”. In: () .
- [19] H. Schlesinger. “Insurance Demand without the Expected-Utility Paradigm”. In: *The Journal of Risk and Insurance* 64.1 (1997), pp. 19–39. ISSN: 0022-4367.
- [20] H. Schlesinger. “The Theory of Insurance Demand”. en. In: *Handbook of Insurance*. Ed. by G. Dionne. New York, NY: Springer, 2013, pp. 167–184. ISBN: 978-1-4614-0155-1.