



"La consistance dans l'étude des perturbations singulières d'équations différentielles"

Habets, Patrick

CITE THIS VERSION

Habets, Patrick. *La consistance dans l'étude des perturbations singulières d'équations différentielles*. Prom. : Rouche, Nicolas <https://hdl.handle.net/2078.1/234316>

Le dépôt institutionnel DIAL est destiné au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques émanant des membres de l'UCLouvain. Toute utilisation de ce document à des fins lucratives ou commerciales est strictement interdite. L'utilisateur s'engage à respecter les droits d'auteur liés à ce document, principalement le droit à l'intégrité de l'œuvre et le droit à la paternité. La politique complète de copyright est disponible sur la page [Copyright policy](#)

DIAL is an institutional repository for the deposit and dissemination of scientific documents from UCLouvain members. Usage of this document for profit or commercial purposes is strictly prohibited. User agrees to respect copyright about this document, mainly text integrity and source mention. Full content of copyright policy is available at [Copyright policy](#)

32224740

UNIVERSITE CATHOLIQUE DE LOUVAIN

FACULTE DES SCIENCES APPLIQUEES

**LA CONSISTANCE DANS L'ETUDE DES
PERTURBATIONS SINGULIERES D'EQUATIONS
DIFFERENTIELLES**

par

PATRICK HABETS



Bibliothèque des
Sciences Exactes

Thèse présentée pour l'obtention du grade
de Docteur en Sciences Appliquées.

FIRME L. WOUTERS
LOUVAIN

Nous tenons à exprimer notre reconnaissance à Monsieur le Professeur N. ROUCHE qui tout au long de ce travail n'a pas cessé de nous encourager et de nous assister de ses nombreux conseils. Nous remercions également Monsieur le Professeur T.E. STERN qui suscita le présent travail en nous introduisant à l'étude des perturbations singulières.

TABLE DES MATIERES

Introduction .	III
Chapitre I - Notion de consistance.	
1. Equations fondamentales du problème.	1
2. Définitions des concepts de consistance.	11
3. Définitions des concepts de consistance complète.	22
4. Transformation de variables.	26
5. Résumé du chapitre.	27
6. Notes.	30
Chapitre II - Méthode géométrique dans le plan.	
1. Introduction.	36
2. Construction d'un ensemble M positivement invariant.	38
3. Etude des sauts.	42
4. Propriété de consistance.	44
5. Notes	47
Chapitre III - Critères de consistance.	
1. Introduction.	48
2. Lemmes .	49
3. Théorèmes fondamentaux.	53
4. Théorèmes de consistance.	55
5. La Consistance par séparation des variables lentes et rapides.	62
6. Exemples.	70
7. Notes.	76

Chapitre IV - Critère de μ -consistance.

1. Introduction.	79
2. Lemmes préliminaires.	80
3. Premier théorème de μ -consistance complète.	83
4. Exemple.	87
5. Deuxième théorème de μ -consistance complète.	93
6. Notes.	96
Bibliographie.	97

INTRODUCTION

De nombreux phénomènes physiques peuvent s'expliquer par la considération de perturbations singulières. En gros, ces problèmes consistent à étudier une équation différentielle dépendant d'un petit paramètre ϵ et dont l'ordre en $\epsilon = 0$ est inférieur à l'ordre en $\epsilon \neq 0$. Si $\epsilon \neq 0$, on parlera du "problème complet" et si $\epsilon = 0$ du "problème réduit" ou "dégénéré". Cette dégénérescence est à la base de phénomènes aussi importants que les oscillations de relaxation ou les phénomènes de couches limites dans l'écoulement des fluides à basse viscosité. Dans ce dernier cas, on sait que la vitesse du fluide nulle à la paroi, atteint à une distance proche de celle-ci une vitesse approximativement égale à celle d'un fluide de viscosité nulle. Mathématiquement, ceci provient de ce que dans les équations de Navier-Stokes, les termes de différentiation d'ordres les plus élevés sont multipliés par le coefficient de viscosité supposé petit.

De prime abord, il peut paraître évident, par recours à un "sens physique" ou à une "intuition mathématique", que l'on doit pouvoir négliger les petits paramètres. Dès lors, toute solution du problème réduit fournirait, moyennant une continuité raisonnable, une approximation de solutions du problème complet. Cependant, des exemples simples que nous indiquerons au chapitre I, montrent que la situation est plus compliquée que ne le laisse prévoir ce "bon sens heuristique". Une justification rigoureuse s'impose donc. En fait, nous étudions un système physique unique que l'on peut décrire par deux modèles différents. L'un d'eux est un modèle très élaboré, tenant compte de phénomènes parasites, et est décrit par le problème complet. L'autre par contre, plus simple, correspond au problème réduit. En électricité, on parlera souvent de

modèle haute et basse fréquence, en signifiant par là que le modèle haute fréquence permet de décrire des phénomènes transitoires rapides et est donc nécessairement plus complet que le modèle basse fréquence. Il paraît dès lors logique de supposer que le problème complet décrit fidèlement le phénomène physique, et il est naturel de ne donner une interprétation physique qu'aux solutions z^0 du problème réduit qui sont la limite pour $\epsilon \rightarrow 0$ de solutions z^ϵ du problème complet. Ces remarques constituent le fondement des définitions de consistance que nous avons introduites au chapitre I. Ces définitions sont nouvelles, mais comme nous le montrons dans la notice bibliographique en fin de chapitre, des notions très voisines ont été étudiées par de nombreux auteurs. En outre, nous nous sommes efforcés de donner une "systématique" des concepts les plus intéressants.

Il peut être utile de remarquer que l'intérêt que l'on a à considérer un problème réduit par rapport au problème complet n'est pas seulement lié à la réduction de l'ordre de l'équation différentielle. Si on s'intéresse par exemple au calcul numérique des solutions d'un système complet, certaines constantes de temps seront nécessairement de l'ordre de ϵ . On obtient ainsi un "stiff system", ce qui mène à une instabilité numérique. Par contre dans le système réduit, ces constantes de temps ont été éliminées. Le passage du système complet au système réduit a donc un effet de stabilisation.

Les résultats qui peuvent conduire à une étude de la consistance peuvent se classer en deux catégories bien distinctes. D'une part, on peut faire usage de solutions du problème complet, ce qui en général est difficile à obtenir, ou tout au moins d'approximations de celles-ci. On est ainsi amené à étudier des développements asymptotiques de ces solutions et plus généralement à faire une étude quantitative. D'autre

part on peut abandonner l'étude détaillée des solutions et s'attacher à des résultats plus globaux. On cherche alors à obtenir de l'information sur toute une classe de solutions du problème complet. Cette deuxième méthode, qualitative, nous a semblé être particulièrement adaptée à l'étude de la consistance. Au chapitre II, nous avons utilisé des méthodes géométriques classiques dans le plan de phase, tandis qu'au chapitre III nous avons fait usage de fonctions auxiliaires, proches parentes des fonctions de Liapounov. Ce chapitre apporte un point de vue nouveau, en ce sens que l'essentiel de nos hypothèses se résume à l'existence de ces fonctions, alors que la plupart des auteurs imposent des conditions de stabilité assez peu classiques qui, par ailleurs, permettent de construire ces mêmes fonctions auxiliaires. La manière de présenter le problème que nous avons adoptée nous a paru plus directe et plus pratique. En outre, nous avons appliqué à l'étude de la consistance les principes de la méthode de Wazewski [75]. Cette méthode permet de décrire, au moyen de fonctions auxiliaires, une géométrie de l'espace de phase assimilable à une dichotomie. Il est intéressant de noter que des résultats du même type avaient déjà été obtenus dans le cas où l'approximation linéaire est caractéristique du système étudié (J.J. LEVIN [41], K.W. CHANG [6-8]). De façon plus imagée, la relation qu'il y a entre ces derniers résultats et ceux que nous présentons ici est très semblable à celle qui lie la première et la deuxième méthode de Liapounov en stabilité. Finalement ajoutons que l'ensemble du chapitre III a pour fondement les travaux de A.N. TIHONOV [64-67] et F.C. HOPPENSTEADT [30-33] et sera commenté de façon plus complète dans la notice bibliographique de ce chapitre.

La théorie développée au chapitre III suppose que les solutions z^0 du problème réduit soient continues. Cette hypothèse ne rend pas compte de phénomènes aussi importants que les oscillations de relaxation.

Ces dernières sont des solutions discontinues du problème réduit. On peut les obtenir en remarquant que le problème réduit consiste en fait en une équation différentielle à laquelle on adjoint des contraintes algébriques. Ceci revient à définir cette équation sur une variété. Il en résulte que même si l'équation est analytique et définie sur une variété de $\mathbb{R}^n$, une solution z^0 peut cesser d'exister après un temps fini et sans atteindre la frontière du domaine de définition de l'équation. Dans certains cas, des considérations intuitives permettent de prolonger cette solution en admettant un saut instantané, c.à d. une discontinuité. Cette situation nous a amené à utiliser des solutions au sens de Carathéodory et à définir au chapitre I des concepts de μ -consistance. Au chapitre II, nous les avons étudiées de manière géométrique et quelque peu intuitive en nous basant sur une étude de D. FLANDERS et J. STOKER [15]. Le chapitre IV reprend l'étude de ces propriétés de façon analytique et introduit dans ce problème une méthode qualitative originale. Finalement, il faut remarquer qu'à part un travail de N. LEVINSON [43], ce problème a toujours été abordé de façon quantitative.

Cette thèse reflète le point de vue de son auteur sur un problème particulier de l'étude des perturbations singulières, à savoir le problème de Cauchy. Nous nous sommes placé dans le cadre des équations différentielles ordinaires définies sur des espaces de Banach. Ceci permet de rendre compte de certaines équations aux dérivées partielles. Cependant, comme nous le remarquerons plus loin, les résultats que nous avons obtenus pourraient et devraient être développés, si on s'intéresse à toute la richesse des espaces de Banach. En particulier, nous n'avons pas fait usage de la théorie des semi-groupes et nos résultats laissent ouverts les problèmes de consistance pour des équations linéaires non bornées. La consistance peut également être étudiée dans des cadres différents telles les équations fonctionnelles. En outre, on peut utilement la prolonger dans diverses directions très importantes. Ainsi l'étude

des problèmes aux limites, des solutions périodiques et presque périodiques n'a pas été abordée, bien que ces problèmes soient proches des nôtres. En effet, dans chacun de ces cas, on considère un ensemble de solutions du problème complet (e.g. l'ensemble des solutions périodiques), et on cherche à démontrer que la solution z^0 du problème réduit est un point limite de cet ensemble. Par rapport à la consistance, ces problèmes reviennent donc à restreindre l'ensemble des solutions admissibles du problème complet.

CHAPITRE I

NOTION DE CONSISTANCE

1. Equations fondamentales du problème

Soit I un intervalle de la droite réelle $\mathbb{R}$, où I peut être fini ou infini, X et Y des espaces de Banach, Ω un domaine, c.à d. un ouvert connexe, de $Z = X \times Y$ ^[1] et E un nombre réel positif. Considérons les fonctions

$$\begin{aligned} f : I \times \Omega \times [0, E] &\longrightarrow X, (t, z, \epsilon) \longmapsto f(t, z, \epsilon) \\ g : I \times \Omega \times [0, E] &\longrightarrow Y, (t, z, \epsilon) \longmapsto g(t, z, \epsilon). \end{aligned}$$

Dans la suite nous écrirons $z = (x, y)$ où $x \in X$ et $y \in Y$ et pour alléger les notations nous admettrons l'abus d'écriture qui consiste à noter $F(x, y)$ la valeur $F(z)$ d'une fonction F quelconque.

On appelle équations du système complet, les équations

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, z, \epsilon) \\ \epsilon \dot{y} &= g(t, z, \epsilon) \end{aligned} \tag{1.1}$$

où le point désigne une dérivation par rapport à t , et ϵ est constant non nul. Une solution (au sens de Carathéodory) de l'équation (1.1), définie sur un intervalle $J \subset I$ et de conditions initiales (t_0, z_0) est une fonction

$$z : J \longrightarrow Z, t \longmapsto z(t) = (x(t), y(t))$$

absolument continue, et telle que :

- (i) $z(t_0) = z_0$;
- (ii) $z(t) \in \Omega$ presque partout ;
- (iii) z possède presque partout une dérivée forte satisfaisant presque partout à l'équation

[1] Sauf mention contraire, nous munirons l'espace Z de la norme

$$\|(x, y)\| = \max(\|x\|, \|y\|).$$

$$\frac{d x(t)}{dt} = f(t, z(t), \epsilon),$$

$$\epsilon \frac{d y(t)}{dt} = g(t, z(t), \epsilon).$$

On associe à (1.1) le système d'équations différentielles avec contraintes (1.2) obtenu à partir de (1.1) en y posant formellement $\epsilon = 0$.

$$\dot{x} = f(t, z, 0)$$

$$0 = g(t, z, 0). \quad (1.2)$$

Nous appellerons ces équations les équations du système réduit.

Une solution de ces équations, définie sur l'intervalle J_0 et de conditions initiales (t_0, z_0) est une fonction presque partout continue

$$z^\circ : J_0 \longrightarrow Z, t \longmapsto z^\circ(t) = (x^\circ(t), y^\circ(t))$$

telle que :

- (i) $z^\circ(t_0) = z_0$,
- (ii) $z^\circ(t) \in \Omega$ presque partout ;
- (iii) x° est absolument continue et possède presque partout une dérivée forte satisfaisant presque partout à l'équation

$$\begin{aligned} \frac{dx^\circ(t)}{dt} &= f(t, z^\circ(t), 0) \\ 0 &= g(t, z^\circ(t), 0) \end{aligned}$$

Pour des équations différentielles définies sur des espaces de Banach, on connaît de nombreux théorèmes d'existence de solutions, d'unicité, de prolongeabilité et de continuité par rapport aux conditions initiales. On en trouvera par exemple pour $Z = \mathbb{R}^{n+m}$ dans E.A. CODDINGTON et N. LEVINSON [11], G. SANSONE et R. CONTI [58], et pour des espaces de Banach généraux dans G.E. LADAS et V. LAKSHMIKANTHAM [37], N. BOURBAKI [2], V. M. MATROSOV [45],...

Ces résultats permettent l'étude du système complet. De plus on peut facilement en déduire des propositions similaires relatives aux solutions du système réduit, si l'on fait les hypothèses suivantes:

1° l'ensemble Ω est un ensemble produit $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$ où

$\Omega_x \subset X$ et $\Omega_y \subset Y$;

2° il existe une application

$$h : I \times \Omega_x \longrightarrow \Omega_y, (t, x) \longmapsto h(t, x)$$

telle que pour tout $(t, x, h(t, x)) \in I \times \Omega$

$$g(t, x, h(t, x), 0) = 0,$$

et pour tout y tel que $(t, x, y) \in I \times \Omega$ et $y \neq h(t, x)$

$$g(t, x, y, 0) \neq 0.$$

Il est dès lors évident que le système réduit est équivalent à

$$\dot{x} = f(t, x, h(t, x), 0) \quad (1.3)$$

Il suffit dès lors d'imposer à f et h des conditions de régularité suffisantes à l'application d'un des théorèmes évoqués ci-dessus. Par exemple on peut énoncer le résultat suivant

PROPOSITION A. Si les hypothèses 1° et 2° ci-dessus sont satisfaites et si les fonctions f et h sont localement lipschitziennes, alors :

1° pour tout $t_0 \in I$, $x_0 \in \Omega_x$, il existe un plus grand intervalle $J_0 \subset I$, d'origine $t_0 \in I$ (c.à.d. d'extrémité gauche $t_0 \in I$), dans lequel il existe une solution z^0 des équations du système réduit (1.2) prenant ses valeurs dans Ω et égale à $(x_0, h(t_0, x_0))$ au point t_0 ; cette solution est unique ;

2° si $J_0 \neq I$, J_0 est un intervalle semi-ouvert $[t_0, \beta[$ de longueur finie ; en outre, pour tout compact $K \subset \Omega$, $(z^0)^{-1}(K)$ est un compact de $\mathbb{R}$;

3° si J_0 est borné, et si $f(t, z^0(t), 0)$ est borné dans J_0 , $z^0(t)$ a une limite à gauche c à l'extrémité de J_0 ; en outre si $J_0 \neq I$, c est un point frontière de Ω dans Z .

Cette proposition est une transposition triviale du théorème 2 de N. BOURBAKI [2]. Il faut cependant remarquer que si le second membre d'une équation différentielle est continu, toute solution au sens de Carathéodary est une solution classique. En effet la solution x^0 est primitive de la fonction continue $f(., x^0(.), h(., x^0(.)), 0)$.

Pour étudier un système réduit linéaire

$$\dot{x} = Ax + By + f(t)$$

$$0 = Cx + Dy + g(t)$$

où A, B, C et D sont des opérateurs linéaires non bornés on peut utiliser la

PROPOSITION B. Soient D un opérateur inversible et $A - BD^{-1}C$ un opérateur fermé de domaine Ω_0 dense dans un Banach $X_0 \subset X$. Supposons qu'il existe des réels M et ω tels que pour tout $\lambda > \omega$, l'opérateur $R(\lambda) = (\lambda I - A + BD^{-1}C)^{-1}$ existe et

$$\|R(\lambda)^n\| \leq M/(\lambda - \omega)^n, \quad n \in \mathbb{N}^*.$$

Alors, si $f - D^{-1}g$ est fortement continûment différentiable,

$\forall t_0 \in I, \forall x_0 \in \Omega_0$ le système réduit possède une solution

$z^0 : [t_0, \infty[\rightarrow Z$, telle que $z^0(t_0) = (x_0, -D^{-1}(Cx_0 + g(t_0)))$

Cette proposition résulte des théorèmes 2.2.3 et 2.3.1. de G.E. LADAS & V. LAKSHMIKANTHAM [37]. On peut d'ailleurs facilement l'étendre à des opérateurs A, B, C et D fonctions du temps [37- p.60]. Finalement il faut remarquer que puisque l'on considère des solutions au sens de Carathéodory, ce type de théorème permet d'étudier les cas où le membre de droite de l'équation considérée est discontinu en $t = t_s$. Il suffit en effet de l'appliquer successivement aux intervalles $\{t \in I, t \leq t_s\}$ et $\{t \in I, t \geq t_s\}$.

Dans la suite nous noterons $z(t; t_0, z_0, \epsilon)$ une solution du système complet définie sur l'intervalle maximal $J(t_0, z_0, \epsilon)$, telle que $z(t_0; t_0, z_0, \epsilon) = z_0$. Remarquons que cette solution et l'intervalle correspondant ne sont pas déterminés de façon unique par t_0, z_0 et ϵ . Il est cependant utile de noter que cette solution correspond à ϵ et passe par (t_0, z_0) . Par ailleurs, quand aucune confusion ne sera à craindre, nous admettrons fréquemment les abus d'écriture consistant à noter $z^\epsilon(t)$ pour $z(t; t_0, z_0, \epsilon)$ et J pour $J(t_0, z_0, \epsilon)$.

Dans l'équation (1.1) effectuons la transformation de variable $t = t_0 + \epsilon s$. On obtient ainsi le système

$$\begin{aligned} \frac{dx}{ds} &= \epsilon f(t_0 + \epsilon s, z, \epsilon) \\ \frac{dy}{ds} &= g(t_0 + \epsilon s, z, \epsilon) \end{aligned} \quad (1.4)$$

On appelle équation des couches limites l'équation différentielle obtenue à partir de l'équation (1.4) en y posant $\epsilon = 0$

$$\frac{dy}{ds} = g(t_0, x_0, y, 0),$$

et dans laquelle (t_0, x_0) sont des paramètres constants.

Illustrons le cadre général que nous avons introduit et justifions par là le degré de généralité adopté. Soit une ligne électrique de longueur l décrite par la figure I-1.

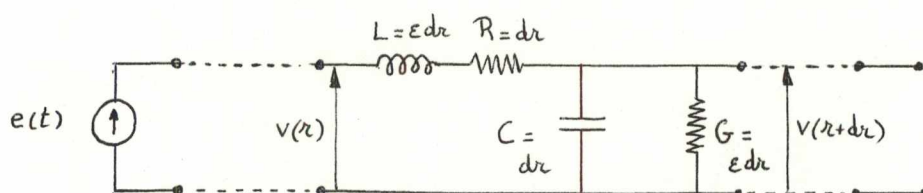


Figure I-1 :

La tension et le courant le long de la ligne sont représentés par des fonctions

$$\begin{aligned} v : \mathbb{R} \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}, (t, r) \longmapsto v(t, r) \\ i : \mathbb{R} \times [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}, (t, r) \longmapsto i(t, r), \end{aligned}$$

qui satisfont aux équations

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= -\epsilon v - \frac{\partial i}{\partial r} \\ \epsilon \frac{\partial i}{\partial t} &= -i - \frac{\partial v}{\partial r} \end{aligned} \quad (1.5)$$

Nous supposons de plus qu'une extrémité de la ligne ($r = 1$) est ouverte, tandis que la tension à l'autre extrémité ($r = 0$) est fournie par un générateur décrit par la fonction

$$e : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}, t \longmapsto e(t)$$

où $e(t) = 0$ pour $t \leq 0$ et $e(t) = t$ pour $t > 0$. Ces deux conditions aux limites s'écrivent

$$v(t, 0) = e(t), \quad i(t, 1) = 0.$$

Ce même problème peut être mis en équation de façon légèrement différente. A l'instant t , les tensions et courants peuvent être décrits par les fonctions

$$\begin{aligned} x : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}, r \longmapsto x(r) = v(t, r) - e(t) \\ y : [0, 1] &\longrightarrow \mathbb{R}, r \longmapsto y(r) = i(t, r). \end{aligned} \quad (1.6)$$

Celles-ci appartiennent aux ensembles de fonctions bornées

$$\begin{aligned} X &= \{x : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, r \longmapsto x(r) : x(0) = 0\} \\ Y &= \{y : [0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}, r \longmapsto y(r) : y(1) = 0\}, \end{aligned}$$

que nous munissons de la norme $\|x\| = \sup (|x(r)| : 0 \leq r \leq 1)$. On sait que X et Y sont des espaces de Banach (cfr. J. DIEUDONNE [13, p. 127]). De plus il est clair que si $t \neq 0$, les équations (1.5) sont équivalentes à

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\epsilon x - \frac{\partial y}{\partial r} - \epsilon e - \dot{e} \\ \epsilon \dot{y} &= -y - \frac{\partial x}{\partial r}\end{aligned}\quad (1.7)$$

En $t = 0$, ces équations seront définies en y posant $\dot{e}(0) = 0$.

Remarquons qu'elles sont définies sur l'ensemble $I \times \Omega \times [0, E]$ où $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$, Ω_x et Ω_y étant les sous ensembles de fonctions dérivables de X et Y respectivement. Notons encore que la fonction

$-\epsilon x - \frac{\partial y}{\partial r} - \epsilon e - \dot{e}$ est discontinue en t . Cependant les équations (1.7) sont bien du type (1.1) et à chacune de leurs solutions correspond par les relations (1.6) une solution continue de (1.5), dérivable en r pour presque tout t , et presque partout dérivable en t .

Le problème réduit correspondant à (1.7) s'écrit alors

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -\frac{\partial y}{\partial r} - \dot{e} \\ 0 &= -y - \frac{\partial x}{\partial r}.\end{aligned}\quad (1.8)$$

On vérifie sans peine que les hypothèses du deuxième théorème d'existence des solutions, énoncé ci-dessus, sont satisfaites [37-p.41].

En particulier la fonction h s'écrit $y = h(x) = -\frac{\partial x}{\partial r}$. L'équation (1.3) devient alors

$$\dot{x} = \frac{\partial^2 x}{\partial r^2} - \dot{e}.$$

Ses solutions appartiennent presque partout à l'ensemble

$$\Omega^0 = \left\{ x : [0, 1] \longrightarrow \underline{\mathbb{R}} : x(0) = 0, \frac{\partial x}{\partial r}(1) = 0 \right\} \subset \Omega_x.$$

Considérons ensuite l'application

$$z^0 : \underline{\mathbb{R}} \longrightarrow X \times Y, \quad t \longmapsto z^0(t) = (x^0(t), y^0(t)) \quad (1.9)$$

où $z^0(t) \equiv 0$ pour les temps négatifs et

$$x^0(t) : r \mapsto \frac{r(r-2)}{2} + \frac{16}{\pi^3} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^3} \left[\exp - \left(\frac{\pi^2 (2k+1)^2}{4} t \right) x \right.$$

$$y^0(t) : r \mapsto -r + 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} \left[\exp - \left(\frac{\pi^2 (2k+1)^2}{4} t \right) x \right. \\ \left. x \sin \frac{(2k+1)\pi}{2} r \right] \\ \left. x \cos \frac{(2k+1)\pi}{2} r \right]$$

pour $t > 0$. On vérifie sans peine que $x^0(t)$ est une fonction de classe C^2 , telle que $x^0(t) \Big|_{r=0}$ et $\frac{\partial x^0(t)}{\partial r} \Big|_{r=1} = 0$, et donc

$x^0(t) \in \Omega^0$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Par ailleurs, z^0 est continue et telle que :

- (i) $z(t_0) = z_0 \equiv 0$, si $t_0 \leq 0$;
- (ii) $z(t) \in \Omega$, $\forall t \in \mathbb{R}$;
- (iii) x est absolument continue et possède une dérivée $\forall t \neq 0$, satisfaisant à l'équation (1.8) $\forall t \neq 0$.

On en déduit que z^0 est une solution de (1.8) définie sur $\mathbb{R}$ et de conditions initiales $(t_0, 0)$, $t_0 \leq 0$.

Finalement l'équation des couches limites s'écrit

$$\frac{dy}{ds} = -y - \frac{\partial x_0}{\partial r} = -y + y_0(r)$$

et se réduit dans ce cas-ci à une famille d'équations différentielles ordinaires paramétrée par $r \in [0, 1]$.

L'exemple que nous venons de traiter montre :

1° l'intérêt de considérer des équations différentielles dans des espaces de Banach pour pouvoir rendre compte de problèmes décrits par exemple par des équations aux dérivées partielles ;

2° la nécessité de définir des solutions au sens de Carathéodory si l'on s'intéresse à des problèmes qui ne sont pas "assez continus", dans l'exemple, la source $e(t)$ a une caractéristique continue, mais pas dérivable ;

3° la facilité plus grande qu'il y a à résoudre le problème réduit plutôt que le problème complet ; on sait que les équations (1.7) sont difficiles à résoudre, alors que la solution (1.9) s'obtient classiquement par superposition et séparation des variables.

Par ailleurs, nous avons défini les solutions des équations du système réduit comme des fonctions z^0 presque partout continues. Puisque x^0 est absolument continue, ceci suppose que nous admettrons des fonctions y^0 discontinues. Considérons l'exemple suivant (figure I.2).

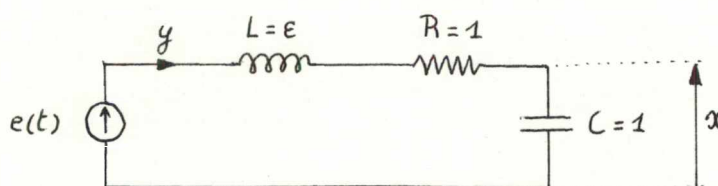


Figure I.2.

décrit par les équations

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \epsilon \dot{y} &= -y - x + e(t)\end{aligned}$$

Supposons $e(t) = 0$ pour $t \leq 0$, et $e(t) = 1$ pour $t > 0$.

Le problème réduit correspondant s'écrit

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x + e(t) \\ y &= -x + e(t)\end{aligned}$$

et admet la solution particulière

$$z^0(t) = (x^0(t), y^0(t)) = 0, \quad t \leq 0,$$

$$x^0(t) = 1 - \exp(-t), \quad t > 0,$$

$$y^0(t) = \exp(-t), \quad t > 0.$$

Dès lors si l'on veut pouvoir étudier ce problème on doit admettre des solutions du problème réduit, telles que y^0 soit discontinu pour certaines valeurs de t .

Finalement remarquons que le même type de discontinuité peut apparaître dans des systèmes autonomes. Considérons par exemple, un oscillateur de Van der Pol (figure I.3)

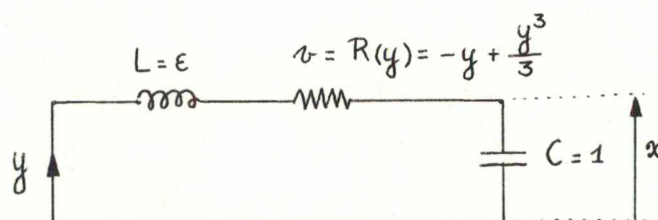


Figure I.3.

dont les équations s'écrivent

$$\dot{x} = y$$

$$\epsilon \frac{dy}{dt} = -R(y) - x.$$

Le problème réduit correspondant

$$\dot{x} = y \tag{I.10 a}$$

$$0 = -R(y) - x \tag{I.10 b}$$

admet une solution périodique que l'on décrit facilement dans le plan de phase de la figure I.4.

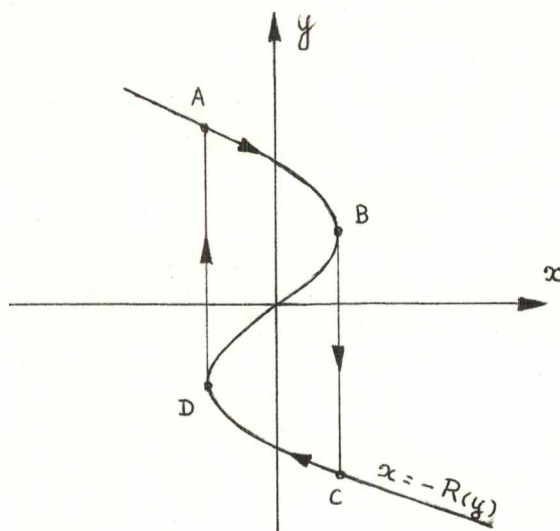


Figure I.4.

