

Portefeuille Universel

Synthèse d'une Conception de Portefeuille et Etude de Performance

Mémoire réalisé par
Pierre-Alain Dath

Promoteur
Frédéric Vrins

Lecteur
Nathan Lassance

Année académique 2016-2017
Master en Sciences de gestion/Ingénieur de gestion

Je tiens à remercier mon promoteur, M. Frédéric Vrins qui, par ses conseils judicieux, m'a permis d'avancer et d'orienter le travail de ce Mémoire.

Résumé

Au sein de ce travail, nous avons exposé la théorie développée par Thomas Cover en 1991 au sujet d'une méthodologie de construction de portefeuille particulière dénommée *Universal Portfolio* ou dans sa traduction *Portefeuille Universel*. Ce portefeuille a été défini afin d'approcher au mieux la richesse du Portefeuille Optimal qui se conçoit comme le meilleur portefeuille constamment rebalancé sur un marché et une période d'investissement donnés. Ce portefeuille Optimal nécessitant la connaissance a priori des rendements futurs des titres, il apparaît comme une chimère théorique dont le Portefeuille Universel cherche à approcher les rendements. Nous avons défini et commenté les hypothèses sur lesquelles repose cette théorie et en avons testé la pertinence. Nous avons ainsi conclu que ces hypothèses étaient trop sévères et ne permettaient pas de vérifier les attentes énoncées par Cover dans son article, notamment le fait que le Portefeuille Universel surpasse n'importe quel titre du marché.

Nous avons ensuite voulu quantifier de manière plus précise les performances du Portefeuille Universel en comparaison du Portefeuille Optimal mais également de deux benchmarks classiques que sont le portefeuille équipondéré et le portefeuille de Markovitz de plus petite variance. Nous nous sommes rendus compte que la richesse générée par le Portefeuille Universel approchait correctement celle produite par le Portefeuille Optimal (en moyenne 80%) en particulier lorsque les titres étaient peu volatils, fortement corrélés et pour des marchés et des périodes d'investissement de petite taille. Pour ce qui est de la comparaison aux benchmarks, nous avons constaté que le Portefeuille Universel surpasse pratiquement en permanence ces benchmarks et que cette domination se marque plus particulièrement pour de grandes périodes d'investissement. Cependant, cette domination reste très faible et ne dépasse pas en pratique 1% de rendement annualisé par rapport aux benchmarks de référence.

Nous avons ensuite placé le Portefeuille Universel dans une configuration plus concrète en introduisant la réalité des coûts de transaction. Nous avons établi que ceux-ci réduisaient le rapport de richesse entre l'Universel et l'Optimal mais de manière faible en considérant des coûts de l'ordre de 1% du montant total de la transaction journalière. Nous avons également déterminé les sensibilités du rendement annuel du Portefeuille Universel aux coûts de transaction. Suivant les valeurs déterminées et, en se souvenant que la domination de l'Universel sur les benchmarks était très faible, nous en avons conclu que le Portefeuille Universel perdait tout son intérêt dès que les coûts de transaction dépassaient 0.5%.

Dans une dernière section, nous avons discuté de la faisabilité de la technique en mettant en avant le temps important de calcul que présente le Portefeuille Universel dans la détermination de l'indice journalier à rebalancer. Nous avons conclu que dans sa version classique, fidèle à l'article de référence de Cover, l'utilisation du Portefeuille Universel était proscrite pour des marchés dépassant une trentaine de titres. Finalement, afin de palier aux faiblesses du Portefeuille Universel, nous avons proposé un modèle nommé Portefeuille Universel modifié. Nous avons testé ses performances dans le cadre d'un marché de 2 titres et montré qu'elles étaient similaires voire même très faiblement supérieures à celle du Portefeuille Universel si les coûts de transaction ne dépassaient pas 1%.

Table des Matières

Introduction	1
1 Présentation du Portefeuille Universel et concepts mathématiques	3
1.1 Portefeuille Optimal	3
1.2 Propriétés du Portefeuille Optimal	4
1.3 Portefeuille Universel	5
1.4 Propriétés du Portefeuille Universel	5
1.4.1 Définitions et Hypothèses	6
1.4.2 Marché constitué de 2 titres	6
1.5 Présentation de quelques résultats	7
1.5.1 Cas de <i>Iroquois Brand Ltd</i> et de <i>Kin Ark Corp</i>	8
1.5.2 Cas de <i>Coca-Cola</i> et d' <i>IBM</i>	9
1.6 Considérations pratiques	10
2 Etat de l'Art	11
3 Analyse des performances du Portefeuille Universel	16
3.1 Analyse liée à 2 titres	16
3.1.1 Etude théorique de l'impact de la volatilité et de la corrélation entre les titres sur les performances du Portefeuille Universel	16
3.1.2 Portefeuille Universel pour un marché de 2 titres	24
3.1.3 Portefeuille Universel modifié pour un marché de 2 titres	32
3.2 Analyse liée à m titres	34
3.2.1 Portefeuille Universel pour un marché de m titres	34
4 Considérations des coûts de transaction	44
4.1 Marché de 2 titres	44
4.1.1 Portefeuille Universel pour un marché de 2 titres	44
4.1.2 Portefeuille Universel modifié pour un marché de 2 titres	47
4.2 Marché de m titres	48
4.2.1 Portefeuille Universel pour un marché de m titres	48
5 Considérations sur la mise en pratique de la méthode	56
5.1 Temps de calcul relatif au Portefeuille Universel	56
5.2 Temps de calcul relatif au Portefeuille Universel modifié	60
Conclusion	63
A Liste des titres NYSE	67
B Caractéristiques PC Brutus01	69

Liste des Figures

1.1	Evolution des prix des titres Iroq et Kinar jour par jour	8
1.2	Performance normalisée de l'ensemble des portefeuilles constamment rebalancés et comparaison avec le Portefeuille Universel	8
1.3	Evolution des prix des titres Coca-Cola et IBM jour par jour	9
1.4	Performance normalisée de l'ensemble des portefeuilles constamment rebalancés et comparaison avec le Portefeuille Universel	9
2.1	Performance de l'algorithme EG par rapport à l'algorithme classique de Cover	12
2.2	Comparaison des richesses produites par différents types de portefeuilles avec coûts de transaction	12
2.3	Evolution des rendements des portefeuilles suivant une augmentation des coûts de transaction .	13
2.4	Comparaison de performance du WSCRP	13
2.5	Rendement normalisé (pour 1 dollar d'investissement) pour différents algorithmes de calcul . .	14
2.6	Rendement normalisé d'algorithmes classiques et du SCRIP de Kozat et Singer dans différentes configurations	15
3.1	Exemple de rendements issus de mouvements browniens géométrique corrélé par $\rho = 1$	18
3.2	Exemple de rendements issus de mouvements browniens géométrique corrélé par $\rho = 0$	18
3.3	Exemple de rendements issus de mouvements browniens géométrique corrélé par $\rho = -1$	19
3.4	Evolution du rapport de richesse Universel/Optimal suivant la corrélation et la volatilité pour une période d'investissement d'1 an	20
3.5	Comparaison des performances de différents portefeuilles suivant la corrélation et la volatilité pour une période d'investissement d'1 an	21
3.6	Evolution du rapport de richesse Universel/Optimal suivant la corrélation et la volatilité pour une période d'investissement de 5 ans	22
3.7	Evolution du rapport de richesse Universel/Optimal suivant la corrélation et la volatilité pour une période d'investissement de 10 ans	22
3.8	Comparaison des performances de différents portefeuilles suivant la corrélation et la volatilité pour une période d'investissement de 5 ans	23
3.9	Comparaison des performances de différents portefeuilles suivant la corrélation et la volatilité pour une période d'investissement de 10 ans	23
3.10	Exemples de valeur du paramètre a_n et de la limite inférieure théorique du rapport de richesse entre le P.U. et le P.O. pour différents marchés composés de 2 titres (En haut : paramètre a_n / En bas : limite inférieure théorique)	27
3.11	Evolution du rapport de richesse Universel/Optimal en fonction de la période d'investissement pour un marché de 2 titres	28
3.12	Evolution du pourcentage de portefeuilles constamment rebalancés surpassés par le Portefeuille Universel en fonction de la période d'investissement pour un marché de 2 titres	29
3.13	Performance normalisée (richesse produite pour 1 dollar d'investissement) pour l'ensemble des portefeuilles constamment rebalancés pour un marché constitué par AIG et COO (durée d'investissement = 1 an)	30
3.14	Exemple de frontière efficiente pour un marché constitué des titres PLD et TXT et identification du portefeuille efficient de variance minimale (10 ans de rendements historiques de 2007 à 2017 ont été considérés pour définir cette frontière)	30
3.15	Rendement annualisé de différents types de portefeuilles pour un marché de 2 titres en fonction de la période d'investissement	31
3.16	Evolution du rapport de richesse Universel modifié/Optimal en fonction de la période d'investissement pour un marché de 2 titres	33

3.17	Evolution du pourcentage de portefeuilles constamment rebalancés surclassés par le Portefeuille Universel modifié	33
3.18	Evolution du rapport de richesse produite par le P.U. et par le P.O. en fonction de la période d'investissement et de la taille du marché pour des coûts de transaction nuls	36
3.19	Evolution du pourcentage de portefeuilles constamment rebalancés surpassés par le P.U. en fonction de la période d'investissement et de la taille du marché pour des coûts de transaction nuls	36
3.20	Exemple de frontière efficiente pour un marché constitué des titres KO, CTL, TIF, MON et A (identification du portefeuille efficient de variance minimale (10 ans de rendements historiques de 2007 à 2017 ont été considérés pour définir cette frontière)	37
3.21	Rendement annualisé de différents types de portefeuilles pour un marché de 3 titres en fonction de la période d'investissement	38
3.22	Rendement annualisé de différents types de portefeuilles pour un marché de 5 titres en fonction de la période d'investissement	38
3.23	Rendement annualisé de différents types de portefeuilles pour un marché de 8 titres en fonction de la période d'investissement	39
3.24	Rendement annualisé de différents types de portefeuilles pour un marché de 10 titres en fonction de la période d'investissement	39
3.25	Rendement annualisé de différents types de portefeuilles pour un marché de 15 titres en fonction de la période d'investissement	40
3.26	Rendement annualisé de différents types de portefeuilles pour un marché de 20 titres en fonction de la période d'investissement	40
3.27	Rendement annualisé de différents types de portefeuilles pour un marché de 30 titres en fonction de la période d'investissement	41
4.1	Evolution de la performance suivant l'importance des coûts de transaction	45
4.2	Evolution du rapport de richesse Universel/Optimal en fonction des coûts de transaction	45
4.3	Evolution du pourcentage de portefeuilles constamment rebalancés surpassés par le Portefeuille Universel en fonction des coûts de transaction	46
4.4	Evolution du rendement annuel du Portefeuille Universel en fonction des coûts de transaction et de la période d'investissement pour un marché de 2 titres	47
4.5	Comparaison des évolutions des rendements annuels du P.U. et du P.U. modifié en fonction des coûts de transaction et de la période d'investissement	48
4.6	Evolution du rapport de richesse Universel/Optimal en fonction des coûts de transaction pour une période de 1 an	49
4.7	Evolution du rapport de richesse Universel/Optimal en fonction des coûts de transaction pour une période de 5 ans	49
4.8	Evolution du rapport de richesse Universel/Optimal en fonction des coûts de transaction pour une période de 10 ans	50
4.9	Evolution du pourcentage de portefeuilles surclassé en fonction des coûts de transaction pour une période d'1 an	50
4.10	Evolution du pourcentage de portefeuilles surclassé en fonction des coûts de transaction pour une période de 5 ans	51
4.11	Evolution du pourcentage de portefeuilles surclassé en fonction des coûts de transaction pour une période de 10 ans	51
4.12	Evolution du rendement annualisé en fonction des coûts de transaction pour différentes tailles de marché et une période d'investissement d'1 an	52
4.13	Evolution du rendement annualisé en fonction des coûts de transaction pour différentes tailles de marché et une période d'investissement de 5 ans	53
4.14	Evolution du rendement annualisé en fonction des coûts de transaction pour différentes tailles de marché et une période d'investissement de 10 ans	53
5.1	Evolution du temps de calcul pour un marché de 2 titres en fonction de la précision de définition des portefeuilles constamment rebalancés	57
5.2	Evolution du temps de calcul pour un marché de 5 titres en fonction de la précision de définition des portefeuilles constamment rebalancés	58
5.3	Evolution du temps de calcul en fonction de la taille du marché pour une précision de définition de 25%	58

5.4	Approximation exponentielle du temps de simulation en fonction de la taille du marché pour une précision de définition de 10%	59
5.5	Extrapolation du temps de simulation en fonction de la taille du marché pour une précision de définition de 10%	59
5.6	Evolution du temps de calcul en fonction de la taille du marché pour une précision de définition de 25%	61
5.7	Approximation exponentielle (P.U. modifié) du temps de simulation en fonction de la taille du marché pour une précision de définition de 10%	61

Liste des Tableaux

3.2	Pourcentage de marché de 2 titres respectant la condition d'activité des titres en fonction de la période d'investissement	24
3.3	Etude de couples de titres - Partie 1	25
3.4	Etude de couples de titres - Partie 2	26
3.6	Pourcentage de marché de 2 titres respectant la propriété stipulant que le Portefeuille Universel surpasse chaque titre individuel	32
3.8	Comparaison entre Universel et Universel modifié pour 2 titres	34
3.10	Exemple de tous les portefeuilles constamment rebalancés possibles pour $m = 3$ titres et une précision de 1%	35
3.12	Pas de précision choisi pour la définition des portefeuilles constamment rebalancés en fonction de chaque m	35
3.14	Analyse du nombre moyen de titres actifs suivant la taille de marché et la durée d'investissement avec vérification de la relation de Cover (1.18)	42
4.2	Sensibilité du rendement annuel du Portefeuille Universel aux coûts de transaction pour un marché de 2 titres (variation du rendement annuel pour une variation de coût de transaction de 1%)	47
4.4	Comparaison de sensibilité du rendement annuel du Portefeuille Universel classique et modifié aux coûts de transaction pour un marché de 2 titres en fonction de la période d'investissement (variation du rendement annuel pour une variation de coût de transaction de 1%)	48
4.6	Sensibilité du rendement annuel du Portefeuille Universel aux coûts de transaction en fonction de la période d'investissement (variation du rendement annuel pour une variation de coût de transaction de 1%)	54
4.8	Evolution du turnover journalier du P.O. et du P.U. en fonction de la taille de marché (moyenne de 500 simulations sur une période considérée de 10 ans)	55
4.10	Exemple de corrélation entre le rapport de turnover P.U./P.O. et la sensibilité aux CT du rapport de richesse P.U./P.O	55
5.2	Résultats de temps de simulation pour un marché de 2 titres	57
5.4	Valeurs particulières d'extrapolation du temps de calcul pour une taille de marché croissante avec une définition des titres de 10%	60
5.6	Valeurs particulières d'extrapolation du temps de calcul pour une taille de marché croissante avec une définition des titres de 10% (P.U. modifié)	62

Introduction

Depuis l'introduction des premiers marchés boursiers, la gestion de portefeuille n'a jamais cessé d'accroître l'intérêt que lui ont porté des générations d'investisseurs à travers le monde. Ainsi, selon [1], fin 2009, la gestion de portefeuille correspondait à un montant de pas moins de 26 000 milliards de dollars d'encours sous gestion, ce qui traduit toute l'importance de cette industrie. Cette gestion de portefeuille est également le centre d'activités d'un grand nombre d'acteurs qui gravitent autour d'elle et dépendent de son bon fonctionnement. Parmi ceux-ci, nous pouvons notamment citer les Banques de Financement, les services d'Assurance, les centres de courtages ou même un grand nombre de particuliers gérant eux-mêmes leurs fonds.

Au cours des années, de multiples théories de gestion de portefeuilles ont vu le jour, destinées à procurer à l'investisseur un cadre conceptuel visant à guider et orienter ses décisions d'investissement. Au travers de toutes ces théories, la plus connue est sans nul doute celle d'Harry Markowitz [2], économiste américain qui, à travers son désormais célèbre article édité en 1952 [3], a posé les bases de l'édification du modèle classique d'évaluation des actifs financiers connu sous le nom de CAPM (Capital Asset Pricing Model) [4]. Markowitz a ainsi été un des premiers à formaliser la notion de risque et d'espérance de rendement associé à un actif financier par l'utilisation de grandeurs statistiques issues de valeurs historiques des rendements de ces mêmes actifs. Ainsi, il a pu mettre en évidence que le risque associé à un actif financier pouvait se définir comme l'écart-type des rendements passés du titre, tandis que le rendement attendu pouvait se mesurer comme l'espérance mathématique de ces mêmes rendements. De ces notions ont découlé les concepts de frontière efficiente et de portefeuille de marché [5]. La construction de portefeuilles selon les théories dites de Sharpe-Markowitz définissent ainsi, sur un marché donné, la répartition à pratiquer entre l'actif au taux sans risque et le portefeuille de marché diversifié par nature. Le profil de l'investisseur et son aversion plus ou moins forte au risque le dirigera donc sur la droite d'évaluation des actifs (CAPM) afin d'établir pour lui le portefeuille proposant le meilleur rapport rendement-risque convenant à son profil [6]. Cette méthodologie a pu être complétée par la théorie de l'Utilité [7] grâce à laquelle l'investisseur a pu déterminer son portefeuille de prédilection sur la droite d'évaluation des actifs .

Cette théorie de gestion de portefeuille initiée par Markowitz étant relativement ancienne (plus de 60 ans), de nombreuses évolutions du modèle ont été présentées au fil des années [8]. Parmi celles-ci, nous pouvons par exemple citer l'inclusion des coûts de transaction, la considération des erreurs dans l'estimation du risque et des espérances de rendement ou encore la considération du changement des conditions de marché et de l'impact de marché. Outre l'évolution du modèle de Markowitz, d'autres modèles sont également apparus en opposition à certaines limitations que présente la méthodologie de Markowitz. Parmi elles, le fait que les rendements passés sont de bons indicateurs des performances futures est une des hypothèses les plus souvent controversées. Une adaptation est proposée par le modèle à trois facteurs de Fama et French [9]. D'autres conceptions de portefeuilles ont comme but déclaré de *battre le marché*, c'est-à-dire de surpasser les rendements proposés globalement par le marché (et définis par des indices classiques diversifiés). La gestion active apparaît ainsi comme une de ces méthodologies et vise à sélectionner, selon des stratégies et des philosophies propres à chaque gestionnaire, les titres les plus performants par une analyse presque constante des paramètres du marché.

Dans une théorie développée dans le début des années 90, Thomas Cover [10] a proposé une conception de construction de portefeuille qui s'affranchit totalement de toute notion de risque. Ainsi, plutôt que de réfléchir en terme de sélection du portefeuille proposant le meilleur rapport rendement/risque, Cover se base sur la définition du portefeuille optimal constamment rebalancé. Bien que proposant le meilleur rendement possible parmi un ensemble de titre d'un marché, ce portefeuille n'est qu'une chimère théorique qui nécessiterait la connaissance a priori du mouvement futur des titres. Cependant, dans sa démonstration, Cover propose la construction d'un portefeuille dynamiquement rebalancé permettant d'approcher selon certaines limites la performance de ce Portefeuille Optimal. Ce portefeuille est ainsi nommé *Universal Portfolio* ou dans sa traduction *Portefeuille Universel*.

L'objectif de ce mémoire sera ainsi d'exposer et de synthétiser la théorie de Cover qui apparaît relativement complexe dans sa forme générale. Une fois les différents rouages et hypothèses sous-jacentes du Portefeuille Universel exposés, notre ambition sera de déterminer ses performances. Ces performances seront comparées à celle du Portefeuille Optimal ainsi qu'à quelques benchmarks classiques. Ensuite, différents paramètres successifs seront introduits afin de positionner le Portefeuille Universel selon certaines réalités pratiques des marchés boursiers comme les coûts de transaction. Finalement, une conclusion reprendra les points développés et mettra en évidence les points forts et faibles du Portefeuille Universel ainsi que les perspectives pouvant en être retirées. Notons que nos différentes analyses seront réalisées à l'aide du logiciel *Matlab*.

Chapitre 1

Présentation du Portefeuille Universel et concepts mathématiques

1.1 Portefeuille Optimal

Considérons un marché constitué de m titres ainsi qu'une période d'investissement constituée d'une seule et unique journée. Chacun des titres du marché peut être rattaché à une variable aléatoire x_j représentant la distribution des rendements (a priori inconnue) de chaque titre j . Nous pouvons alors définir un vecteur aléatoire \vec{X} comme la conjection de ces variables x_j tel que $\vec{X} = (x_1, x_2, \dots, x_m)$.

Considérons également la constitution d'un portefeuille \vec{b} dans ce marché, \vec{b} étant un vecteur de taille m définissant la répartition de chaque titre du marché dans le portefeuille tel que $\vec{b} = (b_1, b_2, \dots, b_m)$ avec $b_i \geq 0 \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}$ et $\sum_{i=1}^m b_i = 1$. Chaque b_i correspond donc à une proportion de la somme totale investie. Dès lors, nous pouvons exprimer la richesse produite par ce portefeuille après notre unique journée d'investissement par :

$$S = \vec{b} \vec{X}^t \quad (1.1)$$

Considérons désormais une période d'investissement de n jours. Chaque jour peut être associé à un vecteur aléatoire \vec{X}_i relatif aux titres du marché où nous supposons les variables successives \vec{X}_i iid¹. Si l'on suppose qu'après chaque journée, notre portefeuille est rebalancé suivant la composition choisie initialement, nous pouvons alors définir la richesse accumulée sur la période de rétention comme :

$$S_n = \prod_{i=1}^n \vec{b} \vec{X}_i^t \quad (1.2)$$

Laissons désormais quelque peu sur le côté les notions de variables aléatoires pour revenir à une expression plus pragmatique de la richesse produite par un portefeuille constamment rebalancé sur le marché. Considérons $\vec{r} = (r_1, r_2, \dots, r_m)$ comme étant un vecteur des rendements relatifs des titres du marché définis chaque jour. Dès lors, sur une période d'investissement de n journées, nous pouvons construire n vecteurs \vec{r}_i constitués eux-mêmes de m éléments, ces éléments représentant le rendement de chaque titre opéré sur la journée. Ainsi, par exemple, le vecteur \vec{r}_5 sera un vecteur de m éléments traduisant pour chacun le rapport $\frac{\text{prix d'ouverture Jour } 6}{\text{prix d'ouverture Jour } 5}$. Dès lors, la richesse générée sur la période de rétention peut se réexprimer comme :

$$S_n = \prod_{i=1}^n \vec{b} \vec{r}_i^t \quad (1.3)$$

1. Variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées

Parmi toutes les combinaisons possibles \vec{b} , et donc tous les portefeuilles constamment rebalancés possibles, nous pouvons définir le portefeuille démontrant le rendement maximal ou *Portefeuille Optimal* (P.O.) sur la période de rétention de n journées comme :

$$S_n^* = \max_{\vec{b} \in \beta} S_n(\vec{b}) \quad \beta := \{b \in \mathbb{R}^m : \sum_{i=1}^m b_i = 1, b_i \geq 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\}\} \quad (1.4)$$

Cependant, comme l'expriment conjointement les équations (1.2) et (1.3), la détermination de ce portefeuille optimal noté \vec{b}^* nécessite la connaissance préalable des rendements des différents titres en portefeuille. Or, en pratique, ces rendements sont impossibles à prédire et donc le rendement proposé par le Portefeuille Optimal (sauf cas extrêmement chanceux), impossible à atteindre. **C'est ainsi que Thomas Cover a proposé dans ses travaux [11], le développement d'un portefeuille particulier permettant d'approcher le rendement du Portefeuille Optimal sans nécessiter la connaissance des rendements futurs des titres.** Ce portefeuille particulier appelé *Portefeuille Universel* (P.U.) est développé dans la section suivante 1.3.

1.2 Propriétés du Portefeuille Optimal

Avant de présenter le Portefeuille Universel, nous allons tout d'abord ici définir les propriétés intéressantes liées au meilleur portefeuille constamment rebalancé que cherche à approcher ce Portefeuille Universel. Notons que dans nos considérations, le rebalancement se fait de manière auto-financante, c'est-à-dire qu'aucune valeur n'est détruite lors de l'achat ou de la vente des titres.

Le Portefeuille Optimal surpasse le meilleur titre

$$S_n^* \geq \max_{j=1,2,\dots,m} S_n(\vec{e}_j) \quad (1.5)$$

où \vec{e}_j est un vecteur de base de taille m dont tous les arguments valent uniformément 0 sauf le j^{ieme} tel que $\vec{e}_j(i) = \delta_{ij}$ (symbole de Kronecker). La justification de cette propriété semble évidente. En effet, réaliser une stratégie de type *buy and hold* avec le meilleur titre sur le marché n'est qu'une construction particulière, une des combinaisons possibles de portefeuille (un portefeuille constamment rebalancé particulier), consistant en un vecteur \vec{b} uniformément nul sauf en la position de ce meilleur titre. Dès lors, comme le Portefeuille Optimal considère l'ensemble des combinaisons possibles et en retire la meilleure, il est clair que le rendement tiré de ce portefeuille est au moins équivalent à celui du meilleur titre sur la période de rétention.

Le Portefeuille Optimal supasse tout portefeuille statique

$$S_n^* \geq \sum_{j=1}^m \alpha_j S_n(\vec{e}_j) \quad \text{avec} \quad \alpha_j \geq 0 \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, m\}, \quad \sum_{j=1}^m \alpha_j = 1 \quad (1.6)$$

Cette propriété est particulièrement intéressante car elle exprime que le Portefeuille Optimal surpasse tous les portefeuilles statiques sur la période de rétention. On entend par portefeuille statique tout *buy and hold* (donc sans rebalancement) réalisé pour une certaine composition du portefeuille (un certain \vec{b}) sur la période de rétention. Ceci peut se comprendre assez facilement en considérant la propriété précédente. En effet, par définition, tout portefeuille statique pour un marché de m titres s'exprime comme une combinaison linéaire de chaque titre du marché. Dès lors, si nous considérons le meilleur titre sur la période d'étude, il est clair que la richesse de ce portefeuille statique constitué par le meilleur titre est égale ou supérieure à chacune de ces combinaisons linéaires. Comme le Portefeuille Optimal surpasse ou égale lui-même ce meilleur titre, nous en concluons qu'il surpasse ou égale aussi tout portefeuille statique.

1.3 Portefeuille Universel

Dans sa définition du Portefeuille Universel, Cover propose l'utilisation d'un portefeuille rebalancé dynamiquement chaque jour selon une répartition \vec{b}_i dépendant du passé des titres. Il peut sembler étrange dans un premier temps que l'utilisation de données du passé puisse conférer quelques informations sur le comportement futur d'un titre, cependant, nous pourrions montrer que cette construction de portefeuille permettra tout de même d'approcher la richesse détenue par le P.O. Plus précisément, ce Portefeuille Universel est censé démontrer le même taux de croissance asymptotique que le meilleur portefeuille constamment rebalancé (cf. équation (1.11)). Dans nos développements, la dénomination du Portefeuille Optimal sera toujours définie par le symbole $\hat{\cdot}$ tandis que celle du Portefeuille Universel sera donnée par $\vec{\cdot}$.

Le portefeuille se construit ainsi itérativement où chaque jour voit un nouvel indice à rebalancer :

$$\vec{b}_1 = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m} \right) \quad (1.7)$$

$$\vec{b}_{k+1} = \frac{\int \vec{b} S_k(\vec{b}) d\vec{b}}{\int S_k(\vec{b}) d\vec{b}} \quad (1.8)$$

Où

$$S_k(\vec{b}) = \prod_{i=1}^k \vec{b}_i r_i^t \quad (1.9)$$

On remarque que le portefeuille initial au jour 1 est simplement le portefeuille équipondéré entre les m titres du marché. Ensuite, on peut remarquer une certaine logique dans la construction de \vec{b}_{k+1} . En effet, en décomposant l'expression, on voit que le numérateur n'est qu'une somme des différentes combinaisons de portefeuilles possibles pondérés par la richesse qu'ils ont accumulé jusqu'au $k^{\text{ème}}$ jour. Cette valeur est alors divisée simplement par la somme des richesses totales de chaque portefeuille au jour k . On en conclut donc que le nouveau vecteur de répartition des titres \vec{b}_{k+1} sera d'autant plus proche d'un portefeuille ayant démontré une grande richesse jusqu'à lors, un grand rendement, et d'autant plus éloigné des portefeuilles ayant démontrés de bas rendement.

Finalement, suivant cette construction, la richesse finale proposée par le Portefeuille Universel au bout de la période d'investissement de n journées se définit par :

$$\hat{S}_n = \prod_{k=1}^n \vec{b}_k r_k^t \quad (1.10)$$

1.4 Propriétés du Portefeuille Universel

Le but de cette section est de définir les caractéristiques du Portefeuille Universel en comparaison du meilleur portefeuille constamment rebalancé. L'idée est d'établir dans quelle mesure et sous quel rapport le P.U. peut atteindre les performances du P.O. Afin de présenter les concepts mathématiques simplifiés sous-jacents, nous nous cantonnerons au cas d'un marché ne contenant que 2 titres. Notons que l'entièreté des développements, notamment ceux concernant la généralisation à m titres, sont disponibles dans l'article de référence [11].

Avant toute chose, précisons que l'intérêt majeur proposé par le Portefeuille Universel est de présenter le même taux de croissance asymptotique que le Portefeuille Optimal. En effet, en définissant le *taux de croissance* du portefeuille par $W(\vec{b}) = \frac{1}{n} \ln(S_n)$, nous pouvons dire que, pour toute séquence de rendements $r_1^t, r_2^t, \dots, r_n^t$:

$$W(\vec{b}) - W(\vec{b}^*) \rightarrow 0 \quad \text{pour} \quad n \rightarrow \infty \quad (1.11)$$

1.4.1 Définitions et Hypothèses

Avant d'entrer dans le détail des démonstrations, nous allons préalablement définir des concepts importants et les hypothèses qui sous-tendent la suite de nos développements. Par rapport aux termes intervenant dans les équations suivantes, il nous faut encore définir le terme F . Celui-ci se définit, après toute n^{ieme} journée d'investissement, comme une fonction de distribution associant à chaque vecteur $\vec{r}_i \forall i \in \{1, \dots, n\}$ une probabilité identique égale à $\frac{1}{n}$.

Titre actif

Considérant un marché constitué de m titres, nous dirons que ces titres sont strictement *actifs* à la journée n si :

$$\vec{b}^*(i) > 0, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (1.12)$$

En pratique, ceci implique qu'il n'existe pas de titres dominants tel que la composition du meilleur portefeuille constamment rebalancé tenderait à s'approcher du vecteur \vec{e}_j défini en (1.5). Ceci induit donc que \vec{b}^* reprend au moins une fraction de tous les titres disponibles sur le marché. Notons déjà ici que cette hypothèse fondamentale de Cover constitue la plus grande limitation de ces développements. En effet, il existe toujours en situation réelle quelques titres dominants sur les marchés.

Séquence de titres de plein rang (*full rank*)

Nous pouvons dire qu'une séquence des prix relatifs $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ est de *plein rang* si ces vecteurs couvrent entièrement l'espace \mathbb{R}^m . Ceci implique que n'importe quel point de l'espace multidimensionnel puisse être reconstruit par une combinaison linéaire des vecteurs. En pratique, cette propriété se vérifie toujours sur les marchés, qui plus est si le nombre de journées considérées de la période d'investissement n est grand.

Matrice de sensibilité

La matrice de sensibilité est un élément important entrant en compte dans l'estimation du rapport entre la richesse générée par le Portefeuille Universel et par le Portefeuille Optimal. Celle-ci se définit pour tout portefeuille constamment rebalancé \vec{b} comme une matrice de taille $(m-1) \times (m-1)$ définie pour chaque période de rétention de n journées par :

$$J_{ij}(\vec{b}) = \int \frac{(\vec{r}(i) - \vec{r}(m))(\vec{r}(j) - \vec{r}(m))}{(\vec{b}^t \vec{r})^2} dF(\vec{r}) \quad (1.13)$$

Dans cette expression, l'intégration va ainsi se réduire à une somme pondérée sur tous les vecteurs \vec{r}_i où la pondération sera dictée par la fonction F définie en début de section (que nous avons spécifiée uniforme, autrement dit, la pondération sera identique pour chaque \vec{r}_i et égale à $\frac{1}{n}$).

1.4.2 Marché constitué de 2 titres

Comme spécifié, nous allons maintenant établir le comportement du Portefeuille Universel en comparaison du meilleur portefeuille rebalancé. Nous présenterons uniquement ici les grands résultats des développements mathématiques de Cover. Le but est ici de définir des rapports théoriques entre la performance du P.U. et du P.O. afin de pouvoir vérifier plus tard sur base de titres réels si ces rapports sont bien vérifiés. L'entièreté des démonstrations pourra être retrouvée dans l'article de référence [11].

Considérons ainsi 2 titres ($m = 2$) sur une période d'investissement de n journées où classiquement nous définissons le rendement des titres sur chaque journée par $\vec{r}_i = (\vec{r}_i(1), \vec{r}_i(2))$. Dans ce cas, tout portefeuille défini dans ce marché pourra être exprimé par $\vec{b} = (b_1, b_2)$ ou, sachant que $\sum_{i=1}^m b_i = 1$, par $b = (b_1, 1 - b_1)$. En considérant le meilleur portefeuille rebalancé à la n^{ieme} journée par $b_n^* = (b_{n1}^*, b_{n2}^*) = (b_{n1}^*, 1 - b_{n1}^*)$, nous pouvons alors exprimer la matrice de sensibilité J de l'équation (1.13) par (notons ici que dans le cas $m = 2$, J se réduit à un scalaire tel que $J = J_{11}$) :

$$J(\vec{b}^*) = J^* = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(\vec{r}_i(1) - \vec{r}_i(2))(\vec{r}_i(1) - \vec{r}_i(2))}{b_{n1}^* \vec{r}_i(1) + (1 - b_{n1}^*) \vec{r}_i(2)} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{(\vec{r}_i(1) - \vec{r}_i(2))^2}{b_{n1}^* \vec{r}_i(1) + (1 - b_{n1}^*) \vec{r}_i(2)} \quad (1.14)$$

En ajoutant le terme d'écart relatif τ_n^2 par :

$$\tau_n = 2^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\max(\vec{r}_i(j))}{\min(\vec{r}_i(j))} - 1 \right) \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\} \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (1.15)$$

Nous pouvons à présent, sur base des hypothèses de la section 1.4.1, présenter le théorème fondamental.

Theorème 1.4.2.1 *Soit $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \dots, \vec{r}_n$ une séquence arbitraire des rendements de 2 titres, et soit $a_n = \min[b_{n1}^*, 1 - b_{n1}^*, 3J^*/\tau_n^3]$. Alors, pour tout $0 < \epsilon < 1$, et pour tout n :*

$$\frac{\hat{S}_n}{S_n^*} \geq \sqrt{\frac{2\pi}{nJ^*(1+\epsilon)}} - \frac{2}{\epsilon(1+\epsilon)a_n J^* n} e^{-\frac{\epsilon^2(1+\epsilon)a_n J^* n}{2}} \quad (1.16)$$

Suivant les hypothèses précitées, ce théorème nous procure une borne inférieure du rapport entre la richesse produite par le Portefeuille Universel et celle du Portefeuille Optimal et ce, pour n'importe quelle journée de la période d'investissement n . Nous reviendrons plus précisément sur la validité de ce théorème dans un chapitre ultérieur du présent rapport. En considérant la limite de cette expression lorsque $n \rightarrow \infty$, nous obtenons l'approximation suivante :

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\hat{S}_n}{S_n^*} = \sqrt{\frac{2\pi}{nJ^*}} \quad (1.17)$$

1.5 Présentation de quelques résultats

Dans cette section, nous allons présenter quelques résultats issus de l'article de Cover afin de situer sous une première approche les performances du Portefeuille Universel en pratique. Nous présenterons ainsi deux situations. La première détaillera le cas d'un marché constitué de 2 titres largement décorrelés tandis que la seconde s'intéressera au cas de 2 titres présentant relativement les mêmes évolutions de rendement sur la période d'investissement étudiée. La période d'investissement considérée de chacune des situations est de 22 ans.

2. Cet écart relatif est un paramètre traduisant la dispersion des rendements au sein du marché. Ce paramètre est d'autant plus grand que l'écart entre le plus haut et le plus bas rendement journalier observé sur toute la période (pour n'importe quel titre du marché) est important.

