

Faculté des sciences

Une nouvelle hypothèse concernant les glaciations du Néoprotérozoïque

Auteur : Alexandre Noël

Promoteur : Michel Crucifix

Lecteurs : Thierry Fichet, Hugues Goosse

Année académique 2019 - 2020

Physique de la Terre, des planètes et du climat

Remerciements

Je tiens à remercier toutes les personnes m'ayant permis de mener à bien ce travail.

Tout d'abord, je remercie l'ensemble de l'équipe de recherche dans laquelle j'ai eu l'opportunité d'être immergé. Merci donc à Lilian et Sergio qui m'ont parrainé tout du long, m'ont offert de nouvelles pistes de réflexion et se sont montrés présents pour m'aider à surmonter les difficultés techniques auxquelles j'ai pu être confronté.

Un grand merci à mon promoteur, Michel Crucifix, pour m'avoir donné l'opportunité de réaliser ce mémoire mais aussi pour le temps et l'aide qu'il m'a consacrés.

Merci aussi aux professeurs Hugues Goosse et Thierry Fichefet d'avoir accepté de prendre part au jury de ce mémoire.

Enfin, un merci tout particulier à Amandine pour ses relectures attentives, mais également pour m'avoir soutenu moralement et logistiquement tout au long de ce travail.

Table des matières

1	Introduction	6
1.1	Contexte	6
1.1.1	Les glaciations du Néoprotérozoïque : Traces et théories	6
1.1.2	Le Modèle COPSE	10
1.1.2.1	Genèse	10
1.1.2.2	Contenu	11
1.1.3	L'étude de B.Mills	13
1.2	Objectifs	14
2	Modèles et méthodes numériques	16
2.1	Implémentation du Modèle	16
2.1.1	Contenu	16
2.1.2	Paramétrisation originelle du feedback glace-albédo	17
2.1.3	Pistes d'amélioration dans la paramétrisation de l'albédo	19
2.1.4	Paramétrisation à la Budyko-Sellers	20
2.1.5	Ajustements supplémentaires	21
2.2	Notions théoriques à propos des systèmes dynamiques	22
2.3	Méthodes de continuation	27
2.3.1	Méthodes de base	27
2.3.2	Méthode des pseudo-longueurs d'arcs	30
2.3.3	Méthode de Moore-Penrose	33
2.3.4	Logiciels de continuation	35
2.3.5	PyDSTool et PyCont	36
2.3.6	Traitements des équilibres et bifurcations	36
2.3.7	Traitement des cycles limites	37
3	Résultats	39
3.1	COPSE	39
3.2	Paramétrisation en <i>arctangente</i> de l'albédo	41
3.2.1	Simulations temporelles et comparaison avec (Mills 2011)	41
3.2.2	analyse de bifurcations	45
3.3	Paramétrisation à la Budyko-Sellers	48
4	Discussion	55
4.1	Conclusions	55
4.2	Fiabilité des résultats et possibilités d'amélioration	56
5	Bibliographie	58

Liste des figures

1	Echelle des temps géologiques	7
2	Répartition géographique de dépôts glaciaires au Néoprotérozoïque	8
3	Discontinuité dans les strates géologiques datant du Néoprotérozoïque	9
4	Cycle du Carbone	13
5	Paramétrisation revue de l'albédo	20
6	Exemple de bifurcation col-noeud	23
7	Exemple de bifurcation fourchette	24
8	Diagramme de bifurcation fourchette	24
9	Visualisation de cycles limites	25
10	Evolution temporelle de l'oscillateur de Van der Pol	25
11	Dynamique de l'oscillateur de Van der Pol	26
12	Plan de phase de l'oscillateur de Van der Pol	27
13	Continuation par paramétrisation naturelle	29
14	Continuation par tangente	30
15	Méthode de Keller	33
16	Continuation de Moore-Penrose	35
17	Evolution temporelle de la température avec COPSE	40
18	Evolution temporelle de la température (Bergman 2004)	40
19	Diagramme de bifurcation avec COPSE	41
20	Evolution temporelle de la température et l'albédo	42
21	Evolution temporelle de la température selon B.Mills	42
22	Evolution temporelle du Carbone et du CO_2	43
23	Evolution temporelle de la concentration en CO_2 et du réservoir de Carbone	43
24	Evolution temporelle du réservoir de Phosphore	43
25	Portrait de phase Température/Carbone	45
26	Diagramme de bifurcations par rapport à ρ	46
27	Traitement du paramètre ρ par B.Mills	47
28	Diagramme de bifurcations par rapport à S	47
29	Diagramme de bifurcations par rapport à ρ (BS)	48
30	Diagramme de bifurcations par rapport à S (BS)	49
31	Diagramme de bifurcations par rapport à ρ (BS), amplitude thermique amplifiée	50
32	Diagramme de bifurcations par rapport à S (BS) avec amplitude thermique amplifiée	51
33	Diagramme de bifurcations par rapport à S (BS) avec amplitude thermique amplifiée	51
34	Evolution temporelle du réservoir de carbone avec orbites canard	53
35	Evolution temporelle de la température avec orbites canard	53