La relation (1.10 b) impose que toute solution du problème réduit demeure à presque tout instant sur la variété $x = -R(y)$. Par ailleurs la relation (1.10 a) impose que le point représentatif de la solution issue de A tende vers B et l'atteigne en un temps fini inférieur à $\frac{x_B - x_A}{y_B}$. En B cette solution ne peut être continuée qu'en admettant un saut instantané vers C. La solution se prolonge alors de C vers D et puis A. On obtient ainsi une solution périodique A B C D admettant à chaque période deux discontinuités en y.

2. Définitions des concepts de consistance

Considérons une application

$$z^0 : J_0 \longrightarrow Z, t \longmapsto z^0(t)$$

solution des équations du système réduit. Dans la suite du texte nous ne considérerons que les instants $t \in J_0$. Dès lors, si on remarque que $J_0 \subset I$, il est inutile de définir les équations du système complet pour tout $t \in I$ et on peut supposer, sans nuire à la généralité du problème que $J_0 = I$. Soit alors $\alpha = \inf (t : t \in I)$ et $\omega = \sup (t : t \in I)$. On admet éventuellement que $\alpha = -\infty$ et (ou) $\omega = +\infty$.

Dans ce qui suit nous ferons usage de la mesure de Lebesgue μ pour la droite réelle et nous utiliserons autant que possible la terminologie de A.N. KOLMOGOROV et S.V. FOMIN [36].

DEFINITION 1. La solution z^0 du système réduit est μ -consistante en
 $t_0 \in I$ si

$$(\forall \eta > 0) (\forall \sigma > 0) (\exists \epsilon_0 > 0) (\forall \epsilon: 0 < \epsilon \leq \epsilon_0) (\exists z(\cdot; t_0, z_{00}^\epsilon, \epsilon))$$

$$\{t \geq t_0, t \in I\} \subset J \text{ et } \mu \{t \geq t_0, t \in I: \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta\} < \sigma.$$

Cette définition implique qu'il existe une suite $\epsilon_i, z_{0i}^\epsilon$ telle que sur $\{t \geq t_0, t \in I\}$, les fonctions $z(t; t_0, z_{0i}^\epsilon, \epsilon_i)$ convergent "en mesure" vers $z^0(t)$. En effet si on pose $\sigma = 1/i$, il y correspond une suite $\epsilon_i, z_{0i}^\epsilon$ telle que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu \{t \geq t_0, t \in I: \|z_{0i}^{\epsilon_i}(t) - z^0(t)\| \geq \eta\} = 0.$$

De plus on peut en déduire (A.N. KOLMOGOROV et S.V. FOMIN [36-p.58]) qu'il existe une suite $\epsilon_i, z_{0i}^\epsilon$ telle que pour $\{t \geq t_0, t \in I\}$, $z(t; t_0, z_{0i}^\epsilon, \epsilon_i)$ converge presque partout vers $z^0(t)$.

Pour illustrer cette définition, considérons l'exemple de la figure 2, décrit par les équations

$$\dot{x} = y$$

$$\epsilon \dot{y} = y - x + e(t),$$

où $e(t) = 0$ si $t \leq 0$ et $e(t) = 1$ si $t > 0$. Montrons que la solution

$$z^0(t) = 0 \quad \text{si } t \leq 0,$$

$$z^0(t) = (1 - \exp(-t), \exp(-t)) \quad \text{si } t > 0,$$

est μ -consistante en $t_0 < 0$. Tout d'abord on vérifie que la solution issue de $z_0^\epsilon = 0$ s'écrit

$$z^\epsilon(t) = 0 \quad \text{si } t \leq 0,$$

$$x^\epsilon(t) = \frac{1 - \sqrt{1-4\epsilon}}{2\sqrt{1-4\epsilon}} \exp\left(-\frac{1 + \sqrt{1-4\epsilon}}{2\epsilon}t\right) - \frac{1 + \sqrt{1-4\epsilon}}{2\sqrt{1-4\epsilon}} \exp\left(-\frac{1 - \sqrt{1-4\epsilon}}{2\epsilon}t\right) + 1$$

si $t > 0$,

$$y^\epsilon(t) = -\frac{1}{\sqrt{1-4\epsilon}} \exp\left(-\frac{1 + \sqrt{1-4\epsilon}}{2\epsilon}t\right) + \frac{1}{\sqrt{1-4\epsilon}} \exp\left(-\frac{1 - \sqrt{1-4\epsilon}}{2\epsilon}t\right)$$

si $t > 0$.

Fixons ensuite η et σ positifs et puisque

$\|z(\sigma; t_0, 0, \epsilon) - z^0(\sigma)\|$ est continu en ϵ et nul en $\epsilon = 0$, il existe $\epsilon_0 > 0$ tel que $\|z(\sigma; t_0, 0, \epsilon_0) - z^0(\sigma)\| < \eta$. En remarquant alors que pour ϵ fixé, $\|z(t; t_0, 0, \epsilon) - z^0(t)\|$ est une fonction décroissante de t , on voit que

$$\{t \geq t_0, t \in I : \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta\} \subset]0, \sigma[.$$

On en déduit ainsi la μ -consistance en t_0 .

DEFINITION 2. La solution z^0 est consistante en $t_0 \in I$ si
 $(\forall \eta > 0)(\exists \epsilon_0 > 0)(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\exists z(\cdot; t_0, z_0^\epsilon, \epsilon))$

$$\{t \geq t_0, t \in I\} \subset J \text{ et } \mu \{t \geq t_0, t \in J : \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta\} = 0$$

PROPOSITION 1. Si les solutions du système complet sont prolongeables jusqu'à la frontière de Ω ou jusqu'à l'infini et s'il existe $\eta_0 > 0$ tel que pour tout $(t_1 \geq t_0, t_1 \in I)$, l'ensemble

$E = \{ z : \exists t \in [t_0, t_1] : \|z - z^0(t)\| \leq \eta_0 \}$ est un sous-ensemble compact de Ω alors la solution z^0 est consistante en t_0 si et seulement si

$$(\forall \eta > 0)(\exists \epsilon_0 > 0)(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\exists z(., t_0, z_0^\epsilon, \epsilon))$$

$$\mu \{ t \geq t_0, t \in J : \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta \} = 0.$$

Démonstration. Seule la condition suffisante doit être démontrée et il suffira de le faire pour $\eta \leq \eta_0$. Supposons alors qu'il existe $t_1 \geq t_0, t_1 \in I \setminus J$. La solution cesse donc d'exister sur l'intervalle $[t_0, t_1]$. Par ailleurs, puisque l'ensemble E correspondant est un fermé borné de Ω , la solution z^ϵ ne peut ni atteindre fr Ω , ni tendre vers l'infini. Donc la solution ne peut cesser d'exister sur $[t_0, t_1]$, ce qui est la contradiction cherchée.

C Q F D.

Le lien entre la définition 2 et celle introduite en [27] se déduit de la

PROPOSITION 2. Si les hypothèses de la proposition 1 sont satisfaites et si z^0 est continue (en particulier s'il s'agit d'une solution au sens classique), elle sera consistante en t_0 si et seulement si

$$(\forall \eta > 0)(\exists \epsilon_0 > 0)(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\exists z(., t_0, z_0^\epsilon, \epsilon))$$

$$\{ t \geq t_0, t \in J : \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| > \eta \} = \emptyset,$$

où $\emptyset$ est l'ensemble vide.

Démonstration. La condition suffisante est évidente. Supposons qu'elle ne soit pas nécessaire. Dès lors il existe $(t_1 \geq t_0, t_1 \in J)$ tel que $\|z^\epsilon(t_1) - z^0(t_1)\| > \eta$. Ensuite, par continuité, il existe aussi $\delta > 0$ tel que cette inégalité reste valable

dans l'intervalle $[t_1 - \delta, t_1 + \delta]$. On en déduit

$\mu \{ t : \| z^\epsilon(t) - z^0(t) \| > \eta \} \geq 2\delta > 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

C Q F D.

La proposition 1 montre que dans la définition 2, la condition $\{ t \geq t_0, t \in I \} \subset J$ n'est pas fondamentale. Par contre, l'exemple suivant prouve que si z^0 est discontinue, cette partie de la définition est essentielle à la conception intuitive que l'on peut se faire de la μ -consistance. Considérons le système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y \\ \epsilon \dot{y} &= - \left(x - y + \frac{y^3}{3} \right)^2 \end{aligned} \quad (1.11)$$

auquel correspond un plan de phase approché représenté à la figure I.5. La courbe A B C D A y représente

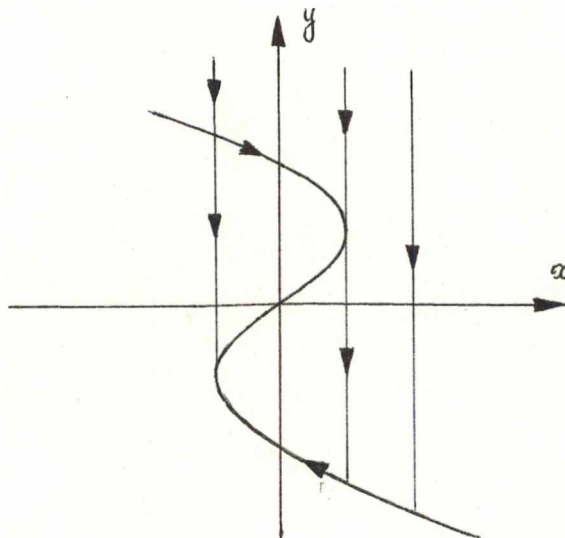


Figure I.5.

une solution du problème réduit, discontinue en BC et DA. Cette solution vérifie la propriété :

$$(\forall \eta > 0)(\forall \sigma < 0)(\exists \epsilon_0 > 0)(\forall \epsilon: 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\exists z(\cdot; t_0, z_0^\epsilon, \epsilon))$$

$$\mu \{ t \geq t_0, t \in J : \| z^\epsilon(t) - z^0(t) \| \geq \eta \} < \sigma$$

En effet, bien que cela ne soit pas évident on peut montrer que, η et σ étant fixés, et pour autant que ϵ soit assez petit, la solution du système complet issue de A est une η -approximation de AB qui, après avoir atteint un η voisinage de B, tend vers l'infini en un temps aussi petit que l'on veut (et donc inférieur à σ). Cependant il est évident qu'une telle solution n'approxime pas la solution ABCDA. On peut montrer par ailleurs qu'ABCDA n'est pas μ -consistante en t_0 .

Il peut être utile de mettre en correspondance le plan de phase "approché" de la figure I-5 avec le plan de phase "exact" de l'équation (1.11) représenté à la figure I-5'.

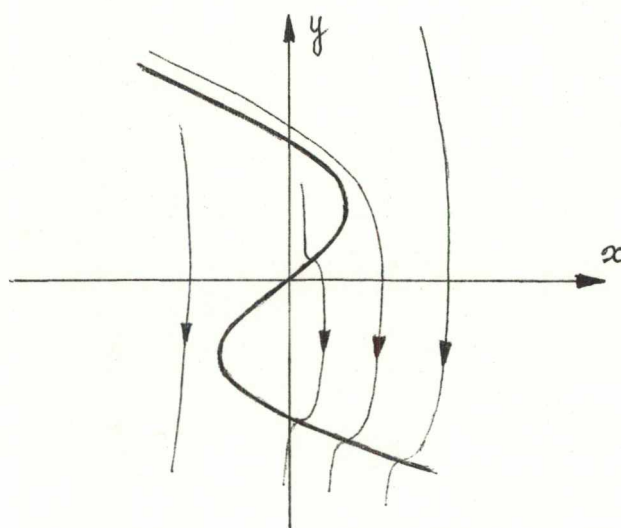


Figure I-5' plan de phase de l'équation (1.11)

Cet exemple montre aussi que la μ -consistance en t_0 n'est pas toujours vérifiée. Considérons la solution CD du problème réduit. Cette solution ne peut pas être μ -consistante en t_c .

En effet, si η et σ sont assez petits, toutes les solutions du système complet issues de $\{ (t, z) : t \in [t_c, t_c + \sigma], \|z - z^0(t)\| = \eta \}$ décroissent en y et donc ne peuvent atteindre $\{ (t, z) : t \in [t_D - \sigma, t_D], \|z - z^0(t)\| < \eta \}$

Remarquons encore que l'introduction de la μ -consistance en t_0 permet d'étudier le "sens physique" des solutions z^0 discontinues. En effet, celles-ci peuvent être μ -consistantes en t_0 , alors qu'elles ne peuvent pas être consistantes en t_0 . Par ailleurs ce concept correspond bien à l'idée intuitive que l'on peut avoir du "sens physique". Etant donnée une erreur η aussi petite que l'on veut, la solution z^0 approche des solutions du système complet à η près, sauf peut-être sur un ensemble de longueur σ aussi petite que l'on veut. Notons cependant que cette description ne semble pas appropriée à l'étude de solutions z^0 discontinues en des instants $t_1, t_1 \rightarrow \infty$. Considérons, par exemple, l'oscillateur de van der Pol (1.10) dont le plan de phase approché est représenté à la figure I-4. Etudions la solution $z^0 \equiv ABCDA$ périodique,

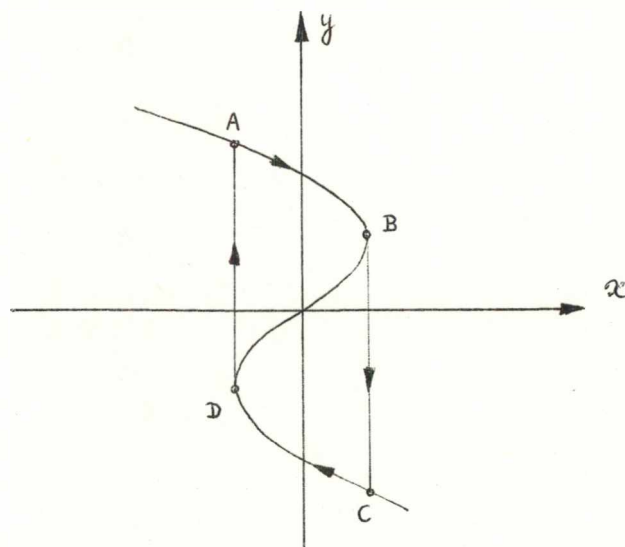


Figure I-4 :

de période T , définie sur $[t_0, \infty[$. Il est alors évident que toute solution z^ϵ s'en écartera fortement ($\|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta$) lors des sauts BC et DA . Ce phénomène apparaît en un temps supérieur à

$\tau(\epsilon) \neq 0$, et dès lors puisqu'il y a une infinité de sauts,

$$\forall \epsilon > 0, \lim_{\mu \rightarrow \infty} \mu \{ t \in [t_0, t_0 + nT] : \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta \} \geq \lim_{n \rightarrow \infty} n \tau(\epsilon)$$

$\mu \rightarrow \infty$. Cette solution ne sera donc pas μ -consistante en t_0 , alors que la même solution définie sur un intervalle fini quelconque l'est. En effet $\tau(\epsilon) \rightarrow 0$ si $\epsilon \rightarrow 0$.

PROPOSITION 3. Toute solution consistante en t_0 (μ -consistante en t_0) est consistante en $t_1 \geq t_0$, $t_1 \in I$ (μ -consistante en t_1).

DEFINITION 3. La solution z^0 est consistante (μ -consistante) si pour tout $t_0 \in I$, elle est consistante en t_0 (μ -consistante en t_0).

PROPOSITION 4. Une solution z^0 est consistante (μ -consistante) si et seulement s'il existe une suite $t_i \rightarrow \alpha$, $t_i \in I$, telle que pour tout t_i , z^0 soit consistante en t_i (μ -consistante en t_i).

DEFINITION 4. La solution z^0 est uniformément μ -consistante si $(\forall \eta > 0)(\forall \sigma < 0)(\exists \epsilon_0 > 0)(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\forall t_0 \in I)(\exists z(\cdot, t_0, z_0^\epsilon, \epsilon))$
 $\{ t \geq t_0, t \in I \} \subset J$ et $\mu \{ t \geq t_0, t \in I : \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta \} < \sigma$.

DEFINITION 5. La solution z^0 est uniformément consistante si $(\forall \eta > 0)(\exists \epsilon_0 > 0)(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\forall t_0 \in I)(\exists z(\cdot; t_0, z_0^\epsilon, \epsilon))$
 $\{ t \geq t_0, t \in I \} \subset J$ et $\mu \{ t \geq t_0, t \in I : \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta \} = 0$

On démontrerait tout comme pour les propositions 1 et 2, que les définitions de consistance et de consistance uniforme sont des généralisations très immédiates des définitions correspondantes introduites en [27].

PROPOSITION 5. Une solution z^0 est uniformément μ -consistante si et seulement si il existe une suite $t_i \rightarrow \alpha$ telle que pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$(\forall \eta > 0)(\forall \sigma > 0)(\exists \epsilon_{oi} \geq \epsilon_o(\eta, \sigma) > 0)(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_{oi})(\exists z(\cdot; t_i, z_{oi}^\epsilon, \epsilon))$$

$$\{t \geq t_i, t \in I\} \subset J \text{ et } \mu\{t \geq t_i, t \in I : \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta\} < \sigma.$$

De même une solution z^0 est uniformément consistante si et seulement si il existe une suite $t_i \rightarrow \alpha$ telle que

$$(\forall \eta > 0)(\exists \epsilon_{oi} \geq \epsilon_o(\eta) > 0)(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_{oi})(\exists z(\cdot; t_i, z_{oi}^\epsilon, \epsilon))$$

$$\{t \geq t_i, t \in I\} \subset J \text{ et } \mu\{t \geq t_i, t \in I : \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta\} = 0$$

Cette proposition démontre que si le système complet est autonome (ou si $\omega - \alpha > T$ et le système complet est T -périodique), la consistance en t_0 d'une solution z^0 constante (ou T -périodique) est équivalente à sa consistance uniforme. De même et dans les mêmes conditions la μ -consistance en t_0 est équivalente à sa μ -consistance uniforme.

Supposons l'espace de Banach Z de dimension finie. Supposons de plus que les solutions du système complet existent, sont déterminées de façon unique par leurs conditions initiales (t_0, z_0^ϵ) , en dépendent continuellement et peuvent être prolongées jusqu'à la frontière de Ω ou jusqu'à l'infini. Alors on peut énoncer la

PROPOSITION 6. Une solution $z^0(t)$ continue et telle que $\exists \eta_0 > 0, \forall t \in I, B(z^0(t), \eta_0) \subset \Omega$, est uniformément consistante si et seulement si

$$(\forall \eta > 0)(\exists \epsilon_0 > 0)(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\exists z(\cdot; t_0, z_0^\epsilon, \epsilon))$$

$$J = I \text{ et } \mu\{t \in I : \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta\} = 0$$

Démonstration. Il suffit de démontrer la condition nécessaire.

Soient $\eta = \eta_1 > 0$ fixé et $a < t_a < t_b$, $t_a \in I$, $t_b \in I$ quelconques. En utilisant la proposition 5 et en y posant $\eta = \eta_2 = \frac{1}{2} \min(\eta_0, \eta_1)$, on détermine $\epsilon_0 = \epsilon_0(\eta)$ puis on fixe $\epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0$. La même proposition 5 associe à chaque t_i une solution $z_i^\epsilon(.) = z(., t_i, z_{oi}^\epsilon, \epsilon)$ qui pour tout $t_i < t_a$ pénètre dans $B = \{(t, z) : t_a \leq t \leq t_b, \|z - z^0(t)\| \leq \eta_2\}$. Soit alors $(t_{oi}, z_{oi}) \in B$ tel que $z_{oi} = z_i^\epsilon(t_{oi})$, et puisque B est compact, cette suite possède une valeur d'adhérence (t_0, z_0^ϵ) . En utilisant la proposition 1, on démontre que $z(., t_0, z_0^\epsilon, \epsilon)$ est définie sur I tout entier.

Finalement supposons par l'absurde que $\mu\{t \in I, \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta_1\} > 0$. Dès lors il existe un intervalle $[t_c, t_d]$ tel que $\mu(K) > 0$, où

$K = \{t \in [t_c, t_d], \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta_1\}$. Par ailleurs en vertu de la continuité des solutions en fonction des conditions initiales, il existe $z_i^\epsilon(.)$ tel que $\forall t \in [t_c, t_d], \|z_i^\epsilon(t) - z^\epsilon(t)\| \leq \frac{\eta_1}{2}$. On en déduit

$\forall t \in K, \|z_i^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \frac{\eta_1}{2}$, d'où $K \subset$

$L = \{t \in [t_c, t_d], \|z_i^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \frac{\eta_1}{2} > \eta_2\}$ et $\mu(L) > 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

C Q F D.

Cette propriété permet d'interpréter la consistance uniforme comme une consistance tant dans le futur que dans le passé. Malheureusement, dans le cas de la μ -consistance, les résultats que l'on pourrait obtenir sont plus restrictifs. Considérons en effet le système complet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 1 \\ \epsilon \dot{y} &= \exp(-y) \left[\exp(-y) - 1 + (1-x) \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \right] \end{aligned}$$

dont les orbites sont décrites par les fonctions

$$y = \log \left[1 - \exp\left(-\frac{x^2}{2\epsilon}\right) + \alpha \exp\left(-\frac{x}{\epsilon}\right) \right]^{-1},$$

où α est un paramètre réel. Il y correspond le plan de phase de la

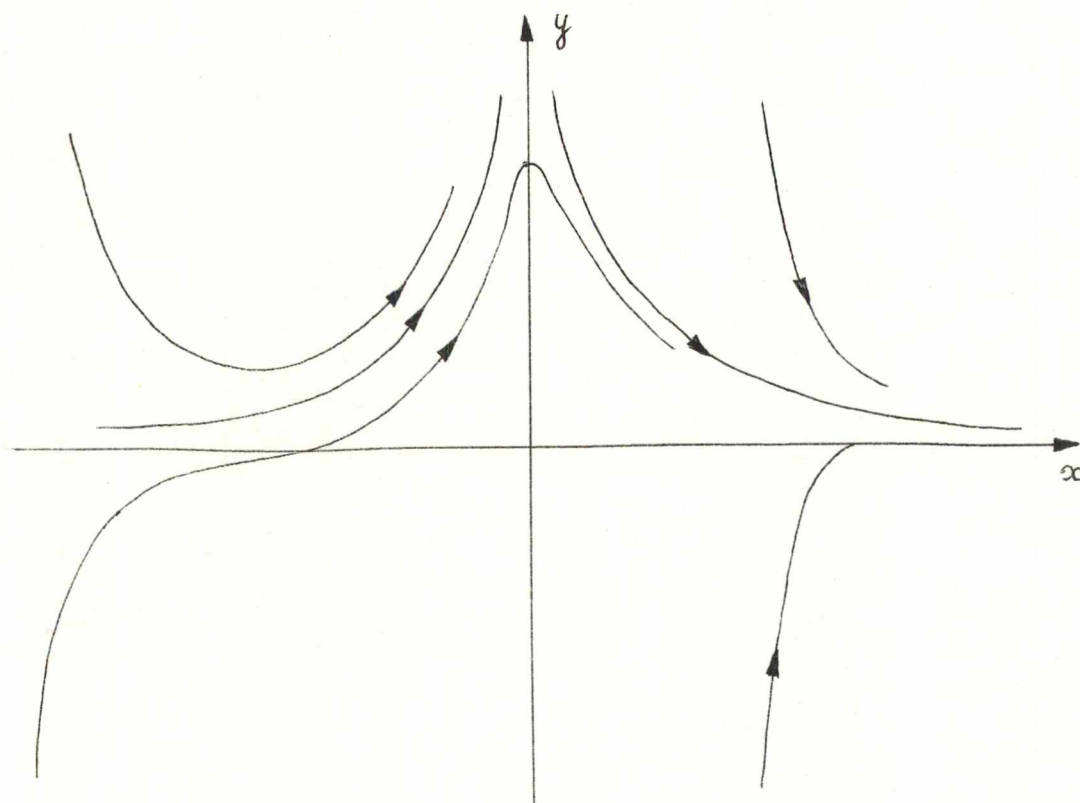


Figure I-6.

figure I-6. Lorsque $\epsilon \rightarrow 0$, en plan de phase, garde une allure similaire, la séparatrice $y = \log [1 - \exp(-\frac{x}{2\epsilon})]$ se resserrant suivant l'axe des x . Dès lors on peut facilement en déduire la μ -consistance uniforme de la solution z^0 du problème réduit, définie par

$$\begin{aligned} x &= x_0 + (t - t_0) \\ y &= 0 \end{aligned}$$

De plus la séparatrice étant formée de deux orbites, on voit tout de suite qu'il n'existe pas de solutions z^ϵ du problème complet qui approxime z^0 pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$. Remarquons finalement que z^0 ne vérifie les équations du problème réduit que $\forall t \neq t_0 - x_0$, ce qui d'ailleurs est compatible avec la définition de solution utilisée dans ce texte.

Finalement, on vérifie trivialement la

PROPOSITION 7. Toute solution z^0 uniformément consistante (uniformement μ -consistante) est consistante (μ -consistante).

3. Définitions des concepts de Consistance Complète

Les définitions énoncées au paragraphe 2 peuvent être particularisées en imposant qu'elles soient vérifiées pour toutes les solutions $z(., t_0, z_0^\epsilon, \epsilon)$ qui en t_0 sont proches de $z^0(t_0)$. On obtiendra ainsi des définitions proche parentes de la stabilité à la Liapounov.

DEFINITION 6. La solution z^0 est complètement μ -consistante en t_0 si

$$(\forall \eta > 0)(\forall \sigma > 0)(\exists \epsilon_0 > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\forall z(., t_0, z_0^\epsilon, \epsilon) :$$

$$\|z_0^\epsilon - z^0(t_0)\| < \delta), \{t \geq t_0, t \in I\} \subset J \text{ et}$$

$$\mu\{t \geq t_0, t \in I : \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta\} < \sigma$$

DEFINITION 7. La solution z^0 est complètement consistante en t_0 si

$$(\forall \eta > 0)(\exists \epsilon_0 > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\forall z(., t_0, z_0^\epsilon, \epsilon) :$$

$$\|z_0^\epsilon - z^0(t_0)\| < \delta), \{t \geq t_0, t \in I\} \subset J \text{ et}$$

$$\mu\{t \geq t_0, t \in I : \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta\} = 0$$

Les remarques que nous avons faites sur les définitions 1 et 2 peuvent être reprises comme telles. En particulier les propositions 1 et 2 sont valables in extenso. Par contre on ne peut plus démontrer l'équivalent de la proposition 3. En effet, considérons le système

$$\dot{x} = 1$$

$$\epsilon \dot{y}_1 = x y_1 + y_2$$

$$\epsilon \dot{y}_2 = -y_1 + x y_2$$

et sa solution

$$x = A + t$$

$$y_1 = \left[B \cos \frac{t}{\epsilon} + C \sin \frac{t}{\epsilon} \right] \exp \left[(A + t)^2 / 2\epsilon \right]$$

$$y_2 = \left[-B \sin \frac{t}{\epsilon} + C \cos \frac{t}{\epsilon} \right] \exp \left[(A + t)^2 / 2\epsilon \right]$$

où A, B et C sont des constantes. Dans le plan (y_1, y_2) , le mouvement est une spirale de rayon

$$r(t) = (y_1^2 + y_2^2)^{1/2} = (B^2 + C^2)^{1/2} \exp \left[(A + t)^2 / 2\epsilon \right].$$

Soit r_0 la valeur de r pour $t = -a$. Alors $r_0 = (B^2 + C^2)^{1/2} \exp \left[(A - a)^2 / 2\epsilon \right]$

et

$$r(t) = r_0 \exp \frac{(A + t)^2 - (A - a)^2}{2\epsilon}.$$

Supposons $A - a < 0$ et $t \in] -a, a - 2A[$. Il est alors évident que $(A + t)^2 - (A - a)^2 < 0$ et, r_0 étant fixé, $r(t) \rightarrow 0$ si $\epsilon \rightarrow 0$. Par contre si $t \notin] -a, a - 2A[$, $(A + t)^2 - (A - a)^2 > 0$ et $r(t) \rightarrow \infty$ si $\epsilon \rightarrow 0$. Supposons maintenant $a > b > 0$ et considérons la solution

$$z^0 : [-a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (t, 0, 0)$$

du système réduit. Fixons $\eta > 0$ et choisissons $\delta < \min \left(\eta, \frac{a-b}{2} \right)$

et $\epsilon_0 > 0$ quelconque. Alors, utilisant la norme

$$\|z\| : \max \left(|x|, (y_1^2 + y_2^2)^{1/2} \right), \left(\forall z^{\epsilon} \in B((-a, 0, 0), \delta) \right)$$

$$[c.à.d. \forall (A, B, C) : |A| < \delta, (B^2 + C^2)^{1/2} \exp \frac{A-a}{2\epsilon} < \delta], \text{ et } (\forall t \in J),$$

$$\|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| = \max(|A|, (B^2 + C^2)^{1/2} \exp[(A+t)^2/2\epsilon]) \leq \\ \leq \max(|A|, (B^2 + C^2)^{1/2} \exp[(A-a)^2/2\epsilon]) < \delta \leq \eta.$$

Ceci démontre la consistance complète de z^0 en $t_0 = -a$. Par ailleurs, si $t_1 \in]-b, b[$, on peut prouver que z^0 n'est pas complètement μ -

consistante en $t_1 > t_0$. En effet si

$A=0$, $(B^2 + C^2)^{1/2} = (\delta/2) \exp(-t_1/2\epsilon)$ et $t \in]|t_1|, b[$, alors

$$\|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| = (B^2 + C^2)^{1/2} \exp(t^2/2\epsilon) \neq (\delta/2) \exp(t^2 - t_1^2)/2\epsilon \rightarrow \infty$$

si $\epsilon \rightarrow 0$. On en déduit

$$\mu\{t \geq t_1, t \in I, \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta\} \rightarrow b - |t_1| \neq 0.$$

Parallèlement aux définitions 3, 4 et 5 on introduit ensuite les définitions suivantes.

