

Faculté des sciences

**Market Consistent for valuation of
participating life products with
stochastic models**

Institut de Statistique, Biostatistique et Actuariat



Market Consistent for valuation of participating life products with Stochastic Models

Membres du jury :

Prof. Pierre Devolder : *Promoteur*

Prof. Jérôme Barbarin : *Lecteur*

Mémoire présenté en vue de
l'obtention du master
en sciences actuarielles
(orientation sciences actuarielles)
Par :

DZUEFOUO TEKOUTSAP
Martine Sandra

Louvain-La-Neuve

04 janvier 2024

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Dédicace v

Remerciements vi

Abstract vii

Introduction 1

Chapitre 1 : Généralités 4

1.1 Introduction..... 4

1.2 Espace de tarification..... 6

 1.2.1 Produits vie Hybrides..... 7

 1.2.2 Evaluation actuarielle à 02 étapes 9

 1.2.2.1 Définition 9

 1.2.2.2 Propriétés d'un évaluateur..... 11

 1.2.2.3 Présentation de l'opérateur d'évaluation hybride 11

Chapitre 2 : Modélisation des risques de taux 13

2.1 Modélisation du risque de taux d'intérêt : modèle G2++ 13

 2.1.1 Description générale..... 13

 2.1.1 Taux forward : Nelson Siegel augmenté ou modèle de Svensson 15

 2.1.2 Prix du zéro coupon 15

 2.1.3 *Calibration des paramètres du modèle G2++* 16

 2.1.3.1 Calcul des différences de premier ordre du logarithme des prix des zéro coupon 16

 2.1.3.2 Calcul de la matrice de variance covariance 18

 2.1.3.3 Estimation des paramètres..... 19

2.2 Modélisation du risque de taux de mortalité 20

 2.2.1.1 Description générale..... 20

 2.2.1.2 Calibration..... 22

 2.2.2 Modèle de Hull and white à 2 facteurs 23

 2.2.2.1. Description générale..... 23

 2.2.2.2 Calibration des paramètres du modèle Hull and white à 2 facteurs 25

 2.3 *Fonds d'investissement : Actif risqué*..... 25

 2.4 *Avantages des modèles stochastiques* 26

Chapitre 3 : Application des produits avec participation bénéficiaire 28

3.1 Pure Endowment..... 28

 3.1.1 Description générale..... 28

 3.1.2 Fair-value : Tarification à 2 étapes..... 29

 3.1.2.1 Tarification financière sous Q_f 29

 3.1.2.2 Tarification actuarielle sous Q_a 30

 3.1.3 Calcul de provisions 31

3.2	<i>Annuité croissante</i>	31
3.2.1	Description générale	31
3.2.2	Fair-value : Tarification à 2 étapes	32
3.3	<i>Annuité différée</i>	32
Chapitre 4 : Calibration et Applications numériques		34
4.1	<i>Calibrations des paramètres des modèles de taux</i>	34
4.1.1	Calibration des paramètres du taux de mortalité : modèle de Hull and White à 1 facteur	34
4.1.2	Calibration des paramètres du taux de mortalité : modèle de Hull and White à 2 facteurs	36
4.1.3	Calibration des paramètres du taux d'intérêt : modèle G2++	39
4.2	<i>Applications numériques aux produits d'assurance-vie</i>	43
4.2.1	Pure Endowment	43
4.2.1.1	Etude de sensibilité de la fair-value	44
4.2.1.2	Fair-value avec et sans participation bénéficiaire	44
4.2.1.3	Réserves avec et sans participation bénéficiaire	46
4.2.2	Annuité croissante	47
4.2.2.1	Fair-value avec et sans participation bénéficiaire	47
1.1.1.1	4.2.2.2 Réserves avec et sans participation bénéficiaire	48
4.2.3	Annuité croissante différée	49
4.2.3.1	Fair-value avec et sans participation bénéficiaire	50
4.2.2.2	Réserves avec et sans participation bénéficiaire	51
Conclusion		52
Bibliographie		53

.

Table des figures

<i>Figure 1: Evolution du taux de mortalité chez les femmes.....</i>	<i>35</i>
<i>Figure 2: Représentation des zéro-coupons.....</i>	<i>36</i>
<i>Figure 3: Représentation des taux forward et phi de la mortalité.....</i>	<i>37</i>
<i>Figure 4: Représentation des taux Nelson Siegel et Svensson.....</i>	<i>37</i>
<i>Figure 5: Représentation des zéro-coupons de mortalité.....</i>	<i>38</i>
<i>Figure 6: Représentation des taux OLO.....</i>	<i>40</i>
<i>Figure 7: Représentation graphique des taux d'intérêt.....</i>	<i>41</i>
<i>Figure 8: Représentation des taux forward et phi.....</i>	<i>41</i>
<i>Figure 9: Représentation des zéro-coupons des taux d'intérêt.....</i>	<i>42</i>
<i>Figure 10: Représentation de la fair-value avec et sans PB en fonction de la durée du contrat.....</i>	<i>45</i>
<i>Figure 11: Représentation de la moyenne des réserves avec et sans PB.....</i>	<i>46</i>
<i>Figure 12: Représentation de l'annuité croissante avec et sans PB.....</i>	<i>47</i>
<i>Figure 13: Evolution de la moyenne des réserves en fonction du temps avec et sans PB.....</i>	<i>49</i>
<i>Figure 14: Représentation de la fair-value de l'annuité croissante différée avec et sans PB.....</i>	<i>50</i>
<i>Figure 15: Evolution de la valeur moyenne des réserves de la rente croissante différée avec et sans PB..</i>	<i>51</i>

Liste des tableaux

<i>Tableau 1 : Paramètres de Hull and White à 1 facteur.....</i>	<i>35</i>
<i>Tableau 2: Paramètres de Svensson de mortalité</i>	<i>36</i>
<i>Tableau 3: Paramètres HW2 des taux de mortalité</i>	<i>38</i>
<i>Tableau 4: AIC des deux modèles</i>	<i>39</i>
<i>Tableau 5: Paramètres des taux d'intérêt avec Svensson.....</i>	<i>40</i>
<i>Tableau 6: Paramètres du modèle G2++</i>	<i>42</i>
<i>Tableau 7: Etude de la sensibilité de la fair-value.....</i>	<i>44</i>

Dédicace

À mes parents,

Pour leur amour inconditionnel et sacrificiel, leur encouragement et patience, cette aventure n'aurait certainement pas existé sans vous. Puisse l'éternel vous garder afin que vous puissiez récolter les fruits de votre dévouement.

À mes frères et sœurs : Didier, Franck, Floriane, Patrick, Dilane et Jessy, vous qui avez toujours su me motiver, même dans les moments de doute. Un grand merci pour votre encouragement et votre soutien moral. Vos existences me sont si nécessaires et agréables.

Quand un homme aurait cent fils, vivrait un grand nombre d'années, et que les jours de ses années se multiplieraient, si son âme ne s'est point rassasiée de bonheur, et si de plus il n'a point de sépulture, je dis qu'un avorton est plus heureux que lui.

Ecclésiaste 6 :3

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude particulière au professeur Pierre Devolder pour sa patience, ses orientations éclairées et son engagement tout au long de la réalisation de ce mémoire. Les rencontres régulières ont été extrêmement enrichissantes, guidant non seulement ce travail, mais également d'autres aspects de ma formation.

Un sincère remerciement s'adresse également à l'ensemble du corps enseignant et au personnel de la LSBA pour la qualité de la formation dispensée. Leur contribution a grandement enrichi mon parcours académique.

À ma famille, je présente mes remerciements les plus chaleureux pour leurs sacrifices, leur soutien continu et la confiance inébranlable qu'ils ont placée dans mes choix. Leurs attentions et encouragements ont été des piliers tout au long de mes études. Je remercie également Lilie MALONZEU, André TSAPI, William TIOMELA, dont le soutien a été inestimable.

Je souhaite exprimer toute ma gratitude à mes camarades de classe et à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail, en particulier à Jean Baptiste ESSEHIN DERRE et Sidonie ATSAGMO. Leur collaboration a été précieuse.

Je ne saurais terminer sans exprimer toute ma gratitude à mon Dieu qui m'a accordé entre autres la santé et l'intelligence nécessaires pour mener jusqu'au bout ce travail.

Abstract

Embark on a journey into the intricacies of participatory life insurance in a European regulatory landscape demanding an assessment aligned with market realities. Our thesis delves into the complex challenge of valuing less negotiable liabilities, such as long-term participatory life insurance contracts, sensitive to medium-term dynamics of underlying risks. Departing from traditional approaches, our study focuses on market-consistent actuarial valuation (MC) of participatory life insurance contracts with hybrid payments. We innovate by generalizing a standard profit-sharing mechanism, adapting it to a reality where actuarial and hedgeable financial risks unfold over the contract's duration.

The core of our approach lies in a "two-step actuarial valuation" over a defined period. Through the judicious use of stochastic models for interest rates and mortality, we compare different approaches using the AIC criterion, revealing crucial nuances. The fair value of life insurance products comes to life in our calculations, supported by a rigorous analysis of reserves, highlighting the necessity of stochastic models to capture the complex reality of the market. This thesis extends an invitation to an objective and relevant exploration, offering enlightening perspectives to researchers, insurance professionals, and enthusiasts eager to delve into the intricacies of actuarial valuation in the unique realm of participatory life insurance. An exploration that is sure to captivate any mind seeking in-depth understanding.

Key words: Market Consistency, Participating Life Insurance, Stochastic Models, Actuarial Valuation, Interest Rates, Mortality Rates, G2++, Hull and White with 1 and 2 Factors, Two-Step Actuarial Evaluator, Participation Benefits, Actuarial Reserves, Pricing, Calibration, Sensitivity, Fair Value, Actuarial Financial Risks.

Résumé

Explorez les arcanes de l'assurance-vie participative dans un contexte réglementaire européen exigeant une évaluation alignée sur les réalités du marché. Notre mémoire plonge dans le défi complexe de valoriser des passifs peu négociables, tels que les contrats d'assurance-vie participatifs à long terme, sensibles aux dynamiques à moyen terme des risques sous-jacents. Loin des approches traditionnelles, notre étude s'attache à la valorisation actuarielle cohérente avec le marché des contrats d'assurance-vie participatifs aux paiements hybrides. Nous innovons en généralisant un mécanisme standard de partage des bénéficiaires, l'adaptant à une réalité où les risques financiers actuariels et couvrables se déploient sur la durée du contrat.

Le cœur de notre démarche réside dans une "valorisation actuarielle en deux étapes" sur une période définie. À travers l'usage judicieux de modèles stochastiques pour les taux d'intérêt et la mortalité, nous confrontons différentes approches avec le critère AIC, révélant des nuances cruciales. La fair value des produits d'assurance-vie prend vie dans nos calculs, soutenus par une analyse rigoureuse des réserves, éclairant ainsi la nécessité de modèles stochastiques pour capturer la réalité complexe du marché. Ce mémoire est une invitation à une lecture objective et pertinente, offrant des perspectives éclairantes aux chercheurs, professionnels de l'assurance et passionnés souhaitant plonger dans les subtilités de la valorisation actuarielle dans l'univers particulier des produits d'assurance-vie participatifs. Une exploration qui ne manquera pas de captiver tout esprit avide de compréhension approfondie.

Mots clés : Cohérence avec le marché, Assurance vie participative, Modèles stochastiques, Valorisation actuarielle, Taux d'intérêt, Taux de mortalité, G2++, Hull and White à 1 et 2 facteurs, évaluateur actuariel à 02 étapes, Participation bénéficiaire, Réserves actuarielles, Tarification, Calibration, Sensibilité, Fair value, Risques financiers actuariels.

Introduction

Contexte général

Dans le domaine des produits d'assurance-vie, l'évaluation cohérente avec le marché (market consistent) joue un rôle crucial. Les assureurs doivent être en mesure de déterminer de manière précise et fiable la valeur de leurs produits d'assurance-vie afin de prendre des décisions éclairées en matière de tarification, de gestion des risques et de gestion globale de leur portefeuille.

L'approche de l'évaluation cohérente avec le marché repose sur le principe fondamental selon lequel la valeur d'un produit d'assurance-vie devrait refléter de manière réaliste les risques financiers et actuariels qui lui sont associés. Cette approche permet aux assureurs de prendre en compte les conditions du marché et les facteurs de risque pertinents lors de l'évaluation de leurs produits, ce qui contribue à une gestion plus solide et équilibrée de leurs activités.

Dans le contexte de solvabilité des assureurs, il est primordial de calculer les réserves avec prudence, afin d'éviter une éventuelle insolvabilité de l'assureur. Cela requiert des choix judicieux en termes d'hypothèses et de paramètres techniques, ainsi que la garantie de disposer de revenus suffisants pour couvrir ces réserves.

La norme Solvabilité II a été mise en place pour assurer la solvabilité des assureurs vis-à-vis des assurés. De ce fait, le régulateur en Europe demande une évaluation cohérente avec le marché des passifs d'assurance qui ne sont généralement pas (entièrement) négociables. Un exemple de ces passifs est le contrat d'assurance vie avec participation bénéficiaire qui est généralement à long terme et vulnérable à la dynamique à moyen terme des facteurs de risque sous-jacents. Faire face à ces caractéristiques nécessite une tarification cohérente avec le marché.

Problématique

Actuellement, l'évaluation cohérente avec le marché (market consistent) est une approche largement adoptée pour la valorisation des contrats d'assurance-vie. Néanmoins, elle présente des enjeux complexes liés à la modélisation des risques spécifiques à l'assurance, à l'obtention de données fiables et à la formulation d'hypothèses réalistes.

Cependant, malgré son importance et sa popularité, cette approche soulève encore plusieurs questions et défis. Tout d'abord, la modélisation des risques spécifiques à l'assurance, tels que les risques de mortalité/longévité et de taux d'intérêt, nécessite des approches sophistiquées pour tenir compte de leur nature complexe et dynamique. Les assureurs doivent développer des modèles adéquats qui reflètent de manière réaliste ces risques et permettent une

évaluation précise des contrats. En outre, l'obtention de données fiables sur les marchés financiers et les caractéristiques des contrats d'assurance-vie constitue un défi majeur. Les assureurs doivent accéder à des données précises et à jour pour évaluer les contrats en fonction des conditions du marché. De plus, la formulation d'hypothèses réalistes et appropriées est essentielle pour refléter de manière précise les conditions du marché et les caractéristiques des contrats.

La gestion des risques est également un aspect crucial de l'évaluation cohérente avec le marché. Les assureurs doivent développer des stratégies de gestion des risques efficaces pour tenir compte à la fois des risques financiers et actuariels associés aux contrats d'assurance-vie. Cela nécessite une compréhension approfondie des interactions entre les différents types de risques et la mise en place de mesures appropriées pour réduire et gérer ces risques.

Enfin, les réglementations en matière d'assurance peuvent avoir un impact significatif sur l'évaluation cohérente avec le marché des contrats d'assurance-vie. Les assureurs doivent s'assurer que leurs évaluations respectent les exigences réglementaires en vigueur tout en maintenant l'intégrité et la précision de l'évaluation cohérente avec le marché.

Face à ces défis, la question clé est de savoir comment les assureurs peuvent garantir une évaluation cohérente avec le marché des contrats d'assurance-vie, en intégrant de manière adéquate les risques financiers et actuariels, en reflétant les conditions du marché à travers des modèles sophistiqués, en obtenant des données fiables et en respectant les réglementations en vigueur. Une approche robuste et rigoureuse est nécessaire pour surmonter ces défis et parvenir à une valorisation précise et réaliste des contrats d'assurance-vie.

Objectif

Dans la littérature, plusieurs recherches ont été menées pour développer des modèles et des méthodes d'évaluation cohérente avec le marché dans le contexte des produits d'assurance-vie. Les pionniers de l'évaluation cohérente avec le marché des contrats avec participation bénéficiaire sont [Zaglauer et Bauer](#), ils ont développé un modèle qui incorpore un taux d'intérêt stochastique pour évaluer un contrat spécifique. Pour cela, la méthode de Monte Carlo a été utilisée pour estimer la valeur du contrat. Leur recherche a révélé que les options intégrées dans le contrat étaient sensibles aux variations stochastiques du taux d'intérêt constant.

Dans une autre étude, [Bernard et al.](#) ont étendu un modèle similaire en tenant compte du risque de défaut de l'émetteur. Ils ont utilisé la méthode des moindres carrés de Monte Carlo (LSMC) pour valoriser le contrat, prenant ainsi en compte le risque supplémentaire lié au défaut. [Tanskanen et Lukkarinen](#) ont apporté plus de flexibilité à la politique de bonus dans leur modèle, fournissant ainsi une valorisation plus précise d'un contrat spécifique. Pour approfondir la question de l'évaluation des polices avec participation, les travaux de [Kleinow et Bacinello](#) sont recommandés.

Cependant il convient de noter que la plupart des études mentionnées ci-dessus supposent implicitement l'existence d'un marché liquide pour les passifs, bien que cela ne soit pas toujours le cas dans la réalité.

Dans notre travail, nous nous focaliserons sur la valorisation des contrats d'assurance-vie avec participation bénéficiaire. Nous commencerons tout d'abord par l'introduction du contrat avec participation et les modèles pour les facteurs de risque sous-jacents.

Ensuite, nous expliquerons la dynamique du passif et la formation du gain hybride comme une combinaison de l'investissement en actions, des risques de taux d'intérêt et des risques de mortalité/longévité, qui formera la réserve de police hybride dans le paiement final. Nous concluons cette section en fournissant le cadre de tarification en introduisant les opérateurs actuariels en deux étapes tels que les principes de prime actuarielle [Pelsser & Stadjie \(2014\)](#).

Enfin nous fournirons les résultats de la procédure numérique pour tarifier le contrat de participation et nous exploiterons les avantages offerts par l'évaluation actuarielle à 02 étapes. Nous analyserons les résultats obtenus et mettrons en évidence les améliorations apportées par cette méthode.

Chapitre 1 : Généralités

1.1 Introduction

L'évaluation des contrats d'assurance vie est intimement liée à la gestion des divers facteurs de risque associés aux actifs et aux passifs d'une compagnie d'assurance. En termes simples, les fonds collectés auprès des assurés sont généralement investis sur différents marchés financiers tels que les actions, les obligations, les biens immobiliers et les biens de consommation, constituant ainsi l'actif du bilan. Une gestion éclairée de ces dynamiques est essentielle pour évaluer avec précision les engagements financiers et assurer la solidité financière de la compagnie d'assurance vie.

Les engagements des contrats d'assurance vie, en raison de leur nature peu négociable sur le marché, sont partiellement non couvrables. Cependant, les régulateurs ont récemment préconisé l'évaluation de la valeur de marché de ces engagements par les compagnies d'assurance. Étant donné le risque actuariel non couvrable inhérent (mortalité/longévité), nous adoptons une approche basée sur la valeur actuarielle de l'actif et du passif pour ces contrats. Cela diffère de l'hypothèse d'absence d'arbitrage généralement utilisée dans la tarification. Parallèlement, les risques financiers dans les paiements du contrat doivent être pris en compte dans un contexte de tarification financière. La cohérence avec le marché, assurée par l'opérateur de tarification, reflète la possible couverture partielle du risque actuariel par la dynamique du marché financier, en tenant compte de la corrélation éventuelle entre les risques actuariels et financiers. Des conditions explicites de cohérence avec le marché ont été établies par des chercheurs tels que [Pelsser & Stadje \(2014\)](#), [Kupper et al.](#), et [Malamud et al. \(2008\)](#).

Notre étude se focalise sur l'évaluation des contrats d'assurance vie avec participation. Le calcul du prix actuariel pour ces polices, en intégrant les aspects de cohérence du marché, s'appuie sur le cadre théorique de "l'évaluation du marché en deux étapes", introduit par [Pelsser & Stadje \(2014\)](#) pour les opérateurs de tarification conditionnelle comme le principe de la prime actuarielle. Cette approche peut être étendue à tout gain hybride impliquant des risques financiers et actuariels sous-jacents. [Møller \(2002\)](#) utilise une méthode similaire pour établir la cohérence du marché avec le principe actuariel Standard-Deviation, tandis que [Musielà & Zariphopoulou \(2004\)](#) appliquent une approche comparable pour la prime d'indifférence en utilisant une fonction d'utilité exponentielle dans un marché incomplet. Nous partons du postulat que le rendement hybride résulte de la combinaison d'investissements en actions, de taux d'intérêt et des risques associés à la mortalité/longévité. Dans le cadre de l'évaluation actuarielle en deux étapes, les risques financiers doivent être évalués en supposant un marché complet et sans possibilité d'arbitrage. Nous choisissons de modéliser l'actif d'investissement avec un mouvement brownien géométrique (GBM), où une mesure de martingale unique \mathbb{Q} , équivalente à la mesure du monde réel \mathbb{P} , conditionne le prix en tant qu'espérance conditionnelle du gain actualisé.

En ce qui concerne le risque de taux d'intérêt, nous optons pour le modèle G2++, reconnu pour sa flexibilité et son adaptation aux schémas de discrétisation. Pour le risque de mortalité/longévité, nous utilisons le modèle Hull and White à 1et à 2 facteurs. Bien que celui à 2 facteurs soit peu répandu dans la littérature actuelle, son exploration revêt une importance capitale pour plusieurs raisons. Tout d'abord, la plupart des modèles existants dans la littérature se concentrent sur des approches moins complexes pour modéliser les risques de mortalité, souvent en utilisant des tendances déterministes ou des facteurs stochastiques simples. Le recours au modèle de Hull and White à 2 facteurs offre une sophistication supplémentaire, permettant une représentation plus réaliste des dynamiques temporelles complexes des taux de mortalité.

De plus, en intégrant des facteurs temporels spécifiés et en combinant ces derniers avec des paramètres dépendants de l'âge, le modèle de Hull and White à 2 facteurs peut potentiellement offrir une meilleure adéquation aux données de mortalité observées dans la réalité. En explorant ce modèle, nous visons à contribuer à la littérature en introduisant une approche plus riche et en évaluant son applicabilité dans le contexte particulier de l'évaluation des contrats d'assurance vie. En fin de compte, cette démarche pourrait permettre de mieux capturer les variations complexes des taux de mortalité et d'améliorer la précision des modèles actuariels utilisés dans le secteur de l'assurance.

L'étude organisée se dévoile à travers une séquence méthodique. Dans le chapitre initial, une immersion détaillée dans le cadre général du modèle expose la rémunération des produits hybrides et établit les principes fondamentaux de l'évaluation financière et actuarielle. Le deuxième chapitre s'engage dans une exploration approfondie des modélisations des taux d'intérêt et de mortalité, détaillant les processus de calibrage et analysant les prix des zéro coupon résultants. Une mise en lumière particulière est portée sur la modélisation du taux de mortalité, débutant avec le modèle à un facteur de Hull and White et progressant vers le modèle à deux facteurs. Une étude comparative exhaustive, comprenant la transition entre ces modèles, est présentée avec des justifications pertinentes. Le troisième chapitre se concentre sur des applications concrètes, mettant en avant l'utilisation de ces modèles dans la valorisation d'une gamme de produits d'assurance vie. La méthode de valorisation en deux étapes est employée, générant des résultats robustes étayés par des analyses de sensibilité. Enfin, le quatrième chapitre dévoile les applications numériques des calibrages et les résultats de la fair value et des réserves pour les produits avec participation bénéficiaire. Une étude comparative approfondie des divers modèles est réalisée à l'aide du critère AIC, accompagnée d'une analyse de sensibilité et de l'exploration des impacts de la stochasticité des modèles sur le calcul des réserves de l'assureur. Cette approche intégrée aspire à offrir une compréhension approfondie des implications pratiques et des nuances associées à l'évaluation des produits d'assurance dans des contextes diversifiés.

1.2 Espace de tarification

Dans cette section nous tariferons la police avec participation bénéficiaire selon les propriétés de cohérence du marché, pour cela afin d'obtenir une estimation réaliste des paiements, il est important de prendre en compte le risque actuariel de mortalité.

L'évaluation de la police est une fonction combinée des risques financiers et actuariels sous-jacents. Ici le risque actuariel $\mu_x(t)$ est non couvrable. Le marché étant incomplet, afin de tarifer nos contrats, nous nous servirons de l'un des principes de prime actuarielle pour déterminer le prix de ce risque. Les risques financiers quant à eux (le taux d'intérêt et l'actif d'investissement) sont normalement couvrables et échangés sur un marché complet. Ainsi, en utilisant le théorème fondamental de l'évaluation des actifs, nous considérerons le prix du dérivé de $S(t)$ et de $r(t)$ comme l'espérance conditionnelle dans le cadre de l'hypothèse d'un marché complet et sans arbitrage une mesure unique de martingale risque-neutre.

Nous allons opérer sur l'intervalle temporel limité $[0, T]$ en travaillant avec un groupe assuré n ayant une durée de vie restante $\tau = (\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_n)$. Au sein de cette cohorte, le risque de décès englobe à la fois le risque de mortalité systématique lié aux facteurs de risque globaux influençant l'espérance de vie de la population, ainsi que le risque de mortalité non systématique prenant en compte les variations individuelles par rapport à la moyenne de l'expérience de mortalité.

Dans l'espace de probabilité sous-jacent $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, nous examinons la filtration $(\mathcal{G}_t)_t$ générée par les facteurs de risque systématiques de mortalité. Pour chaque individu $j = 1, 2, \dots, n$, nous définissons $\mathcal{L}_t^j = \sigma(\mathbb{1}_{\{\tau_j \leq u\}} : u \leq t)$. Sous la probabilité réelle \mathbb{P} , les σ -algèbres \mathcal{L}_t^j (pour $j = 1, 2, \dots, n$) sont supposées être conditionnellement indépendantes. Cela signifie que, en prenant en compte les informations systématiques sur la mortalité contenues dans \mathcal{G}_T , nous établissons une relation de conditionnelle indépendance entre ces σ -algèbres pour tout $T > 0$ et $t \in [0, T]$. On a :

$$\mathbb{P}(\tau_1 > t, \tau_2 > t, \dots, \tau_n > t / \mathcal{G}_T) = \prod_{j=1}^n \mathbb{P}(\tau_j > t / \mathcal{G}_T) \quad (1)$$

Ce modèle, originellement conçu pour le risque de crédit (cf. [Bielecki et Rutkowski, 2004, p. 268](#) et suivantes), établit le filtrage actuariel élargi en temps t sous la forme

$\mathcal{F}_t^a = \mathcal{G}_t \vee (\vee_{j=1}^n \mathcal{L}_t^j)$. Nous faisons également référence au filtrage du risque financier au temps t par \mathcal{F}_t^f , défini sur l'espace probabiliste Ω . En conséquence, le filtrage de l'information complète est $\mathcal{F}_t = \sigma(\mathcal{F}_t^f \cup \mathcal{F}_t^a)$ pour tout $t \in [0, T]$. Le nombre d'assurés à tout moment $t \in [0, T]$ est noté $N_t = \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau_j \geq t\}}$. Dans le cadre de la mesure du monde réel \mathbb{P} , nous faisons l'hypothèse cruciale de l'indépendance entre les risques financiers et actuariels.

Sur l'espace produit $(\Omega = \Omega^a \times \Omega^f, \mathcal{F})$, nous adoptons la mesure produit $\mathbb{P} := \mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f$, où les indices a et f font référence respectivement aux quantités liées aux risques actuariels et financiers.

Remarque : L'indépendance supposée entre les risques financiers et actuariels dans le cadre de la mesure du monde réel \mathbb{P} est une hypothèse clé de notre modélisation, influençant la dynamique et la cohérence de nos résultats.

1.2.1 Produits vie Hybrides

Considérons les fonctions $g_j(\tau) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$ et $h_j(s) : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^+$, $j = 1, 2, \dots, n$. Nous explorons des produits d'assurance-vie hybrides dont les gains en temps T sont représentés comme suit :

$$H_T^n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_j(\tau_j) h_j(S_T) \quad (1.1)$$

Ici, S_T symbolise la valeur en temps T d'un actif financier, $h_j(S_T)$ est mesurable par rapport à \mathcal{F}_T^f , et $g_j(\tau_j)$ est une fonction mesurable par rapport à \mathcal{F}_T^a . L'expression \mathcal{H}_T est utilisée pour décrire l'ensemble des réclamations contingentes. La sous-catégorie des réclamations financières, notée \mathcal{H}_T^f , est obtenue en fixant $g_j(\tau_j) = 1$ pour $j = 1, 2, \dots, n$. De même, la sous-catégorie des réclamations actuarielles, \mathcal{H}_T^a , est déterminée en considérant $h_j(S_T) = 1$ pour $j = 1, 2, \dots, n$.

Évaluation du produit

Nous examinons un marché financier complet comprenant des actifs risqués et un compte d'épargne avec un taux sans risque stochastique $r(t)$. De plus, nous faisons l'hypothèse qu'il existe une mesure martingale équivalente $\mathbb{Q}^f \sim \mathbb{P}^f$ telle que $d\mathbb{Q}^f/d\mathbb{P}^f \in \mathcal{H}_T^f$. La valeur d'une créance financière $H_T^n \in \mathcal{H}_T^f$ est alors déterminée par son espérance neutre vis-à-vis du risque, ce qui se traduit par :

$$\pi_0^f(H_T^n/\mathcal{F}_0) := \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{Q}^f}[D(0, T) \cdot H_T^n] \quad (1.2)$$

Où $D(t, T) = e^{-\int_t^T r_s ds}$

Ici, nous notons les attentes conditionnelles par $\mathbb{E}_{\mathcal{F}_t}^{\mathbb{Q}^f} := \mathbb{E}^{\mathbb{Q}^f}[\cdot/\mathcal{F}_t]$. Nous élargissons l'équation (1.2) pour définir une série d'opérateurs d'évaluation financière pour une revendication générale $H_T^n \in \mathcal{H}_T^f$ comme suit :

$$\pi_0^f(H_T^n/\mathcal{F}_0) := \mathbb{E}_{\mathcal{F}_0}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f}[D_T H_T^n] \quad (1.3)$$

Nous incluons également un ensemble d'opérateurs d'évaluation actuarielle. Sous des hypothèses similaires, en appliquant le principe de l'écart-type, la valeur d'une créance actuarielle $H_T^n \in \mathcal{H}_T^a$ est déterminée par :

$$\pi_0^a(H_T^n/\mathfrak{F}_0) := \mathbb{E}_{\mathfrak{F}_0}^{\mathbb{Q}^a} [D(0, T) \cdot H_T^n] + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\text{Var}_{\mathfrak{F}_0}^{\mathbb{Q}^a \times \mathbb{Q}^f} ([H_T^n])} \quad (1.4)$$

Où $\alpha > 0$ est le coefficient d'aversion au risque.

