

**École polytechnique de Louvain**

**Développement d'un programme paramétrique  
permettant de concevoir une structure réciproque  
3D avec un minimum de connecteurs métalliques**

Auteur : **Dorsan DALLEMAGNE**

Promoteur : **Pierre LATTEUR**

Lecteurs : **Julien GENO, Justin GOOSSE, Robin MEURICE, João SARAIVA  
ESTEVEs PACHECO DE ALMAIDA**

Année académique 2020–2021

Master [120] : ingénieur civil des constructions







DÉVELOPPEMENT D'UN PROGRAMME  
PARAMÉTRIQUE PERMETTANT DE CONCEVOIR UNE  
STRUCTURE RÉCIPROQUE 3D AVEC UN MINIMUM DE  
CONNECTEURS MÉTALLIQUES



## Remerciement

*Tout d'abord, je souhaite remercier mon promoteur, le professeur Pierre Latteur, pour la confiance accordée, son écoute et ses conseils lors de nos entrevues. De plus, je souhaite grandement remercier Julien Geno, pour sa disponibilité et le temps qu'il m'a consacré tout au long de ce travail, ainsi que pour son implication, ses recommandations avisées et son expertise sur le sujet.*

*Ensuite, par avance, je voudrais remercier João Almeida, Justin Goosse et Robin Meurice pour le temps qu'ils consacreront à la lecture de mon mémoire ainsi que pour leur écoute lors de ma défense orale.*

*Enfin, je remercie tous mes camarades de promotion pour les nombreux encouragements mutuels que nous nous sommes donnés. Et plus particulièrement au « Harem » pour ces années passées ensemble à s'entraider, et surtout pour tous les bons moments que nous avons passé. Merci également à Gaëtane, Ariane et ma grand-mère pour leurs relectures orthographiques et leurs commentaires avisés. Pour terminer, je tiens à remercier mes parents pour leurs soutiens sans failles à travers mes études ainsi que pour le temps qu'ils ont pris pour m'aider dans mon travail.*

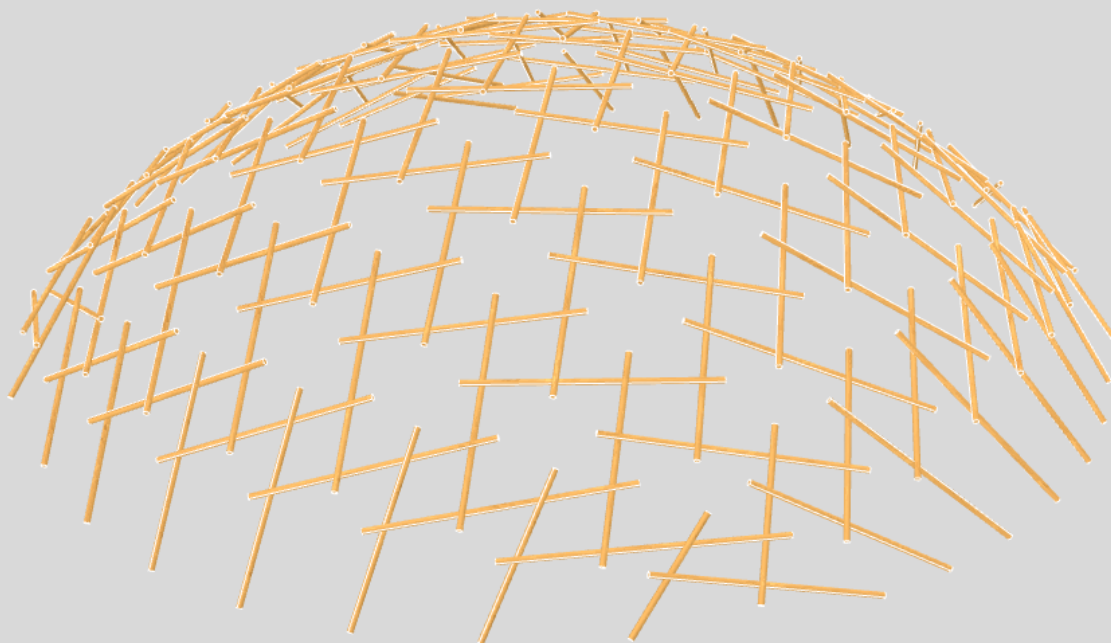


## Table des matières

|          |                                                                            |           |
|----------|----------------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>1</b> | <b>INTRODUCTION .....</b>                                                  | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>ÉTAT DE L'ART.....</b>                                                  | <b>5</b>  |
| 2.1      | HISTORIQUE .....                                                           | 5         |
| 2.2      | STRUCTURE RÉCIPROQUE .....                                                 | 7         |
| 2.2.1    | Définition .....                                                           | 7         |
| 2.2.2    | Module.....                                                                | 7         |
| 2.2.3    | Topologie de structures réciproques .....                                  | 11        |
| 2.3      | CONCEPTION DE STRUCTURES RÉCIPROQUES .....                                 | 11        |
| 2.3.1    | Approche analytique .....                                                  | 12        |
| 2.3.2    | Bottom-up .....                                                            | 12        |
| 2.3.3    | Top-down .....                                                             | 13        |
| <b>3</b> | <b>FONCTIONNEMENT GLOBAL DU PROGRAMME .....</b>                            | <b>19</b> |
| 3.1      | PROGRAMMATION PARAMÉTRIQUE .....                                           | 20        |
| 3.2      | LE PROGRAMME EN BREF .....                                                 | 21        |
| <b>4</b> | <b>MAILLAGE.....</b>                                                       | <b>27</b> |
| 4.1      | DÉFINITION .....                                                           | 27        |
| 4.2      | UTILISATION DE MAILLAGE DANS LES LOGICIELS RHINOCEROS ET GRASSHOPPER ..... | 29        |
| 4.2.1    | Objet maillage de Rhinoceros .....                                         | 29        |
| 4.2.2    | Constructeur de Maillage Grasshopper .....                                 | 32        |
| 4.3      | DÉVELOPPEMENT DE NOTRE CONSTRUCTEUR DE MAILLAGE .....                      | 34        |
| 4.3.1    | Approche 1 : réorganisation des nœuds d'un maillage .....                  | 35        |
| 4.3.2    | Approche 2 : création d'un maillage .....                                  | 36        |
| 4.4      | CONCLUSION .....                                                           | 38        |
| <b>5</b> | <b>RÉCIPROCALISATION.....</b>                                              | <b>41</b> |
| 5.1      | RECHERCHE DE LA RELATION ENTRE LES LIGNES .....                            | 42        |
| 5.2      | ROTATION DES LIGNES .....                                                  | 44        |
| 5.3      | EXTENSION DES LIGNES .....                                                 | 48        |
| 5.4      | CONCLUSION .....                                                           | 51        |
| <b>6</b> | <b>AJOUT DE L'ÉPAISSEUR DES ÉLÉMENTS .....</b>                             | <b>55</b> |
| 6.1      | FONCTIONNEMENT DU SOLVEUR.....                                             | 56        |
| 6.2      | MOUVEMENT DES ÉLÉMENTS POUR TENIR COMPTE DES EXCENTRICITÉS .....           | 61        |
| 6.3      | DÉTERMINATION DU POINT DE CONTACT .....                                    | 63        |
| 6.3.1    | Distance la plus courte pour deux droites infinies .....                   | 63        |
| 6.3.2    | Distance la plus courte pour deux droites finies .....                     | 64        |
| 6.4      | CONCLUSION .....                                                           | 67        |
| <b>7</b> | <b>PRISE EN COMPTE DES ASSEMBLAGES EN DÉCOLLEMENT .....</b>                | <b>71</b> |
| 7.1      | APPROCHE GÉOMÉTRIQUE .....                                                 | 73        |
| 7.2      | APPROCHE NUMÉRIQUE .....                                                   | 75        |
| 7.3      | CONCLUSION .....                                                           | 78        |
| <b>8</b> | <b>APPLICATION DU PROGRAMME.....</b>                                       | <b>81</b> |
| 8.1      | ILLUSTRATION DU PROCESSUS INTERNE.....                                     | 81        |
| 8.2      | EXEMPLE DE STRUCTURES RÉALISÉES AVEC LE PROGRAMME .....                    | 84        |
| <b>9</b> | <b>PROGRÈS FUTURS POUR LE PROGRAMME .....</b>                              | <b>87</b> |
| 9.1      | FORME DU MAILLAGE .....                                                    | 87        |
| 9.2      | DÉVELOPPEMENT D'UN SOLVEUR .....                                           | 87        |
| 9.3      | EFFORTS INTERNES DANS LES ÉLÉMENTS .....                                   | 87        |
| 9.4      | ÉLÉMENT COURBE.....                                                        | 88        |

|           |                            |           |
|-----------|----------------------------|-----------|
| <b>10</b> | <b>CONCLUSION .....</b>    | <b>91</b> |
| <b>11</b> | <b>ANNEXE .....</b>        | <b>95</b> |
| <b>12</b> | <b>BIBLIOGRAPHIE .....</b> | <b>99</b> |

# Introduction



## 1 Introduction

Ce travail traite de la recherche de forme d'une structure réciproque construite à l'aide de troncs d'arbres. Pour automatiser ce processus, nous avons développé un programme. Afin de comprendre ce qui a motivé l'élaboration de ce mémoire, nous allons commencer par contextualiser notre recherche.

Par le passé, le bois a été un des matériaux les plus utilisés dans la construction. Cependant, il a peu à peu disparu des habitudes au cours des derniers siècles. A l'heure actuelle, ce matériau revient sur le devant de la scène, et ce pour plusieurs raisons.

La première est écologique. En effet, au vu des changements climatiques, l'empreinte environnementale de nos bâtiments prend de plus en plus d'importance. Le bois est un matériau naturel qui, pour grandir, stocke le carbone présent dans l'atmosphère. Ensuite, c'est une ressource dont la production est facile, puisqu'elle se produit d'elle-même. A ceci s'ajoute son aspect esthétique : c'est un matériau noble et élégant qui attire beaucoup de personnes. Pourquoi n'est-il, dès lors, pas plus utilisé dans le monde de la construction alors que la production de sa matière première ne nécessite que très peu d'intervention humaine ?

La réponse est simplement économique. Lors d'une construction classique, un arbre est soumis à de nombreuses transformations qui rendent son utilisation onéreuse. Après son abattage, le tronc subit une série de modifications (écorçage, tri de la grume, sciage, séchage, rabotage...) avant d'arriver à la forme dans laquelle on désire le mettre en œuvre. Ensuite, si nous voulons obtenir un produit final de longueur supérieure à celle de la grume, il faut ajouter d'autres transformations. Le collage et le pressage peuvent être cités dans le cas du bois lamellé-collé. Toutes ces étapes ont un coût non négligeable. Il faut également tenir compte du caractère anisotrope du bois, ce qui rend l'automatisation de sa production relativement complexe. Pour ces raisons, le bois ne parvient pas à rivaliser économiquement avec d'autres matériaux tels que le béton ou l'acier.

Les transformations constituent une grande partie du coût de mise en œuvre du bois dans la construction. Dès lors, pourquoi ne pas l'utiliser sous forme de tronc puisque la majorité de son coût vient des modifications après l'abatage de l'arbre. Un problème reste à résoudre, la limitation de la longueur des grumes. C'est ici qu'intervient le concept de structure réciproque.

Une structure réciproque est une structure dont les éléments se supportent les uns les autres. La configuration la plus élémentaire qu'on puisse former est appelée module. L'assemblage de plusieurs modules crée une structure réciproque. Au sein d'une telle construction, les éléments reposent mutuellement les uns sur les autres. Ce moyen est particulièrement intéressant, car il permet de franchir une portée dont la longueur est supérieure à celle des éléments qui constituent la structure. Aucun appui central n'est nécessaire, seuls les bords prennent appui sur le sol. Un autre avantage est leur caractère architectural et original. En faisant varier la position des éléments, une infinité de structures différentes est possible.

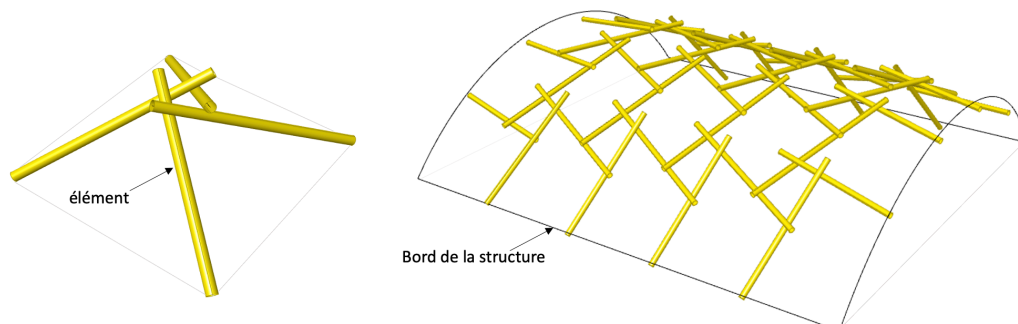


Figure 1 - Module réciproque à gauche, structure réciproque à droite



Si les structures réciproques ne sont pas plus souvent utilisées, c'est en grande partie lié à leur complexité. En effet, pour déterminer l'emplacement d'un élément, il faut connaître celui de ses appuis qui sont eux-mêmes des éléments et ainsi de suite. Ils dépendent donc tous les uns des autres. Pour tenir compte de ces interactions complexes entre les modules, il est nécessaire de concevoir un programme. Plusieurs recherches ont déjà eu lieu sur ce sujet, cependant très peu de logiciel sont disponibles.

Ce travail a pour objectif de créer un programme qui, à partir d'une surface 3D quelconque fournie par un client, réalise une structure réciproque s'adaptant à l'enveloppe donnée en entrée. De plus, nous cherchons à l'automatiser en fonction de paramètres d'entrée (par exemple le nombre de modules ou leurs positions) afin de nous adapter à une grande variété de demandes. Sur base d'une surface et des paramètres, le programme tient compte des interactions entre les éléments pour générer une structure réciproque constructible.

Au niveau des connexions entre les éléments, deux configurations sont possibles. Soit un élément est supporté par un autre, soit il y est suspendu. Dans le premier cas, un assemblage bois-bois est réalisable. Dans le second, une pièce métallique est nécessaire pour maintenir les éléments en contact, l'assemblage est dit en décollement. Ce type de pièce coûte cher, il est donc intéressant d'en avoir le moins possible. Un critère vient s'ajouter à notre programme : nous cherchons à minimiser le nombre de connecteurs métalliques présent dans la structure.

Cet écrit explique le fonctionnement du programme conçu. Nous commencerons par rapidement résumer l'évolution des structures réciproques à travers le temps. Puis nous aborderons les paramètres définissant ce type de structures ainsi que les différents travaux ayant eu lieu sur la recherche de leur forme.

Ensuite, nous nous attarderons sur le fonctionnement du programme développé. Celui-ci se déroule en trois étapes majeures. La première est le placement d'un maillage sur la surface reçue par le client. Il dicte la forme générale de la structure ainsi que le nombre et la position des modules de celle-ci. La deuxième est la réciprocalisation. Cette étape transforme le maillage en structure réciproque. Enfin, la troisième est la prise en compte des diamètres des éléments. Elle permet notamment d'assurer que les interactions entre eux soient respectées pour qu'ils soient en contact et que la structure soit constructible.

Une fois les trois étapes du programme fixées, nous nous intéresserons à la manière dont nous avons tenu compte des assemblages métalliques au sein de la structure. Ceci sera fait de deux façons différentes. La première se fait géométriquement durant la prise en compte des épaisseurs des éléments. La deuxième permet de tenir compte d'un cas de charge sur la structure. Lors de ces deux méthodes, si un assemblage est en décollement, une modification de la structure générée a lieu et une nouvelle configuration est modélisée.

Enfin, nous appliquerons notre programme à un cas réel, afin d'illustrer son fonctionnement. Avant de conclure notre travail, une dernière section sera consacrée à des améliorations futures, qu'il serait intéressant d'implémenter au programme développé pour le rendre plus complet.

Pour entamer la lecture de ce mémoire et afin d'en faciliter la compréhension, le lecteur est invité à prendre connaissance du schéma qui résume le fonctionnement du programme.

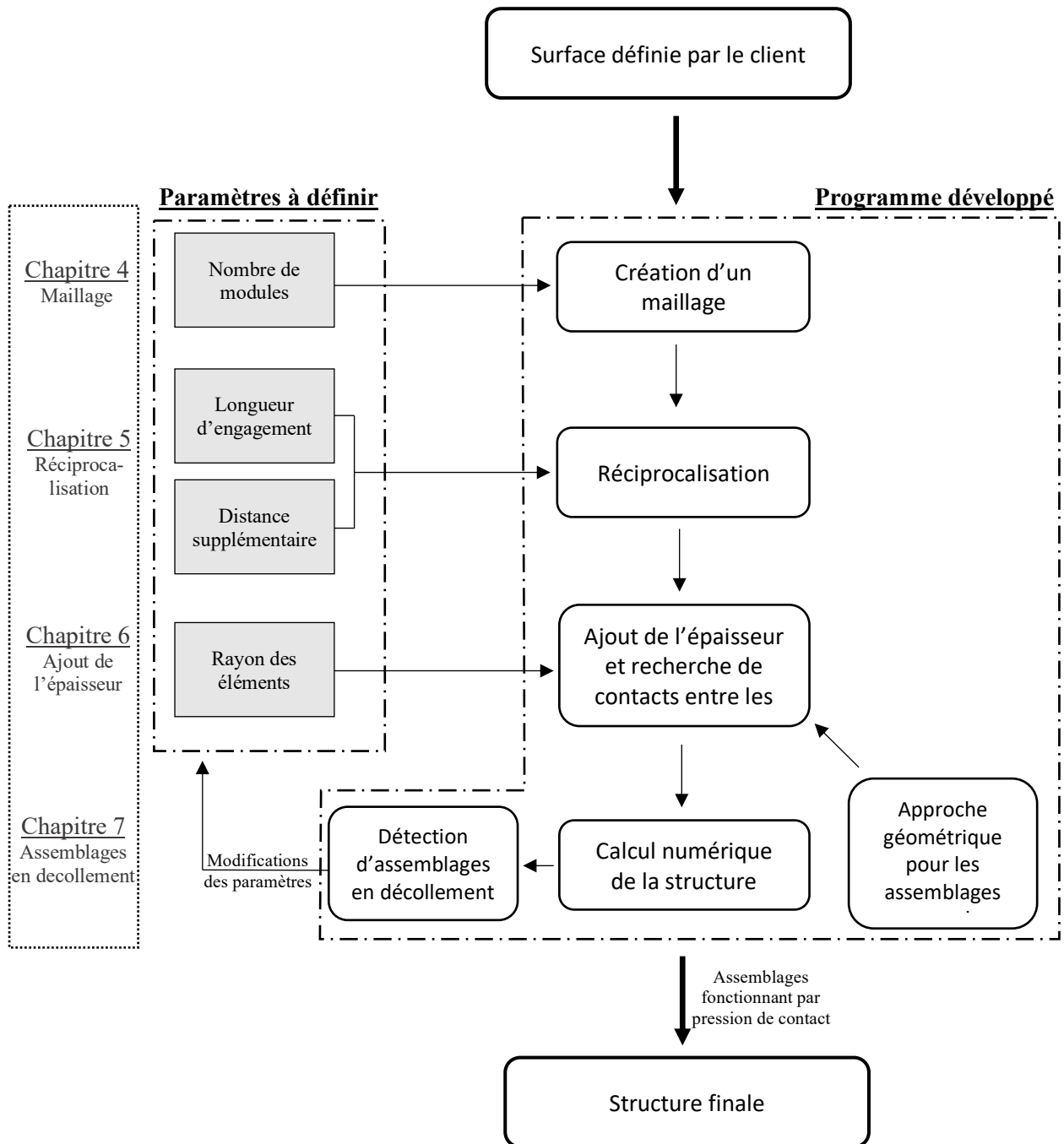


Figure 2 - Fonctionnement du programme

# État de l'art





## 2 État de l'art

### 2.1 Historique

Le concept d'éléments qui se supportent mutuellement existe depuis des milliers d'années. Au travers du temps, on constate son utilisation dans de nombreux domaines, que ce soit pour des logements ou pour franchir de longues portées.

Les premières traces de structures réciproques (SR) remontent à l'Antiquité. A cette époque, les bois étaient posés les uns sur les autres, puis liés ensemble à l'aide de corde ou de boue, pour former un tipi. Une toile était alors ajoutée à l'extérieur pour protéger les personnes des intempéries.



Figure 3 -Tipi à l'époque de l'Antiquité[17]

Plus tard, les civilisations voient une autre utilité au concept de SR, permettre de franchir une longue portée sur base d'éléments plus petits. Au 13<sup>ème</sup> siècle, les travaux de l'architecte français Villard de Honnecourt témoignent de l'utilisation de SR. A l'époque, l'objectif était d'être en mesure de construire un plancher malgré que les éléments qui le composent soient plus courts. La solution proposée par Honnercourt était un grillage plane comportant de nombreuses similitudes avec les SR. On voit la première apparition de modules réciproques dans ses différents schémas.

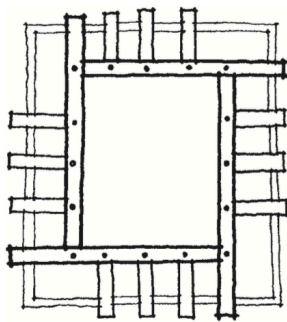


Figure 4 - Solution proposé par V. de Honnecourt pour former un plancher[17]

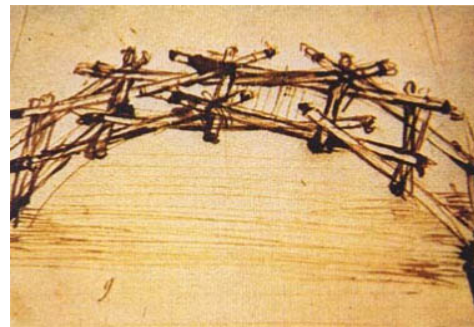


Figure 5- Pont de Vinci [24]

Bien que le concept soit déjà présent, la première personne à s'être intéressée réellement aux structures réciproques 3D est Léonard de Vinci (1452–1519). Dans son ouvrage 'Codex Atlanticus', L. Vinci commence notamment à présenter des structures 2D identiques à celles de V. de Honnecourt, il s'intéresse par exemple aux assemblages. Par la suite, dans 'Codex Madrid', il se penche sur le sujet de structures 3D en proposant notamment un pont temporaire comme solution militaire pour franchir une rivière sur base d'éléments plus courts. A travers ses recherches, il est le premier à se pencher sur la géométrie de telles structures analytiquement ainsi que sur l'influence de l'excentricité. Il a également dessiné de nombreux autres schémas de SR avec des modules constitués de 4 éléments qui s'ajoutent ensuite les uns aux autres. L. Vinci est le premier à apporter une explication scientifique à la géométrie de telles structures. [17]

Malgré ces avancements, il faut attendre le 17<sup>ème</sup> siècle, avec le mathématicien John Wallis et son écrit Opera Mathematica [9] dans lequel il s'intéresse aux SR, pour de plus amples recherches sur le sujet. Il a imaginé un plancher sur une longue portée, constitué de poutres de longueurs plus petites que celui-ci, et ce à l'aide d'un grillage qu'il transforme ensuite en SR. Il est le premier à s'être intéressé à la géométrie de ces structures ainsi que leurs comportements structurels d'un point de vue mathématique. Son ouvrage décrit notamment la descente de charges dans de telles structures en fonction de différentes géométries de grillage. Dans les années qui suivent plusieurs SR ont été construites et mises en œuvre sous différentes formes.

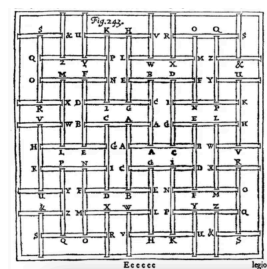


Figure 6 - Plancher de John Wallis dans Opera Mathematica [9]

Toutes les structures et recherches précédemment citées ont été réalisées avec du bois. Ce matériau étant naturel, ses dimensions sont par conséquent limitées. L'avantage principal des SR étant de pouvoir utiliser des sections de bois brute, de dimensions finies pour franchir de longues portées sans modification de l'élément. L'invention du béton, permettant de construire sans contrainte de taille, explique certainement la perte d'intérêt qu'ont subi les structures réciproques par la suite.

Plus tard, l'ingénieur allemand Friedrich Zollinger (1880-1945) a développé le concept de Lamella dôme construit sur base d'éléments en bois de longueur plus courte. Ce concept est inventé après la Première Guerre mondiale, dû aux besoins de construire rapidement et facilement de nombreux logements. Il a notamment été utilisé pour les toitures d'habitations.

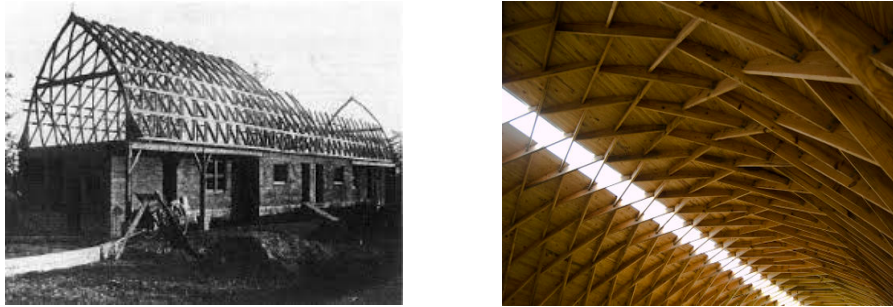


Figure 7 - Toiture inventé par l'ingénieur F. Zollinger [23] [16]

Cependant ce n'est que plus récemment que ce concept de construction a repris de l'intérêt aux yeux des architectes, grâce à son élégance structurelle et à la grande liberté de formes qu'il est possible de concevoir. Le développement de logiciels de modélisation 3D et de calculs numériques, ont permis de s'intéresser en profondeur à la conception de SR.

La structure réciproque de la plus grande envergure réalisée à ce jour est l'observatoire de Rokko au Japon, inaugurée en 2010. Cette structure, imaginée par Hiroshi Sambuichi et Ove Arup and Partners, est construite à l'aide de modules réciproques en acier, qui sont eux-mêmes parfois remplis de modules réciproques. Cette construction reprend uniquement le poids propre de la structure. Son rôle principal est de créer des zones d'ombres et une ventilation naturelle à l'observatoire. [18]



Figure 8 - Observatoire de Rokko au Japon [14]

## 2.2 Structure réciproque

### 2.2.1 Définition

Une structure réciproque est une structure 3D constituée au minimum de trois éléments qui se portent les uns les autres, ce qui signifie qu'elles s'auto-supportent. Chaque extrémité d'éléments vient, soit prendre appui sur le sol, soit le long d'un autre élément. C'est-à-dire que chaque élément prend appui sur un autre et sert également d'appui au suivant. Le mot réciproque témoigne de cette relation porteur/supporteur entre les éléments de la structure.

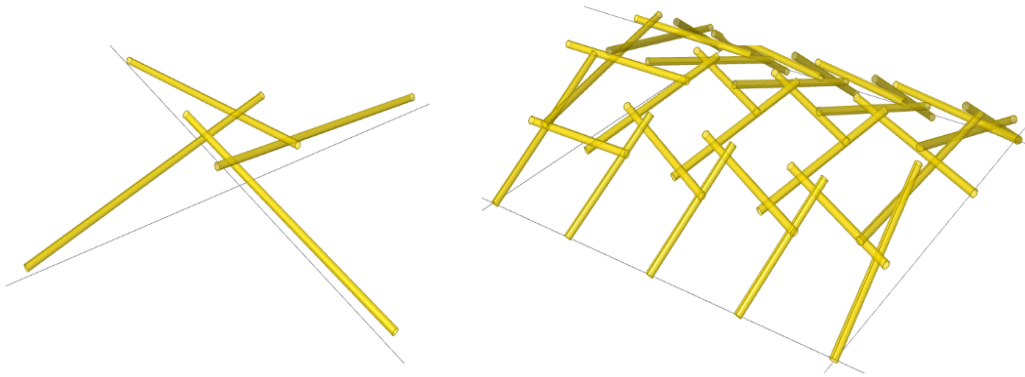


Figure 9 - Configuration élémentaire ou module à gauche, Structure réciproque à droite

Sous sa forme la plus élémentaire, il est possible de créer une configuration appelée module. L'assemblage de plusieurs modules forme alors une structure réciproque. Cette association met en relation un ensemble de sous-structures qui prennent appuis les unes sur les autres, elles sont par conséquent en contact. La modification de la configuration d'un module a dès lors un impact sur les éléments voisins. Ce qui a une répercussion sur leurs modules respectifs et ainsi de suite. La position de chacun d'eux contribue de la même façon à la forme de la structure. C'est dans cette interdépendance entre les modules de la structure, que réside toute la difficulté de conception d'une telle structure.

### 2.2.2 Module

Un module simple est constitué des éléments qui le composent et d'une fenêtre d'engagement qui est le polygone qui se trouve au centre du module.

Cette configuration varie en fonction de six paramètres principaux qui sont illustrés Figure 11 [2] :

- Le nombre d'éléments qui le compose
- La longueur des éléments
- Une longueur d'engagement le long de chaque élément
- Une excentricité entre les éléments
- Le sens de rotation du module
- La position relative des éléments

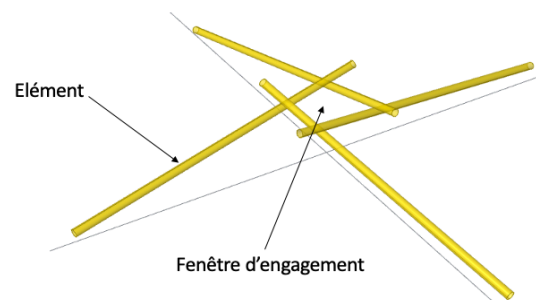


Figure 10 - Module réciproque élémentaire

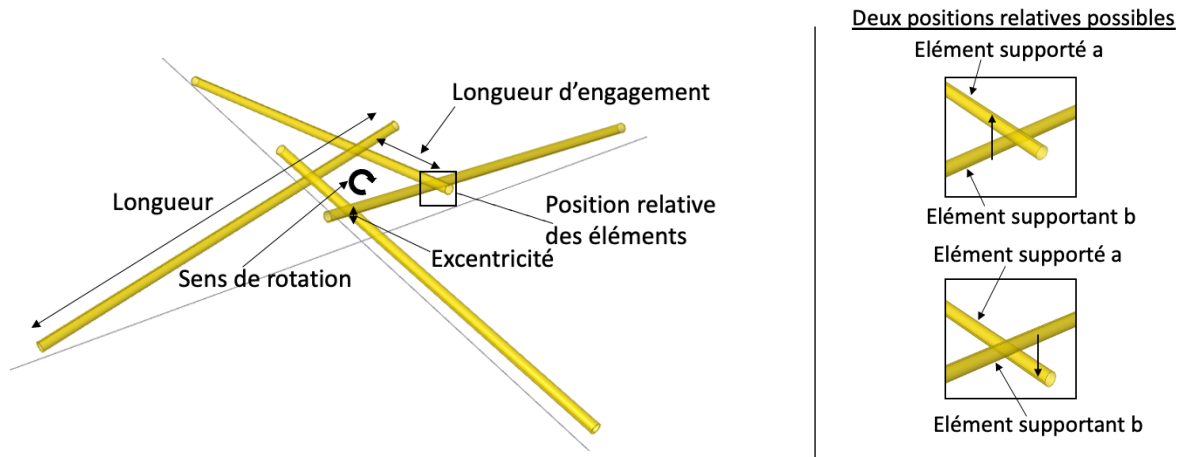


Figure 11 - Paramètres caractérisant un module

#### 2.2.2.1 Nombre d'éléments

Comme stipulé précédemment, un module se constitue au minimum de trois éléments. Cependant aucune limite supérieure n'existe, par conséquent il y a un nombre infini de possibilités. Ceci donne une certaine liberté au concepteur.

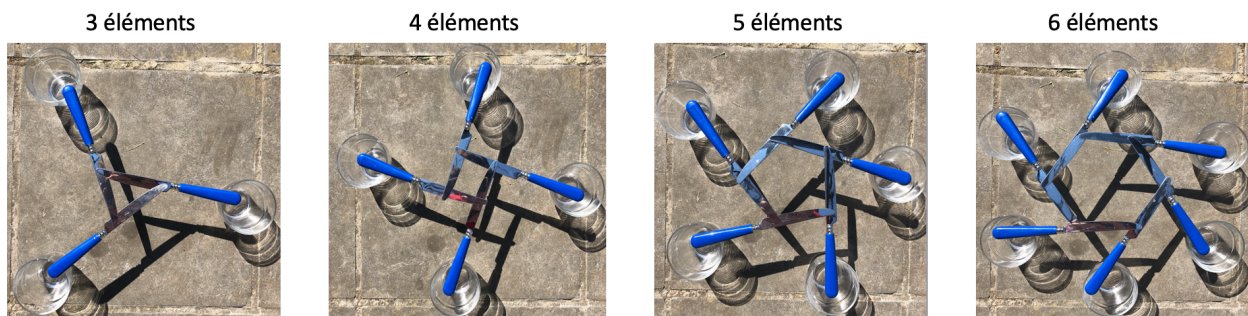


Figure 12 - Variation du nombre d'éléments d'un module

#### 2.2.2.2 Longueurs des éléments

Il est facile de s'imaginer qu'augmenter la longueur des éléments qui composent un module a un impact direct sur la configuration de celui-ci.

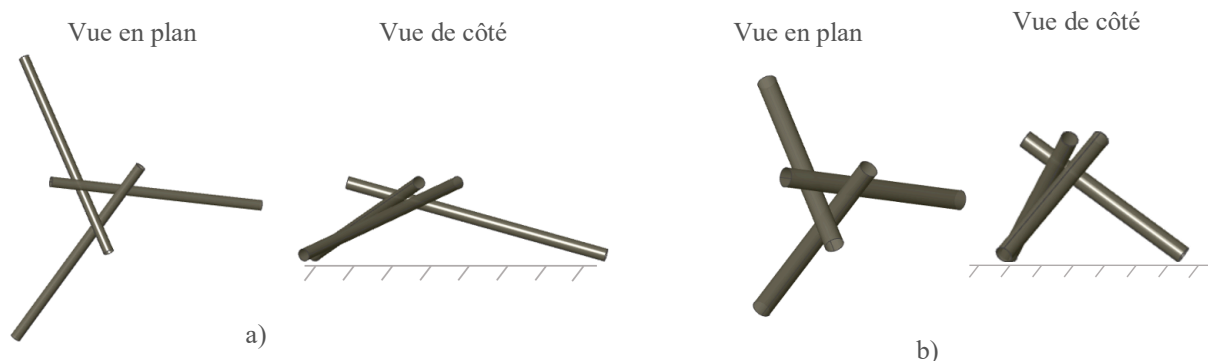


Figure 13 - Modification de la longueur des éléments - a) Longueur de 7m - b) Longueur de 3m



### 2.2.2.3 Longueur d'engagement

La longueur d'engagement ( $\alpha L$ ) est la distance à laquelle un élément vient prendre appui sur un autre à partir de son extrémité. Cette distance peut varier entre 0 et la longueur des éléments ( $L$ ). Comme le montre la Figure 14, plus ce paramètre est grand, plus le module s'aplatit. Au contraire une faible distance élève la fenêtre d'engagement.

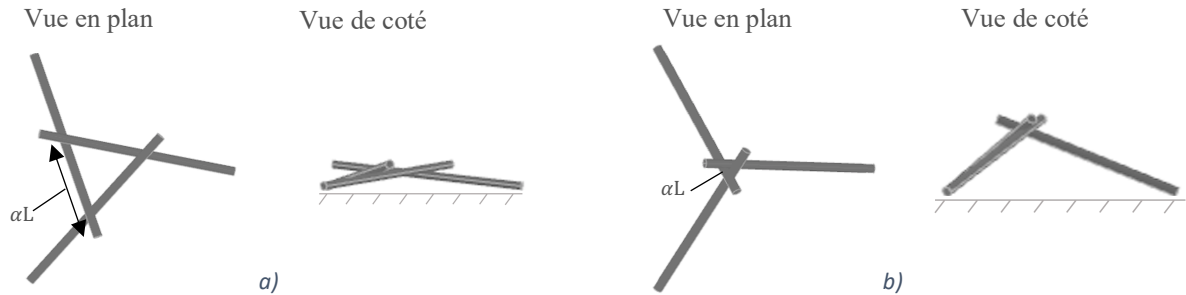


Figure 14 - Modification de la longueur d'engagement – a) Longueur d'engagement de  $0,3L$  - b) Longueur d'engagement de  $0,03L$

### 2.2.2.4 Excentricité

L'excentricité ( $e$ ) se caractérise par la distance entre les axes centraux de deux éléments au niveau du point de contact, elle est donc directement liée au rayon des éléments. Par conséquent, l'excentricité est une distance perpendiculaire aux deux axes.

Pour qu'un module soit réalisable, il faut que les éléments soient en contact. Dans ce cas l'excentricité est égale à la somme des rayons. (Figure 15) Si l'excentricité est inférieure à l'addition des deux rayons ( $e < R_1 + R_2$ ) les éléments se chevauchent. Au contraire une excentricité plus grande ( $e > R_1 + R_2$ ) indique que les éléments ne se touchent pas. (Figure 16)

L'excentricité est la raison pour laquelle un module se forme dans l'espace. Si les axes des éléments se trouvent au même niveau ( $e=0$ ), les trois éléments se trouvent dans un même plan, par conséquent le module est à plat. (Figure 17)

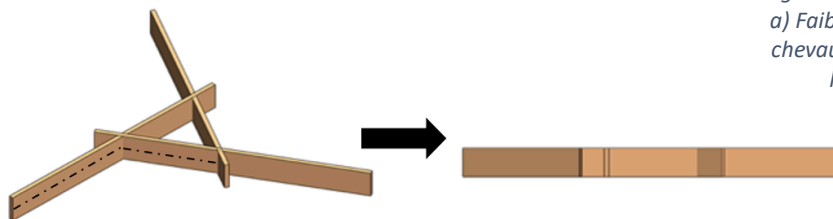


Figure 17- Excentricité nul entre les éléments [6]

L'élévation de la fenêtre d'engagement d'un module est directement liée à l'excentricité. Plus le rayon des éléments est grand, plus le décalage entre ceux-ci s'accroît et les éléments se surélèvent les uns les autres.

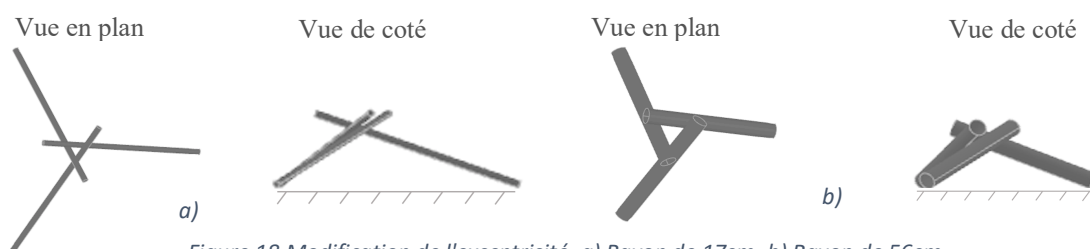


Figure 18-Modification de l'excentricité- a) Rayon de 17cm- b) Rayon de 56cm

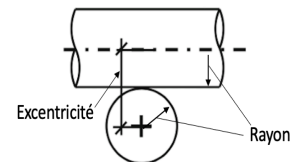


Figure 15 - Excentricité

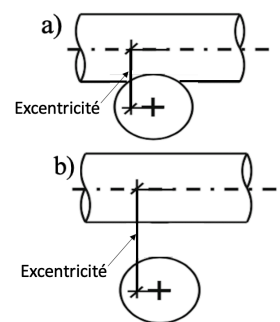


Figure 16 - Variation de l'excentricité - a) Faible excentricité, les éléments se chevauchent - b) Grande excentricité les éléments sont espacés



### 2.2.2.5 Sens de rotation du module

Pour déterminer le sens de rotation du module, il s'agit d'imaginer une force qui tire sur les extrémités de l'ensemble des éléments le constituant, comme sur le schéma ci-dessous. Il suffit alors de regarder la rotation qui se produit par rapport au centre de la fenêtre d'engagement pour en déterminer son sens. Si ces forces créent une rotation dans le sens horaire, le module est dit horlogique, dans le cas contraire anti-horlogique. (Figure 19) Ce sens permet de caractériser le positionnement des éléments les uns par rapport aux autres. L'extrémité de ceux-ci vient à chaque fois prendre appui sur l'élément précédent dans le sens de rotation. Au sein d'une même structure, les modules peuvent avoir un sens de rotation différent.

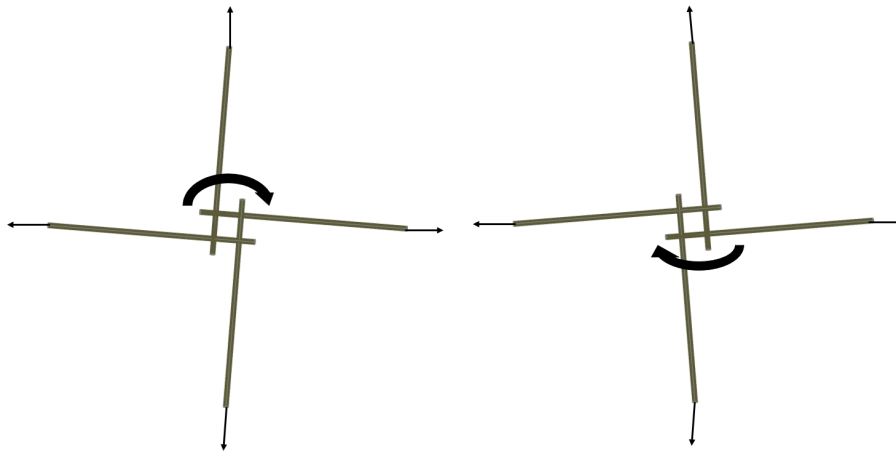


Figure 19- Sens de rotation de la fenêtre d'ouverture (sens horlogique à gauche, sens anti-horlogique à droite)

### 2.2.2.6 Position relative des éléments

Au niveau du point de contact entre deux éléments, deux configurations sont possibles. Soit l'élément *a* vient prendre appui sur l'élément *b*, soit il y est suspendu. (Figure 20)

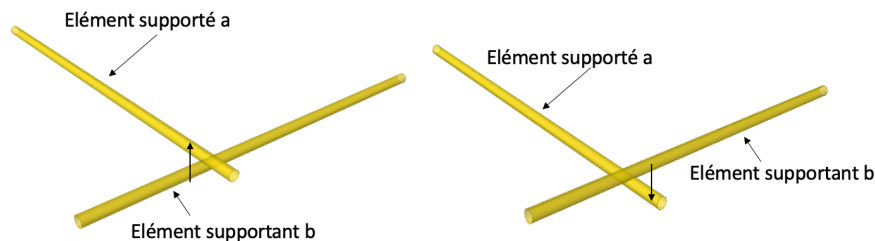


Figure 20 - Position relative des éléments

Au sein d'un module, différentes combinaisons de positions sont possibles. Par exemple pour un module composé de trois éléments, il existe quatre combinaisons de position de contact. (Figure 21)

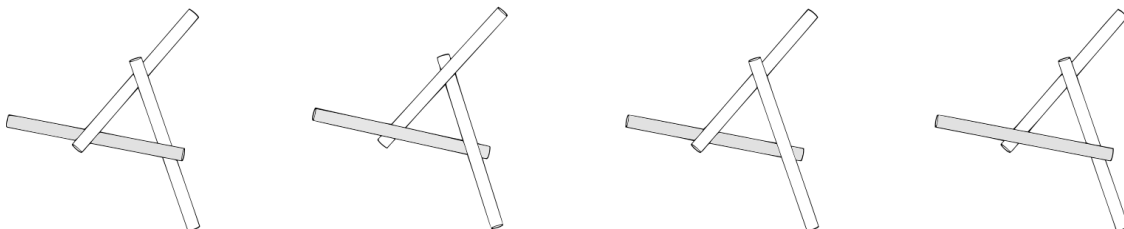


Figure 21 - Configuration possible d'un module de trois éléments en variant la position relative des éléments au niveau des points de contacts [7]

La position relative des éléments prend de l'importance au niveau des assemblages. Lorsque l'élément *a* se trouve au-dessus de l'élément *b*, l'assemblage entre les éléments fonctionne par pression de contact, un assemblage uniquement constitué de bois est donc faisable. Dans le cas contraire, l'assemblage est

en traction, sous leur poids propre les éléments sont en décollement, il est nécessaire d'ajouter une pièce métallique (par exemple un tire-fond), pour que les éléments restent en contact.