1.5.1 Cas de *Iroquois Brand Ltd* et de *Kin Ark Corp*

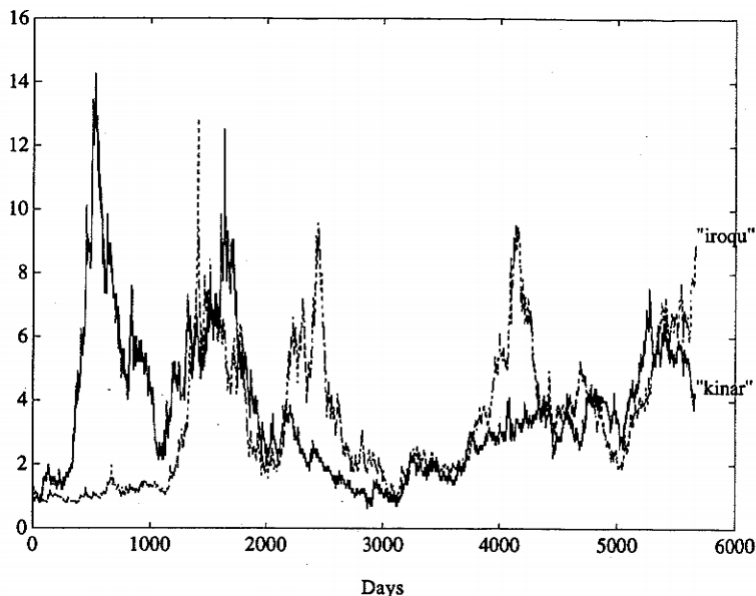


FIGURE 1.1 – Evolution des prix des titres Iroquois et Kin Ark jour par jour [11]

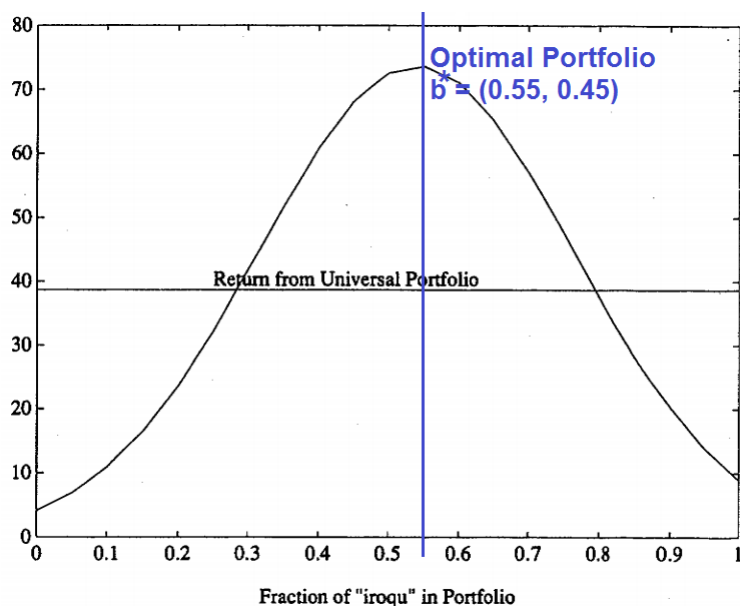


FIGURE 1.2 – Performance normalisée (richesse produite pour 1 dollar d'investissement) de l'ensemble des portefeuilles constamment rebalancés possibles et comparaison avec le Portefeuille Universel [11]

Comme on le constate sur cet exemple, les titres en questions sont largement décorrélés entre eux. Ensuite, logiquement et conformément à (1.5), on remarque la sur-performance du Portefeuille Optimal par rapport à une stratégie de type *buy and hold* sur un des deux titres considérés. De plus, on constate que cette sur-performance est loin d'être minime. En effet, on constate une performance normalisée du Portefeuille Optimal de 73.6 par rapport à une performance de 8.9 pour le meilleur titre du marché (Iroquois Brand Ltd), soit une sur-performance de l'ordre de +700%.

Ensuite, on observe que le Portefeuille Universel, quant à lui, permet d'approcher la richesse théorique du Portefeuille Optimal en proposant une performance normalisée de 38.7 soit environ 53% de la performance optimale. Un fait intéressant à noter est que le P.U. reste tout à fait supérieur à n'importe lequel des 2 titres pris séparément et à environ 50% de tous les portefeuilles constamment rebalancés.

1.5.2 Cas de *Coca-Cola* et d'*IBM*

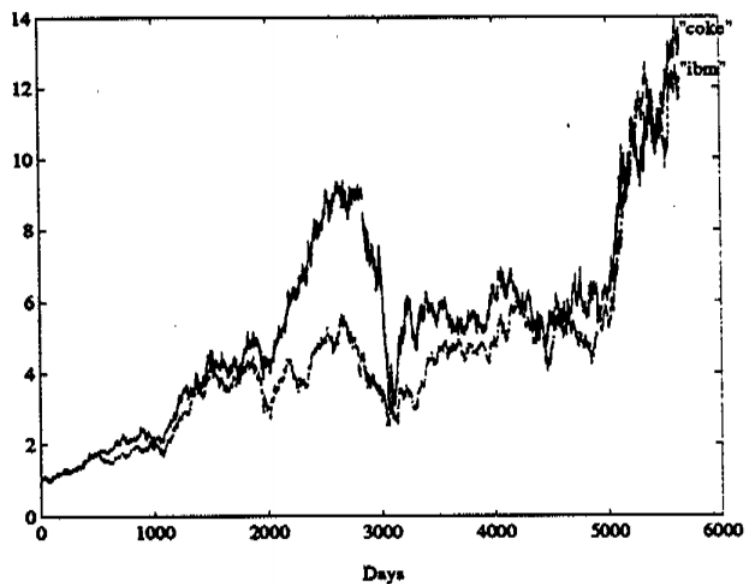


FIGURE 1.3 – Evolution des prix des titres Coca-Cola et IBM jour par jour [11]

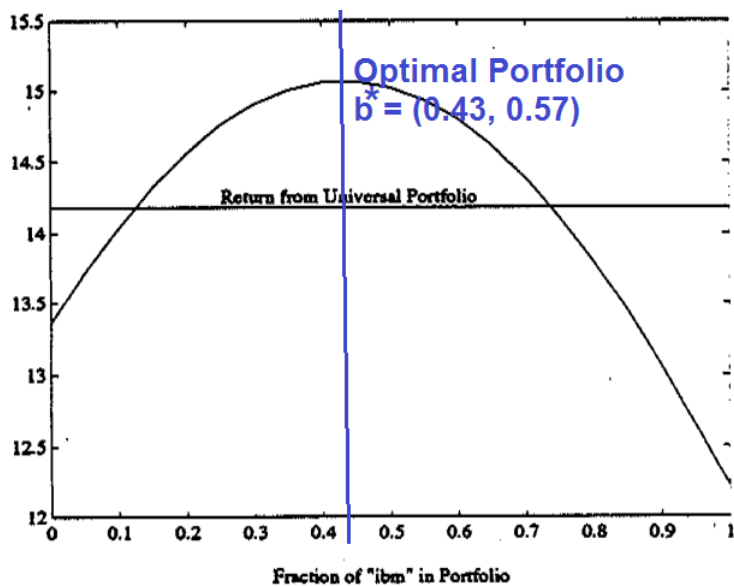


FIGURE 1.4 – Performance normalisée (richesse produite pour 1 dollar d'investissement) de l'ensemble des portefeuilles constamment rebalancés possibles et comparaison avec le Portefeuille Universel [11]

Dans ce second exemple, on observe tout de suite sur base de la Figure 1.3 que les titres semblent fortement corrélés. Ainsi, on peut remarquer que la sur-performance du meilleur portefeuille rebalancé par rapport aux performances des titres individuellement est bien moindre. En effet, ce rapport est seulement de l'ordre de +13% (VS buy and hold stratégie avec IBM), et donc, a fortiori, encore moindre pour le Portefeuille Universel (+6%). Cependant, dans ce cas de figure, la richesse générée par le P.U. est bien plus proche de celle produite par le P.O. (environ 94%). De plus, le Portefeuille Universel reste supérieur à chaque titre individuel ainsi qu'à plus de 65% de tous les portefeuilles constamment rebalancés.

Nous pouvons donc conclure deux choses. La première est que le Portefeuille Optimal semble procurer une plus grande richesse en cas de titres fortement décorrélés qu'en cas de titres corrélés. Cependant, c'est dans ce dernier cas de figure que le Portefeuille Universel semble plus intéressant car il se rapproche d'autant plus du Portefeuille Optimal et surpasse d'autant plus de portefeuilles constamment rebalancés. Malgré cela, rappelons-nous que jusqu'à présent, il n'a été en aucun cas tenu compte des coûts de transaction. Or, dans le cas présent où la surperformance du P.U. par rapport aux titres seuls est légère (titres fortement corrélés), nous pouvons remettre en cause le choix d'une telle stratégie. En effet, la construction d'un tel portefeuille introduira forcément des coûts de transaction probablement non négligeables alors qu'une stratégie buy and hold n'induirait que 2 coûts relativement légers, un à l'achat et un à la vente à la fin de la période d'investissement. Dès lors, le rendement du Portefeuille Universel pourrait alors devenir moins intéressant que celui proposé par un "simple" buy and hold d'un titre.

1.6 Considérations pratiques

Il est maintenant bon de résumer les développements de Cover relatifs au Portefeuille Universel. Tout d'abord, rappelons encore une fois que toutes les analyses réalisées et les conclusions établies ne tiennent pas en compte d'éventuels coûts de transaction. Nous avons donc vu que sur un marché constitué de m titres, le Portefeuille Universel est censé approcher dans une certaine limite la richesse du meilleur portefeuille rebalancé. Cependant, cette conclusion ainsi que les théorèmes démontrés se basent tous sur le fait que les titres du marché sont supposés tous actifs. Or, en pratique il n'en est rien. Nous tâcherons de vérifier ce fait sur base d'une multitude de titres réels du marché.

Malgré cela, Cover spécifie que s'il existe au minimum 2 titres actifs dans le marché, alors, le taux de croissance de la richesse proposée par le Portefeuille Universel sera supérieur à celui de tout titre tel que :

$$\frac{\hat{S}_n}{S_n(\vec{e}_i)} \rightarrow \infty \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, m\} \quad (1.18)$$

Cette tendance est particulièrement vraie lorsque n tend vers l'infini.

Ainsi, sous cette condition et considérant une période d'investissement suffisamment longue, le P.U. permettra de battre n'importe quel titre isolé sous couvert de coût de transaction nuls. Nous vérifierons cette propriété et de manière générale établirons les performances du Portefeuille Universel sur plusieurs cas d'étude. Ensuite, nous le placerons dans des conditions plus réalistes par l'introduction des coûts de transaction.

Chapitre 2

Etat de l'Art

L'article initiateur de T. Cover [11] traitant du Portefeuille Universel étant paru au début des années 90, nous nous serions attendus à un nombre relativement important de travaux connexes abordant ce thème. Cependant, après de multiples recherches, nous nous sommes rendus compte que très peu de travaux dérivés du Portefeuille Universel ont été réalisés en plus de 20 années. Une des raisons expliquant ce fait peut être la nature assez complexe de la théorie relative au Portefeuille Universel pour des personnes peu aguerries aux mathématiques et en particulier à la Théorie de l'Information dont T. Cover était un des leaders [12]. L'objectif de ce chapitre est ainsi de présenter de manière la plus exhaustive possible l'ensemble des travaux ayant traité du Portefeuille Universel. Notre but sera plus particulièrement de proposer au lecteur, de manière simplifiée, les grands développements et résultats de ces différentes études afin de mieux situer l'apport du présent Mémoire.

Tout d'abord, en 1996, Cover et Ordentlich [13] ont redéfini le Portefeuille Universel en lui intégrant la notion de *side information*³. L'idée centrale de leurs développements a été de considérer l'intégration d'une mesure dans le calcul d'intégration présenté en (1.8) et définissant la composition du portefeuille à rebalancer chaque jour. Ainsi, l'importance de chaque titre dans la composition du portefeuille au jour le jour n'est plus seulement fonction des performances passées de ces titres mais également des performances prévues liées à cette information détenue. La pondération plus importante des titres ayant une plus forte propension de haut rendement dicté par leur side-information a donné naissance à la notion de *Portefeuille Universel avec information privilégiée*.

Helmhold et al. en 1998 [14], ont déterminé un nouvel algorithme de calcul du Portefeuille Universel. Bien que plus faible théoriquement sur les performances attendues vis-à-vis de l'algorithme de Cover, ils ont pu démontrer sur quelques exemples utilisés précédemment par Cover la supériorité de leur algorithme (*EG algorithm*) au niveau du rendement obtenu. De plus, l'avantage premier de leur algorithme sur celui de Cover était de proposer un temps de calcul linéaire avec le nombre de titres du marché alors que leur concurrent propose un temps de calcul croissant de manière exponentielle avec le nombre de titres en portefeuille.

3. Cette *side information* pourrait se traduire ici par information privilégiée et a trait au fait qu'une certaine connaissance "a priori" des performances futures des titres est possible. Cette performance prédite à l'aide d'informations que possède l'initié peut alors être avantageusement utilisée en privilégiant les titres qui, selon les informations détenues, auront tendance à être performants dans le futur.

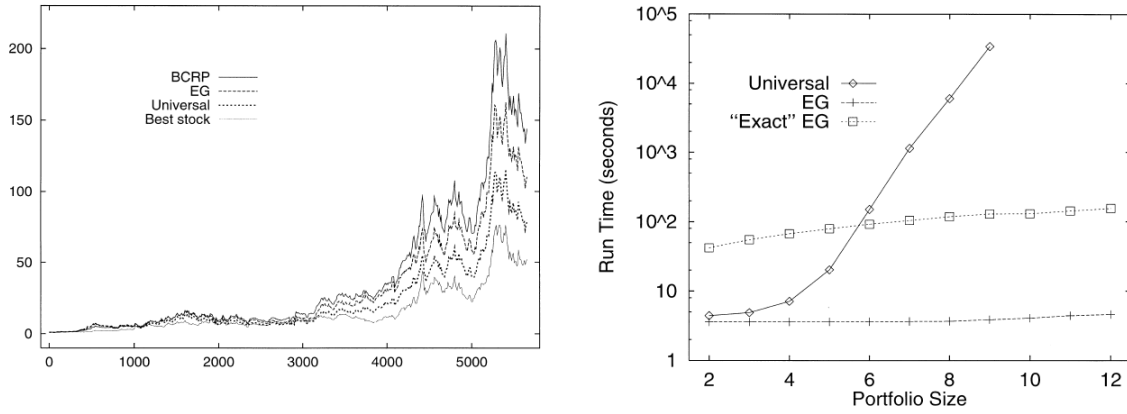


FIGURE 2.1 – A gauche : Comparaison de performance entre le meilleur portefeuille constamment rebalancé (BCRP), l’algorithme EG, le Portefeuille Universel et le meilleur titre d’un marché (Best Stock) constitué de 2 actions Iroquois Brand Ltd. et Kin Ark Corp. (abscisse : nombre de jours de détention, ordonnée : richesse produite pour 1 dollar d’investissement), A droite : Comparaison de temps de calcul entre l’algorithme EG et l’algorithme de Cover en fonction du nombre de titres en portefeuille [14]

Blum et Kalai [15] ont étudié l’impact des coûts de transaction sur les performances du meilleur portefeuille rebalancé ainsi que du Portefeuille Universel. Ils ont ainsi étudié la possibilité de rebalancer le portefeuille à une fréquence inférieure à la fréquence journalière. En effet, ils ont ainsi pris en compte le fait que rebalancer le portefeuille peut induire des coûts supérieurs au gain importé par ce rebalancement, d’où la définition d’un *Semi Constant Rebalanced Portfolio* (SCRP). Dans leur développement, ils ont choisi une période de rebalancement mensuelle, tout en spécifiant que la période optimale devrait être déterminée sur base de données passées des titres du portefeuille. Leurs résultats sont synthétisés sur les Figures 2.2 et 2.3 suivantes :

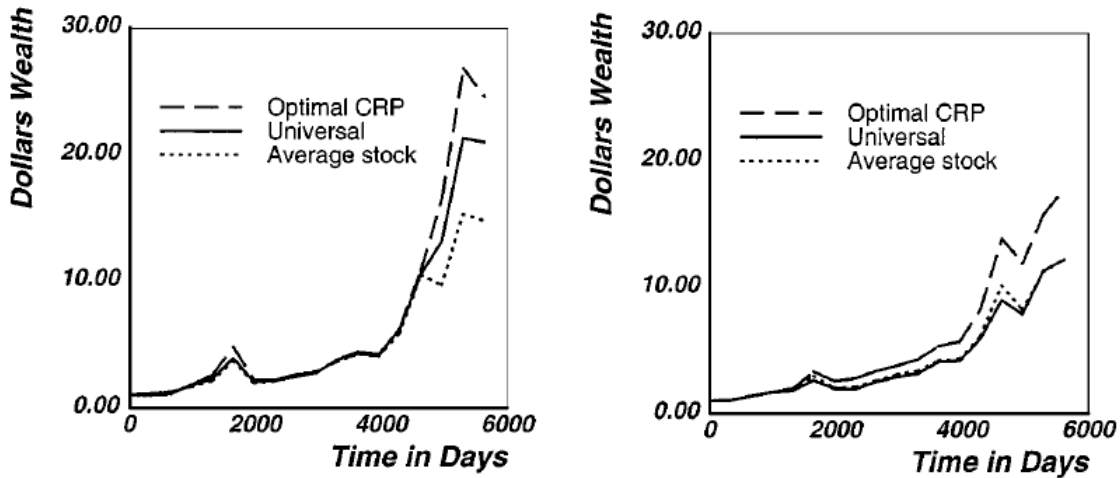


FIGURE 2.2 – Evolution de la richesse générée en fonction du nombre de jour de détention du meilleur portefeuille constamment rebalancé (Optimal CRP), du Portefeuille Universel et du portefeuille équipondéré (Average Stock) pour un coût de transaction de 2 % (Marché 1 à gauche constitué des titres *arco*, *espey* et *exxon*, Marché 2 à droite constitué des titres *alcoa*, *amerb* et *arco*) [15]

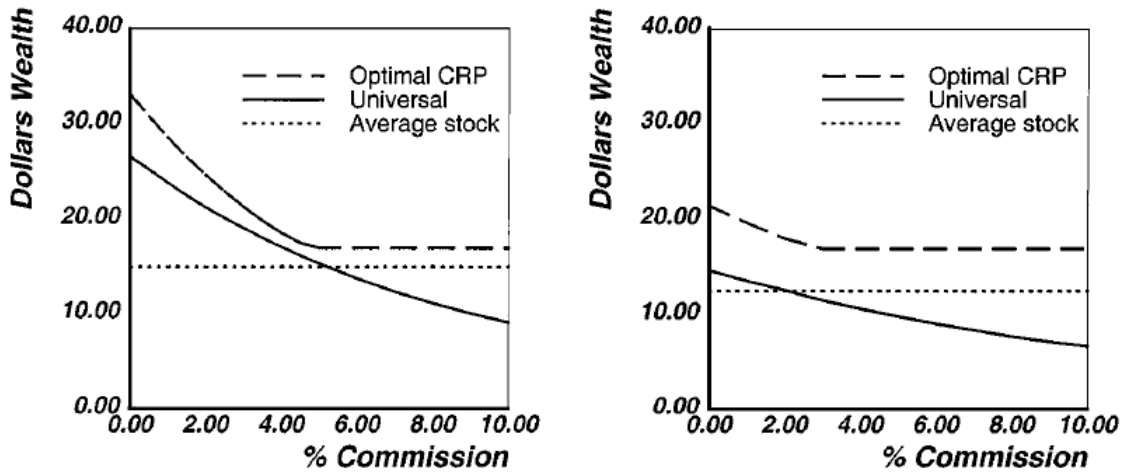


FIGURE 2.3 – Evolution de la richesse produite par le BCRP, le Portefeuille Universel et le portefeuille équi pondéré suivant l'augmentation des coûts de transactions pour les marchés 1 et 2 (l'Universel étant rebalancé une fois par mois) [15]

Les conclusions importantes de leurs travaux sont que la performance du Portefeuille Universel est logiquement affectée négativement par les coûts de transaction de la même manière que le meilleur portefeuille rebalancé. De plus, la période de rebalancement optimale à pratiquer semble d'autant plus grande que les coûts de transaction sont élevés. Finalement, ils ont aussi étudié l'évolution du rendement du Portefeuille Universel avec l'augmentation des coûts de transaction et démontré que (sur base d'un rebalancement mensuel) le rendement du Portefeuille Universel est strictement décroissant avec les coûts de transaction alors que le meilleur portefeuille rebalancé semble démontrer un seuil de saturation à partir d'un certain pourcentage des coûts de transaction. On en conclut donc que pour un ensemble de titre donné, il existe un seuil critique des coûts de transaction pour lequel le rendement du Portefeuille Universel tend à décrocher largement vis-à-vis du rendement proposé par le meilleur portefeuille rebalancé.

En 2000, Gaivoronsky et Stella [16] ont étudié les performances d'un Portefeuille Universel légèrement modifié par rapport à la théorie initiale de Cover. Ils ont pu démontrer une légère supériorité de rendement de leur algorithme en reprenant les mêmes exemples que Cover dans [11]. Dans leurs développements, ils présentent un *Successive Constant Rebalanced Portfolio* (SCR) qui se redéfinit à chaque journée k comme le meilleur portefeuille rebalancé en période $k - 1$. Ils poursuivent ensuite en définissant un *Weighted Successive Constant Rebalanced Portfolio* (WSCR) calculé par :

$$x^k = \gamma x^{k-1} + (1 - \gamma)y^k \quad (2.1)$$

Où x^k est le portefeuille courant, x^{k-1} est le meilleur portefeuille rebalancé de la période précédente, y^k est le meilleur portefeuille rebalancé de la période actuelle déterminé par un procédé d'optimisation et γ est un scalaire à déterminer. Ils avancent dans leur article une plus grande facilité de calcul par leur WSCR que par le Portefeuille Universel classique de Cover tout en conservant les mêmes propriétés statistiques. Un résumé des performances de leur portefeuille par rapport au Portefeuille Universel où à l'EG [14] est présenté ci-dessous.

Stocks	BCRP	UP	EG	WSCR	W/B
Comm. Met. and Kin Arc	144.01	80.54	117.15	114.85	0.80
IBM and Coka Cola	16.19	14.24	14.90	15.94	0.99
Gulf-HP-Morris-Schlum	74.27	-	65.64	65.04	0.88

FIGURE 2.4 – Comparaison de la richesse produite par le meilleur portefeuille constamment rebalancé (BCRP), le Portefeuille Universel (UP), l'EG [14] et le Weighted Successive Constant Rebalanced Portfolio (WSCR) pour différents couples de titres. La dernière colonne exprime le rapport de la richesse générée par le Weighted Successive Constant Rebalanced Portfolio sur le meilleur portefeuille constamment rebalancé [16]

Dans [17], Kalai et Vempala ont proposé une méthodologie de calcul plus efficiente pour le Portefeuille Universel. En effet, pour rappel, le temps de calcul de l'Universel est exponentiel avec le nombre de titre et limite son utilisation. Ils ont pu proposer une méthodologie de calcul permettant d'atteindre avec une probabilité de $(1 - \eta)$ une performance d'au moins $(1 - \epsilon)$ de la performance du Portefeuille Universel. Leur implémentation nécessite de plus un temps de calcul polynomial suivant $\frac{1}{\epsilon}$, $\log(\frac{1}{\eta})$, le nombre de jours d'investissements T et le nombre de titres en portefeuille n .

En 2004, Borodin et al. [18] proposent un algorithme relativement différencié du Portefeuille Universel démontrant sur quelques exemples des rendements impressionnants. Leur algorithme, nommé *ANTICOR* et ses différentes variantes proposent la construction dynamique d'un portefeuille selon un calcul et une méthodologie complexe. L'idée de base de construction de cet algorithme repose sur le calcul de la corrélation entre les titres afin de privilégier une sélection plus importante des titres fortement décorrélés entre-eux (le nom *ANTICOR* de l'algorithme est issu de l'anti-corrélation de titres). En effet, la notion de rendement optimisé en présence de titres fortement corrélés négativement entre-eux n'est pas nouvelle et est déjà présente dans les considérations classiques de construction de portefeuilles de Markowitz. Ci-dessous est présenté une comparaison de performance de leur algorithme.

Algorithm	NYSE	TSX	SP500	DJIA	NYSE ⁻¹	TSX ⁻¹	SP500 ⁻¹	DJIA ⁻¹
MARKET (U-BAH)	14.49	1.61	1.34	0.76	0.11	1.67	0.87	1.43
BEST STOCK	54.14	6.27	3.77	1.18	0.32	37.64	1.65	2.77
CBAL*	250.59	6.77	4.06	1.23	2.86	58.61	1.91	2.97
U-CBAL	27.07	1.59	1.64	0.81	0.22	1.18	1.09	1.53
ANTI ¹	17,059,811.56	26.77	5.56	1.59	246.22	7.12	6.61	3.67
ANTI ²	238,820,058.10	39.07	5.88	2.28	1383.78	7.27	9.69	4.60
LZ	79.78	1.32	1.67	0.89	5.41	4.80	1.20	1.83
EG	27.08	1.59	1.64	0.81	0.22	1.19	1.09	1.53
UNIVERSAL	26.99	1.59	1.62	0.80	0.22	1.19	1.07	1.53

FIGURE 2.5 – Richesse produite (pour 1 dollar d'investissement) pour différents algorithmes de calcul. Chaque colonne correspond à un marché boursier particulier où quelques dizaines de titres seulement ont été considérés. La période d'investissement considérée varie de 2 à 4 ans autour des années 2000. Les marchés dénotés d'un indice ⁻¹ sont des marchés virtuels dans lesquels l'évolution du prix des titres a été inversé (pour obtenir globalement une dérive négative plutôt que classiquement positive) [18]

Les revenus générés par *ANTICOR* et sa version légèrement modifiée (*ANTI¹* et *ANTI²*) paraissent mirobolants. Cependant, ceux-ci sont nuancés par les auteurs qui mettent en avant que ces revenus sont générés sur une très longue période (25 ans). De plus, ces deux algorithmes donnent naissance à des rendements élevés en moyenne mais avec une volatilité très grande et donc un risque plus élevé. Egalement, le fait qu'uniquement des titres "large caps" aient été utilisés et que les coûts de transaction aient été négligés ont pu fournir une vision idéalisée des rendements prédits. Enfin, les auteurs ajoutent également que le marché réagirait très rapidement à l'établissement d'une stratégie telle qu'*ANTICOR* en faisant chuter drastiquement les rendements.

Dans [19], Agarwal et Hazan reprennent en partie les travaux de Kalai [20] pour définir une méthode de calcul plus efficace et plus rapide selon des principes d'optimisation convexe.

Enfin, en 2011, Kozat et Singer [21] ont repris le développement d'un *Semi Constant Rebalanced Portfolio* (SCRP) sur base de l'algorithme du Portefeuille Universel. Similairement aux études de [15], ils proposent un rebalancement plus occasionnel de leur portefeuille mais selon leur propre algorithme et méthodologie.

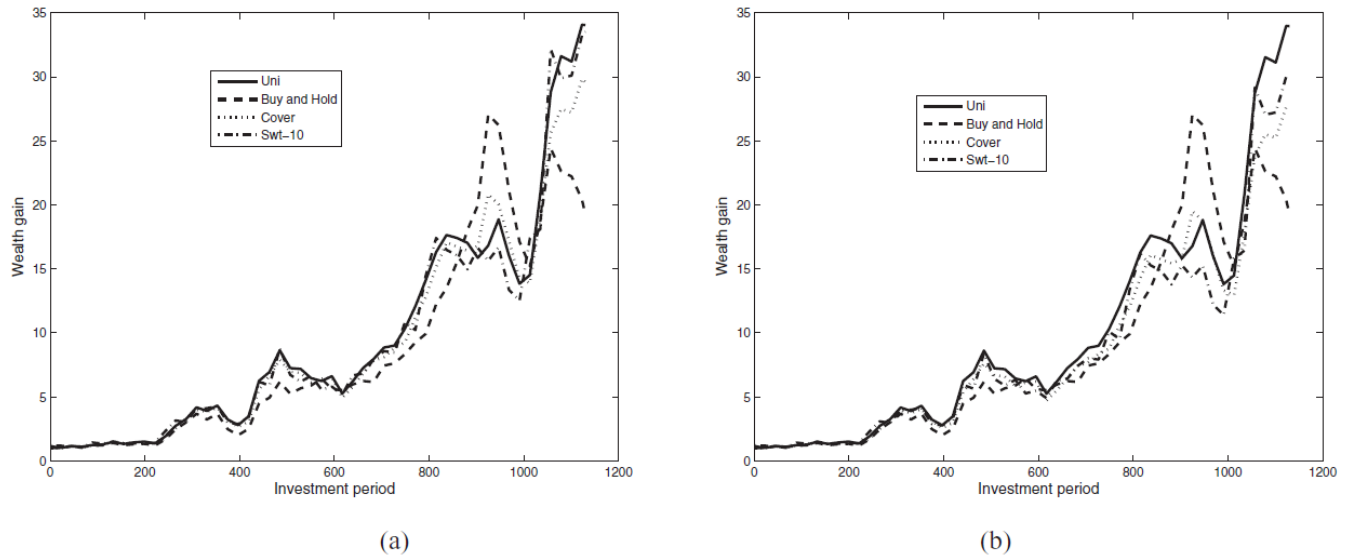


FIGURE 2.6 – Richesse générée d’algorithmes classiques et du SCRP de Kozat et Singer dans une configuration où les coûts de transaction sont nuls (a) et dans une configuration où ceux-ci valent 1% des transactions effectuées [21]

Au sein de ce chapitre, nous avons ainsi pu présenter brièvement une majorité des travaux traitant du Portefeuille Universel depuis la parution de l’article de référence en 1991. Nous constatons ainsi que beaucoup de ces travaux présentent les performances du Portefeuille Universel en comparaison du Portefeuille Optimal ou du meilleur titre du marché. Cependant, dans la plupart de ces études, peu de simulations ont été réalisées en pratique ce qui peut remettre en cause la validité statistique des résultats obtenus. De plus, peu d’oeuvre pour ne pas dire aucune, ne propose une étude détaillée des performances du Portefeuille Universel selon des facteurs essentiels de l’algorithme de calcul comme la durée d’investissement ou la taille du marché. Après avoir exposé de manière concise la théorie du Portefeuille Universel au chapitre précédent, notre ambition, dans le reste de ce rapport, est ainsi de présenter des résultats détaillés et précis issus d’un échantillon de test conséquent tout en distinguant ces résultats selon divers paramètres inhérents au calcul du Portefeuille Universel.

Chapitre 3

Analyse des performances du Portefeuille Universel

Dans ce chapitre, nous allons tâcher de définir les performances réelles du Portefeuille Universel et de les confronter à nos attentes théoriques. Pour une plus grande facilité de compréhension, nous commencerons nos analyses sur base d'un marché constitué de 2 titres seulement avant d'étendre celles-ci vers des marchés plus larges et plus nourris en nombre de titres.

3.1 Analyse liée à 2 titres

3.1.1 Etude théorique de l'impact de la volatilité et de la corrélation entre les titres sur les performances du Portefeuille Universel

Après une première approche de la performance du Portefeuille Universel selon la corrélation des titres initié en section 1.5, il nous a semblé judicieux d'étudier les performances du Portefeuille Universel en fonction de la corrélation des 2 titres de notre marché d'une manière plus méthodique. Pour ce faire, nous avons simulé deux vecteurs de prix artificiels en appliquant les théories du mouvement brownien. En effet, ces mouvements browniens sont des processus stochastiques particulièrement bien adaptés, puisqu'ils permettent indirectement de refléter l'allure des prix que peut présenter une action le long d'une période d'investissement. La procédure permettant de générer l'évolution du prix d'un titre à partir d'un mouvement brownien est décrite ci-dessous.

Tout d'abord, nous avons besoin de simuler une grille de temps discrète $t = [0, dt, 2 * dt, \dots, n * dt]$ où dt représente le pas de temps choisi (typiquement dans notre cas 1 journée, soit $\frac{1}{252}$ en considérant comme référence l'année définie en terme de jours ouvrables) et $n * dt = T$ représente la période d'investissement considérée (par exemple $n = 1000$, soit environ 4 ans). Un *mouvement brownien géométrique* peut alors être construit sur base de l'équation de récurrence suivante :

$$W(i + 1) = W(i) + \sqrt{dt} * Z_1(i) \tag{3.1}$$

Avec :

- $W_0 = 0$
- Les $Z_1(i)$ sont des réalisations indépendante d'une $\mathcal{N}(0, 1)$

A partir de là, nous pouvons simuler notre vecteur de prix artificiels à l'aide du mouvement brownien défini précédemment par :

$$X = X_0 * e^{(\mu_X - 0.5 * \sigma_X^2) * t + \sigma_X * W} \tag{3.2}$$

Avec :

- X_0 est la valeur initiale du titre X au temps $t = 0$
- t est le vecteur temps
- W est la trajectoire du mouvement définie précédemment
- μ_X et σ_X représentent respectivement la moyenne et l'écart-type des rendements⁴ logarithmiques de l'action X définis sur base annuelle

Une fois ce premier mouvement brownien géométrique défini, nous devons en construire un second qui sera lié au premier par un facteur de corrélation ρ . Pour ce faire, nous définissons de manière similaire à 3.1 notre second mouvement brownien B :

$$B(i+1) = B(i) + \sqrt{dt} * (\rho * Z_1(i) + \sqrt{1-\rho^2} * Z_2(i)) \quad (3.3)$$

Avec :

- $B_0 = 0$
- Les $Z_2(i)$ sont des réalisations d'une $\mathcal{N}(0, 1)$, indépendantes entre-elles et indépendantes de $Z_1(i)$

Dès lors, nous avons alors tous les éléments pour construire notre seconde évolution de prix artificiels Y par :

$$Y = Y_0 * e^{(\mu_Y - 0.5 * \sigma_Y^2) * t + \sigma_Y * B} \quad (3.4)$$

Avec similairement :

- Y_0 est la valeur initiale du titre Y au temps $t = 0$
- t est le vecteur temps
- B est la trajectoire du mouvement définie précédemment
- μ_Y et σ_Y représentent respectivement la moyenne et l'écart-type des rendements logarithmiques de l'action Y définis sur base annuelle

A l'aide de cette méthodologie, nous pouvons alors construire les évolutions de prix de 2 actions "virtuelles" dont nous maîtrisons totalement la distribution des rendements (par la moyenne μ et l'écart-type σ) ainsi que la corrélation de ces rendements (ρ). Plus précisément, nous pouvons construire une séquence de rendements journaliers définis sur une période de n journées dont la distribution sera liée aux paramètres μ et σ précédents par :

$$\mu = E[\log(\text{Rendement}_{\text{Journalier}})] * 365 \quad (3.5)$$

$$\sigma = \text{Ecart-type}[\log(\text{Rendement}_{\text{Journalier}})] * \sqrt{365} \quad (3.6)$$

Plusieurs exemples sont donnés aux Figures 3.1, 3.2 et 3.3 afin d'illustrer nos propos. On constate ainsi bien la décorrélation de nos signaux lors de la diminution du paramètre de simulation ρ .