Là encore, nous étendons ce principe aux généraux $H_T^n \in \mathcal{H}_T$ et définissons sous la mesure du monde réel $\mathbb{P} := \mathbb{P}^a \times \mathbb{P}^f$ que :

$$\pi_0^a(H_T^n/\mathfrak{F}_0) := \mathbb{E}_{\mathfrak{F}_0}^{\mathbb{Q}^a \times \mathbb{Q}^f} [D(0, T) \cdot H_T^n] + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\text{Var}_{\mathfrak{F}_0}^{\mathbb{Q}^a \times \mathbb{Q}^f} ([H_T^n])} \quad (1.5)$$

Les formules (1.3) et (1.5) pourraient s'appliquer à n'importe quel produit hybride, mais elles présentent une contradiction évidente. L'objectif de ce travail est de développer une méthode d'évaluation globale pour toute créance hybride. Cette méthode doit être compatible avec la formule (1.2) pour les produits financiers purs $H_T^n \in \mathcal{H}_T$, en accord avec la formule (1.4) pour les sinistres actuariels diversifiables purs $H_T^n \in \mathcal{H}_T^a$, et capable d'évaluer les sinistres qui ne sont ni complètement couvrables ni diversifiables. Nous visons également à créer une évaluation de produit qui reflète les stratégies de traitement du risque sous-jacent.

Dans ce travail, l'objectif est de présenter une méthode d'évaluation pour la créance hybride H_T^n définie dans (1.2). Cette méthode prendra en compte les stratégies de traitement des risques sous-jacents, s'inspirant à la fois de concepts issus de la finance et de l'assurance.

Pour un contrat financier, une prime exclusive est cruciale pour assurer la cohérence du marché, éliminant tout risque supplémentaire. Cette approche est adaptée aux contrats purement financiers, mais pour les pools actuariels, une évaluation par des experts actuariels est nécessaire en raison de la nature des risques non éliminables sur les marchés financiers. La présence d'une marge de risque est essentielle pour couvrir ces risques diversifiables mais non couvrables. L'opérateur d'évaluation actuarielle joue un rôle crucial dans cette évaluation précise des contrats actuariels. La **définition 2.1** formalise ces deux concepts de manière rigoureuse. En somme, cette approche garantit une évaluation adéquate des contrats financiers et actuariels, en tenant compte de la nature spécifique des risques sous-jacents, ce qui renforce la robustesse et la pertinence des évaluations dans des contextes variés.

Définition 2.1 (Opérateur d'évaluation cohérent avec le marché et actuariel) :

L'opérateur d'évaluation est considéré comme cohérent avec le marché lorsque, pour tout élément financier $h_1(S_T) \in H_T^f$ et toute créance $H_T^n \in \mathcal{H}_T$, la relation suivante est établie :

$$\pi_0(H_T^n + h_1(S_T)) = \pi_0(H_T^n) + \pi_0^f(h_1(S_T)/\mathfrak{F}_0) \quad (1.6)$$

D'autre part, l'opérateur d'évaluation est qualifié d'actuariel dans le cas d'un portefeuille d'assurance caractérisé par des sinistres indépendants. Cela suppose un portefeuille d'assurés dont les durées de vie restantes $j = 1, 2, \dots, n$, sont indépendantes et identiquement distribuées (i.i.d.).

Pour un sinistre actuariel $g_T^n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_j(\tau_j) \in \mathcal{H}_T^a$, l'opérateur d'évaluation est défini par un opérateur d'évaluation actuariel, exprimé comme suit :

$$\pi_0(g_T^n) = \pi_0^a(g_T^n / \mathcal{F}_0) \quad (1.7)$$

Il est essentiel de souligner que l'objectif optimal est que tout opérateur d'évaluation soit simultanément cohérent avec le marché et actuariel, offrant ainsi une évaluation complète des produits hybrides. Une discussion approfondie sur ce sujet est disponible dans les travaux de [Delong et al. \(2019a, b\)](#). Cette approche garantit une évaluation robuste, prenant en compte à la fois les aspects financiers et actuariels, assurant ainsi une pertinence et une fiabilité accrues dans des contextes diversifiés.

N.B: Dans ce contexte, le groupe d'assurés est considéré comme homogène, ce qui signifie que tous les individus du groupe ont le même âge initial et les mêmes préférences en matière de risque. De plus, les durées de vie restantes sont distribuées de manière identique dans le groupe. Ainsi

$$g_j(\tau_j) = g(\tau_j) \text{ et } h_j(S_T) = h(S_T).$$

Dans la section suivante, nous présenterons l'évaluation actuarielle à 02 étapes, examinerons la littérature existante et nous nous focaliserons sur ses différentes propriétés.

1.2.2 Evaluation actuarielle à 02 étapes

La notion de Market consistency devient un standard dans les problématiques d'évaluation de portefeuilles et d'entreprises d'assurance. Elle intervient même comme référence de base dans le référentiel prudentiel Solvabilité 2.

1.2.2.1 Définition

La méthode d'évaluation en deux étapes, est une méthode de valorisation d'actifs financiers qui peut être utilisée pour évaluer les contrats d'assurance vie avec participation bénéficiaire. Elle signifie qu'une évaluation, une modélisation ou une gestion de risques financiers doit être cohérente avec les prix du marché observés c'est-à-dire s'assurer que leurs évaluations sont cohérentes avec les prix observés sur le marché. Par conséquent, de nombreux auteurs ont proposé des méthodes générales d'évaluation qui permettent des dépendances entre les risques actuariels et financiers.

Par exemple, [Pelsser et Stajje \(2014\)](#) proposent une « évaluation en deux étapes cohérentes avec le marché » qui étend les principes actuariels standard en tenant compte des informations financières. [Dhaene et al. \(2017\)](#) proposent un nouveau cadre d'évaluation équitable des passifs d'assurance dans le temps ; voir également [Dhaene \(2020\)](#). Les auteurs introduisent le concept de « juste valeur », qu'ils définissent comme une évaluation qui est à la fois conforme au marché (toute partie recouvrable des créances est évaluée au prix du marché) et actuarielle (toute réclamation indépendante des réclamations est modélisée).

Les documents cités ci-dessus proposent des principes d'évaluation différents, mais le dénominateur commun est une évaluation cohérente avec le marché. Aujourd'hui, certains cadres réglementaires de l'assurance (tels que Solvabilité II) exigent des évaluations des passifs d'assurance conformes au marché ; voir, par exemple, [Moh \(2011\)](#). Les évaluations conformes au marché supposent des investissements dans des portefeuilles de réplcation appropriés pour compenser une partie des passifs. Le reste de la dette est géré au moyen de réserves de diversification et de fonds propres. Cependant, [Vedani et al. \(2017\)](#) et [Rae et al. \(2018\)](#) ont soulevé des inquiétudes quant à la cohérence des marchés à cadre, car ces évaluations suivent les mouvements du marché, ce qui pourrait entraîner une volatilité excessive des passifs d'assurance.

Dans cette cadre, nous allons nous baser sur le résultat de l'article de [Pelsser et Stajje \(2014\)](#) qui montre que tout opérateur cohérent avec le marché peut être construit par une "évaluation en deux étapes" qui divise les opérateurs de tarification actuarielle et de tarification financière sans arbitrage pour chaque période d'évaluation.

Nous considérons à l'instant t que π_t est le prix du gain conditionnellement à l'information disponible. [Salahnejhad et Pelsser \(2016\)](#) considèrent l'opérateur pour seulement deux facteurs de risque (risque financier couvrable et en risque actuariel diversifiable).

En nous basant sur le principe d'évaluation en deux étapes, tel que suggéré, par exemple, par [Pelsser et Stajje \(2014\)](#), notre approche implique une procédure itérative. Dans un premier temps, nous effectuons une évaluation actuarielle conditionnelle, notée $\pi_0^a(H_T^n/\mathfrak{F}_T^f \vee \mathfrak{F}_0)$, puis nous appliquons un opérateur d'évaluation financière, représenté par π_0^f . En résumé, cette démarche nous conduit à l'opérateur d'évaluation suivant.

En tirant profit de l'indépendance des risques financiers et actuariels sous la mesure du monde réel \mathbb{P} , en faisant l'hypothèse d'homogénéité et en adoptant le principe d'écart-type comme opérateur d'évaluation actuarielle π_0^a .

Nous obtenons l'expression suivante pour l'opérateur :

$$\pi_0^{(2a)}(H_T^n) := \pi_0^f(D(0, T) \cdot \pi_0^a(H_T^n/\mathfrak{F}_T^f \vee \mathfrak{F}_0)/\mathfrak{F}_0) \quad (1.8)$$

L'approche d'évaluation en deux étapes présente plusieurs propriétés souhaitables, comme nous le détaillerons ci-dessous.

1.2.2.2 Propriétés d'un évaluateur

Dans cette section, nous adoptons une approche axiomatique en énonçant les caractéristiques fondamentales qu'un opérateur d'évaluation doit posséder. Nous débutons par des propriétés générales.

Un opérateur d'évaluation, symbolisé par la fonction $\pi_0: \mathcal{H}_T \rightarrow \mathbb{R}$, attribue un nombre réel à chaque revendication contingente $H_T^n \in \mathcal{H}_T$ et satisfait aux exigences suivantes :

- 1) Normalisation : $\pi_0(0) = 0$.
- 2) Payoff constant : $\pi_0(x) = \mathbb{E}[D(0, T)] \cdot x, \forall x \in \mathbb{R}$.
- 3) Invariante par translation : $\pi_0(H_T^n + x) = \pi_0(H_T^n) + \mathbb{E}[D(0, T)] \cdot x, \forall x \in \mathbb{R}$ et $H_T^n \in \mathcal{H}_T$.
- 4) Homogénéité positive : $\pi_0(c \cdot H_T^n) = c \cdot \pi_0(H_T^n)$ pour $c > 0$ et $H_T^n \in \mathcal{H}_T$.
- 5) Sous additivité : $\pi_0(H_T^n + G_T^n) \leq \pi_0(H_T^n) + \pi_0(G_T^n)$, pour tout $G_T^n, H_T^n \in \mathcal{H}_T$.

La propriété (1) assure la normalisation de l'opérateur d'évaluation en attribuant une prime nulle à un gain terminal nul, établissant ainsi une référence cohérente pour l'évaluation des revendications. Les propriétés (2) et (3) préservent l'invariance des espèces, indiquant que l'ajout d'un montant déterministe $x \in \mathbb{R}$ au gain final entraîne une augmentation de la prime de sa valeur actualisée $\mathbb{E}[D(0, T)]$. Ces caractéristiques reflètent la sensibilité de la prime aux variations des gains et renforcent la cohérence avec le principe de valorisation actuarielle.

L'homogénéité positive (4) postule que les gains évoluent de manière proportionnelle à la prime, exprimant ainsi une relation constante entre un gain donné et sa prime associée. Cette propriété établit une continuité dans l'évaluation des revendications, offrant une base solide pour la tarification des différents types de gains.

Enfin, la sous-additivité reconnaît les effets de diversification, une considération cruciale dans l'évaluation des portefeuilles de revendications multiples. Elle assure que la prime totale d'un portefeuille ne peut jamais dépasser la somme des primes de ses composants individuels, reflétant ainsi la réduction potentielle du risque global grâce à la diversification.

Il est important de souligner que l'opérateur d'évaluation financière (1.3) satisfait pleinement à l'ensemble de ces propriétés, assurant ainsi une évaluation robuste et cohérente des revendications contingentes.

1.2.2.3 Présentation de l'opérateur d'évaluation hybride

Considérons un principe d'évaluation actuarielle π_0^a , un principe d'évaluation financière π_0^f , et un principe d'évaluation π_0^n conformément à la **définition 2.1**. La procédure en deux étapes des opérateurs d'évaluation $\pi_0^{(2a)}$ définie précédemment est également un opérateur

d'évaluation selon la **définition 2.1**. La méthode en deux étapes est à la fois cohérente avec le marché (market consistent) et actuarielle, tel que défini dans la **définition 2.1**.

Cette affirmation peut être démontrée de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 \pi_0^{(2a)}(H_T^n + G_T^n) &:= \pi_0^f(D(0, T). \pi_0^a(H_T^n + G_T^n | \mathfrak{F}_T^f \vee \mathfrak{F}_0)) | \mathfrak{F}_0 \\
 &\leq \pi_0^f(D(0, T). \pi_0^a(G_T^n | \mathfrak{F}_T^f \vee \mathfrak{F}_0)) + \pi_0^f(D(0, T). \pi_0^a(H_T^n | \mathfrak{F}_T^f \vee \mathfrak{F}_0)) | \mathfrak{F}_0 \\
 &\leq \pi_0^f(D(0, T). \pi_0^a(G_T^n | \mathfrak{F}_T^f \vee \mathfrak{F}_0)) | \mathfrak{F}_0 + \pi_0^f(D(0, T). \pi_0^a(H_T^n | \mathfrak{F}_T^f \vee \mathfrak{F}_0)) | \mathfrak{F}_0 \\
 &\leq \pi_0^{(2a)}(G_T^n) + \pi_0^{(2a)}(H_T^n)
 \end{aligned}$$

En nous servant de l'indépendance des risques financiers et actuariels sous la mesure du monde réel \mathbb{P} , l'hypothèse d'homogénéité et l'utilisation du principe d'écart type comme opérateur d'évaluation actuarielle π_0^a , on obtient pour l'opérateur suivant :

$$\begin{aligned}
 \pi_0^{(2a)}(H_T^n) &:= \pi_0^f(D(0, T). \pi_0^a(H_T^n / \mathfrak{F}_T^f \vee \mathfrak{F}_0)) / \mathfrak{F}_0 \\
 &= \pi_0^f\left(D(0, T)h(S_T). \pi_0^a\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_j(\tau_j) / \mathfrak{F}_T^f \vee \mathfrak{F}_0\right) / \mathfrak{F}_0\right) \\
 &= \pi_0^f\left(D(0, T)h(S_T). \pi_0^a\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_j(\tau_j) / \mathfrak{F}_0\right) / \mathfrak{F}_0\right) \\
 &= \pi_0^f(D(0, T)h(S_T) / \mathfrak{F}_0). \pi_0^a\left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_j(\tau_j) / \mathfrak{F}_0\right) \\
 \pi_0^{(2a)}(H_T^n) &= \mathbb{E}_{\mathfrak{F}_0}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f} [D(0, T)h(S_T)]. \left(\mathbb{E}_{\mathfrak{F}_0}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f} \left[\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_j(\tau_j) \right] + \frac{\alpha}{2} \sqrt{\text{Var}_{\mathfrak{F}_0}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n g_j(\tau_j) \right)} \right) \quad (1.9)
 \end{aligned}$$

Ayant établi une base solide avec la revue de la littérature, l'opérateur two-step valuation, et le cadre de tarification, nous plongeons maintenant nous en explorerons les modèles essentiels pour notre évaluation actuarielle en deux étapes. Nous aborderons en détail la modélisation des risques de taux d'intérêt avec le modèle G2++, en mettant l'accent sur sa flexibilité et son application dans le cadre de l'assurance vie. De plus, nous examinerons les modèles de Hull and White à un facteur et à deux facteurs pour le risque de mortalité, explorant les nuances de ces approches afin de mieux appréhender la complexité des dynamiques temporelles associées aux taux de mortalité. Ces modèles joueront un rôle essentiel dans notre analyse actuarielle, fournissant une base solide pour évaluer les contrats d'assurance vie avec participation dans un environnement financier stochastique.

Chapitre 2 : Modélisation des risques de taux

Ce chapitre se consacre à l'exploration détaillée des modèles cruciaux dans le cadre de notre évaluation actuarielle en deux phases distinctes. Notre démarche débutera par la modélisation du taux d'intérêt, mettant en œuvre le modèle G2++. Ensuite, nous aborderons la modélisation du taux de mortalité, débutant par l'application du modèle de Hull and White à un facteur, pour ensuite introduire le modèle à deux facteurs afin de mieux appréhender les tendances de mortalité. Une attention particulière sera accordée à la présentation du fonds d'investissement, apportant ainsi une dimension cruciale à notre analyse des contrats d'assurance vie. Enfin, nous examinerons de près la transition du modèle de Hull and White à un facteur vers celui à deux facteurs pour le taux de mortalité, en explicitant les motivations qui sous-tendent cette évolution significative.

2.1 Modélisation du risque de taux d'intérêt : modèle G2++

Le modèle G2++ est une approche avancée pour la modélisation des taux d'intérêt, il occupe une place centrale dans le paysage des modèles stochastiques des taux d'intérêt, émergeant comme une extension sophistiquée du bien établi G2++. Son développement découle de la volonté de surmonter les limitations des modèles antérieurs et de fournir une représentation plus flexible et réaliste des dynamiques des taux d'intérêt.

Le modèle G2++ excelle dans la modélisation simultanée des taux courts, intégrant des éléments tels que le retour à la moyenne, les volatilités stochastiques et les corrélations inter taux. Fondé sur des principes mathématiques robustes, il utilise des processus stochastiques avancés comme ceux d'Ornstein-Uhlenbeck pour une représentation réaliste des taux d'intérêt. Sa souplesse calibrable et son incorporation de multiples facteurs le rendent puissant pour la tarification précise d'une gamme d'instruments financiers. Son approche holistique capture de manière précise les variations temporelles des taux, offrant une adéquation supérieure aux conditions réelles des marchés financiers. Les sections à venir exploreront plus en détail la structure, la calibration et les applications pratiques du modèle G2++.

2.1.1 Description générale

Le modèle Gaussien à deux facteurs de Hull and White, tel que présenté par [Brigo & Mercurio \(2005\)](#), se révèle équivalent au modèle Gaussien à deux facteurs additifs G2++. Appartenant à la famille des modèles HJM à deux facteurs, le G2++ offre une traçabilité analytique élevée en raison de la distribution gaussienne des taux d'intérêt. Dans ce modèle, le processus des taux courts résulte de la somme de deux facteurs distribués selon la loi normale, conjugué à une fonction déterministe similaire à celle du modèle de Hull-White à un facteur.

Sa formulation est la suivante :

$$r(t) = x(t) + y(t) + \varnothing(t) \quad (2.1)$$

Avec :

$$dx(t) = -ax(t)dt + \sigma dw_1(t), x(0) = 0$$

$$dy(t) = -by(t)dt + \gamma dw_2(t), y(0) = 0$$

a, b : Coefficients de retour à la moyenne ;

σ, γ : Volatilités des processus ;

$\varnothing(t)$: fonction déterministe avec $\varnothing(0) = r_0, r(0) = r_0$

Ces paramètres sont tous positifs et constants. La corrélation entre les mouvements browniens w_1 et w_2 est donnée par :

$$dw_1(t)dw_2(t) = \rho dt, \text{ avec } -1 \leq \rho \leq 1.$$

En trouvant les solutions des équations des dynamiques de $x(t)$ et $y(t)$, nous avons :

$$r(t) = \varnothing(t) + x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} + \sigma \int_s^t e^{-a(t-u)} dW_1(u) + \gamma \int_s^t e^{-b(t-u)} dW_2(u) \quad (2.2)$$

De cette dernière expression, on déduit que le taux à court terme a une distribution normale.

▪ **Moyenne et variance**

Conditionnellement à \mathfrak{F}_s , r_t est normalement distribué avec une moyenne de :

$$E(r_t/\mathfrak{F}_s) = \varnothing(t) + x(s)e^{-a(t-s)} + y(s)e^{-b(t-s)} \quad (2.3)$$

Et de variance :

$$V(r_t/\mathfrak{F}_s) = \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2a(t-s)}) + \frac{\gamma^2}{2b} (1 - e^{-2b(t-s)}) + 2 \frac{\sigma\gamma\rho}{a+b} (1 - e^{-(a+b)(t-s)}) \quad (2.4)$$

Le modèle G2++ est ajusté à la courbe des prix d'obligations zéro-coupon observée sur le marché, notée $P^M(0, t)$, lorsque cela est possible :

$$\varnothing(t) = f^M(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2 + \frac{\gamma^2}{2b^2} (1 - e^{-bt})^2 + \rho \frac{\sigma\gamma}{ab} (1 - e^{-at})(1 - e^{-bt}) \quad (2.5)$$

- $f^M(0, t)$: Taux forward instantané de maturité t .
- L'estimation se fera par la méthode des moindres carrés généralisés.

Dans notre étude nous considérons que le taux forward instantané est obtenu à l'aide de la formule de Nelson Siegel augmenté ou modèle de Svensson.

2.1.2 Taux forward : Nelson Siegel augmenté ou modèle de Svensson

La courbe des taux forward représente les taux d'intérêt futurs prévus pour une série d'échéances ou d'horizons temporels différents. Le modèle de Nelson-Siegel-Svensson (NSS) est un modèle économétrique utilisé pour décrire la forme de la courbe des taux d'intérêt.

Il a été proposé en 1987 par les économistes américains Edward Nelson et Andrew Siegel, et a été étendu en 1994 par le Suédois Sven E. H. Svensson. Il est souvent utilisé pour estimer les taux d'intérêt futurs implicites dans la courbe des taux d'intérêt actuelle, en se basant sur les données historiques des taux d'intérêt.

Le modèle de Nelson-Siegel offre une reconstruction complète des diverses courbes de taux présentes sur le marché, mais il rencontre des limitations lorsqu'il s'agit de reproduire des formes présentant une bosse et un creux. Pour remédier à cela, le modèle de Nelson-Siegel augmenté est introduit. Sa fonctionnalité est exprimée par :

$$f_{Nss}(0, t) = \beta_0 + (\beta_{10} + \beta_{11}t) \exp(-c_1t) + \beta_{21}t \exp(-c_2t) \quad (2.6)$$

- $f_{Nss}(0, t)$ est le taux forward instantané entre 0 et t,
- β_{10} , β_{11} et β_{21} sont les paramètres du modèle qui sont estimés à partir des données historiques des taux d'intérêt,
- β_0 est le facteur de niveau, β_{10} le facteur de pente, β_{11} et β_{21} le premier et le second facteur de courbure.

Le prix du zéro coupon à tout instant t est donné par : $P(0, t) = \exp(-f_{Nss}(0, t) \cdot t)$

2.1.3 Prix du zéro coupon

Soit $B_x(t, T) = \frac{1 - e^{-x(T-t)}}{x}$ et

$$V^2(t, T) = \frac{\sigma^2}{a^2} \left(T - t + \frac{2}{a} (e^{-a(T-t)}) - \frac{1}{2a} (e^{-a(T-t)}) - \frac{3}{2a} \right) + \frac{\gamma^2}{b^2} \left(T - t + \frac{2}{b} (e^{-b(T-t)}) - \frac{1}{2b} (e^{-2(T-t)}) - \frac{3}{2b} \right) + 2 \frac{\sigma\gamma\rho}{ab} (T - t + B_a(t, T) + B_b(t, T) + B_{a+b}(t, T)) \quad (2.7)$$

Le prix d'un ZC de maturité T à la date t est donné par :

$$P(t, T) = E_{\mathbb{P}} \left[e^{-\int_t^T r(s) ds} / \mathcal{F}_t \right]$$

$$P(t, T) = \exp \left(-\int_t^T \phi(u) du - B_a(t, T)x(t) - B_b(t, T)y(t) + \frac{1}{2}V(t, T) \right) \quad (2.8)$$

Un calcul direct nous montre que :

$$\exp \left(\int_t^T \phi(u) du \right) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp \left(-\frac{1}{2} (V(0, T) - V(0, t)) \right) \quad (2.9)$$

Ainsi le prix de l'obligation peut être vu comme une fonction de la courbe initiale discrétisée :

$$P(t, T) = \frac{P(0, T)}{P(0, t)} \exp(-B_a(t, T)x(t) - B_b(t, T)y(t)) \times \exp\left(-\frac{1}{2}(V(t, T) - V(0, T) + V(0, t))\right) \quad (2.10)$$

2.1.4 Calibration des paramètres du modèle G2++

Les modèles de gestion des risques visent à générer des simulations précises des taux d'intérêt. Pour le processus de calibration, nous amorcerons d'abord l'estimation des paramètres en utilisant des données chronologiques réelles \mathbb{P} , puis nous procéderons à l'estimation des paramètres sous la mesure risque neutre \mathbb{Q} afin d'assurer une reproduction précise des prix du marché par les modèles d'évaluation. Ces paramètres sont déterminés en minimisant l'écart-type entre les prix observés et ceux générés par le modèle.

Sous la mesure du risque neutre, l'obligation à coupon zéro est la solution de l'EDD :

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt - \sigma B_a(t, T) dw_1(t) - \gamma B_b(t, T) dw_2(t) \quad (2.11)$$

Pour $t \leq T$

Dans cette partie, notre référence principale sera le modèle G2++, que nous considérerons comme un modèle à facteurs dans le cadre de la méthodologie de Heath-Jarrow-Morton (HJM), tel que décrit par [Hainaut Donatien\[5\]](#). Ainsi on obtient :

$$\begin{cases} \sigma_1(t, t + \tau) = \sigma e^{-a\tau} \\ \sigma_2(t, t + \tau) = \gamma e^{-b\tau} \\ \int_t^{t+\tau} \sigma_1(t, s) ds = \sigma B_a(t, t + \tau) \\ \int_t^{t+\tau} \sigma_2(t, s) ds = \gamma B_b(t, t + \tau) \end{cases} \quad (2.12)$$

La calibration se déroule en trois phases. Tout d'abord, nous calculons les différences de premier ordre des logarithmes des prix des obligations (rendement) pour diverses échéances. Ensuite, nous déterminons la matrice de covariance, suivie de l'estimation des paramètres par la minimisation de la somme des carrés résiduels, réduisant ainsi l'écart-type entre les prix observés et ceux générés par le modèle.

2.1.4.1 Calcul des différences de premier ordre du logarithme des prix des zéro coupon

Dans les modèles HJM, au lieu de modéliser r_t nous proposons une dynamique pour les taux instantanés à terme $f_{Nss}(t, u)$:

$$f_{Nss}(t, u) = -\frac{\partial \ln P(t, u)}{\partial u} \quad (2.13)$$

Tel que $P(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f_{Nss}(t, u) du\right)$

Le taux à terme instantané à l'instant t de l'échéance T est régi sous \mathbb{Q} par des EDD du type :

$$df_{Nss}(t, u) = \alpha(u, T)dt + \sigma(u, T)^\top dW_t \quad (2.14)$$

Où $\alpha(u, T)$ et $\sigma(u, T) = (\sigma_1(u, T), \dots, \sigma_p(u, T))^\top dW_t$ sont un processus scalaire et un vecteur de processus, de dimension p . W_t est un vecteur colonne de p mouvements browniens indépendants sous \mathbb{Q} .

Le taux sans risque est :

$$\begin{aligned} r_t &= f(t, t) \\ &= f(0, t) + \int_0^t \alpha(u, T)du + \int_0^t \sigma(u, T)^\top dW_u \end{aligned} \quad (2.15)$$

Si le marché est exempt d'arbitrage, la dérive des taux à terme $\alpha(t, T)$ est liée à $\sigma(t, T)$ par la relation suivante :

$$\alpha(t, T) = \sigma(t, T)^\top \int_0^t \sigma(u, T)du$$

Pour $t \leq T$

Sous la mesure du risque neutre, l'obligation à coupon zéro est la solution de l'EDD :

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt - \left(\int_t^T \sigma(s, T) ds \right)^\top dW_t$$

Si nous appliquons le lemme d'Itô à $\ln P(t, T)$, nous obtenons que :

$$d \ln P(t, T) = \left(r_t - \frac{1}{2} \sigma_B(t, T)^\top \sigma_B(t, T) \right) dt - \sigma_B(t, T)^\top dW_t \quad (2.16)$$

Le prix de l'obligation ZC à l'instant t est alors de :

$$P(t, T) = P(0, T) e^{\int_0^t r_s - \frac{1}{2} \sigma_B(s, T)^\top \sigma_B(s, T) - \int_0^t \sigma_B(s, T)^\top dW_s} \quad (2.17)$$

Soit $\theta_u = (\theta_u^1, \dots, \theta_u^p)^\top$ le vecteur p tel que $\widehat{W}_u = W_u - \theta_u$ est un BM sous \mathbb{P} . Le changement de mesure de \mathbb{Q} est désigné par :

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \Big|_t = \exp \left(- \int_0^t \theta_s^\top d\widehat{W}_s - \frac{1}{2} \int_0^t \|\theta\|^2 ds \right) \quad (2.18)$$

Notons $\eta(u, T) = \alpha(u, T) + \sigma(u, T)^\top \theta_u$ la dérive des taux à terme des taux à terme sous la mesure réelle et réécrire le taux à terme de l'échéance $t + \tau$ sous \mathbb{P} .

$$f(t, t + \tau) = f(0, t + \tau) + \int_0^t \eta(u, t + \tau)du + \int_0^t \sigma(u, t + \tau)^\top d\widehat{W}_u \quad (2.19)$$

Pour estimer le modèle, nous avons besoin des prix des obligations à coupon zéro dans les conditions suivantes sous \mathbb{P} :

Comme
$$P(t, t + \tau) = \exp\left(-\int_t^{t+\tau} f_{Nss}(t, s) ds\right)$$

Alors

$$d \ln P(t, t + \tau) = f(t, t) dt - \int_t^{t+\tau} f_{Nss}(t, s) ds$$

$$d \ln P(t, t + \tau) = \left(r_t - \int_t^{t+\tau} \eta(t, s) ds \right) dt - \sigma_B(t, t + \tau)^\top d\widehat{W}_t \quad (2.20)$$

Nous supposons que le drift de $\ln P(t, t + \tau)$ est stationnaire i.e.

$$r_t - \int_t^{t+\tau} \eta(t, s) ds \approx g(\tau)$$

Nous échantillons $d \geq p$ prix d'obligations à $n + 1$ moments équidistants $\{t_1, \dots, t_n\}$.