### 2.2.3 Topologie de structures réciproques

Comme dit précédemment, l'assemblage de modules forme une structure réciproque. En faisant varier les différents paramètres de ceux-ci, il est possible de créer une infinité de structures différentes allant d'un module simple à des structures beaucoup plus complexes composées de plusieurs modules. (Figure 22)

De telles structures ont de nombreux avantages. Tout d'abord, il y a l'esthétisme. En effet, sa forme particulière intéresse énormément les architectes. Ensuite, ce sont des structures dont la construction est rapide, puisque leurs constructions résident simplement de la superposition d'éléments. De plus, il est possible de concevoir une structure pour laquelle beaucoup d'assemblages sont similaires. A ceci, vient s'ajouter la possibilité de former une géométrie courbe sur base d'éléments rectilignes tous identiques. Enfin, elles permettent de franchir de longues portées sur base d'éléments de longueurs inférieures à celle-ci.

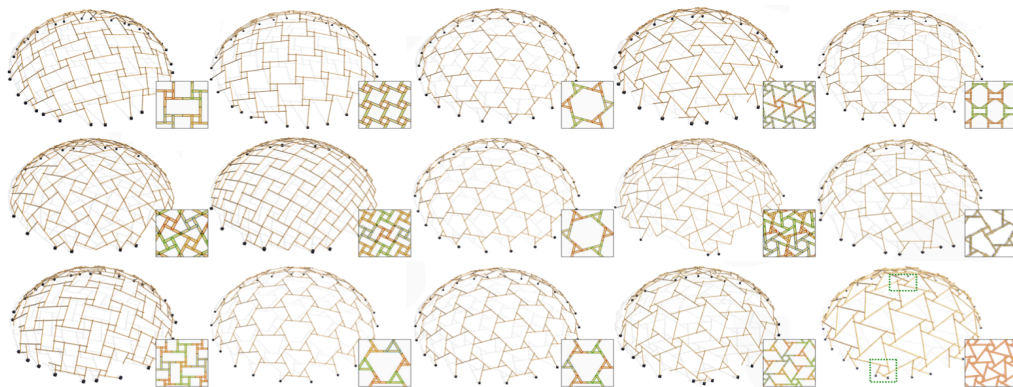


Figure 22 - Variété de structures réciproques réalisables en faisant varier les paramètres des éléments qui les composent [22]

La raison pour laquelle ces structures n'ont pas été plus souvent utilisées dans le monde moderne réside dans la complexité de leur comportement. En effet, chaque module prenant appui sur un autre, la modification de la position d'un élément a une influence sur l'ensemble de la géométrie. La grande difficulté de telles structures réside dans l'interaction des paramètres des modules qui la compose. Le développement de logiciels de calcul numérique a permis de tenir compte de ces interactions et donc relancer de nombreuses recherches dans le domaine.

## 2.3 Conception de structures réciproques

Créer une SR avec un petit nombre de modules n'est pas facile mais faisable à la main. Dans ce cas, la gestion des paramètres peut être réalisée par « essai-erreur ». Cependant, le dessin de grandes structures est nettement plus complexe, et ce en raison de l'interdépendance des modules qui la compose. Les approches scientifiques développées dans la littérature sur la recherche de forme d'une SR peuvent être principalement regroupées en trois catégories :

- Approche analytique
- Bottom-up
- Top-down

### 2.3.1 Approche analytique

L'approche analytique a été développée pour trouver la forme d'une SR sur base de paramètres spécifiés. Son application permet de se passer d'algorithme ou d'itération sur la forme de la structure. Elle consiste en la résolution d'un système d'équations qui décrit la transformation. Pour cela, il faut déterminer les relations géométriques entre les différents paramètres d'un module de façon à contrôler la SR. Plusieurs auteurs ont étudié cette méthode.

Sénéchal et al. ont émis en 2011 une méthode analytique qui transforme explicitement 3 barres se rejoignant en un point, en un module réciproque. La transformation se fait sur base d'une rotation suivant une extrémité des barres, suivi d'un allongement de celle-ci. La transformation est définie par un système de trois équations à quatre inconnues qui décrivent un module unique. Par conséquent, il faut choisir un paramètre d'entrée. Le paramètre choisi est généralement l'angle de rotation ( $\theta$ ), mais peut aussi être la longueur d'engagement ou de l'excentricité voulue. L'équation développée est généralisable à des cas plus complexes en augmentant le nombre de paramètres d'entrée. L'addition de paramètres rend le système d'équations de plus en plus complexe à résoudre. [20]

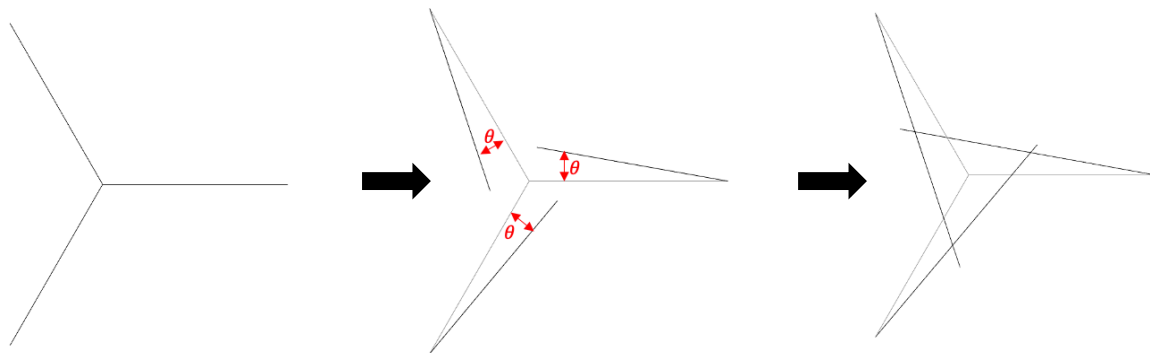


Figure 23 - Transformation analytique développée par Sénéchal et al.

Une seconde approche, similaire, a été développée par Rizzuto en 2014. Celle-ci se base sur un angle  $\alpha$  de rotation des éléments comme unique paramètre à choisir. L'excentricité entre les éléments est ensuite définie sur base de cet angle de rotation, ce qui permet de déterminer la géométrie de la structure.[19]

Une troisième approche, dans le travail d'Olivier L. et S. Baverel, consiste à nouveau à former un module réciproque sur base de 3 éléments qui se rejoignent en un point. Les éléments sont soumis à une translation parallèle à leurs origines. L'amplitude de ce déplacement dépend de l'excentricité ou la longueur d'engagement voulue, ces deux paramètres étant liés par une relation analytique qu'ils démontrent. [2]

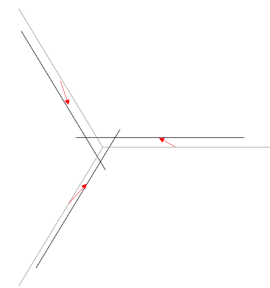


Figure 24 - Translation analytique développée par Olivier L. et S. Baverel

Déterminer directement la géométrie de la structure est un avantage. Cependant, les équations permettant de déterminer les paramètres sont relativement lourdes et limitées à des formes simples de structure (polygone régulier). Le défaut de cette approche est qu'elle est difficilement applicable à des structures constituées d'un nombre conséquent de modules.

### 2.3.2 Bottom-up

L'approche bottom-up s'inspire du comportement de la nature. C'est-à-dire que la structure va grandir, comme un arbre pousse en partant de ses racines. Un premier module est placé à la base de la zone que l'on cherche à recouvrir. Ce module, défini par ses paramètres, sert de référence pour les autres modules. Les modules suivants sont alors ajoutés à la suite des précédents de façon à étendre la structure

dans la direction recherchée. Au fur et à mesure que les modules sont ajoutés, la structure tend donc à recouvrir la surface voulue.

Comme le montre Gherardini and Leali in 2017, cette méthode permet de construire une SR en ajoutant les modules un à un, ce qui permet de modifier les paramètres des modules ajoutés afin de s'adapter localement à la surface recherchée.[6]

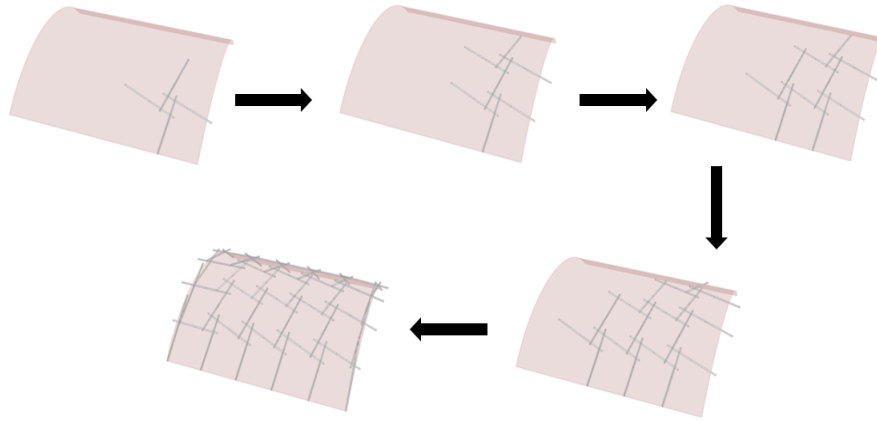


Figure 25- Approche Bottom-up

Bien que possédant une certaine liberté lors de la conception, cette méthode reste néanmoins lourde à réaliser et rigide à modifier. En effet, dès l'ajout du module de référence, il est important de réfléchir à ses paramètres de façon à ce que la suite des modules puisse se placer correctement sur la surface. Le premier module est donc directement dépendant du dernier sans que celui-ci ait été construit. De plus, lorsqu'un module est ajouté, les paramètres qui le définissent sont fixés. Une modification d'un quelconque paramètre de la structure implique qu'elle soit entièrement recréée. Ces deux contraintes limitent à nouveau l'utilisation de cette approche dans le cas de structures complexes.

### 2.3.3 Top-down

Cette méthode est la plus répandue dans la littérature sur la recherche de forme d'une SR. Son avantage principal est qu'elle permet d'anticiper le positionnement et le nombre de modules présents dans la structure finale, dès le début du processus. En pratique, de nombreuses variantes ont été développées.

La première étape de cette approche, consiste à définir la surface qui cherche à être recouverte, *a)* sur la Figure 26. Ensuite, il faut venir placer une grille ou un réseau de points sur cette surface, cette étape est régulièrement appelée **tessellation** *b)*. L'étape suivante est la **transformation** de cette géométrie en structure réciproque *c)*. Différentes méthodes ont été développées pour cette étape, celles-ci seront abordées dans les paragraphes suivants. L'étape finale est une **itération** sur les modules de la structure afin d'étudier l'excentricité entre les éléments constitutifs pour rechercher une condition de contact *d)*. Ces différentes étapes sont décrites plus en détail ci-après.

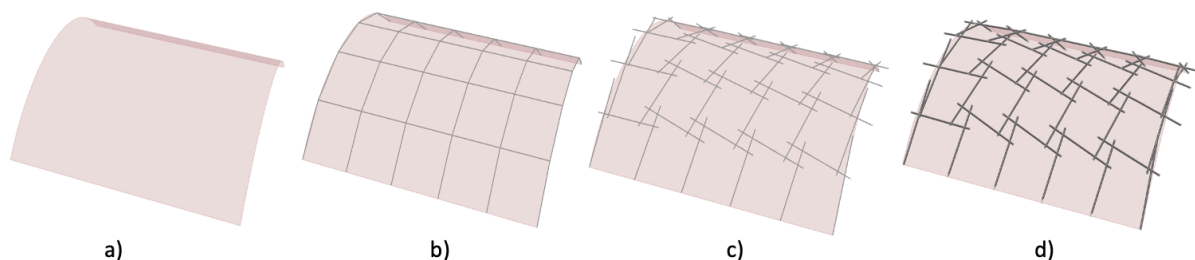


Figure 26 – Étape de l'approche top-down

### 2.3.3.1 Tessellation

La tessellation est le fait de recouvrir une surface par la répétition d'une forme géométrique, sans vide ou recouvrement.

Elle a pour avantage de placer un ensemble de formes planes sur la surface. Cette géométrie permet de recouvrir l'ensemble de la surface 3D par des plans 2D, sur base de paramètres, définissant les formes.

De nombreuses possibilités sont disponibles allant d'un maillage triangulaire, carré ou formé d'autres polygones, à des géométries plus complexes tels que les diagrammes de Voronoi ou la triangulation de Delanay. La variété de géométries disponibles permet une liberté de conception au créateur.

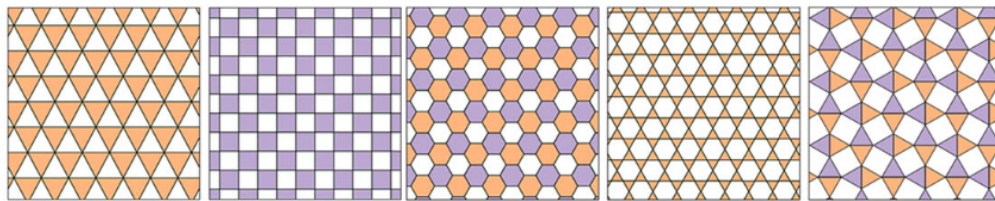


Figure 27 - Différentes formes de tessellation [22]

### 2.3.3.2 Transformation (ou réciprocalisation)

Sur base de la grille établie à l'aide de la tessellation, l'étape suivante consiste à transformer celle-ci en modules réciproques. De nombreuses méthodes de transformation de SR ont été développées au cours des dernières années. Nous citons dans le cadre de ce travail certaines de ces méthodes, la liste étant bien entendu non exhaustive. Pour la compréhension du lecteur, les exemples présentés sont illustrés pour créer un module unique, les principes sont bien entendu applicables à des grilles plus complexes, et donc à des structures complètes.

- 1) Translation : comme son nom l'indique, cette première méthode se base sur le glissement des éléments pour former des modules réciproques. Comme l'ont montré R. MESNIL et al. cette méthode utilise le fait que l'excentricité et la longueur d'engagement d'un module dépend linéairement de la transformation des éléments qui le compose. Une optimisation des excentricités est également proposée dans cet ouvrage. Bien que cette méthode soit développée pour des maillages quadrilatères, elle est facilement généralisable à d'autres formes. [12]

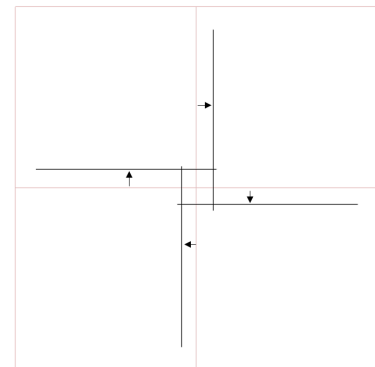


Figure 28 - Transformation par translation

- 2) Rotation : cette méthode se base sur la rotation des différents éléments selon une normale verticale à ceux-ci. Partant d'un maillage, tous les membres subissent une même rotation autour d'une droite perpendiculaire passant par leur milieu. Ensuite, une extension est appliquée aux différents éléments afin de former une structure réciproque. B.Sénéchal, C. Douthe et O.Bavarel utilise cette méthode dans leurs analyse de modules réciproques. [20] Lors de notre travail, nous utiliserons une approche similaire. La rotation sera faite par rapport à l'extrémité des lignes.

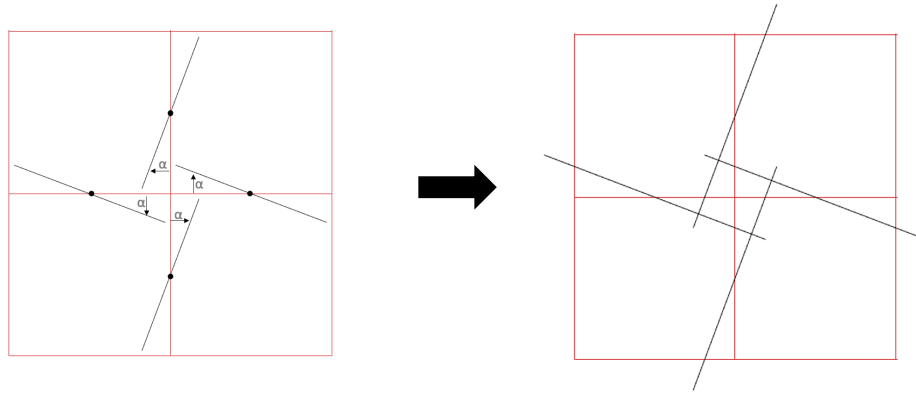


Figure 29 - Transformation par rotation

- 3) Center to center : Cette méthode a été développée par Y. Anastas et al. Pour la transformation, cette méthode se base sur une réduction d'un polygone vers son centre (a) Figure 30). Ensuite, les milieux des segments du polygone extérieur et intérieur sont recherchés (b) Figure 30). Puis des droites partant du point milieu du polygone de base et allant vers le point milieu du segment voisin sur le polygone réduit sont tracées (c) Figure 30). Enfin, ces droites sont allongées pour former un module réciproque (d) Figure 30). Cette méthode utilise donc comme unique paramètre un facteur de réduction afin de former des modules réciproques. [1]

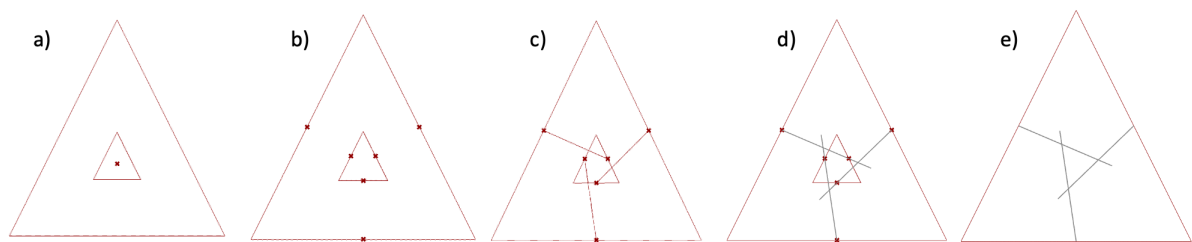


Figure 30 - Étape de la transformation center to center

### 2.3.3.3 Recherche de la position de contact entre les barres

La transformation d'une grille en SR étant établie, il reste à présent à donner une épaisseur aux éléments de la structure. En effet, jusqu'à présent, la structure formée est constituée de lignes infiniment fines et sans excentricité entre elles. L'interdépendance des éléments, constituent la grande difficulté dans la génération de SR. La modification de l'excentricité d'un module, a une influence sur l'ensemble de la structure. Il est donc important d'itérer sur les paramètres, pour trouver une configuration qui réponde à la condition de contact entre les éléments. En fin de processus, ils se portent les uns les autres et les assemblages sont réalisables.

Différentes méthodes ont été développées pour tenir compte de l'interaction des paramètres des modules au sein d'une SR. Parmi celles-ci on retrouve :

- L'itération sur la forme complète de la structure
- L'optimisation hybride des paramètres
- La relaxation dynamique des éléments

- 1) L'itération sur la forme complète de la structure : L'idée générale de cette méthode est de trouver la meilleure solution géométrique parmi une liste de structures générées. Pour constituer cette liste, des structures sont créées en faisant varier les paramètres de transformation, ensuite elles sont mémorisées. La meilleure solution peut être trouvée en recherchant la structure possédant les excentricités les plus proches de la forme voulue. Pour vulgariser, cette méthode consiste à former plein de structures complètes et garder la meilleure.



Une méthode a été montrée par Song et al. , ils ont varié les paramètres d'une structure. Et ensuite gardé celle la plus proche de la surface qu'ils cherchent à recouvrir. [22]

- 2) Optimisation hybride des paramètres: Cette méthode développée par D. Parigi, P.H. Kirkegaard et M. Sassone , combine l'avantage d'un algorithme génétique avec la rapidité de convergence vers la solution d'un solveur mathématique. [14]

Une approche génétique pour les SR a été développée par O. Bavarel et N. Nooshin. Elle utilise le principe de la sélection naturelle sur une population de structure. A chacune de celle-ci est attribué un fitness. Seule les configurations dont le fitness répond à certains critères survivent.[3]

Dans ce cas-ci, le fitness est la somme des excentricités dans une structure. Le critère de sélection consiste à comparer les excentricités aux rayons des éléments constitutifs. Dans l'exemple ci-dessous, le fitness correspond à l'addition des trois excentricités, il est comparé à la somme des rayons des éléments. S'il y a égalité, les contacts sont satisfaits dans le module.

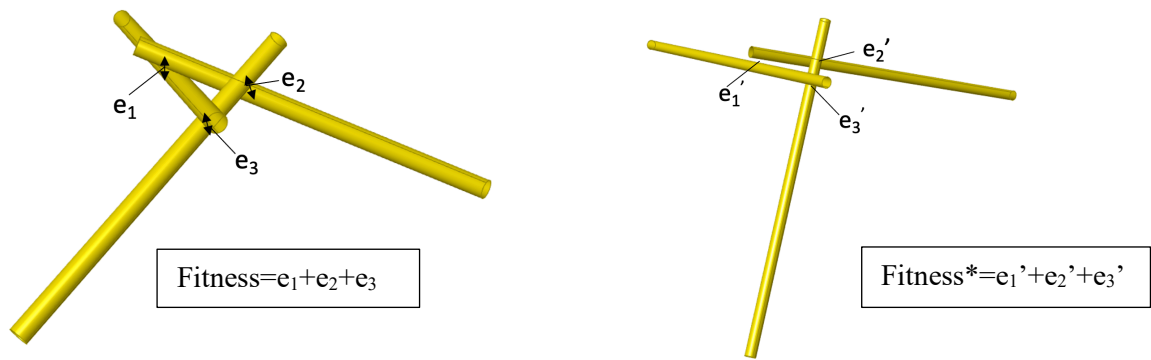


Figure 31 - Fonction fitness pour un module constitué de trois éléments

Pour rappel la variation d'un paramètre au sein d'un module à un impact sur l'ensemble de la structure. En faisant varier les paramètres d'une structure, les excentricités changent et le fitness évolue. Par exemple le Fitness\* est plus grand que la somme des rayons, car les éléments ne se touchent pas au niveau de  $e_1'$ .

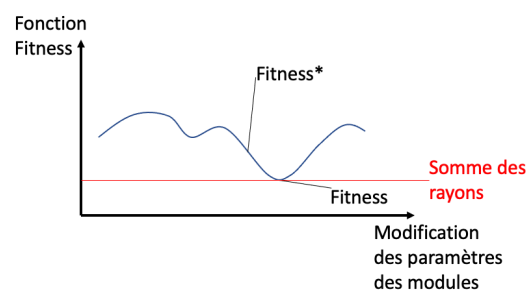


Figure 32 - Graphe de la fonction fitness

La méthode hybride consiste à analyser l'évolution de la population de structure à l'aide d'un graphe. Un solveur mathématique est utilisé pour trouver le fitness minimum, ce qui correspond à un contact entre les éléments du module.

- 3) Relaxation dynamique

La relaxation dynamique est une méthode numérique permettant de chercher la forme d'une structure répondant à certains critères. Le processus consiste à itérer une action sur la structure afin d'obtenir le résultat désiré. A chaque instant, un mouvement est attribué aux éléments de

la structure. Au plus on tend vers la solution au plus faible sont les mouvements des éléments. Cette opération est répétée jusqu'à trouver la solution recherchée.

De façon simple cette méthode peut être illustrée par la situation ci-dessous. Nous cherchons à avoir les deux cercles tangents l'un à l'autre. Lors du premier pas de temps, la distance  $D$  qui sépare le centre des cercles est calculée. Étant plus petite que la somme des rayons, un mouvement est attribué aux cercles vers l'extérieur. Pour le pas de temps suivant, l'opération est répétée. La distance est calculée et un mouvement est appliqué. La position étant plus proche de celle recherchée, le déplacement est moins grand. Au troisième pas de temps, la condition est satisfaite et les mouvements sont arrêtés. Dans la suite de notre travail, la relaxation dynamique sera utilisée.

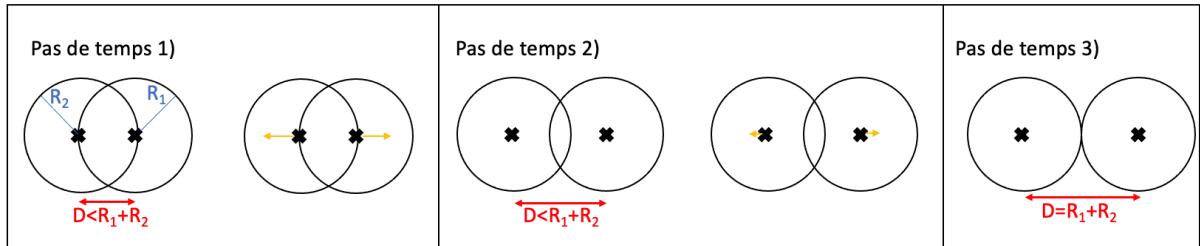


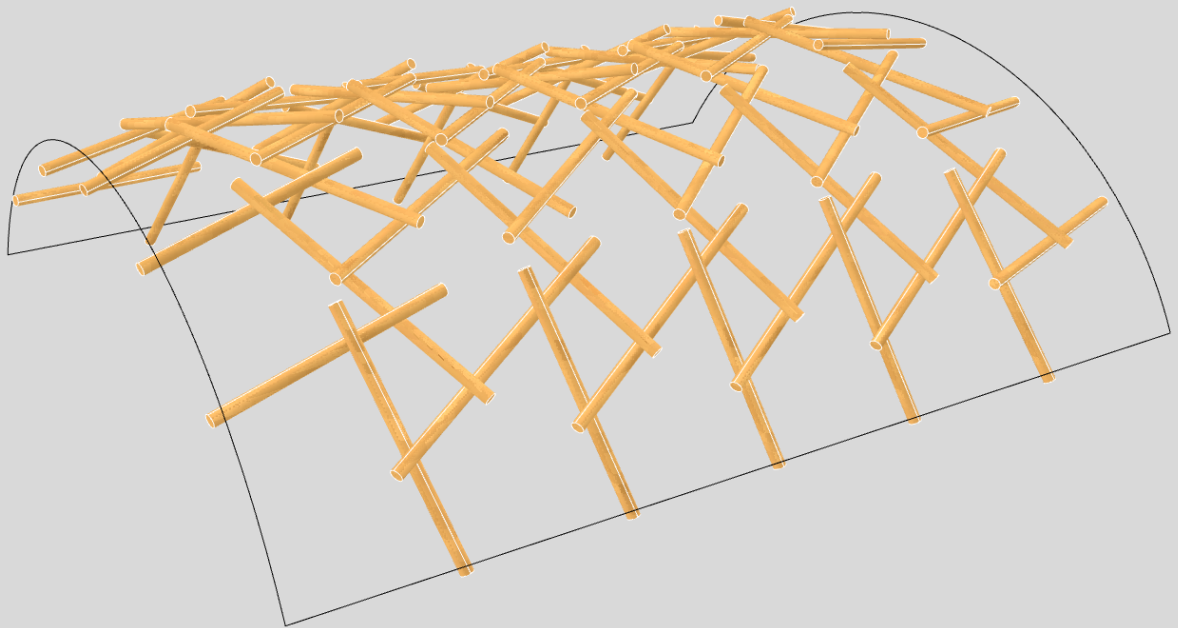
Figure 33 - Illustration simple de la relaxation dynamique

C. Douthe et O. Baravel ont développé une méthode permettant d'appliquer la relaxation dynamique à une structure réciproque. Elle se base sur un comportement mécanique fictif. Le processus part d'une configuration initiale formée de lignes sans excentricité ni longueur d'engagement. Ensuite, un module cherche à être créé. L'extrémité de chaque barre est déplacée et fixée le long d'une ligne voisine, à la longueur d'engagement et l'excentricité voulue. Dans cette nouvelle configuration, les lignes sont pliées et soumises à des efforts internes. Par conséquent, elles vont bouger pour retrouver leurs formes rectilignes initiales. Si la structure est laissée libre, elle va être en mouvement jusqu'à ce que les éléments soient à nouveau droit. Cette nouvelle configuration trouvée forme un module réciproque avec les paramètres souhaités.[5]



Figure 34 - Transformation de trois éléments en module réciproque grâce à la relaxation dynamique [4]

# Fonctionnement global du programme



### 3 Fonctionnement global du programme

Ce travail a pour but d'automatiser la conception d'une structure réciproque sur une surface 3D. Cette surface est fournie par un client ou un architecte qui la définit comme il souhaite. Elle décrit l'étendue à couvrir, par exemple l'enveloppe d'un bâtiment. Ensuite, nous voulons modéliser une structure réciproque qui recouvre celle-ci. La complexité de cette opération vient des interactions entre les modules de la structure. En effet, la position de chaque élément a un impact sur la forme générale. Pour tenir compte de toutes ces relations, nous avons conçu un programme. Celui-ci reçoit une surface et génère automatiquement une structure réciproque dont les éléments sont correctement positionnés. Nous cherchons aussi à minimiser le coût de l'ouvrage en utilisant le moins de connecteurs métalliques possibles. Ce qui est également pris en compte dans le programme.

Nous tenons à construire notre structure avec des grumes. En pratique, tous les troncs sont différents. Pour tenir compte de la forme de ceux-ci, leurs sections peuvent être séparées en deux parties, une interne et une externe. La partie interne est essentiellement constituée du duramen, c'est la zone ayant les meilleures caractéristiques mécaniques. La partie externe contient l'aubier et les couches extérieures de l'arbre. Dans la suite de ce travail, nous allons seulement afficher la partie interne des grumes de la structure, les éléments seront modélisés, par le programme, comme des tubes qui représentent cette zone. La partie externe, qui ne sera pas affichée, sera excédentaire et servira à accueillir les assemblages qui relient les éléments de la structure. Un exemple d'assemblage est celui développé par J. Goosse dans son mémoire.[8]

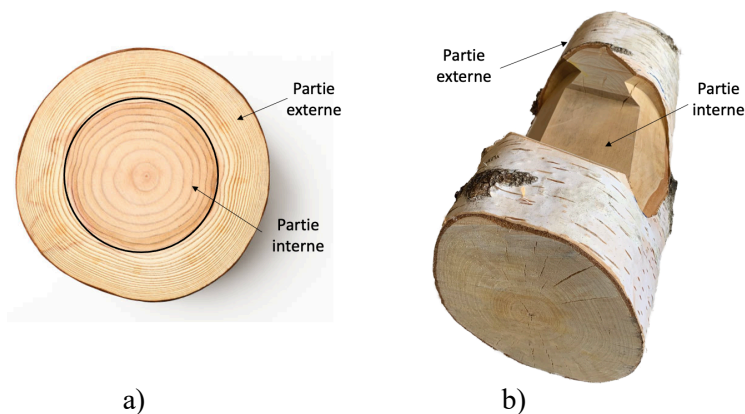


Figure 35 - a) Partie interne et externe d'une grume [9] - b) Assemblage développé par J. Goosse[8]

Dans le monde de la construction aujourd'hui, rares sont les ouvrages qui sont réalisés sans modifications au cours du processus de création. Chaque projet est différent. Il est donc intéressant de créer un outil qui puisse non seulement concevoir une SR sur base des desideratas du donneur d'ordre tout en lui offrant une certaine adaptabilité au changement, au cours de la conception. Pour répondre à ce critère, le programme a été réalisé à l'aide de la conception paramétrique.

Pour résumer, l'objectif de ce travail est de concevoir un programme qui génère une structure réciproque avec un minimum d'assemblages métalliques, à partir d'une surface et de paramètres fournis par un client. Les paramètres à définir sont :

- Nombre de modules dans chaque direction
- Longueur d'engagement des modules
- Distance supplémentaire au-delà de l'assemblage
- Rayon de la partie interne des grumes

Lorsque ces valeurs sont fixées, le programme tient compte des interactions entre les éléments pour modéliser automatiquement la structure.

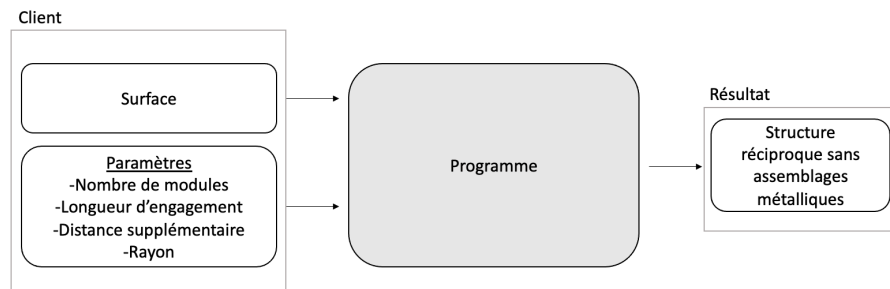


Figure 36 - Schéma du processus

Dans la suite de cette section, nous commencerons par expliquer la conception paramétrique, ensuite nous introduirons les grandes étapes de fonctionnement du programme.

### 3.1 Programmation paramétrique

La conception paramétrique consiste à réaliser un programme sur base de paramètres modifiables. Lorsque ceux-ci varient, l'automatisation du code permet que la solution soit directement modifiée et adaptée aux nouvelles contraintes recherchées. L'utilisation d'un programme paramétrique est un atout majeur, car il permet de couvrir un grand nombre de projets différents sans modification du fonctionnement de celui-ci. Bien entendu, afin de permettre cette variabilité, il est important de choisir judicieusement les paramètres d'entrées. Il faut aussi réfléchir à la façon dont le code est automatisé et se comporte face à toute modification. Pour réaliser un tel programme nous avons utilisé les logiciels *Rhinoceros* et *Grasshopper*.

*Rhinoceros (RH)* est un logiciel de conception 3D. Il permet de dessiner ou de modéliser des objets dans l'espace et ensuite de les afficher sur sa fenêtre. *Grasshopper (GH)* quant à lui, est un plug-in de *RH*. C'est un logiciel de programmation paramétrique.

En pratique, les deux programmes opèrent en parallèle et sont liés. *RH* peut être utilisé indépendamment de *GH* mais pas l'inverse. *GH* permet d'écrire un programme, automatisant ou réalisant un projet, qui peut être affiché sur l'interface 3D de *RH*. Sur notre ordinateur, les deux logiciels s'ouvrent en même temps et leurs fenêtres s'utilisent l'une à côté de l'autre (Figure 37). Cette configuration permet d'afficher une partie ou l'entièreté du programme afin de visualiser les résultats. Cette faculté a été d'une grande aide pour le développement du programme, notamment en permettant de voir ce qu'il s'y passe afin de vérifier le bon comportement des différentes parties de celui-ci.

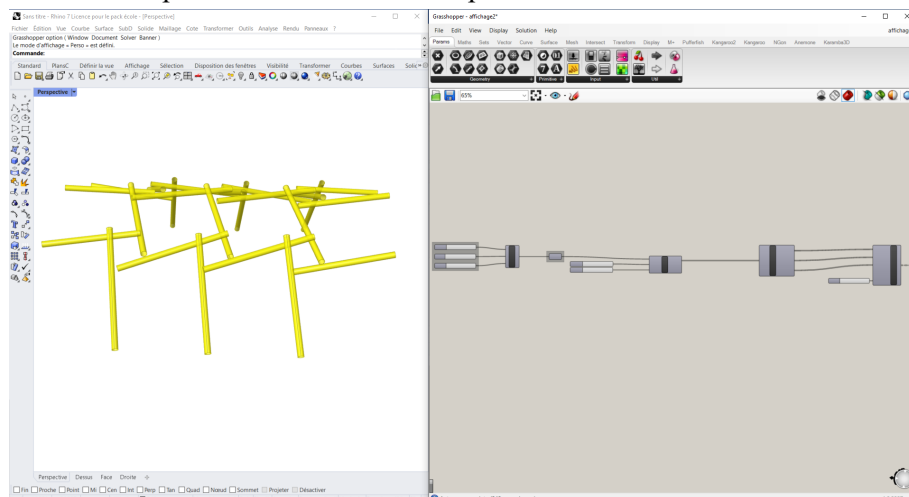


Figure 37 - Écran de notre ordinateur lors de l'ouverture des logiciels, fenêtre d'affichage Rhinoceros à gauche, fenêtre de programmation Grasshopper à droite

L'approche paramétrique permet une grande diversité de projets couverts par un même programme. Un autre avantage vient s'ajouter au niveau de la conception. En effet, la liberté des paramètres d'entrées, nous permet de rapidement voir l'influence d'un de ceux-ci sur le résultat final, et ainsi de le corriger vers ce qui est recherché.

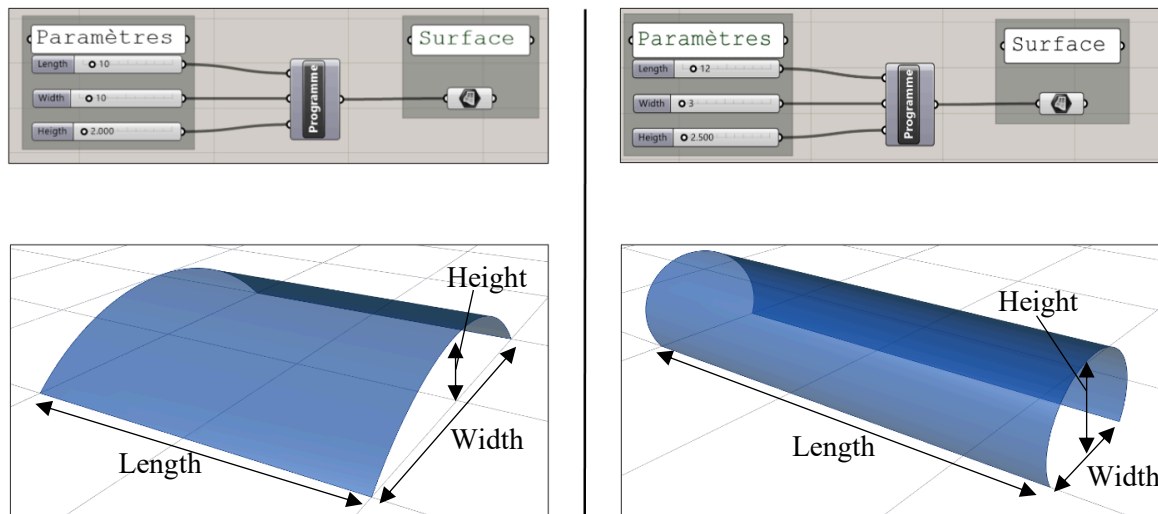


Figure 38 - Variation des paramètres pour un même programme (Interface Grasshopper pour les figures du haut, Interface Rhinoceros pour les figures du bas)

Un autre atout de *GH* est sa facilité de prise en main. Sa représentation sous forme de boîtes qui fonctionnent comme des outils est très instinctive. Chacune de celle-ci opère une action spécifique sur base de valeurs qu'elle reçoit et renvoie un résultat affichable. Leur fonctionnement interne est cependant caché à l'utilisateur. De nombreuses boîtes sont disponibles dans la bibliothèque de *GH* et permettent de faire une multitude de tâches. Une programmation traditionnelle est également possible, notamment par l'utilisation des langages informatiques *VB*, *C#* et *Python*, afin de créer ses propres outils. En combinant ces deux options, la conception d'une infinité de programmes différents est possible. Dans ce travail, plusieurs outils ont été développés. Ceux-ci ont été créés à l'aide de scripts *C#*.

Finalement, il est important de préciser qu'une communauté *Grasshopper* existe. Elle est très réactive sur les forums, avec beaucoup de réponses aux questions qui s'y posent. De nombreux problèmes peuvent, dès lors, être résolus par des recherches sur ceux-ci. Cette communauté développe également des plug-ins d'extension pour *GH*, qu'il est ensuite possible de télécharger pour agrandir la variété d'outils déjà disponibles dans la base de données du logiciel.

### 3.2 Le programme en bref

La programmation paramétrique étant définie, il est temps de se pencher sur l'automatisation de la conception d'une structure et le fonctionnement global du programme développé dans ce travail.

Le programme développé suit l'approche top-down décrit dans la section 2.3.3. Un avantage de cette méthode est qu'elle permet d'avoir un contrôle sur la forme finale dès le début du processus. Par exemple, les modules de la structure sont définis par la forme et le nombre de faces de la géométrie utilisée. Elle permet également d'adapter facilement la structure lorsqu'un des paramètres d'entrée est modifié.

Ce chapitre est dédié à l'explication globale du programme que nous avons développé. Chacune des étapes est expliquée brièvement, elles seront ensuite expliquées en détail dans les chapitres suivants.



Le programme est séparé en cinq étapes principales reprises sur la Figure 39 :

- 0) La surface à couvrir est définie par le client
- 1) Formation d'un maillage sur la surface
- 2) Réciprocalisation ou la transformation en structure réciproque
- 3) Ajout de l'épaisseur des éléments
- 4) Structure finale

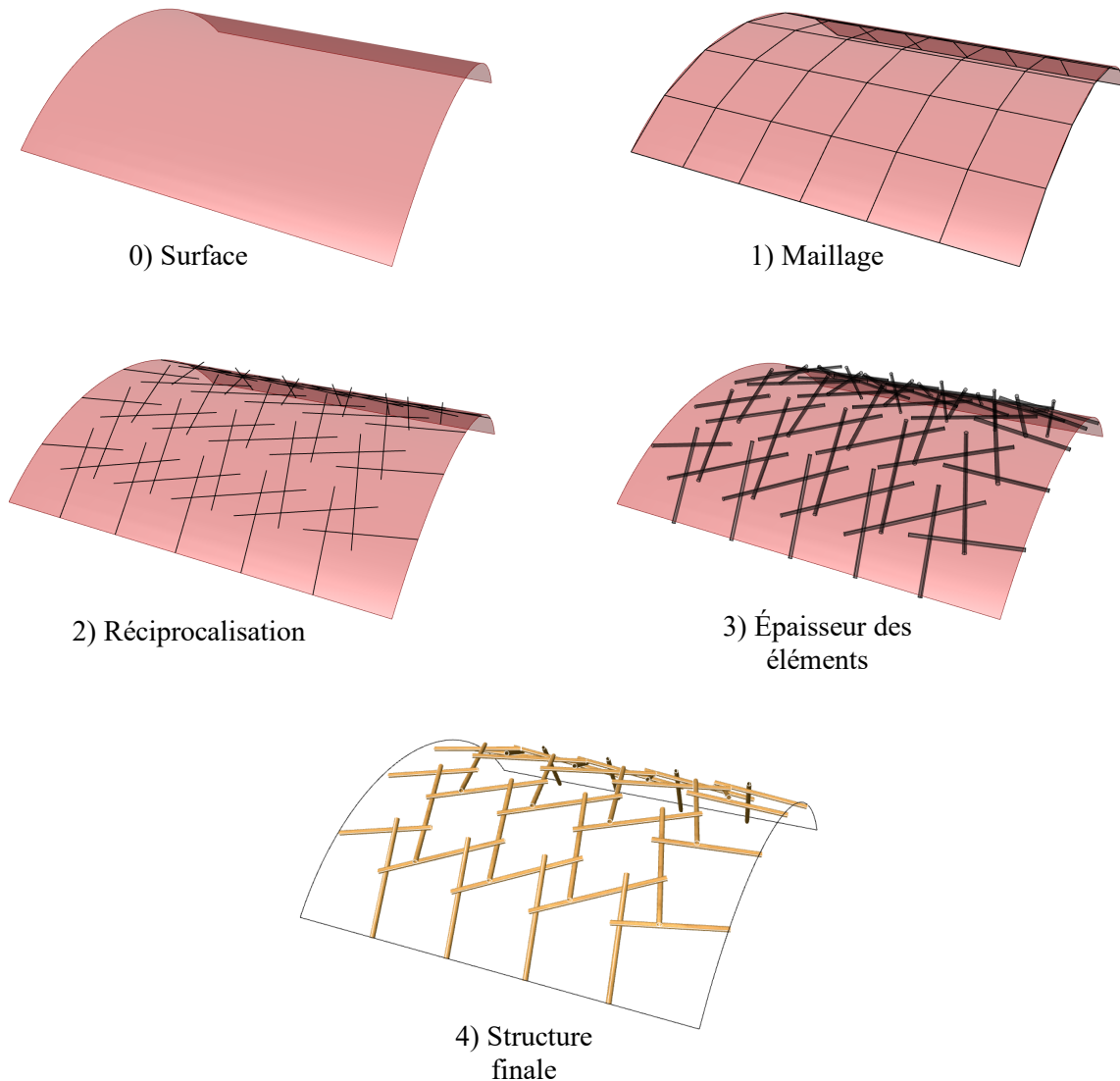


Figure 39 - Étapes principales de l'automatisation de la recherche de forme d'une structure réciproque

#### 0) Demande du client

Le client fournit une surface sur laquelle il cherche à construire une structure réciproque. Celle-ci peut prendre de nombreuses configurations, allant d'un dôme ou d'un demi-cylindre à des formes beaucoup plus variables. Cette étape est indépendante du programme.

