

## Louvain School of Management

# Analyse du phénomène de concentration dans la théorie de Markowitz et étude comparative d'approches alternatives

Mémoire recherche réalisé par  
**Guillaume de Marnix**

en vue de l'obtention du titre de  
**Master en ingénieur de gestion, à finalité spécialisée**

Promoteur(s)  
**Frédéric Vrins**

Année académique 2017-2018

*"I believe that better methods, which take into account more information, can be found."*

*Henry Markowitz*

## Abstract

LOUVAIN SCHOOL OF MANAGEMENT

MASTER EN INGÉNIEUR DE GESTION

*Analyse du phénomène de concentration dans la théorie de Markowitz et étude comparative d'approches alternatives*

*Auteur : Guillaume de Marnix - NOMA : 8252-15-00*

*Promoteur : Frédéric Vrins*

La diversification fut durant les dernières décennies l'un des sujets les plus critiques de la sélection de portefeuille. La théorie de Markowitz expose, en effet, ses limites de diversification, affichant une concentration élevée sur un faible nombre d'actifs.

Erreurs d'estimations, limites intrinsèques au modèle, construction du modèle basée sur des hypothèses initiales erronées, nous avons analysé multiples méthodes afin de favoriser la diversification d'un portefeuille.

Par le biais de l'utilisation de l'entropie (critère d'entropie de Shannon, entropie sur les poids, terme de pénalité sur la fonction objectif), la stratégie du « Most Diversified Portfolio » ou encore du Shrinkage Estimator de Ledoit & Wolf, nous avons voulu évaluer la performance de chacune, en comparaison avec Markowitz, tant bien en termes de niveau de diversification qu'en termes de frontières efficientes. La simulation de données distribuées normalement et exponentiellement permettra d'évaluer l'importance de l'exactitude de l'estimation des paramètres ainsi que des hypothèses initiales de Markowitz. L'application de toutes les stratégies citées ci-dessus nous permettra également d'évaluer l'impact de cesdites stratégies sur le niveau de diversification et d'efficacité en termes de frontières efficientes.

## Remerciements

Tout d'abord, je souhaiterais remercier mon promoteur, le professeur Frédéric Vrins, qui, tout au long du quadrimestre, parvint à me guider dans la rédaction de cette thèse, à travers de conseils judicieux, sa connaissance dans ce domaine ainsi que son expertise dans le monde de la recherche, qui m'auront poussé à la réalisation de cette thèse.

Je voudrais également remercier l'ensemble du corps professoral de l'UCL où j'ai pu passer mon Master, mais également le corps professoral de la Faculté Universitaire Saint-Louis. Grâce à ces cadres d'études, j'ai pu développer ma capacité de réflexion et de compréhension me permettant de réaliser ce mémoire.

Finalement, je souhaiterais remercier l'ensemble de mes proches que ce soit famille ou mes amis pour toute l'aide et le soutien qu'ils m'ont apporté durant ces mois de mémoire. Je remercie également Aude qui m'a apporté une lecture et relecture fructueuse de mon mémoire, ainsi que de précieux conseils afin d'améliorer ce dernier. J'aimerais également remercier Deloitte et son encadrement qui m'ont permis de combiner mon début de carrière professionnelle ainsi que la réalisation de cette thèse.

Tout particulièrement, je voudrais remercier Matthias avec qui j'ai passé les 5 années universitaires à Saint-Louis et l'UCL, avec qui nous avons partagé d'innombrables travaux et qui prit soin de lire et relire mon mémoire.



# Contents

<b>List of Figures</b>	<b>IV</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>1</b>
1.1 Mise en situation de la problématique . . . . .	1
1.2 Motivations & Contributions . . . . .	3
1.3 Méthodologie . . . . .	5
<b>2 Evolution de la théorie du portefeuille</b>	<b>7</b>
<b>3 Introduction à la théorie de Markowitz</b>	<b>9</b>
3.1 Hypothèses de la théorie de Markowitz . . . . .	10
3.2 Modèle mathématique . . . . .	13
3.2.1 Rentabilité . . . . .	13
3.2.2 Espérance . . . . .	14
3.2.3 Risque . . . . .	14
3.2.4 Frontière efficiente . . . . .	17
3.2.5 Programme d'optimisation de Markowitz . . . . .	17
3.3 Limites théoriques du modèle de Markowitz . . . . .	19
3.3.1 Performance out-of-sample . . . . .	19
3.3.2 Mesure de risque . . . . .	19
3.3.3 Distribution normale des rendements . . . . .	19
3.4 Limites empiriques du modèle de Markowitz . . . . .	23
3.4.1 Estimation de la matrice variance - covariance . . . . .	23
<b>4 Analyse du phénomène de concentration dans l'approche Markowitz</b>	<b>25</b>
4.1 Modèle de Markowitz . . . . .	25
4.1.1 Etude empirique à partir d'un échantillon de données Bloomberg . . . . .	25
4.1.1.1 Base de données . . . . .	25
4.1.1.2 Résultats empiriques . . . . .	27
4.2 Alternatives au modèle de Markowitz . . . . .	30

4.2.1	Approche théorique du Shrinkage estimator de Ledoit & Wolf . . . . .	31
4.2.2	Approche théorique de la Théorie de l'information . . . . .	34
4.2.2.1	Entropie de Rényi . . . . .	35
4.2.2.2	Entropie de Shannon . . . . .	36
4.2.2.3	Terme de pénalité . . . . .	38
4.2.2.4	Entropie sur les poids . . . . .	40
4.2.2.4.a	Entropie sur les poids ( $> 5\%$ ) . . . . .	40
4.2.2.4.b	Entropie sur les poids ( $< 25\%$ ) . . . . .	41
4.2.3	Approche théorique du "Most Diversified Portfolio" . . . . .	42
4.2.4	Résultats empiriques des différentes approches étudiées . . . . .	44
4.2.4.1	Méthodologie . . . . .	44
4.2.4.2	Analyse des résultats . . . . .	45
4.3	Extension de l'étude empirique sur des données simulées . . . . .	50
4.3.1	Données simulées avec rendements suivant une distribution normale	50
4.3.1.1	Méthodologie . . . . .	50
4.3.1.2	Résultats . . . . .	52
4.3.2	Données simulées avec rendements suivant une distribution expo-	
	entielle . . . . .	56
4.3.2.1	Méthodologie . . . . .	56
4.3.2.2	Résultats . . . . .	57
4.4	Conclusion de l'analyse in-sample . . . . .	61
<b>5</b>	<b>Analyse out-of-sample des différentes stratégies étudiées</b>	<b>65</b>
5.1	Méthodologie . . . . .	65
5.2	Evaluation de la performance d'un portefeuille . . . . .	67
5.2.1	Du Sharpe ratio au Adujsted Sharpe ratio . . . . .	67
5.2.2	Turnover . . . . .	68
5.2.3	Analyse des résultats . . . . .	69
5.2.3.1	Portefeuilles à variance minimale . . . . .	69
5.2.3.2	Portefeuilles à risque intermédiaire . . . . .	72
5.2.3.3	Portefeuilles à rendement maximum . . . . .	75

---

<b>6 Conclusion</b>	<b>79</b>
6.1 Résultats . . . . .	79
6.2 Limites des recherches & Suggestions pour les recherches futures . . . . .	82
<b>Bibliography</b>	<b>85</b>

# List of Figures

3.1	Effet de la diversification sur le risque spécifique & systématique . . . . .	16
3.2	Frontière efficiente de Markowitz . . . . .	17
3.3	Distribution CELG Equity . . . . .	21
3.4	Distribution GNVC Equity . . . . .	21
4.1	Matrice de corrélation d'actifs sélectionnés . . . . .	27
4.2	Allocation au sein des actifs - Markowitz - . . . . .	28
4.3	Evolution de la diversification en fonction de $r_{min}$ - Markowitz - . . . . .	29
4.4	Diversification - Markowitz - . . . . .	45
4.5	Diversification - Shrinkage Estimator Ledoit & Wolf - . . . . .	45
4.6	Diversification - Critère d'entropie de Shannon - . . . . .	46
4.7	Diversification - Entropie sur les poids (>5%) - . . . . .	46
4.8	Diversification - Entropie sur les poids (<25%) - . . . . .	46
4.9	Diversification - Most Diversified Portfolio - . . . . .	46
4.10	Diversification - Terme de pénalité ( $\gamma = 0.8/\gamma = 0.2$ ) - . . . . .	47
4.11	Légende d'actifs . . . . .	47
4.12	Diversification - Markowitz / Distribution normale - . . . . .	52
4.13	Diversification - Critère d'entropie de Shannon / Distribution normale - . . . . .	52
4.14	Diversification - Entropie sur les poids (>5%) / Distribution normale - . . . . .	52
4.15	Diversification - Entropie sur les poids (<25%) / Distribution normale - . . . . .	53
4.16	Diversification - Most Diversified Portfolio / Distribution normale - . . . . .	53
4.17	Diversification - Terme de pénalité ( $\gamma = 0.8$ ) / Distribution normale - . . . . .	53
4.18	Diversification - Terme de pénalité ( $\gamma = 0.2$ ) / Distribution normale - . . . . .	53
4.19	Diversification - Markowitz / Distribution exponentielle - . . . . .	57
4.20	Diversification - Critère d'entropie de Shannon / Distribution exponentielle - . . . . .	57
4.21	Diversification - Entropie sur les poids (>5%) / Distribution exponentielle - . . . . .	58
4.22	Diversification - Entropie sur les poids (<25%) / Distribution exponentielle - . . . . .	58

---

4.23	Diversification - Most Diversified Portfolio / Distribution exponentielle - .	58
4.24	Diversification - Terme de pénalité ( $\gamma = 0.8$ ) / Distribution exponentielle - .	58
4.25	Diversification - Terme de pénalité ( $\gamma = 0.2$ ) / Distribution exponentielle -	59
4.26	Frontières efficientes des différentes stratégies étudiées sur l'échantillon extrait de Bloomberg . . . . .	62
4.27	Frontières efficientes des différentes stratégies étudiées avec distribution exponentielle . . . . .	62
5.1	Evolution de l'allocation des portefeuilles minimum variance . . . . .	70
5.2	Evolution des rendements cumulés des portefeuilles minimum-variance . . .	71
5.3	Evolution de l'allocation des portefeuilles à risque intermédiaire . . . . .	72
5.4	Evolution des rendements cumulés des portefeuilles maximum return . . .	74
5.5	Evolution de l'allocation des portefeuilles à risque maximal . . . . .	75
5.6	Evolution des rendements cumulés des portefeuilles maximum return . . .	76

# Chapter 1

## Introduction

### 1.1 Mise en situation de la problématique

Depuis près de 60 ans, la théorie moderne du portefeuille est régie par l'incontournable modèle de Markowitz (1952). Depuis lors, nombreuses complémentarités ont enrichi ce modèle : le Three Factor Model de Fama & French (1992), le Capital Asset Pricing Model développé par Treynor (1961) et Sharpe (1964) furent les principaux contributeurs à cette théorie.

Cependant, en parallèle des développements apportés à cette théorie, de nombreuses critiques et limites, fondées, ont vu le jour. Notamment Ledoit & Wolf (2001) ainsi que Benoit Mandelbrot (2004) mais surtout Michaud & Michaud (2007), mirent en avant les échecs de cette théorie en termes d'hypothèses initiales (distribution normale des rendements) ou de diversification. L'estimation des facteurs d'entrée, que sont la matrice variance - covariance ainsi que du vecteur de rendements, furent au coeur des limites du modèle. Nous pourrions donc ultérieurement analyser le poids de la "responsabilité" des erreurs d'estimations sur la diversification.

Le deuxième facteur, la diversification du portefeuille selon la stratégie d'optimisation de Markowitz, sera la plaque tournante de notre « révision » du modèle développé par Markowitz. Il sera par conséquent intéressant de se pencher sur d'autres modèles alternatifs, faisant recours notamment à la théorie de l'information. Celle-ci nous permettra en effet d'introduire un nouveau concept à la stratégie initiale de Markowitz, qui n'est autre que l'entropie. Que ce soit l'entropie de Shannon, l'entropie sur les poids ou l'usage d'un terme de pénalité, il sera intéressant d'évaluer l'impact de l'introduction de nouvelles dimensions dans le modèle de Markowitz, et ce, tant en termes de diversification des portefeuilles que de performance en termes de frontières efficientes.

D'autres modèles en parallèle de la diversification seront également évoqués, tels que l'estimateur de Ledoit & Wolf (permettant de corriger les erreurs d'estimation de la ma-

trice variance – covariance), ou le Most diversified portfolio de Choueifaty et Coignard (2008). Nous évoquerons également la normalité des rendements, une des prémisses du modèle de Markowitz, en simulant des données de distribution normale et exponentielle. Ceci nous permettra d'analyser donc la diversification du modèle de Markowitz sous un autre angle que celui originellement proposé précédemment.

## 1.2 Motivations & Contributions

La littérature concernant la thématique de la théorie moderne du portefeuille est diverse et multiple. Beaucoup de travaux remettent en perspective les travaux de Markowitz ainsi que leurs résultats. La diversification étant un élément essentiel de ce modèle, de nombreux travaux se sont attardés sur la problématique de la diversification. Cependant, à travers cette thèse, nous avons voulu rassembler certaines critiques et alternatives au modèle initial de Markowitz, mais nous avons également tenté de contribuer à de méthodes alternatives permettant de forcer la diversification d'un portefeuille.

Ainsi, en plus d'étudier le shrinkage estimator de Ledoit & Wolf et le « Most Diversified Portfolio » nous avons proposé comme stratégie :

- L'entropie sur les poids : cette stratégie consiste à augmenter la diversification en forçant une entropie sur les poids, empêchant la surconcentration ainsi que la sous-concentration sur les actifs.
- Terme de pénalité sur le rendement : cette stratégie a pour but, par le biais de la pénalité, « d'encourager » les portefeuilles à niveau de diversification élevé.
- Le critère d'entropie de Shannon : nous envisagerons également d'introduire une nouvelle contrainte, qu'est l'entropie de Shannon. L'entropie, mesurant le niveau d'incertitude, nous permettra d'évaluer le niveau de diversification. Plus l'entropie est élevée, plus la diversification l'est, et inversement.

L'ensemble de ces stratégies seront appliquées non seulement sur une base de données que nous aurons collectée sur Bloomberg, mais également sur des données simulées sur Rstudio, données étant distribuées normalement ainsi qu'exponentiellement. Nous analyserons l'impact qu'a donc la distribution des données sur les résultats générés par le modèle de Markowitz.

Notre travail consistera à étudier la performance in-sample et out-of-sample de l'ensemble de ces stratégies. Que ce soit en termes de frontières d'efficience, d' Adjusted Sharpe ratio ou de turnover, nous tenterons de diversifier l'étude de la performance de l'ensemble des stratégies étudiées.

Cette thèse aura donc pour but de répondre à une nouvelle question sur la littérature de la théorie du portefeuille :

*« Quel est l'incitant, pour un investisseur, d'opter pour une stratégie d'optimisation incluant un « forçage » de la diversification à défaut d'une optimisation de Markowitz dans son plus simple appareil, quand bien même cette dernière propose une frontière d'efficience plus avantageuse ? »*

## 1.3 Méthodologie

Avant d'entrer dans le vif du sujet, étayons préalablement la structure que nous avons dédiée dans la rédaction et l'étude de cette thèse. Cette thèse s'articulera autour de 4 grands axes majeurs : rappel des concepts, étude empirique de la théorie du portefeuille que nous réétudierons à travers d'autres stratégies dans les 3èmes et 4èmes axiomes de cette thèse.

### Chapitre 2 & 3

Dans un premier temps, il sera primordial de remettre en lumière la théorie que nous allons disséquer tout au long de cette thèse. Ainsi, les prémisses et les hypothèses qui ont composé la théorie moderne du portefeuille seront revues en détail. Nous reverrons notamment les éléments clés composant cette théorie tels que le risque, ou le rendement ainsi que la distribution normale de ces derniers. Cependant, nous mettrons surtout l'accent sur les limites auxquelles la théorie moderne du portefeuille, établie par Markowitz, s'expose.

### Chapitre 4

Au regard de l'ensemble des limites que nous aurons exposées dans la section précédente, nous tenterons de mettre en exergue cette réalité. Nous nous attarderons en particulier sur la diversification. Cette limite étant exposée, nous nous pencherons sur des alternatives à ce modèle « forçant » la diversification. Nous appuierons notre étude principalement sur la théorie de l'information (et l'entropie qui en découle) : l'entropie sur les poids, entropie de Shannon, terme de pénalité. En parallèle, nous étudierons l'impact du « shrinkage Estimator » de Ledoit & Wolf ainsi que la stratégie du « Most Diversified Portfolio ».

### Chapitre 5

Au-delà d'entrevoir la modification du problème d'optimisation de Markowitz en incluant de nouvelles contraintes dans ce dernier, nous nous attaquerons également à l'une des hypothèses fondamentales du modèle de Markowitz. Ainsi, nous simulerons des données normalement distribuées afin de se rendre compte de la part de « responsabilité » de l'estimation dans les manquements au niveau de la diversification. Nous tenterons également d'analyser l'impact de la distribution des rendements sur la performance du modèle de Markowitz. C'est ainsi que nous simulerons d'autres données, cette fois avec une distribution exponentielle.



# Chapter 2

## Evolution de la théorie du portefeuille

L'investissement est le moyen mis en œuvre aujourd'hui afin de pouvoir faire fructifier notre capital, notre revenu. L'investissement engendre inévitablement un certain rendement accompagné d'un certain niveau de risque. La possibilité de variation (positive ou négative) du rendement d'un actif est ce qui est connu aujourd'hui sous le nom de risque. La réalisation d'un investissement judicieux et avisé repose sur une connaissance de la gestion de portefeuille et de l'analyse d'actifs. Un portefeuille constitue un ensemble d'actifs générant donc un rendement, et dont la combinaison d'actifs expose son détenteur à un niveau de risque élevé ou non. Un risque élevé sera généralement compensé par un rendement plus élevé. A l'inverse, un investisseur voulant minimiser son risque compensera cette position par un rendement de son portefeuille moins attractif. La construction de ce portefeuille devra en fin de compte être en phase avec le but recherché par l'investisseur.

Un investisseur considéré rationnel aura comme objectif de vouloir maximiser le rendement de son portefeuille, tout en minimisant le risque auquel celui-ci s'expose. Différentes méthodes "génériques" ont été mises en œuvre au cours du temps afin de construire cesdits portefeuilles : une approche traditionnelle et une approche moderne.

L'approche traditionnelle se base sur l'évaluation des besoins de l'investisseur en termes de revenus et capital. Au regard de cette évaluation, les actifs seront sélectionnés afin de reproduire les besoins de l'investisseur concerné. Il s'agit donc d'un modèle non quantitatif qui, par la combinaison d'actifs, tentera de réduire le risque total du portefeuille. Dans ce cas-ci l'objectif de l'investisseur « ne se limite qu'à » opter pour des actifs avec les rendements les plus élevés afin d'obtenir in fine le portefeuille générant le revenu le plus intéressant.

L'approche moderne de gestion de portefeuille, qui fut développée par Henry Markowitz, base sa méthodologie sur l'analyse du risque et du rendement. Les travaux de Henry Markowitz s'attardèrent principalement sur la quantification du risque, quantification qui à cette époque était alors révolutionnaire dans le milieu de la gestion de portefeuille. Cette

approche quantitative (contrairement à l'approche traditionnelle) lui valut le prix Nobel de l'économie en 1990.

De plus, avant que Markowitz puisse développer la théorie "Mean-Variance", il dut dans un premier temps déconstruire le principe selon lequel les choix d'un investisseur pour la création d'un portefeuille se faisaient par la sélection d'actifs maximisant le rendement du portefeuille, méthodologie avancée donc dans la théorie traditionnelle. En suivant ce principe, Markowitz avança que suivre cette méthodologie conduirait par la sélection d'un actif unique, celui ayant le rendement le plus élevé. Il souleva par ce biais le problème de la diversification.

Les travaux de Markowitz furent cependant retravaillés et complétés par William Sharpe. Ses travaux inclurent la notion de « marché de référence » dans l'analyse et la gestion de portefeuille. Il permit également (et nous en ferons état plus tard au cours de cette thèse) de simplifier le nombre et le type de données requises afin de réaliser une analyse de portefeuille. L'optimisation de portefeuille nécessitait une approche simplifiée (en termes de calculs), ce qu'il permit grâce au développement du « Single Factor Model ».

A ce jour, il s'agit du modèle utilisé par les investisseurs et gestionnaires de fonds afin de réaliser une analyse de portefeuille et de construire les portefeuilles optimaux.

# Chapter 3

## Introduction à la théorie de Markowitz

1952 restera dans le monde de la finance comme un tournant de l'analyse financière. Henry Markowitz introduit cette année-là la célèbre « Théorie moderne du portefeuille ». Cette théorie, que l'on nomme également Analyse Moyenne-Variance (MV) repose sur un enseignement :

*« Les investisseurs ne doivent pas se soucier seulement des rendements réalisés, mais également prendre en considération le « risque » lié à leur position, représenté par l'écart-type du rendement du portefeuille de l'investisseur. »*

Par ce biais-là, Henry Markowitz proposa une nouvelle approche d'analyse de portefeuille par le biais d'un critère double :

- L'obtention d'un risque minimal, et donc, par conséquent, d'une volatilité et d'un écart-type minimal, à un niveau de rendement donné.
- La réciproque est tout aussi valide: l'obtention d'un rendement maximal, et donc par conséquent d'un return de portefeuille maximal, à un niveau de risque donné.

L'ensemble des portefeuilles répondant donc aux caractéristiques d'un portefeuille au rendement maximal à un risque donné (ou à l'inverse, un risque minimal à un niveau de rendement donné) sera dès lors considéré comme efficient et sera par conséquent représenté par la frontière efficiente, frontière dont il sera fait état dans la suite de la revue de littérature.

Toute cette théorie repose également sur un concept qui n'est autre que la diversification. Comme il sera montré dans la section suivante, Markowitz émet l'hypothèse qu'il existe une relation, une corrélation entre les titres financiers. Cette corrélation sera un outil permettant d'obtenir un portefeuille diversifié et de réduire ainsi le risque d'un portefeuille.

Cette dite "diversification" sera l'un des nœuds de la réalisation et la recherche de cette thèse.

### 3.1 Hypothèses de la théorie de Markowitz

Le développement de la théorie de Markowitz repose sur une série d'hypothèses qui seront exposées ci-dessous.

- **Hypothèse 1 : Rationalité de l'investisseur**

La rationalité de l'investisseur indique un comportement cohérent de ce dernier avec l'information qu'il aura reçue du marché. Par conséquent, les choix réalisés par les investisseurs seront transitifs. L'investisseur rationnel aura donc à cœur de maximiser sa richesse en ayant un contrôle sur le risque pris.

$$\mu_a \succeq \mu_b \quad \& \quad \mu_b \succeq \mu_c \quad \Rightarrow \quad \mu_a \succeq \mu_c \quad (3.1)$$

Avec  $\mu_a, \mu_b, \mu_c$  comme rendements respectivement des actifs a, b, c.

Le comportement de l'investisseur est donc tel que le rendement attendu est une notion désirable et, qu'à l'inverse, la variance des rendements est un élément indésirable.

Nous comprenons donc que la fonction d'utilité, dans le cadre de la gestion de portefeuille, d'un investisseur ne dépend que de deux facteurs, étant la variance et la richesse (le rendement).

- **Hypothèse 2 : Distribution normale des rendements**

La validité de la théorie de Markowitz repose sur une distribution gaussienne des returns des actifs financiers. Le rendement de chaque actif financier suit donc une loi normale. Une distribution gaussienne est caractérisée par deux moments: la moyenne et la variance.

$$\chi \sim \mathcal{N}(\mu_p, \sigma_p^2) \quad (3.2)$$

avec

- $\mu_p$  : Moyenne du portefeuille p
- $\sigma_p^2$  : Variance du portefeuille p

La validité de cette hypothèse sera largement revue dans les sections ultérieures.

