

École polytechnique de Louvain

Optimisation d'un plancher composé de modules réciproques

Auteur : **Marie VANDAMME**

Promoteur : **Pierre LATTEUR**

Lecteurs : **Jonas FERON, Julien GENO, João PACHECO DE ALMEIDA**

Année académique 2019–2020

Master [120] : ingénieur civil des constructions



OPTIMISATION D'UN PLANCHER COMPOSÉ DE MODULES RÉCIPROQUES

*« I have tried to get close to the frontier
between architecture and sculpture and
to understand architecture as an art »*

Santiago Calatrava



REMERCIEMENTS

Remerciements

Quand je prononce les mots « structure réciproque » auprès de mon entourage, une grande majorité des personnes reste intriguée et se demande de quoi je parle. Il y a un peu plus d'un an à présent, j'entendais pour la première fois ces 2 mots et j'ai moi-même eu ce regard interrogateur. C'est ce qui m'a attiré en premier lieu : j'étais face à un sujet dont je ne connaissais rien et dont j'avais tout à apprendre.

Lors d'une discussion plus détaillée avec Pierre Latteur, je me suis rendue compte de l'impact innovant que pouvait susciter ce genre de structures, tant du point de vue du matériau utilisé que de son attrait architectural. Également, la puissance de la théorie des indicateurs morphologiques utilisée dans l'optimisation des structures implique une certaine ingéniosité intellectuelle et une approche du travail différentes de ce que j'ai pu connaître auparavant.

Après quelques mois de travail, je me rends compte de la complexité de ces structures et de tout ce qu'elles ont encore à offrir au monde de la recherche. Comprendre leur fonctionnement et essayer de l'optimiser aura éveillé en moi un intérêt de plus en plus poussé pour le sujet : au plus j'en apprenais, au plus j'avais envie d'en apprendre.

Pour cela, je tiens à remercier tout particulièrement Pierre Latteur et Julien Geno grâce à qui j'ai pu m'épanouir pleinement dans ce projet. Je les remercie pour leur écoute attentive et le temps qu'ils m'ont consacré tout au long du quadrimestre ainsi que pour les nombreux conseils qui m'ont aidé à avancer dans ce travail de la meilleure des manières. Leur soutien, leur patience et leur confiance m'ont permis de progresser et d'atteindre des objectifs toujours plus élevés. Le dynamisme et la bonne humeur dont ils ont fait preuve à mon égard ont été une de mes plus grandes sources de motivation. Grâce à eux, j'ai appris à aimer le monde de la recherche et toutes les subtilités qui s'y cachent. Ce fût un réel plaisir de travailler à leurs côtés !

Je souhaite également remercier Jonas Feron pour son aide avisée avec le programme SCIA grâce à laquelle j'ai pu concevoir de manière efficace les modèles de calcul dont j'avais besoin. Sa disponibilité m'a permis de progresser rapidement sur ce logiciel que je ne connaissais pas. Son intérêt, son soutien et nos nombreuses discussions m'ont permis d'avancer et de me questionner toujours plus.

Par avance, je remercie, João Almeida et, une nouvelle fois, Jonas Feron pour le temps qu'ils consacreront à la lecture de ce mémoire ainsi que pour leur présence lors de sa défense orale.

Ensuite, je suis reconnaissante envers mes amis d'être aussi présents et, particulièrement, Marine Benoit pour tous ces moments Skype qui nous ont permis de partager ces nombreuses heures de travail malgré le confinement. Son soutien sans faille au cours de ce dernier mois m'a aidé à garder la motivation même dans les moments les plus durs. Je remercie Céline Radelet pour ses encouragements et sa relecture honnête et efficace. Également, je remercie le pôle GC et les étudiants de la « salle TFE » pour tous ces beaux moments passés qui ont permis d'allier travail et plaisir dans une atmosphère détendue tout l'été.

Finalement, et pas des moindres, je souhaite remercier ma petite famille pour m'avoir supporté en tout lieu et tout instant. Merci à mes parents pour l'éducation et la bienveillance qu'ils m'ont apportées et merci à mes sœurs qui ont toujours cru en moi.



TABLE DES MATIÈRES

Table des matières

REMERCIEMENTS.....	III
TABLE DES SYMBOLES.....	XIII
1. INTRODUCTION	3
2. ETAT DE L'ART	7
2.1. Introduction aux structures réciproques.....	7
2.1.1. Contexte historique.....	7
2.1.2. Pionniers dans le domaine	7
2.1.3. Définition.....	9
2.1.4. Typologie des structures réciproques	10
2.1.5. Dimensionnement de ces structures par programme de calculs.....	11
2.1.6. Exemple : Observatoire Rokko	12
2.1.7. Utilité et caractère innovant des structures réciproques	12
2.2. Concept d'indicateurs morphologiques	13
2.2.1. Définition des paramètres.....	13
2.2.2. Détermination des indicateurs morphologiques	15
3. DÉVELOPPEMENT ANALYTIQUE DE L'OPTIMISATION D'UN PLANCHER FORMÉ DE MODULES RÉCIPROQUES.....	19
3.1. Hypothèses.....	19
3.2. Expression du volume d'une poutre fléchie	20
3.2.1. Optimisation du volume de bois en fonction de la contrainte	20
3.2.2. Optimisation du volume de bois en fonction de la flèche maximale	20
3.3. Expression du volume d'un plancher composé de poutres parallèles	21
3.3.1. Optimisation du volume de bois en fonction de la contrainte	22
3.3.2. Optimisation du volume de bois en fonction de la flèche maximale	23
3.3.3. Discussion sur le sens de portée d'un plancher classique.....	24
3.4. Expression du volume d'un plancher carré composé d'un seul module réciproque élémentaire	26
3.4.1. Optimisation du volume de bois en fonction de la contrainte	27
3.4.1.1. Approximation : toutes les poutres du module sont de type 1	27
3.4.1.1.1. Prise en compte de la flexion dans le calcul de la contrainte	28
3.4.1.1.1.1. Expression du moment maximal.....	28
3.4.1.1.1.2. Expression du volume du module réciproque	29
3.4.1.2. Sans approximation : 2 poutres type 1 et 2 poutres type 2 composent le module	30
3.4.1.2.1. Prise en compte de la flexion dans le calcul de la contrainte pour la poutre type 2	30
3.4.1.2.1.1. Expression du moment maximal.....	30
3.4.1.2.1.2. Expression du volume d'une poutre type 2	31
3.4.1.2.1.3. Expression du volume du module réciproque	32
3.4.1.2.2. Correction du graphique en tenant compte du volume des structures intermédiaires	34

3.4.1.2.3.	Correction du graphique en tenant compte de l'effort tranchant	37
3.4.2.	Etude préliminaire au calcul de flèche : Prise en compte de l'effet dû à l'effort tranchant dans le critère de déplacement	41
3.4.2.1.	Flèche due à l'effort tranchant	41
3.4.2.2.	Flèche due à la flexion	42
3.4.2.3.	Flèche maximale totale	43
3.4.2.4.	Influence de la flèche d'effort tranchant par rapport à la flèche totale maximale	44
3.4.3.	Optimisation du volume de bois en fonction de la flèche maximale	45
3.4.3.1.	Expression des moments le long des poutres	45
3.4.3.2.	Expression de la flèche le long des poutres	45
3.4.3.3.	Expression de la flèche maximale	46
3.4.3.4.	Expression du volume du module réciproque	47
3.4.4.	Conclusions préliminaires	49
3.5.	Expression du volume d'un plancher rectangulaire composé d'un seul module réciproque élémentaire	50
3.5.1.	Configuration du module réciproque	50
3.5.2.	Optimisation du volume de bois en fonction de la contrainte	51
3.5.2.1.	Prise en compte de la flexion dans le calcul de la contrainte	51
3.5.2.2.	Correction du graphique en tenant compte de la structure secondaire	56
3.5.2.3.	Correction du graphique en tenant compte de l'effort tranchant	59
3.5.3.	Optimisation du volume de bois en fonction de la flèche maximale	63
3.5.4.	Conclusions préliminaires	64
3.6.	Expression du volume d'un plancher carré composé de 4 modules réciproques	66
3.6.1.	Définition des configurations analysées	66
3.6.1.1.	Configuration 1 : dite « naturelle »	66
3.6.1.1.1.	Définition des familles de poutres	66
3.6.1.1.2.	Géométrie du plancher	67
3.6.1.2.	Configuration 2 : modules parallèles aux bords du plancher avec longueur des poutres latérales variable	69
3.6.1.2.1.	Définition des familles de poutres	69
3.6.1.2.2.	Géométrie du plancher	70
3.6.1.3.	Configuration 3 : modules parallèles aux bords du plancher avec longueur des poutres centrales variable	72
3.6.1.3.1.	Définition des familles de poutres	72
3.6.1.3.2.	Géométrie du plancher	73
3.6.2.	Optimisation du volume de bois en fonction de la contrainte	74
3.6.2.1.	Prise en compte de la flexion dans le calcul de la contrainte	74
3.6.2.1.1.	Réactions aux appuis	74
3.6.2.1.2.	Expressions du moment maximal	75
3.6.2.1.3.	Expression de la contrainte de flexion	75
3.6.2.1.4.	Expression du volume du plancher réciproque	75
3.6.2.2.	Correction du graphique en tenant compte du volume des structures intermédiaires	77
3.6.2.3.	Correction du graphique en tenant compte de l'effort tranchant	78
3.6.3.	Optimisation du volume de bois en fonction de la flèche maximale	82
3.6.4.	Conclusions préliminaires	84
4.	DÉVELOPPEMENT NUMÉRIQUE DE L'OPTIMISATION D'UN PLANCHER FORMÉ DE MODULES RÉCIPROQUES	87
4.1.	Indicateurs de volume à l'ELU	87

4.2. Indicateurs de volume à l'ELS	88
5. DISCUSSION ET CONCLUSION.....	93
6. ANNEXE A.....	99
7. ANNEXE B.....	126
8. ANNEXE C.....	132
9. BIBLIOGRAPHIE.....	139



TABLE DES SYMBOLES

Table des symboles

α	[°]	Angle formé par 2 poutres lorsque l'excentricité est prise en compte dans le module
$\alpha_{i,j}, \alpha_{i,j}(a), \alpha_{i,j}(a, \lambda)$	[/]	Toute fonction de a et λ relative à la réaction d'appui de la poutre i s'appuyant sur la poutre j
$\alpha_{PTi}(a), \alpha_{PTi}(a, \lambda)$	[/]	Toute fonction de a et λ relative à la réaction d'appui maximale de la poutre type i
β	[°]	Angle entre l'horizontale et la déformée de la poutre sous l'effet du cisaillement (formule Timoshenko)
γ_m	[/]	Facteur de sécurité sur le matériau pris égal à 1.3 selon les prescriptions de l'Eurocode
δ_i	[mm]	Flèche maximale de la poutre i sous le critère de flexion
$\delta_{i,g}, \delta_{i,d}$	[mm]	Flèche maximale dans le tronçon gauche ou droit de la poutre i sous le critère de flexion
δ_{max}	[mm]	Flèche maximale de la structure sous le critère de flexion à l'ELS
δ_v	[mm]	Flèche maximale de la poutre sous le critère de cisaillement
$\delta_{v,g}, \delta_{v,d}$	[mm]	Flèche maximale dans le tronçon gauche ou droit de la poutre sous le critère de cisaillement
$\delta_{v,c}$	[mm]	Flèche due à l'effort tranchant évaluée là où la flèche totale (flexion + cisaillement) de la poutre est maximale
δ_{tot}	[mm]	Flèche maximale totale (flexion + cisaillement) de la poutre
ε	[/]	Indicateur adimensionnel de l'entraxe
θ	[/]	Rapport des résistances du bois à la flexion et au cisaillement : $\theta = \frac{f_{m,k}}{f_{v,k}} = \frac{f_{m,d}}{f_{v,d}}$
κ	[/]	Coefficient de Timoshenko dépendant de la géométrie et du matériau
λ	[/]	Coefficient de proportionnalité des longueurs d'un plancher rectangulaire ($\in]0; 1]$)
ν	[/]	Coefficient de Poisson
σ, σ_i	[MPa]	Contrainte de flexion dans la section la plus sollicitée de la poutre i
σ_r, σ_c	[MPa]	Contrainte de flexion dans les poutres secondaires des zones rectangulaires et carrées du plancher réciproque
τ, τ_i	[MPa]	Contrainte de cisaillement dans la section la plus sollicitée de la poutre i

φ	[°]	Angle formé entre les modules et les bords du plancher dans la configuration dite « naturelle » d'un plancher à plusieurs modules
ϕ, ϕ_i	[mm]	Diamètre de la poutre i
ϕ_r, ϕ_c	[mm]	Diamètre des poutres secondaires des zones rectangulaires et carrées du plancher réciproque
Z	[/]	Coefficient adimensionnel de cisaillement défini par $Z = \frac{2\theta^{2/3}}{3k_{cr}} \left(\frac{q_u}{f_{v,d}} \right)^{1/3}$
a, a_i	[/]	Proportion d'engagement de la poutre i ($\in [0; 1]$)
d	[mm]	Excentricité entre les poutres
e	[mm]	Entraxe entre les poutres secondaires du plancher
$f_{i,0}(a), f_{i,0}(a, \lambda)$	[/]	Toute fonction de a et λ relative au moment maximal de la poutre i
$f_{i,g,0}(a, \lambda), f_{i,d,0}(a, \lambda), f_{i,p,0}(a, \lambda)$	[/]	Toute fonction de a et λ relative au moment maximal situé dans le tronçon gauche, droit ou au niveau de la charge ponctuelle de la poutre i
$f_{i,\delta}(a), f_{i,\delta}(a, \lambda)$	[/]	Toute fonction de a et λ relative à la flèche maximale de la poutre i
$f_{i,g,\delta}(a, \lambda), f_{i,d,\delta}(a, \lambda), f_{i,p,\delta}(a, \lambda)$	[/]	Toute fonction de a et λ relative à la flèche maximale située dans le tronçon gauche, droit ou au niveau de la charge ponctuelle de la poutre i
$f_{i,p}(a)$	[/]	Toute fonction de a relative à la longueur de la poutre d'un plancher réciproque carré
$f_{SS}(a), f_{SS}(a, \lambda)$	[/]	Tout fonction de a et λ relative au volume de la structure secondaire
$f_{m,d}$	[MPa]	Contrainte de flexion maximale permise à l'ELU, égale à $f_{m,d} = k_{mod} f_{m,k} / \gamma_m$
$f_{m,k}$	[MPa]	Résistance caractéristique (95%) du matériau en flexion
$f_{v,d}$	[MPa]	Contrainte de cisaillement maximale permise à l'ELU, égale à $f_{v,d} = k_{mod} f_{v,k} / \gamma_m$
$f_{v,k}$	[MPa]	Résistance caractéristique (95%) du matériau au cisaillement
k_{cr}	[/]	Coefficient habituellement égal à 0.67 prenant en compte l'influence des fissures et utilisé dans le critère de cisaillement
k_{mod}	[/]	Coefficient prenant en compte la durée de chargement et la classe de service, utilisé dans le critère de dimensionnement
m	[/]	Nombre de familles de poutres

n	[/]	Nombre de poutres composant la structure primaire d'un plancher classique ou réciproque
n_j, n_r, n_c	[/]	Nombre de poutres secondaires dans la zone j , rectangulaire ou carrée du plancher
$n_{i,p}$	[/]	Nombre de poutres dans la famille de poutres i
q_L	[N/mm]	Charge répartie linéairement sur les poutres d'un plancher classique
q_j	[N/mm]	Charge répartie linéairement sur les poutres du module à partir de la zone j du plancher
q	[N/mm ²]	Charge répartie surfacique
q_u	[N/mm ²]	Charge répartie évaluée à l'état limite ultime
q_δ	[N/mm ²]	Charge répartie évaluée à l'état limite de service
x	[mm]	Position le long de la poutre dans les coupes d'efforts internes
$x_{i,max}, x_{g,i,max}, x_{d,i,max}$	[mm]	Position du moment max ou de la flèche max de la poutre, dans le tronçon gauche ou dans le tronçon droit
y_i	[mm]	Demi-hauteur de section de poutre i
A, C, E, G	[Nmm ²]	Constantes d'intégration pour le calcul de flèche
B, D, F, H	[Nmm ³]	Constantes d'intégration pour le calcul de flèche
A_j, A_{tot}	[mm ²]	Aire d'une zone j ou du plancher complet
$A_{p,i}$	[mm ²]	Section de la poutre i
$E_{0,m}$	[MPa]	Module de Young moyen du matériau bois
ELS		Etat limite de service
ELU		Etat limite ultime
F	[N]	Force totale due à la charge externe
F_u	[N]	Force totale due à la charge externe évaluée à l'ELU
F_δ	[N]	Force totale due à la charge externe évaluée à l'ELS
$G_{0,m}$	[MPa]	Module de cisaillement moyen du matériau bois
I_i	[mm ⁴]	Inertie de la poutre i , égale à $\pi\phi_i^4/64$ pour une section circulaire pleine
L, L_1, L_2	[mm]	Longueur des côtés du plancher
L_c, L_r	[mm]	Longueur des poutres secondaires des zones carrée et rectangulaire
$L_{GC,j}$	[mm]	Longueur du grand côté d'une zone j du plancher
$L_{PC,j}$	[mm]	Longueur du petit côté d'une zone j du plancher
$L_{p,i}$	[mm]	Longueur de la poutre type i

$M, M_{g,i}, M_{d,i}$	$[Nmm]$	Moment de flexion dans le tronçon gauche ou droit de la poutre i
$M_{i,max}$	$[Nmm]$	Moment de flexion maximal dans la poutre i
$M_{i,g,max}, M_{i,d,max}, M_{i,p,max}$	$[Nmm]$	Moment de flexion maximal dans le tronçon gauche ou droit de la poutre i ou au niveau de la charge ponctuelle
N	$[/]$	Nombre de modules composant le plancher
$R_{i,j}, R_{i,k}$	$[N]$	Réactions d'appuis de la poutre i sur les poutres j et k
$R_{l,i}, R_{m,i}$	$[N]$	Réactions d'appui des poutres l et m sur la poutre i
S	$[mm]$	Longueur du côté extérieur de la zone en coin supérieur droit ou inférieur gauche d'un plancher à 4 modules
T	$[mm]$	Longueur calculée au niveau de l'intersection entre la zone trapézoïdale et la zone triangulaire définissant la charge répartie des zones en coin d'un plancher à 4 modules
U	$[mm]$	Longueur du côté extérieur de la zone latérale centrale d'un plancher à 4 modules
V	$[mm^3]$	Volume total de la structure primaire d'un plancher classique ou réciproque
V_i	$[mm^3]$	Volume d'une poutre i
V_{sec}	$[mm^3]$	Volume de la structure secondaire d'un plancher
V_u	$[mm^3]$	Volume évalué à l'ELU
V_δ	$[mm^3]$	Volume évalué à l'ELS
V_{tot}	$[mm^3]$	Volume totale de la structure (primaire + secondaire)
$V, V_{g,i}, V_{d,i}$	$[N]$	Effort tranchant dans le tronçon gauche ou droit de la poutre i
$V_{Ed}, V_{i,Ed}$	$[N]$	Effort tranchant maximal de la poutre i
W	$[/]$	Indicateur adimensionnel de volume de la structure primaire
W_u	$[/]$	Indicateur adimensionnel de volume de la structure primaire sous le critère de flexion/cisaillement évalué à l'ELU
W_δ	$[/]$	Indicateur adimensionnel de volume de la structure primaire sous le critère de déplacement évalué à l'ELS
W_{tot}	$[/]$	Indicateur adimensionnel de volume de la structure totale (primaire + secondaire)

$W_{u,tot}$	[/]	Indicateur adimensionnel de volume de la structure totale (primaire + secondaire) sous le critère de flexion/cisaillement évalué à l'ELU
$W_B(a), W_B(a, \lambda)$	[/]	Toute fonction de a et λ relative au volume de la structure primaire sous le critère de flexion
$W_{B,i}(a), W_B(a, \lambda)$	[/]	Toute fonction de a et λ relative au volume de la poutre i sous le critère de flexion
$W_{B,SS}\left(a, \frac{L}{e}\right), W_{B,SS}\left(a, \lambda, \frac{L}{e}\right)$	[/]	Toute fonction de a, λ et L/e relative au volume de la structure totale (primaire + secondaire) sous le critère de flexion
$W_S(a), W_S(a, \lambda)$	[/]	Toute fonction de a et λ relative au volume de la structure primaire sous le critère de cisaillement
$W_{S,i}(a), W_{S,i}(a, \lambda)$	[/]	Toute fonction de a et λ relative au volume de la poutre i sous le critère de cisaillement
$W_{S,SS}\left(a, \lambda, Z, \frac{L}{e}\right)$	[/]	Toute fonction de a, λ, Z et L/e relative au volume de la structure totale (primaire + secondaire) sous le critère de cisaillement
$W_\delta(a), W_\delta(a, \lambda)$	[/]	Toute fonction de a et λ relative au volume de la structure primaire sous le critère de déplacement
X	[mm]	Longueur de construction géométrique pour le plancher à 4 modules
Y	[mm]	Longueur du côté extérieur de la zone en coin inférieur droit ou supérieur gauche d'un plancher à 4 modules
$\frac{L_p}{\phi}$	[/]	Élancement de la poutre
$\frac{L}{\delta_{max}}$	[/]	Valeur de dimensionnement de la flèche maximale par rapport à la longueur du plancher, fixée par le concepteur ($L/\delta_{max}=150, 200, 300, \dots$)



INTRODUCTION

1. Introduction

A l'heure d'aujourd'hui, les structures réciproques sont relativement peu présentes dans le monde qui nous entoure et donc forts méconnues aux yeux d'une grande partie de la population. Une première définition simple consisterait à les caractériser comme étant des structures autoportées, c'est-à-dire composées d'un enchevêtrement d'éléments reposant mutuellement les uns sur les autres. On utilise donc des ensembles de poutres, appelés modules, que l'on place à répétition les uns à la suite des autres pour donner à la structure la forme souhaitée. Elles sont alors particulièrement intéressantes pour traverser des portées dont la longueur est supérieure à celle des éléments car aucun appui central n'est nécessaire, seuls les contours de la structure sont appuyés sur le sol ou sur d'autres éléments structuraux. Un autre avantage certain est le cachet architectural qui permet de donner une grande originalité à la structure.

L'absence de telles structures dans les constructions actuelles est due à plusieurs facteurs. Le premier concerne leur complexité de mise en œuvre. Comme chaque élément supporte le précédent et repose sur le suivant, tous les éléments sont liés entre eux. Aucune tolérance n'est accordée entre le modèle et la réalité car le déplacement, même léger, d'un assemblage par rapport à ce qui était prévu en théorie, occasionnera des changements dans toute la structure. Pour y remédier, une solution serait de robotiser la mise en œuvre des différents modules en optimisant la précision des déplacements et des gestes du robot ainsi que la précision des assemblages.

Ensuite, ces structures sont généralement construites en bois, un matériau de construction trop souvent mis de côté à cause de son prix exorbitant en comparaison à celui du béton. Effectivement, les coûts de main-d'œuvre sont bien plus importants pour le bois du fait qu'il faut retirer l'écorce, le couper, l'assembler, le coller,... Cependant, dans le cadre des structures réciproques, nous souhaitons privilégier les assemblages bois-bois qui sont plus écologiques et qui peuvent être, une fois de plus, robotisés. De plus, à long terme, on envisage de prendre des troncs d'arbres à peine travaillés, ce qui permettrait d'utiliser des essences de bois locales dont le diamètre du tronc est plus faible car il n'y aura pas de matière à retirer. On pourra alors profiter de toutes les qualités de résistance du bois tout en réduisant la main-d'œuvre et donc en diminuant les coûts.

Finalement, ces structures occasionnent des déformations importantes pouvant dépasser les déformations admissibles telles que prescrites dans l'Eurocode. Pour pouvoir les utiliser dans le monde du bâtiment, au-delà du monde de l'art, il est donc important de vouloir limiter leurs déplacements en choisissant les bonnes combinaisons de modules interagissant mutuellement entre eux.

Le mot « optimisation » semble donc prendre tout son sens lorsqu'on parle des structures réciproques. L'objectif, ici, est de limiter les facteurs négatifs pour permettre le développement de telles structures dans les années à venir. Pour cela, nous nous concentrerons d'une part, sur l'optimisation de la quantité de bois utilisée afin de réduire la masse (et donc le coût) de la structure et d'une autre part, sur les déformations qu'on souhaite limiter au maximum. Etant donné que la possibilité de composer des modules réciproques et de les assembler ensemble selon une forme souhaitée est presque infinie, nous nous pencherons uniquement sur le cas d'un plancher composé de modules à 4 poutres. En jouant sur le nombre de modules et sur la forme du plancher, le but est de déterminer la meilleure combinaison d'éléments, c'est-à-dire, celle pour laquelle le volume sera le plus petit possible tout en respectant les critères aux états limites ultime et de service.

Ce travail se compose de 4 grandes parties :

Tout d'abord, une brève remise en contexte du sujet permettant de comprendre où en est le monde de la recherche dans l'optimisation de ces structures. Les éléments fondamentaux nécessaires à la bonne compréhension de la suite du document y seront également abordés.

Ensuite, la deuxième partie concerne le développement analytique à proprement dit de l'optimisation du volume d'un plancher. Dans un premier temps, la démarche visera les planchers classiques afin de permettre une comparaison finale avec les planchers réciproques. Ensuite, différents types de planchers réciproques seront analysés sous les critères ELU et ELS.

La troisième partie permet de développer une méthode numérique rapide et facile à utiliser pour optimiser les planchers réciproques plus complexes. Cette méthode est également testée pour vérifier les résultats analytiques obtenus dans la deuxième partie.

Finalement, la dernière partie a pour but de discuter et de comparer les résultats obtenus pour les planchers classiques et réciproques analysés de sorte à définir la solution optimale.



ETAT DE L'ART

2. Etat de l'art

Cette première partie est destinée à familiariser le lecteur avec le concept de structures réciproques en commençant par exposer le contexte historique, l'utilité de ce genre de structures ainsi que leur côté innovant. Par la suite, un exemple permettra de mieux visualiser leur fonctionnement et leur mise en œuvre. Enfin, les fondamentaux pour comprendre la suite du mémoire seront abordés. Parmi eux, la théorie des indicateurs morphologiques définie pour le calcul d'optimisation sera introduite.

2.1. Introduction aux structures réciproques

2.1.1. Contexte historique

Le concept d'éléments mutuellement supportés existe depuis l'Antiquité et se développe dans plusieurs parties du monde à travers différentes cultures : les logements néolithiques, les tentes construites par les esquimaux et les tipis imaginés par les indiens suivent tous ce même principe.



Figure 1 : Constructions indiennes de l'Antiquité suivant le principe d'éléments mutuellement supportés [12]

Au temps de l'Empire Romain, sous la gouverne de Jules César, ce système est utilisé dans la construction de ponts afin de simplifier les assemblages entre les éléments.

Plus tard, en Europe, ce concept est à la base employé pour franchir de longues portées à l'aide d'éléments en bois de faibles dimensions. Plusieurs scientifiques, physiciens et mathématiciens se sont penchés sur le problème bien qu'il n'y ait aucune notion d'optimisation dans un premier temps. Du côté de l'Orient, ce principe a d'abord été utilisé traditionnellement dans la création de paniers en bambou avant de se transmettre aux objets de plus grandes dimensions. Les premières références découvertes se trouvent dans les temples bouddhistes un peu partout en Asie.

À travers le temps et les continents, le seul point commun entre ces différentes créations semble être le matériau utilisé : le bois. Bien qu'en Occident il soit utilisé à une fin constructive et pratique et qu'en Orient il soit utilisé pour une raison spirituelle, le bois a toujours été le matériau de construction privilégié. [11]

2.1.2. Pionniers dans le domaine

Bien que Villard de Honnecourt (13^{ème} siècle) soit le premier à avoir présenté une esquisse d'un modèle réciproque, c'est Léonard de Vinci (15-16^{ème} siècle) qui, en Occident, est le premier à s'être concentré sur ces structures avec une approche scientifique. Une de ses configurations géométriques tridimensionnelles les plus connues est son pont auto-supporté (Figure 2, gauche). Comme on peut le voir, chaque élément repose l'un sur l'autre avec une certaine excentricité entre poutres à considérer. Sebastiano Serlio (16^{ème} siècle) a tenté de simplifier cette complexité géométrique en supprimant la notion d'excentricité. Pour cela, il utilise des poutres dont les axes sont alignés formant ainsi un plancher plat (Figure 2, droite).

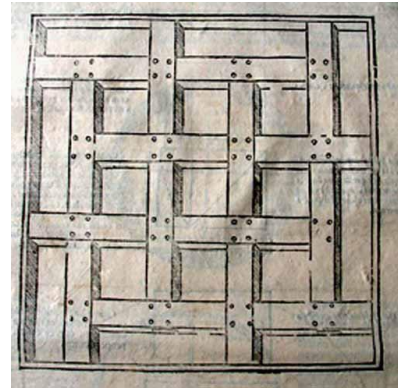
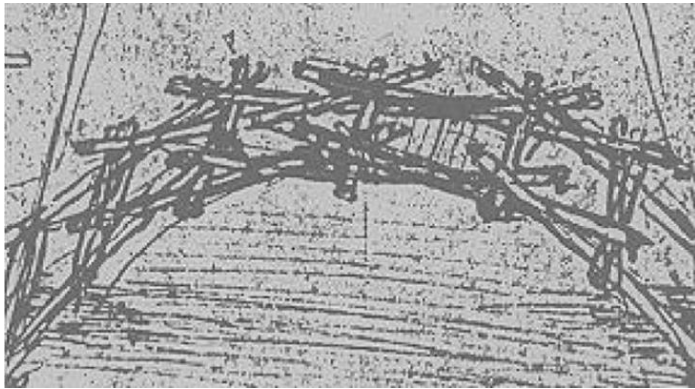


Figure 2 : Pont auto supporté de Léonard de Vinci [3] (à gauche), solution proposée par Sebastiano Serlio en vue de supprimer l'excentricité [8] (à droite)

Au 17^{ème} siècle, John Wallis apporte une approche scientifique plus moderne : il s'intéresse au cas d'une longue portée traversée à l'aide d'un grillage composé de modules réciproques dont les éléments sont emboîtés les uns dans les autres. Il propose, d'une part, un développement mathématique fournissant les forces agissant dans chaque élément du grillage et, d'une autre part, les aspects pratiques de la construction de structures en bois. Cette démarche ressemble fortement à celle des ingénieurs d'aujourd'hui. Cependant, deux erreurs sont retrouvées dans ses travaux : il considère seulement les efforts et pas les déformations des éléments, et il prend en compte uniquement le poids propre des poutres sans considérer une éventuelle charge extérieure. [5]

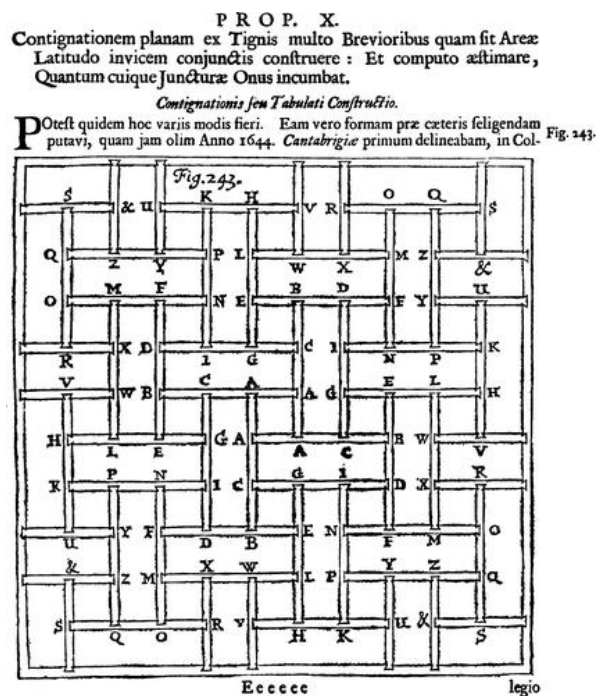


Figure 3 : Structure réciproque de John Wallis [5]

Bien que l'on retrouve plusieurs structures construites un peu partout dans le monde, peu de contemporains se sont réellement penchés sur la question de leur optimisation. On peut tout de même citer Thomas Kohlhammer (21^{ème} siècle) qui a développé une méthode d'optimisation ainsi qu'une méthode de calcul sous forme d'approche matricielle mettant en évidence le principe de réciprocité en montrant une certaine redondance dans le système. La méthode d'optimisation utilisée dans le cadre de ce mémoire se concentre, quant à elle, sur l'adimensionnalisation des paramètres en

se basant sur la théorie des indicateurs morphologiques introduite par Zalewski (1996) et largement développée par Pierre Latteur et Philippe Samyn.

2.1.3. Définition

Le terme « réciprocity » vient du mot latin « reciprocus » qui, décomposé en deux parties, devient « recus », signifiant « en arrière », et « procus », signifiant « en avant ». En couplant ces deux significations, on comprend qu'il s'agit d'un terme impliquant une dépendance entre éléments positionnés avant et après un élément tierce. [11]

Pour que ce principe soit applicable, il exige le respect de trois hypothèses fondamentales :

- Présence de minimum trois éléments interagissant mutuellement entre eux.
- Chaque élément supporte et est supporté par des éléments voisins. La poutre est donc soumise, au minimum, à de la flexion bien que de la traction ou de la compression peuvent également se rajouter.
- Les jonctions entre éléments sont réalisées le long de la poutre et pas en bout d'élément. C'est donc bien la poutre placée en-dessous qui sert d'appui.



Figure 4 : Exemples de modules réciproques possibles [7]

Les avantages de ce type de structures sont multiples. Parmi eux, on compte un caractère architectural prononcé et des assemblages aisés ne nécessitant pas de colle et très peu d'acier. De plus, les structures réciproques font parties des structures statiquement déterminées, c'est-à-dire qu'elles peuvent être calculées en utilisant uniquement les équations de la statique.

Un bémol persiste dans la recherche du meilleur agencement des modules qui s'avère relativement compliqué. En effet, dans une telle configuration réciproque, il n'existe pas de hiérarchie entre les éléments. Ils fonctionnent tous en même temps et de la même manière. La position d'un élément n'influence pas son comportement structurel. L'optimisation de cet agencement se calculera, en fait, à l'aide d'une série de paramètres développés ultérieurement. [7]

2.1.4. Typologie des structures réciproques

Une structure réciproque est composée de modules qui sont eux-mêmes composés d'éléments. Le nombre de modules ainsi que le nombre d'éléments par module sont deux paramètres décisifs de la structure.

L'agencement le plus basique consiste en un seul module à quatre éléments proposé par Villard de Honnecourt au 13^{ème} siècle (Figure 5, gauche), d'autres modules élémentaires sont représentés dans la Figure 4. En réalité, il existe une infinité de structures possibles allant du module élémentaire unique à des combinaisons beaucoup plus complexes (Figure 5, droite).

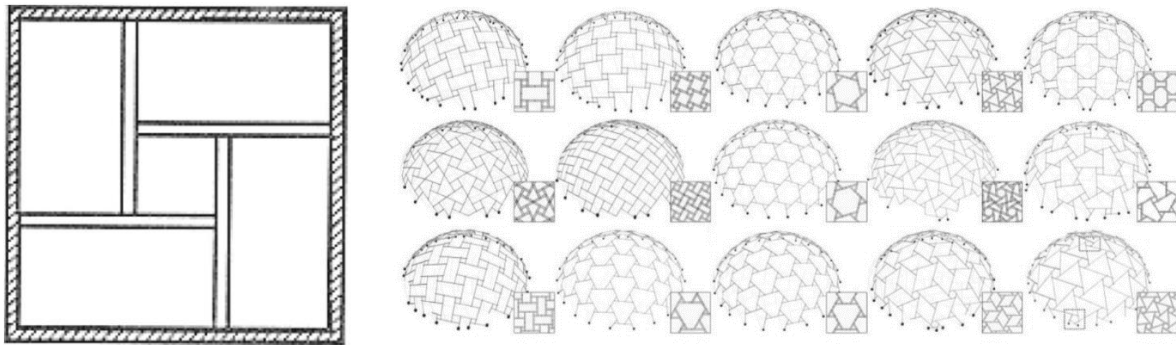


Figure 5 : Module élémentaire proposé par Villard de Honnecourt (gauche) [3], combinaisons de modules complexes (droite) [7]

Bien qu'il y ait une infinité de modules possibles, on peut les classer en trois catégories distinctes :

- Modules avec paramètres initiaux indépendants :
Le concepteur définit lui-même la longueur des éléments, les excentricités entre éléments ainsi que la longueur d'engagement (définie ci-après) et sur base de cela, un module peut être généré. Les configurations de ce type les plus simples à obtenir consistent en des grillages formés de polygones (carrés, hexagones,...). L'expérience montre que la plupart de ces structures ne peuvent être courbées que dans une seule direction formant généralement des cylindres ou des cônes (Figure 6, gauche).
- Modules avec paramètres initiaux dépendants :
Les trois paramètres cités ci-dessus sont dépendants les uns des autres. Cette fois-ci, le concepteur définit seulement un de ces paramètres sans contrôler les deux autres, ce qui lui laisse moins de degrés de liberté (Figure 6, droite).
- Modules qui ne peuvent pas être construits avec des éléments droits :
Ce cas correspond à celui où, pour une valeur donnée des trois paramètres, il est impossible de construire le module sans plier les éléments. Cela peut être dû soit aux mauvaises conditions initiales soit au nombre de contraintes trop élevé. [3]

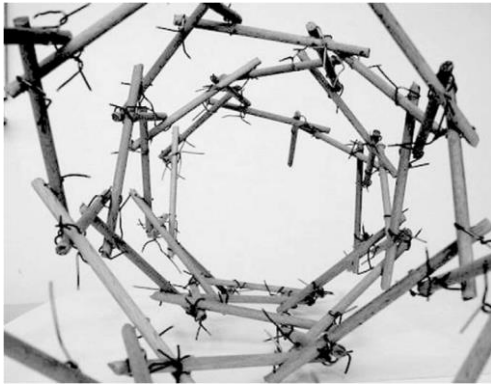


Figure 6 : Structure réciproque cylindrique composée de modules avec paramètres initiaux indépendants (gauche), structure réciproque sphérique composée de modules avec paramètres initiaux dépendants (droite) [3]

2.1.5. Dimensionnement de ces structures par programme de calculs

Il existe différents programmes permettant de calculer de telles structures. Le premier qu'on peut citer est SCIA permettant de concevoir des modèles paramétriques (ou non) relativement simples. Ce logiciel sera utilisé comme outil de vérification dans ce mémoire. Cependant, son usage devient limité lorsque les structures deviennent trop complexes à dessiner. Le logiciel Rhino & Grasshopper permet de dessiner, de manière paramétrique également, différentes configurations de structures réciproques et de les calculer. La paramétrisation étant plus poussée qu'avec SCIA, la modification de ces configurations se fait de manière plus aisée. D'autres programmes de contrôle de la forme de ces structures ont été développés au fil des années. On peut, par exemple, citer l'outil « Reciprocalizer » qui est un logiciel conçu spécialement pour les structures réciproques [10]. Il tient compte de 3 possibilités de connexions différentes illustrées en Figure 7 : les assemblages sont dans le même plan, les assemblages se superposent tous vers le haut ou les assemblages se superposent en alternance vers le haut ou vers le bas. Le programme se base sur la configuration initiale de la structure ainsi que sur le détail des nœuds associé à une des 3 méthodes d'assemblage pour générer, de manière itérative, différentes configurations possibles [9].

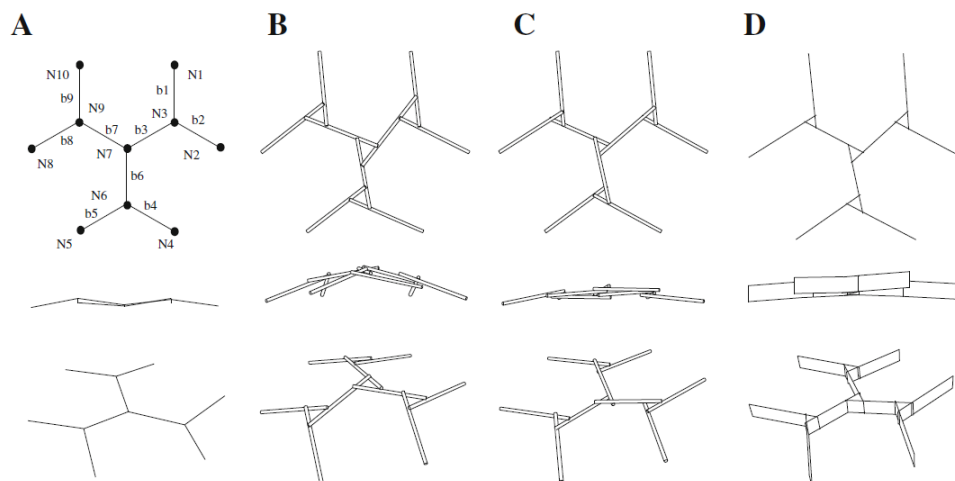


Figure 7 : a. configuration initiale, b. configuration avec support vers le haut, c. configuration avec support mixte haut/bas, d. poutres dans le même plan [9]

2.1.6. Exemple : Observatoire Rokko

L'observatoire Rokko a été imaginé par l'architecte Hiroshi Sambuichi et construit en 2011 par le groupe ARUP. Cette structure est composée de modules réciproques en acier eux-mêmes remplis par d'autres modules réciproques. Très vite, les ingénieurs se sont rendus compte de la complexité de construire un tel design. La géométrie du dôme a alors été conçue à partir de la répétition d'un même module dans un réseau circulaire symétrique selon une méthode itérative tout comme celle utilisée par Reciprocalizer. Cela a permis de générer la structure mais également de générer un échafaudage temporaire épousant parfaitement la forme de la structure. Cet échafaudage a été utilisé tout au long de la construction pour permettre aux éléments de conserver leur position finale durant l'assemblage des modules et avant d'être fixés définitivement par soudure.



Figure 8 : Observatoire Rokko (Kobe, Japon) [4]

Plutôt que d'utiliser un échafaudage temporaire, une autre technique, s'appliquant très bien aux modules à 3 poutres, consiste à développer des assemblages cinématiquement rigides. Dans ce cas, les points de contact entre les poutres adjacentes sont fixés dès le départ comme attendu dans la configuration finale. Ainsi, lorsqu'un module est complété, il est totalement rigide et il ne peut plus se déformer car les assemblages les en empêchent. L'application de cette technique est illustrée en Figure 9 pour des modules à 3 et 4 éléments. Comme on peut le voir, la solution rigide d'un seul module à 4 éléments prend la forme d'un losange et non d'un carré. Par contre, le réseau composé de plusieurs modules à 4 éléments est cinématiquement déterminé lorsque les modules répétés prennent différentes formes tout au long de la structure [9].

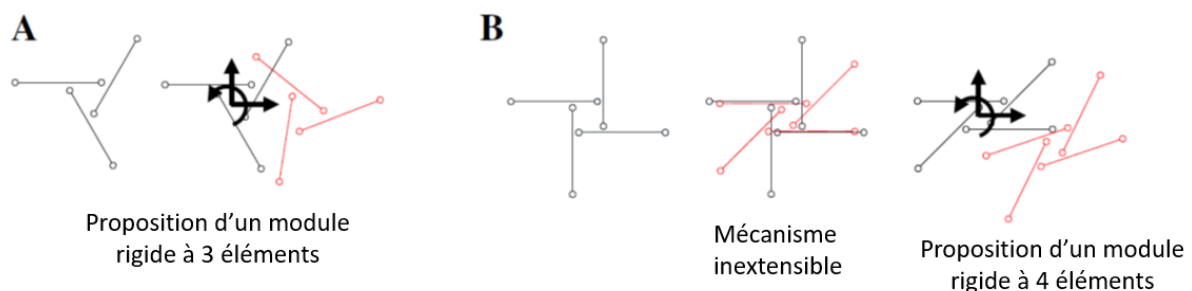


Figure 9 : Assemblages des poutres de manière à avoir des modules non déformables durant la mise en œuvre de la structure [9]

2.1.7. Utilité et caractère innovant des structures réciproques

Une structure réciproque trouve son utilité dans la construction d'une structure permettant de franchir une grande portée tout en étant composée d'éléments de faibles dimensions, ou du moins, d'éléments dont les dimensions sont inférieures à celles de la portée.

Ce principe est innovant sous plusieurs aspects dont le principal est l'utilisation du matériau bois, et plus précisément, l'utilisation du bois brut. Cela permettrait de fortement diminuer les coûts de main d'œuvre lié au tri, découpage,... du bois qui sont relativement élevés afin que le bois devienne un concurrent estimé du béton. De plus, cela permettrait également d'utiliser des essences de bois locales moins désirées actuellement et pourtant abondantes telles que le bouleau, par exemple. En effet, comme on ne passe pas par la phase de découpage du bois, non seulement on garde toutes ses propriétés mécaniques mais en plus, on peut utiliser des troncs de plus faible diamètre puisqu'il n'y a plus de perte de matière.

Un autre aspect positif concerne son impact sur le développement durable. D'une part, la quantité de déchets due au sciage du matériau est fortement diminuée, d'autre part, le fait de privilégier des assemblages bois-bois permet de limiter la quantité de colle utilisée, néfaste pour l'environnement.

Pour que tout cela fonctionne parfaitement, il faut promouvoir le développement de robots multiaxes avec un nombre de degrés de liberté presque infini permettant le positionnement et l'assemblage des morceaux de bois de manière rapide et efficace. Un autre élément important consiste à fournir à ces robots multiaxes une bibliothèque de données précises des troncs d'arbres disponibles et donc disposer d'un système de scannage adéquat. [7]

2.2. Concept d'indicateurs morphologiques

La méthode des indicateurs morphologiques vise à déterminer, sur base d'une approche paramétrique, la configuration optimale d'une structure. Les résultats obtenus sont donc applicables à une infinité de combinaisons puisqu'ils dépendent de paramètres variables.

2.2.1. Définition des paramètres

Un module réciproque est caractérisé par plusieurs paramètres représentés sur la Figure 10 :

- La longueur des poutres constituant le module : L_p [mm]
- Le nombre de poutres constituant le module : n_p [/]
- Le diamètre de chaque poutre : ϕ [mm]
- La longueur d'engagement : aL_p [mm] avec $a \in [0; 1]$ correspondant à la proportion d'engagement
- L'excentricité des poutres : d [mm] ou l'angle formé entre l'inclinaison de la poutre et l'horizontale : α [°]

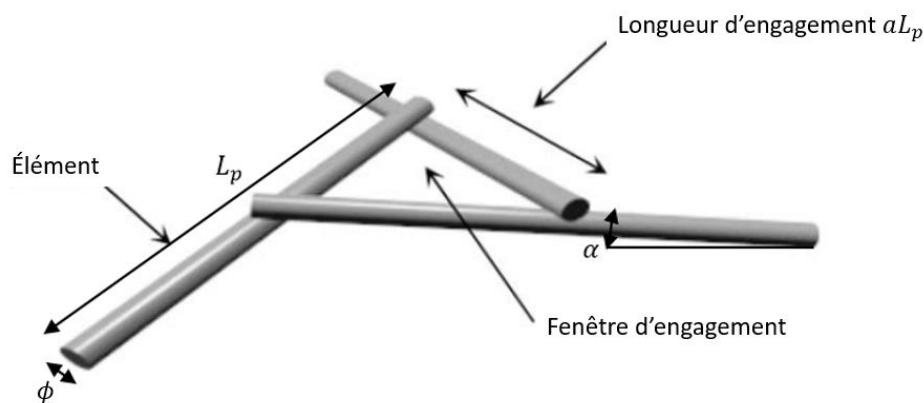


Figure 10 : Module élémentaire composé de 3 éléments [3]

L'excentricité des poutres rend les structures réciproques tridimensionnelles et ajoute un paramètre supplémentaire qui dépend directement de l'épaisseur des poutres. De plus, cette mise en « hors plan » sera fortement influencée par la longueur d'engagement : au plus celle-ci est faible, au plus l'écart « hors plan » sera important [9]. Dans ce mémoire, l'excentricité sera négligée car on souhaite obtenir des planchers plats composés de plusieurs modules (Figure 7d). On suppose donc que les éléments seront liés par des assemblages bois-bois leur permettant de rester dans le même plan comme, par exemple, ceux illustrés en Figure 11. De plus, cela permet d'éviter les efforts de traction et de compression dans les différents éléments, seule la flexion sera présente.

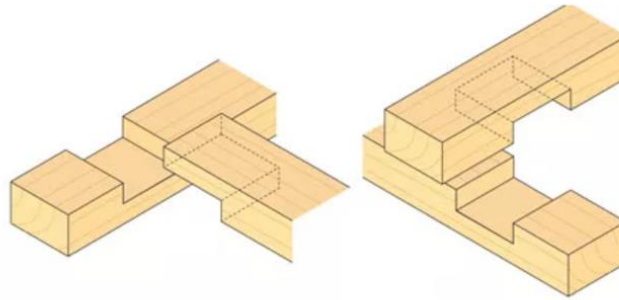


Figure 11 : Assemblage bois-bois permettant aux poutres de rester dans le même plan [13]

En plus de ces paramètres-là, il faut également réfléchir à la disposition des éléments les uns par rapport aux autres. Bien que l'excentricité ne soit pas prise en compte, les éléments reposent quand même les uns sur les autres et il peut être intéressant de comprendre ce mécanisme de superposition :

- Disposition des extrémités des éléments dans le module :

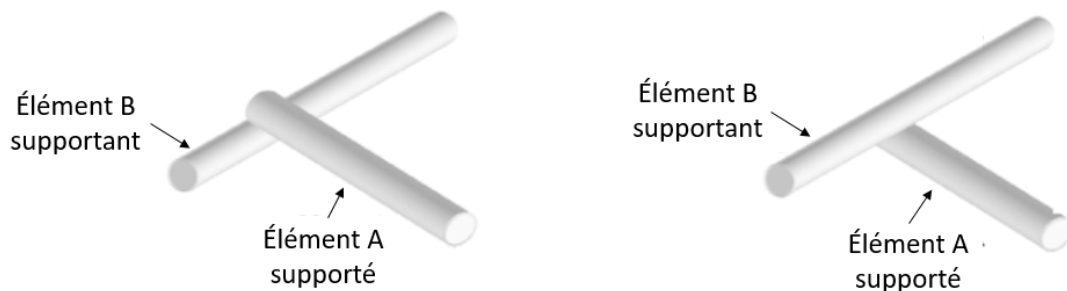


Figure 12 : Disposition des extrémités d'un élément A par rapport à un élément B (gauche : vers le bas, droite : vers le haut) [3]

Comme on peut le voir sur la Figure 12, les extrémités des éléments de chaque module sont soit appuyés SUR l'élément adjacent soit passés SOUS l'élément adjacent. On constate que lorsque A repose SUR B (gauche), A est dirigé vers le bas car il passera SOUS l'élément adjacent du module adjacent, tandis que lorsque A passe SOUS B (droite), A est dirigé vers le haut car il reposera SUR l'élément adjacent du module adjacent.

Si on tient compte des excentricités, il est à noter que lorsque le module est composé d'éléments dirigés vers le haut, les connexions fonctionnent en compression quand la structure est chargée, tandis que lorsque le module est composé d'éléments dirigés vers le bas, les connexions peuvent agir en traction. A l'époque de Villard de Honnecourt, les assemblages étant moins élaborés, il n'existait que

des combinaisons avec modules composés d'éléments dirigés vers le haut afin d'éviter au maximum la traction [3].

Dans le cadre de ce mémoire, l'excentricité étant négligée, ceci n'influence pas le résultat. Cependant, la configuration utilisée sera telle que les extrémités d'une poutre passeront toujours au-dessus des poutres voisines.

- Sens de rotation des éléments au sein du module :

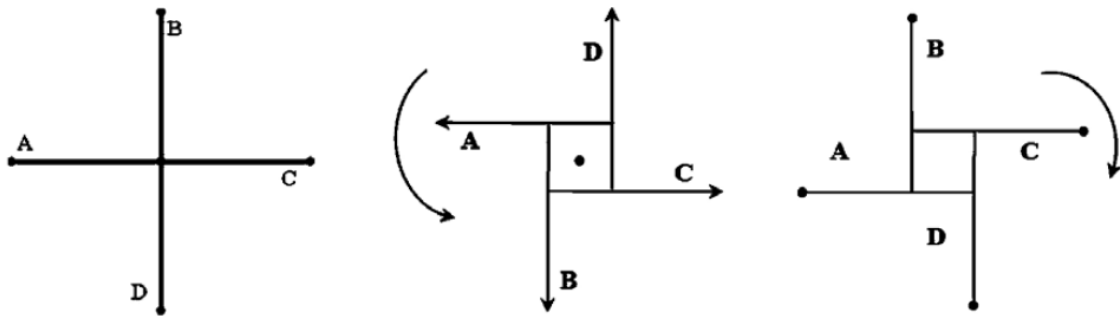


Figure 13 : Sens de rotation des éléments d'un module (gauche : configuration initiale, centre : sens anti-horlogique, droite : sens horlogique) [3]

La configuration initiale est une représentation idéalisée du module qui ne tient compte d'aucune contrainte géométrique, c'est-à-dire que l'excentricité et la longueur d'engagement ne sont pas prises en compte dans la conception, seuls le nombre d'éléments et leur longueur importent.

En se basant donc sur cette configuration initiale et en imaginant des personnes pousser les extrémités de chaque élément du module, on peut en déterminer son sens de rotation : sens horlogique (Figure 13, droite) ou sens anti-horlogique (Figure 13, centre). [3] Cela permet de comprendre le mécanisme de superposition et de déterminer la disposition d'un élément par rapport à un autre.

2.2.2. Détermination des indicateurs morphologiques

Comme vu précédemment, les structures réciproques dépendent d'un grand nombre de paramètres. La méthode des indicateurs morphologiques a pour but de diminuer ce nombre afin de rendre l'optimisation plus abordable. Ces facteurs sont alors regroupés dans des expressions adimensionnelles, appelées indicateurs morphologiques. On peut les séparer en deux catégories [1] :

Les indicateurs morphologiques primaires sont des paramètres adimensionnels que l'on fait varier dans le but d'optimiser les indicateurs morphologiques secondaires :

- La proportion d'engagement : α
- Le facteur de proportionnalité des longueurs d'un plancher rectangulaire : λ
- L'entraxe entre les poutres parallèles de la structure secondaire : e ou L/e
- Le coefficient adimensionnel de cisaillement (défini dans le chapitre suivant) : Z
- Le rapport flèche sur longueur du plancher : $\frac{\delta_{max}}{L}$

Les indicateurs morphologiques secondaires dépendent donc des indicateurs morphologiques primaires et permettent l'optimisation du système ainsi que la comparaison entre différentes structures (même si ce ne sont pas ces facteurs que l'on fait varier directement) :

- L'indicateur de volume à l'ELU, exprimé en fonction de la contrainte de flexion ou de cisaillement dans la section la plus sollicitée, représente la valeur adimensionnelle du volume de la structure :

$$W_u = \frac{V_u f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L^{5/3}}$$

- L'indicateur de volume à l'ELS, exprimé en fonction de la flèche maximale, représente également la valeur adimensionnelle du volume de la structure :

$$W_\delta = \frac{V_\delta E_{0,m}^{1/2}}{F_\delta^{1/2} L^2}$$

Comme il le sera démontré dans le chapitre 3, ces deux indicateurs secondaires dépendent bien des indicateurs primaires :

$$\begin{cases} W_u = f\left(a, \lambda, \frac{L}{e}, Z\right) \\ W_\delta = f\left(a, \lambda, \frac{L}{\delta_{max}}\right) \end{cases}$$



DÉVELOPPEMENT ANALYTIQUE DE L'OPTIMISATION D'UN
PLANCHER FORMÉ DE MODULES RÉCIPROQUES

3. Développement analytique de l'optimisation d'un plancher formé de modules réciproques

Ce chapitre a pour but de développer les équations analytiques optimisant le volume d'un plancher carré ou rectangulaire et composé d'un ou plusieurs modules réciproques. Avant de s'y intéresser complètement, l'analyse sur un plancher classique à poutres parallèles sera introduite dans le but de pouvoir réaliser une comparaison finale entre différents types de planchers. L'optimisation se base sur le principe des indicateurs morphologiques et est développée selon le critère ELU en contraintes de flexion et de cisaillement ainsi que sous le critère ELS (court ou long terme) en déplacement.

3.1. Hypothèses

La définition des paramètres se trouve dans le chapitre Table des symboles. Les hypothèses générales utilisées dans ce document sont les suivantes :

- Le plancher classique est de forme rectangulaire et soumis à un chargement externe vertical q [N/mm²] dont la force totale est F [N]. Le poids propre de la structure est négligé ou inclus dans le chargement externe. Ce plancher se compose uniquement d'une structure primaire avec poutres parallèles.
- Le plancher réciproque est de forme rectangulaire et soumis au même chargement externe vertical q [N/mm²] dont la force totale est F [N]. Il se compose d'une structure primaire (modules réciproques) et d'une structure secondaire (poutres parallèles de plus faibles diamètres) qui porte selon le petit côté de chaque zone du plancher. Afin que les poutres secondaires soient parallèles aux poutres du module réciproque, seuls les modules à 4 éléments seront analysés.
- Dans tous les cas, les poutres parallèles sont espacées d'un entraxe e constant dépendant du type de couverture du plancher et défini comme étant une donnée du problème.
- Les poutres sont isostatiques et caractérisées par une longueur L_p , une section circulaire pleine, notée A_p , de diamètre ϕ et une inertie I . Le volume de la structure primaire est noté V tandis que le volume total (primaire + secondaire) est noté V_{tot} .
- Les poutres secondaires du plancher réciproque ont une longueur et un diamètre variables en fonction des zones et sont supportées par la structure primaire en supposant une charge distribuée.
- A l'ELU, le chargement est noté q_u et F_u tandis qu'à l'ELS (court ou long terme), il est noté q_δ et F_δ .
- Le matériau considéré est le bois avec un module de Young moyen $E_{0,m}$, un module de cisaillement moyen $G_{0,m}$, une résistance caractéristique à 95% $f_{m,k}$ en flexion et $f_{v,k}$ en cisaillement. On définit le paramètre $\theta = \frac{f_{m,k}}{f_{v,k}} = \frac{f_{m,d}}{f_{v,d}}$ représentant le rapport des résistances.
- Le critère ELU en flexion est évalué dans la section la plus fléchie : $\frac{M_{max}}{2I/\phi} \leq f_{m,d} = \frac{k_{mod}f_{m,k}}{\gamma_m}$.
- Le critère ELU en cisaillement est évalué dans la section la plus cisailée : $\frac{4V_{Ed}}{3A_p} \leq k_{cr}f_{v,d} = k_{cr} \frac{k_{mod}f_{v,k}}{\gamma_m}$. Ce critère est pris en compte pour la structure primaire uniquement où il peut devenir dominant face au critère de flexion pour des faibles valeurs de la proportion d'engagement α .
- Le critère ELS en déplacement se base sur la flèche maximale d'une poutre ou du système et respecte le critère de dimensionnement L/δ_{max} choisi par le concepteur.

3.2. Expression du volume d'une poutre fléchie

Avant d'introduire le plancher classique avec sens de portée, on s'intéresse à l'optimisation du volume d'une poutre fléchie de longueur L_p et de diamètre ϕ , soumise à une charge uniformément répartie q_L [N/mm] telle que $F = q_L L_p$ [N].