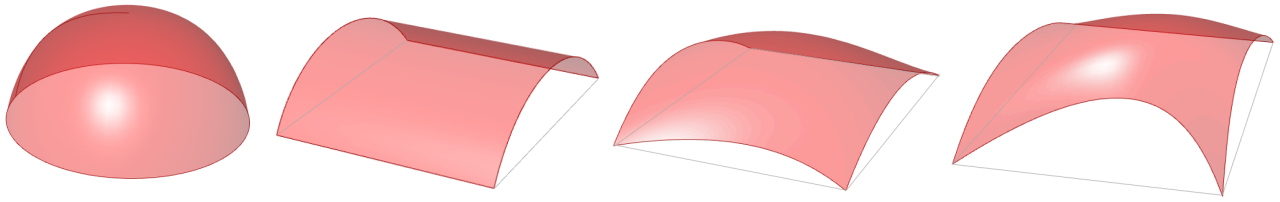


Figure 40 - Différentes surfaces possibles

### 1) Maillage

La première étape de la conception est de placer une géométrie sur la surface que l'on reçoit. Nous utiliserons pour cela un maillage. Il peut être visualisé par une grille, composée de formes régulières (carré, triangle, losange...) qui approxime la surface. Il est caractérisé par des nœuds et des faces. Dans le cadre de ce travail, nous nous concentrerons sur des formes carrées. Le maillage sert de base à la suite de la conception, son contrôle est important donc pour le fonctionnement de la suite du programme.

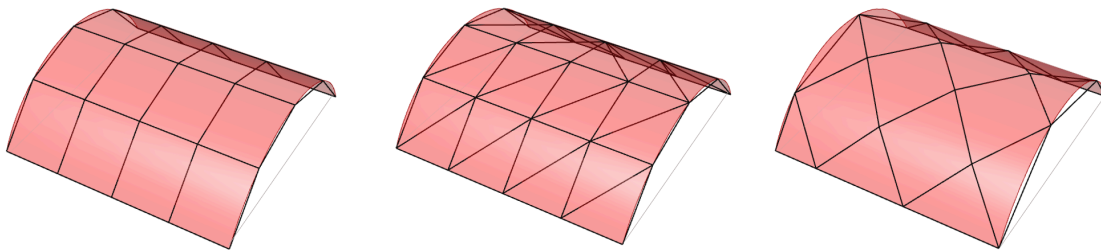


Figure 41 - Différentes formes de maillages

### 2) Réciprocalisation

La réciprocalisation se définit comme la transformation des lignes de notre maillage en structure réciproque. Chaque nœud du maillage deviendra un module. (voir b) Figure 42) A la suite de cette opération, la surface est couverte d'une première SR constituée de lignes sans épaisseur. La structure n'est pas encore constructible.

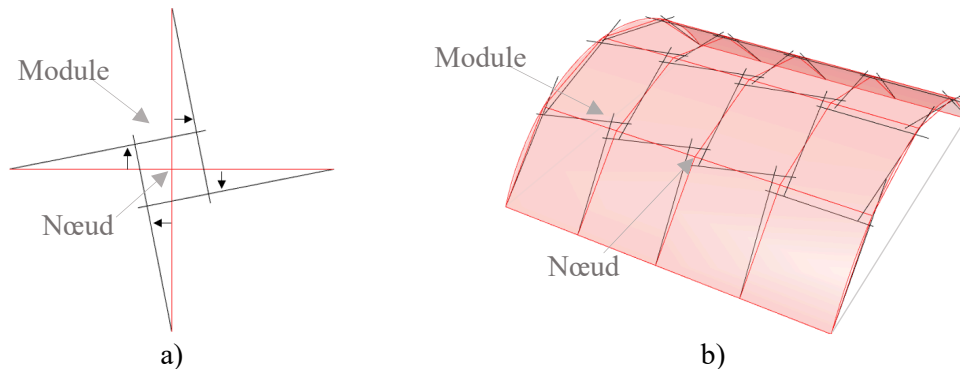


Figure 42 - a) Réciprocalisation d'un nœud de quatre lignes - b) Réciprocalisation des nœuds d'un maillage

### 3) Épaisseur des éléments

Les étapes précédentes ont travaillé avec des lignes, une épaisseur va maintenant leur être attribuée. Cette dimension est liée aux rayons et par conséquent à la distance entre les axes des éléments qui permet le contact. Cette distance est appelée excentricité. (Figure 43) C'est ici qu'apparaît le lien entre les lignes précédemment utilisées qui deviennent les axes centraux des grumes qui composent la structure.

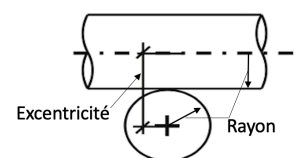


Figure 43 - Excentricité

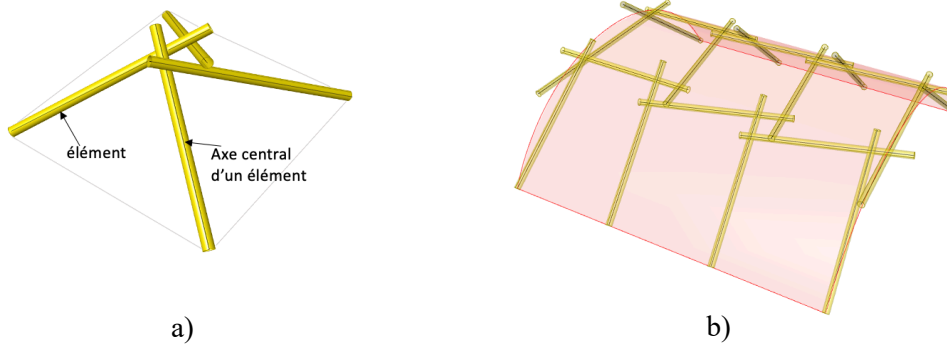


Figure 44 - a) moaule avec l'épaisseur de ses éléments - b) Structure avec les épaisseurs des éléments

Enfin, nous cherchons à minimiser le nombre de connecteurs métalliques présent dans les assemblages de la structure. Ceci est pris en compte de deux façons dans le programme. Une première approche permet d'en tenir compte dans l'ajout de l'épaisseur des éléments. Une seconde utilise le calcul numérique des efforts internes dans les assemblages de la structure qui a été modélisée et vient ensuite modifier la position des éléments. Ces deux approches sont complémentaires et feront également l'objet d'un chapitre.

#### 4) Structure finale

Grâce aux étapes précédentes, une structure réciproque a été formée. Elle est constructible sans pièces métalliques. Il est intéressant de fournir la géométrie à un logiciel de calcul numérique (Scia, Karamba ou autre) pour modéliser les efforts internes ainsi que la déformation de la structure, sous différents cas de charges. Si le comportement de celle-ci ne répond pas à la demande du client, nous pouvons modifier les paramètres d'entrée du programme afin d'adapter la forme trouvée.

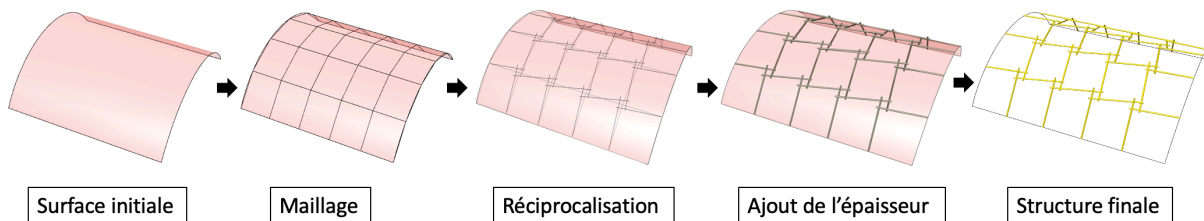


Figure 45 - Étape de la recherche de forme d'une structure réciproque

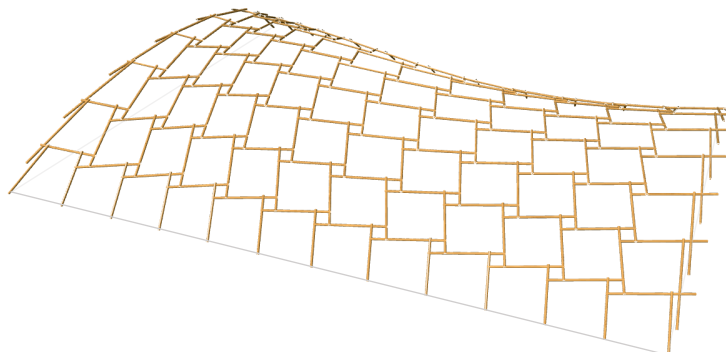
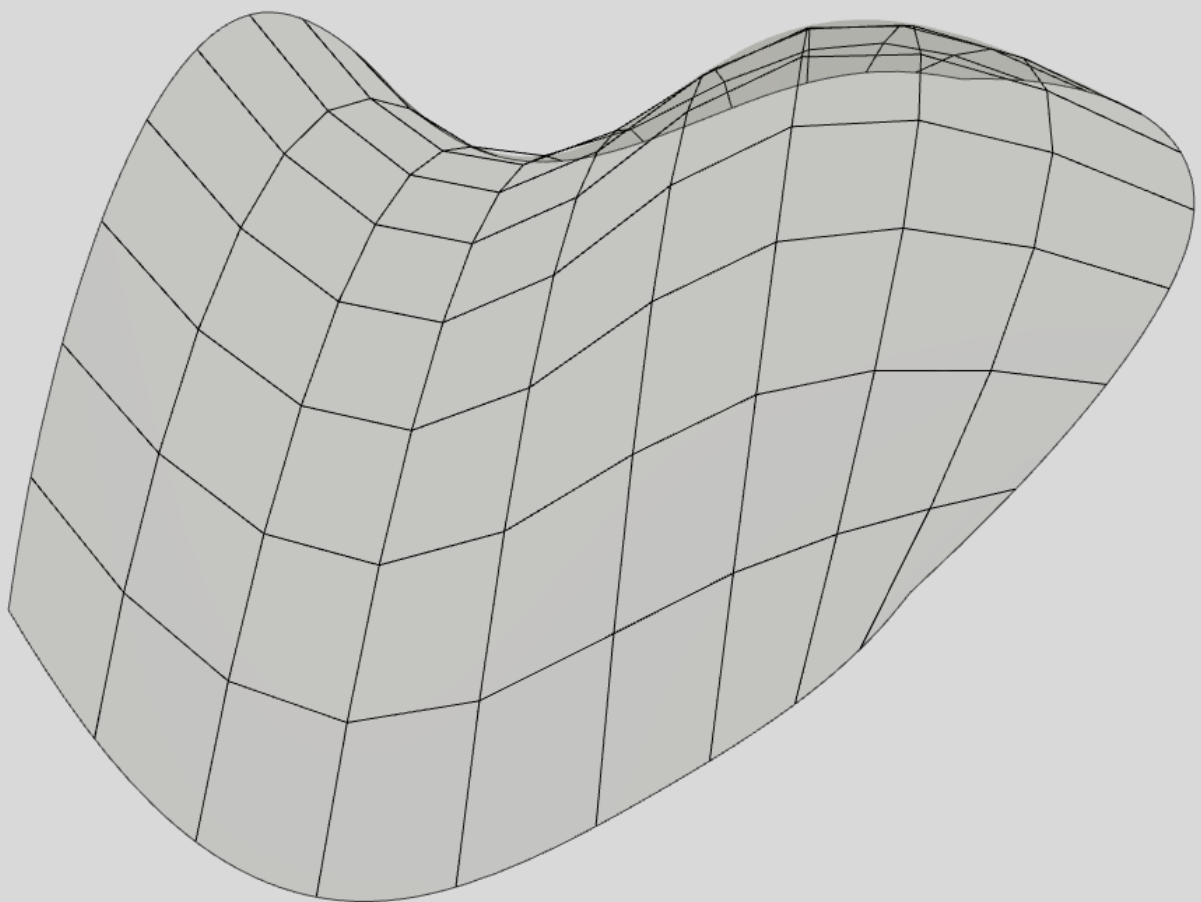


Figure 46 - Structure réciproque formée



# Maillage



## 4 Maillage

La première étape de l'automatisation de la conception d'une SR est de placer une géométrie, appelée maillage, sur la surface ou l'enveloppe du bâtiment fournie par le client.

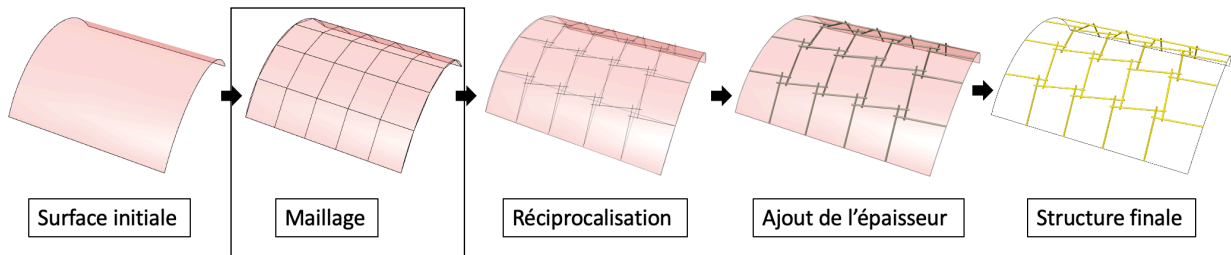


Figure 47 - Étape de la recherche de forme d'une structure réciproque

Dans cette section, nous commencerons par étudier la définition d'un maillage ainsi que ses avantages pour notre utilisation. Ensuite, nous aborderons les maillages dans *Rhinoceros*. Nous parlerons des données qui les constituent et la façon dont elles sont organisées. Puis nous étudierons les constructeurs disponibles dans *Grasshopper* pour former cette géométrie à l'aide d'un programme. Ces outils comportent cependant des problèmes pour notre utilisation. Nous terminerons donc par expliquer les outils que nous avons créés pour construire un maillage pour afin d'avoir le contrôle total de la géométrie que nous utilisons dans notre programme.

### 4.1 Définition

Un maillage est une structure de données qui permet de représenter une surface continue par un ensemble de faces planes. Il approxime donc une étendue trois dimensions par des plans deux dimensions, de formes polygonales.

Un maillage peut être visualisé comme une grille sur une surface. Il est classiquement défini par deux données : les mailles et les nœuds. Les mailles sont les faces de celui-ci. Les nœuds quant à eux sont les points en lesquels se rejoignent les lignes.

Le nombre de mailles est défini dans un repère local (U,V) propre à la surface. Pour former un maillage, il faut fixer la quantité de mailles voulues dans chaque direction. Plus celui-ci est grand, plus l'approximation de la surface sera précise. Le nombre de mailles dans chacune des directions peut être différent.

Les maillages ont de nombreux avantages pour notre utilisation. Le premier est que cette géométrie recouvre entièrement la surface, quel que soit le degré de précision de l'approximation (Figure 48). Ceci permet d'assurer que la SR formée par la suite, soit proche de la forme de référence. Il suffit alors d'affiner le maillage pour que la future structure épouse mieux la surface. Un deuxième avantage est la régularité de la géométrie. Les modules de la SR seront créés sur base des lignes qui se rejoignent en un point, donc aux nœuds. Pour former une structure réciproque, il suffit d'appliquer la réciprocalisation à chacun de ceux-ci. Un troisième atout est le fait que les lignes se rejoignent aux nœuds. C'est la raison de l'efficacité du maillage. En effet, lors de la réciprocalisation, il faut identifier les lignes qui se touchent afin de savoir sur quels éléments agir. Dans un maillage, cette opération est facile grâce à leurs extrémités

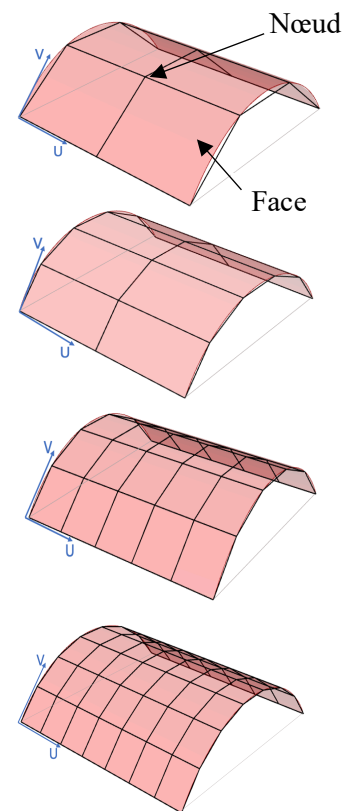


Figure 48 - Variation du nombre de mailles d'un maillage les direction U et V



communes. Pour connaître la position des lignes les unes par rapport aux autres, il suffit de parcourir celles ayant un point commun. Enfin, les maillages sont des structures bien développées dans les logiciels *RH* et *GH*. L'organisation de leurs données est donc claire et efficace. Cela permet un accès rapide à celles-ci, notamment avec de nombreuses fonctions disponibles dans la bibliothèque virtuelle. Par exemple, la position des faces, des nœuds ou les liens entre ces derniers sont facilement connus. Pour ces raisons, l'utilisation de maillage est un gain de temps considérable lors du processus de création d'une SR.

Les maillages sont utilisés dans beaucoup de projets de la communauté *GH*. Par conséquent, de nombreux outils permettant de former des maillages sont fournis lors de l'installation du logiciel. À ceux-ci viennent s'ajouter les plug-ins développés par la communauté afin de diversifier la famille de maillage qu'il est possible de créer. Parmi ceux réalisables, on retrouve des grilles triangulaires, carrées, hexagonales ou toutes autres formes polygonales. Des maillages plus aléatoires tels que ceux de Voronoi ou Delaunay, peuvent aussi être utilisés. Les maillages suivants ont été réalisés sur *GH* soit grâce à des composantes initialement disponibles, soit à l'aide des plug-ins téléchargeables sur food4Rhino<sup>1</sup>.

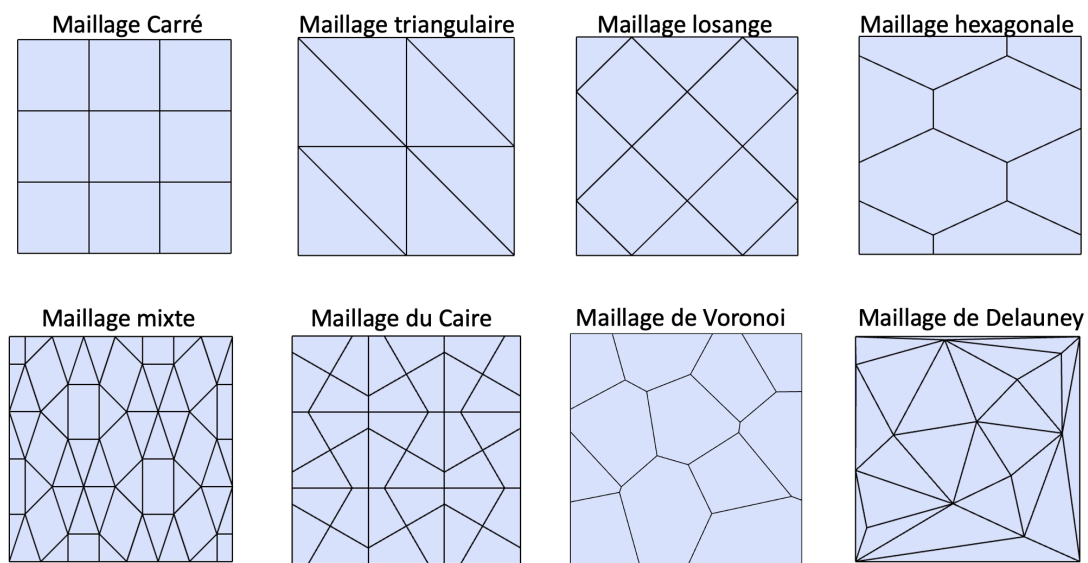


Figure 49 – Variété de maillages sur une surface disponible dans Grasshopper

Un maillage est donc l'approximation d'une surface par des mailles, qui sont des faces de formes polygonales. Cette structure de données comporte plusieurs avantages pour notre utilisation. Les lignes qui le constituent se rejoignent en des nœuds. Chacun de ceux-ci est par la suite réciprocalisé pour créer un module de la structure. Le nombre de lignes arrivant dans un nœud détermine le nombre d'éléments du module. Par exemple, un nœud reliant trois lignes forme un module de trois éléments (Figure 50). Le choix du maillage par son nombre de faces ainsi que la forme de celles-ci dicte le nombre de modules de la structure et le nombre d'éléments qui les constituent. Le créateur a un contrôle sur la forme de la structure finale dès le début du processus. Dans le cadre de ce travail, nous utiliserons essentiellement des maillages carrés, cependant les méthodes présentées restent généralisables aux autres formes.

<sup>1</sup> Les plug-in M+ et NGon ont été utilisés.

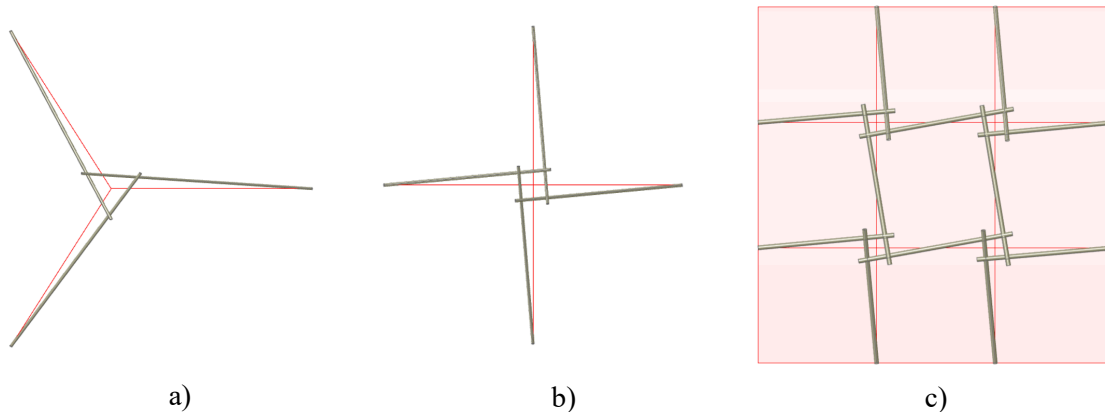


Figure 50 - a) Nœud constitué de trois lignes formant un module de trois éléments - b) Nœud constitué de quatre lignes formant un module de quatre éléments - c) Formation des modules sur les nœuds du maillage

## 4.2 Utilisation de maillage dans les logiciels Rhinoceros et Grasshopper

Nous l'avons vu, un maillage est une structure de données. Nous allons à présent nous intéresser à leurs données ainsi qu'à leur fonctionnement. Les maillages étant directement liés à la façon dont seront formés les modules réciproques, il est primordial de bien comprendre de quoi ils sont constitués et leur comportement. Cela permet d'avoir une bonne maîtrise sur les étapes suivantes.

Dans cette section, nous étudierons les maillages dans *Rhinoceros* (*RH*) et *Grasshopper* (*GH*).

Les maillages sont définis dans *RH* sur base de trois caractéristiques. Lorsque celles-ci sont fixées, la grille peut être affichée sur l'interface *RH*. *GH* contient dans sa bibliothèque virtuelle différents outils permettant de construire des maillages. Ces constructeurs fixent les caractéristiques pour *RH* sur base d'un nombre de mailles. *GH* dépend de *RH* mais pas l'inverse.

Pour faire une analogie simple, imaginons une chaise. Celle-ci est définie dans *RH* sur base de caractéristiques (un dossier, une assise et un nombre de pieds). De son côté, *GH* est une usine qui souhaite construire une chaise. Pour cela, il définit les caractéristiques. Il fixe le type de dossier et d'assise, ainsi que le nombre de pieds pour la chaise qu'il veut créer.

Dans cette section, nous commencerons par étudier les maillages *RH*, ainsi que les données qui les caractérisent. Ensuite, nous nous intéresserons aux différents constructeurs de maillages disponibles dans *GH* et leur fonctionnement.

### 4.2.1 Objet maillage de Rhinoceros

Nous l'avons déjà vu les maillages sont des structures de données, mais quelles sont-elles ? Dans *Rhinoceros*, ils sont constitués de trois données :

- Un repère local
- De nœuds
- De faces

Tout maillage possède un **repère local**. Il est constitué de deux axes *U* et *V*. Ces deux directions permettent de définir le nombre de mailles de celui-ci. Dans l'exemple ci-dessous, le maillage est constitué de 3 mailles dans la direction *U* et de quatre mailles dans la direction *V*.

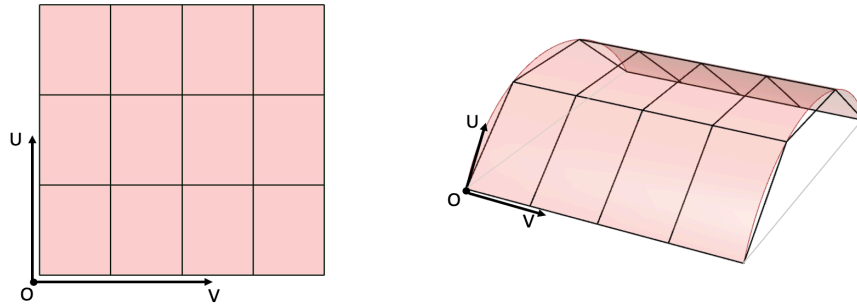


Figure 51 - Repère local du maillage

Ensuite, un maillage contient **des nœuds**. Un nœud est un point de la surface qui sera couverte par le maillage. Sa position peut être définie de deux façons. Soit par des coordonnées cartésiennes  $(x,y,z)$ , si l'on cherche sa position dans l'espace. Soit par des coordonnées équivalentes  $(u,v)$  dans le repère local de la surface. Les nœuds du maillage sont donc un ensemble de points de la surface défini chacun par des coordonnées.

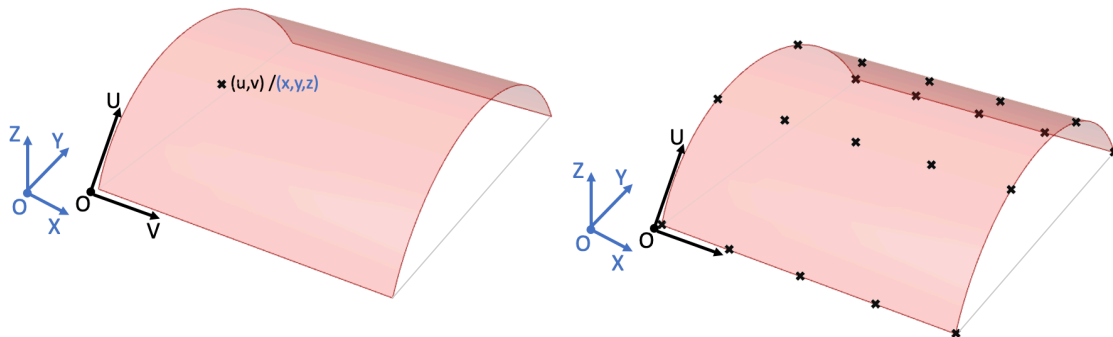


Figure 52 - Coordonnées d'un point de la surface (gauche) - Nœuds pour former un maillage (droite)

**Les faces** sont la troisième donnée du maillage. Les faces forment un lien entre les nœuds de celui-ci. Ce sont les plans 2D qui le constituent, ces plans sont délimités par des polygones dont les côtés sont des segments qui relient les nœuds. Dans le maillage ci-dessous, les nœuds sont numérotés, la face A est constituée des nœuds 1, 2, 6 et 5.

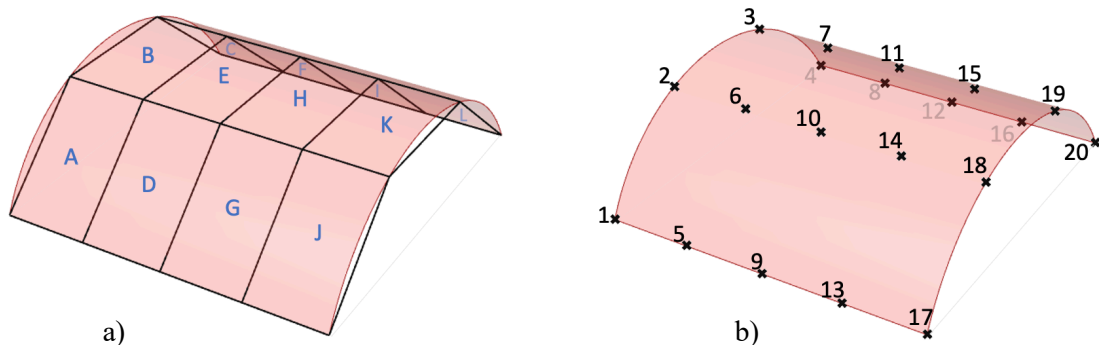


Figure 53 - a) Faces du maillage - b) Nœuds formant les faces du maillage

L'ordre dans lequel sont fournis les nœuds à une face est important. Elles sont définies par les segments qui relient les nœuds. Les côtés sont tracés dans l'ordre dans lequel les nœuds sont donnés. Pour reprendre la face A, les nœuds qui la délimitent sont le 1, 2, 6 et 5. Le premier segment tracé sera celui entre les nœuds 1 et 2, ensuite celui entre le 2 et le 6, puis 6 et 5, enfin 5 et 1. Les segments sont, dans ce cas-ci, tracés dans le sens horaire. Si les nœuds avaient été donnés dans un autre ordre, elle aurait été différente. Par exemple 1, 2, 5, 6, en suivant la même réflexion que précédemment, la face A aurait eu la forme b) sur la Figure 54. L'ordre des nœuds est donc primordial, car il dicte la forme de la face.

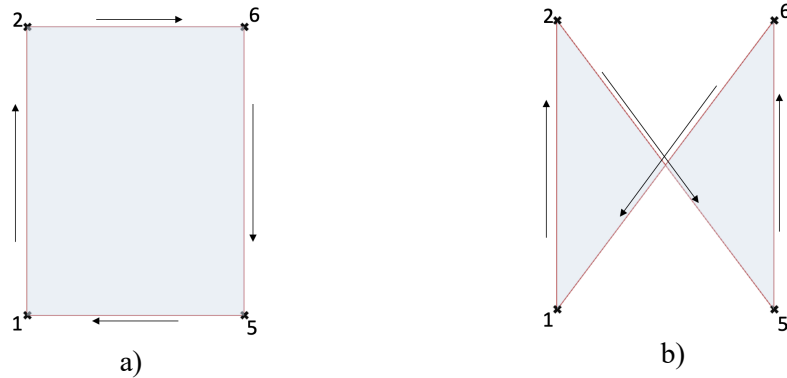


Figure 54 - Ordre de parcours des nœuds d'une face - a) Sens 1,2,6,5 - b) Sens 1,2,5,6

Au sein des maillages de Rhinoceros, se trouvent trois types de face. Celles constituées de trois et quatre nœuds. Les premières forment logiquement des formes triangulaires et les secondes des quadrilatères. À l'aide de ces deux formes, il est possible de créer la variété de maillages que l'on retrouve sur la Figure 49. Cependant pour définir une maille avec plus de quatre nœuds, un troisième type existe, appelé Ngons. Celles-ci consistent en un assemblage de formes élémentaires (triangulaire et carrée). Lorsque ces dernières sont liées, elles ne sont plus perçues comme des entités séparées, mais comme une unique face qui sera dès lors affichée comme telle dans le maillage.

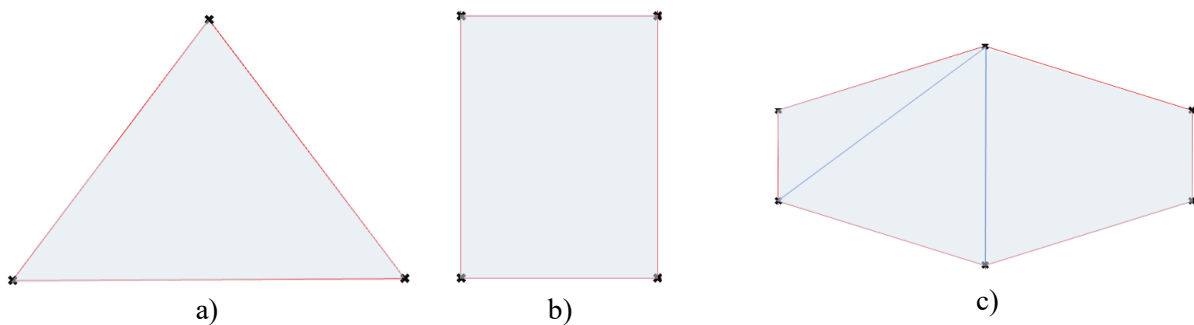


Figure 55 - Différents types de faces - a) Face triangulaire - b) Face quadrilatère - c) Ngon constitué de deux triangles et un quadrilatère, formant une face hexagonale

Enfin, l'assemblage de faces forme un maillage. Elles sont liées les unes aux autres par des nœuds communs. Il suffit d'unir les différentes faces, à l'aide de leurs extrémités semblables pour créer un réseau de mailles qui sera dès lors un maillage.

Les trois données qui constituent un maillage étant définies, nous remarquons que les lignes ne font pas partie de celles-ci. Lorsqu'on visualise un maillage, on représente les bords des faces. Cependant, les modules de la structure réciproque seront formés par réciprocalisation des lignes de la grille, il est dès lors intéressant de les tracer. L'organisation des données du maillage permet de le faire. Les nœuds sont les extrémités des lignes, la relation est donc logique. De plus, les faces permettent de connaître les nœuds qu'il faut relier. Cette tâche devient donc évidente. Nous avons développé un outil permettant de tracer les lignes. (Figure 56)

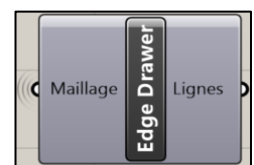


Figure 56 – Outils développés permettant de dessiner les lignes d'un maillage

### Fonctionnement de l'outil développé

Pour tracer les lignes, cet outil parcourt les nœuds dans l'ordre. Ils sont numérotés dans la direction V puis U du repère local. Lorsque deux points appartiennent à une même face et sont reliés au sein de celle-ci, une ligne est créée. L'ordre de traçage des lignes est donc lié au parcours des nœuds. Or comme nous le verrons, la numérotation des lignes dicte l'étape de réciprocalisation. Par conséquent, une bonne organisation des nœuds est primordiale.

### Utilisation d'autres types de géométries

Seules les lignes servent pour la réciprocalisation. Dès lors, il est intéressant de se demander pourquoi avoir utilisé un maillage et non une grille de points ou directement des lignes sur la surface qui permettraient de tracer celle-ci par la suite ?

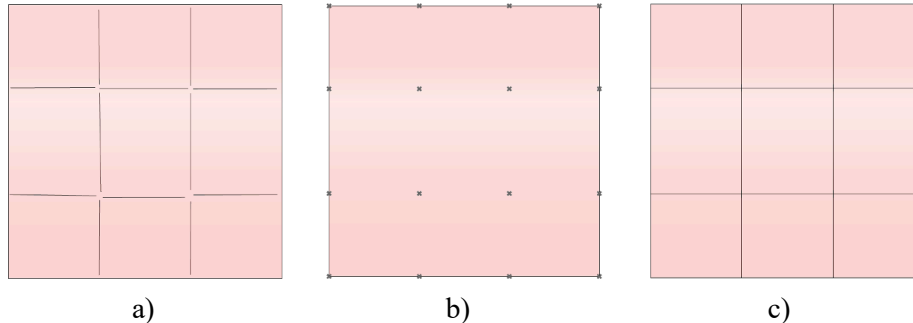


Figure 57 - a) Lignes sur une surface - b) Grille de points - c) Maillage équivalent

Pour appliquer la réciprocalisation (Figure 58) aux lignes sur une surface (a) Figure 57), il faut déterminer quelles sont celles qui sont assez proches les unes des autres pour appartenir à un même module. La difficulté est donc de définir ce critère de proximité et la façon de le mesurer. L'avantage du maillage est que les lignes se rejoignent toutes en des nœuds. Par conséquent, le critère de proximité se réduit à chercher celles ayant un point commun, ce qui constitue un gain de temps considérable.

En ce qui concerne la grille de points (b) Figure 57), elle permettrait de tracer les lignes sans passer par la structure complexe que sont les maillages. Mais alors, comment tracer les lignes sur base d'un ensemble de points ? Il faut déterminer ceux à relier à l'aide d'une relation. Si les nœuds sont les points de cette grille, les faces constituent le lien qui permet de savoir quels sont les points à relier. Les opérations permettant de tracer les lignes sur base d'un réseau de points sont par conséquent équivalentes à définir un maillage.

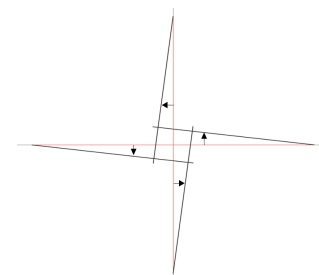


Figure 58 – Réciprocalisation de quatre lignes qui se rejoignent

Pour notre usage, le maillage semble donc l'outil le plus direct. (c) Figure 57)

#### 4.2.2 Constructeur de Maillage Grasshopper

Au sein de *GH*, de nombreux outils constructeurs de maillage sont disponibles. Ils fonctionnent comme des boîtes noires, qui sur base d'une surface et du nombre de mailles voulues, créent un maillage. Pour ce faire, les constructeurs font appel aux données définies dans *RH*. L'outil se charge lui-même de fixer le repère local, les nœuds et les faces. En plus des variétés de maillage disponibles lors de l'installation du logiciel, de nombreux plug-ins développés par la communauté permettent de créer d'autres formes. Ces outils étant accessibles et efficaces, il est intéressant de se pencher sur leurs fonctionnements.

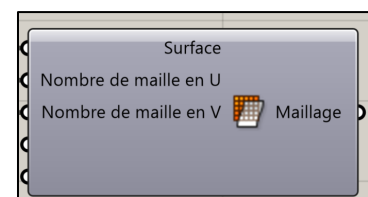


Figure 59 – Outils Grasshopper permettant de créer un maillage sur une surface

La première donnée d'un maillage est son repère local. Les maillages *GH* prennent le même repère local pour la surface que pour la géométrie qui y est construite. Il est donc intéressant de se pencher sur la façon dont sont choisis les repères locaux de surface 3D dans *GH*.

Une infinité de surfaces existent. Chacune possède un repère local qui permet de se situer au sein de celles-ci. Les axes du repère suivent généralement les bords de la surface, de façon à pouvoir la couvrir entièrement. Les valeurs extrêmes dans ces deux directions sont définies par le domaine de l'enveloppe.

Il représente la dimension de cette dernière. Par exemple pour la seconde image de la Figure 60,  $b_2$  est la longueur de la ligne qui constitue le bord,  $a_2$  quant à elle est la longueur de l'arc de cercle.

Dans les exemples Figure 60, les domaines sont définis comme allant de 0 à  $a$  dans la direction U et de 0 à  $b$  dans la direction V.

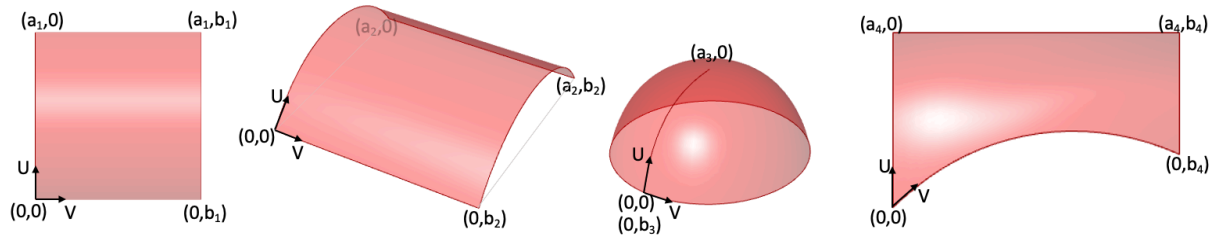


Figure 60 - Repères locaux pour différentes surfaces

Nous l'avons vu les axes suivent les bords de la surface. Chaque surface a plusieurs bords, dès lors lesquels choisir et où placer l'origine ?

Au sein de *GH*, l'origine du repère est déterminée par l'ordre dans lequel les bords sont ajoutés pour définir la surface. Elle sera toujours placée au départ du premier segment. Par exemple, prenons le cas de la surface carrée (Figure 60). Lorsqu'on dessine un carré sur une feuille, on est libre de choisir le côté qu'on va tracer en premier. Par conséquent, quatre bords sont potentiellement ajoutés en premier (Figure 62). Chaque ligne a deux extrémités. Elle peut être tracée comme allant d'un point  $p_1$  vers un point  $p_2$  ou inversement (Figure 61). La direction V sera toujours placée dans le sens de création de la première ligne, la direction U sera le long du bord adjacent. En combinant le premier bord et le sens de celui-ci, huit repères locaux différents sont disponibles pour une surface carrée (quatre d'entre eux sont illustrés sur la Figure 62). Le repère de toute autre surface formée dans *GH* suit la même logique.

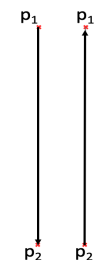


Figure 61 - Sens de création d'une ligne

Sur la figure ci-dessous, le sens de création du premier bord est représenté par la flèche noire.

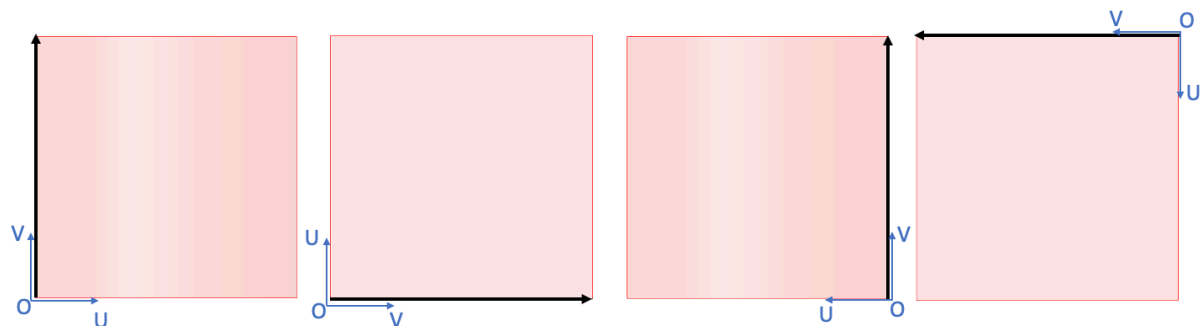


Figure 62 - Quatre possibilités de repère local, pour une même surface carrée

Il existe différentes possibilités de repère pour une même surface. Les constructeurs de maillage *GH* prennent le même repère local que la surface. Par conséquent, l'origine ainsi que la direction des axes U et V peuvent varier, ce qui a un gros impact sur le maillage créé par les constructeurs *GH*. Sur la Figure 63, nous pouvons voir deux maillages créés par un constructeur pour une même surface. Elle a été définie deux fois de façons différentes, ce qui donne lieu à des maillages différents.

L'objectif de ce travail est d'automatiser un programme qui conçoit une SR sur une surface définie par un client. Nous n'avons aucune maîtrise sur la façon dont celle-ci est tracée, le bord ajouté en premier est laissé au libre arbitre du concepteur. Ce facteur aléatoire définit l'origine ainsi que la direction des

axes de la surface, ce qui a un impact sur le maillage formé par le constructeur. Le maillage est la base de la réciprocalisation (Figure 64). Il est donc important d'avoir un contrôle total sur la définition de la grille ainsi que sur le choix de son repère.

Pour conclure, malgré la diversité d'options disponibles et l'efficacité des outils *GH* permettant de construire un maillage, ceux-ci ne sont néanmoins pas utilisables à nos fins à cause de leur dépendance au repère de la surface. Pour passer outre ce problème, des outils permettant de construire un maillage sur une surface indépendamment de son repère ont été développés.

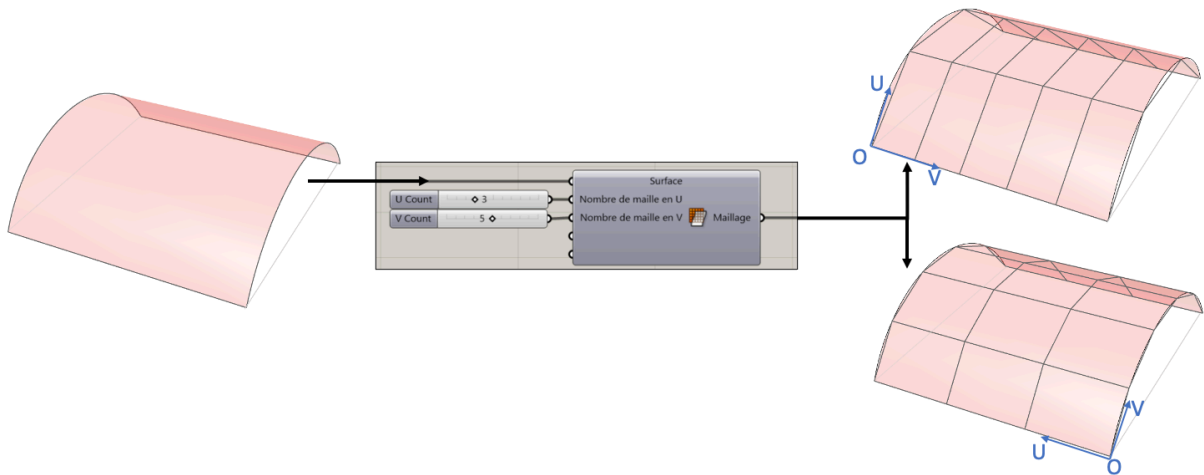


Figure 63 - Différence de maillage pouvant être formé par un outil Grasshopper pour une même surface

#### 4.3 Développement de notre constructeur de maillage

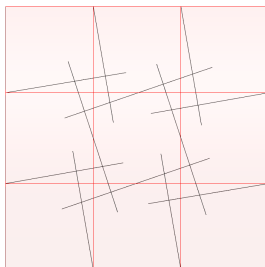


Figure 64 - Formation de modules sur les nœuds du maillage

Nous l'avons vu les maillages sont des structures de données très puissantes qui comportent de nombreux avantages pour notre utilisation. La propriété la plus intéressante étant que les lignes qui représentent la grille se rejoignent aux nœuds.