- **Hypothèse 3 : Efficience du marché**

L'efficience du marché sous-entend un comportement « parfait » des actifs, en adéquation avec l'information présente sur le marché. Les rendements réalisés par les actifs financiers répliquent les informations du marché de façon parfaite. Cela implique également que chaque investisseur ait accès aux mêmes informations, à l'ensemble des informations concernant chaque actif et ce, sans frais.

- **Hypothèse 4 : Corrélacion entre les rendements**

La corrélation entre les rendements est une mesure de la force de relation entre deux actifs. L'évolution des rendements des actifs financiers est caractérisée par une corrélation entre les actifs. La covariance entre les actifs est donc non-nulle.

- **Hypothèse 5 : Horizon temporel**

L'horizon temporel se définit comme le temps de retenue de(s) (l') actif(s) par l'investisseur. L'horizon temporel est le même pour chaque investisseur. L'horizon temporel est constitué d'une période unique. Cela implique donc pour l'investisseur un investissement sans possibilité de réinvestissement. Nous le verrons plus tard, l'unicité de cet horizon temporel constitue l'une des critiques majeures de la théorie de Markowitz. Cependant, la théorie de l'information permet, grâce à un portefeuille Log-Optimal de répondre à cette dernière en proposant une possibilité de réinvestissement des rendements générés lors de la période précédente. Néanmoins, nous ne nous attarderons pas davantage sur la théorie concernant le Log-Optimal portfolio.

Toutefois, nous vous suggérons la lecture du travail de S. Mwambi et J. Muteba Mwamba (2010), *An alternative to portfolio selection problem beyond Markowitz's: Log Optimal Growth Portfolio*, mettant en lumière les apports du Log-Optimal portfolio.

- **Hypothèse 6 : Coûts de transactions**

La théorie de Markowitz dans son plus simple appareil ignore dans son modèle la présence de coûts de transactions, et ce, par souci de simplicité du modèle. Cependant, de nombreux autres modèles ont ultérieurement été développés tels que ceux de Morton et Pliska (1995) ou encore Pogue (1970).

La réalité est évidemment tout autre, incluant en effet des coûts de transactions. C'est ainsi que nous mentionnerons plus tard la notion de « turnover », mesure liée aux coûts de transactions et permettant d'évaluer la performance d'un portefeuille.

## 3.2 Modèle mathématique

Le modèle mathématique mis en avant par Markowitz repose sur la dualité Moyenne – Variance. Comme cela fut exposé précédemment, Markowitz réalisa un problème d'optimisation, dans lequel la fonction objectif est la minimisation de la variance (le risque). Grâce à l'application d'un Lagrangien (rappel : méthode permettant de trouver les points stationnaires (maximum, minimum) d'une fonction dérivable d'une ou plusieurs variables, sous contrainte), Markowitz parvint à déterminer, à un certain niveau de rendement donné, le risque minimal auquel un investisseur s'exposerait.

Les contraintes que nous pouvons appliquer au problème de minimisation peuvent être définies arbitrairement. Cependant, nous imposons une contrainte d'objectif permettant d'atteindre un rendement cible de portefeuille. De plus, nous imposons également un investissement total de la richesse disponible, sans la dépasser, dans le portefeuille. Ceci empêche ainsi de faire du short-selling.

La théorie de Markowitz se repose sur la dualité Risque – Rendement. L'obtention de portefeuilles optimaux se fait via l'étude des deux facteurs cités ci-dessus, et apparaîtront par conséquent comme éléments majeurs de cette théorie.

### 3.2.1 Rentabilité

La rentabilité est le premier élément d'attention sur lequel nous allons nous pencher. La rentabilité mesure la performance dégagée par un certain actif. Deux approches sont mises en exergue afin de calculer le rendement d'un actif financier.

La première méthode, la plus classique est la « Holding Period Yield »

- $HPY = \frac{(\text{Value End of Holding} - \text{Value Debut of Holding})}{\text{Value Debut of Holding}}$

La deuxième méthode consiste en une approche logarithmique : « Logarithmic Yield »

- $LY = \ln\left(\frac{V_f}{V_i}\right)$

avec

–  $V_f$  : Valeur finale

–  $V_i$  : Valeur initial

Calculer le rendement d'un actif par le biais des deux méthodes nous offre de résultats sensiblement différents. A return faible, les rendements calculés pour l'actif seront identiques. Cependant, plus le rendement de l'actif étudié sera élevé, plus l'écart entre la méthode « Holding Period Yield » et la méthode « Logarithmic Yield » sera élevé.

Par souci de facilité d'exécution, mais également et surtout par facilité de compréhension et d'interprétation du calcul de rendement et des résultats, nous opterons dans le cadre de ce mémoire pour la première méthode (Holding Yield Period).

### 3.2.2 Espérance

La rentabilité est, comme précisé, un élément phare du modèle de Markowitz. La rentabilité d'un actif (et par extension d'un portefeuille) sera déterminée par l'espérance (la moyenne). Afin de déterminer l'espérance d'un portefeuille, il est nécessaire de calculer l'espérance de chaque actif composant ce portefeuille. Cette étape sera réalisée via les données historiques des actifs sélectionnés.

Une fois les rendements particuliers des actifs établis, nous pouvons générer le rendement d'un portefeuille dans sa globalité :

$$\mu_p = \sum_{i=1}^n \pi_i \mu_i \quad (3.3)$$

avec  $i = 1, 2, \dots, n$

- $\mu_p$  : Espérance de rendement réalisé par le portefeuille
- $\pi_i$  : Poids de l'actif  $i$  alloué dans un portefeuille  $p$
- $\mu_i$  : Espérance de rendement réalisé par un actif  $i$

Dans le cadre de l'analyse empirique que nous réaliserons ultérieurement, le rendement sera exprimé par la variable  $\mu$ . Le rendement d'un portefeuille sera dénoté  $\mu_p$  et le rendement lié à un actif en particulier sera lui dénoté  $\mu_i$

### 3.2.3 Risque

Au-delà du rendement, le risque occupe lui aussi une place prépondérante dans l'élaboration de la théorie de Markowitz. Comme cela fut énoncé dans les hypothèses générales de la théorie de Markowitz, et comme Markowitz l'édicte lui-même, un investisseur dit rationnel

poursuivra toujours l'objectif de réduire le risque auquel il s'expose à niveau de rendement donné.

Afin de réduire le risque auquel un investisseur s'expose via son portefeuille, la diversification apparaît comme élément majeur. La diversification est en effet une plaque tournante de cette thèse et se définit comme une stratégie cherchant à combiner dans un portefeuille, des actifs avec rendements qui ne sont pas parfaitement corrélés, dans l'objectif de réduire le risque du portefeuille (variance) sans pour autant sacrifier une part de rendement.

Les travaux de Markowitz ont pu mettre en exergue un point fondamental de la mesure du risque. En effet, il permet de comprendre que le risque intrinsèque à un actif n'a que peu d'importance aux yeux d'un investisseur. Cependant, l'apport de cet actif à la variance du portefeuille (dans sa globalité) était hautement plus pertinent. C'est ainsi qu'il put mettre en lumière l'importance de la covariance entre les actifs dans un portefeuille. Les actifs sont donc évalués dans un ensemble et non au cas par cas.

La variance d'un portefeuille se décrit par la relation suivante (Rubinstein, 2002) :

$$\sigma_p^2 = \sum_{i=1}^n \pi_i^2 \sigma_i^2 + \sum_{i=1}^n \sum_{i \neq k}^n \pi_i \pi_k \sigma_{ik} \quad (3.4)$$

avec :

- $\sigma_p^2$  : la variance du portefeuille p

La variance est l'élément statistique qui nous permettra d'évaluer donc le risque encouru par l'investisseur. Comme mentionné ci-dessus, une croissance du nombre d'actifs dans un portefeuille engendre une décroissance de la variance et donc du risque d'un portefeuille P.

L'équation (numéro) reprend deux éléments de risque différents :

### 1. Risque spécifique

Le risque spécifique ( $\sigma_{sp}^2$ , qui est intrinsèque à chaque actif peut être réduit par l'accroissement du nombre d'actifs sélectionnés et donc par le biais de la diversification. Lorsque l'allocation est équipondérée (allocation égale entre tous les actifs), le risque spécifique est égal à :

$$\sigma_{sp}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n \pi_i^2 \sigma_i^2}{n} \quad (3.5)$$

Si le nombre d'actifs sélectionnés tend vers l'infini, il sera dès lors possible d'effacer entièrement spécifique. Le risque systématique (ci-dessous) sera cependant toujours présent.

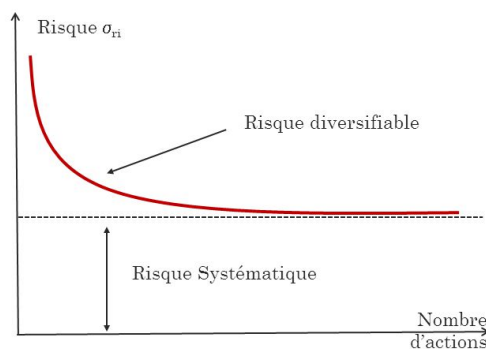
## 2. Risque systématique

A l'inverse, le risque systématique (risque de marché/ $\sigma_{sys}^2$ ), correspondant à la possibilité d'impact du marché ou l'économie dans sa globalité sur l'ensemble des investissements particuliers (en d'autres termes chaque actif financier), sera lui impossible à effacer.

Le risque systématique se modélise par la relation mathématique suivante :

$$\sigma_{sys}^2 = \sum_{i=1}^n \sum_{i \neq k}^n \pi_i \pi_k \sigma_{ik} \quad (3.6)$$

### Diversification et Risque



47

Figure 3.1: Effet de la diversification sur le risque spécifique & systématique

Dans le cadre de l'analyse empirique que nous réaliserons ultérieurement, la matrice variance - covariance sera exprimée par  $\Sigma$ . Le risque lié à un portefeuille est lui dénoté  $\sigma_p$  et le risque intrinsèque d'un actif en particulier sera dénoté  $\sigma_i$

### 3.2.4 Frontière efficiente

La dualité Espérance – Variance résulte en une frontière efficiente. Cette frontière est représentée dans un espace bidimensionnel avec le risque en abscisse et le rendement en ordonnée. Cet espace permet de représenter et l'ensemble des portefeuilles possibles avec un couple espérance – variance.

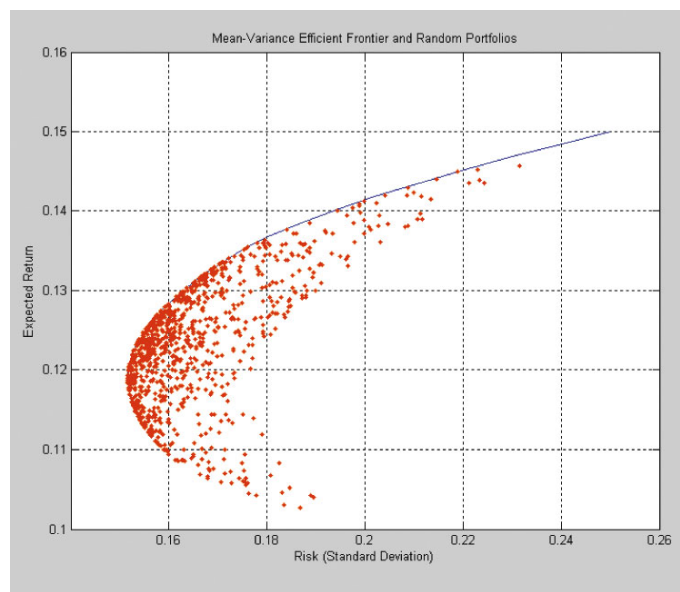


Figure 3.2: Frontière efficiente de Markowitz

La frontière efficiente représente elle l'ensemble des portefeuilles ayant, à rendement donné, le risque le plus faible ou a contrario, à risque donné, le rendement le plus élevé. Tout portefeuille se situant sous cette courbe en cloche sera alors considéré comme inefficent et sera donc aux yeux d'un investisseur rationnel non pertinents (Hole, J., 2014).

### 3.2.5 Programme d'optimisation de Markowitz

Les éléments principaux s'inscrivant dans le modèle de Markowitz étant présentés, un investisseur s'exposera donc au dilemme du choix entre le rendement et le risque. Comme cela fut exposé dans les hypothèses initiales du modèle de Markowitz, un investisseur agit de façon rationnelle. Dès lors, celui-ci cherchera toujours à maximiser le rendement de son portefeuille ou minimiser le risque auquel il s'expose avec son portefeuille. Le programme d'optimisation de Markowitz offre deux possibilités d'exécution pour un investisseur :

1. Opter pour un portefeuille à rendement maximal à niveau de risque donné. Le programme d'optimisation s'écrit comme suit :

$$\max_{\pi} \pi^T r$$

Sous contrainte que :

$$\begin{aligned} \pi^T \Sigma \pi &\leq \sigma_{max}^2 \\ \sum_{i=1}^n \pi_i &= 1 \\ \pi_i &\geq 0 \end{aligned}$$

2. La deuxième option consiste, à l'inverse, de minimiser son risque à niveau de rendement donné. Le programme d'optimisation s'écrit comme suit :

$$\min_{\pi} \pi^T \Sigma \pi$$

Sous contrainte que :

$$\begin{aligned} \pi^T r &\geq r_{min} \\ \sum_{i=1}^n \pi_i &= 1 \\ \pi_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Pour lesquels :

- $\pi$  = vecteur de poids
- $\Sigma$  = la matrice variance - covariance
- $r_{(min)}$  = vecteur de rendements des actifs  $i$  (rendement minimal attendu par l'investisseur)
- $\sigma_{max}^2$  = Risque maximum auquel l'investisseur souhaite s'exposer.

## 3.3 Limites théoriques du modèle de Markowitz

### 3.3.1 Performance out-of-sample

Le premier élément de critique au regard de la théorie de Markowitz est la performance out-of-sample réalisée par celle-ci.

La théorie de Markowitz réalise une « performance » optimale dans le cas où les deux moments (la moyenne et la matrice variance) des actifs sont connus, dans le cas d'une optimisation "in-sample". Cependant, la réalité n'est pas ainsi et les moments des actifs se doivent d'être estimés sur base des données historiques. Cela engendre une faible performance out-of sample (Michaud, 1989).

### 3.3.2 Mesure de risque

La méthode de mesure de risque demeure un élément phare du modèle de Markowitz. Cependant, cette méthode est fortement remise en question, pour cause. Les résultats que nous démontrerons plus tard au cours de cette thèse confirmeront les limites de la variance comme mesure de risque. En effet, les erreurs d'estimations inhérentes à la matrice variance – covariance mènent vers un résultat pauvre en termes de diversification. Dès lors, différents outils nous permettraient de contrecarrer la variance comme mesure de risque. D'autres outils tels que la semi-variance, le semi-écart-type des rendements s'affichent comme possibles alternatives. Nous n'aborderons pas ces stratégies dans le cadre de cette thèse. Nous vous invitons donc à consulter l'article de J. Estrada, *Mean-Semivariance Optimization: A Heuristic Approach*, afin d'en savoir plus sur ces différentes approches. Nous ferons également état dans une section ultérieure de l'entropie, non pas comme mesure de risque, mais limitant les effets néfastes des erreurs d'estimations, permettant en effet de forcer la diversification d'un portefeuille.

### 3.3.3 Distribution normale des rendements

Markowitz émit l'hypothèse d'une distribution normale des rendements. Cette dernière fut vivement remise en question. Le mathématicien français Benoît Mandelbrot (2004) notamment, à travers ses travaux, mit en lumière toutes les limites de cette hypothèse.

Pour se faire, celui-ci souligna le manque de cohérence existant entre la théorie (et donc l'hypothèse) avec la pratique, la réalité observée sur le marché. La distribution selon une

loi normale des rendements engendre une sous-estimation des risques extrêmes, comme l'illustrera le graphique ci-dessous. Cette négligence des risques extrêmes engendre par conséquent des outputs (allocation, rendement réel, risque réel) faussés.

Benoit Mandelbrot approcha donc la thématique des rendements avec une approche opposée à celle proposée par Markowitz. Il proposa en effet de décrire les rendements non pas par une distribution gaussienne, mais par une distribution exponentielle. Cette approche différente permettra de considérer les risques et rendements extrêmes.

Afin de nous rendre compte des travaux cités précédemment, nous pouvons estimer si les données que nous avons collectées sont en effet distribuées normalement ou non. Une méthode « simple » afin d'évaluer cette normalité est d'étudier la skewness et le kurtosis de chacune des variables sélectionnées.

Théoriquement, une distribution normale présente un kurtosis égal à 3 et une skewness égale à zéro.

La **skewness** permet de mesurer la symétrie d'une distribution. Une skewness égale à 0 montre une distribution parfaitement symétrique autour de la moyenne. Une skewness  $> 0$  indique une asymétrie positive (à la gauche de la moyenne). Une skewness  $< 0$  indique une asymétrie négative (à droite de la moyenne).

Le **kurtosis** permet de mesurer le coefficient d'aplatissement de la distribution d'une variable aléatoire. Cette mesure permet de décrire la forme de la distribution de la variable aléatoire.

Un kurtosis  $> 3$  indiquera une distribution pointue, et par conséquent fortement concentré sur un intervalle réduit. La probabilité de rencontrer le rendement attendu augmentera donc. A l'inverse, un kurtosis  $< 3$  indique un aplatissement de la distribution de la variable aléatoire et par conséquent une répartition des données plus équilibrée. Dans ce cas-ci, la probabilité de rencontrer le rendement attendu diminue. Une distribution avec un kurtosis élevé aura la caractéristique d'avoir une probabilité plus élevée qu'une distribution normale de générer des rendements négatifs ou positifs extrêmes.

Une distribution normale présente théoriquement un Kurtosis égal à 3. La probabilité que nous puissions obtenir le rendement attendu est stable.

Action	Skewness	Kurtosis	p-valeur	Test Jarque-Bera
CELG US Equity	0.704931	1,826532	0.0001801	1
CSCO UW Equity	0.09357607	2,289508	0.2507	0
GNVC US Equity	2.142361	7,548972	2.2e-16	1
NBIX UW Equity	1.240929	2,977251	1.395e-07	1
MBFI US Equity	0.1433406	2,388686	0.3109	0
BANR UW Equity	2.205341	6,714831	2.2e-16	1
CINF US Equity	0.7056093	2,768861	0.005299	1
PCMI US Equity	1.858236	7,223026	2.2e-16	1
GOGL UW Equity	0.3527845	2,113389	0.03725	1
LSTR UW Equity	0.5945716	2,736789	0.02235	1

Table 3.1: Analyse de la normalité des rendements de l'échantillon

A travers les données que nous avons collectées, nous pouvons générer un tableau reprenant le kurtosis et la skewness pour chacune des variables.

Les éléments statistiques exposés ci-dessus ont été déterminés à l'aide du logiciel R et nous permet donc de confirmer les critiques émises au regard de l'hypothèse de normalité des rendements.

Comme nous pouvons le remarquer à l'étude du tableau, seules deux variables sont distribuées normalement (CSCO UW Equity, MBFI US Equity). L'ensemble des autres actifs sélectionnés rejettent l'hypothèse de normalité (d'un kurtosis égal à 3 et une skewness égale à zéro), en utilisant un intervalle de confiance à 95%.

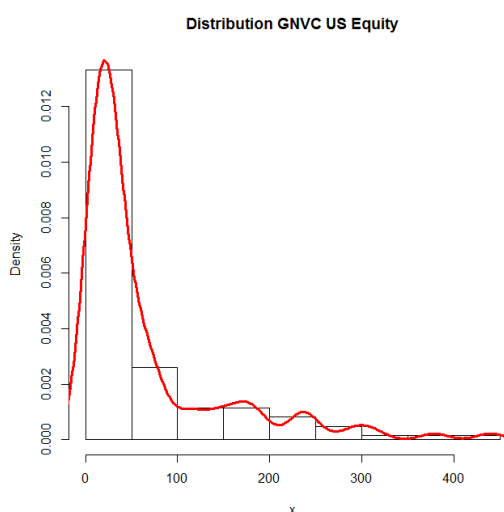
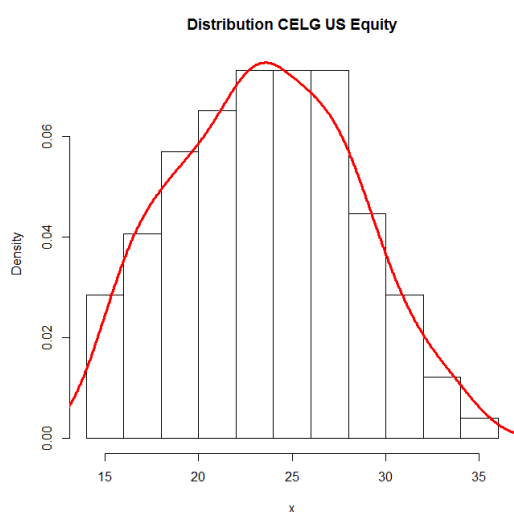


Figure 3.3: Distribution CELG Equity Figure 3.4: Distribution GNVC Equity

Graphiquement, nous pouvons également analyser la non-normalité inhérente aux rendements que nous avons sélectionnés afin de réaliser une optimisation Markowitz. Comme le suggèrent la skewness (2,14) et le kurtosis (7,54) de l'action GNVC US Equity, celle-ci présente une forte distorsion avec une loi normale.

Cependant, même si l'action CELG ne génère pas une skewness ni un Kurtosis parfaitement égal à respectivement 0 et 3 (pour un échantillon parfaitement distribué), le test Jarque Bera analyse cet échantillon comme normalement distribué. Comme nous pouvons en effet le remarquer graphiquement, cette action suit en effet, certes pas parfaitement, une loi normale.

Cette étude statistique et graphique nous permet donc de conclure que 80% des variables que nous avons sélectionnées ne suivent pas une distribution normale et confirment donc les remarques émises précédemment.

## 3.4 Limites empiriques du modèle de Markowitz

### 3.4.1 Estimation de la matrice variance - covariance

L'estimation de la matrice variance – covariance apparaît comme la colonne vertébrale de cette thèse. La matrice variance – covariance est l'un des facteurs centraux du modèle de Markowitz. Son estimation est donc primordiale.

Michaud et Michaud (2007), par leurs travaux démontrèrent la pertinence des travaux de Markowitz dans le sens où le modèle d'investissement proposé par ce dernier, tout en connaissant avec exactitude les données déterminant l'investissement, était en effet optimal. Cependant, les estimations des matrices variances et des rendements sont sujets à de multiples erreurs (d'estimation). Ceci conduit donc vers un résultat biaisé de l'optimisation Markowitz. En effet, les erreurs d'estimations engendrent une surévaluation pour certains actifs et sous-évaluation d'autres actifs. Par conséquent, l'allocation se fait de façon biaisée, surpondérant les actifs surévalués et sous-pondérant les actifs sous-évalués. La diversification résultante est donc faible, l'allocation des actifs étant fortement déséquilibrée.

En réalisant une optimisation au sens Markowitz, nous produirions une optimisation maximisatrice d'erreurs.

Michaud justifie également les limites du modèle de Markowitz par une série d'hypothèses initiales rigides. Il cite notamment le caractère statique du modèle de Markowitz, modèle basé sur une période unique d'investissement. De plus, Michaud avance une réalité plus complexe que celle présentée par Markowitz. Il fait en effet état d'une fonction d'utilité impliquant davantage que la moyenne (rendement) et la variance (risque) comme facteurs d'utilité. (Radovanov & Marcikić, 2012)

Michaud proposa ainsi une méthode, le « resampling efficiency » afin de réduire les erreurs d'estimations et d'obtenir par conséquent une amélioration de la performance.