36	Portrait de phase Carbone-température, orbites canard	54
37	Zoom orbites canard	54

Liste des tableaux

1	Système d'équations du modèle COPSE	11
2	Forçages du modèle COPSE	12
3	Système d'équations du modèle COPSE réduit	16
4	Fonctions du modèle COPSE réduit	16
5	Constantes du modèle COPSE réduit	17

1 Introduction

1.1 Contexte

1.1.1 Les glaciations du Néoprotérozoïque : Traces et théories

Le Protérozoïque est un éon des temps géologiques s'étendant de -2500 Ma (millions d'années) à -541 Ma et est l'un des moins abondamment documentés. Cette période de l'histoire de la Terre est en effet tellement ancienne que les traces géologiques encore accessibles de nos jours sont rares, celles-ci ont été progressivement perdues au fil de l'activité tectonique de la Terre par subduction, métamorphisme, érosion ou tout autre processus.

Les roches qui ont été trouvées datant de cet éon indiquent toutefois des conditions climatiques très éloignées de celles que nous connaissons actuellement. Parmi les événements climatiques qui ont pu être détectés, les plus importants semblent être l'occurrence de périodes de glaciation extrêmes par les températures atteintes mais aussi l'extension supposée des calottes glaciaires survenues pendant le Néoprotérozoïque (de -1000 Ma à -541 Ma). Lors de ces événements, on estime que les calottes glaciaires se sont étendues au moins jusque dans la zone intertropicale, voire jusqu'à couvrir l'ensemble de la planète.