L'intervalle entre deux temps d'échantillonnage est Δ . Les échéances des prix des obligations sont représentées par $\{\tau_1, \dots, \tau_d\}$.

Nous calculons les différences de premier ordre du logarithme des prix des obligations (le rendement) :

$$y_i(\tau_j) = \ln P(t_{i+1}, t_{i+1} + \tau_j) - \ln P(t_i, t_i + \tau_j) \quad \text{pour } i = 1 \dots n \text{ et } j = 1 \dots d$$

$y_i = (y_i(\tau_j))_{j=1, \dots, d}$ est la réalisation d'un vecteur aléatoire aléatoire, $Y = \{Y_1, \dots, Y_d\}$

$$Y_j = g(\tau_j)\Delta - \sigma_B(t, t + \tau_j)^\top (\widehat{W}_{t+\Delta} - \widehat{W}_t) \quad (2.21)$$

2.1.4.2 Calcul de la matrice de variance covariance

La dernière équation met en évidence que les fonctions $\sigma(\dots)$ génèrent la matrice de covariance de Y . Ainsi, nous évaluons la matrice de covariance empirique $d \times d$ de $(y_i)_{i=1, \dots, n}$ et la notons Σ . Cette matrice Σ , positive et symétrique, peut être représentée comme suit :

$$\Sigma = \Psi \Lambda \Psi^\top.$$

Où

$\Psi = (\Psi_1, \dots, \Psi_d)$ est la matrice $d \times d$ des vecteurs propres normés à droite.

$\Psi_k = (\Psi_{k,1}, \dots, \Psi_{k,d})^\top$ sont des vecteurs de dimension d .

Λ est la matrice diagonale des vecteurs propres : $\Lambda = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_d)$ avec $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_d$

Les valeurs de Y , représentées par les occurrences y_i , forment un ensemble de points dans un espace à d dimensions. Les vecteurs propres de cet ensemble constituent une base orthonormée, où la variance du nuage est maximale dans chaque direction de l'axe. Les coordonnées des observations y_i dans cette nouvelle base sont :

$$\begin{pmatrix} \Psi_1^\top y_i \\ \vdots \\ \Psi_d^\top y_i \end{pmatrix}, i = 1, \dots, n$$

L'origine de la base orthonormée est :

$$\bar{y} = ((\bar{y}_1, \dots, \bar{y}_d))^\top = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n y_i$$

L'estimation de la variance de Ψ_j^\top selon le long de chaque axe est donné est λ_j et la variance totale est $\sum_{j=1}^d \lambda_j$. Nous projetons sur un sous-espace de dimension p . $Y = (Y_j)_{j=1, \dots, d}$ est alors approximé par :

$$Y_j \approx \bar{y}_j + \sum_{k=1}^p \Psi_{j,k} \sqrt{\lambda_k} X_k, \quad j = 1, \dots, d$$

Où X_k sont p variables indépendantes et suivent $\mathcal{N}(0,1)$.

2.1.4.3 Estimation des paramètres

Les paramètres estimés sous la mesure réelle doivent subir des ajustements sous la mesure \mathbb{Q} afin de minimiser l'écart entre les prix observés sur le marché et ceux générés par le modèle.

Concrètement, nous optons initialement pour une forme fonctionnelle prédéfinie de $\sigma_k(t, s)$ et procédons à l'estimation des paramètres de cette fonction en minimisant les moindres carrés du critère mentionné précédemment.

Un estimateur $\hat{\sigma}(t, s) = (\hat{\sigma}_k(t, s))_{k=1, \dots, p}$ de $\sigma(t, s)$ est tel que :

$$\hat{\sigma}_k = \underset{\sigma_k(\cdot, \cdot)}{\text{argmin}} \sum_{j=1}^d \left(- \int_t^{t+\tau_j} \sigma_k(t, s) ds \sqrt{\Delta} \sqrt{\Delta} - \Psi_{j,k} \sqrt{\lambda_k} \right)^2 \quad (2.22)$$

Pour $k = 1, \dots, p$

$$\hat{\gamma}, \hat{b}, \hat{\rho} = \underset{\gamma, b, \rho}{\text{argmin}} \sum_{j=1}^d \left(-\hat{\alpha} \rho \left(\frac{1 - e^{-\hat{a}\tau_j}}{\hat{a}(\sqrt{1 - \rho^2})} - \alpha \left(\frac{1 - e^{-b\tau_j}}{b} \right) \right) \sqrt{\Delta} - \Psi_{j,2} \sqrt{\lambda_2} \right)^2 \quad (2.23)$$

$$\frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt - \sigma \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) dw_1(t) - \gamma \left(\frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} \right) dw_2(t)$$

En le réécrivant avec les corrélations nous avons :

$$\begin{aligned} \frac{dP(t, T)}{P(t, T)} = r_t dt - \sigma \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) (\sqrt{1 - \rho^2}) d\tilde{w}_1(t) \\ - \left(\sigma \rho \left(\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right) + \gamma \left(\frac{1 - e^{-b(T-t)}}{b} \right) \right) d\tilde{w}_2(t) \end{aligned}$$

Avec $\alpha = \sqrt{1 - \rho^2} \sigma$

$$\text{Et} \quad \begin{cases} dw_2(t) = d\tilde{w}_2(t) \\ dw_1(t) = \rho d\tilde{w}_2(t) + \sqrt{1 - \rho^2} d\tilde{w}_1(t) \end{cases}$$

Nous estimons donc α et a :

$$\hat{\alpha}, \hat{a} = \operatorname{argmin}_{\alpha, a} \sum_{j=1}^d \left(-\alpha \left(\frac{1 - e^{-a\tau_j}}{a} \right) \sqrt{\Delta} - \Psi_{j,1} \sqrt{\lambda_1} \right)^2$$

Finalement l'estimation de σ est donnée par $\hat{\sigma} = \frac{\hat{\alpha}}{\sqrt{1 - \hat{\rho}^2}}$

Après avoir exploré le modèle G2++ pour le taux d'intérêt, nous nous tournons maintenant vers la modélisation du taux de mortalité. En commençant par le modèle de Hull and White à un facteur, nous élargirons ensuite notre analyse avec le modèle à deux facteurs. Cette transition est cruciale pour mieux comprendre les risques liés aux contrats d'assurance vie.

2.2 Modélisation du risque de taux de mortalité

Dans cette section, nous amorcerons notre exploration par la modélisation du taux de mortalité en utilisant le modèle de Hull and White à un facteur, avant d'étendre notre analyse au modèle à deux facteurs. Cette progression méthodique nous permettra de capturer de manière approfondie les dynamiques complexes du taux de mortalité dans le contexte de notre évaluation actuarielle.

2.2.1 Modèle de Hull and White à 1 facteur

2.2.1.1 Description générale

Le modèle Hull-White (HW) est une dérivation du modèle de Vasicek. Les auteurs Hull et White ont introduit une moyenne à long terme comme fonction déterministe du temps pour

modéliser l'évolution du taux d'intérêt court dans le cadre risque-neutre. Dans cette étude, nous adopterons le modèle spécifiquement proposé par [F. Zeddouk et P. Devolder en 2020 \[12\]](#).

Ce modèle de taux à un facteur est défini par l'expression suivante :

$$d\mu_x(t) = (\varepsilon(t) - b\mu_x(t))dt + \sigma dw(t) \quad (2.24)$$

Avec $b, \sigma > 0$ et $w(t)$ un mouvement brownien sous la mesure risque-neutre et $\varepsilon(t)$ une fonction déterministe.

Enfin d'améliorer la mortalité, le paramètre de contrôle de la moyenne à long terme du taux instantané de mortalité est remplacé par la fonction classique de Gompertz qui exprime que le taux instantané de mortalité croît exponentiellement avec l'âge. Le modèle de Hull & White modifié devient :

$$d\mu_x(t) = b \left(\frac{A}{b} e^{Bt} - \mu_x(t) \right) dt + \sigma dw(t) \quad (2.25)$$

Avec $A, B > 0$.

En posant $\frac{A}{b} = \mu_x(0)$, le modèle devient :

$$d\mu_x(t) = b \left(\mu_x(0) e^{Bt} - \mu_x(t) \right) dt + \sigma dw(t) \quad (2.26)$$

Le modèle étant gaussien, nous obtenons facilement le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{d\alpha(t, T)}{dt} = \beta(t, T)\varepsilon(t) - \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2 \\ \frac{d\beta(t, T)}{dt} = \beta(t, T)b - 1 \end{cases} \quad (2.27)$$

Avec $\beta(T, T) = \alpha(T, T) = 0$, $\beta(t, T)$ et $\alpha(t, T)$ sont donnés par :

$$\begin{cases} \alpha(t, T) = \frac{A}{b} \left[e^{-bT} \frac{e^{(B+b)T} - e^{(B+b)t}}{B+b} - \frac{e^{BT} - e^{Bt}}{B} \right] - \frac{\sigma^2}{2b^2} \left[\frac{1}{b}(1 - e^{-b(T-t)}) - T + t \right] \frac{\sigma^2}{4b^3} (1 - e^{-b(T-t)})^2 \\ \beta(t, T) = \frac{1}{b}(1 - e^{-b(T-t)}) \end{cases} \quad (2.28)$$

Nous obtenons ainsi le taux de mortalité décrit comme suit :

$$\mu_x(t) = \mu_x(s)e^{-b(t-s)} + \frac{A}{b+B}(e^{Bt} - e^{Bs(t-s)}) + \sigma e^{-bt} \int_s^t e^{ut} dw(u) \quad (2.29)$$

La moyenne et la variance sont données par les expressions suivantes :

$$E_P[\mu_x(t)/F_s] = \mu_x(s)e^{-b(t-s)} + \frac{A}{b+B}(e^{Bt} - e^{Bs(t-s)})$$

$$\text{Var}_P[\mu_x(t)/F_s] = -\frac{\sigma^2}{2b^2}(1 - e^{-2b(T-t)})$$

L'intensité de la mortalité peut être négative avec une probabilité positive :

$$\Phi\left(-\frac{\mu_x(s)e^{-b(t-s)} + \frac{A}{b+B}(e^{Bt} - e^{Bs(t-s)})}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{2b^2}(1 - e^{-2b(T-t)})}}\right) = \Phi(\eta(A, B, b, \sigma)) \quad (2.30)$$

Comme ce modèle est affine, la probabilité de survie s'écrit sous la forme suivante :

$${}_{T-t}\bar{P}_{x+t} = E_P\left[e^{-\int_t^T \mu_x(s)ds}\right] = e^{\alpha(t,T) - \beta(t,T)\mu_x(t)} \quad (2.31)$$

2.2.1.2 Calibration

Nous cherchons à estimer les paramètres δ en utilisant la méthode des moindres carrés (LSE) pour calibrer la fonction ${}_t p_x$ définie par l'équation (2.1.10), où δ représente le vecteur des paramètres. Il est important de souligner qu'il existe plusieurs approches pour calibrer chacun de ces modèles, et que les résultats peuvent varier en fonction de la technique de calibrage employée, chaque méthode ayant ses propres avantages et limitations.

La minimisation des erreurs des moindres carrés est réalisée en comparant les probabilités de survie calculées, ${}_t p_x$, aux probabilités de survie observées, ${}_t \hat{p}_x$, autour desquelles nous souhaitons calibrer nos modèles stochastiques. La fonction de coût associée à cette minimisation est définie comme suit :

$$R = \min_{\delta} \sum_{j=0}^n ({}_t p_x - {}_t \hat{p}_x)^2 \quad (2.32)$$

Pour la procédure de minimisation des moindres carrés, il est essentiel de spécifier des paramètres initiaux à partir desquels la routine R commence la recherche du minimum de l'expression (2.1.11). Étant donné que nous traitons un système non linéaire, nous optons pour la méthode de Newton-Raphson généralisée fournie par R. Étant donné la sensibilité du résultat final aux valeurs initiales, nous générons différents ensembles de paramètres initiaux de manière aléatoire et effectuons plusieurs étapes d'optimisation. Les valeurs qui minimisent le résidu sont ensuite choisies comme points de départ pour l'optimisation par moindres carrés. Il est crucial de noter que la sélection judicieuse des paramètres initiaux joue un rôle déterminant dans le succès de l'estimation, et par conséquent, cette étape est effectuée de manière approfondie en générant divers ensembles de valeurs initiales et en évaluant leur impact sur le processus d'optimisation.

Il a été observé que le modèle à un facteur de Hull-White décrit une situation où les taux convergent vers une moyenne limite définie par $\varepsilon(t)$ à une cadence particulière, régie par le retour à la moyenne b . La fonction $\varepsilon(t)$ est déterministe, cependant, pour conférer au modèle de Hull-White à un facteur, une perspective stochastique est envisagée en y ajoutant la fonction stochastique $v(t)$. Par conséquent, au fil du temps, notre modèle de taux courts évoluerait vers une fonction stochastique à un facteur, qui elle-même convergerait vers une fonction déterministe. Nous introduirons alors un coefficient de corrélation ρ entre les processus de Wiener qui gouvernent la dynamique de $r(t)$ et $v(t)$. Nous soumettrons l'idée d'un modèle de Hull and White à deux facteurs en tant qu'option.

2.2.2 Modèle de Hull and white à 2 facteurs

L'introduction du modèle de Hull and White à deux facteurs pour le taux de mortalité constitue une étape cruciale, établissant une équivalence avec le processus de calibration déjà réalisé pour les taux d'intérêt. Cette cohérence dans notre démarche réside dans le fait que, puisque les taux d'intérêt ont déjà été calibrés, l'application du modèle de Hull and White à deux facteurs pour le taux de mortalité suit un processus similaire. Cette équivalence renforce la robustesse de notre approche actuarielle, soulignant une continuité logique dans la modélisation des risques associés aux taux d'intérêt et à la mortalité.

$$\begin{aligned}d\mu(t) &= (\theta(t) + v(t) - \bar{a}\mu(t))dt + \delta_1(t)dW_1(t) \\dv(t) &= -\bar{b}v(t)dt + \delta_2(t)dW_2(t)\end{aligned}\tag{2.33}$$

Avec $dW_1(t).dW_2(t) = \rho dt$

2.2.2.1. Description générale

Nous allons faire une équivalence avec le modèle de G2++ énoncé avec celui de Hull and White à 2 facteurs afin de faciliter les calculs comme décrit dans [Arnaud Blanchard \[2\]](#). Le modèle Hull-White à deux facteurs est défini de telle sorte qu'il suppose que le taux court évolue dans la mesure ajustée au risque en fonction de :

$$\begin{aligned}d\mu(t) &= (\theta(t) + v(t) - \bar{a}\mu(t))dt + \delta_1(t)dZ_1(t) \\du(t) &= -\bar{b}v(t)dt + \delta_2(t)dZ_2(t), \quad v(0) = 0, \quad \mu(0) = \mu_0\end{aligned}\tag{2.34}$$

Avec (Z_1, Z_2) deux mouvements browniens tel que $dZ_1(t)dZ_2(t) = \bar{\rho}dt$, $\mu_0, \bar{a}, \bar{b}, \delta_1$ et δ_2 des constantes positives.

La fonction déterministe $\theta(t)$ est choisie pour s'adapter à la structure actuelle des taux de mortalité. De ce fait nous définissons le nouveau processus stochastique :

$$\mathcal{X}(t) = \mu(t) + \partial v(t)$$

Où $\partial = \frac{1}{b-a}$. En dérivant $\mathcal{X}(t)$ on obtient :

$$\begin{aligned} d\mathcal{X}(t) &= (\theta(t) + v(t) - \bar{a}\mu(t))dt + \delta_1(t)dZ_1(t) - \partial\bar{b}v(t)dt + \delta_2(t)dZ_2(t) \\ &= (\theta(t) - \bar{a}\mathcal{X}(t))dt + \delta_3(t)dZ_3(t) \end{aligned}$$

Avec

$$\delta_3 = \sqrt{\delta_1^2 + \frac{\delta_2^2}{(\bar{a} - \bar{b})^2} + 2\bar{\rho} \frac{\delta_1\delta_2}{\bar{b} - \bar{a}}}$$

$$dZ_3(t) = \frac{\delta_1 dZ_1(t) - \frac{\delta_2}{\bar{a} - \bar{b}} dZ_2(t)}{\delta_3}$$

Nous définissons donc un nouveau processus stochastique $\varphi(t)$ tel que :

$$\varphi(t) = -\partial v(t) = \frac{v(t)}{\bar{a} - \bar{b}}$$

La différentiation de $\varphi(t)$ nous donne :

$$\begin{aligned} d\varphi(t) &= -\frac{\bar{b}}{\bar{a} - \bar{b}}v(t) + \frac{\delta_2}{\bar{a} - \bar{b}}dZ_2(t) \\ d\varphi(t) &= -\bar{b}\varphi(t) + \delta_4(t)dZ_2(t) \end{aligned}$$

Avec

$$\delta_4 = \frac{\delta_2}{\bar{a} - \bar{b}}$$

Ainsi nous pouvons réécrire : $\mu(t) = \tilde{\mathcal{X}}(t) + \varphi(t) + \emptyset(t)$

Où :

$$\begin{aligned} d\tilde{\mathcal{X}}(t) &= -\bar{a}\tilde{\mathcal{X}}(t) + \delta_3(t)dZ_3(t) \\ d\varphi(t) &= -\bar{a}\varphi(t) + \delta_4(t)dZ_2(t) \\ \emptyset(t) &= \mu_0 e^{-\bar{a}t} + \int_0^t \theta(s)e^{-\bar{a}(t-s)} ds \end{aligned}$$

On observe ainsi que le modèle à deux facteurs de Hull-White partage des similitudes avec un modèle gaussien à deux facteurs additifs. Cette parfaite analogie revêt une utilité particulière : tandis qu'il est plus aisé d'interpréter les divers paramètres du modèle de Hull-White et leur impact sur la structure des prix et de la volatilité, la formulation gaussienne du modèle offre

une voie plus rapide pour obtenir les prix des obligations et des produits dérivés, tout en préservant la forme caractéristique de ces derniers.

Alors on obtient les équivalences correspondantes entre chaque paramètre des deux modèles :

$$\begin{aligned}\bar{a} &= a \\ \bar{b} &= b \\ \sigma &= \sqrt{\delta_1^2 + \frac{\delta_2^2}{(\bar{a} - \bar{b})^2} + 2\bar{\rho} \frac{\delta_1 \delta_2}{\bar{b} - \bar{a}}} \\ \gamma &= \frac{\delta_2}{\bar{a} - \bar{b}} \\ \rho &= \frac{\delta_1 \bar{\rho} - \gamma}{\sigma} \\ \varnothing(t) &= \mu_0 e^{-\bar{a}t} + \int_0^t \theta(s) e^{-\bar{a}(t-s)} ds\end{aligned}$$

2.2.2.2 Calibration des paramètres du modèle Hull and white à 2 facteurs

La procédure de calibrage du taux de mortalité avec le modèle de Hull and White à 2 facteurs présente des similitudes notables avec celle utilisée pour la calibration du taux d'intérêt, tout comme pour le calcul du prix zéro coupon. Il est essentiel de noter que, étant donné que le taux de mortalité ne peut être négatif, des conditions spécifiques seront rigoureusement appliquées pour garantir des résultats réalistes et cohérents.

2.3 Fonds d'investissement : Actif risqué

Dans la littérature, le modèle fondamental et de référence pour la modélisation des cours des actions est celui d'un actif risqué suivant un mouvement brownien géométrique. Ce modèle est largement utilisé pour décrire la dynamique d'investissement d'un actif financier. Dans sa formulation classique, le modèle suppose que le prix de l'actif financier suit un processus stochastique en temps continu, caractérisé par l'équation différentielle stochastique ci-dessous, dans le cadre de la probabilité risque neutre. Il est régi suivant 04 hypothèses :

- ✚ La présence d'un actif non risqué,
- ✚ La présence d'un actif risqué suivant un brownien géométrique,
- ✚ Le marché parfait (sans arbitrage),
- ✚ L'actif sous-jacent ne verse pas de revenu avant la fin de la période considérée.

N.B : Nous considérons que l'investissement initial est un actif risqué plus précisément une action. Les risques financiers sont ceux dus à l'évolution des actifs et des taux d'intérêt noté r .

Hypothèse 1 : le taux de rendement des actifs risqués est supposé corrélé avec le taux d'intérêt.

Hypothèse 2 : En présence du risque de longévité, la valeur des actifs à maturité est indépendante du temps de vie restant.

▪ Actif risqué

Dans sa formulation classique, le modèle suppose que le prix de l'actif financier suit un processus stochastique en temps continu, décrit par l'équation différentielle stochastique suivante sous la probabilité risque neutre :

$$dS_t = r(t)S_t dt + \sigma S_t dw(t)$$

Avec :

- S_t : la valeur de l'action à la date t ;
- $r(t)$: le taux court instantané ;
- σ : la volatilité constante de l'action ;
- $w(t)$: un mouvement brownien standard sous \mathbb{Q} .

Le taux instantané retenu est dérivé des modèles de taux exposés dans les sections précédentes, et par conséquent, il est stochastique. Cette caractéristique vise à garantir l'absence d'opportunité d'arbitrage dans le prix modélisé. En appliquant le lemme d'Itô à $\ln S_t$, on démontre que la solution générale de l'équation différentielle stochastique est formulée comme suit (références : Tankov [2011] et Tankov [2015]) :

$$S_t = S_0 e^{-\int_0^t (r(u) - \frac{1}{2}\sigma^2) du + \int_0^t \sigma_u dw(u)}$$

Ce modèle est cohérent, logique, compréhensible, facile à utiliser, sa mise en œuvre est simple et permet d'une spéculation sécurisée :

- Le temps est une fonction continue ;
- Possibilité d'effectuer des ventes à découvert ;
- Absence de coût de transactions ;
- Existence d'un taux d'intérêt sans risque.

2.4 Avantages des modèles stochastiques

Les modèles stochastiques dans la tarification actuarielle offrent plusieurs avantages par rapport aux modèles déterministes, en particulier lors du calcul des provisions.

- **Considération des incertitudes** : Les modèles stochastiques tiennent compte des fluctuations aléatoires des variables financières et des facteurs économiques, permettant ainsi de prendre en compte l'incertitude inhérente aux marchés financiers. Cela offre une perspective plus réaliste des scénarios possibles par rapport aux modèles déterministes.
- **Gestion des risques** : Les modèles stochastiques permettent une évaluation plus précise des risques associés aux produits d'assurance et aux engagements actuariels. En incorporant la variabilité des rendements financiers, des taux d'intérêt et d'autres facteurs, ils fournissent une mesure plus robuste des risques financiers auxquels une compagnie d'assurance peut être exposée.
- **Adaptabilité aux conditions du marché** : Les modèles stochastiques sont plus adaptables aux conditions changeantes du marché, car ils peuvent refléter les variations temporelles et les chocs économiques. Cela permet aux compagnies d'assurance de mieux anticiper et de répondre aux évolutions du marché.
- **Prise en compte des interactions entre variables** : Les modèles stochastiques permettent de modéliser les interactions complexes entre différentes variables, telles que les taux d'intérêt, les rendements des actifs et les taux de mortalité. Cette approche plus nuancée offre une compréhension plus complète des risques liés aux engagements actuariels.

En somme, l'utilisation de modèles stochastiques dans la tarification actuarielle améliore la précision des prévisions en tenant compte de l'incertitude et des fluctuations aléatoires, ce qui est essentiel pour une gestion efficace des risques dans le secteur de l'assurance. Ces modèles offrent une perspective plus réaliste et une base solide pour la prise de décision dans un environnement financier complexe et changeant. Ce qui nous permet en particulier d'effectuer des calculs des réserves à tout instant t contrairement aux modèles déterministes.

Après avoir établi les fondements théoriques de notre évaluation actuarielle en deux étapes avec la modélisation des risques de taux, nous aborderons désormais l'application concrète de ces modèles dans le cadre des produits d'assurance vie. Dans le chapitre suivant, nous explorerons comment ces modèles sont mis en œuvre pour évaluer divers produits d'assurance vie, mettant ainsi en lumière leur pertinence pratique et leurs implications dans le domaine de l'assurance.

Chapitre 3 : Application des produits avec participation bénéficiaire

Dans cette section, nous mettons en œuvre l'approche d'évaluation actuarielle en deux étapes que nous avons préalablement détaillée, en l'appliquant spécifiquement aux produits d'assurance vie avec participation bénéficiaire. Notre analyse se concentrera sur trois types de contrats : le pure endowment, l'annuité croissante, et l'annuité croissante différée. L'objectif principal est d'illustrer comment ces modèles théoriques influent sur le calcul de la fair value, ainsi que sur la détermination des différentes réserves associées à chaque type de produit. Nous explorerons en détail les implications actuarielles et financières de ces contrats, en mettant en évidence les spécificités qui émergent dans le cadre de notre approche en deux étapes. Cette démarche nous permettra d'obtenir une vision approfondie des mécanismes d'évaluation, en tenant compte des éléments clés tels que les risques de taux d'intérêt, les fluctuations du marché et les paramètres actuariels.

3.1 Pure Endowment

3.1.1 Description générale

Considérons un pure endowment avec participation bénéficiaire pour lequel l'assureur verse un capital garanti d'un 1€ en cas de vie après T années mais aucun paiement en cas de décès ne sera effectué avant la date T. La prime unique payée par le client est donnée par :

$$P = \frac{1}{(1+i)^T} {}_T\hat{p}_x \quad (3.1)$$

Où i représente le taux d'intérêt technique, ${}_T\hat{p}_x$ la probabilité de survie choisie par l'assureur. Les deux hypothèses actuarielles sont prudentes ex ante sur une base de premier ordre. La prime P est investie dans un fonds d'investissement $\{S_t\}_{t \in [0, T]}$, $S_0 = P$. De ce fait lorsque l'assuré est en vie, le paiement final au client au moment T se décompose en deux parties :

- Le montant garanti égal à $c = 1€$;
- La participation au bénéfice probable (Reversionary bonus).

Le Reversionary bonus est traité comme une part $\beta \in (0, 1)$ de la différence entre la valeur du fonds et la prime P augmentée au taux d'intérêt technique i (si la différence est positive). Dans l'ensemble, cela aboutit à un paiement à l'instant T :

$$h(S_T) = 1 + \beta \cdot \max(S_T - P(1+i)^T, 0) \quad (3.2)$$

Nous considérons maintenant un portefeuille de n contrat d'assurance-vie homogène. Le pure endowment avec profit ainsi défini est un contrat hybride $H_T^n \in \mathcal{H}_T$ où le gain du client $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ est donné par :

$$H_T(j) = g_T(\tau_j)h(S_T) = \mathbb{1}_{\{\tau_j > T\}} \cdot \left(1 + \beta \cdot \max(S_T - P(1+i)^T, 0)\right) \quad (3.3)$$

Où

$$h((S_s)_{0 \leq s \leq T}) = \begin{cases} 1, & 0 \leq s < T \\ h(S_T), & \text{sinon} \end{cases} \quad \text{et} \quad g_t(\tau_j) = \begin{cases} 0, & t < T \\ \mathbb{1}_{\{\tau_j > T\}}, & \text{sinon} \end{cases}$$

Le paiement moyen pour un client est donné par :

$$H_T^n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n H_T(j) \quad (3.4)$$

On supposera qu'il y a indépendance entre le taux de mortalité et le marché financier.

3.1.2 Fair-value : Tarification à 2 étapes

L'évaluation actuarielle en 02 étapes à l'instant t est définie comme suit :

$$\pi_t^{(2a)}(H_T^n) = \pi_t^f(D(t, T) \cdot h(S_T) / \mathfrak{F}_t) \cdot \pi_t^a \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau_j > T\}} / \mathfrak{F}_t \right) \quad (3.5)$$

3.1.2.1 Tarification financière sous \mathbb{Q}^f

Le marché financier se compose d'un actif risqué $\{S_t\}_{t \in [0, T]}$ dont la dynamique sous \mathbb{P}^f est définie comme suit :

$$dS_t = \mu_s S_t dt + \sigma_s S_t dw(t) \quad (3.6)$$

Où $w(t)$ est un mouvement brownien standard sous \mathbb{P}^f , $S_0 = P$.

Nous supposons qu'il existe une mesure martingale équivalente \mathbb{Q}^f où la dynamique de S_t sous \mathbb{Q}^f est $dS_t = r(t)S_t dt + \sigma_s S_t dw^{\mathbb{Q}^f}(t)$ avec $w^{\mathbb{Q}^f}(t) = w(t) + \theta^{(2)} t$, $\theta^{(2)} = \frac{\mu_s - E[r(t)]}{\sigma_s}$.