La réalisation de cette méthode passe par le bootstrapping, consistant en la construction de nouveaux échantillons en effectuant un tirage avec remise. La méthodologie de cette approche se distingue en 4 phases distinctes (Radovanov & Marcikić, 2012) :

- Phase 1 : Estimation de la matrice variance – covariance et la matrice des rendements sur base des données historiques.
- Phase 2 : Réaliser N tirages avec remise des rendements historiques et calculer ainsi les nouvelles matrices variance – covariance et de rendements.
- Phase 3 : Calcul de la frontière efficiente sur base des inputs de l'étape 2.
- Phase 4 : Répéter les phases 2 et 3 N fois.

Les portefeuilles obtenus via un resampling présentent, vis-à-vis de la méthode classique d'optimisation de Markowitz, l'avantage de fournir une diversification plus importante. Elle apporte également une fluidité de transitions d'allocations pour les différents portefeuilles situés sur la frontière efficiente. (Scherer, 2002)

Ce surcroît de diversification peut se comprendre de façon intuitive et est également explicité par Michael Wolf (2004) dans son papier "Resampling vs. Shrinkage for Benchmarked Managers".

Imaginons le cas d'un actif « sous-estimé » dans le cadre d'une optimisation Markowitz avec une estimation directe (sur base des données historiques) de la matrice variance-covariance. L'allocation pour cet actif précis pourrait se retrouver nulle. Avec un rééchantillonnage, l'allocation dans cet actif précis ne pourra pas descendre en dessous de zéro (le short-selling étant « out-of-scope »), et ne pourra donc qu'être égale à zéro ou avoir une allocation positive. Cela résultera donc intuitivement à une diversification plus forte que dans le cas d'une estimation directe de la matrice variance-covariance.

Comme mentionné ci-dessus, et due à une mauvaise estimation de la matrice variance – covariance (mais également de la matrice des rendements), la diversification qui en résulte est insuffisante. La section suivante s'attardera donc à démontrer le phénomène de concentration dans une optimisation au sens Markowitz. Les résultats nous mèneront à revoir l'efficacité de ce modèle.

# Chapter 4

## Analyse du phénomène de concentration dans l’approche Markowitz

### 4.1 Modèle de Markowitz

#### 4.1.1 Etude empirique à partir d’un échantillon de données Bloomberg

Dans un premier temps, nous étudierons le phénomène de concentration issu de l’optimisation de Markowitz. Dans un premier temps, nous utiliserons donc la base de données qui nous aura été fournie par Bloomberg et non les données simulées par R.

Le programme d’optimisation qui sera utilisé correspond au programme d’optimisation tel qu’il est décrit dans la section 3.2.5, et équivalent à celui utilisé pour l’optimisation des données simulées.

Pour cette phase d’analyse empirique, nous avons procédé à une estimation dite “naïve” de la matrice variance – covariance et du vecteur de rendements permettant de déterminer la frontière efficiente.

Ces estimations, et comme cela fut explicité dans la revue de littérature, sont sources d’erreurs et mènent donc vers un manque cruel de diversification.

##### 4.1.1.1 Base de données

Afin de réaliser l’étude empirique démontrant le phénomène de concentration dans une approche Markowitz, nous avons opté pour une base de données issue du marché boursier américain NASDAQ (deuxième marché boursier le plus important des Etats-Unis derrière le NYSE). Ce marché est majoritairement composé de valeurs électroniques et technologiques.

Nous avons, dans le cadre de cette étude, opté pour un total de 10 actions issues de ce marché. La sélection de ces actifs s'est faite selon deux critères de diversification :

- Capitalisation :

Nous avons en effet voulu garder une parité entre les petites, moyennes et grandes capitalisations boursières. Une petite capitalisation boursière ne dépasse les 2 milliards de dollars américains. Une capitalisation boursière est considérée grande lorsqu'elle dépasse les 10 milliards de dollars américains. Nous avons donc fait le choix de 3 grandes et moyennes capitalisations boursières et de 4 petites capitalisations boursières. Ce choix fut réalisé afin de conserver un équilibre entre les actifs risqués et non risqués. En effet, les petites capitalisations boursières présentent l'avantage (ou inconvénient selon la situation) d'avoir une volatilité plus élevée en comparaison avec les grandes capitalisations boursières ayant la caractéristique de présenter une évolution du rendement stable au cours du temps et donc une volatilité faible.

- Secteur d'activité :

Nous avons également fait le choix de diversifier notre base de données en termes de secteurs d'activités. Par conséquent, nous dénombrerons 4 secteurs d'activités génériques principaux sur lesquels nous nous sommes attardés : logistique, bancaire, informatique ainsi que pharmaceutique. Une concentration de nos 10 actifs dans un seul secteur d'activité aurait probablement généré une forte corrélation entre l'ensemble de ces derniers. Cette situation n'aurait donc pas été en adéquation avec la réalité.

En plus d'établir notre choix d'actifs sur les critères ci-dessus, nous avons également prêté attention à ces deux facteurs suivants.

- Corrélation :

Afin d'analyser l'impact que pourrait avoir la corrélation sur les résultats obtenus, nous avons eu à cœur de sélectionner des actifs ayant des corrélations et volatilités disparates. Cela permet également de se rapprocher de la réalité. Cette dernière ne

propose, en effet, pas qu'un ensemble d'actifs parfaitement corrélés ou décorrélés. De plus, nous avons fait le choix de sélectionner nos actifs sur un marché particulier, le Nasdaq. Comme ce fut indiqué précédemment, ce marché associe des valeurs technologiques. Cela engendre donc une corrélation d'autant plus forte entre les actifs. Le Nasdaq constituant un marché particulier, le choix des actifs aura donc dû être d'autant plus rigoureux.

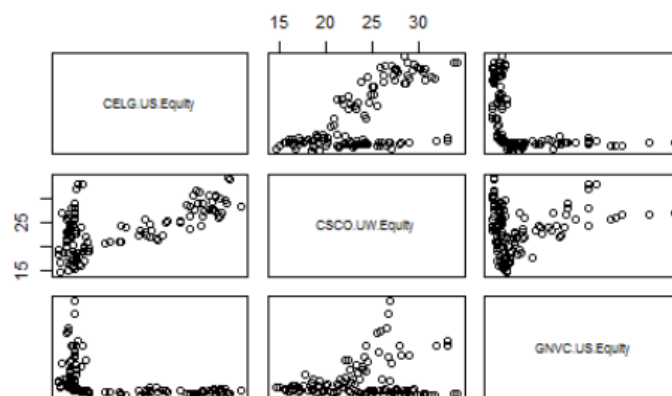


Figure 4.1: Matrice de corrélation d'actifs sélectionnés

Nous voyons en effet grâce à ce tableau la "diversité" dans les corrélations que nous pouvons retrouver entre les 10 actifs que nous avons sélectionnés.

- Périodicité :

Nous avons finalement fait le choix d'opter pour un horizon temporel s'étendant sur 10 ans. Les premières observations sélectionnées démarrent à partir de 2007. Ce choix a été réalisé afin de prendre en considération la crise financière de 2008 qui frappa l'économie mondiale. Nous avons donc un panier de données collectant des observations pré et post crises. Ce choix fut réalisé afin de refléter au mieux la réalité à laquelle s'est confronté le monde.

#### 4.1.1.2 Résultats empiriques

Pour cette phase d'analyse empirique, nous avons procédé à une estimation dite "naïve" de la matrice variance – covariance et du vecteur de rendements permettant de déterminer la frontière efficiente. Afin de mettre en exergue ce manque de diversification, nous analyserons l'allocation par itérations. Nous analyserons en effet, à chaque  $r_{min}$  (rendement minimum), par "pas" de 0,25%, l'allocation que la stratégie de Markowitz offre à son porteur.

Ces estimations, et comme cela fut explicité dans la revue de littérature, sont sources d'erreurs et mènent donc vers un manque cruel de diversification.

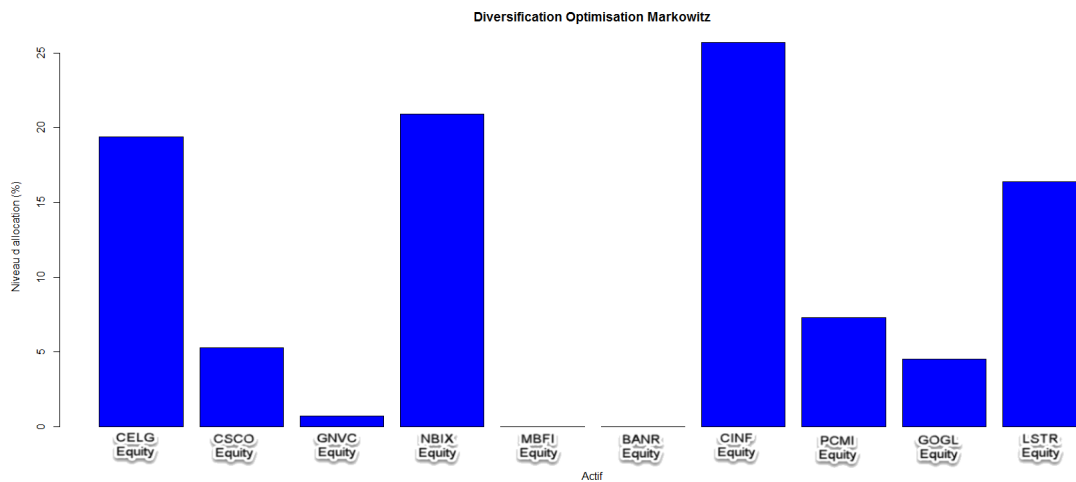


Figure 4.2: Allocation au sein des actifs - Markowitz -

L'analyse empirique que nous avons menée va dans le même sens que les critiques qui ont été émises préalablement et l'analyse qui fut réalisée dans la section précédente avec estimation parfaite des facteurs d'entrée. Nous constatons, en effet, que des 10 actifs que nous avons préalablement sélectionnés, 3 actifs ne sont pas représentés dans l'ensemble des portefeuilles que nous avons générés. A l'inverse, nous remarquons également une forte concentration sur un faible nombre d'actifs, avoisinant les 20% d'allocations.

Nous voyons également à travers l'évolution de l'allocation des actifs cette forte allocation dont fait preuve ce modèle d'optimisation. Nous constatons également et surtout, à travers ce graphique, le manque de régularité dans l'allocation d'une optimisation, opérant des changements drastiques en fonction du rendement attendu par l'investisseur. En effet, en fonction des rendements qui furent générés, de fortes distorsions apparaissent, affichant un changement drastique de l'allocation entre un rendement et un autre. Cela implique donc que ce modèle demeure, comme cela fut exposé précédemment, exposé à une forte sensibilité des facteurs estimés.

Via cette analyse, nous pouvons donc confirmer l'hypothèses des erreurs d'estimations liées à la matrice variance - covariance et le vecteur des rendements. Afin d'étudier l'impact de l'estimation de la matrice variance - covariance, nous analyserons également la diversification que nous obtenons avec une optimisation au sens Markowitz mais cette

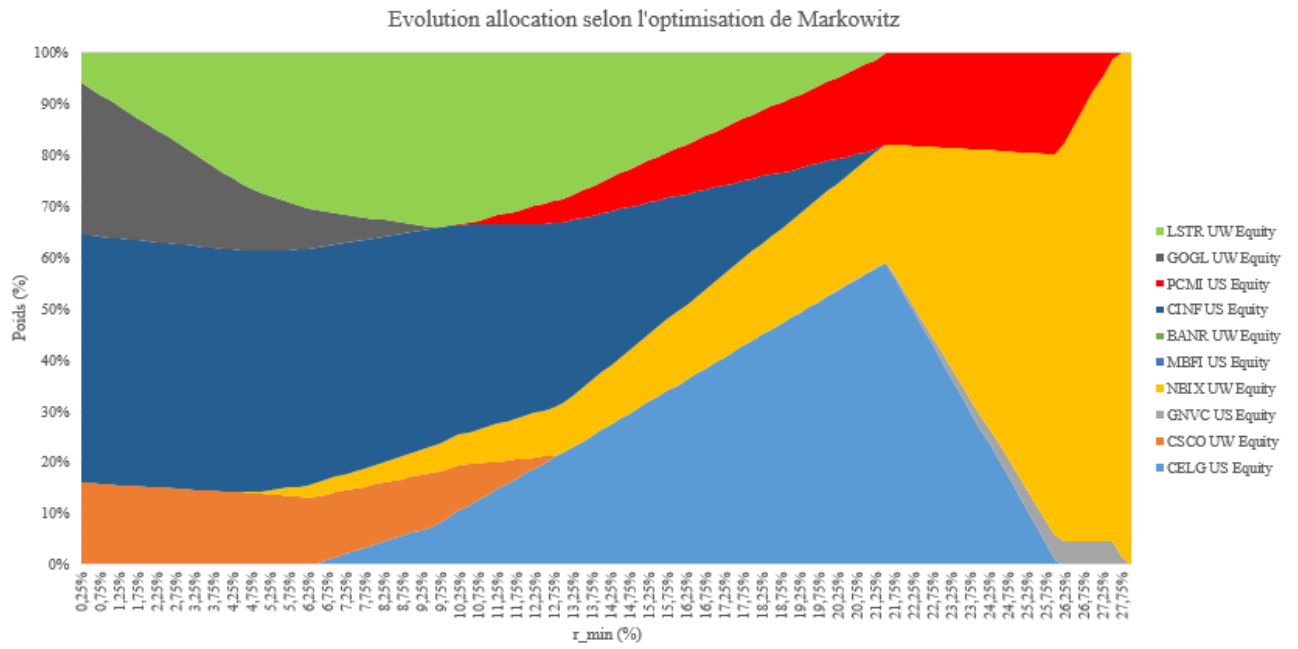


Figure 4.3: Evolution de la diversification en fonction de  $r_{min}$  - Markowitz -

fois avec une estimation de la matrice variance - covariance avec l'estimateur de Ledoit & Wolf.

## 4.2 Alternatives au modèle de Markowitz

Afin de pouvoir avoir une approche quantitative sur les différentes stratégies que nous exposerons au cours de cette section, nous réaliserons une analyse in-sample de chacune de ces stratégies. En particulier, nous nous attarderons sur l'analyse des différentes allocations que les stratégies offrent. Nous pourrions ainsi évaluer le niveau de diversification qu'offrent les différentes stratégies exposées au regard d'une optimisation « rigide » de Markowitz.

Pour notre analyse in-sample, nous disposons donc d'une base de données s'étalant de 2007 à 2017. Notre base de données est donc composée de 120 observations pour 10 actions sélectionnées. Cependant, dans cette section, nous ne nous pencherons pas sur une analyse de performance (en termes de ratios) des différentes stratégies. Nous nous consacrerons à l'analyse de performance de chacune des stratégies dans une section ultérieure (section 5).

Via cette section, nous allons donc tenter d'apporter une réponse aux critiques de diversification émises à l'encontre de la théorie classique de Markowitz, en proposant un ensemble de stratégies visant à forcer la diversification d'un portefeuille à travers les actifs « sélectionnables ». Nous pourrions, grâce aux résultats obtenus, comparer les différentes méthodes d'allocations qu'offrent ces différentes stratégies et discuter in fine de l'optimalité de la théorie classique de Markowitz.

Afin de réaliser cette étude empirique, nous avons procédé de la même façon que pour l'optimisation de Markowitz. En effet, nous avons voulu analyser l'allocation et la diversification de portefeuilles, allant du rendement rationnellement le plus bas (0,00%), au portefeuille offrant le rendement le plus élevé (27,75%), et ce, par pas de 0,25%. Nous avons donc réalisé un programme d'optimisation imposant un rendement minimum ( $r_{min}$ ).

### 4.2.1 Approche théorique du Shrinkage estimator de Ledoit & Wolf

Comme cela fut énoncé précédemment, la matrice variance – covariance estimée sur base des données historiques comporte nombre d'erreurs d'estimations et conduit par conséquent à un résultat faussé (i.e. surpondération sur certains actifs, sous-pondération sur d'autres actifs) et une faible diversification. Les erreurs d'estimations des facteurs de la matrice variance – covariances sont d'autant plus importantes que le nombre d'actifs est important et que le nombre de données historiques est faible (Wolf, 2004). Ceci conduit à donc revoir la méthode d'estimation de la matrice variance-covariance.

Ledoit et Wolf (octobre 2001) proposèrent donc un modèle alternatif permettant d'évaluer la matrice variance – covariance, modèle présentant une pondération linéaire optimale entre la matrice variance – covariance de l'échantillon étudié (l'estimateur traditionnel) et un estimateur structuré de la matrice variance – covariance. Dans le modèle de Ledoit & Wolf, ces derniers firent le choix du « single factor model » (Ledoit et Wolf, 2001). Ils développèrent donc un modèle statistique de shrinkage : le shrinkage estimator de Ledoit & Wolf.

Par ce biais, ils visèrent à diminuer l'intensité des valeurs extrêmes (petites et grandes) de la matrice variance-covariance, de faire tendre ces valeurs vers de valeurs plus centrées et d'obtenir par conséquent une estimation plus juste de la matrice variance – covariance. Nous verrons par la suite les conséquences du modèle de Ledoit & Wolf sur la diversification de notre portefeuille avec une optimisation Markowitz.

L'objectif recherché par Ledoit et Wolf est donc d'imposer une forme de structure à l'estimateur. Ceci conduira à donc évaluer le niveau optimal de structure que l'on veut imposer à notre estimateur. La « force » de structure sera déterminée par un facteur delta (compris entre 0 et 1). Le delta sera appelé l'« intensité de shrinkage ». Plus le poids du delta est élevé, plus la structure de l'estimateur sera forte.

La relation de Ledoit et Wolf est mathématiquement décrite de la façon suivante:

$$\Sigma_{shrinkage} = \delta F + (1 - \delta)S \quad (4.1)$$

Comme cela fut énoncé précédemment, le shrinkage estimateur est donc défini par un estimateur structuré et la matrice variance – covariance de l'échantillon. L'intensité de chacun des estimateurs étant définie par le delta, nous pouvons donc décrire la matrice de Ledoit et Wolf (Ledoit & Wolf, 2001) à travers deux matrices distinctes.

Nous nous retrouvons donc dans un modèle composé de deux matrices proposant chacune leur structure et leur biais :

- La matrice Covariance Single factor de Sharpe, un modèle uni factoriel est un modèle fortement structuré et jouit d'un nombre d'erreurs d'estimations réduit. Le nombre d'éléments à estimer ( $3n + 2$ ) est également réduit en comparaison du modèle de Markowitz ( $\frac{n(n-1)}{2}$ ). Grâce à la réduction du nombre de facteurs, le nombre d'erreurs est par conséquent diminué. Cependant, ce modèle étant biaisé, biais dû à la rigueur des hypothèses du modèle de Sharpe.

Le single factor model de Sharpe est mathématiquement défini par:

$$r_i = \alpha_i + \beta_i R_m + \epsilon_i \quad (4.2)$$

avec:

- $r_i$  : rendement de l'actif i.
  - $\alpha_i$ : alpha de l'actif i mesure la performance de l'actif i au regard d'un marché de référence.
  - $\beta_i$ : bêta de l'actif i, mesure le risque de l'actif i par rapport au marché.
  - $R_m$ : rendement du marché.
  - $\epsilon_i$ : rendements résiduels (rendements indépendants du benchmark), supposés distribués normalement.
- La matrice variance – covariance de l'échantillon étudié, modèle à N facteurs (N nombre d'actifs) est une matrice, contrairement à la matrice précédente, asymptotiquement non biaisée (plus le nombre d'observations est grand, plus le biais de la matrice sera faible) mais qui, comme nous l'avons explicité précédemment, est peu structurée et propose donc grand nombre d'erreurs d'estimations.

Afin d'obtenir une matrice « shrinkage », l'objectif sera donc de réaliser un compromis entre l'estimateur biaisé et l'estimateur non biaisé et d'obtenir donc un modèle à  $K$  facteurs, avec  $K$  compris entre 1 et  $N$ . (Ledoit & Wolf, 2001)

## 4.2.2 Approche théorique de la Théorie de l'information

La théorie de l'information fut développée en 1948 par Claude Shannon. Dans un premier temps, la théorie de l'information permit de développer un ensemble de modèles mathématiques des systèmes de communication, afin de répondre à la question de la mesure du niveau d'information dans un message. Claude Shannon introduisit donc la notion d'entropie afin de mesurer la quantité d'information moyenne qu'un message produisait.

Dans le cadre de cette thèse, l'entropie ne sera pas utilisée afin de déterminer la quantité d'information contenue dans un message, mais bien à la sélection de portefeuille et l'entropie des poids, comme niveau de désordre et de diversification. L'entropie exprime en effet le degré d'incertitude liée à une variable aléatoire (dans notre cas, un actif). Depuis l'introduction de l'entropie de Shannon dans le domaine de la théorie de l'information, l'entropie s'est répandue dans l'étude du monde de la finance et de l'investissement.

L'entropie fut utilisée de diverses façons au sein de la gestion de portefeuille. Dans un premier temps, l'entropie fut utilisée comme une mesure de risque. L'entropie était considérée comme telle car l'incertitude créée de la perte. L'entropie permettait donc de remplacer la variance comme mesure de risque (Philippatos & Wilson, 1972).

Dans un second temps, l'entropie n'était pas liée au risque d'un portefeuille mais à la diversification de celui-ci. Cette optique sera empiriquement étudiée dans la suite de cette thèse. Comme cela fut démontré précédemment, le portefeuille issu du modèle « moyenne – variance » de Markowitz résulte en une diversification et une forte concentration en quelques actifs précis. Cette concentration a pour conséquence des effets néfastes pour les investisseurs. Si un actif sélectionné par le modèle traditionnel de Markowitz venait à dévier fortement de la moyenne, les effets sur l'investisseur pourraient être fortement négatifs. C'est ainsi que la diversification permet de réduire l'exposition d'un investisseur au risque. Dans le cas d'un portefeuille parfaitement (et naïvement) diversifié ( $\pi_i = 1/n$ ), la probabilité de voir l'ensemble des actions fortement dévier de la moyenne en même temps reste faible (P. Jana, T. K. Roy, and S. K. Mazumder, 2007).

L'idée introduite par Kapur fut de remplacer les probabilités par des proportions d'investissements.  $\pi_i$  devient désormais la probabilité. L'entropie permet dès lors d'imposer une contrainte de poids sur les proportions d'investissement et aura pour conséquence d'améliorer le modèle classique « Mean – Variance » développé par Markowitz et en

particulier la diversification qui en résulte (J. N. Kapur and H. K. Kesavan, 1992).

#### 4.2.2.1 Entropie de Rényi

Avant d'expliciter l'utilité de l'entropie de Shannon plus en profondeur, il conviendra de s'attarder sur l'entropie de Rényi, qui n'est autre que le cas généralisé de l'entropie de Shannon.

Alfred Rényi (1960) définit mathématiquement l'entropie comme suit :

$$H_\alpha(P) = \frac{1}{1-\alpha} \ln \sum_{i=1}^n \pi_i^\alpha \quad (4.3)$$

Avec  $\pi \in P$ ,  $\alpha \geq 0$ ,  $\alpha \neq 1$

Dans le cas où  $\alpha = 1$ , nous nous retrouvons dans le cas de l'entropie de Shannon, que nous expliciterons plus dans les détails dans la section ultérieure.

Le paramètre  $\alpha$  fut introduit par Alfred Rényi (1960). Ce paramètre est utilisé afin de rendre la mesure plus ou moins sensible à la distribution de probabilité de l'échantillon. L'alpha a donc pour conséquence d'augmenter ou de diminuer la sensibilité (des résultats obtenus) à la queue de la distribution de probabilité de l'échantillon. Dans le cas de l'entropie de Shannon, que nous étudierons dans la section ultérieure, est insensible aux changements dans la queue de la distribution de probabilité.

### 4.2.2.2 Entropie de Shannon

Comme mentionné ci-dessus, l'entropie est une mesure d'incertitude et de désordre. Claude Shannon fut le premier à intégrer ce concept dans le domaine de la théorie de l'information. L'entropie de Shannon est décrite par la relation mathématique suivante :

$$SE(\pi) = - \sum_{i=1}^n \pi_i \ln(\pi_i) \quad (4.4)$$

avec

- $\pi_i, i = 1, 2, \dots, n$  : la proportion d'investissement dans l'actif  $i$ .