4. Notons dans ce chapitre, sauf mention explicite du contraire, que le terme de rendement fera plutôt appel à la notion de *prix relatif* défini dans le chapitre 1.1, c'est-à-dire le rapport des prix $\frac{P_{i+1}}{P_i}$ plutôt que le rendement à proprement parler $\frac{P_{i+1}-P_i}{P_i}$

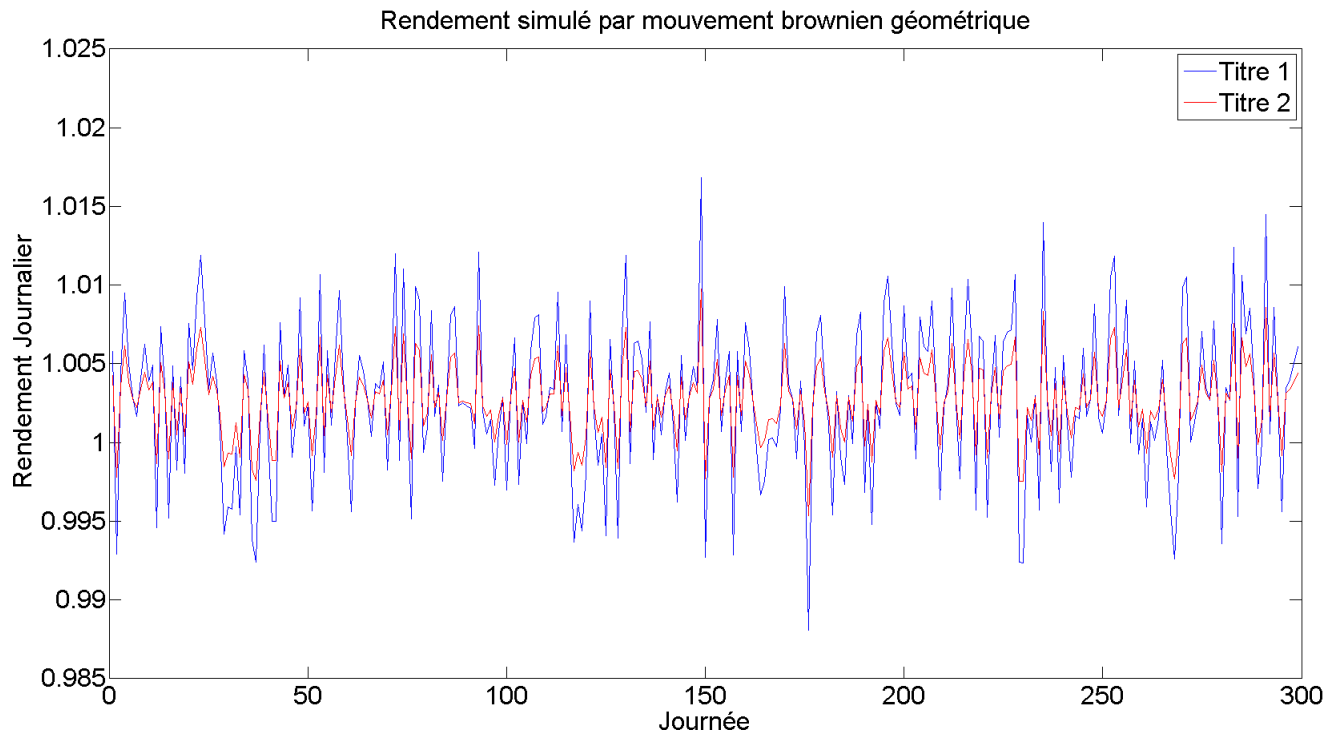


FIGURE 3.1 – Exemple de rendements issus de mouvements browniens géométriques corrélés par $\rho = 1$ ($X(0) = 100, Y(0) = 100, \mu_X = 1, \sigma_X = 0.1, \mu_Y = 1, \sigma_Y = 0.05$)

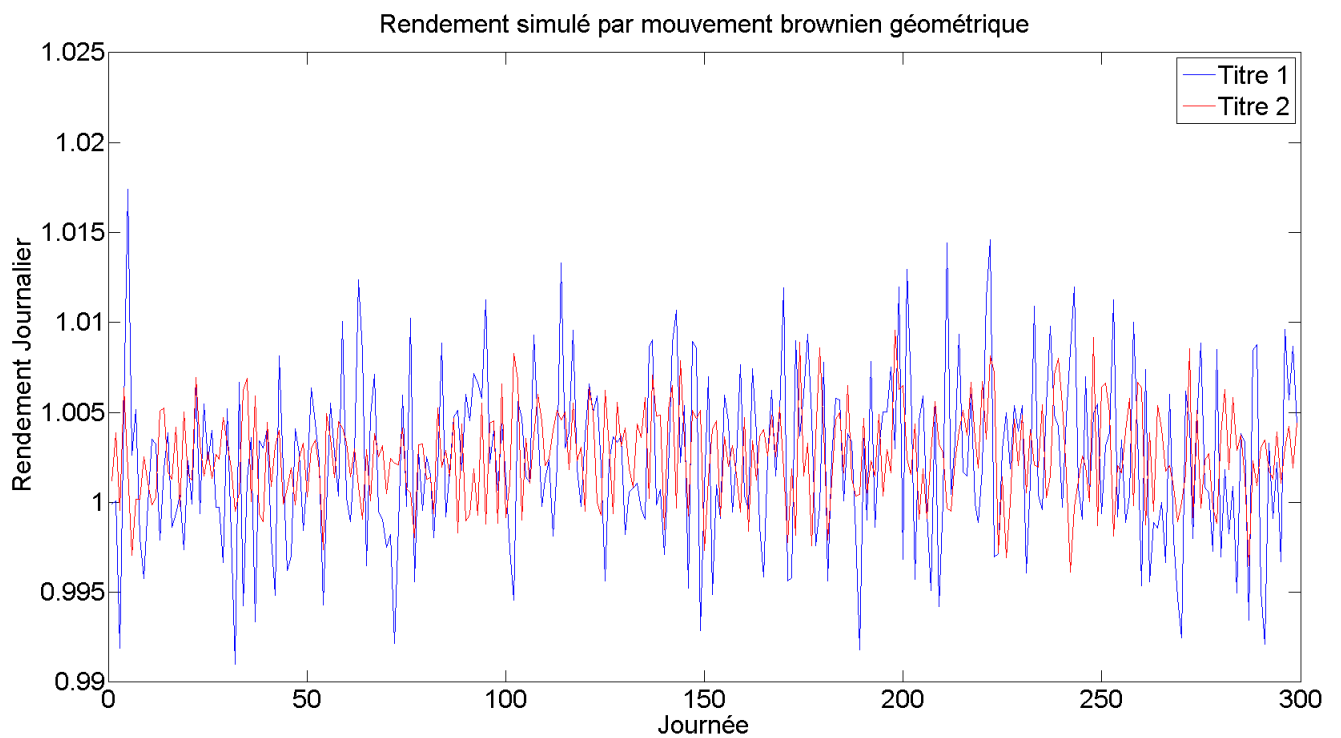


FIGURE 3.2 – Exemple de rendements issus de mouvements browniens géométriques corrélés par $\rho = 0$ ($X(0) = 100, Y(0) = 100, \mu_X = 1, \sigma_X = 0.1, \mu_Y = 1, \sigma_Y = 0.05$)

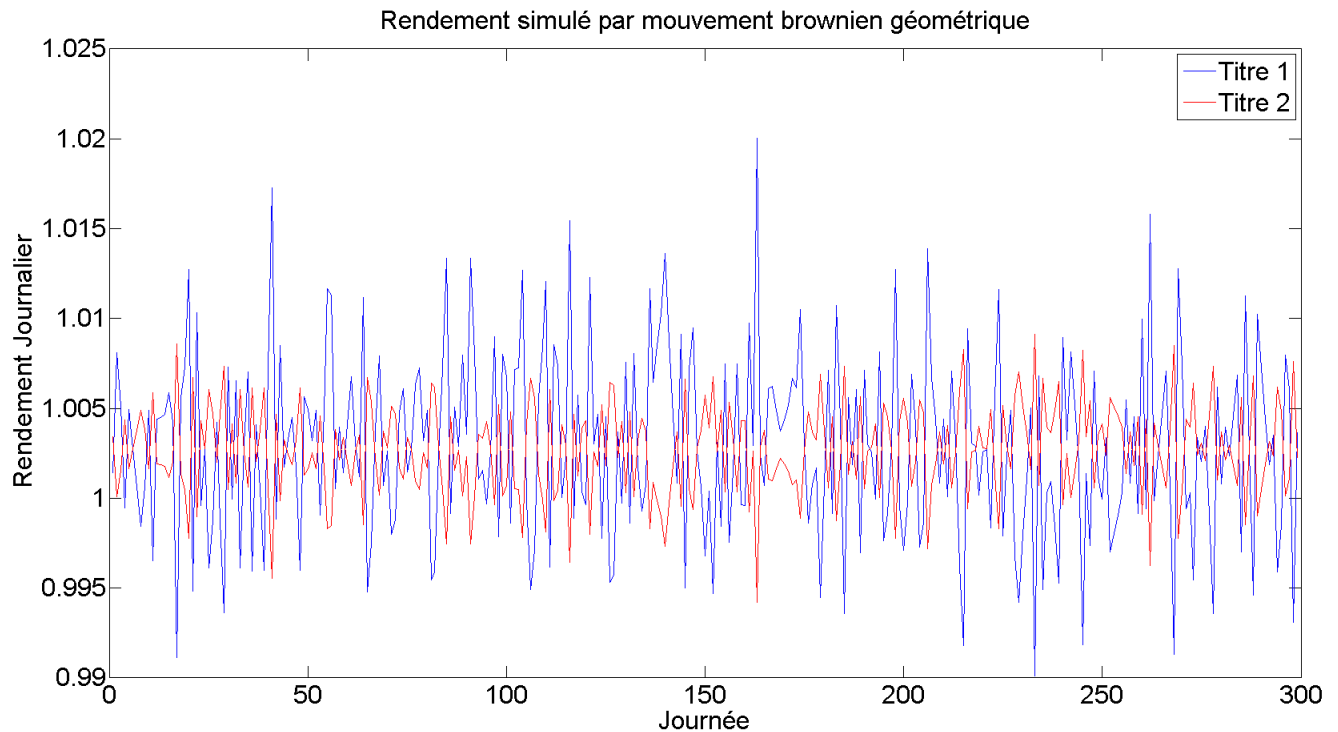


FIGURE 3.3 – Exemple de rendements issus de mouvements browniens géométriques corrélés par $\rho = -1$ ($X(0) = 100, Y(0) = 100, \mu_X = 1, \sigma_X = 0.1, \mu_Y = 1, \sigma_Y = 0.05$)

Nous pouvons maintenant étudier les performances du Portefeuille Universel. Plus particulièrement, cette performance a été étudiée sous deux aspects :

- **La performance par rapport au Portefeuille Optimal** : nous avons ainsi calculé le rapport entre la richesse produite par le Portefeuille Universel et celle produite par le Portefeuille Optimal qui, selon la méthodologie décrite par Cover, représente la richesse que nous cherchons à atteindre.
- **La performance par rapport aux benchmarks** : nous avons également voulu estimer la performance du Portefeuille Universel en comparaison de benchmarks classiques tels que le portefeuille équilibré et le portefeuille de Markowitz. Plus particulièrement, le portefeuille de Markowitz a été défini en déterminant la frontière efficiente de notre marché [5] et en considérant alors le portefeuille efficient de plus petite variance. Notons également que la détermination de cette frontière efficiente a été réalisée en considérant le calcul de la matrice de corrélation des titres *rétrécie* telle que décrite dans la méthodologie de Ledoit et Wolf [22]. A l'inverse de nos P.U. et P.O., ces deux benchmarks constituent des portefeuilles statiques dans le sens où ils ne sont rebalancés à aucun moment durant toute la période de rétention.

Au cours de nos réflexions, il nous a paru intéressant d'étudier l'évolution de la performance du P.U. non seulement en fonction de la corrélation des titres mais également de leur volatilité. Nous avons ainsi calculé la performance de nos différents portefeuilles en réalisant une simulation sur 250 journées (environ 1 an) en faisant varier la corrélation de -0.9 à 0.9 par pas de 0.01 (nous avons évité la considération des valeurs extrêmes de corrélation/anticorrélation +1/-1 afin d'éviter d'éventuels "effets de bords"). Dans ces simulations, nous avons fixé le paramètre μ des deux signaux à la valeur de 0.1, ce qui nous semblait être une valeur pertinente pour simuler un rendement moyen de l'action proche de la réalité des titres boursiers sur le marché. Dans le même temps, nous avons également fait varier la volatilité des signaux à l'aide du paramètre σ . En fixant la moyenne μ à 0.1, une valeur de volatilité σ pouvant varier jusque 0.3 (par pas de 0.005) nous a semblé suffisante pour simuler les titres les plus volatiles pouvant se trouver en pratique sur le marché.

Comparaison au Portefeuille Optimal

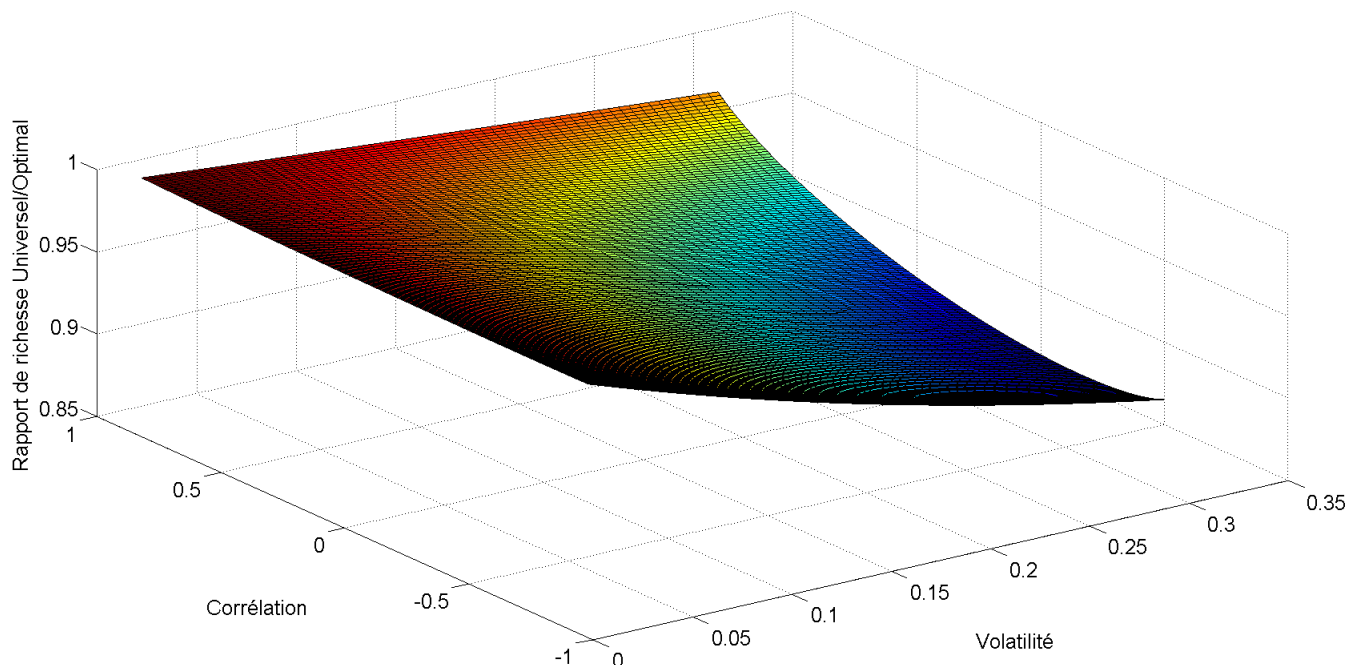


FIGURE 3.4 – Evolution du rapport de richesse Universel/Optimal suivant la corrélation et la volatilité pour une période d’investissement d’1 an

Comme nous pouvons le constater sur cette figure, la richesse générée par le Portefeuille Universel reste assez proche de celle produite par le Portefeuille Optimal, et ce, pour l’ensemble de notre domaine d’analyse. En effet, la valeur minimale observée de ce rapport de richesse est de 0.85, soit une relativement bonne performance du Portefeuille Universel par rapport à son objectif représenté par le Portefeuille Optimal. Ensuite, nous pouvons observer que ce rapport de richesse tend à évoluer positivement avec une diminution de volatilité et une augmentation de la corrélation. En effet, ce rapport atteint sa valeur maximale de 0.98 pour une volatilité égale à 0.01 et une corrélation de 0.9. A l’inverse, les valeurs minimales observées sont relatives aux zones de plus grande volatilité et de grande anti-corrélation. Ainsi, sur base de ce premier graphique, nous aurions tendance à dire que le Portefeuille Universel démontre une meilleure performance pour des titres peu volatils et très corrélés. Notons que ceci semble en adéquation avec les premiers commentaires formulés en section 1.5.

Comparaison aux benchmarks

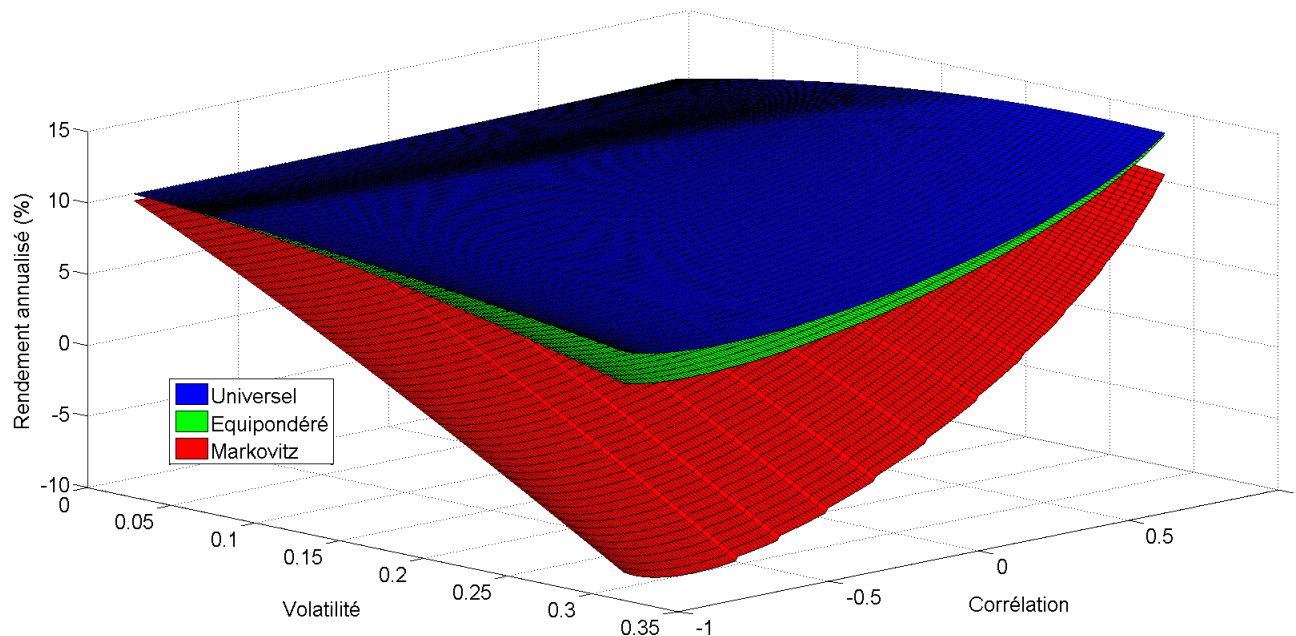


FIGURE 3.5 – Comparaison des performances de différents portefeuilles suivant la corrélation et la volatilité pour une période d’investissement d’1 an

Si nous intéressons cette fois-ci au rendement absolu⁵ du Portefeuille Universel (exprimé sur base annuelle), d’autres constatations intéressantes peuvent être faites. Ainsi, nous pouvons tout d’abord remarquer que le rendement annuel du P.U. ne varie que légèrement suivant la corrélation et la volatilité. En effet, le rendement proposé reste globalement aux environs de 10% sur tout le domaine. Nous pouvons tout de même remarquer une légère augmentation suivant l’augmentation de la corrélation. Plus particulièrement, cette augmentation est d’autant plus marquée lorsque les titres sont les plus volatils, le rendement maximal observé (environ 13%) étant d’ailleurs défini pour une volatilité de 0.3 et une corrélation de 0.9. Ensuite, nous pouvons examiner que le Portefeuille Universel reste plus performant que nos deux benchmarks de référence pour toute combinaison [Corrélation - Volatilité] étudiée. Cependant, notons que cette sur-performance est assez faible en comparaison du portefeuille équilibré. Celle-ci est plus marquée par rapport au portefeuille de Markovitz, essentiellement pour les grandes volatilités et grande anti-corrélation.

Nous avons aussi voulu étudier l’évolution de performance du Portefeuille Universel avec la période d’investissement. Les résultats sont présentés dans la sous-section suivante.

⁵. A partir d’ici, le terme de rendement pour nos graphiques reprend bien sa définition initiale et s’exprime sous la forme $\frac{P_{1+1} - P_i}{P_i}$.

Impact de la période d'investissement

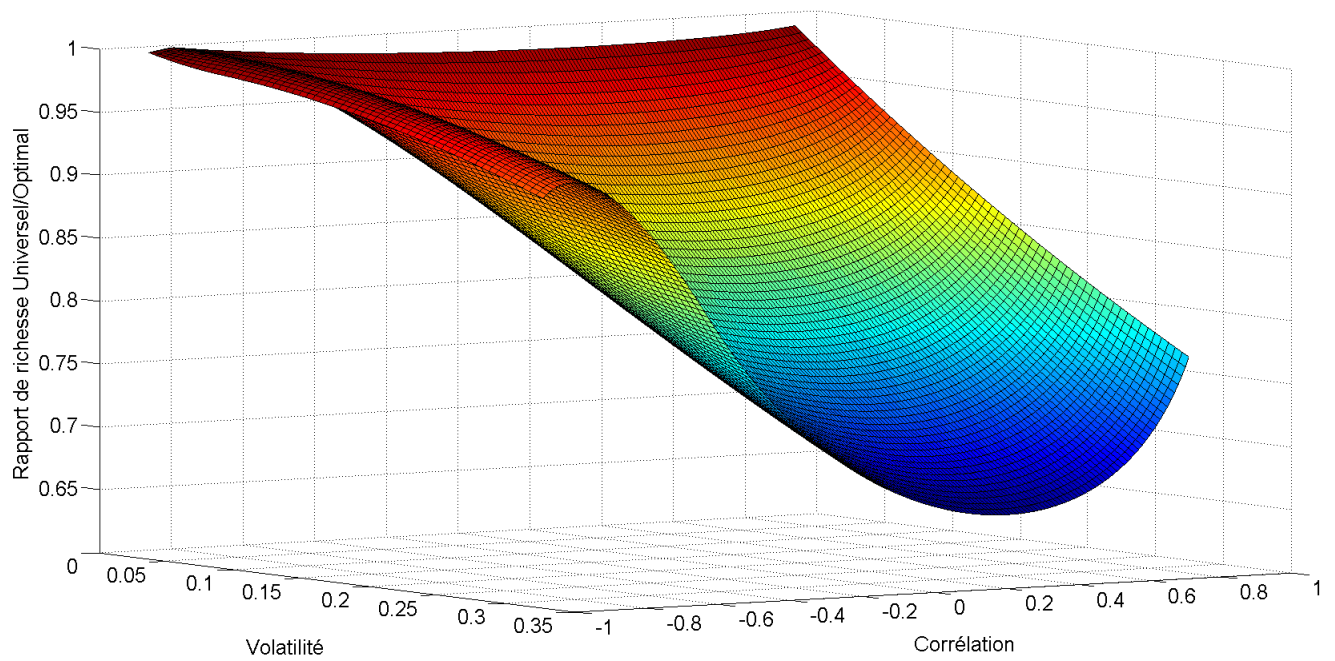


FIGURE 3.6 – Evolution du rapport de richesse Universel/Optimal suivant la corrélation et la volatilité pour une période d'investissement de 5 ans

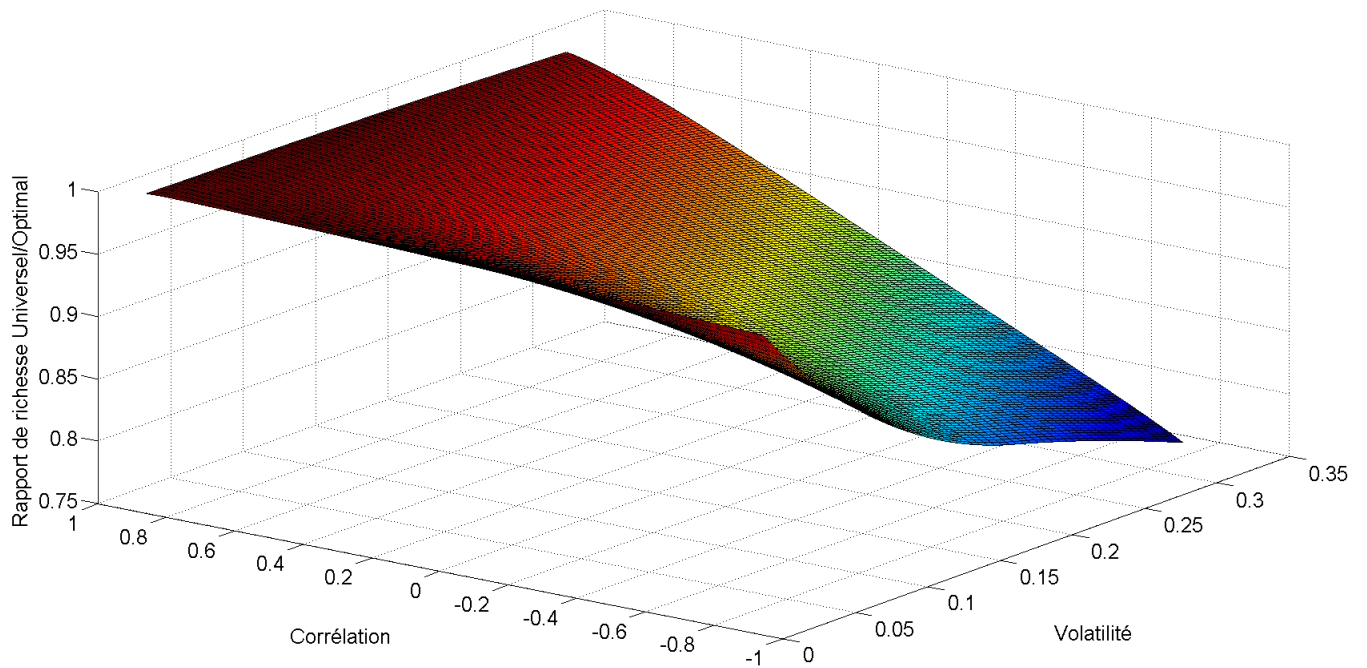


FIGURE 3.7 – Evolution du rapport de richesse Universel/Optimal suivant la corrélation et la volatilité pour une période d'investissement de 10 ans

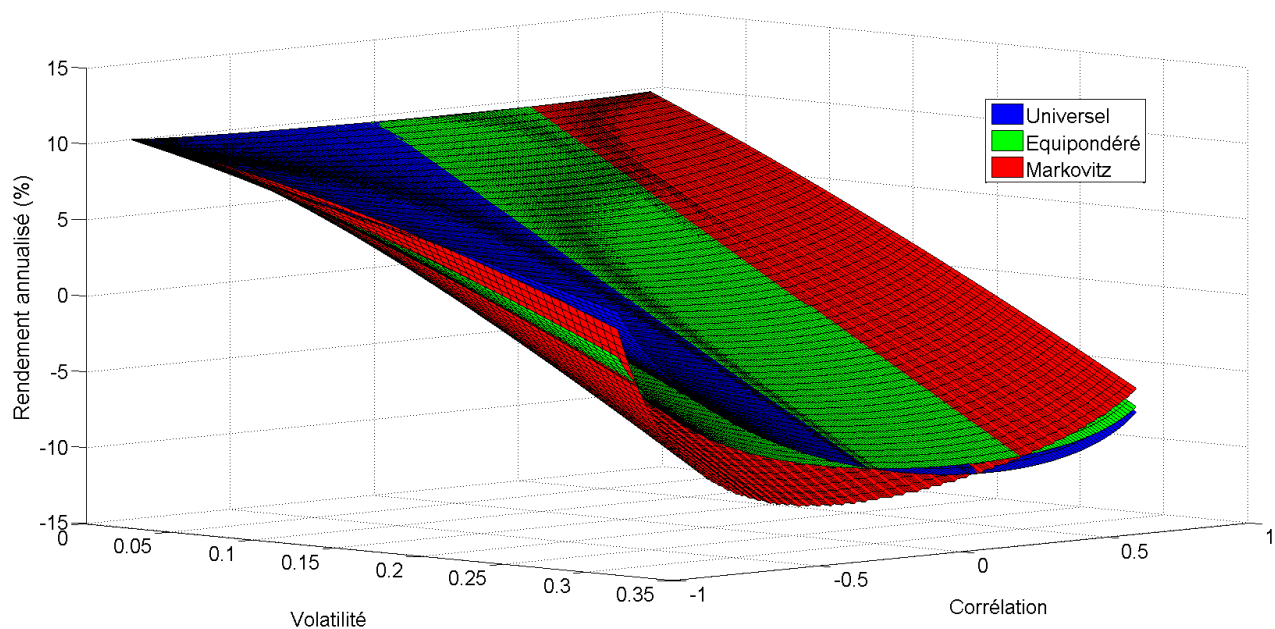


FIGURE 3.8 – Comparaison des performances de différents portefeuilles suivant la corrélation et la volatilité pour une période d’investissement de 5 ans

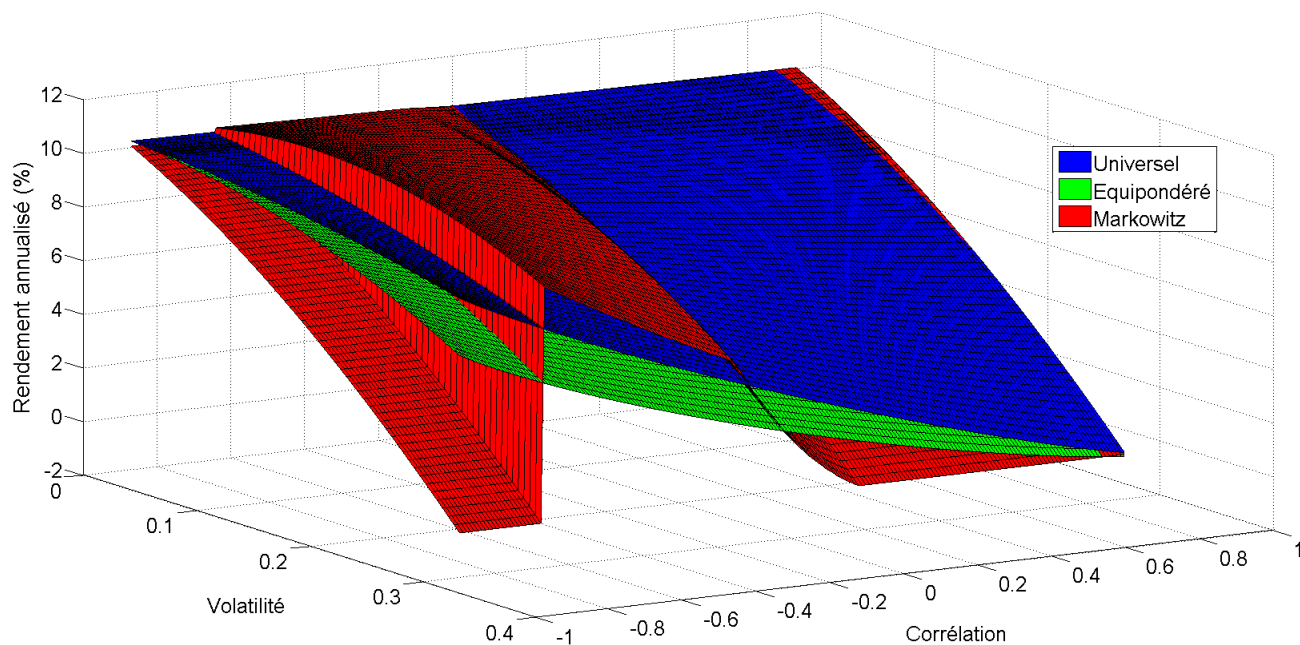


FIGURE 3.9 – Comparaison des performances de différents portefeuilles suivant la corrélation et la volatilité pour une période d’investissement de 10 ans

Si nous analysons les Figures 3.6 et 3.7, nous pouvons en retirer plusieurs éléments. Tout d’abord, nous pouvons noter que le rapport de richesse Universel/Optimal reste maximum et très proche de 1 pour les faibles niveaux de volatilité. Ensuite, cette performance décroît assez fortement au plus la volatilité augmente. Par contre, au niveau de la corrélation, deux comportements différents sont à observer. Pour une période d’investissement de 5 ans, le rapport évolue sous une forme parabolique avec un minimum aux alentours de la zone des titres complètement décorrélés ($\rho = 0$). Notons tout de même que la performance reste plus élevée pour des titres complètement anti-corrélés que complètement corrélés. Pour la période de 10 ans, le rapport évolue de manière plus classique en augmentant avec la corrélation.

En analysant les Figures 3.8 et 3.9, nous pouvons relever plusieurs informations. Premièrement, nous pouvons voir que le rendement annualisé pour les faibles volatilités reste constant aux alentours de 10%. Ensuite, nous constatons que pour de plus grandes périodes d’investissements, ce rendement annuel évolue plus fortement sur notre domaine alors qu’il restait beaucoup plus stable pour une période d’investissement d’1 an. Tout d’abord, nous observons que ce rendement s’atténue fortement avec l’augmentation de la volatilité. Si pour la période de 5 ans, ce rendement évolue peu avec la corrélation (avec tout de même un minimum observé autour des corrélations nulles), pour la période de 10 ans, celui-ci apparaît décroître avec l’augmentation de la corrélation. Cette décroissance est d’ailleurs d’autant plus marquée que la volatilité est importante. Si nous analysons cette fois-ci le rendement du P.U. en comparaison des benchmarks, nous pouvons noter que le Portefeuille Universel reste supérieur aux benchmarks uniquement sur certaines zones du domaine. Pour la période de 5 ans, cette sur-performance se marque pour la zone de titres décorrélés pour successivement être dépassé par le portefeuille équi pondéré puis par le portefeuille de Markovitz. Pour la période d’investissement de 10 ans, le Portefeuille Universel reste supérieur partout à l’exception de la zone des grandes anti-corrélation où le portefeuille de Markovitz démontre un saut brusque de rendement.

En conclusion de cette première section théorique, nous pouvons ainsi affirmer que la richesse générée par le Portefeuille Universel reste relativement proche de celle produite par le Portefeuille Optimal et ce, peu importe le niveau de volatilité, de corrélation ou de période d’investissement. En effet, ce rapport évolue d’une valeur très proche de 1 (basse volatilité et haute corrélation) jusqu’à dans le pire des cas un rapport de 0.65 (haute volatilité et corrélation nulle ou négative). En comparant aux benchmarks, nous nous sommes rendus compte que la plupart du temps, le Portefeuille Universel les surpasse mais il arrive que le portefeuille équi pondéré ou celui de Markovitz démontre un rendement plus élevé. Sur base des analyses faites en faisant varier la période d’investissement, il est difficile de conclure en disant que la sur-performance du P.U. sur les benchmarks est plus probable pour une certaine valeur de corrélation ou de volatilité. Remarquons pour terminer que même en cas de sur-performance du P.U. sur les benchmarks, celle-ci reste très faible (tout au plus quelques pourcents).

3.1.2 Portefeuille Universel pour un marché de 2 titres

Dans cette section, nous allons maintenant essayer de déterminer de manière empirique les performances démontrées par le Portefeuille Universel sur des titres réels de marchés boursiers. Les résultats qui seront présentés ci-dessous ont été obtenus par l’analyse de données historiques de titres en provenance de l’outil financier *Bloomberg* [23]. Nos données ont été extraites sous forme de fichier Excel reprenant les prix journaliers de plusieurs titres financiers sur une durée de 30 ans (si le titre est coté depuis suffisamment longtemps, sinon, la période d’étude commence à partir de son introduction sur le marché boursier).

Dans notre cas d’étude, nous nous sommes intéressés à l’analyse de titres présents sur le plus gros marché boursier de la planète, à savoir le *NYSE (New-York Stock Exchange)*. L’ensemble des titres considérés sont repris en Annexe A. Notre méthodologie est la suivante. Nous considérons successivement plusieurs paires de titres cotés sur ce marché et pour chacune de ces paires, nous allons déterminer la richesse produite respectivement par le Portefeuille Optimal et le Portefeuille Universel. Nous spécifierons également à chaque fois le pourcentage de portefeuilles que l’Universel surpasse en considérant l’ensemble des combinaisons des différents portefeuilles constamment rebalancés (case % dans le tableau). Enfin, pour chacune de ces paires, nous effectuerons 3 simulations différentes en faisant varier la période d’investissement de court (1 an), en passant par moyen (5 ans) et jusqu’à long terme (10 ans).

Pour chaque simulation, nous vérifierons également si la limite théorique du rapport de richesse générée $\frac{Universel}{Optimal}$ établie par Cover dans [11] et spécifiée par l’équation (1.16) se confirme ou non (case *Lim* dans le tableau). Avant cela, vérifions si l’hypothèse majeure de Cover concernant le fait que tous les titres du marchés soient actifs se vérifie ou non à l’aide du tableau ci-dessous.

1 an	5 ans	10 ans	30 ans
10.17	25.65	49.02	77.73

TABLEAU 3.2 – Pourcentage de marché de 2 titres respectant la condition d’activité des titres en fonction de la période d’investissement

Nous pouvons ainsi observer que la condition d'activité des titres est d'autant plus probable que la période d'investissement est longue. Notons cependant qu'une période de 30 ans est nécessaire pour qu'environ 3 marchés sur 4 testés répondent positivement à cette condition d'activité des titres.