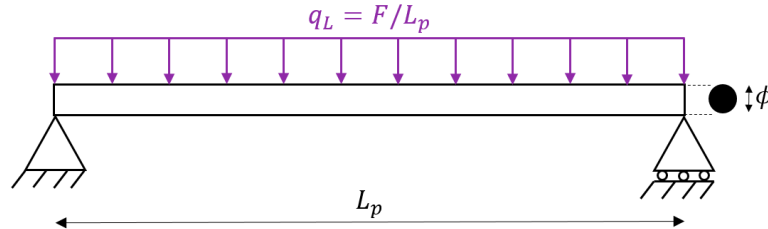


Figure 14 : Poutre fléchie soumise à une charge uniformément répartie

3.2.1. Optimisation du volume de bois en fonction de la contrainte

Cette section est fortement inspirée des travaux de Pierre Latteur [6]. Sur base de la Figure 14 et sachant que la section et l'inertie d'une poutre circulaire pleine sont respectivement données par $A_p = \frac{\pi\phi^2}{4}$ et $I = \frac{\pi\phi^4}{64}$, la contrainte dans la section la plus fléchie ainsi que la formule classique du volume sont données par :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{M_{max}}{2I/\phi} = \frac{4FL_p}{\pi\phi^3} \\ V = \frac{\pi\phi^2}{4} L_p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \phi^2 = \left(\frac{4FL_p}{\pi\sigma} \right)^{2/3} \\ \phi^2 = \frac{4V}{\pi L_p} \end{cases}$$

Où l'expression de la contrainte se calcule pour un moment maximal égal à $M_{max} = \frac{FL_p}{8}$. En éliminant le diamètre ϕ^2 du système, on détermine l'expression du volume en fonction de la contrainte :

$$V = 0.923 \frac{F^{2/3} L_p^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

En l'écrivant sous forme adimensionnelle, l'indicateur de volume apparaît :

$$W = \frac{V\sigma^{2/3}}{F^{2/3} L_p^{5/3}} = 0.923 \quad (1a)$$

Le volume adimensionnel de matière d'une poutre fléchie de longueur L_p soumise à une charge totale F et engendrant une contrainte σ dans la section la plus sollicitée, est donné par l'expression (1a).

Cette expression (1a) est évaluée à l'état limite ultime :

$$V_u = 0.923 \frac{F_u^{2/3} L_p^{5/3}}{f_{m,d}^{2/3}} \rightarrow W_u = \frac{V_u f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L_p^{5/3}} = 0.923 \quad (1b)$$

3.2.2. Optimisation du volume de bois en fonction de la flèche maximale

L'expression de la flèche maximale d'une poutre bi-articulée soumise à une charge uniformément répartie est donnée par :

$$\delta = \frac{5q_L L_p^4}{384 E_{0,m} I}$$

En sachant que $A_p = \frac{\pi\phi^2}{4}$ et $I = \frac{\pi\phi^4}{64}$, le système suivant peut être construit :

$$\begin{cases} \delta = \frac{5FL_p^3}{6\pi E_{0,m}\phi^4} \\ V = \frac{\pi\phi^2}{4}L_p \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \phi^2 = \left(\frac{5FL_p^3}{6\pi E_{0,m}\delta} \right)^{1/2} \\ \phi^2 = \frac{4V}{\pi L_p} \end{cases}$$

En éliminant ϕ^2 du système, le volume exprimé en fonction de la flèche maximale est donné par :

$$V = 0.405 \left(\frac{L_p}{\delta} \right)^{1/2} \frac{F^{1/2} L_p^2}{E_{0,m}^{1/2}}$$

L'indicateur de volume s'obtient en adimensionnalisant l'expression obtenue :

$$W = \frac{V E_{0,m}^{1/2}}{F^{1/2} L_p^2} = 0.405 \left(\frac{L_p}{\delta} \right)^{1/2} \quad (2a)$$

Le volume adimensionnel de matière d'une poutre fléchie de longueur L_p soumise à une charge totale F et engendrant une flèche maximale δ quelque part dans la poutre, est donné par l'expression (2a).

En évaluant cette expression (2a) à l'état limite de service, on trouve :

$$V_\delta = 0.405 \left(\frac{L_p}{\delta_{max}} \right)^{1/2} \frac{F_\delta^{1/2} L_p^2}{E_{0,m}^{1/2}} \rightarrow W_\delta = \frac{V_\delta E_{0,m}^{1/2}}{F_\delta^{1/2} L_p^2} = 0.405 \left(\frac{L_p}{\delta_{max}} \right)^{1/2} \quad (2b)$$

3.3. Expression du volume d'un plancher composé de poutres parallèles

Cette section a 2 objectifs :

- Comparer les planchers classiques et réciproques pour mesurer leur efficacité.
- Permettre le calcul du volume des structures secondaires d'un plancher réciproque car on fait l'hypothèse que les modules sont composés de 4 éléments parallèles aux bords du plancher et donc la structure secondaire, formée d'un ensemble de poutres parallèles, prend place dans des zones rectangulaires.

Soit un plancher de dimensions $L \times \lambda L$ composé de n poutres bi-articulées portant selon le plus petit côté. En supposant $\lambda \in]0; 1]$, chaque poutre a donc une longueur λL , une section circulaire pleine A_p de diamètre ϕ et est espacée de sa voisine d'un entraxe $e = \frac{L}{n}$. La charge surfacique totale agissant sur ce plancher est notée q [N/mm²] telle que $F = q\lambda L^2$ [N].

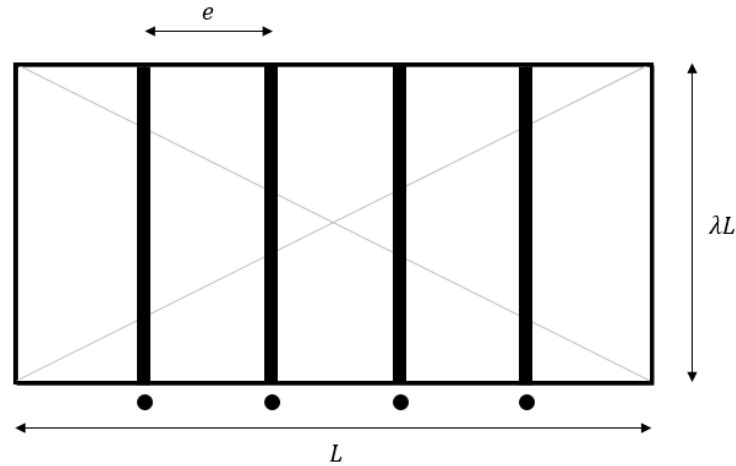


Figure 15 : Plancher classique composé de poutres parallèles

3.3.1. Optimisation du volume de bois en fonction de la contrainte

Sur base de la Figure 15, la charge répartie linéairement sur chaque poutre est donnée par :

$$q = \frac{F}{\lambda L^2} \left[\frac{N}{mm^2} \right] \quad \rightarrow \quad q_L = \frac{F}{\lambda L^2} e = \frac{F}{\lambda L n} \left[\frac{N}{mm} \right]$$

Sachant que le moment maximal d'une poutre bi-articulée soumise à une charge répartie uniforme est $M_{max} = \frac{q_L(\lambda L)^2}{8}$, les expressions de la contrainte dans la section la plus sollicitée en flexion et du volume valent :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{M_{max}}{2I/\phi} = \frac{4F\lambda L}{\pi\phi^3 n} \\ V_i = \frac{\pi\phi^2}{4} \lambda L \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \phi^2 = \left(\frac{4F\lambda L}{\pi n \sigma} \right)^{2/3} \\ \phi^2 = \frac{4V_i}{\pi\lambda L} \end{cases}$$

Le volume d'une seule poutre exprimé en fonction de la contrainte de flexion est donc :

$$V_i = 0.923 \frac{F^{2/3} \lambda^{5/3} L^{5/3}}{n^{2/3} \sigma^{2/3}}$$

Toutes les poutres étant identiques, le volume total de bois du plancher vaut :

$$V = nV_i = 0.923 \frac{F^{2/3} \lambda^{5/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}} n^{1/3}$$

Ecrit de manière adimensionnelle, on obtient finalement :

$$W = \frac{V\sigma^{2/3}}{F^{2/3} L^{5/3}} = 0.923 \lambda^{5/3} n^{1/3} \quad (3a)$$

Le volume de matière d'un plancher composé de n poutres parallèles dont le côté portant est λL_p ($\lambda \in]0; 1]$), soumis à une charge totale F et engendrant une contrainte σ dans la section la plus sollicitée, est donné par l'expression (3a).

A l'état limite ultime, l'expression (3a) devient :

$$V_u = 0.923 \frac{F_u^{2/3} \lambda^{5/3} L^{5/3}}{f_{m,d}^{2/3}} n^{1/3} \quad \rightarrow \quad W_u = \frac{V_u f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L^{5/3}} = 0.923 \lambda^{5/3} n^{1/3} \quad (3b)$$

En Figure 16 est représentée l'expression (3b) de l'indicateur de volume W en fonction du nombre de poutres composant le plancher, et ce pour différentes dimensions du plancher rectangulaire ($\lambda = 1, 0.8, 0.5, 0.3$).

Conclusion : Au plus il y a de poutres, au plus le volume est élevé. La solution triviale correspondant à un nombre de poutres nul est optimale mais non envisageable. La solution à choisir sera conditionnée par la longueur des éléments formant la couverture du plancher.

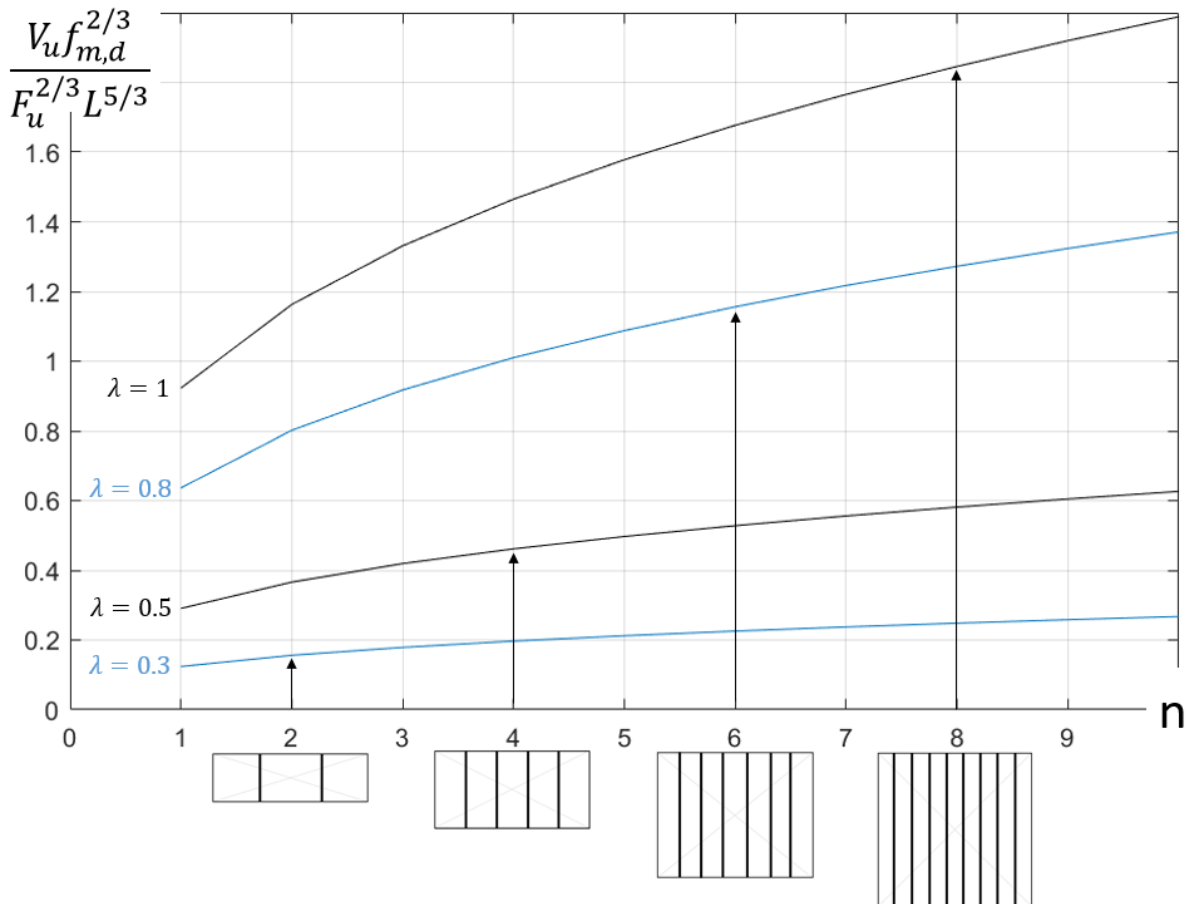


Figure 16 : Plancher classique – Indicateur de volume sous le critère de flexion

3.3.2. Optimisation du volume de bois en fonction de la flèche maximale

Connaissant l'expression de la flèche maximale d'une poutre bi-articulée soumise à une charge uniformément répartie $q_L = \frac{F}{\lambda L n}$, le système suivant peut être construit :

$$\begin{cases} \delta = \frac{5 \left(\frac{F}{\lambda L n} \right) (\lambda L)^4}{384 E_{0,m} I} = \frac{5 F \lambda^3 L^3}{6 \pi E_{0,m} \phi^4 n} \\ V_i = \frac{\pi \phi^2}{4} \lambda L \end{cases} \quad \rightarrow \quad \begin{cases} \phi^2 = \left(\frac{5 F \lambda^3 L^3}{6 \pi E_{0,m} n \delta} \right)^{1/2} \\ \phi^2 = \frac{4 V_i}{\pi \lambda L} \end{cases}$$

Ainsi, le volume d'une seule poutre du plancher exprimé en fonction de la flèche est :

$$V_i = 0.405 \left(\frac{\lambda L}{\delta} \right)^{1/2} \frac{F^{1/2} \lambda^2 L^2}{E_{0,m}^{1/2} n^{1/2}}$$

Et donc le volume total :

$$V = nV_i = 0.405 \left(\frac{\lambda L}{\delta} \right)^{1/2} \frac{F^{1/2} \lambda^2 L^2}{E_{0,m}^{1/2}} n^{1/2}$$

Ecrit sous forme adimensionnelle, on obtient finalement :

$$W = \frac{VE_{0,m}^{1/2}}{F^{1/2}L^2} = 0.405 \lambda^2 n^{1/2} \left(\frac{\lambda L}{\delta} \right)^{1/2} \quad (4a)$$

Le volume de matière d'un plancher composé de n poutres parallèles dont le côté portant est λL_p ($\lambda \in]0; 1]$), soumis à une charge totale F et engendrant une flèche maximale δ est donné par l'expression (4a).

En évaluant cette expression (4a) à l'état limite de service, on trouve :

$$V_\delta = 0.405 \left(\frac{\lambda L}{\delta_{max}} \right)^{1/2} \frac{F_\delta^{1/2} \lambda^2 L^2}{E_{0,m}^{1/2}} n^{1/2} \quad \rightarrow \quad W_\delta = \frac{V_\delta E_{0,m}^{1/2}}{F_\delta^{1/2} L^2} = 0.405 \lambda^2 n^{1/2} \left(\frac{\lambda L}{\delta_{max}} \right)^{1/2} \quad (4b)$$

La Figure 18 représente la fonction $W_\delta(\lambda, n) = 0.405 \lambda^2 n^{1/2}$ tracée en fonction du nombre de poutres composant le plancher et pour différentes valeurs de $\lambda = 1, 0.8, 0.5, 0.3$.

Conclusion : L'allure du graphe en Figure 18 est similaire à celle du graphe en Figure 16 où l'on exprime le volume du plancher en fonction de la contrainte. Il est à noter que les valeurs en ordonnée de ces 2 graphes ne sont pas comparables directement du fait que les indicateurs morphologiques de flexion et de déplacement ne sont pas exprimés en fonction des mêmes paramètres et que ces paramètres ne peuvent pas être corrélés entre eux. Toutefois, les conclusions restent identiques : au plus il y a de poutres composant le plancher, au plus le volume est élevé. La solution triviale correspondant à un nombre de poutres nul est optimale mais non envisageable. Comme pour le cas de la contrainte, la longueur des éléments formant la couverture du plancher déterminera la solution à adopter.

3.3.3. Discussion sur le sens de portée d'un plancher classique

Les expressions du volume en fonction de la contrainte de flexion et de la flèche obtenues en (3b) et (4b) permettent de démontrer que d'un point de vue de l'optimisation de matière, il est toujours plus intéressant que le plancher porte selon le petit côté. Pour démontrer cela, considérons 2 planchers de mêmes dimensions tels que l'un porte selon le côté de longueur λL (CAS 1, analysé ci-dessus) et l'autre porte selon le côté de longueur L (CAS 2). Un espacement e entre chaque poutre est supposé constant et égal dans les 2 cas :

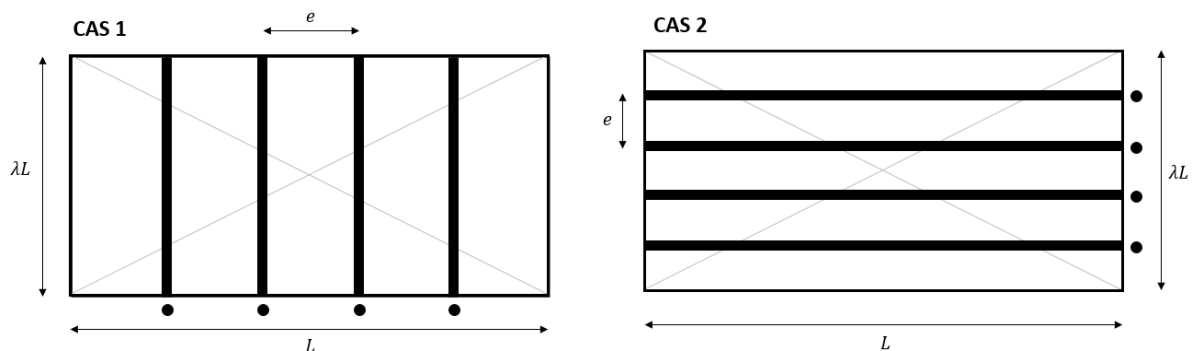


Figure 17 : Sens de portée d'un plancher classique

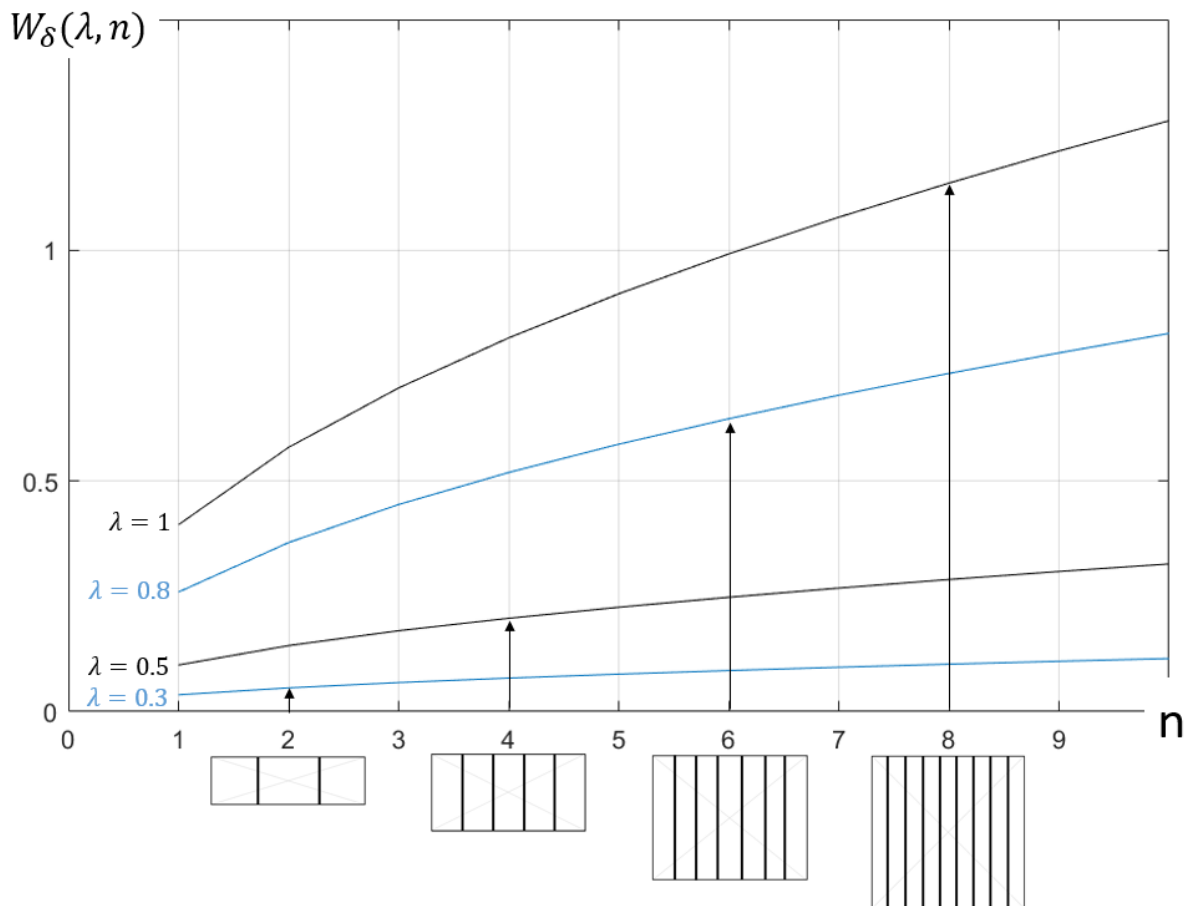


Figure 18 : Plancher classique – Variations de $W_\delta(\lambda, n)$ sous le critère de déplacement

A l'ELU, l'équation (3b) fournit le volume en fonction de la contrainte pour chacun des 2 cas :

- Volume dans le CAS 1 ($n = L/e$) :

$$V_{u,1} = 0.923 \frac{F_u^{2/3} \lambda^{5/3} L^{5/3}}{f_{m,d}^{2/3}} \left(\frac{L}{e} \right)^{1/3}$$

- Volume dans le CAS 2 ($n = \lambda L/e$) :

$$V_{u,2} = 0.923 \frac{F_u^{2/3} L^{5/3}}{f_{m,d}^{2/3}} \left(\frac{\lambda L}{e} \right)^{1/3}$$

Le rapport de ces 2 volumes donne :

$$\frac{V_{u,1}}{V_{u,2}} = \lambda^{4/3}$$

Comme $\lambda \in]0; 1]$, le volume $V_{u,2}$ sera effectivement plus important que le volume $V_{u,1}$. Le CAS 1 permet donc une plus grande économie de matière que le CAS 2.

Le même raisonnement s'applique à l'ELS en utilisant l'équation (4b) pour chacun des 2 cas :

- Volume dans le CAS 1 ($n = L/e$) :

$$V_{\delta,1} = 0.405 \left(\frac{\lambda L}{\delta_{max}} \right)^{1/2} \frac{F_{\delta}^{1/2} \lambda^2 L^2}{E_{0,m}^{1/2}} \left(\frac{L}{e} \right)^{1/2}$$

- Volume dans le CAS 2 ($n = \lambda L/e$) :

$$V_{\delta,2} = 0.405 \left(\frac{L}{\delta_{max}} \right)^{1/2} \frac{F_{\delta}^{1/2} L^2}{E_{0,m}^{1/2}} \left(\frac{\lambda L}{e} \right)^{1/2}$$

En supposant que le concepteur choisisse $\frac{L}{\delta_{max}} = \frac{\lambda L}{\delta_{max}}$, le rapport des volumes donne :

$$\frac{V_{\delta,1}}{V_{\delta,2}} = \lambda^{3/2}$$

Comme on peut le voir, les conclusions sont les mêmes que dans le cas de la contrainte : pour $\lambda \in]0; 1]$, le volume $V_{\delta,2}$ sera plus important que le volume $V_{\delta,1}$. Dans la suite du document, les poutres secondaires porteront donc toujours selon le petit côté de chaque zone du plancher réciproque.

3.4. Expression du volume d'un plancher carré composé d'un seul module réciproque élémentaire

Soit un plancher carré de dimensions $L \times L$ composé d'un module réciproque à 4 poutres. Chaque poutre a une longueur L_p et une section circulaire pleine A_p dont le diamètre vaut ϕ . Cette fois-ci, la charge surfacique considérée q [N/mm²], telle que $F = qL^2$ [N], est distribuée sur 5 zones : le sens de portée des zones rectangulaires est choisi selon le petit côté de longueur $(1 - a)L_p$ et on décide de déterminer un sens de portée vertical pour la zone carrée centrale, comme illustré en Figure 19.

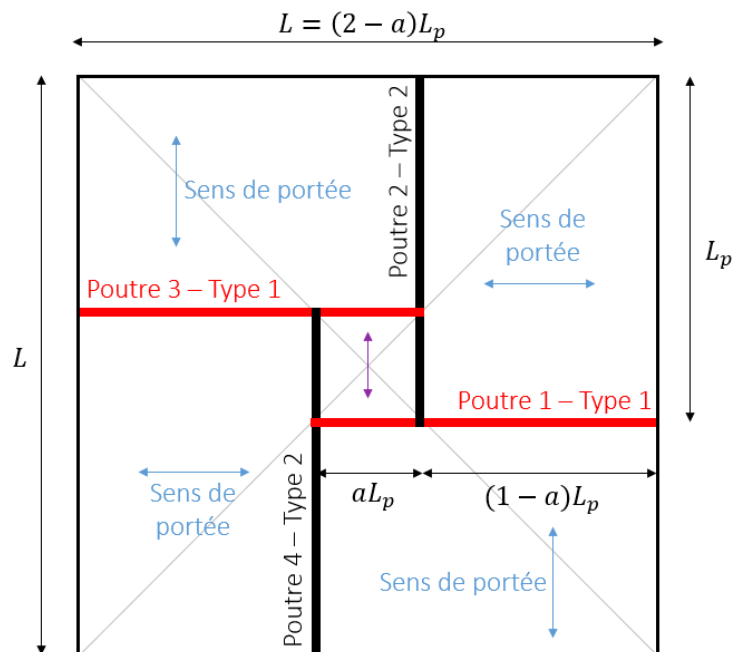


Figure 19 : Plancher carré avec un module réciproque soumis à une distribution uniforme des charges

Note : On définit les appuis avec les indices i et j tels que $R_{i,j}$ représente la réaction d'appui de la poutre i s'appuyant sur la poutre j . L'indice 0 fait référence au bord du plancher où l'appui est fixe.

De par le choix du sens de portée de la zone carrée centrale, on distingue 2 types de poutres dans le module : les poutres 1 et 3 ainsi que les poutres 2 et 4 sont identiques deux à deux car soumises au même chargement. Elles se nomment, respectivement, poutres « type 1 » et « type 2 ». Leurs schémas statiques, basés, respectivement, sur les poutres 1 et 2, sont fournis en Figure 20 et Figure 21.

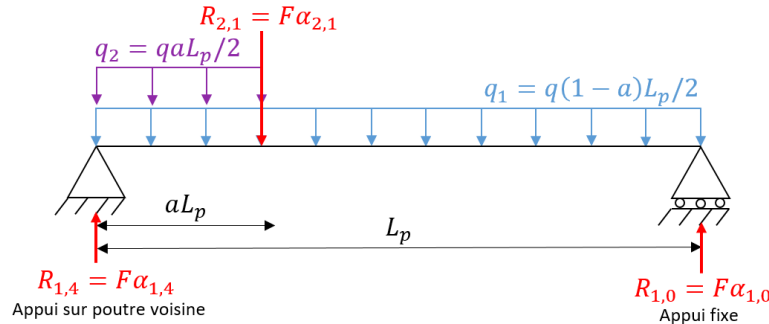


Figure 20 : Schéma statique d'une poutre type 1 soumise à un chargement uniformément distribué

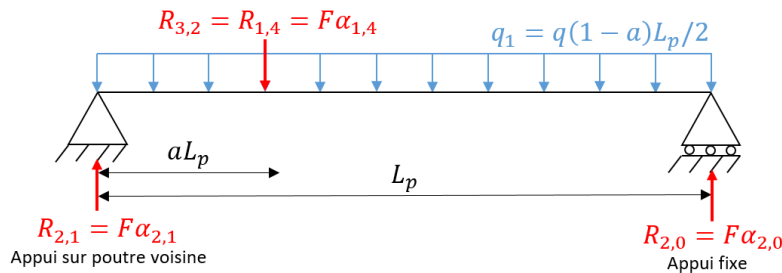


Figure 21 : Schéma statique d'une poutre type 2 soumise à un chargement uniformément distribué

La résolution des équations d'équilibre des moments et des efforts verticaux dans chaque poutre type donne les réactions d'appuis suivantes :

$$\begin{cases} R_{1,4} = F\alpha_{1,4} = F \left(\frac{a^2 - a + 1}{4a(2-a)^2} \right) \\ R_{1,0} = F\alpha_{1,0} = F \left(\frac{a^2 - 2a + 2}{4(2-a)^2} \right) \\ R_{2,1} = F\alpha_{2,1} = F \left(\frac{-a^3 + a^2 - a + 1}{4a(2-a)^2} \right) \\ R_{2,0} = F\alpha_{2,0} = F \left(\frac{a^2 - 2a + 2}{4(2-a)^2} \right) \end{cases}$$

3.4.1. Optimisation du volume de bois en fonction de la contrainte

3.4.1.1. Approximation : toutes les poutres du module sont de type 1

Cette section est fortement inspirée des travaux de Pierre Latteur [6]. Dans cette première partie, on considère que les 4 poutres du module réciproque sont identiques et de type 1. Par cette approximation, on se met du côté de la sécurité car la poutre type 1 est plus chargée que la poutre type 2. Cette dernière sera alors plus ou moins surdimensionnée en fonction de la valeur de la proportion d'engagement a .

3.4.1.1.1. Prise en compte de la flexion dans le calcul de la contrainte

3.4.1.1.1.1. Expression du moment maximal

Le critère de flexion dépend du moment maximal de la poutre. Ne sachant, à première vue, pas où il se situe, il faut l'évaluer dans chaque tronçon de poutre.

Avant toute chose, les efforts internes sont déterminés à l'aide des coupes en Figure 22.

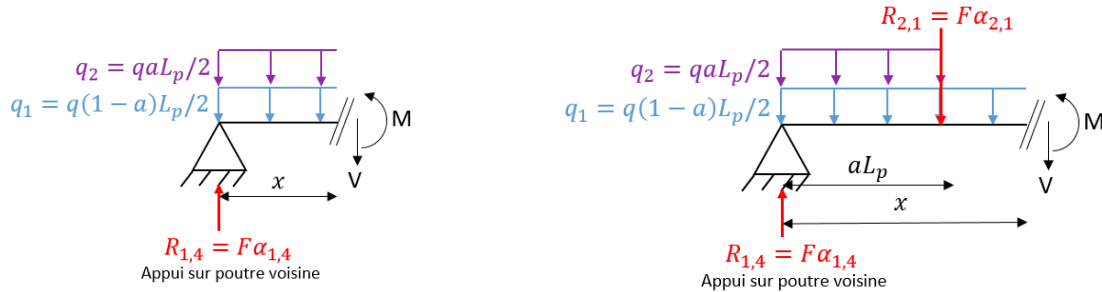


Figure 22 : Poutre type 1 - coupe 1 (gauche) et coupe 2 (droite)

La coupe 1 pour $0 \leq x \leq aL_p$ fournit :
$$\begin{cases} V_{g,1}(x) = -(q_1 + q_2)x + R_{1,4} \\ M_{g,1}(x) = -(q_1 + q_2)\frac{x^2}{2} + R_{1,4}x \end{cases}$$

La coupe 2 pour $aL_p \leq x \leq L_p$ fournit :

$$\begin{cases} V_{d,1}(x) = -q_1x + R_{1,4} - R_{2,1} - q_2aL_p \\ M_{d,1}(x) = -\frac{q_1}{2}x^2 + (R_{1,4} - R_{2,1} - q_2aL_p)x + \left(R_{2,1} + q_2\frac{aL_p}{2}\right)aL_p \end{cases}$$

Moment maximal dans le tronçon gauche de la poutre type 1 ($0 \leq x \leq aL_p$)

La position du moment maximal déterminée à l'aide de la relation $V_{g,1} = \frac{dM_{g,1}(x)}{dx} = 0$ fournit :

$$x_{g,1,max} = \left(\frac{a^2 - a + 1}{2a(2 - a)}\right)L$$

Il faut vérifier que cette solution se trouve dans les bornes du tronçon :

$$\left(\frac{a^2 - a + 1}{2a(2 - a)}\right)L \leq aL_p = \frac{a}{2 - a}L \quad \rightarrow \quad a_{1,2} \geq \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La solution « + » permet de conclure que le moment maximal est dans le tronçon gauche pour des valeurs $a \geq \frac{-1 + \sqrt{5}}{2} = 0.618$. Dans ce cas, il vaut :

$$M_{g,1,max} = \alpha_{1,4}^2(2 - a)FL = f_{1,g,0}(a)FL$$

Où on a posé $f_{1,g,0}(a) = \alpha_{1,4}^2(2 - a)$.

Moment maximal dans le tronçon droit de la poutre type 1 ($aL_p \leq x \leq L_p$)

En utilisant la même relation que précédemment, le moment maximal se trouve à la position suivante :

$$x_{d,1,max} = \left(\frac{-a^2}{2(1 - a)(2 - a)}\right)L$$

Cette solution est négative $\forall a \in [0; 1]$. Le moment maximal n'est jamais dans le tronçon droit.

Moment maximal au niveau de la charge ponctuelle de la poutre type 1

Le moment calculé au droit de la charge ponctuelle est donné par :

$$M_{p,1,max} = M_{g,1}(x = aL_p) = \frac{1-a}{4(2-a)^3} FL = f_{1,p,0}(a) FL$$

Où on a posé $f_{1,p,0}(a) = \frac{1-a}{4(2-a)^3}$.

Finalement, on conclut que le moment maximal dans la poutre type 1 est donné par :

$$M_{1,max} = f_{1,0}(a) FL \quad \text{avec } f_{1,0}(a) = \begin{cases} f_{1,p,0}(a) = \frac{1-a}{4(2-a)^3} & 0 \leq a \leq 0.618 \\ f_{1,g,0}(a) = \alpha_{1,4}^2 (2-a) & 0.618 \leq a \leq 1 \end{cases}$$

3.4.1.1.1.2. Expression du volume du module réciproque

Les expressions de la contrainte et du volume pour une seule poutre sont :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{M_{1,max}}{2I_1/\phi_1} = \frac{32f_{1,0}(a)FL}{\pi\phi_1^3} \\ V_1 = \frac{\pi\phi_1^2}{4} \left(\frac{L}{2-a} \right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \phi_1^2 = \left(\frac{32f_{1,0}(a)FL}{\pi\sigma} \right)^{2/3} \\ \phi_1^2 = \frac{4(2-a)V_1}{\pi L} \end{cases}$$

Le volume d'une seule poutre du module réciproque est donné par :

$$V_1 = 3.691 \frac{f_{1,0}^{2/3}(a) F^{2/3} L^{5/3}}{2-a} \frac{1}{\sigma^{2/3}}$$

Sous l'hypothèse d'un plancher réciproque à 4 poutres identiques de type 1, le volume total est :

$$V = 4V_1 = 14.762 \frac{f_{1,0}^{2/3}(a) F^{2/3} L^{5/3}}{2-a} \frac{1}{\sigma^{2/3}} = W_{B,1}(a) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Où $W_{B,1}(a) = 14.762 \frac{f_{1,0}^{2/3}(a)}{2-a}$. L'indicateur de volume apparait en rendant l'expression adimensionnelle :

$$W = \frac{V\sigma^{2/3}}{F^{2/3}L^{5/3}} = W_{B,1}(a) \quad (5a)$$

Le volume de matière d'un plancher composé d'un module réciproque élémentaire à 4 poutres identiques, soumis à une charge totale F et engendrant une contrainte σ dans la section la plus fléchie est donné par l'expression (5a). Cela signifie que peu importe la charge, la contrainte ou la longueur du plancher, le volume minimal sera toujours atteint pour une valeur de a qui minimise $W_{B,1}(a)$.

Cette expression (5a) est évaluée à l'état limite ultime :

$$V_u = W_{B,1}(a) \frac{F_u^{2/3} L^{5/3}}{f_{m,d}^{2/3}} \rightarrow W_u = \frac{V_u f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L^{5/3}} = W_{B,1}(a) \quad (5b)$$

Sur la Figure 23 est représentée l'expression (5b) de l'indicateur de volume en fonction de la proportion d'engagement a .

Conclusion : Au plus la valeur de a est faible, au plus le volume est faible. En effet, la structure sera près de 4 fois plus légère lorsque $a = 0$ que lorsque $a = 1$. La solution optimale correspond au cas

où le plancher est composé de 4 poutres de longueur $L/2$ qui se rejoignent en leur extrémité, au centre du plancher. Cependant, les effets dus à l'effort tranchant n'ont pas été pris en compte et on se doute que cela aura une incidence pour des valeurs $a \rightarrow 0$. Etant donné l'approximation faite, la courbe n'est pas optimale. Toutefois, elle reste intéressante pour plusieurs comparaisons dans la suite de ce document.

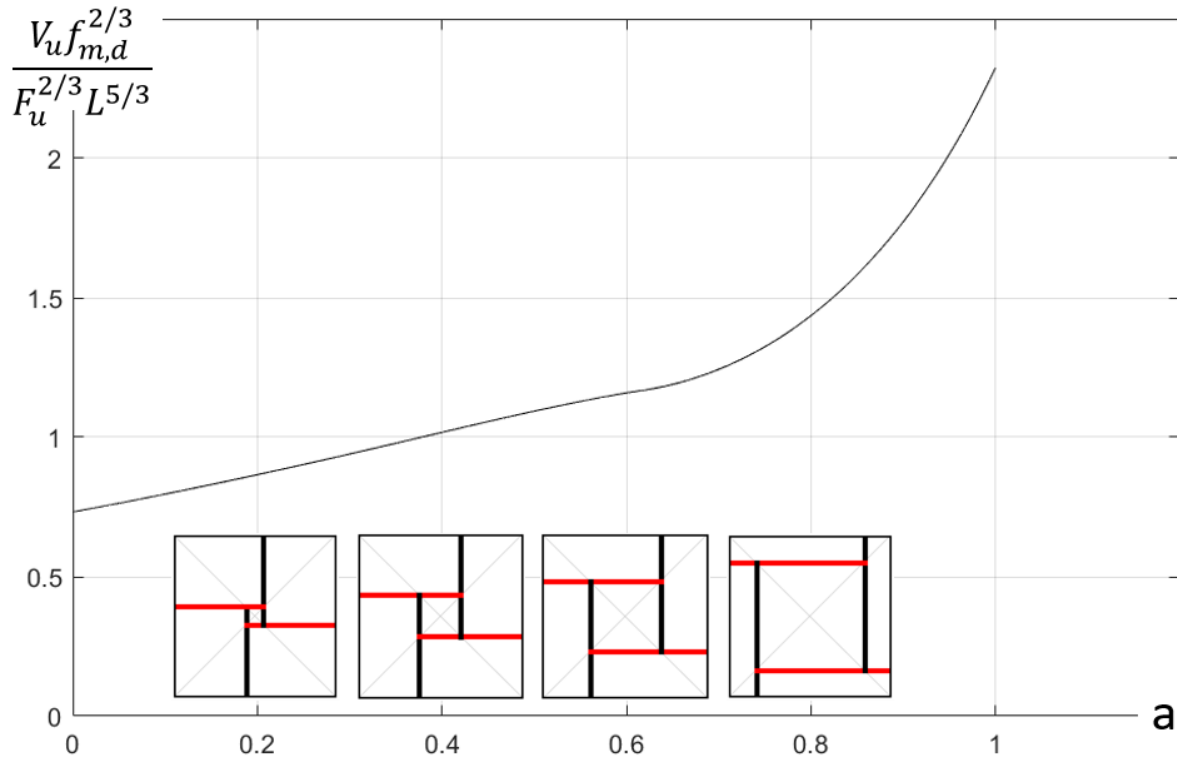


Figure 23 : Plancher carré (approximation) – Indicateur de volume sous le critère de flexion

3.4.1.2. Sans approximation : 2 poutres type 1 et 2 poutres type 2 composent le module

Afin d'optimiser au mieux la structure, on considère le module tel qu'il est réellement, c'est-à-dire, composé de 2 types de poutres distinctes. Le volume d'une poutre type 1 a déjà été déterminé en section 3.4.1.1. Seul le développement pour la poutre type 2 est explicité ci-dessous.

3.4.1.2.1. Prise en compte de la flexion dans le calcul de la contrainte pour la poutre type 2

3.4.1.2.1.1. Expression du moment maximal

La première étape consiste à évaluer le moment maximal dans toutes les parties de la poutre type 2, illustrée en Figure 21. Les efforts internes sont déterminés grâce aux coupes en Figure 24.

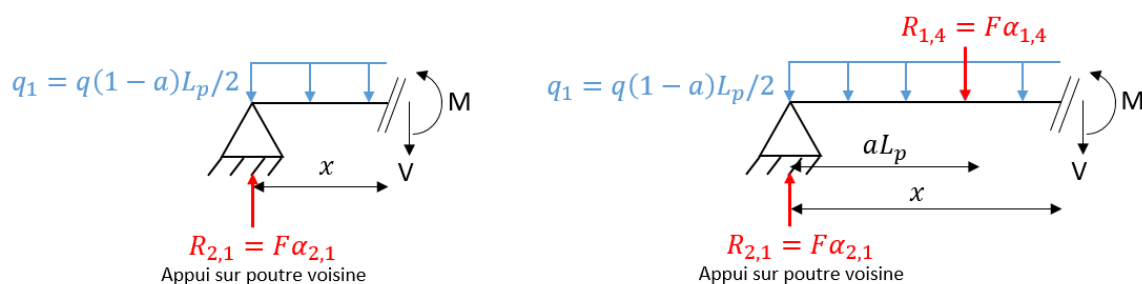


Figure 24 : Poutre type 2 - coupe 1 (gauche) et coupe 2 (droite)

La coupe 1 pour $0 \leq x \leq aL_p$ fournit :
$$\begin{cases} V_{g,2}(x) = -q_1x + R_{2,1} \\ M_{g,2}(x) = -\frac{q_1}{2}x^2 + R_{2,1}x \end{cases}$$

La coupe 2 pour $aL_p \leq x \leq L_p$ fournit :
$$\begin{cases} V_{d,2}(x) = -q_1x + R_{2,1} - R_{1,4} \\ M_{d,2}(x) = -\frac{q_1}{2}x^2 + (R_{2,1} - R_{1,4})x + R_{1,4}aL_p \end{cases}$$

Moment maximal dans le tronçon gauche de la poutre type 2 ($0 \leq x \leq aL_p$)

La position du moment maximal est donnée par la résolution de l'équation $V_{g,2} = 0$:

$$x_{g,2,max} = \frac{a^2 + 1}{2a} L_p$$

La vérification de la solution dans les bornes du domaine mène à l'inéquation impossible : $1 < a^2$.
Donc, le moment maximal ne se trouve pas dans le tronçon gauche.

Moment maximal dans le tronçon droit de la poutre type 2 ($aL_p \leq x \leq L_p$)

La résolution de l'équation $V_{d,2} = 0$ fournit la position suivante :

$$x_{d,2,max} = \left(\frac{-a^2}{2(1-a)} \right) L_p$$

Cette valeur étant toujours négative, le moment maximal ne se trouve pas non plus dans le tronçon droit.

Moment maximal au niveau de la charge ponctuelle de la poutre type 2

On conclut donc que le moment maximal se situe au droit de la charge ponctuelle pour toute valeur de $a \in [0; 1]$. Dans ce cas, il vaut :

$$M_{2,max} = M_{g,2}(x = aL_p) = \frac{1-a}{4(2-a)^3} FL = f_{2,0}(a) FL$$

Où on a posé $f_{2,0}(a) = \frac{1-a}{4(2-a)^3}$.

3.4.1.2.1.2. Expression du volume d'une poutre type 2

Le critère de flexion et l'expression du volume d'une poutre type 2 sont donnés par :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{M_{2,max}}{2I_2\phi_2} = \frac{32f_{2,0}(a)FL}{\pi\phi_2^3} \\ V_2 = \frac{\pi\phi_2^2}{4} \left(\frac{L}{2-a} \right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \phi_2^2 = \left(\frac{32f_{2,0}(a)FL}{\pi\sigma} \right)^{2/3} \\ \phi_2^2 = \frac{4(2-a)V_2}{\pi L} \end{cases}$$

Le volume d'une seule poutre type 2 du module réciproque vaut alors :

$$V_2 = 3.691 \frac{f_{2,0}^{2/3}(a) F^{2/3} L^{5/3}}{2-a \sigma^{2/3}}$$

Note : Le diamètre de la poutre type 2 est adapté de manière à ce que la contrainte de flexion (et donc le matériau utilisé) soit identique dans tout le module :

$$\sigma_1 = \sigma_2 \rightarrow \phi_2 = \phi_1 \left(\frac{M_{2,max}}{M_{1,max}} \right)^{1/3} = \phi_1 \left(\frac{f_{2,0}(a)}{f_{1,0}(a)} \right)^{1/3}$$

Cette valeur de ϕ_2 ne dépend, au final, que de a et ϕ_1 , diamètre de référence du problème. De plus, pour $a \leq 0.618$, le moment maximal dans les 2 types de poutres sont égaux et donc $\phi_1 = \phi_2$.

3.4.1.2.1.3. Expression du volume du module réciproque

En additionnant 2 à 2 le volume des poutres, on obtient l'équation du volume de bois du module en fonction de la contrainte :

$$V = 2V_1 + 2V_2 = \frac{7.382}{2-a} \left(f_{1,0}^{2/3}(a) + f_{2,0}^{2/3}(a) \right) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = W_B(a) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Où $W_B(a) = \frac{7.382}{2-a} \left(f_{1,0}^{2/3}(a) + f_{2,0}^{2/3}(a) \right)$. En adimensionnalisant, l'indicateur de volume apparaît :

$$W = \frac{V \sigma^{2/3}}{F^{2/3} L^{5/3}} = W_B(a) \quad (6a)$$

Le volume de matière d'un plancher carré composé d'un module réciproque élémentaire à 4 poutres identiques 2 à 2, soumis à une charge F répartie uniformément sur tout le plancher et engendrant une contrainte σ dans la section la plus sollicitée, est donné par l'expression (6a).

En évaluant cette expression (6a) à l'état limite ultime, on trouve :

$$V_u = W_B(a) \frac{F_u^{2/3} L^{5/3}}{f_{m,d}^{2/3}} \quad \rightarrow \quad W_u = \frac{V_u f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L^{5/3}} = W_B(a) \quad (6b)$$

Sur la Figure 25 est représentée l'expression (6b) du volume adimensionnel W sous le critère de flexion en fonction de la proportion d'engagemment a .

Conclusion : Les conclusions sont globalement similaires à celles faites pour la Figure 23, c'est-à-dire, au plus la valeur de a est faible, au plus le volume est faible. Sans tenir compte des effets dus à l'effort tranchant, la solution optimale correspond au cas où le plancher est composé de 4 poutres de longueur $\frac{L}{2}$ qui se rejoignent en leur extrémité au centre du plancher.

Il est à noter que, jusqu'à présent, on a considéré le cas où seul le volume des 4 poutres du module est pris en compte pour une charge extérieure s'appliquant sur le plancher : on n'a pas encore ajouté le volume transmis par la structure secondaire. Cependant, le volume de ces structures intermédiaires sera également plus faible pour $a = 0$ que pour $a = 1$ car la portée est diminuée de moitié entre les 2 valeurs de a . Il est aussi possible que la structure secondaire ait un optimum compris quelque part entre $a = 0$ et $a = 1$. Tout ceci est pris en compte dans la sous-section 3.4.1.2.2.

La chute du volume en fin de courbe s'explique par le fait que le chargement total, pour $a \approx 1$, est majoritairement repris par le plancher de la zone centrale. Or, ce plancher central est supporté par la poutre type 1. Ainsi, alors que la poutre type 1 est de plus en plus en chargée, la poutre type 2 l'est de moins en moins donc, réalisant le calcul à contrainte maximale égale dans chaque poutre, le diamètre de la poutre type 2 diminue fortement. Comme on peut le voir sur la Figure 26 représentant la relation $\frac{\phi_2}{\phi_1} = \left(\frac{M_{2,max}}{M_{1,max}} \right)^{1/3}$, les 2 diamètres sont égaux jusqu'à la valeur $a = 0.618$ car leur rapport vaut 1. Ensuite, le diamètre ϕ_2 décroît très rapidement jusqu'à tendre vers 0 pour des valeurs $a \approx 1$. Cela affecte donc le volume total de la structure.

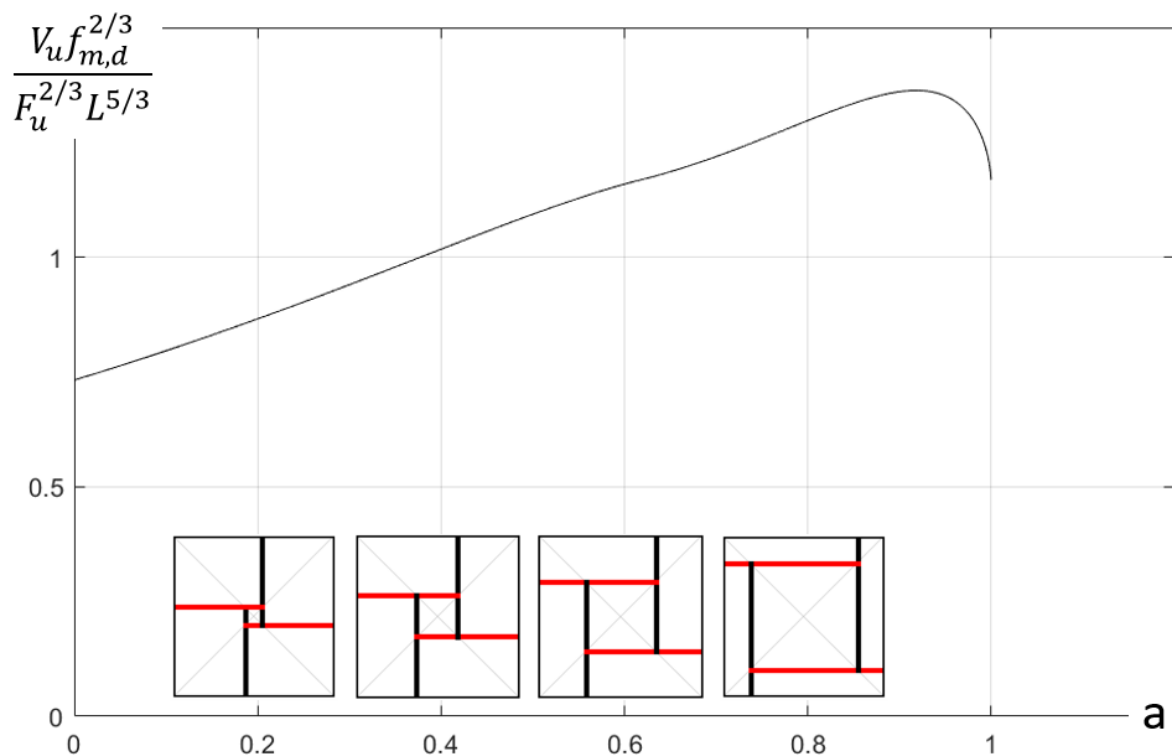


Figure 25 : Plancher carré – Indicateur de volume sous le critère de flexion

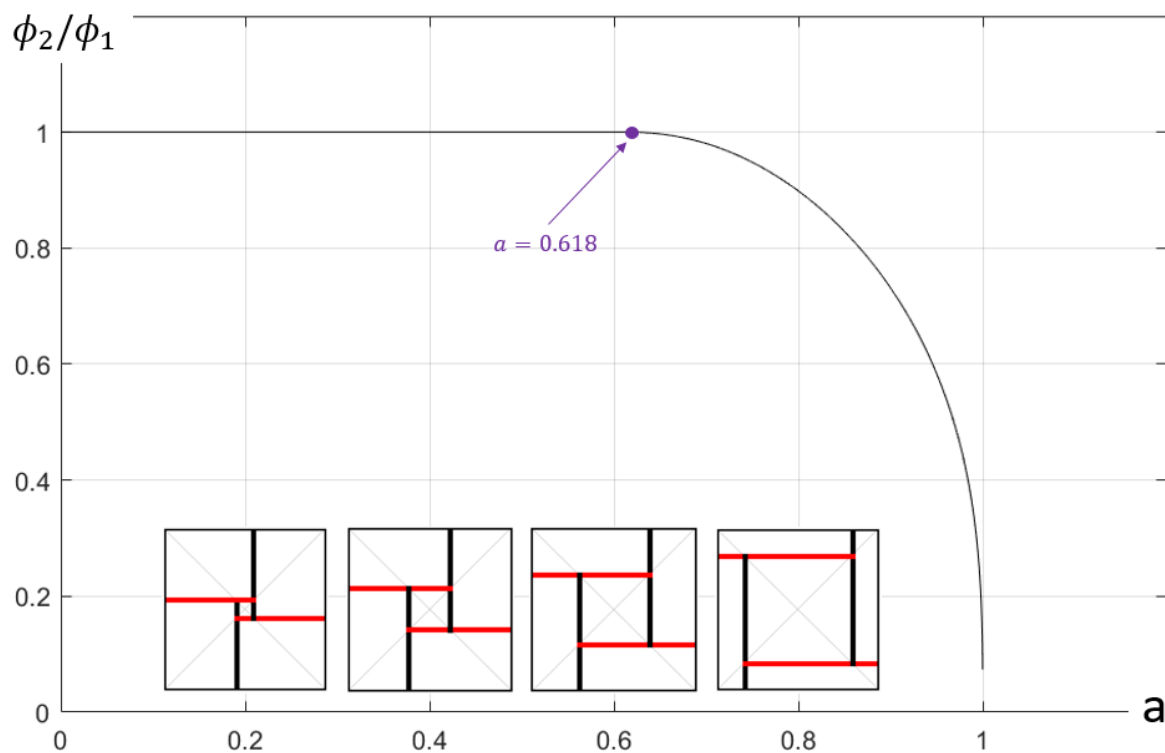


Figure 26 : Plancher carré – Evolution du diamètre des poutres types 1 et 2

Il peut être intéressant de superposer la courbe en Figure 23, représentant le volume du module lorsque les 4 poutres sont identiques et de type 1, avec celle de la Figure 25, où les 2 types de poutres sont pris en compte.

Conclusion : On remarque que les 2 allures sont exactement les mêmes jusqu'à $\alpha = 0.618$, valeur avant laquelle les moments maximaux sont égaux dans toutes les poutres du module. Ensuite, les courbes se séparent pour des valeurs de α plus importantes du fait de la contribution de la poutre type 2. Donc, la Figure 27 montre que pour des faibles valeurs de α , l'approximation faite lors du premier raisonnement est tout à fait valable, tandis que pour des valeurs de $\alpha > 0.8$, le gain de matière occasionné par la prise en compte des 2 types de poutres est non négligeable. Effectivement, le volume étant réduit de pratiquement la moitié, il est alors intéressant de considérer un module réciproque composé de 4 poutres identiques 2 à 2.

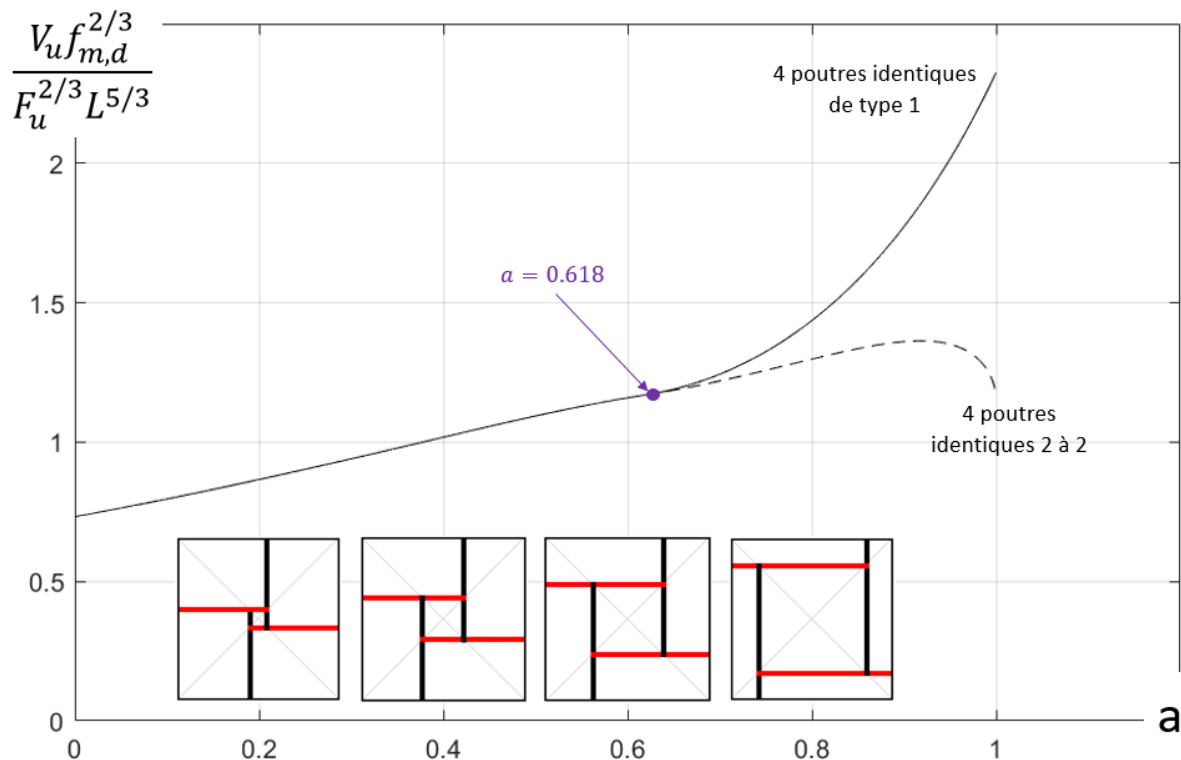


Figure 27 : Plancher carré – Superposition des indicateurs de volume sous le critère de flexion avec et sans approximation sur le type de poutres

3.4.1.2.2. Correction du graphique en tenant compte du volume des structures intermédiaires

Au volume de la structure primaire doit s'ajouter celui de la structure secondaire. Pour cela, l'entraxe e entre les poutres intermédiaires étant une donnée du problème conditionnée par le type de plancher en couverture (planches OSB, par exemple), on le considère constant sur les 5 zones du plancher.

Comme pour la structure primaire, on souhaite la même contrainte dans toutes les poutres intermédiaires. Pour que cela soit possible à entraxe constant, il faut adapter le diamètre des poutres dans chaque zone tel que :

$$\sigma_r = \sigma_c \quad \rightarrow \quad \phi_c = \phi_r \left(\frac{M_{c,max}}{M_{r,max}} \right)^{1/3}$$

Où les indices « r » et « c » correspondent aux poutres secondaires, respectivement, sur les zones rectangulaires et carrées du plancher.