De ce fait la fair-value financière est :

$$\begin{aligned} \pi_t^f(D(t, T) \cdot h(S_T) / \mathfrak{F}_t) &= \pi_t^f \left(D(t, T) \left(1 + \beta \cdot \max(S_T - P(1+i)^T, 0)\right) \right) \\ &= \pi_t^f \left(e^{-\int_t^T r_s ds} + \beta \cdot (S_T - P(1+i)^T)^+ e^{-\int_t^T r_s ds} / \mathfrak{F}_t \right) \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f} \left[\left(e^{-\int_t^T r_s ds} + \beta \cdot (S_T - P(1+i)^T)^+ e^{-\int_t^T r_s ds} \right) / \mathfrak{F}_t \right] \end{aligned}$$

$$\pi_0^f(D(t, T) \cdot h(S_T) / \mathfrak{F}_t) = P(t, T) + \beta \{S(t) \vartheta(h_1(t)) - {}_T\hat{p}_x P(t, T) \vartheta(h_2(t))\} \quad (3.7)$$

Où $m(t, T) = \int_t^T \vartheta(u) du + B_a(t, T)x(t) + B_b(t, T)y(t)$

Or

$$P(t, T) = \mathbb{E}_{\mathfrak{F}_t}^{\mathbb{Q}^f} \left[e^{-\int_t^T r_s ds} \right] = e^{-m(t, T) + \frac{1}{2} V^2(t, T)}$$

$$h_{1,2}(t) = \frac{\ln(S_t / {}_T\hat{p}_x) - \ln(P(t, T) \pm \frac{1}{2} \vartheta^2(t, T))}{\vartheta(t, T)}$$

$\vartheta^2(t, T)$ représente la variance totale pour les risques financiers et les risques de mortalité.

$$\vartheta^2(t, T) = \sigma_s^2(T - t) + \int_t^T V^2(u, T) du + 2\rho \int_t^T \sigma_s V(u, T) du \quad (3.8)$$

3.1.2.2 Tarification actuarielle sous \mathbb{Q}^a

$$\pi_t^a \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau_j > T\}} / \mathfrak{F}_t \right) = \mathbb{E}_{\mathfrak{F}_t}^{\mathbb{Q}^a \times \mathbb{Q}^f} \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau_j > T\}} \right] + \frac{\alpha}{2} \left(\text{Var}_{\mathfrak{F}_t}^{\mathbb{Q}^a \times \mathbb{Q}^f} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau_j > T\}} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.9)$$

Sous \mathbb{P}^a :

$$\begin{aligned} P_x(t, T) &= \mathbb{E}_{\mathfrak{F}_t}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f} \left[\frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau_j > T\}} \right] = \mathbb{E}_{\mathfrak{F}_t}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f} \left[e^{-\int_t^T \mu_{x+s} ds} \right] = \mathbb{E}_{\mathfrak{F}_t}^{\mathbb{P}^a} \left[e^{-\int_t^T \mu_{x+s} ds} \right] \\ &= e^{-m_x(t, T) + \frac{1}{2} V_x^2(t, T)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}_{\mathfrak{F}_t}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau_j > T\}} \right) &= \left(\mathbb{E}_{\mathfrak{F}_t}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f} \left[\text{Var}_{\mathfrak{F}_t, G_T}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau_j > T\}} \right) \right] + \text{Var}_{\mathfrak{F}_t}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f} \left[\mathbb{E}_{\mathfrak{F}_t, G_T}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau_j > T\}} \right) \right] \right) \\ &= \text{Var}_{\mathfrak{F}_t}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f} \left(e^{-\int_t^T \mu_{x+s} ds} \right) + \frac{1}{n} \mathbb{E}_{\mathfrak{F}_t}^{\mathbb{P}^a \times \mathbb{Q}^f} \left(e^{-\int_t^T \mu_{x+s} ds} \left(1 - e^{-\int_t^T \mu_{x+s} ds} \right) \right) \\ &= (e^{V_x^2(t, T)} - 1) \cdot e^{-2m_x(t, T) + V_x^2(t, T)} + \frac{1}{n} \left(e^{-m_x(t, T) + \frac{1}{2} V_x^2(t, T)} - e^{-2m_x(t, T) + 2V_x^2(t, T)} \right) \quad (3.10) \end{aligned}$$

Sous \mathbb{Q}^a :

$$\begin{aligned} P_x^*(t, T) &= e^{-m_x^*(t, T) + \frac{1}{2} V_x^2(t, T)} \\ m_x^*(t, T) &= m_x(t, T) + \theta^{(1)} \left(\frac{\sigma_x}{a_x} \left(T - t - \frac{1 - e^{-a_x(T-t)}}{a_x} \right) + \frac{\gamma_x}{b_x} \left(T - t - \frac{1 - e^{-b_x(T-t)}}{b_x} \right) \right) \end{aligned}$$

Où $\theta^{(1)}$ est le prix du marché du risque de longévité.

$$\text{Var}_{\mathfrak{F}_t}^{\mathbb{Q}^a \times \mathbb{Q}^f} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau_j > T\}} \right) = \left(e^{V_X^2(0,T)} - 1 \right) \cdot e^{-2m_X^*(t,T) + V_X^2(0,T)} + \frac{1}{n} \left(e^{-m_X^*(t,T) + \frac{1}{2}V_X^2(t,T)} - e^{-2m_X^*(t,T) + 2V_X^2(0,T)} \right)$$

Finalement, la fair-value du pure endowment (PE) à l'instant t est donnée par :

$$\begin{aligned} \pi_t^{(2a)}(H_T^n)_{PE} &= \pi_t^f(D(t, T)h(S_T)/\mathfrak{F}_t) \cdot \pi_t^a \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbb{1}_{\{\tau_j > T\}} / \mathfrak{F}_t \right) \\ &= \left(P(t, T) + \beta \{ S(t) \vartheta(h_1(t)) - {}_T\hat{p}_x P(t, T) \vartheta(h_2(t)) \} \right) \cdot \left(e^{-m_X^*(t,T) + \frac{1}{2}V_X^2(t,T)} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\alpha}{2} \left(\left(e^{V_X^2(t,T)} - 1 \right) \cdot e^{-2m_X^*(t,T) + V_X^2(t,T)} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{n} \left(e^{-m_X^*(t,T) + \frac{1}{2}V_X^2(t,T)} - e^{-2m_X^*(t,T) + 2V_X^2(t,T)} \right) \right)^{\frac{1}{2}} \right) \end{aligned} \quad (3.11)$$

3.1.3 Calcul de provisions

Rappelons que dans les différentes formules de tarification actuarielles ci-dessus, pour un contrat de durée T , la fair-value calculée à l'instant $t=0$ correspond à la prime du contrat et à $t \in]0; T]$ représente la valeur de la provision à cet instant. Ceci est possible grâce aux modèles stochastiques utilisés dans la tarification actuarielle mettant ainsi en exergue un avantage essentiel dans la gestion des risques de l'assurance-vie. Dans la pratique, la tarification des provisions se fera au moyen de simulation de Monte-Carlo.

3.2 Annuité croissante

3.2.1 Description générale

Considérons un contrat d'annuité avec participation bénéficiaire pour le paiement d'une unité croissante de taux g à la fin de chaque année en cas de survie jusqu'à l'âge maximum $x + T$. La prime unique payée par le client est donnée par :

$$P_T = \sum_{t=1}^T \frac{(1+g)^{t-1}}{(1+i)^t} {}_t\hat{p}_x \quad (3.12)$$

Chaque portion de la prime $\frac{(1+g)^{t-1}}{(1+i)^t} {}_t\hat{p}_x$ est investie dans un fonds d'investissement $\{S_t\}_{t \in [0, T]}$ de sorte qu'à chaque date t l'assuré bénéficie d'une participation bénéficiaire égale à :

$$h(S_t) = c_t + \beta \cdot \max(S_t - c_t, {}_t\hat{p}_x, 0)$$

Avec $c_t = (1 + g)^{t-1} \text{€}$. L'annuité ainsi définie se comporte comme la somme de pures endowment avec participation bénéficiaire sur la période $[0, T]$ (Reversionary bonus).

3.2.2 Fair-value : Tarification à 2 étapes

Sous les mêmes hypothèses définies pour le produit précédent, nous déduisons que la fair-value de l'annuité immédiate croissante est donnée par :

$$\pi_t^{(2a)}(H_T^n)_{AN} = \sum_{S=t+1}^T \pi_t^{(2a)}(H_S^n)_{PE} \quad (3.13)$$

3.3 Annuité différée

Considérons un contrat d'annuité avec participation bénéficiaire de durée T , différée de d années pour le paiement d'une unité croissante de taux g à la fin de chaque année en cas de survie. La prime unique payée par l'assuré est :

$$P_T(d) = \sum_{t=1}^T \frac{(1+g)^{t-1}}{(1+i)^{t+d}} {}_{t+d}\hat{p}_x \quad (3.14)$$

Chaque portion de la prime $\frac{(1+g)^{t-1}}{(1+i)^{t+d}} {}_{t+d}\hat{p}_x$ est investie dans un fonds d'investissement $\{S_t\}_{t \in [0, T+d]}$ de sorte qu'à chaque date t l'assuré bénéficie d'une participation bénéficiaire égale à :

$$h(S_t) = c_t + \beta \cdot \max(S_t - c_t \cdot {}_{t+d}\hat{p}_x, 0)$$

Avec $c_t = (1 + g)^{t-1} \text{€}$. L'annuité ainsi définie se comporte comme la somme de pures endowments sur la période $[d, T + d]$.

Sous les mêmes hypothèses définies pour le produit précédent, nous déduisons que la fair-value de l'annuité différée croissante est donnée par :

$$\pi_t^{(2a)}(H_T^n)_{AND} = \sum_{S=t+1+d}^{T+d} \pi_t^{(2a)}(H_S^n)_{PE} \quad (3.15)$$

Après avoir développé l'évaluation actuarielle en deux étapes pour les produits d'assurance vie avec participation bénéficiaire dans le chapitre précédent. Nous nous focaliserons actuellement sur les résultats de nos calibrages des modèles de taux de risque. Ce passage vers les applications numériques mettra en lumière les performances de nos modèles, offrant un aperçu des résultats spécifiques aux différents produits étudiés tels que le pure endowment, l'annuité croissante, et l'annuité croissante différée.

Ces analyses approfondies nous guideront dans la discussion des ajustements nécessaires et des variations observées en fonction des paramètres actuariels et des conditions de marché. Ces résultats contribueront à enrichir notre compréhension de la pertinence et de la robustesse de notre approche.

Chapitre 4 : Calibration et Applications numériques

Dans ce chapitre, nous présentons les résultats du calibrage des modèles de taux, en mettant l'accent sur la sélection du meilleur modèle. Les applications numériques pour les produits d'assurance vie seront examinées, suivies d'une analyse approfondie des résultats. Nous discuterons également de l'impact sur le calcul des réserves, soulignant leur importance dans la gestion des produits d'assurance vie. Ces analyses affineront notre approche d'évaluation actuarielle et contribueront à une meilleure compréhension des performances des modèles.

4.1 Calibrations des paramètres des modèles de taux

Plusieurs motivations sous-tendent le processus de calibration des modèles en assurance. Ce processus peut être déclenché par la nécessité d'améliorer la précision des prédictions et de mieux tarifier les produits d'assurance. Il vise également à optimiser le modèle en vue de son application opérationnelle, ainsi qu'à déterminer avec précision les paramètres pertinents et à déduire les variables d'intérêt. À cet égard, les ajustements porteront successivement sur le taux d'intérêt et sur le taux instantané de mortalité. Ce processus global de calibration s'inscrit dans une démarche visant à renforcer la robustesse et l'efficacité des modèles actuariels en assurance.

4.1.1 Calibration des paramètres du taux de mortalité : modèle de Hull and White à 1 facteur

Afin de calculer la probabilité de survie dans le contexte d'une mortalité supposée statique, il est impératif de procéder à la calibration des paramètres du modèle. Pour cette démarche, les tables prospectives de l'IABE, délivrant les probabilités de décès annuelles selon l'âge, ont été rigoureusement sélectionnées. En prenant comme référence les probabilités de décès pour l'année 2022 d'une génération de femmes âgées de 40 ans, et en supposant qu'elles demeurent en vie, nous avons pu déduire les taux instantanés de mortalité ainsi que les probabilités de survie.

La représentation graphique de cette évolution est disponible ci-dessous :

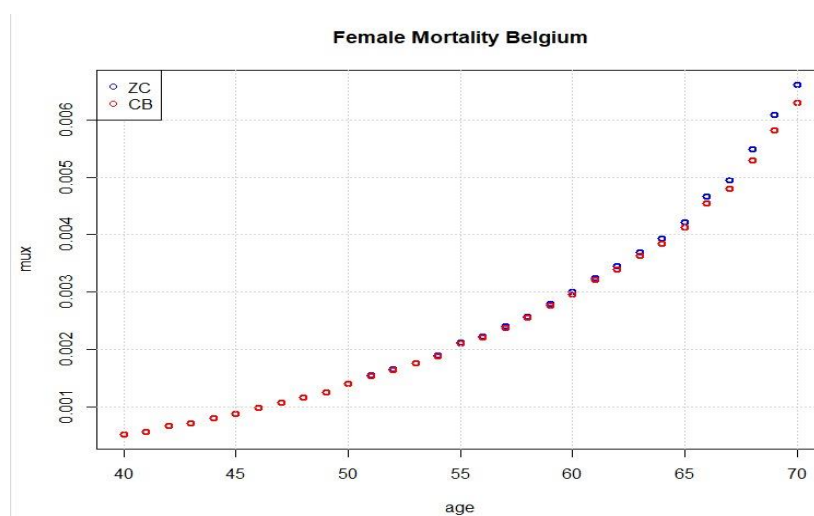


Figure 1: Evolution du taux de mortalité chez les femmes

On constate une concordance satisfaisante entre les taux observés et les taux zéro-coupon de mortalité. Les paramètres sont estimés à l'aide de la méthode des moindres carrés, implémentée avec la fonction "Constroptim" du logiciel R, conduisant ainsi à l'identification des paramètres suivants :

Tableau 1 : Paramètres de Hull and White à 1 facteur

A	B	b_{μ}	σ_{μ}
1.344134e-04	2.0952e-06	1.0006126e-06	1.39874e-04

On constate que le niveau moyen vers lequel le taux de mortalité a naturellement tendance à se stabiliser à long terme.

- A relativement basse suggère que le taux de mortalité évolue lentement vers ce niveau stable.
- B exprime la rapidité avec laquelle le taux de mortalité retourne à son niveau stable à long terme.
- b_{μ} indique que le taux de mortalité s'ajuste rapidement vers son niveau d'équilibre.
- σ_{μ} l'amplitude des fluctuations autour du niveau à long terme suggère une variabilité moindre dans le taux de mortalité.

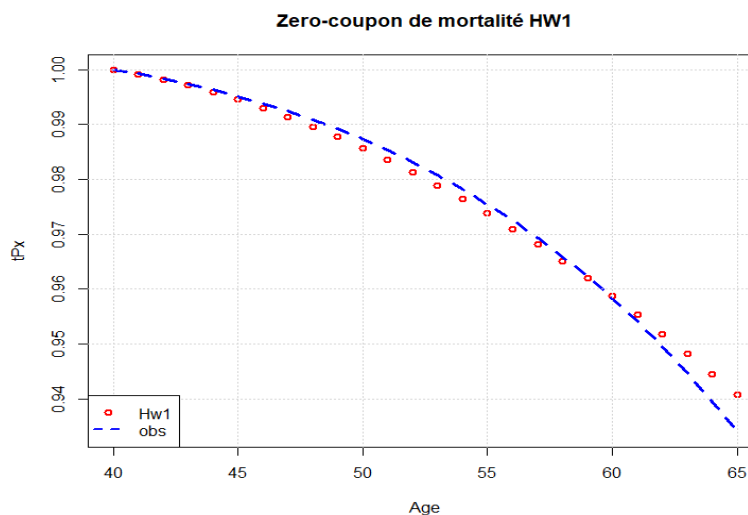


Figure 2: Représentation des zéro-coupons

4.1.2 Calibration des paramètres du taux de mortalité : modèle de Hull and White à 2 facteurs

- **Calibration des paramètres déterministes à l'aide de Svensson**

La calibration du modèle de Nelson-Siegel augmenté pour la courbe des taux forward a généré des estimations pour les paramètres clés, fournissant ainsi des indications importantes sur la structure temporelle des taux d'intérêt anticipés. Les résultats obtenus sont les suivants :

Tableau 2: Paramètres de Svensson de mortalité

β_0^x	β_{10}^x	β_{11}^x	c_1^x	β_{21}^x	c_2^x
0.001809	-0.001733	-0.00079	0.04855	1.0179e-06	-0.2063

Les valeurs négatives des paramètres β_{10}^x et β_{11}^x influent sur la pente de la courbe des taux et indiquent une anticipation d'une pente décroissante à long terme, avec β_{11}^x introduisant un effet exponentiel décroissant. De même c_1^x associé à la composante linéaire décroissante, suggère une croissance plus rapide de la pente à mesure que le temps avance. Une valeur positive de β_{21}^x indique une augmentation de la pente quadratique, tandis que c_2^x suggère une convexité négative.

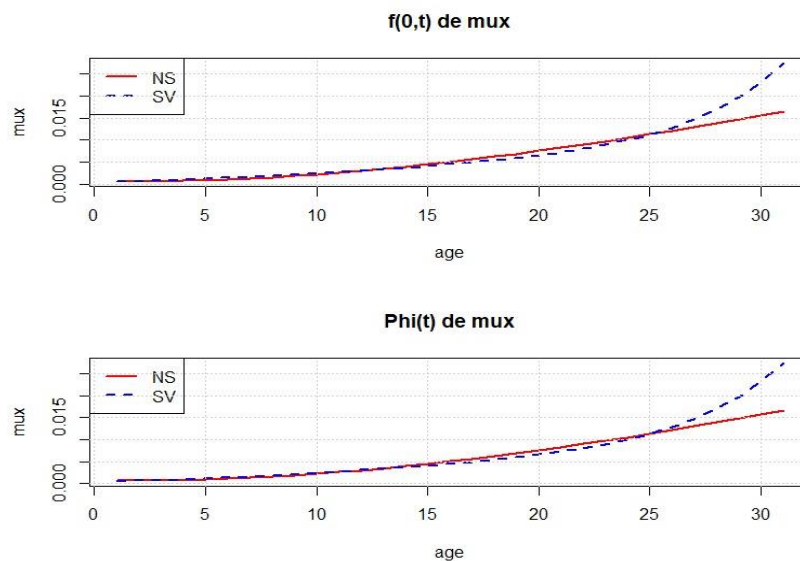


Figure 3: Représentation des taux forward et phi de la mortalité

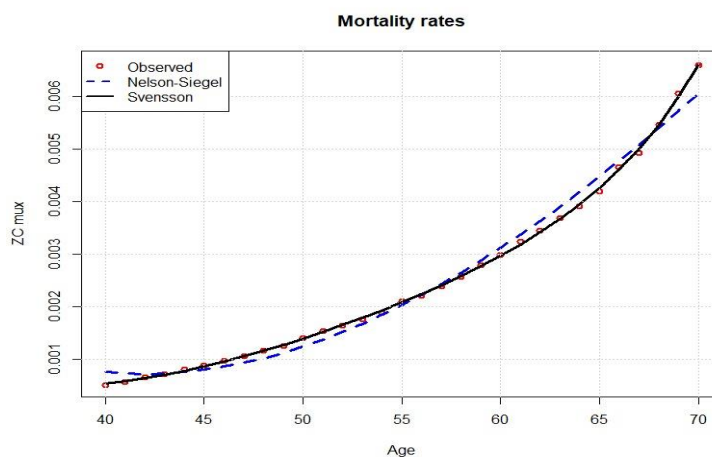


Figure 4: Représentation des taux Nelson Siegel et Svensson

Le parfait ajustement de la courbe des taux de mortalité obtenue avec les données du marché signifie que le modèle de Nelson-Siegel augmenté reflète avec précision les attentes du marché en matière de taux de mortalité. Cette adéquation suggère que le modèle capture de manière précise les tendances à long terme, la dynamique de pente, la décroissance rapide de la composante linéaire, et l'augmentation de la composante quadratique avec une convexité positive telles qu'anticipées par les acteurs du marché renforçant ainsi la validité du modèle pour décrire la structure actuelle des taux.

▪ Calibration des paramètres stochastiques du modèle HW2

La procédure de calibrage du taux de mortalité avec le modèle Hull and White à 2 facteurs ou G2++ présente des similitudes notables avec celle utilisée pour la calibration du taux d'intérêt, tout comme pour le calcul du prix zéro coupon.

En ce qui concerne les taux de mortalité, la nature particulière de cette variable requiert une attention particulière lors de la calibration. Des conditions spécifiques sont intégrées pour garantir que les résultats restent dans des plages réalistes, évitant ainsi toute extrapolation inappropriée :

$$0 \leq \mu_x(t) \leq \mu_x(t + 1), \quad t = 0, 1, \dots$$

Cela permet d'assurer que les prévisions basées sur le modèle soient robustes et applicables dans des contextes réels. Les paramètres estimés sont présentés dans le tableau suivant :

Tableau 3: Paramètres HW2 des taux de mortalité

\hat{a}_x	\hat{b}_x	$\hat{\sigma}_x$	$\hat{\gamma}_x$	$\hat{\rho}_x$
2.348192e-05	3.1388835e-04	3.01e-03	2.6669716507226 e-14	0.2

▪ **Représentation de la courbe Zéro coupon**

La représentation graphique ci-dessous offre une visualisation dynamique de l'évolution des prix des zéros coupons au fil du temps.

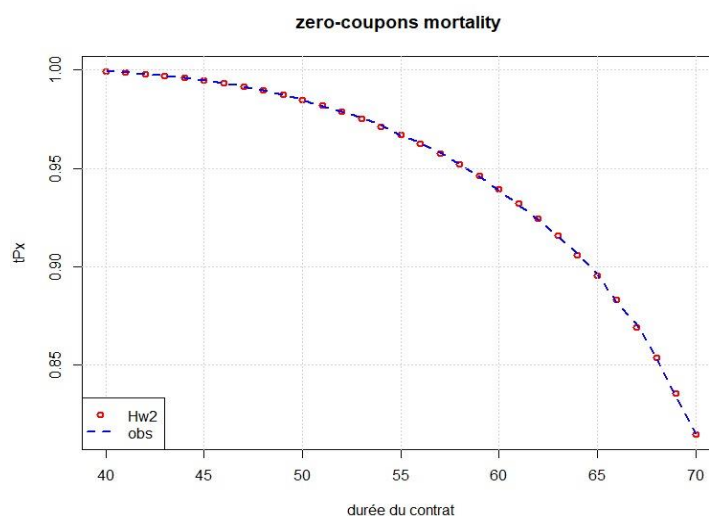


Figure 5: Représentation des zéro-coupons de mortalité

▪ **Choix du modèle de taux de mortalité**

Pour comparer la qualité des deux modèles, on peut utiliser l'AIC (Akaike Information Criterion) ou le BIC (Bayesian Information Criterion), deux méthodes de sélection de modèles qui permettent de choisir le modèle qui s'ajuste bien aux données, sans perdre en généralité en surajustant les données. En fait, elles récompensent le modèle qui offre le meilleur équilibre entre la qualité de l'ajustement et la complexité. L'AIC est défini comme suit :

$$AIC = n \ln \left(\frac{R}{n} \right) + 2k$$

Où n est le nombre d'observations, k est le nombre de paramètres et R est le résidu obtenu en utilisant la méthode LSE. Le meilleur modèle est celui dont l'AIC est le plus faible. Le BIC est donné par :

$$\text{BIC} = n \ln \left(\frac{R}{n} \right) + k \ln(n)$$

Le tableau présente les critères AIC pour les deux modèles :

Tableau 4:AIC des deux modèles

Modèles	AIC
HW1	8
HW2	9.99995

Après observation des résultats des calibrations, il est essentiel de trouver un équilibre entre la complexité du modèle et sa capacité à expliquer les données. Choisir un nombre excessif de facteurs peut conduire à un surajustement (overfitting) du modèle, ce qui signifie qu'il pourrait fonctionner trop bien sur les données d'entraînement mais mal généraliser sur de nouvelles données. D'autre part, un nombre insuffisant de facteurs pourrait ne pas capturer toutes les nuances du phénomène étudié.

Le processus de sélection de modèle est souvent un mélange d'expérience, de bon sens et d'analyse statistique. En fin de compte, le modèle doit être capable de fournir des résultats robustes et significatifs.

Pour la suite de notre étude nous continuerons avec le modèle de Hull and White à 2 facteurs bien que son AIC est supérieur le modèle présente un ajustement bien plus robuste voir parfait.

4.1.3 Calibration des paramètres du taux d'intérêt : modèle G2++

L'évolution du taux d'intérêt est modélisée par l'équation dans le contexte de la mesure réelle \mathbb{P} . Pour estimer les paramètres, le modèle est ajusté en utilisant un ensemble d'observations des "Taux OLO" (Obligations Linéaires), obtenues à partir du site de la Banque nationale de Belgique (BNB). Ces données, recueillies sur une période de trois ans, du 11/10/2020 au 19/10/2023, présentent les taux d'intérêt de clôture au quotidien. La représentation graphique de cette évolution est :

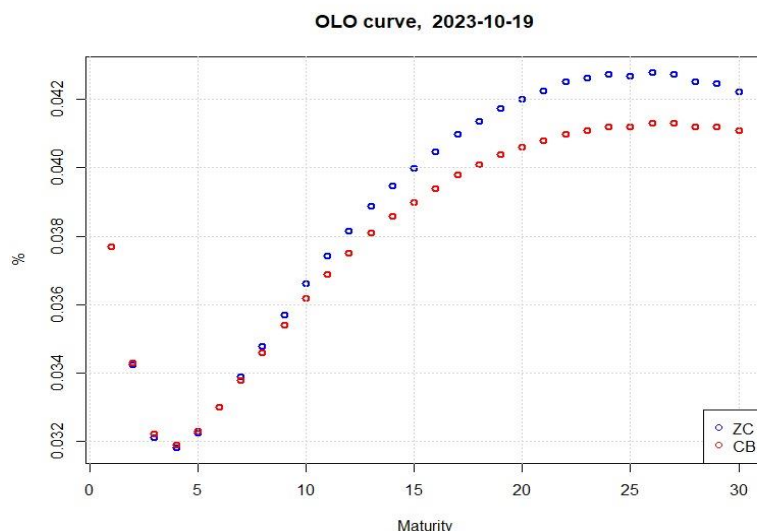


Figure 6: Représentation des taux OLO

On remarque un bon ajustement entre les taux observés et ceux des zéro-coupons.

- **Calibration des paramètres déterministes à l'aide de Svensson**

La calibration du modèle de Nelson-Siegel augmenté pour la courbe des taux forward a généré des estimations pour les paramètres clés, fournissant ainsi des indications importantes sur la structure temporelle des taux d'intérêt anticipés. Les résultats obtenus sont les suivants :

Tableau 5: Paramètres des taux d'intérêt avec Svensson

β_0	β_{10}	β_{11}	c_1	β_{21}	c_2
0.0479	-0.0038	-0.0199	0.4080	0.0001	-0.1958

Les valeurs négatives des paramètres β_{10} et β_{11} influent sur la pente de la courbe des taux et indiquent une anticipation d'une pente décroissante à long terme, avec β_{11} introduisant un effet exponentiel décroissant. De même c_1 associé à la composante linéaire décroissante, suggère une décroissance plus rapide de la pente à mesure que le temps avance. Une valeur positive de β_{21} indique une augmentation de la pente quadratique, tandis que c_2 suggère une convexité positive.

La courbe de Svensson obtenue à l'aide des paramètres calibrés :

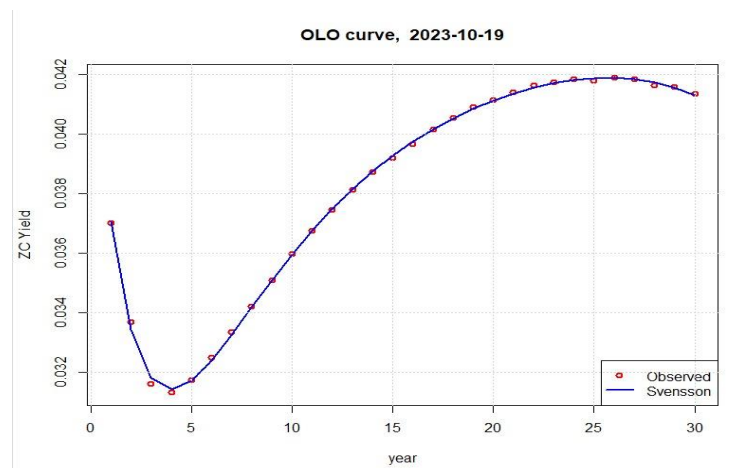


Figure 7: Représentation graphique des taux d'intérêt

Le parfait ajustement de la courbe des taux forward obtenue avec les données du marché signifie que le modèle de Nelson-Siegel augmenté reflète avec précision les attentes du marché en matière de taux d'intérêt. Cette adéquation suggère que le modèle capture de manière précise les tendances à long terme, la dynamique de pente, la décroissance rapide de la composante linéaire, et l'augmentation de la composante quadratique avec une convexité positive telles qu'anticipées par les acteurs du marché renforçant ainsi la validité du modèle pour décrire la structure actuelle des taux d'intérêt.