Titre1	Titre2	1 an				5 ans				10 ans			
		Optim	Univ	%	Lim	Optim	Univ	%	Lim	Optim	Univ	%	Lim
F	GM	1.16	1	51.48	✓	-	-	-	-	-	-	-	-
WFC	BABA	1.77	1.46	52.48	✓	-	-	-	-	-	-	-	-
SHOP	APA	3.03	1.77	55.45	✓	-	-	-	-	-	-	-	-
W	EGN	1.78	1.44	54.46	✓	-	-	-	-	-	-	-	-
GM	YUM	1.22	1.21	57.43	✓	-	-	-	-	-	-	-	-
DG	CPB	0.87	0.84	56.43	✓	-	-	-	-	-	-	-	-
GM	MON	1.18	1.15	54.45	✓	-	-	-	-	-	-	-	-
HPE	NKE	1.13	1.05	52.47	✓	-	-	-	-	-	-	-	-
MSI	AAL	1.65	1.48	52.47	✓	-	-	-	-	-	-	-	-
PG	KMI	1.07	1.06	60.49	✓	-	-	-	-	-	-	-	-
FL	DG	0.93	0.89	54.46	✓	-	-	-	-	-	-	-	-
BABA	BAC	1.79	1.81	100	✓	-	-	-	-	-	-	-	-
PFE	SHOP	3.03	1.76	51.28	✓	-	-	-	-	-	-	-	-
AIG	CPB	1.65	1.24	51.95	✓	-	-	-	-	-	-	-	-
APD	KMI	1.13	1.09	52.47	✓	-	-	-	-	-	-	-	-
TWTR	FL	1.05	1.05	100	✓	-	-	-	-	-	-	-	-
ORCL	GM	1.16	1.17	100	✓	-	-	-	-	-	-	-	-
EFX	GM	1.16	1.16	100	✓	-	-	-	-	-	-	-	-
NRG	YUM	1.22	1.21	75.25	✓	-	-	-	-	-	-	-	-
JEC	MA	1.29	1.17	52.47	✓	2.92	2.21	54.45	✓	7.25	3.71	61.38	✓
MON	EVHC	1.09	0.92	52.47	✓	1.96	1.85	54.42	✓	2.55	2.57	100	✓
AIG	PXD	1.19	1.12	53.47	✓	2.12	2.15	100	✓	3.3	1.64	67.33	✓
PLD	IBM	1.17	1.11	52.47	✓	1.6	1.84	100	✓	1.6	1.67	100	✓
KO	EDU	1.88	1.46	53.46	✓	2.95	2.37	59.41	✓	5.18	4.74	66.34	✓
EDU	MCD	1.86	1.6	53.47	✓	2.96	2.78	62.38	✓	5.79	5.92	100	✓
GS	CL	1.52	1.3	52.47	✓	2.41	2	54.46	✓	2.26	1.96	61.39	✓
TWX	MMM	1.38	1.32	51.48	✓	2.75	2.7	59.41	✓	2.57	2.65	100	✓
PLD	TIF	1.52	1.36	52.47	✓	1.91	1.93	100	✓	1.77	1.81	100	✓
DIS	NRG	1.18	1.16	57.43	✓	2.18	1.7	57.43	✓	3.06	1.66	61.39	✓
GS	MCD	1.52	1.4	52.47	✓	2.41	2.15	54.45	✓	2.94	2.29	59.41	✓
NRG	SWK	1.25	1.24	60.4	✓	2.31	1.76	57.43	✓	2.26	1.35	60.4	✓
KO	MON	1.09	1.05	51.49	✓	1.47	1.38	55.45	✓	1.91	2	100	✓
EDU	TWX	1.86	1.66	58.81	✓	5.6	6.2	100	✓	5.6	6.2	100	✓
FDX	EDU	1.86	1.62	53.42	✓	3.35	3.51	100	✓	5.37	5.58	100	✓
MSI	PLD	1.27	1.22	52.48	✓	1.88	1.91	100	✓	1.43	1.54	100	✓
PXD	EVHC	1.01	0.89	53.7	✓	2.11	2.18	100	✓	3.76	4.01	100	✓
PEP	GS	1.52	1.33	52.47	✓	2.41	2.11	54.46	✓	1.76	1.72	65.35	✓
RHT	MSI	1.27	1.21	52.62	✓	1.87	1.88	100	✓	4.19	3	60.4	✓
A	WMT	1.31	1.19	52.37	✓	2.25	1.7	54.46	✓	2.16	2.15	77.23	✓
EDU	JEC	1.86	1.48	54.51	✓	2.95	2.65	61.39	✓	5.27	3.92	64.35	✓
SWK	YUM	1.25	1.24	54.8	✓	2.31	2.04	55.45	✓	3.05	3.02	70.29	✓
NKE	PEP	1.13	1.04	52.1	✓	2.13	1.97	54.39	✓	3.54	2.87	57.22	✓
KO	WMT	1.13	1.1	52.47	✓	1.2	1.18	60.4	✓	1.78	1.82	100	✓
GE	BAC	1.74	1.29	53.54	✓	3.06	2.23	54.45	✓	0.8	0.85	100	✓
ORCL	F	1.17	1.01	51.62	✓	1.64	1.43	54.46	✓	2.35	2.33	79.21	✓
K	WFC	1.12	1.05	52.47	✓	1.65	1.62	59.41	✓	1.89	2.04	100	✓
EGN	FL	1.23	1.24	100	✓	1.77	1.68	62.38	✓	2.5	2.28	65.35	✓
IBM	SYK	1.21	1.11	51.51	✓	2.64	1.6	55.45	✓	2.09	1.94	58.42	✓

TABLEAU 3.3 – Etude de couples de titres - Partie 1

Titre1	Titre2	1 an				5 ans				10 ans			
		Optim	Univ	%	Lim	Optim	Univ	%	Lim	Optim	Univ	%	Lim
TXT	APD	1.25	1.18	52.61	✓	2.08	2.1	100	✓	1.8	1.65	63.67	✓
CAT	IBM	1.41	1.2	52.5	✓	1.3	1.09	54.46	✓	1.48	1.52	100	✓
EFX	ORCL	1.14	1.12	57.53	✓	3.11	2.38	54.46	✓	3.09	2.94	61.39	✓
EFX	IBM	1.13	1.08	51.82	✓	3.11	1.78	56.44	✓	3.09	2.35	56.5	✓
PG	XOM	1.07	0.99	51.47	✓	1.5	1.26	53.4	✓	1.42	1.25	56.44	✓
CAT	BAC	1.75	1.59	52.23	✓	3.07	2.17	55.44	✓	1.27	1.21	67.33	✓
FDX	DIS	1.29	1.18	51.49	✓	2.37	2.36	65.35	✓	3.02	2.63	57.43	✓
KSU	FL	1.15	1.08	54.9	✓	1.79	1.79	91.09	✓	3.08	3.3	100	✓
EFX	VZ	1.13	1	51.25	✓	3.11	1.96	55.45	✓	3.09	2.13	56.43	✓
KO	MCD	1.25	1.13	50.83	✓	1.75	1.48	52.48	✓	2.93	2.39	55.44	✓
MO	WFC	1.18	1.17	61.39	✓	2.28	2.02	54.46	✓	3.58	3.37	67.33	✓
K	XOM	0.93	0.92	55.64	✓	1.47	1.25	5	✓	1.38	1.26	57.42	✓
WMT	F	1.06	0.96	52.55	✓	1.15	1.17	100	✓	1.8	1.92	100	✓
MCD	PFE	1.25	1.1	51.17	✓	1.74	1.67	55.5	✓	2.94	2.14	54.94	✓
KO	PFE	1	0.99	56.78	✓	1.5	1.38	54.46	✓	1.7	1.61	58.41	✓
NKE	ORCL	1.14	1.05	51.48	✓	2.12	1.97	55.65	✓	3.54	3.31	60.4	✓
PEP	CTL	1.13	1.03	53.25	✓	1.7	1.14	55.9	✓	1.75	1.17	58.42	✓
XOM	CPB	0.91	0.9	61.2	✓	1.68	1.35	53.56	✓	1.41	1.27	58.42	✓
AIG	APA	1.19	1.05	53.02	✓	2.07	1.27	57.42	✓	0.58	0.48	63.37	✓
VZ	TXT	1.18	1.01	52.8	✓	1.98	1.56	55.45	✓	1.28	1.34	100	✓
BAC	CTL	1.75	1.41	52.47	✓	3.06	2.33	55.44	✓	2.25	1.86	64.35	✓
EFX	FDX	1.29	1.22	51.78	✓	3.11	2.82	54.54	✓	3.09	2.67	57.41	✓
KO	CPB	1	0.94	51.86	✓	1.68	1.45	53.46	✓	1.69	1.65	60.39	✓
CL	COO	1.46	1.26	51.22	✓	3.15	2.33	54.75	✓	4.53	3.83	59.41	✓
SCG	K	0.99	0.96	52.3	✓	1.51	1.52	100	✓	1.84	1.71	56.44	✓
SYK	MO	1.21	1.2	53.48	✓	2.63	2.51	55.44	✓	3.53	3.02	56.43	✓
CPB	SCG	0.99	0.94	52.53	✓	1.68	1.63	56.43	✓	1.84	1.73	57.43	✓
CL	MSI	1.27	1.17	52.5	✓	1.83	1.73	55.45	✓	2.25	1.98	59.8	✓
K	WMT	1.4	1.31	51.8	✓	1.47	1.32	53.46	✓	1.1	1.1	100	✓
WMT	WFC	1.15	1.12	56.57	✓	1.65	1.41	54.46	✓	1.98	2.14	100	✓
TIF	SCG	1.52	1.25	51.95	✓	1.83	1.77	60.4	✓	2.06	2.17	100	✓
PEP	PG	1.13	1.1	51.48	✓	1.7	1.61	53.46	✓	1.76	1.66	56.43	✓
NKE	KSU	1.15	1.06	52.55	✓	2.12	1.93	56.43	✓	3.68	3.73	100	✓
BAC	PFE	1.75	1.34	52.9	✓	3.06	2.31	54.45	✓	1.31	1.27	67.33	✓
MCD	KSU	1.25	1.21	53.47	✓	1.75	1.73	63.54	✓	3.25	3.4	100	✓
APA	MON	1.1	0.98	52.47	✓	1.47	1.04	56.43	✓	1.81	1.4	59.41	✓
KSU	CPB	1.15	1.02	52.54	✓	1.7	1.7	100	✓	2.57	2.47	66.34	✓
PG	F	1.07	0.97	52.27	✓	1.5	1.36	55.45	✓	1.17	2	100	✓
SWK	MO	1.25	1.22	53.47	✓	2.37	2.38	100	✓	3.53	3.31	61.39	✓
MSI	XOM	1.27	1.08	51.06	✓	1.82	1.42	54.45	✓	1.21	1.23	100	✓
TXT	SYK	1.25	1.25	100	✓	2.63	2.43	56.43	✓	2.1	1.88	63.37	✓
JEC	EGN	1.06	1.07	100	✓	1.47	1.44	64.36	✓	1.05	1.11	100	✓
DIS	MO	1.17	1.11	51.49	✓	2.29	2.3	100	✓	3.6	3.64	100	✓
PG	GE	1.08	1	51.48	✓	1.5	1.48	61.39	✓	1.42	1.16	57.43	✓
SCG	IBM	1.01	1.01	82.17	✓	1.5	1.17	54.45	✓	1.84	1.77	60.4	✓
K	F	0.93	0.9	54.8	✓	1.47	1.35	55.45	✓	1.69	1.81	100	✓
MMM	COO	1.46	1.36	51.75	✓	3.15	2.9	55.44	✓	4.53	3.97	59.41	✓
CAT	VZ	1.41	1.12	51.25	✓	1.3	1.23	56.44	✓	1.36	1.39	100	✓
APD	COO	1.46	1.28	51.29	✓	3.15	2.67	54.45	✓	4.53	3.57	59.41	✓
APA	MMM	1.24	1.07	52.67	✓	2.45	1.4	57.42	✓	2.35	1.51	59.41	✓

TABLEAU 3.4 – Etude de couples de titres - Partie 2

Tout d'abord, la première constatation qui peut être faite au vu de ces résultats et que la limite inférieure du rapport de richesse produite par l'Universel et l'Optimal semble bien être respectée. En effet, dans toute les simulations réalisées, ce rapport a toujours surpassé la limite théorique établie par Cover. Cependant, nous pouvons légitimement nous demander si le calcul de cette limite inférieure théorique apporte un quelconque intérêt. En effet, en repartant de l'expression de cette limite (1.16), nous nous rappelons que le paramètre a_n de l'expression a été défini comme $a_n = \min[b_{n1}^*, 1 - b_{n1}^*, 3J^*/\tau_n^3]$. De plus, en se basant sur le tableau 3.2, nous avons conclu que la condition d'activité des titres n'était que peu souvent rencontrée en pratique pour des périodes d'investissement courtes. Ainsi, si cette condition n'est pas rencontrée, il est clair que notre vecteur optimum \vec{b}^* se résumé alors à (1,0) ou (0,1) et dès lors, le paramètre a_n est strictement égal à 0. Si ce paramètre vaut 0, nous pouvons alors constater que le rapport théorique va alors se définir à $-\infty$ et n'est donc d'aucune utilité pratique. Malgré tout, comme cette condition d'activité des titres apparaît nettement plus probable pour de grandes périodes d'investissement, nous nous proposons de représenter ci-dessous l'évolution du paramètre a_n et du rapport théorique (1.16) pour plusieurs marchés de 2 titres sur une période d'investissement de 30 ans. L'idée est ici de déterminer si pour ces grandes périodes d'investissement, ce rapport nous procure une information plus intéressante ou s'il ne présente toujours aucune valeur pratique.

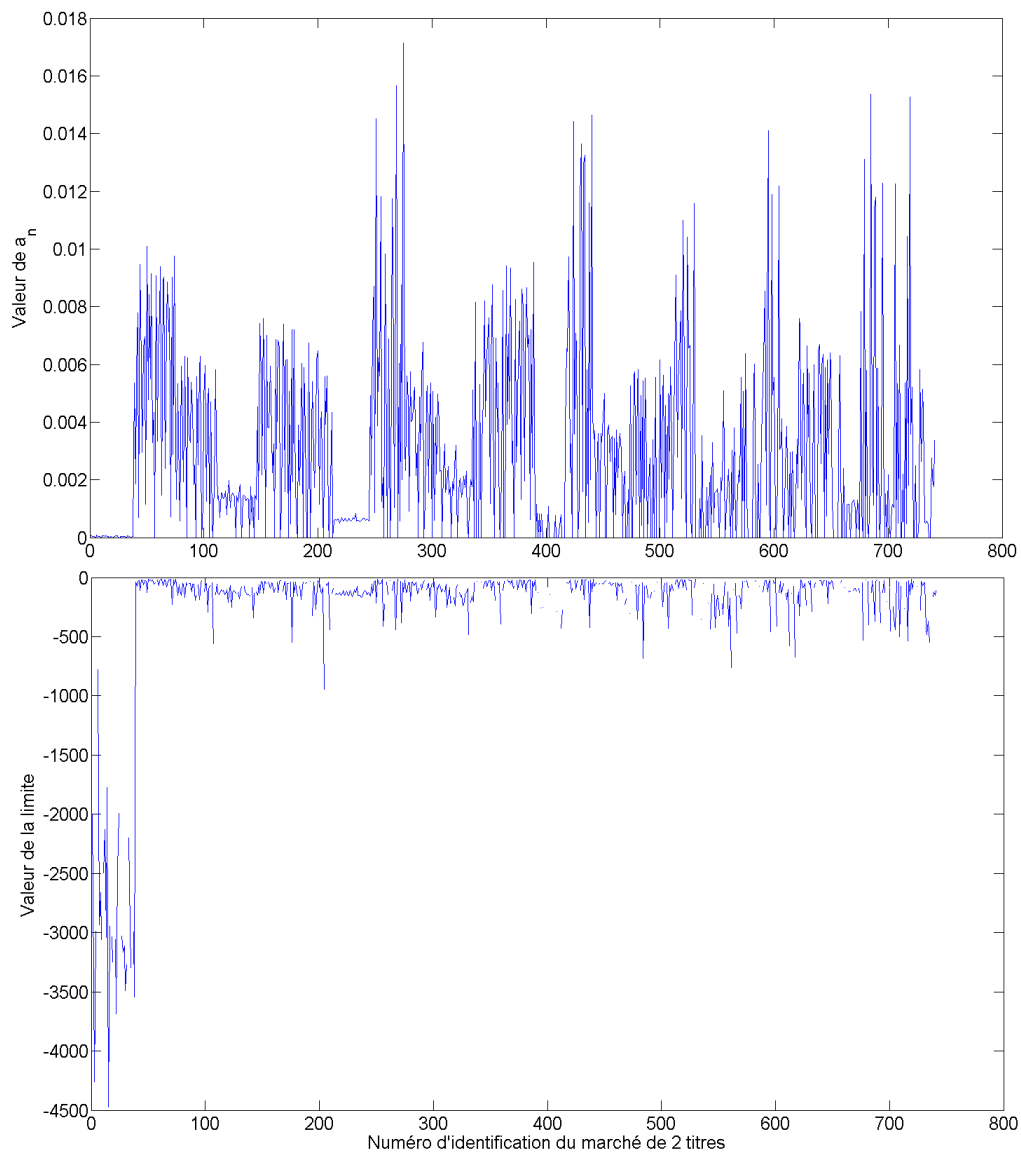


FIGURE 3.10 – Exemples de valeur du paramètre a_n et de la limite inférieure théorique du rapport de richesse entre le P.U. et le P.O. pour différents marchés composés de 2 titres (En haut : paramètre a_n / En bas : limite inférieure théorique)

Nous pouvons ainsi constater que la limite théorique calculée n'est jamais réellement porteuse d'informations. En effet, nous observons que les différentes valeurs calculées sont toutes exclusivement négatives et donc ne nous fournissent aucune idée pratique de la performance minimale que nous pouvons attendre du Portefeuille Universel en comparaison du Portefeuille Optimal. En conclusion, nous pouvons ainsi affirmer que ce rapport théorique fourni par Cover n'est d'aucune utilité. La cause majeure de cette ceci est en premier lieu l'hypothèse trop exigeante portant sur l'activité des titres (rapport tendant vers $-\infty$). Cependant, même quand cette condition d'activité est remplie, nous avons également constaté que la limite calculée est totalement non productive.

Ensuite, la lecture globale des tableaux 3.3 et 3.4 ne permet pas de tirer aisément de grandes conclusions à l'analyse de nos données. Ainsi, il paraît plus avantageux de présenter celles-ci sous la forme d'un histogramme où il sera représenté pour chaque couple de titre analysé soit le rapport de richesse Universel/Optimal, soit le pourcentage de portefeuilles surclassés par l'Universel, et ce, pour nos 3 durées d'investissement étudiées. Dans chacun des 2 histogrammes présentés ci-dessous, nous représenterons respectivement les moyennes pour nos 3 durées d'investissement, soit du rapport de richesse produite, soit du pourcentage de portefeuilles dépassés⁶.

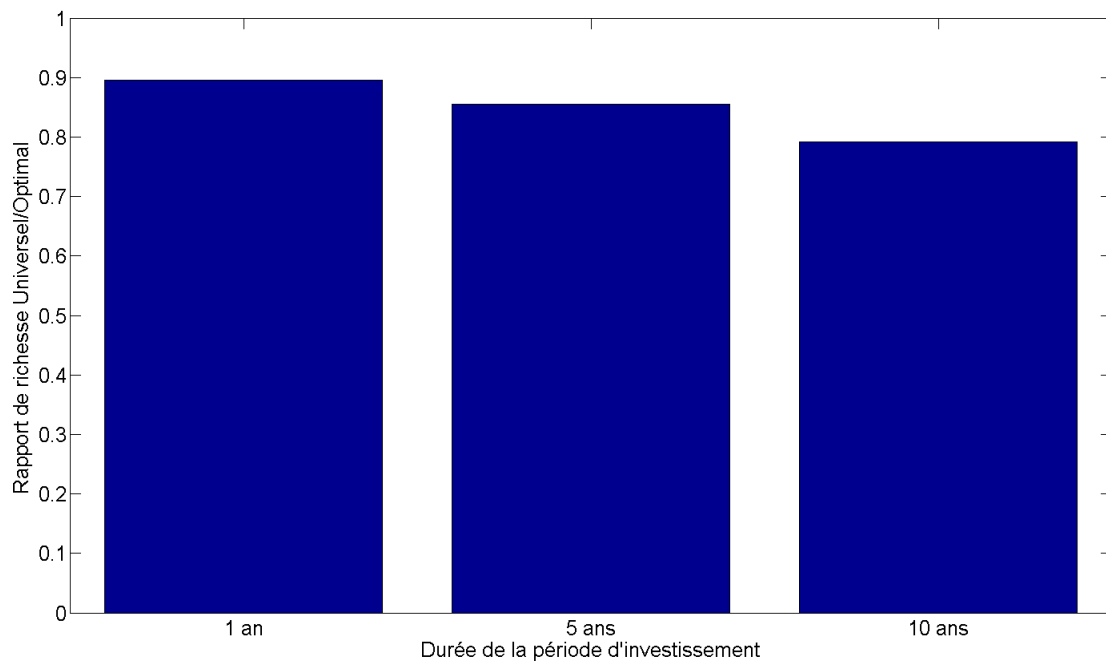


FIGURE 3.11 – Evolution du rapport de richesse Universel/Optimal en fonction de la période d'investissement pour un marché de 2 titres

6. Pour plus de précision, les moyennes présentées dans les graphes ci-dessous sont relatives non seulement aux couples de titres des Tableaux 3.3 et 3.4 mais également à l'ensemble des couples de titres possibles à partir de notre base de données en Annexe A (soit $\frac{60!}{(60-58)!2!} = 1770$ couples de titres)

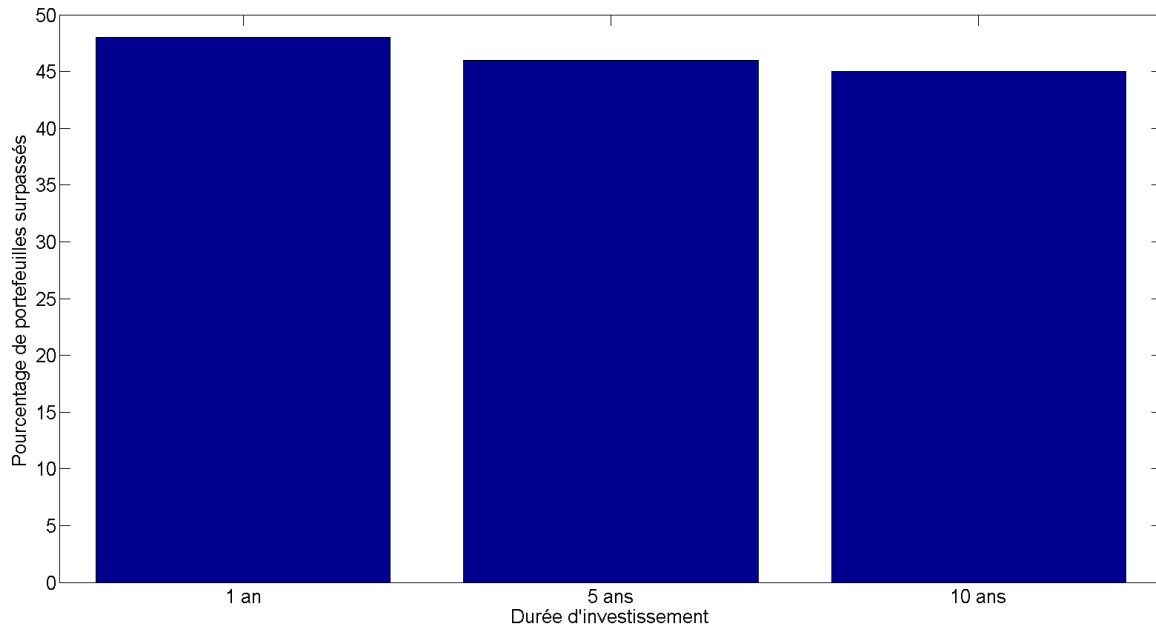


FIGURE 3.12 – Evolution du pourcentage de portefeuilles constamment rebalancés surpassés par le Portefeuille Universel en fonction de la période d’investissement pour un marché de 2 titres

Nous pouvons extraire des graphiques précédents quelques informations intéressantes. Tout d’abord, nous pouvons remarquer que le rendement proposé par le Portefeuille Universel approche de manière particulièrement remarquable celui du Portefeuille Optimal et ce, pour l’ensemble de nos simulations. En effet, ce rapport s’établit en moyenne à 0.9 dès notre plus courte période d’investissement d’un an. Ensuite, celui-ci subit une légère baisse à 0.85 pour une période d’investissement de 5 ans et qui se poursuit pour tomber à 0.79 pour une période de 10 ans. Ainsi, nous pouvons noter que, peu importe la période d’investissement choisie, la performance de rendement du P.U. tend à approcher de manière très forte celle du meilleur portefeuille rebalancé (80 à 90% du rendement de ce dernier) tout en subissant une légère diminution avec la période d’investissement.

Ensuite, en analysant la Figure 3.12, nous pouvons en retirer quelques informations remarquables. Tout d’abord, pour une période d’investissement courte de l’ordre de l’année, on remarque que le rendement du Portefeuille Universel surpasse celui proposé par presque la moitié de tous les portefeuilles constamment rebalancés (la moyenne étant égale à 48%). Il peut sembler paradoxal que seulement environ 50% des portefeuilles soient dépassés alors qu’en moyenne le rendement de l’Universel est de l’ordre de 90% de celui du P.O., soit le meilleur portefeuille constamment rebalancé par définition. Ceci peut s’expliquer à l’aide de la Figure 3.13 ci-dessous montrant le rendement de tous les portefeuilles constamment rebalancés pour un marché constitué par titre 1 = AIG et titre 2 = COO. Le point à l’extrême gauche du graphique représente donc un portefeuille uniquement constitué par le titre 1 AIG ($\vec{b} = (1, 0)$) tandis que le point à l’extrême droite est relatif à un portefeuille ne comprenant que le titre 2 COO ($\vec{b} = (0, 1)$). Sur ce graphique, on remarque que le domaine de rendement, c’est-à-dire l’espace de rendement entre le plus mauvais et le meilleur portefeuille est très mince et varie entre [1.18 - 1.46]. Ainsi, avec un domaine si réduit, il est possible d’obtenir un rapport de richesse Universel/Optimal proche de 1 (dans notre exemple $\frac{1.34}{1.46} = 0.92$) tout en ayant un pourcentage de portefeuilles surpassés aux alentours de seulement 50%. C’est ce qu’il se passe pour la majorité des couples de titres de nos simulations

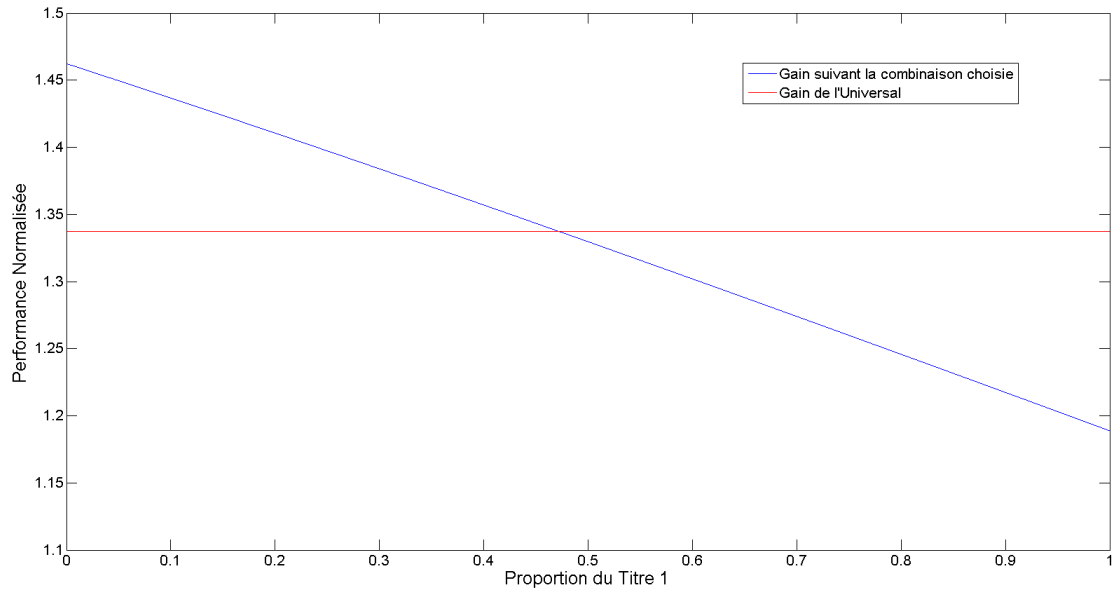


FIGURE 3.13 – Performance normalisée (richesse produite pour 1 dollar d’investissement) pour l’ensemble des portefeuilles constamment rebalancés pour un marché constitué par AIG et COO (durée d’investissement = 1 an)

Ensuite, nous pouvons également soulever que le pourcentage de portefeuilles surpassés tend rester assez stable avec la période d’investissement avec une moyenne respectivement pour 1 an de 48%, pour 5 ans de 46% et pour 10 ans de 46%.

Il nous a semblé également intéressant d’étudier les performances du Portefeuille Universel par rapport à celles de portefeuilles classiques de référence dans les marchés boursiers. Similairement à la section précédente 3.1.1, les 2 benchmarks choisis pour notre comparaison sont respectivement le portefeuille équilibré et la portefeuille de Markowitz. Plus précisément, ce portefeuille de Markowitz a été choisi en définissant la frontière efficiente de notre marché et en sélectionnant ensuite le portefeuille de plus petite variance. L’illustration de cette méthode est présentée sur la figure ci-dessous.

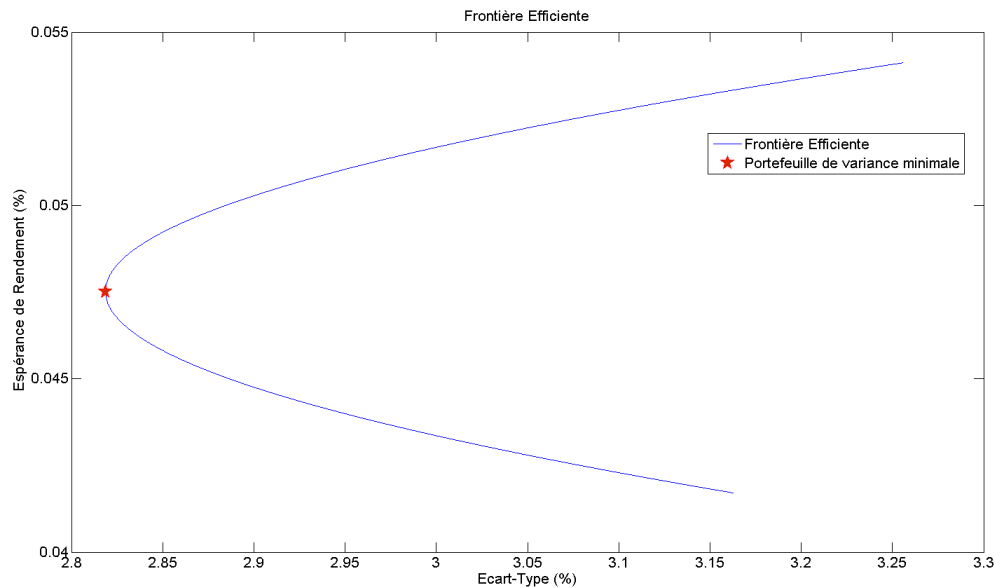


FIGURE 3.14 – Exemple de frontière efficiente pour un marché constitué des titres PLD et TXT et identification du portefeuille efficient de variance minimale (10 ans de rendements historiques de 2007 à 2017 ont été considérés pour définir cette frontière - les rendements et écarts-type du graphique sont exprimés sur base journalière)

Nous avons donc répété l'ensemble de nos simulations (soit plus de 1700 couples), en calculant à chaque fois les rendements proposés par le Portefeuille Universel, le portefeuille équi pondéré et le portefeuille de Markowitz défini sur base de la variance minimale. Concernant le portefeuille de Markowitz, 5 ans de rendements historiques précédant la première journée d'investissement ont été considérés pour établir la frontière efficiente. Ci-dessous, nous proposons une synthèse de ces résultats en présentant la moyenne des rendements obtenus pour chaque type de portefeuille en fonction de l'évolution de la période d'investissement.

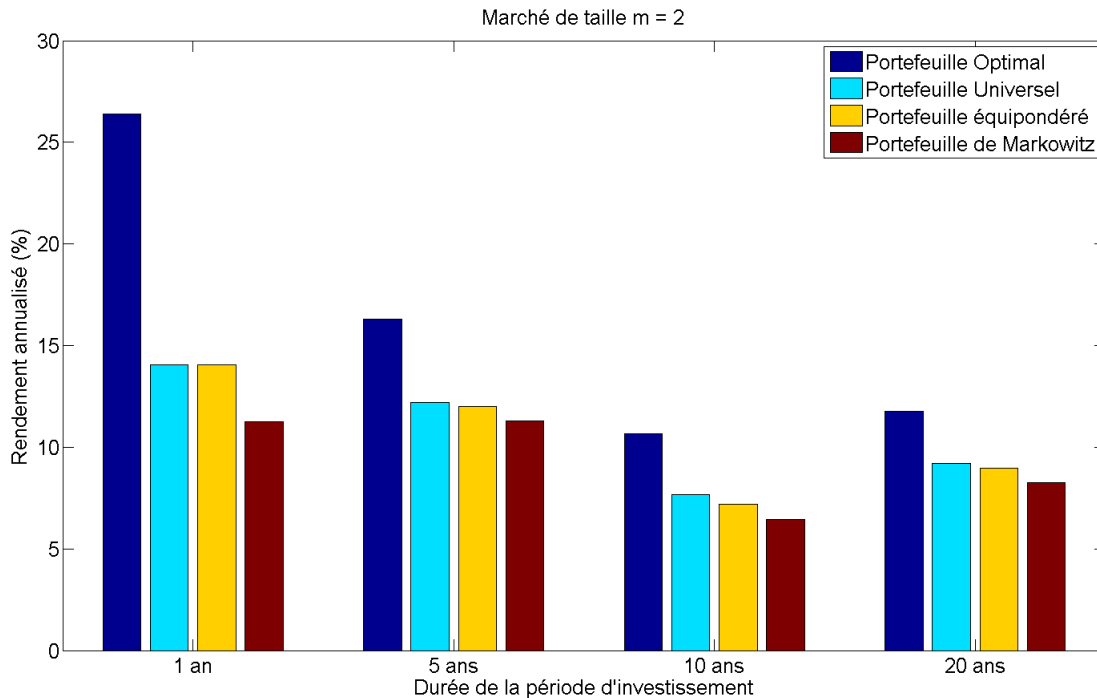


FIGURE 3.15 – Rendement annualisé de différents types de portefeuilles pour un marché de 2 titres en fonction de la période d'investissement

Globalement, tous les rendements annualisés chutent avec l'augmentation de la période de référence. Comme il était logique de s'y attendre, le Portefeuille Optimal domine largement les 3 autres types de portefeuilles, ensuite, nos constatations sont plus nuancées. Ainsi, si nous pouvons effectivement remarquer que le Portefeuille Universel surclasse les benchmarks classiques pour chaque période d'investissement, cette domination reste toujours très faible. Ainsi, si le rendement de l'Universel se démarque visiblement des rendements du portefeuille de Markowitz, il ne parvient jamais à se hisser significativement au-dessus de celui proposé par le portefeuille équi pondéré. Cette constatation peut trouver une certaine logique dans le sens où en observant l'évolution de l'indice dynamique de rebalancement journalier de l'Universel, nous avons pu observer que, bien qu'il se modifie, il ne s'écarte jamais considérablement de l'indice équi pondéré. Nous pouvons également ajouter que la domination légère du Portefeuille Universel vis-à-vis des benchmarks semble s'accroître de manière très faible jusqu'à atteindre presque 1% d'écart de rendement annuel pour les plus grandes périodes d'investissement.

En conclusion, si la richesse produite par le Portefeuille Universel semble effectivement pouvoir approcher dans une certaine mesure celle du Portefeuille Optimal, le rendement effectif qu'il propose, bien que supérieur, n'est pas sensiblement différent de ceux proposés par des benchmarks classiques tel que le portefeuille équi pondéré. De plus, l'introduction de coûts de transaction ne pourrait que diminuer l'intérêt porté à ce portefeuille puisque son rendement diminuerait alors que ceux des portefeuilles équi pondéré et de Markowitz resteraient pratiquement inchangés (achat en début de période et vente en fin de période).

Avant de conclure cette section, il est intéressant de revenir aux considérations pratiques énoncées en section 1.6. En effet, dans cette dernière, nous apprenons que le Portefeuille Universel était censé surpasser la richesse proposée par chaque titre individuellement (buy and hold sur la période) à condition qu'au moins 2 titres du marchés soient actifs. Suivant le tableau 3.2, nous avons constaté que l'activité des titres augmentait avec la période, dès lors, nous nous attendons à ce que cette propriété soit d'autant plus vérifiée avec l'agrandissement de la période d'investissement. Les résultats sont présentés ci-dessous.

1 an	5 ans	10 ans	30 ans
3.5	8.24	15.53	32.79

TABLEAU 3.6 – Pourcentage de marché de 2 titres respectant la propriété stipulant que le Portefeuille Universel surpasse chaque titre individuel

Sur base de ce tableau, nous pouvons en effet constater que le nombre de marché respectant la proposition de Cover augmente avec la période d’investissement. Toutefois, nous pouvons remarquer que le fait que tous les titres du marchés soient actifs n’assurent pas le respect de la proposition. En effet, la comparaison du tableau 3.2 avec le tableau ci-dessus nous montre par exemple qu’à une période de 30 ans, plus de 70% des marchés étudiés respectent la condition d’activité des titres alors que seulement 30 % respectent la proposition de Cover. Ceci démontre bien que cette condition d’activité (au minimum 2 titres actifs dans le marché) n’est qu’une condition nécessaire mais non suffisante et que le respect de la proposition ne semble pouvoir être démontré que pour une durée n suffisamment grande.

3.1.3 Portefeuille Universel modifié pour un marché de 2 titres

Au cours de nos développements, nous avons eu l’idée de développer et d’étudier les performances d’une forme totalement novatrice de Portefeuille Universel. Celui-ci, que nous nommerons dans le reste de ce travail *Portefeuille Universel modifié* présente le même schéma de construction que sa version classique à la différence près que la formule de calcul du nouvel indice journalier est la suivante :

$$\vec{b}_1 = \left(\frac{1}{m}, \frac{1}{m}, \dots, \frac{1}{m} \right) \quad (3.7)$$

$$\vec{b}_{k+1} = \frac{\int \vec{b} D_k(\vec{b}) d\vec{b}}{\int D_k(\vec{b}) d\vec{b}} \quad (3.8)$$

Dans cette dernière expression, le facteur D_k remplace le S_k de la version classique. Pour rappel, $S_k(\vec{b})$ représentait le rendement d’un portefeuille contamment rebalancé \vec{b} depuis le jour 1 jusqu’au jour k . $D_k(\vec{b})$ quant à lui représente simplement la performance de ce portefeuille sur la journée k et s’exprime par $D_k(\vec{b}) = \vec{b} r_k^t$.