Sur base de la Figure 19, la structure secondaire peut se décomposer en plusieurs parties :

- 4 zones rectangulaires de dimensions $L_p \times (1-a)L_p = \frac{L}{2-a} \times (1-a) \frac{L}{2-a}$:
Le nombre de poutres dans chaque zone est donné par $n_r = \frac{L_p}{e} = \frac{L/(2-a)}{e}$. En reprenant l'expression (3a) du volume d'un plancher avec sens de portée, on trouve :

$$V_r = 0.923 n_r^{1/3} \frac{\left(\frac{A_r}{A_{tot}} F\right)^{2/3} \left((1-a)L_p\right)^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = 0.923 \left(\frac{L}{e}\right)^{1/3} \frac{(1-a)^{7/3} F^{2/3} L^{5/3}}{(2-a)^{10/3} \sigma^{2/3}}$$

$$\text{Où } A_r = (1-a)L_p^2 \text{ et } A_{tot} = ((2-a)L_p)^2.$$

- 1 zone carrée centrale de dimensions $aL_p \times aL_p = \frac{aL}{(2-a)} \times \frac{aL}{(2-a)}$:
Le nombre de poutres dans cette zone est donné par $n_c = \frac{aL_p}{e} = \frac{aL/(2-a)}{e}$. En se basant à nouveau sur l'expression (3a), on obtient le volume de la structure secondaire dans la zone carrée :

$$V_c = 0.923 n_c^{1/3} \frac{\left(\frac{A_c}{A_{tot}} F\right)^{2/3} (aL_p)^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = 0.923 \left(\frac{L}{e}\right)^{1/3} \left(\frac{a}{2-a}\right)^{10/3} \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

$$\text{Où } A_c = a^2 L_p^2 \text{ et } A_{tot} = ((2-a)L_p)^2.$$

Ainsi, le volume total de la structure secondaire vaut :

$$V_{sec} = 4V_r + V_c = 0.923 \left(\frac{L}{e}\right)^{1/3} \left(\frac{4(1-a)^{7/3} + a^{10/3}}{(2-a)^{10/3}}\right) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Le volume total du plancher sous le critère de flexion, incluant les 2 niveaux de structure, est alors donné par :

$$V_{tot} = \left(W_B(a) + 0.923 \left(\frac{L}{e}\right)^{1/3} \left(\frac{4(1-a)^{7/3} + a^{10/3}}{(2-a)^{10/3}}\right) \right) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = W_{B,SS} \left(a, \frac{L}{e}\right) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Avec $W_{B,SS} \left(a, \frac{L}{e}\right) = W_B(a) + 0.923 \left(\frac{L}{e}\right)^{1/3} \left(\frac{4(1-a)^{7/3} + a^{10/3}}{(2-a)^{10/3}}\right)$. Ecrit de manière adimensionnelle et évalué à l'ELU, l'indicateur de volume en flexion apparaît :

$$W_{u,tot} = \frac{V_{u,tot} f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L^{5/3}} = W_{B,SS} \left(a, \frac{L}{e}\right) \quad (7)$$

Le volume total (structures primaire + secondaire) de matière d'un plancher soumis à une charge totale F et engendrant une contrainte de flexion σ dans la section la plus sollicitée est donné par l'expression (7).

Sur la Figure 28 est représentée l'expression (7) de l'indicateur de volume tenant compte de la structure secondaire en fonction de la proportion d'engagement a , et ce pour différentes valeurs du rapport $\frac{L}{e} = 0, 5, 10, 15, 20, 25$.

Conclusion : Lorsque la proportion d'engagement α augmente, la zone centrale carrée augmente tandis que les zones rectangulaires diminuent. A partir de $\alpha > 0.7 \dots 0.8$, la taille de la zone centrale carrée est relativement importante et donc la portée des poutres de cette zone l'est également. Le volume de la structure secondaire augmente alors fortement en comparaison du volume de la structure primaire.

De plus, comme on l'avait déjà remarqué à la Figure 16, analysant le volume adimensionnel d'un plancher simple, au plus le nombre de poutres sur les planchers secondaires augmente, au plus le volume augmente.

Ensuite, on remarque que la solution optimale se trouve pour des valeurs $\alpha < 0.7$. En effet, pour des valeurs $\alpha > 0.7$, le volume augmente fortement sous le critère de flexion dominant. Tandis que pour des valeurs $\alpha < 0.7$, les courbes de la structure totale sont relativement constantes, ce qui permet une certaine latitude au concepteur. Cependant, l'effet dû à l'effort tranchant n'a pas encore été pris en compte et on se doute que cela ajoutera une borne inférieure.

Il est également intéressant de comparer la masse totale d'un plancher carré de dimensions $L \times L$ composé d'un module réciproque élémentaire et de sa structure secondaire avec celle d'un plancher classique de mêmes dimensions composé de n poutres parallèles de portée L et d'entraxe constant e . Pour cela, on définit l'indicateur adimensionnel de l'entraxe $\varepsilon = \frac{e}{L}$. Dans le cas d'un plancher simple, $n = \frac{L}{e}$ représente le nombre de poutres composant le plancher tandis que dans un plancher avec module réciproque, ce nombre n'a pas de signification physique directe. Cependant, en définissant l'indicateur de l'entraxe comme ceci, il est possible de comparer le volume de ces 2 planchers. On prend donc la valeur optimale de W pour chacune des courbes $\frac{L}{e}$ en Figure 28 et on la divise par la valeur correspondante de W pour le plancher classique en Figure 16 :

- Pour $\frac{1}{\varepsilon} = 5$: le rapport vaut 0.86 (gain de matière de 14%)
- Pour $\frac{1}{\varepsilon} = 10$: le rapport vaut 0.77 (gain de matière de 23%)
- Pour $\frac{1}{\varepsilon} = 15$: le rapport vaut 0.71 (gain de matière de 29%)
- Pour $\frac{1}{\varepsilon} = 20$: le rapport vaut 0.67 (gain de matière de 33%)
- Pour $\frac{1}{\varepsilon} = 25$: le rapport vaut 0.64 (gain de matière de 36%)

Le plancher carré avec module réciproque permet donc d'économiser entre 15% et 35% de matière par rapport à un plancher simple avec sens de portée.

Finalement, on note également que le poids propre de la structure secondaire est compris entre 30% et 50% du poids propre de la structure totale (primaire + secondaire) en fonction des valeurs de α et L/e .

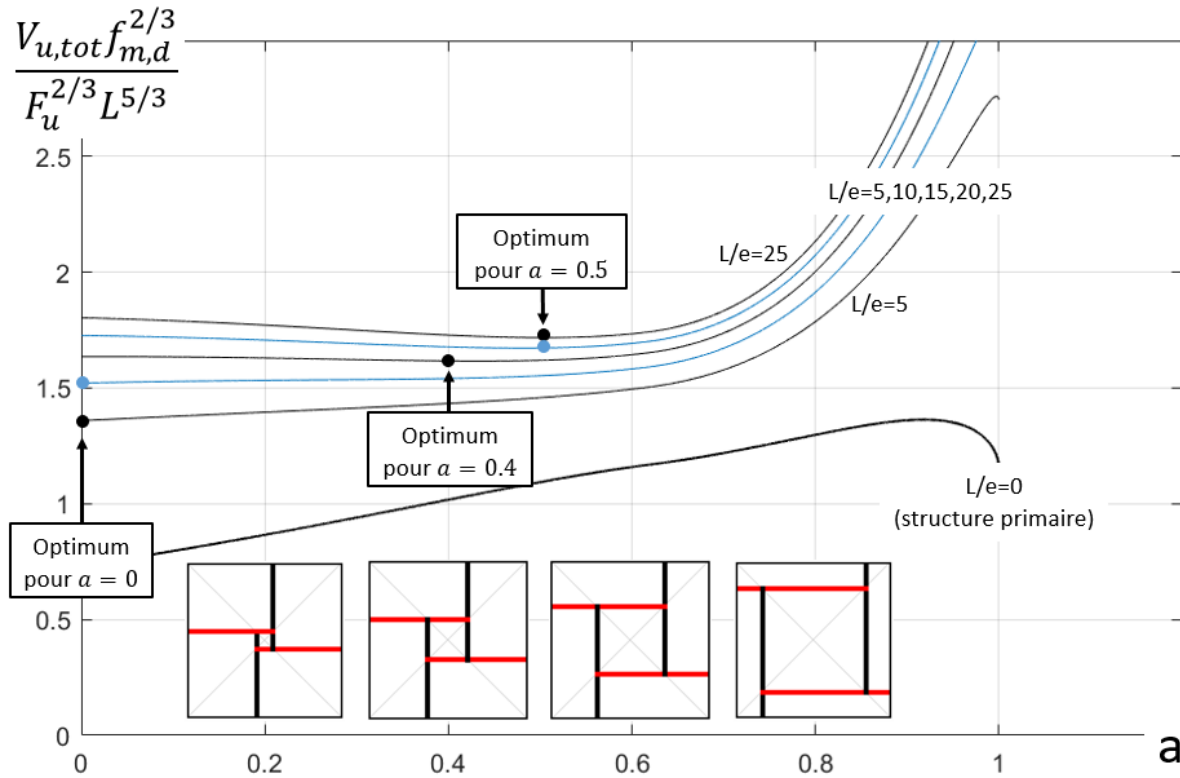


Figure 28 : Plancher carré - Indicateur de volume de la structure totale (primaire + secondaire) sous le critère de flexion

3.4.1.2.3. Correction du graphique en tenant compte de l'effort tranchant

Le graphe en Figure 25 doit être corrigé pour tenir compte de l'effet dû à l'effort tranchant. Pour cela, l'Eurocode 5 fournit le critère suivant :

$$\frac{4V_{Ed}}{3(\pi\phi^2/4)} \leq \tau$$

Pour le plancher analysé, l'effort tranchant maximal dans la poutre type 1 se trouve toujours au niveau de l'appui interne, $V_{Ed,1} = \alpha_{PT1}F = \alpha_{1,4}F$ tandis que l'effort tranchant maximal dans la poutre type 2 se situe soit sur l'appui fixe, soit sur l'appui interne du module, dépendant de la valeur de la proportion d'engagement a , et vaut donc $V_{Ed,2} = \alpha_{PT2}F = \max(\alpha_{2,1}, \alpha_{2,0})F$.

Le volume d'une poutre type i est obtenu en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} \tau = \frac{4\alpha_{PTi}F}{3(\pi\phi_i^2/4)} \\ V_i = \frac{\pi\phi_i^2}{4} \frac{L}{2-a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi\phi_i^2}{4} = \frac{4\alpha_{PTi}F}{3\tau} \\ \frac{\pi\phi_i^2}{4} = \frac{V_i(2-a)}{L} \end{cases}$$

Donc, on trouve :

$$V_i = \frac{4}{3} \frac{\alpha_{PTi}}{2-a} \frac{FL}{\tau}$$

Note : Comme pour la contrainte en flexion, le diamètre des poutres types est adapté de manière à obtenir la même contrainte de cisaillement τ partout :

$$\tau_1 = \tau_2 \quad \rightarrow \quad \phi_2 = \phi_1 \left(\frac{V_{Ed,2}}{V_{Ed,1}} \right)^{1/2}$$

Le volume total du module vaut alors :

$$V = 2V_1 + 2V_2 = 2 \frac{4(\alpha_{PT1} + \alpha_{PT2}) FL}{3(2-a) \tau}$$

A l'ELU, l'expression devient :

$$V_u = 2 \frac{4(\alpha_{PT1} + \alpha_{PT2})}{3(2-a)} \frac{F_u L}{k_{cr} f_{v,d}}$$

De manière à pouvoir comparer les critères de flexion et de cisaillement, il est nécessaire d'obtenir les mêmes indicateurs de volume. Pour cela, on définit $\theta = \frac{f_{m,d}}{f_{v,d}}$ et, en sachant que $F_u = q_u L^2$, l'indicateur sous le critère de cisaillement est :

$$W_u = \frac{V_u f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L^{5/3}} = Z \frac{4(\alpha_{PT1} + \alpha_{PT2})}{(2-a)} = Z W_S(a) \quad (8)$$

Où on a posé $Z = \frac{2\theta^{2/3}}{3k_{cr}} \left(\frac{q_u}{f_{v,d}} \right)^{1/3}$ et $W_S(a) = \frac{4(\alpha_{PT1} + \alpha_{PT2})}{(2-a)}$. Le volume de matière d'un plancher composé d'un module réciproque élémentaire à 4 poutres identiques 2 à 2, soumis à une charge totale F et engendrant une contrainte de cisaillement $f_{v,d}$ dans la section la plus cisailée, est donné par l'expression (8).

La Figure 29 combine le critère de flexion (6b) avec le critère d'effort tranchant (8) de la structure primaire pour différentes valeurs du coefficient Z . Ces valeurs sont choisies pour un intervalle de charge $q_u \in [2; 12]$ [kN/m²], un coefficient $k_{mod} \in [0.6; 1]$ et un coefficient θ fournit en Table 1 dont les valeurs varient entre 5 et 14 en fonction de la classe de résistance du bois. Les courbes de cisaillement maximale ($Z = 1$) et minimale ($Z = 0.28$) sont obtenues, respectivement, pour un matériau D70 ($k_{mod} = 0.6$) sous une charge de 12 [kN/m²] et un matériau C18 ($k_{mod} = 1$) sous une charge de 2 [kN/m²].

	Résineux							Feuillus					
	C18	C22	C24	C27	C30	C35	C40	D30	D35	D40	D50	D60	D70
$f_{m,k}$ [MPa]	18	22	24	27	30	35	40	30	35	40	50	60	70
$f_{v,k}$ [MPa]	3.4	3.8	4	4	4	4	4	3.9	4.1	4.2	4.5	4.8	5
$\theta = \frac{f_{m,k}}{f_{v,k}}$	5.3	5.8	6	6.5	7.5	8.75	10	7.7	8.5	9.5	11.1	12.5	14

Table 1 : Résistance caractéristique à la flexion et au cisaillement du matériau bois

Exemple : Pour un plancher typique en bois C24 sous une charge de 8 [kN/m²] et un $k_{mod} = 0.8$, le coefficient Z vaut :

$$Z = \frac{2}{3} \frac{6^{2/3}}{0.67} \left(\frac{0.008}{0.8 \frac{4}{1.3}} \right)^{1/3} = 0.49$$

Conclusion : Contrairement à la courbe de flexion, les courbes d'effort tranchant dépendent du matériau choisi et sont valables pour un chargement bien spécifique. Comme on peut le voir, une valeur Z élevée correspond à une forte influence de l'effort tranchant.

Globalement, l'effort tranchant est pénalisant pour des valeurs de $a < 0.2 \dots 0.3$ car l'indicateur de volume en cisaillement augmente exponentiellement. En d'autres mots, la solution optimale se situe autour de $a = 0.3 \dots 0.4$ où le critère de flexion domine et est minimal.

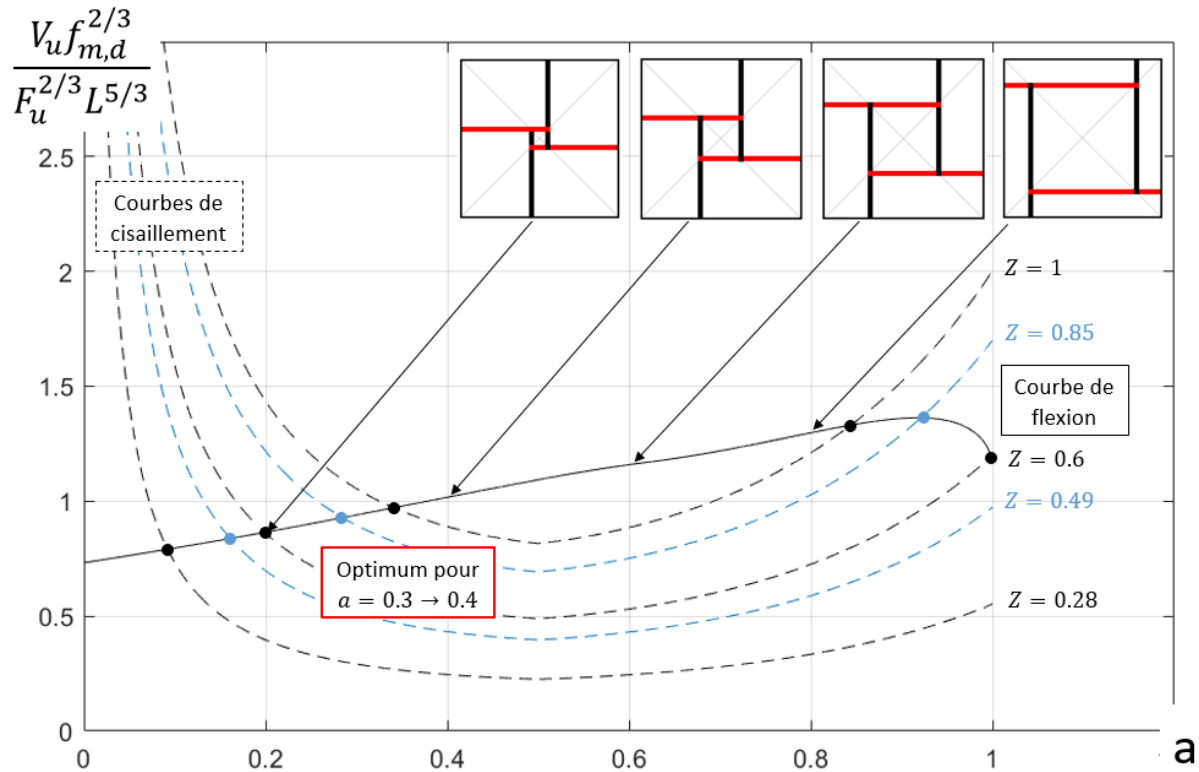


Figure 29 : Plancher carré - Indicateurs de volume sous le critère de flexion (ligne continue) et de cisaillement (lignes pointillées)

En ajoutant le volume lié à la structure secondaire, le volume total du plancher sous le critère de cisaillement vaut :

$$V_{tot} = \left(ZW_s(a) + 0.923 \left(\frac{L}{e} \right)^{1/3} \left(\frac{4(1-a)^{7/3} + a^{10/3}}{(2-a)^{10/3}} \right) \right) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = W_{s,ss} \left(a, Z, \frac{L}{e} \right) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Où on a posé $W_{s,ss} \left(a, Z, \frac{L}{e} \right) = ZW_s(a) + 0.923 \left(\frac{L}{e} \right)^{1/3} \left(\frac{4(1-a)^{7/3} + a^{10/3}}{(2-a)^{10/3}} \right)$. Et donc, l'indicateur de volume total sous le critère de cisaillement évalué à l'ELU devient :

$$W_{u,tot} = \frac{V_{u,tot} f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L^{5/3}} = W_{s,ss} \left(a, Z, \frac{L}{e} \right) \quad (9)$$

Le volume total (structure primaire + secondaire) de matière d'un plancher composé d'un module réciproque élémentaire à 4 poutres identiques 2 à 2 et de sa structure secondaire, soumis à une charge totale F et engendrant une contrainte $f_{v,d}$ en cisaillement est donné par l'expression (9).

Sur la Figure 30 sont représentées les expressions (7) et (9) des indicateurs tenant compte de la structure secondaire. L'indicateur en cisaillement est tracé pour $Z = 0.9$, supposé valeur maximale car généralement pas dépassée (Figure 30, haut), et pour $Z = 0.5$, valeur moyenne habituelle (Figure 30, bas).

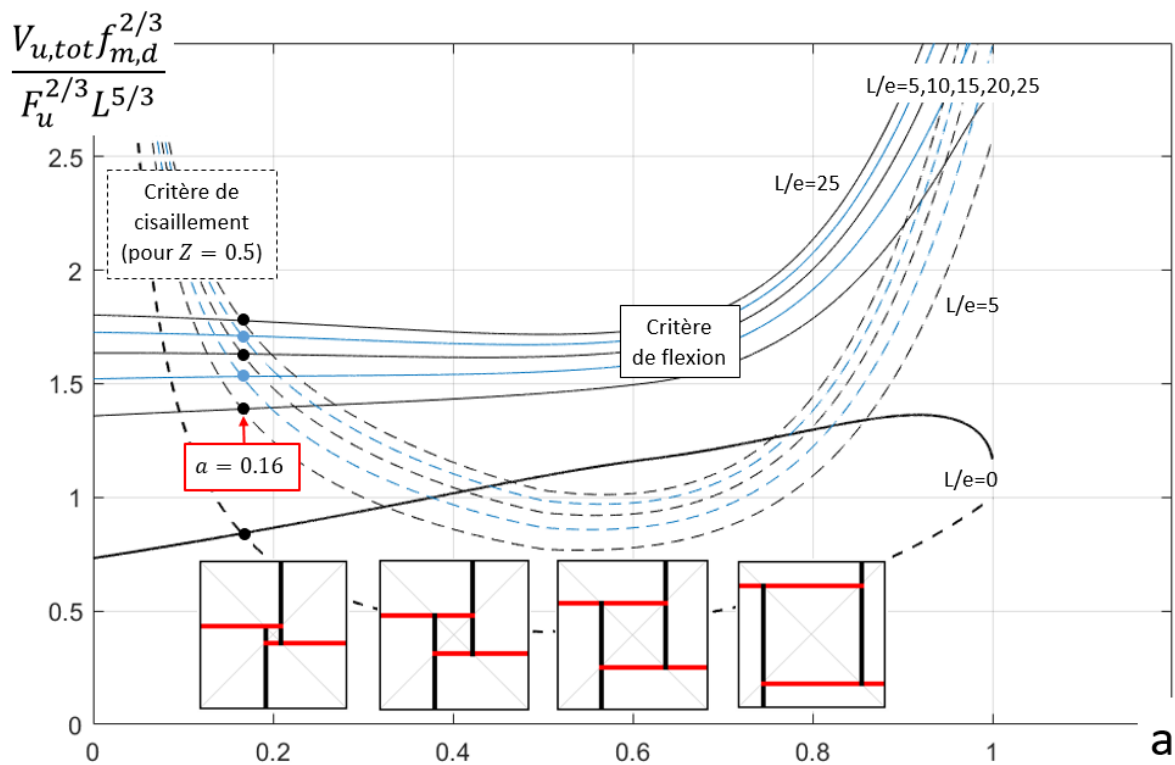
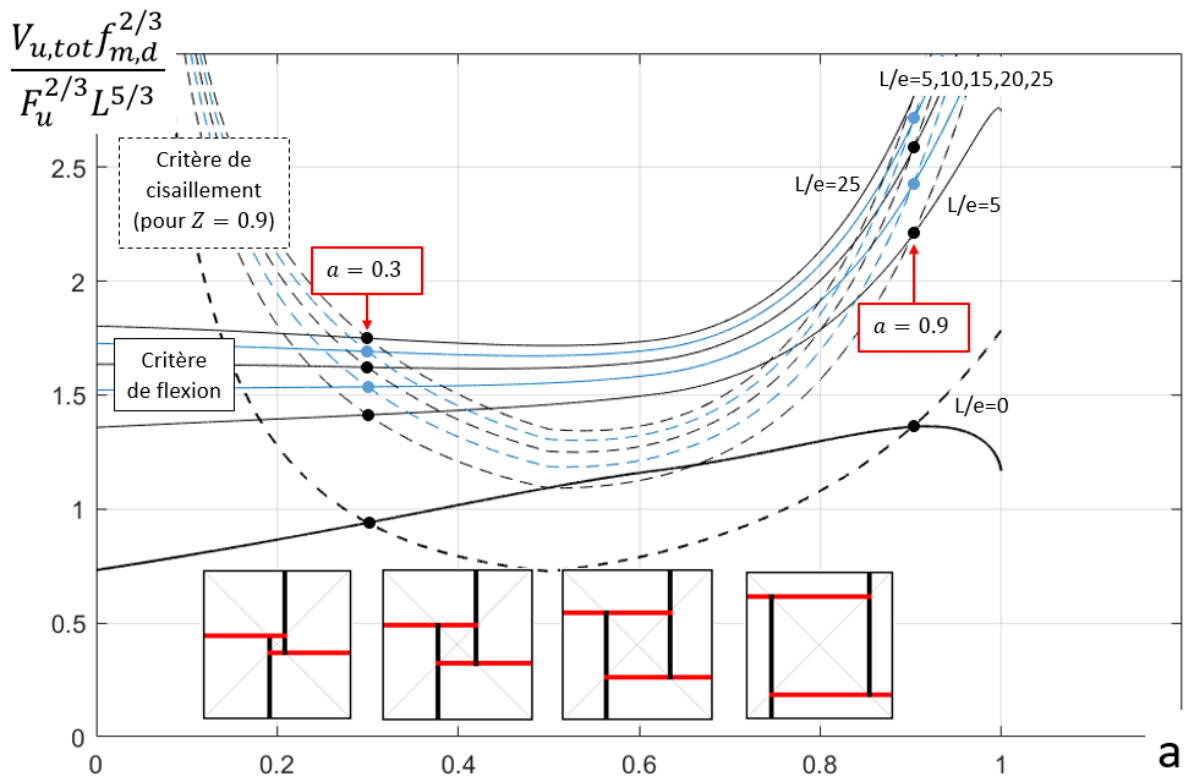


Figure 30 : Plancher carré - Indicateurs de volume de la structure totale (primaire + secondaire) sous les critères de flexion et de cisaillement

Conclusion : La solution optimale se trouve pour des valeurs $a = 0.3 \dots 0.7$. Effectivement, pour des valeurs $a > 0.7$, le volume augmente fortement sous le critère de flexion dominant. Tandis que pour des valeurs $a < 0.3$, le volume augmente exponentiellement sous le critère de cisaillement

dominant. Entre ces 2 bornes, les courbes de la structure totale sont relativement constantes, ce qui permet une certaine latitude au concepteur. Cela signifie, par exemple, que si la longueur des poutres du module est limitée, il faut choisir une valeur proche de $a = 0.3$.

3.4.2. Etude préliminaire au calcul de flèche : Prise en compte de l'effet dû à l'effort tranchant dans le critère de déplacement

Cette sous-section permet de déterminer si la flèche due à l'effort tranchant peut être négligée dans un module réciproque. Soit une poutre isolée du module sur laquelle se déplace une charge ponctuelle F , représentant l'action de la poutre appuyée sur celle que l'on analyse, telle qu'illustrée en Figure 31. Cette charge peut donc se déplacer d'une distance aL_p , avec $a \in [0; 1]$, de manière à représenter toutes les longueurs d'engagement possibles d'un plancher à un module. Pour toute valeur de a , on souhaite évaluer l'importance de la flèche d'effort tranchant par rapport à la flèche maximale totale.

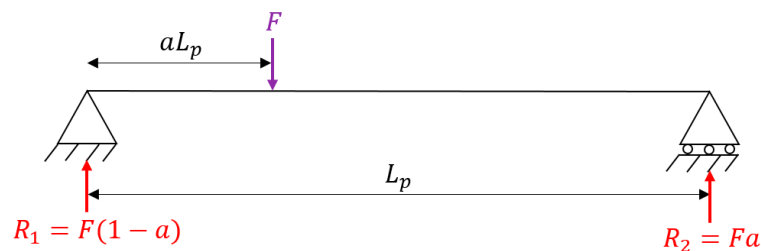


Figure 31 : Schéma statique d'une poutre soumise à une charge ponctuelle F qui se déplace

Après détermination des réactions d'appui R_1 et R_2 sur base des équations d'équilibre des efforts verticaux et du moment, il est possible de déterminer les efforts internes à gauche et à droite de la charge.

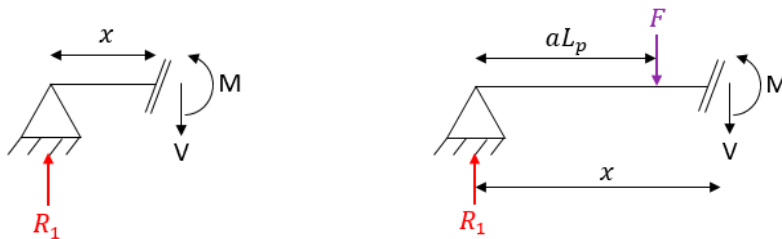


Figure 32 : Coupe 1 (gauche) et coupe 2 (droite)

La coupe 1 pour $0 \leq x \leq aL_p$ fournit :
$$\begin{cases} V_g(x) = F(1-a) \\ M_g(x) = F(1-a)x \end{cases}$$

La coupe 2 pour $aL_p \leq x \leq L_p$ fournit :
$$\begin{cases} V_d(x) = -Fa \\ M_d(x) = Fa(L_p - x) \end{cases}$$

3.4.2.1. Flèche due à l'effort tranchant

Timoshenko fournit l'expression suivante de la flèche exprimée en fonction de l'effort tranchant [2] :

$$\frac{d\delta_V(x)}{dx} - \beta = \pm \frac{V(x)}{\kappa G A_p}$$

Où β est l'angle de rotation de la poutre dû à l'effort tranchant par rapport à l'horizontale. En considérant qu'il est négligeable, l'expression devient :

$$\kappa G A_p \frac{d\delta_v(x)}{dx} = \oplus V(x)$$

Avec $G \approx \frac{E}{16}$ [MPa], le module de cisaillement du matériau bois et $\kappa = \frac{6(1+\nu)}{7+6\nu}$ [/], le coefficient géométrique de cisaillement de Timoshenko. Pour le bois, on considère un coefficient de Poisson $\nu = 0.2$, ce qui donne $\kappa = 0.88$.

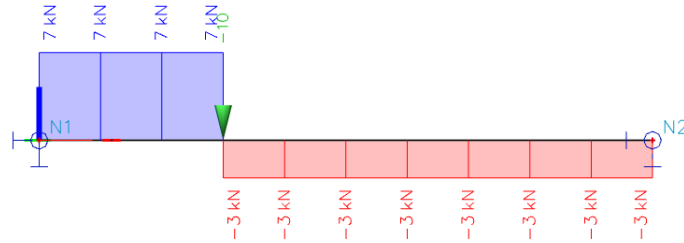


Figure 33 : Définition du repère et choix du signe dans la formule de Timoshenko

En considérant un système de référence dirigé vers le haut et en supposant l'effort tranchant positif vers le haut également, l'expression ci-dessus prend le signe positif.

Après intégration sur chaque tronçon de la poutre, la flèche d'effort tranchant prend la forme suivante :

$$\begin{cases} \kappa G_{0,m} A_p \delta_{V,g}(x) = F(1-a)x + A & 0 \leq x \leq aL_p \\ \kappa G_{0,m} A_p \delta_{V,d}(x) = -Fax + B & aL_p \leq x \leq L_p \end{cases}$$

Afin de déterminer ces constantes, les conditions limites suivantes sont nécessaires :

$$\begin{cases} \delta_{V,g}(x=0) = 0 : A = 0 \\ \delta_{V,d}(x=L_p) = 0 : B = FaL_p \end{cases}$$

Finalement, la flèche due à l'effort tranchant est donnée par :

$$\begin{cases} \kappa G_{0,m} A_p \delta_{V,g}(x) = F(1-a)x & 0 \leq x \leq aL_p \\ \kappa G_{0,m} A_p \delta_{V,d}(x) = Fa(L_p - x) & aL_p \leq x \leq L_p \end{cases}$$

3.4.2.2. Flèche due à la flexion

L'expression de la flèche en flexion le long de la poutre se trouve en utilisant la relation suivante :

$$\frac{d^2\delta(x)}{dx^2} = \oplus \frac{M(x)}{EI}$$

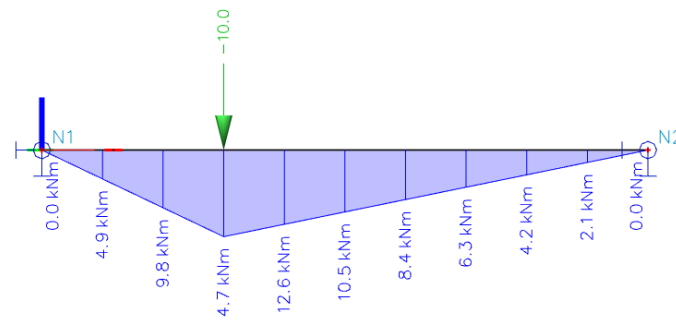


Figure 34 : Définition du repère et choix du signe dans la formule de flèche en flexion

Par convention, le système de référence est défini positif vers le haut. Le moment est, quant à lui, défini positif vers le bas donc, étant opposé au sens du repère, l'expression ci-dessus prend le signe négatif.

Après double intégration sur chaque tronçon, la flèche en flexion prend la forme :

$$\begin{cases} E_{0,m} I \delta_g(x) = -\frac{F}{6}(1-a)x^3 + Ax + B & 0 \leq x \leq aL_p \\ E_{0,m} I \delta_d(x) = \frac{F}{6}ax^3 - \frac{F}{2}aL_p x^2 + Cx + D & aL_p \leq x \leq L_p \end{cases}$$

Les conditions limites suivantes permettent de définir les 4 constantes d'intégration :

$$\begin{cases} \delta_g(x=0) = 0 \\ \delta_g(x=aL_p) = \delta_d(x=aL_p) \\ \frac{d\delta_g}{dx}(x=aL_p) = \frac{d\delta_d}{dx}(x=aL_p) \\ \delta_d(x=L_p) = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{F}{6}(1-a)(2-a)aL_p^2 \\ B = 0 \\ C = \frac{F}{6}(2+a^2)aL_p^2 \\ D = -\frac{F}{6}a^3L_p^3 \end{cases}$$

Finalement, la flèche due à la flexion s'écrit

$$\begin{cases} E_{0,m} I \delta_g(x) = -\frac{F}{6}(1-a)x^3 + \frac{F}{6}(1-a)(2-a)aL_p^2 x & 0 \leq x \leq aL_p \\ E_{0,m} I \delta_d(x) = \frac{F}{6}ax^3 - \frac{F}{2}aL_p x^2 + \frac{F}{6}(2+a^2)aL_p^2 x - \frac{F}{6}a^3L_p^3 & aL_p \leq x \leq L_p \end{cases}$$

3.4.2.3. Flèche maximale totale

L'expression de la flèche totale le long de la poutre est donnée par la somme des expressions des flèches dues à l'effort tranchant et à la flexion :

$$\delta_{tot}(x) = \begin{cases} \delta_{V,g}(x) + \delta_g(x) & 0 \leq x \leq aL_p \\ \delta_{V,d}(x) + \delta_d(x) & aL_p \leq x \leq L_p \end{cases}$$

Ne sachant pas où se trouve cette flèche totale maximale, on l'évalue sur chaque tronçon.

Flèche totale maximale dans le tronçon gauche ($0 \leq x \leq aL_p$)

La position de la flèche maximale dans le tronçon gauche est donnée par :

$$\frac{d\delta_{tot}(x)}{dx} = 0 = \frac{d\delta_{V,g}(x)}{dx} + \frac{d\delta_g(x)}{dx} \rightarrow x_{g,max} = \pm \sqrt{\frac{8A_p}{\pi\kappa} + \frac{aL_p^2}{3}(2-a)}$$

Où l'expression a été simplifiée en sachant que $\frac{E}{G} \approx 16$ et que $I = \frac{A_p^2}{4\pi}$. La position négative est à rejeter tandis qu'il faut vérifier que la position positive se trouve dans les bornes du tronçon :

$$\sqrt{\frac{8A_p}{\pi\kappa} + \frac{aL_p^2}{3}(2-a)} \leq aL_p \rightarrow a \geq \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{24}{\kappa} \left(\frac{\phi}{L_p} \right)^2} \right)$$

Il est à noter que cette condition dépend de l'élancement de la poutre $\frac{L_p}{\phi}$. Si elle est respectée, la flèche totale maximale vaut $\delta_{tot,max} = \delta_{tot}(x_{g,max})$.

Flèche totale maximale dans le tronçon droit ($aL_p \leq x \leq L_p$)

La position de la flèche maximale est déterminée par :

$$\frac{d\delta_{tot}(x)}{dx} = 0 = \frac{d\delta_{V,d}(x)}{dx} + \frac{d\delta_d(x)}{dx} \quad \rightarrow \quad x_{d,max} = L_p \left(1 \pm \sqrt{\frac{1}{3}(1-a^2) + \frac{2}{\kappa} \left(\frac{\phi}{L_p} \right)^2} \right)$$

La solution avec le signe « + » est à rejeter. On vérifie que celle avec le signe « - » peut être conservée :

$$x_{d,max} = L_p \left(1 - \sqrt{\frac{1}{3}(1-a^2) + \frac{2}{\kappa} \left(\frac{\phi}{L_p} \right)^2} \right) \leq aL_p \quad \rightarrow \quad a \leq \frac{3}{4} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8}{9} \left(1 - \frac{3}{\kappa} \left(\frac{\phi}{L_p} \right)^2 \right)} \right)$$

De nouveau, cette condition dépend de l'élancement de la poutre. Si elle est respectée, la flèche totale maximale est donnée par $\delta_{tot,max} = \delta_{tot}(x_{d,max})$.

Flèche totale maximale au niveau de la charge ponctuelle

L'expression de la flèche totale est évaluée en $x = aL_p$ tel que $\delta_{tot,max} = \delta_{tot}(aL_p)$.

En résumé, la flèche totale maximale est donnée par :

$$\delta_{tot,max} = \begin{cases} \delta_{tot}(x_{g,max}) & a \geq \frac{1}{4} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{24}{\kappa} \left(\frac{\phi}{L_p} \right)^2} \right) \\ \delta_{tot}(x_{d,max}) & a \leq \frac{3}{4} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{8}{9} \left(1 - \frac{3}{\kappa} \left(\frac{\phi}{L_p} \right)^2 \right)} \right) \\ \delta_{tot}(aL_p) & \text{sinon} \end{cases} \quad (10)$$

3.4.2.4. Influence de la flèche d'effort tranchant par rapport à la flèche totale maximale

L'influence de la flèche d'effort tranchant par rapport à la flèche totale maximale se calcule par le rapport $\frac{\delta_{V,c}}{\delta_{tot,max}}$, où $\delta_{V,c}$ est la flèche due à l'effort tranchant calculée à la position où la flèche totale δ_{tot} est maximale. La Figure 35 illustre ce rapport en fonction de la position fractionnée de la charge le long de la poutre, dénotée par $a \in [0; 1]$, pour différents élancements $\frac{L_p}{\phi} = 5, 10, 15$.

Conclusion : Le rapport $\frac{\delta_{V,c}}{\delta_{tot,max}}$ est plus impacté par l'élancement de la poutre que par la position de la charge le long de la poutre. L'effet dû au cisaillement peut donc être négligé à partir d'un élancement $\frac{L_p}{\phi} > 10$ et ce, pour tout $a \in [0; 1]$. Pour ces valeurs-là, la flèche d'effort tranchant représente moins de 15% de la flèche totale. Dans le cadre de ce mémoire, elle sera donc négligée en supposant que les poutres soient suffisamment élancées.

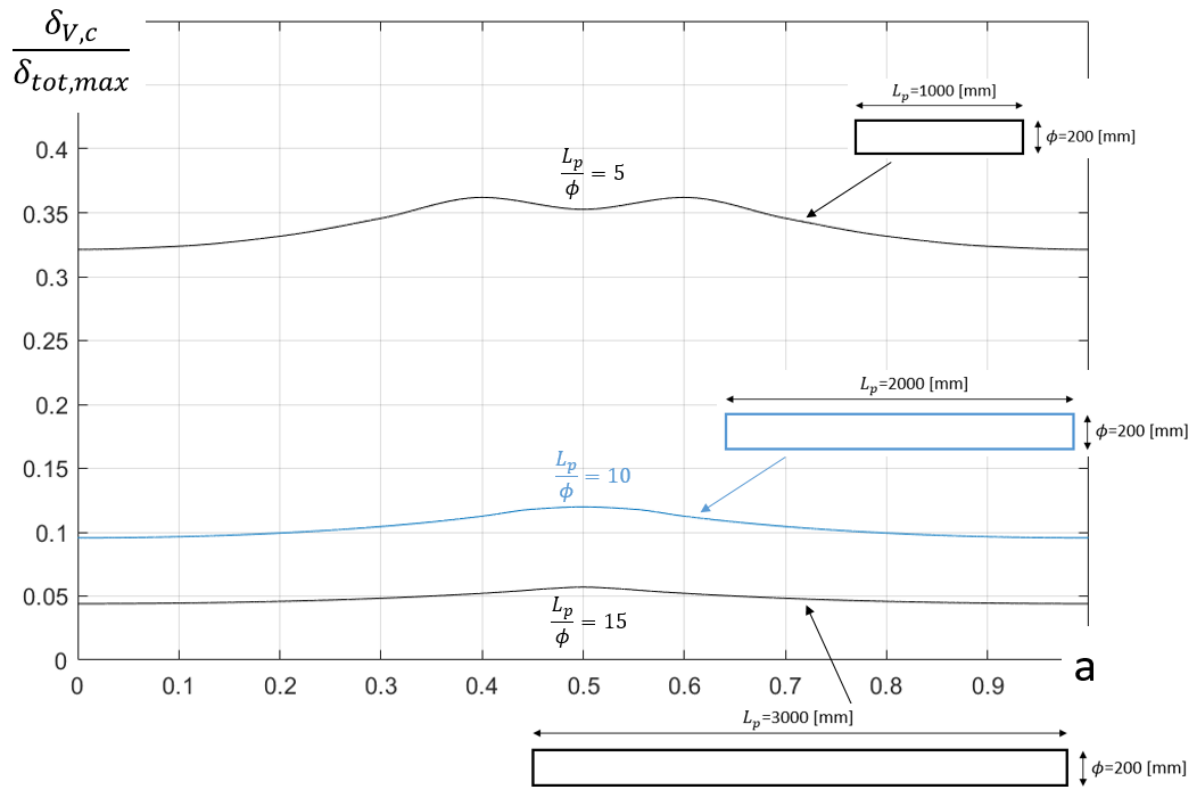


Figure 35 : Poutre simple – Influence de la flèche d'effort tranchant par rapport à la flèche totale maximale en fonction de la position de la charge le long de la poutre

3.4.3. Optimisation du volume de bois en fonction de la flèche maximale

Pour le calcul de la flèche, on considère le chargement réel des 2 types de poutres (et pas l'approximation faite précédemment) car la flèche d'une poutre dépend directement de la flèche et du diamètre de la poutre voisine. Pour réaliser l'optimisation la plus juste possible, il faut donc considérer le cas le plus réel possible.

3.4.3.1. Expression des moments le long des poutres

Dans le but d'utiliser la relation bien connue $EI \frac{d^2 \delta(x)}{dx^2} = \pm M(x)$, il est nécessaire de déterminer les expressions du moment le long des poutres. Pour rappel, ces moments ont été calculés en sections 3.4.1.1.1.1 et 3.4.1.2.1.1. Pour la poutre type 1, on avait :

$$\begin{cases} M_{g,1}(x) = -\frac{(q_1 + q_2)}{2}x^2 + R_{1,4}x & 0 \leq x \leq aL_p \\ M_{d,1}(x) = -\frac{q_1}{2}x^2 + (R_{1,4} - R_{2,1} - q_2 aL_p)x + \left(R_{2,1} + q_2 \frac{aL_p}{2}\right)aL_p & aL_p \leq x \leq L_p \end{cases}$$

Tandis que dans la poutre type 2, les moments valent :

$$\begin{cases} M_{g,2}(x) = -\frac{q_1}{2}x^2 + R_{2,1}x & 0 \leq x \leq aL_p \\ M_{d,2}(x) = -\frac{q_1}{2}x^2 + (R_{2,1} - R_{1,4})x + R_{1,4}aL_p & aL_p \leq x \leq L_p \end{cases}$$

3.4.3.2. Expression de la flèche le long des poutres

En utilisant la relation moment-flèche explicitée en section 3.4.2, l'expression de la flèche dans la poutre type 1 prend la forme suivante après une double intégration :

$$\begin{cases} E_{0,m}I_1\delta_{g,1}(x) = \frac{(q_1 + q_2)}{24}x^4 - \frac{R_{1,4}}{6}x^3 + Ax + B & 0 \leq x \leq aL_p \\ E_{0,m}I_1\delta_{d,1}(x) = \frac{q_1}{24}x^4 - \frac{(R_{1,4} - R_{2,1} - q_2aL_p)}{6}x^3 - \left(R_{2,1} + \frac{q_2}{2}aL_p\right)\frac{aL_p}{2}x^2 + Cx + D & aL_p \leq x \leq L_p \end{cases}$$

Dans la poutre type 2, la double intégration donne le résultat suivant :

$$\begin{cases} E_{0,m}I_2\delta_{g,2}(x) = \frac{q_1}{24}x^4 - \frac{R_{2,1}}{6}x^3 + Ex + F & 0 \leq x \leq aL_p \\ E_{0,m}I_2\delta_{d,2}(x) = \frac{q_1}{24}x^4 - \frac{(R_{2,1} - R_{1,4})}{6}x^3 - R_{1,4}\frac{aL_p}{2}x^2 + Gx + H & aL_p \leq x \leq L_p \end{cases}$$

On peut alors déterminer les 8 conditions limites utiles à la résolution de ce système à 8 inconnues. Pour chaque poutre, on définit 2 conditions de bord et 2 conditions de continuité :

$$\begin{cases} \delta_{d,1}(x = L_p) = 0 \\ \delta_{g,1}(x = aL_p) = \delta_{d,1}(x = aL_p) \\ \frac{d\delta_{g,1}}{dx}(x = aL_p) = \frac{d\delta_{d,1}}{dx}(x = aL_p) \\ \delta_{g,1}(x = 0) = \delta_{g,2}(x = aL_p) \\ \delta_{d,2}(x = L_p) = 0 \\ \delta_{g,2}(x = aL_p) = \delta_{d,2}(x = aL_p) \\ \frac{d\delta_{g,2}}{dx}(x = aL_p) = \frac{d\delta_{d,2}}{dx}(x = aL_p) \\ \delta_{g,2}(x = 0) = \delta_{g,1}(x = aL_p) \end{cases}$$

Les expressions des constantes d'intégration étant relativement longues, elles ne seront pas explicitées ci-dessous. Cependant, elles dépendent toutes de a et du rapport $\left(\frac{\phi_1}{\phi_2}\right)^4$ uniquement. En section 3.4.3.4, on verra qu'il est possible de corrélérer ϕ_1 avec ϕ_2 de sorte que les constantes et donc les expressions des flèches ne soient plus que fonction de a .

3.4.3.3. Expression de la flèche maximale

L'expression de la flèche maximale se calcule dans toutes les parties de chaque poutre sur base des expressions trouvées ci-dessus.

Note : La résolution des calculs suivants s'est effectuée à l'aide du programme MATLAB. Aux vues de la grandeur des expressions, celles-ci ne seront pas écrites explicitement.

Flèche maximale dans le tronçon gauche de la poutre type 1 ($0 \leq x \leq aL_p$)

La position de la flèche maximale est solution de l'équation suivante :

$$\frac{d\delta_{g,1}(x)}{dx} = 0 = \frac{(q_1 + q_2)}{6}x^3 - \frac{R_{1,4}}{2}x^2 + A \quad \rightarrow \quad x_{1,2,3}$$

Parmi ces 3 racines, seule $x_{g,1,max} = x_2 = Lf_{1,x_2}(a)$ est à conserver, valable pour toute valeur de $a \in [0; 1]$. En effet, la racine x_1 fournit une valeur supérieure à L_p tandis que x_3 fournit une valeur négative. La flèche maximale évaluée en $x = x_{g,1,max}$ vaut :

$$\delta_{g,1,max} = \delta_{g,1}(x = x_{g,1,max}) = \frac{FL^3}{E_{0,m}I_1} f_{1,g,\delta}(a)$$

Flèche maximale dans le tronçon droit de la poutre type 1 ($aL_p \leq x \leq L_p$)

La position de la flèche maximale dans ce tronçon est donnée par :

$$\frac{d\delta_{d,1}(x)}{dx} = 0 = \frac{q_1}{6}x^3 - \frac{(R_{1,4} - R_{2,1} - q_2 aL_p)}{2}x^2 - \left(R_{2,1} + \frac{q_2}{2}aL_p\right)aL_px + C \rightarrow x_{1,2,3}$$

Via MATLAB, on peut affirmer que ces 3 racines sont à rejeter car x_1 fournit une valeur négative, x_2 fournit une valeur supérieure à L_p et x_3 fournit une valeur inférieure à aL_p . La flèche maximale ne se trouvera donc jamais dans le tronçon droit.

Finalement, la flèche maximale dans la poutre type 1 se situera toujours dans le tronçon gauche, c'est-à-dire, pour des valeurs $0 \leq x \leq aL_p$ et son expression vaut (avec $f_{1,\delta}(a) = f_{1,g,\delta}(a)$):

$$\delta_1 = \frac{FL^3}{E_{0,m}I_1} f_{1,\delta}(a)$$

Flèche maximale dans le tronçon gauche de la poutre type 2 ($0 \leq x \leq aL_p$)

La position de la flèche maximale s'obtient en résolvant l'équation ci-dessous :

$$\frac{d\delta_{g,2}(x)}{dx} = 0 = \frac{q_1}{6}x^3 - \frac{R_{2,1}}{2}x^2 + E \rightarrow x_{1,2,3}$$

Parmi ces 3 racines, seule $x_{g,2,max} = x_2 = Lf_{2,x_2}(a)$ est à prendre en compte, valable pour toute valeur $a \in [0; 1]$. Effectivement, la racine x_1 fournit des valeurs supérieures à L_p tandis que x_3 fournit une valeur négative. La valeur de la flèche maximale est donnée par :

$$\delta_{g,2,max} = \delta_{g,2}(x = x_{g,2,max}) = \frac{FL^3}{E_{0,m}I_2} f_{2,g,\delta}(a)$$

Flèche maximale dans le tronçon droit de la poutre type 2 ($aL_p \leq x \leq L_p$)

La position de la flèche maximale est obtenue par :

$$\frac{d\delta_{d,2}(x)}{dx} = 0 = \frac{q_1}{6}x^3 - \frac{(R_{2,1} - R_{1,4})}{2}x^2 - R_{1,4}aL_px + G \rightarrow x_{1,2,3}$$

Ces 3 racines sont à rejeter car x_1 fournit une valeur négative, x_2 fournit une valeur supérieure à L_p et x_3 fournit une valeur inférieure à aL_p . La flèche maximale ne se trouve jamais dans le tronçon droit.

D'après les résultats, la flèche maximale dans la poutre type 2 se trouve toujours dans le tronçon gauche, $0 \leq x \leq aL_p$, et son expression vaut (avec $f_{2,\delta}(a) = f_{2,g,\delta}(a)$) :

$$\delta_2 = \frac{FL^3}{E_{0,m}I_2} f_{2,\delta}(a)$$

3.4.3.4. Expression du volume du module réciproque

Calculons d'abord le volume d'une poutre type i du module. En sachant que $A_{p,i} = \frac{\pi\phi_i^2}{4}$ et $I_i = \frac{\pi\phi_i^4}{64}$, on détermine les deux expressions suivantes :

$$\begin{cases} \delta_i = \frac{FL^3}{E_{0,m}I_i} f_{i,\delta}(a) = \frac{64FL^3}{E_{0,m}\pi\phi_i^4} f_{i,\delta}(a) \\ V_i = \frac{\pi\phi_i^2}{4} \frac{L}{2-a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \phi_i^2 = \frac{8}{\pi^{1/2}} f_{i,\delta}^{1/2}(a) \frac{F^{1/2}L^{3/2}}{E_{0,m}^{1/2}\delta_i^{1/2}} \\ \phi_i^2 = \frac{4(2-a)V_i}{\pi L} \end{cases}$$

Ce qui permet d'obtenir le volume pour une seule poutre type 1 en fonction de la flèche maximale :

$$V_1 = 3.545 \frac{f_{1,\delta}^{1/2}(a)}{2-a} \left(\frac{L}{\delta_1} \right)^{1/2} \frac{F^{1/2} L^2}{E_{0,m}^{1/2}}$$

Et celui pour une seule poutre type 2 :

$$V_2 = 3.545 \frac{f_{2,\delta}^{1/2}(a)}{2-a} \left(\frac{L}{\delta_2} \right)^{1/2} \frac{F^{1/2} L^2}{E_{0,m}^{1/2}}$$

Pour déterminer l'indicateur de volume à l'ELS, 3 choix de dimensionnement sont possibles :

- CAS 1 : Toutes les poutres atteignent la même contrainte de flexion, par exemple, $f_{m,d}$, ce qui revient à adapter les diamètres tels que : $\phi_2 = \phi_1 \left(\frac{M_{2,max}}{M_{1,max}} \right)^{1/3}$. La flèche maximale δ_{max} de la structure est la valeur maximale de la flèche entre la poutre type 1 et la poutre type 2 :

$$\begin{cases} \delta_{max} = \frac{64FL^3}{E_{0,m}\pi\phi_1^4} \max \left(f_{1,\delta}(a), \frac{f_{2,\delta}(a)}{(M_{2,max}/M_{1,max})^{4/3}} \right) \\ V = 2V_1 + 2V_2 = 2 \frac{\pi\phi_1^2}{4} \frac{L}{2-a} \left(1 + \left(\frac{M_{2,max}}{M_{1,max}} \right)^{2/3} \right) \end{cases}$$

En éliminant ϕ^2 , on trouve l'équation du volume en fonction de la flèche maximale du module :

$$V = W_\delta(a) \left(\frac{L}{\delta_{max}} \right)^{1/2} \frac{F^{1/2} L^2}{E_{0,m}^{1/2}}$$

$$\text{Où } W_\delta(a) = \frac{7.09}{2-a} \left(1 + \left(\frac{M_{2,max}}{M_{1,max}} \right)^{2/3} \right) \sqrt{\max \left(f_{1,\delta}(a), \frac{f_{2,\delta}(a)}{(M_{2,max}/M_{1,max})^{4/3}} \right)}.$$

- CAS 2 : Toutes les poutres ont le même diamètre de manière à ce que la contrainte de flexion maximale soit atteinte pour la poutre la plus chargée. Dans ce cas, la flèche maximale est obtenue pour la poutre avec la valeur $f_{i,\delta}(a)$ maximale. L'expression du CAS 1 se simplifie :

$$V = W_\delta(a) \left(\frac{L}{\delta_{max}} \right)^{1/2} \frac{F^{1/2} L^2}{E_{0,m}^{1/2}}$$

$$\text{Où } W_\delta(a) = \frac{14.18}{2-a} \sqrt{\max \left(f_{1,\delta}(a), f_{2,\delta}(a) \right)}.$$

- CAS 3 : Toutes les poutres atteignent la même flèche $\delta_1 = \delta_2 = \delta_{max}$ et donc $\frac{\delta_1}{L} = \frac{\delta_2}{L} = \frac{\delta_{max}}{L}$. Les diamètres sont adaptés de manière à ce que $\phi_2 = \phi_1 \left(\frac{f_{2,\delta}(a)}{f_{1,\delta}(a)} \right)^{1/4}$ et le volume total s'écrit sous la forme :

$$V = W_\delta(a) \left(\frac{L}{\delta_{max}} \right)^{1/2} \frac{F^{1/2} L^2}{E_{0,m}^{1/2}}$$

Où $W_\delta(a) = \frac{7.09}{(2-a)} \left(f_{1,\delta}^{1/2}(a) + f_{2,\delta}^{1/2}(a) \right)$. Cependant, ce dernier cas est uniquement valable pour les planchers à un seul module car imposer une flèche constante dans toutes les poutres d'un plancher à plusieurs modules n'a pas beaucoup de sens.

Dans tous les cas, l'expression du volume prend la même forme. L'indicateur sous le critère de déplacement évalué à l'ELS s'écrit finalement :

$$W_{\delta} = \frac{V_{\delta} E_{0,m}^{1/2}}{F_{\delta}^{1/2} L^2} = W_{\delta}(a) \left(\frac{L}{\delta_{max}} \right)^{1/2} \quad (11)$$

Le volume de matière d'un module réciproque élémentaire à 4 poutres identiques 2 à 2, soumis à une charge totale F répartie uniformément sur tout le plancher et engendrant une flèche maximale δ_{max} est donné par l'expression (11). Peu importe la charge, le matériau ou les dimensions du plancher, le volume minimal sera toujours atteint pour une valeur a qui minimise $W_{\delta}(a)$.

Sur la Figure 36 est représentée l'expression (11) du volume adimensionnel W en fonction de la proportion d'engagement a pour les 3 cas de dimensionnement possibles.

Conclusion : Tout d'abord, on remarque que les 3 approches de dimensionnement sont très proches, voire égales, pour des valeurs $a < 0.7$. Le CAS 2 où on suppose que tous les diamètres sont identiques est le plus contraignant pour des valeurs $a > 0.8$.

Les faibles et hautes valeurs de a ont été mises en pointillées sur les courbes car, pour $a < 0.2$, on suppose que l'effet dû à l'effort tranchant prend de l'importance et pour $a > 0.8$, on suppose que la flèche sera plus influencée par la structure secondaire que par la structure primaire. Cependant, ces 2 bornes ne sont pas un problème puisque les conclusions à l'ELU montrent que la solution optimale se trouve entre $a = 0.3 \dots 0.7$.

Finalement, le graphe montre que le volume sous le critère de flèche est optimal pour des faibles valeurs de la proportion d'engagement a .

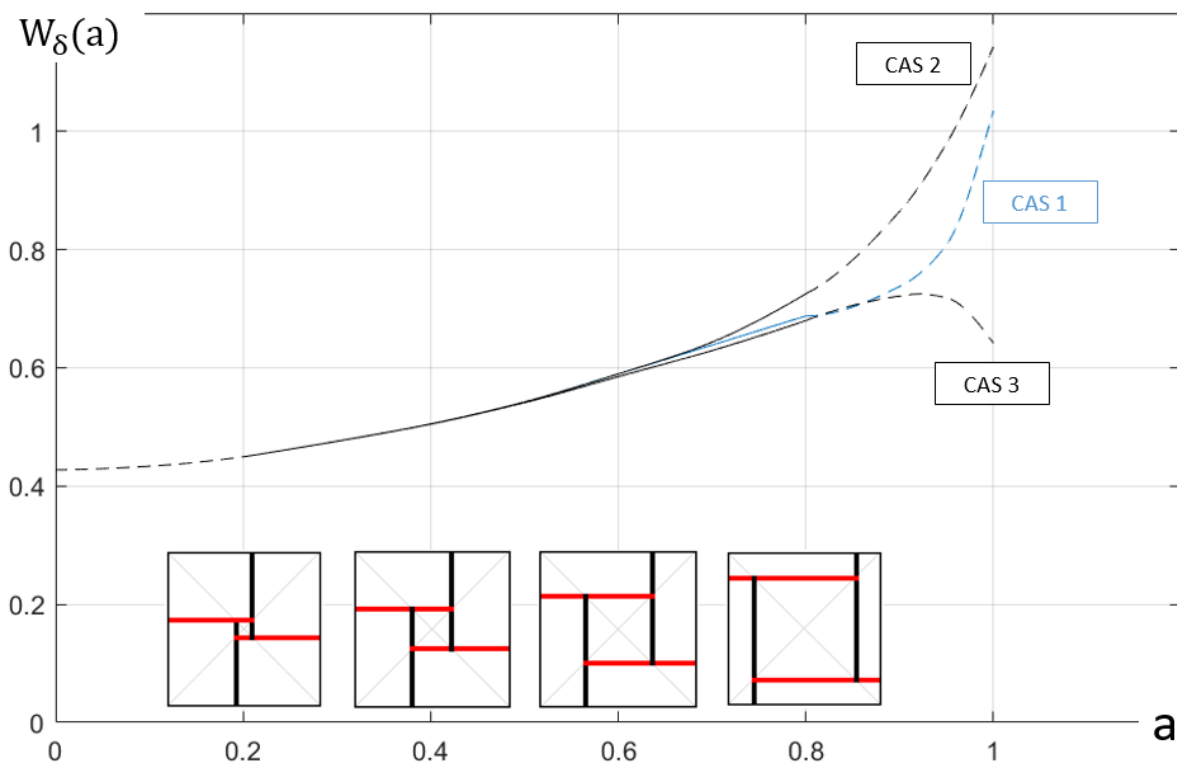


Figure 36 : Plancher carré – Variations de $W_{\delta}(a)$ sous le critère de déplacement

3.4.4. Conclusions préliminaires

Après analyse de ce premier cas, il a été démontré qu'il est possible d'exprimer le volume d'une structure sous forme d'un rapport adimensionnel, appelé « indicateur de volume ». Les expressions développées à l'ELU et à l'ELS, respectivement, pour les critères de contrainte et de flèche, indiquent

que, peu importe la charge appliquée, les dimensions du plancher ou le matériau utilisé, il existe une valeur de la proportion d'engagement a qui minimise le volume de la structure.