La mesure d'entropie n'est donc pas dépendante de la valeur que peut prendre une variable. La mesure d'entropie dépend donc du nombre de valeurs et de leur degré d'occurrence, de la probabilité d'occurrences.

- L'entropie de Shannon sera nulle lorsque  $p=1$ . Nous comprenons donc intuitivement que le désordre est nul et que la diversification est dès lors minimale. Le portefeuille affichera une situation extrême dans laquelle l'ensemble de la richesse est alloué dans un actif unique.
- L'entropie de Shannon sera maximale lorsque  $p=1/n$ . L'entropie atteindra donc une valeur de «  $\ln(n)$  ». Contrairement au cas précédent, le désordre est donc maximal et qui résultera donc inévitablement en une diversification maximum. Cette situation correspond à un « equally-weighted portfolio », situation présentant une diversification naïve avec une allocation uniforme et égale entre chacun des actifs « sélectionnables ».

Nous comprenons donc que plus  $N$  est grand, plus un portefeuille sera diversifié.

Le programme d'optimisation devient le suivant:

$$\max_{\pi_{i=1}^n} \left( - \sum_{i=1}^n \pi_i \ln \pi_i \right) \quad (4.5)$$

Scq:

$$\begin{aligned}\pi^T r &\geq r_{min} \\ \sum_{i=1}^n \pi_i &= 1 \\ \pi_i &\geq 0\end{aligned}$$

Dans ce programme d'optimisation, la notion de risque n'est plus centrale n'est donc pas essentielle à la détermination des portefeuilles optimaux. Cependant, nous pouvons, grâce à l'allocation générée par l'optimisation ci-dessus, déterminer le risque auquel l'investisseur s'exposera à la détention de chaque portefeuille. Le risque n'est donc plus moteur dans la détermination de nos portefeuilles.

Comme cela fut explicité ci-dessus dans le cadre de l'entropie de Shannon, l'entropie permet de mesurer le degré d'incertitude et de « désordre » dans un portefeuille. Plus celle-ci est élevée, plus un portefeuille sera diversifié.

### 4.2.2.3 Terme de pénalité

Une stratégie suivante que nous étudierons au cours de cette thèse est l'utilisation d'un terme de pénalité sur la fonction « objectif » afin de favoriser la diversification d'un portefeuille.

Comme nous l'avons analysé précédemment, l'entropie de Shannon permet de mesurer le niveau de diversification d'un portefeuille. Plus le critère d'entropie de Shannon est élevé, plus la diversification entre les actifs est élevée. Nous tenterons d'évaluer l'impact de ce terme à la favorisation de la diversification.

$$\min_{\pi} \pi^T r - \gamma E_s$$

Sous contrainte que :

$$\begin{aligned} \pi^T r &\geq r_{min} \\ \sum_{i=1}^n \pi_i &= 1 \\ \pi_i &\geq 0 \end{aligned}$$

Le terme  $E_s$  consistera en notre terme de pénalité. Par le biais de ce terme d'entropie, nous pourrions forcer un portefeuille à être plus diversifié. En effet, plus le terme de diversification est élevé, plus la fonction « objectif » sera faible, et résultera donc en un portefeuille avec une diversification d'autant plus élevée.

Nous introduirons également une variable  $\gamma$  qui pourra atténuer ou accentuer le poids de la pénalité introduite. Un terme  $\gamma$  impliquera une forte accentuation du terme de pénalité et tendra par conséquent, intuitivement, à générer un portefeuille plus diversifié. A contrario, un gamma plus faible impliquera un terme de pénalité plus faible. L'importance de cette pénalité étant plus faible, nous nous attendrions par conséquent d'obtenir des portefeuilles moins diversifiés.

Afin de vérifier les présomptions précédentes, nous réaliserons une analyse de la performance de cette stratégie selon deux gamma :  $\gamma = 0.2$  ainsi que  $\gamma = 0.8$ . Ceci nous

permettra en effet d'entrevoir à quel point la variable de pénalité  $\gamma$  apportera au portefeuille un niveau de diversification correct.

#### 4.2.2.4 Entropie sur les poids

L'entropie sur les poids aura comme objectif d'implémenter une contrainte sur les poids alloués sur chaque actif. Grâce à cette « manœuvre », il nous sera dès lors possible de forcer la diversification de notre portefeuille et d'ainsi éviter une surconcentration et sous-concentration sur un nombre défini d'actifs.

Dans le cadre de mémoire, nous avons envisagé deux différentes possibilités d'imposer une limite supérieure ou inférieure de poids pour chaque actif, chacune remplissant un rôle bien distinct : l'un d'éviter la sous-concentration sur les actifs, l'autre la surconcentration sur les actifs.

##### 4.2.2.4.a Entropie sur les poids ( $> 5\%$ )

Dans un premier temps, tout en conservant le même programme d'optimisation proposé par Markowitz, nous allons intégrer une contrainte supplémentaire. Cette contrainte consiste à imposer à chaque poids du vecteur de poids une valeur minimale de 5%. En faisant ainsi, chaque portefeuille généré se verra réparti dans l'ensemble des actifs sélectionnables. Cela permet donc de ne pas se trouver dans une situation de sous-concentration, situation rencontrée dans le cadre de l'optimisation de Markowitz.

Le programme d'optimisation sera donc le suivant:

$$\min_{\pi} \pi' \sum \pi$$

Scq:

$$\begin{aligned} \pi^T r &\geq r_{min} \\ \sum_{i=1}^n \pi_i &= 1 \\ \pi_i &\geq 5\% \end{aligned}$$

#### 4.2.2.4.b Entropie sur les poids (< 25%)

Dans un second temps, toujours dans la même idée de forcer la diversification des portefeuilles, nous allons imposer comme contrainte aux poids de ne pouvoir dépasser le poids de 25%. A l'inverse du premier cas, cette situation permet d'éviter une surconcentration sur certains actifs. Cependant, instaurer une telle contrainte aura comme effet direct, comme nous le verrons à travers nos résultats, de limiter le rendement qu'un investisseur pourra atteindre.

Le programme d'optimisation sera donc le suivant:

$$\min_{\pi} \pi' \sum \pi$$

Scq:

$$\begin{aligned} \pi^T r &\geq r_{min} \\ \sum_{i=1}^n \pi_i &= 1 \\ \pi_i &\leq 25\% \end{aligned}$$

Intuitivement, nous pouvons facilement déterminer le portefeuille proposant l'allocation la plus extrême, la moins diversifiée. Nous savons que pour obtenir le portefeuille avec le rendement le plus élevé, l'allocation doit être de 25% sur les 4 actifs proposant l'espérance de rendement la plus élevée.

### 4.2.3 Approche théorique du "Most Diversified Portfolio"

A travers les travaux réalisés par Choueifaty et Coignard (2008) ainsi que Choueifaty et al. (2011) sur la sélection de portefeuille et plus particulièrement la diversification qui y est associée, ceux-ci développèrent une mesure du degré de diversification d'un portefeuille.

Ils définirent ainsi un ratio de diversification noté DR.

$$DR = \frac{\pi' \sigma}{\sqrt{\pi' \Sigma \pi}} \quad (4.6)$$

Avec:

- $\pi$  : vecteur de poids (1xN)
- $\sigma$  : vecteur de volatilités des actifs, mesurées par l'écart-type de chaque actif.
- $\Sigma$  : la matrice variance - covariance des rendements des actifs

Le numérateur correspond à la volatilité moyenne pondérée de chacun des actifs. Celui-ci s'obtient par le produit scalaire entre le vecteur « poids » et l'écart-type des rendements des actifs.

Le dénominateur correspond lui à l'écart-type du portefeuille généré.

Nous comprenons intuitivement que plus le ratio DR est élevé, plus un portefeuille sera diversifié. De plus, ce ratio a comme limite inférieure 1. Cette situation apparaît lorsque le portefeuille n'est investi que dans un actif. Un ratio DR de 1 implique donc le portefeuille le moins diversifié possible et que l'écart-type du portefeuille généré est égal à l'écart-type de l'actif unique dans lequel il aura été investi.

Cette méthode permet donc simultanément de maximiser la diversification de notre portefeuille, mais aussi de minimiser la variance de notre portefeuille. En effet, la maximisation du ratio passe inévitablement par la minimisation du dénominateur, correspondant à l'écart-type du portefeuille. La notion de risque est dès lors prise en compte dans ce ratio.

Le programme d'optimisation réside donc en une maximisation de ce ratio de diversification ainsi qu'en l'implémentation de contraintes linéaires sur le poids des actifs. A l'image du modèle classique de Markowitz notre modèle d'optimisation sera comme suit :

$$\frac{\pi' \sigma}{\sqrt{\pi' \Sigma \pi}}$$

Scq:

$$\begin{aligned} \pi^T r &\geq r_{min} \\ \sum_{i=1}^n \pi_i &= 1 \\ \pi_i &\geq 0 \end{aligned}$$

## 4.2.4 Résultats empiriques des différentes approches étudiées

### 4.2.4.1 Méthodologie

Afin de pouvoir avoir une approche quantitative sur les différentes stratégies que nous avons exposées au cours de la section précédente, nous réaliserons une analyse in-sample de chacune de ces stratégies. En particulier, nous nous attarderons sur l'analyse des différentes allocations que les stratégies offrent. Nous pourrons ainsi évaluer le niveau de diversification qu'offrent les différentes stratégies exposées au regard d'une optimisation « rigide » de Markowitz.

Pour notre analyse in-sample, nous disposons donc d'une base de données s'étalant de 2007 à 2017. Notre base de données est donc composée de 120 observations pour 10 actions sélectionnées. Cependant, dans cette section, nous ne nous pencherons pas sur une analyse de performance (en termes de ratios) des différentes stratégies. Nous nous consacrerons à l'analyse de performance de chacune des stratégies dans une section ultérieure (section 5).

Via cette section, nous allons donc tenter d'apporter une réponse aux critiques de diversification émises à l'encontre de la théorie classique de Markowitz, en proposant un ensemble de stratégies visant à forcer la diversification d'un portefeuille à travers les actifs « sélectionnables ». Nous pourrons, grâce aux résultats obtenus, comparer les différentes méthodes d'allocations qu'offrent ces différentes stratégies et discuter in fine de l'optimalité de la théorie classique de Markowitz. Nous nous pencherons également sur les résultats en termes de frontières efficientes, qui apporteront des résultats quelque peu intéressants et mèneront vers une réflexion approfondie.

Pour chaque stratégie exposée, nous constituerons un ensemble de portefeuilles, du portefeuille proposant le portefeuille au rendement le plus faible, au portefeuille proposant le portefeuille avec le rendement le plus élevé et ce, par pas de 0,25%.

### 4.2.4.2 Analyse des résultats

L'analyse empirique que nous avons menée nous confirme les critiques émises précédemment pour la théorie de Markowitz. Nous constatons en effet que sur les 10 actifs sélectionnables, deux actifs affichent une allocation moyenne de 0% à travers l'ensemble des portefeuilles que nous avons générés. Nous constatons à l'inverse que l'allocation moyenne est fortement concentrée sur seulement 2 actifs (NBIX Equity & CINF Equity), dépassant chacun les 20% d'allocation pour l'ensemble des portefeuilles générés. Nous pouvons également souligner l'évolution assez « raide » que subit cette méthode d'optimisation. Cette stratégie démontre donc sa forte exposition aux erreurs d'estimations. Le changement d'un paramètre pourrait en effet provoquer un changement radical dans l'allocation au sein des différents actifs. Cela nous a donc menés vers l'étude d'alternatives au modèle de Markowitz.

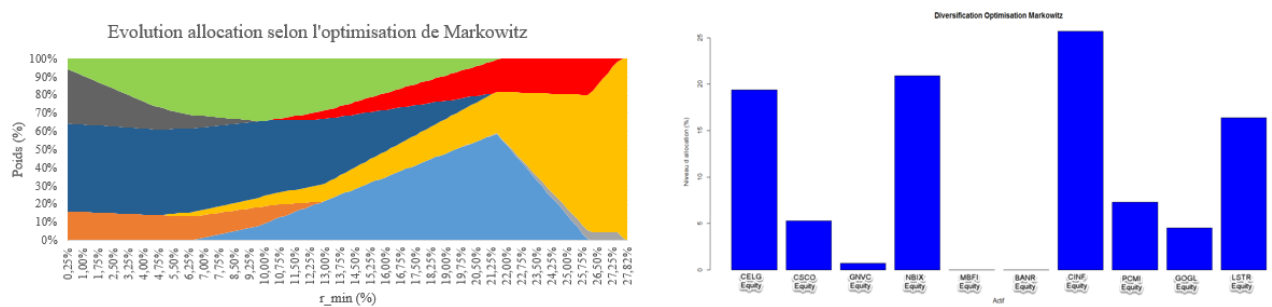


Figure 4.4: Diversification - Markowitz -

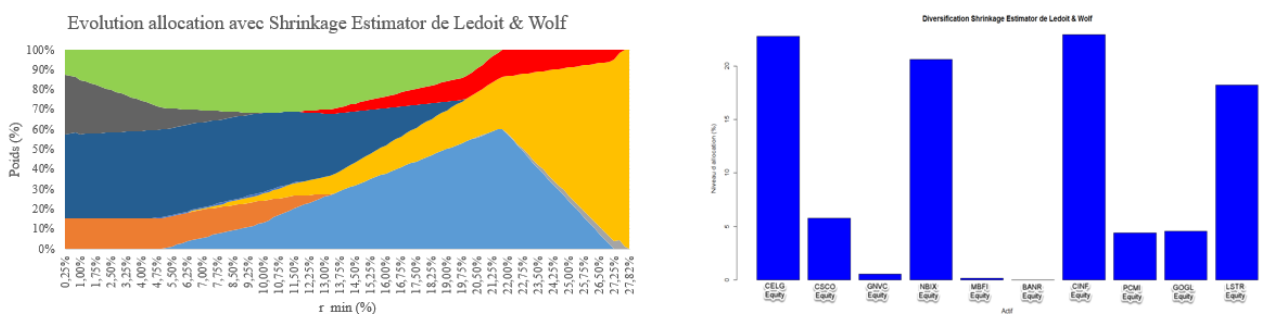


Figure 4.5: Diversification - Shrinkage Estimator Ledoit & Wolf -

L'utilisation de l'estimateur de Ledoit & Wolf, dans un second temps, nous a que très peu permis d'obtenir des portefeuilles plus diversifiés. Le shrinkage estimator fut déterminé à l'aide des travaux de Ledoit & Wolf, et du code MATLAB qui fut mis à notre disposition. Grâce à ce dernier, nous avons obtenu un  $\delta$  de 0.82, ce qui implique

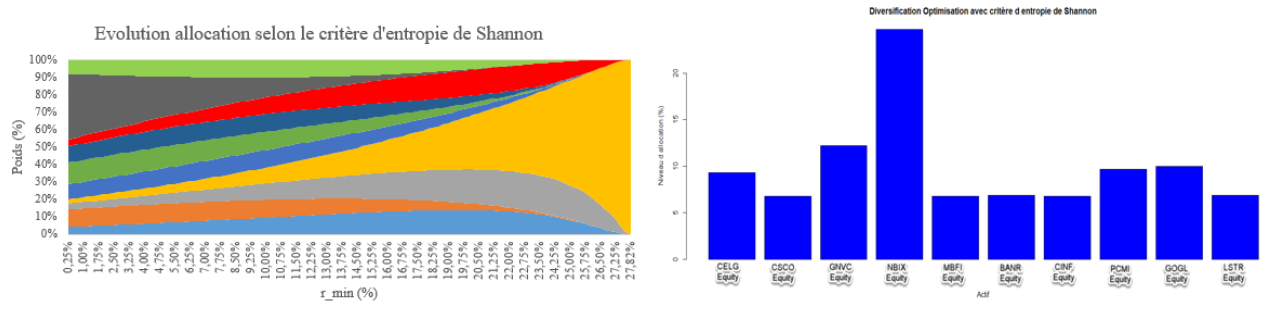


Figure 4.6: Diversification - Critère d'entropie de Shannon -

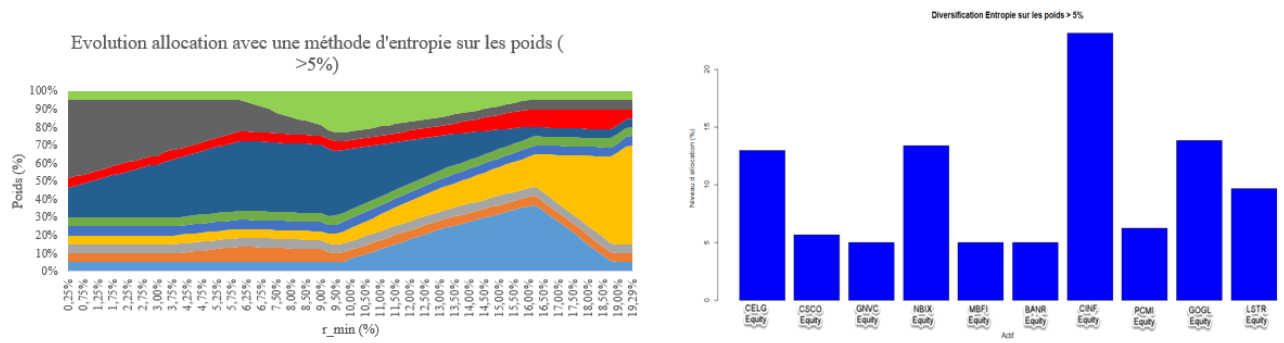


Figure 4.7: Diversification - Entropie sur les poids (>5%) -

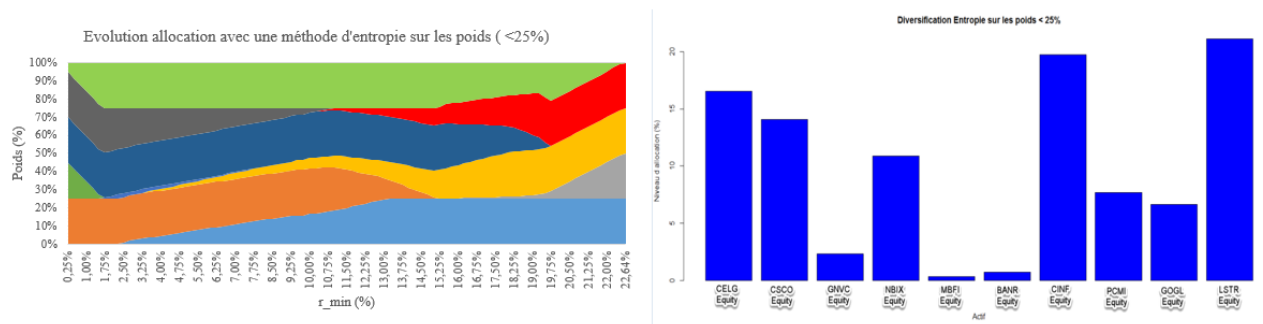


Figure 4.8: Diversification - Entropie sur les poids (<25%) -

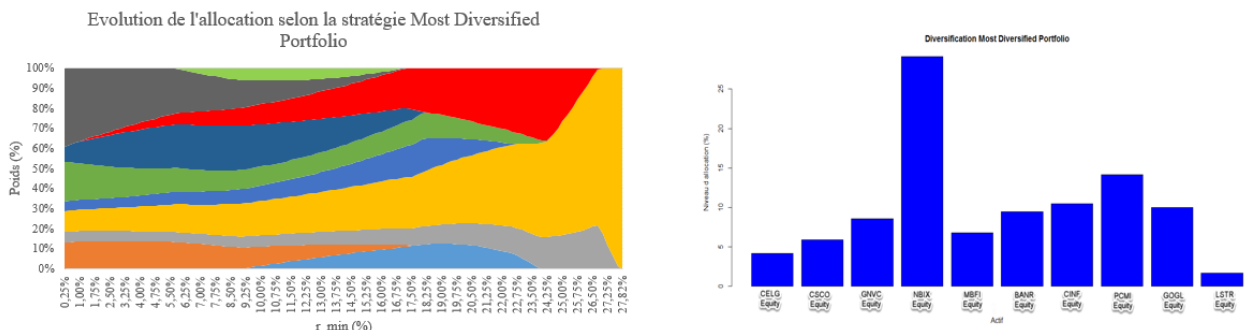


Figure 4.9: Diversification - Most Diversified Portfolio -

par conséquent un estimateur fortement structuré (et donc biaisé). Les résultats ne sont

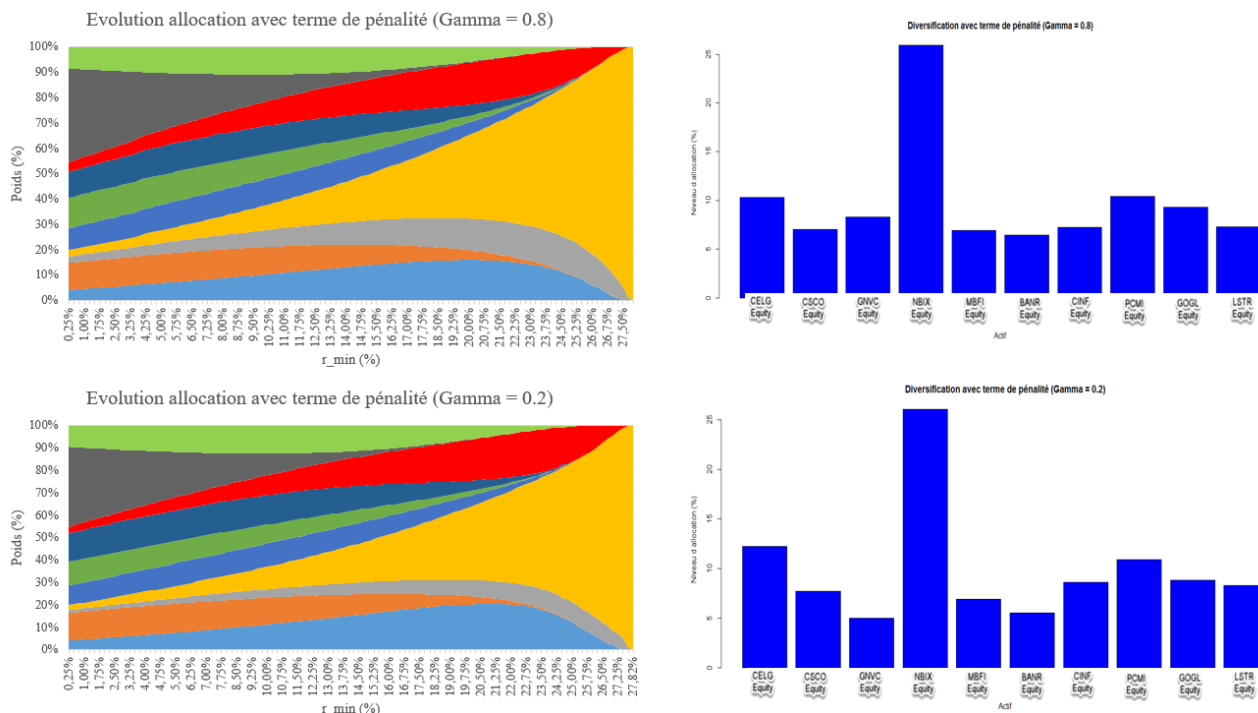


Figure 4.10: Diversification - Terme de pénalité ( $\gamma = 0.8/\gamma = 0.2$ ) -

- LSTR UW Equity
- GOGL UW Equity
- PCMI US Equity
- CINF US Equity
- BANR UW Equity
- MBFI US Equity
- NBIX UW Equity
- GNVC US Equity
- CSCO UW Equity
- CELG US Equity

Figure 4.11: Légende d'actifs

guère plus diversifiés que dans le cas pur de Markowitz. Nous retrouvons, en effet, dans les grandes lignes, les mêmes caractéristiques que nous avons pu observer précédemment, nous entendons par là une forte allocation dans 3 actifs (2 avec Markowitz) et une sous concentration dans 3 actifs (en deçà de 5%). Cependant, seul un actif trouve une allocation moyenne de 0%. Il est néanmoins important de souligner que, originellement, l'objectif du Shrinkage Estimator de Ledoit & Wolf, fut de réduire les valeurs extrêmes de la matrice variance – covariance. Le graphique ci-dessous atteste de cet impact.