L’idée d’utiliser cette nouvelle forme de portefeuille nous est venue notamment par la mise en évidence de deux limitations. La première est relative au fait que le temps de calcul du Portefeuille Universel croît de manière importante avec le nombre de titres considérés (m) mais également avec la période d’investissement (n). Or, de nombreux travaux identifient déjà une problématique de mise en pratique de cette méthodologie à cause de cette augmentation exponentielle du temps de calcul [14] [17]. Dans le cas du Portefeuille Universel modifié, la période d’investissement étant toujours d’une journée dans le calcul du nouvel indice, elle n’impacte pas le temps de calcul. Nous reviendrons de manière plus approfondie sur ces notions dans le Chapitre 5. Ensuite, et c’est probablement la raison la plus pertinente d’introduire ce nouveau portefeuille, l’efficience des marchés remet en question la méthodologie classique du Portefeuille Universel. En effet, cette efficience, dont l’existence a pu être appuyée par de nombreux articles [24] [25], établit que les rendements passés ne peuvent donner aucune indication sur les revenus futurs. Dès lors, il apparaît insensé de considérer des années de rendements de nos portefeuilles constamment rebalancés pour déterminer l’indice optimal à pratiquer le jour J .

Les performances de ce nouveau portefeuille sont présentées et discutées ci-dessous. De par sa rapidité de calcul, celui-ci a pu être étudié sur de plus longue période que le P.U. classique. Plus précisément, 4 périodes d’investissement de respectivement 1, 5, 10 et 30 ans ont été étudiées. Les mêmes couples de titres que pour la section 3.1.2 ont été utilisés.

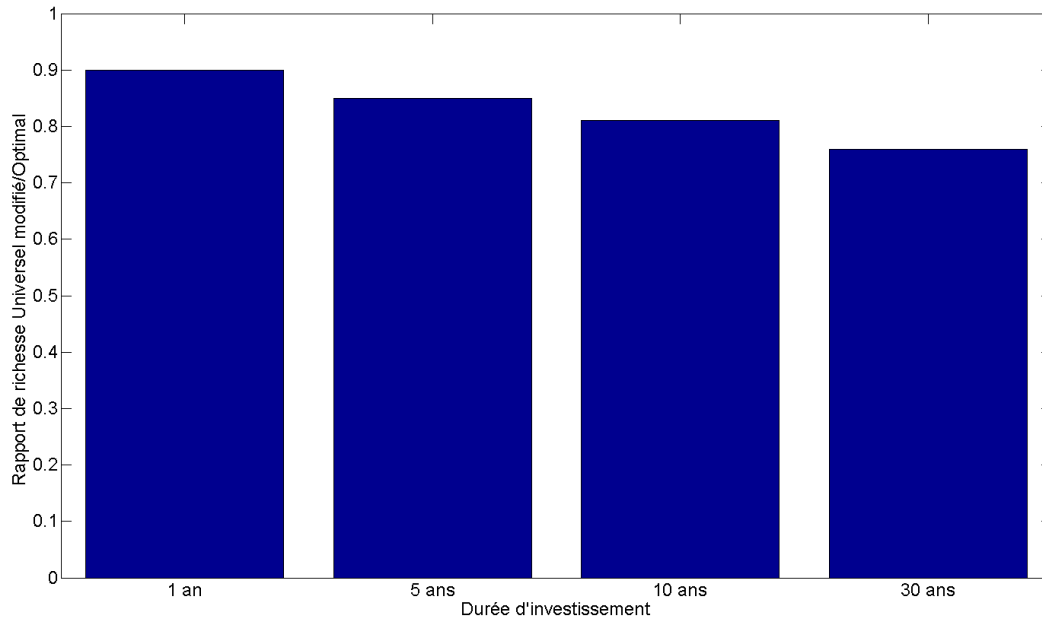


FIGURE 3.16 – Evolution du rapport de richesse Universel modifié/Optimal en fonction de la période d'investissement pour un marché de 2 titres

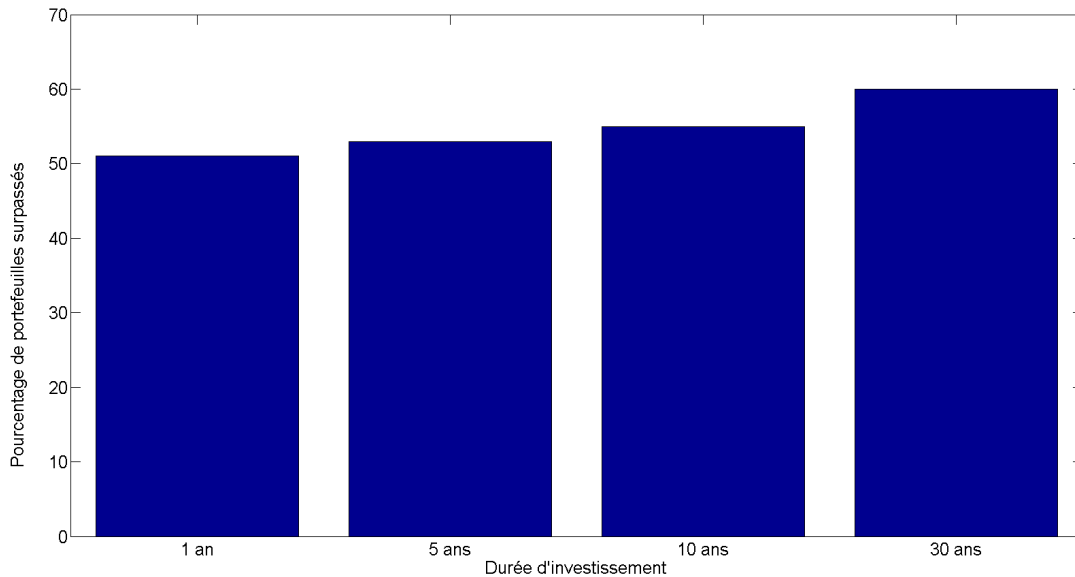


FIGURE 3.17 – Evolution du pourcentage de portefeuilles constamment rebalancés surpassés par le Portefeuille Universel modifié

Plusieurs éléments peuvent déjà être mis en évidence à l'aide des Figures 3.16 et 3.17 ci-dessus. Ainsi, on remarque que même pour des périodes d'investissement très courtes, de l'ordre de l'année, le rendement du P.U. modifié reste fort proche du rendement de l'Optimal. En effet, le rapport de richesse produite entre les deux portefeuilles est resté pour la majorité de nos simulations fort de proche de 1, la moyenne sur l'ensemble de nos simulations étant égale à 0.9. Ensuite, nous pouvons également constater que la performance du Portefeuille Universel modifié par rapport au Portefeuille Optimal tend à s'amenuiser avec l'augmentation de la période d'investissement. En effet, la moyenne du rapport de rendement est de l'ordre de 0.81 pour une période d'investissement de 10 ans, tandis qu'elle descend jusqu'à 0.76 pour un investissement de 30 ans. Ensuite, si nous analysons le pourcentage de portefeuilles surpassés, on constate que celui-ci reste relativement stable peu importe la durée d'investissement à une valeur légèrement inférieure à 60% (une petite tendance à la hausse est tout de même à noter avec l'augmentation de la période d'investissement).

Il apparaît intéressant de comparer le Portefeuille Universel et son équivalent modifié à l'aide du tableau 3.8 qui compare les grandeurs statistiques de notre échantillon d'analyse. Ainsi, on constate que les performances des 2 méthodes sont très proches en terme de moyenne ou de variance pour chaque période d'investissement. La seule petite différence notable peut se faire niveau des variances pour 5 et 10 ans où le P.U semble moins volatil que sa version modifiée.

-	1 an				5 ans				10 ans			
	Ratio		Pourcentage		Ratio		Pourcentage		Ratio		Pourcentage	
-	Moy.	σ	Moy.	σ	Moy.	σ	Moy.	σ	Moy.	σ	Moy.	σ
Universel	0.9	0.08	48	4	0.85	0.12	46	5	0.79	0.15	45	6
Universel modifié	0.9	0.08	51	7	0.85	0.13	53	10	0.81	0.17	55	12

TABLEAU 3.8 – Comparaison entre Universel et Universel modifié pour 2 titres

En conclusion de cette série d'étude relative à un marché de 2 titres sans coûts de transaction, nous pouvons dire que les performances du Portefeuille Universel modifié sont tout à fait intéressantes car elles restent similaires (voire même légèrement supérieures) à celles de sa version classique, tout en étant plus rapide.

3.2 Analyse liée à m titres

3.2.1 Portefeuille Universel pour un marché de m titres

Dans cette section d'analyse, nous allons maintenant répéter les simulations réalisées pour 2 titres dans une extension à m titres. Ainsi, nous allons considérer successivement des groupements de m titres parmi notre bloc de base d'actions repris en Annexe A. Pour chaque valeur de m , nous utiliserons des groupements de titres choisis aléatoirement parmi notre bloc de base. En effet, il est impensable d'utiliser l'ensemble des combinaisons possibles qui s'avèrent beaucoup trop élevées et nous conduiraient à des temps de simulation bien trop importants (par exemple pour $m = 20$, on aurait $\frac{60!}{(60-20)!20!} \cong 10^{15}$ combinaisons possibles). De ce fait, 500 combinaisons et donc 500 simulations seulement ont été considérées pour chaque valeur de m .

Pour pouvoir comparer les performances du Portefeuille Universel aux portefeuilles constamment rebalancés, il est nécessaire de définir au préalable l'ensemble des combinaisons possibles, c'est-à-dire l'ensemble des portefeuilles constamment rebalancés eux-mêmes. Ainsi, le pas de précision choisi dans nos simulations va directement conditionner le nombre de combinaisons possibles et donc, in fine, le temps de nos simulations. Par exemple, pour $m = 3$ titres, considérer un pas de précision de 1% (ce qui veut dire que chaque proportion des titres est considérée avec un pas de 1% [0 0.01 0.02 0.03 ... 0.97 0.98 0.99 1] de la somme totale investie) revient à obtenir un peu plus de 5000 combinaisons à tester.

Proportion Titre 1	Proportion Titre 2	Proportion Titre 3
1	0	0
0.99	0	0.01
0.99	0.01	0
0.98	0	0.02
0.98	0.01	0.01
0.98	0.02	0
0.97	0	0.03
0.97	0.01	0.02
0.97	0.02	0.01
0.97	0.03	0
...
0	0	1

TABLEAU 3.10 – Exemple de tous les portefeuilles constamment rebalancés possibles pour $m = 3$ titres et une précision de 1%

De plus, ce nombre de combinaison augmentant exponentiellement avec m , il nous a fallu diminuer notre pas de précision pour de grande valeur de m , de manière à obtenir un nombre de combinaisons de portefeuilles constamment rebalancés acceptable en terme de temps de simulation. Les différents pas de précision utilisés pour chaque valeur de m sont présentés dans le tableau ci-dessous. Ces valeurs ont été choisies comme un compromis entre précision et temps de simulation.

m	Pas de précision	Nombre de portefeuilles constamment rebalancés
3	0.01	5 551
5	0.05	10 626
8	0.1	19 448
10	0.1	92 378
15	0.2	11 628
20	0.2	42 504
30	0.25	40 920

TABLEAU 3.12 – Pas de précision choisi pour la définition des portefeuilles constamment rebalancés en fonction de chaque m

Pour chaque valeur de m et chacune de nos 3 périodes d'investissement (1, 5 et 10 ans), nous avons ensuite effectué 500 simulations en prenant à chaque fois 500 combinaisons aléatoires de m titres parmi nos 60 titres de base. Les Figures 3.18 et 3.19 représentent respectivement l'évolution du rapport de richesse et du nombre de portefeuilles constamment rebalancés surpassés en considérant à chaque fois la moyenne obtenue de nos 500 simulations pour chaque cas d'étude (un cas d'étude étant représenté par un nombre de titres considérés m + une durée d'investissement).

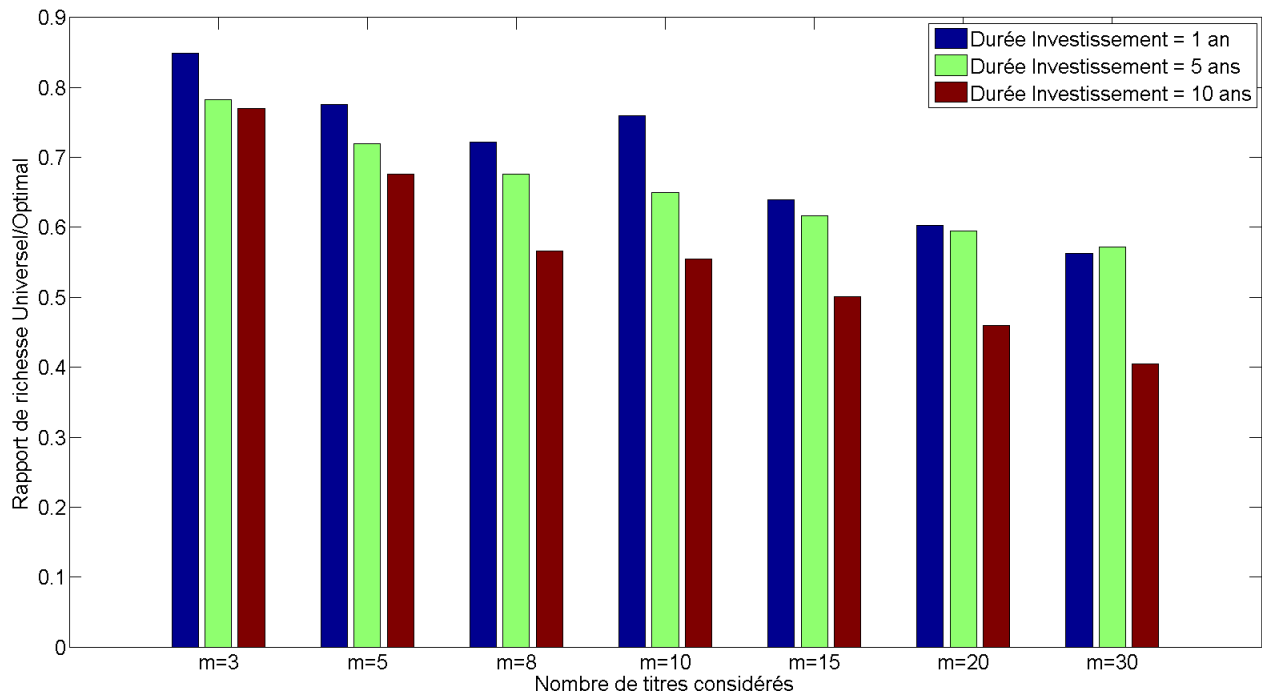


FIGURE 3.18 – Evolution du rapport de richesse produite par le P.U. et par le P.O. en fonction de la période d’investissement et de la taille du marché pour des coûts de transaction nuls

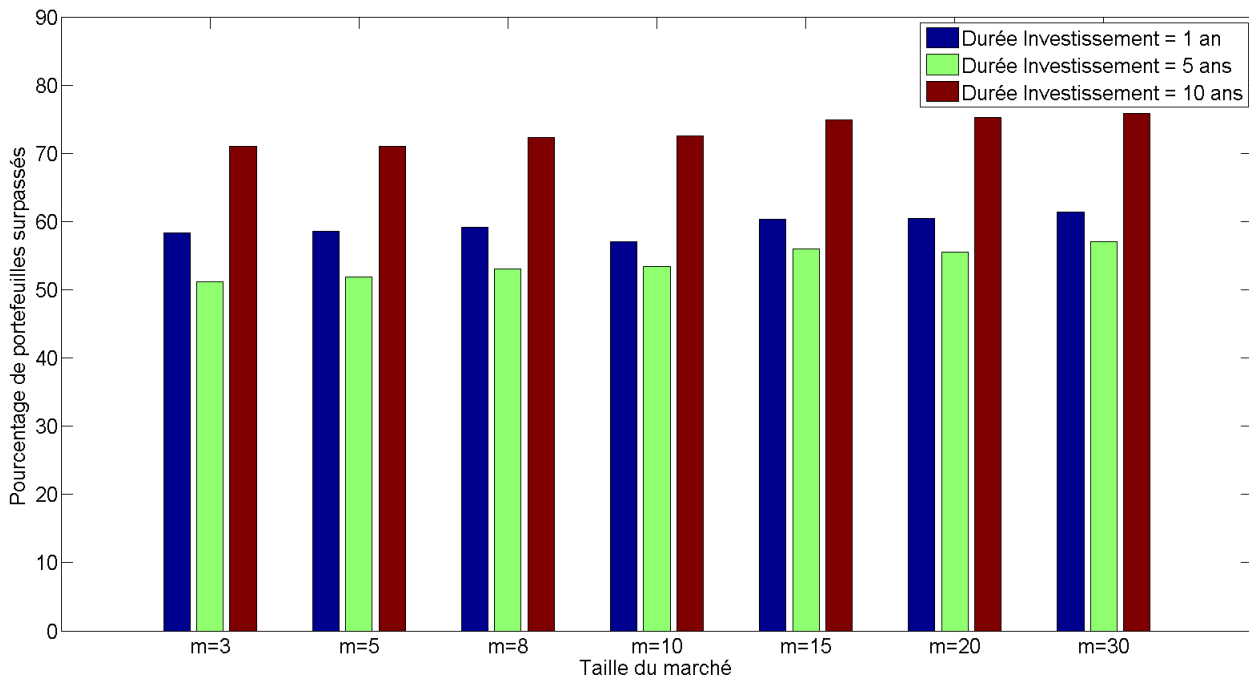


FIGURE 3.19 – Evolution du pourcentage de portefeuilles constamment rebalancés surpassés par le P.U. en fonction de la période d’investissement et de la taille du marché pour des coûts de transaction nuls

A l’analyse de la Figure 3.18, nous pouvons constater que le rapport de richesse Universel/Optimal tend à décroître avec l’augmentation de la taille du marché. En effet, ce rapport évolue de 0.85 pour un marché de 3 titres à 0.56 pour un marché plus étendu de 30 titres en considérant un période d’investissement similaire d’une année. Le seul élément venant perturber cette observation est relatif au marché de taille $m = 10$. En effet, pour celui-ci on constate un rehaussement de la performance. Ceci pourrait peut-être s’expliquer en reprenant

le tableau 3.12. Dans ce dernier, on remarque que le pas de précision choisi nous a mené à obtenir la plus grande matrice de combinaisons parmi tous nos marchés. Ainsi, le calcul fondamental du P.U. pour déterminer l'indice journalier à rebalancer a pu tenir en compte un plus grand nombre de portefeuilles, améliorant ainsi sa prédiction. On pourrait donc penser que choisir une plus grande précision pour définir notre base de portefeuilles constamment rebalancé permet d'améliorer la performance du Portefeuille Universel. Cependant, une amélioration du pas de précision induirait également une augmentation du temps de calcul qui pourrait s'avérer critique. Nous reparlerons de ces notions dans le chapitre 5. Ensuite, on constate qu'à travers un même marché, c'est-à-dire un même nombre de titres m , la performance du Portefeuille Universel par rapport à celle du Portefeuille Optimal tend à se dégrader avec la période d'investissement.

Sur base de la Figure 3.19, nous remarquons que le nombre de portefeuilles que surpasse le P.U. reste relativement stable avec l'évolution de la taille du marché pour se maintenir aux alentours des 60%. De plus, en comparant avec la Figure 3.18, on peut se demander pourquoi le nombre de portefeuilles surpassés tend à s'améliorer légèrement avec la période d'investissement alors que le rapport de richesse Universel/Optimal tend quant à lui à s'amenuiser pour un marché de taille fixe. Ce phénomène peut trouver un explication dans le fait que souvent, le Portefeuille Optimal n'est constitué majoritairement que par quelques titres seulement (voire même un seul) parmi l'ensemble des titres du marché. La bonne performance continue sur de grandes périodes de temps ce ces quelques titres "majeurs" contribue à l'obtention de revenu de nature exponentielle vis-à-vis duquel le P.U. a tendance à décrocher. Malgré tout, la richesse générée par le Portefeuille Universel parvient tout de même à se hisser au-dessus d'une majorité des autres portefeuilles constamment rebalancés.

Nous avons poursuivi nos analyses en réintroduisons une nouvelles fois nos 2 benchmarks de référence, à savoir le portefeuille équi pondéré et le portefeuille de Markowitz. De la même manière que précédemment, le portefeuille de Markowitz a été sélectionné en considérant le portefeuille efficient de plus petite variance comme illustré en Figure 3.20. Pour nos simulations, la frontière efficiente a été déterminée sur base de 5 années de rendements historiques antérieurs à notre première journée d'investissement.

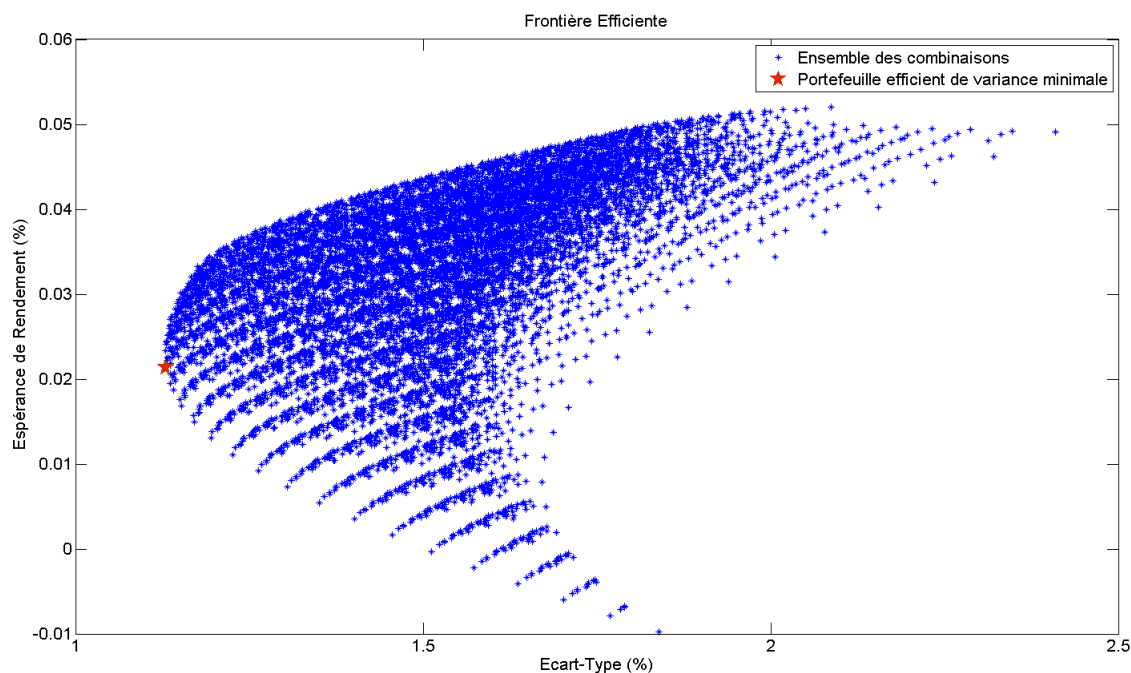


FIGURE 3.20 – Exemple de frontière efficiente pour un marché constitué des titres KO, CTL, TIF, MON, A et identification du portefeuille efficient de variance minimale (10 ans de rendements historiques de 2007 à 2017 ont été considérés pour définir cette frontière - les rendements et écarts-type du graphique sont exprimés sur base journalière)

Nous présentons ci-dessous la synthèse de nos résultats reprenant les moyennes de rendements obtenus pour chacun de nos types de portefeuille en fonction de la taille du marché et de la période d'investissement. Pour chaque combinaison [taille de marché - durée d'investissement], entre 100 et 200 simulations ont été considérées toujours sur notre base de 60 titres définis en Annexe A. Notons que dans les cas des marchés de grandes tailles (supérieur à 10), nous avons choisi de ne pas présenter le rendement du Portefeuille Optimal.

En effet, le but est ici d'analyser la performance du Portefeuille Universel en comparaison des benchmarks classiques. Or, en incorporant le rendement de l'Optimal (qui est toujours largement supérieur aux trois autres portefeuilles), nous étirerions trop notre graphique pour nous permettre une bonne analyse des différences de rendement entre l'Universel et nos 2 benchmarks.

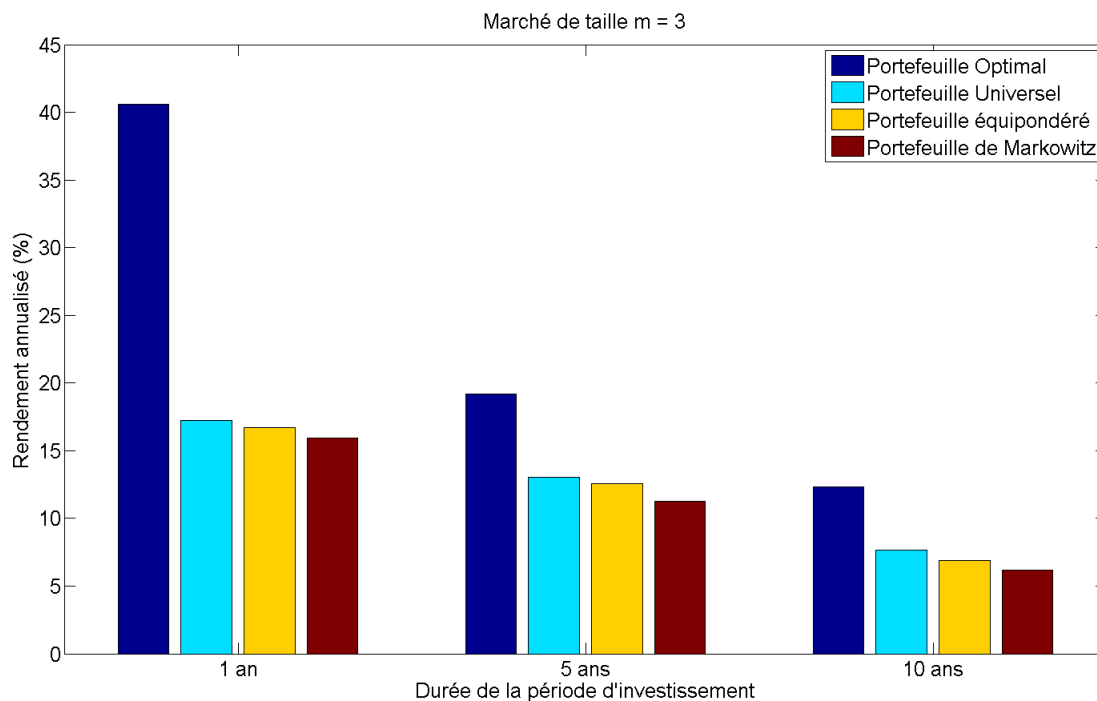


FIGURE 3.21 – Rendement annualisé de différents types de portefeuilles pour un marché de 3 titres en fonction de la période d'investissement

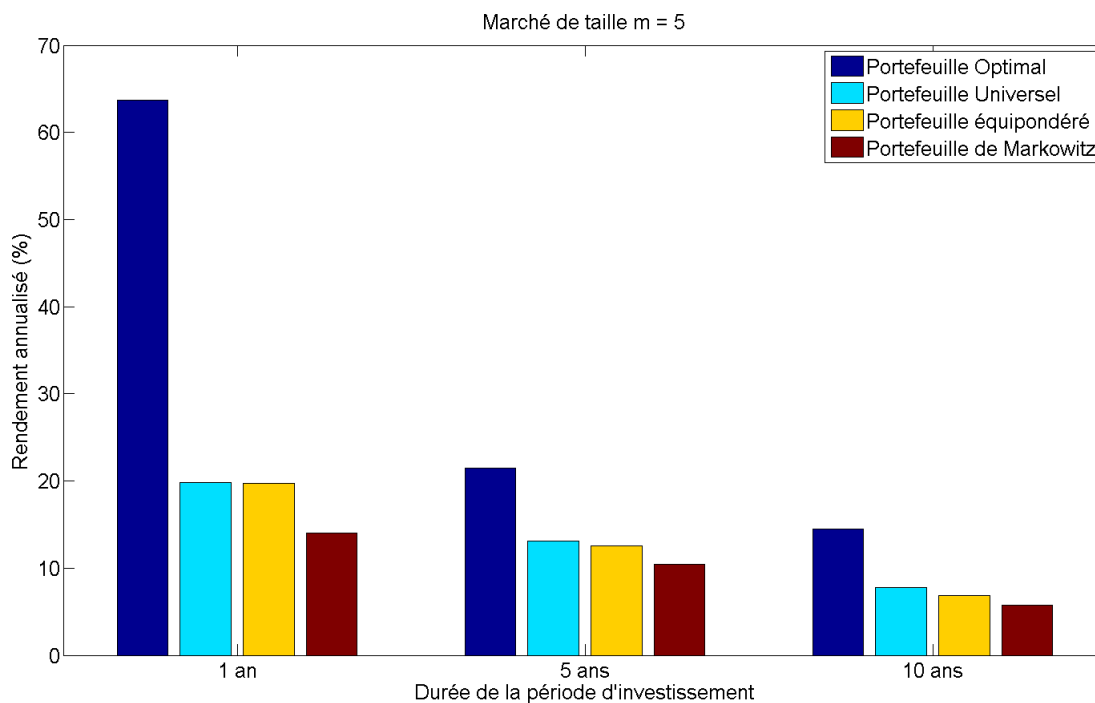


FIGURE 3.22 – Rendement annualisé de différents types de portefeuilles pour un marché de 5 titres en fonction de la période d'investissement

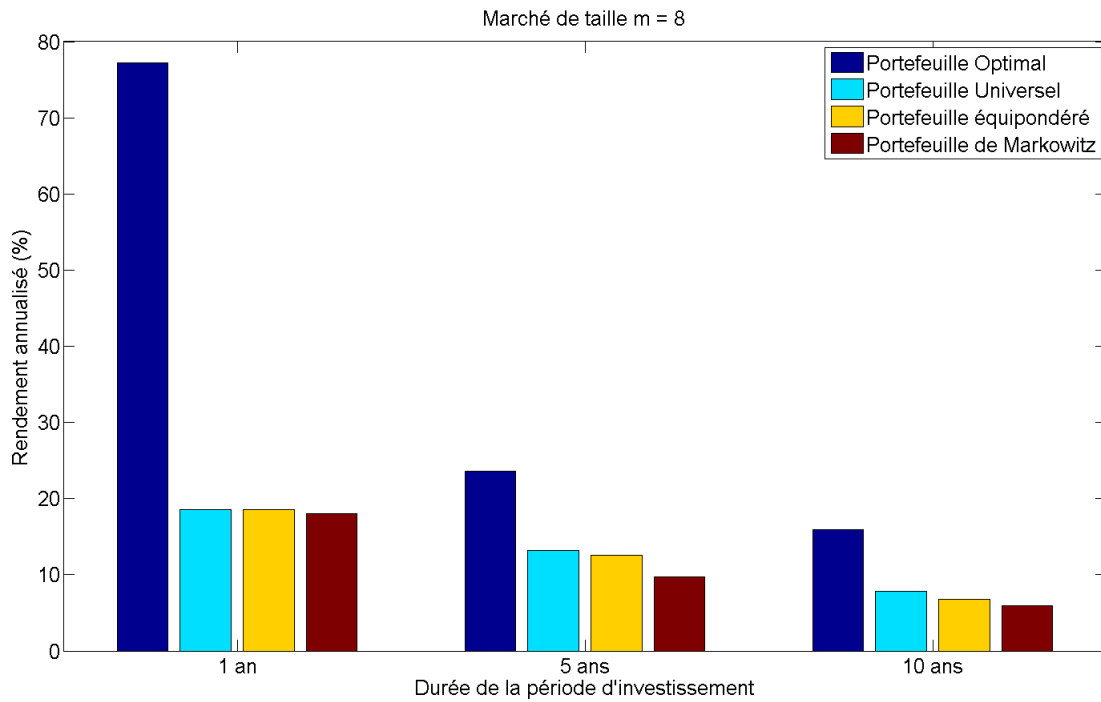


FIGURE 3.23 – Rendement annualisé de différents types de portefeuilles pour un marché de 8 titres en fonction de la période d'investissement

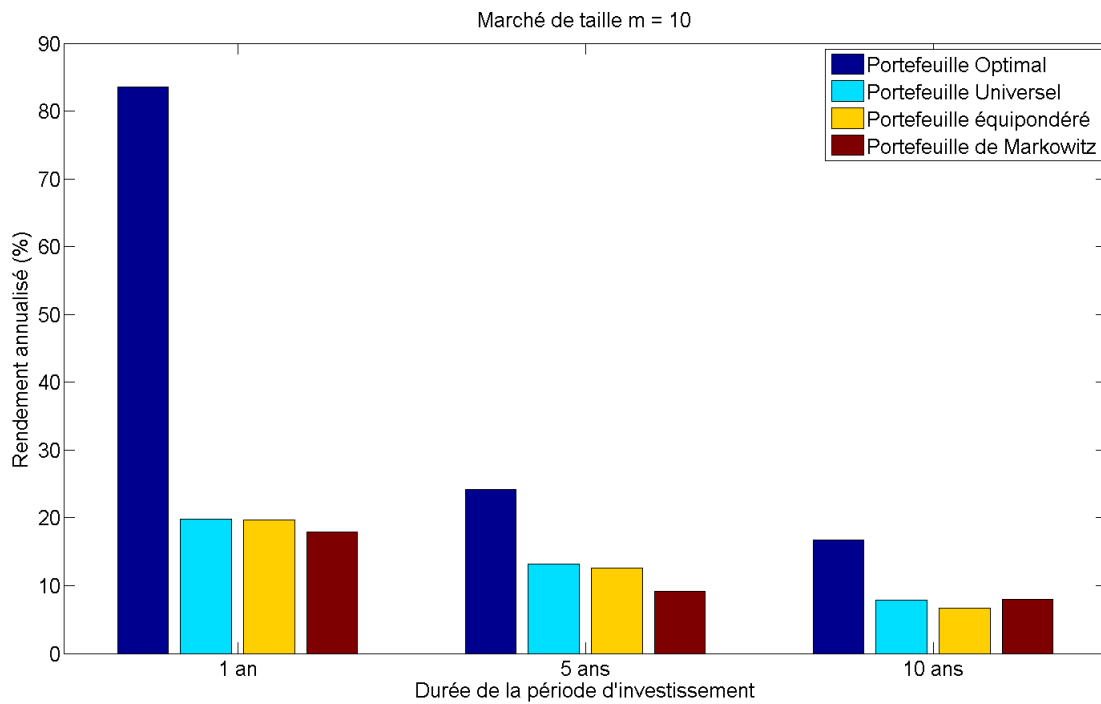


FIGURE 3.24 – Rendement annualisé de différents types de portefeuilles pour un marché de 10 titres en fonction de la période d'investissement

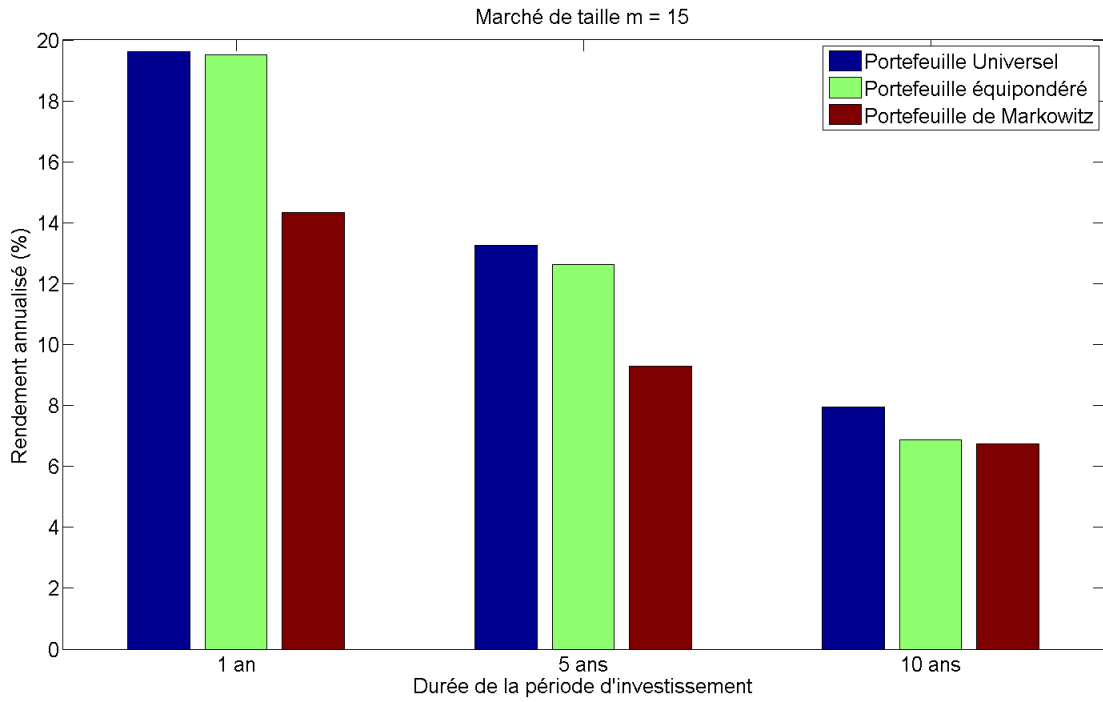


FIGURE 3.25 – Rendement annualisé de différents types de portefeuilles pour un marché de 15 titres en fonction de la période d'investissement