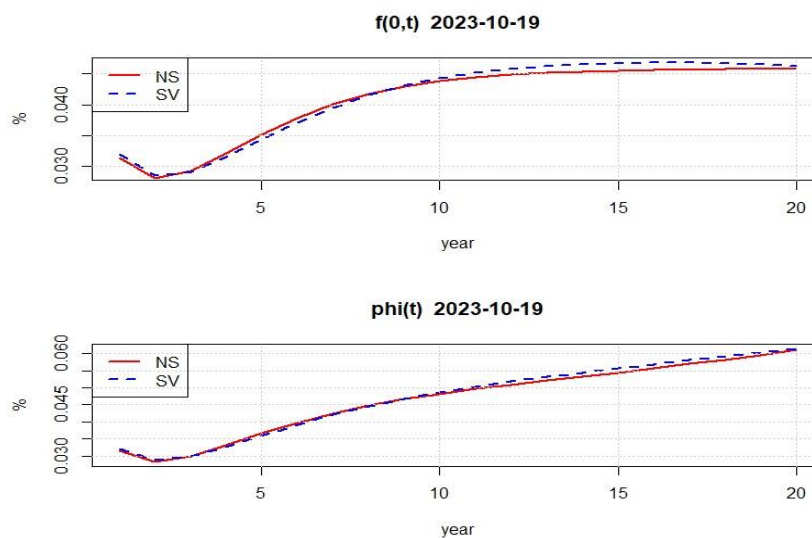


Figure 8: Représentation des taux forward et phi

- **Calibration des paramètres stochastiques du modèle G2++**

Les paramètres obtenus, résultat de l'effort de calibration du modèle G2++, sont consignés de manière exhaustive dans le tableau, reflétant ainsi la rigueur de l'analyse menée pour assurer une adéquation optimale entre le modèle et les données observées.

Tableau 6: Paramètres du modèle G2++

$\hat{\alpha}$	$\hat{\beta}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\gamma}$	$\hat{\rho}$
0.004888734	0.274011292	0.009654205	0.016507226	-0.314548838

Les valeurs calibrées pour les paramètres du modèle G2++ fournissent des insights précieux, elles sont économiquement significatives et présentent des ordres de grandeur cohérents avec les attentes économiques. Le coefficient $\hat{\alpha}$, traduisant la vitesse de convergence des taux d'intérêt à court terme vers une moyenne prédite, affiche une stabilité attendue. Le coefficient $\hat{\beta}$ révèle une dynamique distincte dans les ajustements vers une autre moyenne, renforçant la diversité des influences. Les volatilités $\hat{\sigma}$ et $\hat{\gamma}$ témoignent d'amplitudes appropriées de fluctuations stochastiques dans les processus $x(t)$ et $y(t)$. La corrélation négative $\hat{\rho}$ entre les bruits suggère des relations inverses entre les facteurs, ajoutant une dimension intéressante. Dans l'ensemble, ces ordres de grandeur confirment la pertinence du modèle pour capturer la complexité des taux d'intérêt.

▪ **Représentation de la courbe Zéro coupon**

La représentation graphique ci-dessous offre une visualisation dynamique de l'évolution des prix des zéros coupons au fil du temps.

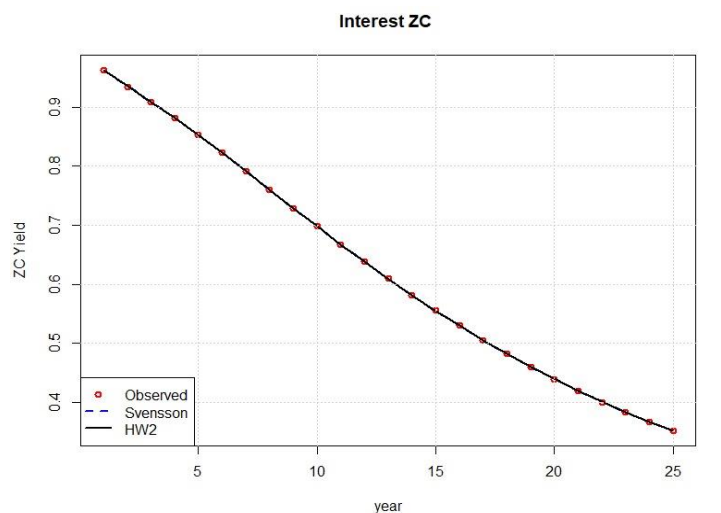


Figure 9: Représentation des zéro-coupons des taux d'intérêt

On remarque un parfait ajustement du modèle aux taux observés. Ce modèle présente quelques avantages et inconvénients :

✚ **Avantages associés à l'utilisation de ce modèle**

- **Prise en compte des facteurs stochastiques** : ce qui sert à capturer les fluctuations à court terme et à long terme des taux d'intérêt ce qui s'avère utile pour les investisseurs qui cherchent à estimer les taux d'intérêt futurs sur une période donnée.

- **Précision** : il offre une meilleure précision que les modèles plus simples qui ne prennent pas en compte les facteurs stochastiques. Les taux d'intérêt prédits par le modèle de Hull-White à deux facteurs peuvent mieux correspondre aux taux d'intérêt observés sur le marché.

- **Validation empirique** : il a été largement étudié et validé empiriquement, ce qui peut fournir aux investisseurs une plus grande confiance dans ses résultats.



Inconvénients associés à l'utilisation de ce modèle

Bien que le modèle de G2++ à deux facteurs présente plusieurs avantages, il y a également des inconvénients associés à son utilisation.

- **Complexité** : relativement complexe, il nécessite une compréhension approfondie des mathématiques financières pour sa mise en œuvre et contient plusieurs paramètres qui doivent être calibrés correctement pour obtenir des résultats précis.

- **Sensibilité aux données** : ce modèle est sensible aux données utilisées pour l'ajuster. Des erreurs dans les données d'entrée peuvent entraîner des erreurs significatives dans les résultats. Il est donc important d'avoir des données précises et fiables pour obtenir des résultats précis.

Remarque 1 : Pour la fair-value, les résultats sont directement obtenus à partir de l'application précise et directe des formules de tarification, offrant ainsi une évaluation fidèle et immédiate des produits d'assurance.

Remarque 2 : Les réserves ou provisions de l'assureur à un moment futur deviennent des processus stochastiques, étroitement liés à l'évolution des taux d'intérêt, de la mortalité et de l'actif sous-jacent. L'utilisation de la formule de tarification à chaque instant t ouvre la porte à la réalisation d'une simulation de Monte Carlo de ces valeurs à tout moment, permettant ainsi le calcul de la moyenne. Dans ce contexte particulier, pour chaque produit de notre étude, une moyenne a été réalisée à partir de 10.000 simulations de Monte Carlo, offrant une vision plus robuste et représentative des tendances. Les graphiques présentés illustrent ainsi les moyennes des provisions, fournissant une perspective visuelle claire de l'évolution probable des réserves dans un cadre stochastique. Cette approche souligne l'impact des incertitudes liées aux taux d'intérêt, à la mortalité et d'autres facteurs sur les niveaux de provisions de l'assureur, offrant ainsi une base robuste pour la prise de décision dans un contexte complexe et dynamique.

4.2 Applications numériques aux produits d'assurance-vie

4.2.1 Pure Endowment

Considérons un portefeuille homogène de n polices de contrats d'assurance-vie pure endowment garantissant un capital $c=1\text{€}$, où l'ensemble des assurés a un âge $x=40$ ans sur une période $T=1, 2, \dots, 15$.

Le taux technique garanti $i=3\%$, le rendement moyen de l'actif risqué $\mu_s = 6\%$, et sa volatilité $\sigma_s = 10\%$. Les modèles des taux sont ceux évoqués précédemment appliqué au taux OLO et aux données prospectives de l'IABE.

La prime de risque de longévité est fixée à $\theta_1 = -1$, le coefficient de la marge de risque de la fair-value $\alpha = 0.3$. Le produit est celui au chapitre 3.

4.2.1.1 Etude de sensibilité de la fair-value

Nous présentons dans le tableau ci-dessous la sensibilité de la fair value en fonction du nombre de polices pour un contrat de durée $T=15$.

Tableau 7: Etude de la sensibilité de la fair-value

Taille du portefeuille	$\pi_0^{(2a)}(H_T^n)$
n=100	0.6093111
n=500	0.6084955
n=2000	0.6082026
n=100000	0.6080843

On constate une variation très faible de la fair-value en fonction de la taille du portefeuille. La tarification nous présente donc un résultat stable.

4.2.1.2 Fair-value avec et sans participation bénéficiaire

A partir des codes R, nous avons calculé les différentes fair-values des contrats pure endowment avec et sans participation bénéficiaire en fonction des paramètres choisis plus haut pour différentes durées de contrats dans un portefeuille de 5000 polices.

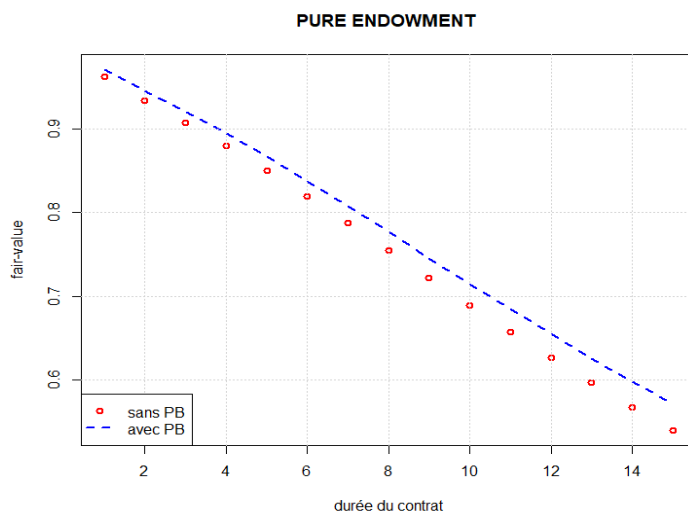


Figure 10: Représentation de la fair-value avec et sans PB en fonction de la durée du contrat

La fair-value décroît en fonction de la durée du contrat, et il est intéressant de noter que la courbe des contrats avec PB est constamment au-dessus de celle des contrats sans PB. Ce phénomène prend de l'ampleur au fil du temps, l'écart entre ces deux valeurs s'accroissant davantage. À mesure que la durée du contrat s'étend, ces valeurs convergent graduellement de 1 vers 0.

Interprétation

Cette décroissance de la fair-value en fonction de la durée du contrat peut s'expliquer par plusieurs éléments :

- **Principe du temps** : La décroissance de la fair-value est due au principe temporel de la valeur de l'argent. Selon ce principe, une somme d'argent aujourd'hui a une valeur plus élevée que la même somme dans le futur. Ainsi, à mesure que la durée du contrat s'allonge, la valeur actualisée de la prestation future diminue.
- **Impact des taux d'intérêt** : La fair-value est influencée par les taux d'intérêt. Si les taux d'intérêt sont élevés, la fair-value pourrait diminuer au fil du temps, car la valeur actuelle des flux de trésorerie futurs associés au pure endowment pourrait être moindre. Les taux d'intérêt affectent le processus d'actualisation, qui réduit la valeur des paiements futurs.
- **Absence de primes récurrentes** : Dans le cas d'un pure endowment à prime unique, il n'y a pas de primes récurrentes pour compenser ou augmenter la valeur du contrat au fil du temps. Par conséquent, la fair-value peut suivre une trajectoire décroissante, car elle dépend principalement de la valeur actualisée de la prestation unique à l'échéance.
- **Risque de mortalité** : Les coûts actuariels associés à la couverture du risque de mortalité influencent négativement la fair-value, en particulier sur des périodes plus longues.

- **Rendement de l'actif** : Les rendements issus de l'actif d'investissement augmentent au fil de la durée du contrat, entraînant une croissance des contrats avec PB. Cela crée ainsi un écart constant entre la courbe avec PB et celle sans PB.

En interprétant la décroissance de la fair-value dans un pure endowment à prime unique, il est crucial de considérer ces divers facteurs actuariels et financiers. Cette observation peut influencer les décisions de tarification et de gestion des risques, en fournissant des indications sur la valeur attendue du contrat à différentes échéances.

4.2.1.3 Réserves avec et sans participation bénéficiaire

Considérons un contrat de pure endowment de durée $T=15$ avec les mêmes hypothèses ci-dessus. Les réserves à une date $t=1,2, \dots, T$ sont présentées sur le graphique ci-dessous :

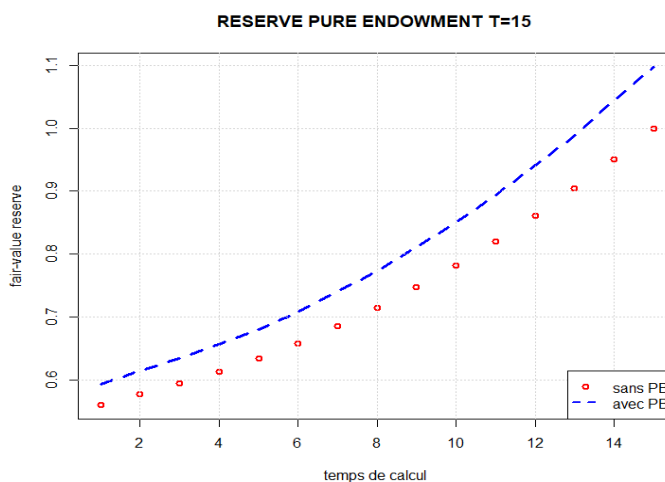


Figure 11: Représentation de la moyenne des réserves avec et sans PB

Contrairement aux fair-values des primes, la courbe de la moyenne des réserves affiche une tendance à la hausse. Les contrats avec PB sont systématiquement positionnés au-dessus de ceux sans PB. Il est également à noter qu'à la fin du contrat, la valeur moyenne de la réserve sans PB atteint 1.

Interprétation : l'observation selon laquelle la réserve moyenne d'un pure endowment croît à l'approche de l'échéance peut être interprétée de manière significative :

- **Gestion des risques** : La croissance de la moyenne résulte des stratégies de gestion des risques mises en place par l'assureur pour assurer une solvabilité suffisante au moment du paiement de l'indemnité. À mesure que l'échéance approche, la nécessité de garantir le paiement du capital devient plus prégnante.

- **Rendement des placements** : Les rendements générés par les placements moyens des réserves contribuent à l'augmentation moyenne de la réserve. À mesure que l'échéance se rapproche, la stratégie d'investissement évolue pour assurer une préservation du capital et une liquidité accrue. L'écart persistant entre les deux courbes témoigne d'une influence positive des bénéfices sur l'évolution moyenne des réserves, accentuée au fur et à mesure de l'avancement du contrat. La valeur finale de la réserve moyenne sans bénéfices à 1 met en exergue une caractéristique distinctive de ces contrats à la clôture.

En résumé, la croissance de la réserve moyenne à l'approche de l'échéance reflète une combinaison d'éléments liés à la gestion des risques, au rendement des placements et à la garantie de la solvabilité pour honorer les engagements contractuels à l'échéance du contrat.

4.2.2 Annuité croissante

Considérons un portefeuille homogène de 5000 polices de contrats d'assurance-vie de rente croissante (de taux $g=2\%$) en cas de vie où l'ensemble des assurés a un âge $x=40$ ans sur une période $T=1, 2, \dots, 15$ avec une participation bénéficiaire à chaque période de paiement (Reversionary bonus). Les hypothèses ci-dessus sont conservées.

4.2.2.1. Fair-value avec et sans participation bénéficiaire

A partir des codes R, nous avons calculé les différentes fair-values des contrats d'annuité avec et sans participation bénéficiaire.

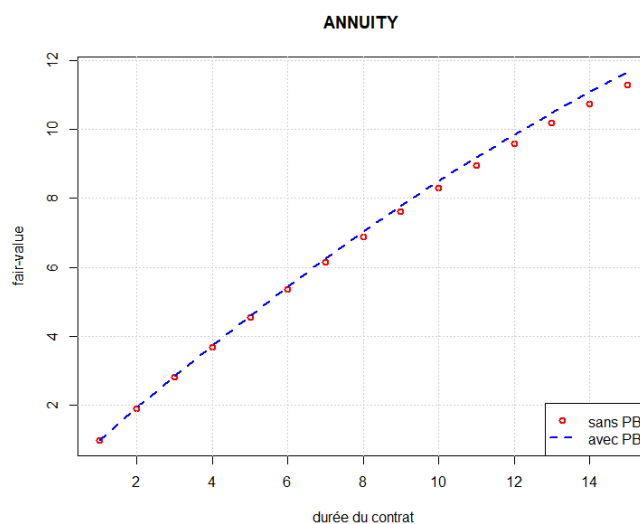


Figure 12: Représentation de l'annuité croissante avec et sans PB

Le schéma met en évidence une augmentation de la fair-value en corrélation avec la durée du contrat. La trajectoire des contrats incluant des PB demeure systématiquement supérieure à

celle des contrats sans PB. Cette observation suggère que, les contrats avec bénéficiaires maintiennent leur avantage tout au long de la durée du contrat.

Interprétation : la croissance de la fair-value en fonction de la durée du contrat s'explique par plusieurs éléments :

- **Effet de la périodicité des paiements :** l'annuité périodique croissante implique des paiements réguliers, la fair-value peut refléter l'impact positif de ces paiements récurrents (coupons) sur la valeur actuelle de la prestation future. En effet, ce produit peut être interprété comme un produit financier avec des coupons croissants dont une participation financière à chaque période de paiement, c'est donc la somme de pures endowment avec PB.
- **Effet du Reversionary bonus :** La présence d'un Reversionary bonus, qui est octroyé à la fin du contrat en fonction de la performance du fonds d'investissement ou d'autres critères, contribue à la croissance de la fair-value. À mesure que la durée du contrat s'allonge, le potentiel d'accumulation du Reversionary bonus augmente, entraînant une augmentation globale de la fair-value.
- **Stratégie actuarielle :** La conception spécifique du produit, y compris les choix actuariels tels que les taux d'intérêt anticipés, les hypothèses de rendement des placements, et d'autres facteurs, peut également influencer la croissance de la fair-value.

L'interprétation de cette croissance de la fair-value indique généralement que le produit d'assurance offre une valeur cumulative plus élevée pour le détenteur du contrat à mesure que la durée du contrat s'étend. Cette observation peut être utilisée pour évaluer la rentabilité du produit pour l'assuré et peut influencer les décisions de tarification et de conception de produits dans le cadre de la gestion actuarielle des risques et des placements.

4.2.2.2 Réserves avec et sans participation bénéficiaire

Considérons un contrat de rente croissante de durée $T=15$ avec les mêmes hypothèses ci-dessus. Les moyennes des réserves à une date $t=1,2, \dots, T$ sont présentées sur le graphique suivant :

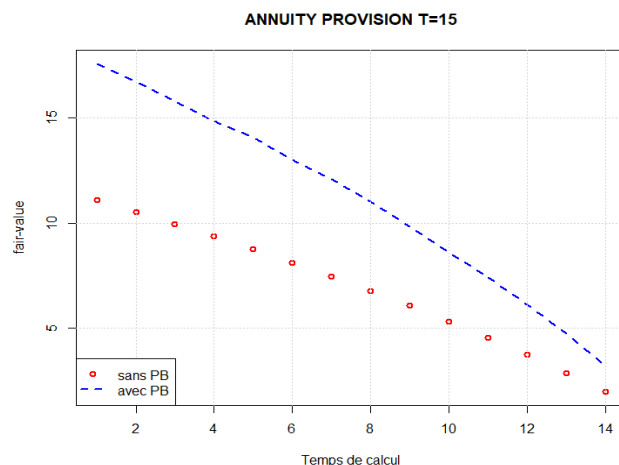


Figure 13: Evolution de la moyenne des réserves en fonction du temps avec et sans PB

On observe une décroissance continue de la courbe moyenne des réserves. Les contrats avec participation aux bénéfices maintiennent systématiquement une position supérieure à ceux sans participation.

Interprétation

La réserve moyenne décroissant en fonction de la durée du contrat peut être interprétée en considérant plusieurs facteurs :

- **Diminution du nombre de paiements** : les obligations de paiement diminuent à mesure que la durée du contrat diminue (diminution du nombre de coupons). Cela contribue à une diminution directe de la valeur moyenne des réserves avec et sans PB.
- **Effet actuariel des paiements périodiques** : l'annuité implique des paiements réguliers à l'assuré, les flux de trésorerie sortants associés à ces paiements influencent la réserve. La diminution de la valeur moyenne des réserves est liée aux sorties de trésorerie nécessaires pour honorer ces paiements périodiques.
- **Gestion des réserves** : Les pratiques de gestion des réserves moyennes de l'assureur jouent un rôle principal. Si l'assureur ajuste les valeurs moyennes des réserves en fonction des performances du produit ou d'autres critères, une diminution peut être observée à mesure que le contrat progresse.

Il est important de noter que la dynamique de la valeur moyenne des réserves peut être influencée par la conception spécifique du produit, les politiques de gestion des réserves de l'assureur, les choix actuariels et d'autres facteurs.

4.2.3 Annuité croissante différée

Considérons un portefeuille homogène de 5000 polices de contrats d'assurance-vie de rente croissante (de taux $g = 2\%$) en cas de vie différée d'année $d=10$ aux assurés d'âge $x = 40$ ans sur une période $T=1, 2, \dots, 15$ avec une participation bénéficiaire à chaque période de paiement (Reversionary bonus). Les hypothèses ci-dessus sont conservées.

4.2.3.1. Fair-value avec et sans participation bénéficiaire

Les différentes fair-values des contrats d'annuité croissante différée avec et sans participation bénéficiaire sont présentées ci-après :

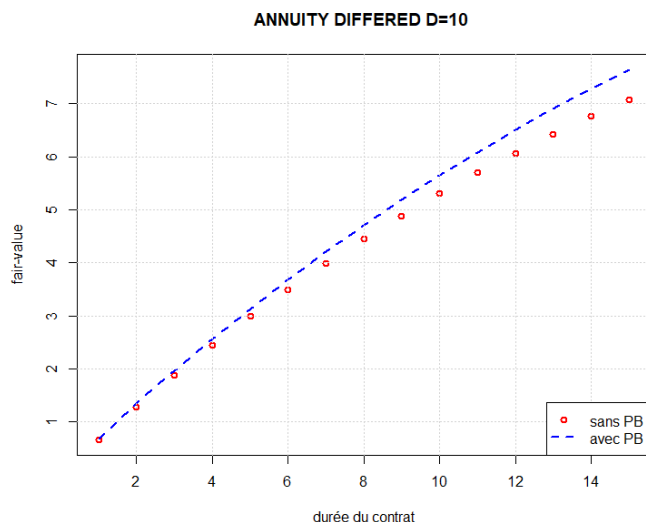


Figure 14: Représentation de la fair-value de l'annuité croissante différée avec et sans PB

La représentation graphique ci-dessus partage des similarités avec l'annuité immédiate mentionnée précédemment. Cependant, deux observations notables sont à souligner :

- Un écart plus substantiel entre les contrats sans participation aux bénéfices et ceux avec participation.
- Pour la même prestation, la fair-value de l'annuité différée est moins élevée que celle l'annuité immédiate.

Cette variation plus marquée entre les deux catégories de contrats suggère une influence significative de la participation aux bénéfices sur les caractéristiques observées.

Interprétation

La croissance distincte de la fair value entre une annuité croissante différée avec participation bénéficiaire et une sans après peut s'expliquer par plusieurs facteurs spécifiques à la conception et à la structure de ces produits d'assurance vie. Voici quelques éléments qui pourraient contribuer à cet écart marqué :

- **Effet de report initial** : Au cours des premières années, l'annuité croissante différée avec participation bénéficiaire pourrait présenter un effet de report plus significatif. Le report des paiements croissants pendant la période différée peut entraîner une accumulation accrue de valeur à la fin de cette période.
- **Impact du bonus de participation** : La présence d'un bonus de participation bénéficiaire peut jouer un rôle majeur. Après la période différée, ce bonus pourrait être attribué,

stimulant la croissance de la fair value de manière plus prononcée par rapport à l'annuité croissante sans participation bénéficiaire.

▪ **Principe du temps** : La diminution de la fair-value est due au principe temporel de la valeur de l'argent expliqué dans l'interprétation du pure endowment. Ainsi, à mesure que la durée du contrat s'allonge ce qui est dû à la période différée, la valeur actualisée de la prestation future diminue.

L'observation d'un écart prononcé après 10 années suggère que la conception spécifique de l'annuité croissante différée avec participation bénéficiaire offre des avantages substantiels par rapport à son homologue sans participation bénéficiaire. Cette analyse met en lumière l'importance des caractéristiques spécifiques du produit dans la détermination de sa fair-value et souligne le rôle crucial de la participation bénéficiaire dans la valorisation des contrats d'assurance vie.

4.2.2.2 Réserves avec et sans participation bénéficiaire

Considérons un contrat de rente croissante différée d'année $d = 20$, de durée $T = 15$ avec les mêmes hypothèses ci-dessus. Les réserves à une date $t = 1, 2, \dots, T$ sont présentées sur le graphique suivant :

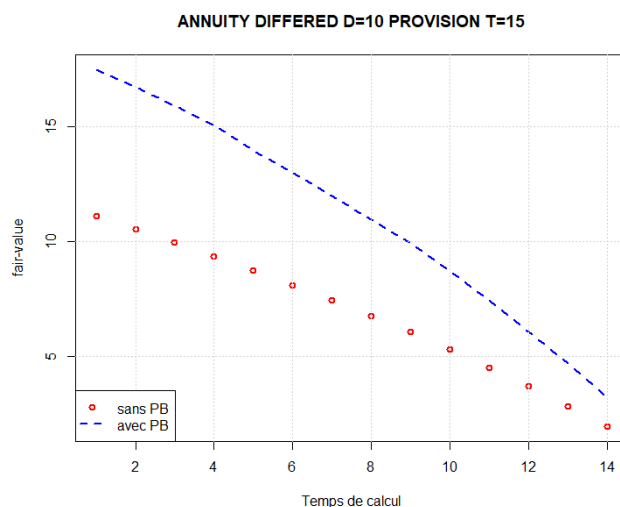


Figure 15: Evolution de la valeur moyenne des réserves de la rente croissante différée avec et sans PB

Conclusion

En conclusion, cette étude approfondie sur la cohérence de marché pour l'évaluation des produits d'assurance vie avec des modèles stochastiques a éclairé de manière significative les complexités de ce domaine actuariel. En débutant par la modélisation du taux d'intérêt via le modèle G2++, nous avons établi une base solide en démontrant la cohérence de nos résultats avec les paramètres de la littérature, renforçant ainsi la crédibilité de notre approche. La calibration du taux de mortalité a été abordée avec rigueur, initialement par le modèle de Hull and White à un facteur, puis par une exploration audacieuse vers le modèle à deux facteurs. Bien que l'AIC a privilégié le modèle à un facteur, soulignant l'importance de la simplicité dans le contexte de la calibration actuarielle, notre choix s'est porté sur Hull and White à 2 facteurs car ce dernier a présenté un parfait ajustement à la courbe des taux.

Notre analyse a pris en compte des produits spécifiques, notamment ceux avec participation bénéficiaire, intégrant ainsi une réalité cruciale du marché des assurances. Le calcul des réserves moyennes a complété cette approche en mettant en évidence l'impact substantiel des modèles stochastiques dans la gestion prudente des engagements des assureurs.

Un aspect novateur de notre démarche réside dans la réponse directe à une question posée dans l'article de Griselda Deelstra et al. Concernant l'efficacité de l'approche à deux étapes avec des modèles stochastiques. Notre étude a ainsi enrichi la littérature actuarielle en abordant une question peu explorée jusqu'à présent.

Convergeant avec les conclusions de travaux antérieurs, notamment celles de A. Bacinello, P. Millosovich et A. Chen, notre étude met en lumière la nécessité de la prudence dans la promesse de taux de participation bénéficiaire, en raison de l'amélioration constante de la longévité au fil du temps.

Pour élargir davantage cette recherche, une évaluation actuarielle à trois étapes appliquées sur des modèles stochastiques, accompagnée du calcul des réserves de l'assureur, constituerait une extension fructueuse. De plus, une exploration approfondie de l'impact du two-step valuation et des modèles stochastiques sur une temporaire décès ouvrirait de nouvelles perspectives pour mieux comprendre les implications actuarielles dans des scénarios variés.

En synthèse, ce mémoire a non seulement approfondi notre compréhension des modèles stochastiques dans l'évaluation des produits d'assurance vie, mais a également apporté des contributions tangibles à la littérature actuarielle. Ces résultats offrent des pistes stimulantes pour les praticiens et chercheurs cherchant à explorer davantage la complexité dynamique de ce domaine en constante évolution.

Bibliographie

- [1] Antoon P., Mitja S. (2014). *Time-Consistent and Market -Consistent Evaluations*. *Mathematical Finance*, Vol.4, No. 1, pp 25-65.
- [2] Arnaud Blanchard (2004). *The Two-Factor Hull-White Model: Pricing and Calibration of Interest Rates Derivatives*, pp 08-22.
- [3] John Hull and Alan White, "One factor interest rate models and the valuation of interest rate derivative securities," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, Vol 28, No 2, (June 1993) pp 235–254.
- [4] Brigo & Mercurio, *Interest Rates Models: Theory and Practice with Smile, Inflation and Credit*, Springer.
- [5] Donatien Hainaut. (2023), *Interest rate & inflation modelling*.
- [6] Deelstra G., Devolder P. and Hieber P. (2020). *Valuation of Hybrid Financial and Actuarial Products in Life Insurance by a novel Three-step Method*.
- [7] Devolder P. (2017). *Cours de modèles financiers en assurance*. Faculté des Sciences, ULB, Belgique.
- [8] Zeddouk, Fadoua and Pierre Devolder. (2017). *Mean reversion in stochastic mortality: why and how?*
- [9] Devolder P. (2018), *Cours de mathématiques financières*. Faculté des Sciences, LSBA, UCLouvain, Belgique.
- [10] Dhaene J., Stassen B., Barigou K., Linders D., Chen Z. (2017). *Fair valuation of insurance liabilities: Merging actuarial judgement and market-consistency*. *Mathematics and Economics* 76, pp 14-27.
- [11] Dhaene J. (2019). *Course of Actuarial Valuations and Principles*. *Faculty of Business and Economics*, KU Leuven, Belgium.
- [12] Kouham Achile (2021) *Valorisation du passif d'assurance vie*. Mémoire de master en actuariat, Université Catholique de Louvain.
- [13] Pelsser A. and Stadje M. (2014) *Time-consistent and market-consistent valuations: Mathematical Finance*, 24(1), 25-65.
- [14] Ahmad Salahnejhad Ghalehjooghi & Antoon Pelsser (2021) *Time-consistent and market-consistent actuarial valuation of the participating pension contract*. *Scandinavian Actuarial Journal*.