Cependant, les constructeurs de maillages disponibles dans la bibliothèque *GH* dépendent du repère de leur surface. Pour être indépendants de ce critère aléatoire, nous avons développé deux outils de création de maillage. Comme les outils *GH*, ils font appel aux trois données de *RH* pour créer leurs géométries.

Pour créer un maillage, deux approches ont été conçues :

1. La première (chemine du haut sur la Figure 65) permet de profiter de la variété de constructeurs de grilles disponibles dans *GH*. Partant de la surface à recouvrir, la première étape est de venir utiliser un outil *GH* pour former un maillage. La seconde étape est une extraction des nœuds de celui-ci. Ensuite, ils sont réorganisés selon un repère indépendant à la surface. Enfin, les faces sont créées et assemblées sur base de cette nouvelle organisation des nœuds, ce qui permet de reformer un maillage.
2. La deuxième (chemine du bas sur la Figure 65) consiste à directement venir placer des nœuds sur l'enveloppe. Ceux-ci sont définis à l'aide d'un repère que l'on fixe et indépendant de celui de la surface. Ensuite, les faces sont créées sur base de ces nœuds et le maillage est assemblé.



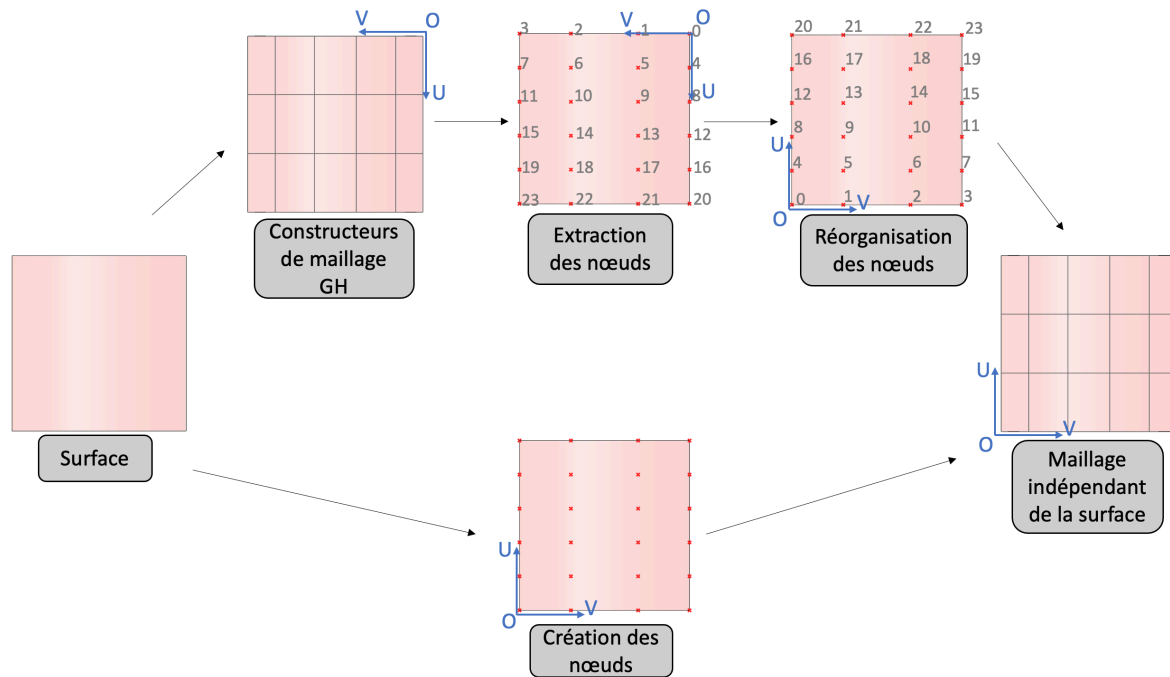


Figure 65 - Deux approches développées pour la création de maillage

#### 4.3.1 Approche 1 : réorganisation des nœuds d'un maillage

Comme annoncé, cette approche permet de profiter de la variété de formes disponibles parmi les outils de *GH*. Lorsque le maillage est défini, la première étape est d'extraire les nœuds de celui-ci. La suivante consiste à modifier le repère local à réarranger les points dans l'ordre que l'on souhaite. Cette organisation est faite sur base des coordonnées locales ( $u,v$ ) de chaque point sur la surface. En effet, en comparant ces deux coordonnées, il est possible de déterminer un sens de parcours des nœuds. Dans l'étape « réorganisation des nœuds » de la Figure 65, ils sont classés dans l'ordre croissant des coordonnées  $v$  puis  $u$ .

Cette réorganisation est faite dans un nouveau repère local défini à l'aide de coordonnées cartésiennes. Celle-ci sera décrite en détail dans la section suivante. Cette modification permet de contrôler le sens de parcours des nœuds et par conséquent des lignes qui seront utilisées lors de la réciprocalisation de celle-ci. Cette étape assure le bon fonctionnement de la suite du programme.

Lorsque les nœuds ont été renumérotés dans l'ordre souhaité, il faut venir créer les faces et les assembler pour former le maillage. Cette étape sera également décrite en détail dans la section suivante. Pour cette approche des outils *GH* ont été développés, ils permettent d'extraire les nœuds d'un maillage et de les réorganiser.

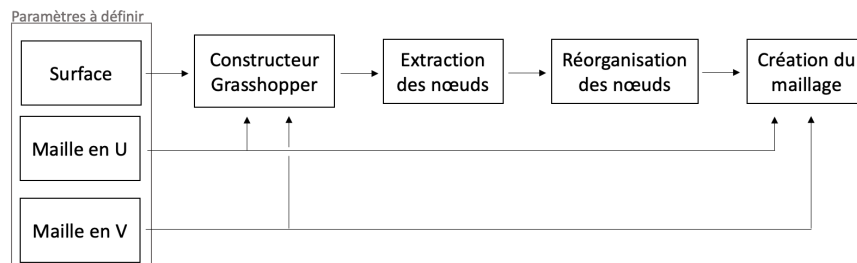


Figure 66 – Fonctionnement de la réorganisation des nœuds pour former un maillage

#### 4.3.2 Approche 2 : création d'un maillage

Cette approche a pour avantage d'avoir un contrôle total sur le maillage. Elle permet de ne plus dépendre des boîtes noires que sont les outils *GH*. La création d'un maillage se fait en trois étapes qui correspondent aux données de *RH*.

- 1) Choix du repère local
- 2) Placement des nœuds sur la surface
- 3) Création des faces et assemblage du maillage

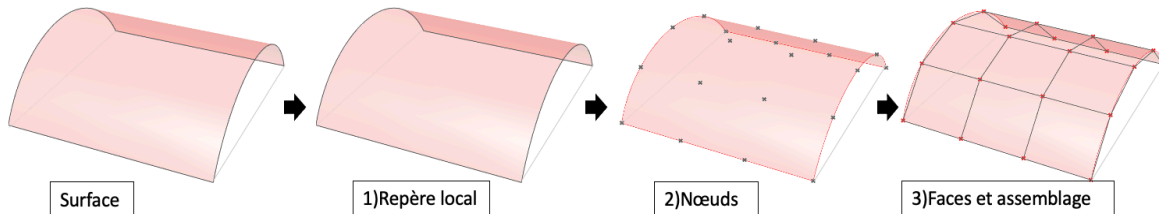


Figure 67 - Déroulement de la création d'un maillage

La première étape consiste à venir fixer un repère local indépendant de la surface. Toute surface se situe dans l'espace, elle peut donc être définie par un repère cartésien qui est indépendant de celle-ci (en opposition aux constructeurs *GH*). En fixant pour origine du maillage le point de la surface dont les coordonnées cartésiennes sont les plus petites (le point  $(x_1, y_1, z_1)$  sur la Figure 68), celle-ci sera toujours fixée indépendamment de la surface. Lorsque l'origine est définie, la direction des axes est ensuite fixée grâce aux bords de la surface.

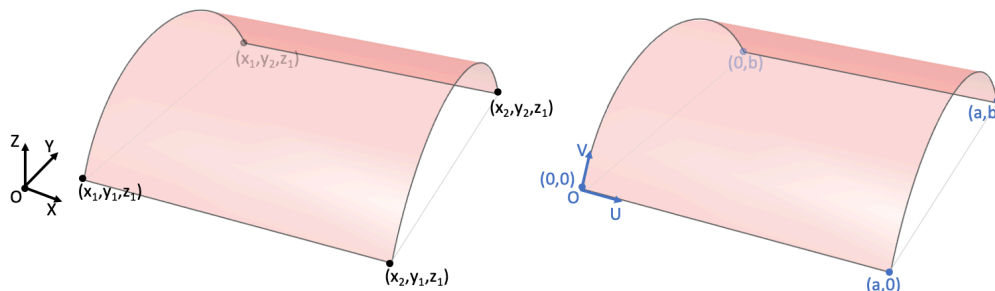


Figure 68 - Choix d'un repère local indépendant de la surface

La seconde étape est de venir placer les nœuds. Ceux-ci définiront le nombre de mailles de la grille dans chaque direction. Nous l'avons vu, les nœuds sont des points appartenant à la surface. A l'aide de son repère local et de son domaine, la création d'un réseau de points sur celle-ci est possible. Si nous voulons trois mailles identiques dans la direction U et quatre dans la direction V. Il faut venir séparer la longueur  $a$  en trois et  $b$  en quatre. La distance entre les nœuds dans ces directions sera respectivement  $\frac{1}{3}a$  et  $\frac{1}{4}b$ . (Figure 69)

Toutefois, un maillage peut également avoir des mailles de dimensions différentes. Par exemple, augmenter le nombre de faces dans les zones de forte courbure de la surface peut être intéressant. Pour ce faire, il faut venir placer plus de nœuds aux endroits où le maillage doit se densifier. En jouant sur la position des nœuds, une infinité de grilles sont faisables. Nous avons cependant été à court de temps pour développer cette option.

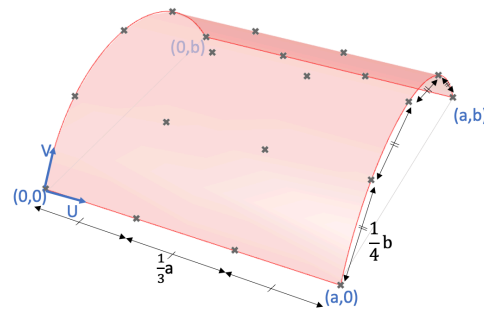


Figure 69 - Placement des nœuds sur la surface

La troisième étape est la création des faces. Ce sont des polygones dont les bords sont des segments tracés entre les nœuds du maillage. La forme de celles-ci dépend de l'ordre dans lequel lui sont données ses extrémités. Les faces constituent la relation qui permet de relier les nœuds d'un maillage. Dans le cadre de ce travail, nous avons uniquement développé cette relation pour une grille carrée, cependant la méthode est facilement généralisable à d'autres types de grilles.

Dans un maillage carré formé de  $N$  mailles dans la direction  $V$ . Si le premier nœud d'une face est le  $p$ , les autres nœuds qui la constituent sont les  $p+1$ ,  $p+N+2$  et  $p+N+1$ . Par exemple (Figure 70) pour une grille possédant 4 mailles dans la direction  $V$ , la face A est constituée des nœuds 1, 2(1+1), 7(1+4+2) et 6(1+4+1). L'assemblage des faces crée ensuite un maillage. La formation d'autres formes de face se fait simplement par modification de cette relation.

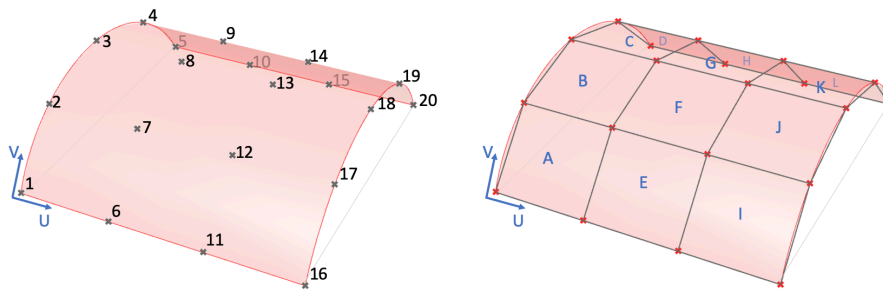


Figure 70 - Création des faces dans un maillage

Au travers de ces deux approches, nous sommes en mesure de créer un maillage dont le repère est indépendant de la définition de la surface qu'il approxime. La première approche permet d'exploiter la variété de formes disponibles au sein du logiciel *GH*, tout en réorganisant les nœuds de sorte à maîtriser le parcours de ceux-ci. La deuxième approche permet de créer un maillage sur une surface en restant indépendant de son repère.

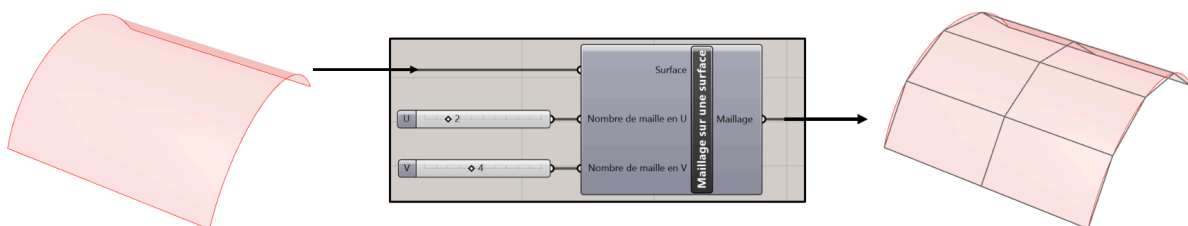


Figure 71 - Outils développé permettant de créer un maillage indépendamment de la définition de la surface

À présent, nous avons développé notre propre outil de création de maillage. Celui-ci peut être intégré au programme et nous permet d'avoir un contrôle sur toutes les données de la grille formée. Pour son fonctionnement l'outil a trois paramètres, la surface à couvrir et le nombre de mailles dans chaque direction.

#### 4.4 Conclusion

Après avoir reçu la surface à couvrir de la part du client, la première étape du processus d'automatisation de la recherche de forme d'une structure réciproque est de venir y placer une géométrie. Pour réaliser cette opération, nous utilisons un maillage. Il a de nombreux avantages pour notre utilisation. Le principal est la relation qui lie les données.

Ce maillage est constitué de trois données :

- 1) Un repère local, qui permet de décrire le maillage, notamment le nombre de mailles dans chaque direction.
- 2) Les nœuds, qui sont des points appartenant à la surface. Ceux-ci peuvent être décrits par deux types de coordonnées, les cartésiennes dans l'espace ou locales dans le repère du maillage ou de la surface.
- 3) Les faces, qui sont les mailles ou les plans de formes polygonales qui forment le maillage. Cette donnée constitue le lien entre les nœuds. Il en existe de trois types, des triangulaires, des carrés ou de Ngon qui sont des combinaisons des deux précédentes.

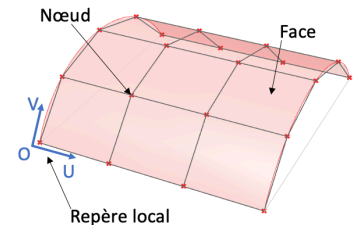


Figure 72 - Données d'un maillage

L'étape suivante du processus est la réciprocalisation, c'est-à-dire la transformation des lignes du maillage en une SR. Les droites ne font pas partie des données de la grille, pour les tracer un outil a été développé. Il utilise les nœuds ainsi que les faces pour déterminer les points à relier.

De nombreux outils, permettant de construire un maillage, sont disponibles dans *GH*. Nous avons étudié leurs comportements, la grille qu'ils forment dépend du repère local de la surface. Ce repère est lié à la façon dont celle-ci est définie. La définition de l'enveloppe n'est pas contrôlée par le programme, c'est le client qui trace la surface. Pour remédier à ce facteur aléatoire, deux approches ont été développées pour créer un maillage qui est indépendant de la définition de la surface.

La première exploite la variété de maillages disponibles dans *GH* en utilisant les nœuds d'un de ceux-ci. Ils sont ensuite réorganisés pour enfin reformer une grille. La deuxième permet de directement venir créer les nœuds sur la surface et ainsi avoir un contrôle total du maillage réalisé. Pour effectuer ces opérations, des outils ont été développés (Figure 66 et Figure 71).

À présent, nous avons une maîtrise de la création du maillage, de l'organisation de ses données ainsi que la façon dont sont tracées ses lignes. Leurs contrôles est primordial pour la réciprocalisation, qui constitue l'étape suivante de la formation d'une structure réciproque.

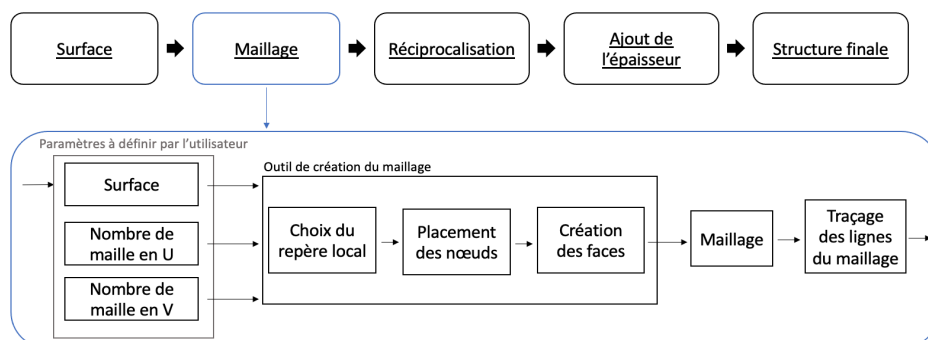
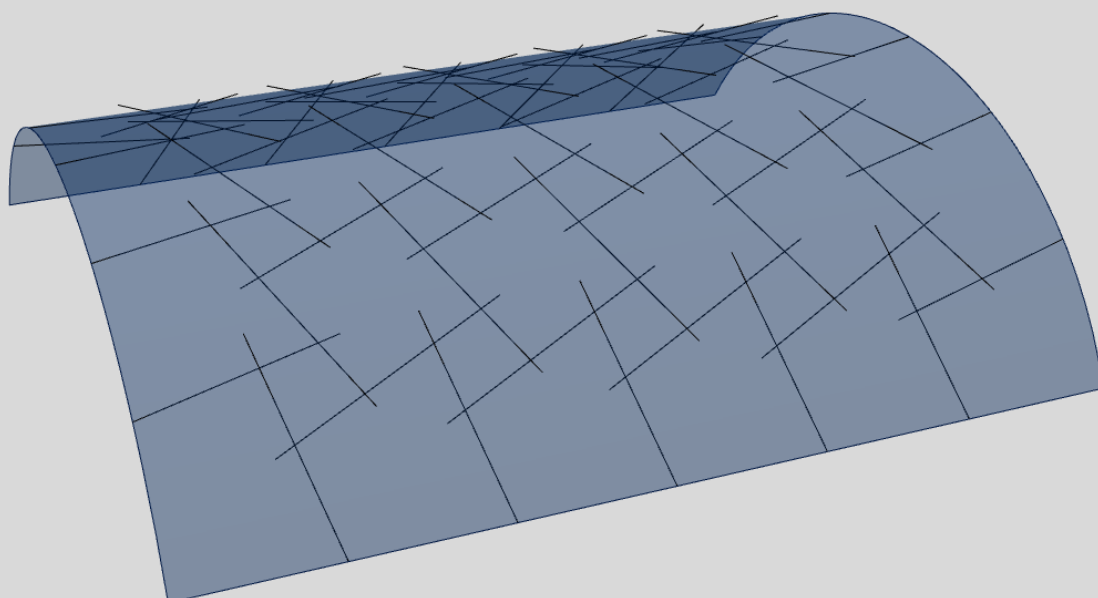


Figure 73 - Processus de création du maillage



# Réciprocalisation



## 5 Réciprocalisation

La création d'une structure réciproque sur une surface se réalise en trois grandes étapes. A la suite des maillages, la seconde étape est la réciprocalisation. Celle-ci prend les lignes et vient modifier leurs positions pour créer une première SR. C'est lors de cette transformation que sont définies la position et la configuration des modules.

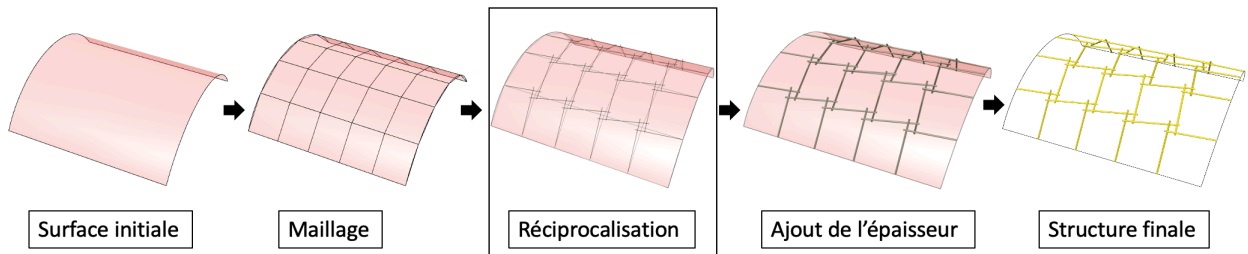


Figure 74 - Étape de la recherche de forme d'une structure réciproque

Un module est constitué de minimum trois éléments qui se supportent les uns les autres. Dans une grille, les nœuds sont formés par le contact de plusieurs lignes. Une modification de la position de celles-ci permet qu'elles prennent appui les unes sur les autres, afin de créer les modules. Cette action est appelée réciprocalisation. Nous voyons que la forme du maillage détermine l'emplacement des modules grâce à la localisation des nœuds, mais également le nombre d'éléments les constituant au travers de la quantité de droites qui se regroupent. Dans ce travail, nous utilisons des maillages carrés, ce qui donne lieu à des modules de quatre éléments.

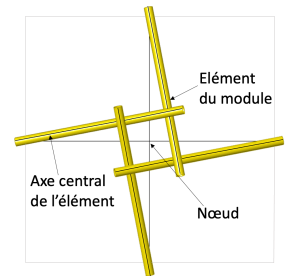


Figure 75 - Nœud de quatre lignes réciprocalisées en un module

Lors de la réciprocalisation, les lignes sont déplacées de sorte qu'en chaque nœud du maillage un module est formé. Chaque segment de la grille correspond à l'axe central d'un élément de la structure réciproque. Cette transformation se déroule en trois phases :

- 1) La recherche de la relation entre les lignes
- 2) Une rotation des lignes
- 3) Une extension des lignes

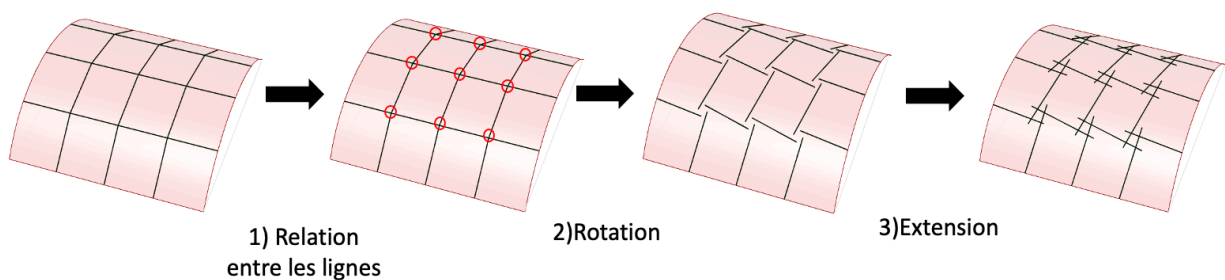


Figure 76 - Étape de la réciprocalisation

**La première phase** consiste à identifier les lignes qui appartiennent à un même nœud. Il faut donc rechercher toutes celles qui ont un point commun et les retenir. C'est lors de cette étape qu'est défini le nombre d'éléments qui forme un module et les endroits où ils sont créés. L'ordre dans lequel les lignes sont parcourues permet de déterminer la direction de rotation de l'étape suivante.

**La seconde phase** est la rotation des lignes, elle détermine la position des éléments dans les modules. Ce mouvement est réalisé par un déplacement des extrémités qui se rejoignent aux nœuds, le long de la droite perpendiculaire (par exemple la ligne *a* devient *a'* et a été déplacé le long de la *b*, Figure 77). L'amplitude du mouvement dépend des longueurs d'engagement recherchées au sein de la structure. Ce



paramètre peut être choisi par le concepteur. C'est également lors de cette phase qu'est défini le sens de rotation des modules.

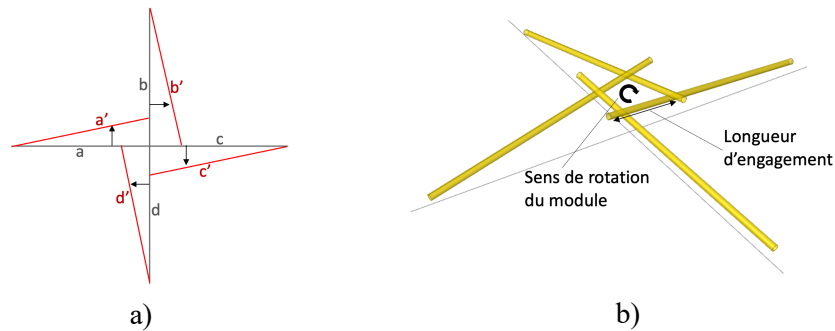


Figure 77 - a) Rotation des lignes d'un module par rapport à leur extrémité extérieure (a,b,c,d lignes originales - a',b',c',d' lignes après rotation) – b) Paramètres d'un module

**La troisième phase** consiste à allonger les lignes. En effet, après la rotation celles-ci ne se superposent plus. Une longueur supplémentaire doit leur être ajoutée de façon à ce qu'elles puissent prendre appui les unes sur les autres lors de la réalisation de la structure.

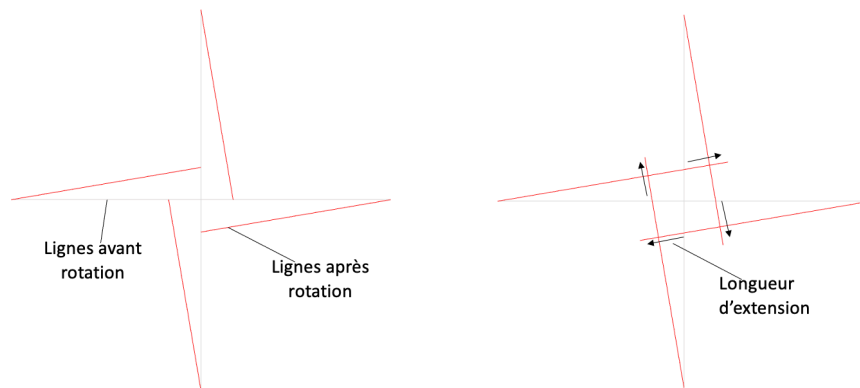


Figure 78 - Extension des lignes

Suite à ces trois phases, une SR constituée de lignes sans épaisseur est formée (dernière image Figure 76). Pour l'automatisation du programme, nous avons créé des outils *GH* qui permettent de réaliser ces phases. Pour leurs fonctionnements, le processus part des lignes du maillage. Ensuite, deux paramètres sont à définir par le concepteur, la longueur d'engagement voulue et la longueur supplémentaire à y ajouter. Sur base de ces informations, la réciprocalisation peut être effectuée. Dans la suite de cette section, nous décrirons en détail ces trois parties de la réciprocalisation.

## 5.1 Recherche de la relation entre les lignes

À l'origine nous avons un maillage constitué de nœuds. Le déplacement et l'extension des lignes de cette grille permettent une transformation qui forme les modules. Comment savoir sur quelles lignes agir ? Il s'agit d'identifier les segments qui se regroupent en un même point. Cette recherche de relation permet de déterminer quelles sont les lignes qui constituent chaque module.

Les lignes du maillage représentent les éléments de la future SR. Avant de rechercher les relations, effectuer un premier tri afin de supprimer celles qui sont inutiles est possible. Par exemple, les éléments se trouvant sur les bords de la surface ne servent pas au fonctionnement de la structure, car ils se situent au niveau des appuis de celle-ci. Retirer les lignes qui sont aux extrémités du maillage est intéressant, pour ne pas en tenir compte lors de la réciprocalisation. (Figure 80)

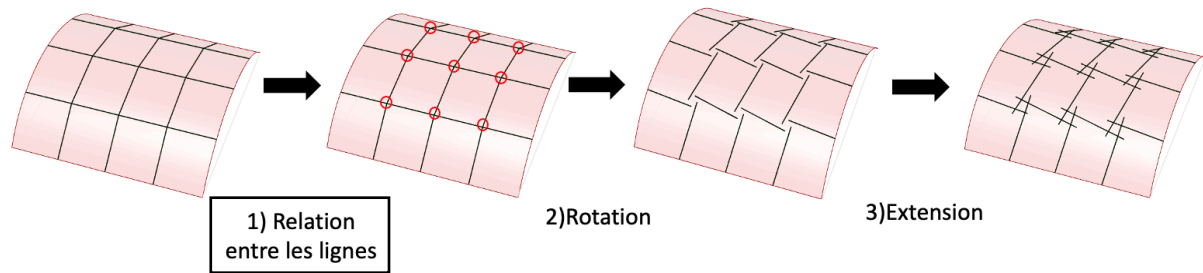


Figure 79 - Étape de la réciprocalisation

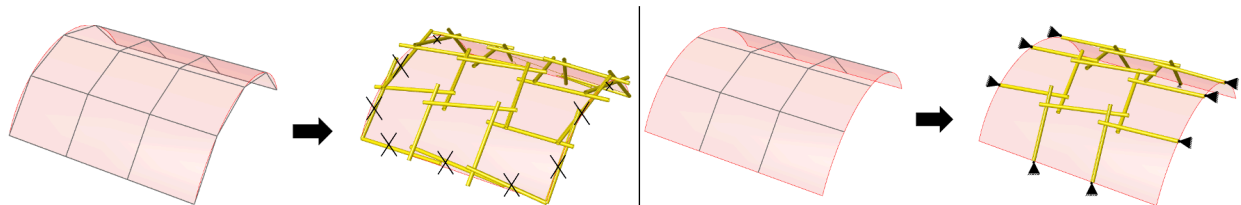


Figure 80 - Tri des lignes utiles au sein d'un maillage - Structure formé en gardant toutes les lignes, figure de gauche - Structure formé après le tri, figure de droite

Lorsque le tri a été effectué, il faut venir identifier les lignes qui constitueront chaque module. Grâce aux propriétés des maillages, ceci est fait en détectant celles qui se rejoignent en un nœud. Pour déterminer si elles sont liées, il suffit de vérifier si deux droites ont un point commun. Si quatre segments sont reliés, ils seront transformés pour former un module de quatre éléments.

Visuellement, cette étape est simple. En pratique, les lignes ne font pas partie des données du maillage. Dans le programme, elles sont donc parcourues dans l'ordre et leurs extrémités sont comparées. Lorsqu'elles appartiennent à un nœud, elles sont dites en contact et leurs identités sont retenues dans une base de données. Au fur et à mesure, cette mémoire grandit. L'objectif de cette base de données est d'identifier les droites qui formeront chaque module. Ces informations permettent aux étapes suivantes de connaître les lignes sur lesquelles il faut agir.

Pour la Figure 81, le processus commence par la ligne 0, un nœud est identifié avec les lignes 3, 4 et 5. Un premier contact est créé dans la base de données, celui-ci constituera le premier module formé. Ensuite, la ligne 1 est analysée, un deuxième contact est retenu. Et ainsi de suite jusqu'à avoir parcouru l'ensemble de la structure.

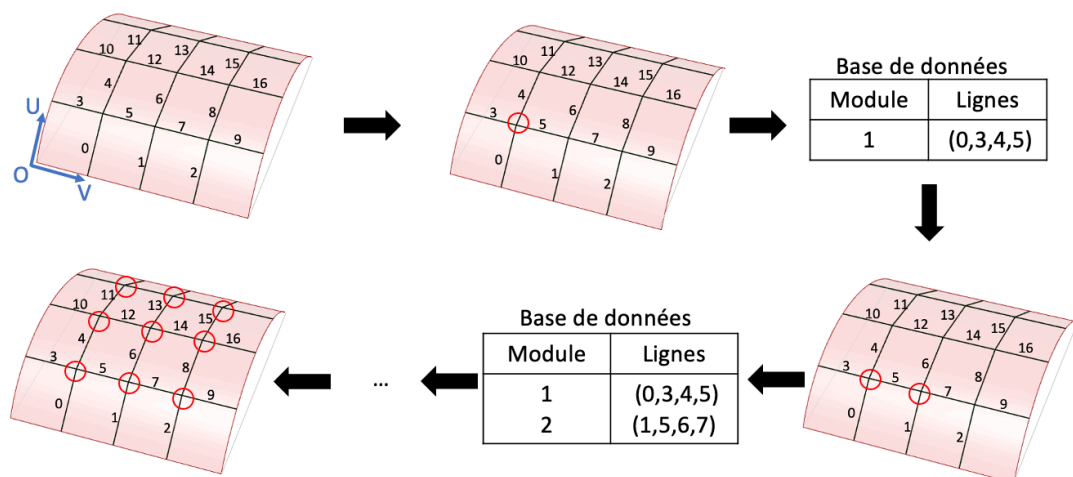


Figure 81 - Création de la base de données contenant les lignes en contact

La réciprocalisation est effectuée à l'aide de l'identité des lignes enregistrée dans la base de données. Dans le cas d'un maillage carré, quatre droites se rejoignent à chaque nœud, des modules de quatre éléments seront créés. Si trois droites s'étaient rejointes en chaque nœud, des configurations de trois éléments aurait été formée. Un lien apparaît entre la forme du maillage et le nombre d'éléments constituant la structure. Varier la forme des faces permet de changer la composition des modules de la structure réciproque générée. (Figure 82)

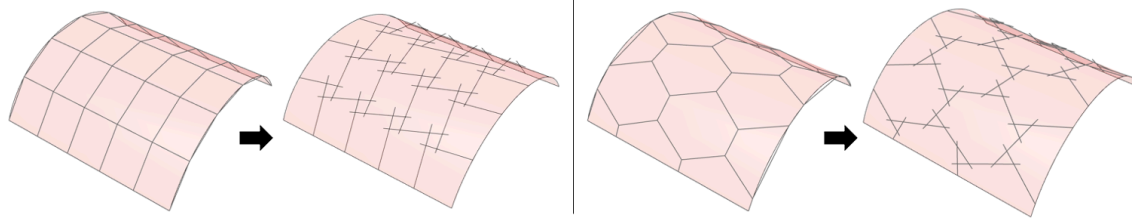


Figure 82 - Variation du nombre d'éléments en contact

L'ordre de mémorisation des lignes en contact dicte le sens de rotation des modules. L'importance d'un bon contrôle de la structure du maillage apparaît. L'opération de rotation des lignes est expliquée en détail dans la section suivante.

A présent, nous connaissons les lignes qui formeront chaque module grâce à la base de données que nous avons créée.

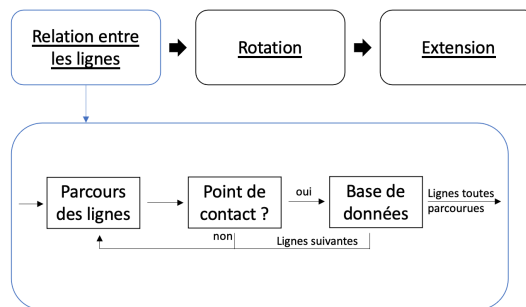


Figure 83 - Phase de recherche de relation entre les lignes

## 5.2 Rotation des lignes

La deuxième phase de la réciprocalisation est la rotation des lignes. Elles sont tournées autour d'une de leurs extrémités en direction de la droite sur laquelle elles prennent appui dans les modules. Rappelons qu'au sein de ceux-ci, les éléments s'appuient les uns sur les autres. C'est lors de la rotation que la notion d'éléments porteurs/supporteurs est déterminée. C'est également au travers de ce déplacement que le sens du module est établi.

Lors de l'étape précédente, une base de données a été constituée, elle permet de connaître les identités des lignes qui se rejoignent au nœud. Lors de la réciprocalisation, en chacun de ceux-ci est créé un module. Dès lors, les lignes sur lesquelles il faut agir pour les construire sont connues.

L'étape de rotation consiste à déplacer le point commun des droites formant un contact, le long d'un segment adjacent. Ceci est équivalent à une rotation autour de l'extrémité extérieure.

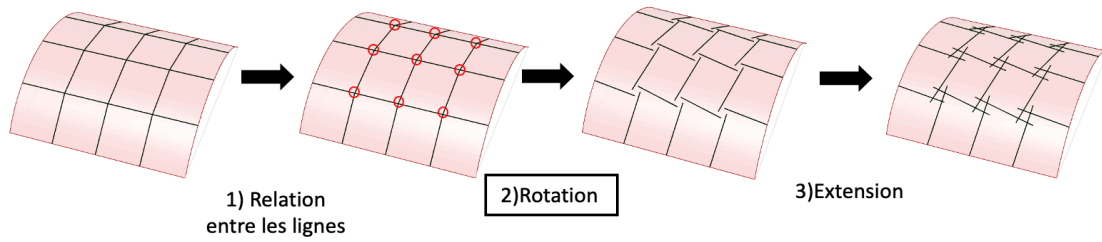


Figure 84 - Étape de la réciprocalisation

Visuellement, pour un nœud reliant 4 lignes (1, 2, 3 et 4), les segments adjacents sont perpendiculaires. Les rotations des droites peuvent être effectuées une par une. Dans l'exemple ci-dessous, les lignes sont tournées vers la droite. Ce déplacement revient à translater l'extrémité commune de chacune de celle-ci le long du segment se trouvant à sa droite. L'amplitude de celui-ci dépend des longueurs d'engagement désirées au sein de la structure. Elle est fixée par l'utilisateur du programme. Le sens de rotation du module est défini par le choix de la perpendiculaire selon laquelle le déplacement est effectué (dans l'exemple ci-dessous, la droite 1 aurait pu être déplacée le long de la 2 au lieu de la 4).

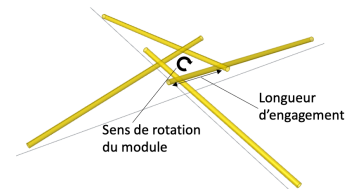


Figure 85 - Paramètres d'un module

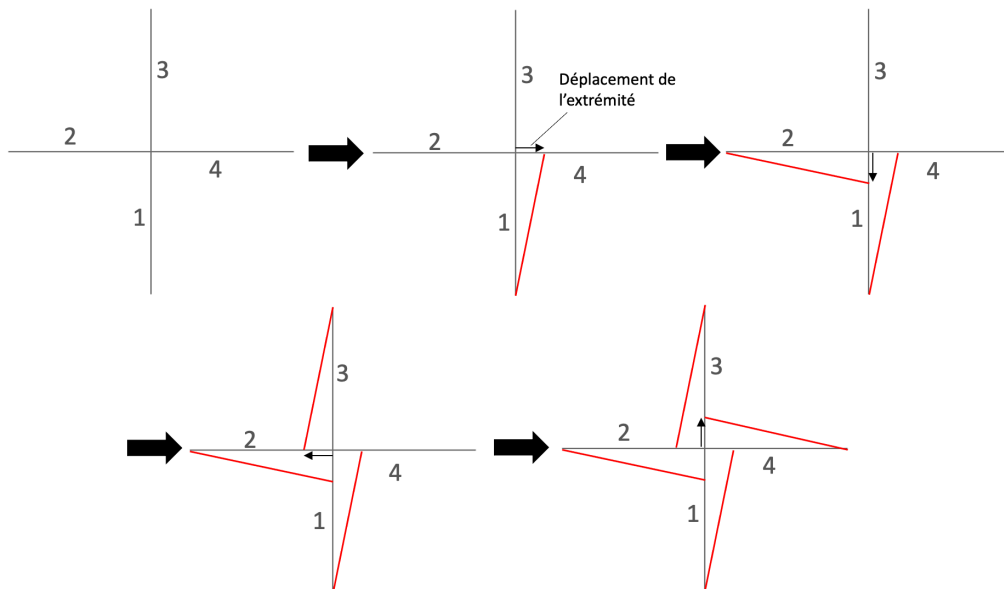


Figure 86 - Rotation des lignes d'un nœud

En pratique, le programme ne peut pas déterminer les lignes adjacentes visuellement. Dès lors, comment connaître celles-ci ? La réponse se trouve dans la base de données formée lors de la première étape. En effet à chaque nœud correspond un ensemble de lignes. Elles sont retenues dans l'ordre dans lequel elles ont été parcourues. Pour la figure ci-dessus, le nœud est constitué des segments (1,2,3,4) qui sont stockés dans ce sens précis.

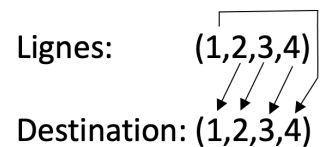


Figure 87 - Sens de rotation au sein d'un module

En regardant celles qui ont été mémorisées précédemment dans la base de données, connaître les droites adjacentes est possible, celles-ci seront appelées les destinations (Figure 87). Celle de la ligne 2 est la 1, et ainsi de suite. (1-4, 4-3, 3-2)

Au sein d'un module réciproque les éléments se supportent les uns les autres. La destination d'un de ceux-ci est celui sur lequel il vient prendre appui (Figure 88).

Le sens de parcours des lignes du maillage détermine l'ordre dans lequel elles sont retenues dans la base de données. Par conséquent, il a un impact sur les destinations et la formation des modules. À nouveau, la maîtrise des données du maillage est primordiale pour le bon déroulement de cette étape. En effet, si les lignes avaient été mémorisées dans l'ordre (1, 3, 2, 4). La droite 1 aurait eu pour destination la 3 (Figure 89). Ce qui en pratique n'est pas réalisable pour des raisons évidentes. Pour éviter ce cas de figure, lors de la création de la base de données, il faut vérifier que chaque droite ne soit pas en face de celle précédemment retenue. Si tel est le cas, elle est retenue après. Dans ce cas-ci, la ligne 3 est mémorisée après la 2.

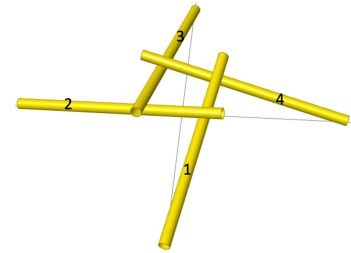


Figure 88 - Destination d'un élément

La rotation des lignes au sein d'un module unique étant définie, intéressons-nous à la façon dont cette transformation est implémentée dans l'outil développé. L'opération est appliquée aux droites une à une. Le programme parcourt donc les lignes dans l'ordre. Pour chacune, il détermine la destination de celle-ci à l'aide de la base de données. Cette opération est réalisée de la même façon que pour un module unique (Figure 87). Ensuite, l'extrémité des lignes appartenant au nœud est déplacée d'une distance correspondant à la longueur d'engagement. Celle-ci est un paramètre du programme, elle est donc choisie par le concepteur. Lorsque la modification est effectuée, il passe à la ligne suivante et recommence le processus jusqu'à avoir appliqué une rotation à tous les éléments de la structure. Ceci est illustré sur la Figure 91.

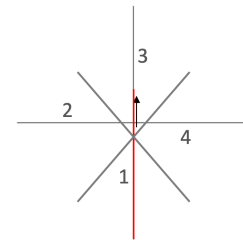


Figure 89 - Mauvais ordre de mémorisation des lignes

Sur cette même figure, nous pouvons voir que les lignes appartenant à deux nœuds (par exemple la 5 ou la 7) sont soumises à deux mouvements. Ces deux déplacements sont réalisés en fonction d'extrémités différentes, ce qui permet de pouvoir les appliquer indépendamment et de varier le sens de rotation d'un module à l'autre.