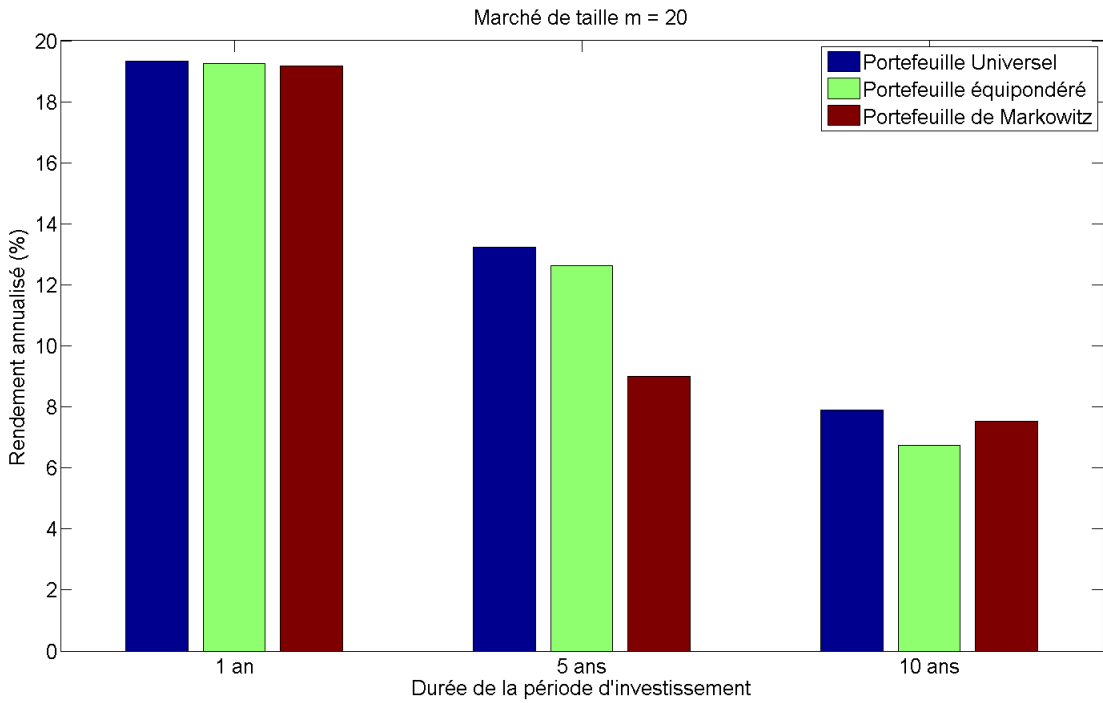


FIGURE 3.26 – Rendement annualisé de différents types de portefeuilles pour un marché de 20 titres en fonction de la période d'investissement

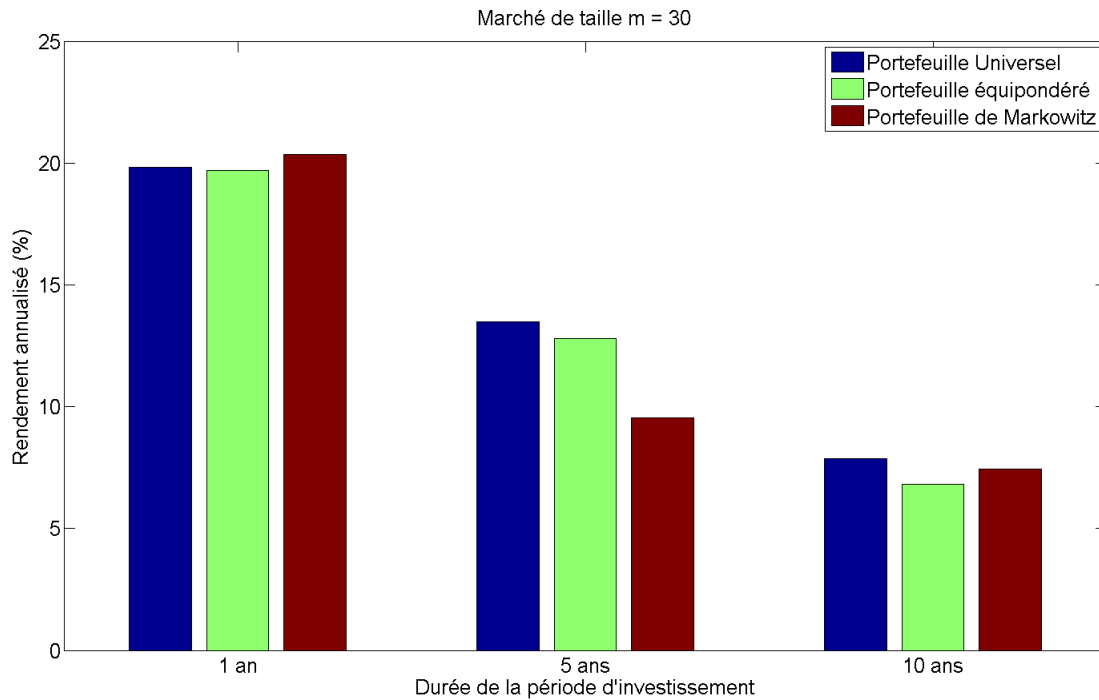


FIGURE 3.27 – Rendement annualisé de différents types de portefeuilles pour un marché de 30 titres en fonction de la période d’investissement

Les résultats visibles sur les graphiques des Figures 3.21 à 3.27 confortent nos conclusions faites dans les cas d’un marché de 2 titres. Ainsi, nous pouvons constater que peu importe la taille du marché ou la période d’investissement, le P.U. surpasse toujours nos deux benchmarks de référence. La seule exception à cette observation est le cas du marché de 30 titres pour une période de rétention d’1 an où le portefeuille de Markowitz démontre un rendement supérieur. Malgré tout, cette domination du P.U. reste toujours très faible. En effet, cette domination s’accroît légèrement avec la période d’investissement mais nous ne pouvons pas distinguer de différences notables et particulièrement pas d’accroissement de cette domination avec l’augmentation de la taille du marché. Dans le meilleur des cas (plus grande période de rétention), le rendement annuel du P.U. parvient à surpasser celui de ses concurrents d’1%.

En conclusion de cette section, nous pouvons donc affirmer que l’intérêt du Portefeuille Universel s’amenuise de plus en plus. A ce stade, celui-ci présente toujours une légère supériorité sur des constructions de portefeuilles plus classiques. Cependant, la nouvelle question à laquelle nous devons tâcher de répondre est de savoir si l’introduction des coûts de transaction ne finira pas d’achever le peu d’intérêt que présente le Portefeuille Universel dans sa version pure telle que développée par Cover.

Avant de conclure cette section et similairement à ce qui a été fait pour un marché de 2 titres, nous allons maintenant analyser l’hypothèse d’activité des titres pour un marché plus étendu. Nous calculerons également pour chaque taille de marché le pourcentage de marchés (parmi l’ensemble simulé) pour lesquels le Portefeuille Universel surpasse chaque titre individuel. Les résultats sont présentés ci-dessous.

m	Durée d'investissement	Nombre de titres actifs	% respectant (1.18)
3	1 an	1.19	1
	5 ans	1.42	4
	10 ans	1.68	7
5	1 an	1.19	0
	5 ans	1.57	1
	10 ans	1.9	1
8	1 an	1.26	0
	5 ans	1.57	1
	10 ans	2.27	1
10	1 an	1.15	0
	5 ans	1.78	0
	10 ans	2.34	0
15	1 an	1.44	0
	5 ans	1.9	0
	10 ans	2.21	0
20	1 an	1.49	0
	5 ans	1.99	0
	10 ans	2.24	0
30	1 an	1.46	0
	5 ans	2.2	0
	10 ans	2.13	0

TABLEAU 3.14 – Analyse du nombre moyen de titres actifs suivant la taille de marché et la durée d'investissement avec vérification de la relation de Cover (1.18)

Tout d'abord, nous pouvons ainsi constater que, logiquement, le nombre de titre actifs, à période d'investissement constante, a tendance à augmenter avec la taille de marché. Ensuite, nous pouvons également remarquer que le nombre de titres actifs augmente également avec la durée d'investissement au sein d'un marché de taille fixe. Si nous analysons nos résultats pour les petits marchés (3 et 5 titres), nous aurions tendance à dire que l'augmentation du nombre de titres actifs a tendance à augmenter la probabilité que la relation de Cover (1.18) soit respectée. Cependant, nous remarquons que cette conclusion est infirmée pour des marchés de taille plus conséquente. Pire, nous remarquons que même dans le cas où il existe au moins 2 titres actifs, la relation de Cover n'est jamais vérifiée dans aucun cas. Dès lors, similairement aux enseignements tirés dans la section concernant l'analyse de marchés de 2 titres, nous pourrions conclure que la condition d'obtenir au moins 2 titres actifs dans le marché n'est qu'une condition nécessaire mais non suffisante du respect de la relation de Cover (1.18). Plus précisément, le respect de cette relation ne se démontrerait en pratique que pour une période d'investissement très large, bien supérieure à 10 ans.

Conclusions importantes du chapitre

Il est maintenant bon de faire une synthèse des résultats obtenus jusqu'à présent dans une considération où les coûts de transaction sont supposés nul. Tout d'abord, nous avons donc vu que d'un point de vue théorique, le Portefeuille Universel permet bien d'approcher la richesse produite par le Portefeuille Optimal et cela d'autant mieux que les titres sont peu volatils et corrélés. Lorsque la période d'investissement s'agrandit, le Portefeuille Universel s'éloigne cependant plus du Portefeuille Optimal. Nous avons également constaté une sur-performance légère du Portefeuille Universel sur les benchmarks de référence mais qui ne semble pas liée à des valeurs particulières de corrélation ou de volatilité des titres.

Ensuite, en réalisant une batterie de tests empiriques sur base de titres réels du marché boursier, nous avons pu obtenir une confirmation que le Portefeuille Universel permettait bien d'approcher la richesse produite par le Portefeuille Optimal. Cependant, nous avons observé que la richesse produite par le P.U. s'éloignait assez rapidement de celle générée par le P.O dès que la taille du marché augmentait, qui plus est si la période d'investissement était importante. En comparaison des benchmarks, le Portefeuille Universel a démontré une très légère sur-performance qui ne variait pas avec la taille de marché mais s'accroissait très faiblement pour de grandes périodes d'investissement. Faisons cependant une remarque importante concernant les performances établies du P.U.. En effet, nous avons spécifié dans nos développements que la matrice des combinaisons des

portefeuilles constamment rebalancés utilisé pour la calcul du P.U. avait été fortement réduite en particulier pour les marchés de grande taille, et ce, pour des questions de temps de simulation excessifs. Dès lors, il est possible que les rendements déterminés soient plus faibles que ceux obtenus en considérant une matrice de combinaison plus complète. En effet, grâce à une matrice plus complète, et conformément à (1.8), une pondération plus importante des portefeuilles démontrant une grande richesse aurait pu permettre de modifier l'indice journalier du rebalancement au plus proche de ces portefeuilles plus performant. En ce sens, nos résultats ont pu être légèrement biaisés et sous-estimés.

Nous avons aussi pu noter que la relation de Cover (1.18) n'était pas respectée même si la condition que 2 titres du marché au minimum soient actifs. Nous en avons déduit que cette condition n'était que nécessaire mais pas suffisante et que le respect de cette relation ne pouvait éventuellement se démontrer que pour des durées d'investissement particulièrement élevées.

Finalement, sur base des limitations démontrées par le Portefeuille Universel, nous avons proposé une formule innovante modifiant légèrement la méthodologie de Cover. Nous avons nommé ce nouveau type de construction Portefeuille Universel modifié. Nous avons notamment pu constater à l'aide de quelques tests réalisés pour un marché de 2 titres que les performances de ce portefeuille semblaient très légèrement supérieures à celle de sa version classique, tout en apportant un gain de rapidité de calcul.

Chapitre 4

Considérations des coûts de transaction

Nous avons pu mettre en évidence dans le chapitre précédent les performances démontrées par le Portefeuille Universel. L'objectif du présent chapitre est désormais d'analyser dans quelle mesure ces performances sont impactées par l'introduction de coûts de transaction (CT), ces coûts représentant la réalité des marchés boursiers. Pour rester fidèle à la méthodologie employée précédemment, nous réaliserons tout d'abord une première série d'analyse sur base d'un marché constitué uniquement de 2 titres avant d'étendre à un marché plus large.

4.1 Marché de 2 titres

4.1.1 Portefeuille Universel pour un marché de 2 titres

Il semble évident que l'introduction de coûts de transaction va venir impacter négativement la performance absolue que peut fournir le P.U.. Cependant, il est moins trivial de déterminer comment cette performance va évoluer en comparaison au Portefeuille Optimal. En effet, à moins que le P.O. ne soit constitué que d'un seul titre (auquel cas aucun rebalancement n'est nécessaire), il subit lui aussi un impact négatif sur sa performance par l'introduction de ces mêmes coûts de transaction. Pour illustrer nos propos, la Figure 4.1 suivante représente la performance de tous les portefeuilles constamment rebalancés ainsi que du Portefeuille Universel pour un marché constitué de 2 titres (Titre 1 = AIG / Titre 2 = DIS) sur 3 ans suivant différentes valeurs de coûts de transaction. Ces coûts de transaction sont définis comme un pourcentage de la valeur des titres devant être achetés ou vendus pour effectuer le rebalancement supposé journalier (autrement dit comme un pourcentage de la transaction totale journalière).

On constate ainsi par exemple que dans une situation de départ où le P.U. est fort proche de la richesse produite par le P.O. lui-même (CT = 0%), la richesse de ce Portefeuille Universel décroche largement vis-à-vis du Portefeuille Optimal dès l'augmentation des coûts de transaction. Cependant, même si le rapport Universel/Optimal a donc tendance à diminuer, on remarque que la quantité de portefeuilles surpassés a quant à elle tendance à augmenter (plus large domaine surpassé par l'Universel). Notons cependant que des CT de 20% et plus sont malgré tout peu réalistes, ceux-ci s'établissant la plupart du temps autour de 1%. Notre objectif sera donc d'analyser les variations de performance du Portefeuille Universel pour des CT réalistes en partant de coûts nuls (cas du chapitre précédent) jusqu'à des coûts maximum de 10% de la transaction totale journalière.

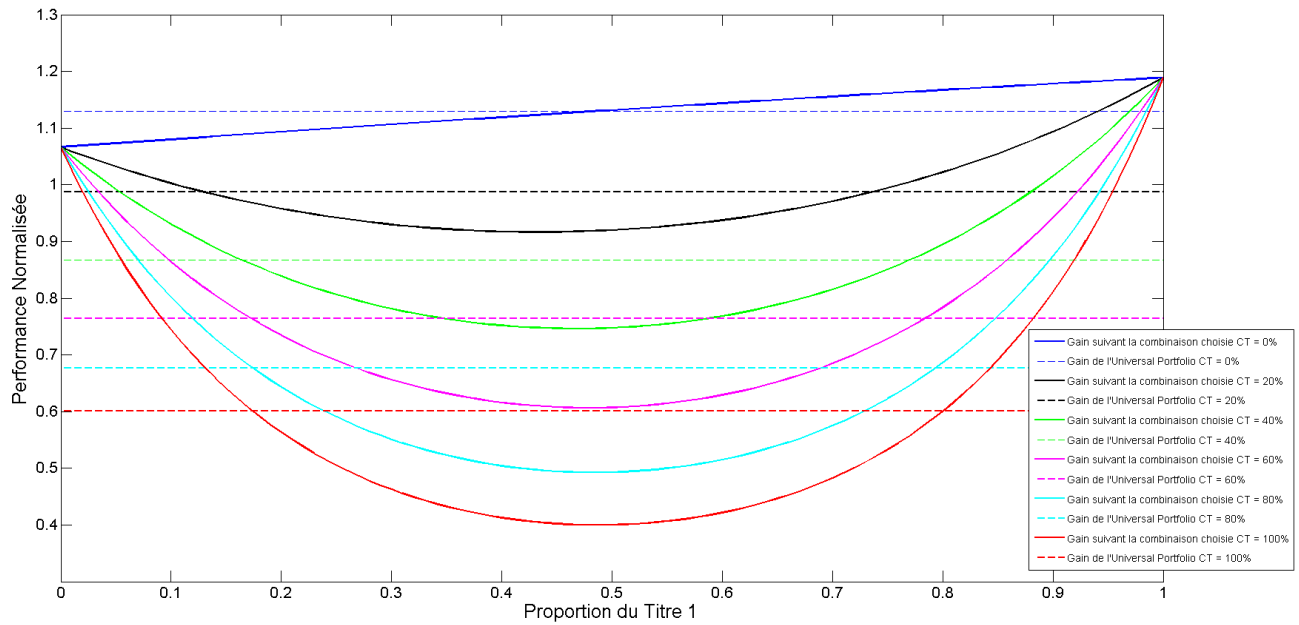


FIGURE 4.1 – Evolution de la performance suivant l'importance des coûts de transaction

Nous allons à présent réaliser les mêmes simulations que présentées en section 3.1.2 en y incorporant cette fois des coûts de transaction variable de 0 à 10%.

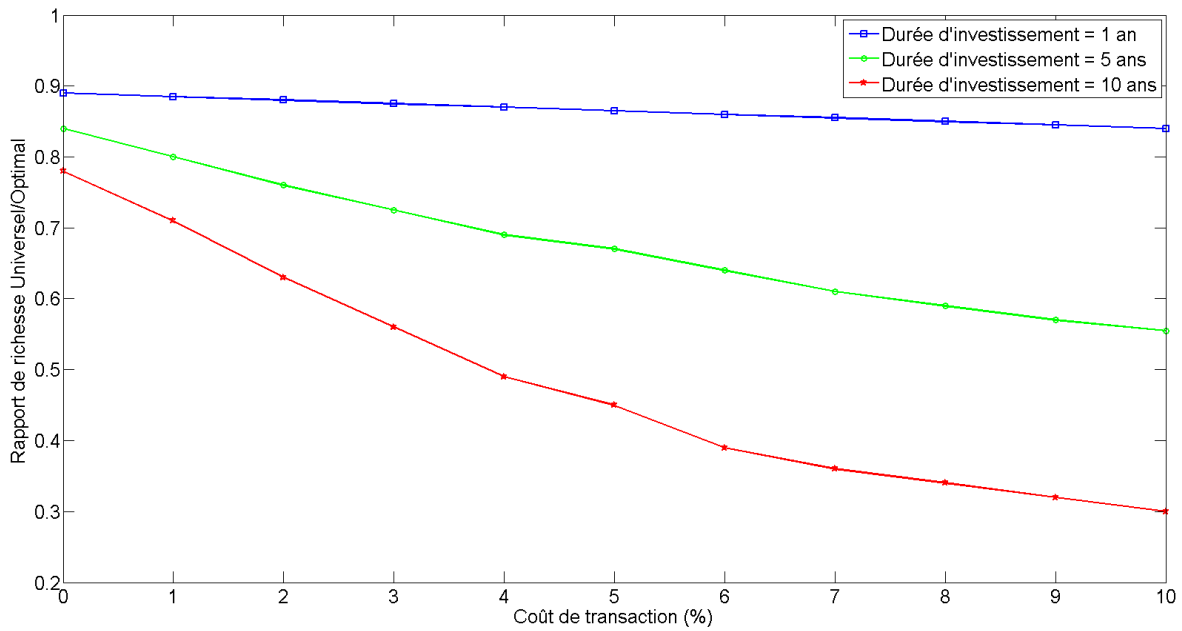


FIGURE 4.2 – Evolution du rapport de richesse Universel/Optimal en fonction des coûts de transaction

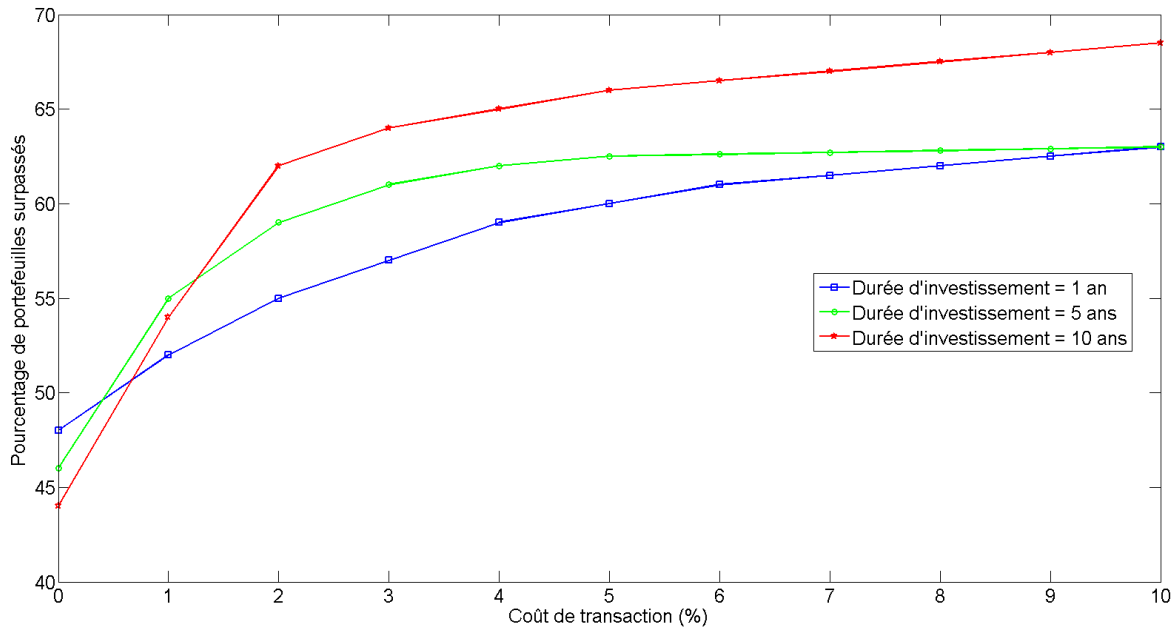


FIGURE 4.3 – Evolution du pourcentage de portefeuilles constamment rebalancés surpassés par le Portefeuille Universel en fonction des coûts de transaction

Les deux premières informations majeures que l'on peut relever à partir de ces graphiques est que, peu importe la durée d'investissement, la richesse proposée par le Portefeuille Universel a tendance à chuter vis-à-vis de celle du Portefeuille Optimal tandis que le nombre de portefeuilles constamment rebalancés surpassés a tendance à s'accroître. Ensuite, nous pouvons nuancer nos propos. Tout d'abord, nous pouvons observer que le rapport Universel/Optimal décroche de manière plus forte au plus la période d'investissement est grande. En effet, si pour un investissement d'1 an l'on passe d'un rapport de 0.9 (CT = 0%) à un peu plus de 0.8 (CT = 10%), pour un investissement de 10 ans, ce rapport passe d'un peu moins de 0.8 à à peine 0.3. Le premier cas subit donc une diminution d'environ 10% tandis que le second engrange un déclin de plus de 60%. Ceci pourrait être expliqué par la raison suivante. En effet, dans beaucoup de situations, le Portefeuille Optimal dans notre cas présent d'un marché de 2 titres, est souvent constitué par un seul des 2 titres plutôt que par une composition. Cette tendance est d'autant plus vraie que les coûts de transaction sont élevés car un portefeuille de cette forme "totalitaire" ne subit aucun rebalancement et donc aucun coût. Ainsi, dans une pareille situation, le rendement de ce portefeuille optimal totalitaire ne subit aucune dépréciation tandis que c'est bien le cas pour notre P.U. Dès lors, la richesse produite par ce dernier peut démontrer une tendance à décrocher vis-à-vis de celle générée par l'Optimal, et cela, de plus en plus fortement au fil des jours qui s'écoulent.

Ensuite, de manière opposée au paragraphe précédent, le nombre de portefeuilles surpassés augmente de manière légèrement plus importante avec les coûts de transaction au plus la période d'investissement est grande. En effet, pour une durée d'1 an, l'on passe de 48% de portefeuilles surpassés (CT = 10%) à environ 60%, tandis que pour une durée de 10 ans, l'on passe de 45% à presque 70%. L'explication de cette évolution positive pourrait trouver son origine dans le même commentaire qu'au paragraphe précédent. Ainsi, quand le portefeuille optimal est un portefeuille totalitaire en 1 titre, la construction du nouvel indice journalier du P.U. va naturellement lui faire tendre vers ce portefeuille optimal est donc réduire petit à petit ses coûts de rebalancement journalier au fil des jours. Par contre, les autres portefeuilles rebalancés suivant le même indice ne bénéficieront pas de cet effet et pourront donc contribuer à ce que le pourcentage de portefeuilles que surpasses le P.U. augmente. Une illustration de cet effet pouvait déjà être visualisé en Figure 4.1.

Nous allons maintenant analyser comment le rendement absolu du P.U. se modifie par l'introduction des coûts de transaction. Les résultats sont présentés ci-dessous.

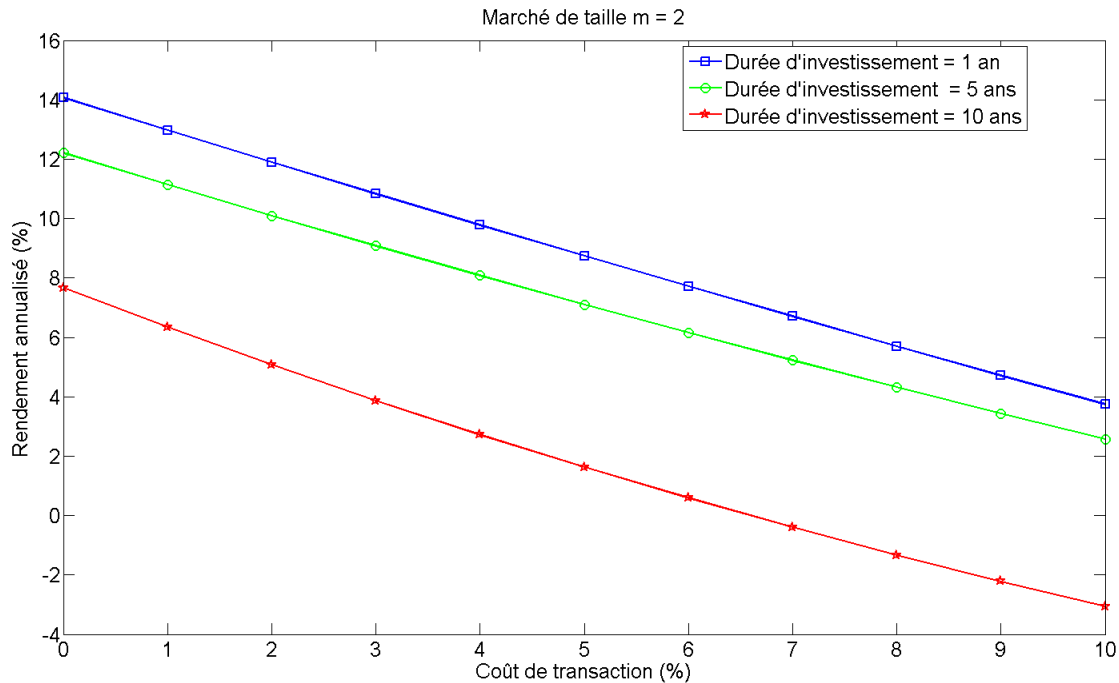


FIGURE 4.4 – Evolution du rendement annuel du Portefeuille Universel en fonction des coûts de transaction et de la période d’investissement pour un marché de 2 titres

Comme nous pouvons le constater, l’évolution du rendement selon les coûts de transaction démontre une allure linéaire. Nous pouvons ainsi calculer la sensibilité de ce rendement aux coûts de transaction, ce qui s’exprime simplement comme la pente de la droite étudiée. Ces sensibilités sont exposées dans le tableau ci-dessous.

1 an	5 ans	10 ans
-1.03	-0.96	-1.07

TABLEAU 4.2 – Sensibilité du rendement annuel du Portefeuille Universel aux coûts de transaction pour un marché de 2 titres (variation du rendement annuel pour une variation de coût de transaction de 1%)

Nous remarquons ainsi que la sensibilité ne subit pratiquement pas de variation suivant la période d’investissement en se stabilisant à une valeur proche de 1%. Si nous revenons un instant sur nos conclusions liées à la Figure 3.15, nous avons vu que le Portefeuille Universel ne démontrait qu’une très légère domination par rapport aux benchmarks de référence, démontrant dans le meilleur des cas une sur-performance de 1%. Dès lors, nous pouvons en déduire que, peu importe la période d’investissement, le rendement proposé par le Portefeuille Universel sera inférieur à au moins un de nos deux benchmarks dès que les coûts de transaction vaudront au moins 1% du montant total de la transaction journalière. Ce seuil critique de coût de transaction étant une valeur probable sur les marchés boursiers, nous devons ici nous rendre à l’évidence que le Portefeuille Universel présente au final, selon nos résultats, un intérêt assez faible.

4.1.2 Portefeuille Universel modifié pour un marché de 2 titres

Nous avons voulu ici répéter nos analyses concernant le rendement annuel sur base cette fois-ci du Portefeuille Universel modifié.

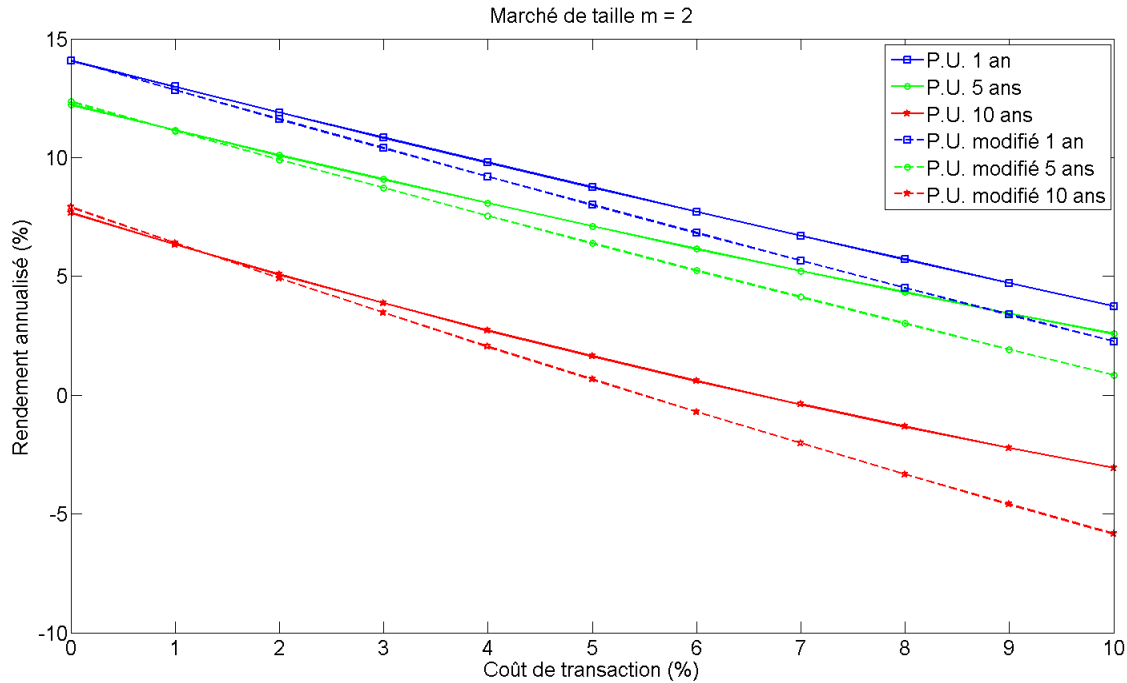


FIGURE 4.5 – Comparaison des évolutions des rendements annuels du P.U. et du P.U. modifié en fonction des coûts de transaction et de la période d’investissement

-	1 an	5 ans	10 ans
P.U.	-1.03	-0.96	-1.07
P.U. modifié	-1.07	-1.18	-1.15

TABLEAU 4.4 – Comparaison de sensibilité du rendement annuel du Portefeuille Universel classique et modifié aux coûts de transaction pour un marché de 2 titres en fonction de la période d’investissement (variation du rendement annuel pour une variation de coût de transaction de 1%)

Nous constatons tout d’abord que le P.U. modifié semble égal, voire même surpasser faiblement son équivalent classique lorsque les coûts de transaction reste inférieurs à 1%. Ensuite, passé ce seuil, la performance s’amenuise et devient plus faible que celle du P.U. classique. Ceci s’explique par une sensibilité aux coûts de transaction légèrement supérieure pour le Portefeuille Universel modifié que l’Universel classique. Nous pouvons donc conclure que, pour de faibles coûts de transaction (en pratique $\leq 1\%$), le P.U. modifié démontre un certain intérêt car il conserve très faible avantage sur le Portefeuille Universel et donc permettrait éventuellement de continuer à surclasser les benchmarks de référence. Par contre, dès des niveaux de coûts de transaction plus important, il apparaît encore moins attrayant que sa version classique. Cependant, comme déjà dit, l’avantage de cette méthode est sa rapidité. Nous tâcherons de déterminer avec plus de précision le temps de calcul de cette méthode en Chapitre 5.

4.2 Marché de m titres

4.2.1 Portefeuille Universel pour un marché de m titres

Dans cette dernière section, nous allons finalement étudier l’évolution des performances du Portefeuille Universel en situation réelle de coûts de transaction non nuls pour un marché de taille croissante allant jusqu’à 30 titres. Pour des questions de temps de simulation acceptables, nous ne simulerons que 3 situations de coût de transaction différentes, à savoir respectivement 1, 2 et 3%. Ensuite, pour chaque taille de marché (donc chaque m) et chaque pas de coût de transaction, nous calculerons les performances de 100 ensembles de titres seulement. Ces limitations s’avèrent nécessaire afin de ne pas allonger de manière excessive nos temps de simulation.