Annexe

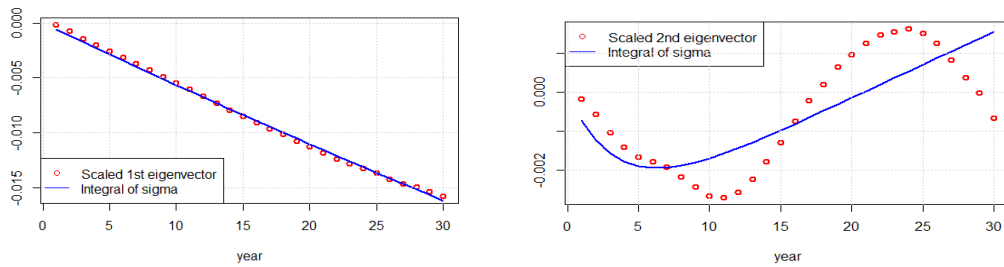


Figure 16: Représentation des vecteurs propres pour le taux d'intérêt

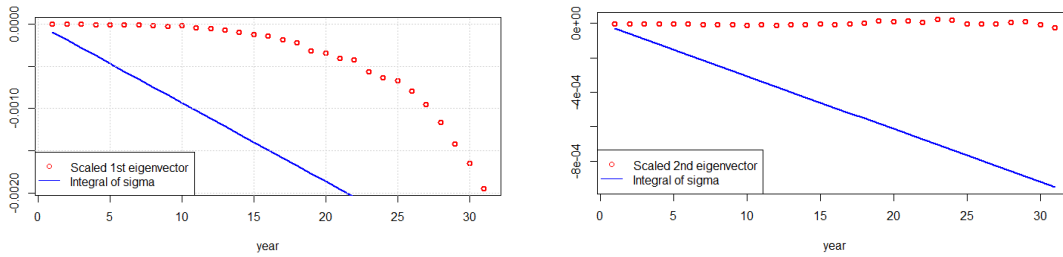
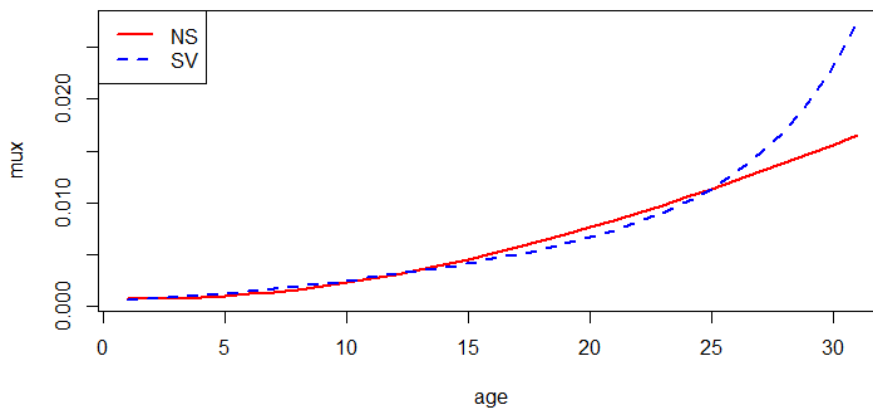


Figure 17: Représentation des vecteurs propres pour le taux de mortalité

$f(0,t)$ de $\mu_{x,t}$



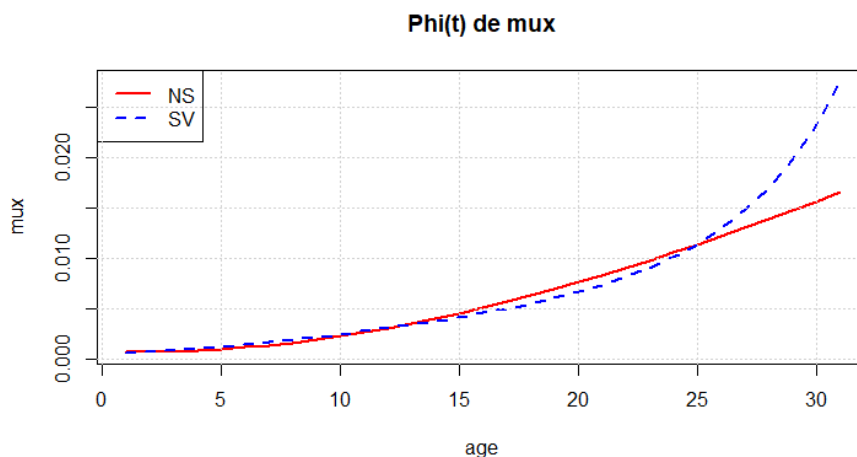


Figure 17 : Représentation de $f(0,t)$ et $\phi(0,t)$ pour le taux de mortalité

Code R

```
#####
#####
##### CALIBRATION TAUX INTERET G2++ #####
#####
#####
library('pracma')
#rm(list=ls())
#####
#####          Linear interpolation & extrapolation #####
#####
linearExtrap<-function(x,y,xout){
  tmp = sort(x,index.return=T)
  x   = tmp$x
  y   = y[tmp$ix]

  nx = length(x)
  nxout = length(xout)
  yout = vector(mode = "double",length=nxout)
  minx = min(x)
  maxx = max(x)
  ind = c(1:nx)
  for (ct in c(1:nxout)){
    if ((xout[ct]<maxx) && (xout[ct]>=minx))
```

```
{
  i1 = max(ind[(x<=xout[ct])])
  i2 = min(ind[(x >xout[ct])])
  yout[ct] = y[i1] + (xout[ct]-x[i1])*(y[i2]-y[i1])/(x[i2]-x[i1])
}
if (xout[ct]<minx)
{
  yout[ct] = y[1] + (xout[ct]-x[1])*(y[2]-y[1])/(x[2]-x[1])
}
if (xout[ct]>=maxx)
{
  yout[ct] = y[nx] + (xout[ct]-x[nx])*(y[nx]-y[nx-1])/(x[nx]-x[nx-1])
}
}
return(yout)
}

#####
##### Nelson-Siegel & Svensson: instantaneous forward #####
#####
Nelson.forward<-function(tv,b0,b10,b11,c1){
  f<-b0+(b10+b11*tv)*exp(-c1*tv)
  return(f)
}
Svensson.forward<-function(tv,b0,b10,b11,c1,b21,c2){
  f<-b0+(b10+b11*tv)*exp(-c1*tv)+b21*t*exp(-c2*t)
  return(f)
}
#####
#####Nelson-Siegel & Svensson: zero-coupon yields #####
#####
Nelson.ZC<-function(tv,par){
  b0 = par[1]
  b10= par[2]
  b11= par[3]
  c1 = par[4]
  ZC<- b0+ b10/(c1*tv)*(1-exp(-c1*tv))+
  b11/(tv*c1^2)*(1-(c1*tv+1)*exp(-c1*tv))
  return(ZC)
}
Svensson.ZC<-function(tv,par){
  b0 = par[1]
  b10= par[2]
  b11= par[3]
```

```
c1 = par[4]
b21= par[5]
c2 = par[6]
ZC<- b0+ b10/(c1*tv)*(1-exp(-c1*tv))+
  b11/(tv*c1^2)*(1-(c1*tv+1)*exp(-c1*tv))+
  b21/(tv*c2^2)*(1-(c2*tv+1)*exp(-c2*tv))
return(ZC)
}
#####
##### Nelson-Siegel & Svensson: objective functions for calibration #####
#####
Nelson.calib<-function(par,mat,ZCcurve){
  b0 = par[1]
  b10= par[2]
  b11= par[3]
  c1 = par[4]
  ZC = Nelson.ZC(mat,par)
  obj= sum((ZC-ZCcurve)^2)*1e6
  return(obj)}
Svensson.calib<-function(par,mat,ZCcurve){
  b0 = par[1]
  b10= par[2]
  b11= par[3]
  c1 = par[4]
  b21= par[5]
  c2 = par[6]
  ZC = Svensson.ZC(mat,par)
  obj= sum((ZC-ZCcurve)^2)*1e6
  return(obj)}

#####
##### Main script #####
#####
# reading of a CSV file, history of S&P value, downloaded from yahoo finance
ratedb<-read.csv(file='OLO_Rate_19_10_23d.csv',sep = ';',
  header = TRUE,na.strings = "#N/A")
ratedb$Date <- as.Date(ratedb$Date,format = "%d-%m-%y")
mat <- c(1:30)
```

```
nr    <- nrow(ratedb)
nc    <- ncol(ratedb)
remlist <-c()
# we clean the data : remove NA and interpolate when possible
for (ct1 in c(1:nr)){
  ZCcurve      <- ratedb[ct1,c(2:nc)]
  indnum       <- !is.na(ZCcurve)
  if (sum(indnum)>4){
    tmp        = spline(mat,ZCcurve,method="fmm")
    tmp2       = linearExtrap(tmp$x,tmp$y,mat)
    ratedb[ct1,c(2:nc)] = tmp2/100
  } else {
    remlist<-c(remlist,ct1+1) }}
# removes lines with too many NA....
if (length(remlist)>0){
  ratedb<-ratedb[-remlist,]
}
#####
##### Bootstrapping of zero-coupon yields #####
#####
nr    <- nrow(ratedb)
nc    <- ncol(ratedb)
matboot <- c(1:30)
CByield <- matrix(data = 0,nrow = nr,ncol = length(matboot))
ZCYield <- matrix(data = 0,nrow = nr,ncol = length(matboot))
DF      <- matrix(data = 0,nrow = nr,ncol = length(matboot))
for (ct1 in c(1:nr)){
  tmp      = spline(mat,ratedb[ct1,c(2:nc)],method="fmm",n=60)
  ZCcurve  = linearExtrap(tmp$x,tmp$y,matboot)
  CByield[ct1,] = ZCcurve
  ZCYield[ct1,1]= ZCcurve[1]
  DF[ct1,1]  = 1/(1+ZCcurve[1])
  for(ct2 in c(2:length(matboot))){
    DF[ct1,ct2]  = (1-ZCcurve[ct2]*sum(DF[ct1,1:(ct2-1)]))/(1+ZCcurve[ct2])
    ZCYield[ct1,ct2] = (1/DF[ct1,ct2])^(1/matboot[ct2])-1
  }}
# we choose the last ZCcurve
day = nr
print(ratedb[day,1])
```

```
daydate = ratedb[day,1]
ZCcurve = ZCyield[day,]
CBcurve = CBYield[day,]
#graphics.off()
#x11(width = 8,height = 5)
title = paste('OLO curve, ',daydate)
plot(mat,ZCcurve,xlab = 'Maturity',ylab = '%',type='p',
      col='blue',main=title,lwd=2)
lines(matboot,CBcurve,xlab = 'Maturity',ylab = '%',type='p',col='red',lwd=2)
grid()
legend("bottomright",legend=c('ZC','CB'),col=c('blue','red'),pch = 1)
#####
#### Warning, we work with continuous yields #####
cont.ZCcurve = -log(DF[day,])/matboot
#graphics.off()
#x11(width = 8,height = 5)
title = paste('OLO curve, ',daydate)
plot(mat,ZCcurve,xlab = 'Maturity',ylab = '%',type='p',col='blue',main=title)
lines(matboot,cont.ZCcurve,xlab = 'Maturity',ylab = '%',type='p',col='red')
grid()
legend("bottomright",legend=c('compound ZC','continuous ZC'),
      col=c('blue','red'),pch = 1)
par0 <- c( 0.005049046,-0.00892662,-0.003506234,0.2942863)
optNS<-nlm(f = Nelson.calib,p = par0, mat, cont.ZCcurve ,gradtol = 1e-15,
          steptol=1e-15,iterlim=500)
b0NS = optNS$estimate[1]
b10NS= optNS$estimate[2]
b11NS= optNS$estimate[3]
c1NS = optNS$estimate[4]

print(round(optNS$estimate,4))
#we store the parameter in a list
par.NS = list(b0=b0NS, b10=b10NS,b11=b11NS,c1=c1NS)
par0 <- c( 0.005049046,-0.00892662,-0.003506234,0.2942863,-0.02,0.002)
optSV<-nlm(f = Svensson.calib,p = par0, mat, cont.ZCcurve ,gradtol = 1e-15,
          steptol=1e-15,iterlim=500)
b0SV = optSV$estimate[1]
b10SV= optSV$estimate[2]
b11SV= optSV$estimate[3]
```

Market Consistent for valuation of participating life products with Stochastic Models

```
c1SV = optSV$estimate[4]
b21SV = optSV$estimate[5]
c2SV = optSV$estimate[6]
print(round(optSV$estimate,4))
# We store the parameter in a list
par.SV = list(b0=b0SV, b10=b10SV,b11=b11SV,c1=c1SV,b21=b21SV,c2=c2SV )
par.rNS = c(b0NS, b10NS,b11NS,c1NS)
par.rSV = c(b0SV, b10SV,b11SV,c1SV,b21SV,c2SV )
NSZC =Nelson.ZC(matboot,par.rNS)
SVZC =Svensson.ZC(matboot,par.rSV)
#graphics.off()
#x11(width = 8,height = 5)
plot(matboot,cont.ZCcurve,xlab='year',ylab='ZC Yield',col='red',main=title,
      lwd=2)
#lines(matboot,NSZC,lwd=2.,col='blue',lty=2)
lines(matboot,SVZC,lwd=2.,col='blue',lty=1)
legend("bottomright",legend = c('Observed','Svensson'),pch = c(1,NA),
      col=c('red','blue'),lty=c(0,1),lwd=2)
grid()
#####
# estimation, we use here Coupon Bearing yields
matgraph=c(1:50)
NSZC =Nelson.ZC(matgraph,par.rNS)
SVZC =Svensson.ZC(matgraph,par.rSV)
#graphics.off()
#x11(width = 8,height = 5)
plot(matgraph,SVZC,xlab='year',ylab='ZC Yield',col='red',main=title,lwd=2)
lines(mat,ZCcurve,lwd=2.,col='blue',lty=2)
legend(x=15,y=0.026,legend = c('Svensson ZC','Market ZC'),pch = c(1,NA),
      col=c('red','blue'),lty=c(0,2),lwd=2)
grid()
#####
#####Nelson-Siegel and Svensson #####
#####
#      Nelson-Siegel : instantaneous forward
Nelson.forward<-function(tv,b0,b10,b11,c1){
  f<-b0+(b10+b11*tv)*exp(-c1*tv)
  return(f)}
#####
```

Market Consistent for valuation of participating life products with Stochastic Models

```

#           Nelson-Siegel : forward rates
Nelson.dif.forward<-function(tv,b10,b11,c1){
  df<-b11*exp(-c1*tv)-c1*(b10+b11*tv)*exp(-c1*tv)
  return(df)}
#####

#           Svensson: forward rates)
Svensson.forward<-function(tv,b0,b10,b11,c1,b21,c2){
  f<-b0+(b10+b11*tv)*exp(-c1*tv)+b21*tv*exp(-c2*tv)
  return(f)}
#####

#           Svensson: d(forward rates)/dt
Svensson.dif.forward<-function(tv,b10,b11,c1,b21,c2){
  f<-b11*exp(-c1*tv)-c1*(b10+b11*tv)*exp(-c1*tv)+
  b21*exp(-c2*tv)-c2*b21*tv*exp(-c2*tv)
  return(f)}
(Svensson.forward(2,4.785328e-02,-3.839725e-03,-1.993397e-02,4.080369e-01,
  -1.487110e-06,-1.958219e-01))
#####
##### G2+ +#####
#####

#           Varphi curve for G2++
varphi<-function(modname,par.for,tv,a,sg,b,eta,rh){
  # modname : NS for Nelson Siegel, SV for Svensson and SW for Smith Wilson
  if (modname=='NS'){
    b0=par.for$b0 ; b10=par.for$b10 ; b11=par.for$b11 ;c1=par.for$c1
    f = Nelson.forward(tv,b0,b10,b11,c1)
    df= Nelson.dif.forward(tv,b10,b11,c1)}
  if (modname=='SV'){
    b0=par.for$b0 ; b10=par.for$b10 ; b11=par.for$b11
    c1=par.for$c1 ; b21=par.for$b21 ; c2=par.for$c2
    f = Svensson.forward(tv,b0,b10,b11,c1,b21,c2)
    df= Svensson.dif.forward(tv,b10,b11,c1,b21,c2)}
  Ba = (1-exp(-a*tv))/a ; Bb = (1-exp(-b*tv))/b
  varphi = f + sg^2/2*Ba^2 +eta^2/2*Bb^2+rh*sg*eta*Ba*Bb
  return(list(phi=varphi,f=f,df=df))}
#####
ratedb <-read.csv(file='OLO_Rate_19_10_23d.csv',sep = ',';header = TRUE,
  na.strings = "#N/A")
ratedb$Date <- as.Date(ratedb$Date,format = "%d-%m-%y")

```

Market Consistent for valuation of participating life products with Stochastic Models

```
# we consider the last five years
date.min = "2020-11-23" #ratedb$Date[1]
idx      = (ratedb$Date>date.min)
ratedb   = ratedb[idx,]
mat      = c(1:30)      #maturities
nr       = nrow(ratedb)
nc       = ncol(ratedb)
remlist  = c()          #lines to remove
# we clean the data : remove NA and interpolate when possible
for (ct1 in c(1:nr)){
  ZCcurve <- ratedb[ct1,c(2:nc)]
  indnum   <- !is.na(ZCcurve)
  if (sum(indnum)>4){
    tmp          = spline(mat,ZCcurve,method="fmm")
    tmp2         = linearExtrap(tmp$x,tmp$y,mat)
    ratedb[ct1,c(2:nc)] = tmp2/100
  } else{
    remlist<-c(remlist,ct1+1) }}
# removes lines with too many NA....
if (length(remlist)>0){
  ratedb<-ratedb[-remlist,]
}
#####
##### Bootstrapping of zero-coupon yields #####
#####
nr <- nrow(ratedb)
nc <- ncol(ratedb)
matboot <- c(1:30) # maturities considered for bootstrapping
CByield <- matrix(data = 0,nrow = nr,
                  ncol = length(matboot)) #yield, maturities matboot
ZCyield <- matrix(data = 0,nrow = nr,ncol = length(matboot))#zero coupon rate
DF      <- matrix(data = 0,nrow = nr,ncol = length(matboot))#discount factor
for (ct1 in c(1:nr)){
  # we interpolate yield if some maturities are missing
  tmp      = spline(mat,ratedb[ct1,c(2:nc)],method="fmm",n=60)
  ZCcurve  = linearExtrap(tmp$x,tmp$y,matboot)
  CByield[ct1,] = ZCcurve
  ZCyield[ct1,1]= ZCcurve[1]
  DF[ct1,1]   = 1/(1+ZCcurve[1])
}
```

```
for(ct2 in c(2:length(matboot)))
{
  DF[ct1,ct2] = (1-ZCcurve[ct2]*sum(DF[ct1,1:(ct2-1)])/(1+ZCcurve[ct2])
  ZCYield[ct1,ct2] = (1/DF[ct1,ct2])^(1/matboot[ct2])-1
}}
#####
##### HJM fit #####
#####
# we perform a first PCA so as to determine "outliers"
Y <- log(DF[2:nr,])-log(DF[1:(nr-1),])
nry <- nrow(Y)
ncy <- ncol(Y)
Sigma <- cov(Y)
eigswap <- eigen(Sigma) #Calcul des valeurs et vecteurs propres de Y
lam <- eigswap$values
psi <- eigswap$vectors
#2D projections
p1=vector(mode = 'double',length = nry)
p2=vector(mode = 'double',length = nry)
for (ct in c(1:nry)){
  p1[ct]=psi[,1]%*%Y[ct,]
  p2[ct]=psi[,2]%*%Y[ct,]
plot(p1,p2,type='p',main='PCA forecast of DF curves')
#volatility functions, G2++
volat1<-function(sg,a,mat){
  nm = length(mat)
  vol1 = sg*exp(-a*mat)
  return(vol1)}
volat2<-function(eta,b,mat){

  nm = length(mat)
  vol2 = eta*exp(-b*mat)
  return(vol2)}
#integral of volatility functions
integ.volat1<-function(sg,a,rho,mat){
  vol1 = sqrt(1-rho^2)*sg/a*(1-exp(-a*mat))
  return(vol1)}
integ.volat2<-function(eta,b,mat,sg,a,rho){
  vol1<- 1/a*(1-exp(-a*mat))*sg*rho
```

Market Consistent for valuation of participating life products with Stochastic Models

```
vol2 = eta/b*(1-exp(-b*mat))
return(vol1+vol2)}
#tools to estimate vol. parameters
fit.volat1<-function(par,mat,psi,lam){
  dt = 1/250
  ga = par[1] ; a = exp(par[2])
  vol1<- 1/a*(1-exp(-a*mat))*ga
  return(sum((-vol1*sqrt(dt)-psi*sqrt(lam))^2))}
fit.volat2<-function(par,mat,psi,lam,ga,a){
  dt = 1/250
  eta = par[1] ; b = exp(par[2]) ; rho = sigmoid(par[3])*2-1
  vol1<- 1/a*(1-exp(-a*mat))*ga*rho/sqrt(1-rho^2)
  vol2<- eta/b*(1-exp(-b*mat))
  return(sum((-vol1+vol2)*sqrt(dt)-psi*sqrt(lam))^2)}
#estimation of parameters
ga = 0.001 #product of sg and sqrt(1-rho^2)
eta = 0.001
a = 0.3
b = 0.3
rho = 0.2
optvol1 = nlm(f = fit.volat1,p = c(ga,log(a)) , matboot,psi[,1],lam[1],
  gradtol = 1e-15,steptol=1e-15,iterlim=500)
gaopt = (optvol1$estimate[1]) #product of sg and sqrt(1-rho^2)
aopt = exp(optvol1$estimate[2])
optvol2 = nlm(f = fit.volat2,p = c(eta,log(b),logit((rho+1)/2)),
  matboot,psi[,2],lam[2],
  gaopt,aopt,gradtol = 1e-18,steptol=1e-18,iterlim=500)
etaopt = optvol2$estimate[1]
bopt = exp(optvol2$estimate[2])
rhopt = sigmoid(optvol2$estimate[3])*2-1
sgopt = gaopt/sqrt(1-rhopt^2) #optimal sg = ga / sqrt(1-rho^2)
#variance explained by the first component
print(lam/sum(lam))
#parameter estimate
print(c(aopt,sgopt,bopt,etaopt,rhopt))
print(sqrt(sgopt^2+etaopt^2+2*rhopt*sgopt*etaopt))
#plot integrals of vol
#graphics.off()
#X11(width = 8,height = 8)
```

```

par(mfrow=c(2,1))
plot(matboot,psi[,1]*sqrt(lam[1]),col='red',xlab = 'year',ylab="",lwd=2)
int1<- -integ.volat1(sgopt,aopt,rhopt,matboot)*sqrt(1/250)
lines(matboot,int1,lwd=2,col='blue')
grid()
legend("bottomleft",legend = c('Scaled 1st eigenvector','Integral of sigma'),
      lty=c(0,1),pch = c(1,NA),col = c('red','blue'))
plot(matboot,psi[,2]*sqrt(lam[2]),col='red',xlab = 'year',ylab="",lwd=2)
int2<- -integ.volat2(etaopt,bopt,matboot,sgopt,aopt,rhopt)*sqrt(1/250)
lines(matboot,int2,lwd=2,col='blue')
legend("topleft",legend = c('Scaled 2nd eigenvector','Integral of sigma'),
      lty=c(0,1),pch = c(1,NA),col = c('red','blue'))
grid()
#####
#illustration, we compute the forward, diff forward and theta for the 3 models
a = aopt ; sg = sgopt
b = bopt ; eta = etaopt
rh = rhopt
matgraph=c(1:20)
phi.NS = varphi(modname='NS',par.NS,tv=matgraph,a,sg,b,eta,rh)
phi.SV = varphi(modname='SV',par.SV,tv=matgraph,a,sg,b,eta,rh)
# Plot of forward rates f(0,t) and theta function
#graphics.off()
#x11(width = 8,height = 5)
par(mfrow=c(2,1))
title = paste('f(0,t) ',daydate)
plot(matgraph,phi.NS$f,xlab='year',ylab='% ',type='l',col='red',main=title,
      lwd=2,ylim=range(phi.SV$f))
lines(matgraph,phi.SV$f,lwd=2,col='blue',lty=2)
legend('topleft',legend = c('NS','SV'),lty=c(1:2),
      col=c('red','blue'),lwd=2)
grid()
title = paste('phi(t) ',daydate)
plot(matgraph,phi.NS$phi,xlab='year',ylab='% ',type='l',col='red',main=title,
      lwd=2,ylim=range(c(phi.SV$phi,phi.NS$phi)))
lines(matgraph,phi.SV$phi,lwd=2,col='blue',lty=2)
legend('topleft',legend = c('NS','SV'),lty=c(1:2),
      col=c('red','blue'),lwd=2)
grid()

```

Market Consistent for valuation of participating life products with Stochastic Models

```
par.rHW2=c(aopt,sgopt,bopt,etaopt,rhopt)
par.rSV=c(b0SV,b10SV,b11SV,c1SV,b21SV,c2SV )

#####
#####Prix du zéro coupon du modèle #####
#####
#           Varphi curve for G2++ with sv
#### fonctions PHI et integrales
Bx<-function(x,ti,Tf){(1-exp(-x*(Tf-ti)))/x}
phi_t<-function(tv,parSV=par.rSV,parHW=par.rHW2){
  #### les parametres de svenson ####
  b0<-parSV[1]
  b10<-parSV[2]
  b11<-parSV[3]
  c1<-parSV[4]
  b21<-parSV[5]
  c2<-parSV[6]
  #### les parametres de G2++ #####
  a <- parHW[1]
  sg <- parHW[2]
  b <- parHW[3]
  eta <- parHW[4]
  rh <- parHW[5]
  f = Svensson.forward(tv,b0,b10,b11,c1,b21,c2)
  df= Svensson.dif.forward(tv,b10,b11,c1,b21,c2)
  varphi = f + (sg^2/2)*(Bx(a,0,tv))^2 +(eta^2/2)*(Bx(b,0,tv))^2+
  rh*sg*eta*(Bx(a,0,tv))*(Bx(b,0,tv))
  return(varphi)}
#(xx=phi_t(1,par.rSV,par.rHW2)*3)

integrale_varphi <- function(ti,Tf,par.for=par.rSV,params=par.rHW2){
  tmp <- function(tv){
    phi_t(tv,par.for,params) }
  integrate_phi=integrate(tmp, lower = ti, upper = Tf)$value
  return(integrate_phi)}
(integrale_varphi(0,8,par.rSV,par.rHW2))
##### Calcul des P0t #####
#####
```

```
##### Simulations de Xt et Yt #####
va_tr<-function(t,Nsim=10000,parHW=par.rHW2){
  ### les parametres de G2++
  a <- parHW[1]
  sg <- parHW[2]
  b <- parHW[3]
  eta <- parHW[4]
  rh <- parHW[5]
  x0<-0
  y0<-0
  dt<-1
  x1=matrix(0,Nsim,t)
  y1=matrix(0,Nsim,t)
  n=1
  while(n<=Nsim){
    w1=rnorm(t)
    w2=sqrt(1-rh^2)*w1+rh*rnorm(t)
    x1[n,1]=sg*sqrt(dt)*w1[1]
    y1[n,1]=eta*sqrt(dt)*w2[1]
    for (k in 2:t) {
      x1[n,k]=x1[n,(k-1)]*(1-a*dt)+sg*sqrt(dt)*w1[k]
      y1[n,k]=y1[n,(k-1)]*(1-a*dt)+sg*sqrt(dt)*w2[k]
    }
    n=n+1 }
  xt=as.numeric(apply(x1,2,mean))
  yt=as.numeric(apply(y1,2,mean))
  list(xt=xt,yt=yt)}
##### Stockage de XT et YT #####
set.seed(123456)
varXY= data.frame(va_tr(30))
xtr=c(0,varXY$xt)
ytr=c(0,varXY$yt)
rtrHW2=function(t){phi_t(t)+xtr[t]+xtr[t]}
rt_rHW2=sapply(matboot,rtrHW2)
par(mfrow=c(2,1))
plot(mat,rt_rHW2,xlab='duree du contrat',ylab='mux',
      ylim=c(min(rt_rHW2,cont.ZCcurve),max(rt_rHW2,cont.ZCcurve)),
      col='red',main="interest rates ",lwd=2)
lines(mat,cont.ZCcurve,lwd=2.,col='blue',lty=2)
#lines(xabs,HW2_P0t,lwd=2.,col='black',lty=1)
```

```

grid()
legend("topleft",legend = c('Hw2','obs'),pch = c(1,NA),
      col=c('red','blue'),lty=c(0,2),lwd=2)
##### Définition de la fonction de calcul du prix du coupon du modèle#####
#####
v0t <- function(t,Par=par.rHW2) {
  a <- Par[1]
  sigma <- Par[2]
  b <- Par[3]
  eta <- Par[4]
  rho <- Par[5]
  #Bx<-function(x,ti,Tf){(1-exp(-x*(Tf-ti)))/x}
  Ba2=function(t){(Bx(a,0,t))^2}
  Bb2=function(t){(Bx(b,0,t))^2}
  Bab=function(t){((Bx(a,0,t))*(Bx(b,0,t)))}
  v0t<- ((sigma^2)*integrate(Ba2,0,t)$value+(eta^2)*integrate(Bb2,0,t)$value+
    2*rho*sigma*eta*integrate(Bab,0,t)$value)
  return(v0t)}
(sapply(matboot,v0t))
ZC_P0t=function(t,parSV=par.rSV,parHW=par.rHW2){
##### les parametres de G2++ #####
a <- parHW[1]
sg <- parHW[2]
b <- parHW[3]
eta <- parHW[4]
rh <- parHW[5]
ZC_P0T = exp(-integrale_varphi(0,t)+0.5*v0t(t))
#ZC_P0t= ((ZC_P0T/ZC_PtT)*exp(0.5*(vtT(ti,Tf)-vtT(0,Tf)+vtT(0,ti))))
  # *exp(-Bx(a,ti,Tf)*xt[ti+1]-Bx(b,ti,Tf)*yt[ti+1]))}
(ZC_P0t(8))
##### Representation des Zero coupons P0tx NSx, SVx, HW2x #####
NSZC =Nelson.ZC(matboot,par.rNS)
SVZC =Svensson.ZC(matboot,par.rSV)
P0t_NS=function(t,par=par.rNV){exp(-Nelson.ZC(t,par)*t)}
P0t_SV=function(t,par=par.SV){exp(-Svensson.ZC(t,par)*t)}
P0t_ob=function(t){exp(-cont.ZCcurve[t]*t)}
T25=seq(1:25)
NS_P0t =P0t_NS(T25,par.rNS)
SV_P0t =P0t_SV(T25,par.rSV)