Les résultats amènent à la conclusion suivante : le volume d'un plancher carré composé d'un module réciproque unique est optimal pour des valeurs $a = 0.3 \dots 0.7$ avec une préférence pour des valeurs de a faibles sous le critère de déplacement. **La meilleure option serait donc de choisir une valeur proche de $a = 0.3$ pour laquelle tous les critères semblent agir à leur optimum.**

Une autre conclusion intéressante réside dans la comparaison de 2 planchers carrés dont l'un est composé de poutres parallèles et l'autre est composé d'un module réciproque avec sa structure secondaire. **Il a été démontré qu'à l'ELU, le plancher réciproque a un gain de matière non négligeable face au plancher classique.** Le même raisonnement ne peut pas être appliqué à l'ELS aux vues des équations complexes et du nombre de paramètres intervenant.

3.5. Expression du volume d'un plancher rectangulaire composé d'un seul module réciproque élémentaire

Soit un plancher rectangulaire de dimensions $L_1 \times L_2 = L_1 \times \lambda L_1$ composé d'un module réciproque élémentaire dont les poutres sont identiques 2 à 2. Le paramètre de proportionnalité des longueurs $\lambda \in]0; 1]$ est tel que $L_1 > L_2$. On distingue 2 poutres différentes : les poutres type 1, de longueur L_{p1} et de diamètre ϕ_1 , sont parallèles au côté de dimension L_1 et les poutres type 2, de longueur L_{p2} et de diamètre ϕ_2 , sont parallèles au côté de dimension L_2 . La charge surfacique considérée, q [N/mm²], telle que $F = q\lambda L_1^2$ [N], est distribuée uniformément sur les 5 zones du plancher : le sens de portée de chaque zone est choisi selon le petit côté.

Note : Le développement suivant est similaire à ce qui a été présenté en section 3.4 donc seuls les résultats seront explicités sous forme généralisée dans la suite. Pour avoir plus de détails sur les différents cas analysés, veuillez vous référer à l'ANNEXE A.

3.5.1. Configuration du module réciproque

Dans la suite de cette section, 2 types de configuration seront analysées :

- Plancher avec zone centrale rectangulaire (Figure 37, haut) : le rectangle central est homothétique aux bords du plancher de sorte que $a_1 = a_2 = a$.
- Plancher avec zone centrale carrée (Figure 37, bas) : le carré central est tel que $a_1 L_{p1} = a_2 L_{p2}$. Il est donc possible de lier la proportion d'engagement de la poutre type 2 avec celle de la poutre type 1 et du coefficient λ tel que $a_2 = 2a_1 / (2\lambda - \lambda a_1 + a_1)$.

Note : Il existe certaines valeurs de a_1 et λ telles que $a_2 > 1$, ce qui est un cas à rejeter. Cette contrainte géométrique amène une condition supplémentaire à respecter : $a_1 < 2\lambda / (\lambda + 1)$.

De plus, l'optimisation réalisée se base sur le fait que le plancher secondaire porte toujours selon le petit côté de chaque zone, c'est-à-dire qu'en fonction des valeurs de a_1 , a_2 et λ , les zones 1 indiquées en Figure 37, ont un sens de portée qui peut varier. Pour un plancher avec zone centrale rectangulaire, le sens de portée dans ces zones change lorsque $\lambda \geq 1 - a$, tandis que pour un plancher avec zone centrale carrée, le sens de portée change lorsque $\lambda \geq (1 - a_1)(2 - a_2) / (2 - a_1)$.

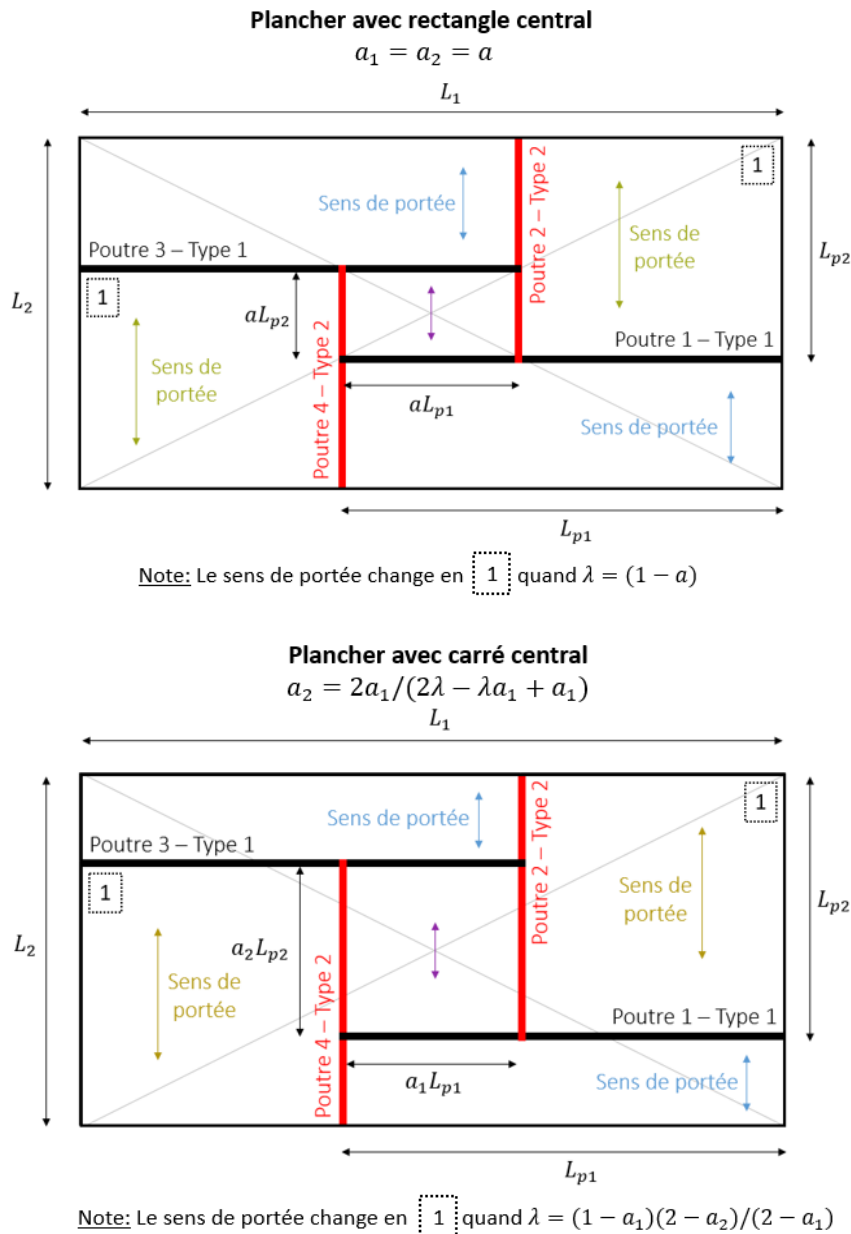


Figure 37 : Plancher rectangulaire soumis à un chargement uniformément distribué avec zone centrale rectangulaire (haut) ou zone centrale carrée (bas)

3.5.2. Optimisation du volume de bois en fonction de la contrainte

3.5.2.1. Prise en compte de la flexion dans le calcul de la contrainte

Comme pour le plancher carré, les diamètres sont adaptés de manière à ce que les contraintes soient les mêmes dans tout le module, c'est-à-dire qu'on souhaite $\phi_2 = \phi_1 (M_{2,max}/M_{1,max})^{1/3}$ où les moments maximaux dans chaque poutre type s'écrivent sous la forme $M_{i,max} = f_{i,0}(a_1, \lambda) FL_i$, avec $i = 1$ ou 2 en fonction du type de poutre.

Connaissant l'allure des moments max, il est possible de composer le système suivant :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{M_{i,max}}{2I_i/\phi_i} = \frac{32f_{i,0}(a_1, \lambda)FL_i}{\pi\phi_i^3} \\ V_i = \frac{\pi\phi_i^2}{4} \left(\frac{L_i}{2-a_i} \right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \phi_i^2 = \left(\frac{32f_{i,0}(a_1, \lambda)FL_i}{\pi\phi_i^3} \right)^{2/3} \\ \phi_i^2 = \frac{4(2-a_i)V_i}{\pi L_i} \end{cases}$$

Ainsi, le volume d'une poutre type i du module est donné par :

$$V_i = 3.691 \frac{f_{i,0}^{2/3}(a_1, \lambda) F^{2/3} L_i^{5/3}}{2-a_i \sigma^{2/3}}$$

En sachant que $a_2 = \frac{2a_1}{2\lambda - \lambda a_1 + a_1} = f(a_1, \lambda)$ et $L_2 = \lambda L_1$, le volume total s'écrit :

$$V = 7.382 \left(\frac{f_{1,0}^{2/3}(a_1, \lambda)}{2-a_1} + \frac{\lambda^{5/3} f_{2,0}^{2/3}(a_1, \lambda)}{2-f(a_1, \lambda)} \right) \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

L'indicateur de volume apparait en adimensionnalisant l'expression obtenue et en posant

$$W_B(a_1, \lambda) = 7.382 \left(\frac{f_{1,0}^{2/3}(a_1, \lambda)}{2-a_1} + \frac{\lambda^{5/3} f_{2,0}^{2/3}(a_1, \lambda)}{2-f(a_1, \lambda)} \right) :$$

$$W = \frac{V\sigma^{2/3}}{F^{2/3}L_1^{5/3}} = W_B(a_1, \lambda) \quad (12a)$$

Le volume de matière d'un plancher rectangulaire avec zone centrale carrée ou rectangulaire, portant dans une ou deux directions différentes en fonction des dimensions de chaque zone, soumis à une charge totale F et engendrant une contrainte σ identique dans tout le module est donné par l'expression (12a). Une fois de plus, on remarque que peu importe le chargement, les dimensions du plancher ou le matériau utilisé, il existe une valeur de a_1 pour chaque λ qui minimise la fonction $W_B(a_1, \lambda)$ et donc le volume.

A l'ELU, l'expression (12a) devient :

$$V_u = W_B(a_1, \lambda) \frac{F_u^{2/3} L_1^{5/3}}{f_{m,d}^{2/3}} \rightarrow W_u = \frac{V_u f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L_1^{5/3}} = W_B(a_1, \lambda) \quad (12b)$$

En Figure 38 est tracée l'expression (12b) de l'indicateur de volume en fonction de a_1 pour un plancher rectangulaire avec zone centrale rectangulaire lorsque le plancher secondaire porte selon le plus petit côté. Comme expliqué au début de cette section, il y a donc 2 subdivisions : en pointillés, toutes les zones portent dans le même sens tandis qu'en trait continu, le sens de portée se fait dans 2 directions perpendiculaires en fonction des zones.

Conclusion : Pour $\lambda = 1$ on retrouve exactement la même courbe que celle obtenue dans le cas d'un plancher carré soumis au même cas de charge (Figure 25). Au plus λ est grand, au plus le volume est important, ce qui semble logique car la surface du plancher est également plus importante.

Ensuite, on remarque que le plancher porte dans une seule direction pour des faibles valeurs de a et dans 2 directions pour des valeurs de a importantes. Egalement, au plus λ est faible, au plus les courbes du plancher à 1 direction sont longues et les courbes du plancher à 2 directions sont courtes.

De plus, on note un léger ressaut au niveau de la limite sur le sens de portée. Ce ressaut peut s'expliquer par la répartition des charges sur les poutres du module. Effectivement, en $\lambda = 1 - a$, on peut choisir si le plancher porte dans une ou deux directions, cependant, selon qu'on choisisse l'une ou l'autre option, on charge plus ou moins la poutre type 1 par rapport à la poutre type 2. Au final, le volume en est légèrement impacté.

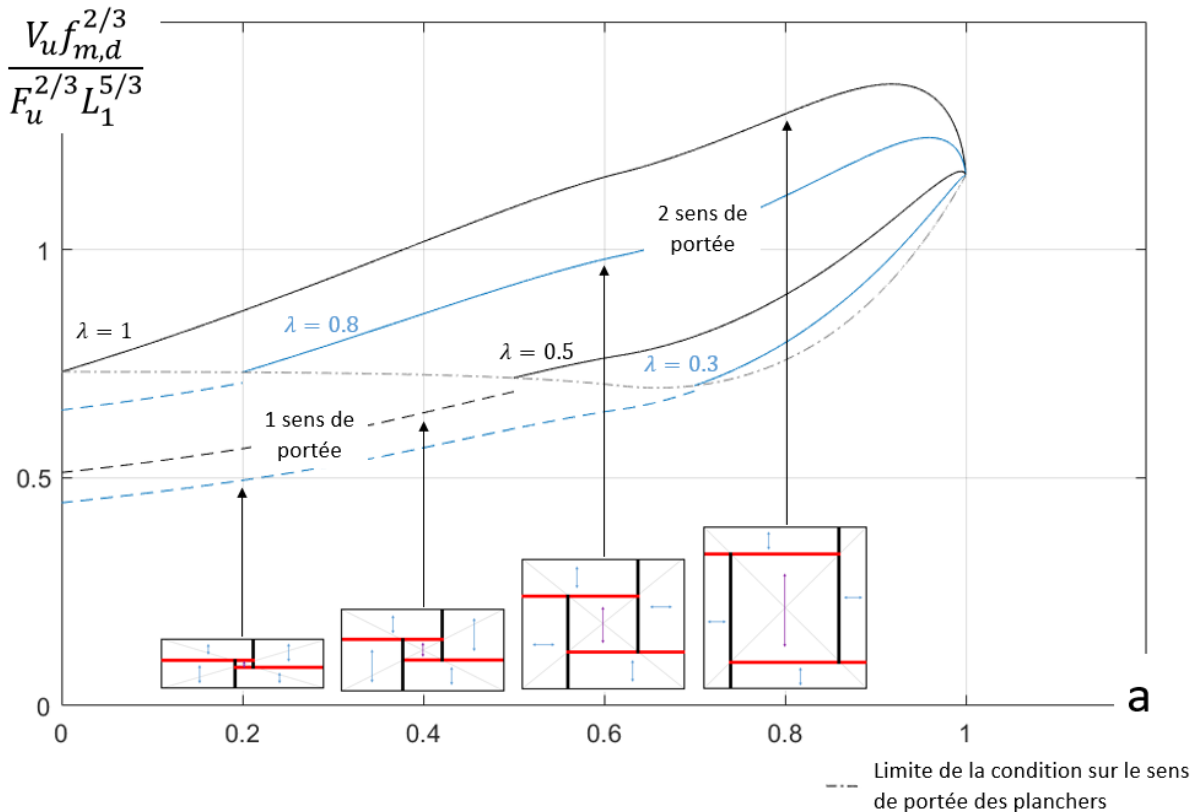


Figure 38 : Plancher rectangulaire avec zone centrale rectangulaire - Indicateur de volume sous le critère de flexion

Pour mieux comprendre cette histoire de ressaut, la Figure 39 représente les mêmes courbes que la Figure 38 mais sans la limite sur le sens de portée. Elles sont donc tracées pour toutes valeurs de a , c'est-à-dire, qu'on considère ici tous les cas, même ceux où le plancher secondaire ne porte pas selon le plus petit côté de chaque zone.

Conclusion : Optimiser un plancher en le chargeant selon le plus petit côté de chaque zone n'est peut-être pas la solution la plus optimale. Il faudrait, en fait, optimiser le plancher dans sa globalité. Prenons un exemple : en regardant les courbes $\lambda = 0.8$, la condition $\lambda = 1 - a$ annonce que la limite sur le sens de portée se trouve en $a = 0.2$. En choisissant la valeur $a = 0.4$, par exemple, il faudrait, selon notre théorie d'optimisation, prendre la courbe continue pour un plancher portant dans des directions différentes en fonction des zones. Or, si on regarde ces 2 courbes, on remarque que celle en pointillées, considérant un sens de portée identique partout, semble être la plus optimale. Cependant, ici, on ne considère que la structure primaire. Nous verrons en section 3.5.2.2 que la tendance sera inversée avec l'ajout du volume de la structure secondaire. Un autre commentaire peut être appliqué sur la forme générale de ces courbes. Pour des valeurs faibles de λ , l'allure du graphe est similaire à celle de la Figure 23 pour laquelle on faisait l'hypothèse que le module était composé uniquement de poutres type 1. Cela signifie donc que l'importance des 2 poutres type 2 est presque négligeable. On remarque d'ailleurs qu'en $a = 1$, on obtient exactement la moitié de la valeur obtenue en Figure 23 donc les poutres types 2 ont un volume

théorique nul. Effectivement, la situation $\alpha = 1$ correspond à celle où les poutres sont placées sur les bords du plancher. Il n'y a alors qu'une seule zone centrale portée par les poutres type 1. Bien sûr, ce n'est pas le cas recherché ici.

Pour des valeurs de λ proches de 1, l'allure du graphe est similaire à celle de la Figure 25 pour laquelle on faisait l'hypothèse que le module était composé de 4 poutres identiques 2 à 2. Pour des valeurs de λ importantes, au plus on se trouve proche de 1 au plus les poutres type 2 influencent le résultat.

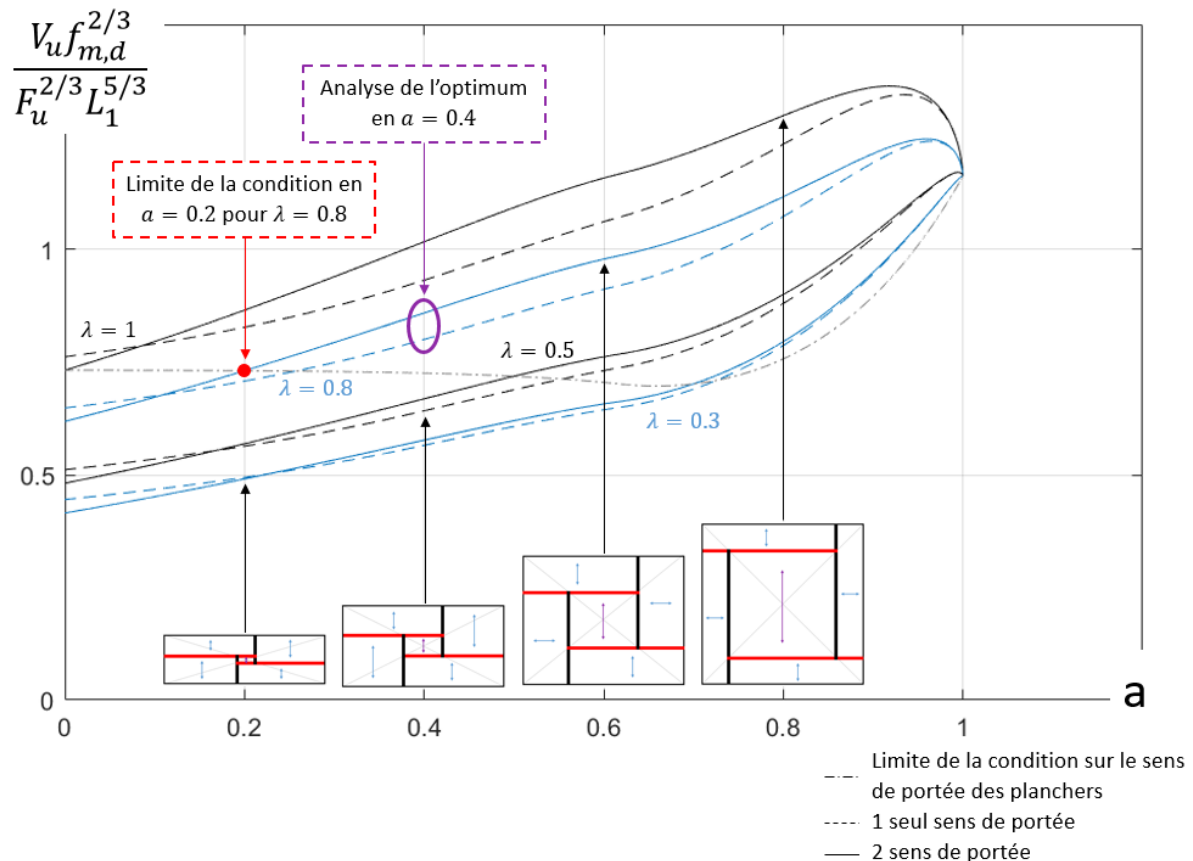


Figure 39 : Plancher rectangulaire avec zone centrale rectangulaire - Indicateur de volume sous le critère de flexion (sans condition sur le sens de portée)

En Figure 40 est tracée l'expression (12b) de l'indicateur de volume en fonction de la proportion d'engagement α_1 pour un plancher rectangulaire avec zone centrale carrée lorsque le plancher secondaire porte selon le plus petit côté. De nouveau, il y a 2 subdivisions : en pointillés, toutes les zones portent dans le même sens tandis qu'en trait continu, le sens de portée se fait dans 2 directions perpendiculaires en fonction de la zone.

Conclusion : Plusieurs conclusions sont identiques à celles d'un plancher à zone centrale rectangulaire : pour $\lambda = 1$ on retrouve exactement la même courbe que celle obtenue dans le cas d'un plancher carré soumis au même cas de charge (Figure 25). Au plus λ est grand, au plus le volume est important car la surface du plancher est également plus importante.

Ensuite, on remarque que le plancher porte dans une seule direction pour des faibles valeurs de α et dans 2 directions pour des valeurs de α importantes. Egalement, au plus λ est faible, au plus les courbes du plancher à 1 direction sont longues et les courbes du plancher à 2 directions sont courtes.

De plus, il y a, de nouveau, un léger ressaut au niveau de la limite sur le sens de portée qui s'explique similairement par la répartition des charges sur les poutres du module. Comme pour le cas d'un plancher rectangulaire avec zone centrale rectangulaire, cela signifierait que vouloir optimiser en portant selon le plus petit côté de chaque zone du plancher n'est pas la meilleure solution et que parfois, il serait plus avantageux de porter selon le grand côté de certaines zones. Cependant, une fois de plus, la structure secondaire n'a pas encore été prise en compte.

Finalement, une conclusion s'ajoute pour ce type de plancher : ce graphe est tracé en tenant compte de 2 conditions : une condition concernant la proportion d'engagement a_2 qui s'exprime en fonction de a_1 et de λ et qui doit toujours être inférieure à 1, ce qui mène à $a_1 < 2\lambda/(\lambda + 1)$. Cette condition stoppe le tracé en borne supérieure des courbes. La deuxième condition concerne le sens de portée et représente donc la limite entre les 2 types de courbes. Pour un plancher avec zone centrale carrée, la limite de cette condition se trouve pour $\lambda = (1 - a_1)(2 - a_2)/(2 - a_1)$, ou exprimée pour la proportion d'engagement de la poutre type 1 : $a_1 = 2(1 - \lambda)/(3 - \lambda)$. Il est possible de trouver une valeur λ pour laquelle ces 2 conditions sont égales : $2\lambda/(\lambda + 1) = 2(1 - \lambda)/(3 - \lambda)$ qui mène à $\lambda = 1/3$. Pour tout λ inférieur à cette valeur et pour une structure secondaire portant selon le plus petit côté de chaque zone, il n'existe pas de solution pour un plancher rectangulaire avec zone centrale carrée portant dans les 2 directions. Effectivement, en prenant pour exemple la courbe $\lambda = 0.3$, aucune valeur en trait continu n'est tracée.

Note : La comparaison entre des planchers dont la zone centrale est de forme différente (carrée ou rectangulaire) sera effectuée avec prise en compte de la structure secondaire dans la section 3.5.2.2.

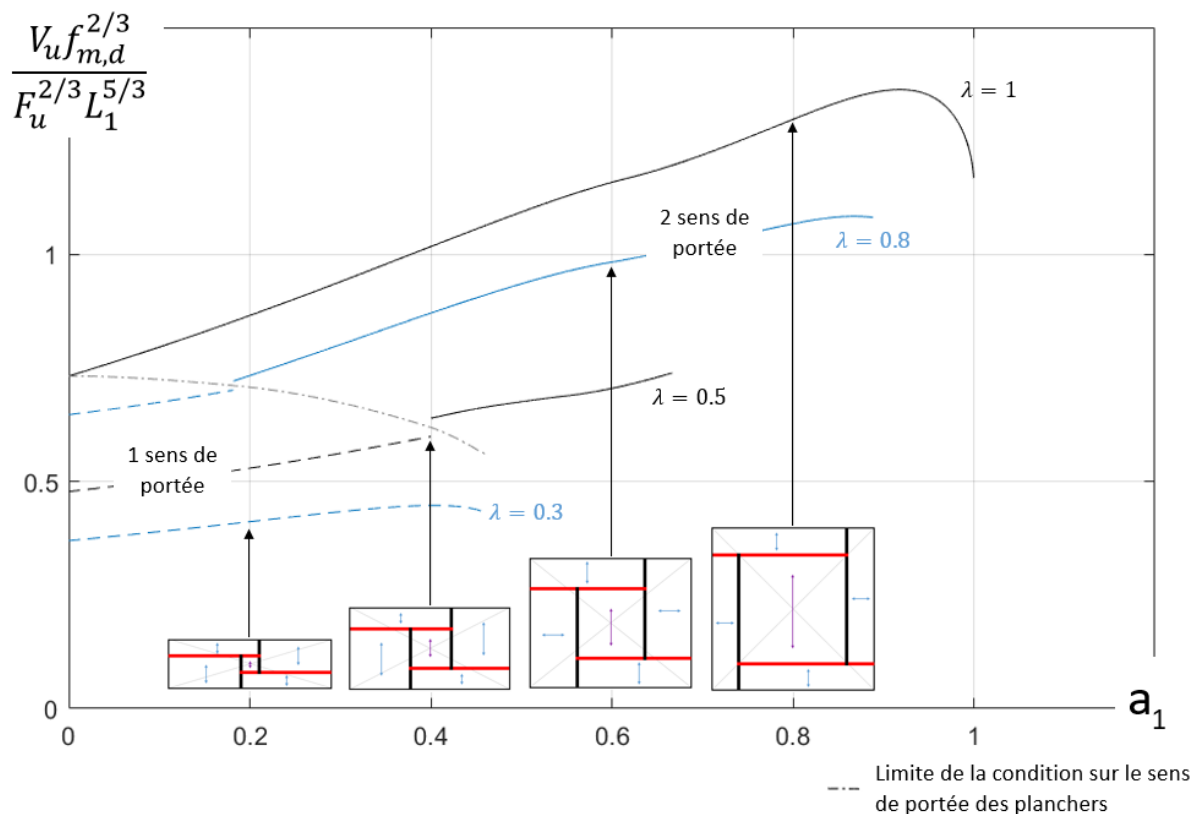


Figure 40 : Plancher rectangulaire avec zone centrale carrée - Indicateur de volume sous le critère de flexion

3.5.2.2. Correction du graphique en tenant compte de la structure secondaire

Identiquement au cas d'un plancher carré, l'entraxe entre les poutres reste constant sur tout le plancher (car il dépend des dimensions de la couverture finale) et les diamètres sont adaptés de manière à ce que la contrainte soit la même dans toutes les poutres intermédiaires. En appliquant le même raisonnement qu'en section 3.4.1.2.2, l'expression du volume des structures secondaires d'un plancher rectangulaire prend la forme suivante :

$$V_{sec} = f_{SS}(a_1, \lambda) \left(\frac{L_1}{e} \right)^{1/3} \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Adimensionnellement, le volume total du plancher, structures primaire + secondaire, s'écrit :

$$W_{tot} = \frac{V_{tot} \sigma^{2/3}}{F^{2/3} L_1^{5/3}} = W_B(a_1, \lambda) + f_{SS}(a_1, \lambda) \left(\frac{L_1}{e} \right)^{1/3} = W_{B,SS} \left(a_1, \lambda, \frac{L_1}{e} \right) \quad (13a)$$

Le volume de matière de la structure totale (primaire + secondaire) d'un plancher rectangulaire composé d'un module réciproque à 4 poutres identiques 2 à 2 avec sa structure secondaire, soumis à un chargement total F réparti uniformément et engendrant une contrainte de flexion σ dans la section la plus sollicitée est donné par (13a).

En l'évaluant à l'ELU :

$$W_{u,tot} = \frac{V_{u,tot} f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L_1^{5/3}} = W_{B,SS} \left(a_1, \lambda, \frac{L_1}{e} \right) \quad (13b)$$

En Figure 41 est représentée l'expression (13b) de l'indicateur de volume total tenant compte des structures primaire et secondaire en fonction de la proportion d'engagement a , et ce pour différentes valeurs d'entraxe et différentes dimensions du plancher rectangulaire ($\lambda = 1, 0.8, 0.5, 0.3$). Les courbes relatives au plancher avec zone centrale carrée sont dessinées en pointillés tandis que les courbes relatives au plancher avec zone centrale rectangulaire sont tracées en trait continu.

Conclusion : Tout d'abord, à l'exception des très petites valeurs de a_1 , on remarque que le plancher avec zone centrale carrée (pointillés) a toujours un volume plus important que le plancher avec zone centrale rectangulaire (continu). De plus, le plancher avec carré central n'est valable que pour certaines valeurs de a_1 en raison de la contrainte géométrique sur a_2 . Dans la suite de cette section, la solution du plancher avec zone centrale carrée sera donc écartée.

Ensuite, globalement, les valeurs $a_1 > 0.7$ sont à rejeter car le volume augmente fortement. Avant $a_1 = 0.7$, le volume est relativement stable ce qui permet une certaine latitude au concepteur. L'effet dû à l'effort tranchant n'a pas encore été pris en compte mais on se doute qu'il bornera une limite inférieure de a_1 (voir sous-section 3.5.2.3).

Finalement, on remarque que le ressaut est toujours présent lorsqu'on tient compte de la structure secondaire. La Figure 42 montre les courbes d'un plancher rectangulaire avec zone centrale rectangulaire (solution sélectionnée) sans la condition sur le sens de portée qui mène à ce ressaut. Les courbes pointillées représentent le plancher portant dans une seule direction tandis que les courbes continues représentent le plancher portant dans 2 directions différentes en fonction des zones. Alors qu'en Figure 39 on tirait la conclusion qu'optimiser le volume en faisant porter la structure secondaire selon le plus petit côté n'était peut-être pas la meilleure solution, on se rend compte qu'avec la structure secondaire prise en considération, la tendance est inversée. Effectivement, à gauche de la condition sur le sens de portée (trait vertical discontinu), les courbes pointillées sont toujours optimales (pour $L_1/e \neq 0$) tandis qu'à droite de la limite, ce sont les courbes continues qui sont optimales. Cela est d'autant plus marquant lorsque $\lambda \rightarrow 1$. L'optimisation réalisée est donc belle et bien correcte.

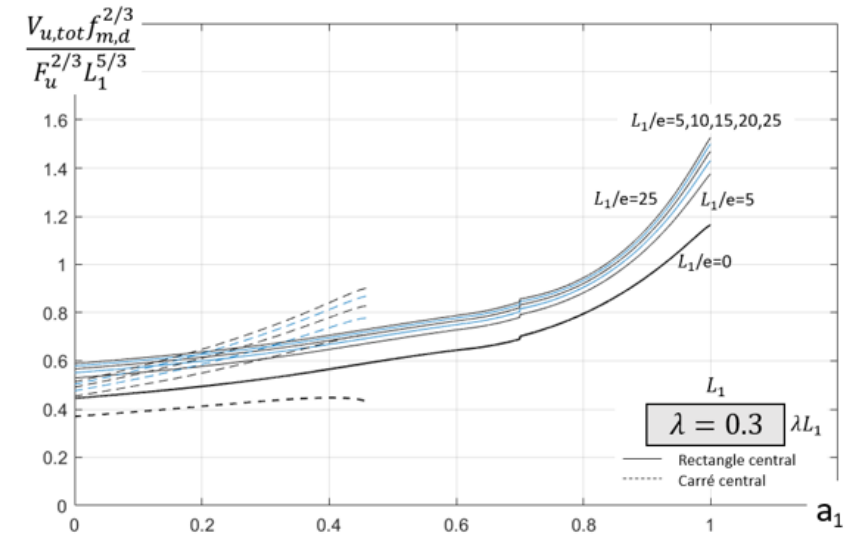
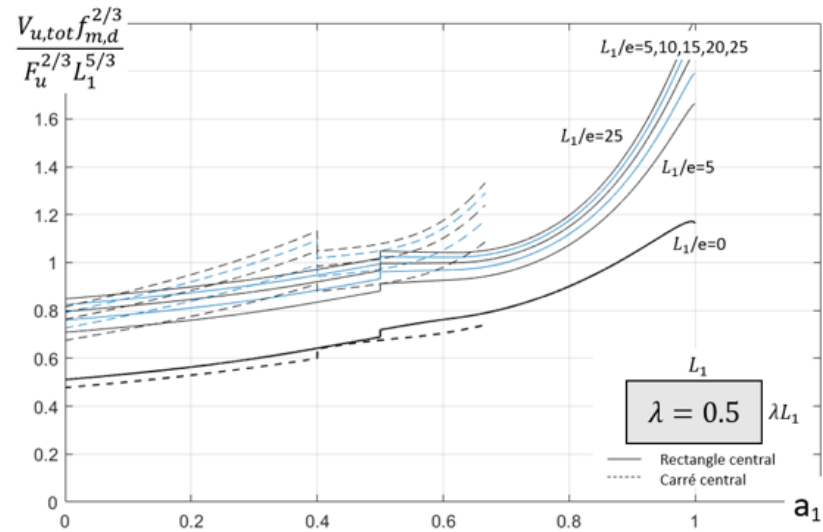
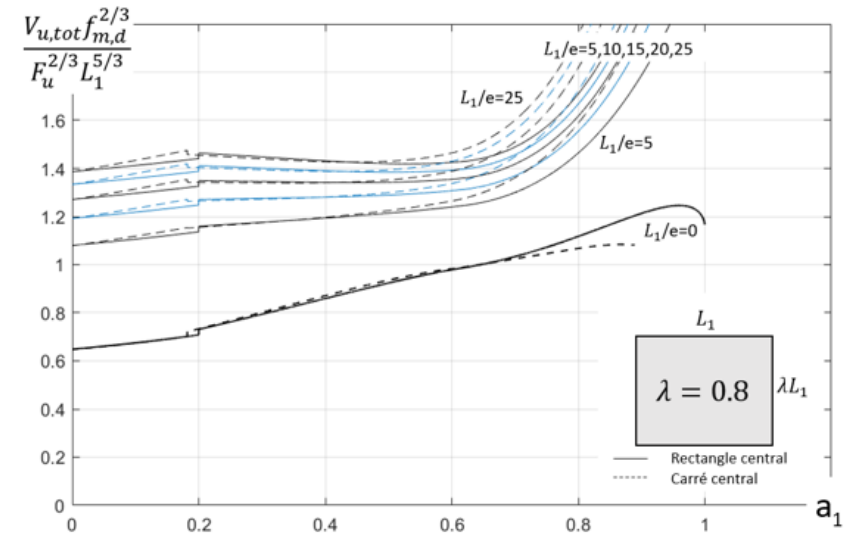
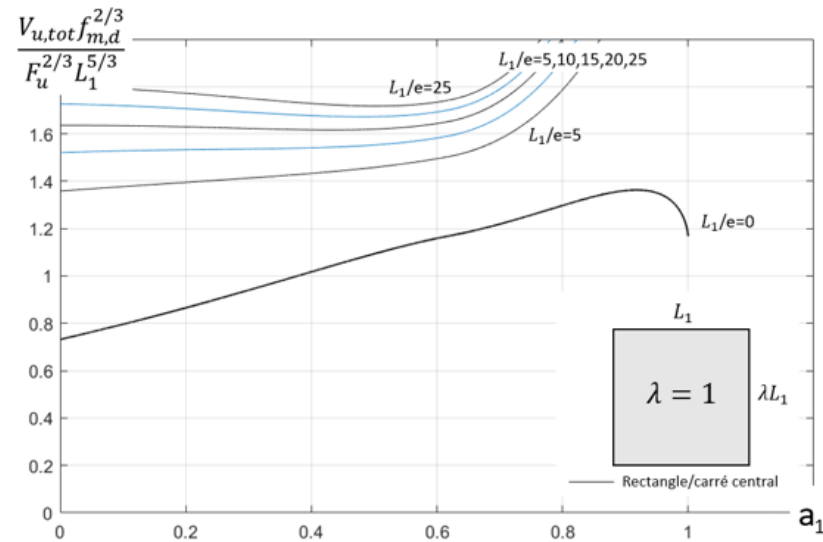


Figure 41 : Plancher rectangulaire avec zone centrale carrée (pointillés) ou rectangulaire (continu) – Indicateur de volume de la structure totale (primaire + secondaire) sous le critère flexion

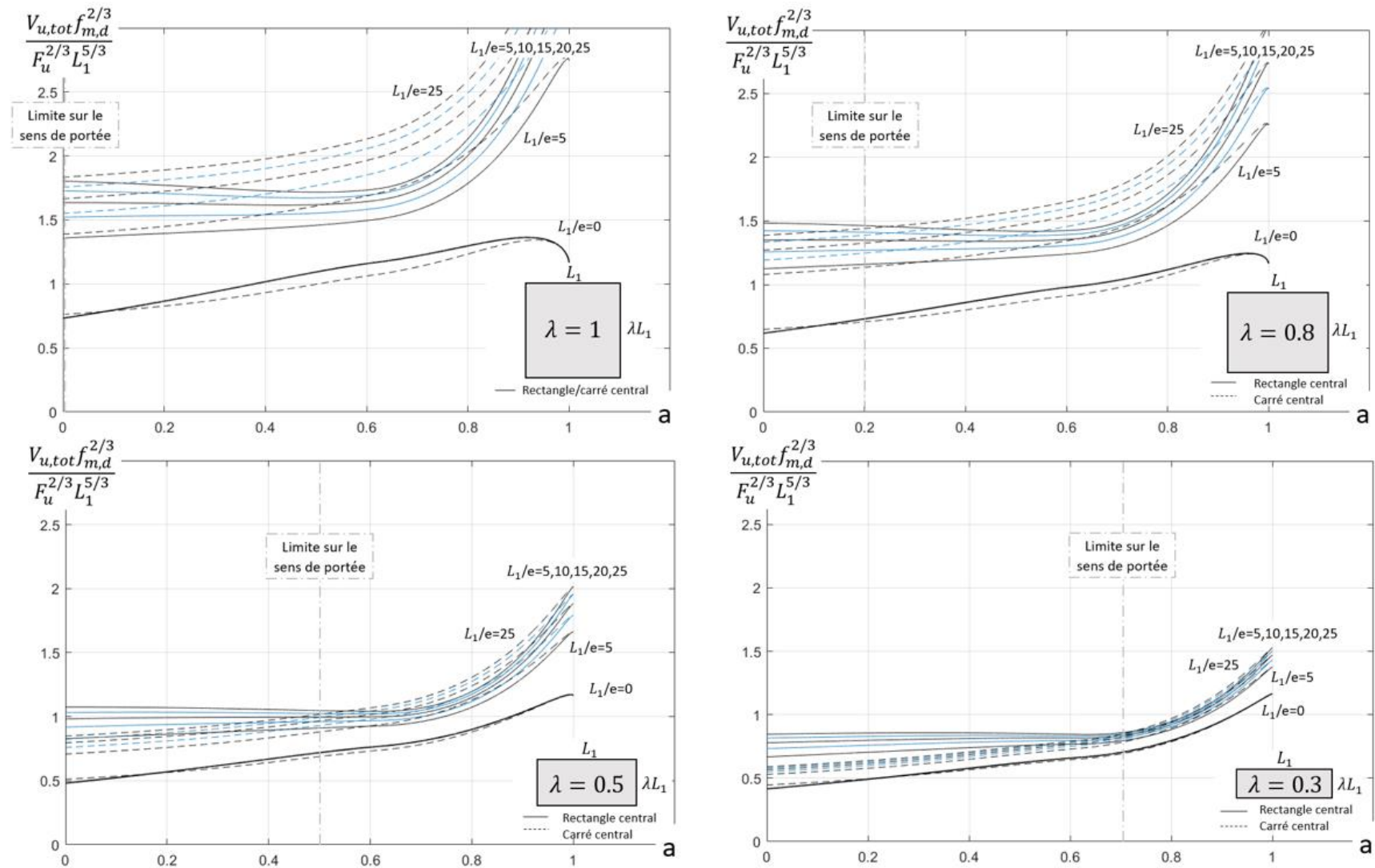


Figure 42 : Plancher rectangulaire avec zone centrale rectangulaire - Indicateur de volume de la structure totale (primaire + secondaire) sous le critère de flexion (sans condition sur le sens de portée)

3.5.2.3. Correction du graphique en tenant compte de l'effort tranchant

Les graphes précédents des indicateurs de volume sous le critère de flexion doivent être corrigés à l'effort tranchant pour des petites valeurs a . Compte tenu des conclusions faites dans la sous-section 3.5.2.2, on ne tient compte plus que du plancher rectangulaire à zone centrale rectangulaire ($a = a_1 = a_2$).

Une fois de plus, les diamètres sont adaptés de manière à obtenir la même contrainte de cisaillement dans tout le module, c'est-à-dire, $\phi_2 = \phi_1 (V_{2,Ed}/V_{1,Ed})^{1/2}$ où les efforts tranchants maximaux dans chaque poutre s'écrivent sous la forme $V_{i,Ed} = \alpha_{PTi}(a, \lambda)F$, avec $i = 1$ ou 2 en fonction du type de poutre.

Connaissant l'allure des efforts tranchants, il est possible de composer le système suivant :

$$\begin{cases} \tau = \frac{4\alpha_{PTi}(a, \lambda)F}{3(\pi\phi_i^2/4)} \\ V_i = \frac{\pi\phi_i^2}{4} \frac{L_i}{2-a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi\phi_i^2}{4} = \frac{4\alpha_{PTi}(a, \lambda)F}{3\tau} \\ \frac{\pi\phi_i^2}{4} = \frac{V_i(2-a)}{L_i} \end{cases}$$

Donc, le volume d'une poutre type est donné par :

$$V_i = \frac{4}{3} \frac{\alpha_{PTi}(a, \lambda) F L_i}{2-a} \frac{1}{\tau}$$

En sachant que $L_2 = \lambda L_1$, le volume total du module vaut alors :

$$V = 2V_1 + 2V_2 = 2 \frac{4(\alpha_{PT1}(a, \lambda) + \lambda\alpha_{PT2}(a, \lambda)) F L_1}{3(2-a)} \frac{1}{\tau}$$

A l'ELU, l'expression devient :

$$V_u = 2 \frac{4(\alpha_{PT1}(a, \lambda) + \lambda\alpha_{PT2}(a, \lambda)) F_u L_1}{3(2-a)} \frac{1}{k_{cr} f_{v,d}}$$

De manière à pouvoir comparer les critères de flexion et de cisaillement, il est nécessaire d'obtenir les mêmes indicateurs de volume. Pour cela, on définit $\theta = \frac{f_{m,d}}{f_{v,d}}$ et, en sachant que $F_u = q_u \lambda L_1^2$, l'indicateur sous le critère de cisaillement est :

$$W_u = \frac{V_u f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L_1^{5/3}} = Z \lambda^{1/3} \frac{4(\alpha_{PT1}(a, \lambda) + \lambda\alpha_{PT2}(a, \lambda))}{(2-a)} = Z W_S(a, \lambda) \quad (14)$$

Où on a posé $Z = \frac{2\theta^{2/3}}{3k_{cr}} \left(\frac{q_u}{f_{v,d}} \right)^{1/3}$ et $W_S(a, \lambda) = \lambda^{1/3} \frac{4(\alpha_{PT1}(a, \lambda) + \lambda\alpha_{PT2}(a, \lambda))}{(2-a)}$. Le volume de matière d'un plancher composé d'un module réciproque élémentaire à 4 poutres identiques 2 à 2, soumis à une charge totale F et engendrant une contrainte de cisaillement $f_{v,d}$ dans la section la plus cisailée, est donné par l'expression (14).

En Figure 43 sont représentées les expressions (12b) et (14) des indicateurs du volume de la structure primaire sous les critères de flexion et de cisaillement en fonction de a et ce, pour différentes formes du plancher $\lambda = 0.3, 0.5, 0.8, 1$ et différentes valeurs de Z (identiques à celles utilisées pour le plancher carré).

Conclusion : Tout comme pour le plancher carré, les courbes d'effort tranchant dépendent du matériau. Au plus la classe de résistance du matériau et la charge appliquée sont importantes au plus l'effet dû à l'effort tranchant est contraignant.

Ensuite, au plus le plancher est petit, au moins l'effort tranchant prend de l'importance.

Finalement, la solution optimale pour la structure primaire correspondrait à prendre une valeur de $a = 0.2 \dots 0.4$ où le critère de flexion domine et est minimal.

En ajoutant le volume lié à la structure secondaire, le volume total du plancher sous le critère de cisaillement vaut :

$$W_{u,tot} = \frac{V_{u,tot} f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L_1^{5/3}} = ZW_s(a, \lambda) + f_{ss}(a, \lambda) \left(\frac{L_1}{e} \right)^{1/3} = W_{s,ss} \left(a, \lambda, Z, \frac{L_1}{e} \right) \quad (15)$$

Le volume total de matière d'un plancher rectangulaire à zone centrale rectangulaire composé d'un module réciproque à 4 poutres identiques 2 à 2 avec sa structure secondaire, soumis à un chargement total F et engendrant une contrainte de cisaillement $f_{v,d}$ dans la section la plus sollicitée est donné par (15).

En Figure 44 sont représentés les indicateurs du volume total tenant compte des structures primaire et secondaire en fonction de la proportion d'engagement a , sous les critères de flexion (13b) et de cisaillement (15) et ce, pour différentes valeurs d'entraxe et différentes dimensions du plancher rectangulaire ($\lambda = 1, 0.8, 0.5, 0.3$). L'indicateur en cisaillement est tracé pour $Z = 0.9$, supposée valeur maximale car généralement non dépassée.

Conclusion : Les conclusions sont similaires à celles faites pour le plancher carré : à partir de $a = 0.7$, le volume augmente fortement sous le critère de flexion et en-dessous de $a = 0.2 \dots 0.3$, le volume augmente exponentiellement sous le critère de cisaillement. Pour des valeurs de a proches de 1, le critère de cisaillement peut être dominant mais ce n'est pas déterminant car le volume augmente très fortement sous le critère de flexion également donc ces valeurs sont à rejeter quoi qu'il arrive.

Finalement, la solution optimale se trouve pour des valeurs de $a = 0.3 \dots 0.7$ laissant une certaine latitude au concepteur.

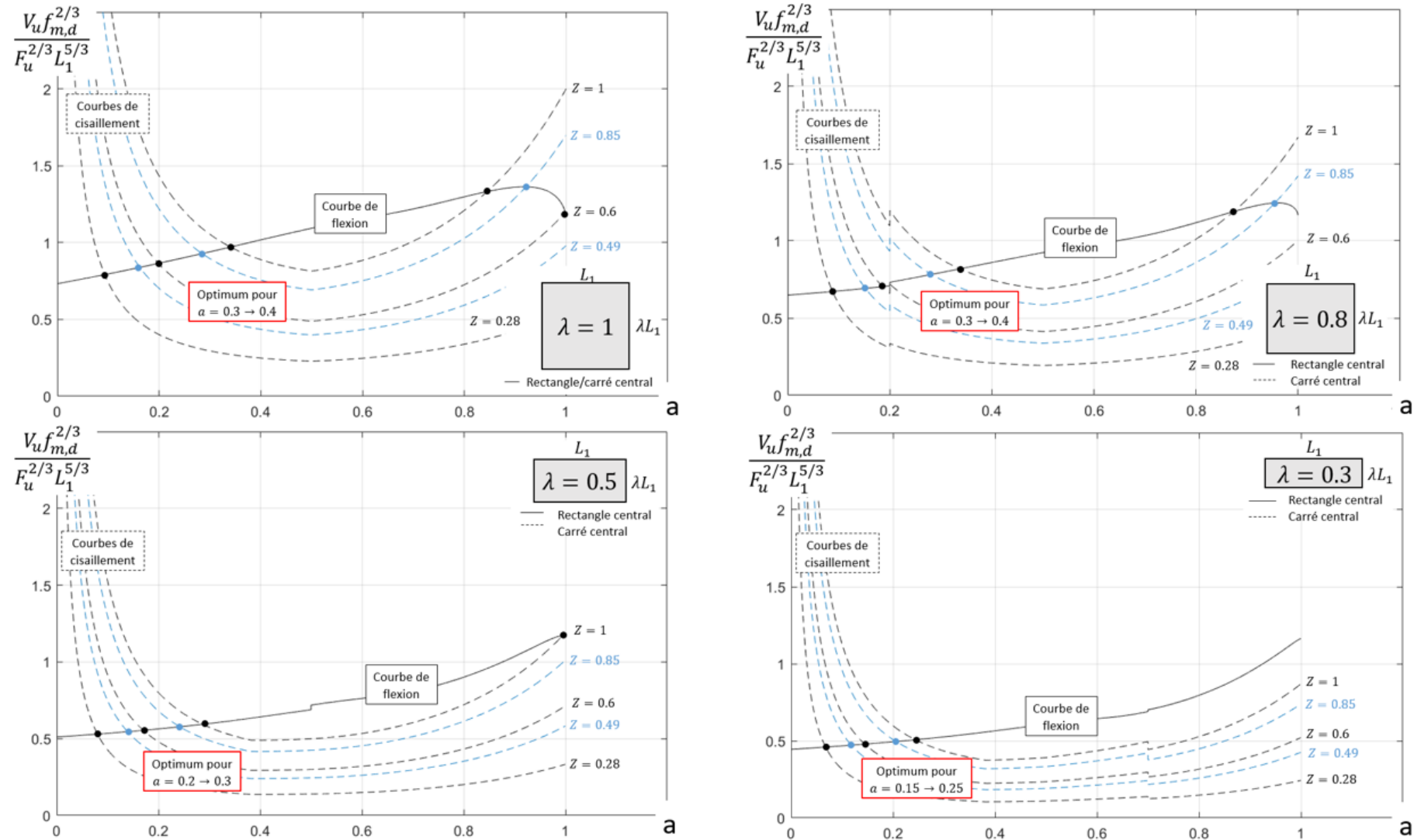


Figure 43 : Plancher rectangulaire avec zone centrale rectangulaire – Indicateurs du volume de la structure primaire sous les critères de flexion et de cisaillement

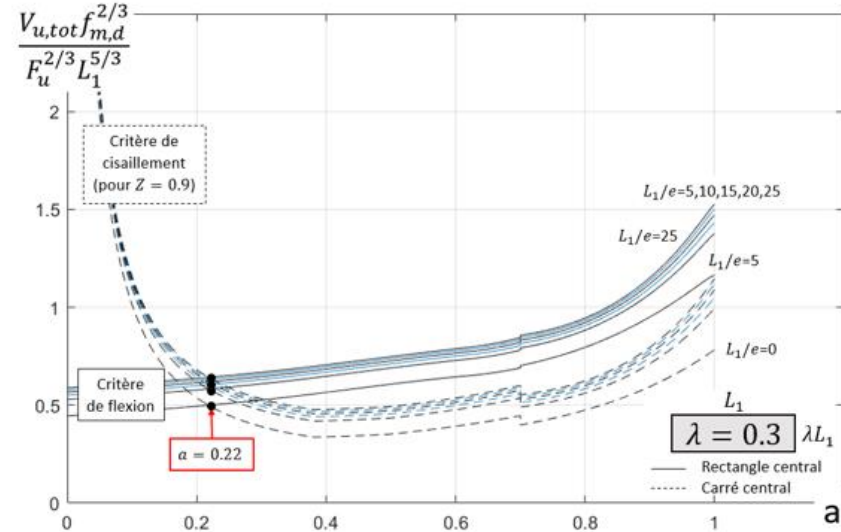
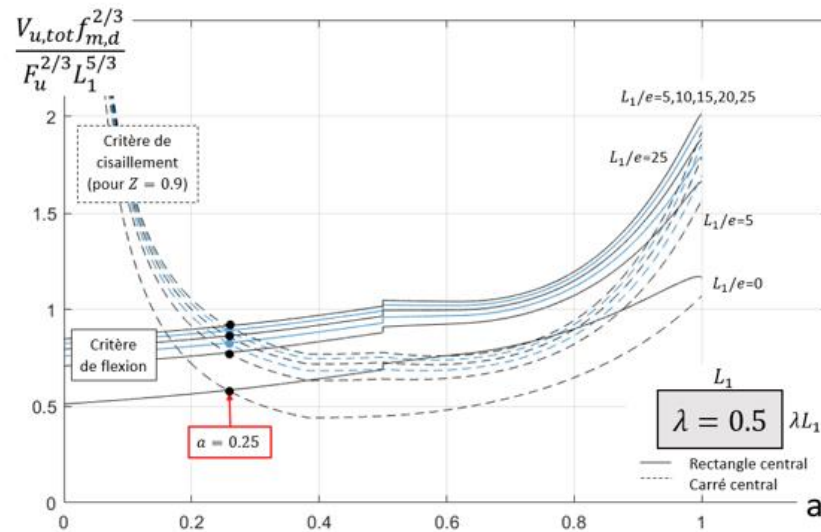
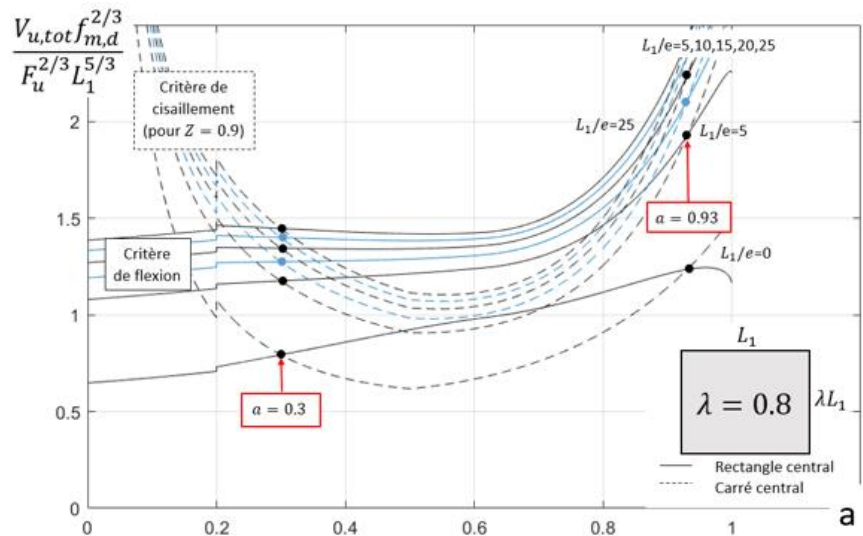
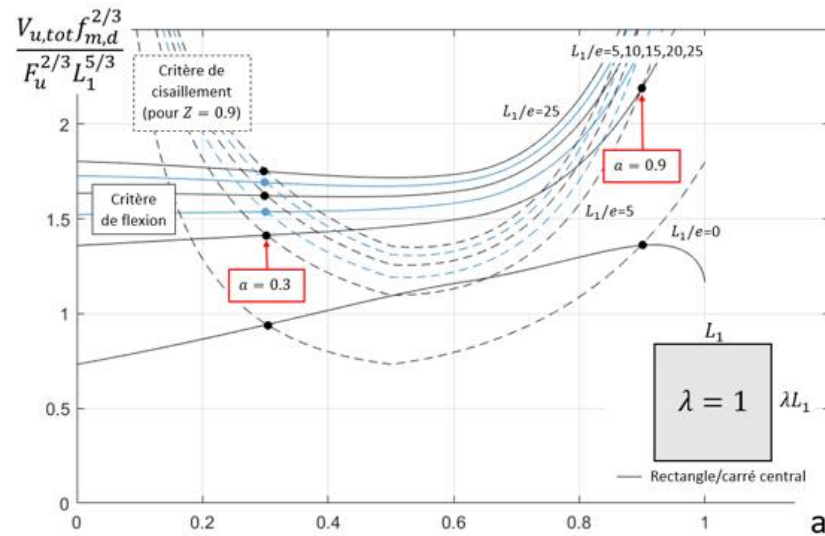


Figure 44 : Plancher rectangulaire avec zone centrale rectangulaire – Indicateurs du volume de la structure totale (primaire + secondaire) sous les critères de flexion et de cisaillement ($Z=0.9$)

3.5.3. Optimisation du volume de bois en fonction de la flèche maximale

Suite aux conclusions réalisées en section 3.5.2, seul le cas d'un plancher rectangulaire avec zone centrale rectangulaire ($a = a_1 = a_2$) sera analysé ci-dessous.

En reprenant le même raisonnement que pour le plancher carré, l'expression de la flèche maximale dans chaque poutre est donnée par :

$$\delta_i = f_{i,\delta}(a, \lambda) \frac{FL_i^3}{E_{0,m}I_i}$$

Sachant cela, le système suivant peut être construit :

$$\begin{cases} \delta_i = f_{i,\delta}(a, \lambda) \frac{FL_i^3}{E_{0,m}I_i} = f_{i,\delta}(a, \lambda) \frac{64FL_i^3}{E_{0,m}\pi\phi_i^4} \\ V_i = \frac{\pi\phi_i^2}{4} \frac{L_i}{2-a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \phi_i^2 = \frac{8}{\pi^{1/2}} f_{i,\delta}^{1/2}(a, \lambda) \frac{F^{1/2}L_i^{3/2}}{E_{0,m}^{1/2}\delta_i^{1/2}} \\ \phi_i^2 = \frac{4(2-a)V_i}{\pi L_i} \end{cases}$$

Ainsi, le volume d'une poutre type i du module vaut :

$$V_i = 3.545 \frac{f_{i,\delta}^{1/2}(a, \lambda)}{2-a} \left(\frac{L_i}{\delta_i} \right)^{1/2} \frac{F^{1/2}L_i^2}{E_{0,m}^{1/2}}$$

Pour déterminer l'indicateur de volume à l'ELS, 3 choix de dimensionnement sont possibles :

- CAS 1 : Toutes les poutres du module atteignent la même contrainte de flexion tel que $\phi_2 = \phi_1 \left(\frac{M_{2,max}}{M_{1,max}} \right)^{1/3}$. Dans ce cas, la flèche maximale du plancher est le maximum entre les flèches maximales de chaque poutre type :

$$\begin{cases} \delta_{max} = \frac{64FL_1^3}{E_{0,m}\pi\phi_1^4} \max \left(f_{1,\delta}(a, \lambda), \frac{\lambda^3 f_{2,\delta}(a, \lambda)}{(M_{2,max}/M_{1,max})^{4/3}} \right) \\ V = 2V_1 + 2V_2 = \frac{\pi\phi_1^2}{2} \frac{L_1}{2-a} \left(1 + \lambda \left(\frac{M_{2,max}}{M_{1,max}} \right)^{2/3} \right) \end{cases}$$

En éliminant ϕ_1^2 , on trouve l'équation du volume en fonction de la flèche maximale du module :

$$V = W_\delta(a, \lambda) \left(\frac{L_1}{\delta_{max}} \right)^{1/2} \frac{F^{1/2}L_1^2}{E_{0,m}^{1/2}}$$

$$\text{Où } W_\delta(a, \lambda) = \frac{7.09}{2-a} \left(1 + \lambda \left(\frac{M_{2,max}}{M_{1,max}} \right)^{2/3} \right) \sqrt{\max \left(f_{1,\delta}(a, \lambda), \frac{\lambda^3 f_{2,\delta}(a, \lambda)}{(M_{2,max}/M_{1,max})^{4/3}} \right)}.$$

- CAS 2 : Toutes les poutres ont le même diamètre de manière à ce que la contrainte de flexion maximale soit atteinte pour la poutre la plus chargée. Dans ce cas, la flèche maximale est obtenue pour la poutre avec la valeur $f_{i,\delta}(a)$ maximale. L'expression du CAS 1 se simplifie :

$$V = W_\delta(a, \lambda) \left(\frac{L_1}{\delta_{max}} \right)^{1/2} \frac{F^{1/2}L_1^2}{E_{0,m}^{1/2}}$$

$$\text{Où } W_\delta(a, \lambda) = \frac{7.09}{2-a} (1 + \lambda) \sqrt{\max \left(f_{1,\delta}(a, \lambda), \lambda^3 f_{2,\delta}(a, \lambda) \right)}.$$

- CAS 3 : Toutes les poutres atteignent le même critère $\frac{\delta_1}{L_1} = \frac{\delta_2}{L_2} = \frac{\delta_{max}}{L}$. Le volume total s'écrit sous la forme :

$$V = W_{\delta}(a, \lambda) \left(\frac{L_1}{\delta_{max}} \right)^{1/2} \frac{F^{1/2} L_1^2}{E_{0,m}^{1/2}}$$

Où $W_{\delta}(a) = \frac{7.09}{2-a} (f_{1,\delta}^{1/2}(a, \lambda) + f_{2,\delta}^{1/2}(a, \lambda))$. Cependant, ce dernier cas est facilement réalisable pour un plancher carré mais pas pour un plancher rectangulaire pour lequel il n'existe pas de solution physique pour toute valeur de a . Il ne sera donc plus considéré dans la suite.