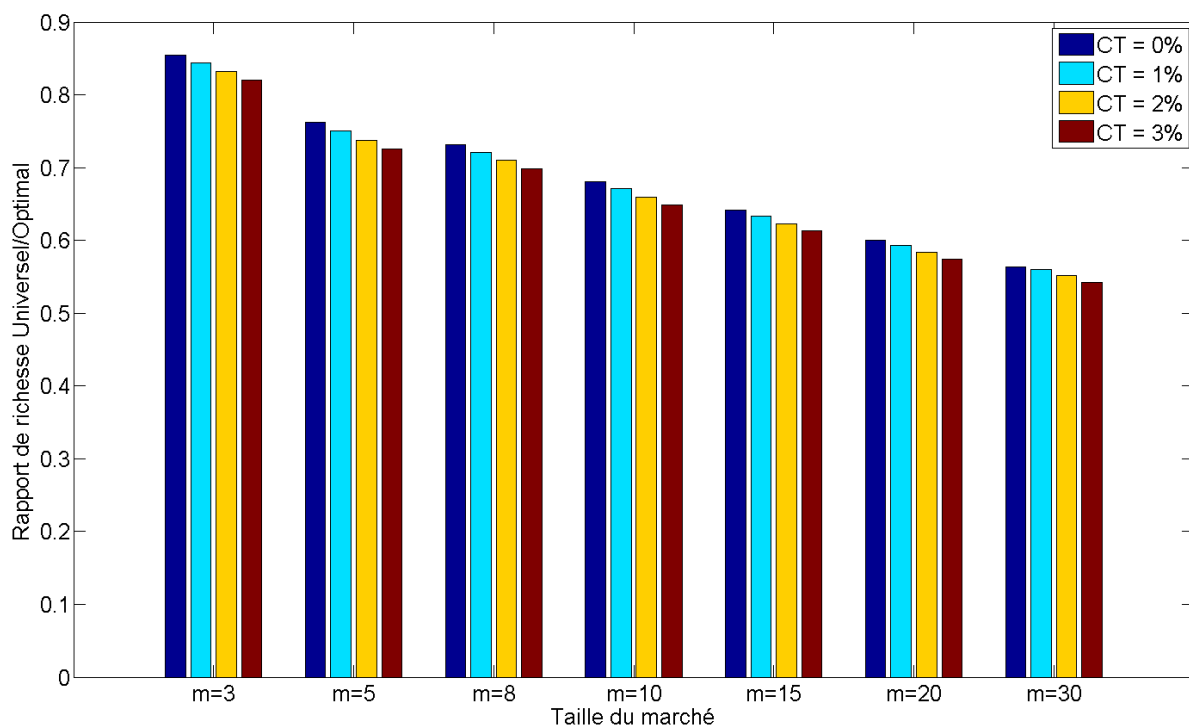


FIGURE 4.6 – Evolution du rapport de richesse Universel/Optimal en fonction des coûts de transaction pour une période de 1 an

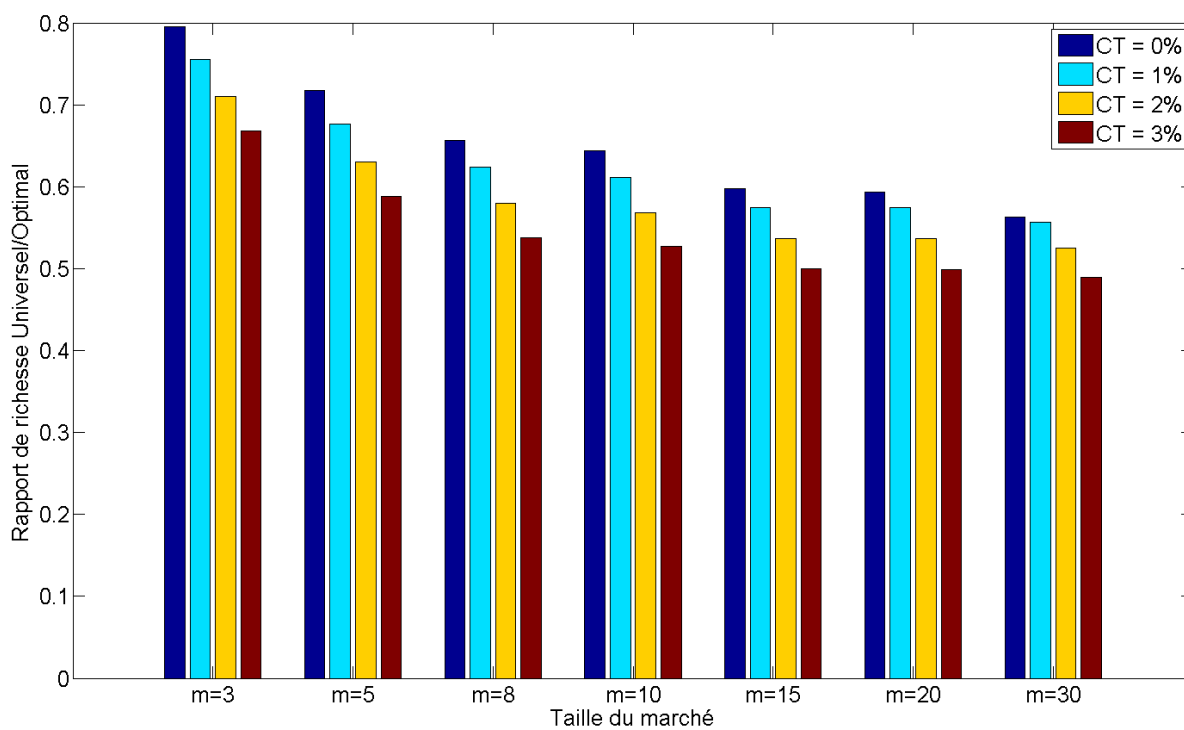


FIGURE 4.7 – Evolution du rapport de richesse Universel/Optimal en fonction des coûts de transaction pour une période de 5 ans

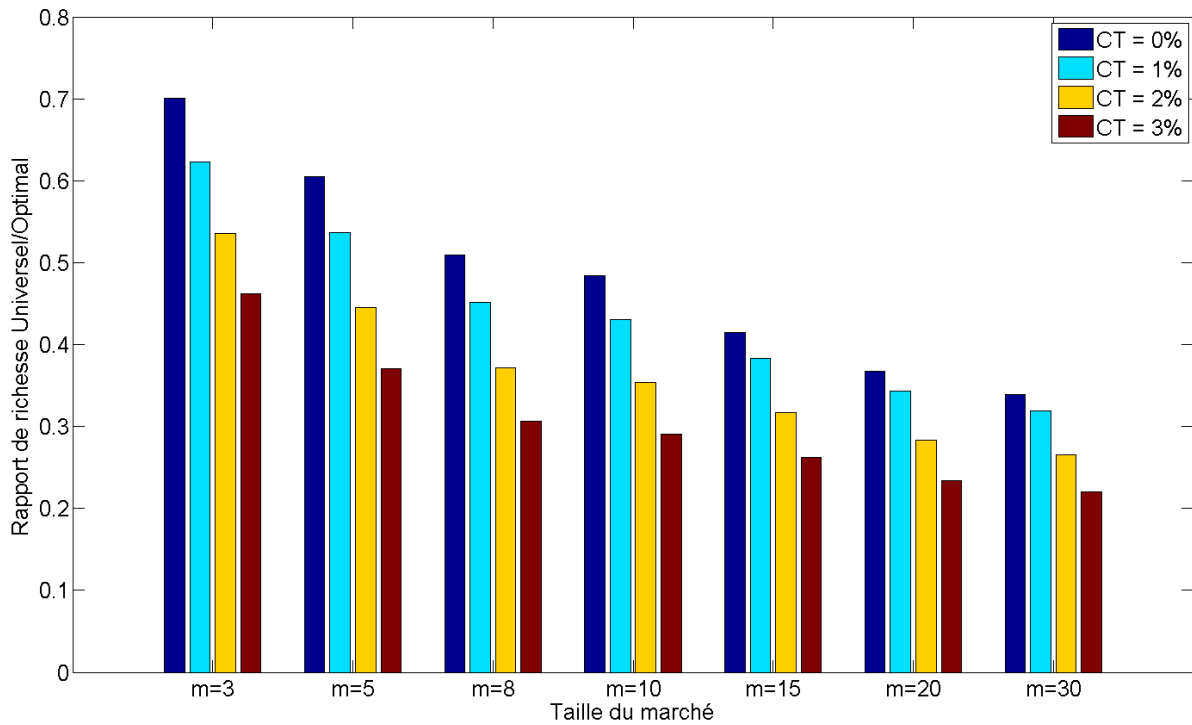


FIGURE 4.8 – Evolution du rapport de richesse Universal/Optimal en fonction des coûts de transaction pour une période de 10 ans

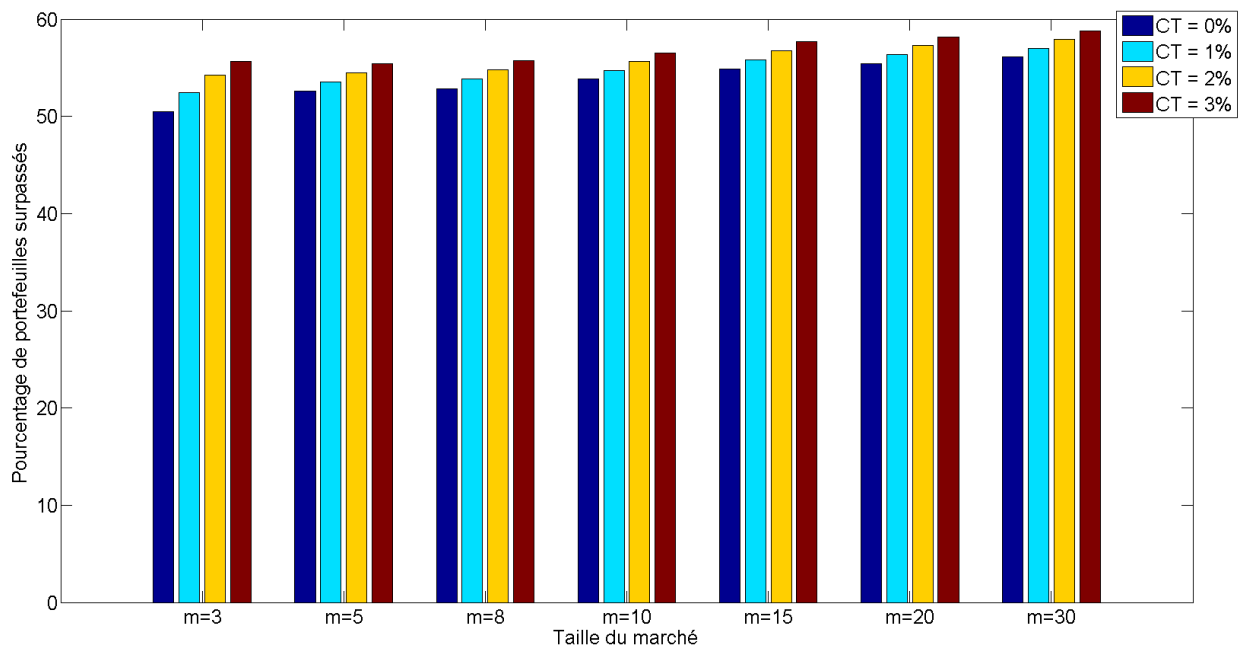


FIGURE 4.9 – Evolution du pourcentage de portefeuilles surpassés en fonction des coûts de transaction pour une période d'1 an

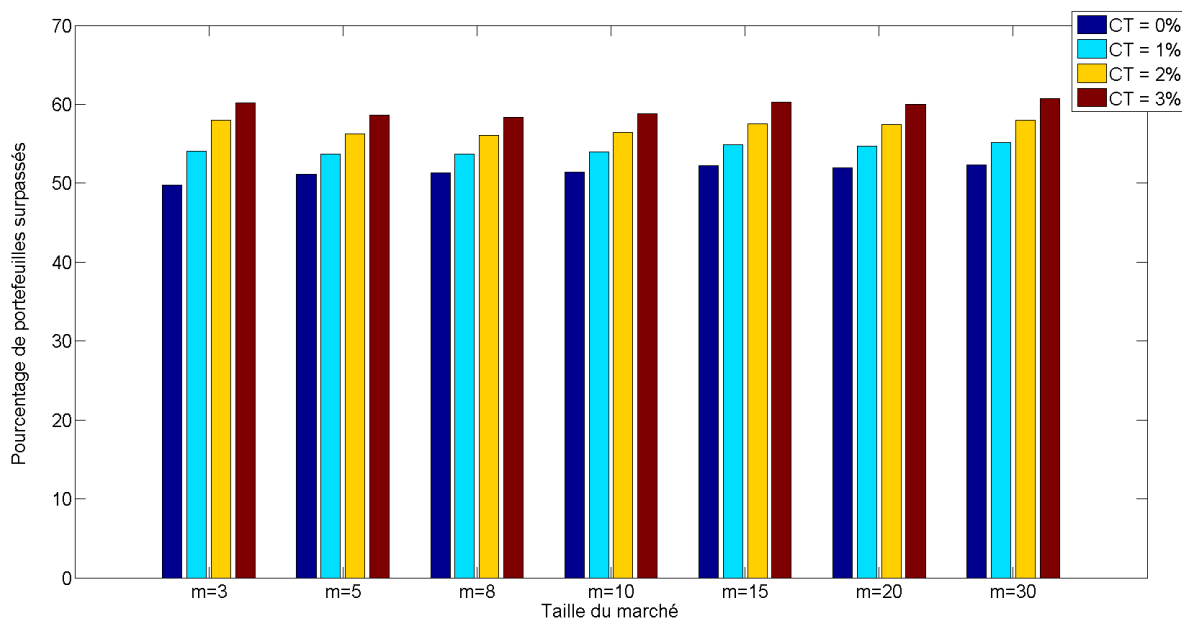


FIGURE 4.10 – Evolution du pourcentage de portefeuilles surclassés en fonction des coûts de transaction pour une période de 5 ans

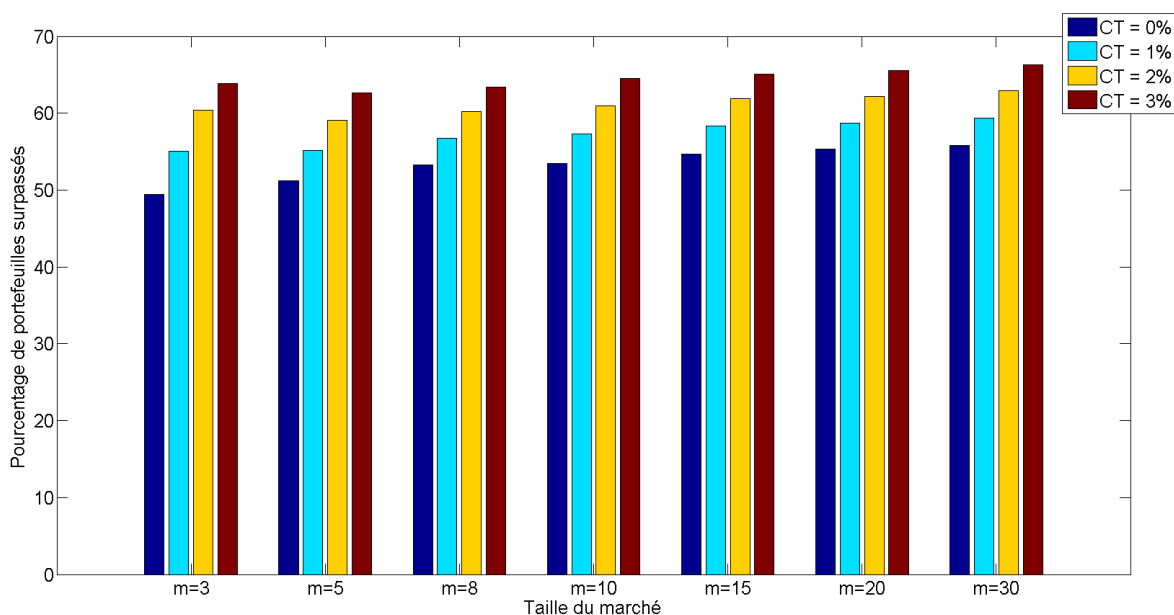


FIGURE 4.11 – Evolution du pourcentage de portefeuilles surclassés en fonction des coûts de transaction pour une période de 10 ans

Au vu de ces graphiques plusieurs constatations peuvent être faites. Tout d'abord, on observe que comme précédemment, l'augmentation de la période d'investissement a tendance à diminuer le rapport Universel/Optimal. On constate également que la considération de coûts de transaction décroît encore plus ce rapport mais de manière très légère. A taille de marché constante, cette diminution induite par les coûts de transaction est d'autant plus forte que la période d'investissement est grande, tandis qu'à période d'investissement fixée, cette décroissance est plus importante avec la diminution de la taille de marché. Ainsi, si on considère un passage de coût nul à un coût de 3%, pour un marché de 3 titres on ne passe que 0.85 à 0.83 pour un période d'1 an tandis que pour ce même marché à une période de 10 ans on passe de 0.7 à 0.45. De la même manière, pour une période fixe de 10 ans, l'on passe de 0.7 à 0.47 pour un marché de 3 titres, tandis qu'on ne passe que de 0.33 à 0.23 pour un marché de 30 titres.

En résumé, nous pouvons donc dire que la performance du Portefeuille Universel suivant le rapport Universel/Optimal :

- Décroit de manière relativement forte avec la taille du marché
- Est affectée négativement mais de manière très légère si on considère des coûts de transaction de l'ordre de 1%
- Décroit de manière relativement importante avec l'augmentation de la période d'investissement

Si nous nous attardons désormais à observer l'évolution du nombre de portefeuilles constamment rebalancés surclassés par le P.U., d'autres observations très intéressantes peuvent être identifiées. Tout d'abord, nous remarquons comme dans le cas de la section précédente que la période d'investissement n'a pas d'influence réelle sur l'évolution de ce critère. En effet, nos trois graphiques 4.9, 4.10 et 4.11 sont très similaires. Ensuite, nous constatons également que la taille du marché n'a que très peu d'influence elle aussi sur l'évolution de ce critère. Au final, seul le coût de transaction semble jouer un rôle. Ainsi, nous constatons que l'évolution du coût de transaction influence, avec étonnement, l'évolution positive de ce critère. Dès lors, le nombre de portefeuilles surpassés semble plus important lorsqu'on passe d'une situation à coût nul vers une situation à coût non nul. Comme déjà évoqué précédemment, ceci pourrait s'expliquer par le fait que souvent, le Portefeuille Optimal est constitué en majorité par quelques titres seulement (voire même un seul) même en cas de grands marchés. Dès lors, une augmentation de coût de transaction n'a que très peu d'impact sur ce genre de portefeuille tandis que la majorité des autres portefeuilles constamment rebalancés, qui sont eux plus diversifiés par nature, le subissent de plein fouet. Le Portefeuille Universel, de par sa construction, a tendance à se rapprocher de l'indice très peu diversifié du Portefeuille Optimal. Dès lors, cette approximation de l'indice optimal permet au P.U. de devenir plus performant vis-à-vis de plus en plus de portefeuilles constamment rebalancés qui eux conservent toujours par définition leur indice plus diversifié. Cependant, ce rapprochement vis-à-vis de l'indice optimal reste insuffisant pour continuer à suivre l'évolution exponentielle de la richesse générée par ce Portefeuille Optimal, ce qui peut également expliquer la décroissance de performance observée dans les graphiques 4.6, 4.7 et 4.8.

Nous allons désormais analyser l'évolution du rendement annuel du P.U. suivant nos coûts de transaction. Comme déjà précisé, seuls 3 coûts de transaction ont été simulés et leurs résultats sont à chaque fois représenté par un symbole particulier (carré, cercle ou étoile suivant la période d'investissement) dans les graphiques suivants.

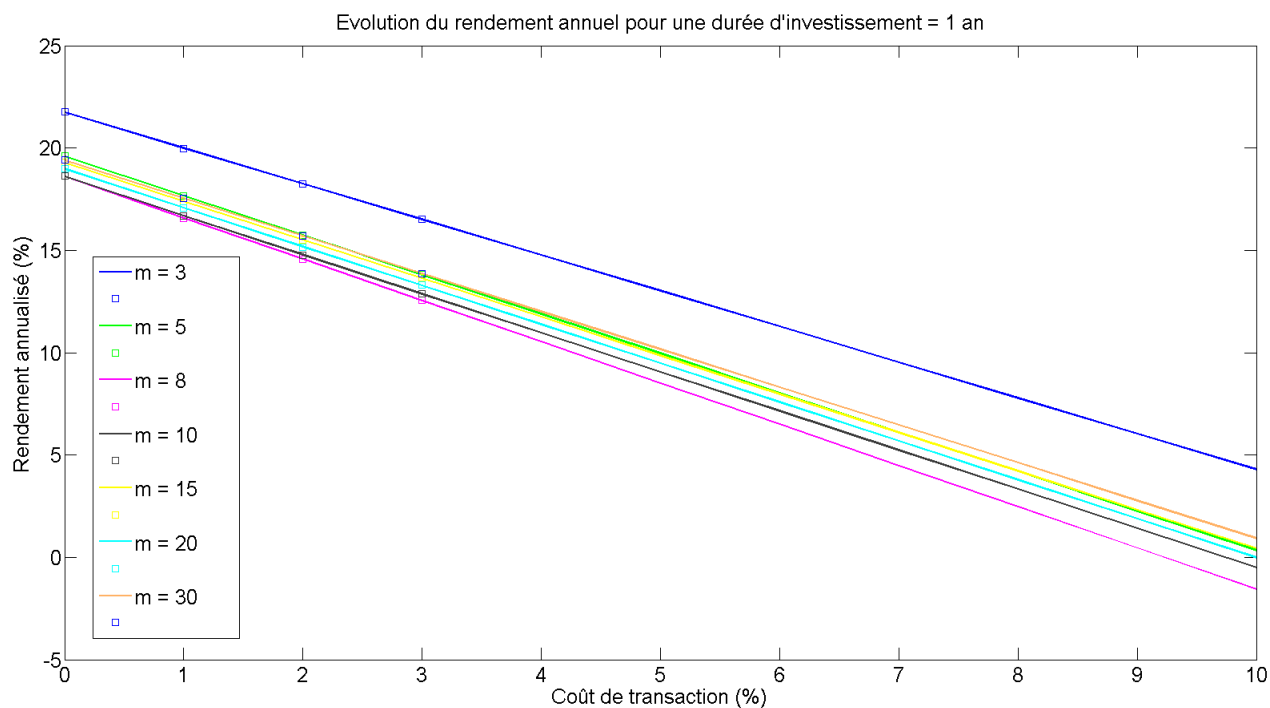


FIGURE 4.12 – Evolution du rendement annualisé en fonction des coûts de transaction pour différentes tailles de marché et une période d'investissement d'1 an

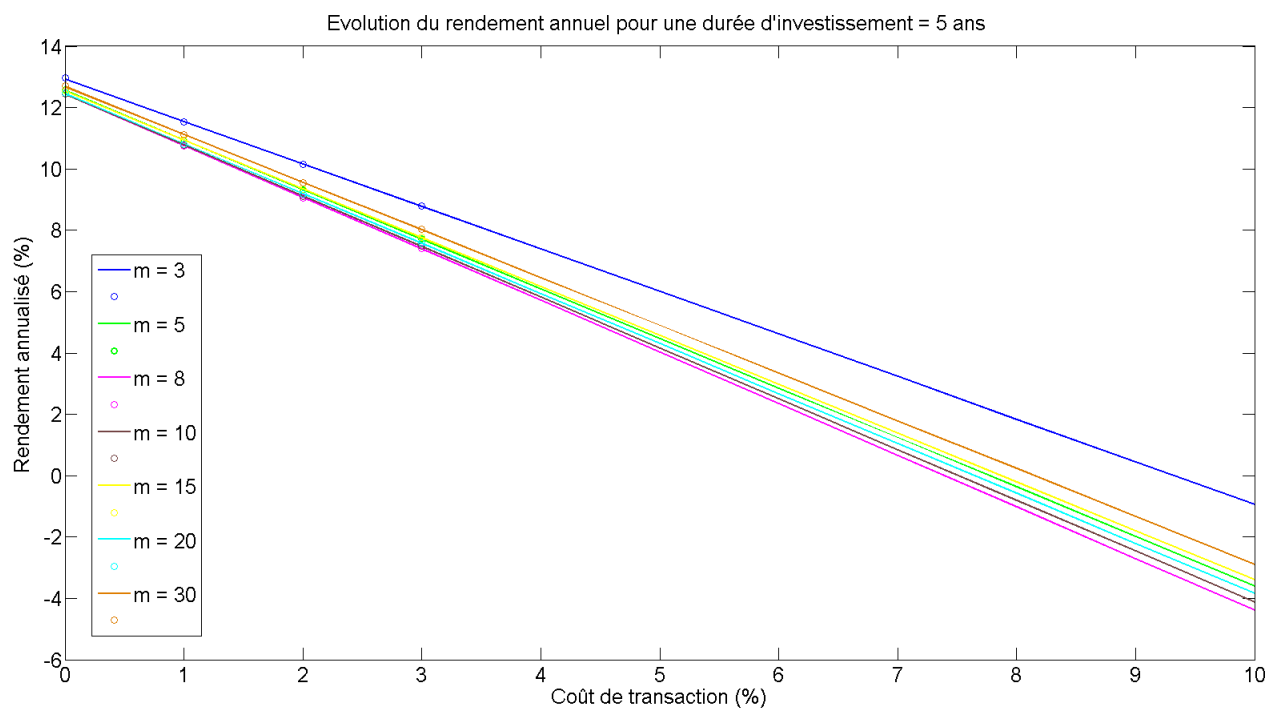


FIGURE 4.13 – Evolution du rendement annualisé en fonction des coûts de transaction pour différentes tailles de marché et une période d'investissement de 5 ans

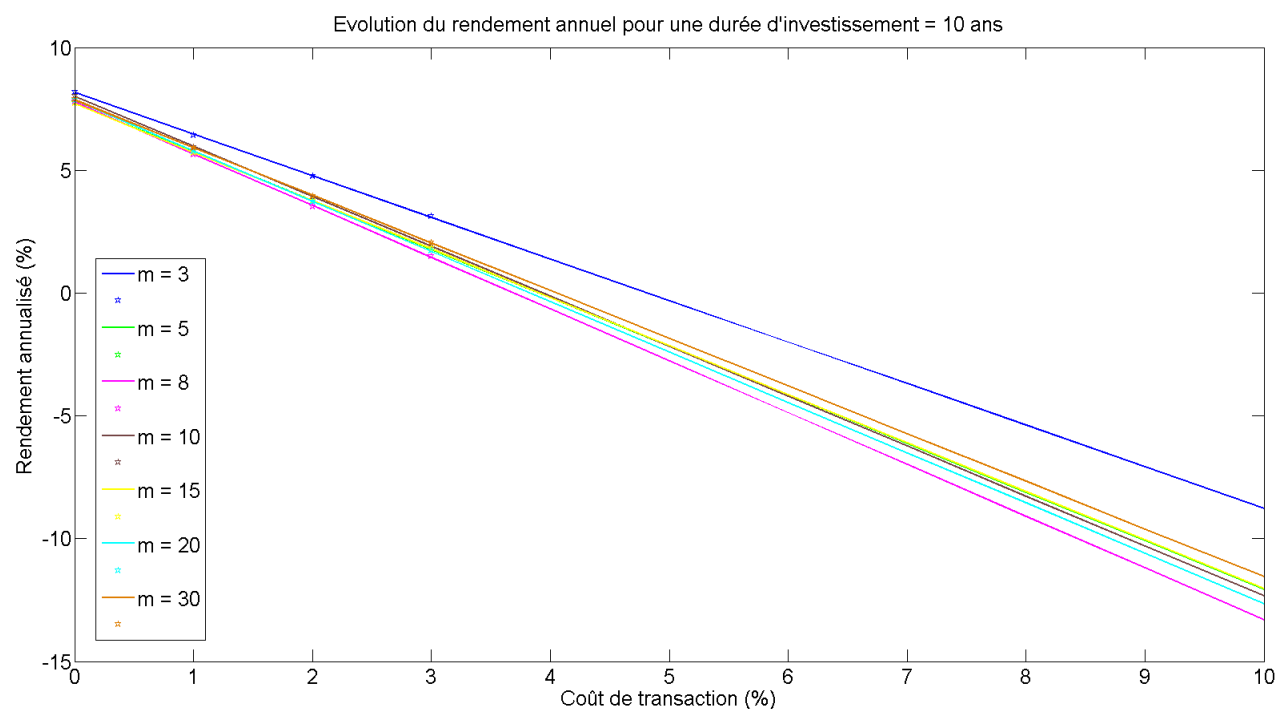


FIGURE 4.14 – Evolution du rendement annualisé en fonction des coûts de transaction pour différentes tailles de marché et une période d'investissement de 10 ans

Au vu des résultats nous pouvons raisonnablement penser que notre relation liant rendement annuel et CT est linéaire. Nous avons donc extrapolés ceux-ci pour de plus grandes valeurs de coûts de transaction (jusqu'à 10%). Nous avons aussi voulu représenter les sensibilités suivant la taille de marché et la période d'investissement.

-	1 an	5 ans	10 ans
m = 3	-1.75	-1.39	-1.69
m = 5	-1.92	-1.62	-1.97
m = 8	-2.01	-1.68	-2.1
m = 10	-1.91	-1.66	-2.03
m = 15	-1.88	-1.59	-1.97
m = 20	-1.9	-1.63	-2.05
m = 30	-1.85	-1.56	-1.94
Moyenne	-1.89	-1.59	-1.97

TABLEAU 4.6 – Sensibilité du rendement annuel du Portefeuille Universel aux coûts de transaction en fonction de la période d’investissement (variation du rendement annuel pour une variation de coût de transaction de 1%)

En regardant l’ensemble de nos résultats, on ne peut pas conclure d’une évolution explicite de la sensibilité avec la période d’investissement ou la taille du marché. Cependant, nous pouvons remarquer que cette sensibilité n’évolue que peu en allant d’un niveau minimal de 1.39 jusqu’à un maximum de 2.1. Ainsi, nos conclusions relatives à un marché de 2 titres s’accroissent et s’aggravent ici. En effet, sur base des Figures 3.21 à 3.27, nous avons déterminé que la sur-performance du Portefeuille Universel par rapports aux benchmarks n’augmentait pas par rapport à celle démontrée dans les cas d’un marché de 2 titres (sur-performance d’au maximum 1%). Dès lors, avec une sensibilité encore plus forte pour nos marchés de plus grande taille, le seuil critique de CT pour lequel le rendement du Portefeuille Universel devient inférieur à celui d’au moins 1 de nos benchmarks est encore plus faible. Nous concluons donc que notre Portefeuille Universel ne présente plus énormément d’intérêt dans sa version pure telle que développée par Cover, en particulier pour de grands marchés. De plus, le point faible déclaré du Portefeuille Universel, identifié dès le début de nos analyses, est son temps de calcul qui peut s’avérer fort critique dès l’augmentation consécutive de la taille du marché. Ce point est débattu dans le chapitre suivant.

Avant de conclure cette section, il nous a semblé également intéressant de réaliser quelques mesures de *turnover*⁷ relatif à notre Portefeuille Universel ainsi qu’à notre Portefeuille Optimal (les portefeuilles équipondéré et de Markovitz démontrant obligatoirement un turnover nul du fait qu’aucun rebalancement n’est réalisé). Pour ce faire, nous nous sommes basés sur une méthodologie de calcul présenté p.1929 de l’article de référence [26] et adapté suivant nos notations par :

$$\text{Turnover} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m |\vec{b}_{i+1}(j) - \vec{b}_{i+}(j)| \quad \text{avec} \quad \vec{b}_{i+} = \vec{b}_i \vec{r}_i^t \quad (4.1)$$

Dans cette expression, \vec{b}_{i+} représente ainsi l’évolution de la composition initiale du portefeuille (en proportion de la richesse totale) au jour i à cause de l’évolution des prix des actifs entre le jour i et le jour $i + 1$. On constate donc que, suivant cette expression, le turnover peut être interprété comme le pourcentage de la richesse totale journalière du portefeuille qui est engagée dans une transaction. Il semble donc logique de penser que le turnover soit étroitement corrélé avec la diminution de rendement induit par les coûts de transaction. En effet, les coûts de transaction pouvant s’exprimer comme un pourcentage (variable en fonction de la liquidité du titre, de la plate-forme d’échange,...) de la somme totale des transactions, il apparaît évident que, pour un même pourcentage de coût de transaction, la diminution de la richesse produite sera d’autant plus importante que le turnover est grand⁸. Les résultats sont présentés ci-dessous.

7. Le turnover, pouvant se traduire littéralement par taux de rotation, représente une mesure du volume de transaction effectué sur une période par un gestionnaire de portefeuille selon la stratégie choisie.

8. Notons que cette implication n’est vraie que si l’on suppose que la richesse générée en chaque journée i est identique entre les deux situations étudiées

-	Turnover P.U.	Turnover P.O.	$\frac{\text{Turnover P.U.}}{\text{Turnover P.O.}}$
m = 5	0.097	0.0083	11.6419
m = 15	0.1229	0.0115	10.7124
m = 30	0.1414	0.0137	10.3212

TABLEAU 4.8 – Evolution du turnover journalier du P.O. et du P.U. en fonction de la taille de marché (moyenne de 500 simulations sur une période considérée de 10 ans)

La première observation que nous pouvons faire est que le turnover du P.U. est assez élevé. En effet, celui-ci vaut en moyenne environ 0.1, ce qui équivaut à ce que, chaque jour, 10% de la valeur totale du portefeuille est engagée dans une transaction. A l'inverse, le turnover du Portefeuille Optimal se définit aux alentours de 1% soit 10 fois moins que le Portefeuille Universel en moyenne. Ensuite, nous pouvons remarquer que le turnover augmente avec la taille du marché aussi bien pour le P.U. que pour le Portefeuille Optimal. Cependant, nous pouvons également noter que cette croissance est plus forte pour le P.O. que pour le Portefeuille Universel, en témoigne la décroissance du rapport $\frac{\text{Turnover P.U.}}{\text{Turnover P.O.}}$ avec la taille du marché. Cette observation confirme ainsi nos résultats obtenus en Figure (4.8). En effet, si nous observons sur cette figure la décroissance du rapport de richesse P.U./P.O. pour un marché de 5 titres, nous voyons que celui passe d'une valeur de 0.7 à environ 0.45 pour des CT allant de 0 à 3%. Par contre, pour un marché de 30 titres, ce rapport évolue de 0.33 à 0.22. On observe donc que la sensibilité du rapport de richesse Universel/Optimal est plus faible pour des marchés de plus grande taille. Nous trouvons ici la corrélation attendue avec notre évolution du rapport $\frac{\text{Turnover P.U.}}{\text{Turnover P.O.}}$. En effet, plus ce rapport des turnover est faible, plus le rapport entre la richesse produite par le P.U. et celle générée par le P.O. va s'amenuiser faiblement lors d'une augmentation des CT (sensibilité plus faible) car ceux-ci sont exprimés comme un pourcentage du montant de la transaction totale journalière (dont le turnover est une image). Le petit exemple simplifié exprimé ci-dessous permettra au lecteur de se convaincre de cette relation.

Simulation pour Turnover P.U. = 0.1 et Turnover P.O. = 0.01 $\rightarrow \frac{\text{Turnover P.U.}}{\text{Turnover P.O.}} = 10$			
Valeur des CT	Richesse P.O.	Richesse P.U.	$\frac{\text{Richesse P.U.}}{\text{Richesse P.O.}}$
0%	100	100	1
1%	99.99	99.9	0.999
5%	99.95	99.5	0.995
10%	99.9	99	0.990
Simulation pour Turnover P.U. = 0.5 et Turnover P.O. = 0.01 $\rightarrow \frac{\text{Turnover P.U.}}{\text{Turnover P.O.}} = 50$			
Valeur des CT	Richesse P.O.	Richesse P.U.	$\frac{\text{Richesse P.U.}}{\text{Richesse P.O.}}$
0%	100	100	1
1%	99.99	99.5	0.995
5%	99.95	97.5	0.975
10%	99.9	5	0.95

TABLEAU 4.10 – Exemple de corrélation entre le rapport de turnover P.U./P.O. et la sensibilité aux CT du rapport de richesse P.U./P.O.

Chapitre 5

Considérations sur la mise en pratique de la méthode

Par les chapitres précédents, nous avons pu démontrer et débattre des performances présentées par le Portefeuille Universel. Dans ce chapitre, nous allons développer la faisabilité de l'utilisation d'une telle technique de construction de portefeuille. En effet, tout au long du rapport, nous avons insisté sur certaines restrictions que nous avons jugé nécessaires de prendre afin de rendre nos temps de simulation acceptables. Ainsi, la question qui se pose est de savoir si, considérant un rebalancement dynamique journalier, le temps de calcul nécessaire à la détermination de ce nouvel indice est-il réaliste? Autrement dit, sachant que nous disposons de 24h pour déterminer ce nouvel indice, est-il possible par la méthode de calcul du Portefeuille Universel d'obtenir effectivement dans les délais ce nouvel indice. C'est à cette question que le chapitre tentera de répondre. Plus précisément, nous introduirons également l'alternative que présente le Portefeuille Universel modifié grâce à ses temps de calcul plus réduits. L'ensemble des simulations réalisées dans ce chapitre ont été faites sur la machine *Brutus01* du parc informatique de l'UCL Mons. Les caractéristiques techniques majeures de la machine sont disponibles en Annexe B.

5.1 Temps de calcul relatif au Portefeuille Universel

Nous savons grâce à la formule fondamentale de calcul du P.U. que son temps de calcul est directement fonction du nombre d'éléments intervenant dans la formule d'intégration (1.8). Ce nombre d'éléments est en fait le nombre de portefeuilles constamment rebalancés dont nous allons étudier les rendements sur la période d'analyse. Cependant, à une précision constante, le nombre de combinaisons définies, c'est-à-dire le nombre de portefeuilles constamment rebalancés que nous choisissons d'inclure dans notre calcul augmente à un rythme exponentiel avec m . Pour preuve, si une précision de 5% est choisie (donc que toutes les combinaisons de titres sont considérées à 5% près), nous passons, en évoluant d'un marché de $m = 2$ titres à un marché de $m = 5$ titres, d'un nombre de portefeuilles constamment rebalancés de 21 à 10626. Ainsi, nous allons tâcher de déterminer l'évolution du temps de calcul en fonction de la taille du marché et de la précision que nous nous imposons dans la définition du nombre de portefeuilles constamment rebalancés.

Dans un premier temps, nous nous proposons donc de présenter l'évolution du temps de calcul pour un marché de 2 titres en variant la précision de définition des portefeuilles constamment rebalancés.

1 an		10 ans		30 ans	
Précision (%)	Temps de calcul (s)	Précision (%)	Temps de calcul (s)	Précision (%)	Temps de calcul(s)
50	0.00003	50	0.00003	50	0.001
10	0.00003	10	0.00008	10	0.003
5	0.00003	5	0.00009	5	0.002
1	0.0001	1	0.001	1	0.006
0.1	0.003	0.1	0.02	0.1	0.06
0.01	0.02	0.01	0.2	0.01	0.6
0.001	0.2	0.001	2	0.001	7
0.0001	2	0.0001	150	0.0001	500

TABLEAU 5.2 – Résultats de temps de simulation pour un marché de 2 titres

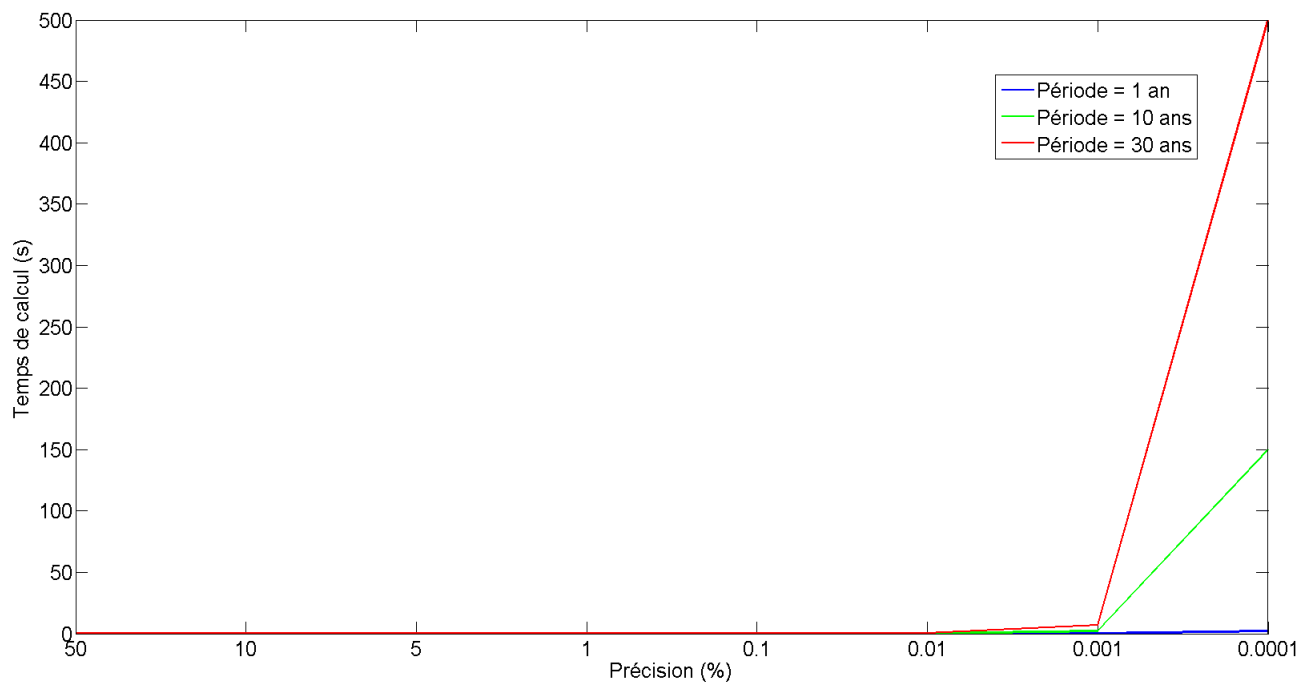


FIGURE 5.1 – Evolution du temps de calcul pour un marché de 2 titres en fonction de la précision de définition des portefeuilles constamment rebalancés

La première chose que nous pouvons constater est que le temps de calcul semble évoluer de manière linéaire avec la précision de définition à l'exception peut-être du passage de 0.001 à 0.0001 %. Ceci est logique dans le sens où en augmentant la précision d'une décimale, le nombre de portefeuilles constamment rebalancés définis augmentent lui aussi de la même manière. En effet, en passant d'une précision de 1 à 0.1%, l'on passe d'un nombre de portefeuilles définis de 101 à 1001, soit le même rapport. Faisons déjà la remarque que si cela est vrai pour un marché de 2 titres, cela ne l'est pas pour des marchés de taille supérieure où l'augmentation du nombre de portefeuilles aura plutôt tendance à être de nature exponentielle que linéaire. Ensuite, la seconde remarque que nous pouvons formuler est que l'augmentation de la période de calcul augmente de la même manière le temps de calcul. Ainsi, en passant d'1 an à 10 ans, le temps de calcul est approximativement multiplié par 10, et en passant de 10 ans à 30 ans, celui-ci est multiplié par 3.