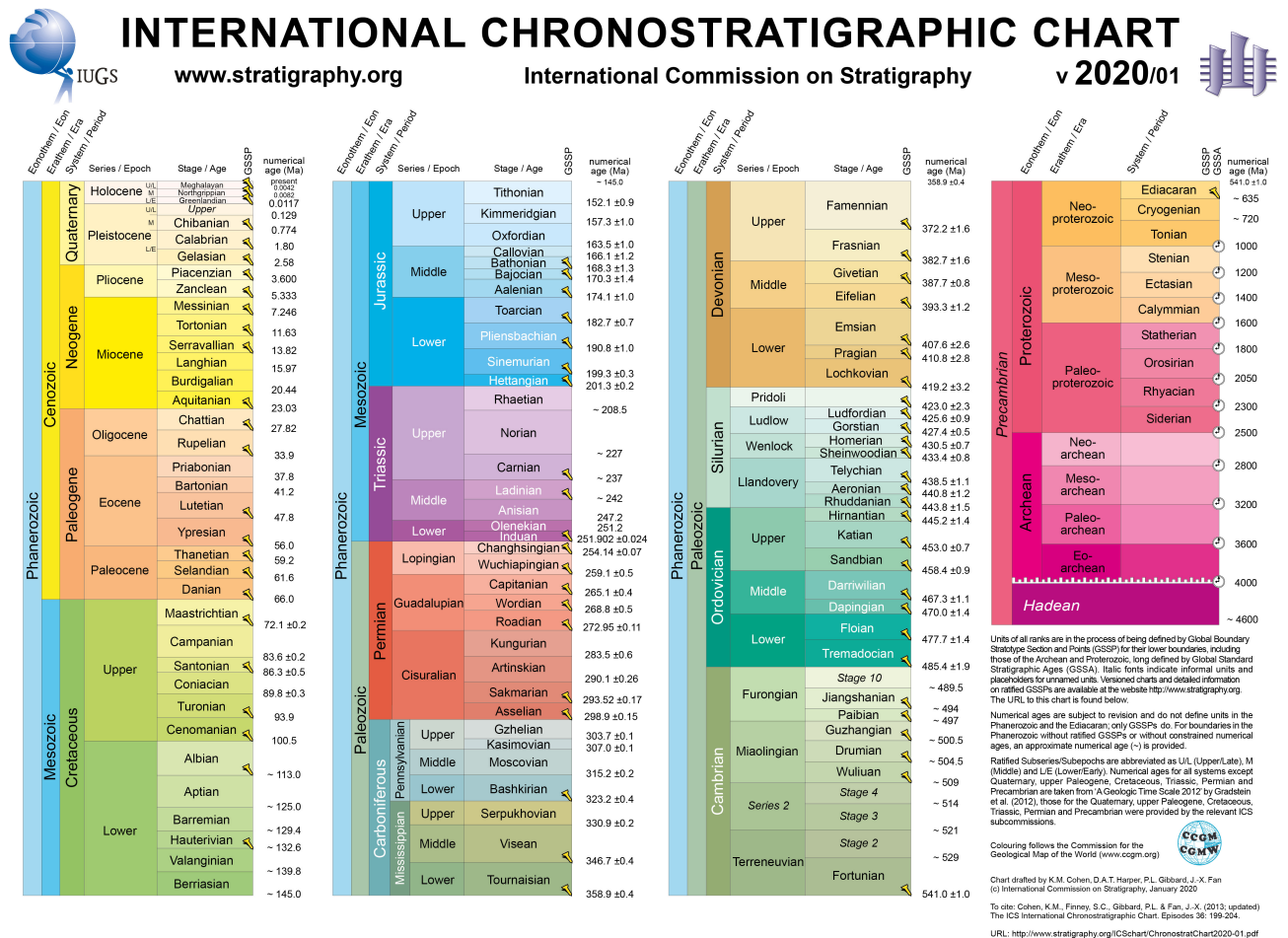


Fig. 1 – Echelle des temps géologiques (www.stratigraphy.org). Le Néoprotérozoïque s'étend de -1000 Ma à -541 Ma.

Ces épisodes de glaciation sont parmi les plus anciens qui fassent consensus à ce jour. Des sédiments glaciaires (tillites, dépôts fluvio-glaciaires, dépôts morainiques, dropstones,...) ont été retrouvés dans un grand nombre de régions couvrant pratiquement l'ensemble des masses continentales. Parmi celles-ci on peut notamment citer le Wyoming, la partie canadienne de la zone des grands lacs, l'Europe du Nord et l'Afrique du Sud (Grotzinger 2014). Lors de ces événements, on estime que la température globale a atteint des valeurs extrêmes, jusqu'à -40°C . (Grotzinger 2014). Au moins deux glaciations majeures sont survenues au Néoprotérozoïque, la glaciation sturtienne (-700 Ma) et la glaciation marinoenne (-635 Ma) (Stanley 2014). La figure 2 présente la localisation des dépôts glaciaires retrouvés. Un troisième épisode glaciaire majeur est survenu durant le Néoprotérozoïque, la glaciation Gaskiers (vers -580 Ma), néanmoins moins importante que les deux autres au sens où les sédiments glaciaires ne sont pas retrouvés à des latitudes aussi basses, et où la durée de la glaciation aurait été plus courte (Stanley 2014).