L'utilisation de l'entropie comme contrainte (ou fonction objectif) afin d'obtenir des portefeuilles plus diversifiés donne des résultats plutôt concluants, et ce particulièrement avec l'utilisation de l'entropie sur les poids ( $>5\%$ ).

Dans le premier cas, nous pouvons très clairement constater que l'allocation est largement plus équilibrée entre l'ensemble des actifs. En effet, en termes d'allocation moyenne à travers l'ensemble des portefeuilles, aucun actif n'affiche moins de 5% d'allocation. À l'inverse, peu d'actifs affichent une allocation extrême. Seul l'actif NBIX Equity présente un niveau dépassant les 20%. Précédemment, près de 3 actifs se retrouvaient surpondérés, limitant donc par conséquent le niveau de diversification. Mis à part les portefeuilles à rendement maximum (allouant l'entièreté de la richesse dans un unique actif), l'évolution de l'allocation est continue et « harmonieuse ».

À l'instar de l'entropie de Shannon, imposer une contrainte de poids permet également d'obtenir des résultats intéressants en termes de diversification. Nous retrouvons, dans les grandes lignes, les mêmes caractéristiques que ce que nous avons pu observer avec l'utilisation du critère d'entropie de Shannon. Aucun actif ne présente en effet une allocation de moins de 5%, ce qui était évidemment attendu. De plus, seul un actif (CINF Equity) affiche un niveau d'allocation supérieur aux 20%. Bien que cette stratégie soit fortement efficace en termes d'efficacité, celle-ci ne permet pas d'atteindre les mêmes niveaux de rendements que les trois stratégies précédentes. Intuitivement, nous comprenons aisément que le rendement maximum atteignable est tout simplement égal à  $45\% \times \text{le rendement de l'actif avec l'espérance la plus élevée} + \sum (5\% \times \text{le rendement de chaque actif restant})$ . Nous parvenons donc à obtenir un portefeuille certes plus diversifié mais au prix de rendement. Nous verrons plus tard graphiquement l'implication de cette stratégie en termes de frontière d'efficacité.

Les deux dernières stratégies offrent une solution mitigée entre ce qui fut proposé par Markowitz, Ledoit & Wolf d'un côté et le critère d'entropie de Shannon et l'entropie sur les poids ( $>5\%$ ).

La stratégie consistant à empêcher l'investissement à plus de 25% dans un actif engendre une surpondération dans 2 actifs, proposant une allocation au-delà des 20%. La stratégie du « Most Diversified Portfolio » ne suralloue que dans un unique actif (NBIX Equity). Cependant, les deux stratégies ci-dessus, même si offrant de meilleurs résultats en termes de surpondération, ne sont plus aussi efficaces en termes de sous-concentration. En effet, la stratégie MDP présente une allocation de moins de 5% dans 2 actifs, 3 actifs pour l'entropie sur les poids. Cependant, il demeure important de signaler qu'aucun actif ne présente une allocation nulle, contrairement aux stratégies de Ledoit & Wolf ainsi que

Markowitz.

A l'instar de l'entropie des poids forçant un investissement minimum de 5% sur chaque actif, l'entropie sur les poids limitant l'investissement à 25% réduit également les possibilités en termes de rendement maximum. En effet, intuitivement nous pouvons aisément déterminer le rendement maximum que nous puissions atteindre, équivalant  $\sum 25\%$  (le rendement des 4 actifs avec l'espérance la plus élevée) . Dans notre cas présent, notre rendement maximum sera égal à 22.64%, loin des 27.82% que nous avons obtenus à travers l'optimisation de Markowitz. De nouveau, nous pourrions constater cette limite plus tard sur les frontières efficientes que nous aurons obtenues. La stratégie MDP offre cependant la possibilité d'atteindre le même niveau de rendement que ceux atteints à travers une optimisation de Markowitz. Ceci explique donc en grande partie la raison d'une surconcentration dans l'actif NBIX.

La dernière stratégie proposée (incluant un terme de pénalité), n'est nulle autre qu'une stratégie limitant l'impact négatif du critère d'entropie de Shannon sur les frontières efficientes (comme nous le verrons par après) mais offrant tout de même un niveau de diversification très fortement similaire à ce qui a pu être observé dans le cas du critère d'entropie de Shannon. Nous remarquons que, indépendamment du poids que nous aurons donné à cette pénalité, le niveau de diversification demeure aussi élevé. Cependant, plus le gamma est faible, plus la frontière d'efficience se rapproche du niveau de Markowitz, et donc d'un niveau d'efficience élevé. Nous pouvons également voir que le terme de pénalité à une forte influence sur le résultat final et ce, indépendamment du poids de la pénalité. En effet, le facteur d'entropie de Shannon étant largement plus important que la valeur de l'écart-type.

## 4.3 Extension de l'étude empirique sur des données simulées

### 4.3.1 Données simulées avec rendements suivant une distribution normale

#### 4.3.1.1 Méthodologie

Comme cela fut exposé précédemment dans les limites que présente le modèle de Markowitz, il fut notamment mentionné les erreurs d'estimations de la matrice variance-covariance ainsi que du vecteur de rendement. Ces erreurs d'estimations généraient en effet une surconcentration (ou sous-concentration) sur un faible nombre d'actifs.

Ainsi, afin d'évaluer si ce problème de concentration est proprement dû aux erreurs d'estimations ou au modèle de Markowitz dans son ensemble, il aura été imaginé de réaliser le programme d'optimisation de Markowitz mais cette fois-ci avec un échantillon qui aura été simulé aléatoirement via Rstudio et dont nous savons que cet échantillon ne comportera pas d'erreurs d'estimations.

Nous avons pu donc, via Rstudio générer 9 vecteurs de longueur  $T=120$ , avec  $T$  représentant l'évolution des rendements du  $i$ ème vecteur. Nous avons également émis l'hypothèse que chaque vecteur était décrit par une distribution normale multivariée. Chaque vecteur sera donc caractérisé par une moyenne et un écart-type que nous aurons nous-mêmes aléatoirement définis.

Avec l'échantillon généré et en réalisant le programme d'optimisation proposé par Markowitz deux conclusions possibles s'offrent à nous. Dans un premier temps, nous pouvons nous attendre à un portefeuille présentant une diversification plus intéressante que celle initialement proposée par Markowitz. Dans ce cas-ci nous pourrions donc analyser ce résultat comme étant dû exclusivement aux erreurs d'estimations.

Cependant, nous pourrions être confrontés à un cas inverse, la diversification demeurant tout aussi faible qu'une optimisation Markowitz avec estimation « naïve » des rendements. Dans ce cas-ci, la nécessité d'introduire une nouvelle contrainte de diversification (dont nous avons discuté précédemment avec l'intégration de l'entropie dans la sélection de portefeuille) sera indispensable.

Afin de réaliser une étude du phénomène de concentration sur un échantillon parfaitement estimé, nous allons effectuer une optimisation de Markowitz telle qu'elle est présentée dans la section 4.1. La matrice variance – covariance et le vecteur de rendements seront générés via les données précédemment simulées grâce au logiciel R. Nous analyserons également l'impact des différentes autres stratégies étudiées précédemment sur la base de données que nous aurons simulée.

### 4.3.1.2 Résultats

En générant un portefeuille dont les facteurs d'entrée (matrice variance - covariance, vecteur de rendements) ont été parfaitement estimés (ne contenant donc aucune erreur d'estimations donc) par le biais d'une optimisation au sens Markowitz nous pouvons remarquer la critique dont nous avons fait état précédemment au regard du manque de diversification dont faisait preuve l'optimisation de Markowitz.

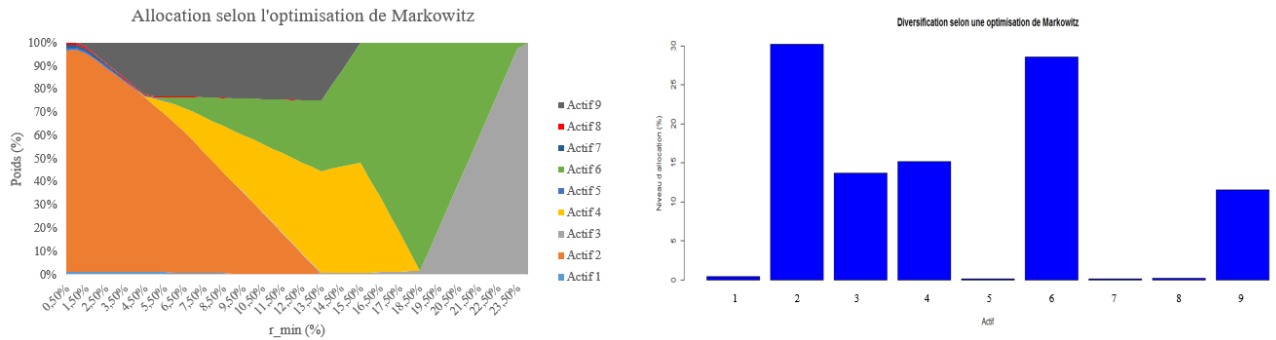


Figure 4.12: Diversification - Markowitz / Distribution normale -

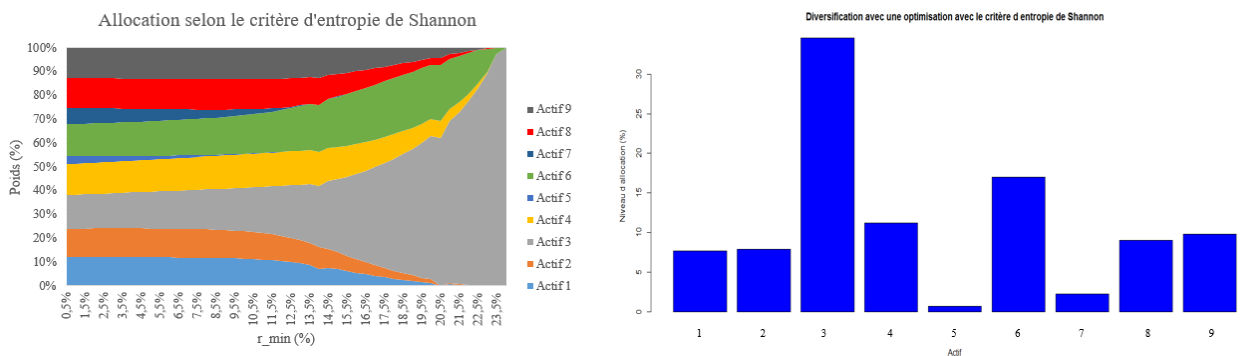


Figure 4.13: Diversification - Critère d'entropie de Shannon / Distribution normale -

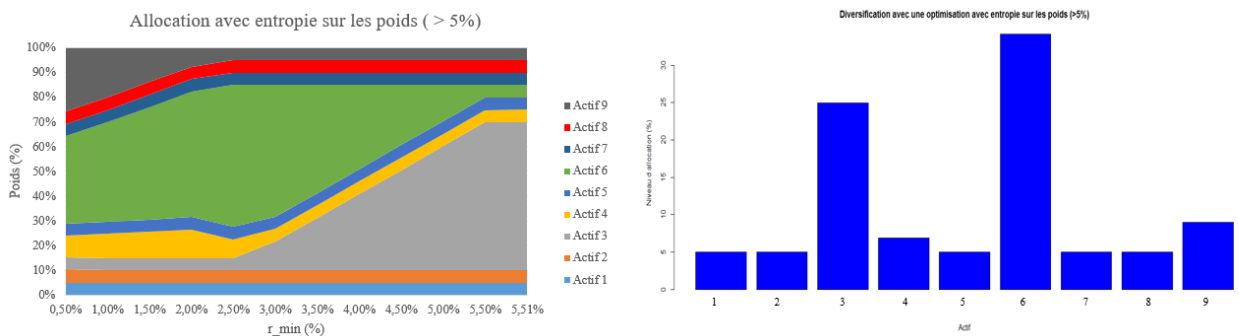


Figure 4.14: Diversification - Entropie sur les poids (>5%) / Distribution normale -

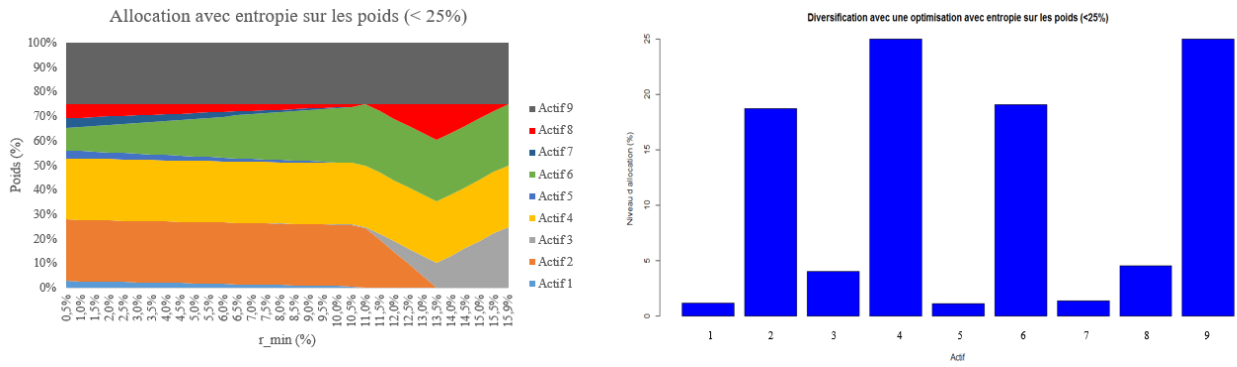


Figure 4.15: Diversification - Entropie sur les poids (<25%) / Distribution normale -

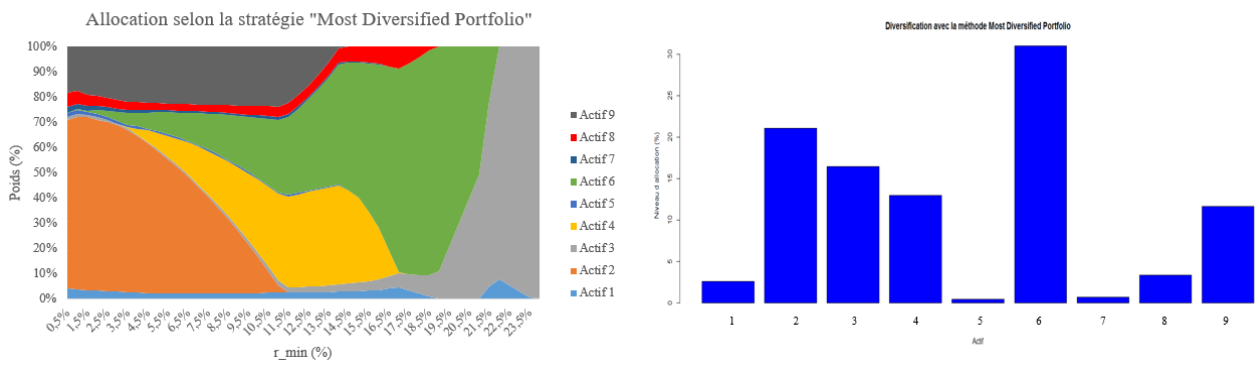


Figure 4.16: Diversification - Most Diversified Portfolio / Distribution normale -

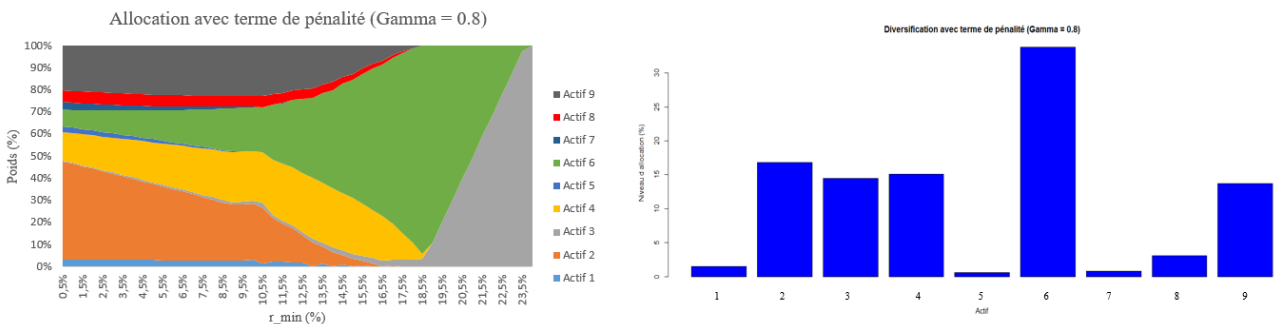


Figure 4.17: Diversification - Terme de pénalité ( $\gamma = 0.8$ ) / Distribution normale -

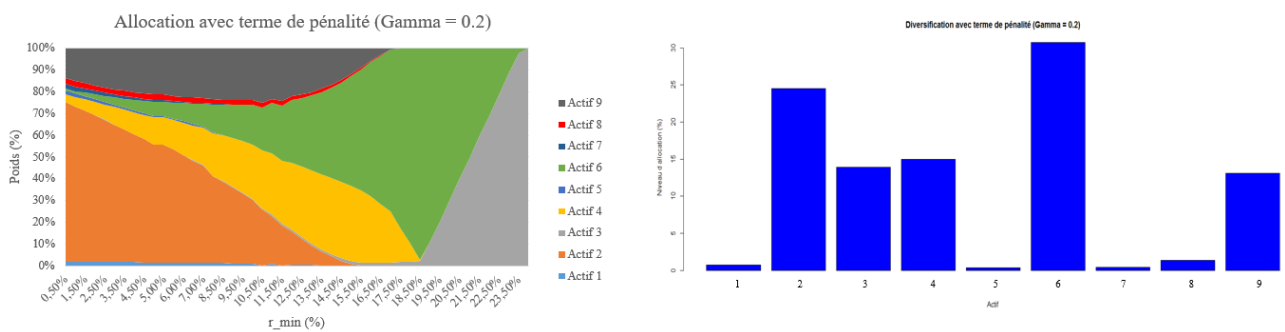


Figure 4.18: Diversification - Terme de pénalité ( $\gamma = 0.2$ ) / Distribution normale -

Nous pouvons en effet souligner à travers les deux graphiques obtenus que cette optimisation concentre, à travers l'ensemble des portefeuilles générés, son investissement sur seulement 4 actifs sur les 9 disponibles. Nous remarquons que, peu importe l'exactitude de l'estimation (assurée dans ce cas-ci), l'optimisation dans un sens Markowitz ne permet pas de réduire le manque de diversification. Nous soulignons en effet une surconcentration sur 2 actifs, avoisinant chacun un niveau d'allocation de 30%. A l'inverse, 4 actifs se retrouvent sous-représentés, ne dépassant, pour chacun d'entre eux, pas les 2% d'allocation. Nous pouvons donc considérer que les défauts d'estimations des paramètres d'entrée ne sont pas unique moteur des carences de diversification.

Cependant, nous faisons préalablement remarquer que ce défaut de diversification était principalement dû au fait d'une mauvaise estimation des facteurs d'entrée (matrice variance-covariance et le vecteur des rendements). Dans notre cas étudié ici, et comme nous le précisions préalablement, les facteurs d'entrée (la matrice variance - covariance et le vecteur de rendements) sont estimés de façon correcte. Nous aurions donc pu nous attendre à une diversification plus accentuée.

Au-delà de l'optimisation de Markowitz qui entérine les critiques faites précédemment, nous constatons en effet que les différentes alternatives d'optimisation offrent une diversification plus élevée et que le critère d'entropie apporte donc une solution crédible aux carences de diversification. Ce constat se fait principalement sur la stratégie utilisant le critère d'entropie de Shannon et l'utilisation de l'entropie sur les poids. Nous constatons en effet un investissement sur l'ensemble des actifs, mais surtout une évolution de l'allocation fortement harmonisée, avec un changement d'allocation très « structuré » à travers les différents niveaux de rendement minimum. Cette forte continuité permet par conséquent, et comme cela fut explicité précédemment de s'exposer dans une moindre mesure aux erreurs d'estimations. A l'instar de l'analyse précédente, les stratégies de diversification les plus efficaces ne sont autre que le critère d'entropie de Shannon et l'usage d'entropie sur les poids ( $>5\%$ ). Elles affichent en effet que très peu de surconcentration (1 et 2 actifs respectivement), mais également, et surtout peu de sous-concentration (2 pour le critère d'entropie, aucune sous-concentration pour l'entropie sur les poids ( $>5\%$ )), contrairement aux autres stratégies avec au minimum 4 actifs sous-représentés.

Nous constatons également qu'au-delà des nombreuses stratégies faisant usage de l'entropie afin de « forcer » la diversification, la stratégie du "Most Diversified Portfolio" n'égale

pas l'efficience en termes de diversification que les précédentes. En plus d'une sous-concentration sur 2 actifs en particulier (ce qui reste cependant meilleur que la stratégie de Markowitz), l'évolution à travers les différents niveaux de rendements demeure très aléatoire et n'est en rien comparable avec les stratégies précédentes.

Dernièrement, nous pouvons analyser, et ce contrairement au cas Bloomberg, que le terme de pénalité n'a qu'un faible apport en termes de diversification. Nous retrouvons tout de même 4 actifs non représentés dans l'ensemble des portefeuilles générés. L'augmentation du poids de la pénalité apporte, comme nous aurions pu nous y attendre, davantage de diversification. Cependant, cet apport ne demeure que sommaire, ceci étant grandement dû au fait que les valeurs de variances soient plus élevées. L'impact de la pénalité est donc amoindri.

Dans le cadre de cette étude, et en particulier dans l'analyse de la diversification de la stratégie de Markowitz, étant dans une situation dans laquelle les erreurs d'estimations ne peuvent être prises pour compte, nous pouvons donc entrevoir la possibilité que le modèle de Markowitz trouve une limite qui puisse être autre que l'estimation des facteurs (matrice de variance – covariance et vecteur de rendements). Nous poursuivrons donc une dernière étude alternative, proposant une alternative concernant la distribution des rendements.

En effet, Markowitz émettait comme hypothèse la distribution normale des rendements. Nous proposerons donc comme alternative d'étudier des rendements distribués de façon exponentielle.

### 4.3.2 Données simulées avec rendements suivant une distribution exponentielle

En constatant l'impact limité d'une estimation sans erreurs de données simulées avec une distribution normale (et sans erreurs d'estimations), il sera désormais intéressant de s'attarder donc sur la validité de la distribution normale de cesdits rendements, et donc de la distribution suggérée originellement par Markowitz.

De plus, et comme nous pouvions l'analyser à travers les différentes frontières efficientes que nous avons simulées précédemment, il apparaît clairement que battre la théorie de Markowitz semble quelque chose d'irréalisable, dans le cas où nous demeurons dans un cadre identique à celui initialement proposé par Markowitz. En effet, en restant dans le « monde idéal » qui est proposé, dans lequel cas nous considérerions que les rendements sont distribués de façon normale, il semble en effet impossible de surpasser la théorie de Markowitz.

Cependant, et comme cela fut exposé précédemment dans la section se rapportant aux limites de la théorie de Markowitz, nous faisons état d'une possible distribution non-normale des rendements, comme cela fut notamment avancé par Benoit Mandelbrot (2004). Celui-ci s'avança d'autant plus, en suggérant que les rendements suivraient une distribution exponentielle. Il sera par conséquent intéressant d'analyser une situation dans laquelle nous sortons du cadre standard de Markowitz, cadre ne correspondant donc plus au « monde idéal » qu'il proposa.

Nous avons donc voulu tester, dans un premier temps, la validité de cette distribution avec le modèle de Markowitz. En parallèle, il sera également intéressant d'analyser l'ensemble des stratégies étudiées précédemment (qui furent appliquées sur notre base de données Bloomberg et données distribuées normalement).