```

Market Consistent for valuation of participating life products with Stochastic Models

```
HW2_P0t=sapply(T25,ZC_P0t)
Ob_P0t =sapply(T25,P0t_ob)
par(mfrow=c(1,1))
plot(T25,Ob_P0t,xlab='year',ylab='ZC Yield',ylim = c(min(HW2_P0t,Ob_P0t),
          max(HW2_P0t,Ob_P0t)) ,col='red',main="Interest ZC ",lwd=2)
lines(T25,SV_P0t,lwd=2,col='blue',lty=2)
lines(T25,HW2_P0t,lwd=2,col='black',lty=1)
grid()
legend("bottomleft",legend = c('Observed','Svensson','HW2'),pch = c(1,NA,NA),
      col=c('red','blue','black'),lty=c(0,2,1),lwd=2)
#####
#####
##### CALIBRATION TAUX MORTALITE HW1 #####
#####
#####Calibration du taux de mortalité à l'aide de Hull and white à 1 facteur#####
#####
#rm(list=ls())
library(readxl)
observe <- read_excel("best_estimate_mortality_tables_iabe_2015.xls",
      sheet = "HW1")
observe=data.frame(observe)
life=subset(observe,x<66)
View(life)
tf=length(life$t)
P_life=life[,5]
tm=life[,1]
Pxt=life[,4]
#View(P_life)

#####Boostrap des Taux de mortalité#####
#####
mux=function(tpx){
  mu=c()
  #mu[1]=0
  for (k in 1:length(tpx)) {
    mu[k]=-log(tpx[k])}
  return(mu)}
muxt=mux(Pxt)
```

Market Consistent for valuation of participating life products with Stochastic Models

```
#####Calibration du taux de mortalité à l'aide de Hull and white avec theta comp#####
#####
Prob= fonction(Par){
  A=Par[1]
  B=Par[2]
  sigma=Par[3]
  b=Par[4]
  return(sum(log(P_life)-(A/b)*(exp(-b*tm)*(exp((b+B)*tm)-1)/(B+b)-
    (exp(B*tm)-1)/B)
    +(sigma^2/(2*b^2))*((1/b)*(1-exp(-b*tm))-tm)+
    (sigma^2/(4*b^3))*(1-exp(-b*tm))^2-log(life$tPx[2]*(1-exp(-b*tm))/b)^2))
z_HW1=constrOptim(theta=c(0.000000001,0.00001,0.00001,0.000001),
  f=Prob,ui=rbind(c(1,0,0,0),c(0,1,0,0), c(0,0,1,0),
    c(0,0,0,1)),ci=c(0,0,0,0),grad = NULL)
z_HW1
par.xHW=c(z_HW1$par[1],z_HW1$par[2], z_HW1$par[3],z_HW1$par[4] )
#1.344134e-04 2.095229e-06 1.006126e-06 1.139875e-04
tPx_HW= fonction(t,parx=par.xHW ){
  A=parx[1]
  B=parx[2]
  b=parx[3]
  sigma=parx[4]
  return(exp((A/b)*(exp(-b*t)*(exp((b+B)*t)-1)/(B+b)-(exp(B*t)-1)/B)-
    (sigma^2/(2*b^2))*((1/b)*(1-exp(-b*t))-t)-
    (sigma^2/(4*b^3))*(1-exp(-b*t))^2+log(life$tPx[2]*(1-exp(-b*t))/b)))
#proba_survie=fonction(t){tPx_HW(t,par.xHW)}
proba_xHW=sapply(tm,tPx_HW)
par(mfrow=c(1,1))
plot(x = seq(from = 40, to = 65, by = 1), proba_xHW, xlab = "Age", ylab = "tPx",
  ylim=c(min(proba_xHW,P_life),max(proba_xHW,P_life))
  , col="red",main = "Zero-coupon de mortalité HW1",lwd=2)
lines(x = seq(from = 40, to = 65, by = 1), y = P_life,lwd=3, col= 'blue',lty=2)
grid()
legend("bottomleft",legend = c('Hw1','obs'),pch = c(1,NA),
  col=c('red','blue'),lty=c(0,2),lwd=2)
#####
##### AIC HW1 #####
# Récupérez les paramètres estimés
parHW1_estimes <- z_HW1$par
```

```
# Calculez le nombre de paramètres dans le modèle
k_HW1 <- length(parHW1_estimes)
# Calculez l'AIC
AIC_HW1 <- 2*k_HW1 - 2*z_HW1$value
# Affichez le résultat
print(AIC_HW1)
#####
#####
##### CALIBRATION TAUX MORTALITE HW2 #####
#####
#####
library(readxl)
ratedbx <- read_excel("best_estimate_mortality_tables_iabe_2015.xls", sheet = "IABE_F")
ratedbx=data.frame(ratedbx)
#life=t(ratedbx[36,2:30])
##### STOCKAGE DES TAUX OBSERVES DE MORTALITE #####
library('pracma')
#rm(list=ls())
#####
#####          Linear interpolation & extrapolation #####
#####
linearExtrap<-function(x,y,xout)
{
  tmp = sort(x,index.return=T)
  x   = tmp$x
  y   = y[tmp$ix]
  nx  = length(x)
  nxout = length(xout)
  yout = vector(mode = "double",length=nxout)
  minx = min(x)
  maxx = max(x)
  ind  = c(1:nx)
  for (ct in c(1:nxout)){
    if ((xout[ct]<maxx) && (xout[ct]>=minx)){
      i1 = max(ind[(x<=xout[ct])])
      i2 = min(ind[(x >xout[ct])])
      yout[ct] = y[i1] + (xout[ct]-x[i1])*(y[i2]-y[i1])/(x[i2]-x[i1]) }
    if (xout[ct]<minx){
      yout[ct] = y[1] + (xout[ct]-x[1])*(y[2]-y[1])/(x[2]-x[1]) }
  }
}
```

```
if (xout[ct]>=maxx){
  yout[ct] = y[nx] + (xout[ct]-x[nx])*(y[nx]-y[nx-1])/(x[nx]-x[nx-1]) }
return(yout)}

#####
##### Nelson-Siegel & Svensson: instantaneous forward#####
#####
Nelson.forwardx<-function(tv,b0,b10,b11,c1){
  f<-b0+(b10+b11*tv)*exp(-c1*tv)
  return(f)}
Svensson.forwardx<-function(tv,b0,b10,b11,c1,b21,c2){
  f<-b0+(b10+b11*tv)*exp(-c1*tv)+b21*tv*exp(-c2*tv)
  return(f)}
#(Svensson.forwardx(12,b0SV, b10SV,b11SV,c1SV,b21SV,c2SV))
#####
##### Nelson-Siegel : forward rates #####
#####
Nelson.dif.forwardx<-function(tv,b10,b11,c1){
  df<-b11*exp(-c1*tv)-c1*(b10+b11*tv)*exp(-c1*tv)
  return(df)}
#####
#      Svensson: d(forward rates)/dt
Svensson.dif.forwardx<-function(tv,b10,b11,c1,b21,c2){
  f<-b11*exp(-c1*tv)-c1*(b10+b11*tv)*exp(-c1*tv)+
  b21*exp(-c2*tv)-c2*b21*tv*exp(-c2*tv)
  return(f)}
#####
##### Nelson-Siegel & Svensson: zero-coupon yields #####
#####
Nelson.ZCx<-function(tv,par){
  b0 = par[1]
  b10= par[2]
  b11= par[3]
  c1 = par[4]
  ZC<- b0+ b10/(c1*tv)*(1-exp(-c1*tv))+
  b11/(tv*c1^2)*(1-(c1*tv+1)*exp(-c1*tv))
  return(ZC)
}
Svensson.ZCx<-function(tv,par){
```

```

b0 = par[1]
b10= par[2]
b11= par[3]
c1 = par[4]
b21= par[5]
c2 = par[6]
  ZC<- b0+ b10/(c1*tv)*(1-exp(-c1*tv))+
  b11/(tv*c1^2)*(1-(c1*tv+1)*exp(-c1*tv))+
  b21/(tv*c2^2)*(1-(c2*tv+1)*exp(-c2*tv))
return(ZC)}

#####
##### Nelson-Siegel & Svensson: objective functions for calibration #####
#####

Nelson.calibx<-function(par,mat,ZCcurve){
  b0 = par[1]
  b10= par[2]
  b11= par[3]
  c1 = par[4]
  ZC = Nelson.ZCx(mat,par)
  obj= sum((ZC-ZCcurve)^2)*1e6
  return(obj)}

Svensson.calibx<-function(par,mat,ZCcurve){
  b0 = par[1]
  b10= par[2]
  b11= par[3]
  c1 = par[4]
  b21= par[5]
  c2 = par[6]
  ZC = Svensson.ZCx(mat,par)
  obj= sum((ZC-ZCcurve)^2)*1e6
  return(obj)}

#####
##### Main script #####
#####

matx  = c(1:31)  #maturities
nr    = nrow(ratedbx)
nc    = ncol(ratedbx)
remlist = c()    #lines to remove
# we clean the data : remove NA and interpolate when possible

```

Market Consistent for valuation of participating life products with Stochastic Models

```
for (ct1 in 1:nr){
  ZCcurve <- ratedbx[ct1,c(2:nc)]
  indnum <- !is.na(ZCcurve)
  if (sum(indnum)>4){
    tmpx = spline(matx,ZCcurve,method="fmm")
    tmp2x = linearExtrap(tmpx$x,tmpx$y,matx)
    ratedbx[ct1,c(2:nc)] = tmp2x
  } else
  {
    remlist<-c(remlist,ct1+1) }}
#removes lines with too many NA....
if (length(remlist)>0){
  ratedbx<-ratedbx[-remlist,]}
#####
##### Bootstrapping of zero-coupon yields #####
#####
nr <- nrow(ratedbx)
nc <- ncol(ratedbx)
matbootx <- c(1:31) # maturities considered for bootstrapping
CByieldx <- matrix(data = 0,nrow = nr,ncol = length(matbootx)) #yield, maturities matboot
ZCYieldx <- matrix(data = 0,nrow = nr,ncol = length(matbootx)) #zero coupon rate
DFx <- matrix(data = 0,nrow = nr,ncol = length(matbootx)) #discount factor
for (ct1 in c(1:nr)){
  # we interpolate yield if some maturities are missing
  tmpx = spline(matx,ratedbx[ct1,c(2:nc)],method="fmm",n=60)
  ZCcurvex = linearExtrap(tmpx$x,tmpx$y,matbootx)
  CByieldx[ct1,] = ZCcurvex
  ZCYieldx[ct1,1]= ZCcurvex[1]
  DFx[ct1,1] = 1/(1+ZCcurvex[1])
  for(ct2 in c(2:length(matbootx)))
  {
    DFx[ct1,ct2] = (1-ZCcurvex[ct2]*sum(DFx[ct1,1:(ct2-1)]))/(1+ZCcurvex[ct2])
    ZCYieldx[ct1,ct2] = (1/DFx[ct1,ct2])^(1/matbootx[ct2])-1 }}
# we choose the ZCcurve
year = nr # choix de l'annee
print(ratedbx[year,1])
daydate = ratedbx[year,1]
ZCcurvex = ZCYieldx[year,]
CBcurvex = CByieldx[year,]
```

Market Consistent for valuation of participating life products with Stochastic Models

```
matx=c(40:70)
#graphics.off()
#x11(width = 8,height = 5)
#title = paste('OLO curve, ',daydate)
plot(matx,ZCcurvex,xlab = 'age',ylab = 'mux',type='p',col='blue',main="Female Mortality Belgium",lwd=2)
lines(matx,CBcurvex,type='p',col='red',lwd=2)
grid()
legend("topleft",legend=c('ZC','CB'),col=c('blue','red'),pch = 1)
#####
##### Warning, we work with continuous yields #####
cont.ZCcurvex = -log(DFx[year,])/matbootx
#graphics.off()
#x11(width = 8,height = 5)
#title = paste('OLO curve, ',daydate)
plot(matx,ZCcurvex,xlab = 'age',ylab = 'mux',type='p',col='blue',main="female mortaly belgium")
lines(matx,cont.ZCcurvex,type='p',col='red')
grid()
legend("topleft",legend=c('compound ZC','continuous ZC'),col=c('blue','red'),pch = 1)
par0x <-c( 0.005049046,0.00892662,0.003506234,0.2942863)
optNSx<-nlm(f = Nelson.calibx,p = par0x, matbootx, cont.ZCcurvex ,gradtol = 1e-15,steptol=1e-15,iterlim=500)
b0NS = optNSx$estimate[1]
b10NS= optNSx$estimate[2]
b11NS= optNSx$estimate[3]
c1NS= optNSx$estimate[4]
print(round(optNSx$estimate,4))
#we store the parameter in a list
par.NSx = list(b0=b0NS, b10=b10NS,b11=b11NS,c1=c1NS) # 0.000377792 0.009261800 -0.013881180
1.179229962
par.xNS =c(b0NS,b10NS,b11NS,c1NS)

par0x <- c( 0.005049046,-0.00892662,-0.003506234,0.2942863,-0.02,0.002)
#par0x <- c( 0.5049046,0.892662,0.3506234,0.2942863,0.02,0.002)
optSVx<-nlm(f = Svensson.calibx,p = par0x, matbootx, cont.ZCcurvex ,gradtol = 1e-15,steptol=1e-15,iterlim=500)
b0SV = optSVx$estimate[1]
b10SV= optSVx$estimate[2]
b11SV= optSVx$estimate[3]
c1SV = optSVx$estimate[4]
b21SV = optSVx$estimate[5]
```

Market Consistent for valuation of participating life products with Stochastic Models

```
c2SV = optSVx$estimate[6]
print(round(optSVx$estimate,4))
# We store the parameter in a list
par.SVx = list(b0=b0SV, b10=b10SV,b11=b11SV,c1=c1SV,b21=b21SV,c2=c2SV)#0.019719706 -0.016040997
-0.006479927 0.299223253 -0.002343031 0.044113667
par.xSV=c(b0SV,b10SV,b11SV,c1SV,b21SV,c2SV )
NSZCx =Nelson.ZCx(matbootx,par.xNS)
SVZCx =Svensson.ZCx(matbootx,par.xSV)
#graphics.off()
#x11(width = 8,height = 5)
plot(matx,cont.ZCcurvex,ylim=c(min(NSZCx,SVZCx),max(NSZCx,SVZCx)), xlab='Age',ylab='ZC
mux',col='red',main="Mortality rates",lwd=2)
lines(matx,NSZCx,lwd=3.,col='blue',lty=2)
lines(matx,SVZCx,lwd=3.,col='black',lty=1)
grid()
legend("topleft",legend = c('Observed','Nelson-Siegel','Svensson'),pch = c(1,NA,NA),
      col=c('red','blue','black'),lty=c(0,2,1),lwd=2)
#####
# estimation, we use here Coupon Bearing yields
matgraphx=c(1:50)
NSZCxx =Nelson.ZCx(matgraphx,par.xNS)
SVZCxx =Svensson.ZCx(matgraphx,par.xSV)
#graphics.off()
#x11(width = 8,height = 5)
matgraphxx=c(40:89)
plot(matgraphxx,SVZCxx,xlab='age',ylab='Zrate',type='l',col='black',main="Mortality rates prediction",lwd=2)
lines(matx,cont.ZCcurvex,lwd=2.,col='red',type='p')
lines(matgraphxx,NSZCxx,lwd=2.,col='blue',lty=2)
grid()
legend("topleft",legend = c('Market ZC','Nelson ZC','Svenson ZC'),pch = c(1,NA,NA),
      col=c('red','blue','black'),lty=c(0,2,1),lwd=2)
#(Svensson.forwardx(2,b0SV, b10SV,b11SV,c1SV,b21SV,c2SV))
#####
##### G2++ #####
#####
#          Varphi curve for G2++
varphix<-function(modname,par.for,tv,a,sg,b,eta,rh){
  # modname : NS for Nelson Siegel, SV for Svensson and SW for Smith Wilson
  if (modname=='NS'){
    b0=par.for$b0 ; b10=par.for$b10 ; b11=par.for$b11 ;c1=par.for$c1
```

Market Consistent for valuation of participating life products with Stochastic Models

```
f = Nelson.forwardx(tv,b0,b10,b11,c1)
df= Nelson.dif.forwardx(tv,b10,b11,c1) }
if (modname=='SV'){
  b0=par.for$b0 ; b10=par.for$b10 ; b11=par.for$b11
  c1=par.for$c1 ; b21=par.for$b21 ; c2=par.for$c2
  f = Svensson.forwardx(tv,b0,b10,b11,c1,b21,c2)
  df= Svensson.dif.forwardx(tv,b10,b11,c1,b21,c2) }
Ba  = (1-exp(-a*tv))/a ; Bb = (1-exp(-b*tv))/b
varphix = f + sg^2/2*Ba^2 +eta^2/2*Bb^2+rh*sg*eta*Ba*Bb
return(list(phi=varphix,f=f,df=df))}
#####
library(readxl)
ratedbx <- read_excel("best_estimate_mortality_tables_iabe_2015.xls", sheet = "IABE_F")
ratedbx=data.frame(ratedbx)
#####
##### HJM fit #####
#####
# we perform a first PCA so as to determine "outliers"
Yx  <- log(DFx[2:nr,])-log(DFx[1:(nr-1),])
nry  <- nrow(Yx)
ncy  <- ncol(Yx)
Sigmax  <- cov(Yx)
eigswapx <- eigen(Sigmax)
lamx    <- eigswapx$values
psix    <- eigswapx$vectors
#2D projections
p1=vector(mode = 'double',length = nry)
p2=vector(mode = 'double',length = nry)
for (ct in c(1:nry)){

  p1[ct]=psix[,1]%*% Yx[ct,]
  p2[ct]=psix[,2]%*% Yx[ct,]}
plot(p1,p2,type='p',main='PCA forecast of DF curves')
#volatility functions, G2++
volat1<-function(sg,a,mat){
  nm  = length(mat)
  vol1 = sg*exp(-a*mat)
  return(vol1)}
volat2<-function(eta,b,mat){
```

```

nm = length(mat)
vol2 = eta*exp(-b*mat)
return(vol2)}

#integral of volatility functions
integ.volat1<-function(sg,a,rho,mat){
  vol1 = sqrt(1-rho^2)*sg/a*(1-exp(-a*mat))
  return(vol1)}

integ.volat2<-function(eta,b,mat,sg,a,rho){
  vol1<- 1/a*(1-exp(-a*mat))*sg*rho
  vol2 = eta/b*(1-exp(-b*mat))
  return(vol1+vol2)}

#tools to estimate vol. parameters
fit.volat1x<-function(par,mat,psi,lam){
  dt = 1#/250
  ga = par[1] ; a = exp(par[2])
  vol1<- 1/a*(1-exp(-a*mat))*ga
  return(sum((-vol1*sqrt(dt)-psi*sqrt(lam))^2))}

fit.volat2x<-function(par,mat,psi,lam,ga,a){
  dt = 1#/250
  eta = abs(par[1]) ; b = exp(par[2]) ; rho = sigmoid(par[3])*2-1
  vol1<- 1/a*(1-exp(-a*mat))*ga*rho/sqrt(1-rho^2)
  vol2<- eta/b*(1-exp(-b*mat))
  return(sum((-vol1+vol2)*sqrt(dt)-psi*sqrt(lam))^2))}

#####
#####

#tools to estimate vol. parameters
fit.volat1x<-function(par,mat,psi,lam){
  dt = 1#/250
  sg = abs(par[1]) ; a = exp(par[2]); rho= sigmoid(par[3])*2-1
  vol1<- 1/a*(1-exp(-a*mat))*sg*rho
  return(sum((-vol1*sqrt(dt)-psi*sqrt(lam))^2))}

fit.volat2x<-function(par,mat,psi,lam,sg,rho,a){
  dt = 1#/250
  eta = abs(par[1]) ; b = exp(par[2]) ; #rho = sigmoid(par[3])*2-1
  vol1<- 1/a*(1-exp(-a*mat))*sg*sqrt(1-rho^2)
  vol2<- eta/b*(1-exp(-b*mat))
  return(sum((-vol1+vol2)*sqrt(dt)-psi*sqrt(lam))^2))}

sgx = 0.001 #product of sg and sqrt(1-rho^2)
etax = 0.001 #0.001

```

Market Consistent for valuation of participating life products with Stochastic Models

```
ax = 0.0003
bx = 0.0003
rhox = 0.2
optvol1 = nlm(f = fit.volat1x,p = c(sgx,log(ax),logit((rhox+1)/2)), matbootx,psix[,1],lamx[1],gradtol = 1e-
15,steptol=1e-15,iterlim=500)
sgoptx = abs(optvol1$estimate[1]) #product of sg and sqrt(1-rho^2)
aoptx = exp(optvol1$estimate[2])
rhoptx = sigmoid(optvol1$estimate[3])*2-1
optvol2 = nlm(f = fit.volat2x,p = c(etax,log(bx)), matbootx,psix[,2],lamx[2],
sgoptx,rhoptx,aoptx,gradtol = 1e-18,steptol=1e-18,iterlim=500)
etaoptx = abs(optvol2$estimate[1])
boptx = exp(optvol2$estimate[2])
print(c(aoptx,sgoptx,boptx,etaoptx,rhoptx))
print(sqrt(sgoptx^2+etaoptx^2+2*rhoptx*sgoptx*etaoptx))
#plot integrals of vol
#graphics.off()
#X11(width = 8,height = 8)
par(mfrow=c(1,1))
plot(matbootx,psix[,1]*sqrt(lamx[1]),col='red',xlab = 'year',ylab="",lwd=2)
int1<- -integ.volat1(sgoptx,aoptx,rhoptx,matbootx)*sqrt(1)#sqrt(1/250)
lines(matbootx,int1,lwd=2,col='blue')
grid()
legend('bottomleft',legend = c('Scaled 1st eigenvector','Integral of sigma'),
lty=c(0,1),pch = c(1,NA),col = c('red','blue'))
#x=1,y=-0.0043
int2<- -integ.volat2(etaoptx,boptx,matbootx,sgoptx,aoptx,rhoptx)*sqrt(1)#sqrt(1/250)
plot(matbootx,psix[,2]*sqrt(lamx[2]),ylim=c(min(int2,psix[,2]*sqrt(lamx[2])),max(int2,psix[,2]*sqrt(lamx[2])))
,col='red',xlab = 'year',ylab="",lwd=2)
lines(matbootx,int2,lwd=2,col='blue')
legend('bottomleft',legend = c('Scaled 2nd eigenvector','Integral of sigma'),
lty=c(0,1),pch = c(1,NA),col = c('red','blue'))
grid()
par.xHW2=c(aoptx,sgoptx,boptx,etaoptx,rhoptx)
par.xSV=c(b0SV,b10SV,b11SV,c1SV,b21SV,c2SV)
#####
##### AIC HW2 #####
# Récupérez les paramètres estimés
parHW2_1<- optvol1$estimate
parHW2_2<- optvol2$estimate
```

```

# Calculez le nombre de paramètres dans le modèle
k_HW2_1 <- length(parHW2_1)
k_HW2_2 <- length(parHW2_2)
# Calculez l'AIC
AIC_HW2_1 <- 2*k_HW2_1 - 2*(optvol1$minimum)
AIC_HW2_2 <- 2*k_HW2_2 - 2*(optvol2$minimum)
AIC_HW2 <- AIC_HW2_1+AIC_HW2_2
# Affichez le résultat
print(AIC_HW2)
#####
#illustration, we compute the forward, diff forward and theta for the 3 models
ax = aoptx ; sgx = sgoptx
bx = boptx ; etax = etaoptx
rhx = rhoptx
matgraphx=c(1:31)
phi.NSx = varphix(modname='NS',par.NSx,tv=matgraphx,ax,sgx,bx,etax,rhx)
phi.SVx = varphix(modname='SV',par.SVx,tv=matgraphx,ax,sgx,bx,etax,rhx)
# Plot of forward rates f(0,t) and theta function
#graphics.off()
#x11(width = 8,height = 5)
par(mfrow=c(1,1))
#title = paste('f(0,t) ',daydate)
plot(matgraphx,phi.NSx$f,xlab='age',ylim=c(min(phi.NSx$f,phi.SVx$f),max(phi.NSx$f,phi.SVx$f)),
ylab='mux',type='l',col='red',main='f(0,t) de mux',
lwd=2)
lines(matgraphx,phi.SVx$f,lwd=2.,col='blue',lty=2)
legend('topleft',legend = c('NS','SV'),lty=c(1:2),
col=c('red','blue'),lwd=2)
grid()
#title = paste('phi(t) ',daydate)
plot(matgraphx,phi.NSx$phi,xlab='age',ylab='mux',type='l',col='red',main='Phi(t) de mux',
lwd=2,ylim=c(min(phi.NSx$phi,phi.SVx$phi),max(phi.NSx$phi,phi.SVx$phi)))
lines(matgraphx,phi.SVx$phi,lwd=2.,col='blue',lty=2)
legend('topleft',legend = c('NS','SV'),lty=c(1:2),
col=c('red','blue'),lwd=2)
grid()
par.xHW2=c(aoptx,sgoptx,boptx,etaoptx,rhoptx)
par.xSV=c(b0SV,b10SV,b11SV,c1SV,b21SV,c2SV )
par.xNS =c(b0NS,b10NS,b11NS,c1NS)

```

Market Consistent for valuation of participating life products with Stochastic Models

```
#####Prix du zéro coupon du modèle #####
#####
#          Varphi curve for G2++ with sv
#### fonctions PHI et integrales
Bx<-function(x,ti,Tf){(1-exp(-x*(Tf-ti)))/x}
phi_tx<-function(tv,parSV=par.xSV,parHW=par.xHW2){
  #### les parametres de svenson
  b0<-parSV[1]
  b10<-parSV[2]
  b11<-parSV[3]
  c1<-parSV[4]
  b21<-parSV[5]
  c2<-parSV[6]
  #### les parametres de G2++
  a <- parHW[1]
  sg <- parHW[2]
  b <- parHW[3]
  eta <- parHW[4]
  rh <- parHW[5]
  #f = Nelson.forwardx(tv,b0,b10,b11,c1,b21,c2)
  f = Svensson.forwardx(tv,b0,b10,b11,c1,b21,c2)
  #df= Svensson.dif.forwardx(tv,b10,b11,c1,b21,c2)
  varphi = f + (sg^2/2)*(Bx(a,0,tv))^2 +(eta^2/2)*(Bx(b,0,tv))^2+rh*sg*eta*(Bx(a,0,tv))*(Bx(b,0,tv))
  return(varphi)}
(phi_tx(30,par.xSV,par.xHW2))
integrale_varphix <- function(ti,Tf,par.for=par.xSV,params=par.xHW2){

  tmp <- function(tv){
    phi_tx(tv,par.for,params)
  } integrate_phi=integrate(tmp, lower = ti, upper = Tf)$value
  return(integrate_phi)}
(integrale_varphix(0,2,par.xSV,par.xHW2))
##### Calcul des P0t #####
lamda_mux=-0.1
Npol=5000
alpha=0.3
va_tx<-function(Tf,Nsim=10000,parHW=par.xHW2){
  #### les parametres de G2++
  a <- parHW[1]
```

```
sg <- parHW[2]
b <- parHW[3]
eta <- parHW[4]
rh <- parHW[5]
x0<-0
y0<-0
dt<-1
x1=matrix(0,Nsim,Tf)
y1=matrix(0,Nsim,Tf)
n=1
while(n<=Nsim){
  w1=(rnorm(Tf))
  w2=sqrt(1-rh^2)*w1+rh*(rnorm(Tf))
  x1[n,1]=sg*sqrt(dt)*w1[1]
  y1[n,1]=eta*sqrt(dt)*w2[1]
  for (k in 2:Tf) {
    x1[n,k]=x1[n,(k-1)]*(1-a*dt)+sg*sqrt(dt)*w1[k]
    y1[n,k]=y1[n,(k-1)]*(1-a*dt)+sg*sqrt(dt)*w2[k]}
  n=n+1}
xt=as.numeric(apply(x1,2,mean))
yt=as.numeric(apply(y1,2,mean))
list(xt=(xt),yt=(yt))}
#(va_tx(30))
##### Stockage de XT et YT #####
set.seed(12345)
varXYx= va_tx(Tf=30)
xtx=c(0,varXYx$xt)
ytx=c(0,varXYx$yt)
rtxHW2=function(t){phi_tx(t)+xtx[t]+xtx[t]}
rt_xHW2=sapply(matbootx,rtxHW2)
par(mfrow=c(1,1))
plot(matx,rt_xHW2,xlab='age',ylab='mux',ylim=c(min(rt_xHW2,cont.ZCcurvex),max(rt_xHW2,cont.ZCcurvex)),col='red',main="mortality rates ",lwd=2)
lines(matx,cont.ZCcurvex,lwd=2,col='blue',lty=2)
#lines(xabs,HW2_P0t,lwd=2,col='black',lty=1)
grid()
legend("topleft",legend = c('Hw2','obs'),pch = c(1,NA),
      col=c('red','blue'),lty=c(0,2),lwd=2)
##### Définition de la fonction de calcul du prix du coupon du modèle#####
v0tx <- function(t,tf,Params=par.xHW2) {
```

```

Tf=tf
a <- Params[1]
sigma <- Params[2]
b <- Params[3]
eta <- Params[4]
rho <- Params[5]
Bx<-function(x,ti,tf){(1-exp(-x*(tf-ti)))/x}
Ba2=function(t,tf){(Bx(a,0,tf-t))^2}
inta2=function(u){Ba2(u,Tf)}
Bb2=function(t,tf){(Bx(b,0,tf-t))^2}
intb2=function(u){Bb2(u,Tf)}
Bab=function(t,tf){(Bx(a,t,tf))*(Bx(b,t,tf))}
intab=function(u){Bab(u,Tf)}
v0tx<- ((sigma^2)*integrate(inta2,t,tf)$value+(eta^2)*integrate(intb2,t,tf)$value
      +2*rho*sigma*eta*integrate(intab,t,tf)$value)
return(v0tx)}
(sapply(seq(1:80),function(t) v0tx(t,80) ))
ZC_P0tx=function(t,parSV=par.xSV,parHW=par.xHW2){
  ##### les parametres de G2++
  a <- parHW[1]
  sg <- parHW[2]
  b <- parHW[3]
  eta <- parHW[4]
  rh <- parHW[5]
  #t=3
  ##### prix du zero coupon P(t,T)#####
  ZC_P0t =exp( -integrale_varphix(0,t)+0.5*v0tx(0,t) )
(sapply(seq(1:31),ZC_P0tx))
mx0tQ=function(t,tf,parSV=par.xSV,parHW=par.xHW2){
  ##### les parametres de G2++ #####
  a <- parHW[1]
  sg <- parHW[2]
  b <- parHW[3]
  eta <- parHW[4]
  rh <- parHW[5]
  mx=(integrale_varphix(t,tf)+lamda_mux*sqrt(v0tx(t,tf)))#facteur de charge de la proba sous Q voir p63 chp4
Devolder adapté
  #(lamda_mux*((sg/a)*(tf-t-Bx(a,t,tf))+(eta/b)*(tf-t-Bx(b,t,tf))))#facteur de charge de la proba sous Q voir p63
chp4 Devolder
}