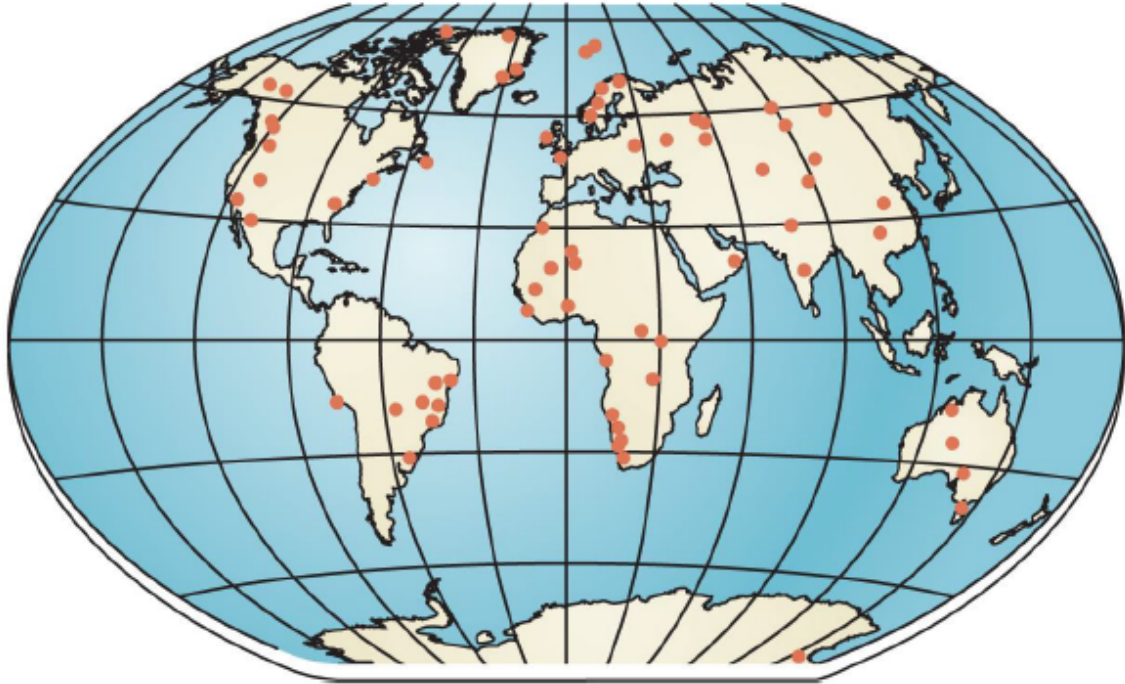


Fig. 2 – Répartition géographique de dépôts glaciaires datant du Néoprotérozoïque (Stanley 2014, page 290). Ces dépôts se retrouvent sur tous les continents, aussi bien en marge continentale qu'à l'intérieur des Terres. Certains d'entre eux se sont formés dans des régions dont on suppose qu'elles étaient proches de l'équateur au Néoprotérozoïque.

D'un point de vue stratigraphique, les couches datant du Néoprotérozoïque mettent en évidence une transition abrupte dans les dépôts au sommet des sédiments glaciaires. On observe sur la figure 3 un passage net de sédiments glaciaires (tillites, dropstones) du Néoprotérozoïque à des roches carbonatées (calcaire, dolomite,...) typiques d'environnements marins plus chauds. Il existe par ailleurs plusieurs hypothèses concernant la formation de ces roches carbonatées appelées "Cap carbonates". L'une d'entre elles consiste à supposer que l'atmosphère en sortie de glaciation contenait des quantités très importantes de CO_2 . L'océan et l'atmosphère qui étaient isolés l'un de l'autre par une couche de glace pendant la période de glaciation ne pouvaient pas échanger de carbone. Une fois cette couche de glace disparue, des transferts importants de carbone ont eu lieu de l'atmosphère (sous forme de CO_2) vers l'océan (sous forme de H_2CO_3 ou d'ions HCO_3^- et CO_3^{2-}), entraînant d'importantes précipitations de $CaCO_3$ (Hoffman 1998). Ceci expliquerait donc la formation des cap carbonates observés dans de nombreux endroits du monde, datés du Néoprotérozoïque.



Fig. 3 – Discontinuité dans les strates géologiques datant du Néoprotérozoïque au Sud-Ouest de l'Afrique (Stanley 2014, page 290). Les roches sombres de l'étage inférieur sont des tillites glaciaires tandis que les roches claires qui se trouvent au-dessus sont des cap carbonates.

Ces traces ont conduit plusieurs chercheurs à formuler l'hypothèse "Snowball Earth", historiquement (Harland 1964) et plus récemment (Kirschvink 1992) et (Hoffman 1998). Celle-ci explique la présence de sédiments glaciaires jusqu'à de très basses latitudes par des glaciations extrêmes lors desquelles les calottes polaires se seraient étendues vers l'équateur pour couvrir la Terre entière.

L'hypothèse d'une Terre boule de neige est néanmoins discutable. Certains auteurs en effet (Cowen 2001, Lewis 2007) mettent en doute le fait qu'une couche de glace ait pu recouvrir l'ensemble du globe jusqu'aux plus basses latitudes. Une hypothèse alternative est qu'une couche de glace pourrait en effet avoir gagné les plus basses latitudes sur les continents, mais la banquise ne se serait pas étendue à de telles latitudes. Selon cette hypothèse, la présence de fossiles d'organismes appelés acritarchs dans les dépôts océaniques montre qu'il aurait existé des zones tropicales moins froides. De plus, l'alternance de dépôts glaciaires et marins pendant les périodes de glaciations retrouvés dans la péninsule arabe indiqueraient des oscillations en marge des couvertures de glace plutôt qu'une glaciation totale. Cette théorie est appelée Terre boule de névasse ("Slushball Earth").