Pour résumer, cette étape applique une rotation aux lignes par rapport à une de leurs extrémités. L'amplitude du déplacement dépend de la longueur d'engagement des modules de la structure, celle-ci est fixée par le concepteur. La direction de la rotation est déterminée par la base de données obtenue lors de l'étape précédente. Enfin, cette étape définit également le concept de destination. La destination d'un élément est celui sur lequel il s'appuie dans un module réciproque.

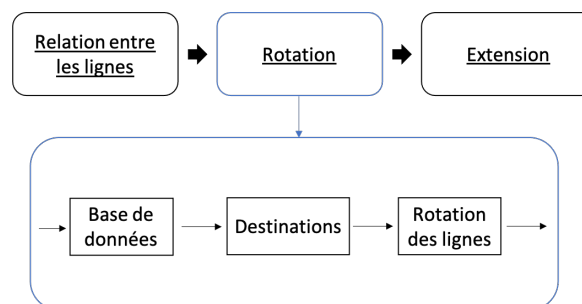


Figure 90 - Phase de rotation des lignes

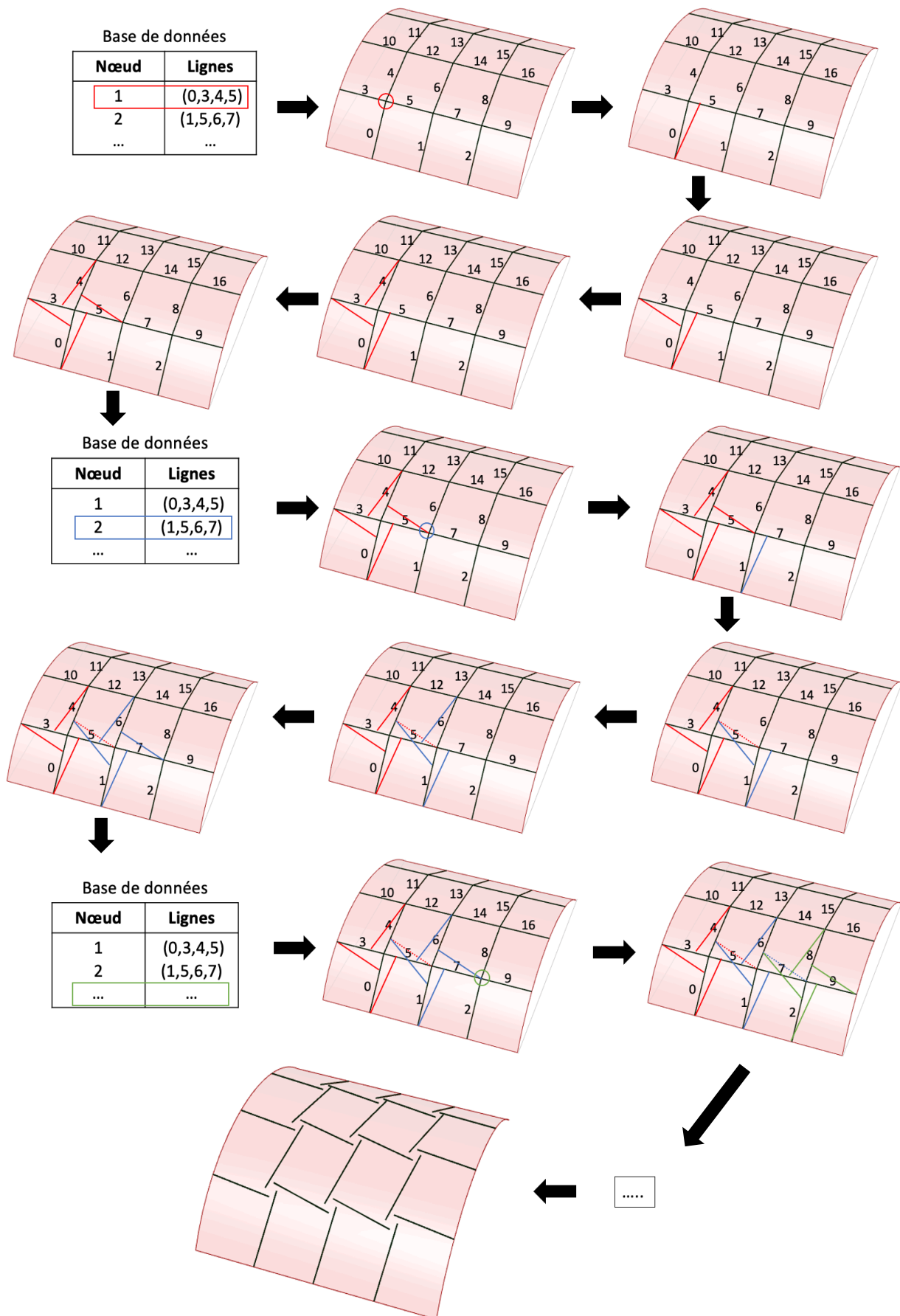


Figure 91 - Processus de rotation des lignes lors de la réciprocalisation



### 5.3 Extension des lignes

La troisième phase de la réciprocalisation consiste en une extension des lignes. Jusqu'à présent, les droites qui constituent chaque module ont été déterminées. Ensuite, celles-ci ont été tournées et leurs destinations ont été définies. Cette information permet de connaître les éléments sur lesquels chacun de ceux-ci s'appuie. Cependant, leurs assemblages ne sont pas encore possible. En effet dû à la rotation les lignes se trouvent dans le « vide », sous l'effet de la gravité elles tomberaient toutes au sol. Par conséquent, une extension de celles-ci est nécessaire pour être en mesure de réaliser les modules. Après cette étape, la longueur des éléments nécessaire à la construction de la structure sera fixée.

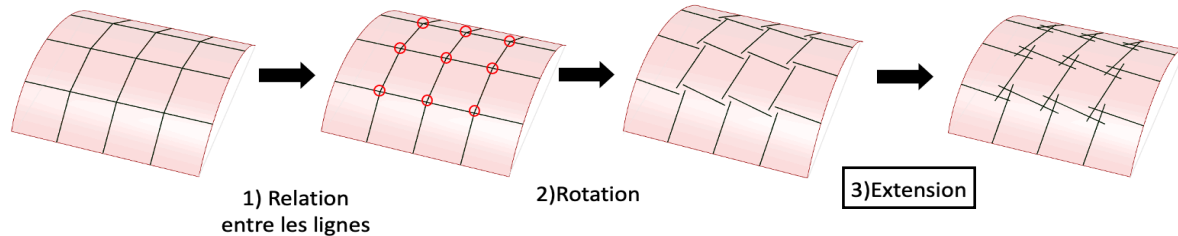


Figure 92 - Étape de la réciprocalisation

Pour le moment, la structure est constituée de lignes dans l'espace qui sont dirigées dans le sens de leurs destinations. L'extension se fait en deux parties, la première se charge d'allonger les droites de la longueur minimum pour l'appui. Et la seconde ajoute une distance supplémentaire pour faciliter la création de l'assemblage. En effet si les éléments sont en contact à l'extrémité d'un de ceux-ci, la réalisation du lien entre eux est compliquée pour des raisons évidentes. Au moindre mouvement le contact est perdu.

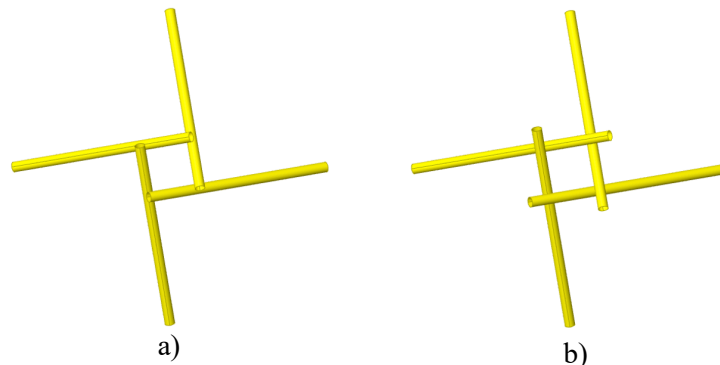


Figure 93 – a) Module sans longueur supplémentaire pour la réalisation des assemblages  
– b) Module avec longueur supplémentaire pour la réalisation des assemblages

Trouver l'extension minimum à appliquer est complexe, les lignes ne sont pas dans le même plan. Elles approximent une surface trois dimensions. Par ailleurs, elles ont été tournées dans l'espace autour de leurs extrémités. Un plan vertical fictif, auquel appartient la droite de destination, est créé afin de déterminer la longueur nécessaire. (Figure 95) Le point de percée de la ligne dans le plan est évalué. La distance entre ce point et l'extrémité du segment sera l'extension minimum. En effet, si cette longueur est ajoutée, la ligne est assurée de passer au minimum au-dessus de sa destination.

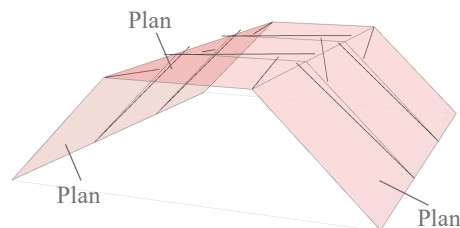


Figure 94 - Lignes dans l'espace appartenant à des plans différents



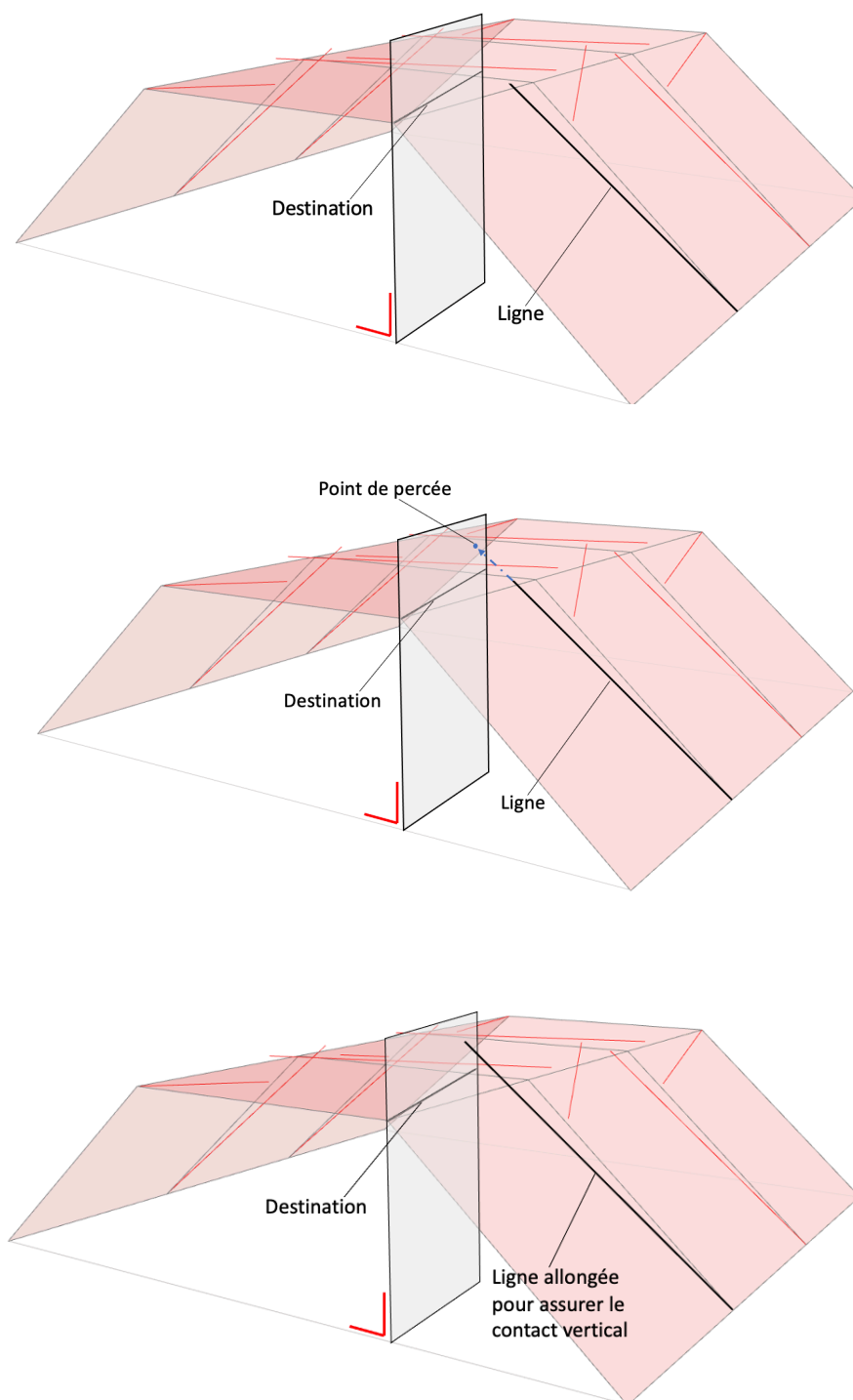


Figure 95 - Procédé d'extension minimum des lignes

Ce procédé est appliqué à l'ensemble des lignes, chacune de celles-ci est allongée de façon à intercepter le plan vertical de sa destination. Cette opération effectuée, elles ont toute la distance minimum pour prendre appui sur les autres sous l'effet de la gravité. Toutefois, rappelons que les droites représentent les axes centraux des éléments de la structure. Le contact entre ceux-ci n'a pas encore été recherché. Ce qui explique que les lignes ne se touchent pas.

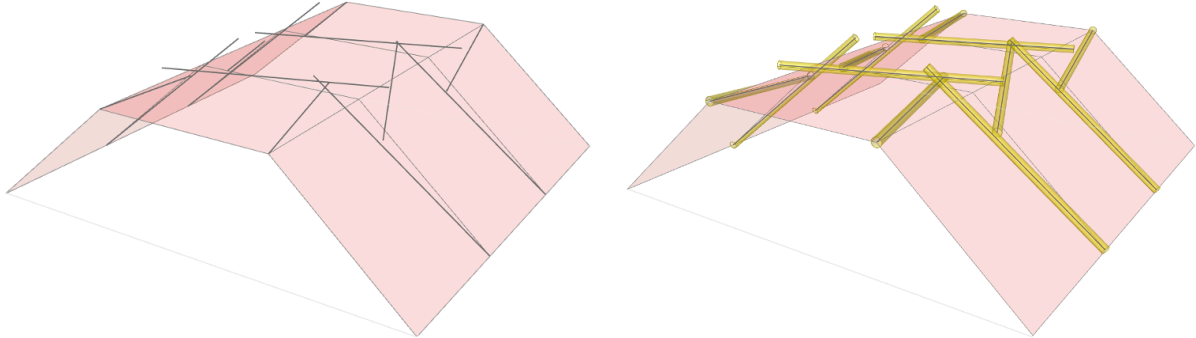


Figure 96 - Forme de la structure après extension minimum de toutes les lignes - Affichage des lignes à gauche - Affichage des lignes avec leur épaisseur à droite

La deuxième partie de l'extension des lignes est l'ajout d'une distance supplémentaire. Cette longueur est arbitraire et est choisie par le concepteur. C'est un paramètre du programme. Elle permet de ne pas devoir construire les assemblages au bord des éléments. Elle assure également une sécurité vis-à-vis d'un déplacement de ceux-ci lors de la réalisation de la structure.

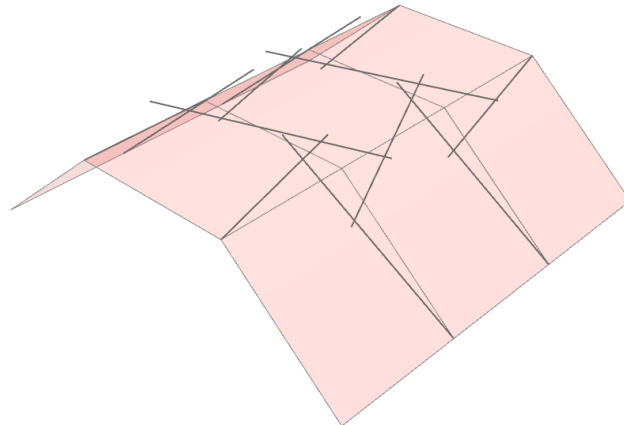


Figure 97 - Forme de la structure après extension des lignes

La troisième phase de la réciprocalisation est donc l'extension. Elle se déroule en deux parties. Une première qui allonge les lignes pour assurer le contact minimum. Une deuxième qui ajoute une longueur pour faciliter la réalisation des assemblages. Cette phase d'extension est la dernière de la réciprocalisation, la longueur des lignes ne sera plus changée lors de la suite du procédé. Il est à présent possible de connaître la taille des éléments nécessaires à la création de la structure réciproque voulue.

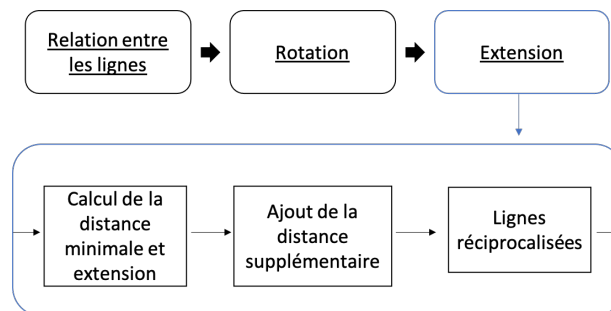


Figure 98 - Phase d'extension de lignes

## 5.4 Conclusion

La recherche de forme d'une structure réciproque se fait en trois grandes étapes. Lorsque la surface à couvrir est fixée, la première étape est la formation d'un maillage sur celle-ci. Ce dernier permet d'approximer la surface et constitue la base sur laquelle la SR sera créée.

La seconde étape est la réciprocalisation. Elle consiste à former une première SR en transformant les lignes du maillage. Ceci est fait en trois phases :

- 1) Recherche des relations entre les lignes
- 2) Rotation des lignes
- 3) Extension des lignes

Un outil *GH* a été développé pour effectuer ces tâches au sein du programme.

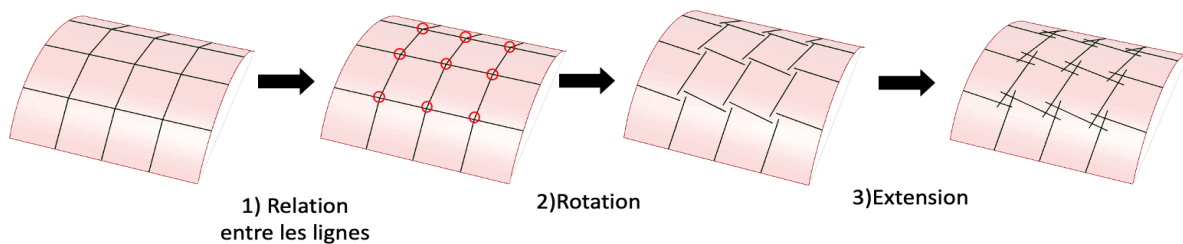


Figure 99 - Étape de la réciprocalisation

A chaque ligne du maillage correspond un élément de la future structure. La première phase commence par effectuer un tri de façon à supprimer toutes celles inutiles à la stabilité de l'édifice, notamment au niveau des appuis. Ensuite, l'objectif de celle-ci est de déterminer les droites qui se rejoignent en un même nœud. Ceci permet d'identifier les éléments constituant chaque module. Cette information est retenue au sein d'une base de données qui est alimentée lors du déroulement de cette phase.

Grâce à ceci, la seconde phase initie la création des modules par une rotation des lignes. Cela est effectué en deux opérations. La première est la définition de la destination de chaque ligne. La destination d'un élément est celui sur lequel il s'appuie au sein du module. Chacun de ceux-ci est le support d'un autre. Cette information peut être déterminée à l'aide de la base de données formée lors de l'étape précédente. La seconde opération tourne les lignes autour d'une de leurs extrémités dans la direction des droites sur lesquelles elles doivent prendre appui. L'amplitude de ce mouvement dépend de la longueur d'engagement voulue au sein des modules, elle est laissée comme paramètre à choisir par l'utilisateur du programme.

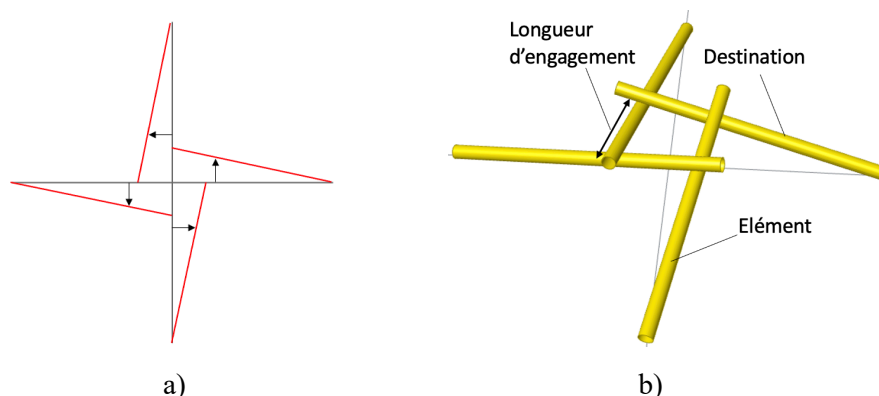


Figure 100 - a) Rotation des lignes d'un module par rapport à leur extrémité - b) Destination d'un élément au sein d'un module

La dernière phase de la réciprocalisation est l'extension des lignes. Après la rotation, celles-ci ne sont pas en mesure de se porter l'une l'autre. Une distance supplémentaire est nécessaire pour que cela soit possible. Ceci est réalisé en deux parties, une première qui ajoute le minimum pour permettre le contact vertical. Puis, une seconde qui ajoute un surplus de longueurs de façon à faciliter la construction de l'assemblage en pratique.

Pour effectuer la réciprocalisation, nous avons développé un outil utilisable dans *GH*. On y retrouve les trois mêmes phases que décrites précédemment<sup>2</sup>. Pour son fonctionnement, il se base sur les lignes du maillage. Deux paramètres sont à définir, la longueur d'engagement et la distance supplémentaire à ajouter aux droites. À la fin du processus, une structure réciproque constituée de lignes est créée. Celles-ci sont les axes centraux des éléments de la structure. Elles n'ont pas encore d'épaisseur, ceci est abordé dans le prochain chapitre.

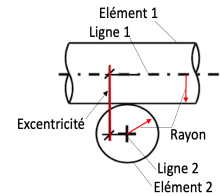


Figure 101 - Épaisseur des éléments

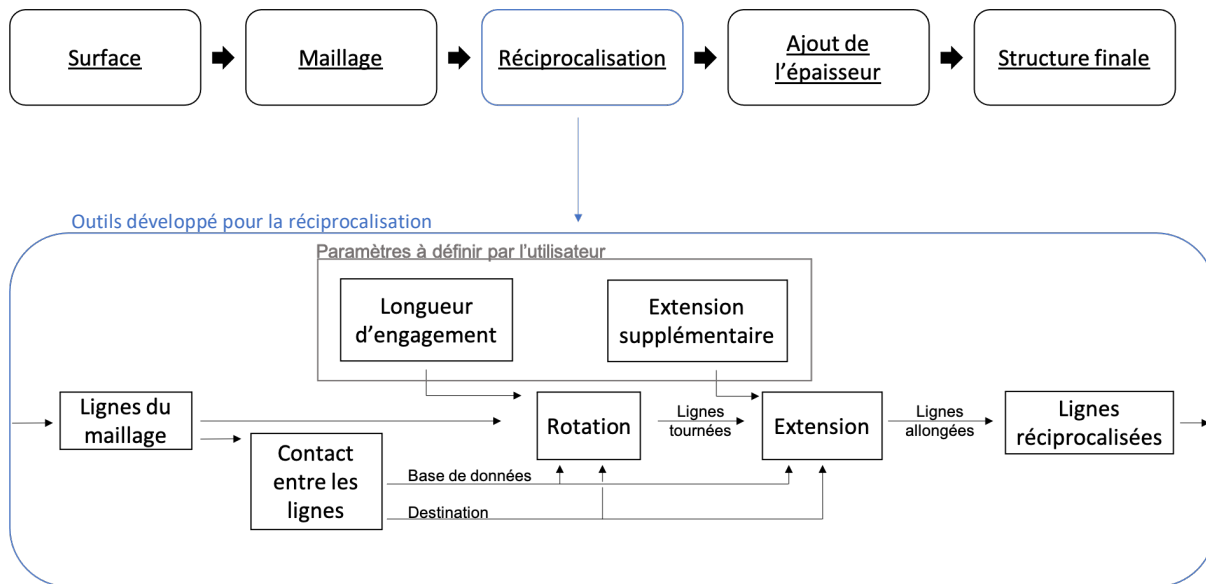
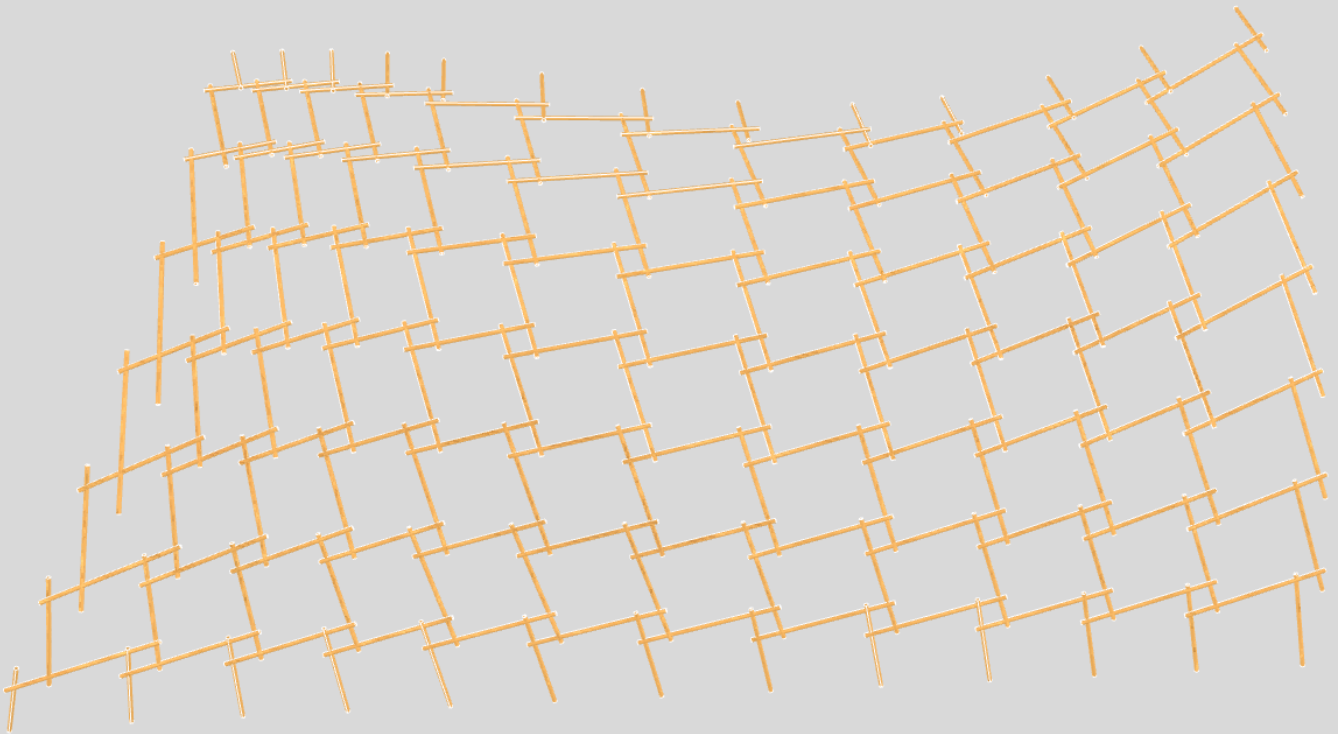


Figure 102 - Processus de réciprocalisation

<sup>2</sup> Une différence est à noter, les destinations sont déterminées lors de la première phase. Le principe est cependant le même.



# Ajout de l'épaisseur des éléments



## 6 Ajout de l'épaisseur des éléments

Tout au long de ce travail, nous cherchons à trouver la forme d'une structure réciproque qui couvre une surface. La structure sera construite avec des grumes.

La réciprocalisation des lignes du maillage a permis de former une première SR. Cependant, les éléments de la structure réelle ont une épaisseur. Il faut donc la prendre en compte lors de la conception. La dernière étape de la recherche de forme d'une SR est l'ajout de cette dimension aux lignes. Ce chapitre est consacré à l'explication de l'étape d'ajout de l'épaisseur des éléments dans le programme que nous avons développé.

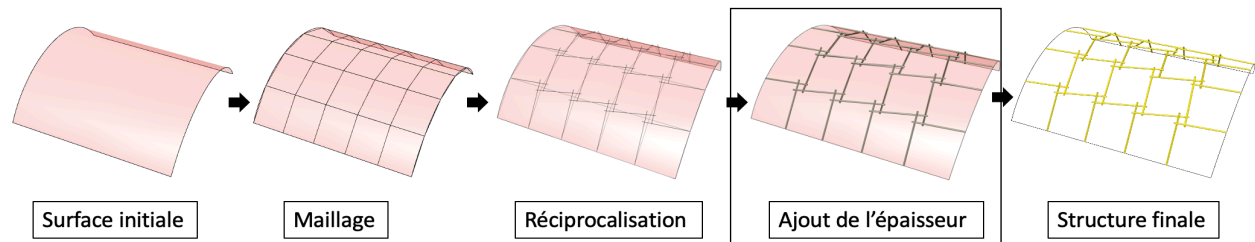


Figure 103 - Étape de la recherche de forme d'une structure réciproque

Les lignes utilisées jusqu'à présent sont les axes centraux des éléments de la structure. Ajouter une épaisseur aux droites équivaut à imposer une distance entre celles-ci au niveau des points de contact. Cette distance est appelée excentricité. Deux éléments se touchent lorsque la somme de leur rayon est égale à l'excentricité. L'objectif de cette dernière étape est la prise en compte des dimensions des grumes pour assurer le contact au niveau de leurs appuis.

L'excentricité fait partie des paramètres d'un module réciproque. La modifier a un impact sur leur configuration. Suite à leur l'interaction, le changement d'un paramètre au sein des modules a une conséquence sur la position de l'ensemble des éléments dans la structure. En pratique, ils ont tous une épaisseur, les excentricités sont donc toutes modifiées et la forme complète de la structure doit être adaptée.

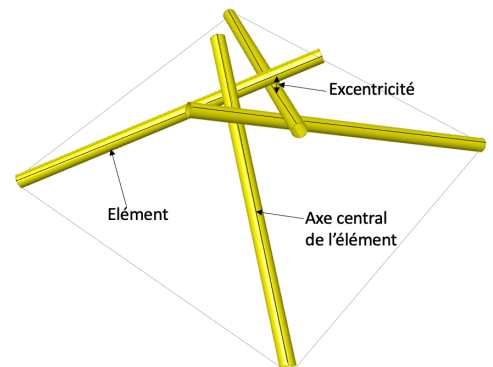


Figure 104 - Module réciproque

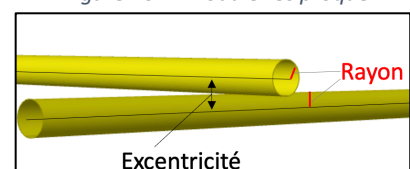


Figure 105 - Excentricité entre deux éléments

Pour tenir compte de toutes ces interactions, la modification de la position des éléments se fait de façon itérative. À chaque répétition, les éléments sont déplacés dans une position qui satisfait leurs contacts. Cependant, à cause des interactions, le mouvement d'un élément a un impact sur les autres excentricités. Elles ne correspondront plus toutes au critère, il faut itérer.

En pratique pour une itération, l'excentricité entre chaque ligne et sa destination est mesurée. De cette distance est déduit le déplacement qui est affecté aux deux droites. Dans leurs nouvelles positions, celles-ci satisferont l'excentricité recherchée. Cette opération est appliquée à l'ensemble des éléments. Lorsque tous les mouvements ont été effectués, suite aux interactions, la première excentricité mesurée n'est plus forcément satisfaite. L'opération est donc répétée jusqu'à ce que toutes les lignes soient à la bonne distance.

Au sein du programme, cette itération est faite à l'aide d'un solveur mathématique, appelé Kangaroo Solver. Il provient du plug-in *Kangaroo* de *Grasshopper*. Il permet d'effectuer différentes tâches qui lui sont données, de façon itérative. L'opération qu'il réalise est à définir indépendamment de celui-ci. Le



solveur se charge uniquement de la répétition de ce qui lui est demandé. Dans notre cas, l'action sera de déplacer les éléments pour satisfaire les excentricités entre ceux-ci.

À la fin de ces itérations, la structure réciproque satisfait le contact entre les éléments qui ont une épaisseur. Elle est donc réalisable et peut être affichée sur l'interface *Rhinoceros*. Cette étape clôture l'automatisation de la recherche de forme d'une SR. La structure sera entièrement dessinée.

Dans la suite de cette section, nous commencerons par expliquer le fonctionnement du solveur ainsi que les tâches qui lui sont demandées. Ensuite, nous étudierons les mouvements des éléments lors des itérations. Puis nous nous intéresserons, à la façon de déterminer l'amplitude de ces déplacements.

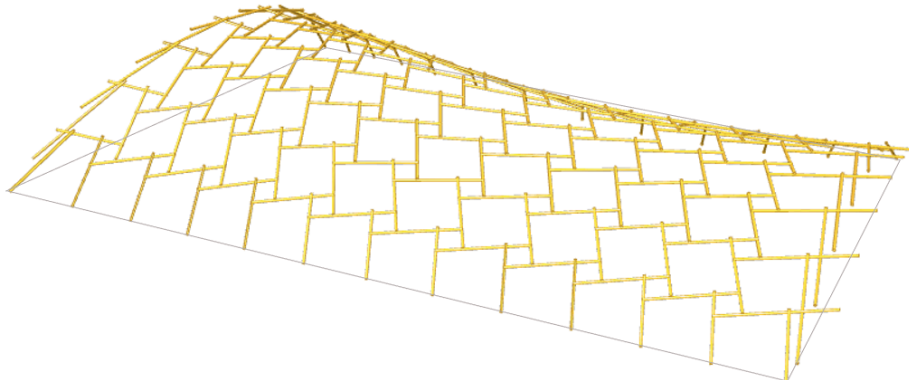


Figure 106 - Structure réciproque satisfaisant les contacts entre les éléments

## 6.1 Fonctionnement du solveur

L'ajout de l'épaisseur des éléments équivaut à changer l'excentricité. Il a un impact sur les paramètres de l'ensemble des modules de la structure. Pour tenir compte de ces interactions, la modification de leurs positions se fait de façon itérative. Dans le programme développé, les itérations sont réalisées à l'aide du solveur *Kangaroo*. Cette section est consacrée à la compréhension du fonctionnement de ce solveur.

*Kangaroo* est un plug-in itératif de *Grasshopper*, qui a été développé par Daniel Piker. Il permet d'intégrer des simulations, qui répètent une action, au sein d'un programme *GH*. Notamment en appliquant des effets physiques à ce qui a été modélisé. Le résultat de la simulation peut être visualisé sur l'interface de *Rhinoceros*.

Le solveur que nous utilisons permet d'itérer une action sur des données jusqu'à obtenir la solution à un objectif. Il fonctionne comme une boîte noire qui peut être schématisée par la Figure 107.

Il reçoit des données initiales, ainsi qu'un objectif. Celui-ci est décrit par le critère à satisfaire et l'action à réaliser pour y arriver. Le solveur applique cette action sur les données jusqu'à ce que le critère soit respecté. Si c'est le cas, la solution est trouvée.

L'utilisation du solveur se justifie par son efficacité et sa rapidité de convergence vers la solution. Sa robustesse provient de la méthode qu'il emploie pour effectuer les itérations. Il s'inspire de la relaxation dynamique, qui est une méthode numérique itérative permettant de chercher la forme d'une structure répondant à des critères spécifiés.

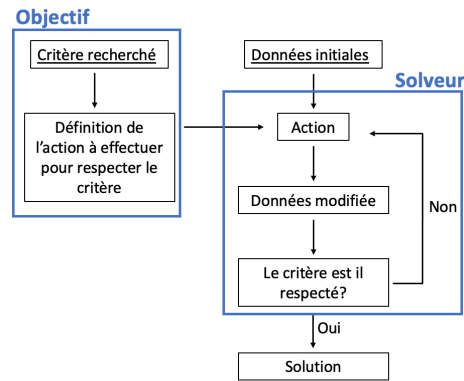


Figure 107 - Fonctionnement du solveur

Pour représenter son fonctionnement, imaginons une série de cercles placés aléatoirement (Figure 109). L'objectif est qu'ils soient tous tangents avec au moins un cercle. Le critère est donc que la distance qui sépare leurs centres soit égale à deux fois le rayon. L'action à effectuer est d'écarter deux cercles s'ils sont trop proches et de les rapprocher dans le cas contraire. Lors de chaque itération, le solveur calcule la distance entre les centres, si elle est inférieure à la somme de leurs rayons, une force qui les repousse est appliquée. Au contraire, si elle est plus grande, une force qui les attire est appliquée. Le mouvement de tous les cercles est réalisé simultanément. Cette opération est répétée jusqu'à ce que le critère soit satisfait.

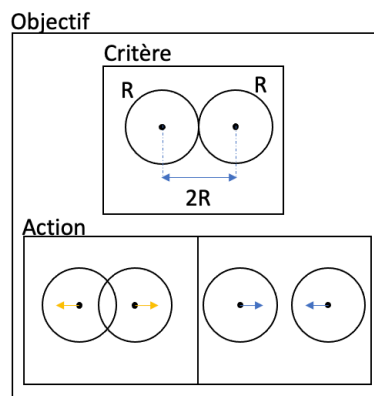


Figure 108 - Objectif à appliquer aux cercles

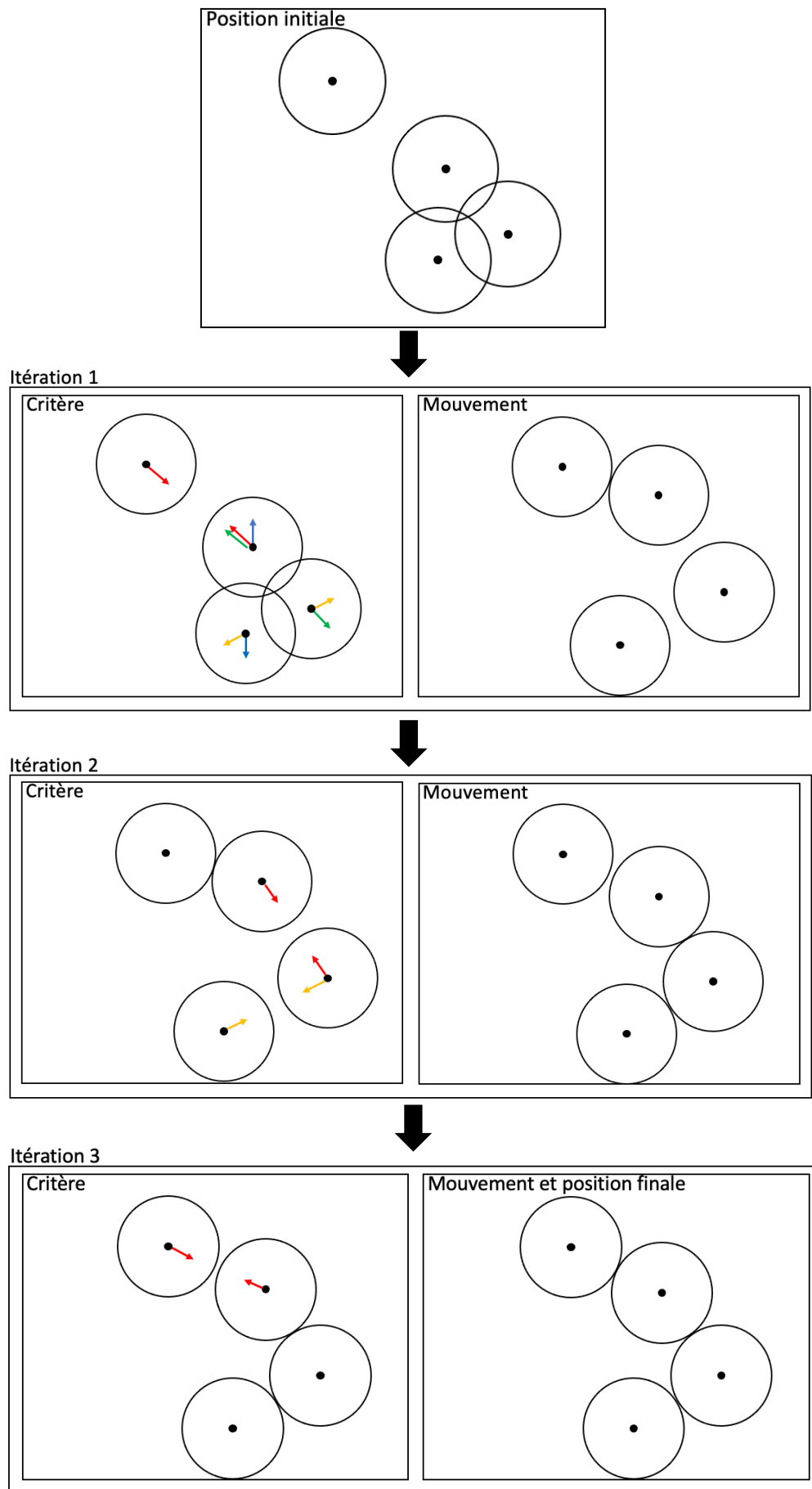


Figure 109 - Itération du solveur pour satisfaire l'objectif de la Figure 97

En pratique, il est possible de fixer plusieurs objectifs au solveur en même temps.

Au niveau de la structure, le but de cette dernière étape du programme est d'ajouter l'épaisseur et assurer que les éléments soient en contact avec leurs destinations. Le critère est donc le respect de l'excentricité entre ceux-ci. L'action est semblable à celle des cercles représentés ci-dessus. Si les éléments sont trop proches, il faut les écarter, ou dans le cas contraire les rapprocher. Ceci est fait en imposant une force aux extrémités des lignes, qui sont les axes centraux des éléments. Cette force est responsable du déplacement de ces derniers. L'action sera expliquée en détail dans la section suivante.

La structure réciproque formée ne s'éloigne pas trop de la demande du client, un autre objectif est fixé. La distance entre les lignes et la surface initiale est le critère. Donc, l'action est une force qui les attire vers cette surface si elles sont trop distantes. Cet objectif est important pour le bon fonctionnement du solveur. Au fil des itérations, lorsque les éléments sont écartés pour respecter les excentricités, les interactions aboutissent parfois à un éloignement relativement fort de la surface. Cet objectif permet d'y remédier.

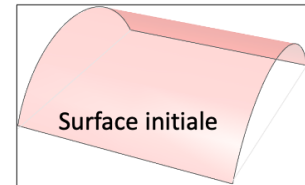


Figure 110 - Objectif de proximité de la surface

Enfin, les lignes utilisées jusqu'à présent sont toutes de longueurs identiques. Garder cette propriété est intéressant, pour faciliter la construction de la structure. Le dernier objectif évite de modifier la longueur des éléments lors des itérations. Le critère est la distance entre leurs extrémités et l'action est une force qui s'oppose à la variation de longueur.

Dans notre cas, nous avons donc trois objectifs :

- Respecter le contact entre les éléments et leurs épaisseurs.
- Garder les éléments proches de la surface du client.
- Garder la longueur des éléments.

A chaque objectif est également associée une notion d'importance. Par exemple, respecter les excentricités est plus important que la proximité avec la surface initiale. En effet, si les distances au niveau des contacts ne sont pas satisfaites, la structure n'est pas réalisable. Par contre si les éléments s'écartent de l'enveloppe l'édifice reste faisable. Dès lors, accorder plus d'attention à l'action agissant sur les excentricités est essentiel. L'importance de l'objectif apparaît dans les informations qui le définissent.

#### Objectif

|                    |
|--------------------|
| Critère recherché  |
| Action à effectuer |
| Importance         |

Figure 111 - Objectif à fournir au solveur Kangaroo

Au niveau de la structure, lors de chaque itération, le solveur va évaluer les critères de nos trois objectifs. Il appliquera, ou non, l'action aux éléments en fonction de ceux-ci. En pratique, les actions consistent en un déplacement des axes centraux dans la direction qui satisfait les critères. Plusieurs actions peuvent s'appliquer en même temps à un élément, dans ce cas les déplacements dus à celles-ci sont additionnés. C'est lors de cette somme qu'intervient l'importance de l'objectif. Les actions à effectuer seront pondérées en fonction de leur importance. Dans l'exemple ci-dessous, les deux actions sont contradictoires cependant l'objectif B est deux fois plus important. Son action est donc multipliée par deux lors de la somme des mouvements. La notion d'importance permet de déterminer l'action à suivre lorsqu'elles sont contradictoires.

| Objectif A    | Objectif B    | Actions résultantes                                     |
|---------------|---------------|---------------------------------------------------------|
| Action: ↓     | Action: ↑     | $1 * \downarrow + 2 * \uparrow = \downarrow + \uparrow$ |
| Importance: 1 | Importance: 2 |                                                         |

Figure 112 - Pondération des actions avec l'importance de l'objectif

Au fil des itérations, les éléments sont donc déplacés en suivant les actions qui sont évaluées par le solveur. Au fur et à mesure des répétitions, ils se rapprochent d'une position qui satisfait tous les objectifs.