DEFINITION 8. La solution z^0 est complètement consistante (complètement μ -consistante) si pour tout $t_0 \in I$ cette solution est complètement consistante en t_0 (complètement μ -consistante)

DEFINITION 9. La solution z^0 est uniformément complètement μ -consistante si

$$(\forall \eta > 0) (\forall \sigma > 0) (\exists \epsilon_0 > 0) (\exists \delta > 0) (\forall \epsilon: 0 < \epsilon \leq \epsilon_0) (\forall t_0 \in I) (\forall z(\cdot; t_0, z_{t_0}^\epsilon, \epsilon):$$

$$\|z_{t_0}^\epsilon - z^0(t_0)\| < \delta), \{t \geq t_0, t \in I\} \subset J \text{ et}$$

$$\mu\{t \geq t_0, t \in I: \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta\} < \sigma.$$

DEFINITION 10. La solution z^0 est uniformément complètement consistante si

$$(\forall \eta > 0)(\exists \epsilon_0 > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \epsilon: 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\forall t_0 \in I)(\forall z(\cdot; t_0, z_0^\epsilon, \epsilon):$$

$$\|z_0^\epsilon - z_0^0(t_0)\| < \delta), \quad \{t \geq t_0, t \in I\} \subset J \text{ et}$$

$$\mu \{t \geq t_0, t \in I : \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta\} = 0.$$

Ces définitions sont liées par des propositions évidentes traduisant des implications logiques similaires à celles de la proposition 7, ou bien à des implications du type : une solution complètement consistante est consistante, ou encore du type : une solution consistante est μ -consistante. Ces diverses implications seront schématisées plus loin à la figure 7;

Remarquons que le système complet (1.1) est équivalent au système

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, z, \epsilon) \\ \dot{y} &= \frac{1}{\epsilon} g(t, z, \epsilon) \\ \dot{\epsilon} &= 0 \end{aligned} \quad (1.12)$$

défini sur $I \times \Phi = I \times \Omega \times]0, \epsilon_0]$, La "solution" $(z, \epsilon) = (z^0(t), 0)$

est stable à la Liapunov si $(\forall t_0 \in I)(\forall \eta > 0)(\exists \epsilon_0 > 0)(\exists \delta > 0)$

$$(\forall \epsilon: 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\forall z_0^\epsilon : \|z_0^\epsilon\| < \delta)(\forall t \geq t_0, t \in I) \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| < \eta.$$

Dès lors, l'équivalent de la proposition 2 pour la consistante complète montre que la consistance complète de z^0 peut être interprétée comme la stabilité de $(z^0(t), 0)$ pour le système (1.12). La différence entre ces deux notions provient de ce que $(z^0(t), 0) \in \text{fr } \Phi$ et n'est pas une solution au sens classique. De plus le deuxième membre de (1.12) n'est pas défini le long de $(z^0(t), 0)$, et possède un pôle éventuel en $\epsilon = 0$.

Remarquons finalement que la notion de consistance complète uniforme est une extension immédiate de la définition de stabilité totale [29]. L'unique différence provient de ce que l'on considère ici des systèmes dont les perturbations peuvent être singulières.

4. Transformation de variables.

Dans la suite du texte nous serons amenés à considérer des transformations

$$\bar{z} = z - z^0(t) \quad (1.13)$$

où $z^0(t) = (x^0(t), y^0(t))$ est une fonction dérivable en t . Le système complet (1.1) s'écrit alors

$$\begin{aligned} \dot{\bar{x}} &= f(t, \bar{z} + z^0(t), \epsilon) - \dot{x}^0(t) \\ \epsilon \dot{\bar{y}} &= g(t, \bar{z} + z^0(t), \epsilon) - \epsilon \dot{y}^0(t) \end{aligned} \quad (1.14)$$

Notons

$$\psi = \{ (t, \bar{z}) \mid t \in I, \bar{z} + z^0(t) \in \Omega \}$$

l'ensemble sur lequel est définie l'équation différentielle (1.14) et soit

$$\bar{z}(t; t_0, \bar{z}_0^\epsilon, \epsilon) = \bar{z}^\epsilon(t)$$

sa solution générale définie pour $t \in \bar{J}(t_0, \bar{z}_0^\epsilon, \epsilon)$

Remarquons que si t_0 est fixé avant z_0^ϵ et si $\bar{z}_0^\epsilon$ et z_0^ϵ sont liés par la relation (1.13), alors :

1° à toute solution $z^\epsilon(t)$ des équations (1.1), définies sur un intervalle J , correspond une solution $\bar{z}^\epsilon(t) = z^\epsilon(t) - z^0(t)$ de (1.14), définie sur le même intervalle J ;

2° $z_0^\epsilon : \| z_0^\epsilon - z^0(t_0) \| \leq \delta$ est équivalent à $\bar{z}_0^\epsilon : \| \bar{z}_0^\epsilon \| < \delta$;

3° $\| z^\epsilon(t) - z^0(t) \| < \eta$ est équivalent à $\| \bar{z}^\epsilon(t) \| < \eta$.

Ces remarques prouvent que les définitions de consistance introduites ci-dessus sont indépendantes de la transformation de coordonnées (1.13) au sens de la

PROPOSITION 8. Si z^0 est une solution dérivable des équations du système réduit (1-2) et si l'origine ($\bar{z} = 0$) vérifie l'une des définitions de consistance par rapport au système complet (1.14), alors z^0 vérifie la définition correspondante par rapport au système complet (1-1), et vice-versa.

5. Résumé du chapitre

Il peut être utile de rappeler les définitions que nous avons introduites dans ce chapitre. Le tableau I reprend les définitions de consistance et μ -consistance, le tableau II les définitions de consistance complète et μ -consistance complète. Les implications logiques immédiates entre ces concepts sont représentées à la figure I-7.

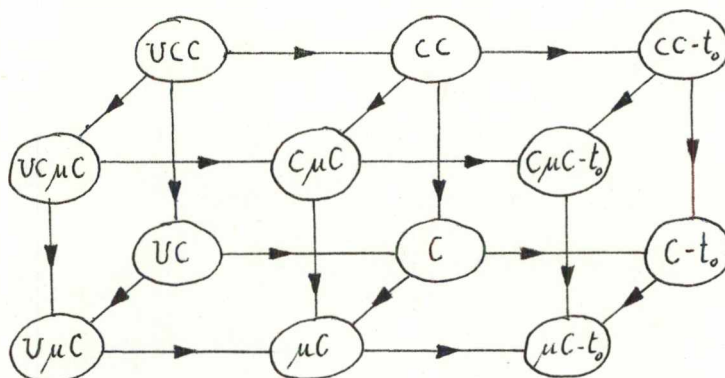


Figure I-7- implications entre concepts de stabilité.

TABLEAU I - Définitions des concepts de Consistance (paragraphe 2).

μ -consistant en t_0 ($\mu C - t_0$)		
$t_0 \in I (\forall \eta > 0) (\forall \sigma > 0) (\exists \epsilon_0 > 0) (\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)$		$(\exists z^\epsilon(t)) \quad \{t \geq t_0, t \in I\} \subset J \text{ et } \mu(E) < \sigma.$
μ -consistant (μC)		
$(\forall t_0 \in I) (\forall \eta > 0) (\forall \sigma > 0) (\exists \epsilon_0 > 0) (\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)$		$(\exists z^\epsilon(t)) \quad \{t \geq t_0, t \in I\} \subset J \text{ et } \mu(E) < \sigma.$
uniformément μ -consistant ($U \mu C$)		
$(\forall \eta > 0) (\forall \sigma > 0) (\exists \epsilon_0 > 0) (\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0) (\forall t_0 \in I)$		$(\exists z^\epsilon(t)) \quad \{t \geq t_0, t \in I\} \subset J \text{ et } \mu(E) < \sigma.$
consistant en t_0 ($C - t_0$)		
$t_0 \in I (\forall \eta > 0) (\exists \epsilon_0 > 0) (\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)$		$(\exists z^\epsilon(t)) \quad \{t \geq t_0, t \in I\} \subset J \text{ et } \mu(E) = 0$
consistant (C)		
$(\forall t_0 \in I) (\forall \eta > 0) (\exists \epsilon_0 > 0) (\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)$		$(\exists z^\epsilon(t)) \quad \{t \geq t_0, t \in I\} \subset J \text{ et } \mu(E) = 0$
uniformément consistant (UC)		
$(\forall \eta > 0) (\exists \epsilon_0 > 0) (\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0) (\forall t_0 \in I)$		$(\exists z^\epsilon(t)) \quad \{t \geq t_0, t \in I\} \subset J \text{ et } \mu(E) = 0$
$E = \{ t \geq t_0, t \in I : \ z^\epsilon(t) - z^0(t) \ \geq \eta \}$		

TABLEAU II - Définitions des concepts de Consistance Complète (paragraphe 3).

complètement μ -consistant en t_0 ($\mathcal{C}\mu \subset t_0$)

$$t_0 \in I (\forall \eta > 0)(\forall \sigma > 0)(\exists \epsilon_0 > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \epsilon: 0 < \epsilon \leq \epsilon_0) (\forall z^\epsilon(.): \|z^\epsilon(t_0) - z^0(t_0)\| < \delta) \{t \geq t_0, t \in I\} \subset J \text{ et } \mu(E) < \sigma$$

complètement μ -consistant ($\mathcal{C}\mu \subset$)

$$(\forall t_0 \in I)(\forall \eta > 0)(\forall \sigma > 0)(\exists \epsilon_0 > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \epsilon: 0 < \epsilon \leq \epsilon_0) (\forall z^\epsilon(.): \|z^\epsilon(t_0) - z^0(t_0)\| < \delta) \{t \geq t_0, t \in I\} \subset J \text{ et } \mu(E) < \sigma$$

uniformément complètement μ -consistant ($\mathcal{U} \subset \mu \subset$)

$$(\forall \eta > 0)(\forall \sigma > 0)(\exists \epsilon_0 > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \epsilon: 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\forall t_0 \in I)(\forall z^\epsilon(.): \|z^\epsilon(t_0) - z^0(t_0)\| < \delta) \{t \geq t_0, t \in I\} \subset J \text{ et } \mu(E) < \sigma$$

complètement consistant en t_0 ($\mathcal{C}\mathcal{C} \subset t_0$)

$$(t_0 \in I)(\forall \eta > 0) (\exists \epsilon_0 > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \epsilon: 0 < \epsilon \leq \epsilon_0) (\forall z^\epsilon(.): \|z^\epsilon(t_0) - z^0(t_0)\| < \delta) \{t \geq t_0, t \in I\} \subset J \text{ et } \mu(E) = 0$$

complètement consistant ($\mathcal{C}\mathcal{C}$)

$$(\forall t_0 \in I)(\forall \eta > 0) (\exists \epsilon_0 > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \epsilon: 0 < \epsilon \leq \epsilon_0) (\forall z^\epsilon(.): \|z^\epsilon(t_0) - z^0(t_0)\| < \delta) \{t \geq t_0, t \in I\} \subset J \text{ et } \mu(E) = 0$$

uniformément complètement consistant ($\mathcal{U} \subset \mathcal{C}$)

$$(\forall \eta > 0) (\exists \epsilon_0 > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \epsilon: 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\forall t_0 \in I)(\forall z^\epsilon(.): \|z^\epsilon(t_0) - z^0(t_0)\| < \delta) \{t \geq t_0, t \in I\} \subset J \text{ et } \mu(E) = 0$$

$$E = \{ t \geq t_0, t \in I : \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta \}.$$

6. Notes.

Le formalisme que nous avons introduit répond à certaines préoccupations de caractère pratique qui ont été exposées dans l'introduction de ce texte. Il est cependant utile de remarquer que les concepts de consistance permettent de rendre compte d'une part importante de la littérature concernant l'approximation des solutions du système complet.

A.N. TIHONOV [67] a étudié un système complet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, y) \\ \epsilon \dot{y} &= g(t, x, y)\end{aligned}$$

tel que $g(t, x, y) = 0$ possède une racine $y = h(t, x)$ isolée. Considérant l'équation des couches limites

$$\frac{dy}{ds} = g(t, x, y),$$

cet auteur suppose que le point singulier $y = h(t, x)$ est attracteur et possède une région d'attraction $A(t, x) \subset \mathbb{R}^m$. Les résultats de A.N. TIHONOV concernent alors la comparaison de la solution $z^0(t)$ du problème réduit définie pour $t \in [t_0, t_1]$ et d'une solution $z(t; t_0, x^0(t_0), y_0^\epsilon, \epsilon)$ du problème complet, où $y_0^\epsilon \in A(t_0, x^0(t_0))$.

On démontre que la solution $z^\epsilon(t)$ tend vers $z^0(t)$ pour $\epsilon \rightarrow 0$; de plus $\forall \sigma > 0$ cette convergence est uniforme sur l'intervalle

$[t_0 + \sigma, t_1]$. F.C. HOPPENSTEADT [33] parle dans ce

cas de "dégenérescence régulière". Une analyse de ce théorème conduit à la conclusion qu'il aurait pu être démontré comme suit:

1° en utilisant la continuité en fonction d'un paramètre des solutions du système

$$\frac{dx}{ds} = \epsilon f(t_0 + \epsilon s, x, y)$$

$$\frac{dy}{ds} = g(t_0 + \epsilon s, x, y),$$

et l'attractivité du point singulier $(x^0(t_0), h(t_0, x^0(t_0)))$ du système limite ($\epsilon = 0$), on peut conclure que $(\forall \delta > 0)(\exists S > 0)$ tel que pour ϵ assez petit, la solution $z^\epsilon(t)$ atteint en un temps $t_0 + \epsilon S$ un voisinage $\frac{\delta}{2}$ de $z^0(t_0)$; on en déduit ensuite, en vertu de la continuité de z^0 , que $z^\epsilon(t_0 + \epsilon S)$ atteint un voisinage δ de $z^0(t_0 + \epsilon S)$;
 2° en utilisant la consistance complète et uniforme de z^0 , on démontre finalement que $\|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| < \eta$, $\forall t \in [t_0 + \epsilon S, t_1]$. La partie non triviale de cette démonstration se réduit donc bien à démontrer la consistance complète et uniforme de z^0 . Remarquons par ailleurs que la thèse de A.N. TIHONOV implique la μ -consistance de la solution du problème réduit définie par les relations $\bar{z}^0(t_0) = (x^0(t_0), y_0^\epsilon)$, $\bar{z}^0(t) = z^0(t)$ pour $t \in]t_0, t_1]$. Cependant on ne peut déduire de cette thèse, la consistance en t_0 de la solution z^0 , bien que cette propriété se déduise des hypothèses du théorème. Le même genre de remarques peut être fait à propos des généralisations ultérieures de ce théorème [3], [23], [30], [52]....

Il faut encore noter que certains auteurs se sont attachés à estimer la vitesse de décroissance de $\|z^\epsilon(t) - z^0(t)\|$ en fonction de ϵ et $\|z^\epsilon(t_0) - z^0(t_0)\|$, [4], [8], [9], [34]... Cette dépendance en ϵ implique certains concepts de consistance. Il est cependant évident que ces résultats sont plus précis que ceux que nous étudions ici. En particulier l'étude des développements asymptotiques de $z^\epsilon(t)$ [74] conduit à la même remarque.

Par ailleurs J.J. LEVIN et N. LEVINSON [42] ont énoncé un théorème (théorème 1) dont la thèse est la consistance complète en $t_0 = a$ d'une solution $z^0(t) = (\phi(t), \psi(t))$. La consistance complète et uniforme apparaît d'ailleurs dans la démonstration du théorème 1.2. Il faut aussi noter que la thèse du théorème 1 énoncé par N. LEVINSON [43] est à peu de choses près la μ -consistance complète en t_0 .

Les exemples physiques d'application de la consistance sont nombreux. L.O. CHUA & G.R. ALEXANDER [10], C.A. DESOER et M.J. SHENSA [12] ont étudié l'effet d'inductances et de capacités parasites sur les équations de réseaux électriques et sur leurs solutions. Plus particulièrement T.E. STERN [63] a étudié en détail un multivibrateur à transistors dont les capacités de jonctions sont supposées parasites. P.V. KOKOTOVIC [35] s'intéressant à des problèmes de contrôle, a utilisé des systèmes formés d'une génératrice, d'un moteur et d'une amplidyne. On trouvera dans cet article des références d'applications à des réactions chimiques où une enzyme se trouve en petite quantité, à l'approximation d'un vol de fusée, à l'étude de systèmes de puissance où l'on néglige la réactance de machines synchrones. On trouvera d'autres exemples physiques dans K.O. FRIEDRICHS [19], L.A. SEGEL [60] ... Il est intéressant de noter finalement que Yu.I. NEIMARK et N.A. FUFARAEV [50] ont étudié un système mécanique à liaisons non holonomes qui présente les caractéristiques de l'exemple p.23.

Dans certains cas d'espèce, il peut être utile d'étendre les définitions que nous avons introduites. Par exemple L.S. PONTRYAGIN et L.V. RODYGIN [55] ont étudié le système complet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(x, y) \\ \epsilon \dot{y} &= g(x, y)\end{aligned}$$

en supposant que l'équation des couches limites

$$\frac{dy}{ds} = g(x, y)$$

possède une solution périodique $y = \tilde{y}(s, x)$ de période $T(x)$. Ils y associent le "système des valeurs moyennes"

$$\dot{x} = \frac{1}{T(x)} \int_0^{T(x)} f(x, \tilde{y}(s, x)) ds$$

qui joue le rôle du système réduit, et cherchent alors à prouver qu'une solution du système des valeurs moyennes est proche de solutions du système complet. Par ailleurs cherchant à faire le lien entre ce problème et celui posé par A.N. TIHONOV [67], M. FRENKEL [17] a considéré un système complet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, \theta) + F(x, y, \theta, \epsilon) \\ \epsilon \dot{y} &= \beta(x)y + G(x, y, \theta, \epsilon) \\ \epsilon \dot{\theta} &= w(x) + S(x, y, \theta, \epsilon) \end{aligned} \quad (1.15)$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^m$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Supposons entre autres ce système continu et périodique en θ de période unité et $|S(x, y, \theta, \epsilon)| \leq O(\|y\| + \epsilon)$. Il y correspond un "système des valeurs moyennes"

$$\frac{dx}{dt} = \int_0^1 f(x, \theta) d\theta$$

dont on étudie une solution $x^0(t)$ définie sur $[0, L]$ et telle que $x^0(0) = x_0$. Soit $(x^\epsilon(t), y^\epsilon(t), \theta^\epsilon(t)) = (z^\epsilon(t), \theta^\epsilon(t))$ la solution du système complet définie par les conditions initiales x_0, y_0, θ_0 en $t_0 = 0$. On démontre ensuite (théorème de centrage) que moyennant certaines hypothèses et pour autant que $\epsilon + |y_0|$ soit assez petit et $\theta_0 \in [0, \infty[$, alors:

- a: les fonctions $x^\epsilon, y^\epsilon, \theta^\epsilon$ sont définies sur $[0, L]$;
 b: $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} x^\epsilon(t) = x^0(t), \quad t \in [0, L];$

$$\text{et } \forall \sigma > 0 \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0} y^\epsilon(t) = 0, \quad t \in [\sigma, L];$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} |\epsilon \dot{\theta} - \omega(x^0(t))| = 0, \quad t \in [\sigma, L];$$

la convergence étant uniforme.

Tout comme pour le théorème de A.N. TIHONOV, on aurait pu démontrer que:

1° par continuité des solutions en fonction d'un paramètre, la solution $z^\epsilon(t)$, $\theta^\epsilon(t)$ atteint en $t = t_0 + \epsilon S$ un voisinage δ de l'ensemble $M(t) = \{ (z, \theta) : z = (x^0(t), 0) \}$.

2° le concept $\mathcal{C}$:

$$(\forall \eta > 0)(\exists \delta > 0)(\exists \epsilon_0 > 0)(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\forall t_0 \in [0, L])(\forall (z_0^\epsilon, \theta_0^\epsilon) \in B(M(t_0), \delta)) \\ (\forall t \in J \cap [0, L]) \quad (z^\epsilon(t), \theta^\epsilon(t)) \in B(M(t), \eta).$$

est vérifié.

On peut en déduire alors que la solution $(z^\epsilon(t), \theta^\epsilon(t))$ atteint en un temps $t_0 + \epsilon S < \sigma$ le voisinage δ de $M(t_0 + \epsilon S)$, et puis demeure dans $B(M(t), \eta)$. On déduit de la continuité et de la périodicité en θ que le deuxième membre des équations (1.15) est borné. Dès lors, pour ϵ fixé, les solutions sont prolongeables sur $[0, L]$ ce qui démontre la proposition a.

La proposition b se déduit du concept $\mathcal{C}$ et du fait que $\forall t \in [\sigma, L]$

$$\epsilon \frac{d\theta^\epsilon(t)}{dt} - \omega(x^0(t)) = \omega(x^\epsilon(t)) - \omega(x^0(t)) + S(z^\epsilon(t), \theta^\epsilon(t), \epsilon) \\ \left| \epsilon \frac{d\theta^\epsilon(t)}{dt} - \omega(x^0(t)) \right| \leq |\omega(x^\epsilon(t)) - \omega(x^0(t))| + |S(z^\epsilon(t), \theta^\epsilon(t), \epsilon)| \\ \leq O(\epsilon) + O(\epsilon + O(\epsilon)).$$

Les théorèmes ébauchés ci-dessus se ramènent donc bien à l'étude du concept $\mathcal{C}$ qui n'est rien d'autre que la consistance complète et uniforme de l'ensemble $M(t)$. Ceci justifie une extension éventuelle de la notion de consistance à des ensembles fonctions du temps.

Remarquons finalement que ce texte passe sous silence l'étude du système

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, x, y_1, \dots, y_k, \epsilon) \\ \epsilon_i \dot{y}_i &= g(t, x, y_1, \dots, y_k, \epsilon) \quad i = 1, \dots, k,\end{aligned}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $y \in \mathbb{R}^{m_i}$ et $\epsilon_{i+1}/\epsilon_i \rightarrow 0$. La différence essentielle avec le problème que nous considérons, est une complication des critères de consistance, les principes mis en oeuvre restant valables.

CHAPITRE II

METHODE GEOMETRIQUE DANS LE PLAN

1. Introduction.

Considérons le système complet autonome et du second ordre

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x, y) \\ \dot{y} &= g(x, y) \end{aligned} \quad (2.1)$$

où $x \in \mathbb{R}$, $y \in \mathbb{R}$ et f et g sont de classe C^1 . On sait que les systèmes autonomes du second ordre peuvent facilement être analysés par l'étude des orbites dans le plan de phase (x, y) . Nous verrons que ces méthodes géométriques ou topologiques peuvent être utilisées pour démontrer des propriétés de consistance ou de μ -consistance.

Représentons les courbes $f(x, y) = 0$ et $g(x, y) = 0$ dans le plan de phase de la figure II-1. Une solution z^0 du problème réduit y est représentée par une suite de segments de la courbe d'équation $g(x, y) = 0$, alternant avec des segments de verticales. Par exemple, la courbe ABDEFO représente une orbite T du problème réduit, asymptotique au point singulier O .

Dans un premier paragraphe nous montrerons comment construire un ensemble M positivement invariant (*) par rapport au système complet (2.1), contenant l'orbite T et contenu dans $B(T, \rho) = \{ z : \exists z' \in T, \|z - z'\| < \rho \}$, où ρ est aussi petit que l'on veut;

(*) Un ensemble M est positivement invariant si toute solution issue d'un point quelconque de M , y demeure dans le futur

$$(\forall t_0 \in I)(\forall x_0 \in M)(\forall t \geq t_0, t \in J) \quad x(t) \in M.$$

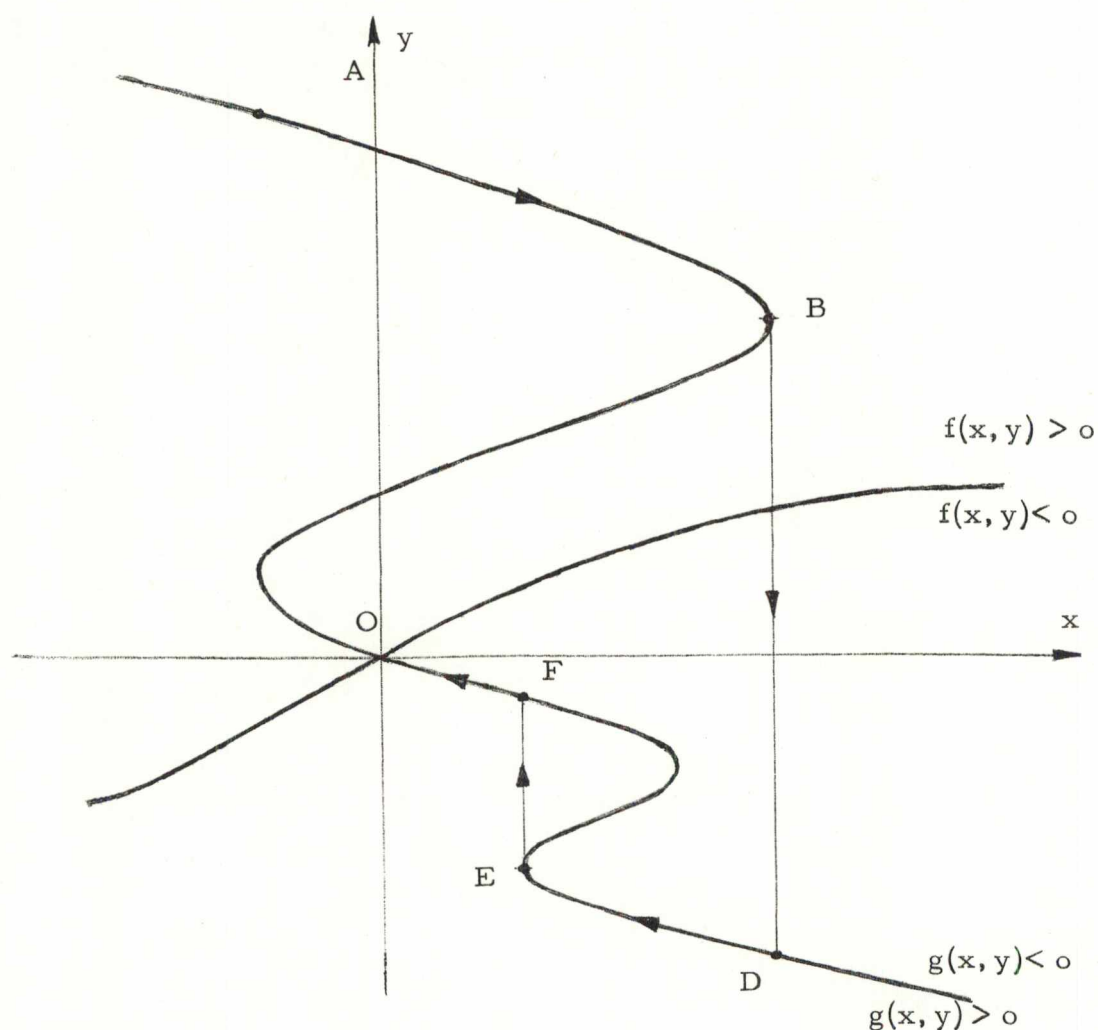


Figure II-1

Ensuite nous montrerons que les sauts sont parcourus en un temps "infinitement court". Finalement nous en déduirons la μ -consistance. Toute cette étude sera intuitive en ce sens que beaucoup d'hypothèses seront implicites et se déduiront en général des figures considérées. Une description minutieuse des hypothèses nécessaires à cette étude serait fastidieuse et nuirait probablement à sa bonne compréhension. Il reste cependant que ce chapitre décrit une méthode d'analyse et donne de plus une vue géométrique du problème de la consistance.

Notons finalement que les chapitres III et IV auront pour but d'étendre ces résultats en utilisant des méthodes plus analytiques.

2. Construction d'un ensemble M positivement invariant.

Considérons tout d'abord le segment AB de l'orbite T.

Dans la suite, les coordonnées d'un point tel que A seront notées

$z_A = (x_A, y_A)$. On peut alors caractériser AB comme suit:

1° $g(x, y)$ est nul et l'équation $g(x, y) = 0$ possède une racine de

classe C^1 $y = h(x)$, définie pour $x < x_B$; la fonction h possède un inverse
de classe C^1 $x = k(y)$, défini pour $y > y_B$;

2° $\inf_{(x, y) \in AB} |f(x, y)| > 0$.