Quant au fait de comprendre comment des glaciations d'une telle ampleur purent avoir lieu au Néoprotérozoïque, nous pouvons avancer plusieurs éléments d'explication. Tout d'abord, il faut noter que la Terre recevait à l'époque moins d'énergie en provenance du Soleil. En effet, au fur et à mesure que le Soleil consomme l'hydrogène qui le compose en produisant de l'hélium et des éléments plus lourds, son cœur devient plus dense et cela

résulte en une augmentation de sa température et donc de l'énergie rayonnée. Ainsi, au lieu d'une insolation moyenne de $1368W/m^2$ de nos jours, on estime que la Terre recevait une insolation de $1298W/m^2$ il y a environ 700 Ma. Il semblerait de plus que la disposition paléogéographique des continents ait joué un rôle important. D'après les reconstructions, toutes les masses continentales majeures auraient été regroupées durant le Néoprotérozoïque, formant alors le supercontinent Rodinia (Stanley 2014). Cette disposition particulière influence fortement la circulation océanique et donc la répartition de chaleur.

1.1.2 Le Modèle COPSE

1.1.2.1 *Genèse*

Cela fait plusieurs décennies que les géochimistes et les climatologues tentent de concevoir des modèles permettant de reproduire les variations climatiques à tous les étages de l'histoire géologique. Pour ce qui est des échelles de temps les plus grandes, nous citons plusieurs modèles écrits pour comprendre les variations climatiques induites par les cycles géochimiques majeurs, ceux-ci interviennent de façon plus ou moins explicite dans la construction du modèle que nous utilisons (COPSE).

Le premier d'entre eux est le modèle de Kump et Garrels paru en 1986 (Kump 1986). Ce modèle fut l'un des tous premiers dont l'objectif était de reproduire les variations climatiques du Phanérozoïque sur base des flux géologiques entre les réservoirs de carbone, d'oxygène et de soufre. Nous noterons que la modélisation du cycle du soufre dans COPSE est directement inspirée de ce modèle.

Le modèle *Geocarb*, conçu par R.A. Berner dans le courant des années 90 (1991 *Geocarb I*, 1994 *Geocarb II*, 2001 *Geocarb III*). Celui-ci avait pour objectif de reconstruire les variations de CO_2 atmosphérique au cours du Phanérozoïque par une modélisation détaillée du cycle géologique du carbone. Nous noterons que la modélisation de ce cycle dans COPSE en est directement inspirée.

Enfin, les modèles *Redfield Revisited* de T.M.Lenton (Lenton 2000a et 2000b) sont conçus pour reproduire le comportement des cycles de l'oxygène, de l'azote et du phosphore dans le but d'étudier l'impact du rapport entre azote et phosphore océanique dans la disponibilité des nutriments pour les micro-organismes.

Le modèle COPSE (Carbone, Oxygène, Phosphore, Soufre et leur Evolution) est la combinaison de ces trois modèles. En paramétrisant les couplages entre les différents réservoirs issus des modèles décrits ci-dessus, on forme un modèle englobant tous les processus géologiques majeurs impliqués dans les variations climatiques à l'échelle géologique, au cours de l'éon Phanérozoïque (de -541 Ma à aujourd'hui).

1.1.2.2 Contenu

Le modèle COPSE comprend la dynamique des réservoirs d'Oxygène (O), d'Azote (N), de Phosphore (P), de Carbone atmosphérique et océanique (A), des roches carbonatées (carbone oxydé) (C), de carbone organique (réduit) (G), du soufre (S), de pyrite (soufre réduit) (PYR) et de gypse (soufre oxydé) (GYP) en fonction de l'activité géologique terrestre. Aux processus tectoniques et géologiques, le modèle couple la composante biotique du système terrestre en tenant compte de l'évolution de l'activité végétale tant terrestre que marine. Le but initial du modèle fut de reproduire les courbes de concentration atmosphérique en CO_2 , en O_2 , la température ainsi que les ratios isotopiques de carbone et de soufre en utilisant divers forçages géologiques et évolutifs. Le tableau 1, issu de l'article (Bergman 2004), en présente les équations.