```

```

(sapply(seq(1:80),function(t) mx0tQ(t,80) ))
(ZC_P0tx(1))
tPx_HW2=sapply(seq(1:31),ZC_P0tx)
tpx_obs=function(t){ exp(-t*cont.ZCcurvex[t])}
tpx_ob=sapply(seq(1:31),tpx_obs)
par(mfrow=c(1,1))
plot(matx,tPx_HW2,xlab='durée
contrat',ylab='tPx',ylim=c(min(tPx_HW2,tpx_ob),max(tPx_HW2,tpx_ob)),col='red',main="zero-coupons
mortality ",lwd=2)
lines(matx,tpx_ob,lwd=2.,col='blue',lty=2)
#lines(xabs,HW2_P0t,lwd=2.,col='black',lty=1)
grid()
legend("bottomleft",legend = c('Hw2','obs'),pch = c(1,NA),
      col=c('red','blue'),lty=c(0,2),lwd=2)
var_KHIx=function(t,tf,n=Npol,parSV=par.xSV,parHW=par.xHW2){
  varx=abs((exp(v0tx(t,tf))-1)*exp(-2*mx0tQ(t,tf)+v0tx(t,tf))+
    (1/n)*(exp(-mx0tQ(t,tf)+0.5*v0tx(t,tf))-exp(-2*mx0tQ(t,tf)+2*v0tx(t,tf))))}
(sapply(matbootx,function(t) var_KHIx(t,31) ))
(var_KHIx(25,25))
##### CALCUL DE M2 #####
M_carree=function(t,tf,s1=sg_s,rh1=rho_sr,params=par.rHW2){
  a <- params[1]
  sigma <- params[2]
  b <- params[3]
  eta <- params[4]
  rho <- params[5]
  sig_bar<-sqrt(sigma^2+eta^2+2*rho*sigma*eta)
  #B_a=function(t,tf){(1/a)*(1-exp(-a*(tf-t)))}
  B2_a=function(t,tf){ Bx(a,t,tf)^2}
  #(mr2t(t))
  B_b=function(t,tf){(1/b)*(1-exp(-b*(tf-t)))}
  B2_b=function(t,tf){ Bx(b,t,tf)^2}
  #B_ab=function(t,tf){(1/(a+b))*(1-exp(-(a+b)*(tf-t)))}
  B2_ab=function(t,tf){ Bx(a,t,tf)*Bx(b,t,tf)}
  B_ab=function(t,tf){ sqrt(B2_ab(t,tf))}
  mr2t=function(t,tf){((sigma^2)*integrate(function(u)
B2_a(u,tf),t,tf)$value+(eta^2)*integrate(function(u)
B2_b(u,tf),t,tf)$value+2*rho*sigma*eta*integrate(function(u) B2_ab(u,tf),t,tf)$value)}
#M2 de rt
m2t=(s1^2)*(tf-t)+mr2t(t,tf)+2*rh1*s1*sig_bar*integrate(function(u) B_ab(u,tf),t,tf)$value #M2 de rt et st

```

Market Consistent for valuation of participating life products with Stochastic Models

```
return(m2t)}
mu_s=6/100 #rendement actif
sg_s=10/100 #volatilité actif
beta_pb=20/100 #taux de participation beneficiaire
rho_sr=2/100 #correlation actif et taux du marche
Npol=5000 #portefeuille de mille police
txg=3/100 #taux garanti
txc=2/100 #taux de croissance de rente
lamda_mux= -0.01#prix de risque de la mortalité sous Q voir p60 chp4 Devolder
(M_carree(0,2,sg_s,rho_sr,par.rHW2))
(sapply(seq(1:31),function(t) M_carree(t,31)))
(ZC_P0tx(1))
tPx_HW2=sapply(seq(1:31),ZC_P0tx)
tpx_obs=function(t){exp(-t*cont.ZCcurvex[t])}
tpx_ob=sapply(seq(1:31),tpx_obs)
#####
##### TARIFICATION #####
#####
##### donnees: actif risque et mortalite: voir doc source Devolder #####
mu_s=6/100 #rendement actif
sg_s=10/100 #volatilité actif
beta_pb=20/100 #taux de participation beneficiaire
rho_sr=2/100 #correlation actif et taux du marche
Npol=5000 #portefeuille de mille police
txg=3/100 #taux garanti
txc=2/100 #taux de croissance de rente
lamda_mux= -0.01#prix de risque de la mortalité sous Q voir p60 chp4 Devolder
#on peut egalement fixer lamda à 0
alpha=0.3
#####
##### PURE ENDOWMENT #####
#####
#####calcul de la prime #####
primHW2_PE=function(t){
  c=1 #prestation de survie
  prim=(c*(1/(1+txg)^t)*ZCx_obs[t])
}
FVHW2_PE=function(t,tf,q=0,par.r=par.rHW2,parx=par.xHW2,Nsim=1000){
  #t=3
  #tf=25
```

```
#q=1
#par.r=par.rHW2
#parx=par.xHW2
#Nsim=10000
#si q=0 sans PB et q=1 avec PB
#parametres taux d'interet
a <- par.r[1]
sigma <- par.r[2]
b <- par.r[3]
eta <- par.r[4]
rho <- par.r[5]
#### les parametres de G2++ ####
ax <- parx[1]
sgx <- parx[2]
bx <- parx[3]
etax <- parx[4]
rhx <- parx[5]
ZC_P0tQx=function(t){
  load= exp(lamda_mux*sqrt(v0tx(0,t))) #loading factor on probability P63 Ch4
  ZC_P0tQx=ZC_P0tx(t)*load }
#(ZC_P0tQx(25))
s0<-primHW2_PE(tf)
{if(t>0){
  ##### SIMULATION #####
  x0<-0
  y0<-0
  dt<-1
  xt=matrix(0,Nsim,t+1)
  yt=matrix(0,Nsim,t+1)
  rt=matrix(0,Nsim,t+1)
  St=matrix(0,Nsim,t+1)
  n=1
  while(n<=Nsim){
    #set.seed(123456)
    wr1=rnorm(t)
    wr2=sqrt(1-rh^2)*wr1+rh*(rnorm(t))
    ws=rnorm(t)
    xt[n,1]=0 #sg*sqrt(dt)*w1[1]
    yt[n,1]=0 #eta*sqrt(dt)*w2[1]
```

Market Consistent for valuation of participating life products with Stochastic Models

```
rt[n,1]=phi_t(0)
St[n,1]=s0
for (k in 2:(t+1)) {
  xt[n,k]=xt[n,(k-1)]*(1-a*dt)+sigma*sqrt(dt)*wr1[k-1]
  yt[n,k]=yt[n,(k-1)]*(1-b*dt)+eta*sqrt(dt)*wr2[k-1]
  rt[n,k]=phi_t(k-1)+xt[n,k]+yt[n,k]
  St[n,k]=St[n,(k-1)]*((1+rt[n,k]*dt)+sg_s*(sqrt(dt)*ws[k-1]+ ((mu_s-rt[n,k])/sg_s)*dt))
  n=n+1
}
#St=as.numeric(apply(St,2,mean))
st=mean(St[,t+1])
## fonctions utiles pour Fx

h1=function(t){(log(st/(ZCx_obs[tf]/ZCx_obs[t]))log(ZC_P0t(tf)/ZC_P0t(t))+0.5*M_carree(t,tf))/sqrt(M_carree
(t,tf))}
h2=function(t){(log(st/(ZCx_obs[tf]/ZCx_obs[t]))-log(ZC_P0t(tf)/ZC_P0t(t))-
0.5*M_carree(t,tf))/sqrt(M_carree(t,tf))}
### fair-value financiere
PI_f= ( (ZC_P0t(tf)/ZC_P0t(t))+ #pure endowment financiere
  q*beta_pb*( st*pnorm(h1(t))-
  (ZCx_obs[tf]/ZCx_obs[t])*(ZC_P0t(tf)/ZC_P0t(t))*pnorm(h2(t)))) # +PB
### fair-value actuarielle: principe de l'ecart type BE+RM
PI_a= (ZC_P0tQx(tf)/ZC_P0tQx(t))+
  (alpha/2)*sqrt(var_KHIX(t,tf)) }
else{

  ## fonctions utiles pour Fx
  h1=function(t){(log(s0/ZCx_obs[tf])-log(ZC_P0t(tf)) +0.5*M_carree(t,tf))/sqrt(M_carree(t,tf))}
  h2=function(t){(log(s0/ZCx_obs[tf])-log(ZC_P0t(tf)) -0.5*M_carree(t,tf))/sqrt(M_carree(t,tf))}
  ### fair-value financiere
  PI_f= (ZC_P0t(tf)+ #pure endowment financiere
  +q*beta_pb*( s0*pnorm(h1(t))-ZCx_obs[tf]*ZC_P0t(tf)*pnorm(h2(t)))) # +PB
  ### fair-value actuarielle: principe de l'ecart type BE+RM
  PI_a= ZC_P0tQx(tf)+(alpha/2)*sqrt(var_KHIX(t,tf))
  }}
### fair-value en deux etapes
PI_2a= PI_f*PI_a}
(FVHW2_PE(10,10))
##### PURE ENDOWMENT#####
xabs=seq(1:15)
```

```
prim1_PEHW2=sapply(xabs,primHW2_PE)
(fv1_PEHW2=sapply(xabs,function(u) FVHW2_PE(0,u,q=1)))#avec PB
(fv2_PEHW2=sapply(xabs,function(u) FVHW2_PE(0,u,q=0)))#sans PB
plot(xabs,fv2_PEHW2,xlab='durée du contrat',ylab='fair-value',
     ylim=c(min(fv2_PEHW2,fv1_PEHW2),max(fv2_PEHW2,fv1_PEHW2)),
     col='red',main="PURE ENDOWMENT ",lwd=2)
lines(xabs,fv1_PEHW2,lwd=2,col='blue',lty=2)
#lines(xabs,prim1_PEHW2,lwd=2,col='black',lty=2)
grid()
legend("bottomleft",legend = c('sans PB','avec PB'),pch = c(1,NA),
      col=c('red','blue'),lty=c(0,2),lwd=2)
##### PURE ENDOWMENT: PROVISION
prim1_PEHW2=sapply(xabs,primHW2_PE)
(fv1p_PEHW2=sapply(xabs,function(u) FVHW2_PE(u,15,q=1)))#avec PB
(fv2p_PEHW2=sapply(xabs,function(u) FVHW2_PE(u,15,q=0)))#sans PB
plot(xabs,fv2p_PEHW2,xlab='temps de calcul ',ylab='fair-value reserve',
     ylim=c(min(fv2p_PEHW2,fv1p_PEHW2),max(fv2p_PEHW2,fv1p_PEHW2)),col='red',
     main="RESERVE PURE ENDOWMENT T=15 ",lwd=2)
lines(xabs,fv1p_PEHW2,lwd=3,col='blue',lty=2)
#lines(xabs,prim1_PEHW2,lwd=2,col='black',lty=2)
grid()
legend("bottomright",legend = c('sans PB','avec PB'),pch = c(1,NA),
      col=c('red','blue'),lty=c(0,2),lwd=2)

#####
##### TERM LIFE ANNUITIES #####
#####
##### calcul de la prime #####
prim_AN=function(t){
  c=1 #prestation de survie annuelle
  prim=0
  for (k in 1:t) {
prim=prim+
  c*((1+txc)^(k-1))/((1+txg)^k)*tpx_obs(k)#prestation annuelle croissante}
  AN=prim}
AN_fv=function(tu,tv,q=1,par.r=par.rHW2,parx=par.xHW2,Nsim=1000){
```

```
#t=3
#tf=10
#q=1
#par.r=par.rHW2
#parx=par.xHW2
#Nsim=1000
#si q=0 sans PB et q=1 avec PB
#parametres taux d'interet
a <- par.r[1]
sigma <- par.r[2]
b <- par.r[3]
eta <- par.r[4]
rho <- par.r[5]
#### les parametres de G2++ #####
ax <- parx[1]
sgx <- parx[2]
bx <- parx[3]
etax <- parx[4]
rhx <- parx[5]
#####calcul de la prime #####
prim_PE=function(t){
  c=max(1,((1+txc)^(t-1))) #prestation de survie
  prim=(c*(1/(1+txg)^t)*ZCx_obs[t])
#####calcul du zero-coupon de la mortalité #####
ZC_P0tQx=function(t){
  load= exp(lamda_mux*sqrt(v0tx(0,t))) #loading factor on probability P63 Ch4
  ZC_P0tQx=ZC_P0tx(t)*load}
if(tu>0){
##### SIMULATION #####
x0<-0
y0<-0
dt<-1
xt=matrix(0,Nsim,tv+1)
yt=matrix(0,Nsim,tv+1)
rt=matrix(0,Nsim,tv+1)
St=matrix(0,Nsim,tv+1)
n=1
while(n<=Nsim){
  #set.seed(123456)
```

```

wr1=rnorm(tv)
wr2=sqrt(1-rh^2)*wr1+rh*(rnorm(tv))
ws=rnorm(tv)
xt[n,1]=0 #sg*sqrt(dt)*w1[1]
yt[n,1]=0 #eta*sqrt(dt)*w2[1]
rt[n,1]=phi_t(0)
St[n,1]=s0
for (k in 2:(tv+1)) {
  xt[n,k]=xt[n,(k-1)]*(1-a*dt)+sigma*sqrt(dt)*wr1[k-1]
  yt[n,k]=yt[n,(k-1)]*(1-b*dt)+eta*sqrt(dt)*wr2[k-1]
  rt[n,k]=phi_t(k-1)+xt[n,k]+yt[n,k]
  St[n,k]=St[n,(k-1)]*((1+rt[n,k]*dt)+sg_s*(sqrt(dt)*ws[k-1]+
    ((mu_s-rt[n,k])/sg_s)*dt )) }
n=n+1 }
#St=as.numeric(apply(St,2,mean))
st=apply(St,2,mean) }
PE_fv=function(t,tf){
s0<-prim_PE(tf)
{if(t>0){
  #max((st[t+1]/6),s0)
  ## fonctions utiles pour Fx
  h1=function(t){
(log(max((st[t+1]/6),s0)/(max(1,((1+txc)^(tf-1))))*ZCx_obs[tf]/ZCx_obs[t])- log(ZC_P0t(tf)/ZC_P0t(t))+
  0.5*M_carree(t,tf))/sqrt(M_carree(t,tf))}

  h2=function(t){
(log(max((st[t+1]/6),s0)/(max(1,((1+txc)^(tf-1))))*ZCx_obs[tf]/ZCx_obs[t])-
  log(ZC_P0t(tf)/ZC_P0t(t))- 0.5*M_carree(t,tf))/sqrt(M_carree(t,tf))}
  ### fair-value financiere###
  PI_f= (
max(1,((1+txc)^(tf-1))))*(ZC_P0t(tf)/ZC_P0t(t))+ #pure endowment financiere
  q*beta_pb*( max((st[t+1]/6),s0)*pnorm(h1(t))-
(max(1,((1+txc)^(tf-1))))*ZCx_obs[tf]/
ZCx_obs[t])*(ZC_P0t(tf)/ZC_P0t(t))*pnorm(h2(t))) # +PB
  ### fair-value actuarielle: principe de l'ecart type BE+RM
  PI_a= (ZC_P0tQx(tf)/ZC_P0tQx(t)+(alpha/2)*sqrt(var_KHIx(t,tf)) )
}
else{
  ## fonctions utiles pour Fx
  h1=function(t){

```

Market Consistent for valuation of participating life products with Stochastic Models

```

(log(s0/(max(1,((1+txc)^(tf-1))))*ZCx_obs[tf]))-log(ZC_P0t(tf))
+0.5*M_carree(t,tf)/sqrt(M_carree(t,tf))
h2=function(t){
(log(s0/(max(1,((1+txc)^(tf-1))))*ZCx_obs[tf]))-log(ZC_P0t(tf))
-0.5*M_carree(t,tf)/sqrt(M_carree(t,tf))
### fair-value financiere
PI_f= max(1,((1+txc)^(tf-1)))*(ZC_P0t(tf)+ #pure endowment financiere
q*beta_pb*( s0*pnorm(h1(t))-max(1,((1+txc)^(tf-1))))*
ZCx_obs[tf]*ZC_P0t(tf)*pnorm(h2(t))) # +PB
### fair-value actuarielle: principe de l'ecart type BE+RM
PI_a= ZC_P0tQx(tf)+(alpha/2)*sqrt(var_KHIx(t,tf) ) }
### fair-value en deux etapes
PI_2a= PI_f*PI_a
abs=seq(1:tv)
{if(tu>0){
fv=sapply(abs[abs>(tu-1)],function(u) PE_fv(u,tv)) }
else{fv=sapply(abs,function(u) PE_fv(0,u))}}
annuity=sum(fv)
##### Representation des primes et Fair VALUE #####
##### ANNUITY#####
prim1HW2_AN=sapply(xabs,prim_AN)
(fv1HW2_AN=sapply(seq(1:15),function(t) AN_fv(0,t,q=0)))#sans PB
(fv2HW2_AN=sapply(seq(1:15),function(t) AN_fv(0,t,q=1)))#avec PB

plot(seq(1:15),fv1HW2_AN,xlab='durée du contrat',ylab='fair-value',
ylim=c(min(fv2HW2_AN,fv1HW2_AN),max(fv2HW2_AN,fv1HW2_AN)),col='red',
main="ANNUITY ",lwd=2)
lines(seq(1:15),fv2HW2_AN,lwd=2,col='blue',lty=2)
#lines(xabs,HW2_P0t,lwd=2,col='black',lty=1)
grid()
legend("bottomright",legend = c('sans PB','avec PB'),pch = c(1,NA),
col=c('red','blue'),lty=c(0,2),lwd=2)
##### ANNUITY PROVISION
prim1HW2_AN=sapply(xabs,prim_AN)
(fv1HW2_ANp=sapply(seq(1:14),function(t) AN_fv(t,15,q=0)))#sans PB
(fv2HW2_ANp=sapply(seq(1:14),function(t) AN_fv(t,15,q=1)))#avec PB
plot(seq(1:14),fv1HW2_ANp,xlab='Temps de calcul',ylab='fair-value',
ylim=c(min(fv2HW2_ANp,fv1HW2_ANp),max(fv2HW2_ANp,fv1HW2_ANp)),col='red',

```

Market Consistent for valuation of participating life products with Stochastic Models

```
main="ANNUITY PROVISION T=15",lwd=2)
lines(seq(1:14),fv2HW2_ANp,lwd=2.,col='blue',lty=2)
#lines(xabs,HW2_P0t,lwd=2.,col='black',lty=1)
grid()
legend("bottomleft",legend = c('sans PB','avec PB'),pch = c(1,NA),
      col=c('red','blue'),lty=c(0,2),lwd=2)
#####
##### TERM LIFE ANNUITIES DIFFERED #####
#####
P_dif=observe[,5]
ZCx_obs=observe[,5]
##### calcul de la prime #####
prim_ANDif=function(t,d=20){
  c=1 #c=1 #prestation de survie annuelle
  prim=0
  for (k in 1:t) {
    prim=prim+c*((1+txc)^(k-1))/((1+txg)^(k+d))*P_dif[k+d]
    #prestation annuelle croissante }
  AN=prim}
ANd_fv=function(tu,tv,q=1,d=10,par.r=par.rHW2,parx=par.xHW2,Nsim=1000){
  #t=3
  #tf=10
  #q=1
  #par.r=par.rHW2
  #parx=par.xHW2
  #Nsim=1000
  #si q=0 sans PB et q=1 avec PB
  #parametres taux d'interet
  a <- par.r[1]
  sigma <- par.r[2]
  b <- par.r[3]
  eta <- par.r[4]
  rho <- par.r[5]
  ##### les parametres de G2++
  ax <- parx[1]
  sgx <- parx[2]
  bx <- parx[3]
  etax <- parx[4]
  rhx <- parx[5]
```

Market Consistent for valuation of participating life products with Stochastic Models

```
#####calcul de la prime #####
prim_PE=function(t,d){
  c=max(1,((1+txc)^(t-1))) #prestation de survie
  prim=(c*(1/(1+txg)^(t+d))*ZCx_obs[d+t])
#####calcul du zero-coupon de la mortalité #####
ZC_P0tQx=function(t){
  load= exp(lamda_mux*sqrt(v0tx(0,t))) #loading factor on probability P63 Ch4
  ZC_P0tQx=ZC_P0tx(t)*load}
if(tu>0){
##### SIMULATION #####
x0<-0
y0<-0
dt<-1
xt=matrix(0,Nsim,d+tv+1)
yt=matrix(0,Nsim,d+tv+1)
rt=matrix(0,Nsim,d+tv+1)
St=matrix(0,Nsim,d+tv+1)
n=1
while(n<=Nsim){
  #set.seed(123456)
  wr1=rnorm(d+tv)
  wr2=sqrt(1-rh^2)*wr1+rh*(rnorm(d+tv))
  ws=rnorm(d+tv)
  xt[n,1]=0 #sg*sqrt(dt)*w1[1]
  yt[n,1]=0 #eta*sqrt(dt)*w2[1]
  rt[n,1]=phi_t(0)
  St[n,1]=s0
  for (k in 2:(d+tv+1)) {
    xt[n,k]=xt[n,(k-1)]*(1-a*dt)+sigma*sqrt(dt)*wr1[k-1]
    yt[n,k]=yt[n,(k-1)]*(1-b*dt)+eta*sqrt(dt)*wr2[k-1]
    rt[n,k]=phi_t(k-1)+xt[n,k]+yt[n,k]
    St[n,k]=St[n,(k-1)]*((1+rt[n,k]*dt)+sg_s*(sqrt(dt)*ws[k-1]+
      ((mu_s-rt[n,k])/sg_s)*dt )) }
  n=n+1 }
#St=as.numeric(apply(St,2,mean))
st=apply(St,2,mean)}
PE_fv=function(t,tf){
  s0<-prim_PE(tf,d)
  {if(t>0){
```

Market Consistent for valuation of participating life products with Stochastic Models

```

#max((st[t+1]/6),s0)
## fonctions utiles pour Fx
h1=function(t){
(log(max((st[t+1]/6),s0)/(max(1,((1+txc)^(tf-1))))*ZCx_obs[d+tf]/ZCx_obs[t]))-
log(ZC_P0t(d+tf)/ZC_P0t(t))+
      0.5*M_carree(t,d+tf)/sqrt(M_carree(t,d+tf))}
h2=function(t){
(log(max((st[t+1]/6),s0)/(max(1,((1+txc)^(tf-1))))*ZCx_obs[d+tf]/ZCx_obs[t]))-
log(ZC_P0t(d+tf)/ZC_P0t(t))- 0.5*M_carree(t,d+tf)/sqrt(M_carree(t,d+tf))}
### fair-value financiere####
PI_f= (
max(1,((1+txc)^(tf-1)))*(ZC_P0t(d+tf)/ZC_P0t(t))+ #pure endowment financiere
q*beta_pb*( max((st[t+1]/6),s0)*pnorm(h1(t))-
(max(1,((1+txc)^(tf-1)))*ZCx_obs[d+tf]/ZCx_obs[t])*(ZC_P0t(d+tf)/ZC_P0t(t))*
pnorm(h2(t)))) # +PB
### fair-value actuarielle: principe de l'ecart type BE+RM
PI_a= (ZC_P0tQx(d+tf)/ZC_P0tQx(t)+(alpha/2)*sqrt(var_KHIX(t,d+tf)) }
else{
## fonctions utiles pour Fx
h1=function(t){(log(s0/(max(1,((1+txc)^(tf-1))))*ZCx_obs[d+tf]))-log(ZC_P0t(d+tf))
+0.5*M_carree(t,d+tf)/sqrt(M_carree(t,d+tf))}
h2=function(t){(log(s0/(max(1,((1+txc)^(tf-1))))*ZCx_obs[d+tf]))- log(ZC_P0t(d+tf))
-0.5*M_carree(t,d+tf)/sqrt(M_carree(t,d+tf))}
### fair-value financiere

PI_f= max(1,((1+txc)^(tf-1)))*(ZC_P0t(tf+d)+ #pure endowment financiere
      q*beta_pb*( s0*pnorm(h1(t))-
max(1,((1+txc)^(tf-1)))*ZCx_obs[d+tf]*ZC_P0t(d+tf)*pnorm(h2(t)))) # +PB
### fair-value actuarielle: principe de l'ecart type BE+RM
PI_a= ZC_P0tQx(tf+d)+(alpha/2)*sqrt(var_KHIX(t,d+tf)) }}
### fair-value en deux etapes
PI_2a= PI_f*PI_a}
abs=seq(1:tv)
{if(tu>0){
fv=sapply(abs[abs>(tu-1)],function(u) PE_fv(u,tv))}
else{fv=sapply(abs,function(u) PE_fv(0,u))}}
annuity=sum(fv)}
##### Representation des primes et Fair VALUE #####
##### ANNUITY#####
prim1HW2_AN=sapply(xabs,prim_AN)

```

Market Consistent for valuation of participating life products with Stochastic Models

```
(fv1HW2_AN=sapply(seq(1:15),function(t) ANd_fv(0,t,q=0)))#sans PB
(fv2HW2_AN=sapply(seq(1:15),function(t) ANd_fv(0,t,q=1)))#avec PB
plot(seq(1:15),fv1HW2_AN,xlab='durée du contrat',ylab='fair-value',
      ylim=c(min(fv2HW2_AN,fv1HW2_AN),max(fv2HW2_AN,fv1HW2_AN)),col='red',
      main="ANNUITY DIFFERED D=10 ",lwd=2)
lines(seq(1:15),fv2HW2_AN,lwd=2,col='blue',lty=2)
#lines(xabs,HW2_P0t,lwd=2,col='black',lty=1)
grid()
legend("bottomright",legend = c('sans PB','avec PB'),pch = c(1,NA),
      col=c('red','blue'),lty=c(0,2),lwd=2)
##### ANNUITY PROVISION#####
prim1HW2_AN=sapply(xabs,prim_AN)
(fv1HW2_ANp=sapply(seq(1:14),function(t) ANd_fv(t,15,q=0,d=0)))#sans PB
(fv2HW2_ANp=sapply(seq(1:14),function(t) ANd_fv(t,15,q=1,d=0)))#avec PB
plot(seq(1:14),fv1HW2_ANp,xlab='Temps de calcul',ylab='fair-value',
      ylim=c(min(fv2HW2_ANp,fv1HW2_ANp),max(fv2HW2_ANp,fv1HW2_ANp)),col='red',
      main="ANNUITY DIFFERED D=10 PROVISION T=15",lwd=2)
lines(seq(1:14),fv2HW2_ANp,lwd=2,col='blue',lty=2)
#lines(xabs,HW2_P0t,lwd=2,col='black',lty=1)
grid()
legend("bottomleft",legend = c('sans PB','avec PB'),pch = c(1,NA),
      col=c('red','blue'),lty=c(0,2),lwd=2)
```

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
Faculté des sciences

Place des sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/sc