En pratique, des outils disponibles dans la bibliothèque *Kangaroo* permettent de tenir compte des objectifs de longueur des éléments ainsi que la proximité de la surface. Pour ce qui est du troisième objectif, un programme développé par Daniel Piker permet de le définir. Nous avons cependant fortement modifié celui-ci pour qu'il réponde à nos besoins.

Pour résumer, la prise en compte de l'épaisseur des éléments se fait en imposant une excentricité entre ceux-ci. Cette distance étant un paramètre des modules, la modifier a un impact sur l'ensemble de la structure. Pour tenir compte des interactions, ceci est fait de façon itérative. Au sein du programme, nous utilisons un solveur. À chaque répétition, il évalue les critères de nos trois objectifs et applique aux éléments l'action qui leur est associée. Les lignes sont déplacées dans une nouvelle position et l'opération est répétée sur la nouvelle configuration de la structure. L'utilisation du solveur se justifie pour sa rapidité de convergence vers la solution. De plus, nous contrôlons les actions qu'il réalise. La section suivante est consacrée à l'explication de l'action qui permet de satisfaire les excentricités.

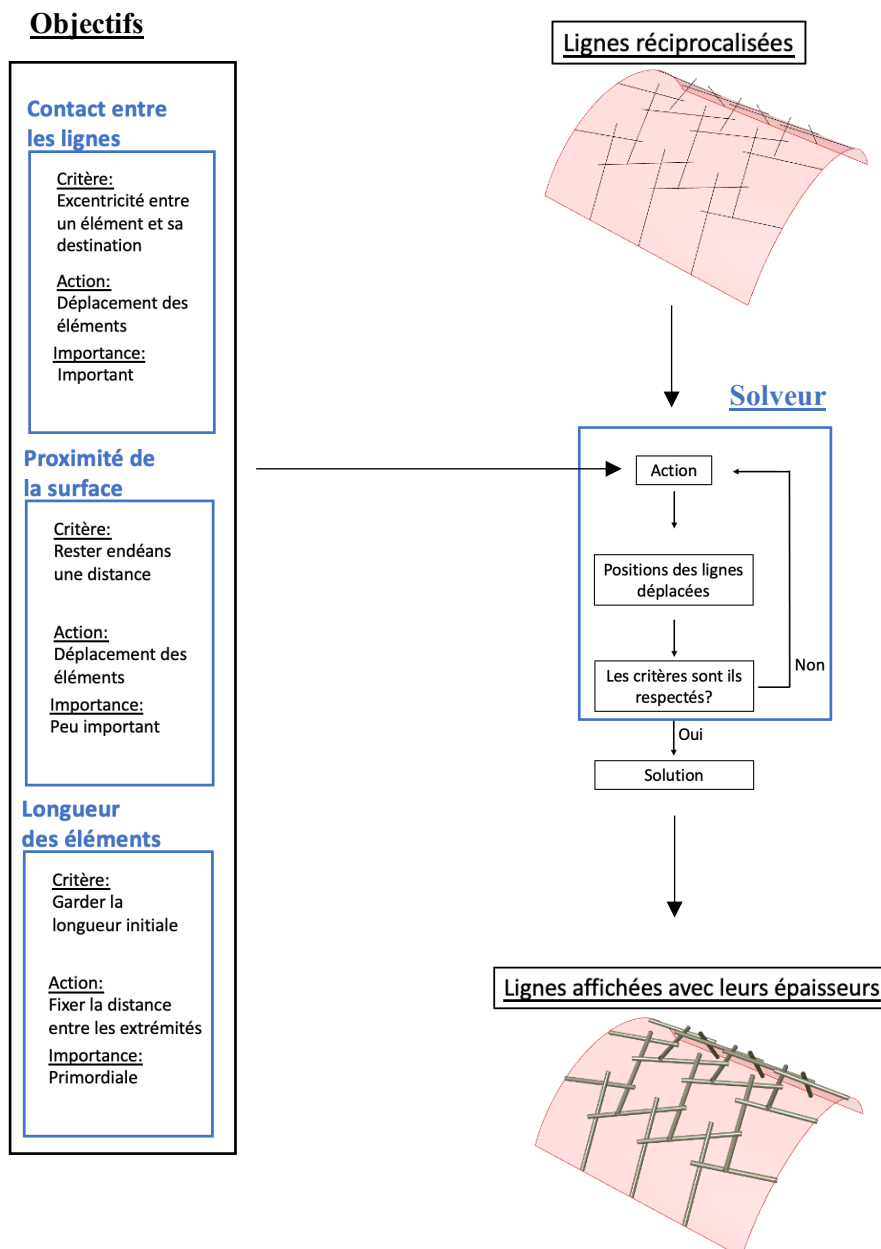


Figure 113 - Fonctionnement du solveur pour l'étape d'ajout de l'épaisseur des éléments

## 6.2 Mouvement des éléments pour tenir compte des excentricités

Comme expliqué, une action est appliquée pour ajouter l'épaisseur et tenir compte de l'excentricité entre les éléments. Elle consiste à déplacer les lignes au fur et à mesure des itérations. Dès lors, comment évaluer le mouvement à leur appliquer ?

L'objectif est d'avoir un contact entre les éléments et leurs destinations. Nous cherchons une excentricité qui vaut la somme des rayons à l'endroit du contact. L'épaisseur des éléments est connue, elle est spécifiée par l'utilisateur dans les paramètres du programme. De plus, la destination de chaque élément est identifiée grâce à la réciprocalisation. Ils sont tous la destination d'un autre.

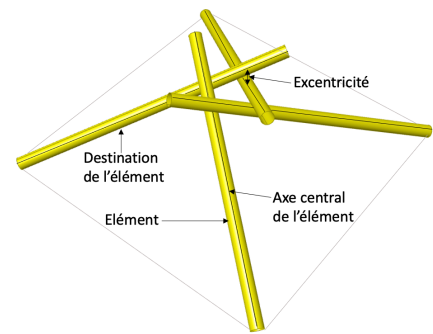


Figure 114 - Module réciproque

Lors de chaque itération, le solveur évalue l'excentricité entre une ligne et sa destination, de cette façon il vérifie si le critère est respecté. Sur base de cette distance, il détermine l'action à appliquer. Si les éléments sont trop proches, ils sont écartés. Au contraire, s'ils sont trop loin, ils sont rapprochés. Cette opération est appliquée simultanément à tous les éléments. Ils sont déplacés dans leurs nouvelles positions et l'opération est recommencée jusqu'à satisfaire les critères.

Déterminons à présent le mouvement à appliquer. Le processus est illustré Figure 115. Le procédé cherche le contact entre les lignes  $L_1$  et  $L_2$ . La réciprocalisation a permis de déterminer que  $L_2$  est la destination de l'élément  $L_1$ .

Les lignes sont les axes centraux des éléments de la structure. Ce sont des segments appartenant à des plans différents. L'excentricité à calculer est une distance entre deux lignes se trouvant dans l'espace. Cette valeur se mesure au niveau du point de contact.

La première étape est de trouver le point de contact entre les éléments. Il est caractérisé par la distance la plus courte entre les lignes. Sur base de produit scalaire, il est possible de trouver les points P et Q de la Figure 115. Ils caractérisent cette distance. Leur détermination sera démontrée dans la section suivante.

Ensuite, un vecteur (D) est tracé entre ces deux points. Il va de P à Q, son sens va toujours de l'élément vers sa destination. Ceci aura son importance pour la suite. La grandeur de ce vecteur permet de déterminer la distance entre les deux éléments.

Nous cherchons une excentricité égale à la somme des rayons au niveau du point de contact. L'action a pour but que la grandeur du vecteur D soit égale à  $2R$ . Lors des itérations, trois cas sont possibles :

- $D = 2R$  ou  $2R - D = 0$ , les éléments sont à la bonne distance, il ne faut donc pas les déplacer.
- $D < 2R$  ou  $2R - D > 0$ , les éléments sont trop proches l'un de l'autre, il faut les écarter.
- $D > 2R$  ou  $2R - D < 0$ , les éléments sont trop loin l'un de l'autre, il faut les rapprocher.

L'amplitude (*Move*) du déplacement est déterminée grâce à cette comparaison. ( $Move = 2R - D$ )

Enfin un déplacement dans la direction du vecteur D est appliqué à la destination. Le même déplacement est appliqué dans la direction inverse à l'élément. En effet, si les éléments sont trop proches, *Move* est plus grand que 0. La destination sera déplacée dans la direction D et l'élément dans la direction inverse, donc ils s'écartent. Si au contraire, les éléments sont trop loin, *Move* est plus petit que 0, la destination est donc déplacée dans le sens contraire de D et l'élément dans le sens de D, les éléments se rapprochent. Le déplacement est toujours appliqué aux extrémités de l'élément.

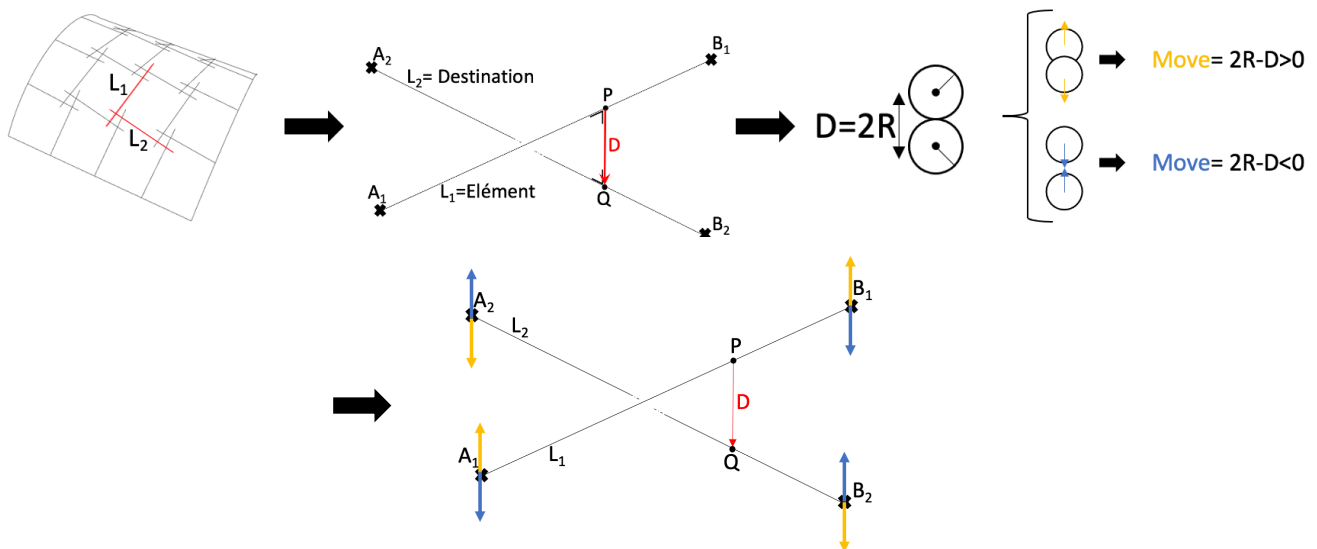
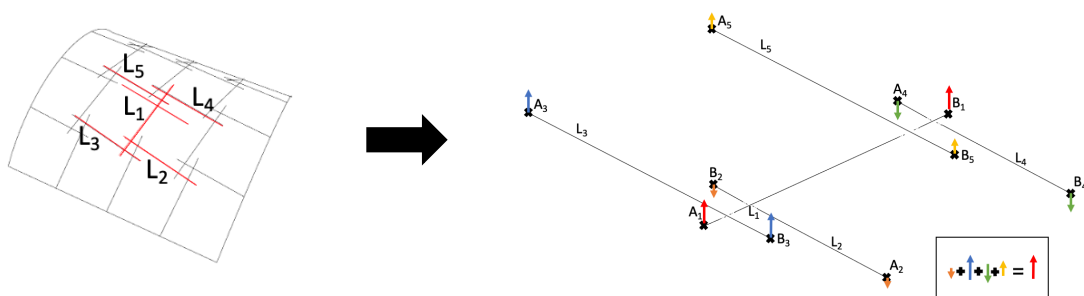


Figure 115 - Détermination du mouvement des lignes

Dans une structure réciproque, les éléments se portent les uns les autres. Chaque droite à deux destinations et sert également de destination à plusieurs autres. En pratique le déplacement de la ligne  $L_1$  de la Figure 115, sera la somme des mouvements pour satisfaire les excentricités des quatre contacts de la Figure 116.


 Figure 116 - Somme des déplacements pour la ligne  $L_1$ 

Pour intégrer l'objectif de contact entre les lignes au programme, un outil utilisable dans Grasshopper a été développé. Celui-ci définit le mouvement à effectuer par le solveur lors de chaque itération, il suit les opérations décrites précédemment.

A présent nous avons défini les actions pour obtenir l'excentricité voulue. Les deux autres objectifs fournis au solveur fonctionnent de la même manière. Leurs critères sont évalués, ensuite l'action est identifiée et appliquée. Pour ce qui est de rester proche de la surface initiale, lorsque l'élément s'en écarte, un déplacement dans la direction de celle-ci est calculé et additionné au mouvement pour satisfaire les excentricités. Il en va de même pour la longueur des éléments.

Enfin la pondération des critères a tout son sens à présent, pour en tenir compte le solveur multiplie les mouvements par l'importance qu'ils ont avant de les additionner pour trouver le déplacement à appliquer à l'élément.

Lorsque le mouvement de chaque ligne pour satisfaire les trois objectifs a été calculé, les éléments sont déplacés dans leurs nouvelles positions et l'opération est recommencée. Au fur et à mesure qu'on se rapproche de la solution finale, le mouvement diminue jusqu'à s'arrêter totalement lorsque les critères sont satisfaits.

A présent il reste à déterminer comment connaître les points de contact sur les deux éléments.



### 6.3 Détermination du point de contact

L'action à effectuer pour respecter le contact dépend de l'excentricité entre les éléments. Cette distance se mesure au niveau du point de contact, il est important de le déterminer. De façon logique, il est toujours à l'endroit où les deux éléments sont les plus proches. Rappelons que les lignes sont les axes centraux des éléments. Elles sont positionnées dans l'espace, travailler en 3D est donc important.

Nous cherchons les points  $P$  et  $Q$ , qui appartiennent chacun à une ligne. Ces deux points sont les extrémités du vecteur  $D$  utilisé précédemment. Sa grandeur caractérise la distance la plus courte entre deux droites. Ce vecteur dicte le mouvement à appliquer par le solveur.

Dans un premier temps, nous nous appuyerons sur les recherches de C.Bégin [4], pour déterminer la distance entre deux droites infinies. Ensuite, nous appliquerons le résultat au cas de deux segments finis, ce qui correspond à la détermination de l'excentricité entre deux éléments lors de la comparaison avec le critère durant les itérations du solveur.

#### 6.3.1 Distance la plus courte pour deux droites infinies

Soit deux lignes infinies  $L_1$  et  $L_2$  dans l'espace, caractérisées chacune par un vecteur directeur (respectivement  $u$  et  $v$ ) et un point appartenant à celles-ci décrit par ses coordonnées cartésiennes (respectivement  $A$  et  $B$ ).

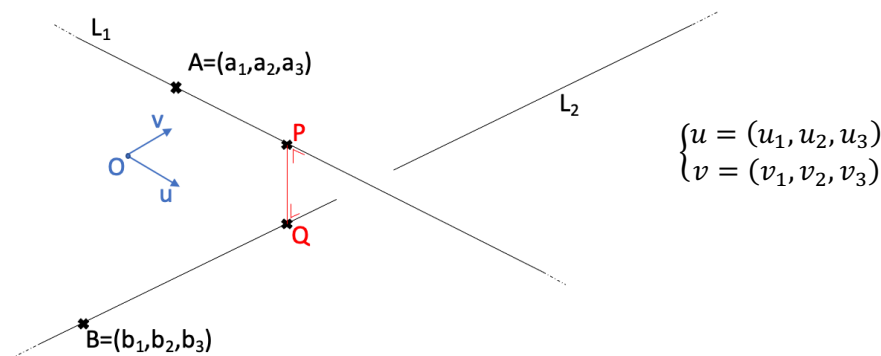


Figure 117 - Droites infinies dans l'espace

Les lignes peuvent être écrites en fonction de leurs équations paramétriques :

$$L_1 = \begin{cases} x = a_1 + ku_1 \\ y = a_2 + ku_2 \\ z = a_3 + ku_3 \end{cases} \quad L_2 = \begin{cases} x = b_1 + mv_1 \\ y = b_2 + mv_2 \\ z = b_3 + mv_3 \end{cases}$$

Sous forme vectorielle, les équations peuvent être écrites :

$$P = A + ku \quad \text{et} \quad Q = B + mv$$

Nous allons chercher les points  $P \in L_1$  et  $Q \in L_2$  tel que le segment  $PQ = Q - P$  soit la perpendiculaire aux deux lignes. Ceci correspond à chercher la distance la plus courte entre ces deux lignes. Il faut trouver une valeur de  $k$  et de  $m$  tel que :

$$S = \begin{cases} PQ \cdot u = 0 \\ PQ \cdot v = 0 \end{cases}$$

Or  $PQ = Q - P = (B + mv) - (A + ku) = (mv - ku) + (B - A)$ , les points  $B$  et  $A$  étant connus  $B - A$  est une constante notée  $C$ .

Le système S à résoudre devient :

$$S = \begin{cases} (mv - ku) \cdot u - C \cdot u = 0 \\ (mv - ku) \cdot v - C \cdot v = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow S = \begin{cases} (u \cdot v)m - (u \cdot u)k = C \cdot u \\ (v \cdot v)m - (u \cdot v)k = C \cdot v \end{cases}$$

Si le déterminant de ce système est non nul, alors il possède une solution unique. Dans le cas contraire, il y a une infinité de solutions à la distance la plus courte, ce qui sous-entend que les droites sont parallèles.

À l'aide de la règle de Cramer, ce système peut être résolu avec les matrices suivantes :

$$S = \begin{pmatrix} v \cdot u & -u \cdot u \\ v \cdot v & -u \cdot v \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} C \cdot u & -u \cdot u \\ C \cdot v & -u \cdot v \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} u \cdot v & C \cdot u \\ v \cdot v & C \cdot v \end{pmatrix}$$

À présent, grâce au déterminant de ces matrices nous pouvons trouver la solution unique du système :

$$k = \frac{\det(K)}{\det(S)} \quad m = \frac{\det(M)}{\det(S)}$$

Sur base des équations paramétriques des lignes  $L_1$  et  $L_2$  et de ces paramètres  $k$  et  $m$ , il est dès lors possible de trouver les coordonnées des points P et Q et ainsi déterminer la distance la plus courte entre les deux lignes.

### 6.3.2 Distance la plus courte pour deux droites finies

À présent, intéressons-nous au cas de lignes finies dans l'espace. C'est le cas que nous devons traiter pour calculer le déplacement à appliquer aux éléments pour respecter les excentricités.

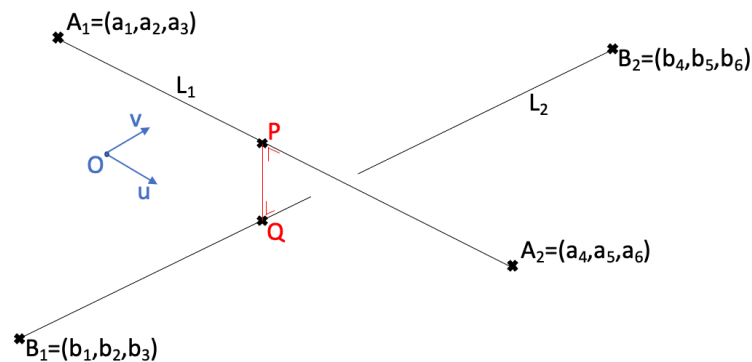


Figure 118 - Droites finies dans l'espace

Le vecteur directeur de chacune de ces droites peut être trouvé à l'aide des extrémités connues de celles-ci :

$$\begin{cases} u = A_2 - A_1 \\ v = B_2 - B_1 \end{cases}$$

Dès lors, les équations paramétriques permettant de trouver les points P et Q deviennent :

$$L_1 = \begin{cases} x = a_1 + k(a_4 - a_1) \\ y = a_2 + k(a_5 - a_2) \\ z = a_3 + k(a_6 - a_3) \end{cases} \quad L_2 = \begin{cases} x = b_1 + m(b_4 - b_1) \\ y = b_2 + m(b_5 - b_2) \\ z = b_3 + m(b_6 - b_3) \end{cases}$$

Ensuite, nous cherchons à nouveau les points  $P \in L_1$  et  $Q \in L_2$  tel que le segment  $PQ = Q - P$  soit le plus court entre les deux droites. Le système à résoudre est le même.

Pour deux lignes fixes, les produits scalaires donnent des valeurs que nous notons :

$$\begin{cases} a = u \cdot u \\ b = u \cdot v \\ c = v \cdot v \\ d = C \cdot u \\ e = C \cdot v \end{cases}$$

Dès lors, les matrices S, M et K peuvent être réécrites :

$$S = \begin{pmatrix} b & -a \\ c & -b \end{pmatrix} \quad M = \begin{pmatrix} d & -a \\ e & -b \end{pmatrix} \quad K = \begin{pmatrix} b & d \\ c & e \end{pmatrix}$$

Donc,

$$\det(S) = ac - b^2 \quad \det(M) = ea - bd \quad \det(K) = be - cd$$

Finalement,

$$k = \frac{be - cd}{ac - b^2} \quad m = \frac{ea - bd}{ac - b^2}$$

Nous pouvons donc trouver les points P et Q de la même manière que pour une droite infinie. Cependant, des cas particuliers existent, si le rapport k ou m est inférieur à 0 ou plus grand que 1, les points P et Q n'appartiennent plus à la droite.

En effet en remplaçant ceux-ci par 1 dans les équations paramétriques on trouve l'extrémité de la droite :

$$P = \begin{cases} x_P = a_1 + 1 * u_1 = a_4 \\ y_P = a_2 + 1 * u_2 = a_5 \\ z_P = a_3 + 1 * u_3 = a_6 \end{cases} \quad Q = \begin{cases} x_Q = b_1 + 1 * v_1 = b_4 \\ y_Q = b_2 + 1 * v_2 = b_5 \\ z_Q = b_3 + 1 * v_3 = b_6 \end{cases}$$

Remplacer par 0 donne le point initial de chaque droite.

Dans le cadre de ce travail, nous cherchons la distance la plus courte entre les droites, afin de déterminer l'action qui doit être réalisée pour satisfaire le contact entre les éléments. Les points P et Q doivent donc appartenir aux lignes. Limitons les valeurs des rapports m et k entre [0,1]. Il existe quatre cas :

- 1) Si  $\det(K) < 0 \Rightarrow k < 0$  et P est avant  $A_1$ . Il faut imposer l'origine du vecteur D à l'extrémité  $A_1$  donc  $k=0$ .

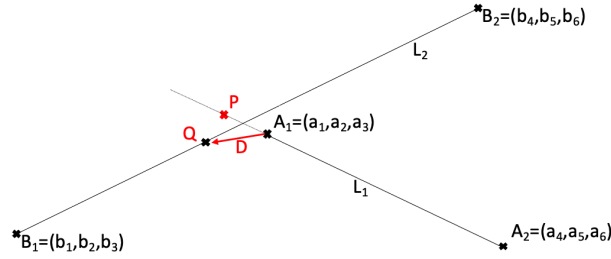


Figure 119 - P avant  $A_1$

- 2) Si  $\det(K) > \det(S) \Rightarrow k > 1$  et P est au-delà de  $A_2$ . Il faut imposer l'origine du vecteur D à l'extrémité  $A_2$  donc  $k=1$ .

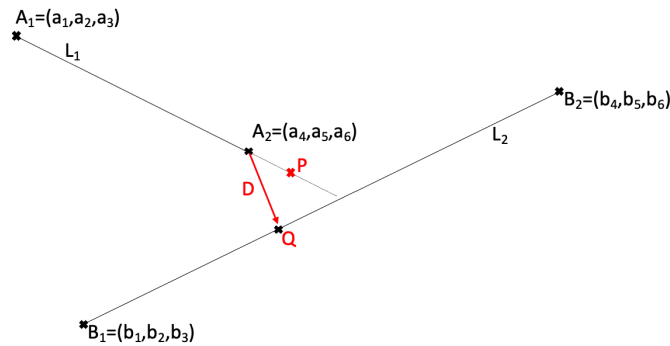


Figure 120 - P après  $A_2$

- 3) Si  $\det(M) < 0 \Rightarrow m < 0$  et Q est avant  $B_1$ . Il faut imposer l'extrémité du vecteur D à l'extrémité  $B_1$  donc  $m=0$ .

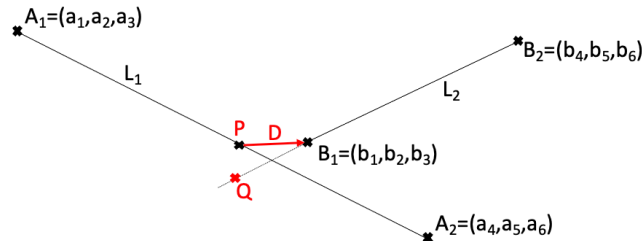


Figure 121 - Q avant  $B_1$

- 4) Si  $\det(M) > \det(S) \Rightarrow m > 1$  et Q est après  $B_2$ . Il faut imposer l'extrémité du vecteur D à l'extrémité  $B_2$  donc  $m=1$ .

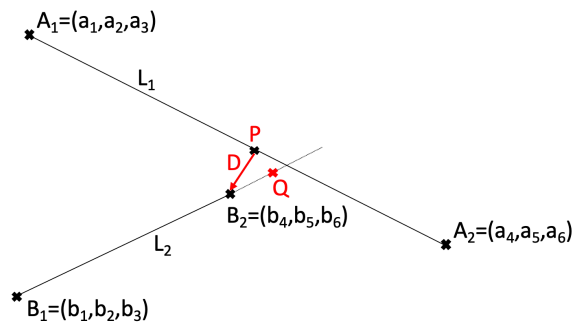


Figure 122 - Q après  $B_2$

Enfin, il est possible d'avoir des combinaisons des cas précédemment cités. Par exemple, si le point P est au-delà de A<sub>2</sub> et Q avant B<sub>1</sub>, alors  $k=1$  et  $m=0$ .

Les points P et Q étant déterminés, la distance entre ceux-ci est facilement calculable. Le vecteur D utilisé dans la section 6.2 est défini. Le mouvement à appliquer aux éléments lors des itérations est à présent connu.

Finalement, dans la section 6.2, nous avons abordé l'importance associée aux objectifs. Leurs prises en compte consistent à pondérer l'amplitude des déplacements lors de leur somme sur un même élément. Si un des quatre cas précédemment cités est rencontré, une valeur plus grande est accordée à ce déplacement. En effet, si le contact se trouve au-delà de l'extrémité d'une ligne, l'assemblage est logiquement irréalisable. Assurer que celui-ci soit le long de l'élément est donc important.

Les points P et Q sont donc trouvés en cherchant leurs coordonnées le long de leurs droites respectives. Cette opération se réalise à l'aide de produit scalaire et de la règle de Cramer. La distance la plus courte entre deux éléments est donc trouvée. Le point de contact entre ceux-ci peut être identifié, ce qui détermine le vecteur D dictant le mouvement à appliquer pour respecter l'excentricité (section 6.2). Toutes les informations sont à présent connues.

## 6.4 Conclusion

Dans cette dernière étape de la conception de structures réciproques, l'épaisseur est ajoutée aux lignes de façon à former les éléments de la structure. Les droites sont les axes centraux des grumes constituant la structure.

Cette dimension est ajoutée en modifiant l'excentricité au sein des modules, ce qui a un impact sur leur configuration ainsi que sur toute la structure. Les interactions entre les modules impliquent que l'excentricité soit prise en compte de façon itérative. Les répétitions sont réalisées à l'aide d'un solveur provenant du plug-in *Kangaroo* de *Grasshopper*. Il se charge de répéter des actions définies par les objectifs qui lui sont fixés.

Nous avons défini trois :

- Le premier permet d'ajouter **l'épaisseur** des éléments (à l'aide de l'excentricité) ainsi qu'assurer le contact entre eux. Son action consiste à les déplacer de façon à ce que la distance entre leurs axes centraux soit égale à la somme des rayons au niveau des points de contact.
- Lors de l'ajout de l'épaisseur, les éléments s'écartent les uns des autres. Pour éviter que la structure ne s'éloigne trop de la demande du client, un objectif de **proximité** avec celle-ci est imposé. C'est le deuxième objectif.
- Le troisième permet d'assurer que l'ensemble des éléments aient une même **longueur** et que celle-ci ne soit pas modifiée lors des itérations sur la structure.

La prise en compte de ces objectifs se fait par des actions appliquées par le solveur sur la structure. A chaque itération les critères sont évalués. En fonction du résultat, un mouvement permettant de respecter ceux-ci est attribué aux éléments. Une importance assurant la priorité à certains objectifs par rapport à d'autres est également prise en compte. Ensuite, ils sont déplacés et l'opération est recommencée jusqu'à ce que les critères soient respectés.

Nous avons étudié l'action à appliquer sur les éléments. Le critère sur les excentricités est vérifié en comparant la somme des rayons avec la distance entre l'axe d'un élément et sa destination au point de contact. Grâce à cette comparaison, la direction ainsi que l'amplitude du mouvement sont déterminées. Les éléments sont rapprochés ou écartés en fonction du cas. La prise en compte des autres critères se fait de la même façon.

Enfin, nous avons démontré la façon de trouver le point de contact entre un élément et sa destination. Elle se base sur la recherche de la distance perpendiculaire aux deux lignes.

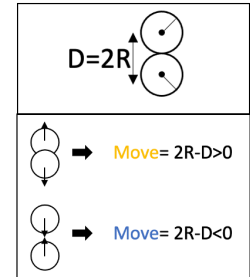


Figure 123 -  
Mouvement des  
éléments

En pratique, l'étape de l'ajout des épaisseurs arrive après celle de la réciprocalisation. Les lignes sont donc déjà positionnées pour former des modules, seule l'excentricité doit être modifiée. Le solveur reçoit ces lignes ainsi que les actions qu'il doit appliquer, lorsque les critères sont respectés, les itérations sont arrêtées.

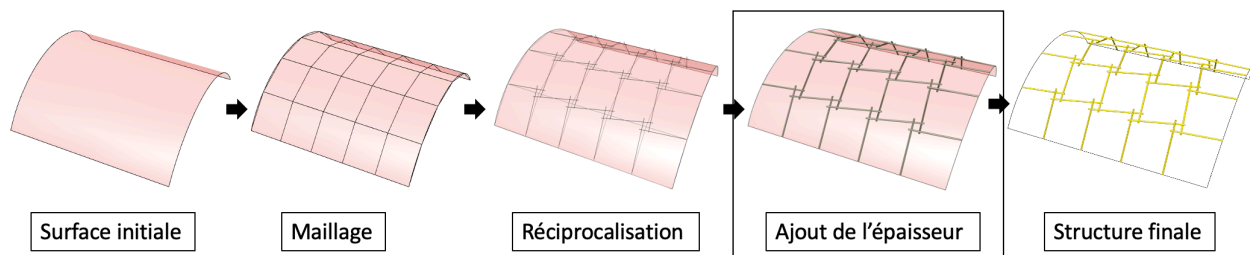


Figure 124 - Étape de la recherche de forme d'une structure réciproque

Des outils dictant les actions, pour respecter la proximité de la surface et le maintien de la longueur des éléments, existent dans la bibliothèque du plug-in *Kangaroo*. Pour leurs fonctionnements il faut leur fournir les lignes après réciprocalisation ainsi que l'importance de cet objectif. Pour ce qui est du respect des excentricités, un outil a été développé. Il se base à nouveau sur les lignes fournies par la réciprocalisation ainsi que l'importance de l'objectif. Son fonctionnement suit les mêmes étapes que celles décrites dans ce chapitre.

L'utilisation du solveur *Kangaroo* se justifie par son efficacité et sa rapidité. La solution est trouvée en moins de 30s pour itérer ces trois objectifs sur une structure constituée d'une centaine d'éléments. Par ailleurs, nous choisissons les mouvements qu'il effectue à chaque itération bien que nous n'ayons pas de contrôle sur son fonctionnement interne.

Pour finir, cette dernière étape clôturera la recherche de forme d'une structure réciproque. À la suite des trois grandes étapes (maillage, réciprocalisation et ajout de l'épaisseur), le programme est en mesure de générer automatiquement une structure réciproque sur une surface en tenant compte des paramètres à définir par le client (surface à couvrir, nombre de modules, longueurs d'engagement et épaisseur des éléments). Le programme que nous avons développé automatise la prise en compte de ces paramètres, et permet d'afficher le résultat sur l'interface *Rhinoceros*.

Pour le moment, nous n'avons pas encore tenu compte de la position relative des éléments au niveau du point de contact. Il est dès lors possible que plusieurs d'entre eux soient suspendus à leurs destinations. L'ajout de pièces métalliques est donc nécessaire. Ce dernier point sera abordé dans le chapitre suivant.

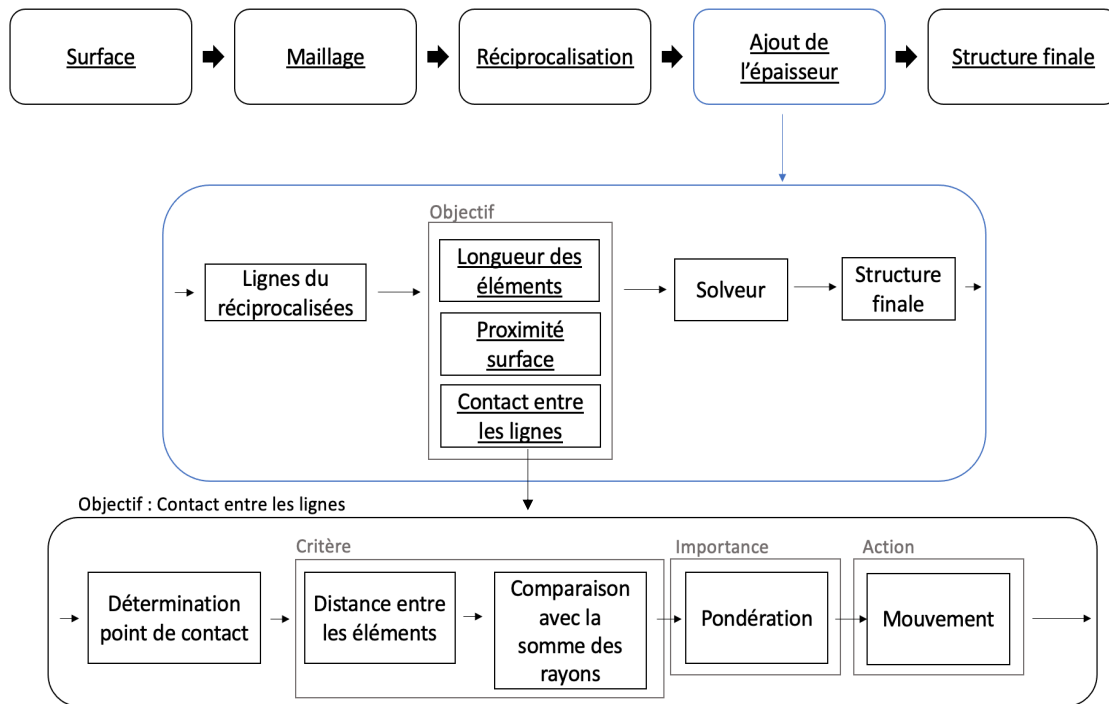


Figure 125 – Processus d'ajout de l'épaisseur des éléments

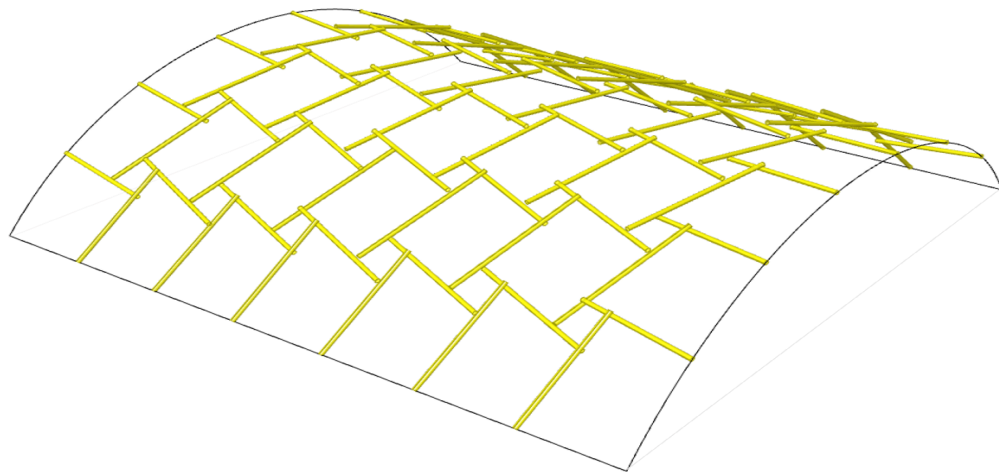
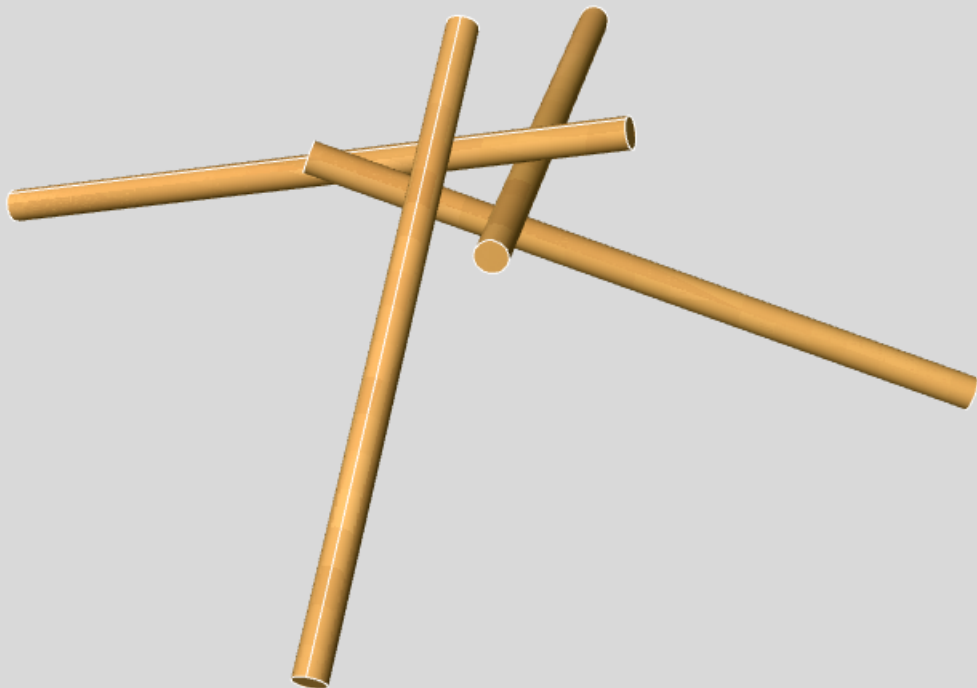


Figure 126 - Structure formée à l'aide du programme



# Prise en compte des assemblages suspendus



## 7 Prise en compte des assemblages en décollement

Le programme expliqué jusqu'à présent nous a permis de trouver la forme d'une structure réciproque recouvrant une surface fixée par un client. Pour y parvenir, le processus se déroule en trois grandes étapes. La première est la création du maillage. Celui-ci fournit des lignes qui sont ensuite réciprocalisées pour former une première SR. Enfin, l'étape d'ajout de l'épaisseur vient prendre en compte les dimensions des éléments pour dessiner la structure réelle.

A travers ce processus, nous n'avons pas prêté attention aux assemblages, nous avons seulement cherché à réaliser une structure dont les éléments sont en contact au niveau de ceux-ci. Ce chapitre explique la façon dont les assemblages suspendus sont traités dans le programme développé.

Deux configurations existent au niveau du point de contact : soit un élément est posé sur un autre (l'assemblage fonctionne par pression de contact), soit il y est suspendu (l'assemblage est dit en décollement ou en traction). En pratique, il est possible de retrouver ces deux configurations au sein d'un module ou d'une structure.

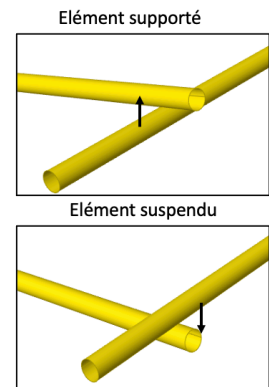


Figure 127 - Positions possibles au niveau du contact

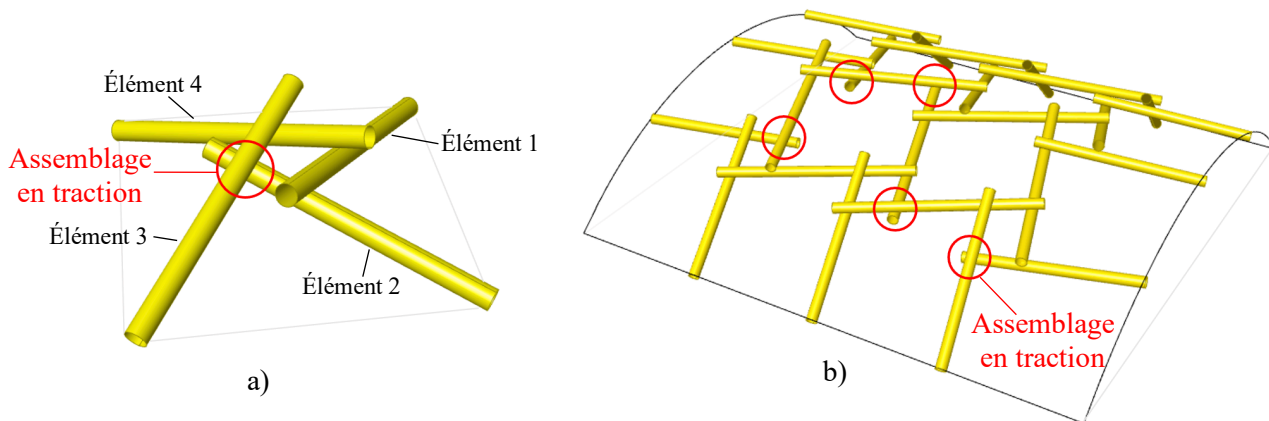


Figure 128 - Assemblages suspendus au sein d'une structure

Intéressons-nous à la stabilité des éléments du module (a) Figure 128). L'élément 1 peut être représenté par son schéma statique, qui est une poutre sur deux appuis (a) Figure 129). La réaction d'appui A vient du support sur l'élément 2, l'appui B est celui du sol. Deux forces s'appliquent sur l'élément, son poids propre ( $q$ ) et l'appui de l'élément 4 ( $F$ ). Un calcul de son équilibre nous permet de conclure que ses appuis sont en compression. Si nous exécutons la même démarche sur l'élément 2, nous remarquons que son appui A est suspendu. En pratique, dans une structure, les poutres servent généralement de support à deux autres, le schéma statique est le c) Figure 129, la réflexion reste toutefois la même.

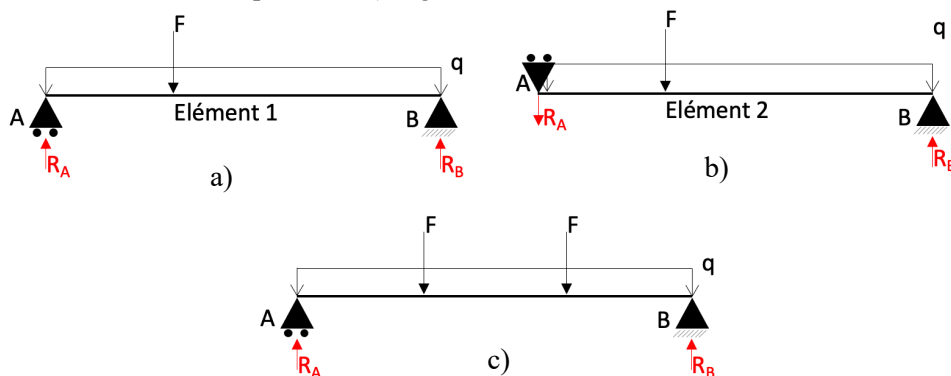


Figure 129 - Schéma statique des éléments d'un module et d'une structure

Dans le cas de l'*élément 1*, un assemblage fonctionnant par pression de contact et uniquement constitué de bois est réalisable. Pour ce qui est de l'*élément 2*, sous l'effet de la gravité, il tombe au sol. Pour reprendre cet effort dans l'assemblage, une pièce supplémentaire, généralement métallique, doit être ajoutée (par exemple un tirefond). L'utilisation de telles pièces augmente considérablement le coût de production de la structure. Par conséquent, réduire au maximum leur présence est intéressant. Ceci peut être fait grâce à l'étude de la position relative des éléments au niveau des points de contact.