Réservoir	Equation d'évolution	Taille initiale
Phosphates océaniques (PO_4)	$\frac{dP}{dt} = psea - mopb - fepb - capb$	$3.1 \cdot 10^{15} \text{ mol}$
Azote océanique (NO_3)	$\frac{dN}{dt} = nfix - denit - monb$	$4.35 \cdot 10^{16} \text{ mol}$
Oxygène atmosphérique et océanique (O_2)	$\frac{dO}{dt} = locb + mocb - oxidw - ocdeg + 2mpsb - 2pyrw$	$3.7 \cdot 10^{19} \text{ mol}$
Carbone atmosphérique et océanique (CO_2)	$\frac{dA}{dt} = oxidw + ocdeg + carbw + ccdeg - locb - mocb - mccb$	$3.193 \cdot 10^{18} \text{ mol}$
Carbone organique (réduit)	$\frac{dG}{dt} = locb + mocb - oxidw - ocdeg$	$1.25 \cdot 10^{21} \text{ mol}$
Carbonates (Carbone oxydé)	$\frac{dC}{dt} = mccb - carbw - ccdeg$	$5.0 \cdot 10^{21} \text{ mol}$
Sulfates océaniques	$\frac{dS}{dt} = gypw + pyrw - mgsb - mpsb$	$4.0 \cdot 10^{19} \text{ mol}$
Pyrite (Soufre réduit)	$\frac{dPYR}{dt} = mpsb - pyrw$	$1.8 \cdot 10^{20} \text{ mol}$
Gypse (Soufre oxydé)	$\frac{dGYP}{dt} = mgsb - gypw$	$2.0 \cdot 10^{20} \text{ mol}$

TABLE 1 – Système d'équations du modèle COPSE (Bergman 2004)

L'évolution de chaque réservoir est donnée sous forme de système dynamique où le membre

de gauche représente les variations du réservoir en moles et où le membre de droite représente les flux géologiques, c'est à dire les phénomènes géologiques responsables de la création ou la destruction d'une partie du réservoir considéré. Ces flux géologiques peuvent être des phénomènes d'érosion, d'enfouissement, de dégazage voire également des processus biotiques comme la dénitrification, la fixation de l'azote, etc. La liste exhaustive est disponible dans l'article de N.Bergman (2004).

Les forçages utilisés dans COPSE sont des reconstructions des forçages géologiques et astronomiques rencontrés par la Terre au cours des derniers 541 Ma. Nous les listons dans le tableau 2. Ceux-ci comprennent l'augmentation de l'insolation moyenne due à l'activité du Soleil, le dégazage volcanique et métamorphique, l'activité tectonique, l'apparition et l'évolution des formes de vie végétales et leur colonisation des milieux continentaux, etc. Le tableau 2 est issu de l'article (Bergman 2004) et dresse une liste plus exhaustive des forçages utilisés.

	Forçage modélisé	Intervalle de valeurs	Source
D	Dégazage volcanique et métamorphique	0.98 – 1.73	Geocarb II
U	Surrections tectoniques	0.53 – 1.17	Geocarb II
E	Evolution de la végétation continentale	0 (Cambrien) - 1 (Crétacé)	Bergman (2003)
W	Effet de la végétation continentale sur l'érosion	0 (Cambrien) - 1 (Crétacé)	Geocarb I
B	Rapport entre l'enfouissement des carbonates en mers profondes et peu profondes	0.75 (Cambrien) - 1 (Présent)	Geocarb I
I	Insolation solaire	+4.4% sur le Phanérozoïque	Caldeira and Kasting (1992)

TABLE 2 – Forçages du modèle COPSE (Bergman 2004)