#### 4.3.2.1 Méthodologie

En constatant l'impact limité d'une estimation sans erreurs de données simulées avec une distribution normale, il sera désormais intéressant de s'attarder donc sur la validité de la distribution normale de cesdits rendements. Comme cela fut exposé précédemment dans la section se rapportant aux limites de la théorie de Markowitz, nous faisons état d'une possible distribution non normale des rendements, comme cela fut notamment avancé

par Benoit Mandelbrot (2004). Celui-ci s'avança d'autant plus, en suggérant que les rendements suivraient une distribution exponentielle.

### 4.3.2.2 Résultats

De façon assez générale, nous pouvons assez indubitablement constater que la distribution exponentielle des rendements apporte un impact positif sur la diversification des différentes stratégies d'optimisation étudiées.

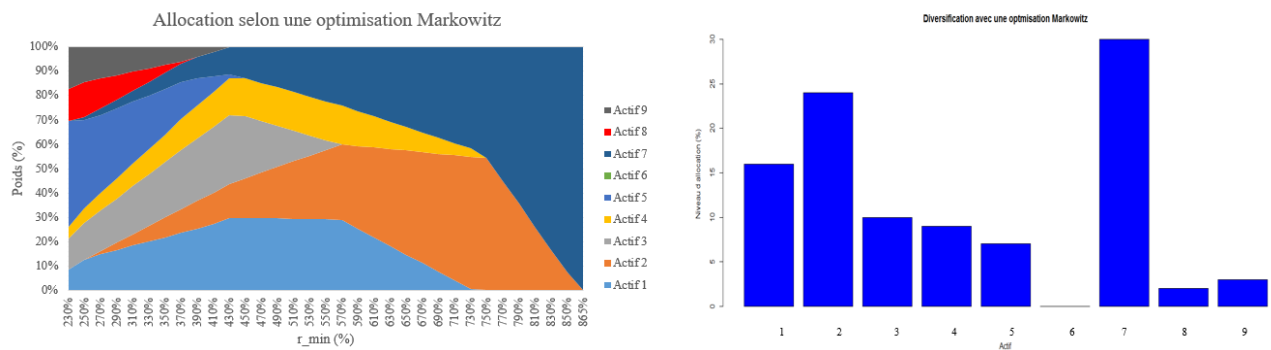


Figure 4.19: Diversification - Markowitz / Distribution exponentielle -

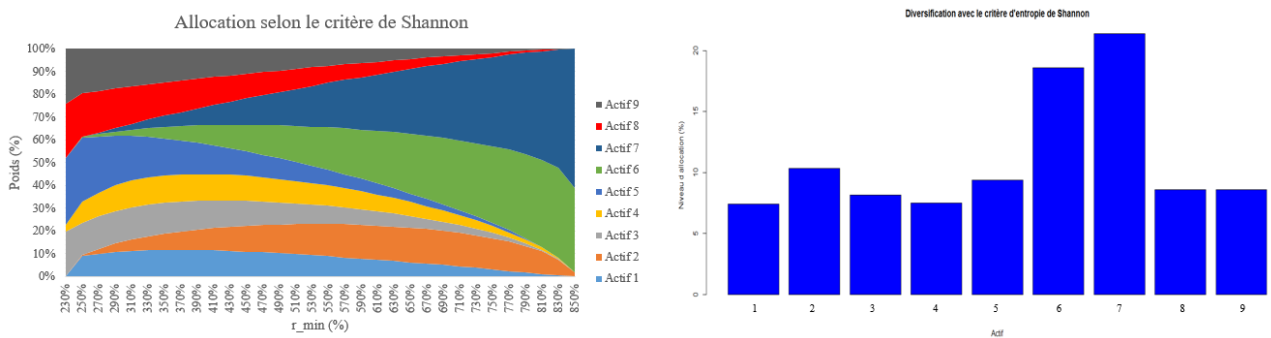


Figure 4.20: Diversification - Critère d'entropie de Shannon / Distribution exponentielle -

Dans un premier temps, et il s'agit du cas qui nous intéresse le plus, la distribution exponentielle des rendements apporte au modèle classique et pur de Markowitz une diversification plus « poussée » que ce que nous avons pu observer dans les deux cas précédents, avec distribution normale des rendements et rendements extraits sur Bloomberg. En effet, nous remarquons très clairement que dans le cadre de données distribuées exponentiellement, nous retrouvons une sous-concentration seulement sur un actif, contrairement aux autres modèles affichant une sous-concentration sur 4 actifs sélectionnables.

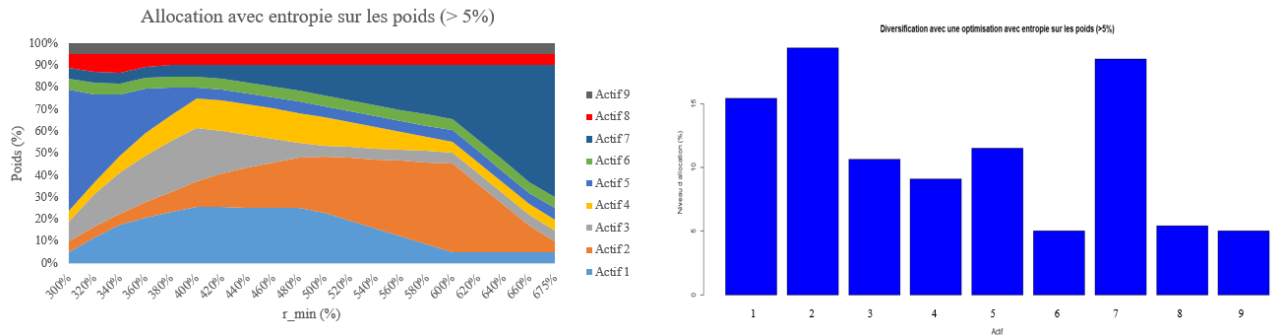


Figure 4.21: Diversification - Entropie sur les poids (>5%) / Distribution exponentielle -

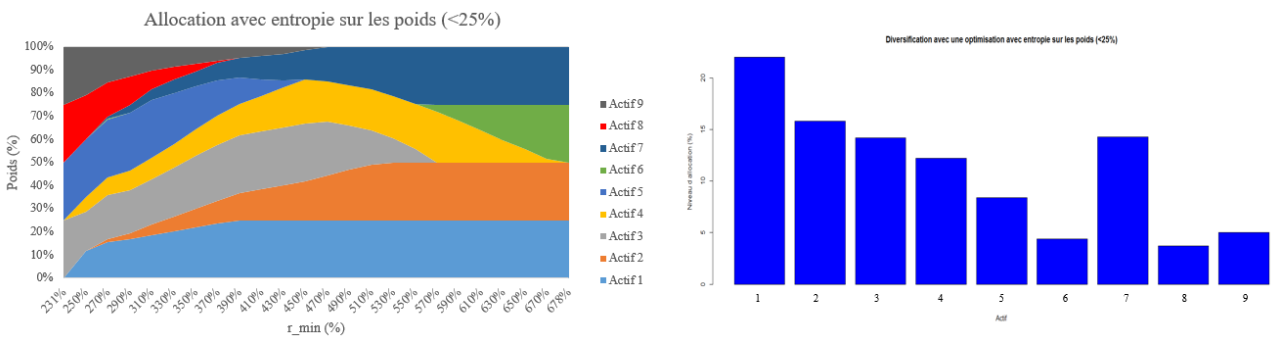


Figure 4.22: Diversification - Entropie sur les poids (<25%) / Distribution exponentielle

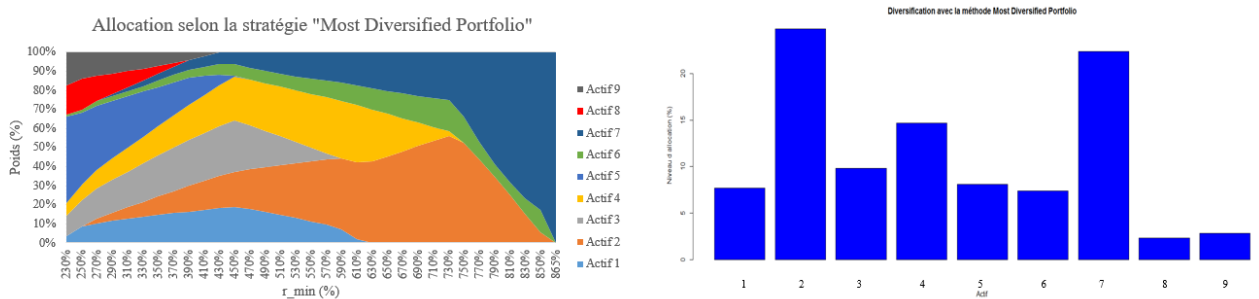


Figure 4.23: Diversification - Most Diversified Portfolio / Distribution exponentielle -

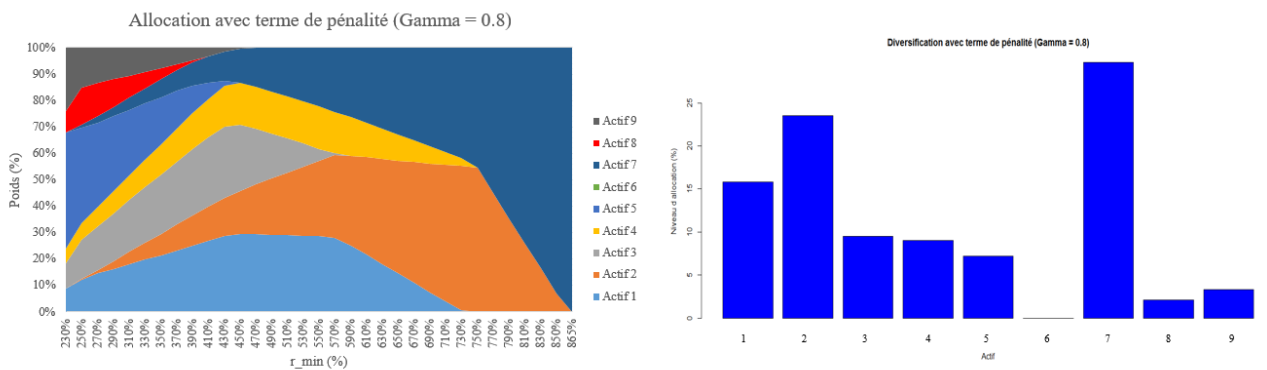


Figure 4.24: Diversification - Terme de pénalité ( $\gamma = 0.8$ ) / Distribution exponentielle -

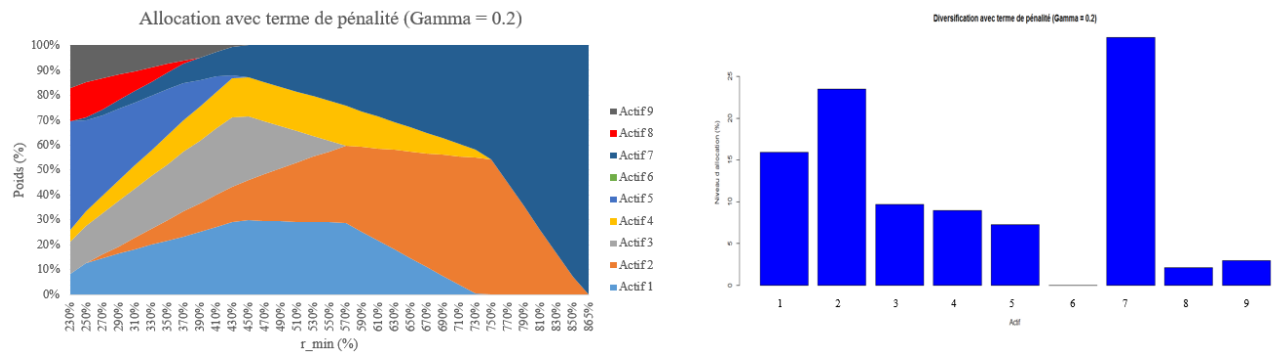


Figure 4.25: Diversification - Terme de pénalité ( $\gamma = 0.2$ ) / Distribution exponentielle -

En comparaison avec les données distribution de façon normale, les données distribuées exponentiellement performant, en termes de diversification, de façon largement plus efficiente. Que ce soit la stratégie d'entropie sur les poids, mais surtout le critère d'entropie de Shannon, une distribution exponentielle offre, de facto, une diversification largement plus élevée.

Nous constatons d'autant plus une certaine homogénéité des résultats, dans le sens où, une fois de plus, les stratégies utilisant le critère d'entropie de Shannon et l'entropie sur les poids ( $>5\%$ ) sont les stratégies les plus payantes en termes de diversification.

De plus, nous pouvons également constater l'impact intéressant sur l'évolution de l'allocation à travers les différents rendements proposés. Ce constat est d'autant plus frappant lorsque nous analysons les stratégies d'entropie sur les poids et le critère d'entropie de Shannon. Le changement d'allocation se faisant en fonction du rendement attendu est en effet assez harmonisé et ne fait pas état de modifications importantes comme cela aurait pu être le cas dans les situations précédemment étudiées.

En se concentrant désormais uniquement sur cette base de données ci et à l'instar de ce que nous avons pu observer dans les situations étudiées précédemment, l'entropie permet en effet d'obtenir une diversification accrue et ce en particulier avec le critère d'entropie de Shannon. Le critère d'entropie de Shannon apparaît indiscutablement comme la stratégie permettant de diversifier le plus le portefeuille obtenu par un portefeuille. Aucun actif sélectionnable affiche en effet un niveau d'investissement en-deçà des 5%. Comme ce fut explicité précédemment, l'entropie sur les poids permet certes d'obtenir un niveau de diversification hautement plus élevé, mais limite les rendements possiblement atteignables.

En analysant l'impact du terme de pénalité sur l'échantillon distribué exponentiellement, nous remarquons cependant que l'impact est beaucoup plus faible sur le niveau de diversification. En effet, le niveau d'écart-type étant largement plus élevé, l'impact d'une pénalité est donc largement affaibli. Et nous remarquons par conséquent que la diversification est fortement proche de celle de Markowitz, ainsi que pour les frontières efficaces qui sont ici confondues. Cependant, rappelons qu'une approche avec rendements distribués exponentiellement offre, originellement, un niveau de diversification plus élevé.

Ceci mène donc inévitablement vers la question de savoir si l'hypothèse initiale de Markowitz, affirmant la distribution normale des rendements, est cohérente. L'analyse que nous portons nous pousserait à confirmer la thèse avancée par Benoit Mandelbrot (2004), et qu'une distribution exponentielle serait en effet plus efficace afin de décrire les rendements. Cependant, il sera fondamental de garder à l'esprit que ceci ne constitue en aucun cas une situation réelle. Il serait "réducteur" de penser que l'ensemble des rendements soient décrits par une distribution exponentielle.

## 4.4 Conclusion de l'analyse in-sample

Afin de se rendre compte précisément de l'efficience de chacune des stratégies, il sera nécessaire de comparer les frontières efficientes que celles-ci dégagent. Les résultats obtenus affichent des résultats quelque peu instructifs.

Dans un premier temps, et comme nous l'avions pu l'imaginer préalablement, les stratégies d'entropie sur les poids, au-delà de présenter une frontière d'efficience moins efficiente que celles de Markowitz et de Ledoit & Wolf, ne permettent pas d'atteindre le rendement affiché par l'ensemble des autres stratégies. Ceci démontre donc dans un premier temps la limite que comportent les deux stratégies d'entropie sur les poids.

De plus, et ce pour l'ensemble des stratégies concernant le « forçage » de diversification, nous constatons que toutes ces dernières présentent une frontière d'efficience plus faible que les stratégies d'optimisation de Markowitz et d'estimateur de Ledoit & Wolf. A niveau de rendement donné, nous remarquons en effet que chaque méthode de diversification présente un niveau de risque plus élevé que les deux méthodes d'optimisation restantes (Markowitz et Ledoit & Wolf).

Cependant, et comme cela fut exposé par Markowitz (1952) dans ses premiers travaux, l'objectif principal de la diversification serait de réduire le risque auquel s'expose l'investisseur. Nous remarquons ici à travers ces résultats que, malgré une diversification incontestablement plus efficace, cela n'enlève rien, bien au contraire, à l'exposition au risque de l'investisseur. En effet, en objectivant d'atteindre un risque donné, un investisseur s'exposera à un risque plus élevé, comme le démontrent les frontières d'efficience.

Il se pose dès lors la question de savoir la dualité à laquelle s'expose un investisseur :

- D'un côté, il peut opter pour une stratégie proposant une diversification plus efficace et donc réduisant potentiellement l'exposition de son investisseur au risque. Cependant, le risque « réel » encouru sera lui accru.
- De l'autre côté, opter pour une stratégie d'optimisation qui ne diversifie que très faiblement le portefeuille de l'investisseur et exposant ainsi celui-ci à un risque accru, mais cependant affichant un risque « réel » moindre en comparaison avec le risque encouru suivant une stratégie de diversification.

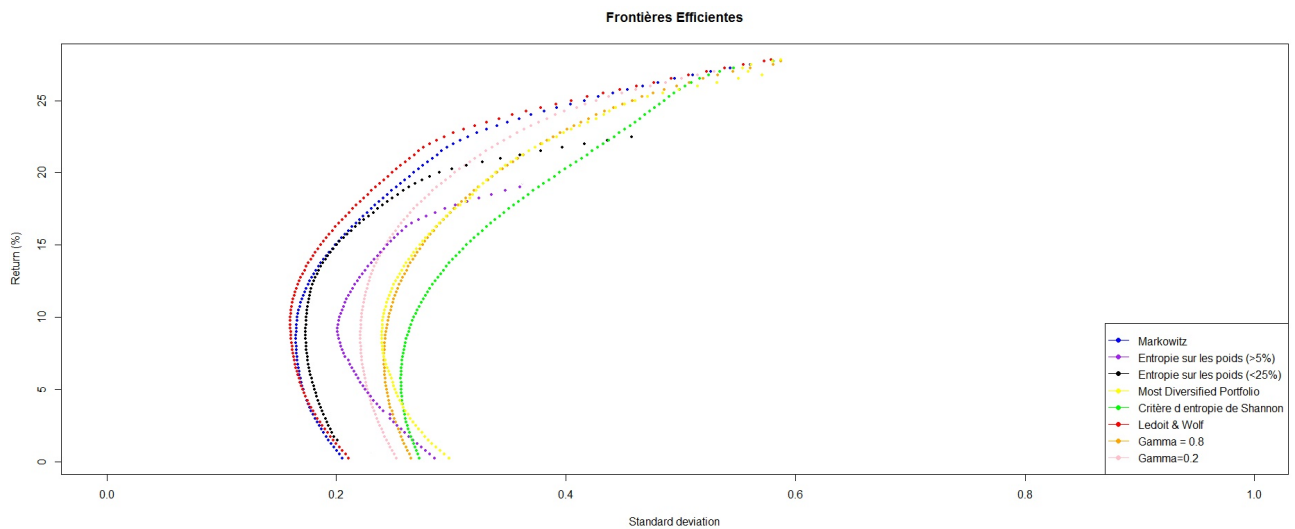


Figure 4.26: Frontières efficaces des différentes stratégies étudiées sur l'échantillon extrait de Bloomberg

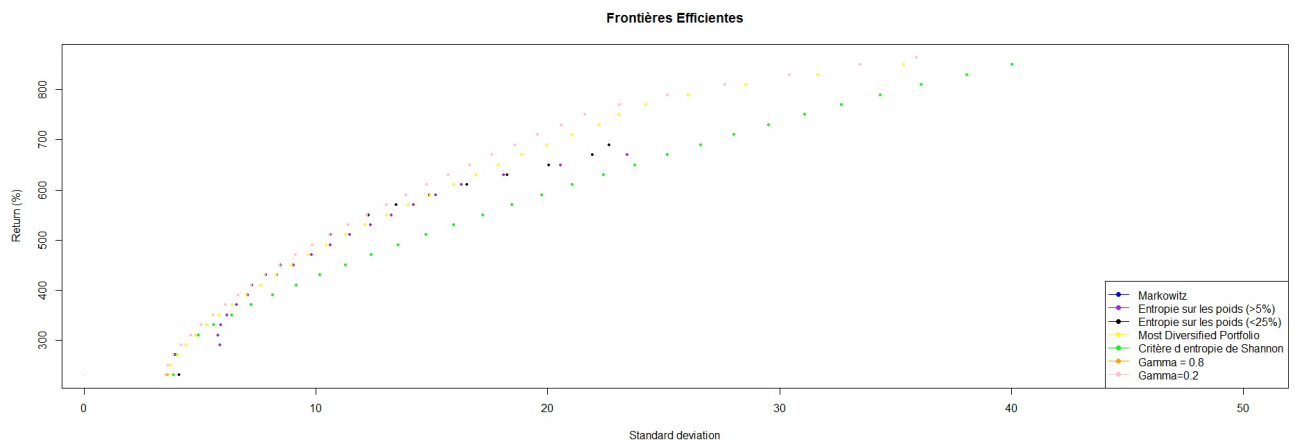


Figure 4.27: Frontières efficaces des différentes stratégies étudiées avec distribution exponentielle

Forcer la diversification permettra de se prémunir contre les erreurs d'estimations qu'encourent les paramètres d'entrée (matrice de variance – covariance et vecteur de rendements). En effet, en ne diversifiant pas son portefeuille, un investisseur s'expose aux possibilités d'erreurs et donc de changements drastiques de l'allocation d'un jour à l'autre. Ceci constituant donc une inconstance relativement forte des allocations pourrait pousser un investisseur à se tourner vers des portefeuilles proposant une diversification plus forte. En forçant la diversification d'un portefeuille, cela limitera en effet l'impact des erreurs d'estimations sur les poids qui auront été générés. Ceux-ci ne seront certes pas supprimés, mais fortement limités. La variation des poids au cours du temps ou en fonction des rendements sera fortement altérée par ladite diversification.

De plus, nous pouvons également porter un regard plus pratique en n'oubliant pas le rôle principal que porte la diversification. Celle-ci permet en effet de réduire son exposition au risque futur. En effet, les mouvements futurs des actifs ne peuvent jamais être prédits avec exactitude. Il est en effet en partie erroné que d'estimer que les variations futures des actifs ne se fasse que sur base des données historiques. De multiples exemples historiques (1929, 2002, 2008) nous démontrent en effet les comportements tout à fait « aléatoires » au regard des données historiques. En ne concentrant son portefeuille que sur un actif unique, l'investisseur s'expose entièrement aux fluctuations aléatoires futures d'un actif. En proposant un portefeuille diversifié, l'investisseur se « protégera » davantage au regard des fluctuations futures aléatoires.

Nous verrons également grâce à l'analyse ultérieure, qu'au-delà des changements d'allocations, les méthodes de diversification proposent également quelques avantages en termes de ratios, à savoir Adjusted Sharpe Ratio et Turnover.



# Chapter 5

## Analyse out-of-sample des différentes stratégies étudiées

### 5.1 Méthodologie

Contrairement à l'analyse in-sample dans laquelle nous nous attardions davantage sur l'aspect « allocation » des actifs, le focus de l'analyse out-of-sample sera également porté sur la révision de la performance réalisée par les différents portefeuilles que nous aurons arbitrairement définis.

Cette approche out-of-sample sera effectuée sur les différentes stratégies de diversification que nous avons proposées précédemment tout au long de cette thèse (rappel : Most diversified portfolio, entropie sur les poids, critère d'entropie de Shannon).

Afin d'étudier la performance out-of-sample, nous nous attarderons spécifiquement sur 3 portefeuilles distincts :

- Portefeuille à variance minimale
- Portefeuille à rendement maximal
- Portefeuille à risque intermédiaire

Nous nous intéresserons à étudier la performance (en termes de diversification et de rendement) des différents portefeuilles à travers le temps, sur une période allant de 2008 à 2017.

Le programme d'optimisation sera dans ce cas-ci quelque peu différent. Dans le premier cas, nous aurons donc à cœur d'opter pour le portefeuille à variance minimale. Dans ce cas-ci, et contrairement à l'étude in-sample, il ne sera plus nécessaire de fixer un rendement à atteindre.