Dans tous les cas, l'expression du volume prend la même forme. L'indicateur sous le critère de déplacement évalué à l'ELS s'écrit donc :

$$W_{\delta} = \frac{V_{\delta} E_{0,m}^{1/2}}{F_{\delta}^{1/2} L_1^2} = W_{\delta}(a, \lambda) \left(\frac{L_1}{\delta_{max}} \right)^{1/2} \quad (16)$$

Le volume de matière d'un module réciproque rectangulaire avec zone centrale rectangulaire, soumis à une charge totale F et engendrant une flèche maximale δ_{max} est donné par l'expression (16). Peu importe la charge, le matériau ou les dimensions du plancher, le volume minimal sera toujours atteint pour une valeur a qui minimise $W_{\delta}(a, \lambda)$.

Sur la Figure 45 est représentée l'expression (16) du volume adimensionnel W en fonction de la proportion d'engagement a pour les 2 premiers cas de dimensionnement et pour différentes formes du plancher ($\lambda = 0.3, 0.5, 0.8, 1$).

Conclusion : Les différentes approches fournissent des courbes relativement proches les unes des autres même si, au plus λ diminue, au plus elles s'écartent car l'hypothèse du CAS 2 est trop forte. Ensuite, tout comme pour le plancher carré, les faibles et hautes valeurs de a ont été mises en pointillées sur les courbes car, pour $a < 0.2$, on suppose que l'effet dû à l'effort tranchant prend de l'importance et pour $a > 0.8$, on suppose que la flèche sera plus influencée par la structure secondaire que par la structure primaire. Cependant, ces 2 bornes ne sont pas un problème puisque les conclusions à l'ELU montrent que la solution optimale se trouve entre $a = 0.3 \dots 0.7$. Finalement, le graphe montre, une fois de plus, que le volume sous le critère de flèche est optimal pour des faibles valeurs de la proportion d'engagement a .

3.5.4. Conclusions préliminaires

L'analyse du plancher rectangulaire confirme les conclusions réalisées dans le cas d'un plancher carré : les meilleures solutions sont comprises entre $a = 0.3 \dots 0.7$ avec une préférence pour une valeur relativement faible sous le critère de déplacement. **Donc, la solution optimale tourne autour de $a = 0.3$.**

L'analyse entre un plancher classique rectangulaire (avec $\lambda < 1$) et un plancher réciproque rectangulaire sera réalisée dans le dernier chapitre « Discussion et conclusion ».

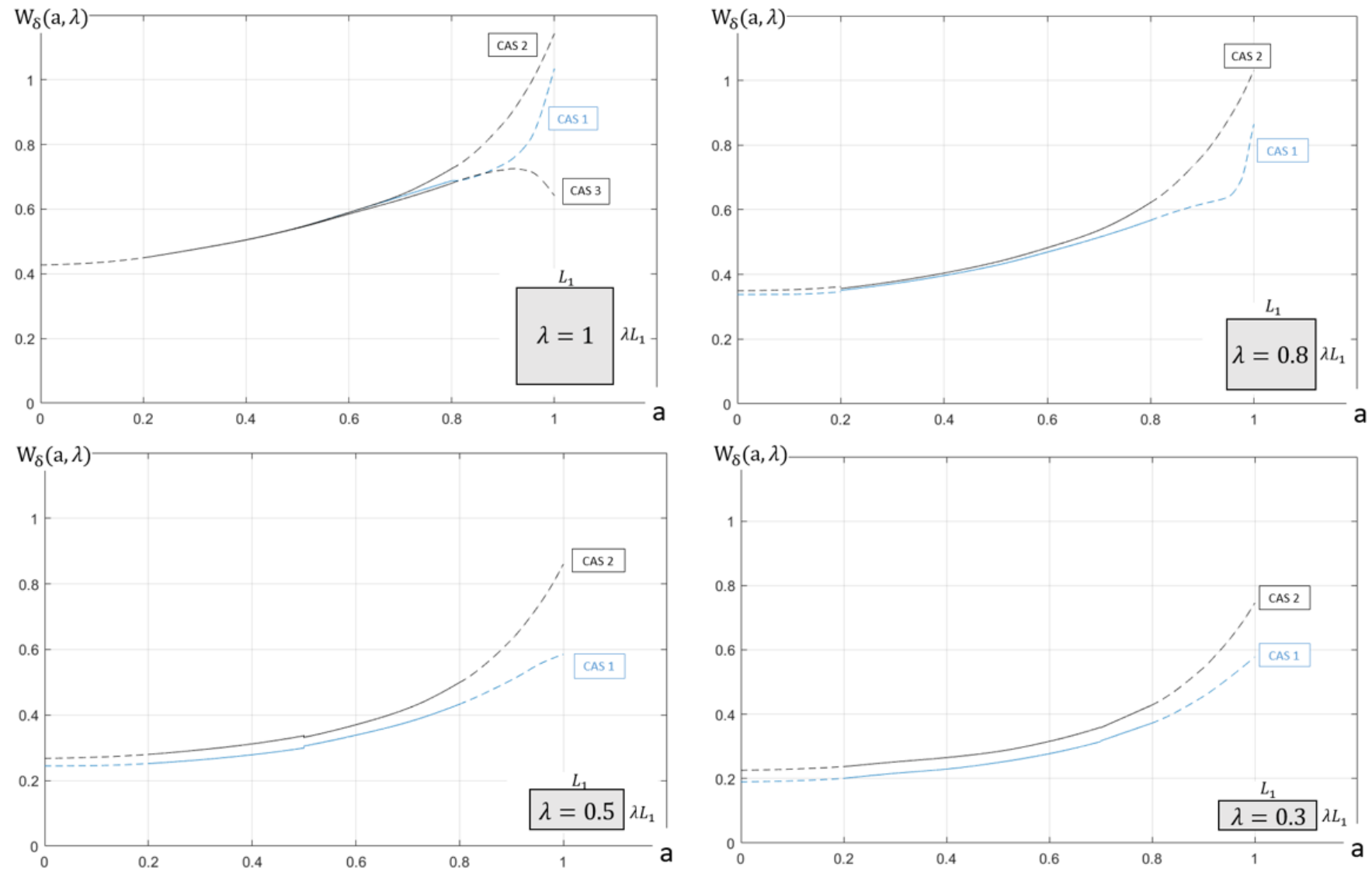


Figure 45 : Plancher rectangulaire avec zone centrale rectangulaire – Variations de $W_\delta(a, \lambda)$ selon le critère de déplacement

3.6. Expression du volume d'un plancher carré composé de 4 modules réciproques

Soit un plancher carré de dimensions $L \times L$ composé de 4 modules réciproques élémentaires soumis à une charge surfacique q [N/mm²], telle que $F = qL^2$ [N], distribuée uniformément sur toutes les zones du plancher. Pour la suite, 3 configurations différentes seront analysées et comparées, chacune ayant ses propres caractéristiques géométriques. Dans un premier temps, cette dernière section démontrera conceptuellement qu'il est possible d'obtenir les mêmes indicateurs de volume pour un plancher à plusieurs modules que ceux développés précédemment dans le cas d'un plancher à un seul module. Ensuite, les équations devenant réellement complexes, le chapitre suivant abordera une méthode numérique simple pour obtenir les différents graphes souhaités.

3.6.1. Définition des configurations analysées

3.6.1.1. Configuration 1 : dite « naturelle »

3.6.1.1.1. Définition des familles de poutres

Cette première configuration est dite « naturelle » car elle consiste à placer, dans un plancher carré, 4 modules réciproques dont toutes les poutres ont une proportion d'engagement α et une longueur L_p constantes.

En choisissant les sens de portée représentés en Figure 46, il est possible de simplifier le système grâce aux similarités entre poutres. Ces similarités sont obtenues grâce à la symétrie du plancher et permettent de classer les poutres en plusieurs « familles ». Chaque famille sera composée de poutres de mêmes propriétés, c'est-à-dire, de même diamètre car soumises au même chargement. Pour ce type de plancher, on distingue alors 4 familles différentes :

- Les poutres 1, 5, 8 et 12 sont identiques
- Les poutres 2, 3, 10 et 11 sont identiques
- Les poutres 6 et 7 sont identiques
- Les poutres 4 et 9 sont identiques

Cela signifie que tout le système peut donc être défini en calculant seulement 4 poutres.

Note : Le choix du sens de portée dans les zones carrées influence fortement le nombre de familles, il faut donc le choisir de sorte qu'il soit le plus symétrique possible pour diminuer ce nombre le plus possible.

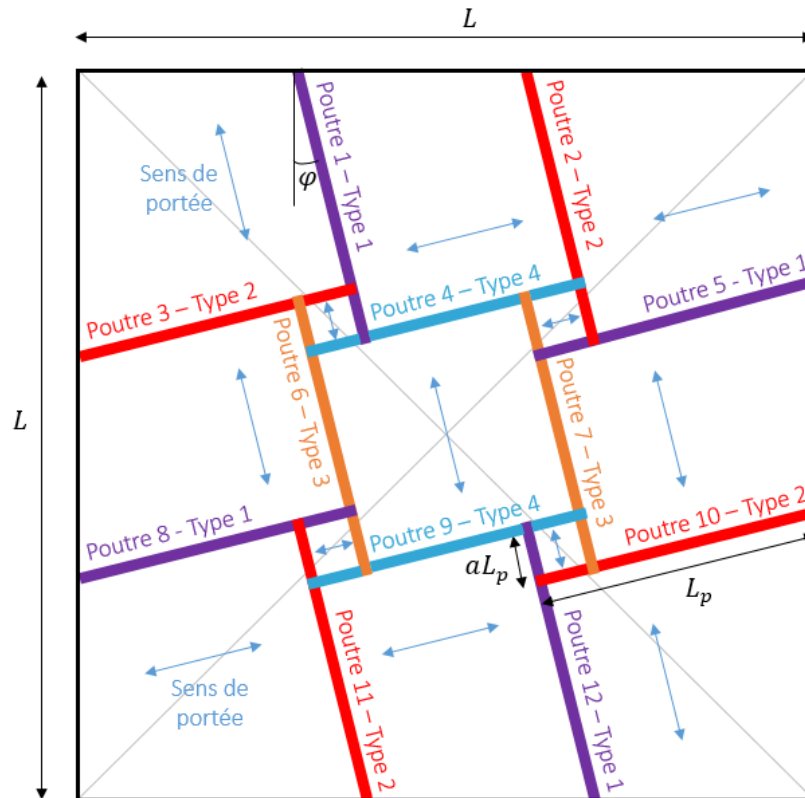


Figure 46 : Plancher carré avec 4 modules réciproques soumis à une charge uniformément distribuée

3.6.1.1.2. Géométrie du plancher

Comme le montre la Figure 46, pour pouvoir placer 4 modules dont les poutres ont toute la même longueur L_p , ces modules forment un certain angle avec les bords du plancher : $\varphi = \arctan\left(\frac{a}{1-a}\right)$. Par construction géométrique, la longueur des poutres vaut alors :

$$L_p = \frac{L}{\cos(\varphi) + \frac{2(1-a)}{\cos(\varphi)}}$$

Sur base de la Figure 47, il est possible de déterminer les charges réparties linéairement sur chaque poutre.

La charge répartie due au grand carré central, s'appliquant sur les poutres type 4, vaut :

$$q_1 = q(1-a)\frac{L_p}{2}$$

La charge répartie due aux petits carrés centraux, s'appliquant sur les poutres types 2 et 3, est donnée par :

$$q_2 = q\frac{aL_p}{2}$$

Les charges réparties dues aux zones latérales (hors coins), s'appliquant uniformément sur les poutres type 2 valent:

$$q_3 = q(1-a)\frac{L_p}{2} = q_1$$

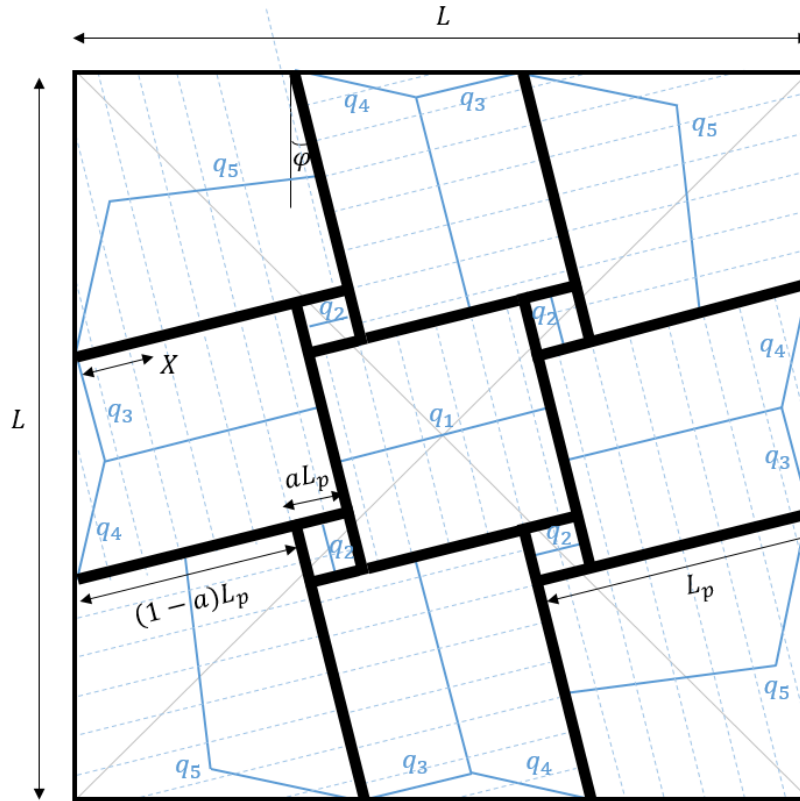


Figure 47 : Plancher carré avec 4 modules réciproques – Sens de portée (lignes bleues pointillées) et allure des charges réparties le long de chaque poutre (lignes bleues continues)

Tandis que celles s'appliquant sur les poutres type 1 sous la forme d'une charge trapézoïdale sont données par :

$$q_4 = \begin{cases} q(1-a)\frac{L_p}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq (1-a)L_p \\ q\left(\frac{1-a}{2a}\right)(L_p - x) & \text{si } (1-a)L_p \leq x \leq L_p \end{cases}$$

Finalement, la charge répartie due aux coins du plancher, s'appliquant sur les poutres type 2, se décompose en un triangle et un trapèze pour prendre l'expression suivante :

$$q_5 = \begin{cases} q \left(\frac{a \cos^2(\varphi)}{2 \left(1 - \left(\frac{1-a}{\cos(\varphi)} + a \cos(\varphi) \right) \sin(\varphi) \right)} x + (1-a)\frac{L_p}{2} \right) & \text{si } 0 \leq x \leq L_p - X \\ q \left(\frac{1-a + a \cos^2(\varphi)}{2 \left(\frac{1-a}{\cos(\varphi)} + a \cos(\varphi) \right) \sin(\varphi)} \right) (L_p - x) & \text{si } L_p - X \leq x \leq L_p \end{cases}$$

Comme on peut le remarquer, toutes les charges réparties sont fonction uniquement de a et des données de départ q (ou F) et L .

Note : Le détail de la construction géométrique permettant de déterminer ces charges réparties se trouve dans l'ANNEXE B.

3.6.1.2. Configuration 2 : modules parallèles aux bords du plancher avec longueur des poutres latérales variable

De manière à faciliter la mise en œuvre, on souhaite créer une solution où les poutres sont parallèles aux bords du plancher. Ainsi, la structure secondaire s'applique dans des zones rectangulaires et porte selon le petit côté de chaque zone, comme c'est le cas depuis le début de ce document.

La première solution imaginée consiste à reprendre la configuration dite « naturelle », d'y maintenir la longueur des poutres centrales constantes et d'y ajuster uniquement les longueurs des poutres latérales de sorte à ce que les 4 modules rentrent dans un plancher de dimensions $L \times L$ en restant parallèles aux bords.

Pour réaliser cela, la Figure 48 montre qu'il faut ajouter les longueurs en gras continu et retirer les longueurs en gras pointillés. Comme on peut le voir, les poutres centrales ont, effectivement, gardé la même longueur que dans la configuration tournée.

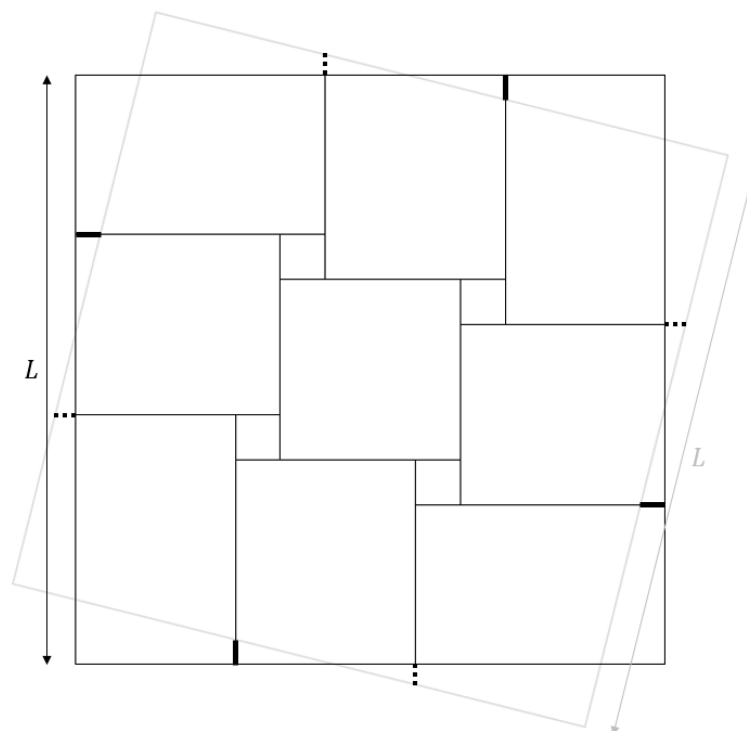


Figure 48 : Plancher carré avec 4 modules réciproques – Ajustement des longueurs extérieures à partir de la configuration dite « naturelle »

3.6.1.2.1. Définition des familles de poutres

En se basant sur la répartition des charges ainsi que sur la longueur des poutres de chaque module établies en Figure 49, on distingue 4 familles de poutres différentes :

- Les poutres 1, 5, 8 et 12 sont identiques
- Les poutres 2, 3, 10 et 11 sont identiques
- Les poutres 4 et 9 sont identiques
- Les poutres 6 et 7 sont identiques

Chaque famille se compose de poutres de même longueur et de même diamètre soumises au même chargement. Il est à noter que les poutres 4, 6, 7 et 9 ont la même longueur mais ne sont pas soumises

aux mêmes charges, c'est la raison pour laquelle on les classe en 2 familles distinctes. Tout le système peut donc se définir à l'aide de 4 poutres.

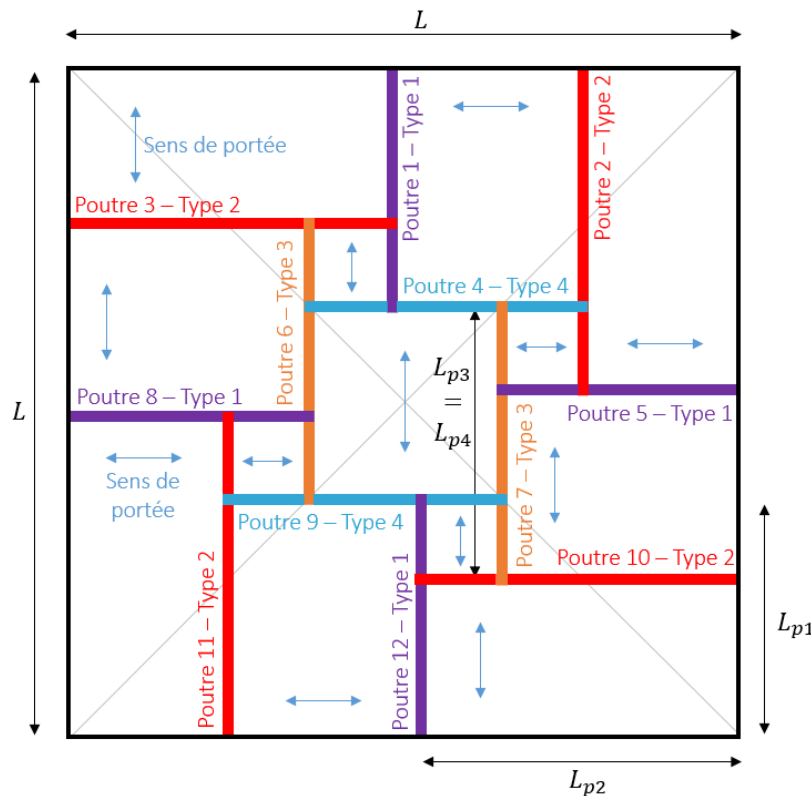


Figure 49 : Plancher avec 4 modules réciproques soumis à une charge uniformément répartie et où seules les poutres extérieures ont une longueur variable

3.6.1.2.2. Géométrie du plancher

Etant donné qu'il y a 4 familles de poutres, il faut définir la longueur de ces 4 poutres de référence qu'on choisit comme étant les poutres 1, 2, 4 et 6. Etant donné que les poutres ont des longueurs différentes et qu'on souhaite garder des modules avec zone centrale carrée, on ne peut pas partir du principe que leur proportion d'engagement sont égales. On a donc un système de 8 équations à 8 inconnues $a_1, a_2, a_4, a_6, L_{p1}, L_{p2}, L_{p4}, L_{p6}$. Pour pouvoir résoudre le problème, on prend comme donnée de départ la longueur du plancher L ainsi qu'une des 4 proportions d'engagement. Comme on s'est basé sur la configuration « naturelle » pour définir notre plancher actuel, les poutres centrales sont de même longueur dans les 2 configurations et respectent les relations suivantes :

$$L_{p4} = L_{p6} = \frac{L}{\cos(\varphi) + \frac{2(1-a)}{\cos(\varphi)}} \quad \varphi = \arctan\left(\frac{a}{1-a}\right)$$

Où φ est l'angle entre les poutres et les bords du plancher dans la configuration dite « naturelle » tandis que $a = a_4 = a_6$ est la proportion d'engagement de ces poutres. On décide donc de fixer a_6 pour déterminer la longueur de poutre L_{p6} . Dans ce cas, puisque $a_4 = a_6$ et $L_{p4} = L_{p6}$, il reste 4 inconnues à déterminer. En supposant que les modules sont composés d'une zone centrale carrée, on peut déterminer les 4 équations suivantes :

$$\begin{cases} L = L_{p1} + L_{p2} + (1 - 2a_6)L_{p6} \\ a_1 L_{p1} = a_6 L_{p6} \\ a_2 L_{p2} = a_6 L_{p6} \\ L_{p1} = (1 - a_2)L_{p2} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_1 = a_6 \frac{2L_{p6}}{L - L_{p6}(1 - a_6)} \\ a_2 = a_6 \frac{2L_{p6}}{L - L_{p6}(1 - 3a_6)} \\ L_{p1} = \frac{L - L_{p6}(1 - a_6)}{2} \\ L_{p2} = \frac{L - L_{p6}(1 - 3a_6)}{2} \end{cases}$$

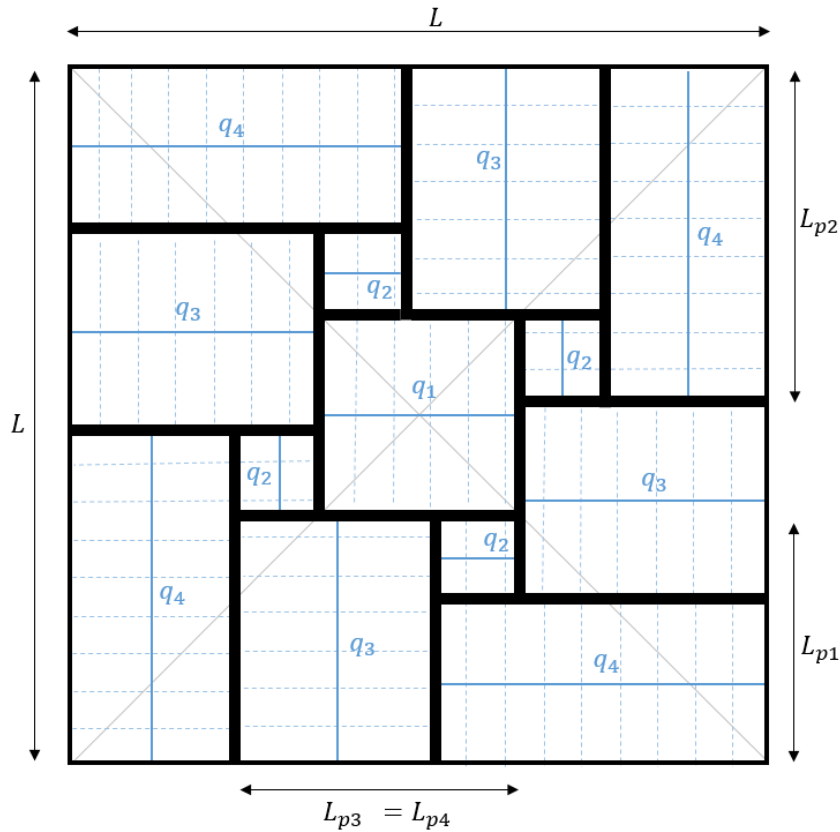


Figure 50 : Plancher carré avec 4 modules réciproques dont les longueurs de poutres extérieures sont variables – Sens de portée (lignes bleues pointillées) et allure des charges réparties le long de chaque poutre (lignes bleues continues)

Toutes les inconnues peuvent donc s'exprimer en fonction des données L , L_{p6} et a_6 . On peut alors déterminer les charges réparties sur le plancher, illustrées en Figure 50 :

$$\begin{cases} q_1 = q(1 - a_6) \frac{L_{p6}}{2} \\ q_2 = qa_6 \frac{L_{p6}}{2} \\ q_3 = q_1 \\ q_4 = q(1 - a_1) \frac{L_{p1}}{2} \end{cases}$$

3.6.1.3. *Configuration 3 : modules parallèles aux bords du plancher avec longueur des poutres centrales variable*

La deuxième solution imaginée pour que les modules soient parallèles aux bords du plancher consiste à reprendre la configuration « naturelle » mais, cette fois-ci, d'y maintenir la longueur des poutres latérales constantes et d'y ajuster la longueur des poutres centrales.

Ainsi, la Figure 51 montre que les lignes en gras continues ont la même longueur que les lignes fines continues tandis que les lignes en gras pointillées ont une longueur différente des lignes fines pointillées.

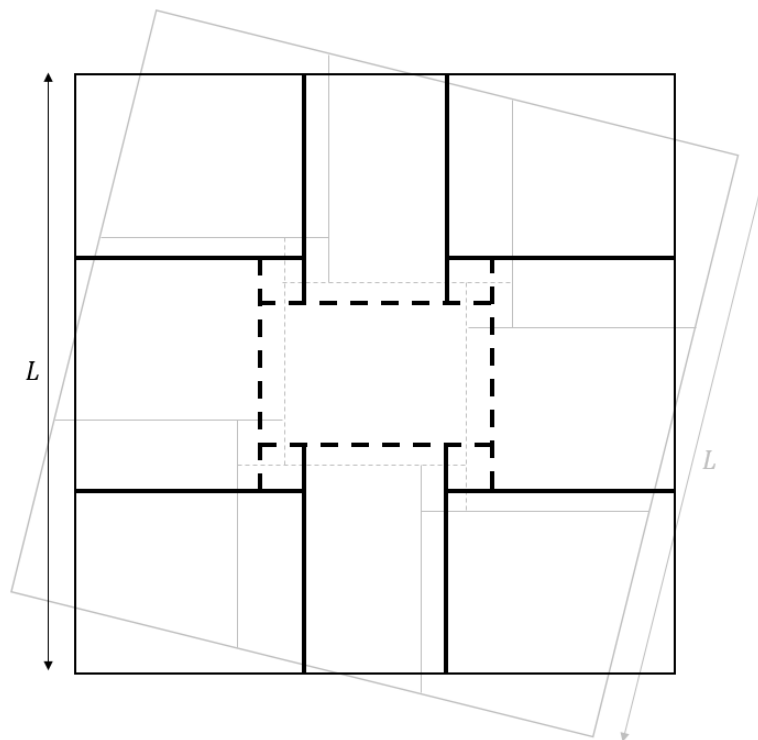


Figure 51 : Plancher carré avec 4 modules réciproques – Ajustement des longueurs centrales à partir de la configuration dite « naturelle »

3.6.1.3.1. Définition des familles de poutres

En se basant sur le modèle établi en Figure 52, on distingue 4 familles de poutres :

- Les poutres 1, 2, 11 et 12 sont identiques
- Les poutres 3, 5, 8 et 10 sont identiques
- Les poutres 4 et 9 sont identiques
- Les poutres 6 et 7 sont identiques

Comme pour le cas précédent, les poutres des 2 premières familles ont la même longueur mais un chargement différent donc il faut les séparer. Tout le système est donc défini à l'aide de 4 poutres seulement.

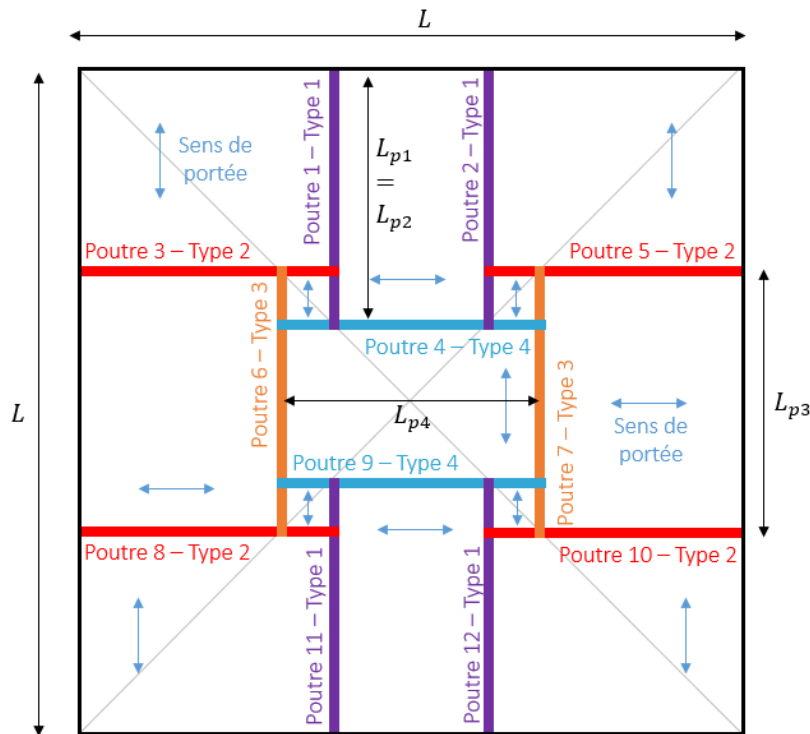


Figure 52 : Plancher carré avec 4 modules réciproques soumis à une charge uniformément répartie et où seules les poutres centrales ont une longueur variable

3.6.1.3.2. Géométrie du plancher

Sachant que le plancher se modélise en connaissant seulement 4 poutres, il faut résoudre un système de 8 équations à 8 inconnues : $a_1, a_2, a_4, a_6, L_{p1}, L_{p2}, L_{p4}, L_{p6}$ en prenant les poutres 1, 2, 4 et 6 comme références. Les poutres types 1 et 2 ont la même longueur que les poutres de la configuration dite « naturelle » et donc, pour un $a = a_1 = a_2$ fixé, on a :

$$L_{p1} = L_{p2} = \frac{L}{\cos(\varphi) + \frac{2(1-a)}{\cos(\varphi)}} \quad \varphi = \text{atan}\left(\frac{a}{1-a}\right)$$

Où φ est l'angle entre les poutres et les bords du plancher dans la configuration dite « naturelle ». On décide donc de fixer a_1 pour déterminer la longueur de poutre L_{p1} . Ensuite, par symétrie du plancher, on a que $L_{p4} = L_{p6}$ et donc $a_4 = a_6$. Il reste donc 2 inconnues à déterminer via les 2 équations suivantes :

$$\begin{cases} L = 2L_{p1}(1 - a_1) + L_{p6} \\ a_6 = a_1 \frac{L_{p1}}{L_{p6}} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} a_4 = a_6 = a_1 \frac{L_{p1}}{L - 2L_{p1}(1 - a_1)} \\ L_{p4} = L_{p6} = L - 2L_{p1}(1 - a_1) \end{cases}$$

Toutes les inconnues s'expriment donc en fonction des données du problème L, L_{p1} et a_1 .

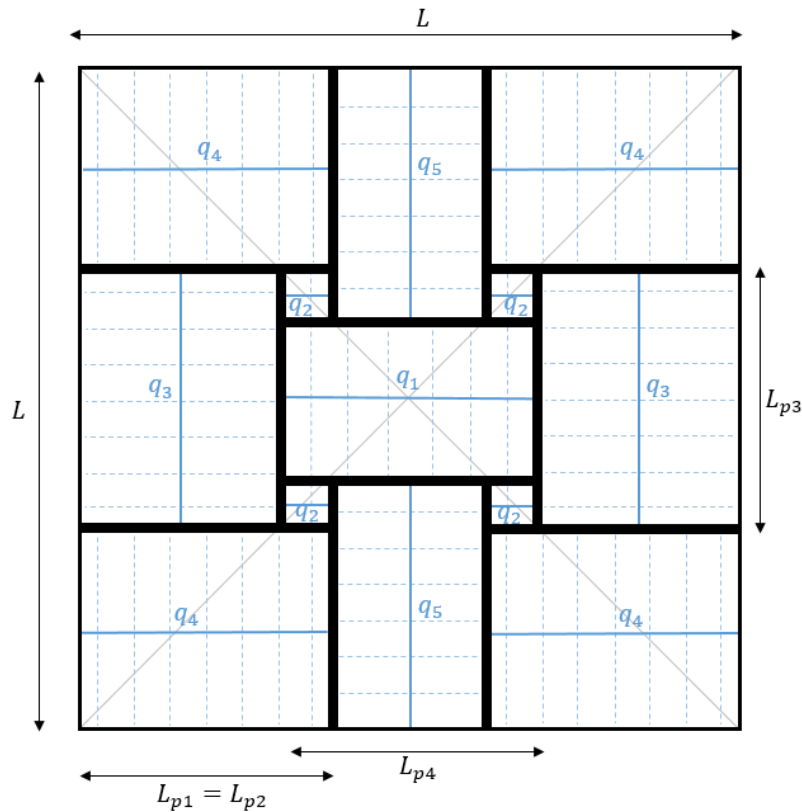


Figure 53 : Plancher carré avec 4 modules réciproques dont les longueurs de poutres centrales sont variables – Sens de portée (lignes bleues pointillées) et allure des charges réparties le long de chaque poutre (lignes bleues continues)

Sur base de la Figure 53, les expressions des charges réparties s'appliquant sur les poutres du plancher sont données par :

$$\begin{cases} q_1 = q(1 - 2a_6) \frac{L_{p6}}{2} \\ q_2 = qa_6 \frac{L_{p6}}{2} \\ q_3 = q(1 - a_1) \frac{L_{p1}}{2} \\ q_4 = q_3 \\ q_5 = q_1 \end{cases}$$

3.6.2. Optimisation du volume de bois en fonction de la contrainte

En connaissant les simplifications possibles du système, on peut suivre le raisonnement habituel pour déterminer le volume adimensionnel de bois en fonction de la contrainte.

3.6.2.1. Prise en compte de la flexion dans le calcul de la contrainte

3.6.2.1.1. Réactions aux appuis

Les réactions d'appuis sont obtenues en résolvant les équations de la somme des efforts verticaux et de la somme des moments par rapport à un appui ($\sum V = 0$ et $\sum M = 0$) pour chacune des familles de poutres susmentionnées. Les dimensions et les charges réparties sont toutes des fonctions de la proportion d'engagement, seul paramètre variable. Les réactions d'appuis seront donc également fonction uniquement de a et peuvent s'écrire sous la forme :

$$R_{i,j} = \alpha_{i,j}(a)F$$

Où $\alpha_{i,j}(a)$ est une fonction de a et $R_{i,j}$ est la réaction d'appui de la poutre i s'appuyant sur la poutre j , tel que $i = 0 \dots 12$ et $j = 0 \dots 12$ également. L'indice 0 représente les appuis fixes des bords du plancher.

3.6.2.1.2. Expressions du moment maximal

Les expressions du moment le long des poutres seront toujours fonction uniquement de a et des paramètres fixés F et L puisqu'elles sont construites à partir des réactions d'appuis, des charges réparties et des longueurs de poutres, toutes fonction de ces 3 paramètres. Donc l'expression du moment maximal prendra également la forme suivante :

$$M_{i,max} = FLf_{i,0}(a)$$

Où $M_{i,max}$ est le moment maximal de la poutre i tel que $i = 1 \dots m$ car le problème se détermine avec m familles de poutres et $f_{i,0}(a)$ est une fonction de a liée à la poutre i .

3.6.2.1.3. Expression de la contrainte de flexion

La contrainte dans la section de poutre la plus sollicitée est donnée par :

$$\sigma_i = \frac{M_{i,max}}{2I_i/\phi_i}$$

Comme précédemment, les diamètres ϕ_i est déterminé tel que les contraintes dans chaque poutre soient identiques, cela permet de pouvoir utiliser le même matériau dans tout le plancher. Cette condition sur le diamètre est donnée par :

$$\sigma_i = \sigma_1 = \sigma \quad \rightarrow \quad \phi_i = \phi_1 \left(\frac{M_{i,max}}{M_{1,max}} \right)^{1/3}$$

Où on décide de fixer le diamètre de la poutre 1 comme référence. Le diamètre ϕ_i dépend donc de la proportion d'engagement a (donnée par le rapport des moments) et d'un diamètre de référence connu comme donnée du problème. Dans ce cas, la contrainte est bien une fonction de a et de paramètres fixés au départ du dimensionnement.

3.6.2.1.4. Expression du volume du plancher réciproque

Avant de calculer le volume total du plancher, il faut calculer le volume de chacune des 6 poutres types en sachant que $A_{p,i} = \frac{\pi\phi_i^2}{4}$:

$$\begin{cases} \sigma = \frac{M_{i,max}}{2I_i/\phi_i} = \frac{32FLf_{i,0}(a)}{\pi\phi_i^3} \\ V_i = \frac{\pi\phi_i^2}{4} L_{p,i} \end{cases}$$

En éliminant le diamètre ϕ_i , on trouve le volume d'une poutre type i :

$$V_i = 3.691 f_{i,0}^{2/3}(a) f_{i,p}(a) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = W_{B,i}(a) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Où $L_{p,i} = L f_{i,p}(a)$ et donc on pose $W_{B,i}(a) = 3.691 f_{i,0}^{2/3}(a) f_{i,p}(a)$. Le volume total des poutres composant le plancher est obtenu en additionnant le volume de toutes les poutres :

$$V = \sum_{i=1}^m n_{p,i} V_i = \left(\sum_{i=1}^m n_{p,i} W_{B,i}(a) \right) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Où $n_{p,i}$ est le nombre de poutres similaires à la poutre i , c'est-à-dire, faisant parties de la même famille et m est le nombre total de familles. Sous forme adimensionnelle :

$$W = \frac{V \sigma^{2/3}}{F^{2/3} L^{5/3}} = \sum_{i=1}^m n_{p,i} W_{B,i}(a) \quad (17a)$$

Le volume de matière d'un plancher composé de 4 modules réciproques élémentaires à 4 poutres chacun, soumis à un chargement uniformément réparti et engendrant une contrainte σ dans la section la plus sollicitée, est donné par l'expression (17a). Peu importe le chargement, les dimensions du plancher ou le matériau utilisé, il existe une proportion d'engagement a qui minimise $\sum_{i=1}^m n_{p,i} W_{B,i}(a)$.

En évaluant cette expression (17a) à l'état limite ultime, on trouve :

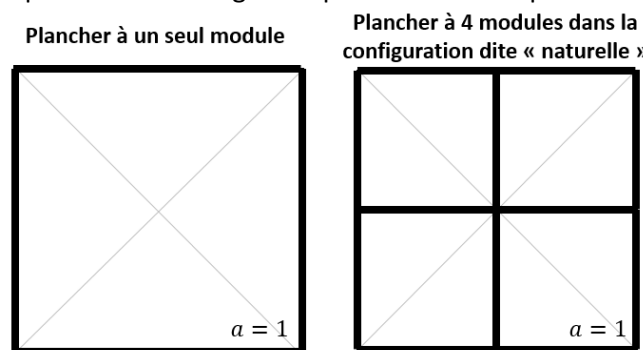
$$V_u = \left(\sum_{i=1}^m n_{p,i} W_{B,i}(a) \right) \frac{F_u^{2/3} L^{5/3}}{f_{m,d}^{2/3}} \rightarrow W_u = \frac{V_u f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L^{5/3}} = \sum_{i=1}^m n_{p,i} W_{B,i}(a) \quad (17b)$$

Sur la Figure 54 est représentée l'expression (17b) de l'indicateur du volume de la structure primaire en fonction de la proportion d'engagement a pour un plancher carré composé d'un seul module et pour les 3 configurations de planchers composés de 4 modules.

Conclusion : Tout d'abord, la configuration 3 (avec poutres centrales de longueur variable) est telle que les valeurs $a = a_1 > 0.597$ sont à rejeter pour une raison géométrique car les modules se chevauchent.

Ensuite, on note que pour $a < 0.5$, le volume adimensionnel de tous les planchers augmente progressivement. Le volume des 3 configurations du plancher à 4 modules est plus important d'environ 1/3 par rapport à celui du plancher à un seul module du fait, qu'ici, seule la structure primaire est prise en compte.

Pour des valeurs $a > 0.5$, les tendances se séparent : la configuration dite « naturelle » voit son volume diminuer fortement jusqu'à passer sous la courbe du plancher à un seul module. Cela peut s'expliquer par le fait qu'en $a = 1$, le plancher à 4 modules est séparé en 4 par une croix centrale, ce qui diminue de moitié la portée des poutres tandis que pour la même valeur de a , le plancher à un seul module est composé d'une seule grande partie centrale reprenant toutes les charges.



Finalement, alors que toutes les configurations semblent diminuer de volume lorsque $a \rightarrow 1$, la configuration 2 voit son volume augmenter encore. Cela est dû au fait que les poutres latérales ont une longueur variable qui augmente lorsque a augmente. Ces poutres-là continuent à recevoir une charge relativement importante pour $a \rightarrow 1$ et donc, le volume augmente plus que dans les autres configurations.

Dans tous les cas, la solution optimale consisterait à prendre une valeur de a minimale. Cependant, la structure secondaire et l'effet dû à l'effort tranchant n'ont pas encore été pris en compte.

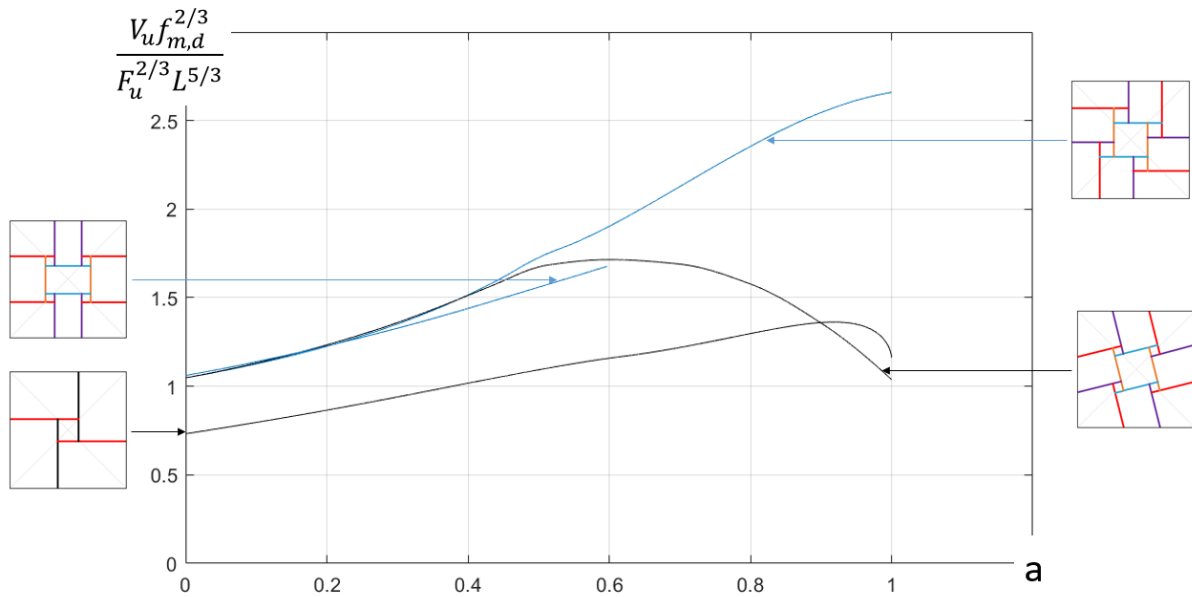


Figure 54 : Planchers carrés avec 1 et 4 modules (dans les 3 configurations) – Indicateur de volume sous le critère de flexion

3.6.2.2. Correction du graphique en tenant compte du volume des structures intermédiaires

Comme on vient de le voir sur le graphe précédent, la structure primaire d'un plancher à un seul module prend moins de volume que la structure primaire d'un plancher à 4 modules. Qu'en est-il si on ajoute à cela la structure secondaire ?

Le raisonnement est similaire à celui explicité dans les sections précédentes : le volume des poutres intermédiaires sur chaque zone du plancher est calculé séparément en se basant sur l'expression (3a) :

$$V_j = 0.923 \left(\frac{L_{GC,j}}{e} \right)^{1/3} \frac{\left(\frac{A_j}{A_{tot}} F \right)^{2/3} (L_{PC,j})^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Où $L_{GC,j}$ et $L_{PC,j}$ sont, respectivement les longueurs du petit côté et du grand côté de la zone j et e est l'entraxe maintenu constant pour toutes les zones du plancher. Sachant que les dimensions de chacune de ces zones dépendent uniquement de la proportion d'engagement a et de la longueur du plancher L , le volume total dû à la structure secondaire prendra la forme suivante :

$$V_{sec} = f_{SS}(a) \left(\frac{L}{e} \right)^{1/3} \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Où $f_{SS}(a)$ est la somme des fonctions de a du volume de chaque zone. Donc le volume total de la structure (primaire + secondaire) s'écrit :

$$V_{tot} = \left(\sum_{i=1}^m n_{p,i} W_{B,i}(a) + f_{SS}(a) \left(\frac{L}{e} \right)^{1/3} \right) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = W_{B,SS} \left(a, \frac{L}{e} \right)$$

Ecrit sous forme adimensionnelle et évalué à l'ELU, l'indicateur de volume de la structure totale apparaît :

$$W_{u,tot} = \frac{V_{u,tot} f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L^{5/3}} = W_{B,SS} \left(a, \frac{L}{e} \right) \quad (18)$$

Le volume de matière de la structure totale (primaire + secondaire) d'un plancher à 4 modules soumis à une charge totale F et engendrant une contrainte de flexion σ dans la section la plus sollicitée est donné par (18) et dépend uniquement de la proportion d'engagement a et du rapport L/e .

En Figure 55 est représenté l'expression (18) de l'indicateur de volume de la structure totale (primaire + secondaire) pour le plancher à un module ainsi que pour les 2 planchers à 4 modules parallèles aux bords, et ce pour différentes valeurs L/e .

Note 1 : Le plancher à 4 modules dans sa configuration dite « naturelle » a une structure secondaire plus complexe du fait que les zones ne sont pas rectangulaires. Il ne sera donc pas représenté sur le graphe.

Note 2 : Le calcul de la structure secondaire pour les 2 autres configurations à 4 modules se trouve dans l'ANNEXE B.

Conclusion : Tout d'abord, on remarque que l'écart entre les courbes s'est globalement réduit pour toute valeur de a . Cela signifie que la structure secondaire d'un plancher à 4 modules est plus légère que celle d'un plancher à un seul module.

Ensuite, pour des valeurs $a > 0.5$, il est clairement préférable d'utiliser un plancher à un seul module car même si la structure secondaire est plus légère pour un plancher à 4 modules, le volume global reste relativement important.

Par contre, pour des valeurs $a < 0.5$, les volumes sont relativement proches et le choix se portera donc sur la longueur des éléments à disposition pour former les structures primaires et secondaires. Une fois de plus, la solution optimale consiste à prendre la valeur a la plus petite possible, bien que l'effet dû à l'effort tranchant doit encore être ajouté.

3.6.2.3. Correction du graphique en tenant compte de l'effort tranchant

Il est nécessaire de corriger le graphe précédent en tenant compte de l'effet dû à l'effort tranchant qui dominera pour des faibles valeurs de a .

L'approche d'optimisation consistant à adapter le diamètre des poutres de manière à atteindre la même contrainte de cisaillement dans tout le module est toujours d'application : $\phi_i = \phi_1 (V_{Ed,i} / V_{Ed,1})^{1/2}$ où i est une poutre quelconque du plancher. L'effort tranchant maximal d'une poutre s'écrit :

$$V_{Ed,i} = \max(R_{i,j}, R_{i,k}) = \max(\alpha_{i,j}(a)F, \alpha_{i,k}(a)F)$$

Où $R_{i,j}$ et $R_{i,k}$ sont les réactions d'appuis de la poutre i reposant sur les poutres j et k . Nous avons vu précédemment que les réactions d'appuis dépendaient uniquement de a et de la charge s'appliquant sur le plancher, donnée du problème.

Le critère d'effort tranchant fournit par l'Eurocode s'écrit :

$$\frac{4 \max(\alpha_{i,j}(a), \alpha_{i,k}(a)) F}{3(\pi \phi_i^2 / 4)} \leq \tau$$

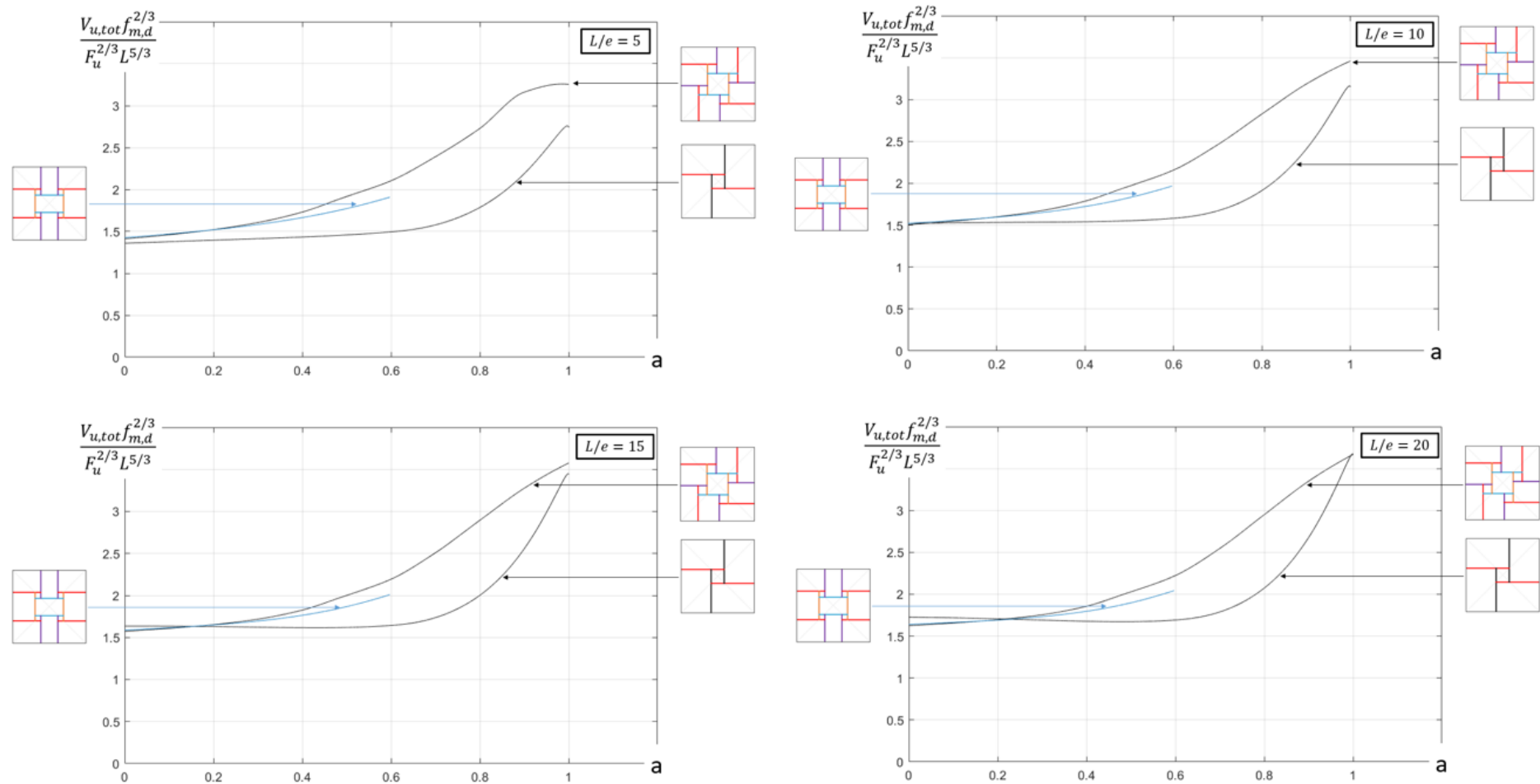


Figure 55 : Planchers carrés avec 1 ou 4 modules réciproques - Indicateurs de volume de la structure totale (primaire + secondaire) sous le critère de flexion pour différentes valeurs du rapport L/e

En sachant que $V_i = \frac{\pi\phi_i^2}{4} L_{pi} = \frac{\pi\phi_i^2}{4} f_{i,p}(a)L$, le volume d'une poutre i du module est donné par :

$$V_i = \frac{4}{3} \max(\alpha_{i,j}(a), \alpha_{i,k}) f_{i,p}(a) \frac{FL}{\tau}$$

Ainsi, le volume total évalué à l'ELU vaut :

$$V_u = \sum_{i=1}^m n_{p,i} \frac{4}{3} \max(\alpha_{i,j}(a), \alpha_{i,k}) f_{i,p}(a) \frac{F_u L}{k_{cr} f_{v,d}}$$

Avec $n_{p,i}$ est le nombre de poutres similaires à la poutre i et m est le nombre de familles. Comme on peut le voir, le volume sous le critère d'effort tranchant s'exprime bien en fonction de a et des données du problème uniquement.

De manière à pouvoir comparer les critères d'effort tranchant et de flexion, on réécrit l'expression suivante en l'adimensionnalisant comme suit :

$$W_u = \frac{V_u f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L^{5/3}} = Z \left(\sum_{i=1}^m 2n_{p,i} \max(\alpha_{i,j}(a), \alpha_{i,k}) f_{i,p}(a) \right) = Z \left(\sum_{i=1}^m n_{p,i} W_{S,i}(a) \right) \quad (19)$$

Avec $Z = \frac{2\theta^{2/3}}{3k_{cr}} \left(\frac{q_u}{f_{v,d}} \right)^{1/3}$ et $W_{S,i}(a) = \sum_{i=1}^m 2n_{p,i} \max(\alpha_{i,j}(a), \alpha_{i,k}) f_{i,p}(a)$. Le volume de matière d'un plancher à 4 modules conçu sous le critère de cisaillement est donné par l'expression (19).

En tenant compte de la structure secondaire calculée précédemment, l'expression devient finalement :

$$W_{u,tot} = \frac{V_{u,tot} f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L^{5/3}} = Z \left(\sum_{i=1}^m n_{p,i} W_{S,i}(a) \right) + f_{SS}(a) \left(\frac{L}{e} \right)^{1/3} = W_{S,SS} \left(a, Z, \frac{L}{e} \right) \quad (20)$$

La Figure 56 représente les indicateurs de volume (18) et (20) sous les critères de flexion (continu) et de cisaillement (pointillés) de la structure totale (primaire + secondaire) en fonction de a . Les courbes sont tracées pour différents rapports L/e et pour un $Z = 0.9$, valeur considérée comme maximale car généralement non dépassée.

Conclusion : On remarque que pour un plancher carré à 4 modules, l'intersection entre le critère de cisaillement maximal et le critère de flexion se situe autour de $a = 0.33$ contre $a = 0.3$ pour un plancher carré à un seul module.

Egalement, le critère de cisaillement impacte les valeurs $a \rightarrow 1$. Cependant, cela n'influence pas le choix optimal de la solution car le volume augmente déjà fortement sous le critère de flexion et donc ces valeurs-là sont à rejeter dans tous les cas.

Finalement, la solution optimale s'obtient pour une valeur de a où le critère de flexion est dominant et minimal. Etant donné que la courbe de cisaillement a été tracée pour une valeur $Z = 0.9$ considérée comme maximale, on peut supposer que la solution optimale sera autour de $a = 0.3$, quelle que soit la composition du plancher (1 ou 4 modules).