Définissons ensuite la région

$$M_{AB}(\alpha) = \{ (x, y) : x_A - \alpha \leq x \leq x_B ; y \geq y_B ; x - k(y) \leq \alpha h(x) - y \leq \alpha \}$$

représenté à la figure II-2

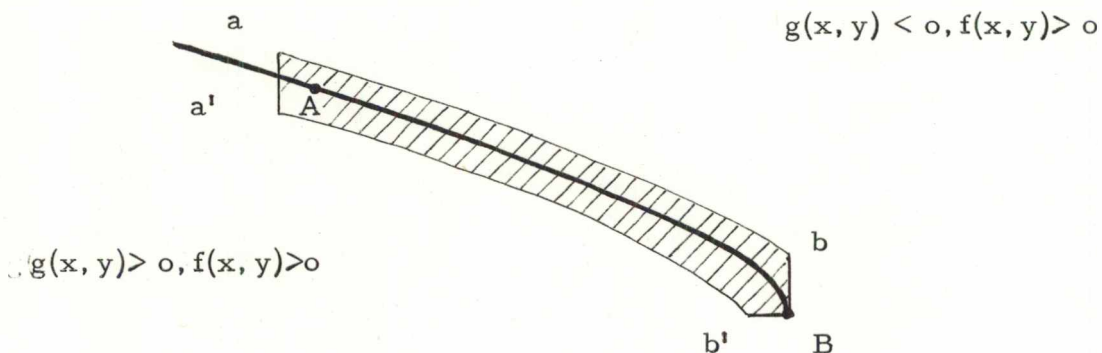


Figure II-2. Construction de $M_{AB}(\alpha)$

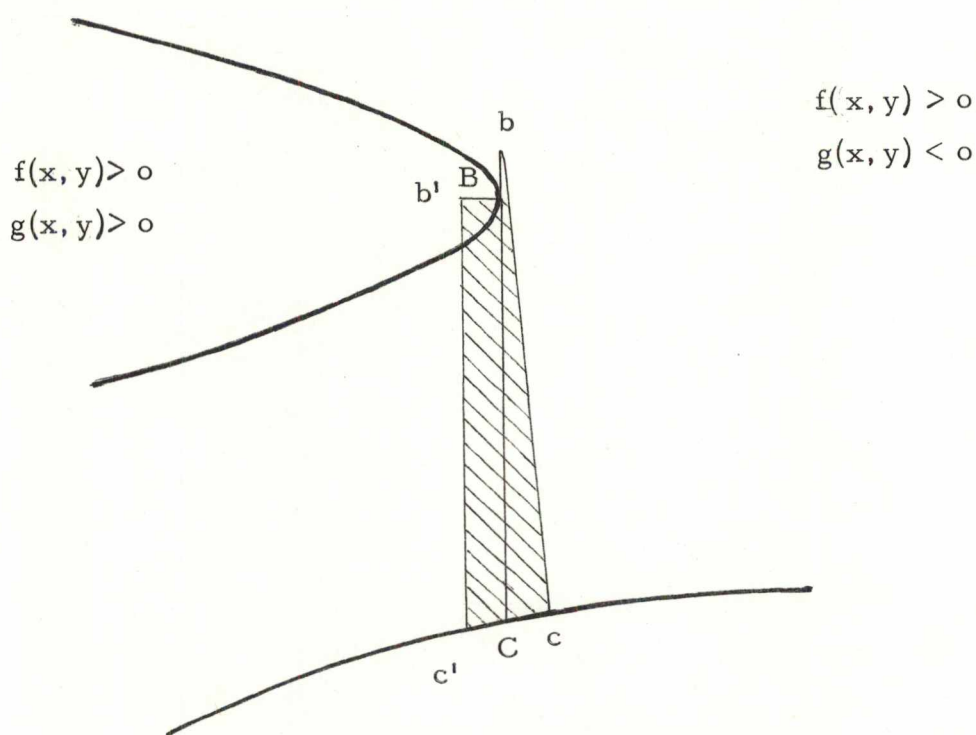
Remarquons que quel que soit $\rho > 0$, on peut toujours choisir α assez petit pour que $M_{AB}(\alpha) \subset B(T, \rho)$. D'autre part les segments ab , $a'b'$ et aa' sont tels que pour ϵ assez petit, les solutions de 2.1 rentrent dans $M_{AB}(\alpha)$. En effet, ab est déterminé par l'équation

$V_1 = x - k(y) = \alpha$ et $a'b'$ par $V_2 = h(x) - y = \alpha$. Remarquons que $\min$
 $(\inf (k'(y)g(x, y) : (x, y) \in ab), \inf (g(x, y) : (x, y) \in a'b')) = m_1 > 0$
 et $\max (\sup (f(x, y) : (x, y) \in ab), \sup (h'(x)f(x, y) : (x, y) \in a'b')) \leq M_1 \in \mathbb{R}_m$.
 Dès lors on vérifie que sur ab , $\dot{V}_1 = f(x, y) - k'(y) \frac{g(x, y)}{\epsilon} \leq M_1 - m_1/\epsilon$
 et sur $a'b'$, $\dot{V}_2 = h'(x)f(x, y) - g(x, y)/\epsilon \leq M_1 - m_1/\epsilon$. On en déduit
 que si $\epsilon < m_1/M_1$, $\dot{V}_i < 0$. Par ailleurs aa' est une verticale telle
 que $\dot{x} = f(x, y) > 0$. Ceci démontre que les solutions de (2.1) issues d'un
 voisinage assez petit de A demeurent géométriquement proches de AB
 et ne peuvent s'en éloigner qu'après avoir traversé la frontière
 de $M_{AB}(\alpha)$ en $b'B$ ou Bb .

Considérons ensuite le segment BD de l'orbite T et montrons
 que les solutions issues de $b'B$ ou Bb demeurent géométriquement
 proches de BD . Il est plus simple de partager BD en deux segments
 BC et CD de sorte que f soit de signe constant sur chacun d'eux. Consi-
 dérons alors le segment BC le long duquel f est positif et g négatif
 et définissons la région

$$\begin{aligned}
 M_{BC}(\alpha) = \{ (x, y) : x_{b'} \leq x \leq x_b + \alpha(y_b - y); f(x, y) \geq 0 \} \\
 \setminus \{ (x, y) : x < x_B ; y > y_B \} .
 \end{aligned}$$

représenté à la figure II-3.

Figure II-3. Construction de $M_{BC}(\alpha)$

Il est évident que si α est assez petit, $M_{BC}(\alpha) \subset B(T, \rho)$.

On vérifie ensuite que pour ϵ assez petit les solutions de (2.1) pénètrent $M_{BC}(\alpha)$ le long de $b'c'$ et bc . En effet le long de $b'c'$, $\dot{x} = f(x, y) \geq 0$. Par ailleurs le long de bc ,

$$\frac{d}{dt} (x - x_b - \alpha(y_b - y)) = f(x, y) + \frac{\alpha}{\epsilon} g(x, y). \text{ Si on pose alors}$$

$$\inf (|g(x, y)|, (x, y) \in bc) = m_2 > 0 \text{ et } \sup (f(x, y) : (x, y) \in bc) = M_2 \in \mathbb{R}_m,$$

on vérifie que pour $\epsilon < \alpha m_2 / M_2$, $f(x, y) + \alpha g(x, y) / \epsilon < 0$. Ceci

démontre que les solutions issues de $M_{AB}(\alpha)$ ne peuvent s'éloigner de $M_{BC}(\alpha)$ qu'après avoir traversé $c'c$.

Mettant en oeuvre les mêmes principes, on construit ensuite des régions $M_{CD}(\alpha)$, $M_{DE}(\alpha)$, $M_{EF}(\alpha)$ se soudant les unes aux autres et satisfaisant aux mêmes types de propriétés. Le problème est un peu différent en ce qui concerne le segment $F.O$ puisque f change de signe dans le voisinage de O . On peut cependant construire l'ensemble

$$M_{FO}(\alpha) = \{ (x, y) : (y, h(x))^2 \leq \alpha, x_0 - \rho'' \leq x \leq x_F + \rho' \}$$

où x_F et ρ' se déduisent de $M_{EF}(\alpha)$ et ρ'' est assez grand pour que $f(x, y) > 0$ le long de oo' (figure II-4).

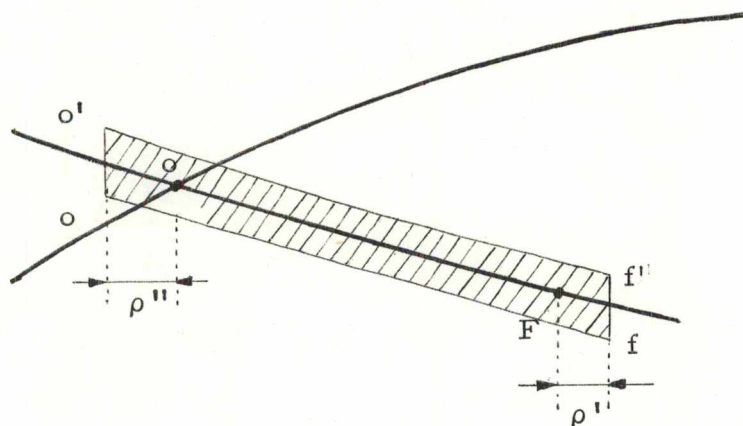


Figure II-4 : Construction de $M_{FO}(\alpha)$

Cet ensemble est positivement invariant. En effet, en oo' , $\dot{x} = f(x, y) > 0$, en ff' , $\dot{x} = f(x, y) < 0$ et le long de of et $o'f'$, $\frac{d}{dt}[(y - h(x))^2 - \alpha] =$

$$\frac{g(x, y)}{\epsilon} - h'(x) f(x, y). \text{ Or } \min (|g(x, y)| : (x, y) \in of \text{ ou } o'f') = m_3 > 0$$

$$\text{et } \max (|h'(x) f(x, y)| : (x, y) \in of \text{ ou } o'f') = M_3 \in \mathbb{R}_{\text{fin}}. \text{ Dès lors si}$$

$$\epsilon < m_3/M_3, \quad \frac{g(x, y)}{\epsilon} - h'(x) f(x, y) < 0.$$

Nous avons donc construit pour tout $\rho > 0$, un ensemble

$$M = M_{AB} \cup M_{BC} \cup M_{CD} \cup M_{DE} \cup M_{EF} \cup M_{FO},$$

représenté à la figure II-5, qui pour ϵ assez petit est positivement invariant et tel que $M \subset B(T, \rho)$.

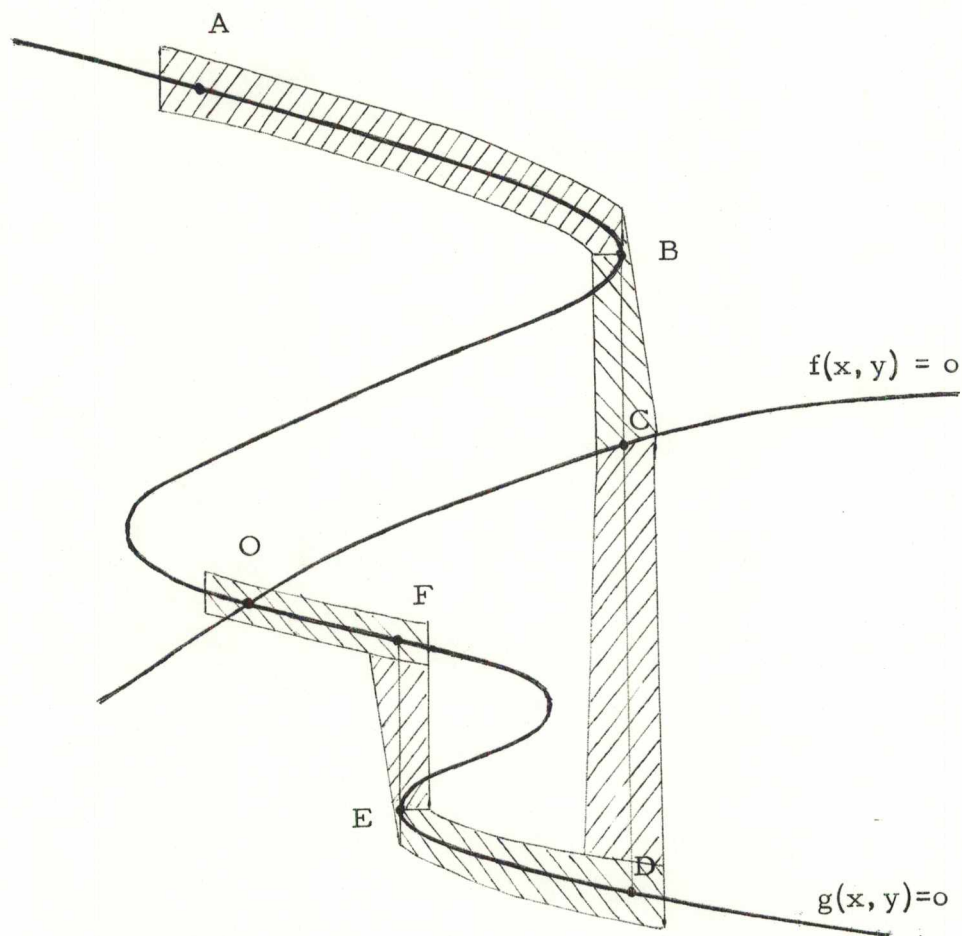


Figure II-5. Construction de M.

3. Etude des sauts.

Considerons le segment BD de l'orbite T et l'ensemble $S = M \cap \{(x, y) : x_B - \rho' \leq x \leq x_B + \rho'\}$ représenté à la figure II-6. Il est évident que si α est assez petit, la figure II-6 est caractéristique et les solutions qui pénètrent S en $\beta\beta'$ ne peuvent en sortir que par $\delta\delta'$. Nous allons montrer qu'une telle solution ne peut rester dans S qu'un temps $T(\epsilon, \rho')$ qui tend vers zero avec $\epsilon \rightarrow 0$. Dans ce but, considérons les ensembles $S_1 = S \cap \{(x, y) : y \geq (y_B + y_C)/2\}$, $S_2 = S \cap \{(x, y) : (y_C + y_D)/2 \leq y \leq (y_B + y_C)/2\}$ et $S_3 = S \cap \{(x, y) : (y_C + y_D)/2 \geq y\}$. On vérifie qu'il existe $m \gg 0$ tel que

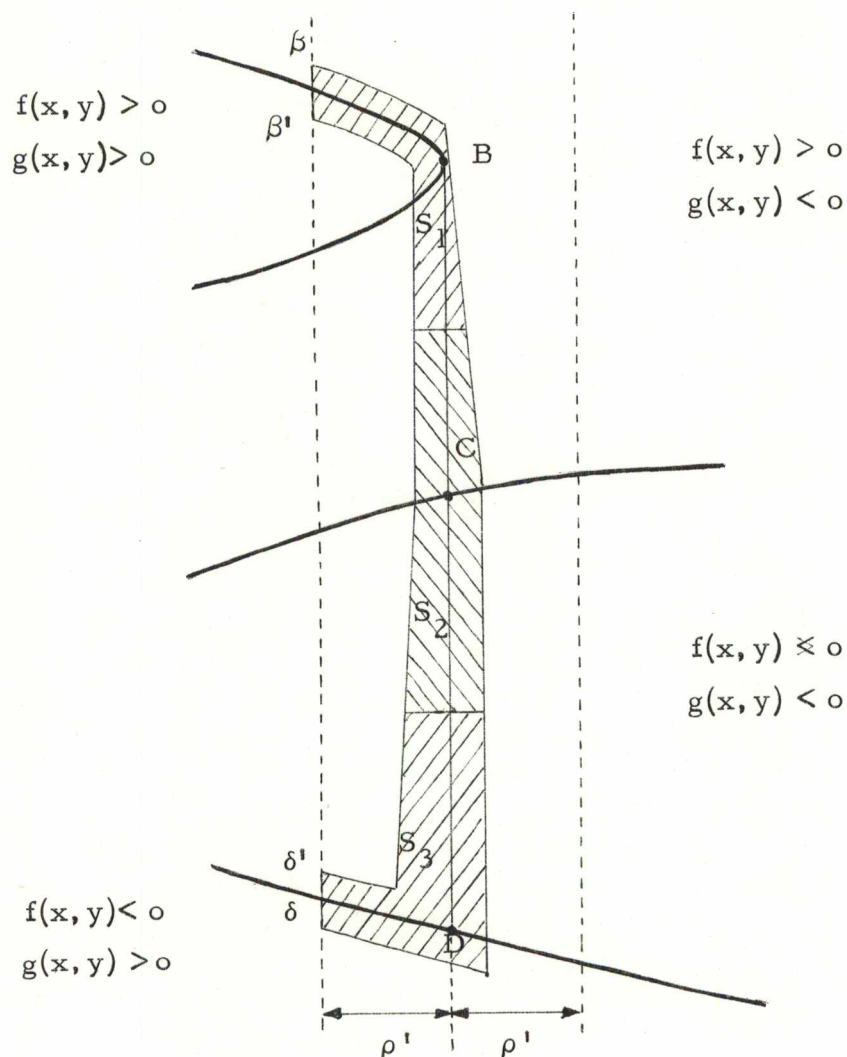


Figure II-6 - Construction de $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$.

$\inf (f(x, y) : (x, y) \in S_1) \geq m$, $\sup (g(x, y) : (x, y) \in S_2) \leq -m$ et

$\sup (f(x, y) : (x, y) \in S_3) \leq -m$. Dès lors une solution qui pénètre S_1 en $\beta\beta'$

ne peut y rester au plus qu'un temps $T_1 \leq \frac{\Delta x}{\min \dot{x}} \leq \frac{2\rho'}{m}$. Après ce

temps cette solution quitte S_1 ce qui ne peut se faire qu'en pénétrant dans S_2 . Or elle ne peut rester dans S_2 au plus qu'un temps

$T_2 \leq \left| \frac{\Delta y}{\max \dot{y}} \right| \leq \epsilon \frac{y_B - y_C}{2m}$. Ensuite cette solution quitte S_2 et pénètre

S_3 où elle ne peut rester plus de $T_3 \leq \left| \frac{\Delta x}{\max \dot{x}} \right| = \frac{2 \rho'}{m}$. On en

déduit que le temps de passage dans S est au plus

$$T = T_1 + T_2 + T_3 \leq \frac{8 \rho' + \epsilon (y_B - y_C)}{2m} \text{ et tend vers zero avec } \epsilon + \rho'.$$

4. Propriétés de consistance.

A partir des résultats obtenus ci-dessus, on peut démontrer la μ -consistance complète en t_0 de la solution z^0 dont l'orbite est ABCDEFO.

Fixons η et σ , et considérons tout d'abord le segment AB. On sait qu'il existe une fonction $h(x)$ de classe C^1 telle que cette solution s'écrive $z^0(t) = (x^0(t), h(x^0(t)))$, $t \in [t_0, t_B]$. Par ailleurs

$$(\forall \rho_1 > 0)(\exists \eta_1 \leq \eta)(\forall x_i \in [x_A - \eta_1, x_B - \rho_1], i = 1, 2)$$

$$|x_1 - x_2| < \eta_1 \Rightarrow |h(x_1) - h(x_2)| < \eta/2.$$

Remarquons que cette propriété sera a fortiori vérifiée si l'on diminue η_1 . Considérons alors l'instant t_1 tel que $x^0(t_1) = x_B - \rho_1 - \eta_1$.

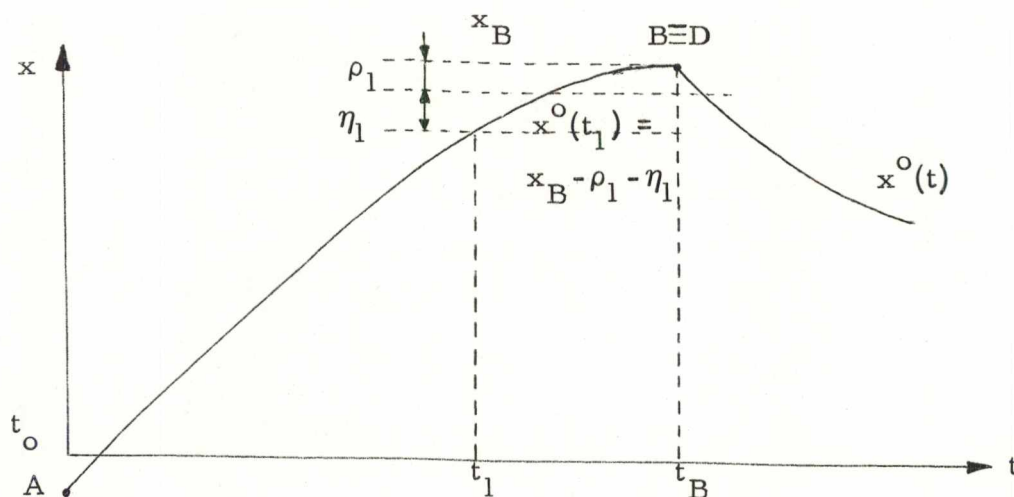


Figure II-7

Il est évident que $t_1 \rightarrow t_B$ si $\rho_1 + \eta_1 \rightarrow 0$. Par ailleurs la construction de l'ensemble M (§ 2) implique que toute solution z^ϵ contenue dans M_{AB} est telle que $y^\epsilon(t) = h(x^\epsilon(t)) + e(t)$ où $|e| < O(\rho)$ [1]. On en déduit que cette solution vérifie dans M_{AB} l'équation

$$\dot{x} = f(x, h(x) + e(t)) \quad y = h(x) + e(t)$$

qui pour $e = 0$ admet la solution

$$z^0 : [t_0, t_1] \rightarrow R^2, \quad t \mapsto z^0(t).$$

On peut dès lors appliquer un théorème de comparaison des solutions d'équations voisines [57].

$$(\forall \eta_1 > 0)(\exists \delta_0 > 0) [|x_A - x_0^\epsilon| < \delta_0, |e| < \delta_0]$$

$$\Rightarrow \{t \in [t_0, t_1], |x^0(t) - x^\epsilon(t)| \geq \eta_1\} = \emptyset$$

et si de plus on choisit $\delta_0 < \frac{\eta}{2}$, $(\forall t \in [t_0, t_1]) |y^0(t) - y^\epsilon(t)|$

$\leq |h(x^0(t)) - h(x^\epsilon(t))| + |e(t)| < \eta$. D'autre part, il est évident

$(\exists \delta > 0)(\forall z_0^\epsilon \in B(z_A, \delta), z_0^\epsilon \in M_{AB} \text{ et } |x_0^\epsilon - x_A| < \delta_0)$. Dès lors

$$(\exists \delta > 0)(\forall z_0^\epsilon \in B(z_A, \delta)) \{t \in [t_0, t_1], \|z^0(t) - z^\epsilon(t)\| \geq \eta\} = \emptyset.$$

Remarquons que l'on peut diminuer ρ_1 et η_1 un nombre fini de fois ce qui a pour effet de modifier δ mais ne met pas le résultat en défaut.

[1] Dans la suite $O(\rho)$ représentera une fonction scalaire continue, telle que $O(\rho) \rightarrow 0$ si $\rho \rightarrow 0$. De plus on admet l'abus d'écriture qui consiste à noter $O(\rho)$ toute fonction ayant cette propriété.

L'étude des sauts effectuée au §3, montre qu'après un temps $T < O(\rho_1 + \eta_1 + \epsilon)$, la solution $z^\epsilon(t)$ atteint un voisinage du point D. Par ailleurs un raisonnement analogue à celui effectué ci-dessus prouve que

$$(\exists \delta_2 > 0) \quad [|t_D - t_2| < \delta_2, \quad |x_D - x_0^\epsilon| < \delta_2, \quad |e| < \delta_2]$$

$$\Rightarrow \{ t \in [t_D + \delta_2, t_3] \mid \|z^0(t) - z^\epsilon(t)\| \geq \eta \} = \emptyset$$

où t_3 est l'analogue de t_1 et tend vers t_E . Dès lors on peut choisir $\rho_1 < \delta_2$ de sorte que la construction de l'ensemble S (§3) implique

$$\exists t_2 \in [t_1, t_1 + T] : |x_D - x^\epsilon(t_2)| < \delta_2, \quad z^\epsilon(t_2) \in M_{DE}. \text{ On vérifie}$$

$$\text{alors que } |t_2 - t_D| < |t_2 - t_1| + |t_1 - t_D| < T + |t_1 - t_B| < O(\rho_1 + \eta_1 + \epsilon) < \delta_2$$

Considérant la solution ADE on a donc

$$(\exists \delta > 0)(\forall z_0^\epsilon \in B(z_A, \delta)) \{ t \in [t_0, t_1] \cup [t_2, t_3], \quad \|z^0(t) - z^\epsilon(t)\| \geq \eta \} = \emptyset$$

De plus si $\rho_1 + \eta_1 + \epsilon$ ont été choisi assez petit

$$|t_2 - t_1| < O(\rho_1 + \eta_1 + \epsilon) < \sigma/2$$

En procédant de la même manière pour les divers segments de l'orbite on démontre ainsi la μ -consistance complète en t_0 de z^0 . En fait cette consistance est uniforme, et si la solution z^0 est continue, le raisonnement que nous avons fait prouve la consistance complète de z^0 .

6. Notes

La construction d'une région M positivement invariante contenant l'orbite étudiée est due à D. FLANDERS et J. STOKER [15] pour le cas d'un oscillateur de van der Pol et à J. LASALLE [38] pour des cas plus généraux. Ces auteurs s'intéressent aux solutions z^0 périodiques. Dans ce cas l'ensemble M est un anneau fermé ne contenant pas de points singuliers. Il est dès lors immédiat qu'il contient au moins une solution périodique.

Par ailleurs, notons que la méthode démonstration utilisée dans ce chapitre se retrouver de façon plus analytique dans D. V. ANOSOV [1] et N. LEVINSON [43].

CHAPITRE III

CRITERES DE CONSISTANCE

1. Introduction

Considérons le système complet

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(t, x, y, \epsilon) \\ \epsilon \dot{y} &= g(t, x, y, \epsilon) \end{aligned} \quad (1.1)$$

introduit au chapitre I, et une solution z^0 du problème réduit associé. En vertu de la proposition I-8 (ch. I-4) on sait que si z^0 est dérivable, il n'y a pas de perte de généralité à supposer $z^0 \equiv 0$. Dans ce chapitre nous étudierons les propriétés de consistance de l'origine ($z^0 \equiv 0$) en faisant usage de fonctions auxiliaires $v : I \times \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$ continues. On appelle semi-dérivée supérieure de la fonction $v(t, z)$ par rapport à (1.1) une fonction $v^* : I \times \Omega^* \rightarrow \mathbb{R}$ telle que pour toute solution $z^\epsilon(t)$ de (1.1)

$$D_- v(t, z^\epsilon(t)) \leq v^*(t, z^\epsilon(t))$$

où $D_- v(t, z^\epsilon(t))$ est la dérivée de Dini inférieure à gauche.

$$D_- v(t, z^\epsilon(t)) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \inf \frac{1}{h} [v(t+h, z^\epsilon(t+h)) - v(t, z^\epsilon(t))]]$$

On définit de façon similaire une semi-dérivée inférieure par la relation

$$D_- v(t, z^\epsilon(t)) \geq v_*(t, z^\epsilon(t)).$$

Dans la suite nous supposons l'existence de ces semi-dérivées.

Pour cela il suffit par exemple que v soit dérivable au sens de Fréchet.

On a alors $v^*(t, z) = v_*(t, z) = dv(t, z) \cdot (1, f(t, z, \epsilon), \frac{1}{\epsilon} g(t, z, \epsilon))$, où

$dv(t, z)$ est la dérivée de Fréchet de v au point (t, z) . En effet, on a

$$\lim \|v(t+h, x+h f(t, z, \epsilon), y + \frac{h}{\epsilon} g(t, z, \epsilon)) - v(t, z) - dv(t, z), h(1, f(t, z, \epsilon), \frac{1}{\epsilon} g(t, z, \epsilon)) \| = 0$$

et donc

$$\begin{aligned} v^*(t, z) &= v_*(t, z) = D_- v(t, z) \\ &= \lim_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} (v(t+h, x+h f(t, z, \epsilon), y + \frac{h}{\epsilon} g(t, z, \epsilon)) - v(t, z)) \\ &= dv(t, z) \cdot (1, f(t, z, \epsilon), \frac{1}{\epsilon} g(t, z, \epsilon)) \end{aligned}$$

D'autres conditions moins triviales d'existence de semi-dérivées sont données par V.M. MATROSOV [44].

Sauf mention contraire, il sera essentiel de supposer dans la suite que les solutions de (1.1) existent soient déterminées de façon unique par les conditions initiales t_0, z_0 , en dépendent continûment et soient prolongeables jusqu'à la frontière de Ω ou jusqu'à l'infini.

2. Lemmes

Les résultats exposés dans ce § sont les théorèmes préparatoires utilisés dans la méthode de Wazewski [75]. En ce sens, ce chapitre peut être considéré comme l'application des principes de cette méthode au problème de la consistance.

Considérons un ouvert $T \subset I \times \Omega$. Un point $(t_0, z_0) \in \text{fr} T \cap (I \times \Omega)$ est appelé un point de sortie de T par rapport au système (1.1) si la solution $z(t; t_0, z_0, \epsilon)$ est telle $(\exists \tau > 0)(\forall t \in [t_0 - \tau, t_0[, (t, z(t)) \in T$. Un point de sortie sera un point de sortie strict si $(\exists \tau > 0)(\forall t \in]t_0, t_0 + \tau[, (t, z(t)) \notin \bar{T}$. On notera E l'ensemble des points de sortie de T et E_s l'ensemble des points de sortie stricts. Une application $\pi : S_1 \rightarrow S_2 \subset S_1$ est une rétraction, si elle est continue et telle que sa restriction à

S_2 est l'identité. Soit $G = \{ (t_0, z_0) \in T : (\exists t_1 \geq t_0), (t_1, z(t_1; t_0, z_0)) \in E \}$

On définit ensuite l'application $\pi: G \cup E \rightarrow E$ par les relations $\pi(t_0, z_0) = (t_0, z_0)$ si $(t_0, z_0) \in E$ et si $(t_0, z_0) \notin E$, $\pi(t_0, z_0) = (t_1, z_1)$, où (t_1, z_1) est le premier point de sortie de T le long de la trajectoire $(t, z(t))$ déterminé par (t_0, z_0) .

LEMME 1. Si $E = E_s$, alors π est une retraction de $G \cup E \rightarrow E$.

Démonstration. Il suffit de prouver la continuité de π . Soit tout d'abord $(t_0, z_0) \in G$ et $(t_1, z_1) = \pi(t_0, z_0)$. Considérons une suite (t^n, z^n) tendant vers (t_0, z_0) et prouvons $\pi(t^n, z^n) \rightarrow (t_1, z_1)$. Soit τ assez petit pour que 1) la trajectoire $\{ (t, z(t)) : t \in [t_1 - \tau, t_1 + \tau] \}$ ait un diamètre inférieur à η , 2) la trajectoire $\{ (t, z(t)) : t \in [t_0 - \tau, t_0] \}$ soit dans G et 3) le point $(t_1 + \tau, z(t_1 + \tau)) \in (I \times \Omega) \setminus \bar{T}$. Pour n assez grand, $t^n \in [t_0 - \tau, t_1 - \tau]$ et la continuité par rapport aux conditions initiales implique que

$\{ (t, z(t; t^n, z^n)) : t \in [t_0 - \tau, t_1 - \tau] \}$ est dans G . Par ailleurs pour n assez grand $(t_1 + \tau, z(t_1 + \tau; t^n, z^n)) \in (I \times \Omega) \setminus \bar{T}$. On en déduit que $\pi(t^n, z^n) \in \{ (t, z(t; t^n, z^n)) : t \in [t_1 - \tau, t_1 + \tau] \}$ qui, pour n assez grand est dans un η -voisinage de $\{ (t, z(t)) : t \in [t_1 - \tau, t_1 + \tau] \}$. On en déduit tout de suite que pour n assez grand $d(\pi(t^n, z^n), (t_1, z_1)) < 2\eta$ et donc $\pi(t^n, z^n) \rightarrow (t_1, z_1)$.