Dans le cas du portefeuille à rendement maximal, le programme d'optimisation sera également quelque peu différent de ce que nous aurons réalisé dans l'analyse « in-sample ». Le cas ci-présent nous portera à modifier la fonction « objectif ». En effet, notre rendement est à maximiser, et ce, sans prendre en compte la notion de risque.

## 5.2 Evaluation de la performance d'un portefeuille

### 5.2.1 Du Sharpe ratio au Adujsted Sharpe ratio

De nombreuses mesures de performances ont été proposées dans la littérature financière afin d'évaluer la performance de portefeuilles.

Traditionnellement, nous trouvons comme mesure de performance le « Sharpe Ratio » qui, comme son nom l'indique, fut développé par Sharpe. D'autres ratios « traditionnels » tels que ratio de Treynor ou Jensen Alpha furent développés, mais ne seront pas abordés dans le cadre de cette thèse.

Le ratio de Sharpe se définit mathématiquement comme suit :

$$SR = \frac{E[R_p]}{\sqrt{\sigma^2[R_p]}} \quad (5.1)$$

Avec  $R_p$  étant le return du portefeuille.

Le Sharpe ratio comme il est défini ci-dessus est basé sur la théorie Mean – Variance proposée dans la section 3. Dès lors, cela implique que ce ratio n'est valide que pour des rendements normalement distribués. Cependant, nous avons démontré précédemment que cette hypothèse de distribution normale n'était pas respectée dans la réalité. Les résultats obtenus pourraient dès lors mener à de conclusions biaisées, en particulier lorsque le Kurtosis ou la Skewness dérivent fortement de respectivement 3 et 0, ce qui fut, pour rappel, le cas dans le panier d'actifs sélectionnés.

Pour se faire, nous utiliseront le « Adjusted for skewness Sharpe Ratio » qui, comme son nom l'indique, prendra en considération la skewness du portefeuille obtenu (Biglova, A., Ortobelli, S., Rachev, S., Stoyanov, S., 2004). Par conséquent, il fut judicieux d'analyser la performance des portefeuilles et des théories suivant un ratio ajusté.

Ce dernier est mathématiquement défini comme suit :

$$ASR = SR \times \sqrt{1 + \frac{sk[R_p]}{3} SR} \quad (5.2)$$

La skewness du portefeuille  $p$  est obtenue comme suit :

$$Sk[R_p] = \Sigma(\pi_i \times Sk(r_i)) \quad (5.3)$$

### 5.2.2 Turnover

Afin de mesurer la performance de chaque portefeuille, nous utiliserons également la notion du turnover. Le turnover consiste en la somme des valeurs absolues des différences d'allocations entre deux périodes  $t$  et  $t-1$ .

Cette mesure nous permettra d'analyser le changement d'allocation entre deux périodes de temps. Le résultat sera exprimé en pourcentage et nous indiquera donc le taux de changement que le nôtre portefeuille aura subi sur la période.

Mathématiquement, le turnover se définit comme suit :

$$Turnover(t) = \sum_{i=1}^n | \pi_{it} - \pi_{i(t-1)} | \quad (5.4)$$

Généralement, un investisseur favorisera toujours un portefeuille présentant un turnover faible. En effet, la réalité impose des coûts de transactions. Cependant, et comme nous l'avons exposé dans les hypothèses de départ, le modèle de Markowitz fait abstraction de toute forme de coûts de transaction. Un turnover élevé impliquera des coûts de transactions plus élevés et donc une efficacité de notre portefeuille décriée.

### 5.2.3 Analyse des résultats

A travers cette section, nous analyserons la performance de 3 portefeuilles pour chaque stratégie entre 2008 et 2017. Nous concentrerons notre analyse sur 3 dimensions : la concentration au cours du temps des actifs, la performance en termes de rendements cumulés ainsi que deux ratios que nous avons exposés ci-dessus : Adjusted Sharpe Ratio et le Turnover.

#### 5.2.3.1 Portefeuilles à variance minimale

A l'instar de ce que nous avons obtenu comme résultats dans une analyse in-sample, la stratégie de Markowitz offre une diversification faible au cours du temps, à l'inverse des différentes autres stratégies étudiées. Nous pouvons constater les mêmes conclusions que précédemment à savoir la surconcentration sur un faible nombre d'actifs (à savoir LSTR Equity et CINF Equity). Dans le cadre de l'analyse du portefeuille à variance minimale, nous remarquons en effet qu'au cours du temps, ces deux actions présentent la caractéristique d'afficher la variance la plus faible en comparaison avec les autres actifs étudiés. Ceci explique par conséquent cette concentration sur ces deux actifs en particulier.

En plus de la stratégie Markowitz, l'entropie sur les poids limitant la concentration à 25% d'un actif dans un portefeuille. Nous constatons en effet que 4 actifs ne sont que très peu sollicités au cours des 10 ans d'analyse. Cependant, et comme nous l'avions constaté dans l'analyse in-sample, cette stratégie ne surpondère pas ses portefeuilles sur un faible nombre d'actifs. En effet, sur les 10 actifs possibles, les portefeuilles allouent leurs richesses sur 4-5 actifs, contrairement à l'approche Markowitz surpondérant sur 2 actifs.

A l'opposé, nous retrouvons une forte diversification pour l'ensemble des autres stratégies étudiées, avec sensiblement une meilleure performance en terme de diversification pour les stratégies de Most diversified Portfolio et le critère d'entropie de Shannon. Cependant, la stratégie MDP et Critère de Shannon offrent à leurs porteurs un niveau de turnover particulièrement élevé. Cela signifie donc, qu'en présence de coûts de transactions (ce dont nous avons fait abstraction dans notre étude théorique), les stratégies MDP et Critère de Shannon réaliseraient une performance décrue.

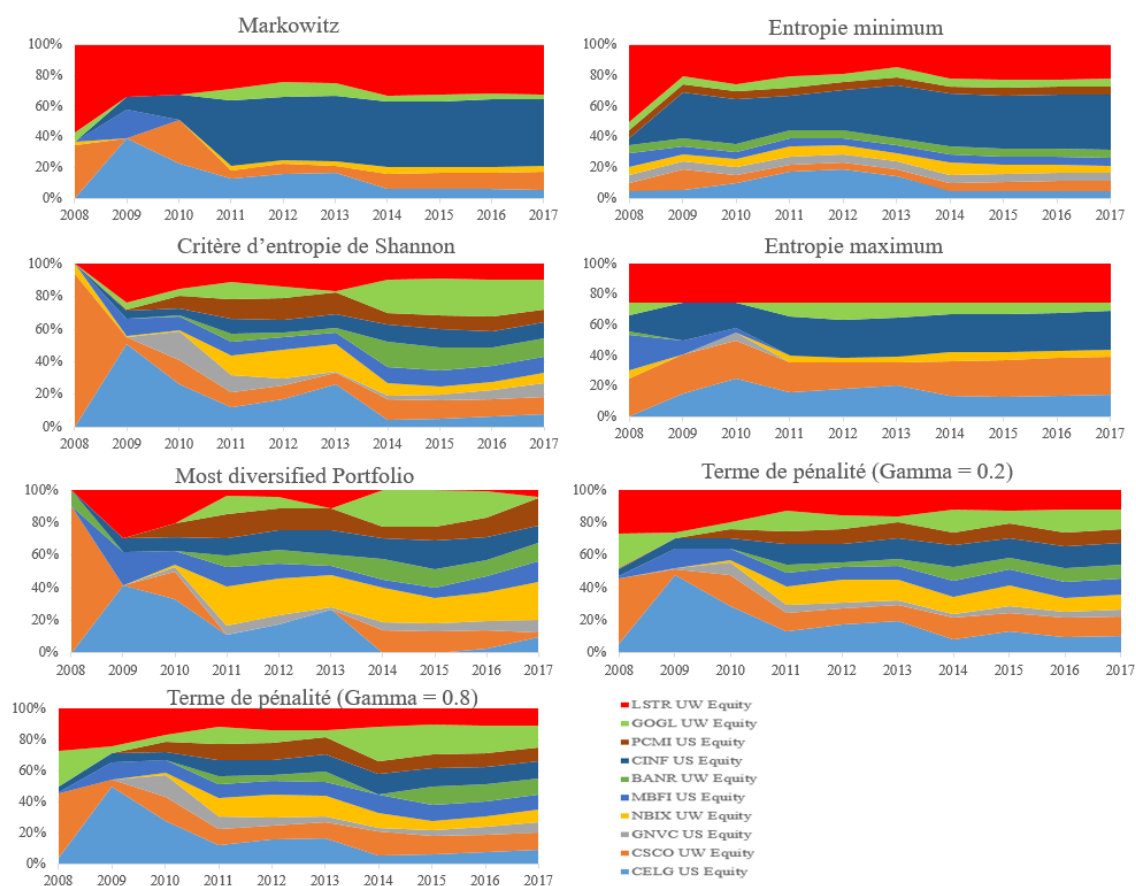


Figure 5.1: Evolution de l'allocation des portefeuilles minimum variance

A l'instar de ce que nous avons pu observer dans le cadre de l'analyse in-sample, l'approche de Markowitz présente la diversification la plus faible mais se targue du niveau de risque moyen (St. Dev dans le tableau) le plus faible en comparaison avec les différentes stratégies, avec la stratégie MDP affichant le niveau de risque le plus élevé. Dans le cadre donc d'une analyse d'un portefeuille à variance minimale, la stratégie de Markowitz semble la plus performante.

Cependant, au regard du rendement moyen le plus faible, à l'inverse de l'entropie sur les poids ( $>5\%$ ), affichant un rendement moyen sur les 10 ans de 1,30%. Nous remarquons à l'inverse que la stratégie de Markowitz se situe dans la moyenne au regard des autres stratégies en termes de rendements cumulés et d'Adjusted Sharpe Ratio. L'entropie minimale (imposant une contrainte de 5% minimum sur chaque actif dans le portefeuille) apparaît comme la stratégie performant les résultats les plus probants, tant en termes de rendements cumulés, surperformant chaque stratégie sur l'ensemble de l'horizon temporel, mais également en termes de ASR, affichant un ratio de 0.73.

Stratégie	Rendement	St. Dev	Skewness	ASR	Turnover
Markowitz	0,71%	18,25%	-0,446	0,054	10,02%
Entropie Min	1,30%	19,93%	-0,220	0,073	6,56%
Entropie Max	0,83%	18,30%	-0,292	0,056	5,76%
Critère de Shannon	0,85%	23,70%	-0,062	0,032	16,71%
Most diversified portfolio	0,81%	24,32%	-0,028	0,038	17,43%
Terme de pénalité $\gamma = 0.2$	1,09%	21,19%	-0,026	0,053	10,39%
Terme de pénalité $\gamma = 0.8$	1,00%	21,37%	0,004	0,062	11,07%

Table 5.1: Performance des différentes stratégies - risque minimum -

A l'instar de ce que nous avons pu analyser dans notre analyse in-sample, la stratégie imposant un terme de pénalité sur la fonction objectif se trouve dans l'entre-deux, n'étant la stratégie performant le mieux, mais n'étant pas en reste non plus. Nous constatons en effet que, indépendamment la "force" de pénalité, l'ensemble des ratios indicateurs de performance ne surperforment pas vis-à-vis de la stratégie usant l'entropie sur les poids. En particulier, le turnover dégagé par la stratégie de pénalité demeure assez faible, imposant un changement moyen de la composition du portefeuille de plus de 10%. Cependant, nous parvenons tout de même à produire une performance, en termes de rendement, assez élevée en comparaison à l'ensemble des autres stratégies étudiées. Ceci s'accompagne néanmoins d'un niveau de risque plus élevé, influençant donc négativement le ASR.

Nous pouvons finalement également souligner que les stratégies de pénalité offrent une diversification au cours du temps assez accrue, en faisant abstraction des premières années. En faisant fi de ces premières années, le terme de pénalité sur les poids démontre le niveau de diversification le plus élevé, et ce, même en comparaison de l'entropie de Shannon. Ceci n'est cependant pas toujours vrai, nous le verrons dans les cas suivants.

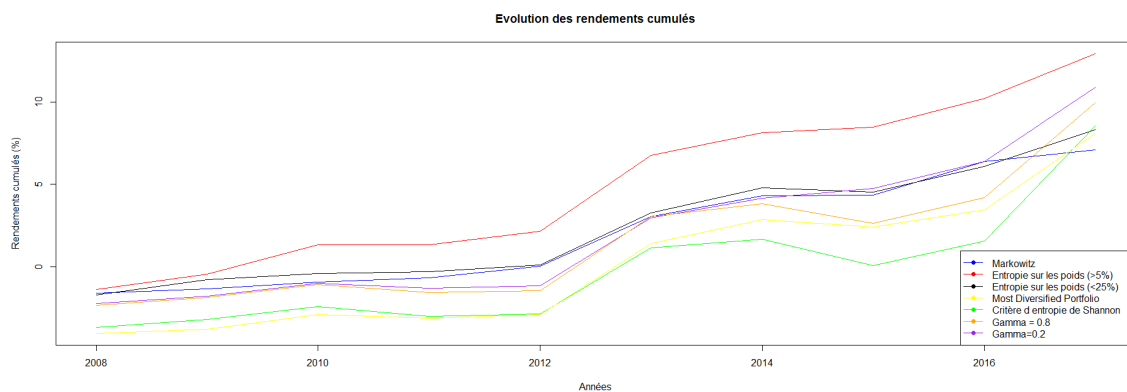


Figure 5.2: Evolution des rendements cumulés des portefeuilles minimum-variance

### 5.2.3.2 Portefeuilles à risque intermédiaire

Nous pouvons constater, de façon générale sur chaque stratégie étudiée, que la performance en termes de diversification est plus faible en comparaison avec les portefeuilles à risque minimal. Nous remarquons en effet une surconcentration sur un actif (CELG Equity) dans l'ensemble des stratégies, et ce, en particulier dans la stratégie de Markowitz, allouant jusqu'à près de 70% de sa richesse dans cette action spécifique. Le manque de diversification est donc, et à l'instar du portefeuille à risque minimal, toujours aussi caractéristique de la stratégie de Markowitz. L'entropie maximum (empêchant donc une allocation de plus de 25% sur un actif dans un portefeuille) est la seule stratégie n'affichant pas de surpondération au cours des dix années de rendements étudiés. Nous notons également que plus nous nous éloignons de 2008 (et donc de la crise), plus la diversification des stratégies MDP et critère de Shannon sont efficaces. Ces dites stratégies proposent en effet une allocation quasi identique entre l'ensemble des actifs sélectionnables.

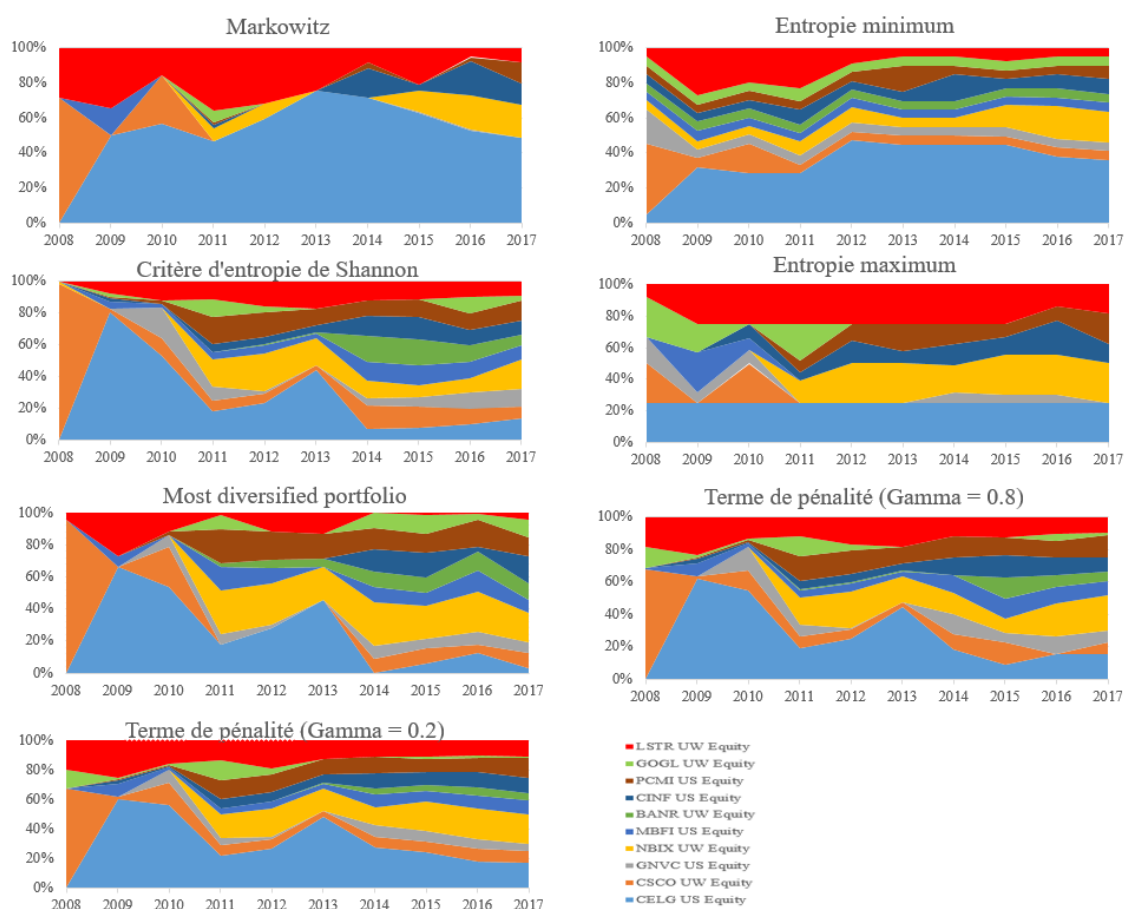


Figure 5.3: Evolution de l'allocation des portefeuilles à risque intermédiaire

Stratégie	Rendement	St. Dev	Skewness	ASR	Turnover
Markowitz	1,21%	23,38%	-0,103	0,059	18,31%
Entropie Min	1,36%	23,82%	0,030	0,063	10,00%
Entropie Max	1,21%	23,50%	0,054	0,064	13,38%
Critère de Shannon	1,12%	23,43%	0,036	0,054	18,11%
Most diversified portfolio	1,25%	25,33%	0,067	0,053	17,19%
Terme de pénalité $\gamma = 0.2$	1,18%	22,16%	0,082	0,068	15,94%
Terme de pénalité $\gamma = 0.8$	1,13%	22,09%	0,142	0,075	16,18%

Table 5.2: Performance des différentes stratégies - risque intermédiaire -

Comme nous l'avons souligné pour les portefeuilles à variance minimale, les deux stratégies d'entropie sur les poids proposent les turnovers les plus faibles en comparaison avec les autres stratégies étudiées. La performance de ces deux stratégies serait par conséquent accrue en termes de performance réelle (et donc la présence de coûts de transactions) au regard des autres stratégies disponibles.

Les rendements moyens annuels réalisés par chaque stratégie ne sont pas aussi disparates que dans le cas de portefeuilles à variance minimale. L'entropie minimale demeure la stratégie réalisant la performance (en terme de rendement mensuel moyen donc) la plus efficiente. La stratégie de Markowitz réalise une performance, en comparaison des autres stratégies, plus convaincante. La méthode utilisant le critère de Shannon performe cependant le moins bien, affichant un rendement moyen de 1,12%.

A l'instar des rendements moyens annuels, les rendements cumulés sont également moins disparates que dans le cas des portefeuilles à risque minimal. La méthode utilisant le critère d'entropie de Shannon demeure la stratégie la moins efficiente, comme cela fut également souligné pour les rendements annuels moyens. Markowitz et l'entropie minimale de 5% réalisent une performance similaire, surperformant toutes les autres stratégies étudiées.

Il est, une fois de plus, intéressant de constater que la stratégie de Markowitz, bien qu'affichant le niveau de diversification le plus faible, présente également le niveau de risque le plus faible de toutes les stratégies étudiées. Cela permet donc à cette stratégie d'offrir un Adjusted Sharpe Ratio plus élevé que la stratégie MDP et critère de Shannon.

Les deux stratégies d'entropie sur les poids affichent le ASR le plus élevé. Même si celles-ci présentent un niveau de risque élevé, en comparaison avec les autres stratégies étudiées, les deux stratégies d'entropie sur les poids compensent ce risque par un rendement plus élevé.

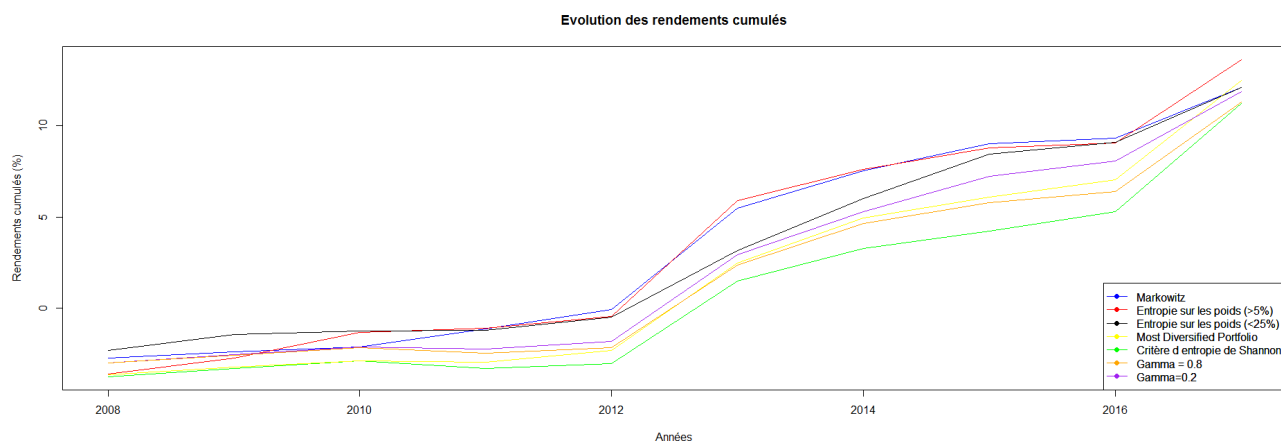


Figure 5.4: Evolution des rendements cumulés des portefeuilles maximum return

### 5.2.3.3 Portefeuilles à rendement maximum

Dans le cadre de l'étude des portefeuilles à rendements maximaux, nous pouvions nous attendre préalablement aux résultats obtenus. Les stratégies de Markowitz, MDP et de critère de Shannon offrent des résultats, au cours de la période étudiée, parfaitement identiques, tant au niveau de la diversification qu'en termes de rendements cumulés ou de ratios étudiés. Cela semble en effet cohérent puisque seul le vecteur de rendement apparaît comme facteur d'influence sur le résultat final. De plus, la diversification issue de ces 3 stratégies est également au plus bas. Chaque période n'alloue sa richesse que dans un actif en particulier, celui affichant le rendement le plus élevé à une période donnée. Nous obtenons également pour ces 3 stratégies les turnovers les plus élevés. Cela s'explique évidemment par les changements radicaux opérés sur chaque période, passant d'une allocation de 100% sur un actif à la période 2008, à une allocation de 100% dans un autre actif à la période suivante. Ces types de stratégies auraient donc une performance quelque décriée au regard des stratégies restantes.