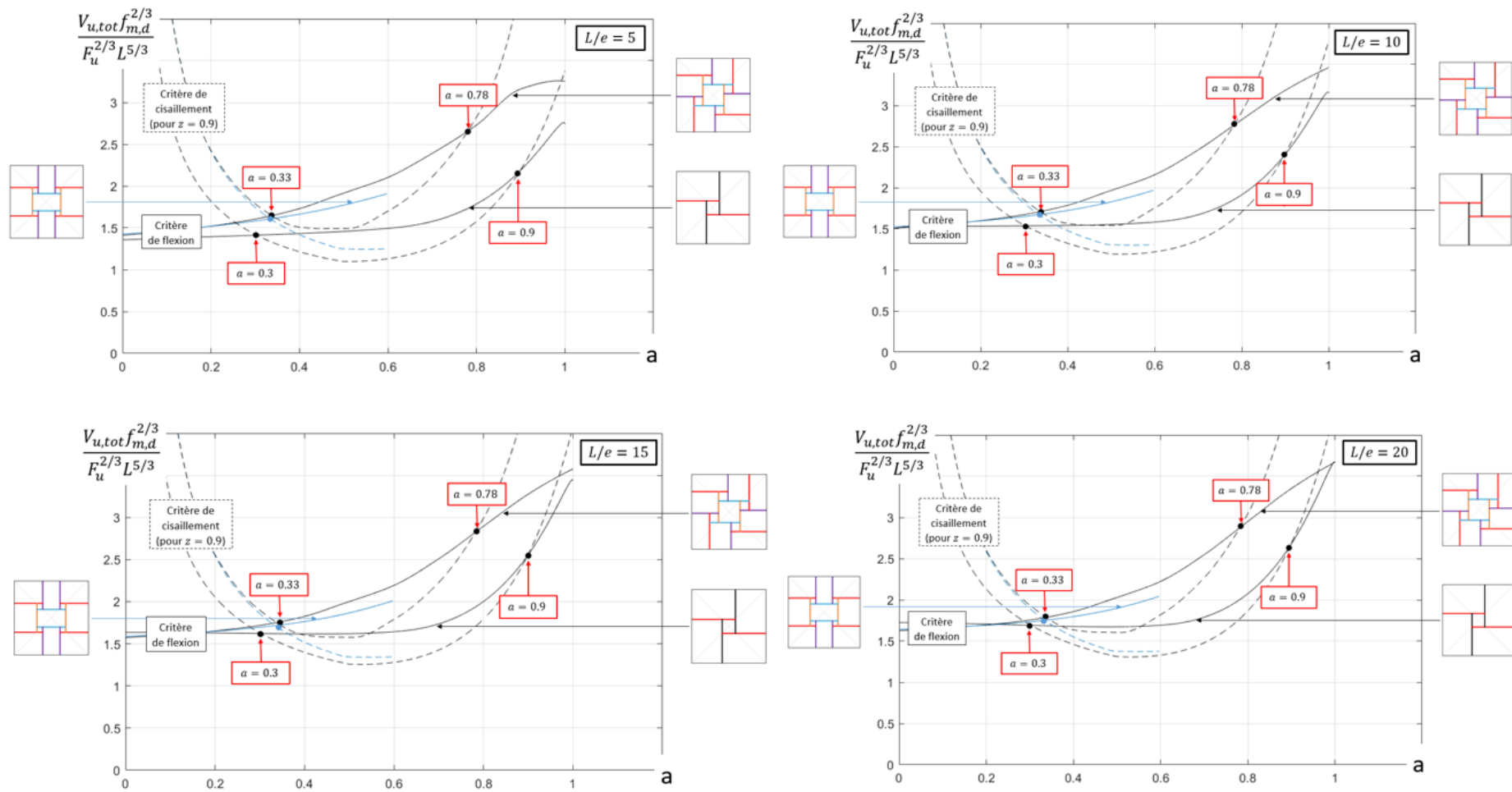


Figure 56 : Planchers carrés avec 1 ou 4 modules réciproques - Indicateurs de volume de la structure totale (primaire + secondaire) sous les critères de flexion et de cisaillement pour différentes valeurs du rapport L/e ($Z = 0.9$)

3.6.3. Optimisation du volume de bois en fonction de la flèche maximale

Comme pour l'optimisation du volume en fonction de la contrainte, on souhaite démontrer que l'indicateur de volume sous le critère de déplacement aura toujours la même forme.

La première étape consiste à déterminer l'expression de la flèche maximale à partir de l'expression du moment dans chaque poutre. Nous avons vu en section 3.6.2.1.2 que le moment était toujours fonction uniquement de a , F et L , c'est-à-dire d'un paramètre variable et de 2 données du problème. Donc la flèche maximale sera également fonction uniquement de ces paramètres-là et s'écrira toujours sous la forme :

$$\delta_i = f_{i,\delta}(a) \frac{FL^3}{E_{0,m} I_i}$$

Où l'inertie dépend du diamètre ϕ_i de la poutre i , adapté selon le choix de la méthode de dimensionnement. En sachant que $V_i = \frac{\pi \phi_i^2}{4} L_{pi} = \frac{\pi \phi_i^2}{4} f_{i,p}(a) L$, l'expression du volume de la poutre i en fonction de la flèche maximale s'écrit :

$$V_i = 3.545 f_{i,\delta}^{1/2}(a) f_{i,p}(a) \left(\frac{L}{\delta_i} \right)^{1/2} \frac{F^{1/2} L^2}{E_{0,m}^{1/2}}$$

Pour déterminer l'indicateur de volume, 2 choix de dimensionnement sont possibles :

- CAS 1 : Toutes les poutres atteignent la même contrainte de flexion tel que $\phi_i = \phi_1 \left(\frac{M_{i,max}}{M_{1,max}} \right)^{1/3}$.

La flèche maximale du plancher est le maximum entre les flèches maximales de chaque poutre :

$$\begin{cases} \delta_{max} = \frac{64FL^3}{E_{0,m}\pi\phi_1^4} \max \left(f_{1,\delta}(a), \frac{f_{i,\delta}(a)}{(M_{i,max}/M_{1,max})^{4/3}} \right) \\ V = \sum_{i=1}^m n_{p,i} V_i = \frac{\pi\phi_1^2}{4} L \left(n_{p,1} f_{1,p}(a) + \sum_{i=2}^m n_{p,i} f_{i,p}(a) \left(\frac{M_{i,max}}{M_{1,max}} \right)^{2/3} \right) \end{cases}$$

En éliminant ϕ_1^2 , on trouve l'équation du volume total de la structure primaire en fonction de la flèche maximale du plancher :

$$V = W_\delta(a) \left(\frac{L}{\delta_{max}} \right)^{1/2} \frac{F^{1/2} L^2}{E_{0,m}^{1/2}}$$

Où

$$W_\delta(a) = 3.545 \left(n_{p,1} f_{1,p}(a) + \sum_{i=2}^m n_{p,i} f_{i,p}(a) \left(\frac{M_{i,max}}{M_{1,max}} \right)^{2/3} \right) \sqrt{\max \left(f_{1,\delta}(a), \frac{f_{i,\delta}(a)}{(M_{i,max}/M_{1,max})^{4/3}} \right)}$$

- CAS 2 : Toutes les poutres ont le même diamètre de manière à ce que la contrainte de flexion maximale soit atteinte pour la poutre la plus chargée. Dans ce cas, la flèche maximale est obtenue pour la poutre avec la valeur $f_{i,\delta}(a)$ maximale. L'expression du CAS 1 se simplifie :

$$V = W_\delta(a) \left(\frac{L}{\delta_{max}} \right)^{1/2} \frac{F^{1/2} L^2}{E_{0,m}^{1/2}}$$

Où $W_\delta(a) = 3.545 \left(n_{p,1} f_{1,p}(a) + \sum_{i=2}^m n_{p,i} f_{i,p}(a) \right) \sqrt{\max(f_{1,\delta}(a), f_{2,\delta}(a), \dots, f_{m,\delta}(a))}$.

Finalement, peu importe le choix de dimensionnement, l'indicateur de volume sous le critère de déplacement évalué à l'ELS s'écrit toujours :

$$W_{\delta} = \frac{V_{\delta} E_{0,m}^{1/2}}{F_{\delta}^{1/2} L^2} = W_{\delta}(a) \left(\frac{L}{\delta_{max}} \right)^{1/2} \quad (21)$$

Le volume de matière d'un plancher à 4 modules, soumis à une charge totale F répartie uniformément et engendrant une flèche maximale δ_{max} est donné par l'expression (21). Peu importe la charge, le matériau ou les dimensions du plancher, le volume minimal sera toujours atteint pour une valeur a qui minimise $W_{\delta}(a)$.

La Figure 57 représente l'expression (21) de l'indicateur de volume de la structure primaire en fonction de a sous le critère de déplacement (CAS 1 en continu et CAS 2 en pointillés) pour les 3 configurations du plancher carré à 4 modules ainsi que pour le plancher carré avec un seul module.

Conclusion : Tout d'abord, on remarque que les courbes des 3 configurations à 4 modules ont la même allure que les courbes tracées sous le critère de flexion (structure primaire uniquement, Figure 54).

Ensuite, les 2 approches mènent à des résultats similaires pour $a < 0.6$. Après cette valeur-là, l'approximation du CAS 2 considérant le même diamètre pour chaque poutre impacte fortement le volume du plancher.

Egalement, alors que les courbes des planchers à 4 modules sont relativement similaires pour $a < 0.6$, le volume donné par le plancher à un seul module est plus faible.

On suppose que les valeurs $a < 0.2$ sont à rejeter suite à l'effet de l'effort tranchant et que les valeurs $a > 0.8$ le sont également suite à l'influence plus forte de la structure secondaire.

Finalement, quelle que soit l'approche ou le type de plancher utilisé, la solution optimale s'obtient pour des faibles valeurs de a , c'est-à-dire, $a = 0.2 \dots 0.3$.

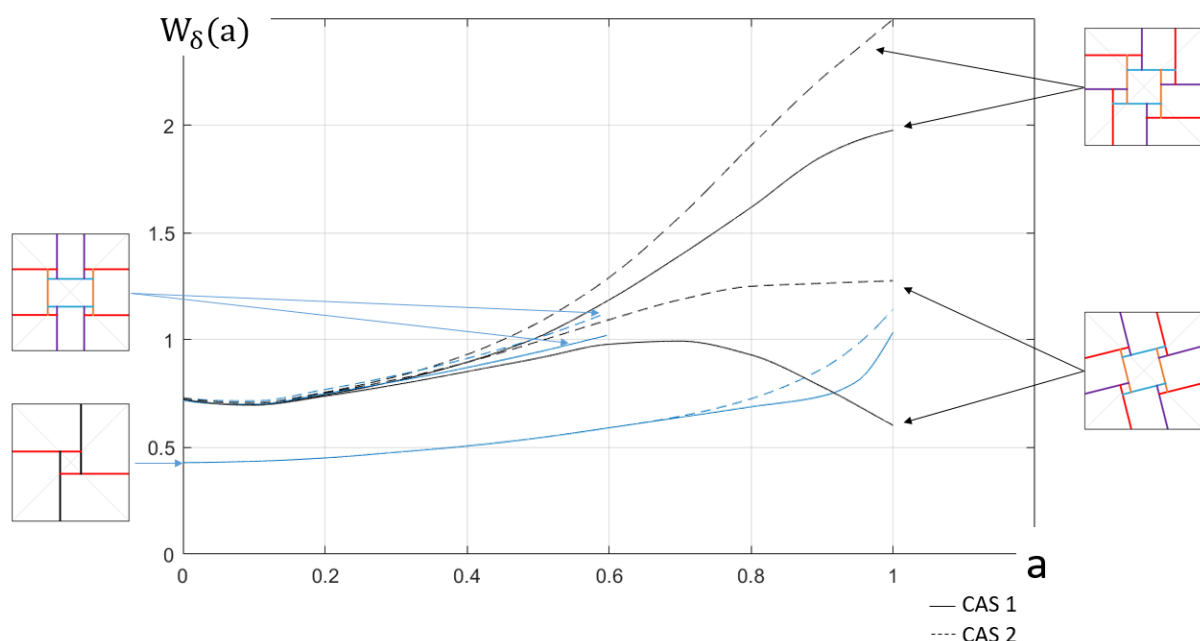


Figure 57 : Planchers carrés avec 1 ou 4 modules réciproques – Variations de $W_{\delta}(a)$ sous le critère de déplacement

3.6.4. Conclusions préliminaires

L'analyse des planchers à 4 modules mène à des conclusions très similaires à celles obtenues pour un plancher composé d'un seul module : **la solution optimale se situe toujours autour de $\alpha = 0.3$** . Effectivement, pour des valeurs inférieures, le critère de cisaillement domine et le volume augmente de manière exponentielle tandis que pour des valeurs supérieures, le volume sous les critères de flexion et de cisaillement augmente rapidement.

Le raisonnement complet réalisé ci-dessus pour différentes configurations du plancher à 4 modules s'adapte facilement à un plancher à n modules. Comme exemple, le cas d'une configuration pour un plancher à 9 modules sera abordé dans le chapitre « Discussion et conclusion ».

La méthode conceptuelle démontrant la forme générale des indicateurs sous les critères de flexion, cisaillement et déplacement permet d'assurer la fiabilité de la méthode numérique développée dans le chapitre 4 et valable pour un plancher carré composé de n modules réciproques. C'est d'ailleurs via cette méthode numérique que les graphes de cette section ont été tracés.



DÉVELOPPEMENT NUMÉRIQUE DE L'OPTIMISATION D'UN PLANCHER FORMÉ DE MODULES RÉCIPROQUES

4. Développement numérique de l'optimisation d'un plancher formé de modules réciproques

Comme nous avons pu le voir dans le chapitre précédent, le développement des équations analytiques relatives à l'optimisation du volume des structures réciproques deviennent rapidement complexes. Ce chapitre a donc pour but de développer une méthode numérique permettant de tracer les graphes d'optimisation facilement et rapidement sans aucun raisonnement analytique. Ayant démontré de manière conceptuelle que les indicateurs de volume sous les critères de flexion, cisaillement et déplacement s'écrivent toujours sous la même forme, la méthodologie qui suit peut alors s'appliquer à tout type de plancher réciproque, carré ($L \times L$) ou rectangulaire ($L \times \lambda L$), composé de N modules à 4 éléments, comme illustré en Figure 58.

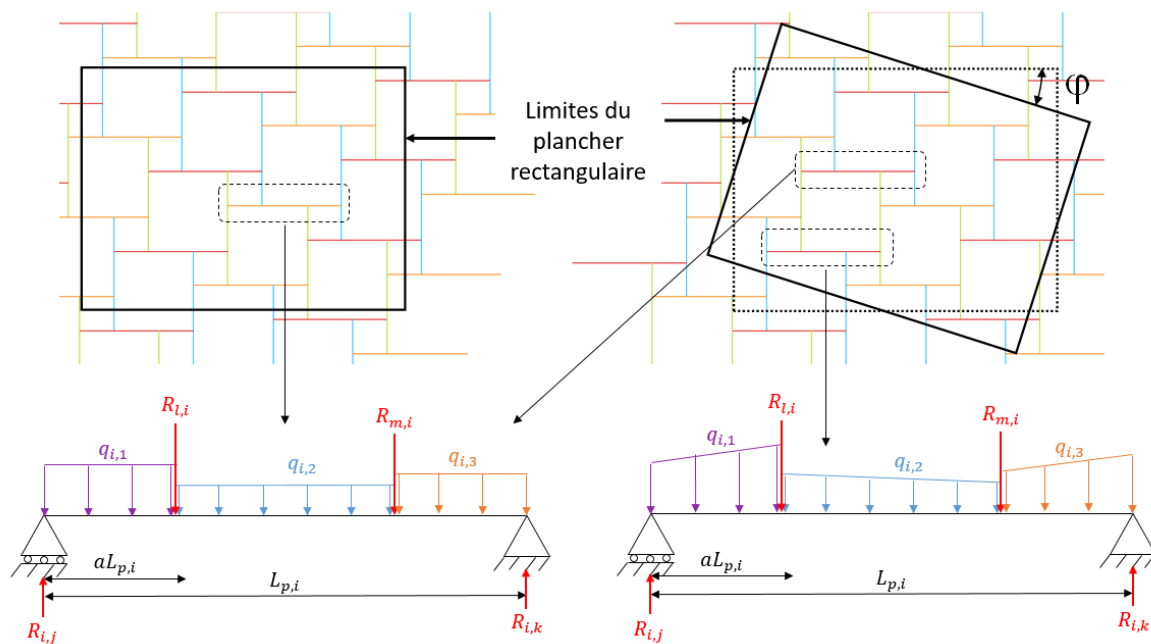


Figure 58 : Plancher réciproque quelconque - Schémas statiques

Le plancher considéré est donc le suivant : soit un plancher rectangulaire de dimensions $L \times \lambda L$ composé de N modules. En fonction de la taille et de l'inclinaison φ de ce plancher, certains modules peuvent être incomplets. Cependant, le plancher restera toujours isostatique et les réactions d'appuis sont déterminées via les équations d'équilibre. Pour un plancher composé de n poutres, il y a $2n$ réactions d'appuis, chacune étant supportée par une poutre voisine ou par un appui fixe en périphérie. La charge appliquée sur une poutre vient à la fois de la charge totale appliquée sur la structure secondaire et de la charge transmise par les poutres voisines dont les réactions d'appuis sont $R_{l,i}$ et $R_{m,i}$. La charge provenant de la structure secondaire peut s'appliquer sous 2 formes : si la poutre est proche des limites du plancher, la charge y est répartie non uniformément (Figure 58, droite) tandis que si la poutre est proche du centre du plancher, la charge appliquée sur la poutre est répartie uniformément (Figure 58, gauche).

4.1. Indicateurs de volume à l'ELU

Il a été démontré précédemment que, évalué à l'ELU, l'indicateur de volume de la structure totale (primaire + secondaire) sous le critère de flexion prenait la forme suivante :

$$\frac{V_{u,tot} f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L^{5/3}} = W_{B,ss} \left(a, \lambda, \frac{L}{e} \right)$$

Et que l'indicateur de volume de la structure totale sous le critère de cisaillement s'écrivait :

$$\frac{V_{u,tot} f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L^{5/3}} = W_{S,ss} \left(a, \lambda, Z, \frac{L}{e} \right)$$

Où $Z = \frac{2\theta^{2/3}}{3k_{cr}} \left(\frac{q_u}{f_{v,d}} \right)^{1/3}$ dépend du matériau et de la charge totale s'appliquant sur le plancher.

En partant du principe que les diamètres de chaque poutre sont adaptés de sorte à ce que la même contrainte de flexion soit atteinte dans toutes les poutres du plancher, la méthodologie à suivre pour calculer les indicateurs relatifs à la structure primaire est présentée sur l'organigramme de la Figure 59. Pour prendre en compte la structure totale (primaire + secondaire), il est nécessaire de déterminer le volume de la structure secondaire indépendamment de celui de la structure primaire et de les additionner par la suite, comme effectué dans le chapitre 3.

Note : Si on souhaite que toutes les poutres (ou un groupe de poutres) du module aient le même diamètre ϕ , l'organigramme ci-dessous s'adapte très facilement.

4.2. Indicateurs de volume à l'ELS

Il a été démontré que l'indicateur de volume de la structure primaire évalué à l'ELS sous le critère de déplacement s'écrit toujours sous la forme suivante :

$$\frac{V_{\delta} F_{0,m}^{1/2}}{F_{\delta}^{1/2} L^2} = W_{\delta}(a, \lambda) \left(\frac{L}{\delta_{max}} \right)^{1/2}$$

Où $W_{\delta}(a, \lambda)$ est généralement une fonction complexe difficilement connaissable. L'organigramme de la Figure 60 permet donc de déterminer numériquement et facilement cette fonction, ainsi que l'indicateur de volume de la structure primaire, selon 2 approches :

- CAS 1 : Le diamètre de chaque poutre est adapté de sorte à ce que la même contrainte de flexion apparaisse dans toutes les poutres du plancher
- CAS 2 : Toutes les poutres (ou un groupe de poutres) ont le même diamètre ϕ

Note : Ces 2 organigrammes ont également permis de vérifier les résultats analytiques obtenus tout au long du chapitre 3.

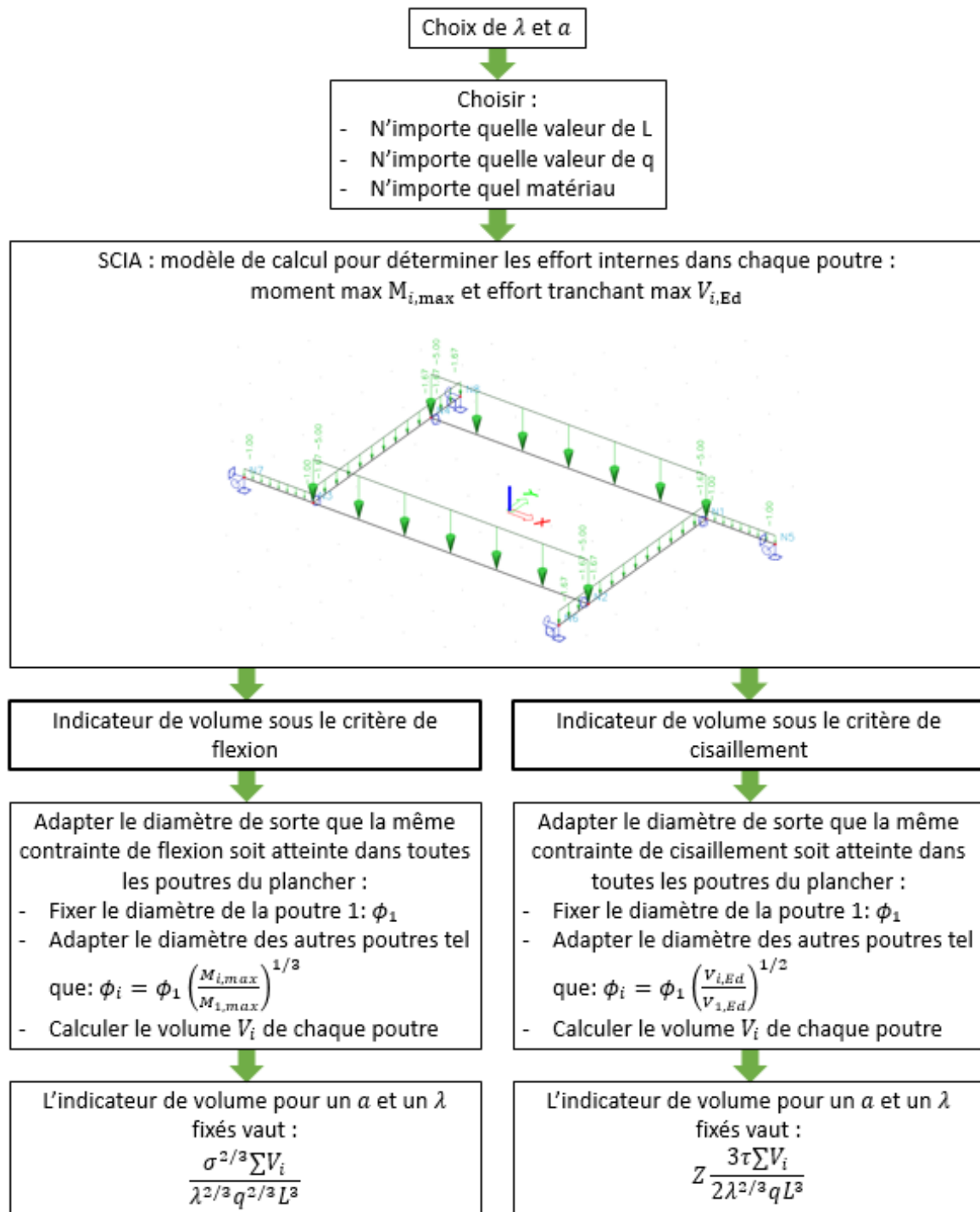


Figure 59 : Méthode de calcul numérique pour déterminer les indicateurs de volume de la structure primaire d'un plancher à l'ELU

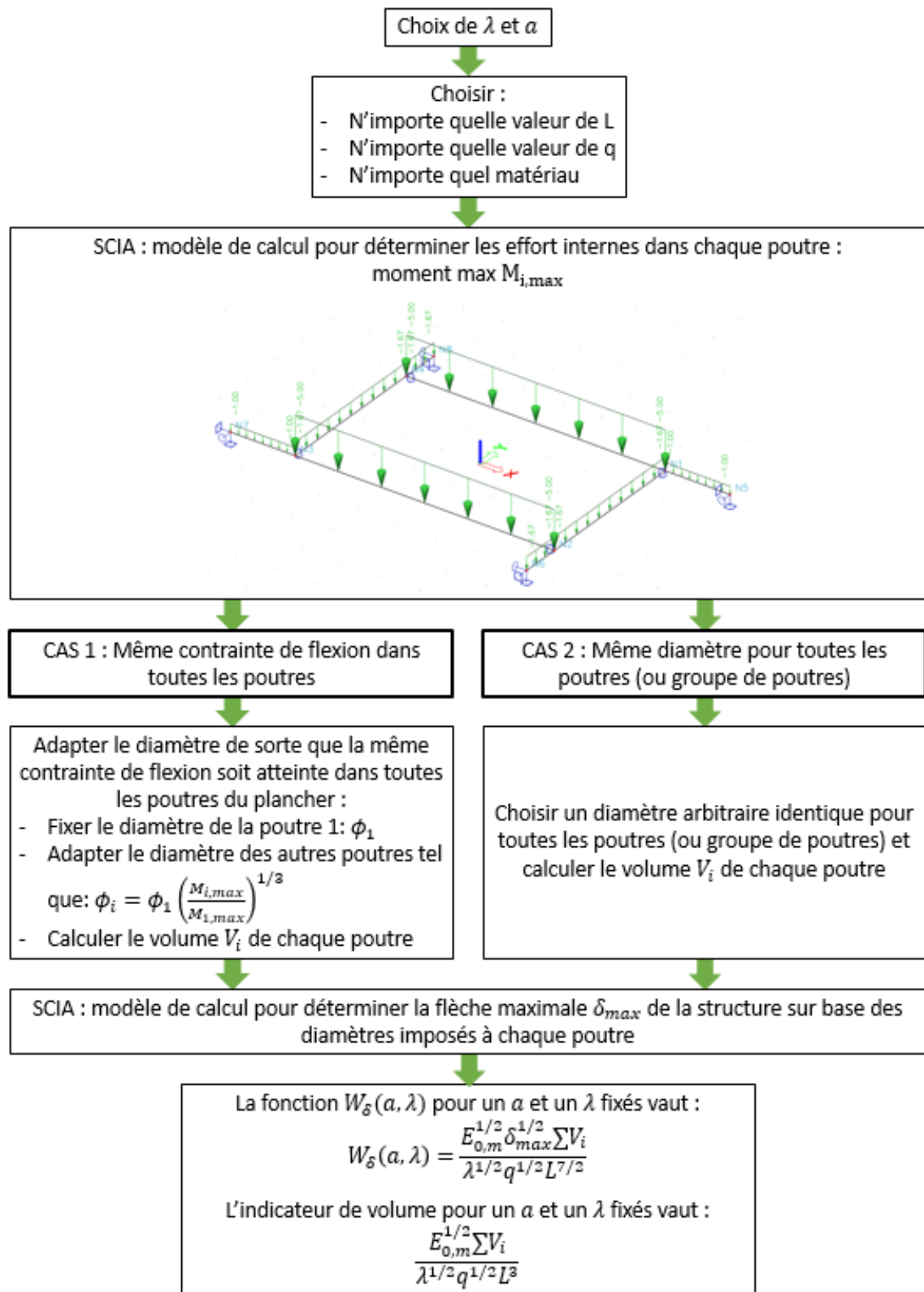


Figure 60 : Méthode de calcul numérique pour déterminer les indicateurs de volume de la structure primaire d'un plancher à l'ELS



DISCUSSION ET CONCLUSION

5. Discussion et conclusion

Le but de ce mémoire était d'évaluer la masse et l'efficacité de plusieurs types de planchers réciproques (carré ou rectangulaire, avec un ou plusieurs modules) en les comparant à des planchers classiques. Sur base des analyses effectuées, plusieurs conclusions peuvent être tirées.

Tout d'abord, intéressons-nous à la méthode de calcul utilisée : les analyses portées ci-dessus ont permis de développer une méthode analytique et une méthode numérique basées sur les indicateurs morphologiques. Ceux-ci permettent de réduire considérablement le nombre de paramètres en adimensionnalisant le volume de matière nécessaire. Dans notre cas, la meilleure solution est alors obtenue en optimisant, au plus, 4 paramètres : a , λ , L/e et Z . Ce dernier paramètre n'étant utilisé que sous le critère de cisaillement.

Comme on a pu s'en rendre compte rapidement, la méthode analytique devient très vite complexe même pour des planchers relativement simples composés d'un seul module réciproque. Il a alors été démontré de manière conceptuelle que les indicateurs de volume s'écrivent toujours sous la même forme, quels que soit le nombre de modules, la charge appliquée et les dimensions du plancher. Par cette démonstration, on connaît les indicateurs, $\frac{V_u f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L^{5/3}}$ sous les critères de flexion/cisaillement à l'ELU et $\frac{V_\delta E_{0,m}^{1/2}}{F_\delta^{1/2} L^2}$ sous le critère de déplacement à l'ELS, sans réellement connaître les expressions paramétriques, respectivement pour ces 3 critères, $W_{B,SS}(a, \lambda, L/e)$, $W_{S,SS}(a, \lambda, Z, L/e)$ et $W_\delta(a, \lambda)$, dont ils dépendent. Cependant, cela est suffisant pour développer une méthode numérique sûre et fiable.

Sur base d'un modèle de calcul relativement simple réalisé sur SCIA et des 2 organigrammes présentés en Figure 59 et Figure 60, il est alors possible d'obtenir les indicateurs de volume pour différentes valeurs des paramètres à optimiser sans aucun développement analytique supplémentaire. Dans un premier temps, cette méthode numérique a permis la vérification des équations analytiques. Par après, elle est devenue la méthode principale de calcul pour des planchers plus complexes.

Ensuite, nous pouvons analyser les hypothèses déterminées au début de l'optimisation. Le premier choix s'est basé sur le fait que, pour que le volume soit optimal, il faut que la structure secondaire porte toujours selon le petit côté de chaque zone du plancher. Nous avons vu que cela n'était pas correct si on considère uniquement la structure primaire mais que c'est bel et bien le cas si on tient compte du volume de la structure totale (primaire + secondaire). Ce deuxième cas étant le plus représentatif de la réalité, l'hypothèse est correcte.

Un deuxième choix se réfère au fait de négliger le poids propre des structures primaires et secondaires. Cela permet de simplifier les équations analytiques et d'y faire apparaître assez facilement les indicateurs de volume. Cependant, pour représenter la réalité du mieux possible, une perspective d'amélioration serait d'inclure ce poids propre dans l'expression du volume.

Egalement, quelques commentaires peuvent être réalisés quant aux différentes configurations de planchers analysés. En ce qui concerne les planchers rectangulaires avec un seul module, nous avons décidé d'analyser le comportement de 2 configurations différentes : nous avons démontré que le plancher avec zone carrée centrale n'était jamais optimal en comparaison du plancher avec zone rectangulaire centrale. Cette solution a donc été abandonnée pour la suite de l'analyse.

Pour les planchers carrés avec 4 modules réciproques, 3 configurations différentes ont été traitées. Nous avons alors vu que les courbes étaient, certes, différentes, mais que la solution optimale se situait autour de la même proportion d'engagement et pour un volume quasiment identique dans les 3 cas. Le choix de la configuration se basera donc sur la facilité de mise en œuvre ainsi que sur la longueur des éléments de la structure primaire disponible. Effectivement, la configuration dite « naturelle » est composée de poutres de même longueur pour tout le plancher, cependant, cela implique un certain angle entre les modules et les bords du plancher et donc une mise en œuvre relativement difficile. Les 2 autres configurations étant parallèles aux bords du plancher sont plus faciles à mettre en œuvre mais les poutres ont des longueurs différentes et certaines peuvent être relativement longues.

Les résultats des développements basés sur les hypothèses précédentes permettent de relever plusieurs règles de dimensionnement valables pour tous les types de plancher réciproques analysés :

- Les proportions d'engagement $a < 0.2 \dots 0.3$ sont à rejeter car le volume sous le critère de cisaillement (ELU) augmente de manière exponentielle
 - Les proportions d'engagement $a > 0.7 \dots 0.8$ sont à rejeter car le volume sous les critères de flexion/cisaillement (ELU) augmente fortement
 - Sous le critère de déplacement (ELS), le volume optimal consiste à prendre la valeur de la proportion d'engagement a la plus petite possible
- ⇒ En rassemblant les contraintes fournies par les 3 critères de dimensionnement, la solution optimale se situe autour de $a = 0.3$.

Afin d'évaluer l'efficacité des planchers réciproques, une comparaison avec des planchers classiques a ensuite été réalisée pour la proportion d'engagement considérée optimale : $a = 0.3$. La Figure 61 analyse, en fonction du nombre de poutres de la structure secondaire, le volume des planchers classiques, carrés et rectangulaires, des planchers réciproques carrés et rectangulaires composés d'un seul module ainsi que le volume des planchers réciproques carrés composés de 4 et 9 modules (détails du plancher à 9 modules en ANNEXE C). Les commentaires suivants s'appliquent aussi bien à l'analyse des graphes sous l'ELU qu'à celle des graphes sous l'ELS :

- Pour une valeur $\lambda \leq 0.5$, le plancher classique est toujours plus optimal que le plancher réciproque composé d'un seul module. Par contre, lorsque $\lambda \rightarrow 1$, le plancher réciproque devient meilleur au fur et à mesure que le nombre de poutres de la structure secondaire augmente
- Pour un nombre donné de modules (les 3 configurations du plancher à 4 modules, par exemple), le volume reste quasiment inchangé. Le choix se portera donc sur une préférence quelconque ou une facilité de mise en œuvre particulière
- Le volume n'est que légèrement impacté par le nombre de modules composant le plancher. Si le nombre de modules augmente, la masse de la structure primaire augmente également mais celle de la structure secondaire diminue car les portées deviennent de plus en plus petites. Finalement, les résultats se compensent presque à l'ELU. Choisir le nombre de modules composant le plancher dépendra donc de la longueur des éléments disponibles pour réaliser les structures primaire et secondaire du plancher ainsi que du critère de déplacement ELS qui est plus influencé par le nombre de modules que le critère ELU

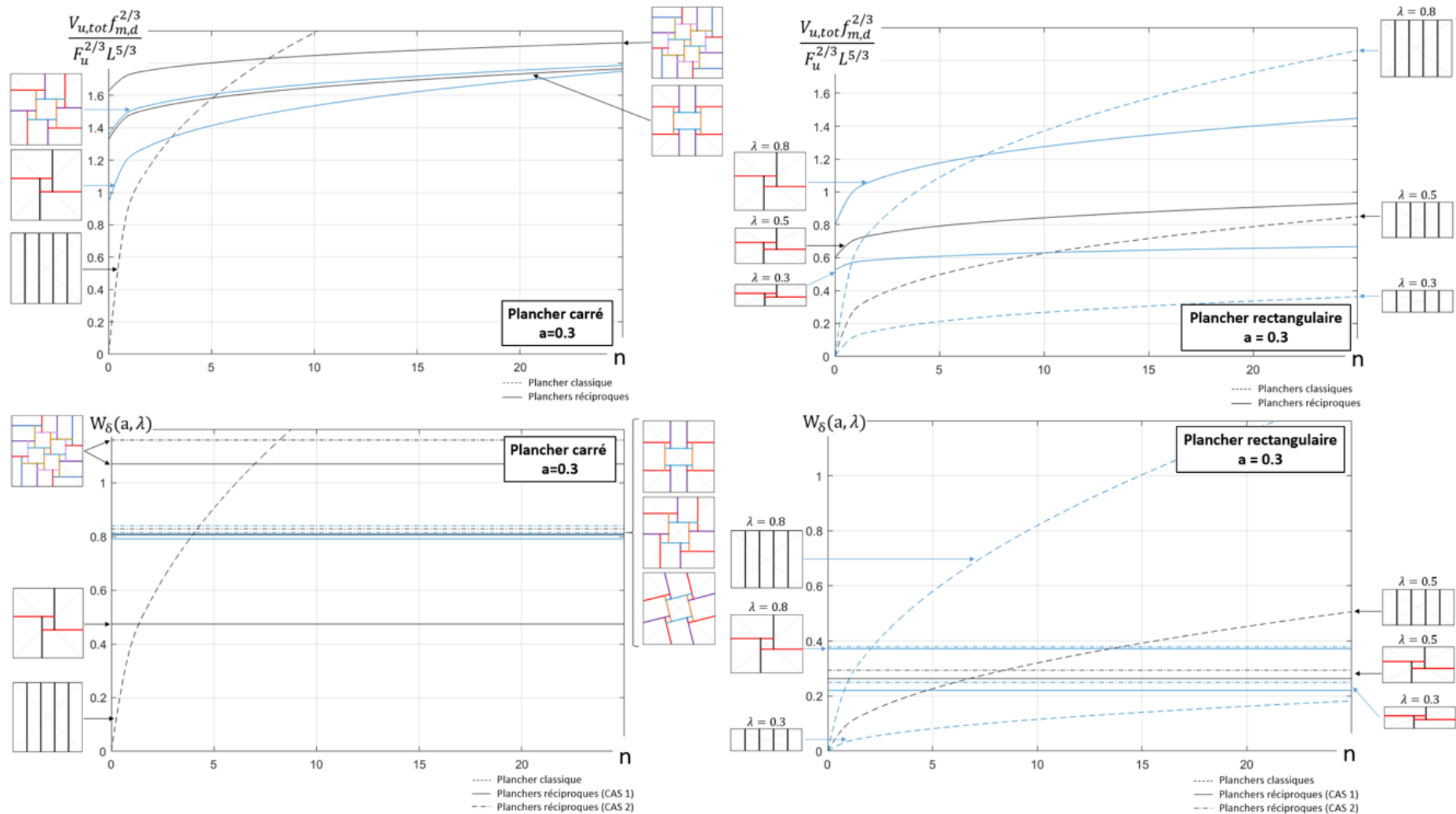


Figure 61 : Comparaison des indicateurs de volume sous les critères de flexion (ELU) et de déplacement (ELS) entre planchers classiques et planchers réciproques (à 1, 4 ou 9 modules)

Finalement, au terme de ce mémoire, nous avons pu analyser le comportement à l'ELU et à l'ELS de plusieurs types de planchers réciproques pour lesquels les conclusions étaient relativement similaires. Cependant, pour pouvoir généraliser la valeur optimale de $\alpha = 0.3$ pour un plancher réciproque carré ou rectangulaire à n modules, il faudrait effectuer des analyses supplémentaires.

Egalement, l'influence de la structure secondaire dans l'indicateur de volume sous le critère de déplacement n'a pas été abordée. Intuitivement parlant, la structure secondaire devrait avoir un volume plus faible pour des petites valeurs de la proportion d'engagement α , ce qui conforterait l'idée que la solution optimale sous le critère ELS s'obtient pour des faibles valeurs de α . Cependant, il faudrait idéalement le démontrer.

Une autre perspective d'amélioration consisterait, comme déjà énoncé précédemment, à tenir compte du poids propre de manière à se rapprocher encore plus de la réalité. Dans ce cas, le poids propre de la structure primaire et secondaire augmentera la charge et la déformation générale du plancher. Une vérification expérimentale de tels planchers permettrait de vérifier leur faisabilité concrète.

Pour finir, il serait intéressant d'étendre le procédé d'optimisation réalisé pour un plancher réciproque planaire à une structure réciproque tridimensionnelle telle qu'un dôme, par exemple. Des efforts normaux de traction et compression apparaîtraient alors en plus des efforts de flexion. D'autres paramètres supplémentaires seront certainement à prendre en compte telle que l'excentricité, par exemple.

La recherche sur le domaine des structures réciproques réserve encore plein de mystères. Cependant, je suis convaincue que l'optimisation de telles structures permettrait le développement d'un nouveau mode de construction concurrentiel, à la fois architectural, écologique et innovant. Bien que, selon moi, la construction de planchers réciproques planaires composés d'un grand nombre de modules risque d'être compromise suite aux grandes déformations en chaîne des différents éléments, j'aime à croire que le développement de ces structures en tridimensionnel puisse aboutir à quelque chose de grandiose.



ANNEXES

6. ANNEXE A

6.1. Expression du volume d'un plancher rectangulaire composé d'un seul module réciproque élémentaire

Les résultats énoncés en section 3.5 sont détaillés dans cette annexe. Pour rappel, on considère un plancher rectangulaire où on sépare le cas de la zone centrale rectangulaire du cas de la zone centrale carrée. De plus, de manière à ce que le plancher secondaire porte toujours selon le petit côté de chaque zone, on distingue également le cas d'un plancher portant dans 2 directions en fonction des différentes zones, d'un plancher portant dans une seule et même direction. Les conditions déterminant ces contraintes sont reprises ci-dessus.

6.1.1. Forme de la zone centrale du plancher

Le premier cas représente un plancher rectangulaire avec une zone centrale rectangulaire homothétique, c'est-à-dire que les proportions d'engagement de chacune des poutres sont proportionnelles telles que :

$$a = a_1 = a_2$$

Le deuxième cas est celui d'une zone centrale carrée où les proportions d'engagement a_1 et a_2 sont différentes mais liées par la relation suivante :

$$a_1 L_{p1} = a_2 L_{p2} \quad \rightarrow \quad a_1 \frac{L_1}{2 - a_1} = a_2 \frac{\lambda L_1}{2 - a_2}$$

Pour une proportion d'engagement a_1 et un paramètre λ donnés, il est alors possible de déterminer a_2 tel que :

$$a_2 = \frac{2a_1}{2\lambda - \lambda a_1 + a_1}$$

Il est à noter qu'il faut toujours que cette valeur a_2 soit inférieure ou égale à 1. Pour cela, il faut respecter la condition suivante :

$$a_2 < 1 \quad \rightarrow \quad \lambda > \frac{a_1}{2 - a_1} \quad \text{ou} \quad a_1 < \frac{2\lambda}{\lambda + 1}$$

En théorie, il existe un dernier cas représentant un plancher rectangulaire avec zone centrale rectangulaire quelconque, c'est-à-dire que les proportions d'engagement ne sont pas proportionnelles. Cependant, ce cas ne sera pas abordé dans la suite du texte car il n'est pas pratique à réaliser dans la réalité.

6.1.2. Sens de portée du plancher

Afin que les poutres secondaires portent toujours selon le petit côté de chaque zone, le sens de portée de certaines zones du plancher peuvent changer en fonction de la valeur de a_1 et λ . Les conditions à respecter pour que toutes les zones du plancher portent dans le même sens vertical sont telles que :

- Zone centrale rectangulaire avec $a = a_1 = a_2$: les proportions d'engagement sont identiques

$$L_{p2} \leq (1 - a)L_{p1} \quad \rightarrow \quad \lambda \leq 1 - a$$

- Zone centrale carrée : la proportion d'engagement est différente pour les 2 types de poutre

$$L_{p2} \leq (1 - a_1)L_{p1} \quad \rightarrow \quad \lambda \leq (1 - a_1) \left(\frac{2 - a_2}{2 - a_1} \right)$$

Les réactions d'appuis et efforts internes de chacun de ces cas sont calculés ci-dessous.

6.1.2.1. Plancher à deux sens de portée perpendiculaires en fonction des zones

Le premier cas considéré est celui d'un plancher à 2 sens de portée tel que représenté en Figure 62 où on prend en compte le cas tout à fait général d'une zone centrale rectangulaire quelconque avec des proportions d'engagement a_1 et a_2 différentes.

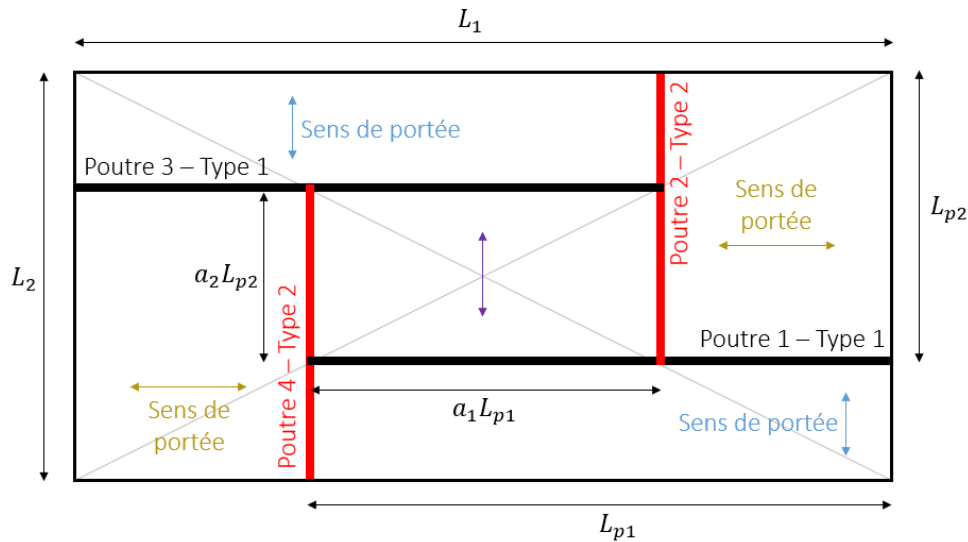


Figure 62 : Plancher rectangulaire soumis à un chargement uniformément distribué dans 2 directions avec zone centrale rectangulaire quelconque

On distingue 2 types de poutres en fonction de leur longueur et du chargement qu'elles reçoivent. Le schéma statique de la poutre type 1 est représenté en Figure 63 tandis que celui de la poutre type 2 est donné en Figure 64.

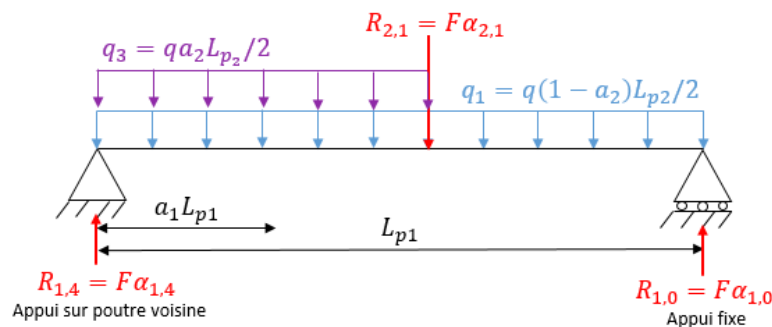


Figure 63 : Schéma statique d'une poutre type 1 du plancher rectangulaire avec 2 sens de portée

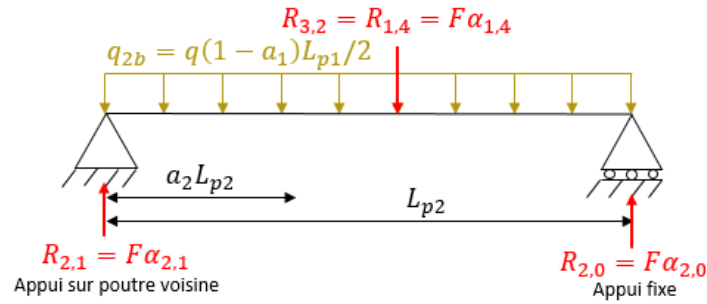


Figure 64 : Schéma statique d'une poutre type 2 du plancher rectangulaire avec 2 sens de portée

Sur base de ces 2 schémas statiques, on construit les expressions de la somme des efforts verticaux ainsi que des moments à l'appui gauche afin de déterminer les réactions aux appuis :

$$\begin{cases} \sum V_{PT1} = 0 : R_{1,4} + R_{1,0} = R_{2,1} + q_1 L_{p1} + q_3 a_1 L_{p1} \\ \sum M_{g,PT1} = 0 : R_{2,1} a_1 L_{p1} + q_3 \frac{a_1^2 L_{p1}^2}{2} + q_1 \frac{L_{p1}^2}{2} = R_{1,0} L_{p1} \\ \sum V_{PT2} = 0 : R_{2,1} + R_{2,0} = R_{1,4} + q_{2b} L_{p2} \\ \sum M_{g,PT2} = 0 : R_{1,4} a_2 L_{p2} + q_{2b} \frac{L_{p2}^2}{2} = R_{2,0} L_{p2} \end{cases}$$

En résolvant ce système via MATLAB, nous obtenons les réactions d'appui valables pour tout a_1 et a_2 :

$$\begin{cases} R_{1,4} = \alpha_{1,4} F \\ R_{1,0} = \alpha_{1,0} F \\ R_{2,1} = \alpha_{2,1} F \\ R_{2,0} = \alpha_{2,0} F \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_{1,4} = - \left(\frac{2a_1 + a_2 - 2a_1 a_2 + a_1^2 a_2 - a_1^2 - 2}{4(2 - a_1)(2 - a_2)(a_1 + a_2 - a_1 a_2)} \right) \\ \alpha_{1,0} = \frac{-a_1^2(a_2^2 - 2a_2 + 1) + a_1(2a_2^2 - 4a_2 + 3) + a_2(1 - a_2)}{4(2 - a_1)(2 - a_2)(a_1 + a_2 - a_1 a_2)} \\ \alpha_{2,1} = - \left(\frac{a_1^2 a_2(1 - a_2) + a_1(2a_2^2 - 2a_2 + 1) - a_2^2 + 2a_2 - 2}{4(2 - a_1)(2 - a_2)(a_1 + a_2 - a_1 a_2)} \right) \\ \alpha_{2,0} = \frac{-a_1^2(a_2^2 - 2a_2 + 1) + a_1(2a_2^2 - 4a_2 + 1) + a_2(3 - a_2)}{4(2 - a_1)(2 - a_2)(a_1 + a_2 - a_1 a_2)} \end{cases}$$

Les efforts internes le long de la poutre type 1 sont exprimés à l'aide des coupes en Figure 65.

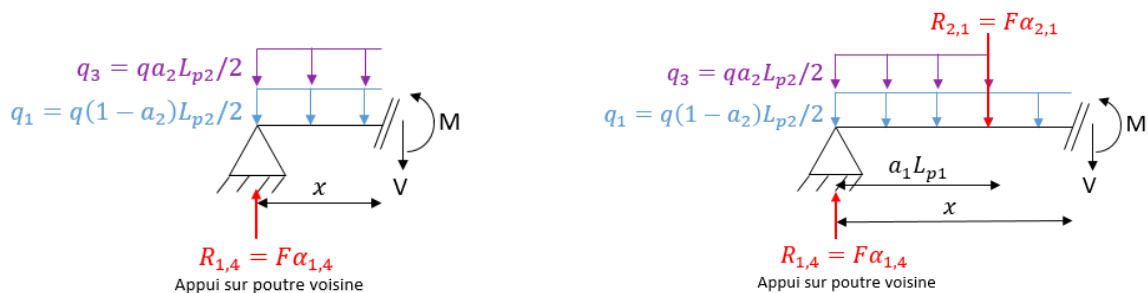


Figure 65 : Poutre type 1 – coupe 1 (gauche) et coupe 2 (droite)

La coupe 1 pour $0 \leq x \leq a_1 L_{p1}$ fournit :
$$\begin{cases} V_{g,1}(x) = -(q_1 + q_3)x + R_{1,4} \\ M_{g,1}(x) = -\frac{(q_1 + q_3)}{2}x^2 + R_{1,4}x \end{cases}$$

La coupe 2 pour $a_1 L_{p1} \leq x \leq L_{p1}$ fournit :

$$\begin{cases} V_{d,1}(x) = -q_1x + R_{1,4} - R_{2,1} - q_3a_1L_{p1} \\ M_{d,1}(x) = -\frac{q_1}{2}x^2 + (R_{1,4} - R_{2,1} - q_3a_1L_{p1})x + \left(R_{2,1} + \frac{a_1L_{p1}}{2}q_3\right)a_1L_{p1} \end{cases}$$

Les efforts internes le long de la poutre type 2 sont définis à l'aide des coupes en Figure 66.

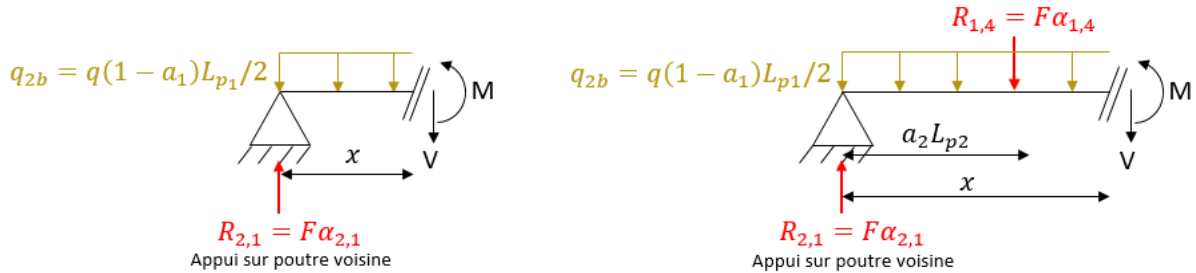


Figure 66 : Poutre type 2 – coupe 1 (gauche) et coupe 2 (droite)

La coupe 1 pour $0 \leq x \leq a_2L_{p2}$ fournit : $\begin{cases} V_{g,2}(x) = -q_{2b}x + R_{2,1} \\ M_{g,2}(x) = -\frac{q_{2b}}{2}x^2 + R_{2,1}x \end{cases}$

La coupe 2 pour $a_2L_{p2} \leq x \leq L_{p2}$ fournit : $\begin{cases} V_{d,2}(x) = -q_{2b}x + R_{2,1} - R_{1,4} \\ M_{d,2}(x) = -\frac{q_{2b}}{2}x^2 + (R_{2,1} - R_{1,4})x + R_{1,4}a_2L_{p2} \end{cases}$

6.1.2.2. Sens de portée unique

Le deuxième cas considère un plancher rectangulaire avec un seul sens de portée vertical identique dans toutes les zones et une zone centrale rectangulaire quelconque avec des proportions d'engagemment a_1 et a_2 différentes.

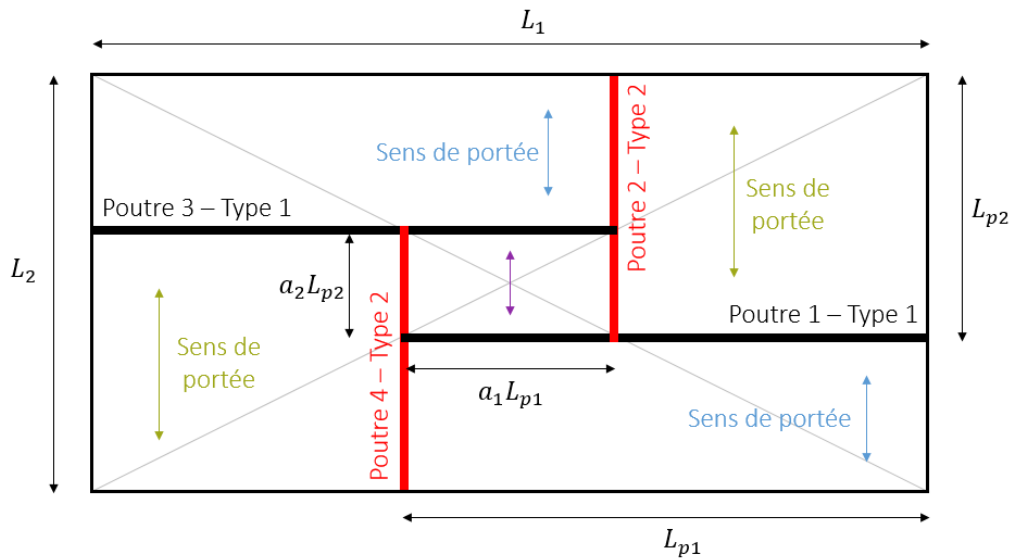


Figure 67 : Plancher rectangulaire soumis à un chargement uniformément distribué dans une seule et même direction avec zone centrale rectangulaire quelconque

On distingue 2 types de poutres en fonction de leur longueur et du chargement qu'elles reçoivent. Le schéma statique de la poutre type 1 est représenté en Figure 68 tandis que celui de la poutre type 2 est donné en Figure 69.

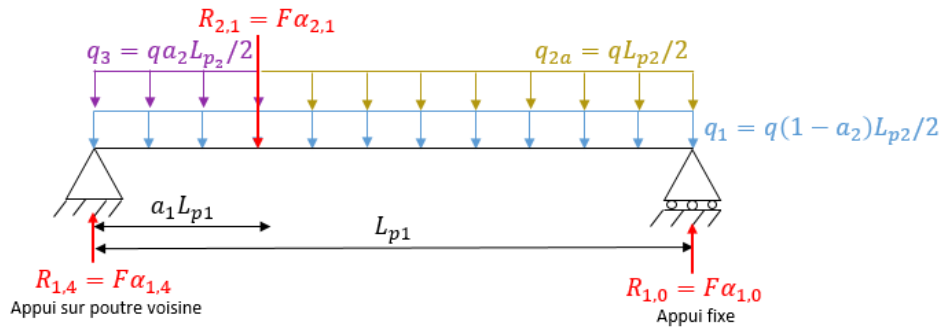


Figure 68 : Schéma statique d'une poutre type 1 du plancher rectangulaire avec 1 sens de portée

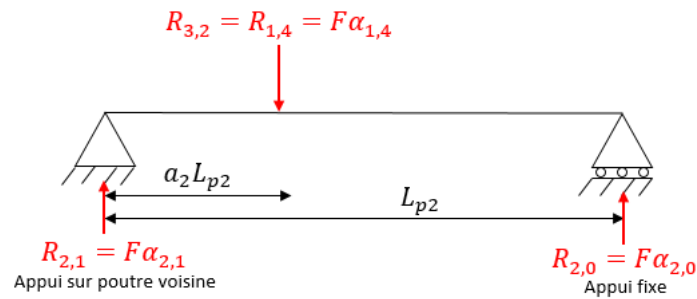


Figure 69 : Schéma statique d'une poutre type 2 du plancher rectangulaire avec 1 sens de portée

En se basant sur les schémas statiques, on développe les expressions de la somme des efforts verticaux ainsi que des moments à l'appui gauche afin de déterminer les réactions aux appuis :

$$\begin{cases} \sum V_{PT1} = 0 : R_{1,4} + R_{1,0} = R_{2,1} + q_1 L_{p1} + q_{2a}(1 - a_1)L_{p1} + q_3 a_1 L_{p1} \\ \sum M_{g,PT1} = 0 : R_{2,1} a_1 L_{p1} + q_3 \frac{a_1^2 L_{p1}^2}{2} + q_{2a}(1 - a_1^2) \frac{L_{p1}^2}{2} + q_1 \frac{L_{p1}^2}{2} = R_{1,0} L_{p1} \\ \sum V_{PT2} = 0 : R_{2,1} + R_{2,0} = R_{1,4} \\ \sum M_{g,PT2} = 0 : R_{1,4} a_2 L_{p2} = R_{2,0} L_{p2} \end{cases}$$

En résolvant le système via MATLAB, les réactions d'appuis peuvent s'écrire en fonction de a_1 et a_2 pour une charge F fixée :

$$\begin{cases} R_{1,4} = \alpha_{1,4} F \\ R_{1,0} = \alpha_{1,0} F \\ R_{2,1} = \alpha_{2,1} F \\ R_{2,0} = \alpha_{2,0} F \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_{1,4} = -\left(\frac{-a_1^2(1 - a_2) + 2a_1(1 - a_2) + a_2 - 2}{4(2 - a_1)(2 - a_2)(a_1 + a_2 - a_1 a_2)} \right) \\ \alpha_{1,0} = \frac{-a_1^2(1 - a_2) + 2a_1(1 - a_2) + a_2}{4(2 - a_1)(a_1 + a_2 - a_1 a_2)} \\ \alpha_{2,1} = -\left(\frac{(1 - a_2)(-a_1^2(1 - a_2) + 2a_1(1 - a_2) + a_2 - 2)}{4(2 - a_1)(2 - a_2)(a_1 + a_2 - a_1 a_2)} \right) \\ \alpha_{2,0} = -\left(\frac{a_2(-a_1^2(1 - a_2) + 2a_1(1 - a_2) + a_2 - 2)}{4(2 - a_1)(2 - a_2)(a_1 + a_2 - a_1 a_2)} \right) \end{cases}$$

Les efforts internes le long de la poutre type 1 sont exprimés à l'aide des coupes en Figure 70.