Soit ensuite $(t_0, z_0) \in E = E_s$. Comme ci-dessus $\exists \tau > 0$

tel que 1° $\forall t \in [t_0 - \tau, t_0]$, $(t, z(t)) \in G$, 2) $\forall t \in]t_0, t_0 + \tau]$,

$(t, z(t)) \in (I \times \Omega) \setminus \bar{T}$ et 3) $\{ (t, z(t)) : t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau] \}$ à un diamètre inférieur à η . Ensuite pour n assez grand 1° $t_n \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]$,

2° $(t_0 - \tau, z(t_0 - \tau; t^n, z^n)) \in G$, 3° $(t_0 + \tau, z(t_0 + \tau; t^n, z^n)) \in (I \times \Omega) \setminus \bar{T}$ et 4°

$\{(t, z(t; t_0^n, z_0^n)) : t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]\}$ est dans un η voisinage de $\{(t, z(t)), t \in [t_0 - \tau, t_0 + \tau]\}$. D'où l'on déduit comme ci-dessus que $\pi(t^n, z^n) \rightarrow (t_0, z_0)$. CQFD.

LEMME 2. Soit $u(t, z)$ et $v(t, z)$ des fonctions réelles continues définies sur $I \times \Omega$. Considérons les ensembles

$$T = \{(t, z) : u < r, v < r\},$$

$$U = \{(t, z) : u = r, v \leq r\},$$

$$V = \{(t, z) : u \leq r, v = r\},$$

où $r \in \mathbb{R}$, et supposons

$$u_*(t, z) > 0, \quad (t, z) \in U,$$

$$v_*(t, z) < 0, \quad (t, z) \in V.$$

Alors π est une retraction de $G \cup E$ dans $E = U \setminus V$.

Démonstration. En vertu du lemme 1, il suffit de démontrer $E = E_s = U \setminus V$.

On vérifie tout d'abord que $E_s \subset E \subset \text{fr } T \cap (I \times \Omega) \subset U \cup V$. De plus $E \cap V = \emptyset$ puisque si $(t_0, z_0) \in V$ alors $D_- v(t, z) < 0$ c-à-d $(\forall \tau < 0)(\exists t_1 \in [t_0 - \tau, t_0[) v(t_1, z^\epsilon(t_1)) > r$. On en déduit que $(t_0, z_0) \notin E$ et donc $E_s \subset E \subset U \setminus V$.

Démontrons ensuite qu'il n'y a pas de points $(t_0, z_0) \in (U \setminus V) \setminus E$.

Sinon, puisque $\{(t, z), v < r\}$ est ouvert,

$$(\exists \eta > 0) B((t_0, z_0), \eta) \subset \{(t, z), v < r\}.$$

De plus, puisque $z(t; t_0, z_0, \epsilon)$ est continue, $(\exists \tau_1 > 0)$

$(\forall t \in [t_0 - \tau_1, t_0[), z^\epsilon(t) \in B((t_0, z_0), \eta)$. Enfin, puisque $(t_0, z_0) \notin E$,

$(\forall \tau > 0, \tau < \tau_1)(\exists t_1 \in [t_0 - \tau, t_0[) (t_1, z(t_1)) \notin T$ et dès lors $v(t_1, z^\epsilon(t_1)) < r$,

$u(t_1, z^\epsilon(t_1)) \geq r$. On en déduit $D_- u(t_0, z_0) \leq 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

Montrons finalement que $(\forall (t_0, z_0) \in U \setminus V)(\exists \tau > 0)(\forall t \in]t_0, t_0 + \tau])$
 $z^\epsilon(t) \notin \bar{T}$, et donc $U \setminus V = E = E_s$. En effet, puisque $U \setminus V$ est ouvert dans U ,
 $(\exists \eta > 0)(\forall (t, z) \in B((t_0, z_0), 2\eta) \cap \text{fr } T)(t, z^\epsilon(t)) \in U \setminus V$.

Ensuite, puisque z^ϵ est continue, $(\exists \tau > 0)(\forall t \in]t_0, t_0 + \tau])$
 $(t, z^\epsilon(t)) \in B((t_0, z_0), \eta)$. Finalement si $(t_0, z_0) \notin E_s, (\exists t_1 \in]t_0, t_0 + \tau])$
tel que $z^\epsilon(t_1) \in \bar{T}$. Si de plus $(\forall t_2 \in]t_0, t_1])$, $z^\epsilon(t_2) \notin T$ dans $D_- u(t_1,$
 $z^\epsilon(t_1)) \leq 0$ ce qui est contraire à l'hypothèse. Si par contre,

$(\exists t_2 \in]t_0, t_1])$ tel que $z^\epsilon(t_2) \in T$, alors par continuité en fonction des
conditions initiales, $(\exists z'_0 : (t_0, z'_0) \notin \bar{T})(\forall t \in [t_0, t_2]) \|z(t; t_0, z_0, \epsilon) -$
 $z(t; t_0, z'_0, \epsilon)\| < \min \{ \eta, d(z(t_2; t_0, z_0, \epsilon), U) \}$. Dès lors

$(t, z(t; t_0, z'_0, \epsilon)) \in B((t_0, z_0), 2\eta), (t_0, z'_0) \in \bar{T}$ et $(t_2, z(t_2; t_0, z'_0, \epsilon)) \in T$.

Soit dans $t_3 = \min \{ t \in [t_0, t_2] : (t, z(t; t_0, z'_0, \epsilon)) \in \text{fr } T \}$. En t_3 ,

$D_- u(t_3, z(t_3; t_0, z'_0, \epsilon)) \leq 0$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

CQFD.

LEMME 3. (Théorème de non-rétraction) Soit ω un ouvert borné d'un espace euclidien à k dimensions E^k , et $F : \bar{\omega} \rightarrow E^k$ une fonction continue telle que $\forall z \in \text{fr } \omega, F(z) = z$. Alors $F(\omega) \supset \omega$.

Démonstration. Soit $z_1 \in \omega$ et la fonction $\mathcal{J} : \bar{\omega} \times [0, 1] \rightarrow E^k$,
 $(z, \lambda) \mapsto \mathcal{J}(z, \lambda)$ où $\mathcal{J}(z, \lambda) = z_1 - z + \lambda(z - F(z))$. Il est évident que si
 $z \in \text{fr } \omega, \mathcal{J}(z, \lambda) = z_1 - z \neq 0$, et le degré topologique [59] $d(\mathcal{J}(z, \lambda), \omega, 0)$
peut être défini. Utilisant le principe d'invariance par rapport aux
homotopies $d(z_1 - F(z), \omega, 0) = d(\mathcal{J}(z, 1), \omega, 0) = d(\mathcal{J}(z, 0), \omega, 0) =$
 $d(z_1 - z, \omega, 0) = -1$. Dès lors, il existe $z \in \omega : F(z) = z_1$.

CQFD.

3. Théorèmes fondamentaux

Les résultats de cette section feront usage des hypothèses suivantes établies pour $t_0 \in I$, $r > 0$ et $E_0 > 0$ fixés.

HYPOTHESES H_1 . Soit $Q : Z \rightarrow Z$ un opérateur de projection (linéaire, idempotent et continu) dont l'image soit un euclidien à k -dimensions et $u(t, z, \epsilon)$, $v(t, z, \epsilon)$ des fonctions réelles continues définies sur $I \times \Omega \times]0, E_0]$.

Supposons que T , U et V soient définis comme au lemme 2, et

I a: $u(t, 0, \epsilon) \leq a(\epsilon) + \alpha r$, $t \geq t_0$, $(t, \epsilon) \in I \times]0, E_0]$;

b: $u(t, z, \epsilon) = u(t, Qz, \epsilon) \geq b(\|Qz\|)$,
 $t \geq t_0$, $(t, z, \epsilon) \in I \times \Omega \times]0, E_0]$;

c: $u_*(t, z, \epsilon) > 0$, $t \geq t_0$, $(t, z, \epsilon) \in U \times]0, E_0]$;

II a: $v(t_0, z, \epsilon) \leq a(\epsilon + \|z - Qz\|) + \alpha r$,

$(z, \epsilon) \in \Omega \times]0, E_0]$;

b: $v^*(t, z, \epsilon) < 0$, $t \geq t_0$, $(t, z, \epsilon) \in V \times]0, E_0]$;

où a et b sont des fonctions de classe $K^{[1]}$ telles que $b^{-1}(r)$ existe et $\alpha \in]0, 1[$.

Le théorème 1 ci-dessous sera utile pour établir des critères de consistance ou de consistance complète.

THEOREME 1. Supposons que $t_0 \in I$, $r > 0$ et $E_0 > 0$ soient tels que les hypothèses H_1 soient satisfaites. Alors

$(\exists \epsilon_0 > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\forall z^* \in B(0, \delta) : Qz^* = 0)$

$(\exists z_0^\epsilon = Qz_0^\epsilon + z^*)(\forall t \geq t_0, t \in J)(t, z^\epsilon(t)) \in T.$

[1] Une fonction $a : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ est de classe K si elle est continue, strictement croissante et telle que $a(0) = 0$.

Démonstration. Choisissons $\epsilon_0 > 0$ et $\delta > 0$ tels que $a(\epsilon_0 + \delta) < (1 - \alpha)r$.

En utilisant les hypothèses H_1 -Ia et IIa, on a :

$$(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0) (\forall z^* \in B(o, \delta) : Q z^* = o) (\forall z : Qz + z^* \in \Omega)$$

$$(\forall t \geq t_0, t \in I)$$

$$(i) \quad u(t, z^*, \epsilon) = u(t, o, \epsilon) < r,$$

$$(ii) \quad v(t_0, Qz + z^*, \epsilon) \leq a(\epsilon + \|z^*\|) + \alpha r < r.$$

Fixons ϵ et z^* et supposons par l'absurde que

$$(\forall z_0^\epsilon = Q z_0^\epsilon + z^*) (\exists t \geq t_0, t \in J) (t, z^\epsilon(t)) \notin T.$$

Il s'en suit que l'application π introduite au lemme 2 est définie sur

$\bar{\omega}$, où $\omega = \{z : z = Qz + z^*, u(t_0, z, \epsilon) < r\}$. [Remarquons que $\bar{\omega} \subset T \subset U$ puisque $(\forall z \in \omega) v(t_0, z, \epsilon) \leq a(\epsilon + \|z^*\|) + \alpha r < a(\epsilon_0 + \delta) + \alpha r < r.$]

De plus ω est un ouvert par rapport à $E^k = \{z \in Z : z = Qz + z^*\}$ qui est un euclidien à k dimensions. Soit $\pi_t(t, z)$ et $\pi_z(t, z)$ les composantes temporelles et spatiales de $\pi(t, z)$ et définissons l'application continue

$$F : \bar{\omega} \rightarrow E^k, z \mapsto Q \pi_z(t_0, z) + z^*$$

On déduit de (i) que $z^* \in \omega \neq \emptyset$ et de H_1 - Ib que ω est borné. Ensuite, en utilisant la définition de ω et (ii), on voit que $(\forall z_0 \in \text{fr } \omega) (t_0, z_0) \in U \setminus V$.

Dès lors en vertu du lemme 2, $\pi_z(t_0, z_0) = z_0$ et $F(z_0) = Q \pi_z(t_0, z_0) + z^* = Q z_0 + z^* = z_0$. On peut alors appliquer le lemme 3, de sorte

que $F(\omega) \supset \omega$. En particulier $z^* \in F(\omega)$, c.à.d. $(\exists z_0 \in \omega)$

$F(z_0) = Q \pi_z(t_0, z_0) + z^* = z^*$. Ceci implique que $Q \pi_z(t_0, z_0) = o$ et

que $u(\pi_t(t_0, z_0), \pi_z(t_0, z_0), \epsilon) = u(\pi_t(t_0, z_0), o, \epsilon) < r$. Dès lors

$\pi(t_0, z_0) \notin U \setminus V$, ce qui contredit le lemme 2.

CQFD.

Les propriétés de consistance uniforme et de consistance complète uniforme pourront être étudiées à partir du

THEOREME 2. Supposons $r > 0$, $E_0 > 0$ tels que pour tout $t_0 \in I$, les hypothèses H_1 soient satisfaites, a , b et α étant indépendants de t_0 . Alors

$$(\exists \epsilon_0 > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\forall t_0 \in I)(\forall z^* \in B(0, \delta) : Q z^* = 0)$$

$$(\exists z_0^\epsilon = Q z_0^\epsilon + z^*)(\forall t \geq t_0, t \in J) (t, z^\epsilon(t)) \in T$$

La démonstration de ce théorème est une répétition de la démonstration du théorème 1 et dès lors sera omise.

Remarquons que ces théorèmes sont démontrés pour $Q \equiv 0$ mais pas pour Q égal à l'identité, sauf si Z est de dimension finie. Dans ce deuxième cas, la difficulté réside dans le fait que le théorème de non-rétraction n'est pas applicable à des espaces de dimension infinie. $\leq$ Un contre-exemple est fourni par l'application $F : \ell_2 \rightarrow \ell_2$,
 $(z_1, \dots, z_n, \dots) \mapsto ((1 - \sum_{i=1}^{\infty} z_i^2)^{1/2}, z_2, \dots, z_n, \dots)$ qui est continue et telle que si $\|z\| = 1$, $F(z) = z$. Il est par ailleurs évident que $F(B(0, 1)) = \{z : \|z\| = 1\} \not\subset B(0, 1)$.

4. Théorèmes de consistance.

Les théorèmes de la section 3 démontrent que certaines solutions sont confinées dans un ensemble $T = \{ (t, z) : u < r, v < r \}$ pour tout $t \geq t_0$, $t \in J$. Si cette propriété est vraie pour tout $r : 0 < r \leq r_0$ et si de plus la fonction $w = \max(u, v)$ est définie positive, alors pour toute boule $B(0, \eta)$ il existe $r > 0$ tel que $T \subset I \times B(0, \eta)$, et dès lors il existe au moins une solution qui demeure pour tout $(t \geq t_0, t \in J)$ dans $B(0, \eta)$. Ce raisonnement mène au

THEOREME 3. Soit $t_0 \in I$, $r_0 > 0$ fixés, et supposons qu'il existe une fonction c de classe K et telle que :

1° $(\forall r : 0 < r \leq r_0)(\exists E_0 : 0 < E_0 \leq E)$ tel que les hypothèses H_1 soient satisfaites ;

2° $w(t, z^\epsilon) = \max(u, v) \geq c(\|z\|)$.

Alors $(\forall \eta < 0)(\exists \epsilon_0 > 0)(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\exists z_0^\epsilon \in \Omega)(\forall t \geq t_0, t \in J)$
 $z(t; t_0, z_0^\epsilon, \epsilon) \in B(0, \eta)$ c.à.d. que l'origine est consistante en t_0 .

Démonstration. Soit η fixé. Posons $r < \min [c(\eta), r_0]$. Par hypothèse, il existe $E_0 > 0$ tel que les hypothèses H_1 soient satisfaites. En utilisant le théorème 1, on obtient alors

$$(\exists \delta_0 > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\forall z^* \in B(0, \delta) : Q z^* = 0) \\
(\exists z_0^\epsilon = Q z_0^\epsilon + z^*)(\forall t \geq t_0, t \in J)(t, z^\epsilon(t)) \in T,$$

ce qui implique

$$c(\|z^\epsilon(t)\|) \leq w(t, z^\epsilon(t), \epsilon) \leq r < c(\eta)$$

et puisque c est une fonction de classe K , $\|z^\epsilon(t)\| < \eta$.

On en déduit le théorème en choisissant par exemple $z^* = 0$, et en faisant usage de la proposition I-2

CQFD.

En utilisant le même raisonnement on obtient

COROLLAIRE 1. Supposons $t_0 \in I$ et $E_0 > 0$ fixés. Soit $v(t, z, \epsilon)$ une fonction réelle, continue, définie sur $I \times B(0, \rho) \times]0, E_0]$, et telle que

$$a: v(t_0, z, \epsilon) \leq a(\epsilon + \|z\|), (z, \epsilon) \in \Omega \times]0, E_0];$$

$$b: (\forall r > 0) v^*(t, z, \epsilon) < 0, t \geq t_0, (t, z, \epsilon) \in V \times]0, E_0];$$

$$c: v(t, z, \epsilon) \geq c(\|z\|), t \geq t_0, (t, z, \epsilon) \in \Omega \times]0, E_0];$$

où a et c sont des fonctions de classe K . Alors l'origine est complètement consistante en t_0 .

Démonstration. Les hypothèses H_1 sont satisfaites pour $Q \equiv 0$.
On en déduit comme ci-dessus

$$(\forall \eta > 0) (\exists \epsilon_0 > 0) (\exists \delta > 0) (\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0) (\forall z^* \in B(0, \delta) : Q z^* = 0) \\ (\exists z_0^\epsilon = Q z_0^\epsilon + z^* = z^*) (\forall t \geq t_0, t \in J) \|z^\epsilon(t)\| < \eta,$$

ce qui est le résultat cherché puisque $Q \equiv 0$.

CQFD.

Un théorème de consistance uniforme se déduit de façon analogue au théorème 2.

THEOREME 4. Soit $r_0 > 0$ fixé. Supposons qu'il existe une fonction c de classe K telle que:

1° $(\forall r : 0 < r \leq r_0) (\exists E_0 : 0 < E_0 \leq E) (\forall t_0 \in I)$ les hypothèses

H_1 sont satisfaites, a , b et α étant indépendants de t_0 ;

2° $w(t, z, \epsilon) = \max(u, v) \geq c(\|z\|)$.

Alors l'origine est uniformément consistante.

Tout comme pour le théorème 3, on peut énoncer un corollaire relatif à la consistance complète uniforme. Cependant, on peut améliorer ces résultats en remarquant que si $Q \equiv 0$, la méthode que nous utilisons n'est rien d'autre qu'une variante de la méthode directe de Liapounov. En utilisant alors les principes de démonstration de cette méthode, on obtient le

THEOREME 5. Soit $v(t, z, \epsilon)$ une fonction continue définie sur $I \times \Omega \times]0, E_0]$ et telle que

a: $v(t_0, z, \epsilon) \rightarrow 0$ si $(z, \epsilon) \rightarrow 0$.

Supposons de plus que $(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq E_0) (\exists t \in I, t \geq t_0) (\forall z \in B(0, \rho))$

b: $v(t, z, \epsilon) \geq b(\|z\|)$;

c: $v^*(t, z, \epsilon) \leq 0$;

où b est une fonction de classe K . Alors l'origine est complètement consistante en t_0 .

Démonstration. Soit η fixé. On peut choisir $\delta > 0$ et $\epsilon_0 > 0$ tels que $\|z_0^\epsilon\| < \delta$ et $\epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0$ impliquent $v(t_0, z_0^\epsilon, \epsilon) < b(\eta)$. Ce choix est possible en vertu de l'hypothèse a. Soit alors $(z_0 : \|z_0\| < \delta)$ et $(\epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)$ fixés. Puisque $D_v \leq 0$, la fonction $v(t, z^\epsilon(t), \epsilon)$ est décroissante et donc $(\forall t \geq t_0, t \in J)$

$$v(t, z^\epsilon(t), \epsilon) \leq v(t_0, z_0^\epsilon, \epsilon) < b(\eta).$$

On en déduit $\|z^\epsilon(t)\| < \eta$.

CQFD.

THEOREME 6. Supposons les hypothèses du théorème 5 satisfaites pour tout $t_0 \in I$. Si de plus $(\forall t \in I)(\forall z \in B(0, \rho)) (\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)$

$$v(t, z, \epsilon) \leq a(\|z\| + \epsilon),$$

où a est une fonction de classe K , alors l'origine est uniformément complètement consistante.

Démonstration. Il n'y a pas de perte de généralité à supposer a inversible. Soit alors $\eta > 0$ fixé et choisissons $\delta = \epsilon_0 = \frac{1}{2} a^{-1}(b(\eta))$. Alors si $(\epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)$ et $(z_0^\epsilon : \|z_0^\epsilon\| < \delta)$, on obtient comme ci-dessus que $(\forall t \geq t_0, t \in J), v(t, z^\epsilon(t), \epsilon) \leq v(t_0, z_0^\epsilon, \epsilon) < a(\delta + \epsilon) \leq b(\eta)$. On en déduit $\|z^\epsilon(t)\| < \eta$.

CQFD.

La principale amélioration qu'apportent les théorèmes 5 et 6 ci-dessus par rapport au corollaire 1 et à son correspondant relatif au théorème 4, réside dans le fait que les semi-dérivées v^* peuvent prendre des valeurs nulles. Un exemple d'application du théorème 6 est fourni par le système mécanique représenté à la figure III-1, et constitué d'une masse M et d'un ressort de masse répartie $\epsilon^2 dr$ et de constante de raideur répartie k/dr .

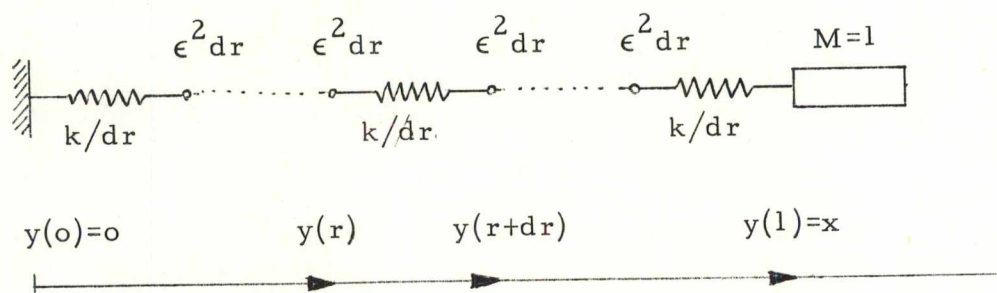


Figure III-1.

Chaque point (r) du ressort est caractérisé par la différence $y(r)$ entre sa coordonnée vraie et sa position de repos. De même le point de masse $M = 1$ est repéré par un écart x . Les équations du mouvement s'écrivent alors

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= -k \left. \frac{\partial y}{\partial r} \right|_{r=1}, \\ \epsilon^2 \ddot{y} &= k \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}, \text{ si } 0 < r < 1, \\ y \Big|_{r=0} &= 0, \quad y \Big|_{r=1} = x. \end{aligned}$$

Si on pose ensuite

$$\begin{aligned} x_1 &= x, \quad x_2 = \dot{x}, \\ y_1 &= \frac{\partial y}{\partial r} - x, \quad y_2 = \epsilon \left(\frac{\partial y}{\partial t} - r x_2 \right), \end{aligned}$$

on obtient le système complet

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= -k \left(y_1 \Big|_{r=1} + x_1 \right) \\ \epsilon \dot{y}_1 &= \frac{\partial}{\partial r} y_2 \\ \epsilon \dot{y}_2 &= k \frac{\partial}{\partial r} y_1 + \epsilon^2 r k \left(y_1 \Big|_{r=1} + x_1 \right) \end{aligned} \tag{3.1}$$

auquel on doit associer les conditions aux limites

$$\begin{aligned} \int_0^1 y_1 dr &= 0 \\ y_2 \Big|_{r=0} &= y_2 \Big|_{r=1} = 0. \end{aligned}$$

Par ailleurs considérons les fonctions $y_1 : r \mapsto y_1(r)$ et $y_2 : r \mapsto y_2(r)$ définies respectivement sur les ensembles de fonctions de carré sommable $Y_1 = \{ y_1 : \int_0^1 y_1^2 dr = 0 \}$ et $Y_2 = \{ y_2 : y_2(0) = y_2(1) = 0 \}$. Dès lors les équations (3.1) peuvent s'interpréter comme des équations définies sur l'espace de Banach $Z = \mathbb{R}^2 \times Y_1 \times Y_2$, les normes des fonctions y_i étant définies par la relation $\| y_i \|^2 = \int_0^1 y_i^2 dr$. Remarquons que le problème réduit est particulièrement facile à obtenir puisque les contraintes

$$0 = \frac{\partial}{\partial r} y_2$$

$$0 = k \frac{\partial}{\partial r} y_1$$

admettent dans $Y_1 \times Y_2$ une solution unique $y_1 = 0, y_2 = 0$. Le problème réduit s'écrit donc

$$\dot{x}_1 = x_2$$

$$\dot{x}_2 = -kx_1$$

$$y_1 = y_2 = 0.$$

La consistance complète uniforme de la solution $z \equiv 0$ peut alors se déduire de la fonction

$$\begin{aligned} v &= k \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + \frac{k}{2} \int_0^1 y_1^2 dr + \frac{1}{2} \int_0^1 (y_2 + \epsilon r x_2)^2 dr, \\ &\geq k \frac{x_1^2}{2} + \frac{1-\epsilon^2 r^2}{2} x_2^2 + \frac{k}{2} \int_0^1 y_1^2 dr + \frac{1}{4} \int_0^1 y_2^2 dr, \end{aligned}$$

dont la dérivée calculée le long des solutions de 3.1 s'écrit

$$v^* = kx_1x_2 - kx_2(y_1)\Big|_{r=1} + x_1 + \frac{k}{\epsilon} \int_0^1 y_1 \frac{\partial y_2}{\partial r} dr$$

$$+ \frac{k}{\epsilon} \int_0^1 (y_2 + \epsilon rx_2) \frac{\partial y_1}{\partial r} dr = 0$$

Ceci montre que pour tout $t_0 \in \mathbb{R}$, la fonction v ci-dessus vérifie toutes les hypothèses du théorème 5. De plus il est évident que

$$v \leq k \frac{x_1^2}{2} + \frac{x_2^2}{2} + \frac{k}{2} \int_0^1 y_1^2 dr + \int_0^1 y_2^2 dr + \frac{\epsilon^2 x_2^2}{3},$$

et dès lors v vérifie aussi les hypothèses du théorème 6. Remarquons finalement qu'il semble nécessaire d'utiliser la variable $y_1 = \frac{\partial y}{\partial r} - x$

plutôt que $\bar{y}_1 = y - rx$. Il est en effet évident que si l'on comprime un élément de ressort assez petit, l'énergie potentielle qu'on peut y accumuler est aussi grande que l'on veut, bien que $\|\bar{y}_1\|$ reste très petit.

Par contre si $\|y_1\|$ est petit l'énergie potentielle accumulée reste petite, ce qui laisse préjuger de ce que le système sera peu perturbé.

Les théorèmes 5 et 6 ci-dessus décrivent la situation extrême où $Q \equiv 0$. On peut dès lors songer à la situation opposée où Q se réduit à l'identité. On obtient ainsi le

THEOREME 7. Soit $u(t, z, \epsilon)$ une fonction continue telle que
 $(\forall t \in I)(\forall z \in B(0, \rho))(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)$

a : $u(t, z, \epsilon) \geq b(\|z\|)$

b : $u(t, z, \epsilon) \leq a(\|z\| + \epsilon)$

c : $u_*(t, z, \epsilon) \geq 0$

où a et b sont des fonctions de classe K . Alors si Z est de dimension finie, l'origine est uniformément consistante.

Démonstration. Soit η fixé. Choisissons $\delta = \epsilon_0 = a^{-1}(b(\frac{\eta}{2}))$.

Pour tout $t_0 \in I$ et $t_i \geq t_0$, le théorème 6 peut être appliqué au même problème après qu'on ait inversé l'axe des temps. Le nouvel instant initial sera t_i , t_0 étant l'instant final. Il suffit de remarquer que $u(t, z^\epsilon(t), \epsilon)$ est une fonction croissante et dès lors $u(-t, z^\epsilon(-t), \epsilon)$ est décroissante.

On en déduit $u^*(-t, z^\epsilon(-t), \epsilon) \leq D_- u(-t, z^\epsilon(-t), \epsilon) \leq 0$. Le théorème 6 implique alors que $(\forall \epsilon: 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\forall z_i^\epsilon \in B(0, \delta))(\forall t \leq t_i, t \in J(t_i, z_i^\epsilon, \epsilon))$
 $\|z^\epsilon(t; t_i, z_i^\epsilon, \epsilon)\| < \frac{\eta}{2}$. De plus par définition de la consistance

$J(t_i, z_i^\epsilon, \epsilon) \supset [t_0, t_i]$. Considérons ensuite une suite (t_i, z_i^ϵ) telle que $t_i \rightarrow \omega = \sup\{t : t \in I\}$ et $z_i^\epsilon \in B(0, \delta)$. Il lui correspond la suite de fonctions $z(t; t_i, z_i^\epsilon, \epsilon)$ définies pour $t \in [t_0, t_i]$ et telle que

$$\forall t \in [t_0, t_i], \quad \|z(t; t_i, z_i^\epsilon, \epsilon)\| \leq \frac{\eta}{2}.$$

La suite $z(t_0; t_i, z_i^\epsilon, \epsilon)$, étant bornée et appartenant à un espace de dimension finie est relativement compacte. Soit z_0^ϵ une de ses valeurs d'adhérence. Dès lors par continuité des solutions en fonction des conditions initiales

$$(\forall t \geq t_0, t \in J(t_0, z_0^\epsilon, \epsilon)) \quad \|z(t; t_0, z_0^\epsilon, \epsilon)\| < \eta.$$

CQFD.

5. La consistance par séparation des variables lentes et rapides.

Les théorèmes de consistance énoncés au § 4, font usage de fonctions auxiliaires u, v dont les dérivées doivent être évaluées le long des solutions du problème complet. En général, il est difficile de trouver ces fonctions, principalement à cause de leur dépendance en ϵ . Le but de cette section est de simplifier la construction de u et v , en utilisant le fait que le système peut être décrit par la juxtaposition successive de mouvements lents et rapides.