Si nous ne prêtons pas attention aux connexions, trouver la forme d'une structure réciproque proche de la demande du client est généralement possible. En revanche, une configuration avec uniquement des assemblages fonctionnant par pression de contact n'est pas toujours réalisable. Il faut alors faire varier les paramètres des modules (longueur d'engagement, rayon ou longueur des éléments...). En pratique, le programme doit être en mesure de remarquer lorsqu'il ne parvient pas à répondre aux critères recherchés. Son objectif est donc de minimiser le nombre de connecteurs métalliques.

Pour tenir compte de la position relative des éléments, deux approches ont été développées. La première se base uniquement sur des conditions géométriques. Elle intervient en modifiant l'action donnée au solveur lors des itérations qui déplacent les lignes. La seconde utilise les efforts internes calculés dans la structure et vient ensuite adapter la forme trouvée. Ces deux méthodes sont complémentaires et changent la configuration de la structure. Il faut donc chercher une nouvelle disposition qui satisfait tous les contacts entre les éléments.

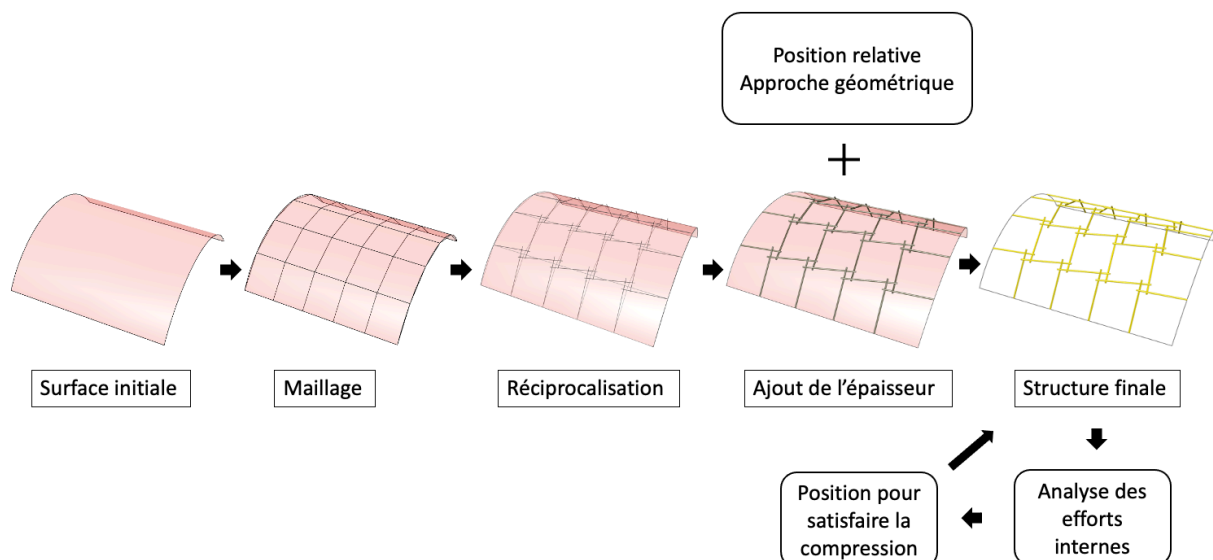


Figure 130 - Prise en compte de la position relative des éléments dans le processus de recherche de forme d'une structure réciproque

La première approche, **géométrique**, a pour avantage d'agir directement lors de la recherche de contacts entre les éléments. Elle s'intéresse uniquement au poids propre de la structure. Ceci consiste à vérifier que l'élément est toujours au-dessus de sa destination au cours des itérations qui mesurent l'excentricité entre les lignes. La position est donc prise en compte dans l'action dictée au solveur.

La deuxième approche, **numérique**, permet d'adapter les assemblages en fonction du comportement de la structure soumise à différents cas de charge (poids propre, vent, neige...). Lorsque la structure est entièrement dessinée, elle est fournie à un logiciel d'analyse numérique qui calcule ses efforts internes. Ainsi, les connexions en traction sont repérées. Les éléments sont ensuite déplacés et le contact entre eux est recherché en tenant compte des efforts calculés. Enfin, une nouvelle structure est formée.

Dans la suite de ce chapitre, nous traiterons d'abord l'approche géométrique. Ensuite, nous parlerons de l'approche développée à partir d'un logiciel de calcul numérique.

## 7.1 Approche géométrique

L'approche géométrique permet de corriger les assemblages suspendus lors de la recherche de contact entre les éléments. Elle évite la traction dans les connexions sous le poids propre de la structure. Elle agit directement sur l'action effectuée par le solveur lors des itérations pour tenir compte des excentricités.

Pour rappel, cette action consiste à déplacer les éléments de façon à ce qu'ils soient en contact. S'ils sont trop proches, ils sont écartés. Par contre, s'ils ne se touchent pas, ils sont rapprochés. Elle est répétée plusieurs fois sur la structure pour tenir compte de l'interdépendance des positions des éléments et chercher la comptabilité géométrique entre les paramètres des modules.

À chaque itération, la distance entre les éléments et leur destination (qui est déterminée lors de la réciprocalisation) est mesurée. Elle est calculée grâce aux points P et Q qui caractérisent le point de contact sur chaque ligne. Ensuite, un vecteur D est tracé entre ces deux points. L'amplitude de ce vecteur est comparée à la somme des rayons. En fonction du résultat, les droites sont soit rapprochées, soit éloignées.

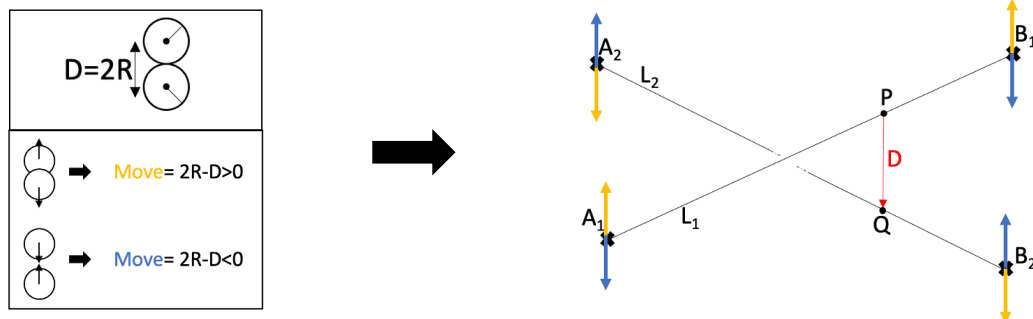


Figure 131 - Prise en compte de la distance entre les éléments

Nous l'avons déjà dit, au deux cas sont possibles niveau des assemblages: soit un élément est suspendu à un autre, soit il est supporté. Pour rappel dans le programme, le vecteur D est toujours défini de P à Q, donc d'un élément vers sa destination.

Nous connaissons l'enveloppe à couvrir. Un vecteur perpendiculaire existe en chaque point de celle-ci, c'est la normale (n) à la surface Figure 132. Dès lors en comparant la direction du vecteur D avec cette normale, nous pouvons identifier la position des éléments.

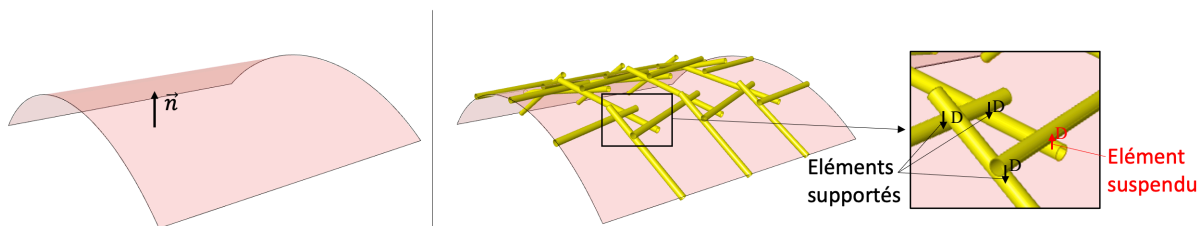


Figure 132 - Comparaison du vecteur D avec le vecteur normal de la surface

Si la direction de D est opposée à la normale, l'assemblage fonctionne par pression de contact. Dans le cas contraire, il est en décollement. A l'aide de la géométrie, nous connaissons donc la position relative des éléments. Si un élément est en dessous de sa destination, intuitivement nous voulons le remonter pour qu'il soit au-dessus de son appui, ce qui permet un assemblage en compression.

Comment fonctionne le programme en pratique ? Lors de chaque itération, il calcule le vecteur D. Ensuite, il est comparé au vecteur normal de la surface grâce à un produit scalaire.

- $\vec{D} \cdot \vec{n} < 0$ , l'assemblage est en compression, le déplacement peut donc être effectué normalement.
- $\vec{D} \cdot \vec{n} > 0$ , l'assemblage est en traction, les éléments sont forcés de se rapprocher.

Lorsqu'un élément est en dessous de sa destination, nous imposons que le seul mouvement possible est de se rapprocher. Le critère ( $D = 2R$ ) ne sera jamais respecté dans cette position. Il va donc remonter jusqu'à se trouver au-dessus de sa destination. Il sera ensuite déplacé dans cette position de façon à satisfaire l'excentricité requise au niveau du contact (Figure 133).

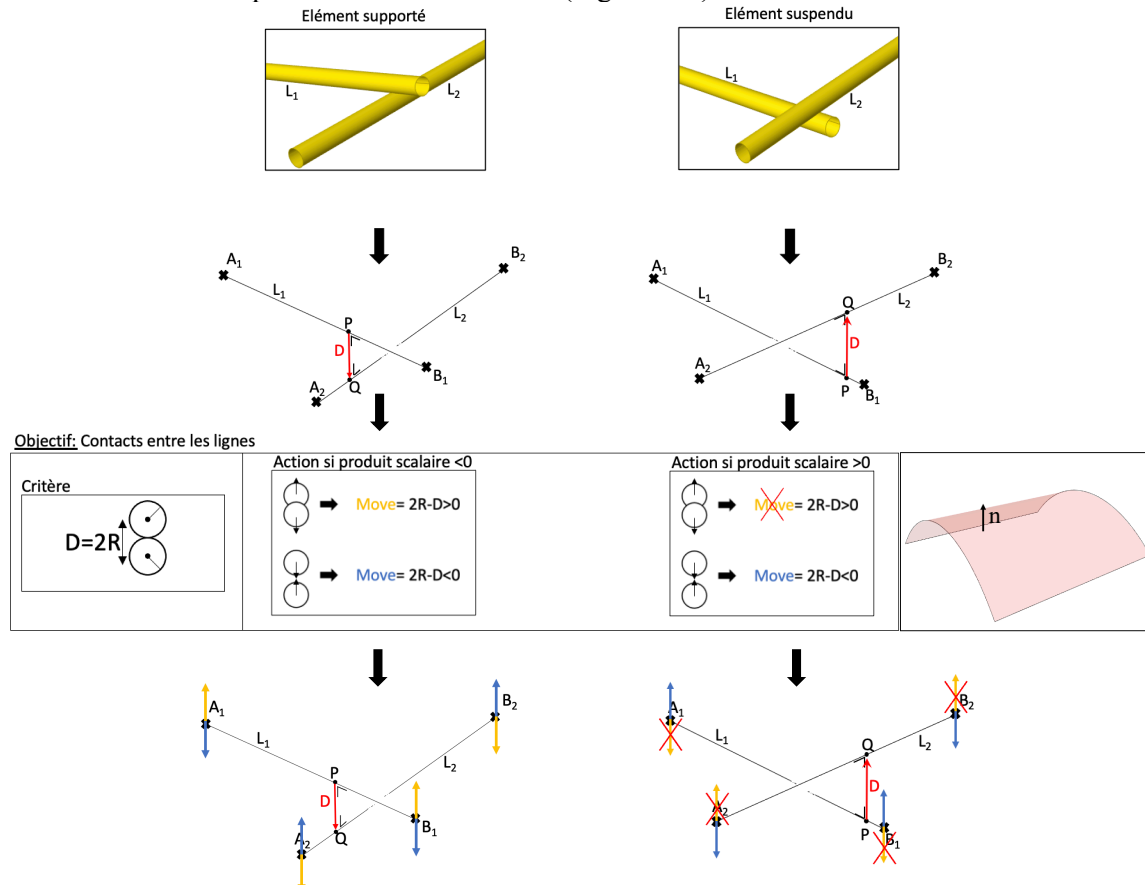


Figure 133 – Modification de l'objectif pour tenir compte des assemblages en traction

Un dernier point reste à aborder. Une structure uniquement constituée d'assemblage fonctionnant par pression de contact n'est pas toujours réalisable. Le programme doit donc déterminer si c'est possible ou non et agir en fonction. En effet, il est logiquement plus intéressant qu'il génère une structure constructible mais qui comporte des connecteurs métalliques, plutôt qu'une forme qui n'est pas réalisable.

En pratique, pour minimiser les connecteurs métalliques, le programme cherche une première solution en appliquant le processus de la Figure 133. Nous cherchons une configuration satisfaisant les contacts et dont les assemblages sont comprimés. Si le solveur n'a pas convergé après un certain nombre d'itérations prédéfini dans les paramètres, le programme recommence l'opération en accordant moins d'importance à l'action en cas d'éléments suspendus. L'importance des actions a été expliquée dans la section 6.1. Diminuer cette valeur accorde la priorité au déplacement des éléments de façon à satisfaire simplement le contact entre eux plutôt qu'aux assemblages suspendus (Figure 134). Ceci permet de trouver une solution constructible en tolérant certains assemblages en traction. Si toutefois, aucune solution n'existe réellement, le programme applique le processus classique. (Figure 131) Ceci permet de, trouver une solution malgré tout.

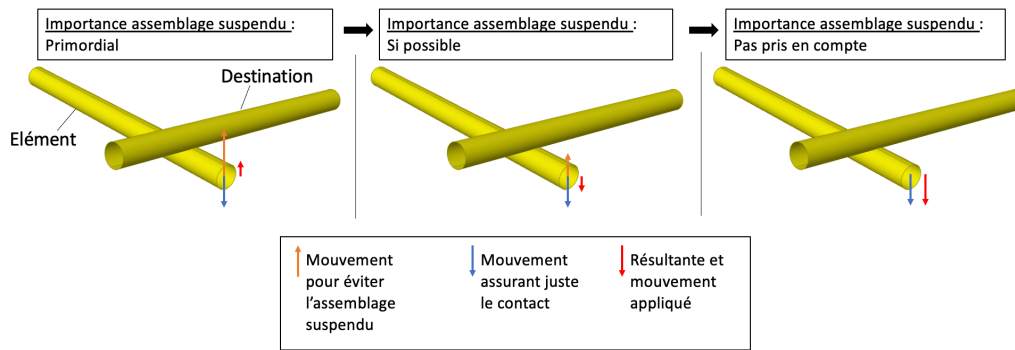


Figure 134 - Diminution de l'importance accordée aux assemblages suspendus

La prise en compte des assemblages en traction de façon géométrique est donc faite en comparant la position des éléments par rapport à la surface. Si un de ceux-ci est en dessous de sa destination, l'élément est remonté. Lorsque la connexion est en compression, le mouvement est appliqué normalement (Figure 131). Cependant, une configuration comportant seulement des assemblages fonctionnant par pression de contact n'est pas toujours possible. Dans ce cas de figure, l'importance accordée au rapprochement des éléments est progressivement diminuée, de façon à trouver une forme constructible.

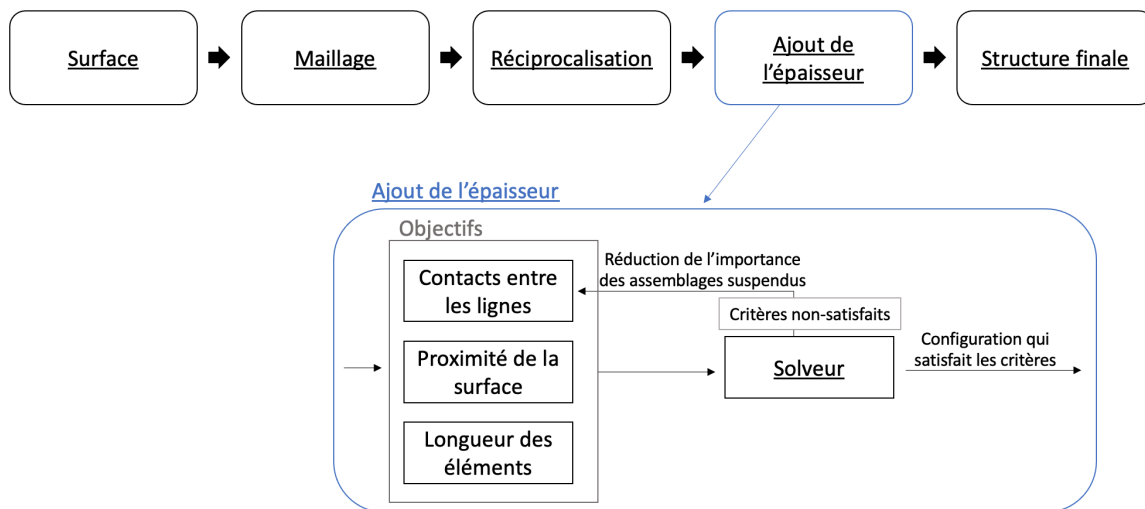


Figure 135 - Approche géométrique pour tenir compte des assemblages suspendus

## 7.2 Approche numérique

Cette seconde approche tient compte des assemblages en traction à l'aide d'un logiciel de calcul numérique. Son avantage est qu'elle permet d'étudier le comportement d'une structure soumise à un cas de charge et identifie ensuite les connexions en décollement.

Pour cela, une première structure est générée à l'aide du programme. Elle peut être conçue en tenant compte des assemblages suspendus grâce à l'approche géométrique ou non. Ensuite, son comportement est analysé lorsqu'elle est soumise à un cas de charge. Grâce à cela, les connexions en traction sont repérées pour ce chargement. Enfin, la position des éléments dans la structure est modifiée sur base de cette information. Si la solution n'existe pas, un paramètre peut être adapté, de façon à obtenir une forme constructible et ne possédant pas de pièces métalliques sous le cas de charge étudié.

Nous l'avons dit, l'intérêt principal de cette seconde méthode est de pouvoir tenir compte d'un cas de charge dans la réalisation de la forme de la structure. Par exemple, en cas de vent sur un flanc, les éléments et les assemblages de celui-ci seront en surpression. Par contre, le côté opposé sera lui en sous-pression et les éléments auront tendance à se décoller les uns des autres. Si un chargement asymétrique

est fréquent, il est intéressant d'en tenir compte dans le positionnement des éléments de la structure afin d'anticiper les connexions qui seront en décollement.

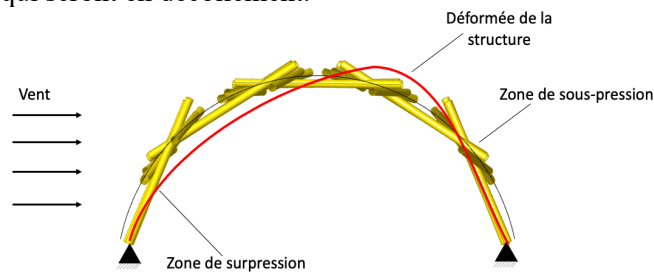


Figure 136 - Effet du vent sur une structure

L'analyse de la structure est faite à l'aide du plug-in *Karamba* de *Grasshopper*. C'est un logiciel permettant de calculer numériquement une structure grâce aux éléments finis, comme de nombreux autres (Scia, Robot...). Son avantage est qu'il est intégré dans l'environnement de *Grasshopper*, ce qui permet de l'inclure dans un programme paramétrique et de visualiser le résultat sur l'interface *Rhinoceros*. Dans notre cas, nous fournissons directement la structure générée par notre programme à *Karamba*, ensuite nous venons modéliser un cas des charges (poids propre, charge de neige, charge de vent...). Il en résulte une analyse des efforts internes ou des déplacements des éléments et des assemblages de la structure. Ceci permet de déterminer les connecteurs en traction dans un cas spécifique de chargement.

Lorsque nous connaissons les assemblages en décollement sous le chargement qui nous intéresse, la position des éléments est changée. A première vue, il suffit de déplacer certains éléments de façon à éviter cette traction, les autres étant déjà dans la bonne position. Cependant, la modification de la configuration d'un module a un impact sur l'ensemble de la structure. Il faut donc déplacer tous les éléments pour trouver l'organisation des positions qui satisfait les contacts entre ceux-ci. Pour cela, nous utilisons à nouveau le solveur pour itérer sur la forme de la structure. Le procédé est illustré Figure 137.

En pratique, la position relative des éléments est mémorisée grâce à la direction du vecteur  $\vec{D}$ , qui décrit leur point de contact. Celui-ci va toujours d'un élément vers sa destination. Si lors du calcul des efforts internes, *Karamba* détecte de la traction dans un assemblage, la direction retenue est inversée. La position mémorisée sera donc celle qui permet une connexion en compression. Cette information est fournie à l'objectif, qui dicte le mouvement opéré par le solveur.

Ensuite, l'action effectuée par le solveur est modifiée pour tenir compte de l'information de *Karamba*. A présent, elle cherche à trouver une configuration qui satisfait le contact entre les éléments tout en respectant la compression dans les assemblages. Deux cas sont possibles :

- L'élément doit être au-dessus de sa destination pour que leur connexion soit en compression, donc l'action cherche  $\vec{D} \cdot \vec{n} < 0$ .
- L'élément doit être en dessous de sa destination pour que leur connexion soit en compression, donc l'action cherche  $\vec{D} \cdot \vec{n} > 0$ .

Sur base du résultat, le mouvement est modifié de façon similaire à l'approche géométrique. Si les éléments sont mal positionnés, ils sont forcés de se rapprocher. Si au contraire, leurs positions sont correctes, un contact est simplement recherché, le déplacement est le même que présenté dans la section 6.2.



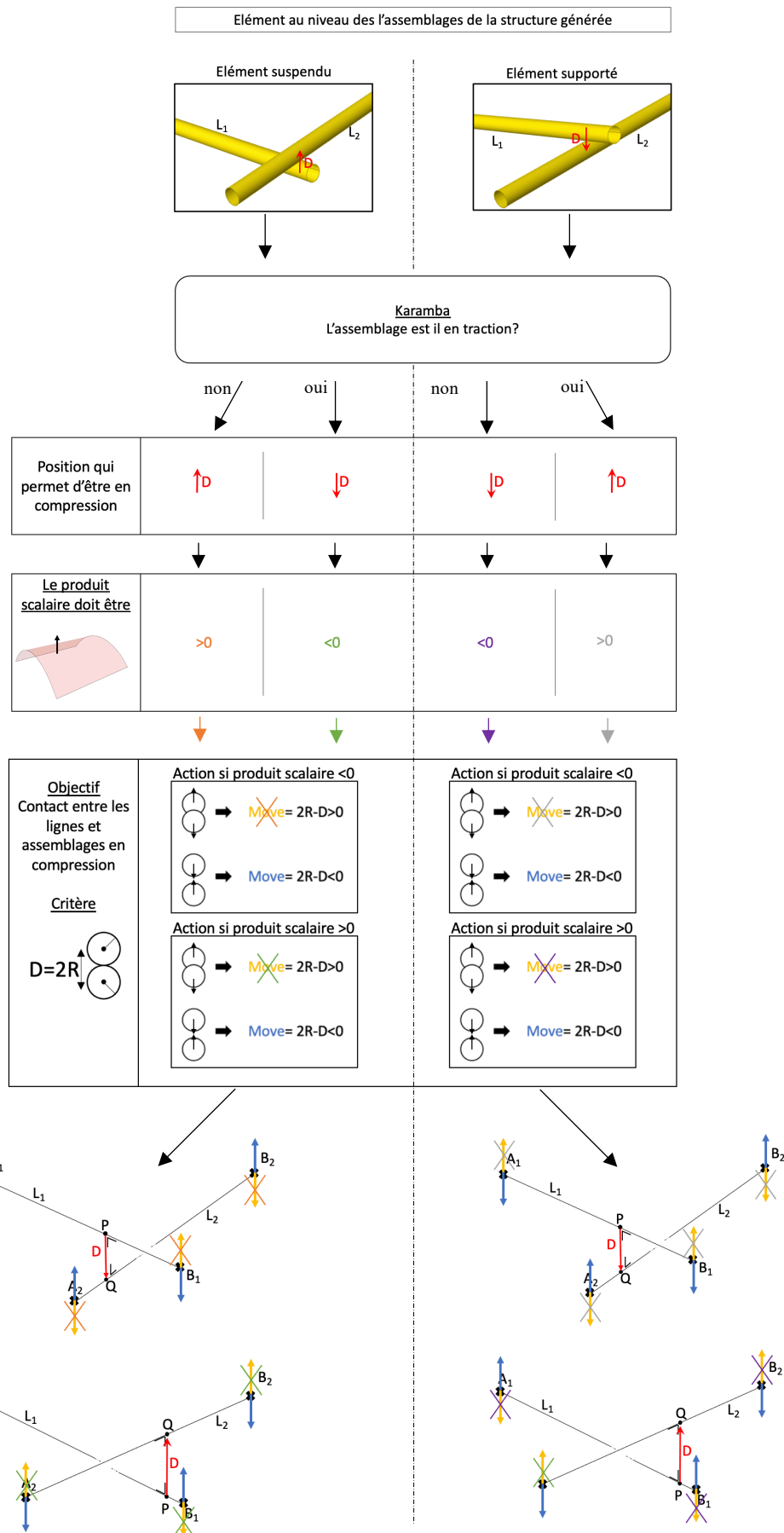


Figure 137 - Prise en compte de la traction dans les assemblages à l'aide de Karamba

A nouveau, le solveur ne converge pas toujours vers une configuration dans laquelle les assemblages fonctionnent tous par pression de contact. Dans ce cas, il advient de modifier les paramètres des modules de la structure. Une option a été créée dans le programme. Elle allonge automatiquement la longueur des éléments de façon à trouver une solution. Cependant, l'utilisateur du programme peut également manuellement changer les paramètres, tels que la longueur d'engagement des modules, le nombre de modules ou le rayon des éléments, pour obtenir une configuration qui répond à ses attentes.

Cette seconde approche permet de tenir compte des assemblages en traction en fonction d'un cas de charge spécifique. Son fonctionnement se base sur le calcul des efforts internes dans les connexions déterminées à l'aide du plug-in *Karamba* de *Grasshopper*. Le processus consiste à retenir la position relative des éléments de façon à ce que les assemblages soient en compression. Ensuite, ces informations permettent de modifier l'action effectuée par le solveur. Finalement, si cette configuration n'existe pas, le programme allonge les éléments afin de fournir une solution. Si cette dernière opération ne répond pas aux attentes du concepteur, il peut également changer les paramètres d'entrée du programme afin d'obtenir une forme qui lui convient.

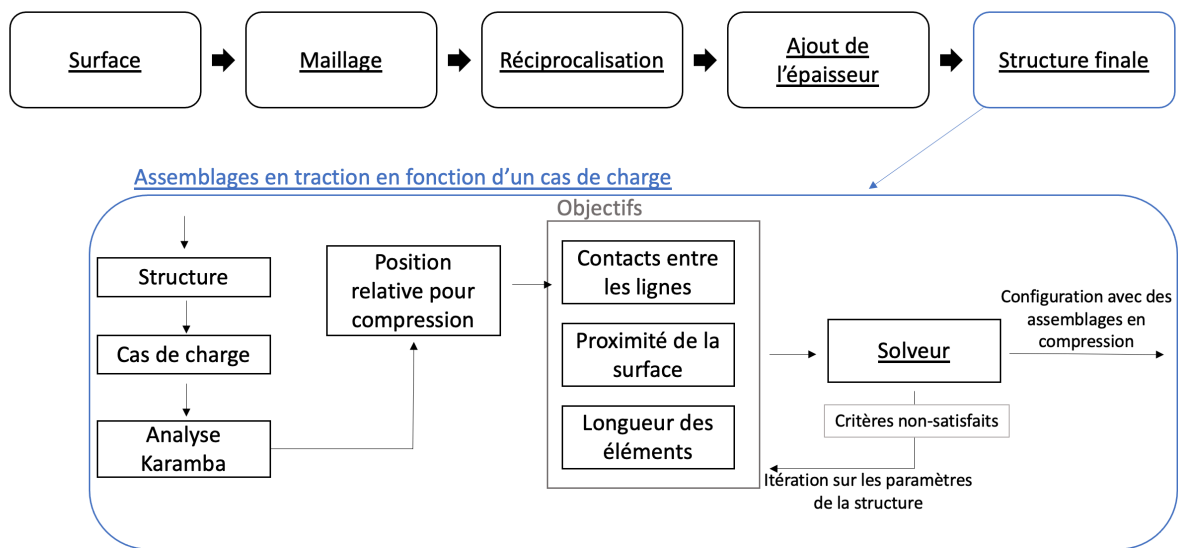


Figure 138 - Approche à l'aide d'un logiciel de Karamba pour tenir compte des assemblages en traction

### 7.3 Conclusion

Jusqu'à présent, nous étions en mesure de concevoir une structure réciproque sur une surface, nous n'avions pas accordé d'importance aux assemblages hormis le fait que les éléments soient en contact. Dans cette dernière étape du programme que nous avons développé, l'attention est portée sur les assemblages en décollement. Lorsqu'un élément est supporté par sa destination, l'assemblage peut fonctionner par pression de contact. Il peut uniquement être constitué de bois. Cependant, si un élément est suspendu à sa destination, il a tendance à se séparer de celle-ci et la connexion est dite en traction. Dans ce cas, une pièce, généralement métallique, doit être ajoutée. Cette dernière est onéreuse et a un impact conséquent sur le coût de la structure. Nous cherchons à minimiser leur présence. Toutefois, une configuration ne comportant aucun assemblage en décollement n'est pas toujours réalisable. Le concepteur est alors invité à modifier les paramètres d'entrée du programme pour obtenir ce résultat.

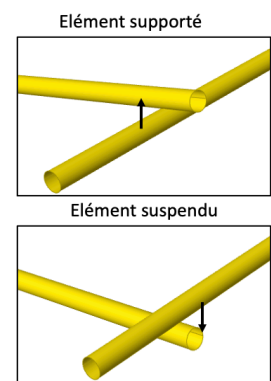


Figure 139 - Postions relatives des éléments dans une structure

Pour tenir compte des assemblages en traction, deux approches ont été développées.

- L'approche géométrique
- L'approche numérique à l'aide d'un logiciel de calcul

La première approche agit directement au moment de la recherche de contact entre les éléments. Elle permet de limiter le nombre d'assemblages en traction sous le poids propre de la structure. Elle consiste à comparer la position relative des éléments par rapport à la surface. Si un de ceux-ci est suspendu, il est forcé de se rapprocher de sa destination jusqu'à ce qu'il soit au-dessus d'elle. Dans le cas où le solveur ne converge pas, l'importance accordée aux assemblages en traction est diminuée de façon à trouver une solution.

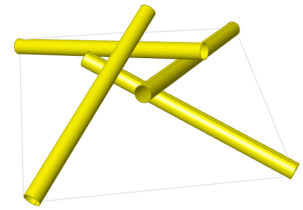


Figure 140 - Module comportant un élément suspendu

La deuxième approche permet de tenir compte d'un chargement sur la structure. Elle intervient après la génération d'une première configuration. Celle-ci est fournie au logiciel *Karamba* qui calcule ses efforts internes. La position des éléments est ensuite modifiée sur base des assemblages calculés en traction. Dans ce cas-ci, le programme modifie un de ses paramètres d'entrée si le solveur ne converge pas.

Enfin, ces deux approches sont complémentaires. La première permet de minimiser les connecteurs métalliques sous le poids propre de la structure et la seconde de tenir compte d'éventuels chargements qui s'appliquent sur celle-ci. De plus, dans les deux cas, si la solution ne satisfait pas l'utilisateur, il est en mesure de modifier les paramètres d'entrée du programme (nombre de modules, longueur d'engagement, rayon des éléments...) de façon à trouver une configuration qui lui convient.

Le programme est à présent en mesure de trouver la forme d'une structure réciproque sur une surface, répondant à des critères spécifiés par l'utilisateur, et minimisant le nombre d'assemblages métalliques nécessaires pour la réalisation de celle-ci.

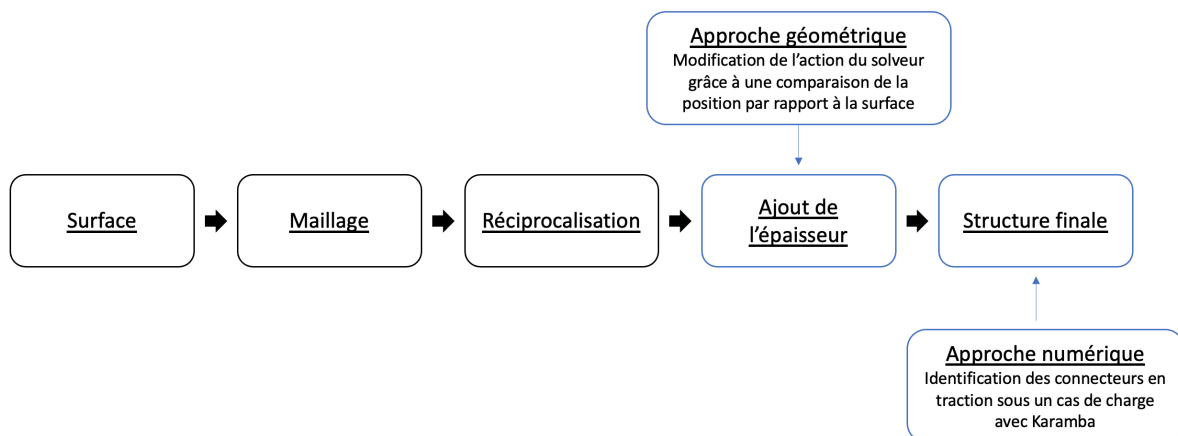
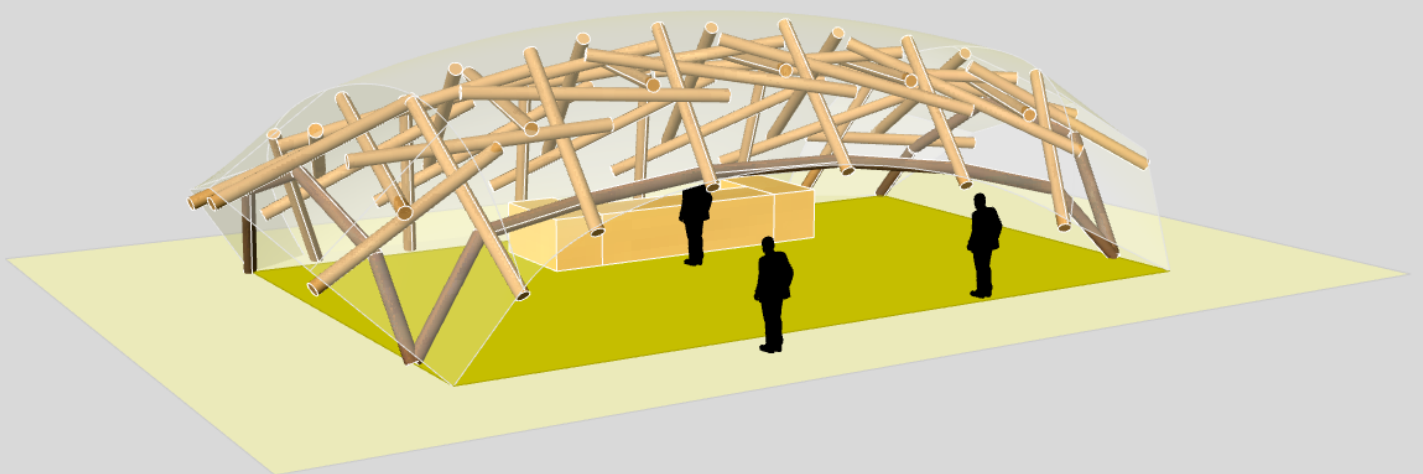


Figure 141 - Prise en compte des assemblages en traction

# Application du programme



## 8 Application du programme

Au cours des chapitres précédents, nous avons étudié en profondeur le fonctionnement du programme qui a été créé. Il est constitué de trois grandes étapes (maillage, réciprocalisation, ajout de l'épaisseur) que nous avons détaillées. Ensuite, nous nous sommes intéressés aux assemblages en décollement afin d'éviter au maximum l'utilisation de connecteurs métalliques. Le programme étant expliqué, dans ce chapitre nous présenterons des exemples d'application concrète de celui-ci.

Dans un premier temps, nous illustrerons tout le processus interne du programme à l'aide d'une structure fictive que nous allons créer, puis nous présenterons d'autres structures qu'il est possible de générer sur différents types de surfaces.

### 8.1 Illustration du processus interne

Dans cette section, nous allons parcourir tout le fonctionnement du programme pour créer une structure fictive. Imaginons un restaurateur qui désire ouvrir un bar éphémère au bord du lac de Louvain-la-Neuve. Afin de profiter des beaux jours de l'été, il désire que son établissement soit en plein air. Toutefois, pour être à l'abri en cas de pluie, il veut également avoir une zone couverte de  $150\text{m}^2$  et une hauteur au centre de 5m. Il fait donc part de ses critères à un architecte, qui lui dessine une enveloppe pour abriter sa clientèle (Figure 142). Enfin, séduit par le caractère esthétique des structures réciproques, le client demande que son bar soit construit dans une telle structure.

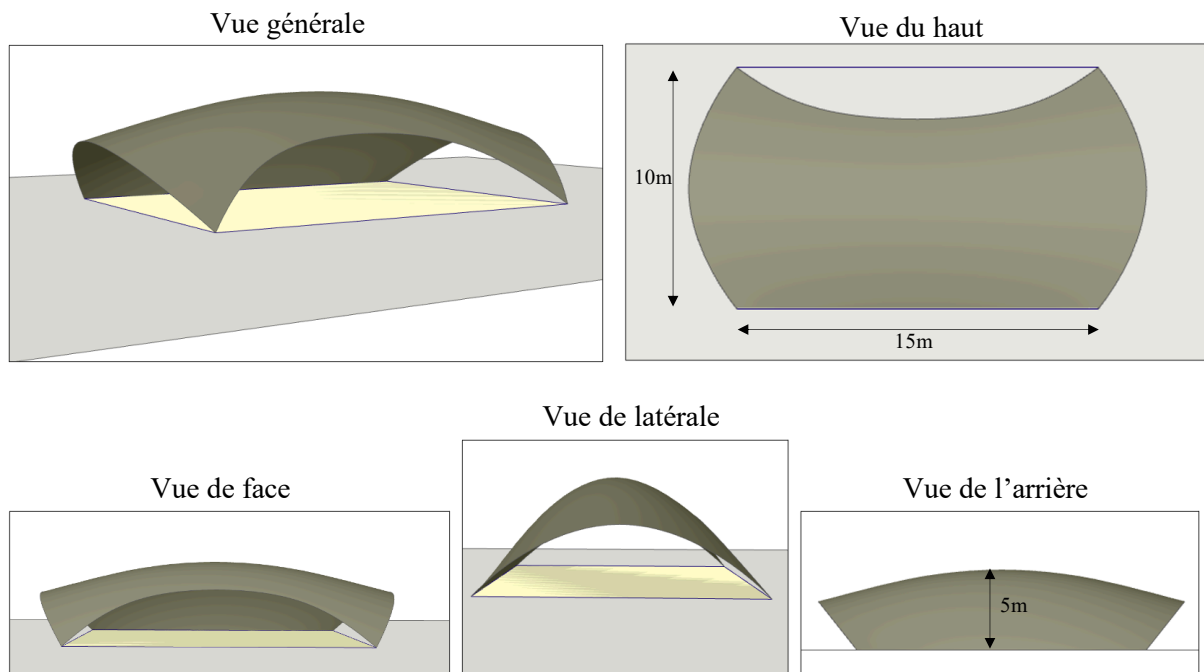


Figure 142 - Enveloppe pour créer sur laquelle une structure réciproque va être créée

Pour répondre à la demande du client de concevoir la structure, l'architecte fait appel à notre programme. Il désire dans un premier temps réaliser trois modules sur la petite distance de la surface et quatre dans l'autre, soit douze modules en tout. Cette étape se traduit dans le programme par la création d'un maillage avec 4 faces dans la direction U et 5 dans la direction V. La surface est donc approximée par respectivement quatre et cinq plans dans ces deux directions. Puis les lignes du maillage sont dessinées sur base des nœuds et des faces de celui-ci.

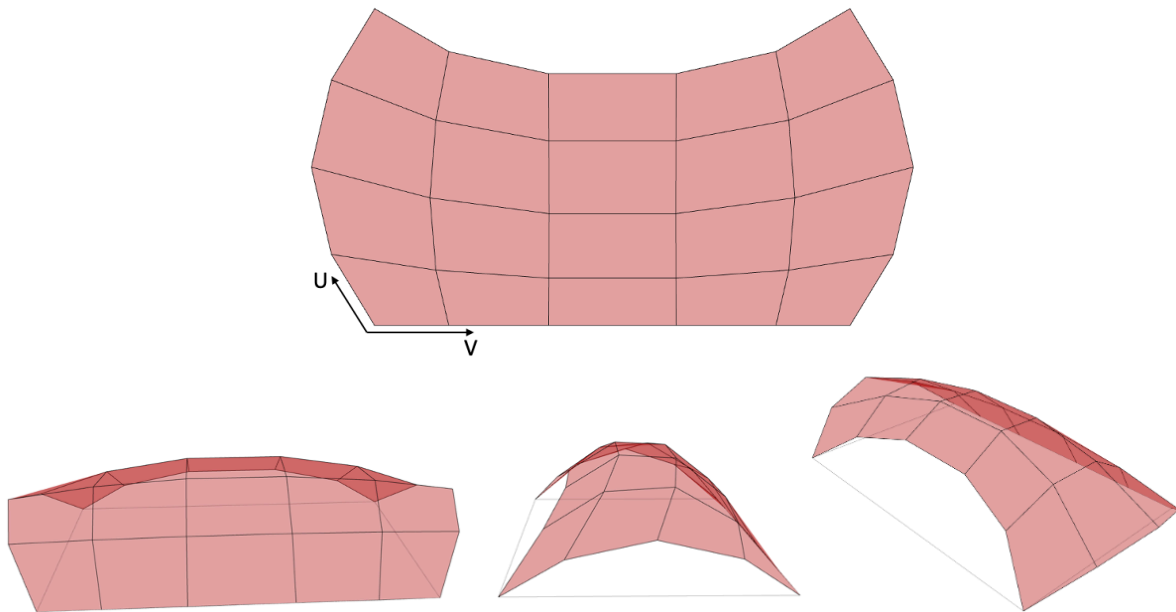


Figure 143 - Approximation de la surface par le maillage

Ensuite, il lui est demandé de fixer la longueur d'engagement des modules. Il décide, dans un premier temps, d'imposer un ratio de 8% de la longueur des éléments ( $L$ ). Il fixe également une distance de 30cm, au-delà du point de contact, pour placer les assemblages entre les grumes. Les éléments viendront donc prendre appui à une distance d'environ  $0,08L$  à partir de l'extrémité, sur leurs destinations. Le terme 'environ' est employé, car la distance est légèrement modifiée lors de la recherche de contact entre les éléments afin de respecter la compatibilité entre les paramètres des modules.

L'étape suivante dans le programme est la réciprocalisation des lignes du maillage. C'est lors de celle-ci que les modules sont créés. Pour rappel, la première phase est de trouver les points de contact dans le maillage, ce qui permet de connaître les droites qui constitueront chaque module. Ensuite, elles sont tournées en direction de leur destination. C'est dans cette phase que la longueur d'engagement est utilisée. Finalement, les lignes sont allongées pour assurer un contact vertical entre elles et la longueur excédentaire est ajoutée. Afin de permettre aux assemblages de ne pas être au bord des éléments.