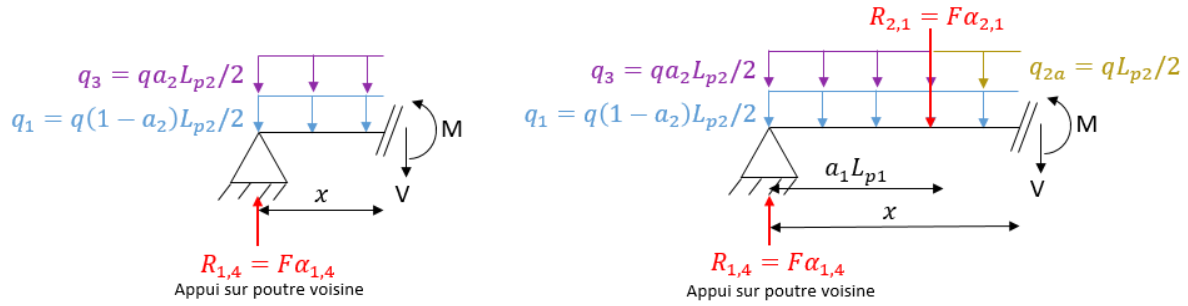


Figure 70 : Poutre type 1 – coupe 1 (gauche) et coupe 2 (droite)

La coupe 1 pour $0 \leq x \leq a_1 L_{p1}$ fournit :
$$\begin{cases} V_{g,1}(x) = -(q_1 + q_3)x + R_{1,4} \\ M_{g,1}(x) = -\frac{(q_1 + q_3)}{2}x^2 + R_{1,4}x \end{cases}$$

La coupe 2 pour $a_1 L_{p1} \leq x \leq L_{p1}$ fournit :

$$\begin{cases} V_{d,1}(x) = -(q_1 + q_{2a})x + R_{1,4} - R_{2,1} + (q_{2a} - q_3)a_1 L_{p1} \\ M_{d,1}(x) = -\frac{q_1 + q_{2a}}{2}x^2 + (R_{1,4} - R_{2,1} + (q_{2a} - q_3)a_1 L_{p1})x + \left(R_{2,1} + \frac{a_1 L_{p1}}{2}(q_3 - q_{2a})\right)a_1 L_{p1} \end{cases}$$

Les efforts internes le long de la poutre type 2 sont définis à l'aide des coupes en Figure 71.

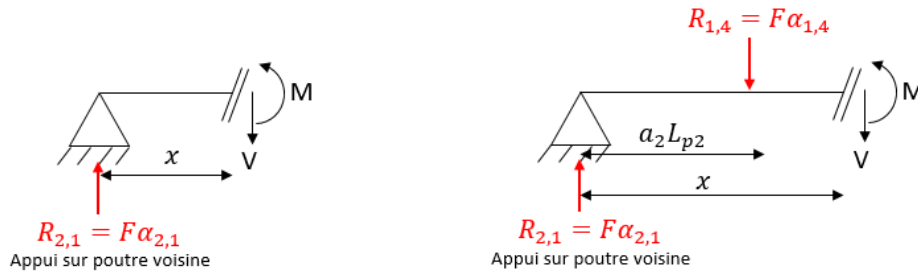


Figure 71 : Poutre type 2 – coupe 1 (gauche) et coupe 2 (droite)

La coupe 1 pour $0 \leq x \leq a_2 L_{p2}$ fournit :
$$\begin{cases} V_{g,2}(x) = R_{2,1} \\ M_{g,2}(x) = R_{2,1}x \end{cases}$$

La coupe 2 pour $a_2 L_{p2} \leq x \leq L_{p2}$ fournit :
$$\begin{cases} V_{d,2}(x) = R_{2,1} - R_{1,4} \\ M_{d,2}(x) = (R_{2,1} - R_{1,4})x + R_{1,4}a_2 L_{p2} \end{cases}$$

6.1.3. Optimisation du volume de bois en fonction de la contrainte

6.1.3.1. CAS 1 : Zone centrale rectangulaire avec $a = a_1 = a_2$ et 2 sens de portée

On considère tout d'abord le cas d'un plancher avec 2 sens de portée et une zone centrale rectangulaire comme illustré en Figure 62. Pour rappel, un tel plancher est donc défini par les 2 conditions suivantes :

$$a_1 = a_2 = a \quad \lambda \geq (1 - a)$$

La première condition se rapportant à la zone centrale rectangulaire et la 2^{ème} condition faisant référence aux 2 sens de portée du plancher. Les réactions aux appuis calculées ci-dessus pour le cas général se simplifient pour le cas avec zone centrale rectangulaire tel que $a_1 = a_2 = a$:

$$\begin{cases} R_{1,4} = \alpha_{1,4}F = \left(\frac{a^2 - a + 1}{4a(2-a)^2}\right)F \\ R_{1,0} = \alpha_{1,0}F = \left(\frac{a^2 - 2a + 2}{4(2-a)^2}\right)F \\ R_{2,1} = \alpha_{2,1}F = \left(\frac{-a^3 + a^2 - a + 1}{4a(2-a)^2}\right)F \\ R_{2,0} = \alpha_{2,0}F = \left(\frac{a^2 - 2a + 2}{4(2-a)^2}\right)F = R_{12} \end{cases}$$

6.1.3.1.1. Prise en compte de la flexion dans le calcul de la contrainte

6.1.3.1.1.1. Expression du moment maximal

Les expressions des moments le long de chaque tronçon dans la poutre type 1 se simplifient également:

$$\begin{cases} M_{g,1}(x) = R_{1,4}x - \frac{(q_1 + q_3)}{2}x^2 & 0 \leq x \leq aL_{p1} \\ M_{d,1}(x) = -\frac{q_1}{2}x^2 + (R_{1,4} - R_{2,1} - q_3aL_{p1})x + \left(R_{2,1} + \frac{aL_{p1}}{2}q_3\right)aL_{p1} & aL_{p1} \leq x \leq L_{p1} \end{cases}$$

De la même façon, les moments dans la poutre type 2 deviennent :

$$\begin{cases} M_{g,2}(x) = R_{2,1}x - \frac{q_{2b}}{2}x^2 & 0 \leq x \leq aL_{p2} \\ M_{d,2}(x) = -\frac{q_{2b}}{2}x^2 + (R_{2,1} - R_{1,4})x + R_{1,4}aL_{p2} & aL_{p2} \leq x \leq L_{p2} \end{cases}$$

Ne sachant à priori pas où se situe le moment maximal, on le calcule dans chaque tronçon de chaque poutre en commençant par la poutre type 1 et puis la poutre type 2.

Moment maximal dans le tronçon gauche de la poutre type 1 ($0 \leq x \leq aL_{p1}$)

Afin de déterminer la valeur du moment maximal, il faut d'abord en déterminer sa position :

$$V_{g,1}(x) = \frac{dM_{g,1}(x)}{dx} = 0 = R_{1,4} - (q_1 + q_3)x \quad \rightarrow \quad x_{g,1,max} = \frac{a^2 - a + 1}{2a(2-a)}L_1$$

On vérifie que cette position se trouve bien dans le tronçon gauche, c'est-à-dire que $x_{g,1,max} \leq aL_{p1}$:

$$\frac{a^2 - a + 1}{2a(2-a)}L_1 \leq \frac{a}{2-a}L_1 \quad \rightarrow \quad a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La solution « + » indique que le moment maximal est dans le tronçon gauche pour $a \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0.618$.

Dans ce cas, il vaut :

$$M_{g,1,max} = \frac{(a^2 - a + 1)^2}{16a^2(2-a)^3}FL_1 = f_{1g,0}(a)FL_1$$

Où on a posé $f_{1g,0}(a) = \frac{(a^2 - a + 1)^2}{16a^2(2-a)^3}$.

Moment maximal dans le tronçon droit de la poutre type 1 ($aL_{p1} \leq x \leq L_{p1}$)

Par un raisonnement similaire, on commence par déterminer la position du moment maximal :

$$x_{d,1,max} = -\left(\frac{a^2}{2(2-a)(1-a)}\right)L_1$$

Cette solution est négative pour $\forall a \in [0; 1]$. Le moment maximal n'est pas dans le tronçon droit.

Moment maximal au niveau de la charge ponctuelle de la poutre type 1

Le moment maximal à la charge ponctuelle est évalué en $x = aL_{p1}$ et vaut :

$$M_{p,1,max} = M_{g,1}(x = aL_{p1}) = \frac{1-a}{4(2-a)^3}FL_1 = f_{1,p,0}(a)FL_1$$

Où on a posé $f_{1,p,0}(a) = \frac{1-a}{4(2-a)^3}$.

Finalement, le moment maximal dans la poutre type 1 est résumé par :

$$M_{1,max} = f_{1,0}(a)FL_1 \quad \rightarrow \quad f_{1,0}(a) = \begin{cases} f_{1,p,0}(a) & 0 \leq a \leq 0.618 \\ f_{1,g,0}(a) & 0.618 \leq a \leq 1 \end{cases}$$

Moment maximal dans le tronçon gauche de la poutre type 2 ($0 \leq x \leq aL_{p2}$)

La position du moment maximal est donnée par la résolution de l'équation $V_{g,2} = 0$:

$$x_{g,2,max} = \frac{a^2 + 1}{2a}L_{p2}$$

La vérification de la solution dans les bornes du domaine mène à l'inéquation impossible $1 < a^2$. Donc le moment maximal ne se trouve pas dans le tronçon gauche.

Moment maximal dans le tronçon droit de la poutre type 2 ($aL_{p2} \leq x \leq L_{p2}$)

La position du moment maximal dans le tronçon droit se trouve en :

$$x_{d,2,max} = -\left(\frac{a^2}{2(1-a)}\right)L_{p2}$$

Cette valeur étant toujours négative, le moment maximal ne se trouve pas non plus dans le tronçon droit.

Moment maximal au niveau de la charge ponctuelle de la poutre type 2

On conclut donc que le moment maximal est toujours situé au droit de la charge ponctuelle et vaut :

$$M_{2,max} = M_{g,2}(x = aL_{p2}) = \frac{1-a}{4(2-a)^3}FL_1 = f_{2,0}(a)FL_1$$

Où on a posé $f_{2,0}(a) = \frac{1-a}{4(2-a)^3}$.

6.1.3.1.1.2. Expression du volume du module réciproque

Le système suivant reprend le critère de flexion et la formule du volume d'une poutre type i :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{M_{i,max}}{2I_i/\phi_i} = \frac{32f_{i,0}(a)FL_i}{\pi\phi_i^3} \\ V_i = \frac{\pi\phi_i^2}{4}\left(\frac{L_i}{2-a}\right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \phi_i^2 = \left(\frac{32f_{i,0}(a)FL_i}{\pi\sigma}\right)^{2/3} \\ \phi_i^2 = \frac{4(2-a)V_i}{\pi L_i} \end{cases}$$

Le volume de la poutre type 1 vaut alors :

$$V_1 = 3.691 \frac{f_{1,0}^{2/3}(a) F^{2/3} L_1^{5/3}}{2-a} \frac{1}{\sigma^{2/3}}$$

Tandis que le volume de la poutre type 2 vaut :

$$V_2 = 3.691 \frac{f_{2,0}^{2/3}(a) F^{2/3} L_1^{5/3}}{2-a} \lambda^{5/3}$$

Note : Le diamètre de la poutre type 2 est adapté de manière à ce que la contrainte de flexion soit identique dans tout le module :

$$\phi_2 = \phi_1 \left(\frac{M_{2,max}}{M_{1,max}} \lambda \right)^{1/3} = \phi_1 \left(\frac{f_{1,0}(a)}{f_{2,0}(a)} \lambda \right)^{1/3}$$

De plus, lorsque $a \leq 0.618$, les moments maximaux des 2 types de poutre sont égaux et $\phi_2 = \phi_1 \lambda^{1/3}$.

Le volume total s'obtient en considérant 4 poutres identiques 2 à 2 :

$$V = 2V_1 + 2V_2 = \frac{7.382}{2-a} \left(f_{1,0}^{2/3}(a) + \lambda^{5/3} f_{2,0}^{2/3}(a) \right) \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = W_B(a, \lambda) \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Où on pose $W_B(a, \lambda) = \frac{7.382}{2-a} \left(f_{1,0}^{2/3}(a) + \lambda^{5/3} f_{2,0}^{2/3}(a) \right)$. Ecrit de manière adimensionnelle, on a donc :

$$W = \frac{V \sigma^{2/3}}{F^{2/3} L_1^{5/3}} = W_B(a, \lambda) \quad (12a.1)$$

Le volume de matière d'un plancher rectangulaire avec zone centrale rectangulaire composé d'un module réciproque élémentaire à 4 poutres identiques 2 à 2 soumis à une charge F répartie uniformément dans 2 directions en fonction des zones et engendrant une contrainte σ dans la section la plus sollicitée est donné par l'expression (12a.1).

En évaluant cette expression (12a.1) à l'état limite ultime, on trouve :

$$V_u = W_B(a, \lambda) \frac{F_u^{2/3} L_1^{5/3}}{f_{m,d}^{2/3}} \rightarrow W_u = \frac{V_u f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L_1^{5/3}} = W_B(a, \lambda) \quad (12b.1)$$

6.1.3.1.2. Correction du graphique en tenant compte de la structure secondaire

Pour tenir compte de la structure secondaire du plancher, nous considérons un entraxe entre les poutres intermédiaires constant pour toutes les zones. En imposant ce choix et en souhaitant avoir la même contrainte dans chacune des poutres, il est nécessaire d'adapter les diamètres de ces poutres du fait que leur longueur dépend de la zone dans laquelle elles se trouvent.

Pour calculer le volume de la structure intermédiaire, on distingue 3 zones différentes :

- 2 zones rectangulaires de dimensions $L_{p1} \times (1-a)L_{p2} = \frac{L_1}{2-a} \times (1-a) \frac{\lambda L_1}{2-a}$:

Le nombre de poutres dans la zone est donné par $n_{R1} = \frac{L_{p1}}{e} = \frac{L_1/(2-a)}{e}$ et leur longueur est $(1-a)L_{p2}$. En reprenant l'expression (3a) du volume d'un plancher simple avec sens de portée, le volume d'une de ces zones rectangulaires vaut :

$$V_1 = 0.923 n_{R1}^{1/3} \frac{\left(\frac{A_{R1}}{A_{tot}} F \right)^{2/3} \left((1-a)L_{p2} \right)^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = 0.923 \left(\frac{L_1}{e} \right)^{1/3} \frac{(1-a)^{7/3}}{(2-a)^{10/3}} \lambda^{5/3} \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Où $A_{tot} = \lambda L_1^2$ et $L_{p2} = \frac{\lambda L_1}{2-a}$.

- 2 zones rectangulaires de dimensions $L_{p2} \times (1-a)L_{p1} = \frac{\lambda L_1}{2-a} \times (1-a) \frac{L_1}{2-a}$:

Le nombre de poutres dans la zone est donné par $n_{R2} = \frac{L_{p2}}{e} = \frac{\lambda L_1 / (2-a)}{e}$ et leur longueur est $(1-a)L_{p1}$. Le volume d'une de ces zones est obtenu par la même équation que celle-ci-dessus :

$$V_2 = 0.923 n_{R2}^{1/3} \frac{\left(\frac{A_{R2}}{A_{tot}} F\right)^{2/3} \left((1-a)L_{p1}\right)^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = 0.923 \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \frac{(1-a)^{7/3}}{(2-a)^{10/3}} \lambda^{1/3} \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

- 1 zone rectangulaire centrale de dimensions $aL_{p1} \times aL_{p2} = a \frac{L_1}{2-a} \times a \frac{\lambda L_1}{2-a}$:

Cette zone est composée de $n_{RC} = \frac{aL_{p1}}{e} = \frac{aL_1 / (2-a)}{e}$ poutres de longueur aL_{p2} . Donc, son volume est donné par :

$$V_3 = 0.923 n_{RC}^{1/3} \frac{\left(\frac{A_{RC}}{A_{tot}} F\right)^{2/3} (aL_{p2})^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = 0.923 \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \frac{a^{10/3}}{(2-a)^{10/3}} \lambda^{5/3} \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Le volume de la structure secondaire est donc donné par :

$$V_{sec} = 2V_1 + 2V_2 + V_3 = 0.923 \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \frac{2(1-a)^{7/3}(\lambda^{5/3} + \lambda^{1/3}) + a^{10/3}\lambda^{5/3}}{(2-a)^{10/3}} \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Le volume total est la somme du volume de la structure primaire (module réciproque (12a.1)) et de la structure secondaire :

$$V_{tot} = \left(W_B(a, \lambda) + 0.923 \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \frac{2(1-a)^{7/3}(\lambda^{5/3} + \lambda^{1/3}) + a^{10/3}\lambda^{5/3}}{(2-a)^{10/3}} \right) \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

En posant $W_{B,SS}\left(a, \lambda, \frac{L_1}{e}\right) = W_B(a, \lambda) + 0.923 \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \frac{2(1-a)^{7/3}(\lambda^{5/3} + \lambda^{1/3}) + a^{10/3}\lambda^{5/3}}{(2-a)^{10/3}}$ et écrit sous forme adimensionnelle à l'ELU :

$$W_{u,tot} = \frac{V_{u,tot} f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L_1^{5/3}} = W_{B,SS}\left(a, \lambda, \frac{L_1}{e}\right) \quad (13b.1)$$

Le volume total de matière d'un plancher rectangulaire avec zone centrale rectangulaire composé d'un module réciproque à 4 poutres identiques 2 à 2 avec sa structure secondaire, soumis à un chargement F réparti uniformément sur tout le plancher selon 2 directions perpendiculaires et engendrant une contrainte de flexion σ dans la section la plus sollicitée est donné par (13b.1).

6.1.3.1.3. Correction du graphique en tenant compte de l'effort tranchant

En utilisant le critère d'effort tranchant donné par l'Eurocode 5, on peut déterminer les expressions du volume :

$$\frac{4V_{Ed,i}}{3(\pi\phi_i^2/4)} \leq \tau$$

L'effort tranchant maximal dans la poutre type 1 est donné par $V_{Ed,1} = \alpha_{PT1} F = \max(\alpha_{1,4}; \alpha_{1,0}) F$ tandis que celui dans la poutre type 2 vaut $V_{Ed,2} = \alpha_{PT2}(a) F = \max(\alpha_{2,1}; \alpha_{2,0}) F$. Le volume d'une poutre type i est obtenu en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} \tau = \frac{4\alpha_{PTi}(a)F}{3(\pi\phi_i^2/4)} \\ V_i = \frac{\pi\phi_i^2}{4} \frac{L_i}{2-a} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi\phi_i^2}{4} = \frac{4\alpha_{PTi}(a)F}{3\tau} \\ \frac{\pi\phi_i^2}{4} = \frac{V_i(2-a)}{L_i} \end{cases}$$

Donc, on trouve pour la poutre type 1 :

$$V_1 = \frac{4}{3} \frac{\alpha_{PT1}(a)}{2-a} \frac{FL_1}{\tau}$$

Et pour la poutre type 2 :

$$V_2 = \frac{4}{3} \frac{\alpha_{PT2}(a)}{2-a} \frac{FL_1}{\tau}$$

Note : Comme pour la contrainte en flexion, le diamètre des poutres types est adapté de manière à obtenir la même contrainte de cisaillement τ partout :

$$\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \phi_2 = \phi_1 \left(\frac{V_{Ed,2}}{V_{Ed,1}} \right)^{1/2}$$

Le volume total du module vaut alors :

$$V = 2V_1 + 2V_2 = 2 \frac{4(\alpha_{PT1}(a) + \lambda\alpha_{PT2}(a))}{3(2-a)} \frac{FL_1}{\tau}$$

A l'ELU, l'expression devient :

$$V_u = 2 \frac{4(\alpha_{PT1}(a) + \lambda\alpha_{PT2}(a))}{3(2-a)} \frac{F_u L_1}{k_{cr} f_{v,d}}$$

De manière à pouvoir comparer les critères de flexion et de cisaillement, il est nécessaire d'obtenir les mêmes indicateurs de volume. Pour cela, on définit $\theta = \frac{f_{m,d}}{f_{v,d}}$ et, en sachant que $F_u = q_u \lambda L_1^2$, l'indicateur sous le critère de cisaillement est :

$$W_u = \frac{V_u f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L_1^{5/3}} = Z \lambda^{1/3} \frac{4(\alpha_{PT1}(a) + \lambda\alpha_{PT2}(a))}{(2-a)} = Z W_S(a, \lambda) \quad (14.1)$$

Où on a posé $Z = \frac{2\theta^{2/3}}{3k_{cr}} \left(\frac{q_u}{f_{v,d}} \right)^{1/3}$ et $W_S(a, \lambda) = \lambda^{1/3} \frac{4(\alpha_{PT1}(a) + \lambda\alpha_{PT2}(a))}{(2-a)}$. Le volume de matière d'un plancher rectangulaire avec une zone centrale rectangulaire soumis à une charge F répartie uniformément sur tout le plancher selon 2 directions perpendiculaires et engendrant une contrainte de cisaillement $f_{v,d}$ est donné par l'expression (14.1).

Avec la structure secondaire prise en compte, on obtient finalement :

$$W_{u,tot} = \frac{V_{u,tot} f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L_1^{5/3}} = W_{S,SS} \left(a, \lambda, Z, \frac{L_1}{e} \right) \quad (15.1)$$

Où on pose $W_{S,SS} \left(a, \lambda, Z, \frac{L_1}{e} \right) = Z W_S(a, \lambda) + 0.923 \left(\frac{L_1}{e} \right)^{1/3} \frac{2(1-a)^{7/3} (\lambda^{5/3} + \lambda^{1/3}) + a^{10/3} \lambda^{5/3}}{(2-a)^{10/3}}$. Le volume total de matière d'un plancher rectangulaire avec zone centrale rectangulaire composé d'un module réciproque à 4 poutres identiques 2 à 2 avec sa structure secondaire, soumis à un chargement F

réparti uniformément sur tout le plancher selon 2 directions perpendiculaires et engendrant une contrainte de cisaillement $f_{v,d}$ dans la section la plus sollicitée, est donné par (15.1).

6.1.3.2. CAS 2 : Zone centrale rectangulaire et 1 sens de portée vertical

On s'intéresse maintenant au cas du plancher avec zone centrale rectangulaire portant dans une seule direction, comme indiqué en Figure 67. Les conditions à respecter pour un tel plancher sont les suivantes :

$$a_1 = a_2 = a \quad \lambda \leq (1 - a)$$

La première condition se rapportant à la zone centrale rectangulaire et la 2^{ème} condition faisant référence aux 2 sens de portée du plancher. Les réactions aux appuis se simplifient de sorte que :

$$\begin{cases} R_{1,4} = \alpha_{1,4}F = \left(\frac{a^2 - a + 1}{4a(2 - a)^2}\right)F \\ R_{1,0} = \alpha_{1,0}F = \left(\frac{a^2 - 3a + 3}{4(2 - a)^2}\right)F \\ R_{2,1} = \alpha_{2,1}F = \left(\frac{-a^3 + 2a^2 - 2a + 1}{4a(2 - a)^2}\right)F \\ R_{2,0} = \alpha_{2,0}F = \left(\frac{a^2 - a + 1}{4(2 - a)^2}\right)F \end{cases}$$

6.1.3.2.1. Prise en compte de la flexion dans le calcul de la contrainte

6.1.3.2.1.1. Expression du moment maximal

Les expressions des moments le long de chaque poutre se simplifient pour le cas d'un plancher à zone centrale rectangulaire $a_1 = a_2 = a$ de sorte que pour la poutre type 1, on a :

$$\begin{cases} M_{g,1}(x) = -\frac{(q_1 + q_3)}{2}x^2 + R_{1,4}x & 0 \leq x \leq aL_{p1} \\ M_{d,1}(x) = -\frac{(q_1 + q_{2a})}{2}x^2 + (R_{1,4} - R_{2,1} + (q_{2a} - q_3)aL_{p1})x + \left(R_{2,1} + \frac{aL_{p1}}{2}(q_3 - q_{2a})\right)aL_{p1} & aL_{p1} \leq x \leq L_{p1} \end{cases}$$

Les moments dans chaque tronçon de la poutre type 2 deviennent quant à eux :

$$\begin{cases} M_{g,2}(x) = R_{2,1}x & 0 \leq x \leq aL_{p2} \\ M_{d,2}(x) = (R_{2,1} - R_{1,4})x + R_{1,4}aL_{p2} & aL_{p2} \leq x \leq L_{p2} \end{cases}$$

Sur base de ces expressions, on calcule le moment maximal dans les poutres. Pour cela, on l'évalue dans chaque tronçon de chaque poutre type en commençant avec la poutre type 1.

Moment maximal dans le tronçon gauche de la poutre type 1 ($0 \leq x \leq aL_{p1}$)

Tout d'abord, on calcule la position du moment maximal dans le tronçon gauche :

$$V_{g,1}(x) = \frac{dM_{g,1}(x)}{dx} = 0 = R_{1,4} - (q_1 + q_3)x \quad \rightarrow \quad x_{g,1,max} = \frac{a^2 - a + 1}{2a}L_{p1}$$

On vérifie que cette position se trouve bien dans les bornes du tronçon, c'est-à-dire :

$$\frac{a^2 - a + 1}{2a}L_{p1} \leq aL_{p1} \quad \rightarrow \quad a_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La solution « + » indique que le moment maximal est dans le tronçon gauche pour $a \geq \frac{-1+\sqrt{5}}{2} = 0.618$.

Dans ce cas, il vaut :

$$M_{g,1,max} = \frac{(a^2 - a + 1)^2}{16a^2(2-a)^3} FL_1 = f_{1,g,0}(a) FL_1$$

Où on a posé $f_{1,g,0}(a) = \frac{(a^2 - a + 1)^2}{16a^2(2-a)^3}$.

Moment maximal dans le tronçon droit de la poutre type 1 ($aL_{p1} \leq x \leq L_{p1}$)

De la même façon que précédemment, on calcule d'abord la position du moment maximal :

$$x_{d,1,max} = \left(\frac{-a^2 + a + 1}{2(2-a)} \right) L_{p1}$$

On vérifie que cette solution se trouve dans les bornes du domaine $aL_{p1} \leq x \leq L_{p1}$:

$$aL_{p1} \leq \left(\frac{-a^2 + a + 1}{2(2-a)} \right) L_{p1} \leq L_{p1}$$

L'inéquation sur la borne inférieure devient :

$$aL_{p1} \leq \left(\frac{-a^2 + a + 1}{2(2-a)} \right) L_{p1} \quad \rightarrow \quad a_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$$

La solution « + » est à rejeter car elle sort du domaine $[0; 1]$ tandis que la solution « - » permet de déduire que le moment maximal se trouve dans le tronçon droit pour $a \leq \frac{3-\sqrt{5}}{2} = 0.382$.

Ensuite, on regarde la borne supérieure de l'inéquation qui donne :

$$\left(\frac{-a^2 + a + 1}{2(2-a)} \right) L_{p1} \leq L_{p1} \quad \rightarrow \quad a^2 - 3a + 3 \geq 0$$

Cette inéquation est vérifiée pour toute valeur de a . Finalement, le moment maximal se trouve dans le tronçon droit pour des valeurs $a \leq 0.382$ et vaut alors :

$$M_{d,1,max} = \frac{(a^2 - 3a + 3)^2}{16(2-a)^4} FL_1 = f_{1,d,0}(a) FL_1$$

Où on a posé $f_{1,d,0}(a) = \frac{(a^2 - 3a + 3)^2}{16(2-a)^4}$.

Moment maximal au niveau de la charge ponctuelle de la poutre type 1

Le moment maximal à la charge ponctuelle est évalué en $x = aL_{p1}$ et vaut :

$$M_{p,1,max} = \frac{1-a}{4(2-a)^3} FL_1 = f_{1,p,0}(a) FL_1$$

Où on a posé $f_{1,p,0}(a) = \frac{1-a}{4(2-a)^3}$.

Le moment maximal dans la poutre type 1 est résumé par :

$$M_{1,max} = f_{1,0}(a)FL_1 \quad \rightarrow \quad f_{1,0}(a) = \begin{cases} f_{1,d,0}(a) & a \leq 0.382 \\ f_{1,g,0}(a) & a \geq 0.618 \\ f_{1,p,0}(a) & \text{sinon} \end{cases}$$

Moment maximal au niveau de la charge ponctuelle de la poutre type 2

La poutre type 2 étant soumise à une charge ponctuelle uniquement, son moment maximal se situe au niveau de cette charge, quelle que soit la valeur de a . Dans ce cas, il vaut :

$$M_{2,max} = \frac{-a^3 + 2a^2 - 2a + 1}{4(2-a)^3} F\lambda L_1 = f_{2,0}(a)F\lambda L_1$$

Où on a posé $f_{2,0}(a) = \frac{-a^3 + 2a^2 - 2a + 1}{4(2-a)^3}$.

6.1.3.2.1.2. Expression du volume du module réciproque

Les expressions des moments ayant la même allure que dans le CAS 1, le volume total de la structure primaire s'écrit sous la forme :

$$V = \frac{7.382}{2-a} \left(f_{1,0}^{2/3}(a) + \lambda^{5/3} f_{2,0}^{2/3}(a) \right) \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = W_B(a, \lambda) \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Où on pose $W_B(a, \lambda) = \frac{7.382}{2-a} \left(f_{1,0}^{2/3}(a) + \lambda^{5/3} f_{2,0}^{2/3}(a) \right)$. Ecrit de manière adimensionnelle, on a donc :

$$W = \frac{V\sigma^{2/3}}{F^{2/3} L_1^{5/3}} = W_B(a, \lambda) \quad (12a.2)$$

Le volume de matière d'un plancher rectangulaire avec zone centrale rectangulaire composé d'un module réciproque élémentaire à 4 poutres identiques 2 à 2 et soumis à une charge F répartie uniformément dans la direction verticale sur tout le plancher, engendrant une contrainte σ dans la section la plus sollicitée, est donné par l'expression (12a.2).

En évaluant cette expression (12a.2) à l'état limite ultime, on trouve :

$$V_u = W_B(a, \lambda) \frac{F_u^{2/3} L_1^{5/3}}{f_{m,d}^{2/3}} \quad \rightarrow \quad W_u = \frac{V_u f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L_1^{5/3}} = W_B(a, \lambda) \quad (12b.2)$$

6.1.3.2.2. Correction du graphique en tenant compte de la structure secondaire

Une fois de plus, nous considérons un entraxe constant entre les poutres du plancher secondaire, cela signifie que, dans le but d'avoir la même contrainte dans chaque poutre, il faut adapter les différents diamètres. Le calcul est identique à celui réalisé pour le CAS 1, seule la zone où le sens de portée a été modifié voit son volume changer :

- 2 zones rectangulaires de dimensions $L_{p1} \times (1-a)L_{p2} = \frac{L_1}{2-a} \times (1-a) \frac{\lambda L_1}{2-a}$:
Le volume reste identique au CAS 1 et vaut donc :

$$V_1 = 0.923 \left(\frac{L_1}{e} \right)^{1/3} \frac{(1-a)^{7/3}}{(2-a)^{10/3}} \lambda^{5/3} \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

- 2 zones rectangulaires de dimensions $L_{p2} \times (1-a)L_{p1} = \frac{\lambda L_1}{2-a} \times (1-a) \frac{L_1}{2-a}$:
Le nombre de poutres dans la zone est donné par $n_{R2} = \frac{(1-a)L_{p1}}{e} = \frac{(1-a)L_1/(2-a)}{e}$ et leur longueur est L_{p2} . Le volume d'une de ces zones est donc donné par :

$$V_2 = 0.923 n_{R2}^{1/3} \frac{\left(\frac{A_{R2}}{A_{tot}} F\right)^{2/3} (L_{p2})^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = 0.923 \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \frac{(1-a)}{(2-a)^{10/3}} \lambda^{5/3} \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

- 1 zone rectangulaire centrale de dimensions $aL_{p1} \times aL_{p2} = a \frac{L_1}{2-a} \times a \frac{\lambda L_1}{2-a}$:
Le volume reste identique au CAS 2 et vaut donc :

$$V_3 = 0.923 \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \frac{a^{10/3}}{(2-a)^{10/3}} \lambda^{5/3} \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Le volume de la structure secondaire est donc donné par :

$$V_{sec} = 2V_1 + 2V_2 + V_3 = 0.923 \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \frac{2(1-a)^{7/3} + 2(1-a) + a^{10/3}}{(2-a)^{10/3}} \lambda^{5/3} \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Le volume total du plancher (structures primaire + secondaire) vaut :

$$V_{tot} = \left(W_B(a, \lambda) + 0.923 \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \frac{2(1-a)^{7/3} + 2(1-a) + a^{10/3}}{(2-a)^{10/3}} \lambda^{5/3} \right) \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

En posant $W_{B,SS}\left(a, \lambda, \frac{L_1}{e}\right) = W_B(a, \lambda) + 0.923 \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \frac{2(1-a)^{7/3} + 2(1-a) + a^{10/3}}{(2-a)^{10/3}} \lambda^{5/3}$ et écrit de manière adimensionnelle à l'ELU :

$$W_{u,tot} = \frac{V_{u,tot} f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L_1^{5/3}} = W_{B,SS}\left(a, \lambda, \frac{L_1}{e}\right) \quad (13b.2)$$

Le volume total de matière d'un plancher rectangulaire à zone centrale rectangulaire tenant compte de la structure secondaire, soumis à un chargement F réparti uniformément sur tout le plancher selon la direction verticale et engendrant une contrainte de flexion σ dans la section la plus sollicitée, est donné par (13b.2).

6.1.3.2.3. Correction du graphique en tenant compte de l'effort tranchant

En utilisant le critère d'effort tranchant donné par l'Eurocode 5, on peut déterminer les expressions du volume :

$$\frac{4V_{Ed,i}}{3(\pi\phi_i^2/4)} \leq \tau$$

L'effort tranchant maximal dans la poutre type 1 est donné par $V_{Ed,1} = \alpha_{PT1} F = \max(\alpha_{1,4}; \alpha_{1,0}) F$ tandis que celui dans la poutre type 2 vaut $V_{Ed,2} = \alpha_{PT2}(a) F = \max(\alpha_{2,1}; \alpha_{2,0}) F$. Les expressions s'écrivant sous la même forme que dans le CAS 1, le volume de la structure primaire évalué à l'ELU est donné par :

$$V_u = 2 \frac{4(\alpha_{PT1}(a) + \lambda \alpha_{PT2}(a))}{3(2-a)} \frac{F_u L_1}{k_{cr} f_{v,d}}$$

De manière à pouvoir comparer les critères de flexion et de cisaillement, il est nécessaire d'obtenir les mêmes indicateurs de volume. Pour cela, on définit $\theta = \frac{f_{m,d}}{f_{v,d}}$ et, en sachant que $F_u = q_u \lambda L_1^2$, l'indicateur sous le critère de cisaillement est :

$$W_u = \frac{V_u f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L_1^{5/3}} = Z \lambda^{1/3} \frac{4(\alpha_{PT1}(a) + \lambda \alpha_{PT2}(a))}{(2-a)} = Z W_S(a, \lambda) \quad (14.2)$$

Où on a posé $Z = \frac{2\theta^{2/3}}{3k_{cr}} \left(\frac{q_u}{f_{v,d}} \right)^{1/3}$ et $W_S(a, \lambda) = \lambda^{1/3} \frac{4(\alpha_{PT1}(a) + \lambda \alpha_{PT2}(a))}{(2-a)}$. Le volume de matière d'un plancher composé d'un module réciproque élémentaire à 4 poutres identiques 2 à 2 soumis à une charge totale F répartie uniformément sur tout le plancher dans la direction verticale et engendrant une contrainte de cisaillement $f_{v,d}$ est donné par l'expression (14.2).

Avec la structure secondaire prise en compte, on obtient finalement :

$$W_{u,tot} = \frac{V_{u,tot} f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L_1^{5/3}} = W_{S,ss} \left(a, \lambda, Z, \frac{L_1}{e} \right) \quad (15.2)$$

Où on pose $W_{S,ss} \left(a, \lambda, Z, \frac{L_1}{e} \right) = Z W_S(a, \lambda) + 0.923 \left(\frac{L_1}{e} \right)^{1/3} \frac{2(1-a)^{7/3} + 2(1-a) + a^{10/3}}{(2-a)^{10/3}} \lambda^{5/3}$. Le volume total de matière d'un plancher composé d'un module réciproque à 4 poutres identiques 2 à 2 avec sa structure secondaire, soumis à un chargement F réparti uniformément sur tout le plancher dans la direction verticale et engendrant une contrainte de cisaillement $f_{v,d}$ dans la section la plus sollicitée, est donné par (15.2).

6.1.3.3. CAS 3 : Zone centrale carrée et 2 sens de portée

Cette fois-ci, on analyse le cas d'un plancher rectangulaire avec zone centrale carrée portant dans 2 directions perpendiculaires comme illustré en Figure 72. Pour rappel, un tel plancher est défini par les 2 conditions suivantes :

$$a_2 = \frac{2a_1}{2\lambda - \lambda a_1 + a_1} \quad \lambda \geq (1 - a_1) \left(\frac{2 - a_2}{2 - a_1} \right)$$

La condition de droite se rapporte à la forme de la zone centrale du plancher tandis que la condition de gauche concerne le sens de portée de chaque zone du plancher.

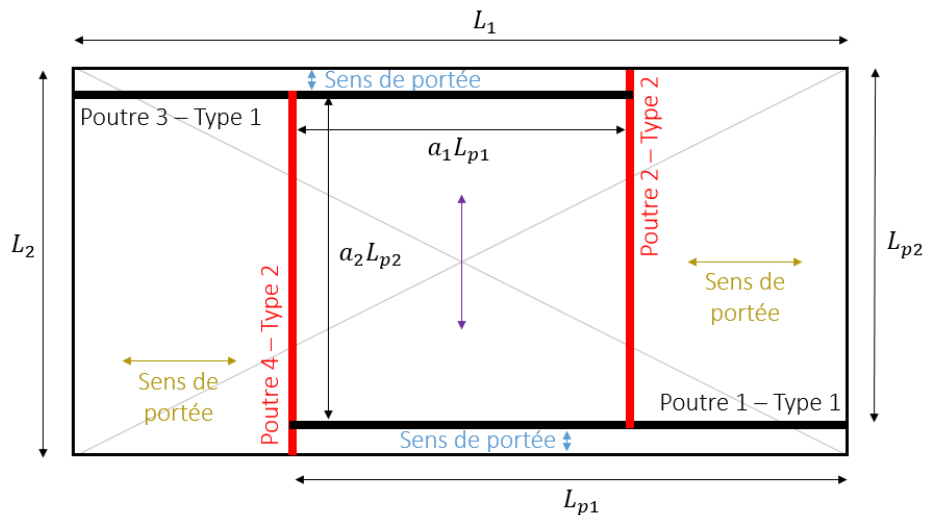


Figure 72 : Plancher rectangulaire avec zone centrale carrée et 2 sens de portée

Les schémas statiques d'un tel système sont représentés en Figure 63 et Figure 64. Les réactions aux appuis, calculées pour le cas général en début de section, se simplifient pour ce type de plancher de sorte qu'elles peuvent s'exprimer uniquement en fonction de a_1 et λ :

$$\begin{cases} R_{1,4} = \alpha_{1,4}F \\ R_{1,0} = \alpha_{1,0}F \\ R_{2,1} = \alpha_{2,1}F \\ R_{2,0} = \alpha_{2,0}F \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_{1,4} = \frac{a_1^3(1-\lambda^2) + 4a_1^2\lambda^2 - 2a_1\lambda(3\lambda-1) + 4\lambda^2}{8a_1\lambda(2-a_1)^2(\lambda+1)} \\ \alpha_{1,0} = \frac{a_1^2(\lambda^2+2\lambda+1) - a_1(5\lambda^2+2\lambda+1) + 2\lambda(3\lambda+1)}{8\lambda(2-a_1)^2(\lambda+1)} \\ \alpha_{2,1} = \frac{-2a_1^3(\lambda+1) + a_1^2(\lambda^2+2\lambda+1) - 4a_1\lambda^2 + 4\lambda^2}{8a_1\lambda(2-a_1)^2(\lambda+1)} \\ \alpha_{2,0} = \frac{a_1^2(\lambda^2+2\lambda+1) + a_1(1-3\lambda^2-6\lambda) + 2\lambda(\lambda+3)}{8\lambda(2-a_1)^2(\lambda+1)} \end{cases}$$

6.1.3.3.1. Prise en compte de la flexion dans le calcul de la contrainte

6.1.3.3.1.1. Expression du moment maximal

Les expressions des moments le long de chaque poutre, calculées au début de la section, se simplifient pour le cas d'un plancher à zone centrale carrée. Pour la poutre type 1, on a alors :

$$\begin{cases} M_{g,1}(x) = R_{1,4}x - \frac{(q_1 + q_3)}{2}x^2 & 0 \leq x \leq a_1L_{p1} \\ M_{d,1}(x) = -\frac{q_1}{2}x^2 + (R_{1,4} - R_{2,1} - q_3a_1L_{p1})x + \left(R_{2,1} + \frac{a_1L_{p1}}{2}q_3\right)a_1L_{p1} & a_1L_{p1} \leq x \leq L_{p1} \end{cases}$$

Et pour la poutre type 2, on a :

$$\begin{cases} M_{g,2}(x) = R_{2,1}x - \frac{q_{2b}}{2}x^2 & 0 \leq x \leq a_2L_{p2} \\ M_{d,2}(x) = -\frac{q_{2b}}{2}x^2 + (R_{2,1} - R_{1,4})x + R_{1,4}a_2L_{p2} & a_2L_{p2} \leq x \leq L_{p2} \end{cases}$$

Il est nécessaire d'évaluer le moment sur chaque tronçon de chaque poutre afin de définir l'expression finale du moment maximal en commençant par la poutre type 1.

Moment maximal dans le tronçon gauche de la poutre type 1 ($0 \leq x \leq a_1L_{p1}$)

Afin de déterminer la valeur du moment maximal, il faut d'abord en déterminer sa position :

$$V_{g,1}(x) = \frac{dM_{g,1}(x)}{dx} = 0 = R_{1,4} - (q_1 + q_3)x \quad \rightarrow \quad x_{g,1,max} = \frac{R_{1,4}}{q_1 + q_3}$$

On vérifie que cette position se trouve bien dans le tronçon gauche, c'est-à-dire qu'il faut $x_{g,1,max} \leq a_1L_{p1}$. Après résolution MATLAB, on trouve :

$$a_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda(3\lambda+2)}}{\lambda+1}$$

La solution « - » est à rejeter tandis que la solution « + » indique que le moment maximal se trouve dans le tronçon gauche pour $a \geq \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda(3\lambda+2)}}{\lambda+1}$. Dans ce cas, il vaut :

$$M_{g,1,max} = \frac{(a_1^3(1-\lambda^2) + 4a_1^2\lambda^2 + 2a_1\lambda(1-3\lambda) + 4\lambda^2)^2}{32a_1^2\lambda(2-a_1)^3(\lambda+1)^2(a_1+2\lambda-a_1\lambda)} FL_1 = f_{1,g,0}(a_1, \lambda) FL_1$$

Où on a posé $f_{1,g,0}(a_1, \lambda) = \frac{(a_1^3(1-\lambda^2) + 4a_1^2\lambda^2 + 2a_1\lambda(1-3\lambda) + 4\lambda^2)^2}{32a_1^2\lambda(2-a_1)^3(\lambda+1)^2(a_1+2\lambda-a_1\lambda)}$.

Moment maximal dans le tronçon droit de la poutre type 1 ($a_1 L_{p1} \leq x \leq L_{p1}$)

Par un raisonnement similaire, on détermine la position du moment maximal qui se trouve en :

$$x_{d,1,max} = \frac{R_{1,4} - R_{2,1} - q_3 a_1 L_{p1}}{q_1} < 0$$

Par résolution MATLAB on se rend compte que cette position est toujours négative, ce qui est à rejeter. Donc le moment maximal ne se trouve pas dans le tronçon droit.

Moment maximal au niveau de la charge ponctuelle de la poutre type 1

Le moment maximal à la charge ponctuelle est évalué en $x = a_1 L_{p1}$ et vaut :

$$M_{p,1,max} = \frac{(1 - a_1)(a_1 + 2\lambda - a_1\lambda)}{4(2 - a_1)^3(\lambda + 1)} FL_1 = f_{1,p,0}(a_1, \lambda) FL_1$$

Où on a posé $f_{1,p,0}(a_1, \lambda) = \frac{(1-a_1)(a_1+2\lambda-a_1\lambda)}{4(2-a_1)^3(\lambda+1)}$.

Finalement, le moment maximal dans la poutre type 1 est résumé par :

$$M_{1,max} = f_{1,0}(a_1, \lambda) FL_1 \quad \rightarrow \quad f_{1,0}(a_1, \lambda) = \begin{cases} f_{1,p,0}(a_1, \lambda) & a \leq \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda(3\lambda + 2)}}{\lambda + 1} \\ f_{1,g,0}(a_1, \lambda) & a \geq \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda(3\lambda + 2)}}{\lambda + 1} \end{cases}$$

Moment maximal dans le tronçon gauche de la poutre type 2 ($0 \leq x \leq a_2 L_{p2}$)

On commence par chercher la position du moment maximal dans ce tronçon :

$$V_{g,2}(x) = \frac{dM_{g,2}(x)}{dx} = 0 = R_{2,1} - q_{2b}x \quad \rightarrow \quad x_{g,2,max} = \frac{R_{2,1}}{q_{2b}}$$

On regarde si cette solution est acceptable dans les bornes du domaine $0 \leq x_{g,2,max} \leq a_2 L_{p2}$.

$$x_{g,2,max} \leq \frac{a_2}{2 - a_2} L_2 \quad \rightarrow \quad 2a_{2,1}(2 - a_1)(2 - a_2) - a_2(1 - a_1) \leq 0$$

Une des solutions trouvées est possible, cependant, aux vues de la taille de l'expression, elle ne sera pas explicitée ici. Le moment maximal est évalué en cette position et vaut :

$$M_{g,2,max} = \frac{(-2a_1^3(\lambda + 1) + a_1^2(\lambda^2 + 2\lambda + 1) - 4a_1\lambda^2 + 4\lambda^2)^2}{64a_1^2\lambda(1 - a_1)(2 - a_1)^3(\lambda + 1)^2} FL_1 = f_{2,g,0}(a_1, \lambda) FL_1$$

Où on a posé $f_{2,g,0}(a_1, \lambda) = \frac{(-2a_1^3(\lambda+1)+a_1^2(\lambda^2+2\lambda+1)-4a_1\lambda^2+4\lambda^2)^2}{64a_1^2\lambda(1-a_1)(2-a_1)^3(\lambda+1)^2}$.

Moment maximal dans le tronçon droit de la poutre type 2 ($a_2 L_{p2} \leq x \leq L_{p2}$)

La position du moment maximal dans le tronçon droit se trouve en :

$$x_{d,2,max} = \frac{R_{2,1} - R_{1,4}}{q_{2b}} < 0$$

Par résolution MATLAB, on découvre que cette solution est négative pour toute valeur de $a_1 \in [0; 1]$ et donc à rejeter. Le moment maximal ne se trouve jamais dans le tronçon droit.

Moment maximal au niveau de la charge ponctuelle de la poutre type 2

Le moment évalué à la charge ponctuelle vaut :

$$M_{p,2,max} = \frac{-a_1^2(1-\lambda^2) - 4a_1\lambda^2 + 4\lambda^2}{8\lambda(2-a_1)^3(\lambda+1)} FL_1 = f_{2,p,0}(a_1, \lambda) FL_1$$

Où on a posé $f_{2,p,0}(a_1, \lambda) = \frac{-a_1^2(1-\lambda^2) - 4a_1\lambda^2 + 4\lambda^2}{8\lambda(2-a_1)^3(\lambda+1)}$.

Finalement, on conclut donc que le moment maximal dans la poutre type 2 vaut :

$$M_{2,max} = f_{2,0}(a_1, \lambda) FL_1 \rightarrow f_{2,0}(a_1, \lambda) = \begin{cases} f_{2,g,0}(a_1, \lambda) & \frac{R_{2,1}}{q_{2b}} \leq a_2 L_{p2} \text{ et } f_{2,g,0}(a_1, \lambda) \geq f_{2,p,0}(a_1, \lambda) \\ f_{2,p,0}(a_1, \lambda) & \text{sinon} \end{cases}$$

6.1.3.3.1.2. Expression du volume du module réciproque

Le système suivant reprend le critère de flexion et le volume d'une poutre type i :

$$\begin{cases} \sigma = \frac{M_{i,max}}{2I_i/\phi_i} = \frac{32f_{i,0}(a_1, \lambda) FL_i}{\pi\phi_i^3} \\ V_i = \frac{\pi\phi_i^2}{4} \left(\frac{L_i}{2-a_i} \right) \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \phi_i^2 = \left(\frac{32f_{i,0}(a_1, \lambda) FL_i}{\pi\sigma} \right)^{2/3} \\ \phi_i^2 = \frac{4(2-a_i)V_i}{\pi L_i} \end{cases}$$

Le volume de la poutre type 1 vaut alors :

$$V_1 = 3.691 \frac{f_{1,0}^{2/3}(a_1, \lambda) F^{2/3} L_1^{5/3}}{2-a_1 \sigma^{2/3}}$$

Tandis que le volume de la poutre type 2 vaut :

$$V_2 = 3.691 \frac{f_{2,0}^{2/3}(a_1, \lambda) F^{2/3} L_1^{5/3}}{2-a_2 \sigma^{2/3}} \lambda$$

Note : Le diamètre de la poutre type 2 est adapté de manière à ce que la contrainte de flexion soit identique dans tout le module :

$$\phi_2 = \phi_1 \left(\frac{M_{2,max}}{M_{1,max}} \lambda \right)^{1/3} = \phi_1 \left(\frac{f_{1,0}(a_1, \lambda)}{f_{2,0}(a_1, \lambda)} \lambda \right)^{1/3}$$

Le volume total s'obtient en considérant 4 poutres identiques 2 à 2 :

$$V = 2V_1 + 2V_2 = 7.382 \left(\frac{f_{1,0}^{2/3}(a_1, \lambda)}{2-a_1} + \frac{\lambda f_{2,0}^{2/3}(a_1, \lambda)}{2-a_2} \right) \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = W_B(a_1, \lambda) \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Où on pose $W_B(a_1, \lambda) = 7.382 \left(\frac{f_{1,0}^{2/3}(a_1, \lambda)}{2-a_1} + \frac{\lambda f_{2,0}^{2/3}(a_1, \lambda)}{2-a_2} \right)$. Ecrit de manière adimensionnelle, on a :

$$W = \frac{V \sigma^{2/3}}{F^{2/3} L_1^{5/3}} = W_B(a_1, \lambda) \quad (12a.3)$$

Le volume de matière d'un plancher rectangulaire avec zone centrale carrée composé d'un module réciproque élémentaire à 4 poutres identiques 2 à 2 soumis à une charge F répartie uniformément

selon 2 directions perpendiculaires en fonction des zones et engendrant une contrainte σ dans la section la plus sollicitée, est donné par l'expression (12a.3).

En évaluant cette expression (12a.3) à l'état limite ultime, on trouve :

$$V_u = W_B(a_1, \lambda) \frac{F_u^{2/3} L_1^{5/3}}{f_{m,d}^{2/3}} \rightarrow W_u = \frac{V_u f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L_1^{5/3}} = W_B(a_1, \lambda) \quad (12b.3)$$

6.1.3.3.2. Correction du graphique en tenant compte de la structure secondaire

Comme précédemment, nous considérons un entraxe constant entre les poutres du plancher secondaire. Le raisonnement est le même que pour les CAS 1 et CAS 2 :

- 2 zones rectangulaires de dimensions $L_{p1} \times (1 - a_2)L_{p2} = \frac{L_1}{2-a_1} \times (1 - a_2) \frac{\lambda L_1}{2-a_2}$
Le nombre de poutres dans la zone est donné par $n_{R1} = \frac{L_{p1}}{e} = \frac{L_1/(2-a_1)}{e}$ et leur longueur est $(1 - a_2)L_{p2}$. Dans ce cas, le volume vaut alors :

$$V_1 = 0.923 n_{R1}^{1/3} \frac{\left(\frac{A_{R1}}{A_{tot}} F\right)^{2/3} ((1 - a_2)L_{p2})^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = 0.923 \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \frac{(1 - a_2)^{7/3}}{(2 - a_1)(2 - a_2)^{7/3}} \lambda^{5/3} \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

- 2 zones rectangulaires de dimensions $L_{p2} \times (1 - a_1)L_{p1} = \frac{\lambda L_1}{2-a_2} \times (1 - a_1) \frac{L_1}{2-a_1}$
Le nombre de poutres dans la zone est donné par $n_{R2} = \frac{L_{p2}}{e} = \frac{\beta L_1/(2-a_2)}{e}$ et leur longueur est $(1 - a_1)L_{p1}$. Le volume d'une de ces zones est donc donné par :

$$V_2 = 0.923 n_{R2}^{1/3} \frac{\left(\frac{A_{R2}}{A_{tot}} F\right)^{2/3} ((1 - a_1)L_{p1})^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = 0.923 \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \frac{(1 - a_1)^{7/3}}{(2 - a_2)(2 - a_1)^{7/3}} \lambda^{1/3} \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

- 1 zone rectangulaire centrale de dimensions $a_1 L_{p1} \times a_2 L_{p2} = a_1 \frac{L_1}{2-a_1} \times a_2 \frac{\lambda L_1}{2-a_2}$:
Cette zone est composée de $n_{RC} = \frac{a_1 L_{p1}}{e} = \frac{a_1 L_1/(2-a_1)}{e}$ poutres de longueur $a_2 L_{p2}$. Le volume de cette zone vaut :

$$V_3 = 0.923 n_{RC}^{1/3} \frac{\left(\frac{A_{RC}}{A_{tot}} F\right)^{2/3} (a_2 L_{p2})^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = 0.923 \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \frac{a_1 a_2^{7/3}}{(2 - a_1)(2 - a_2)^{7/3}} \lambda^{5/3} \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Le volume de la structure secondaire est donc donné par :

$$\begin{aligned} V_{sec} &= 2V_1 + 2V_2 + V_3 \\ &= 0.923 \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \left(\frac{(2(1 - a_2)^{7/3} + a_1 a_2^{7/3}) \lambda^{5/3} + (1 - a_1)^{7/3} \lambda^{1/3}}{(2 - a_1)(2 - a_2)^{7/3}} \right) \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}} \end{aligned}$$

Le volume total de la structure (primaire + secondaire) vaut :

$$V_{tot} = \left(W_B(a_1, \lambda) + 0.923 \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \left(\frac{(2(1 - a_2)^{7/3} + a_1 a_2^{7/3}) \lambda^{5/3} + (1 - a_1)^{7/3} \lambda^{1/3}}{(2 - a_1)(2 - a_2)^{7/3}} \right) \right) \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

En posant $W_{B,SS}\left(a_1, \lambda, \frac{L_1}{e}\right) = W_B(a_1, \lambda) + 0.923 \left(\frac{L_1}{e}\right)^{1/3} \left(\frac{(2(1-a_2)^{7/3} + a_1 a_2^{7/3}) \lambda^{5/3} + (1-a_1)^{7/3} \lambda^{1/3}}{(2-a_1)(2-a_2)^{7/3}}\right)$ et écrit sous forme adimensionnelle à l'ELU :

$$W_{u,tot} = \frac{V_{u,tot} f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L_1^{5/3}} = W_{B,SS}\left(a_1, \lambda, \frac{L_1}{e}\right) \quad (13b.3)$$

Le volume total de matière d'un plancher composé d'un module réciproque à 4 poutres identiques 2 à 2 avec sa structure secondaire, soumis à un chargement F réparti uniformément sur tout le plancher selon 2 directions perpendiculaires et engendrant une contrainte de flexion σ dans la section la plus sollicitée, est donné par (13b.3).

6.1.3.3.3. Correction du graphique en tenant compte de l'effort tranchant

En utilisant le critère d'effort tranchant donné par l'Eurocode 5, on peut déterminer les expressions du volume :

$$\frac{4V_{Ed,i}}{3(\pi\phi_i^2/4)} \leq \tau$$

L'effort tranchant maximal dans la poutre type 1 est donné par $V_{Ed,1} = \alpha_{PT1}(a_1, \lambda)F = \max(\alpha_{1,4}; \alpha_{1,0})F$ tandis que celui dans la poutre type 2 vaut $V_{Ed,2} = \alpha_{PT2}(a_1, \lambda)F = \max(\alpha_{2,1}; \alpha_{2,0})F$. Le volume d'une poutre type i est obtenu en résolvant le système suivant :

$$\begin{cases} \tau = \frac{4\alpha_{PTi}(a_1, \lambda)F}{3(\pi\phi_i^2/4)} \\ V_i = \frac{\pi\phi_i^2}{4} \frac{L_i}{2-a_i} \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \frac{\pi\phi_i^2}{4} = \frac{4\alpha_{PTi}(a_1, \lambda)F}{3\tau} \\ \frac{\pi\phi_i^2}{4} = \frac{V_i(2-a_i)}{L_i} \end{cases}$$

Donc, on trouve pour la poutre type 1 :

$$V_1 = \frac{4}{3} \frac{\alpha_{PT1}(a_1, \lambda) F L_1}{2-a_1} \frac{1}{\tau}$$

Et pour la poutre type 2 :

$$V_2 = \frac{4}{3} \frac{\alpha_{PT2}(a_1, \lambda) F \lambda L_1}{2-a_2} \frac{1}{\tau}$$

Note : Comme pour la contrainte en flexion, le diamètre des poutres types est adapté de manière à obtenir la même contrainte de cisaillement τ partout :

$$\tau_1 = \tau_2 \rightarrow \phi_2 = \phi_1 \left(\frac{V_{Ed,2}}{V_{Ed,1}} \right)^{1/2}$$

Le volume total du module vaut alors :

$$V = 2V_1 + 2V_2 = 2 \left(\frac{4\alpha_{PT1}(a_1, \lambda)}{3(2-a_1)} + \frac{4\lambda\alpha_{PT2}(a_1, \lambda)}{3(2-a_2)} \right) \frac{F L_1}{\tau}$$

A l'ELU, l'expression devient :

$$V_u = 2 \left(\frac{4\alpha_{PT1}(a_1, \lambda)}{3(2-a_1)} + \frac{4\lambda\alpha_{PT2}(a_1, \lambda)}{3(2-a_2)} \right) \frac{F_u L_1}{k_{cr} f_{v,d}}$$

De manière à pouvoir comparer les critères de flexion et de cisaillement, il est nécessaire d'obtenir les mêmes indicateurs de volume. Pour cela, on définit $\theta = \frac{f_{m,d}}{f_{v,d}}$ et, en sachant que $F_u = q_u \lambda L_1^2$, l'indicateur sous le critère de cisaillement est :

$$W_u = \frac{V_u f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L_1^{5/3}} = Z \lambda^{1/3} \left(\frac{4\alpha_{PT1}(a_1, \lambda)}{2 - a_1} + \frac{4\lambda \alpha_{PT2}(a_1, \lambda)}{2 - a_2} \right) = Z W_S(a_1, \lambda) \quad (14.3)$$

Où on a posé $Z = \frac{2\theta^{2/3}}{3k_{cr}} \left(\frac{q_u}{f_{v,d}} \right)^{1/3}$ et $W_S(a_1, \lambda) = \lambda^{1/3} \left(\frac{4\alpha_{PT1}(a_1, \lambda)}{2 - a_1} + \frac{4\lambda \alpha_{PT2}(a_1, \lambda)}{2 - a_2} \right)$. Le volume de matière d'un plancher composé d'un module réciproque élémentaire à 4 poutres identiques 2 à 2 soumis à une charge F répartie uniformément sur tout le plancher selon 2 directions perpendiculaires et engendrant une contrainte de cisaillement $f_{v,d}$ est donné par l'expression (14.3).