Si $\|f(t, z, \epsilon)\| \gg \|g(t, z, \epsilon)\| \simeq 0$, le système complet peut être approximé par le système réduit

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, z, 0) \\ 0 &= g(t, z, 0)\end{aligned}\tag{3.2}$$

Si par contre $\|g(t, z, \epsilon)\| \simeq \|f(t, z, \epsilon)\|$, le coefficient ϵ devant la dérivée $\dot{y}$ implique que $\|y\|$ varie bien plus vite que $\|x\|$. En utilisant la transformation $t = t_0 + \epsilon s$, on peut décrire le mouvement par les équations

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \epsilon f(t_0 + \epsilon s, z, \epsilon) \\ \frac{dy}{ds} &= g(t_0 + \epsilon s, z, \epsilon).\end{aligned}$$

Dès lors pour ϵ petit, on peut approximer le mouvement par les solutions de l'équation des couches limites

$$\frac{dy}{ds} = g(t_0, x_0, y, 0),\tag{3.3}$$

où t_0 et x_0 sont des paramètres constants. Il y correspond un mouvement rapide de la coordonnée y qui pour cette raison est appelée la variable rapide. Par opposition le mouvement de x décrit par (3.2) est lent, et x sera appelée la variable lente. L'idée utilisée dans cette section consiste à construire des fonctions u et v satisfaisant aux théorèmes du §4, à partir de fonctions u_r et v_r dont les semi-dérivées sont évaluées le long des solutions des équations du système réduit (3.2) et des fonctions u_b et v_b dont les semi-dérivées sont évaluées le long des solutions des équations des couches limites (3.3). Pour faciliter le calcul de ces semi-dérivées, nous allons supposer que pour tout $(t, x, 0) \in I \times \Omega$

$$g(t, x, 0, 0) = 0$$

et pour tout $y \neq 0$ tel que $(t, x, y) \in I \times \Omega$

$$g(t, x, y, 0) \neq 0.$$

F.C. HOPPENSTEADT [30] a montré que moyennant un changement de variable cette hypothèse est satisfaite pour une classe assez large de

systèmes. Supposons que l'équation $g(t, x, y, o) = 0$ possède une solution dérivable unique $y = h(t, x)$ et considérons le changement de variables

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x \\ \bar{y} &= y - h(t, x).\end{aligned}\tag{3.4}$$

Le système complet s'écrit alors

$$\dot{\bar{x}} = f(t, \bar{x}, \bar{y} + h(t, \bar{x}), \epsilon)$$

$$\epsilon \dot{\bar{y}} = g(t, \bar{x}, \bar{y} + h(t, \bar{x}), \epsilon) + \epsilon \left[\frac{\partial h}{\partial t}(t, \bar{x}) + \frac{\partial h}{\partial x}(t, \bar{x}) f \right] = b(t, \bar{x}, \bar{y}, \epsilon).$$

On vérifie que $b(t, \bar{x}, \bar{y}, o)$ satisfait aux hypothèses énoncées ci-dessus.

Par ailleurs, le changement de variables (3.4) conserve la consistance si $\|h(t, x)\| \leq K \|x\|$. Il suffit en effet de remarquer ⁽¹⁾

$$\|z\| \leq \max(\|\bar{x}\|, \|\bar{y}\| + K \|\bar{x}\|) \leq (1+K) \|\bar{z}\|,$$

$$\|\bar{z}\| \leq \max(\|x\|, \|y\| + K \|x\|) \leq (1+K) \|z\|$$

Finalement, les hypothèses que nous avons faites permettent d'écrire le système réduit sous la forme

$$\dot{x} = f(t, x, o, o) \tag{3.5}$$

$$y = o$$

Considérons une fonction $u_r : (t, x) \mapsto u_r(t, x)$, localement lipschitzienne en x . On en calcule alors facilement la dérivée de Dini

$$D_-^o u_r(t, x) = \liminf_{h \rightarrow 0^-} \frac{1}{h} [u_r(t+h, x+h(t, x, o, o)) - u_r(t, x)].$$

le long des solutions de (3-5). De même pour une fonction

$u_b : (t, z) \mapsto u_b(t, z)$, localement lipschitzienne en y , on calcule la dérivée de Dini

(1) La norme $\|z\|$ est définie par la relation $\|z\| = \max(\|x\|, \|y\|)$

$$D_-^* u_b(t, z) = \lim_{h \rightarrow 0^-} \inf \frac{1}{h} [u_b(t, x, y, +h g(t, x, y, 0)) - u_b(t, z)]$$

le long des solutions de l'équation des courbes limites (3-3). Dans la suite les semi-dérivées des fonctions u_r et u_b seront relatives respectivement à $D_-^0 u_r$ et $D_-^* u_b$.

Les résultats de cette section se basent sur les hypothèses suivantes, énoncées pour $t_0 \in I$, $r_r > 0$ et $r_b > 0$ fixés.

HYPOTHESES H_2 . Soit $\Omega = \Omega_x \times \Omega_y$, $\Omega_x \subset X$ et $\Omega_y \subset Y$.

Soit $Q_r : X \rightarrow X$ un opérateur de projection dont l'image soit un euclidien à i dimensions, et $u_r(t, x)$, $v_r(t, x)$ des fonctions réelles continues définies sur $I \times \Omega_x$, uniformément lipschitziennes en x (c.à d. qu'il existe $K_r > 0$ tel que $|u_r(t, x_1) - u_r(t, x_2)| \leq K_r \|x_1 - x_2\|$ et $|v_r(t, x_1) - v_r(t, x_2)| \leq K_r \|x_1 - x_2\|$). Supposons que pour tout

$$(t \geq t_0, t \in I)$$

$$I a : u_r(t, 0) \leq \alpha r_r ;$$

$$b : u_r(t, x) = u_r(t, Q_r x) \geq b_r(\|Q_r x\|), x \in \Omega_x ;$$

$$c : u_{r*}(t, x) \geq d_r(r_r), (t, x) \in \{(t, x) : u_r = r_r, v_r \leq r_r\} ;$$

$$II a : v_r(t_0, x) \leq a_r(\|x - Q_r x\|) + \alpha r_r, x \in \Omega_x ;$$

$$b : v_r^*(t, x) \leq -d_r(r_r)$$

$$(t, x) \in \{(t, x) : u_r \leq r_r, v_r = r_r\} ;$$

où a_r , b_r et d_r sont des fonctions de classe K telles que $b_r^{-1}(r_r)$ existe et $\alpha \in [0, 1[$.

Soit encore $Q_b : Y \rightarrow Y$ un opérateur de projection dont l'image soit un euclidien à j dimensions, et $u_b(t, z)$, $v_b(t, z)$ des fonctions réelles lipschitziennes en (t, z) (c.à d. qu'il existe $K_b > 0$ tel que

$|u_b(t_1, z_1) - u_b(t_2, z_2)| \leq K_b (|t_1 - t_2| + \|z_1 - z_2\|)$, $|v_b(t_1, z_1) - v_b(t_2, z_2)| \leq K_b (|t_1 - t_2| + \|z_1 - z_2\|)$ et définies sur $I \times \Omega$. Supposons que pour tout $(t \geq t_0, t \in I)$;

III a : $u_b(t, 0) \leq \alpha r_b$;

b : $u_b(t, z) = u_b(t, Q_r x, Q_b y) \geq b_b(\|Q_b y\|)$, $z \in \Omega$;

c : $u_{b*}(t, z) \geq d_b(r_b)$,

$(t, z) \in \{ (t, z) : u_b = r_b, v_b \leq r_b \}$;

IV a : $v_b(t_0, x, y) \leq a_b(\|(x, y) - (Q_r x, Q_b y)\|) + \alpha r_b$, $z \in \Omega$;

b : $v_b(t, z) \geq b_b(\|y - Q_b y\|)$, $z \in \Omega$;

c : $v_b^*(t, z) \leq -d_b(r_b)$,

$(t, z) \in \{ (t, z) : u_b \leq r_b, v_b = r_b \}$;

où a_b , b_b et d_b sont des fonctions de classe K telles que $b_b^{-1}(r_b)$ existe.

La comparaison des hypothèses H_1 et H_2 montre qu'à de légères modifications près, ces dernières sont la juxtaposition des hypothèses H_1 pour le système réduit (3.5) et l'équation des couches limites (3-3). De plus puisque ϵ n'apparaît pas dans ces équations et puisqu'elles sont d'un ordre inférieur au système complet (1-1), on peut espérer trouver plus facilement les fonctions u, v dans H_2 que dans H_1 . Nous utiliserons aussi des conditions de régularité.

HYPOTHESES H_2' . La fonction f est bornée sur $I \times \Omega \times [0, E_0]$ de sorte que

$$\|f(t, z, \epsilon)\| \leq K_1, \quad K_1 \in \underline{\mathbb{R}}.$$

De plus la fonction f est continue en $\epsilon = 0$, $y = 0$ uniformément en $(t \geq t_0, t \in I)$ et $x \in \Omega_x$ c.à d.

$$\|f(t, x, y, \epsilon) - f(t, x, 0, 0)\| \leq \omega_1(\|y\| + \epsilon)$$

où ω_1 est une fonction de classe K.

LEMME 4. Si u et v sont deux fonctions réelles continues et définies sur I , alors la fonction $\omega = \max(u, v)$ est telle que

$$D_- \omega = D_- u, \text{ si } u > v ;$$

$$D_- \omega = \max(D_- u, D_- v), \text{ si } u = v ;$$

$$D_- \omega = D_- v, \text{ si } u < v.$$

La démonstration de ce lemme est évidente et sera donc omise.

LEMME 5. Si E_0, r_r et r_b sont choisis tels que

$$K_r \omega_1(E_0 + 2 b_b^{-1}(r_b)) - d_r(r_r) < 0$$

$$K_b [(1 + K_1)E_0 + \omega_2(E_0)] - d_b(r_b) < 0,$$

alors les hypothèses H_2 et H'_2 impliquent que les hypothèses H_1 soient satisfaites pour $r = r_r$,

$$u = \max(u_r, r_r u_b / r_b),$$

$$v = \max(v_r, r_r v_b / r_b).$$

Démonstration. Ce lemme est assez évident, sauf peut-être en ce qui concerne les conditions H_1 , Ic et II b. Nous ne démontrerons que le premier de ces deux points, la démonstration du second étant totalement symétrique.

Soit $(t, z, \epsilon) \in U \times]0, E_0]$. Si $u_r(t, x) = r_r \geq r_r u_b(t, z) / r_b$,

$$D_- u \geq D_- u_r = \lim_{h \rightarrow 0^-} \inf \frac{1}{h} [u_r(t+h, x+h f(t, z, \epsilon)) - u_r(t, x)]$$

$$\geq \lim_{h \rightarrow 0^-} \inf \frac{1}{h} [u_r(t+h, x+h f(t, x, 0, 0)) - u_r(t, x)]$$

$$- \lim_{h \rightarrow 0^-} \sup \frac{1}{h} [u_r(t+h, x+h f(t, x, 0, 0)) - u_r(t+h, x+h f(t, x, y, \epsilon))]$$

$$\geq D_-^0 u_r - K_r \|f(t, x, 0, 0) - f(t, x, y, \epsilon)\|$$

$$\geq d_r(r_r) - K_r \omega_1(\|y\| + \epsilon).$$

Or puisque $u_b \leq r_b$, l'hypothèse H_2 III-b implique

$$\|Q_b y\| \leq b_b^{-1}(r_b).$$

Par ailleurs, puisque $(t, z) \in U$, $v \leq r_r$ ou plus particulièrement $v_b \leq r_b$, l'hypothèse H_2 IV.b implique

$$\|y - Q_b y\| \leq b_b^{-1}(r_b)$$

On déduit de ces inégalités que $\|y\| \leq 2b_b^{-1}(r_b)$ et donc

$$D_- u \geq d_r(r_r) - K_r \omega_1(2b_b^{-1}(r_b) + E_0) > 0.$$

Si par contre $u_r(t, x) \leq r_r = r_r u_b(t, z)/r_b$,

$$D_- u \geq D_- r_r u_b / r_b = \frac{r_r}{r_b} \lim_{h \rightarrow 0} \inf \frac{1}{h} [u_b(t+h, x+hf(t, z, \epsilon), y+th \frac{g(t, z, \epsilon)}{\epsilon}) - u_b(t, x, y)]$$

$$D_- u \geq \frac{r_r}{\epsilon r_b} \lim_{h \rightarrow 0^-} \inf \frac{\epsilon}{h} [u_b(t, x, y + \frac{h}{\epsilon} g(t, z, 0)) - u_b(t, x, y)]$$

$$- \frac{r_r}{r_b} \lim_{h \rightarrow 0^-} \sup \frac{1}{h} [u_b(t+h, x+hf(t, z, \epsilon), y + \frac{h}{\epsilon} g(t, z, \epsilon)) - u_b(t, x, y + \frac{h}{\epsilon} g(t, z, \epsilon))]$$

$$\geq \frac{r_r}{\epsilon r_b} [D_-^* u_b - \epsilon K_b (1 + \|f(t, z, \epsilon)\| + \frac{\|g(t, z, \epsilon) - g(t, z, 0)\|}{\epsilon})]$$

$$\geq \frac{r_r}{\epsilon r_b} [d_b(r_b) - K_b (E_0(1+K_1) + \omega_2(E_0))] > 0.$$

Finalement

$$D_- u(t, z, \epsilon) > 0 \text{ si } t \geq t_0, (t, z, \epsilon) \in U \times]0, E_0]. \quad \text{CQFD.}$$

THEOREME 8. Soient $r_0 > 0$ et $t_0 \in I$ fixés. Supposons qu'il existe une fonction c de classe K telle que :

- 1° $(\forall r_r : 0 < r_r \leq r_0)(\forall r_b : 0 < r_b \leq r_0)$ les hypothèses H_2 et H'_2 soient satisfaites, K_r, K_b, b_b, d_b et d_r étant indépendants de r_r et r_b ;
 2° $\omega(t, z) = \max(u_r, u_b, v_r, v_b) \geq c(\|z\|).$

Alors l'origine est consistante en t_0 .

Remarquons que dans ce théorème, les fonctions u_r, u_b, v_r et v_b peuvent avoir pour arguments r_r et r_b .

Démonstration. Soit η fixé. Choisissons $(r_r : 0 < r_r < \min(c(\eta), r_0))$, $(r_b : 0 < r_b < \min(c(\eta), r_0))$ et $(E_0 : 0 < E_0 \leq E)$ tels que

$$K_r \omega_1(E_0 + 2 b_b^{-1}(r_b)) - d_r(r_r) < 0$$

$$K_b [(1 + K_1)E_0 + \omega_2(E_0)] - d_b(r_b) < 0.$$

Remarquons que puisque l'on peut choisir r_b aussi petit que l'on veut, la fonction b_b ne doit pas être inversible sur tout le demi-axe positif $\mathbb{R}_m^+$. En utilisant ensuite le lemme 2 et le théorème 1, on obtient

$$(\exists \epsilon_0 > 0)(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\exists z_0^\epsilon \in \Omega)(\forall t \geq t_0, t \in J)(t, z^\epsilon(t)) \in T \text{ c.à d.}$$

$\max(u_r, v_r) < r_r$ et $\max(u_b, v_b) < r_b$. Alors

$$c(\|z\|) \leq \omega(t, z) \leq \max(r_r, r_b) < c(\eta)$$

et puisque c est une fonction de classe K , $\|z\| < \eta$. CQFD.

Le même raisonnement utilisant le théorème 2 au lieu du théorème 1, permet de démontrer le

THEOREME 9. Si les hypothèses du théorème 8 sont satisfaites pour tout $t_0 \in I$, a_r, a_b, b_r, b_b et α étant indépendants de t_0 , alors l'origine est uniformément consistante.

En utilisant les projecteurs $Q_r = 0$ et $Q_b = 0$ on peut obtenir, tout comme au corollaire 1, des théorèmes de consistance complète.

COROLLAIRE 2. Si les hypothèses du théorème 8 sont satisfaites avec $Q_r = 0$, $Q_b = 0$, alors l'origine est complètement consistante en t_0 .

COROLLAIRE 3. Si les hypothèses du théorème 9 sont satisfaites avec $Q_r = 0$, $Q_b = 0$, alors l'origine est uniformément complètement consistante.

6. Exemples.

C. CARATHEODORY [5] a étudié le mouvement d'un traineau (traîneau de Chaplguine) auquel correspond les équations

$$\begin{aligned}\dot{u}_1 &= v \\ \dot{u}_2 &= au_1^2 + \epsilon u_1 v \\ \epsilon \dot{v} &= -ak^2 v - u_2 u_1,\end{aligned}\tag{3.6}$$

où a est en général positif, $k \neq 0$ et $(u_1, u_2, v) \in \mathbb{R}^3$. Dans le but de normaliser ces équations, posons $\bar{u}_1 = u_1/k$, $\bar{u}_2 = u_2/ak^2$ et $\bar{v} = v/k$. Le système (3.6) devient alors

$$\begin{aligned}\dot{\bar{u}}_1 &= \bar{v} \\ \dot{\bar{u}}_2 &= \bar{u}_1^2 + \frac{\epsilon}{a} \bar{u}_1 \bar{v} \\ \epsilon \dot{\bar{v}} &= -ak^2 (\bar{v} + \bar{u}_1 \bar{u}_2).\end{aligned}\tag{3.7}$$

Il y correspond le système réduit

$$\begin{aligned}\dot{\bar{u}}_1 &= -\bar{u}_1 \bar{u}_2 \\ \dot{\bar{u}}_2 &= \bar{u}_1^2,\end{aligned}$$

dont la solution générale s'écrit

$$\begin{aligned}\bar{u}_1^0 &= \alpha / \operatorname{ch} \alpha(t-\beta) \\ \bar{u}_2^0 &= \alpha \operatorname{th} \alpha(t-\beta).\end{aligned}\tag{3.8}$$

Le plan de phase correspondant est représenté à la figure III-2

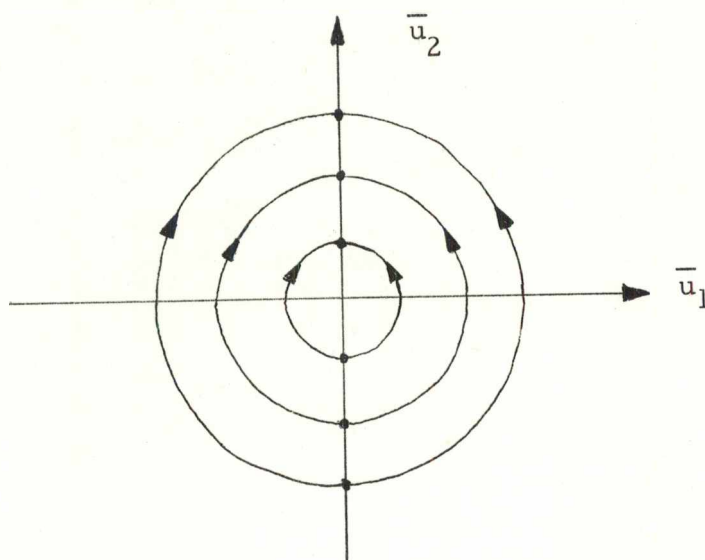


Fig.III-2.

Pour étudier les propriétés de consistance de la solution (3.8), nous utiliserons la transformation de variables

$$x_1 = \bar{u}_1 - \alpha / \operatorname{ch} \alpha(t-\beta)$$

$$x_2 = \bar{u}_2 - \alpha \operatorname{th} \alpha(t-\beta)$$

$$y = \bar{v} + \bar{u}_1 \bar{u}_2.$$

Le système (3.7) s'écrit alors

$$\dot{x}_1 = y - x_1 x_2 - \alpha x_1 \operatorname{th} \alpha(t-\beta) - \alpha x_2 / \operatorname{ch} \alpha(t-\beta)$$

$$\dot{x}_2 = x_1^2 + 2 \alpha x_1 / \operatorname{ch} \alpha(t-\beta)$$

$$+ \frac{\epsilon}{a} (x_1 + \alpha / \operatorname{ch} \alpha(t-\beta)) [y - (x_1 + \alpha / \operatorname{ch} \alpha(t-\beta))(x_2 + \alpha \operatorname{th} \alpha(t-\beta))]]$$

$$\epsilon \dot{y} = -ak^2 y + \epsilon \frac{d}{dt} (x_1 + \alpha / \operatorname{ch} \alpha(t-\beta))(x_2 + \alpha \operatorname{th} \alpha(t-\beta)),$$

le système réduit correspondant

$$\dot{x}_1 = -x_1 x_2 - \alpha x_1 \operatorname{th} \alpha(t-\beta) - \alpha x_2 / \operatorname{ch} \alpha(t-\beta)$$

$$\dot{x}_2 = x_1^2 + 2 \alpha x_1 / \operatorname{ch} \alpha(t-\beta),$$

et l'équation des couches limites

$$\frac{dy}{ds} = -ak^2 y.$$

On vérifie sans peine que dans l'espace (x_1, x_2, y) , ces équations satisfont aux hypothèses générales (p.49, p.63) d'applicabilité des théorèmes énoncés ci-dessus. De plus, si $\Omega = B(0, \rho)$, les hypothèses H'_2 sont trivialement vérifiées. Ensuite si la solution (3.8) est définie sur un intervalle fini $I =]\tau, \omega[$, et si $a > 0$, $a \neq 0$, les hypothèses H_2 seront satisfaites uniformément en t_0 , pour:

$$Q_r = 0, \quad v_r = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \exp - 6 |\alpha| t,$$

$$Q_b = 0, \quad v_b = \frac{1}{2} y^2.$$

En effet

$$\frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) e^{-6 |\alpha| \omega} \leq v_r \leq \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) e^{-6 |\alpha| \tau}$$

$$\dot{v}_r^* = \dot{v}_r = - |\alpha| [(3 + \tanh \alpha(t-\beta)) x_1^2 + x_1 x_2 / \cosh \alpha(t-\beta) + 3 x_2^2] e^{-6 |\alpha| t}$$

$$\leq - |\alpha| [2 x_1^2 + x_1 x_2 / \cosh \alpha(t-\beta) + 3 x_2^2] e^{-6 |\alpha| t}$$

$$\leq - |\alpha| [(x_1^2 + x_2^2) + (x_1^2 + x_1 x_2 / \cosh \alpha(t-\beta) + x_2^2 / 4 \cosh^2 \alpha(t-\beta))]$$

$$\leq - 2 |\alpha| v_r.$$

où le signe supérieur correspond au cas où $\alpha > 0$ et le signe inférieur au cas où $\alpha < 0$, et

$$\dot{v}_b^* = \dot{v}_b = - 2 a k^2 v_b.$$

Par ailleurs si $a < 0$, $a \neq 0$, les hypothèses H_2 seront satisfaites uniformément en t_0 pour

$$Q_r = 0, \quad v_r = \frac{1}{2} (x_1^2 + x_2^2) \exp - 6 |\alpha| t$$

$$Q_b = 1, \quad u_b = \frac{1}{2} y^2.$$

En utilisant alors le théorème 9 ou le corollaire 2, on établit que si la solution considérée est définie sur un intervalle fini, si $a \neq 0$ et si $a > 0$, cette solution est uniformément complètement consistante; si par contre $a < 0$, elle est uniformément consistante.

Remarquons que ce résultat est incomplet. En effet, il est quasi évident qu'il s'étend à des solutions définies sur un intervalle infini. En considérant la figure III-2, on voit que la solution (3.8) approche un point singulier $(\bar{u}_{1\infty}, \bar{u}_{2\infty}) = (0, \alpha)$, auquel correspond pour le système complet un point singulier stable $\bar{\omega}_{\infty} = (\bar{u}_{1\infty}, \bar{u}_{2\infty}, \bar{v}_{\infty}) = (0, \alpha, 0)$.

Donc après un temps fini T , toutes les solutions $z^{\epsilon}(\cdot)$ qui interviennent dans la définition de la consistance complète, atteignent une boule $B(\bar{\omega}_{\infty}, \delta_1)$. Et puisque $\bar{\omega}_{\infty}$ est stable, elles demeurent dans une boule $B(\bar{\omega}_{\infty}, \delta_2)$. Dès lors si T , δ_1 et δ_2 ont été bien choisis, on peut en déduire $\forall t \geq T, \|z^{\epsilon}(t) - z^0(t)\| < \eta$. Il est cependant impossible de trouver une fonction v_r satisfaisant aux hypothèses du corollaire 2. En effet $(\bar{u}_{1\infty}, \bar{u}_{2\infty})$ est un point singulier stable mais pas attracteur. Or s'il existait une fonction $v_r(t, x)$ telle que

$$a_r(\|x\|) \geq v_r \geq c_r(\|x\|)$$

$$\dot{v}_r \leq -d_r(v_r)$$

$(\bar{u}_{1\infty}, \bar{u}_{2\infty})$ serait uniformément asymptotiquement stable.

On peut encore remarquer que les points singuliers du problème réduit sont aussi points singuliers du problème complet. Dès lors la consistance uniforme de ces solutions est évidente même si I est un intervalle infini.

Cet exemple illustre l'une des limites d'application des théorèmes énoncés ci-dessus. D'autres limitations à la portée de ces théorèmes peuvent être mises en lumière par la considération du système complet

$$\epsilon^m u^{(n+m)} + u^{(n)} + \lambda_{n-1} u^{(n-1)} + \dots + \lambda_1 u' + \lambda_0 u = 0. \quad (3.9)$$

où $u \in \mathbb{R}$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Etudions une solution u^0 du problème réduit correspondant. Soit tout d'abord une matrice régulière T d'ordre m telle que

$$T \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ -1 & & & 0 \end{bmatrix} T^{-1} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_+ & 0 \\ 0 & \tilde{D}_- \end{bmatrix},$$

où $\tilde{D}_+ + \tilde{D}_+^T$ est une matrice définie semi-positive et $\tilde{D}_- + \tilde{D}_-^T$ définie semi-négative. Posons ensuite

$$x = \begin{bmatrix} u \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} u^0 \\ \vdots \\ u^{0(n-1)} \end{bmatrix}$$

$$y = T \begin{bmatrix} u^{(n)} \\ \epsilon u^{(n+1)} \\ \vdots \\ \epsilon^{m-1} u^{(n+m+1)} \end{bmatrix} + T \begin{bmatrix} \lambda_0 & \lambda_1 & \dots & \lambda_{n-1} \\ 0 & & & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ \vdots \\ u^{(n-1)} \end{bmatrix}$$

On obtient ainsi le système complet

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ -\lambda_0 & -\lambda_1 & \dots & -\lambda_{n-1} \end{bmatrix} x + \begin{bmatrix} 0 & & & \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 1 & & & 0 \end{bmatrix} T^{-1} y$$

$$\epsilon \dot{y} = \begin{bmatrix} \tilde{D}_+ & 0 \\ 0 & \tilde{D}_- \end{bmatrix} y + \epsilon T \begin{bmatrix} \lambda_0 & \dots & \lambda_{n-1} \\ 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \frac{d}{dt} \left[x + \begin{bmatrix} u^0(t) \\ \vdots \\ u^{0(n-1)}(t) \end{bmatrix} \right],$$

par rapport auquel on cherche à étudier les propriétés de consistance de l'origine. Il est évident que les conditions générales d'applicabilité des théorèmes de ce chapitre et les hypothèses H'_2 seront vérifiées dans $B(0, \rho)$ pour autant que les fonctions $\|u^{0(i)}(t)\|, i = 1, \dots, n$, soient bornées. Cette condition sera en particulier vérifiée si on définit $u^0(t)$ sur un intervalle $[\tau, \omega]$ fini. Si de plus $m \neq 2(2k+1)$, $k \in \mathbb{N}$, les hypothèses H_2 sont satisfaites uniformément en t_0 , pour

$$Q_r = 0, \quad v_r = x^T x e^{-kt},$$

$$Qb = \begin{pmatrix} I_+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad u_b = y^T \begin{pmatrix} I_+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y, \quad v_b = y^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_- \end{pmatrix} y,$$

où $k - 1$ est supérieur à la plus grande valeur propre de A

$$+ A^T, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 \\ -\lambda_0 & \dots & -\lambda_{n-2} & -\lambda_{n-1} \end{pmatrix}, \quad I_+ \text{ et } I_- \text{ sont respectivement des}$$

matrices unités de même ordre que $\tilde{D}_+$ et $\tilde{D}_-$. En effet, le système réduit s'écrit

$$\dot{x} = Ax$$

et

$$\dot{v}_r^* = \dot{v}_r = [x^T (A + A^T)x - k x^T x] e^{-kt} \leq -v_r.$$

L'équation des couches limites s'écrit

$$\frac{dy}{ds} = \begin{pmatrix} \tilde{D}_+ & 0 \\ 0 & \tilde{D}_- \end{pmatrix} y.$$

De plus, puisque $m \neq 2(2k+1)$, $\tilde{D}_+ + \tilde{D}_+^T$ et $-\tilde{D}_- - \tilde{D}_-^T$ sont définies positives, et donc il existe $\alpha > 0$ tel que

$$u_{b*} = \dot{u}_b = y^T \begin{pmatrix} \tilde{D}_+ + \tilde{D}_+^T & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y \geq \alpha y^T \begin{pmatrix} I_+ & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y = \alpha u_b,$$

$$v_b^* = \dot{v}_b = y^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{D}_- + \tilde{D}_-^T \end{pmatrix} y \leq -\alpha y^T \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_- \end{pmatrix} y = -\alpha v_b.$$

En faisant usage du théorème 9 ou du corollaire 3, on établit ainsi que si la solution considérée est définie sur un intervalle fini et si $m \neq 2(2k+1)$, l'origine est uniformément consistante ; si $m = 1$, elle est uniformément complètement consistante. Si on s'intéresse à des solutions définies



Bibliothèque des
Sciences Exactes

sur un intervalle infini, on démontrerait de même que si aucune valeur propre de A n'est imaginaire pure, et si $m \neq 2(2k+1)$ l'origine est uniformément consistante; si de plus A est stable et $m = 1$, elle est uniformément complètement consistante.