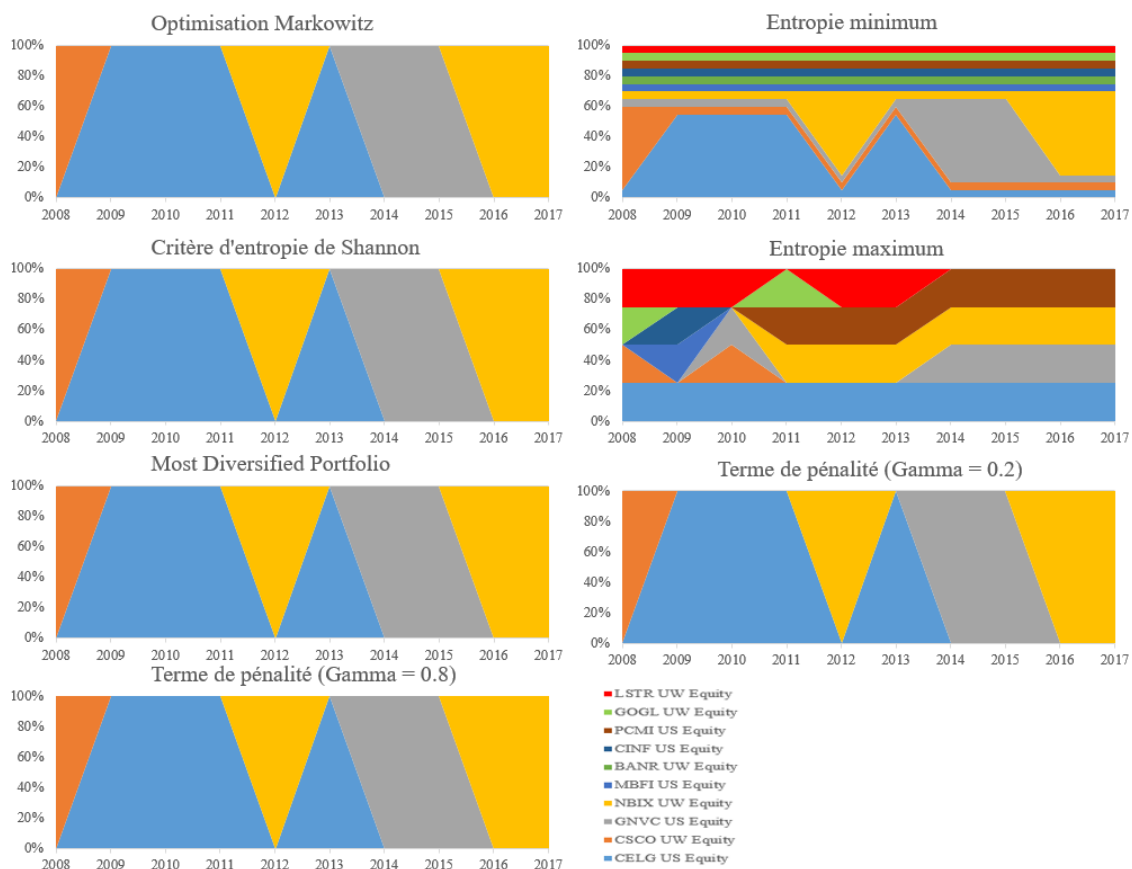


Figure 5.5: Evolution de l'allocation des portefeuilles à risque maximal

Stratégie	Rendement	St. Dev	Skewness	ASR	Turnover
Markowitz	0,86%	39,48%	1,156	0,028	20,00%
Entropie Min	1,21%	29,77%	0,653	0,039	10,00%
Entropie Max	1,98%	33,88%	0,706	0,050	15,00%
Critère de Shannon	0,86%	39,48%	1,156	0,028	20,00%
Most diversified portfolio	0,86%	39,48%	1,156	0,028	20,00%
Terme de pénalité $\gamma = 0.2$	0,86%	39,48%	1,156	0,028	20,00%
Terme de pénalité $\gamma = 0.8$	0,86%	39,48%	1,156	0,028	20,00%

Table 5.3: Performance des différentes stratégies - maximum return -

A l'inverse, il était attendu que le rendement réalisé par les méthodes d'entropie sur les poids soient différents, à l'image de l'analyse in-sample. Toutefois, le cadre « in-sample » nous limitait dans le rendement maximal qu'une stratégie pouvait apporter, fournissant en effet un rendement maximal en deçà de la stratégie de Markowitz. Dans l'échantillon que nous possédons, et contrairement à l'analyse in-sample, les stratégies d'entropie sur les poids surperforment toutes les autres stratégies comme nous pouvons le constater sur la figure 26. Les stratégies d'entropie permettent également, dans les portefeuilles extrêmes de limiter la surconcentration sur un unique actif comme nous avons pu le souligner dans les stratégies MDP, Critère de Shannon et Markowitz ou utilisant un terme de pénalité sur la fonction objectif.

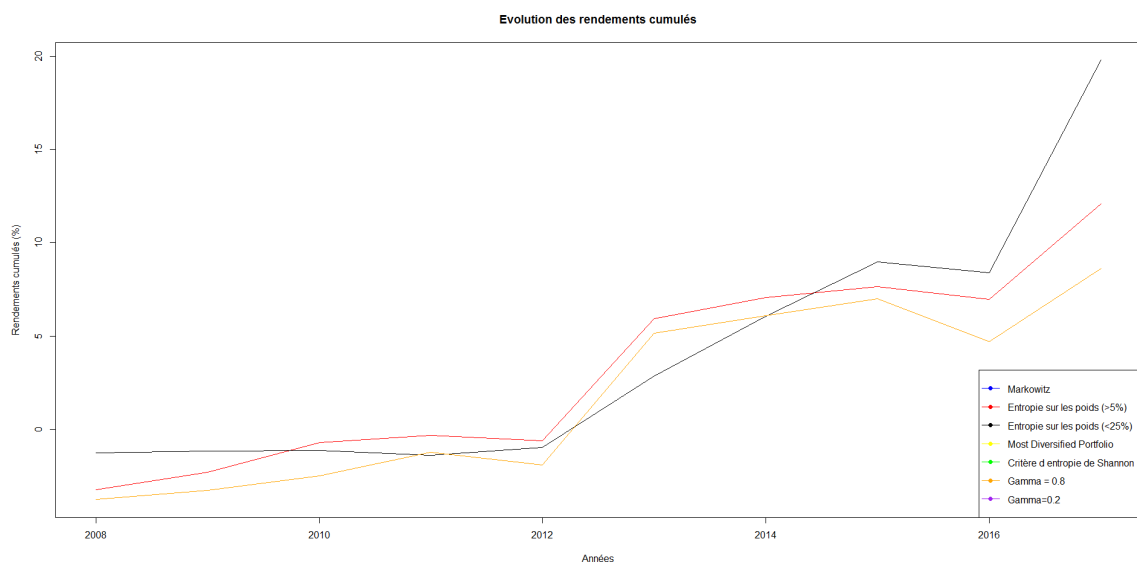


Figure 5.6: Evolution des rendements cumulés des portefeuilles maximum return

De plus, les stratégies d'entropie sur les poids fournissent non seulement un rendement moyen annuel plus élevé que toutes les autres stratégies, mais ces deux dernières fournissent également un écart-type moyen plus attractif que l'ensemble des autres actifs. Ceci résulte inéluctablement en un Adjusted Sharpe Ratio pour performant que les stratégies de Markowitz, MDP et critère de Shannon.

De façon globale, nous pouvons donc aisément conclure que les méthodes d'entropie sur les poids performant, sur l'ensemble des dimensions étudiées (ASR, Turnover, rendement cumulé et moyen, diversification), largement mieux que les 3 dernières stratégies étudiées.



# Chapter 6

## Conclusion

A travers cette thèse, nous avons voulu mettre en lumière les carences dont fait preuve la théorie de Markowitz. Afin de s'en apercevoir, nous avons appliqué le programme d'optimisation de Markowitz sur un échantillon de données extrait de Bloomberg sur un horizon de 10 ans (2007-2017). L'accent aura été également porté sur différentes stratégies permettant de forcer la diversification d'un portefeuille. Nous avons, par conséquent, analysé l'impact des stratégies suivantes : le shrinkage estimator de Ledoit & Wolf, le critère d'entropie de Shannon, l'entropie sur les poids ainsi que le « Most Diversified Portfolio ».

Nous avons voulu également vérifier l'une des hypothèses initiales du modèle de Markowitz, à savoir la distribution normale des rendements. Nous avons ainsi appliqué l'ensemble des stratégies sur un échantillon de données distribué normalement ainsi qu'exponentiellement, afin d'analyser l'impact que la distribution des rendements a sur la diversification.

L'analyse de la diversification s'est faite à travers quatre indicateurs majeurs : la diversification moyenne des portefeuilles à travers les actifs, l'évolution de la diversification en fonction du niveau de rendement minimal, les frontières efficientes dégagées par chacune des stratégies étudiées ainsi que 2 indicateurs de performance (Turnover, Adjusted Sharpe Ratio).

### 6.1 Résultats

L'analyse empirique que nous avons effectuée nous aura apporté un ensemble de constats et de réflexions importantes.

Comme la littérature le suggérait, la théorie de Markowitz démontre en effet une forte limite en termes de diversification. Chaque stratégie que nous avons étudiée surpasse largement Markowitz en termes de diversification, et ce, en particulier l'utilisation du critère d'entropie de Shannon. Cependant, comme nous l'analysons précédemment, chaque stratégie, forçant la diversification, se retrouve battue par la stratégie de Markowitz.

En plus d'avoir démontré que les carences en termes de diversification ne se situaient pas qu'au niveau de l'estimation de la matrice variance-covariance et du vecteur de rendements, nous avons également pu entrevoir l'impact de la modification d'une hypothèse alternative. En utilisant un échantillon distribué de façon exponentielle, nous avons pu constater que l'optimisation de Markowitz offrait une diversification globalement plus élevée qu'avec notre échantillon de Bloomberg ainsi que l'échantillon simulé et distribué normalement. Cependant, une optimisation de Markowitz utilisant un échantillon normalement distribué surperforme continuellement les stratégies utilisant les méthodes de diversification.

L'analyse in-sample qui fut réalisée dans la section 4 nous a également permis de nous rendre compte des limites en termes de performance (frontières efficientes) des stratégies forçant la diversification.

Cependant, nous constatons que forcer la diversification permettait de se prémunir contre les erreurs d'estimations qu'encourent les paramètres d'entrée (matrice de variance – covariance et vecteur de rendements). En effet, en ne diversifiant pas son portefeuille, un investisseur s'expose aux possibilités d'erreurs et donc de changements drastiques de l'allocation d'un jour à l'autre. Ceci constituant donc une inconstance relativement forte des allocations pourrait pousser un investisseur à se tourner vers des portefeuilles proposant une diversification plus forte. En forçant la diversification d'un portefeuille, cela limitera en effet l'impact des erreurs d'estimations sur les poids qui auront été générés. Ceux-ci ne seront certes pas supprimés, mais fortement limités. La variation des poids au cours du temps ou en fonction des rendements sera fortement altérée par ladite diversification.

De plus, nous avons voulu, en analysant les résultats dans un cadre plus pratique, démontrer les raisons poussant un investisseur à forcer une diversification de son portefeuille à défaut d'obtenir davantage d'efficience. Celle-ci permet en effet de réduire son exposition au risque futur. En effet, les mouvements futurs des actifs ne peuvent jamais être prédits avec exactitude. Il est en effet en partie erroné que d'estimer que les variations futures des actifs ne se fasse que sur base des données historiques. De multiples exemples historiques (1929, 2002, 2008) nous démontrent en effet les comportements tout à fait « aléatoires » au regard des données historiques. En ne concentrant son portefeuille que sur un actif unique, l'investisseur s'expose entièrement aux fluctuations aléatoires

futures d'un actif. En proposant un portefeuille diversifié, l'investisseur se « protégera » davantage au regard des fluctuations futures aléatoires. L'analyse out-of-sample que nous avons réalisée (sur une période allant de 2008 à 2017) nous présente cependant, grâce à une vision dynamique, des résultats favorables à une diversification « forcée ».

En effet, nous constatons dans les 3 cas que nous avons étudiés que l'utilisation de l'entropie sur les poids permet de réaliser un rendement moyen au cours du temps plus attractif. Ce rendement plus attractif est de plus accompagné d'un turnover également plus faible. Ceci implique, par conséquent, également une efficacité d'autant plus élevée lorsque nous nous retrouvons hors du cadre théorique qui exclut les frais de transactions. L'utilisation de l'entropie sur les poids, dans le cadre out-of-sample, de surperformer vis-à-vis de l'optimisation de Markowitz.

Nous avons donc pu à travers cette étude faire le point sur deux éléments importants de l'apport des stratégies "forçant" la diversification vis-à-vis de la théorie classique de Markowitz :

- D'un point de vue théorique :

La diversification aura permis de réduire les phénomènes de sur/sous-concentration, dus aux erreurs d'estimations ou au modèle de Markowitz en lui-même. En diversifiant, nous sommes donc parvenu à ce que ces défauts soient contrecarrés, et qu'un investisseur ne soit donc, in fine, pas induit en erreur sur ses investissements. La diversification permettra donc de se prémunir face aux limites du modèle de Markowitz en termes de fiabilité. Cette dernière permettra également, grâce à son balancement sur les différents actifs, de restreindre ces erreurs d'allocations et donc les changements brusques d'allocations au cours du temps, ou en fonction de nouvelles estimations.

- D'un point de vue pratique :

La diversification permettra à son porteur de réduire son exposition au regard du risque futur. Les mouvements des actifs financiers conservent, au-delà des prédictions issues des estimations faites grâce aux données historiques, une grande part de fluctuations aléatoires. Investir dans un actif unique expose l'investisseur à un risque de fluctuations négatives de cet unique actif. En diversifiant, la probabilité que les fluctuations de chaque actif soient toutes négatives étant réellement faible, la diversification aura donc un intérêt réel.

## 6.2 Limites des recherches & Suggestions pour les recherches futures

Il demeure cependant important de mettre en lumière certaines limites auxquelles s'expose notre recherche.

Dans un premier temps, nous nous sommes limités, dans notre recherche, à l'impact d'une distribution normale et exponentielle des rendements. Ceci aura ouvert le débat sur la validité de cette première et la cohérence de la deuxième distribution. Cependant, ceci ne recouvre en rien l'ensemble des hypothèses possiblement étudiables. D'autres hypothèses intéressantes peuvent être revues afin d'en évaluer l'impact sur le niveau de diversification. Nous pensons notamment à d'autres distributions possibles, telles que les distributions de Student ou de Poisson sont des possibilités demeurant plausible et dont l'impact sur le modèle étudié serait intéressant à étudier.

De plus, il eut été intéressant de s'attarder à l'impact de la corrélation sur le niveau de diversification résultant des différents modèles que nous avons étudiés. En effet, il serait cohérent de considérer comment une corrélation parfaite positive (+1) ou parfaite négative (-1) impacte la diversification du modèle de Markowitz et les autres alternatives. Finalement, nous suggérons dans les prémisses de cette thèse la présence d'une corrélation minimum entre chaque actif. Nous pourrions imaginer, dans un ensemble de 10 actifs, la présence de certains actifs parfaitement non corrélés (0) et évaluer leur impact sur la diversification ainsi que sur la performance générale du portefeuille.

Dans un second temps, nous avons également émis l'hypothèse de l'absence de coûts de transactions dans nos modèles. Cependant, nous le savons, la réalité est évidemment

différente, impliquant en effet des coûts à chaque transaction faite. L'introduction de tels coûts auraient évidemment un impact non négligeable sur la performance de chacune des stratégies étudiées. Nous avons en effet illustré la surperformance de Markowitz par rapport aux autres stratégies en termes de frontières efficientes. Mais il eut été intéressant de s'intéresser à l'impact que l'introduction de frais de transactions aurait eu sur ces frontières efficientes et si cela n'aurait pas permis par conséquent aux stratégies de diversification de « battre » la stratégie initiale de Markowitz.

Dans un troisième temps, nous avons sélectionné un panier de 10 actifs afin de réaliser une partie de notre étude. Ces dix actifs ont été sélectionnés sur le Nasdaq. Ceci ne constitue donc évidemment pas une réplique de la réalité à laquelle s'exposerait un investisseur. Celui-ci a, en effet, accès à l'ensemble des marchés boursiers. Nous avons également omis toute autre nature d'actif : obligations, Hedge funds ou encore un indice boursier.

Finalement, nous avons analysé l'impact du shrinkage estimator de Ledoit & Wolf sur la diversification. Il pourrait être intéressant d'analyser l'impact d'une combinaison de cet estimateur avec chaque stratégie de diversification afin d'en évaluer sa surperformance ou non par rapport à la stratégie de Markowitz. Nous notions en effet que, dans le cadre des données extraites dans Bloomberg, le Shrinkage estimator de Ledoit & Wolf nous permettait de « vaincre » la théorie de Markowitz, et ce, tant en termes de diversification que de frontière efficiente.



# Bibliography

- Aksüyek, E. (2008). *Information Theory and Portfolio Management*. PhD thesis, Swiss Federal Institute of Technology Zurich.
- Basseville, M. (2012). Divergence measures for statistical data processing - an annotated bibliography. *Signal Processing*, page 12.
- Becker, F., Gürtler, M., and Hibbeln, M. (2013). Markowitz versus michaud: portfolio optimization strategies reconsidered. *The European Journal of Finance Vol 21*, page 34.
- Bera, A. and Park, S. (2005). Optimal portfolio diversification using maximum entropy principle. *University of Illinois at Urbana-Champaign, Xiamen University*.
- Bercher, J.-F. (2013). *Entropie et critères entropiques*. Methodes d'inversion appliquees au traitement du signal et de l'image, Hermes / Lavoisier.
- Bernard, P. (Janvier 2017). *La théorie du portefeuille : la gestion des risques*. PhD thesis, Université Paris-Dauphine.
- Biglova, A., Ortobelli, S., Rachev, S., and Stoyanov, S. (2004). *Different approaches to risk estimation in portfolio theory*. J. Portfolio Management.
- Bromiley, P., Thacker, N., and Bouhova-Thacker, E. (2010). *Shannon Entropy, Renyi Entropy, and Information*. PhD thesis, Imaging Science and Biomedical Engineering, School of Cancer and Imaging Sciences, Stopford Building, The University of Manchester.
- Bun, J. (Septembre 2016). *Application de la théorie des matrices aléatoires pour les statistiques en grande dimension*. PhD thesis, Université Paris-Saclay.
- Bâ, F. and Wade, A. (2011-2012). *Thème : Le modèle de Markowitz et détermination d'un portefeuille optimal*. PhD thesis, Université Gaston Berger.
- Chopyk, O. (2014-2015). *Practical usage of optimal portfolio diversification using maximum entropy principle*. PhD thesis, Charles University in Prague.

- Choueifaty, Y. and Coignard, Y. (2008). Toward maximum diversification. *Journal of Portfolio Management* 34 (4), pages 40–51.
- Choueifaty, Y., Froidure, T., and Reynier, J. (2011). Properties of the most diversified portfolio. *Working Paper - TOBAM*.
- Cover, T. (1991). Universal portfolios. *Mathematical Finance, Vol.1 No.1*, page 29.
- Dedu, S. and Toma, A. (2015). An integrated risk measure and information theory approach for modeling financial data and solving decision making problems. *Procedia Economics and Finance*, pages 532–536.
- Dispas, C. (Octobre 2010). *Styles de gestion : espérances de rendement et expositions aux facteurs de risque*. PhD thesis, Université Catholique de Louvain.
- Goodwin, T. H. (1998). The information ratio. *Financial Analysts Journal Vol. 54 N.4*, page 34.
- He, D., Huang, Q., and Gao, J. (2012). A new entropy optimization model for graduation of data in survival analysis. *Entropy*, pages 117–123.
- Herlemont, D. (2004). *Gestion de Portefeuille et Croissance Optimale*. PhD thesis, YATS Finance & Technologies.
- Herlin, P. (2012). *La remise en cause du modèle classique de la finance par Benoît Mandelbrot et la nécessité d'intégrer les lois de puissance dans la compréhension des phénomènes économiques*. PhD thesis, Ecole Doctorale Abbé Grégoire.
- Hole, J. (2014). Modern portfolio theory and efficient frontier. *WT Wealth Management*, pages 1–3.
- Huang, X. (2008). Mean-entropy models for fuzzy portfolio selection. *Browse Journals & Magazines Vol 16*.
- Jana, P., Roy, T. K., and Mazumder, S. K. (2007). Multi-objective mean-variance-skewness model for portfolio optimization.
- Kalai, A. and Vempala, S. (2002). *Efficient Algorithms for Universal Portfolios*. Philip M. Long.

- Kapur, J.N., K. H. (1992). *Entropy Optimization Principles with Applications*. Water Science and Technology Library.
- Kohli, J. (2005). *An Empirical Analysis of Resampled Efficiency*. PhD thesis, Worcester Polytechnic Institute.
- Lassance, N. (2015 - 2016). *Volatility Modelling in Option Pricing and its Impact on Payoff Replication Performance*. PhD thesis, Université Catholique de Louvain.
- Ledoit, O. and Wolf, M. (2004a). Honey, i shrunk the sample covariance matrix. *Journal of Portfolio Management*, pages 110–119.
- Ledoit, O. and Wolf, M. (2004b). The markowitz optimization enigma : Is 'optimized' optimal ? *Journal of Portfolio Management*, pages 110–119.
- Lu, S. (September 2011). *Measuring Dependence via Mutual Information*. PhD thesis, Queen's University.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1), pages 77–91.
- Merton, R. C. (September 1972). *An Analytic Derivation of the Efficient Portfolio Frontier*. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*.
- Michaud, R. O. (1998). The markowitz optimization enigma : Is 'optimized' optimal ? *Social Science Research Network*.
- Muteba Mwamba, J. and Suteni, M. (October 2010). *An alternative to portfolio selection problem beyond Markowitz's: Log Optimal Growth Portfolio*. PhD thesis, University of Johannesburg.
- Ormos, M. and Zibriczky, D. (2014). Entropy-based financial asset pricing. <http://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0115742>.
- Philippatos, G. and Wilson, C. (1972). Entropy, market risk, and the selection of efficient portfolios. *Applied Economics*, pages 209–220.
- Pliska, S. R., M. J. (1995). Optimal portfolio with fixed transaction costs. *Mathematical Finance*, Vol. 5, Issue 4, pages 337–356.

- Pogue, G. (1970). An extension of the markowitz portfolio selection model to include variable transactions' costs, short sales, leverage policies and taxes. *The Journal of Finance*, Vol. XXV, No.5, page 1005.
- Poncet, P. and Portrait, R. (2009). *La Théorie Moderne du Portefeuille : Théorie et Applications*. Groupe Eyolles.
- Principe, J. (2009). *Renyi's entropy*. PhD thesis, University of Florida.
- Pringent, J.-L. (2007). *Portfolio Optimization and Performance Analysis*. Chapman & Hall/CRC Financial Mathematics Series.
- R-Bloggers (2011). Resampling and shrinkage : Solutions to instability of mean-variance efficient portfolios. <https://www.r-bloggers.com/resampling-and-shrinkage-solutions-to-instability-of-mean-variance-efficient-portfolios/>.
- Radovanov, B. and Marcikić, A. (2012). Usefulness of bootstrapping in portfolio management. *Croatian Operational Research Review (CRORR)*, Vol. 3.
- Rubinstein, M. (2002). Markowitz's "portfolio selection": A fifty-year retrospective. *The Journal of Finance*, Vol. LVII, No.3, page 1042.
- Rujeerapaiboon, N., Kuhn, D., and Wiesemann, W. (2014). *Robust Growth-Optimal Portfolios*. PhD thesis, Ecole Polytechnique Federale de Lausanne, Imperial College Business School.
- Rényi, A. (2014-2015). *On measure of entropy and information*. PhD thesis, Mathematical Institute Hungarian Academy of Science.
- Shannon, C. (1948). A mathematical theory of communication. *The Bell System Technical Journal*, pages 623–656.
- Sonnendrucker, D. (2002). *Attribution de Risque*. PhD thesis, Centre d'études actuarielles.
- Usta, I. and Kantar, Y. (2011). Mean-variance-skewness-entropy measures: A multi-objective approach for portfolio selection. *Entropy*, pages 117–123.
- Wolf, M. (July 2004). *Resampling vs. Shrinkage for Benchmarked Managers*. PhD thesis, Universitat Pompeu Fabra.

---

Zhou, R., Cai, R., and G., T. (2013). *Application of Entropy in Finance : Review*.  
PhD thesis, School of Economics and Management, Beijing University of Chemical  
Technology.