Avec la structure secondaire prise en compte, on obtient finalement :

$$W_{u,tot} = \frac{V_{u,tot} f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L_1^{5/3}} = W_{S,ss} \left(a_1, \lambda, Z, \frac{L_1}{e} \right) \quad (15.3)$$

Où on pose $W_{S,ss} \left(a_1, \lambda, Z, \frac{L_1}{e} \right) = Z W_S(a_1, \lambda) + 0.923 \left(\frac{L_1}{e} \right)^{1/3} \left(\frac{(2(1-a_2)^{7/3} + a_1 a_2^{7/3}) \lambda^{5/3} + (1-a_1)^{7/3} \lambda^{1/3}}{(2-a_1)(2-a_2)^{7/3}} \right)$.

Le volume total de matière d'un plancher composé d'un module réciproque à 4 poutres identiques 2 à 2 avec sa structure secondaire, soumis à un chargement F réparti uniformément sur tout le plancher selon 2 directions perpendiculaires et engendrant une contrainte de cisaillement $f_{v,d}$ dans la section la plus sollicitée, est donné par (15.3).

6.1.3.4. CAS 4 : Zone centrale carrée et 1 sens de portée

On considère, finalement, un plancher rectangulaire avec zone centrale carrée dont le sens de portée est le même dans toutes les zones du plancher. Les conditions le définissant sont données par :

$$a_2 = \frac{2a_1}{2\lambda - \lambda a_1 + a_1} \quad \lambda \leq (1 - a_1) \left(\frac{2 - a_2}{2 - a_1} \right)$$

La 1^{ère} condition se rapportant à la proportion d'engagement de la poutre type 2 tel que la zone centrale soit carrée et la 2^{ème} condition faisant référence au sens de portée unique du plancher.

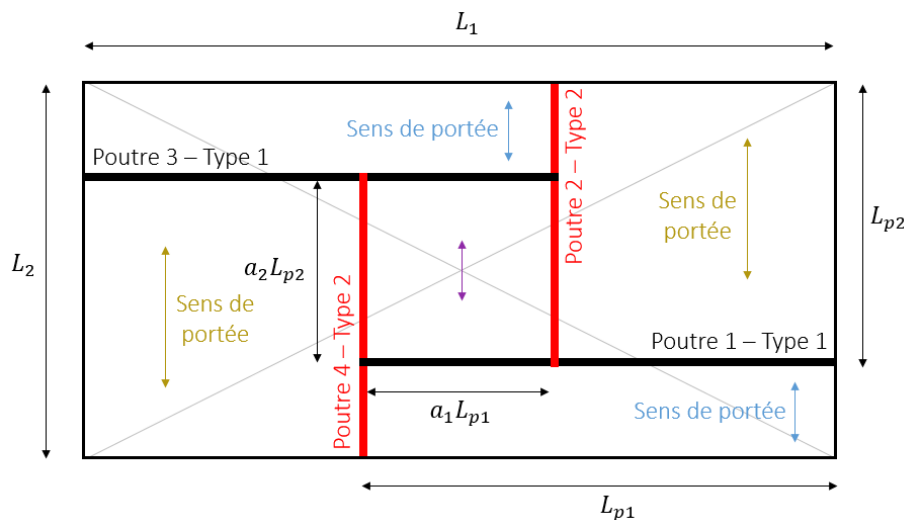


Figure 73 : Plancher rectangulaire soumis à un chargement uniformément distribué dans une seule et même direction avec zone centrale carrée

Les réactions aux appuis, calculées pour le cas général en début de section, se simplifient pour le cas d'un plancher avec zone centrale carrée tel que :

$$\begin{cases} R_{1,4} = \alpha_{1,4}F \\ R_{1,0} = \alpha_{1,0}F \\ R_{2,1} = \alpha_{2,1}F \\ R_{2,0} = \alpha_{2,0}F \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \alpha_{1,4} = \frac{a_1^3(1-\lambda^2) + 4a_1^2\lambda^2 + a_1\lambda(1-3\lambda) + 4\lambda^2}{8a_1\lambda(2-a_1)^2(\lambda+1)} \\ \alpha_{1,0} = \frac{a_1^2(\lambda+1) - 2a_1(2\lambda+1) + 2(2\lambda+1)}{4(2-a_1)^2(\lambda+1)} \\ \alpha_{2,1} = -\left(\frac{a_1^3(\lambda^2+2\lambda+1) - 4a_1^2\lambda(\lambda+1) + 2a_1\lambda(3\lambda+1) - 4\lambda^2}{8a_1\lambda(2-a_1)^2(\lambda+1)} \right) \\ \alpha_{2,0} = \frac{a_1^2(\lambda+1) - 2a_1\lambda + 2\lambda}{4\lambda(2-a_1)^2(\lambda+1)} \end{cases}$$

6.1.3.4.1. Prise en compte de la flexion dans le calcul de la contrainte

6.1.3.4.1.1. Expression du moment maximal

Les expressions des moments le long de chaque poutre se simplifient de manière à avoir pour la poutre type 1 :

$$\begin{cases} M_{g,1}(x) = -\frac{(q_1 + q_3)}{2}x^2 + R_{1,4}x & 0 \leq x \leq a_1L_{p1} \\ M_{d,1}(x) = -\frac{(q_1 + q_{2a})}{2}x^2 + (R_{1,4} - R_{2,1} + (q_{2a} - q_3)a_1L_{p1})x + \left(R_{2,1} + \frac{a_1L_{p1}}{2}(q_3 - q_{2a}) \right)a_1L_{p1} & a_1L_{p1} \leq x \leq L_{p1} \end{cases}$$

Et pour la poutre type 2, on trouve :

$$\begin{cases} M_{g,2}(x) = R_{2,1}x & 0 \leq x \leq a_2L_{p2} \\ M_{d,2}(x) = (R_{2,1} - R_{1,4})x + R_{1,4}a_2L_{p2} & a_2L_{p2} \leq x \leq L_{p2} \end{cases}$$

On évalue le moment maximal dans chaque tronçon de la poutre type 1 et de la poutre type 2.

Moment maximal dans le tronçon gauche de la poutre type 1 ($0 \leq x \leq a_1L_{p1}$)

Afin de déterminer la valeur du moment maximal, il faut d'abord en déterminer sa position :

$$V_{g,1}(x) = \frac{dM_{g,1}(x)}{dx} = 0 = R_{1,4} - (q_1 + q_3)x \quad \rightarrow \quad x_{g,1,max} = \frac{R_{1,4}}{q_1 + q_3}$$

On vérifie que cette position se trouve bien dans le tronçon gauche, c'est-à-dire, tel que $x_{g,1,max} \leq a_1L_{p1}$. Après résolution MATLAB, on trouve :

$$a_{1,2} = \frac{-\lambda \pm \sqrt{\lambda(3\lambda+2)}}{\lambda+1}$$

La solution « - » est à rejeter tandis que la solution « + » indique que le moment maximal se trouve dans le tronçon gauche pour $a \geq \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda(3\lambda+2)}}{\lambda+1}$. Dans ce cas, il vaut :

$$M_{g,1,max} = \frac{(a_1 + 2\lambda - a_1\lambda)(a_1^2(\lambda+1) - 2a_1\lambda + 2\lambda)^2}{32a_1^2\lambda(2-a_1)^3(\lambda+1)^2} FL_1 = f_{1,g,0}(a_1, \lambda) FL_1$$

Où on a posé $f_{1,g,0}(a_1, \lambda) = \frac{(a_1 + 2\lambda - a_1\lambda)(a_1^2(\lambda+1) - 2a_1\lambda + 2\lambda)^2}{32a_1^2\lambda(2-a_1)^3(\lambda+1)^2}$.

Moment maximal dans le tronçon droit de la poutre type 1 ($a_1 L_{p1} \leq x \leq L_{p1}$)

Par un raisonnement similaire, on commence par déterminer la position du moment maximal :

$$x_{d,1,max} = \frac{R_{1,4} - R_{2,1} + (q_{2a} - q_3)a_1 L_{p1}}{q_1 + q_{2a}} = \left(\frac{-a_1^2(\lambda + 1) + 2a_1\lambda + 2}{2(2 - a_1)^2(\lambda + 1)} \right)$$

On vérifie que cette solution se trouve dans les bornes du domaine $aL_{p1} \leq x_{d,1,max} \leq L_{p1}$. L'inéquation sur la borne inférieure devient :

$$aL_{p1} \leq \left(\frac{-a_1^2(\lambda + 1) + 2a_1\lambda + 2}{2(2 - a_1)^2(\lambda + 1)} \right) L_1 \quad \rightarrow \quad a_{1,2} = \frac{(\lambda + 2) \pm \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda + 2}}{\lambda + 1}$$

La solution « + » est à rejeter car elle sort du domaine de a tandis que la solution « - » indique que le moment maximal se trouve dans le tronçon droit pour $a \leq \frac{(\lambda+2)-\sqrt{\lambda^2+2\lambda+2}}{\lambda+1}$. On s'intéresse ensuite à l'inéquation en borne supérieure :

$$\left(\frac{-a_1^2(\lambda + 1) + 2a_1\lambda + 2}{2(2 - a_1)^2(\lambda + 1)} \right) L_1 \leq \frac{L_1}{2 - a} \quad \rightarrow \quad a_1^2(\lambda + 1) + 2(2\lambda + 1)a_1 + 2(2\lambda + 1) \geq 0$$

Cette inéquation est vérifiée pour toute valeur de a_1 et λ . Finalement, le moment maximal dans le tronçon droit vaut alors :

$$M_{d,1,max} = \frac{(a_1^2(\lambda + 1) - 2a_1(1 + 2\lambda) + 2(2\lambda + 1))^2}{16(2 - a_1)^4(\lambda + 1)^2} FL_1 = f_{1,d,0}(a_1, \lambda) FL_1$$

Où on a posé $f_{1,d,0}(a_1, \lambda) = \frac{(a_1^2(\lambda+1)-2a_1(1+2\lambda)+2(2\lambda+1))^2}{16(2-a_1)^4(\lambda+1)^2}$.

Moment maximal au niveau de la charge ponctuelle de la poutre type 1

Le moment maximal à la charge ponctuelle est évalué en $x = a_1 L_{p1}$ et vaut :

$$M_{p,1,max} = \frac{(1 - a_1)(a_1 + 2\lambda - a_1\lambda)}{4(2 - a_1)^3(\lambda + 1)} FL_1 = f_{1,p,0}(a_1, \lambda) FL_1$$

Où on a posé $f_{1,p,0}(a_1, \lambda) = \frac{(1-a_1)(a_1+2\lambda-a_1\lambda)}{4(2-a_1)^3(\lambda+1)}$.

En résumé, le moment maximal dans la poutre type 1 est donné par :

$$M_{1,max} = f_{1,0}(a_1, \lambda) FL_1 \quad \rightarrow \quad f_{1,0}(a_1, \lambda) = \begin{cases} f_{1,d,0}(a_1, \lambda) & a_1 \leq \frac{(\lambda + 2) - \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda + 2}}{\lambda + 1} \\ f_{1,g,0}(a_1, \lambda) & a_1 \geq \frac{-\lambda + \sqrt{\lambda(3\lambda + 2)}}{\lambda + 1} \\ f_{1,p,0}(a_1, \lambda) & \text{sinon} \end{cases}$$

Moment maximal au niveau de la charge ponctuelle de la poutre type 2

La poutre type 2 étant soumise uniquement à la charge ponctuelle de la poutre type 1 venant se reposer dessus, son moment maximal est situé au niveau de cette charge ponctuelle. Dans ce cas, il vaut :

$$M_{2,max} = - \left(\frac{a_1^3(\lambda^2 + 2\lambda + 1) - 4a_1^2\lambda(\lambda + 1) + 2a_1\lambda(3\lambda + 1) - 4\lambda^2}{8\lambda(2 - a_1)^3(\lambda + 1)} \right) FL_1 = f_{2,0}(a_1, \lambda) FL_1$$

Où on a posé $f_{2,0}(a_1, \lambda) = -\left(\frac{a_1^3(\lambda^2+2\lambda+1)-4a_1^2\lambda(\lambda+1)+2a_1\lambda(3\lambda+1)-4\lambda^2}{8\lambda(2-a_1)^3(\lambda+1)}\right)$.

6.1.3.4.1.2. Expression du volume du module réciproque

Les expressions des moments ayant la même allure que dans le CAS 3, le volume total s'écrit sous la forme :

$$V = 7.382 \left(\frac{f_{1,0}^{2/3}(a_1, \lambda)}{2-a_1} + \frac{\lambda f_{2,0}^{2/3}(a_1, \lambda)}{2-a_2} \right) \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = W_B(a_1, \lambda) \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Où on pose $W_B(a_1, \lambda) = 7.382 \left(\frac{f_{1,0}^{2/3}(a_1, \lambda)}{2-a_1} + \frac{\lambda f_{2,0}^{2/3}(a_1, \lambda)}{2-a_2} \right)$. Ecrit de manière adimensionnelle, on a donc :

$$W = \frac{V \sigma^{2/3}}{F^{2/3} L_1^{5/3}} = W_B(a_1, \lambda) \quad (12a.4)$$

Le volume de matière d'un plancher rectangulaire avec zone centrale carrée composé d'un module réciproque élémentaire à 4 poutres identiques 2 à 2 et soumis à une charge F répartie uniformément dans la direction verticale sur tout le plancher, engendrant une contrainte σ dans la section la plus sollicitée, est donné par l'expression (12a.4).

En évaluant cette expression (12a.4) à l'état limite ultime, on trouve :

$$V_u = W_B(a_1, \lambda) \frac{F_u^{2/3} L_1^{5/3}}{f_{m,d}^{2/3}} \rightarrow W_u = \frac{V_u f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L_1^{5/3}} = W_B(a_1, \lambda) \quad (12b.4)$$

6.1.3.4.2. Correction du graphique en tenant compte de la structure secondaire

Pour ce dernier cas rectangulaire, nous considérons encore un entraxe constant entre les poutres du plancher secondaire. Seule une des 3 zones voit son volume changer par rapport au CAS 3 :

- 2 zones rectangulaires de dimensions $L_{p1} \times (1-a_2)L_{p2} = \frac{L_1}{2-a_1} \times (1-a_2) \frac{\lambda L_1}{2-a_2}$:

Le volume reste identique au CAS 3 :

$$V_1 = 0.923 \left(\frac{L_1}{e} \right)^{1/3} \frac{(1-a_2)^{7/3}}{(2-a_1)(2-a_2)^{7/3}} \lambda^{5/3} \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

- 2 zones rectangulaires de dimensions $L_{p2} \times (1-a_1)L_{p1} = \frac{\lambda L_1}{2-a_2} \times (1-a_1) \frac{L_1}{2-a_1}$:

Le nombre de poutres dans la zone est donné par $n_{R2} = \frac{(1-a_1)L_{p1}}{e} = \frac{(1-a_1)L_1/(2-a_1)}{e}$ et leur longueur est L_{p2} . Le volume d'une de ces zones est donc donné par :

$$V_2 = 0.923 n_{R2}^{1/3} \frac{\left(\frac{A_{R2}}{A_{tot}} F \right)^{2/3} (L_{p2})^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = 0.923 \left(\frac{L_1}{e} \right)^{1/3} \frac{(1-a_1)}{(2-a_1)(2-a_2)^{7/3}} \lambda^{5/3} \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

- 1 zone carrée centrale de dimensions $a_1 L_{p1} \times a_2 L_{p2} = a_1 \frac{L_1}{2-a_1} \times a_2 \frac{\lambda L_1}{2-a_2}$:

La zone est composée de $n_{RC} = \frac{a_1 L_{p1}}{e} = \frac{a_1 L_1/(2-a_1)}{e}$ poutres de longueur $a_2 L_{p2}$. Le volume de cette zone est également le même que dans le CAS 3 :

$$V_3 = 0.923 \left(\frac{L_1}{e} \right)^{1/3} \frac{a_1 a_2^{7/3}}{(2-a_1)(2-a_2)^{7/3}} \lambda^{5/3} \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Le volume de la structure secondaire est donc donné par :

$$V_{sec} = 2V_1 + 2V_2 + V_3 = 0.923 \left(\frac{L_1}{e} \right)^{1/3} \left(\frac{2(1-a_2)^{7/3} + 2(1-a_1) + a_1 a_2^{7/3}}{(2-a_1)(2-a_2)^{7/3}} \lambda^{5/3} \right) \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Le volume total est la somme du volume de la structure primaire + secondaire :

$$V_{tot} = \left(W_B(a_1, \lambda) + 0.923 \left(\frac{L_1}{e} \right)^{1/3} \left(\frac{2(1-a_2)^{7/3} + 2(1-a_1) + a_1 a_2^{7/3}}{(2-a_1)(2-a_2)^{7/3}} \lambda^{5/3} \right) \right) \frac{F^{2/3} L_1^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

En posant $W_{B,SS} \left(a_1, \lambda, \frac{L_1}{e} \right) = W_B(a_1, \lambda) + 0.923 \left(\frac{L_1}{e} \right)^{1/3} \left(\frac{2(1-a_2)^{7/3} + 2(1-a_1) + a_1 a_2^{7/3}}{(2-a_1)(2-a_2)^{7/3}} \lambda^{5/3} \right)$ et écrit de manière adimensionnelle à l'ELU :

$$W_{u,tot} = \frac{V_{u,tot} f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L_1^{5/3}} = W_{B,SS} \left(a_1, \lambda, \frac{L_1}{e} \right) \quad (13b.4)$$

Le volume total de matière d'un plancher rectangulaire avec zone centrale carrée, composé d'un module réciproque à 4 poutres identiques 2 à 2 avec sa structure secondaire, soumis à un chargement F réparti uniformément sur tout le plancher selon une seule et même direction et engendrant une contrainte de flexion σ dans la section la plus sollicitée, est donné par (13b.4).

6.1.3.4.3. Correction du graphique en tenant compte de l'effort tranchant

En utilisant le critère d'effort tranchant donné par l'Eurocode 5, on peut déterminer les expressions du volume :

$$\frac{4V_{Ed,i}}{3(\pi\phi_i^2/4)} \leq \tau$$

L'effort tranchant maximal dans la poutre type 1 est donné par $V_{Ed,1} = \alpha_{PT1}(a_1, \lambda)F = \max(\alpha_{1,4}; \alpha_{1,0})F$ tandis que celui dans la poutre type 2 vaut $V_{Ed,2} = \alpha_{PT2}(a_1, \lambda)F = \max(\alpha_{2,1}; \alpha_{2,0})F$. Les expressions s'écrivant sous la même forme que dans le CAS 3, le volume de la structure primaire évalué à l'ELU est donné par :

$$V_u = 2 \left(\frac{4\alpha_{PT1}(a_1, \lambda)}{3(2-a_1)} + \frac{4\lambda\alpha_{PT2}(a_1, \lambda)}{3(2-a_2)} \right) \frac{F_u L_1}{k_{cr} f_{v,d}}$$

De manière à pouvoir comparer les critères de flexion et de cisaillement, il est nécessaire d'obtenir les mêmes indicateurs de volume. Pour cela, on définit $\theta = \frac{f_{m,d}}{f_{v,d}}$ et, en sachant que $F_u = q_u \lambda L_1^2$, l'indicateur sous le critère de cisaillement est :

$$W_u = \frac{V_u f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L_1^{5/3}} = Z \lambda^{1/3} \left(\frac{4\alpha_{PT1}(a_1, \lambda)}{(2-a_1)} + \frac{4\lambda\alpha_{PT2}(a_1, \lambda)}{(2-a_2)} \right) = Z W_S(a_1, \lambda) \quad (14.4)$$

Où on a posé $Z = \frac{2\theta^{2/3}}{3k_{cr}} \left(\frac{q_u}{f_{v,d}} \right)^{1/3}$ et $W_S(a_1, \lambda) = \lambda^{1/3} \left(\frac{4\alpha_{PT1}(a_1, \lambda)}{(2-a_1)} + \frac{4\lambda\alpha_{PT2}(a_1, \lambda)}{(2-a_2)} \right)$. Le volume de matière d'un plancher composé d'un module réciproque élémentaire à 4 poutres identiques 2 à 2

soumis à une charge F répartie uniformément sur tout le plancher selon une seule et même direction verticale et engendrant une contrainte de cisaillement $f_{v,d}$ est donné par l'expression (14.4).

Avec la structure secondaire prise en compte, on obtient finalement :

$$W_{u,tot} = \frac{V_{u,tot} f_{m,d}^{2/3}}{F_u^{2/3} L_1^{5/3}} = W_{s,ss} \left(a_1, \lambda, Z, \frac{L_1}{e} \right) \quad (15.4)$$

Où on pose $W_{s,ss} \left(a_1, \lambda, Z, \frac{L_1}{e} \right) = ZW_s(a_1, \lambda) + 0.923 \left(\frac{L_1}{e} \right)^{1/3} \left(\frac{2(1-a_2)^{7/3} + 2(1-a_1) + a_1 a_2^{7/3}}{(2-a_1)(2-a_2)^{7/3}} \lambda^{5/3} \right)$. Le volume total de matière d'un plancher composé d'un module réciproque à 4 poutres identiques 2 à 2 avec sa structure secondaire, soumis à un chargement F réparti uniformément sur tout le plancher selon une seule et même direction verticale et engendrant une contrainte de cisaillement $f_{v,d}$ dans la section la plus sollicitée, est donné par (15.4).

7. ANNEXE B

7.1. Expression du volume d'un plancher carré composé de 4 modules réciproques

L'annexe B a pour but de détailler le calcul des charges réparties dans la configuration dite « naturelle » d'un plancher réciproque à 4 modules ainsi que le calcul de la structure secondaire des 2 autres configurations à 4 modules abordées en section 3.6.

7.1.1. Charges réparties dans la configuration dite « naturelle » à 4 modules

Il est possible d'exprimer les charges réparties linéaires sur chaque poutre en fonction de la proportion d'engagement a , de la longueur des poutres L_p ainsi que de la charge surfacique q , donnée dans le problème. Pour rappel, le plancher est illustré en Figure 74.

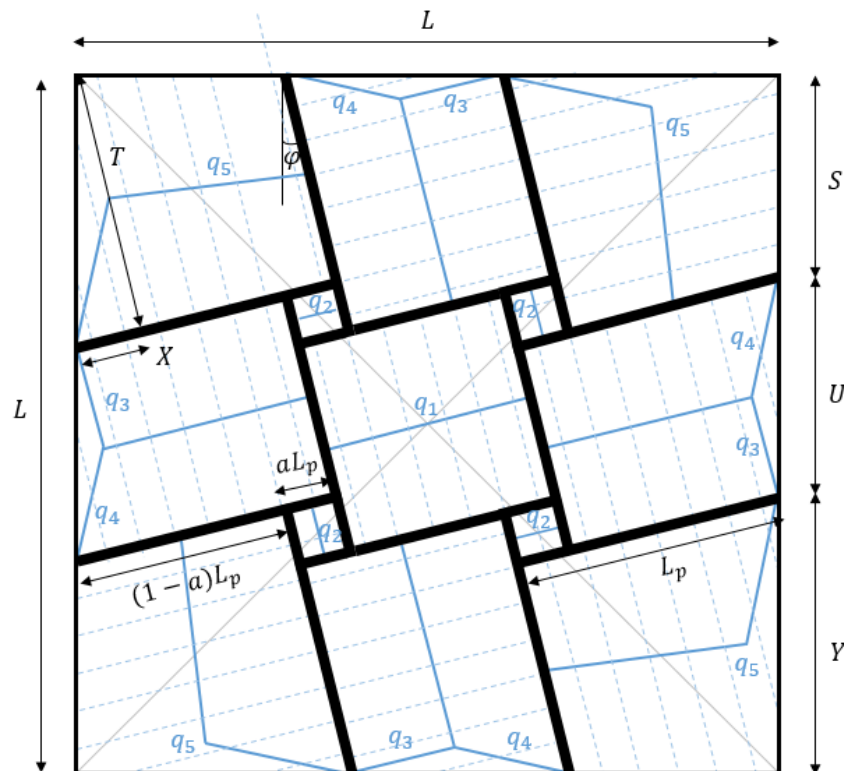


Figure 74 : Plancher carré avec 4 modules réciproques – Sens de portée (lignes bleues pointillées) et allure des charges réparties le long de chaque poutre (lignes bleues continues)

On peut montrer que L_p est fonction de la proportion d'engagement a et de la longueur du plancher L uniquement :

$$L = 2 \left(\frac{(1-a)L_p}{\cos(\varphi)} \right) + L_p \cos(\varphi) \quad \rightarrow \quad L_p = \frac{L}{\cos(\varphi) + \frac{2(1-a)}{\cos(\varphi)}}$$

Où φ est l'angle formé par la verticale et un des modules du plancher :

$$\varphi = \text{atan} \left(\frac{a}{1-a} \right)$$

Comme on peut le voir sur le dessin ci-dessus, on distingue 5 charges réparties différentes en fonction du sens de portée et des dimensions de chaque zone.

La charge répartie sur le grand carré central est nommée q_1 et correspond à une charge répartie rectangulaire sur toute la longueur $(1 - a)L_p$. Elle vaut :

$$q_1 = q(1 - a) \frac{L_p}{2}$$

La charge répartie sur les petits carrés centraux est uniforme aussi et s'applique sur une longueur aL_p :

$$q_2 = q \frac{aL_p}{2}$$

La charge répartie q_3 correspond toujours à une charge répartie uniformément et s'applique sur une longueur $(1 - a) \frac{L_p}{2}$. Elle vaut :

$$q_3 = q(1 - a) \frac{L_p}{2} = q_1$$

On remarque que cette charge est exactement égale à la charge q_1 .

La charge répartie q_4 correspond à une charge trapézoïdale. On peut la décomposer en un rectangle ($0 \leq x \leq (1 - a)L_p$) et un triangle ($(1 - a)L_p \leq x \leq L_p$) dont la limite entre les 2 zones se trouve en $(1 - a)L_p$. Elle vaut :

$$q_4 = \begin{cases} q(1 - a) \frac{L_p}{2} & \text{si } 0 \leq x \leq (1 - a)L_p \\ q \left(\frac{1 - a}{2a} \right) (L_p - x) & \text{si } (1 - a)L_p \leq x \leq L_p \end{cases}$$

L'équation de la droite du triangle se trouve en connaissant les valeurs extrêmes :

$$y = Ax + B$$

En sachant que la charge est nulle en fin de poutre et vaut $q(1 - a) \frac{L_p}{2}$ à la limite entre les 2 zones, il suffit de résoudre le système suivant :

$$\begin{cases} 0 = AL_p + B \\ (1 - a) \frac{L_p}{2} = A(1 - a)L_p + B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = -\frac{1 - a}{2a} \\ B = \frac{1 - a}{2a} L_p \end{cases}$$

La charge répartie q_5 correspond à une charge de forme quelconque. On peut la décomposer en un trapèze et un triangle dont la limite entre les 2 zones est à déterminer par construction géométrique.

On commence par déterminer la longueur Y du côté de la zone en coin inférieur droit, parallèle aux bords du plancher :

$$Y = L - U - S$$

Où U et S sont, respectivement, les longueurs de la zone latérale centrale et de la zone en coin supérieur droit, parallèles aux bords du plancher :

$$U = \frac{(1 - a)L_p}{\cos(\varphi)} \quad S = (1 - a)L_p \cos(\varphi)$$

La longueur Y est alors donnée par :

$$Y = \left(\frac{1-a}{\cos(\varphi)} + a \cos(\varphi) \right) L_p$$

On peut alors déterminer la longueur X représentant la distance entre le bord extérieur (fin de la poutre) et la limite triangle-trapèze :

$$X = Y \sin(\varphi) = \left(\frac{1-a}{\cos(\varphi)} + a \cos(\varphi) \right) L_p \sin(\varphi)$$

Il est également nécessaire de connaître la valeur de la charge en cette position. Celle-ci est donnée par la charge q multipliée par la moitié de la longueur T :

$$T = Y \cos(\varphi) = ((1-a) + a \cos^2(\varphi)) L_p$$

L'équation de la droite du trapèze comprise entre 0 et $L_p - X$ de la poutre est donnée par :

$$y = Ax + B$$

En connaissant les valeurs extrêmes de la droite, on peut déterminer les constantes A et B :

$$\begin{cases} (1-a) \frac{L_p}{2} = A * 0 + B \\ \frac{T}{2} = A(L_p - X) + B \end{cases} \rightarrow \begin{cases} A = \frac{\frac{T}{2} - B}{L_p - X} = \frac{a \cos^2(\varphi)}{2 \left(1 - \left(\frac{1-a}{\cos(\varphi)} + a \cos(\varphi) \right) \sin(\varphi) \right)} \\ B = (1-a) \frac{L_p}{2} \end{cases}$$

L'équation de la droite du triangle comprise entre $L_p - X$ et L_p sur la poutre est donnée par :

$$y = Cx + D$$

De nouveau, connaissant les valeurs extrêmes, on peut déterminer les constantes C et D :

$$\begin{cases} 0 = CL_p + D \\ \frac{T}{2} = C(L_p - X) + D \end{cases} \rightarrow \begin{cases} C = -\frac{T}{2X} = -\left(\frac{1-a + a \cos^2(\varphi)}{2 \left(\frac{1-a}{\cos(\varphi)} + a \cos(\varphi) \right) \sin(\varphi)} \right) \\ D = \frac{T}{2X} L_p = \left(\frac{1-a + a \cos^2(\varphi)}{2 \left(\frac{1-a}{\cos(\varphi)} + a \cos(\varphi) \right) \sin(\varphi)} \right) L_p \end{cases}$$

On connaît donc maintenant la charge répartie q_5 :

$$q_5 = \begin{cases} q \left(\frac{a \cos^2(\varphi)}{2 \left(1 - \left(\frac{1-a}{\cos(\varphi)} + a \cos(\varphi) \right) \sin(\varphi) \right)} x + (1-a) \frac{L_p}{2} \right) & \text{si } 0 \leq x \leq L_p - X \\ q \left(\frac{1-a + a \cos^2(\varphi)}{2 \left(\frac{1-a}{\cos(\varphi)} + a \cos(\varphi) \right) \sin(\varphi)} \right) (L_p - x) & \text{si } L_p - X \leq x \leq L_p \end{cases}$$

Comme on peut le remarquer, toutes les charges réparties sont fonction uniquement de a et des données de départ q (ou F) et L .

7.1.2. Calcul de la structure secondaire

7.1.2.1. Configuration 2 : modules parallèles aux bords du plancher avec longueur de poutres latérales variable

Pour tenir compte de la structure secondaire du plancher, nous considérons un entraxe entre les poutres intermédiaires constant pour toutes les zones. En imposant ce choix et en souhaitant avoir la même contrainte dans chacune des poutres, il est nécessaire d'adapter les diamètres de ces poutres du fait que leur longueur dépend de la zone dans laquelle elles se trouvent.

Comme vu précédemment dans le calcul des longueurs de chaque poutre du plancher, il est possible de les exprimer en fonction de $a = a_6$ et L uniquement. Pour la suite, on notera :

$$\begin{cases} L_{p1} = Lf_{1,p}(a_6) \\ L_{p2} = Lf_{2,p}(a_6) \\ L_{p6} = Lf_{6,p}(a_6) = L_{p4} \end{cases}$$

Pour calculer le volume de la structure intermédiaire, on distingue 4 zones différentes :

- 4 coins de dimensions $(1 - a_1)L_{p1} \times L_{p2}$:

Le nombre de poutres dans la zone est donné par $n_{CN} = \frac{L_{p2}}{e}$ et leur longueur est $(1 - a_1)L_{p1}$. En reprenant l'expression (3a) du volume d'un plancher simple avec sens de portée, le volume d'une de ces zones en coin vaut :

$$V_1 = 0.923n_{CN}^{1/3} \frac{\left(\frac{A_{CN}}{A_{tot}} F\right)^{2/3} \left((1 - a_1)L_{p1}\right)^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Ce qui donne :

$$V_1 = 0.923 \left(\frac{L}{e}\right)^{1/3} f_{2,p}(a_6)(1 - a_1)^{7/3} f_{1,p}^{7/3}(a_6) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

- 4 zones rectangulaires latérales de dimensions $L_{p1} \times (1 - a_6)L_{p6}$:

Le nombre de poutres dans la zone est donné par $n_R = \frac{L_{p1}}{e}$ et leur longueur est $(1 - a_6)L_{p6}$. Le volume d'une de ces zones est obtenu par la même équation que celle-ci-dessus :

$$V_2 = 0.923n_R^{1/3} \frac{\left(\frac{A_R}{A_{tot}} F\right)^{2/3} \left((1 - a_6)L_{p6}\right)^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Ce qui donne :

$$V_2 = 0.923 \left(\frac{L}{e}\right)^{1/3} f_{1,p}(a_6)(1 - a_6)^{7/3} f_{6,p}^{7/3}(a_6) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

- 4 petites zones carrées de dimensions $a_6L_{p6} \times a_6L_{p6}$:

Cette zone est composée de $n_{PC} = \frac{a_6L_{p6}}{e}$ poutres de longueur a_6L_{p6} . Son volume est donné par :

$$V_3 = 0.923n_{PC}^{1/3} \frac{\left(\frac{A_{PC}}{A_{tot}} F\right)^{2/3} (a_6L_{p6})^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = 0.923 \left(\frac{L}{e}\right)^{1/3} a_6^{10/3} f_{6,p}^{10/3}(a_6) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

- 1 grande zone carrée de dimensions $(1 - a_6)L_{p6} \times (1 - a_6)L_{p6}$:

Cette zone est composée de $n_{GC} = \frac{(1-a_6)L_{p6}}{e}$ poutres de longueur $(1 - a_6)L_{p6}$. Son volume est donné par :

$$V_4 = 0.923 n_{GC}^{1/3} \frac{\left(\frac{A_{GC}}{A_{tot}} F\right)^{2/3} ((1 - a_6)L_{p6})^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = 0.923 \left(\frac{L}{e}\right)^{1/3} (1 - a_6)^{10/3} f_{6,p}^{10/3} (a_6) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Le volume de la structure secondaire est donc donné par :

$$V_{sec} = 4V_1 + 4V_2 + 4V_3 + V_4 = W_{SS} \left(a_6, \frac{L}{e}\right) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Où $W_{SS}(a_6)$ représente la somme des différentes fonctions de a_6 provenant de chaque zone.

7.1.2.2. Configuration 3 : modules parallèles aux bords du plancher avec longueur de poutres centrales variable

Une fois de plus, l'entraxe constant entre les poutres du plancher secondaire est imposé. Il est possible d'exprimer toutes les longueurs de poutres en fonction de $a = a_1$ et L uniquement. Pour la suite, on notera :

$$\begin{cases} L_{p1} = L f_{1,p}(a_1) = L_{p2} \\ L_{p6} = L f_{6,p}(a_1) = L_{p4} \\ a_6 = a_1 \frac{L_{p1}}{L_{p6}} \end{cases}$$

Pour calculer le volume de la structure intermédiaire, on distingue 5 zones différentes :

- 4 coins de dimensions $(1 - a_1)L_{p1} \times L_{p2}$:

Le nombre de poutres dans la zone est donné par $n_{CN} = \frac{L_{p2}}{e}$ et leur longueur est $(1 - a_1)L_{p1}$. En reprenant l'expression (3a) du volume d'un plancher simple avec sens de portée, le volume d'une de ces zones en coin vaut :

$$V_1 = 0.923 n_{CN}^{1/3} \frac{\left(\frac{A_{CN}}{A_{tot}} F\right)^{2/3} ((1 - a_1)L_{p1})^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Ce qui donne :

$$V_1 = 0.923 \left(\frac{L}{e}\right)^{1/3} f_{2,p}(a_1) (1 - a_1)^{7/3} f_{1,p}^{7/3}(a_1) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

- 2 zones rectangulaires latérales de dimensions $L_{p1} \times (1 - 2a_6)L_{p6}$:

Le nombre de poutres dans la zone est donné par $n_{R1} = \frac{L_{p1}}{e}$ et leur longueur est $(1 - 2a_6)L_{p6}$. Le volume d'une de ces zones est obtenu par la même équation que celle ci-dessus :

$$V_2 = 0.923 n_{R1}^{1/3} \frac{\left(\frac{A_{R1}}{A_{tot}} F\right)^{2/3} ((1 - 2a_6)L_{p6})^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Ce qui donne :

$$V_2 = 0.923 \left(\frac{L}{e}\right)^{1/3} f_{1,p}(a_1)(1 - 2a_6)^{7/3} f_{6,p}^{7/3}(a_1) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

- 2 zones rectangulaires latérales de dimensions $(1 - a_1)L_{p1} \times L_{p6}$:

Le nombre de poutres dans la zone est donné par $n_{R2} = \frac{L_{p6}}{e}$ et leur longueur est $(1 - a_1)L_{p1}$.

Le volume d'une de ces zones est obtenu par :

$$V_3 = 0.923 n_{R2}^{1/3} \frac{\left(\frac{A_{R2}}{A_{tot}} F\right)^{2/3} \left((1 - a_1)L_{p1}\right)^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Ce qui donne :

$$V_3 = 0.923 \left(\frac{L}{e}\right)^{1/3} f_{6,p}(a_1)(1 - a_1)^{7/3} f_{1,p}^{7/3}(a_1) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

- 4 petites zones carrées de dimensions $a_1 L_{p1} \times a_1 L_{p1}$:

Cette zone est composée de $n_{PC} = \frac{a_1 L_{p1}}{e}$ poutres de longueur $a_1 L_{p1}$. Son volume est donné par :

$$V_4 = 0.923 n_{PC}^{1/3} \frac{\left(\frac{A_{PC}}{A_{tot}} F\right)^{2/3} (a_1 L_{p1})^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = 0.923 \left(\frac{L}{e}\right)^{1/3} a_1^{10/3} f_{1,p}^{10/3}(a_1) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

- 1 grande zone rectangulaire de dimensions $(1 - 2a_6)L_{p6} \times L_{p6}$:

Cette zone est composée de $n_{GC} = \frac{L_{p6}}{e}$ poutres de longueur $(1 - 2a_6)L_{p6}$. Son volume est donné par :

$$V_5 = 0.923 n_{GC}^{1/3} \frac{\left(\frac{A_{GC}}{A_{tot}} F\right)^{2/3} ((1 - 2a_6)L_{p6})^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = 0.923 \left(\frac{L}{e}\right)^{1/3} (1 - 2a_6)^{7/3} f_{6,p}^{10/3}(a_1) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Le volume de la structure secondaire est donc donné par :

$$V_{sec} = 4V_1 + 2V_2 + 2V_3 + 4V_4 + V_5 = W_{SS} \left(a_1, \frac{L}{e}\right) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Où $W_{SS}(a_1)$ représente la somme des différentes fonctions de a_1 provenant de chaque zone.

8. ANNEXE C

8.1. Analyse d'un plancher à 9 modules sous la configuration 2 : modules parallèles aux bords du plancher avec longueur de poutres latérales variable

Cette annexe a pour but d'introduire le plancher réciproque carré à 9 modules. On y définit les différentes longueurs de poutres, les charges réparties s'appliquant sur chaque zone ainsi que le volume de la structure secondaire du plancher.

8.1.1. Définition des familles

Le plancher à 9 modules sous la configuration 2 est illustré en Figure 75. En se basant sur le sens de portée de chaque zone et sur la longueur des éléments, on distingue 7 familles différentes :

- Les poutres 1, 7, 18 et 24 sont identiques et de type 1
- Les poutres 2, 11, 14 et 23 sont identiques et de type 2
- Les poutres 3, 4, 21 et 22 sont identiques et de type 3
- Les poutres 5, 10, 15 et 20 sont identiques et de type 4
- Les poutres 6, 8, 17 et 19 sont identiques et de type 5
- Les poutres 9 et 16 sont identiques et de type 6
- Les poutres 12 et 13 sont identiques et de type 7

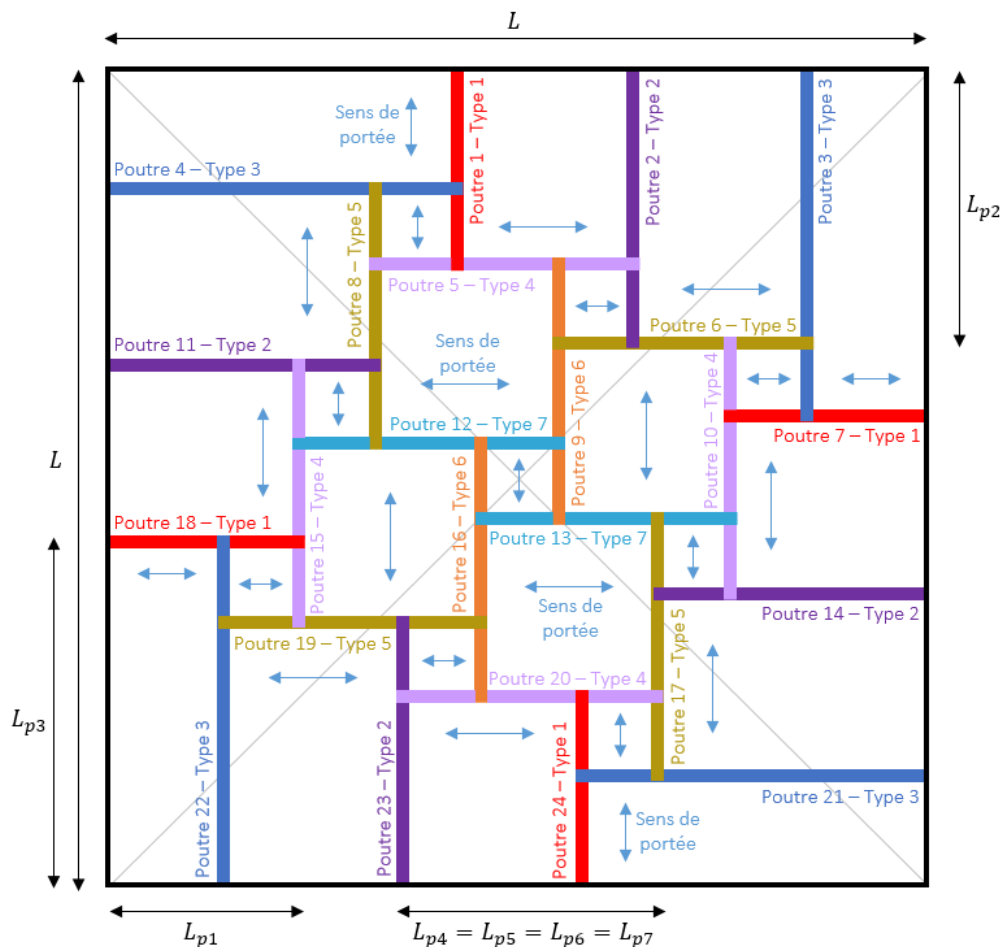


Figure 75 : Plancher carré avec 9 modules réciproques soumis à une charge uniformément répartie et où seules les poutres extérieures ont une longueur variable

Chaque famille se compose de poutres de même longueur et de même diamètre soumises au même chargement. Il est à noter que les poutres types 4, 5, 6 et 7 sont de même longueur mais soumises à des chargements différents donc elles sont classées en 4 familles différentes. Le système de 24 poutres peut alors se définir avec 7 poutres uniquement.

8.1.2. Géométrie du plancher

Etant donné qu'il y a 7 familles différentes, il faut définir la longueur des 7 poutres de référence que l'on choisit comme étant les poutres 1, 2, 3, 5, 6, 9 et 12. Egalement, étant donné que les poutres ont des longueurs différentes et que l'on souhaite garder une zone centrale carrée dans chaque module, il est nécessaire de considérer des proportions d'engagement différentes. On est donc face à un système de 14 équations à 14 inconnues : $a_1, a_2, a_3, a_5, a_6, a_9, a_{12}, L_{p1}, L_{p2}, L_{p3}, L_{p5}, L_{p6}, L_{p9}, L_{p12}$. Pour résoudre ce système, on utilise comme données de départ la longueur du plancher L et une des proportions d'engagement. Etant sous la configuration 2, toutes les poutres centrales sont de même longueur et égales à celle de la configuration dite « naturelle », illustrée en Figure 76. Sur base de ce dessin et en prenant la proportion d'engagement $a_5 = a_6 = a_9 = a_{12}$ comme donnée de départ, la longueur des poutres centrales est égale à :

$$L_{p5} = L_{p6} = L_{p9} = L_{p12} = \frac{L}{\cos(\varphi) + \frac{3(1-a_5)}{\cos(\varphi)}}$$

Avec $\varphi = \text{atan}\left(\frac{a_5}{1-a_5}\right)$.

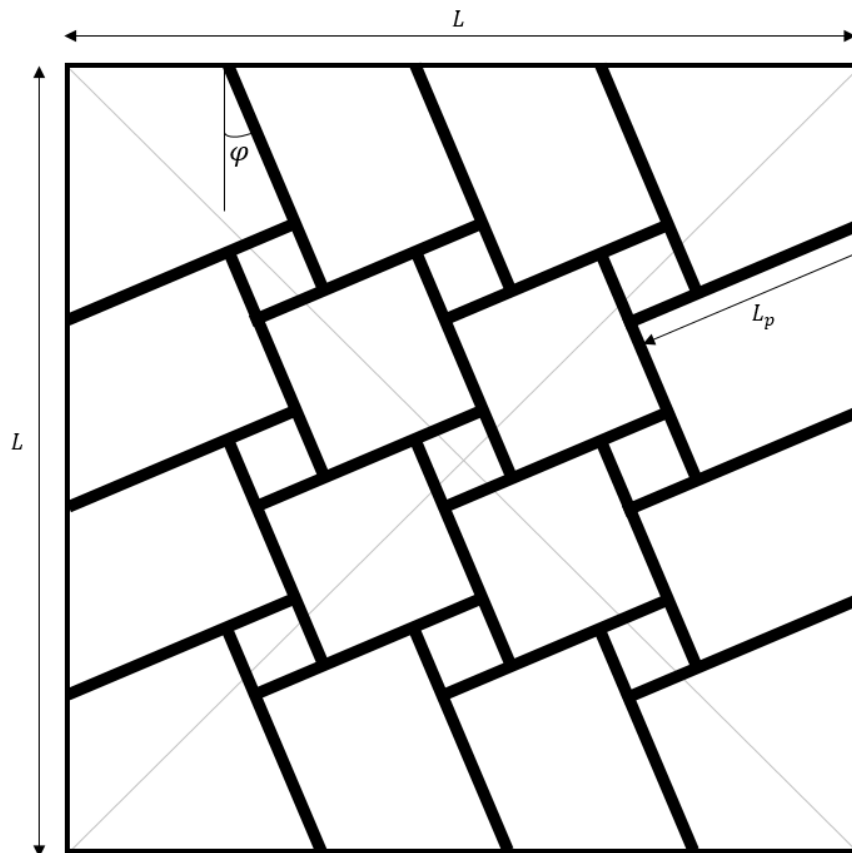


Figure 76 : Plancher carré avec 9 modules réciproques sous la configuration dite "naturelle"

En sachant cela, il reste plus que 6 équations à 6 inconnues à déterminer, reprises dans le système suivant :

$$\begin{cases} L_{p1} = (1 - a_2)L_{p2} \\ L_{p2} = (1 - a_3)L_{p3} \\ L = L_{p1} + 2(1 - a_5)L_{p5} + (1 - a_3)L_{p3} \\ a_1 = a_5 \frac{L_{p5}}{L_{p1}} \\ a_2 = a_5 \frac{L_{p5}}{L_{p2}} \\ a_3 = a_5 \frac{L_{p5}}{L_{p3}} \end{cases}$$

En résolvant la 3^{ème} équation, on trouve $L_{p3} = \frac{L+(5a_5-2)L_{p5}}{2}$. Connaissant cette longueur, il est possible de déterminer les 5 autres inconnues. Toutes les longueurs et proportions d'engagement peuvent donc s'exprimer uniquement en fonction de a_5 , L_{p5} et L .

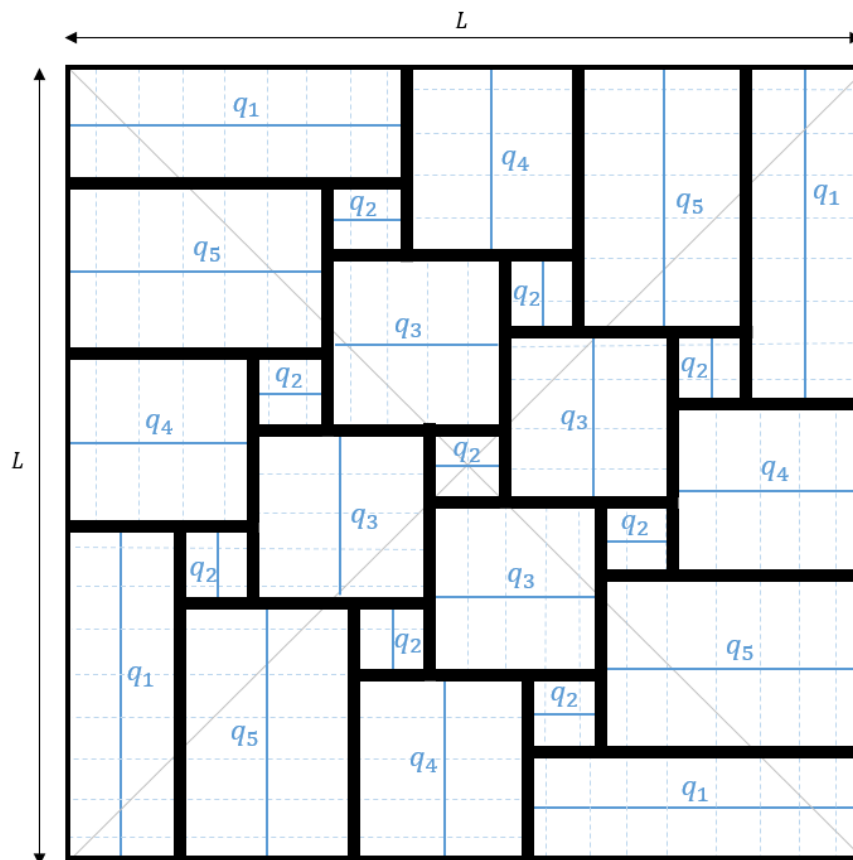


Figure 77 : Plancher avec 9 modules réciproques dont les longueurs de poutres extérieures sont variables – Sens de portée (lignes bleues pointillées) et allure des charges réparties le long de chacune des poutres (lignes bleues continues)

Les charges réparties, représentées en Figure 77, sont alors données par :

$$\begin{cases} q_1 = q(1 - a_1) \frac{L_{p1}}{2} \\ q_2 = qa_6 \frac{L_{p6}}{2} \\ q_3 = q(1 - a_6) \frac{L_{p6}}{2} \\ q_4 = q_3 \\ q_5 = q_3 \end{cases}$$

8.1.3. Calcul de la structure secondaire

Pour tenir compte de la structure secondaire du plancher, nous considérons un entraxe entre les poutres intermédiaires constant pour toutes les zones. En imposant ce choix et en souhaitant avoir la même contrainte dans chacune des poutres, il est nécessaire d'adapter les diamètres de ces poutres du fait que leur longueur dépend de la zone dans laquelle elles se trouvent.

Sachant que les longueurs de poutres peuvent être exprimées en fonction de $a = a_5$ et L uniquement, on notera pour la suite :

$$\begin{cases} L_{p1} = Lf_{1,p}(a_5) \\ L_{p2} = Lf_{2,p}(a_5) \\ L_{p3} = Lf_{3,p}(a_5) \\ L_{p5} = Lf_{5,p}(a_5) = L_{p6} = L_{p9} = L_{p12} \end{cases}$$

Pour calculer le volume de la structure intermédiaire, on distingue 5 zones différentes :

- 4 coins de dimensions $(1 - a_1)L_{p1} \times L_{p3}$:

Le nombre de poutres dans la zone est donné par $n_{CN} = \frac{L_{p3}}{e}$ et leur longueur est $(1 - a_1)L_{p1}$. En reprenant l'expression (3a) du volume d'un plancher simple avec sens de portée, le volume d'une de ces zones en coin vaut :

$$V_1 = 0.923 n_{CN}^{1/3} \frac{\left(\frac{A_{CN}}{A_{tot}} F\right)^{2/3} \left((1 - a_1)L_{p1}\right)^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Ce qui donne :

$$V_1 = 0.923 \left(\frac{L}{e}\right)^{1/3} f_{3,p}(a_5) (1 - a_1)^{7/3} f_{1,p}^{7/3}(a_5) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

- 4 petites zones rectangulaires latérales de dimensions $L_{p1} \times (1 - a_5)L_{p5}$:

Le nombre de poutres dans la zone est donné par $n_R = \frac{L_{p1}}{e}$ et leur longueur est $(1 - a_5)L_{p5}$. Le volume d'une de ces zones est obtenu par la même équation que celle ci-dessus :

$$V_2 = 0.923 n_R^{1/3} \frac{\left(\frac{A_R}{A_{tot}} F\right)^{2/3} \left((1 - a_5)L_{p5}\right)^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Ce qui donne :

$$V_2 = 0.923 \left(\frac{L}{e}\right)^{1/3} f_{1,p}(a_5) (1 - a_5)^{7/3} f_{5,p}^{7/3}(a_5) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

- 4 moyennes zones rectangulaires latérales de dimensions $L_{p2} \times (1 - a_5)L_{p5}$:

Le nombre de poutres dans la zone est donné par $n_R = \frac{L_{p2}}{e}$ et leur longueur est $(1 - a_5)L_{p5}$.
Le volume d'une de ces zones est obtenu par :

$$V_3 = 0.923 n_R^{1/3} \frac{\left(\frac{A_R}{A_{tot}} F\right)^{2/3} \left((1 - a_5)L_{p5}\right)^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Ce qui donne :

$$V_3 = 0.923 \left(\frac{L}{e}\right)^{1/3} f_{2,p}(a_5)(1 - a_5)^{7/3} f_{5,p}^{7/3}(a_5) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

- 9 petites zones carrées de dimensions $a_5 L_{p5} \times a_5 L_{p5}$:

Cette zone est composée de $n_{PC} = \frac{a_5 L_{p5}}{e}$ poutres de longueur $a_5 L_{p5}$. Son volume est donné par :

$$V_4 = 0.923 n_{PC}^{1/3} \frac{\left(\frac{A_{PC}}{A_{tot}} F\right)^{2/3} (a_5 L_{p5})^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = 0.923 \left(\frac{L}{e}\right)^{1/3} a_5^{10/3} f_{5,p}^{10/3}(a_5) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

- 4 grandes zones carrées de dimensions $(1 - a_5)L_{p5} \times (1 - a_5)L_{p5}$:

Cette zone est composée de $n_{GC} = \frac{(1-a_5)L_{p5}}{e}$ poutres de longueur $(1 - a_5)L_{p5}$. Son volume est donné par :

$$V_5 = 0.923 n_{GC}^{1/3} \frac{\left(\frac{A_{GC}}{A_{tot}} F\right)^{2/3} ((1 - a_5)L_{p5})^{5/3}}{\sigma^{2/3}} = 0.923 \left(\frac{L}{e}\right)^{1/3} (1 - a_5)^{10/3} f_{5,p}^{10/3}(a_5) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Le volume de la structure secondaire est donc donné par :

$$V_{sec} = 4V_1 + 4V_2 + 4V_3 + 9V_4 + 4V_5 = W_{SS} \left(a_5, \frac{L}{e}\right) \frac{F^{2/3} L^{5/3}}{\sigma^{2/3}}$$

Où $W_{SS}(a_5)$ représente la somme des différentes fonctions de a_5 provenant de chaque zone.



BIBLIOGRAPHIE

9. Bibliographie

9.1. Références bibliographiques

- [1] BOUCKAERT I., "Optimisation d'une passerelle de tenségrité soumise à des charges aléatoires", *Bouckaert_38801400_2019.pdf*. [En ligne]. Louvain-la-Neuve, 2019.
- [2] CHINWUBA IKE C., *Timoshenko Beam Theory for the Flexural Analysis of Moderately Thick Beams – Variational Formulation, and Closed Form Solution*, Enugu State University of Science and Technology, Enugu State (Nigeria), 2019.
- [3] DOUTHE C., BAVEREL O., *Design of nexorades or reciprocal frame systems with the dynamic relaxation method*, France, 2009.
- [4] GOTO K., KIDOKORO R., MATSUO T., *Rokko Mountain Observatory*, Arup, Tokyo, 2011.
- [5] HOULSBY G.T., "John Wallis and the Numerical Analysis of Structures", *Nexus Network Journal* 16, p. 207-217, 2014 [En ligne]. <https://link.springer.com/article/10.1007/s00004-014-0179-7> (consulté le 02/03/2020).
- [6] LATTEUR P., "Optimisation du volume d'un plancher en fonction de la contrainte ". Louvain-la-Neuve, 2019.
- [7] LATTEUR P., GENO J., *Projet Robotree : Extrait du projet de recherche déposé à la Région wallonne*, UCLouvain & ImapPro, Louvain-la-Neuve, 2019.
- [8] PARIGI D., PUGNALE A., *Three-dimensional reciprocal structures : Morphology, concepts and generative rules*, Université de Aalborg, Aalborg (Danemark), 2012.
- [9] PARIGI D., KIRKEGAARD P.H., *Design and Fabrication of free-form reciprocal structures*, Université de Aalborg, Aalborg (Danemark), 2014.
- [10] PARIGI D., KIRKEGAARD P.H., *The Reciprocalizer : an agile design tool for reciprocal structures*, Université de Aalborg, Aalborg (Danemark), 2014.
- [11] PUGNALE A., PARIGI D., KIRKEGAARD P.H., SASSONE M., *The principle of structural reciprocity : history, properties and design issues*, Université de Aalborg, Aalborg (Danemark).
- [12] ANONYME, "Native American Houses", *Native languages* [Image], <http://www.native-languages.org/houses.htm> (consulté le 01/03/2020).
- [13] ANONYME, "Assemblages en bois : toutes les techniques à connaître", *Système D* [Image], <https://www.systemed.fr/conseils-bricolage/assemblage-bois-toutes-techniques-d-assemblage,2538.html> (consulté le 24/05/2020).

9.2. Références des images de couvertures

- [14] BEGUIN N., "Assemblage, Motif et Réciprocité : Terrain de jeu d'une architecture logarithmique", Bruxelles, 2019.
- [15] BLETSAS C., "Reciprocal frame structure", *ZanteChristo Architects*, <https://www.zantechristo.com/reciprocalframestructure> (consulté le 17/05/2020).
- [16] DADRA DESIGN, "Flying Cloud Reciprocal Roof Frame", *Timberhomes Vermont*, <https://timberhomesllc.com/our-work/timber-frames/flying-cloud-reciprocal-roof-frame/> (consulté le 17/05/2020).
- [17] DONNEL Z., "Reciprocal dome", *Archtalent*, <http://www.archtalent.com/projects/reciprocal-dome> (consulté le 17/05/2020).
- [18] KEN M., "Observatoire de Monte Rokko", <https://arquiscopio.com/archivo/page/19/?lang=fr> (consulté le 09/08/2020).
- [19] LEWANDOWSKI L., "How to build a reciprocal roof frame", <https://blog.shelterpub.com/build-reciprocal-roof-frame/> (consulté le 09/08/2020).

- [20] MARTIN A., "Reciprocal frame construction", *Flickr*, <https://www.flickr.com/photos/109333486@N07/13909700830/in/photostream/> (consulté le 17/05/2020).
- [21] THÖNNISSEN U, "Udo Thoennissen architecture and design", <http://www.thoennissen.ch/> (consulté le 17/05/2020).

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
École polytechnique de Louvain

Rue Archimède, 1 bte L6.11.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/epl