L'équation (3.9) a été étudiée par divers auteurs dont B. LATIL [40], dans le cas où $u \in U$, U est un espace de Hilbert, $\lambda_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, \dots, n-1$) et λ_0 est opérateur linéaire auto-adjoint éventuellement non borné. Les résultats énoncés par ces auteurs sont moins complets que ceux que nous avons obtenus dans le cas où $U = \mathbb{R}^l$. En effet, ils ont trait à la comparaison de solutions des problèmes complet et réduit ayant mêmes conditions initiales. De plus ils ne prouvent des résultats de consistance que dans le cas $m = 1$ ou $m = 2$. Cependant le problème posé en ces termes ne peut pas être abordé dans toute sa généralité par la théorie développée au § III-5. En effet, si λ_0 n'est pas borné, les hypothèses H_2^1 ne sont pas satisfaites. De plus si $Q_b y = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} y$, l'image de l'opérateur Q_b ne sera finie que si U est un espace de dimension finie (c.à d. le cas que nous avons traité). Ces remarques montrent les insuffisances des théorèmes du § III-5 dans le cas d'équations définies sur des espaces de Banach.

7. Notes.

Mis à part les travaux de YU WHY TSCHEN [76] et K.O. FRIEDRICHS et W. WASOW [20], la première étude systématique de perturbations singulières semble due à A.N. TIHONOV [64-67]. Le théorème fondamental de A.N. TIHONOV est un résultat de consistance complète relatif à des solutions définies sur un intervalle fini. Il est obtenu en imposant à l'équation des couches limites des hypothèses de stabilité asymptotique de l'origine. F.C. HOPPENSTEADT [30] et [32] [33] a étendu ce théorème à des solutions définies sur des intervalles infinis. Il est intéressant de noter que F.C. HOPPENSTEADT construit, dans sa démonstration, des fonctions auxiliaires du type de celles que nous avons introduites au § 5.

L'extension des résultats de A.N. TIHONOV à des équations définies sur des espaces de Banach fut faite par B.N. PANAIOTI [52], [53]. Cette extension est cependant limitée par le fait que l'espace Y est supposé de dimension finie. De plus tout comme nous l'avons fait, l'auteur suppose la continuité des fonctions f et g , l'existence des solutions, leur unicité et leur continuité par rapport aux conditions initiales et à un paramètre. Notons encore une extension de V.M. MILLIONŠČIKOV [46] aux espèces linéaires topologiques. L'ensemble des résultats notés ci-dessus font usage de propriétés de stabilité asymptotique relatives à l'équation des couches limites et éventuellement au système réduit. En gros, ils ne diffèrent du corollaire 3, que par une différence de point de vue. En effet les hypothèses de stabilité asymptotique impliquent l'existence des fonctions auxiliaires que nous avons introduites. Il semble dès lors plus direct d'imposer l'existence de ces fonctions, d'autant plus que ces conditions de stabilité sont souvent difficiles à vérifier (cfr. F.C. HOPPENSTEADT [31]).

Parallèlement à l'étude de A.N. TIHONOV, J.J. LEVIN et N. LEVINSON [42] ont étudié une propriété de consistance complète à partie du système complet linéarisé. Ce théorème se base sur l'hypothèse fondamentale que toutes les valeurs propres de l'équation des couches limites linéarisée ont une partie réelle strictement négative. En utilisant des résultats de L. FLATTO et N. LEVINSON [16], J.J. LEVIN [41] a étudié le même problème dans le cas où une partie des valeurs propres ont une partie réelle strictement positive, l'autre, une partie réelle strictement négative. Dans ce cas, le théorème obtenu est un résultat de consistance uniforme. V.F. BUTUZOV [3], [4] a généralisé ces diverses propositions à des solutions définies sur des intervalles infinis. Finalement K.W. CHANG [6], [7], [8] et K.W. CHANG et W.A. COPPEL [9] ont unifié et étendu ces divers résultats faisant usage de dichotomies exponentielles.

L'ensemble de ces résultats est indépendant des nôtres. Remarquons cependant qu'à partir des hypothèses faites par ces auteurs on peut construire des fonctions auxiliaires qui peuvent servir à démontrer la consistance. Cette construction est similaire à la construction d'une fonction de Liapounov pour un système linéaire (cfr. A. HALANAY [29 p.45]).

La théorie que nous avons présentée dans ce chapitre peut être interprétée comme la description au moyen de fonctions auxiliaires de la dichotomie obtenue lorsqu'on utilise les systèmes linéarisés. Cette théorie se trouve énoncée pour la plupart dans P. HABETS [27], [28]. Notons par ailleurs que D.V. ANOSOV [1] a déjà utilisé des fonctions auxiliaires décrivant l'attraction des solutions par une variété et leur répulsion par une autre. Cependant ces fonctions sont liées au système linéarisé et ne sont utilisées que pour prouver l'existence de solutions périodiques.

Pour compléter la bibliographie ci-dessus, il faut encore faire mention des travaux de I.S. GRADSTEIN [21], [22], V.M. VOLOSOV [72], [73], A.B. VASSIL'IEVA [69], W. WASOW [74] et R.E. O'MALLEY Jr. [51]. Par ailleurs V.A. TRENIGIN [68] s'est intéressé à des équations définies sur des espaces de Banach et à second membre non borné, et L.A. GROZA [24] à des résultats prouvant qu'il n'y a pas consistance complète.

L'exemple du traineau de Chaplguine a été posé par C. CARATHEODORY [5]. Yu. I. NEIMAK et N.A. FUFAYEV [50] ont remarqué que contrairement à ce qu'affirmait C. CARATHEODORY, le problème complet peut être approximé par le problème réduit.

Le deuxième exemple que nous avons traité au § 6 a son origine dans un travail de J. KISINSKI [34] repris et complété par J.A. SMOLLER [61], [62], B. LATIL [40] et A. FRIEDMAN [18]. Dans le cas réel, il peut être traité à partir des résultats de M.I. VISIK et L.A. LYUSTERNIK [71].

CHAPITRE IV

CRITERES DE μ -CONSISTANCE1. Introduction

Considérons le problème complet

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, z, \epsilon) \\ \epsilon \dot{y} &= g(t, z, \epsilon)\end{aligned}\tag{1.1}$$

et une solution $z^0 : I \rightarrow Z$, $t \mapsto z^0(t)$ discontinue, du problème réduit correspondant

$$\begin{aligned}\dot{x} &= f(t, z, 0) \\ 0 &= g(t, z, 0)\end{aligned}\tag{1.2}$$

Nous supposons z^0 discontinue en $t = t_s$ seulement. Il sera facile d'étendre les résultats obtenus à un nombre fini de discontinuités.

De plus en $t = t_s$, z^0 sera continue à droite, on notera

$$z^0(t_s +) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} z^0(t_s + h) \quad \text{et la quantité}$$

$$z^0(t_s -) = \lim_{h \rightarrow 0, h > 0} z^0(t_s - h) \quad \text{sera supposée exister.}$$

Pour simplifier l'exposé des théorèmes de ce chapitre, nous supposons les fonctions f et g définies sur $I \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m \times [0, E_0]$, continues et localement lipschitziennes en z , ce qui implique l'existence et l'unicité des solutions des équations que nous considérerons. De plus nous supposons ces solutions continues en fonction des conditions initiales et des paramètres.

2. Lemmes préliminaires

Considérons une équation

$$\frac{dy}{ds} = g(a, y) \quad (4.1)$$

où $y \in \mathbb{R}^m$ et $a \in \mathbb{R}^{1+n}$. Supposons g continue et localement lipschitzienne en y pour tout a . Supposons de plus que les solutions de (4.1) dépendent continument des conditions initiales et du paramètre a . Soit $y(s; a, y_0)$ la solution maximale de (4.1) définie pour $s \in K$ et telle que $y(0; a, y_0) = y_0$.

Supposons que l'équation $g(a, y) = 0$ admette une solution $y = h(a)$ continue. On dira que $h(a)$ est uniformément asymptotiquement stable si, a étant fixé,

- (i) $(\forall \eta > 0)(\exists \delta > 0)(\forall y_0 \in B(h(a), \delta))(\forall s > 0, s \in K)$
 $y(s; a, y_0) \in B(h(a), \eta);$
 (ii) $(\exists \delta > 0)(\forall \eta > 0)(\exists S > 0)(\forall y_0 \in B(h(a), \delta))$
 $S \in K \text{ et } (\forall s \geq S, s \in K) y(s; a, y_0) \in B(h(a), \eta).$

F. HOPPENSTEADT [31] a démontré le

LEMME 1. Si $P \subset \mathbb{R}^{1+n}$ est compact et si $\forall a \in P, h(a)$ est uniformément asymptotiquement stable, alors

$$(\forall \eta > 0)(\exists \delta > 0)(\forall a \in P)(\forall y_0 \in B(h(a), \delta))(\forall s > 0)$$

$$s \in K \text{ et } y(s; a, y_0) \in B(h(a), \eta)$$

Définissons ensuite la région d'attraction A de la racine $h : P \rightarrow \mathbb{R}^m$

$$A = \{ (a, y_0) \in P \times \mathbb{R}^m, (\forall \eta > 0)(\forall S > 0, S \in K)(\forall s \geq S, s \in K)$$

$$y(s; a, y_0) \in B(h(a), \eta) \}$$

On peut alors compléter le lemme 1 par le

LEMME 2. Si $N^* \subset A$ est compact et si $\forall (a, y) \in N^*, h(a)$ est uniformément asymptotiquement stable, alors

$$(\forall \eta > 0)(\exists S > 0)(\forall (a, y_0) \in N^*) \quad S \in K \quad \text{et} \quad [(\forall s \geq S, s \in K) \\ y(s; a, y_0) \in B(h(a), \eta)] .$$

Démonstration. Fixons $\eta > 0$ et supposons par l'absurde $(\forall S > 0)(\exists (a, y_0) \in N^*) \quad S \in K \Rightarrow [(\exists s \geq S, s \in K) \\ \|y(s; a, y_0) - h(a)\| \geq \eta] .$

On en déduit des suites $s_i \rightarrow \infty$ et $(a_i, y_i) \rightarrow (a_0, y_0)$ telles que

$$s_i \notin K \quad \text{ou sinon} \quad \|y(s_i; a_i, y_i) - h(a_i)\| \geq \eta \quad (4.2)$$

Par ailleurs, si P est la projection de N^* sur l'espace des paramètres a , P est compact et en utilisant le lemme 1, on peut déterminer δ correspondant au η choisi. Ensuite puisque $(a_0, y_0) \in A$, $(\exists S_0 \in K)$

$$\|y(S_0; a_0, y_0) - h(a_0)\| < \frac{\delta}{3} .$$

Puisque h est continu $(\exists \rho_1 > 0)(\forall a_i \in B(a_0, \rho_1))$

$$\|h(a_i) - h(a_0)\| < \frac{\delta}{3} .$$

Finalement par continuité des solutions de (4.1),

$$(\exists \rho < \rho_1, \rho > 0)(\forall (a_i, y_i) \in B((a_0, y_0), \rho))$$

$$\|y(S_0; a_0, y_0) - y(S_0; a_i, y_i)\| < \frac{\delta}{3} .$$

On déduit des trois dernières inégalités

$$\|y(S_0; a_i, y_i) - h(a_i)\| < \delta$$

et en vertu du lemme 1 $(\forall s_i \geq S_0)$

$$s_i \in K \quad \text{et} \quad \|y(s_i; a_i, y_i) - h(a_i)\| < \eta$$

ce qui contredit (4.2).

CQFD.

Considérons ensuite le système

$$\begin{aligned}\frac{dx}{ds} &= \epsilon f(t_0 + \epsilon s, z, \epsilon) \\ \frac{dy}{ds} &= g(t_0 + \epsilon s, z, \epsilon)\end{aligned}\tag{4.3}$$

dont nous noterons $z_{4.3}(s; t_0, z_0, \epsilon)$

la solution telle que $z_{4.3}(0; t_0, z_0, \epsilon) = z_0$.

LEMME 3. Si les solutions de 4.3 sont continues en fonction des conditions initiales et des paramètres t_0 et ϵ et si $N^* \subset R^{1+n+m}$ est compact, alors

$$(\forall S > 0)(\forall \eta > 0)(\exists \epsilon_0 > 0)(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\forall (t, z) \in N^*)$$

$$\| z_{4.3}(S; t, z, \epsilon) - z_{4.3}(S; t, z, 0) \| < \eta.$$

Démonstration. Fixons $S > 0$ et $\eta > 0$, et supposons par l'absurde qu'il existe des suites $\epsilon_i \rightarrow 0$ et $(t_i, z_i) \rightarrow (t_0, z_0)$

telles que

$$\| z_{4.3}(S; t_i, z_i, \epsilon_i) - z_{4.3}(S; t_i, z_i, 0) \| \geq \eta \tag{4.4}$$

Par ailleurs on déduit de la continuité des solutions

$$(\exists \rho > 0)(\forall \epsilon_i : 0 < \epsilon_i < \rho)(\forall (t_i, z_i) \in B((t_0, z_0), \rho))$$

$$\| z_{4.3}(S; t_i, z_i, \epsilon_i) - z_{4.3}(S; t_0, z_0, 0) \| < \frac{\eta}{2}$$

$$\| z_{4.3}(S; t_i, z_i, 0) - z_{4.3}(S; t_0, z_0, 0) \| < \frac{\eta}{2}$$

D'où on déduit

$$\| z_{4.3}(S; t_i, z_i, \epsilon_i) - z_{4.3}(S; t_i, z_i, 0) \| < \eta$$

ce qui contredit (4.4)

CQFD.

3. Premier théorème de μ -consistance complète

Le théorème qui suit utilise trois groupes d'hypothèses qui décrivent respectivement : 1° le point final du saut : $z^0(t_s^+)$; 2° le point initial du saut : $z^0(t_s^-)$; 3° les intervalles où la solution z^0 est continue.

HYPOTHESES A1. Il existe une fonction continue $h:(t, x) \mapsto h(t, x)$ définie au voisinage du point $(t_s, z^0(t_s^+))$ telle que $h(t_s, z^0(t_s^+)) = y^0(t_s^+)$ et $h(t, x)$ est un point singulier uniformément asymptotiquement stable pour l'équation des couches limites

$$\frac{dy}{ds} = g(t, x, y, o). \quad (4.5)$$

Notons ensuite A la région d'attraction de la racine $h(t, x)$.

HYPOTHESES A2. $\exists K > 0, \forall \rho > 0$ il existe une région $M \subset B(x^0(t_s), \rho) \times \mathbb{R}^m$ bornée et un compact $N : I \times N \subset (I \times \text{fr} M) \cap A$ tels que:

$$1^\circ \forall t_0 \in I, \forall z_0 \in \text{fr} M \setminus N, \exists \theta > 0, \forall t \in]t_0, t_0 + \theta]$$

$$z(t; t_0, z_0, \epsilon) \in \dot{M};$$

$$2^\circ \exists i, \forall t \in I, \forall z \in M, \forall \epsilon \in]0, E_0]$$

$$|f_i(t, z, \epsilon)| \geq \bar{K};$$

$$3^\circ z^0(t_s^-) \in \dot{M}.$$

Remarquons que la première condition sera satisfaite si pour tout $t_0 \in I$ et $z_0 \in \text{fr} M \setminus N$, il existe une fonction $\omega(t, z)$ définie sur un voisinage V de (t_0, z_0) , continue localement lipschitzienne en z et telle que :

$$(i) \omega(t_0, z_0) = 0;$$

$$(ii) \omega(t, z) \geq 0, (t, z) \in V \setminus (I \times \dot{M});$$

$$(iii) D^+ \omega(t_0, z_0) < 0.$$

La deuxième condition est une hypothèse d'éjection de M en un temps $O(\rho)$. Dans les systèmes autonomes, cette hypothèse se déduit en général du fait que $z(t_s^-)$ n'est pas un point singulier du système complet (1.1).

HYPOTHESES A3. $\forall \tau_1 > 0$, z^0 est uniformément complètement consistante sur $] -\infty, t_s - \tau_1[\cap I$. Il existe $\tau_2 > 0$ et une fonction $\bar{z}^0 :]t_s - \tau_2, \infty[\cap I \rightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ continue, telle que $(\forall t \geq t_s, t \in I), \bar{z}^0(t) = z^0(t)$ et $\bar{z}^0$ est uniformément complètement consistante.

La fonction $\bar{z}^0$ sera en général la prolongation à gauche de z^0 solution de l'équation

$$\dot{x} = f(t, x, h(t, x), 0)$$

définie pour $t \in [t_s, \infty[\cap I$.

THEOREME 1. Si les hypothèses A_1, A_2 et A_3 sont satisfaites, la solution z^0 est uniformément complètement μ -consistante.

Démonstration. La thèse s'écrit

$$(\forall \eta > 0)(\forall \sigma > 0)(\exists \epsilon_0 > 0)(\exists \delta > 0)(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0)(\forall t_0 \in I)(\forall z^\epsilon(.): \|z^\epsilon(t_0) - z^0(t_0)\| < \delta)$$

$$\{t \geq t_0, t \in I\} \subset J \text{ et } \mu \{t \geq t_0, t \in I, \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta\} < \sigma.$$

Fixons $\eta > 0$ et $\sigma \geq 0$. Puisque $\bar{z}^0$ est uniformément complètement consistante, on peut déterminer $\epsilon_2 > 0$ et $\delta_2 > 0$ tels que ce concept soit vérifié pour $\bar{z}^0$ et $\eta > 0$. Considérons alors $\sigma_0 \leq \sigma$ assez petit pour que $|t_3 - t_s| < \sigma_0$ implique $\|z^0(t_s +) - \bar{z}^0(t_s)\| < \delta_2/3$. Ensuite, puisque h est continu, on peut choisir ρ assez petit et diminuer éventuellement σ_0 de sorte que $|t_2 - t_s| < \sigma_0$ et $\|x_2 - x^0(t_s)\| < 2\rho$ implique $\|(x_2, h(t_2, x_2)) - z^0(t_s +)\| < \delta_2/3$ et $\rho < \bar{K} \frac{\sigma_0}{4}$. Déterminons alors

l'ensemble M relatif à ρ , et choisissons $\tau_1 < \frac{\sigma_0}{2}$ et $\eta_1 \leq \eta$

assez petits pour que si $t_1 \in [t_s - \tau_1, t_s[\{ z: \|z - z^0(t_1)\| < \eta_1 \} \subset M$. Ce choix est possible puisque $z^0(t_s -) \in M$. Ensuite, puisque z^0 est uniformément complètement consistante, on peut déterminer $\epsilon_1: 0 < \epsilon_1 \leq \epsilon_2$ et

$\delta: 0 < \delta \leq \delta_2$ pour que le concept soit vérifié si on choisit $\eta = \eta_1$. Par ailleurs M et N étant déterminés, et si on applique le lemme 2 à l'ensemble $N^* = [t_s - \sigma_0, t_s + \sigma_0] \times N$ et à l'équation $\frac{dy}{ds} = g(t, x, y, 0)$ pour

$\delta_2/6, (\exists S > 0) (\forall (t_2, z_2) \in N^*) S \in K$ et $y_{4.3}(S; t_2, z_2, 0) \in$

$B(h(t_2, x_2), \delta_2/6)$. Ensuite utilisant le lemme 3 pour S et

$\delta_2/6, (\exists \epsilon_0: 0 < \epsilon_0 \leq \min(\epsilon_1, \sigma_0/2S)) (\forall \epsilon: 0 < \epsilon \leq \epsilon_0) (\forall (t_2, z_2) \in N^*)$

$\|z_{4.3}(S; t_2, z_2, \epsilon) - z_{4.3}(S; t_2, z_2, 0)\| < \delta_2/6$. La combinaison de

ces résultats montre que $(\exists S > 0) (\exists \epsilon_0: 0 < \epsilon_0 \leq \epsilon_1)$ tels que $S \epsilon_0 < \sigma/2$

et $(\forall \epsilon: 0 < \epsilon \leq \epsilon_0) (\forall (t_2, z_2) \in N^*) \|z(t_2 + S; t_2, z_2, \epsilon) - (x_2, h(t_2, x_2))\|$

$= \|z_{4.3}(S; t_2, z_2, \epsilon) - (x_2, h(t_2, x_2))\| < \delta_2/3$.

Le raisonnement ci-dessus nous a permis de construire des constantes $\delta_2 > 0, \sigma_0: 0 < \sigma_0 \leq \sigma, (\rho > 0, \rho < \frac{\bar{K}\sigma_0}{4})(\tau_1: 0 < \tau_1 < \frac{\sigma_0}{2})$

$(\delta > 0, \delta \leq \delta_2)(\epsilon_0 > 0)$ et des ensembles M et N tels que $(\forall \epsilon: 0 < \epsilon \leq \epsilon_0):$

(i) $(\forall t \in]t_s - \tau_2, \infty[\cap I) (\forall z^\epsilon(.): \|z^\epsilon(t_0) - \bar{z}^0(t_0)\| \leq \delta_2)$

$\{t \geq t_0, t \in I\} \subset J$ et $\mu\{t \geq t_0, t \in I: \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta\} = 0$;

(ii) $|t_3 - t_s| < \sigma_0 \Rightarrow \|z^0(t_s +) - \bar{z}^0(t_3)\| < \delta_2/3$;

(iii) $|t_2 - t_s| < \sigma_0, \|x_2 - x^0(t_s)\| < 2\rho \Rightarrow$

$\|(x_2, h(t_2, x_2)) - z^0(t_s +)\| < \delta_2/3$;

$$(iv) (t_2, z_2) \in N^* \Rightarrow \|z(t_2 + \epsilon S; t_2, z_2, \epsilon) - (x_2, h(t_2, x_2))\| < \delta_2/3,$$

$$\text{où } \epsilon S < \sigma_0/2;$$

$$(v) (t_s \in [t_s - \tau_s, t_s[, \|z_1 - z^0(t_s)\| < \eta_1 \leq \eta \Rightarrow z_1 \in M;$$

$$(vi) (\forall t_0 \in]-\infty, t_s - \tau_1] \cap I)(\forall z^\epsilon(.): \|z^\epsilon(t_0) - z^0(t_0)\| < \delta)$$

$$\{t \geq t_0, t \in]-\infty, t_s - \tau_1[\cap I\} \subset J \text{ et}$$

$$\mu \{t \geq t_0, t \in]-\infty, t_s - \tau_1[\cap I: \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta_1\} = 0.$$

Montrons ensuite que δ et ϵ_0 conviennent. Fixons $\epsilon: 0 < \epsilon \leq \epsilon_0$.
 Tout d'abord si $t_0 \geq t_s$, $t_0 \in I$, la thèse se déduit de (i). Si par contre $t_0 < t_s$, $t_0 \in I$, fixons $z^\epsilon(.): \|z^\epsilon(t_0) - z^0(t_0)\| < \delta$. Dès lors si $t_0 < t_s - \tau_1$, on déduit de la propriété (vi) que jusqu'en $t_1 = t_s - \tau_1$ la solution $z^\epsilon(.)$ est définie et est une η -approximation de z^0 sauf peut être sur un ensemble de mesure nulle (cfr. fig. IV-1). En vertu de (v) et de la continuité de $z^\epsilon(.)$, $z_1 = z(t_1; t_0, z_0, \epsilon) \in M$. [Si $t_0 \in [t_s - \tau_1, t_s[$, on pose $t_1 = t_0$ et on obtient de façon évidente les mêmes conclusions]. Ensuite puisque sur M , $|f_1| \geq K$, $2\rho \geq |x_1^\epsilon(t) - x_1^\epsilon(t_1)| \geq K(t - t_1)$, ce qui implique $(t - t_1) \leq \frac{2\rho}{K} < \frac{\sigma_0}{2}$. On en déduit que la solution z^ϵ ne peut pas demeurer dans M plus d'un temps $\frac{\sigma_0}{2}$. Elle ne peut quitter M que par N et donc $(\exists t_\epsilon \in J) |t_2 - t_1| < \frac{\sigma_0}{2}$, $(t_2, z_2) = (t_2, z(t_2; t_0, z_0, \epsilon)) \in N^*$. En utilisant ensuite (iv), on voit que $(\exists t_3 = t_2 + \epsilon S \in J): |t_3 - t_2| < \frac{\sigma_0}{2}$ et $\|z(t_3; t_0, z_0, \epsilon) - (x_2, h'(t_2, x_2))\| < \delta_2/3$. En combinant ce résultat avec (iii) et (ii), on obtient $\|z(t_3; t_0, z_0, \epsilon) - \bar{z}^0(t_3)\| < \delta_2$. Finalement (i) implique que $z^\epsilon(.)$ est prolongeable sur I et $\{t \geq t_0, t \in I,$
 $\|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta\} \subset [t_1, \max(t_3, t_s)]$. Ceci démontre le théorème puisque $t_3 - t_1 < \sigma_0 \leq \sigma$ et $t_s - t_1 = \tau_1 < \sigma_0/2 < \sigma$.

CQFD.

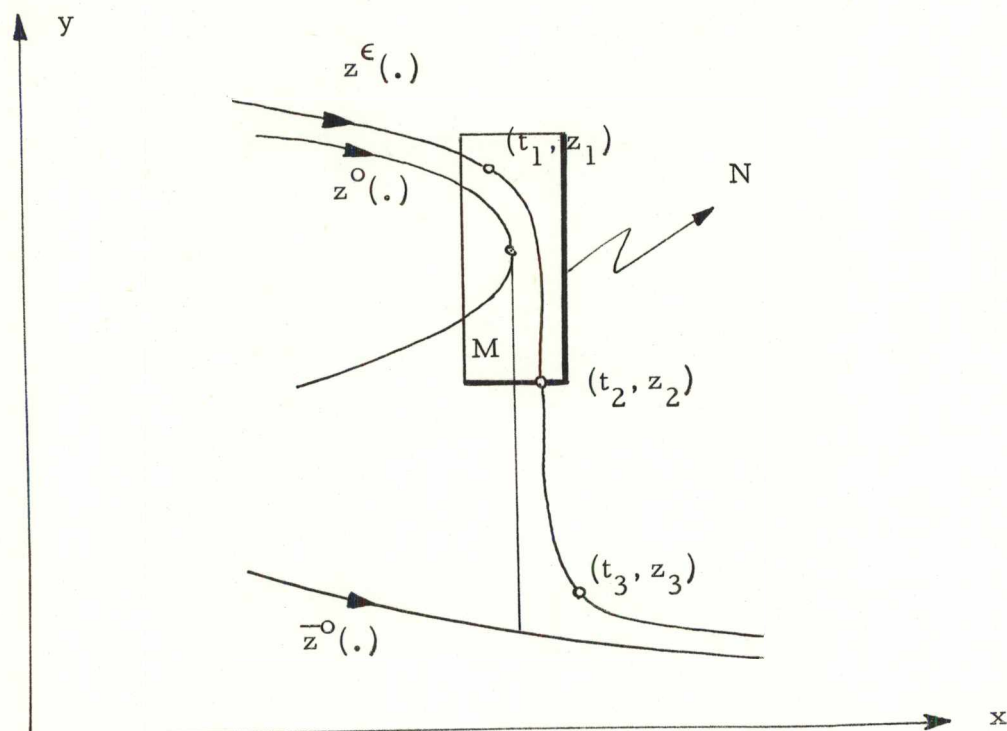


Figure IV-1.

4. Exemple

E.F. MISHCHENKO et L.S. PONTRYAGIN [49] ont considéré un circuit de Fruehauf décrit par les équations

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y_1 - y_2 \\ \epsilon \dot{y}_1 &= -x - \frac{y_1^3}{3} - y_2 \\ \epsilon \dot{y}_2 &= x - y_1 - \frac{y_2^3}{3} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Il y correspond le système réduit

$$\begin{aligned} \dot{x} &= y_1 - y_2 \\ 0 &= -x - \frac{y_1^3}{3} - y_2 \\ 0 &= x - y_1 - \frac{y_2^3}{3} \end{aligned}$$

qui est équivalent à

$$\dot{x} = 2y_1$$

$$0 = x - y_1 + \frac{y_1^3}{3}$$

$$y_2 = -y_1$$

et peut être comparé à un oscillateur de Van der Pol (1.10). Les solutions de ce système se représentent aisément dans le plan (x, y_1) (figure IV-2)

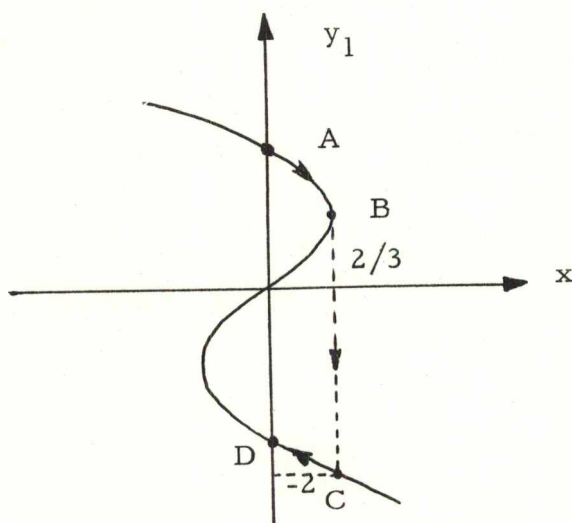


Figure IV-2

Considérons la solution z^0 dont l'orbite ABCD est discontinue de B à C, et vérifions les hypothèses du théorème ci-dessus.

HYPOTHESES A_1 : Les équations

$$0 = -x - y_1^3/3 - y_2$$

$$0 = x - y_1 - y_2^3/3$$

possèdent, en voisinage du point C, une solution continue

$$y_1 = -y_2 = h(x)$$

où $h :]0, \infty[\rightarrow]-\sqrt{3}, -\infty[$, $x \mapsto h(x)$ est une solution de l'équation

$$x - h(x) + h^3(x)/3 = 0.$$

Par ailleurs, l'équation des couches limites s'écrit

$$\frac{dy_1}{ds} = -x - \frac{y_1^3}{3} - y_2 \quad (4.7)$$

$$\frac{dy_2}{ds} = x - y_1 - \frac{y_2^3}{3}$$

et sa solution $y_1 = -y_2 = h(x)$ est uniformément asymptotiquement stable. En effet les hypothèses du théorème 1.6 de A. HALANAY [29-p.24] sont satisfaites par la fonction

$$v(x, y_1, y_2) = \frac{1}{2} [(y_1 - h(x))^2 + (y_2 + h(x))^2]$$

dont la dérivée calculée le long des solutions de (4.7) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} = & - \frac{y_1^2 + y_1 h(x) + h(x)^2}{3} (y_1 - h(x))^2 - 2(y_1 - h(x))(y_2 + h(x)) \\ & - \frac{y_2^2 - y_2 h(x) + h(x)^2}{3} (y_2 + h(x))^2. \end{aligned}$$

Si on remarque que $h(x) < -\sqrt{3}$ et si on suppose $y_1 < -1$ et $y_2 > 1$,

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} & \leq - \frac{4+\sqrt{3}}{3} (y_1 - h(x))^2 - 2(y_1 - h(x))(y_2 + h(x)) - \frac{4+\sqrt{3}}{3} (y_2 + h(x))^2 \\ & \leq - \frac{2}{3} (1+\sqrt{3}) v(x, y_1, y_2). \end{aligned}$$

HYPOTHESES A_2 . Soit $\bar{K} = \frac{1}{3}$ et $\forall \rho > 0$ soit $(r < \min(\rho, \frac{1}{3}), r > 0)$.