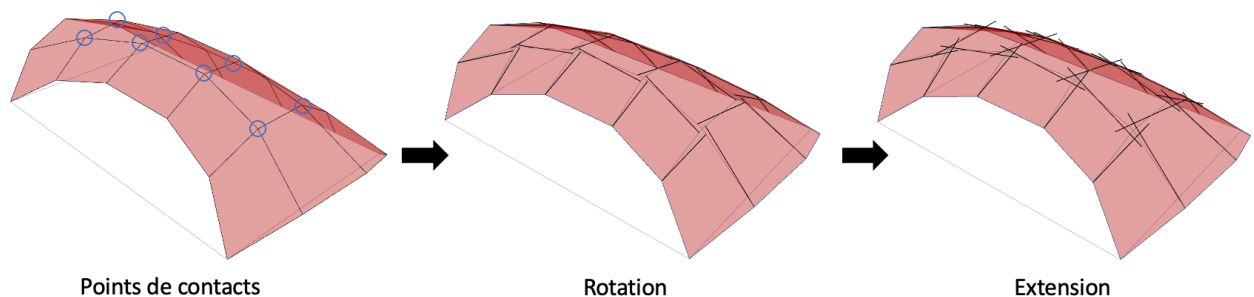


Figure 144 - Réciprocalisation du maillage

La dernière étape est l'ajout de l'épaisseur des éléments. Pour effectuer ce projet, l'architecte doit spécifier le rayon des éléments avec lesquels il désire construire sa structure. Il choisit des troncs dont le diamètre de la partie intérieure est de 25 cm. Il fournit cette dimension au programme chargé d'itérer sur la position des éléments. Cette opération permet de trouver une configuration qui satisfait les interactions entre les paramètres des modules ainsi que les contacts entre les éléments.

Le client désire une structure uniquement constituée de bois. L'architecte cherche donc une configuration dans laquelle aucun assemblage métallique n'est nécessaire à la stabilité de l'édifice. Il veut tenir compte de ce critère sous le poids propre des éléments. Dans le programme, l'approche

géométrique permet de minimiser le nombre de connexions en traction lors de la génération de la structure. Elle est utilisée dans ce cas-ci.

Dans cette configuration, l'architecte réalise l'impossibilité de n'avoir que des assemblages en compression. ( a) Figure 145) Il décide d'augmenter la longueur d'engagement à 14%. Il remarque également que certains éléments de la structure qu'il vient de générer mesurent presque 6m. Il n'en possède pas en stock. Il augmente donc le nombre de modules dans la direction V à six ( sept faces dans cette direction), pour disposer d'éléments dont la longueur est inférieure à 5m.

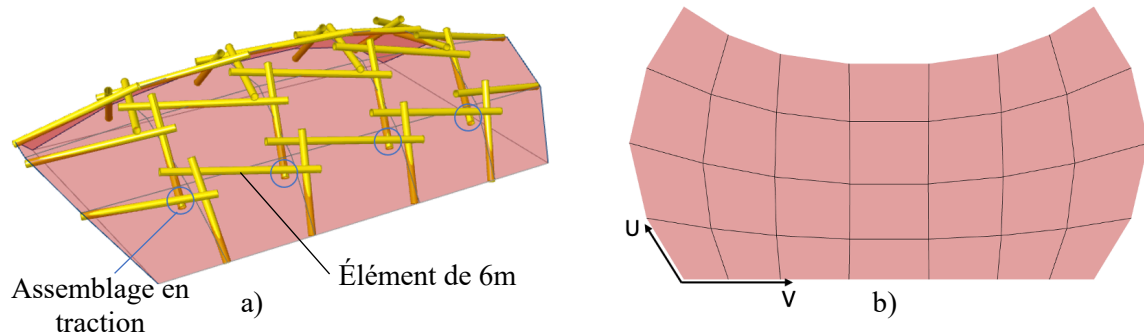


Figure 145 - a) Structure avec des assemblages en traction - b) Nouveau maillage pour augmenter le nombre de modules dans la direction V

Avec ces derniers paramètres, une structure sans assemblages en décollement est réalisable. De plus, la longueur des éléments correspond à ce qu'il a en stock. Il est donc satisfait du résultat. Afin d'éviter de placer des colonnes intermédiaires, il propose au client d'utiliser des arcs constitués de tronc, pour supporter les appuis de la structure réciproque au-dessus des ouvertures de la surface. Enfin, il prévoit de tendre une couverture textile sur la structure pour abriter les clients des intempéries. Le restaurateur approuve ces idées et fournit le projet à un ingénieur pour vérifier la stabilité de celle-ci.

Le projet étant éphémère et prenant place en été, l'ingénieur prend en compte trois charges sur la structure. Le poids propre des grumes, le poids de la toile textile et l'effet du vent. Les troncs dont il dispose sont des résineux de classe C24. Ensuite, il vérifie la résistance des éléments. La structure étant formée en trois dimensions, il s'intéresse aux efforts en flexion déviée ainsi qu'à l'effort tranchant. Dans un premier temps, le taux de travail de certains éléments est supérieur à 1. Il décide donc d'augmenter leur diamètre à 26cm. Le programme génère rapidement une nouvelle forme, dont les assemblages sont tous en compression. Cette fois-ci, l'élément le plus sollicité de la structure a un taux de travail de 0,92. Il s'intéresse également à la flèche sous la charge permanente : elle est de 2,6cm. Il vérifie une dernière valeur : la différence de variation de flèche lorsque la structure est soumise au vent, afin de s'assurer que la toile soit en mesure de résister au mouvement. Celle-ci est de 3,8cm, une déformation que la couverture supporte. Il est satisfait du résultat et retourne vers le restaurateur. (La démarche des calculs se trouve en annexe)

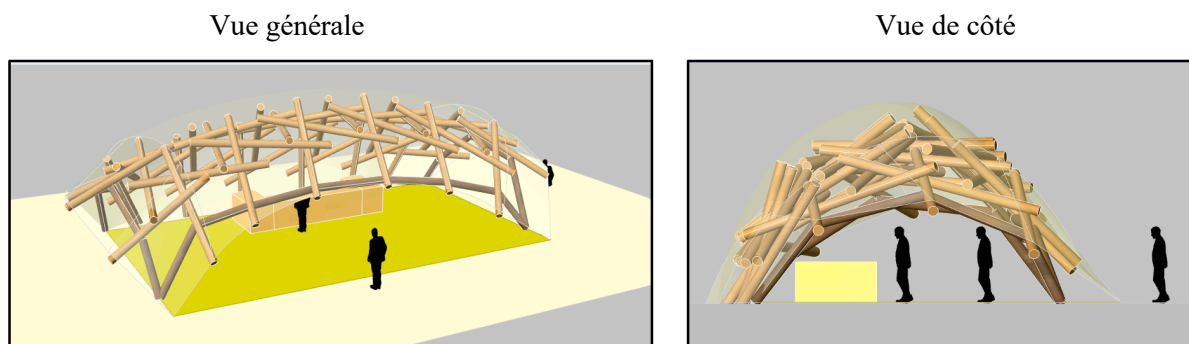


Figure 146 - Structure fictive réalisée à l'aide de notre programme



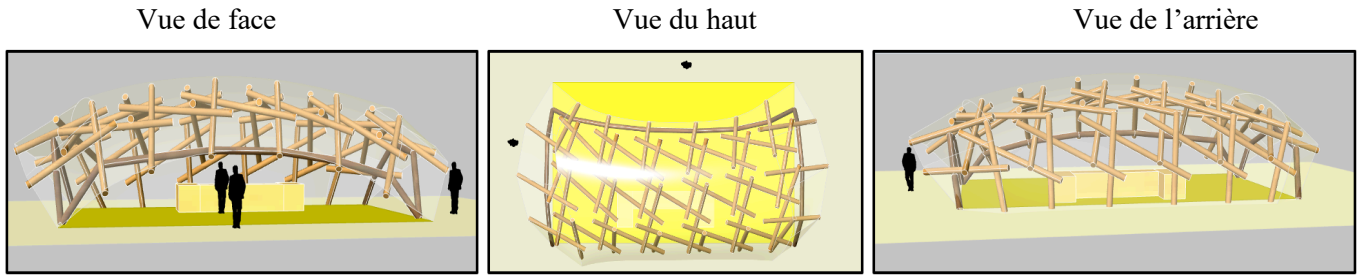


Figure 147 - Structure fictive réalisé à l'aide de notre programme

Le restaurateur est ravi du résultat et remercie les deux intervenants. Il se prépare à construire son bar éphémère. Avant de réellement construire la structure, il est important de rappeler que les éléments modélisés par le programme représente la partie interne des grumes. En pratique ils seront plus épais afin de permettre de tailler les assemblages sur les troncs.

## 8.2 Exemple de structures réalisées avec le programme

Nous avons détaillé le fonctionnement du programme pour une structure. Toutefois, une infinité de formes sont réalisables. Nous présentons ci-dessous d'autres formes réalisées avec notre programme à partir de surfaces.

Parmi les configurations présentées, certaines ont des assemblages suspendus. Lorsque ce n'est pas possible pour les paramètres voulus, le programme génère une structure dont certaines connexions sont en décollement.

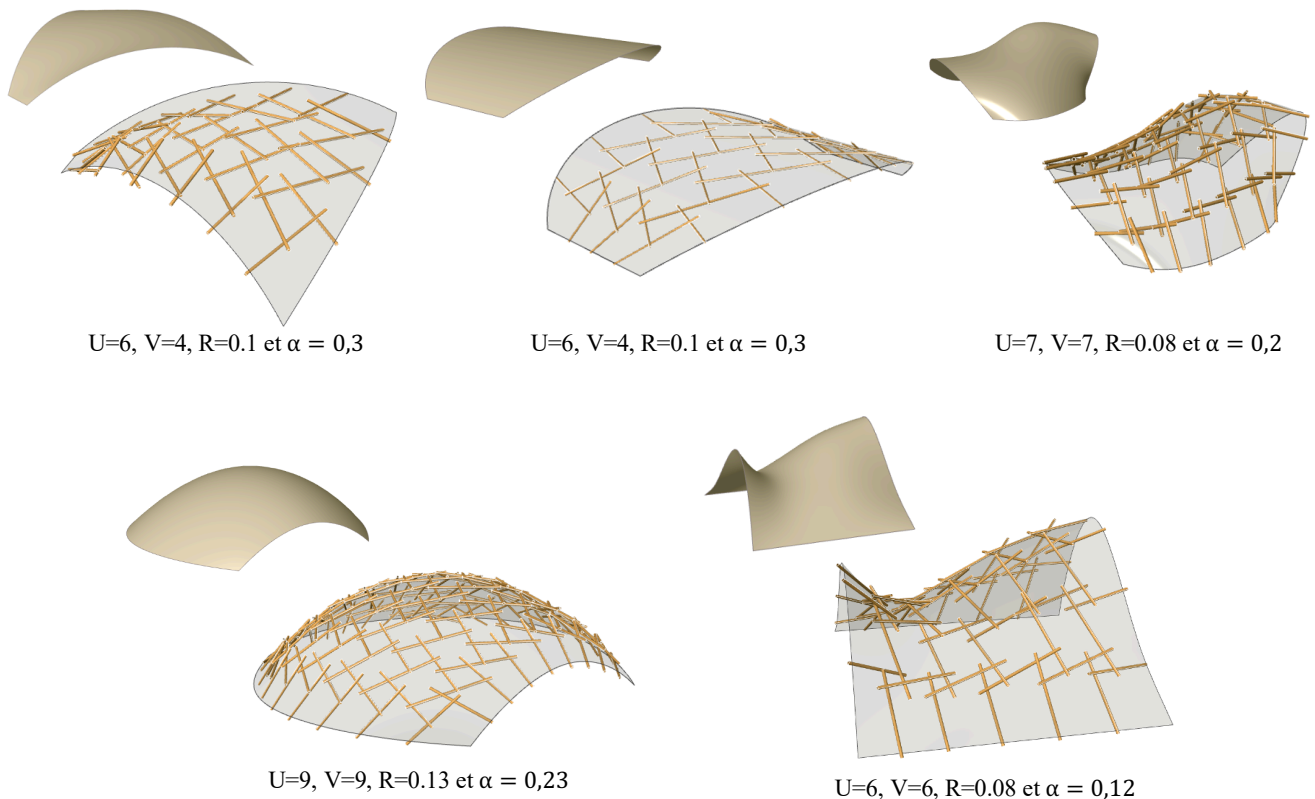


Figure 148 - Variété de structure produite avec le programme (U= nombre de maille en U, V=nombre de maille en V, R=rayon des éléments[cm],  $\alpha * L$ = longueur d'engagement avec L la longueur des éléments)

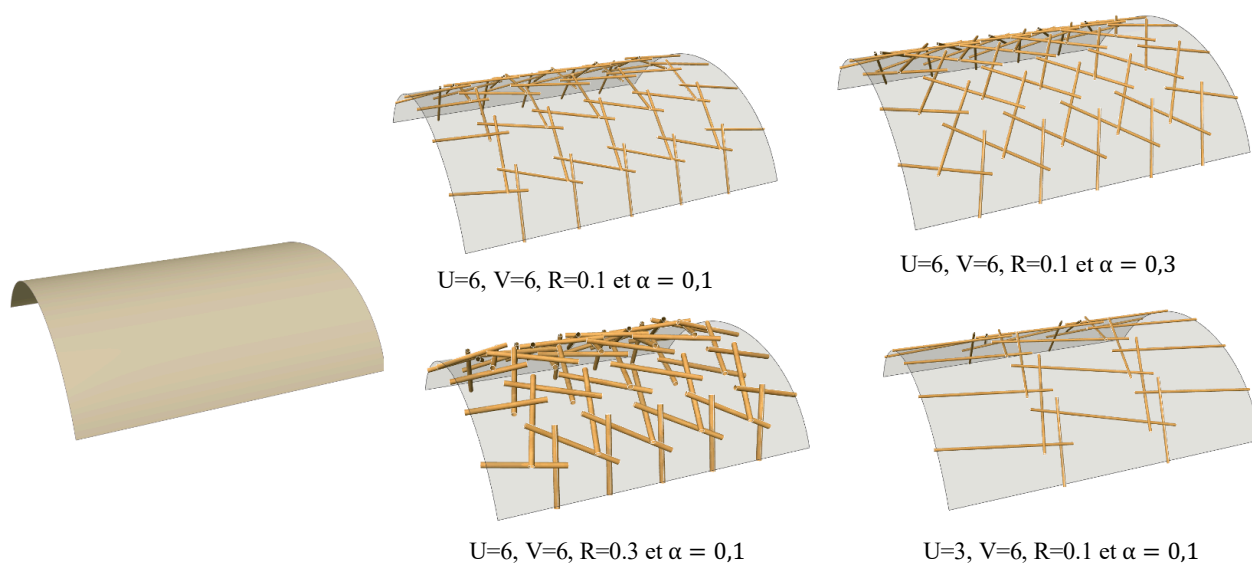


Figure 149 - Variation des paramètres du programme pour une surface

# Progrès futurs pour le programme

## 9 Progrès futurs pour le programme

Comme nous l'a montré la section précédente, le programme que nous avons développé permet d'automatiser la conception de structures réciproques recouvrant une grande variété de formes. Au cours de la réalisation, nous avons toutefois pensé à des options supplémentaires afin de le rendre plus robuste et diversifier le nombre de formes qu'il peut concevoir. Cette section est consacrée à ce qu'il serait intéressant d'implémenter à l'avenir, pour universaliser l'utilisation du programme et couvrir une variété plus large de demandes de la part des clients.

### 9.1 Forme du maillage

La première étape de la conception de la structure est la création d'un maillage. Nous avons étudié leur fonctionnement ainsi que leurs avantages. Cette structure de données est la base de la suite du processus. La position des nœuds et la forme de leurs faces définissent respectivement l'emplacement et le nombre d'éléments qui constituent chaque module. Dans ce travail, pour avoir un contrôle total sur la conception, nous avons développé un plug-in *Grasshopper* permettant de produire un maillage carré. Les structures formées sont donc constituées de configuration élémentaire à quatre éléments.

Pour augmenter la variété de formes proposées au client, il serait intéressant de pouvoir employer des modules composés de trois, cinq ou six éléments. Par ailleurs, nous avons utilisé uniquement des modules de forme identique. Une structure composée de configurations mixtes peut être attirante d'un point de vue esthétique. Enfin, en cas de géométrie complexe, il peut être intéressant d'augmenter localement le nombre de modules dans la structure (par exemple aux endroits de fortes courbures). Tous ces aspects dépendent du type de maillage utilisé au début du processus de conception. Pour implémenter ces formes au programme, il faut concevoir d'autres plug-in capables de créer des grilles différentes tout en gardant le contrôle sur son origine et la direction de ses axes. En pratique, il faut changer la position des nœuds et la relation qui permet de créer les faces de ceux-ci. Une nouvelle recherche pourrait conduire à développer ces nouvelles formes afin de pouvoir complexifier les formes des structures produites.

### 9.2 Développement d'un solveur

Lors de l'étape qui ajoute l'épaisseur des éléments et tient compte des interactions entre les différents modules de la structure, nous utilisons un solveur. Il provient du plug-in *Kangaroo* de *Grasshopper*. Bien que celui-ci fonctionne bien et réponde à nos attentes, c'est une boîte noire qui ne nous appartient pas. Il est indispensable au déroulement de notre programme. Dès lors, il serait intéressant de concevoir notre propre solveur, afin d'avoir un contrôle sur son fonctionnement et de ne pas dépendre d'un outil externe. Un tel développement est cependant complexe et nécessite de nombreuses recherches.

### 9.3 Efforts internes dans les éléments

Le programme que nous avons développé tient compte des assemblages en décollement, dans ce cas il modifie la longueur des éléments afin d'obtenir une forme dont les connexions fonctionnent par pression de contact. Toutefois, les efforts internes dans les éléments ne sont pas automatiquement pris en compte. La structure est réalisable (le contact au niveau de chaque connexion est assuré), mais elle nécessite des analyses ultérieures pour vérifier sa déformation à l'ELS ainsi que la résistance de ses éléments à l'ELU. Si ces critères ne sont pas respectés, il faut manuellement modifier les paramètres du programme pour trouver une configuration qui convient.

Il serait intéressant de tenir compte du comportement de la structure directement dans sa recherche de forme, notamment en changeant les paramètres des modules si les critères ne sont pas satisfaits. Par exemple en réduisant automatiquement la longueur des éléments si ses contraintes sont trop grandes. Il

serait également possible d'implémenter la résistance des assemblages dans le programme de façon à en tenir compte dans la confection de la structure.

#### 9.4 Élément courbe

Le cadre général de ce mémoire a pour objectif de construire avec des troncs bruts. Or, nous savons que par nature, ceux-ci ont des formes relativement aléatoires. Tout au long de ce travail, nous nous sommes concentrés sur la création d'une structure réciproque avec des éléments rectilignes. Il serait à présent très intéressant de généraliser les étapes du programme à des courbes, qui représentent les axes centraux des grumes qui seront utilisées pour la construction de la structure. Ce travail risque cependant d'être particulièrement complexe.

Une première option serait d'identifier les axes centraux des troncs que nous avons à disposition pour la construction. Ensuite, utiliser ceux-ci pour concevoir la structure à l'aide du programme. Si nous voulons exploiter des courbes dès le début du processus, il faut créer un maillage qui en est composé. Cependant, l'approximation de la surface fournie par le client risque d'être plus difficile. Au niveau de la réciprocalisation et de la recherche de contact, les éléments courbes ajoutent un paramètre (la forme des lignes) dont il faut tenir compte dans les interactions entre les modules. Cela qui complexifie les tâches.

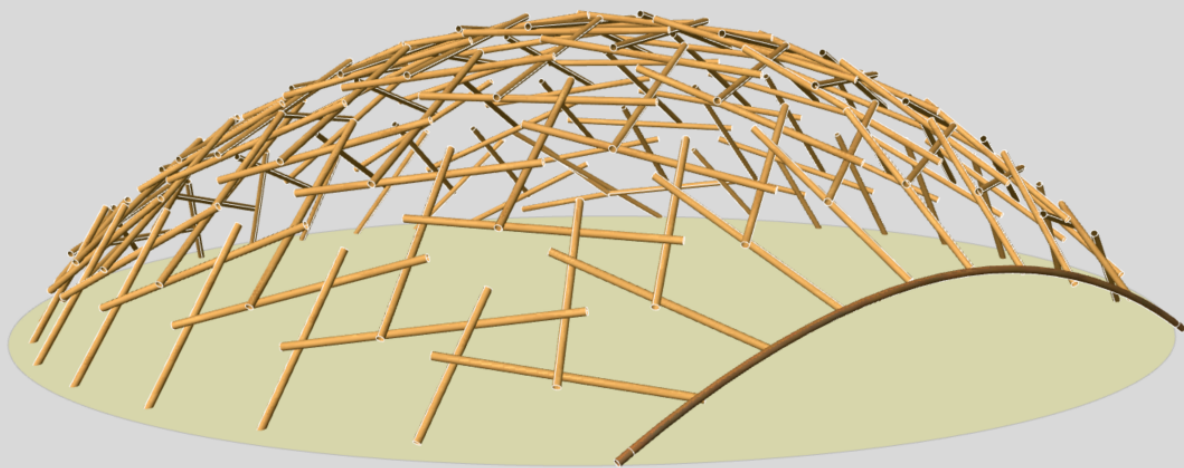
Une autre solution, plus réaliste, serait de générer une structure avec des éléments rectilignes dans un premier temps. Ensuite, nous pourrions scanner les troncs dont nous disposons afin d'identifier leurs axes centraux. Puis, il faudrait faire correspondre chaque tronc à un élément de la structure. Si toutes les grumes ont un équivalent dans celle-ci alors, nous pouvons passer à sa construction. Sinon, il faut adapter les inputs du programme, par exemple en modifiant la taille de certains éléments pour trouver une correspondance entre les troncs et ceux-ci. Une méthode a été étudiée par M.Larsson, H. Yoshida et T. Igarashi [11].



Figure 150 - Structure conçue par M.Larsson, H. Yoshida et T. Igarashi suite à leur recherche[11]



# Conclusion





## 10 Conclusion

L'objectif de ce mémoire a été d'automatiser la conception de structures réciproques sur une surface 3D tout en minimisant le nombre de connecteurs métalliques présents dans la structure.

Les structures réciproques sont composées de modules s'appuyant les uns sur les autres. Par conséquent, la position de chaque élément dépend de celle de toutes les autres. Le changement d'un paramètre (nombre de modules, longueur d'engagement...) a une répercussion sur l'ensemble de la forme de la structure. Nous avons développé un programme pour tenir compte de ces interactions complexes. Il modélise une structure réciproque sur base de paramètres initiaux fixés par l'utilisateur. Ils sont variables pour s'adapter à une grande diversité de projets.

Notre travail s'est essentiellement déroulé en deux parties. La première fut le développement d'un programme permettant de concevoir une structure réciproque. Dans celle-ci, nous nous sommes uniquement penchés sur la géométrie de ce type de construction. Il a fallu tenir compte des interactions entre les paramètres et s'assurer que les éléments soient en contact les uns avec les autres. Lors de la deuxième partie, nous nous sommes focalisés sur les assemblages de la structure. L'objectif a été de mettre en avant les connexions fonctionnant par pression de contact afin de minimiser les pièces métalliques nécessaires à la stabilité de la construction sous différents cas de charges. En effet, l'utilisation de ce type de pièce augmente considérablement le coût de l'édifice, ce que nous cherchons à éviter.

Notre programme prend comme input une surface à couvrir, définie par l'utilisateur. Ce dernier doit également fixer trois paramètres : le nombre de modules, la longueur d'engagement et une extension supplémentaire pour les éléments. Ils caractérisent la structure modélisée. Ceux-ci peuvent être modifiés à tout moment afin d'adapter la forme générée. Cette conception se déroule en trois étapes dans le programme.

La première étape est la création d'un maillage qui approxime la surface. Il définit le nombre de modules présents dans la structure. Pour avoir un contrôle sur celui-ci, nous avons développé un plug-in *Grasshopper*. Il permet de créer des maillages carrés formant des modules composés de quatre éléments dans la structure.

La seconde étape est la réciprocalisation, elle dicte le sens de rotation et la longueur d'engagement des modules de la structure. Elle transforme les lignes du maillage en leur appliquant une rotation suivie d'une extension. Un autre plug-in de *Grasshopper* a été conçu pour exécuter cette opération. A la suite de cette transformation, une première structure constituée de droites est créée.

La troisième étape consiste à ajouter l'épaisseur des éléments. Elle assure également le contact indispensable avec leurs supports. Ceci se traduit par une modification de la distance qui sépare leurs axes centraux, représentés par les lignes utilisées lors des étapes précédentes. Ils sont progressivement déplacés afin de trouver une position qui respecte les liens entre les paramètres des modules. Dans le programme, nous employons un solveur itératif pour effectuer cette opération. Il applique un mouvement défini par des objectifs que nous lui avons fixés. À la suite de cette étape, une structure réciproque est modélisée. Elle est réalisable en pratique.

En plus de former la structure, ce programme cherche à minimiser le nombre de connecteurs métalliques nécessaire à sa construction. C'est la deuxième partie de notre travail. Nous avons développé deux approches pour répondre à cette demande. La première permet d'avoir les assemblages fonctionnant par pression de contact sous le poids propre de l'édifice. Elle intervient directement lors de la recherche de contact entre les éléments. La seconde, complémentaire, considère un cas de charges spécifiques. Elle consiste à analyser les efforts dans la structure afin de déterminer les connexions en traction et les modifier.

Toutefois, une structure uniquement constituée d'assemblages fonctionnant par pression de contact n'est pas toujours réalisable. Dans ce cas, le programme minimise le nombre de connexions en traction. L'utilisateur peut également changer manuellement les paramètres du programme pour trouver ce qui lui convient.

Enfin, nous avons expérimenté notre programme pour concevoir un cas réel. Ensuite, nous avons dimensionné les grumes à la construction de cet ouvrage. Finalement, nous avons présenté différentes formes et configurations de paramètres avec des exemples de structures.

Grâce à ce mémoire, nous possédons un programme qui conçoit automatiquement une structure réciproque sur une surface 3D. Celui-ci permet également de minimiser le nombre de pièces métalliques nécessaires afin de réduire le coût de sa construction. Ce programme est utilisable sur une grande variété d'enveloppes et facilite la réalisation de nombreux projets. Il modélise une structure en tenant compte de la complexité des interactions entre les éléments des modules. Sa conception paramétrique permet de modifier un paramètre d'entrée si la forme ne convient pas à l'utilisateur. Il permet, par exemple, de générer une structure, d'étudier son comportement et de changer les paramètres pour l'adapter ou la corriger en fonction du résultat.

A présent, prenons du recul sur ce qui a été réalisé. Notre travail s'est concentré sur le développement d'un programme tenant compte de la géométrie de la structure. Cependant, le programme n'assure pas la résistance des éléments aux charges auxquelles ils seront soumis (poids propre, vent, neige...). La réalisation de notre cas réel a nécessité de modifier manuellement les inputs pour obtenir une structure réalisable. Une perspective d'amélioration serait d'implémenter au programme une adaptation automatique de la dimension des éléments suivant leurs efforts internes. Une autre possibilité serait d'optimiser la section et la longueur de certaines grumes en fonction de leurs résistances et de leurs positions dans la structure.

Enfin, un complément intéressant à notre travail serait une étude expérimentale de la déformation et la résistance de structures réciproques soumise à une charge. Par exemple leur comportement réel à travers le temps ou l'influence des paramètres sur celui-ci. La différence de rigidité entre des modules à trois, quatre ou cinq éléments. L'impact d'une variation de la longueur d'engagement sur les efforts présents dans la structure. L'influence de la dimension des éléments sur la déformation. La réponse à ces questions permettrait d'aiguiller l'utilisateur dans le choix des paramètres du programme.

Les structures réciproques doivent encore être sujettes à plusieurs recherches avant de pouvoir être utilisées en pratique. Je suis toutefois convaincu que ce moyen de construction est une alternative très intéressante à ce qui existe. Construire à l'aide de troncs d'arbre est une solution écologique, économique et innovante. Ce système permet de ne pas être limité par la longueur des grumes qui constituent la structure et de se passer d'appuis intermédiaires. Finalement, je pense que leurs utilisations pour des toitures de grandes dimensions, par exemple pour des halls ou des stades, peuvent donner lieu à des ouvrages majestueux avec un réel caractère architectural.



# Annexe

## 11 Annexe

Le calcul de la section des éléments de notre structure a été réalisé en suivant la démarche adoptée au cours de structure en bois (LGCIV2043) donné par M. Latteur.

La structure est soumise à trois charges : son poids propre, le poids de la couverture textile et le vent qui s'applique sur celle-ci. Nous commençons par vérifier la résistance de la structure à l'ELU. Ensuite nous vérifions le déplacement de celle-ci pour nous assurer qu'il ne soit pas excessif. Cette dernière étape est directement faite dans Karamba afin de tenir compte des interactions entre les déplacements de tous les éléments.

La combinaison de charges peut s'écrire :  $1,35 * \sum G + 1,5 * Q$ .  $G$  sont les charges permanentes (poids propre de la structure et de la toile) et  $Q$  est la charge variable (le vent). Pour la toile, nous avons pris une charge surfacique de  $1,5 \text{ kg/m}^2$  [20]. En ce qui concerne le vent, nous avons considéré une charge de  $0,5 \text{ kN/m}^2$  appliqué sur une face de la structure.

Les éléments sont positionnés dans l'espace et sont soumis à des efforts dans les trois directions. Nous avons dimensionné ceux-ci en flexion déviée ( $M_y + M_z + N$ ) ainsi qu'à l'effort tranchant. Les éléments subissent principalement de la flexion, le flambement est donc négligé. Certains éléments sont soumis à de la torsion. Cependant, elle est de l'ordre de 100 fois inférieure aux autres efforts et sera également négligée.

La structure est partiellement protégée des intempéries à l'aide de la toile qui la couvre. Elle est donc de classe de service 2. De plus, elle est soumise au vent. La charge de plus courte durée est donc inférieure à une semaine. Son  $k_{\text{mod}}$  vaut 0,9. Enfin, nous utilisons du bois brut C24 : le coefficient de sécurité  $\gamma_m$  vaut donc 1,3. Nous pouvons déduire la résistance de notre élément aux différentes sollicitations.

- Résistance en compression parallèle aux fibres :  $f_{c,0,d} = k_{\text{mod}} \frac{f_{c,0,k}}{\gamma_m} = 14,54 \text{ MPa}$
- Résistance en traction parallèle aux fibres :  $f_{t,0,d} = k_{\text{mod}} \frac{f_{t,0,k}}{\gamma_m} = 10,03 \text{ MPa}$
- Résistance en compression flexion :  $f_{m,d} = k_{\text{mod}} \frac{f_{m,k}}{\gamma_m} = 16,61 \text{ MPa}$
- Résistance à l'effort tranchant :  $f_{v,d} = k_{\text{mod}} \frac{f_{v,k}}{\gamma_m} = 2,77 \text{ MPa}$

Il faut vérifier que le taux de travail est inférieur à 1 dans tous les éléments de la structure, ce qui se traduit par la vérification des relations suivantes :

- $\left( \frac{\sigma_{n,0,Ed}}{f_{c,0,d}} \right)^2 + \left( \frac{\sigma_{m,y,Ed}}{f_{m,d}} + \frac{\sigma_{m,z}}{f_{m,d}} \right) \leq 1$
- $\sqrt{\tau_{y,Ed}^2 + \tau_{z,Ed}^2} \leq \tau_{v,d}$

Avec  $\sigma_n = \pm \frac{N}{A}$ ,  $\sigma_m = \frac{My}{I}$  et  $\tau = \frac{3V_{Ed}}{2k_{cr}A}$

Il suffit de vérifier cette relation pour s'assurer de la résistance de chaque élément.

Au niveau du schéma statique de la structure, nous avons considéré des appuis dont les translations sont bloquées dans les trois directions pour les appuis qui sont au sol (face arrière de l'édifice). Pour les appuis sur les arcs de la structure, nous avons seulement bloqué le déplacement vertical. Toutes les rotations sont laissées libres au niveau des appuis. Sur le schéma ci-dessous, les flèches représentent les réactions qui sont bloquées au niveau des appuis.

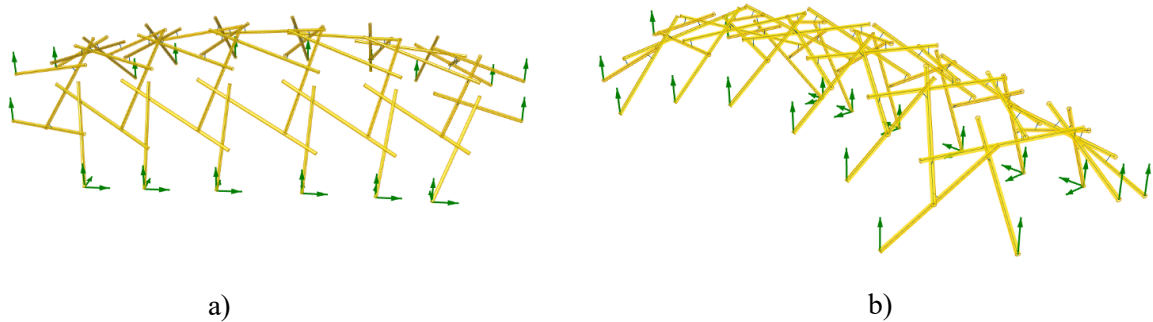


Figure 151 - Réaction d'appuis de la structure - a) Vue arrière - b) Vue en diagonale

Pour ce qui est des charges sur la structure, le poids de la toile est considéré comme charge permanente se répartissant linéairement sur les éléments. Le vent est appliqué sur une face de la structure. La présence de la toile répartit le vent également comme charge linéaire sur les éléments.

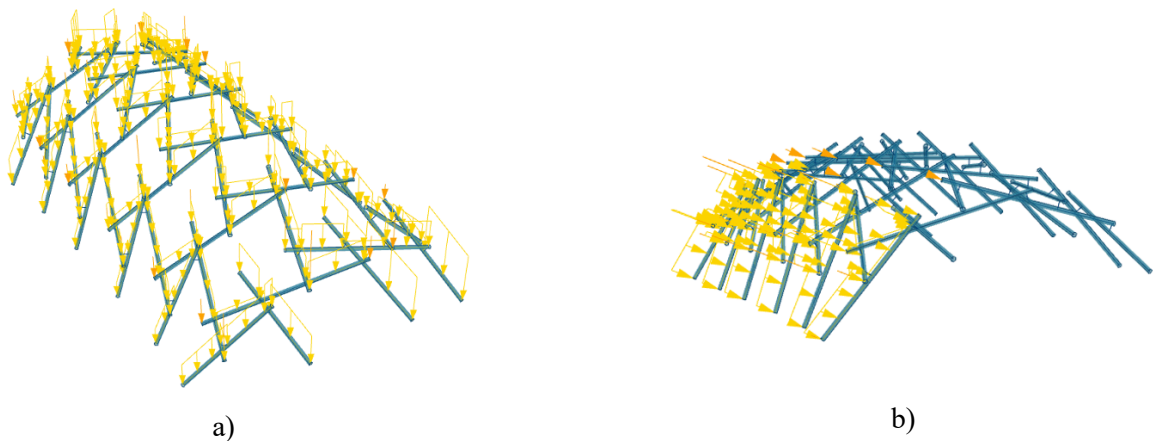


Figure 152 - a) Poids de la toile sur la structure - b) Charge de vent

En ce qui concerne les assemblages entre les éléments, ils ont été modélisés comme des rotules dont la rotation en  $x$  est bloquée. Les trois translations sont également bloquées entre les éléments. (repère en noir sur la Figure 153)

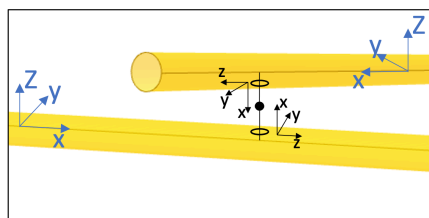


Figure 153 – Repère local des éléments et assemblages entre eux-ci

Le repère local des éléments est représenté en bleu sur la Figure 153. Les efforts internes présentés ci-dessous seront toujours exprimés dans le repère local de chaque élément. Les efforts affichés sont dus au poids propre des grumes, au poids de la toile et à l'effet du vent sur la structure.

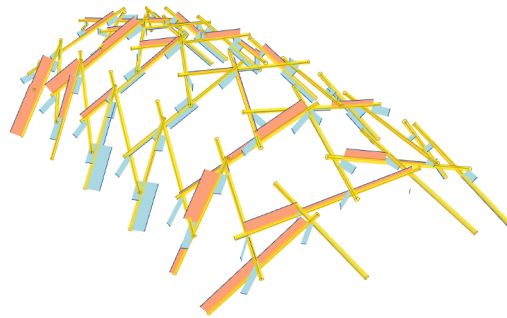


Figure 154 - Effort normal dans les éléments de la structure

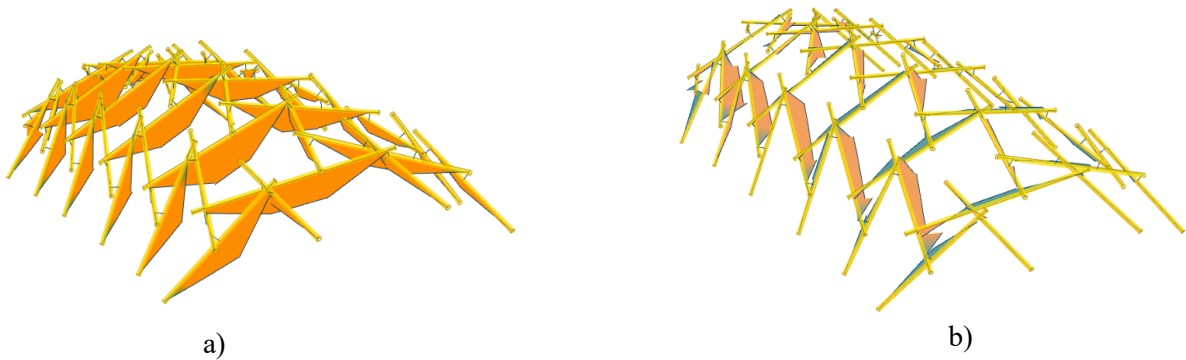


Figure 155 - a) Moment selon y - b) Moment selon z

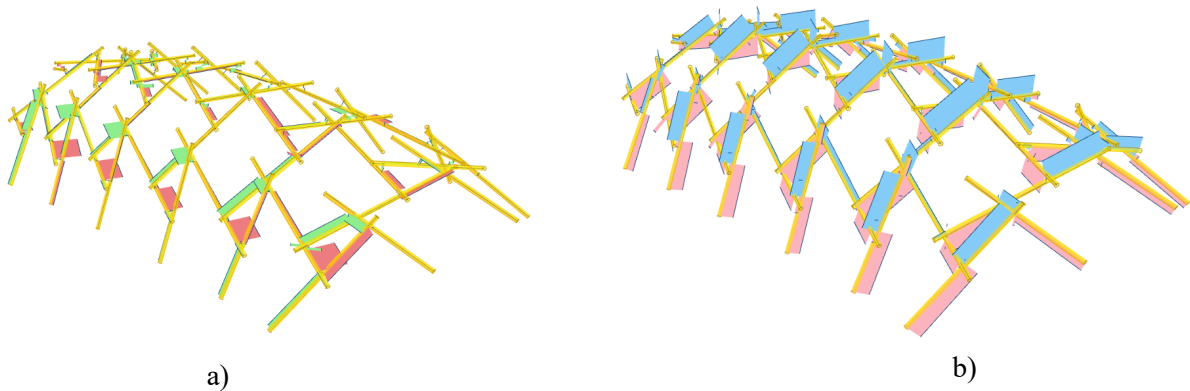


Figure 156 - a) Effort tranchant selon y - b) Effort tranchant selon z

Enfin, la déformation de la structure est affichée ci-dessous. Les éléments sont représentés par leurs axes centraux (en bleu) dans la position déformée. Sur les figures ci-dessous, le déplacement des éléments a été amplifié pour visualiser la déformée. La flèche verticale de la structure est de 6,4 cm lorsque toutes les charges sont prises en compte.

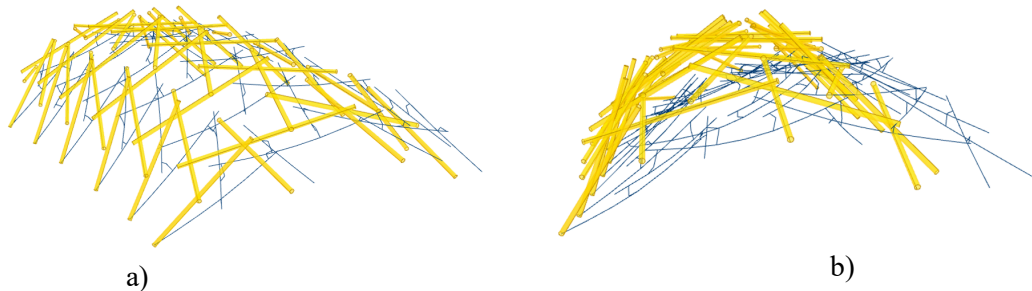


Figure 157 - a) Vue arrière de la déformée - b) Vue latérale de la déformée



# Bibliographie

## 12 Bibliographie

- [1] Anastas, Y., Rhode-Barbarigos, L., & Adriaenssens, S. (2016). Design-to-construction workflow for cell-based pattern reciprocal free-form structures. *Journal of the International Association for Shell and Spatial Structures*, 57(2), 159–176.
- [2] Baverel, O. (2000). Nexorades: A family of interwoven space structures. *University of Surrey, December*, 1–323.
- [3] Baverel, O., & Nooshin, O. (n.d.). *Formfinding of Nexorades using Genetic Algorithms*.
- [4] Bégin, C. (2001). *Etude des droites du plan et de l'espace*.
- [5] Douthe, C., & Baverel, O. (2009). Design of nexorades or reciprocal frame systems with the dynamic relaxation method. *Computers and Structures*, 87(21–22), 1296–1307.
- [6] Gherardini, F., & Leali, F. (2017). Reciprocal Frames in Temporary Structures: An Aesthetical and Parametric Investigation. *Nexus Network Journal*, 19(3), 741–762.
- [7] Godthelp, T. S., Jorissen, A. J. M., Habraken, A. P. H. W., & Roelofs, R. (2019). The timber reciprocal frame designer: Free form design to production. *IASS Symposium 2019 - 60th Anniversary Symposium of the International Association for Shell and Spatial Structures; Structural Membranes 2019 - 9th International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures, FORM and FORCE, October*, 2764–2771.
- [8] Goosse, J. (2020). *Validation expérimentale d'assemblages de structures réciproques composées de troncs d'arbres*.
- [9] Houlsby, G. T. (2014). John Wallis and the Numerical Analysis of Structures. *Nexus Network Journal*, 16(1), 207–217.
- [10] iStock. (consulté le 6 juin, 2021), <https://www.istockphoto.com/fr/photos/tronc-d%27arbre>
- [11] Larsson, M., Yoshida, H., & Igarashi, T. (2019). Human-in-the-loop fabrication of 3D surfaces with natural tree branches. *Proceedings: SCF 2019 - ACM Symposium on Computational Fabrication*.
- [12] Mesnil, R., Douthe, C., Baverel, O., & Gobin, T. (2018). Form finding of nexorades using the translations method. *Automation in Construction*, 95, 142–154.
- [13] Parigi, D., & Kirkegaard, P. H. (2014). Design and Fabrication of Free-Form Reciprocal Structures. *Nexus Network Journal*, 16(1), 69–87.
- [14] Parigi, D., Kirkegaard, P., & Sassone, M. (2012). Hybrid optimization in the design of reciprocal structures. *IASS-APCS 2012 Proceedings : From Spatial Structures to Spaces Structures, July 2016*, 8.
- [15] Parigi, D., & Pugnale, A. (2014). Three-Dimensionality in Reciprocal Structures: Concepts and Generative Rules. *Nexus Network Journal*, 16(1), 151–177.
- [16] Pinterest. (consulté le 20 mai 2021). <https://www.pinterest.com/pin/65302263331352470/>
- [17] Popovic Larsen, O. (2008). *Reciprocal Frame Architecture*.
- [18] Popovic Larsen, O. (2014). Reciprocal Frame (RF) Structures: Real and Exploratory. *Nexus Network Journal*, 16(1), 119–134.
- [19] Rizzuto JP. Eccentricity Orientation of Bolted Connections in Space Structure Configurations Using Reciprocally Supported Elements..
- [20] Sénéchal, B., Douthe, C., & Baverel, O. (2011). Analytical investigations on elementary nexorades. *International Journal of Space Structures*, 26(4), 313–320.

- [21] SMC2. (consulté le 7 juin 2021). <https://www.smc2-construction.com/couverture-textile-et-facade-textile>
- [22] Song, P., -Wing Fu, C., Goswami, P., Zheng, J., Mitra, N. J., & Cohen-Or, D. (2013). Reciprocal frame structures made easy. *ACM Transactions on Graphics*, 32(4).
- [23] Tamke, M., Riiber, J., Jungjohann, H., Helbig, K., & Thomsen, M. R. (2010). Advances in Architectural Geometry 2010. *Advances in Architectural Geometry 2010, December 2016*.
- [24] *Telecom Valley*. (consulté le 20 mai 2021). <http://www.sofab.tv/2016/06/le-pont-auto-bloquant-de-leonard-de-vinci/>

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN  
École polytechnique de Louvain

Rue Archimède, 1 bte L6.11.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | [www.uclouvain.be/epl](http://www.uclouvain.be/epl)