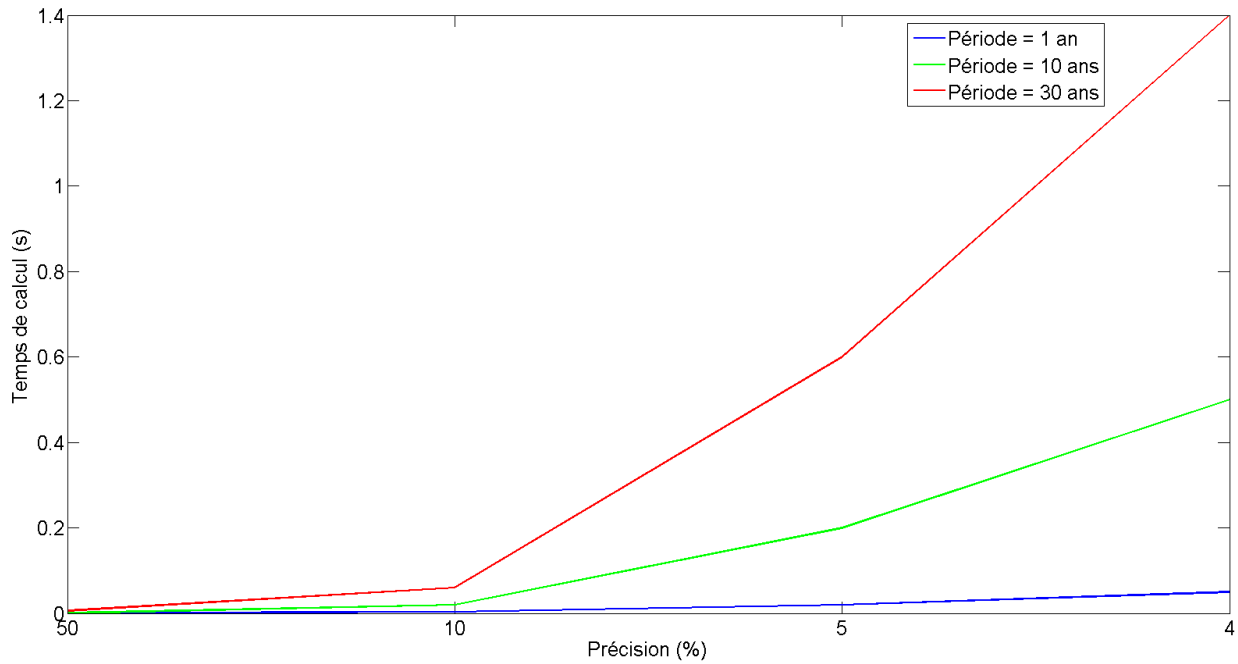


FIGURE 5.2 – Evolution du temps de calcul pour un marché de 5 titres en fonction de la précision de définition des portefeuilles constamment rebalancés

A l'aide de ces nouvelles illustrations pour un marché de 5 titres, nous pouvons confirmer nos constatations précédentes. Ainsi, nous constatons désormais que l'évolution du temps de calcul ne suit plus vraiment une loi linéaire en fonction de la précision de définition mais a plutôt une allure exponentielle. Ceci nous laisse donc présager que l'évolution du temps de calcul avec la précision de définition suit typiquement une loi exponentielle que l'on suppose être d'autant plus importante avec l'augmentation de la taille du marché m . Pour confirmer cette intuition, nous allons désormais montrer l'évolution du temps de calcul pour une précision de définition fixée lorsque la taille du marché augmente.

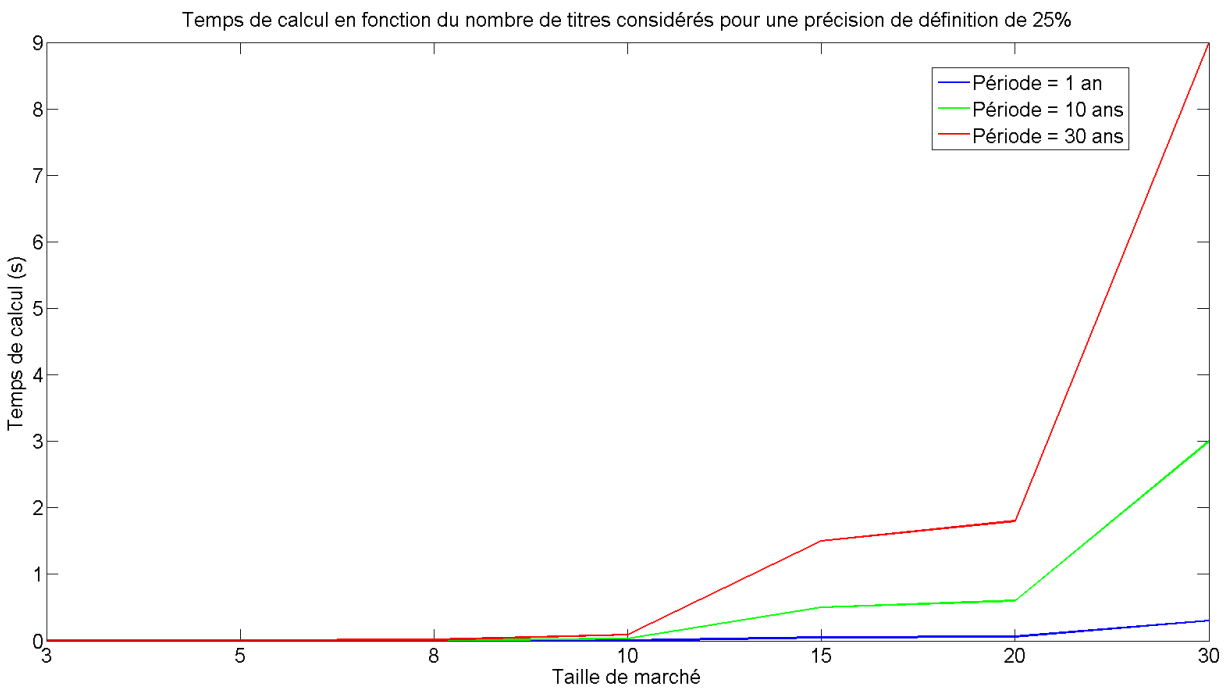


FIGURE 5.3 – Evolution du temps de calcul en fonction de la taille du marché pour une précision de définition de 25%

Sur base de cette figure, on a déjà l'intuition que l'évolution du temps de calcul avec le marché pour une précision fixée dépasse largement le cadre linéaire. Cependant, afin de renforcer cette conclusion nous allons maintenant réaliser les mêmes simulations avec un précision encore plus importante qui devrait rapidement devenir critique pour les plus grand marchés.

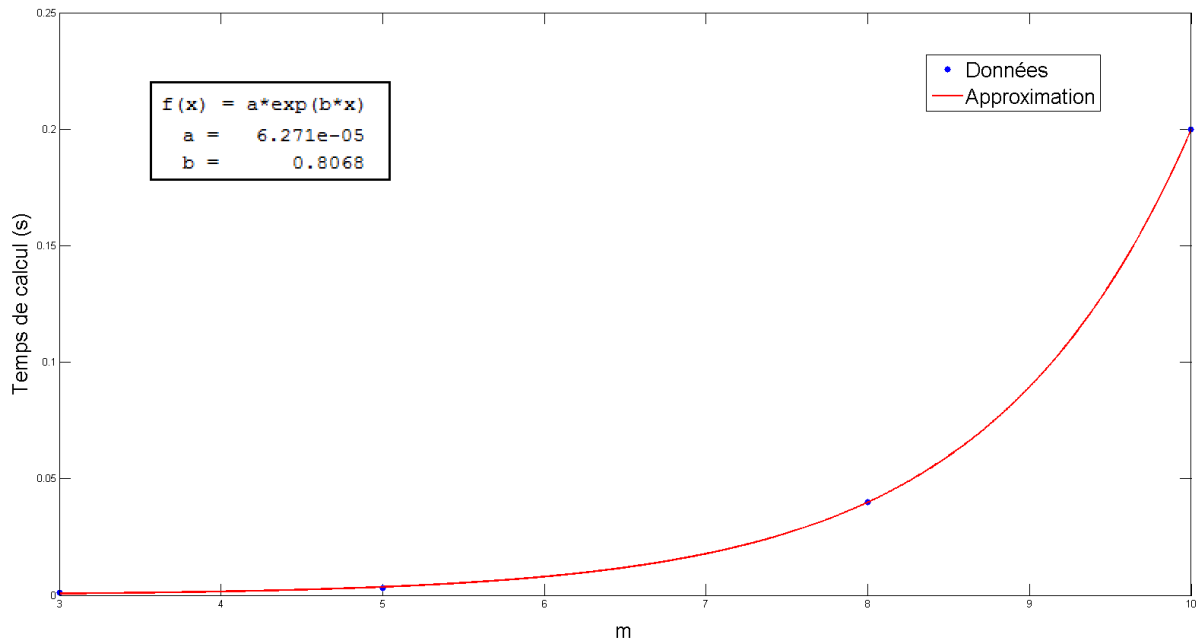


FIGURE 5.4 – Approximation exponentielle du temps de simulation en fonction de la taille du marché pour une précision de définition de 10% et une période d’investissement d’1 an (les paramètres de l’approximation sont donnés sur le graphique)

A une précision de définition de l’ordre de 10 %, il nous est avéré impossible de réaliser nos simulations avec une taille de marché supérieure à $m = 10$. En réalisant une interpolation exponentielle de nos valeurs numériques de simulation, on remarque en Figure 5.4 que notre loi d’évolution du temps de calcul avec la taille de marché colle parfaitement à une fonction exponentielle.

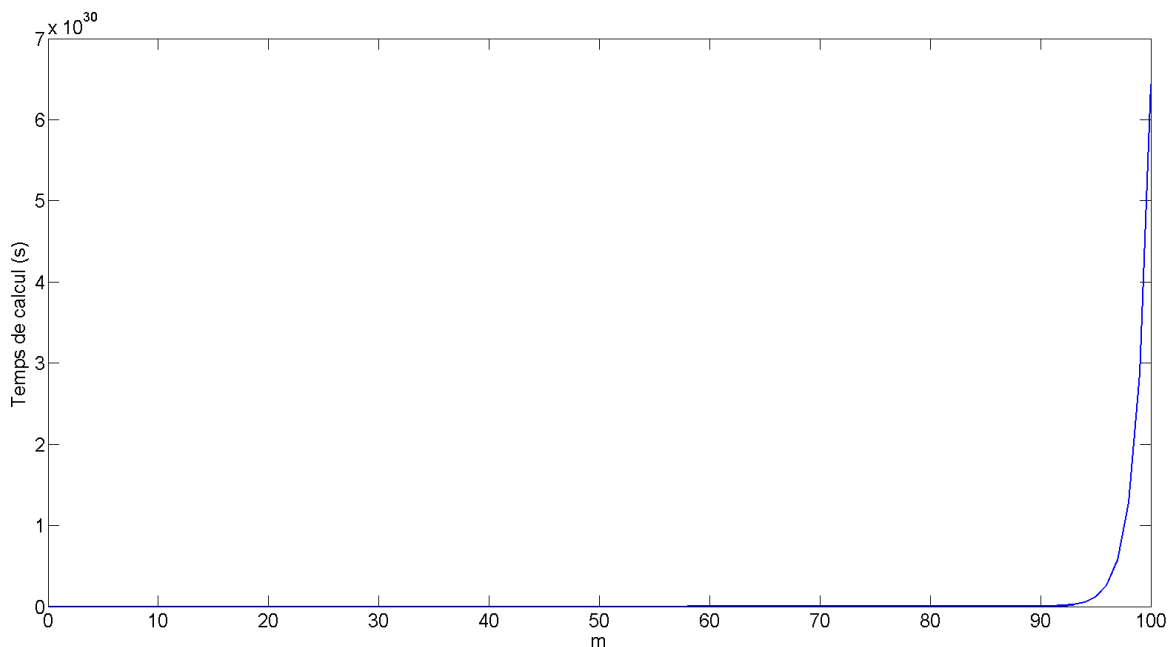


FIGURE 5.5 – Extrapolation du temps de simulation en fonction de la taille du marché pour une précision de définition de 10% et une période d’investissement d’1 an

En extrapolant la loi exponentielle déterminée en Figure 5.4 à des marchés de plus grandes tailles, nous constatons de manière claire que l'obtention d'un résultat endéans les 24h n'est plus possible dès un marché de taille supérieure à 26 titres. A titre d'exemple, on remarque qu'il faudrait plus de 100 000 années de simulation pour obtenir un résultat sur base d'un marché de 50 titres.

m	10	26	50	100	500
Temps de calcul	0.2 s	22 heures	10^8 jours	10^{26} jours	10^{175} jours

TABLEAU 5.4 – Valeurs particulières d'extrapolation du temps de calcul pour une taille de marché croissante avec une définition des titres de 10%

En conclusion à cette section, nous pouvons donc dire que, en plus de proposer des rendements peu intéressants en comparaison des benchmarks classiques, l'obtention de résultat sur base d'un rebalancement journalier est peu envisageable en pratique pour des marchés de tailles supérieures à une trentaine de titres. En effet, nous pouvons juger que définir l'ensemble des portefeuilles constamment rebalancés à une précision de 10% semble être un minimum. Or, pour cette précision, on ne peut définitivement pas s'employer à utiliser le Portefeuille Universel pour des marchés supérieurs à 30 titres. Dès lors, même si nous pourrions considérer que des résultats avec des précisions de l'ordre de 20% peuvent être satisfaisant, il est clair qu'en prenant des tailles de marché plus large de l'ordre de 50 titres, l'obligation de travailler avec une précision de définition proche de 50% va indubitablement décroître fortement nos performances.

Ainsi, nous pouvons retenir deux conclusions essentielles à ceci. Premièrement, dû aux temps de simulation important, les conclusions formulées dans les chapitres précédents sur base de nos 2 critères étudiés ont pu être biaisés pour les tailles de marchés importantes (supérieure à 10 titres). Ensuite, et c'est probablement le fait le plus crucial, l'utilisation du Portefeuille Universel tel que décrit par Cover ne peut être utilisé en pratique que pour des marché d'une trentaine de titres au plus.

5.2 Temps de calcul relatif au Portefeuille Universel modifié

Nous allons maintenant tâcher d'estimer à quel point l'utilisation du Portefeuille Universel modifié par rapport à sa version classique peut améliorer le temps de simulation. Ci-dessous sont présentés les équivalents des Figures 5.3 et 5.4 relatives au P.U. modifié. La différence première est que le temps de simulation est constant peu importe la période puisque par définition le calcul du Portefeuille Universel modifié ne se fait que sur la journée précédente.

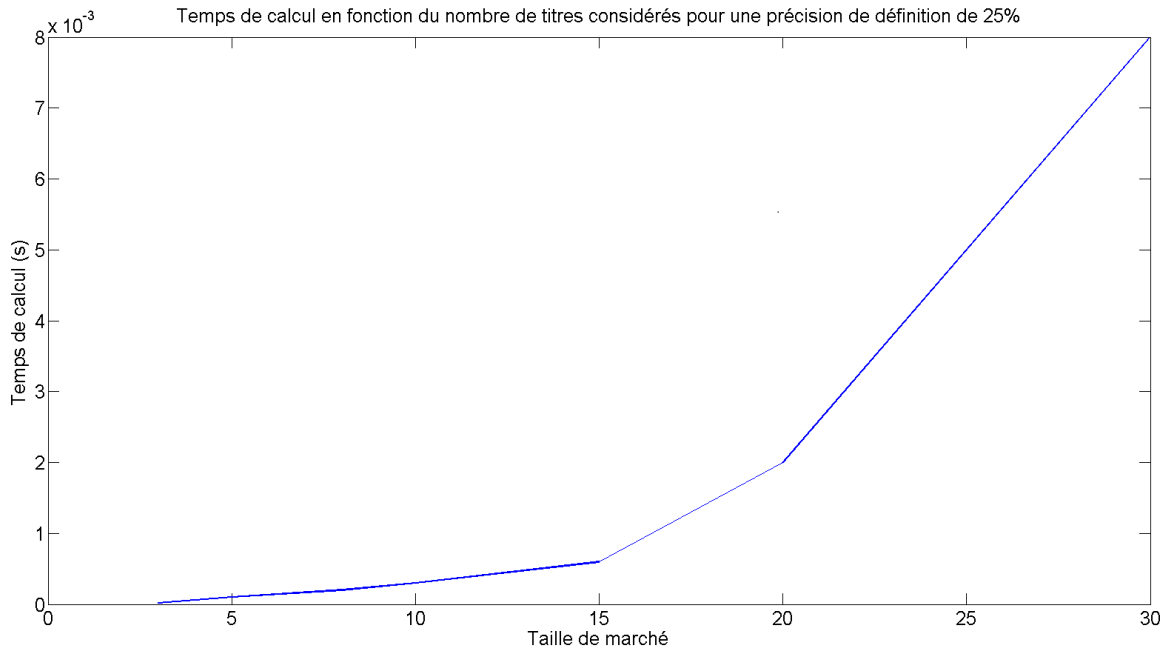


FIGURE 5.6 – Evolution du temps de calcul en fonction de la taille du marché pour une précision de définition de 25%

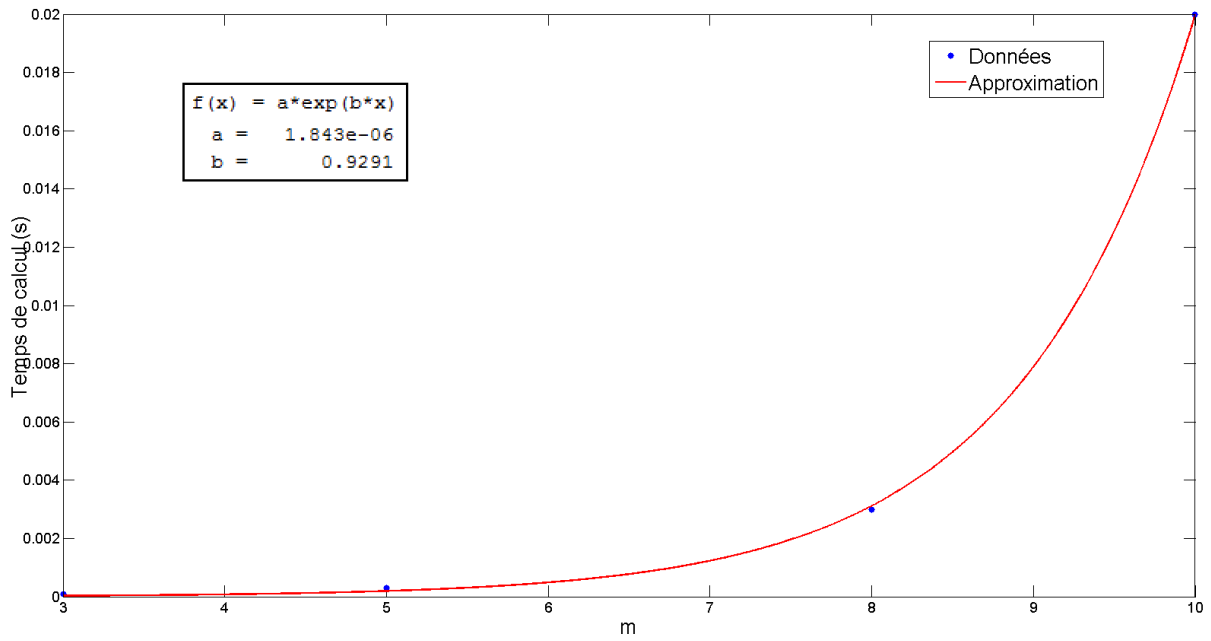


FIGURE 5.7 – Approximation exponentielle (P.U. modifié) du temps de simulation en fonction de la taille du marché pour une précision de définition de 10% (les paramètres de l'approximation sont donnés sur le graphique)

m	10	26	50	100	500
Temps de calcul	0.02 s	15 heures	10^9 jours	10^{29} jours	10^{191} jours

TABLEAU 5.6 – Valeurs particulières d’extrapolation du temps de calcul pour une taille de marché croissante avec une définition des titres de 10% (P.U. modifié)

En conclusion, si nous voyons que pour des tailles de marchés réduites, le Portefeuille Universel modifié apporte un avantage de rapidité par rapport à sa version classique, on voit qu’avec des tailles de marchés plus importantes, cette avantage ne se fait plus sentir. En effet, sur base du tableau 5.6 et par comparaison avec le tableau 5.4, nous observons que les ordres de grandeur des temps de simulation pour de grands marchés restent similaires à quelques puissances près. A performance égale, le P.U. modifié n’apporte donc un avantage que si la taille de marché considérée reste relativement modeste. Ceci est aisément compréhensible. En effet, la différence fondamentale entre le Portefeuille Universel et sa version modifiée est que le calcul du premier se fait de manière cumulée sur une période de temps à choisir tandis que le second ne base son calcul que sur une seule journée. Cependant, l’intégration présentée dans les formules (1.8) ou (3.8) reste la même. Dès lors, puisqu’on sait que c’est l’explosion du nombre de portefeuilles constamment rebalancés qui induit l’explosion du temps de simulation, et que cette explosion est commune au P.U. classique et modifié, on comprend que le petit avantage multiplicatif (une constante⁹) que possède la version modifiée ne pèse rien en comparaison du temps énorme de calcul à grande taille de marché.

9. Par exemple, si l’Universel classique considère une année comme période de calcul, l’avantage de la version modifiée est une constante = 250, valeur qui ne change pas peu importe la taille du marché considérée.

Conclusion

Dans le cadre de ce travail, nous avons pu exposer de manière concise la théorie de Thomas Cover relative au Portefeuille Universel (P.U.). Ce portefeuille a la prétention de générer une richesse approchant celle produite par le Portefeuille Optimal (P.O.) qui, par définition, est le meilleur portefeuille constamment rebalancé pour un marché de m titres et une période d'investissement de n journées. Nous avons constaté que les développements de Cover repose sur une hypothèse d'activité des titres qui est rarement rencontrée en pratique, à plus forte raison pour des marchés de taille importante et de petites périodes d'investissement. Dès lors, nous avons constaté que le rapport théorique entre la richesse produite par le P.U. et celle générée par le P.O. (qui se base sur cette hypothèse d'activité) ne procure aucune information pertinente. Malgré cela, la théorie de Cover nous a également appris que s'il existe au minimum deux titres actifs dans le marché, alors, le rendement proposé par le Portefeuille Universel surpasse celui de n'importe quel titre seul sur la période. Nous avons prouvé sur base de multiples exemples que cette proposition n'est pas vérifiée en pratique et que la condition que deux titres soient actifs n'est que nécessaire mais non suffisante au respect de cette dernière. Plus particulièrement, la vérification de la proposition semble nécessiter une très grande période d'investissement (relation asymptotique quand $n \rightarrow \infty$).

Nous avons ensuite estimé les performances du Portefeuille Universel en comparaison du Portefeuille Optimal mais également de portefeuilles benchmarks comme le portefeuille équipondéré et le portefeuille de Markowitz. Dans une première section théorique, nous avons étudié comment se modifie cette performance selon la volatilité et la corrélation pour un marché de 2 titres à l'aide de la théorie des mouvements browniens. Nous avons conclu que la richesse du P.U. s'approche d'autant plus de celle du P.O. au plus les titres sont corrélés et peu volatils. De plus, nous avons observé que le P.U. surpasse la plupart du temps les benchmarks classiques mais que cette sur-performance légère ne peut pas être reliée à des valeurs précises de volatilité ou de corrélation. Nous avons ensuite entrepris l'étude des performances de manière empirique sur base de plusieurs dizaines de titres boursiers issus du NYSE. Nous avons conclu que le Portefeuille Universel approche très bien la richesse générée par le Portefeuille Optimal pour de petits marchés et de petites périodes d'investissement (rapport d'environ 80-90%). Cependant, le rapport entre la richesse produite par le P.U. et le P.O. chute rapidement avec la taille du marché et la période d'investissement. Par la comparaison avec nos benchmarks, nous avons examiné que le P.U. surpasse constamment les benchmarks de référence mais que cette domination est très légère (au plus 1% de rendement annuel). De plus, cette sur-performance augmente très faiblement avec la période d'investissement mais reste stable suivant la taille du marché.

Par la suite, nous avons placé notre P.U. dans des situations plus réalistes en introduisant les coûts de transaction. Nous avons identifié que le rapport de richesse P.U./P.O. est très peu affecté par les coûts de transaction. Il a également été déterminé que la sensibilité du rendement du Portefeuille Universel aux CT s'établissait entre -1 et -2 (variation du rendement annuel pour augmentation de CT de 1%). Finalement, nous avons également estimé les temps de calcul requis par le Portefeuille Universel pour calculer l'indice journalier à rebalancer. Nous avons conclu que l'utilisation de la méthodologie est impossible dès que la taille du marché est de l'ordre d'une trentaine de titres ou plus.

En conclusion, le Portefeuille Universel dans sa version pure développée par Cover, sous couverts de situations réalistes où les coûts de transaction sont non nuls, présente peu d'intérêt. En effet, nous avons déterminé que ses performances ne sont en pratique pas notablement supérieures à celle du portefeuille équi pondéré. Notons que cette réalité peut être en partie causée par la réduction de la matrice des combinaisons des portefeuilles constamment rebalancés que nous nous sommes imposée pour des questions de temps de simulation acceptable. Une perspective intéressante à ce travail pourrait, dès lors, consister à établir les performances du P.U. en considérant beaucoup plus de portefeuilles constamment rebalancés. En effet, s'il est démontré que les performances du P.U. dans ce cas deviennent beaucoup plus intéressantes, ceci remettrait alors en cause toutes nos conclusions. De plus, même si la puissance des processeurs informatiques actuels limiterait alors l'utilisation du P.U. à quelques titres, l'évolution rapide des technologies pourrait laisser espérer que l'application de la méthodologie devienne possible dans les années futures même pour de grands marchés.

Finalement, d'autres perspectives et améliorations prometteuses peuvent être mise en évidence. Nous pouvons par exemple penser à pondérer plus fortement les meilleurs portefeuilles du marché afin de modifier plus largement l'indice journalier de rebalancement. L'idée du Portefeuille Universel modifié que nous avons introduit dans ce travail semble également séduisante. Comme nous avons montré que dans la cas d'un marché de 2 titres, les performances de cette version modifiée était similaire à celle de la version classique, nous pourrions penser à réaliser de nouvelles études pour de plus grands marchés. Plus particulièrement, une méthodologie basée sur l'EWMA (Exponentially Weighted Moving Average) pourrait être envisagée afin de considérer malgré tout une longue période de rendement mais en donnant plus de poids et d'importance aux événements récents. On réaliserait ainsi en quelque sorte un compromis entre Portefeuille Universel classique et Portefeuille Universel modifié.

Bibliographie

- [1] P. Clauss. *Gestion de Portefeuille, une approche quantitative*. Editions Dunod, 2011.
- [2] Biographie d'Harry Markowitz. [http : //www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic_sciences/laureates/1990/markowitz - bio.htm](http://www.nobelprize.org/nobel_prizes/economic_sciences/laureates/1990/markowitz-bio.htm).
- [3] H. Markowitz. Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, 7(1) :77–91, March 1952.
- [4] F. J. Fabozzi and Markowitz H. F. *The Theory and Practice of Investment Management : Asset Allocation, Valuation, Portfolio Construction, and Strategies, 2nd Edition*.
- [5] Pascal Van Wynedaele. *Evaluation des actifs financiers*, chapter Part 1. Louvain School of Management, 2016.
- [6] B. Jacquillat, B. Solnik, and C. Pérignon. *Marchés financiers - Gestion de portefeuilles et des risques*. Editions Dunod, 2014.
- [7] Rudy De Wynne. *Marchés financiers et comportement des investisseurs*, chapter 2. Louvain School of Management, 2016.
- [8] P. Kolm, R. Tütüncü, and F. Fabozzi. 60 years of portfolio optimization : Practical challenges and current. *European Journal of Operational Research*, 234 :356–371, 2014.
- [9] E. F. Fama and K. R. French. Common risk factors in the returns on stock and bonds. *Journal of Financial Economics*, 33(1) :3–56, February 1993.
- [10] Biographie de Thomas Cover. [http : //ethw.org/Thomas_Cover](http://ethw.org/Thomas_Cover).
- [11] T.M Cover. Universal portfolios. *Mathematical Finance*, 1(1) :1–29, 1991.
- [12] T. Cover and J. Thomas. *Elements of Information Theory*. Wiley, 1991.
- [13] T.M Cover and E. Ordentlich. Universal portfolios with side information. *IEEE Transactions on Information Theory*, 42(2) :348–363, Mars 1996.
- [14] D.P Helmbold, R.B Schapire, Y. Singer, and M.K Warmuth. On-line portfolio selection using multiplicative updates. *Mathematical Finance*, 8(4) :325–347, October 2012.
- [15] A. Blum and A. Kalai. Universal portfolios with and without transaction costs. *Machine Learning*, 35 :193–205, 1999.
- [16] A.A Gaivorinsky and F. Stella. Stochastic nonstationary optimization for finding universal portfolios. *Annals of Operations Research*, 100 :165–188, 2000.
- [17] A. Kalai and S. Vempala. Efficient algorithms for universal portfolios. *Journal of Machine Learning Research*, 3 :423–440, November 2002.
- [18] A. Borodin, R. El-Yaniv, and V. Gogan. Can we learn to beat the best stock. *Journal of Artificial Intelligence Research*, 21 :579–594, April 2004.
- [19] A. Agarwal and E. Hazan. New algorithms for repeated play and universal portfolio management. Number 23. Electronic Colloquium on Computational Complexity, 2006.
- [20] A. Kalai, E. Hazan, S. Kale, and A. Agarwal. Logarithmic regret algorithms for online convex optimization. *manuscript*, 2006.
- [21] S.S Kovat and A.C Singer. Universal semiconstant rebalanced portfolio. *Mathematical Finance*, 21(2) :293–311, April 2011.
- [22] O. Ledoit and M. Wolf. Honey, I shrunk the sample covariance matrix. *The Journal of Portfolio Management*, 30(4) :110–119, 2004.
- [23] Site officiel du groupe bloomberg L.P. [https : //www.bloomberg.com](https://www.bloomberg.com).
- [24] E. F. Fama. Efficient capital markets : A review of theory and empirical work. *Journal of Finance*, 25(1) :383–417, May 1970.

- [25] E. F. Fama. Efficient capital markets : Second edition. *Journal of Finance*, 46(5) :1575–1618, 1991.
- [26] V. DeMiguel, L. Garlappi, and R. Uppal. Optimal versus naive diversification : How inefficient is the 1/N portfolio strategy? *The Review of Financial Studies*, 22(5) :1915–1953, 2009.

Annexe A

Liste des titres NYSE

Numéro	Ticker	Nom	Activités
1	A	Agilent	Electronique (Instruments de mesure)
2	AAL	American Airlines	Industrie aérienne
3	AIG	American International Group	Assurances
4	APA	Apache Corporation	Industries pétrolière
5	APD	Air Product & Chemicals	Gaz industriels
6	BABA	Alibaba	Commerce en ligne
7	BAC	Bank of America	Finance
8	CAT	Caterpillar	Indutrie Mécanique
9	CL	Colgate Palmolive	Produits de consommation
10	COO	The Cooper Companies	Matériel médical
11	CPB	Campbell Soup	Agroalimentaire
12	CTL	Century Link	Télécommunication
13	DIS	The Walt Disney Company	Divertissement
14	DG	Dollar General	Grande distribution
15	EDU	New Oriental Education	Education privée
16	EFX	Equifax	Crédit
17	EGN	Energen	Industrie pétrolière
18	EVHC	Envision Healthcare	Soins de santé
19	F	Ford	Industrie automobile
20	FDX	Fedex	Transport de marchandises
21	FL	Foot Locker	Industrie vestimentaire
22	GE	General Electric	Conglomérat
23	GM	General Motors	Industrie automobile
24	GS	Goldman Sachs	Finance
25	HPE	Hewlett Packard Enterprise	Informatique / Logiciel
26	IBM	Intelligence Business Machine	Informatique
27	JEC	Jacobs Engineering Group	Ingénierie de construction
28	K	Kellogg's	Agroalimentaire
29	KMI	Kinder Morgan	Industrie pétrolière
30	KO	Coca-Cola	Boissons
31	KSU	Kansas City Southern Inc.	Exploitation ferroviaire
32	MA	Mastercard	Services financiers
33	MCD	McDonald's	Restauration rapide
34	MMM	3M Company	Conglomérat industriel
35	MO	Altria Group	Produits de consommation
36	MON	Monsanto	Agro-industrie

Numéro	Ticker	Nom	Activités
37	MSI	Motorola	Téléphonie et électronique
38	NKE	Nike	Equipement sportif
39	NRG	NRG Energy	Energie
40	ORCL	Oracle	Logiciels
41	PEP	PepsiCo	Agroalimentaire
42	PFE	Pfizer	Industrie pharmaceutique
43	PG	Procter & Gamble	Produits de consommation
44	PLD	Prologis	Immobilier
45	PXD	Pioneer Natural Resources	Electronique (industrie sonore)
46	RHT	Red hat	Logiciel
47	SCG	Scana Corp	Energie
48	SHOP	Shopify	Commerce en ligne
49	SWK	Stanley Black & Decker	Outillage
50	SYK	Stryker Corp	Equipement médical
51	TIF	Tiffany & Co	Joaillerie
52	TWTR	Twitter	Logiciel
53	TWX	Time Warner Inc.	Média
54	TXT	Textron	Industrie aéronautique et militaire
55	VZ	Verizon Communicationsl	Télécommunications
56	W	Wayfair Inc.	Commerce en ligne
57	WFC	Wells Fargo	Finance
58	WMT	Wal-Mart	Grande distribution
59	XOM	Exxon Mobile	Industrie pétrolière
60	YUM	Yum! Brands	Restauration rapide

Annexe B

Caractéristiques PC Brutus01

Ci-dessous sont décrites les caractéristiques techniques du PC Brutus01.

Item	Value
OS Name	Microsoft Windows 10 Enterprise
Version	10.0.14393 Build 14393
Other OS Description	Not Available
OS Manufacturer	Microsoft Corporation
System Name	BRUTUS01
System Manufacturer	Dell Inc.
System Model	OptiPlex 7040
System Type	x64-based PC
System SKU	06B9
Processor	Intel(R) Core(TM) i7-6700T CPU @ 2.80GHz, 2808 Mhz, 4 Core(s)
BIOS Version/Date	Dell Inc. 1.4.5, 27-06-16
SMBIOS Version	2.8
Embedded Controller Version	255.255
BIOS Mode	UEFI
BaseBoard Manufacturer	Dell Inc.
BaseBoard Model	Not Available
BaseBoard Name	Base Board
Platform Role	Desktop
Secure Boot State	On
PCR7 Configuration	Elevation Required to View
Windows Directory	C:\WINDOWS
System Directory	C:\WINDOWS\system32
Boot Device	\Device\HarddiskVolume2
Locale	Belgium
Hardware Abstraction Layer	Version = "10.0.14393.1378"
User Name	Not Available
Time Zone	Romance Daylight Time
Installed Physical Memory (RAM)	32,0 GB
Total Physical Memory	31,9 GB
Available Physical Memory	27,0 GB
Total Virtual Memory	36,6 GB
Available Virtual Memory	31,8 GB