On définit alors

$$M = \left\{ (x, y_1, y_2) : \left| x - \frac{2}{3} \right| \leq r, |y_1 + y_2| \leq r, \frac{1}{3} \leq y_1 - y_2 \leq 5 \right\}$$

et

$$N = \left\{ (x, y_1, y_2) \in M : \text{soit } x = \frac{2}{3} + r, \text{ soit } y_1 - y_2 = \frac{1}{3} \right\}$$

1° L'ensemble $\text{fr } M \setminus N$ se compose de quatre faces. Pour chacune de celle-ci, nous indiquerons une fonction $\omega_i(z)$ ($i = 1, \dots, 4$) qui satisfait aux conditions (i), (ii) et (iii) de la remarque, en tous points n'intersectant pas plusieurs faces. Pour ces derniers, il suffit alors de

considérer la fonction $\omega(z) = \max_i \omega_i(z)$, où i appartient à l'ensemble des indices des faces s'intersectant en ce point.

Sur $F_1 = \{ (x, y_1, y_2) \in M : x = \frac{2}{3} - r \}$ on considère la fonction

$$\omega_1(z) = -x + \frac{2}{3} - r$$

dont la dérivée calculée le long des solutions de (4.6) et évaluée en les points de F_1 , s'écrit

$$\dot{\omega}_1(z) = -y_1 + y_2 \leq -\frac{1}{3}.$$

Sur $F_2 = \{ (x, y_1, y_2) \in M : y_1 + y_2 = r \}$ et $F_3 = \{ (x, y_1, y_2) \in M : y_1 + y_2 = -r \}$, on utilise la fonction

$$\omega_2(z) = \omega_3(z) = \frac{1}{2} (y_1 + y_2)^2$$

dont la dérivée s'écrit

$$\ddot{\omega}_2(z) = \ddot{\omega}_3(z) = -\frac{1}{\epsilon} (y_1 + y_2)^2 \left[1 + \frac{y_1^2 - y_1 y_2 + y_2^2}{3} \right] \leq -\frac{r^2}{\epsilon} < 0.$$

Finalement sur $F_4 = \{ (x, y_1, y_2) \in M : y_1 - y_2 = 5 \}$, on utilise la fonction

$$\omega_4(z) = y_2 - y_1 - 5$$

dont la dérivée, évaluée en les points de F_4 , s'écrit

$$\begin{aligned} \dot{\omega}_4(z) &= \frac{1}{\epsilon} (2x + (y_2 - y_1)(1 - \frac{1}{4}(y_2 + y_1)^2 - \frac{1}{12}(y_2 - y_1)^2)) \\ &\leq \frac{1}{\epsilon} (2 + 5(1 - \frac{25}{12})) \leq -\frac{2}{\epsilon} < 0. \end{aligned}$$

2. On remarque que $|f(t, z, \epsilon)| = |y_1 - y_2| \geq \frac{1}{3}$

3. Il est évident que le point B de coordonnée $(\frac{2}{3}, 1, -1)$ appartient à M.

4. Finalement il faut vérifier que $I \times N \subset A$.

Remarquons tout d'abord, que si $x > \frac{2}{3}$, le point singulier $(y_1, y_2) = (h(x), -h(x))$ est un attracteur global par rapport à l'équation (4.7). Considérons en effet la fonction

$$v = \frac{1}{2} [(y_1 - h(x))^2 + (y_2 + h(x))^2]$$

dont la dérivée calculée le long des solutions de (4.7) s'écrit

$$\begin{aligned} \frac{dv}{ds} = & - \frac{y_1^2 + y_2 h(x) + h^2(x)}{3} (y_1 - h(x))^2 - 2(y_1 - h(x))(y_2 + h(x)) \\ & - \frac{y_2^2 - y_2 h(x) + h^2(x)}{3} (y_2 + h(x))^2. \end{aligned}$$

Cette forme sera définie négative si son réalisant est négatif, c.à-d.

$$9 - (y_1^2 + y_1 h(x) + h^2(x)) (y_2^2 - y_2 h(x) + h^2(x)) < 0 \quad (4.8)$$

Or $x > \frac{2}{3}$ et donc $h(x) < -2$, $y_1^2 + y_1 h(x) + h^2(x) \geq \frac{3}{4} h^2 > 3$, et

$y_2^2 - y_2 h(x) + h^2(x) \geq \frac{3}{4} h^2 > 3$, ce qui établit (4.8). Dès lors, la

fonction v permet d'établir l'attractivité globale du point $(h(x), -h(x))$

(J. LASALLE et S. LEFSCHETZ [39-p.67]), et donc

$$\{ (x, y_1, y_2) \in N : x = \frac{2}{3} + r \} \subset A.$$

Démontrons ensuite

$$R = \{ (x, y_1, y_2) : x \in [\frac{1}{3}, 1], (y_1 - y_2) \in [-5, x] \} \subset A$$

On vérifie tout d'abord que si $x \in [\frac{1}{3}, 1]$, l'ensemble

$$D = \{ (y_1, y_2) : (y_1 - y_2) \in [-5, x] \}$$

est un invariant positif pour l'équation (4.7). En effet si $y_1 - y_2 = -5$

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(-y_1 + y_2 - 5) &= 2x - y_1 + y_2 + \frac{y_1 - y_2}{3} \left[\frac{3}{4} (y_1 + y_2)^2 + \frac{1}{4} (y_1 - y_2)^2 \right] \\ &\leq 7 - \frac{5}{3} \left[\frac{3}{4} (y_1 + y_2)^2 + \frac{25}{4} \right] \leq -\frac{41}{12} < 0, \end{aligned}$$

et si $y_1 - y_2 = x$,

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds}(y_1 - y_2 - x) &= -2x + (y_1 - y_2) \left(1 - \frac{y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2}{3} \right) \\ &= -x \left[1 + (y_1^2 + y_1 y_2 + y_2^2)/3 \right] < 0. \end{aligned}$$

Ensuite on considère la fonction

$$v = \frac{1}{2} (y_1 + y_2)^2$$

dont la dérivée s'écrit

$$\frac{dv}{ds} = -(y_1 + y_2)^2 \left[1 + \frac{y_1^2 - y_1 y_2 + y_2^2}{3} \right].$$

Dans la région positivement invariante D , on peut appliquer une généralisation triviale (+) du théorème VI de J. LASALLE et S. LEFSCHETZ [33-p.58]. On en déduit que toutes les solutions issues de D tendent vers le plus grand invariant de $\{(y_1, y_2) \in D : \frac{dv}{ds} = 0\}$, c.-à-d.

$(y_1, y_2) = (h(x), -h(x))$. Dès lors $R \subset A$ et $\{(x, y_1, y_2) \in N :$

$$y_1 - y_2 = \frac{1}{3}\} \subset R \subset A.$$

(+) THEOREME VI GENERALISE. Let D be a positively invariant region and $V(x)$ a scalar function with continuous first partial derivatives. Let Ω_ℓ designate the intersection of a component of the region $V(x) < \ell$ with D . Assume Ω_ℓ is bounded and that within Ω_ℓ

$$\dot{V}(x) \leq 0$$

Let R be the set of all points within Ω_ℓ where $\dot{V}(x) = 0$ and let M be the largest invariant set in R . Then every solution $x(t)$ in Ω_ℓ tends to M as $t \rightarrow +\infty$.

HYPOTHESES A_3 . Ces hypothèses peuvent se déduire à partir du corollaire III-3 et des fonctions

$$v_r = \frac{1}{2} (x - x^0(t))^2$$

$$v_b = \frac{1}{2} [(y_1 - h(x))^2 + (y_2 + h(x))^2]$$

où $h(x)$ est une racine convenable de l'équation $x - y_1 + \frac{y_1^3}{3} = 0$.

5. Deuxième théorème de μ -consistance complète.

THEOREME 2. Supposons que les restrictions de z^0 à $] -\infty, t_s[\cap I$ et $[t_s, \infty[\cap I$ soient uniformément complètement consistantes. Si de plus, $(t_s, z^0(t_s-))$ appartient à la région d'attraction de z^0 , alors z^0 est uniformément complètement μ -consistante.

Démonstration. Soit $\eta > 0$ et $\sigma > 0$ fixés. Puisque la restriction de z^0 à $[t_s, \infty[\cap I$ est uniformément complètement consistante, on peut déterminer $\epsilon_2 > 0$ et $\delta_1 > 0$ tels que ce concept soit vérifié pour z^0 et η . Soit ensuite $\sigma_0 : 0 < \sigma_0 < \sigma$ tel que $0 < t_2 - t_s < \sigma_0$ implique

$\|z^0(t_s+) - z^0(t_2)\| < \delta_1/3$. Puisque $(t_s, z^0(t_s-))$ appartient à la région d'attraction de z^0 , il existe $S > 0$ tel que $z_{4.3}(S; t_s, z^0(t_s-), 0) \in B(z^0(t_s+), \delta_1/3)$.

Ensuite par continuité des solutions de (4.3) en fonction des conditions initiales et d'un paramètre $(\exists \eta_1 : 0 < \eta_1 \leq \eta)(\exists \epsilon_1 : 0 < \epsilon_1 < \min(\epsilon_2, \sigma_0/3))(\forall z_1 :$

$$\|z_1 - z^0(t_s-)\| < 2\eta_1)(\forall \epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_1), \|z_{4.3}(S; t_s, z^0(t_s-), 0)$$

$$- z_{4.3}(S; t_s, z_1, \epsilon)\| = \|(x^0(t_s), y_{4.3}(S; t_s, z^0(t_s-), 0))$$

$$- z(t_s + \epsilon, t_s, z_1, \epsilon)\| < \delta_1/3. \text{ En utilisant finalement la consistance}$$

complète et uniforme de la restriction de z^0 à $] -\infty, t_s[\cap I$, on détermine

$(\epsilon_0 : 0 < \epsilon_0 \leq \epsilon_1)$ et $(\delta : 0 < \delta \leq \delta_1)$ tel que ce concept soit vérifié

pour z^0 et η_1 .

Ces valeurs de ϵ_0 et δ permettent d'établir le théorème. En effet, fixons $\epsilon : 0 < \epsilon \leq \epsilon_0$. Tout d'abord, si $t_0 \geq t_s$, $t_0 \in I$, la thèse se déduit de la consistance complète et uniforme de z^0 réduit à $[t_s, \infty[\cap I$. Si par contre $t_0 \leq t_s$, fixons t_0 et $z^\epsilon(\cdot)$. Dès lors la consistance complète et uniforme de z^0 réduit à $] - \infty, t_s[\cap I$ implique

$$\{t \geq t_0, t \in] - \infty, t_s[\cap I\} \subset J$$

et

(4.8)

$$\mu\{t \geq t_0, t \in] - \infty, t_s[\cap I : \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta_1\} = 0$$

La continuité de z^0 , pour $t < t_s$ implique $\|z^\epsilon(t_s) - z^0(t_s -)\| \leq \eta_1$.

On en déduit que pour $t = t_s + \epsilon S$

$$\|z^\epsilon(t_s + \epsilon S) - z^0(t_s + \epsilon S)\| \leq \|z^\epsilon(t_s + \epsilon S) - z_{4.3}(S; t_s, z^0(t_s -), 0)\|$$

$$\|z_{4.3}(S; t_s, z^0(t_s -), 0) - z^0(t_s +)\|$$

$$+ \|z^0(t_s +) - z^0(t_s + \epsilon S)\| < \delta_1/3 + \delta_1/3 + \delta_1/3 = \delta_1$$

Dès lors en vertu de la consistance complète et uniforme de la restriction de z^0 à $[t_s, \infty[\cap I$,

$$\{t \geq t_s + \epsilon S, t \in I\} \subset J$$

et

(4.9)

$$\mu\{t \geq t_s + \epsilon S, t \in I, \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta\} = 0$$

Finalement, on déduit de (4.8) et (4.9)

$$\{t \geq t_0, t \in I\} \subset J$$

et

$$\mu\{t \geq t_0, t \in I : \|z^\epsilon(t) - z^0(t)\| \geq \eta\} \leq \mu\{t : t_s \leq t \leq t_s + \epsilon S\} \leq \sigma_0 < \sigma.$$

C.Q.F.D.

Ce théorème peut s'appliquer à de nombreux systèmes à paramètres discontinus. Considérons par exemple le circuit représenté à la figure IV-3, où $e(t) = 0$ si $t < 0$ et $e(t) = 1$ si $t \geq 0$.

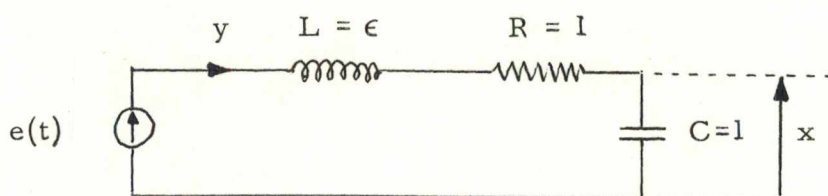


Figure IV-3

Il y correspond le système d'équations

$$\begin{aligned}\dot{x} &= y \\ \epsilon \dot{y} &= -y - x + e(t).\end{aligned}$$

La solution z^0 définie par les relations

$$\begin{aligned}z^0(t) &= 0, \quad \text{si } t \leq 0, \\ z^0(t) &= (1 - \exp(-t), \exp(-t)), \quad \text{si } t > 0,\end{aligned}$$

est uniformément complètement μ -consistante. En effet la consistance complète et uniforme se déduit, pour $t < 0$, des fonctions

$$v_r = x^2 \quad \text{et} \quad v_b = y^2.$$

Pour $t \geq 0$, elle se déduit des fonctions

$$v_r = (x - 1 + \exp(-t))^2 \quad \text{et} \quad v_b = (y - \exp(-t))^2.$$

Par ailleurs, si on considère l'équation des couches limites en $t = 0$, $x = x^0(0)$

$$\frac{dy}{ds} = -y - x^0(0) + 1 = -y + 1,$$

il est évident que la solution $y = 1$ est un attracteur global. Dès lors toutes les hypothèses du théorème 2 sont vérifiées et z^0 est uniformément complètement μ -consistante.

6. Notes.

Tout d'abord, nous devons remarquer que l'étude que nous avons faite de la μ -consistance est très incomplète. Nous nous sommes en effet borné à étudier la μ -consistance complète et uniforme. Il semble cependant que cette propriété soit la plus fréquente dans les applications.

D'autre part, N. LEVINSON [43] a démontré un théorème dont la thèse est proche de la nôtre. Remarquons qu'il se situe dans un cadre plus général en ce sens que z^0 peut être discontinu en y et en x . En outre, cet auteur étudie non seulement la continuité en ϵ des solutions, mais aussi celle de leurs dérivées par rapport aux conditions initiales. Par contre, la portée de ce théorème est fortement réduite par l'hypothèse que l'espace des y est unidimensionnel.

Finalement, remarquons qu'une théorie de la μ -consistance aurait pu être obtenue à partir des travaux de J. HAAG [25-26], L.S. PONTRYAGIN [54] et E.F. MISCHENKO [47,48]. L'approche choisie par ces auteurs est cependant très différente de la nôtre en ce sens qu'ils s'attachent particulièrement aux développements asymptotiques des solutions au voisinage des discontinuités. Citons encore les travaux de S.S. PUL'KIN et N.H. ROZOV [56], A.B. VASIL'EVA et V.A. TUPČIEV [70] et A.A. DORODNICYN [14].

BIBLIOGRAPHIE

- [1] D.V. ANOSOV, On Limit Cycles in Systems of Differential Equations with a Small Parameter in the Highest Derivatives, AMS Translations Ser 2 33 (1963), 233-275.
- [2] N. BOURBAKI, Eléments de mathématique, livre IV, Chapitre 4 (Fascicule XII), Hermann, Paris 1961.
- [3] V.F. BUTUZOV, Formules asymptotiques de la solution d'un système d'équations différentielles avec un petit paramètre devant les dérivées, sur l'intervalle infini ($0 \leq t < \infty$) (en russe), Vestnik Moskov. Univ. Ser.I Mat. Meh (1963), 3-14.
- [4] V.F. BUTUZOV, Comportement asymptotique des solutions d'équations différentielles ayant un petit paramètre devant les dérivées et sur un intervalle semi infini (en russe), Vestnik Moskov. Univ.Ser.I Mat.Meh (1965), 16-25.
- [5] C. CARATHEODORY, Der Schlitten, Zeit.Angew.Math.Mech.13 (1933), 71-76.
- [6] K.W. CHANG, Almost Periodic Solutions of Singularly Perturbed Systems of Differential Equations, J. Diff. Eq. 4 (1968), 300-307.
- [7] K.W. CHANG, Remarks on a Certain Hypothesis in Singular Perturbations, Proc. Am. Math. Soc.23 (1969), 41-45.
- [8] K.W. CHANG, Two Problems in Singular Perturbations of Differential Equations, J. Austral.Math. Soc.10 (1969), 33-50.
- [9] K.W. CHANG and W.A. COPPEL, Singular Perturbations of Initial Value Problems over a Finite Interval, Arch.Rational Mech. Anal.32 (1969), 268-280.
- [10] L.O. CHUA and G.R. ALEXANDER, The Effect of Parasitic Reactances on Nonlinear Net work, IEEE Trans.CT-18 (1971), 520-532.

- [11] E.A. CODDINGTON et N. LEVINSON, Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, New York 1955.
- [12] C.A. DESOER and M.J. SHENSA, Networks with Very Small and Very Large Parasitics : Natural Frequencies and Stability, Proc IEEE 58 (1970), 1933-1938.
- [13] J. DIEUDONNE, Foundations of Modern Analysis, AP, New York 1960.
- [14] A.A. DORODNICYN, Asymptotic solution of van der Pol's equation, PMM 11 (1947) 313-328, Am.Math.Soc.Transl., N°88, 1953.
- [15] D.A. FLANDERS and J.J.STOKER, The Limit Case of Relaxation Oscillations, Studies in Nonlinear Vibration Theory, New York Univ.1946, 313-328.
- [16] L. FLATTO and N. LEVINSON, Periodic Solutions of Singularly Perturbed Systems, J. Rat.Mech.Anal.4 (1955), 943-950.
- [17] M. FRENKEL, La méthode de centrage dans l'étude des équations différentielles à petits paramètres, Proc.Conf.Const.Th.Funct-Publishing House of the Hungarian Academy of Sciences , 151-162.
- [18] A. FRIEDMAN, Singular Perturbations for the Cauchy Problem, and for Boundary Value Problems, J. Diff; Eq. 5 (1969), 226-261.
- [19] K.O. FRIEDRICHS, Asymptotic phenonema in mathematical physics, Bull.Am.Math.Soc.61 (1955) 485-504.
- [20] K.O.FRIEDRICHS and W.WASOW, Singular Perturbations of Nonlinear Oscillations, Duke Math.J. 13 (1946), 367-381.
- [21] I.S. GRADSTEIN, Des équations différentielles dans lesquelles diverses puissances d'un petit paramètre interviennent devant des dérivées (en russe), Dokl.Akad.Nauk SSSR 82 (1952), 5-8.

- [22] I.S. GRADSTEIN, Sur le comportement des solutions d'équations différentielles linéaires à coefficients constants, dégénérant à la limite (en russe), Izv. A.N. SSSR, série math., 13 (1949), 253-280.
- [23] L.A. GROZA, The Asymptotic Behavior of Solutions of a Second Order Linear Differential Equation in Banach Space with a Small Parameter in the Term Containing the Highest Derivatives tends to Zero, Soviet Math.Dokl.1 (1960), 1336-1339.
- [24] L.A. GROZA, Asymptotic Behavior of Solutions of a Second Order Linear Differential Equation in Banach Space as a Small Parameter with the First and Second Derivatives Approaches Zero. Soviet Math.Dokl.3 (1962), 267-270.
- [25] J. HAAG, Etude asymptotique des oscillations de relaxation, Ann.Sc. Ecole Norm.Sup.60 (1943), 35-64; 65-111.
- [26] J. HAAG, Exemples concrets d'étude asymptotique d'oscillation de relaxation, Ann.Sci.Ecole Norm.Sup.61 (1944), 73-117.
- [27] P. HABETS, A Consistency Theory of Singular Perturbations of Differential Equations, Séminaires de Math.Appl. et Méca., U.C.L., 44 (1972).
- [28] P. HABETS, The Consistency Problem of Singularly Perturbed Differential Equations, Séminaires de Math.Appl. et Méca., U.C.L., 50 (1972).
- [29] A. HALANAY, Differential Equations, Stability, Oscillations, Time Lags, AP, New York 1966.
- [30] F.C. HOPPENSTEADT, Singular Perturbation of the Infinite Interval, Am.Math.Soc.Trans.123 (1966), 521-535.
- [31] F.C. HOPPENSTEADT, Stability in Systems with Parameters, J.Math.Anal.Appl.18 (1967), 129-134.
- [32] F.C. HOPPENSTEADT, On Systems of Ordinary Differential Equations with Several Parameters Multiplying the Derivatives, J.Diff.Eq.5 (1969), 106-116.

- [33] F. HOPPENSTEADT, Properties of Solutions of Ordinary Differential Equations with Small Parameters, *Comm. Pure Appl. Math.* 24 (1971), 807-840.
- [34] J. KISYNSKI, Sur les équations hyperboliques avec petit paramètre, *Coll. Math.* 10 (1963), 331-343.
- [35] P.V. KOKOTOVIC, A Control Engineer's Introduction to Singular Perturbations, 1972 Joint Automatic Control Conference, Stanford University, Palo Alto, California Aug. 16-18, 1972.
- [36] A.N. KOLMOGOROV and S.V. FOMIN, Measure, Lebesgue Integrals, and Hilbert Space, AP, New York 1961.
- [37] G.E. LADAS and V. LAKSHMIKANTHAM, Differential Equations in Abstract Spaces, AP, New York 1972.
- [38] J. LASALLE, Relaxation Oscillations, *Quart. J. Appl. Math.* 7 (1949), 1-19.
- [39] J. LASALLE and S. LEFSCHETZ, Stability by Liapunov's Direct Method with Applications, AP, New York 1961.
- [40] B. LATIL, Singular Perturbations of Cauchy's Problem, *J. Math. Anal. Appl.* 23 (1968), 683-698.
- [41] J.J. LEVIN, Singular Perturbations of Nonlinear Systems of Differential Equations Related to Conditional Stability, *Duke Math. J.* 23 (1956), 609-620.
- [42] J.J. LEVIN and N. LEVINSON, Singular Perturbations of Nonlinear Systems of Differential Equations and an Associated Boundary Layer Equation, *J. Rational Mech. Analysis* 3 (1954), 247-270.
- [43] N. LEVINSON, Perturbation of Discontinuous Solutions of Nonlinear Systems of Differential Equations, *Acta Math.* 82 (1951), 71-106.

- [44] V.M. MATROSOV, Le principe de comparaison avec fonction de Liapounov vectorielle I (en russe), Diff.Urav.4 (1968), 1374-1386.
- [45] V.M. MATROSOV, Le principe de comparaison avec fonction de Liapounov vectorielle II (en russe), Diff. Urav.4 (1968), 1739-1752.
- [46] V.M. MILLIONS^YČIKOV, Theory of Differential Equations with a Small Factor in the Derivative in Linear Topological Spaces, Sov.Math.Dokl. 3 (1962), 1444-1446.
- [47] E.F. MISCENKO, La théorie asymptotique des oscillations de relaxation de systèmes du second ordre (en russe), Mat. Sbornik 44 (1958), 457-480.
- [48] E.F. MISCENKO, Asymptotic Calculation of Periodic Solutions of Systems of Differential Equations Containing Small Parameter in the Derivatives, AMS Trans., ser 2, 18 (1961), 199-230.
- [49] E.F. MISHCHENKO and L.S. PONTRYAGIN, Differential Equations with a Small Parameter Attached to the Higher Derivatives and Some Problems in the Theory of Oscillations, IRE Trans. CT-7 (1960), 527-535.
- [50] Yu. I. NEIMARK and N.A. FUF^YAEV, Equations of Motion and the Role of Small Parameters in the Dynamics of Nonholonomic Systems.
Proc.Second All.Union Conf. on Theoretical Appl. Mech., Ed. L.I. Sedov, 1965, Israel Program for Scientific Translation, Jerusalem 1968, 146-156.
- [51] R.E. O'MALLEY Jr., Topics in Singular Perturbations, Lectures on Ordinary Differential Equations, New York Academic 1970, 155-260.
- [52] B.N. PANAIOTI, Equations différentielles non linéaires avec un petit paramètre dans un espace de Banach (en russe).
Tr. Inst.Mat. i Mekh. Akad. Nauk Az SSR 2 (10) (1963), 39-48.

- [53] B.N. PANAIOTI, Approximation uniforme de la dérivée de la solution du problème de Cauchy pour une équation du second ordre dans un espace de Banach (en russe) , *Isv. Akad. Nauk Azerbaidžan SSR Ser.Fiz-Tehn. Mat. Nauk* (1964), 53-64.
- [54] L.S. PONTRYAGIN, The Asymptotic Behavior of the Solutions Systems of Differential Equation with a Small Parameter Attached to the Higher Derivatives, *AMS Trans., Ser.2, 18* (1961), 295-319.
- [55] L.S. PONTRYAGIN and L.V. RODYGIN, Approximate Solution of a System of Ordinary Differential Equations Involving a Small Parameter in the Derivatives, *Soviet Math.Dokl. 1* (1960), 237-240.
- [56] S.S. PUL'KIN et N.H. ROZOV, La théorie asymptotique des oscillations de relaxations dans les systèmes avec un degré de liberté I Calcul des trajectoires (en russe), *Vest.Mosk. Univ. Ser.I Mat.Meh.* (1964), 70-82.
- [57] N. ROUCHE et J. MAWHIN, Equations différentielles ordinaires, Masson, Paris (à paraître en 1973).
- [58] G. SANSONE et R. CONTI, Nonlinear Differential Equations, Pergamon Press, New York 1964.
- [59] J.T. SCHWARTZ, Nonlinear Functional Analysis, Gordon and Breach 1964.
- [60] L.A. SEGEL, The importance of asymptotic analysis in applied mathematics, *Am.Math.Monthly 73* (1966), 7-14.
- [61] J.A. SMOLLER, Singular Perturbations of Cauchy's Problem, *Comm. Pure Appl. Math. 18* (1965), 665-677.
- [62] J.A. SMOLLER, Singular Perturbations and a Theorem of Kisynski, *J. Math. Anal. Appl. 12* (1965), 105-114.
- [63] T.E. STERN, Computer Aided Analysis of Nonlinear Networks Described by Constrained Differential Equations. *Proc. of the International Symposium on Network Theory, Belgrade (Yugoslavia) 1968, 179-190.*

- [64] A.N. TIHONOV, Sur la dépendance des solutions d'équations différentielles en fonction d'un petit paramètre, (en russe), Mat.Sb. 22 (1948), 193-204.
- [65] A.N. TIHONOV, Sur un système d'équations différentielles contenant des paramètres (en russe), Mat.Sb. 27 (69) (1950), 147-156.
- [66] A.N. TIHONOV, Systèmes d'équations différentielles, contenant un petit paramètre devant les dérivées (en russe), Uspeh. Matem. Nauk 7 (1952), 140-142.
- [67] A.N. TIHONOV, Systèmes d'équations différentielles contenant un petit paramètre devant les dérivées (en russe), Mat.Sb. 31 (73) 1952, 575-585.
- [68] V.A. TRENIGIN, Existence and Asymptotic Behavior of the Solution of the Cauchy Problem for a First Order Differential Equation with Small Parameter in a Banach Space, Soviet Math Dokl 4 (1963), 1261-1265.
- [69] A.B. VASSIL'IEVA, Asymptotic Behavior of Solutions to Certain Problems Involving Nonlinear Differential Equations Containing a Small Parameter Multiplying the Highest Derivatives, Russ. Math. Survey, vol. 18 (1963), 13-81.
- [70] A.B. VASIL'EVA and V.A. TUPČIEV, Periodic Solutions of Systems of Differential Equations with a Small Parameter at the Derivative, Close to Discontinuous Ones, Soviet Math. Dokl. 2 (1968), 179-183.
- [71] M.I. VISIK and L.A. LYUSTERNIK, Regular Degeneration and Boundary Layer for Linear Differential Equations with Small Parameter, Am.Math.Soc.Trans, ser.2, 20 (1962), 239-364.
- [72] V.M. VOLOSOV, Sur la théorie des équations différentielles non linéaire d'ordre supérieur avec un petit paramètre devant les dérivées d'ordre le plus élevé (en russe), Mat.Sbornik 31 (1952), 675-686.

- [73] V.M. VOLOSOV, Sur les systèmes d'équations différentielles avec petit paramètre (en russe), Dokl. Akad. Nauk SSSR (105) (1955), 397-400.
- [74] W.WASOW, Asymptotic Expansions for Ordinary Differential Equations, Interscience John Wiley, New York 1965.
- [75] T.WAZEWSKI, Sur un principe topologique de l'examen de l'allure asymptotique, des intégrales des équations différentielles ordinaires, Ann. Soc. Polon. Math. 20 (1947), 279-313.
- [76] YU WHY TSCHEN, Über das Verhalten von Lösungen einer Folge von Diff-Gleichungen, welches im Limes ausarten, Compositio Math 2 (1935).



Bibliothèque des
Sciences Exactes