La figure 4 donne un aperçu des échanges entre réservoirs modélisés dans COPSE. L'exemple donné ici concerne le cycle du carbone. On peut y observer les interactions entre les trois réservoirs concernés (Oxygène (O), Carbone atmosphérique et océanique (A) et carbone organique crustal (G)). Les forçages W (Impact de la végétation sur l'érosion) et E (Evolution de la végétation) sont couplés au cycle. Les flux géologiques sont représentés par les cercles blancs, et sont responsables des échanges entre les réservoirs. L'océan, la croûte terrestre et l'atmosphère sont représentés de façon schématique afin de visualiser le contexte physique dans lequel se déroulent les processus géologiques. Cette figure permet de visualiser de façon pratique l'information contenue dans les équations, de façon générale une flèche pleine représente un effet proportionnel et une flèche en pointillés un effet inversé-

ment proportionnel entre la grandeur d'où provient la flèche et la grandeur vers laquelle elle est dirigée. On observe par exemple qu'une augmentation de l'enfouissement de carbone organique (*locb* et *mocb*) fait diminuer la quantité de carbone du réservoir *A* pour faire augmenter la quantité d'oxygène. Les flux se terminant par la lettre "w" désignent des processus d'érosion (weathering), ceux se terminant par "deg" concernent le dégazage (degassing) et ceux se terminant par "b" concernent un enfouissement (burial). Les processus commençant par "carb" concernent les carbonates, "sil" les silicates et ceux contenant "oc", le carbone organique. Les autres processus représentés sur le schéma sont la nouvelle production marine (*newp*) et la productivité primaire de la végétation (*V*). On comprend ainsi clairement le lien entre les réservoirs, l'impact des forçages et l'on comprend a fortiori le fonctionnement de ce cycle géologique dans le système. D'autres cycles sont bien sûr modélisés dans COPSE, les schémas y afférent sont disponibles dans (Bergman 2004).

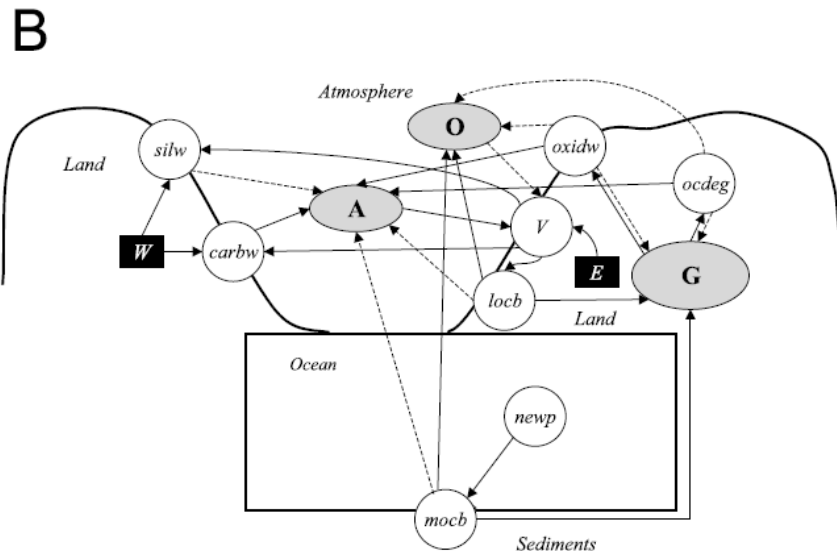


Fig. 4 – Cycle géologique du Carbone atmosphérique et organique couplé à l'Oxygène tel que modélisé dans COPSE (Bergman 2004)

1.1.3 L'étude de B.Mills

En 2011 paraissait dans la revue *Nature* un article écrit par Benjamin Mills qui traitait des épisodes de glaciation globale du Néoprotérozoïque. Dans le cadre de ce travail, l'ensemble de la dynamique de COPSE n'étant pas nécessaire, le modèle a été réduit pour ne conserver que les réservoirs de Phosphore et de Carbone atmosphérique et océanique.

Ce modèle réduit fut alors utilisé pour simuler l'ère précédant le Phanérozoïque, à savoir le Néoprotérozoïque. Afin de reproduire les variations climatiques ayant pu amener à l'entrée et à la sortie des glaciations globales, un nouveau mécanisme fut proposé : l'existence d'une limite dans le taux de transport par érosion. A la sortie d'une glaciation, on suppose

que la concentration en CO_2 atmosphérique est élevée et le taux d'érosion de roches silicatées augmente puisque la couche de glace qui l'isolait disparaît. En s'érodant, les roches silicatées captent du CO_2 qui ne peut dès lors plus s'accumuler dans l'atmosphère. Ces grandeurs finissent alors par atteindre un équilibre après un certain temps.

Estimer le temps nécessaire au rétablissement de cet équilibre est loin d'être évident. Des premières études sur le sujet suggéraient un temps caractéristique de l'ordre de quelques milliers d'années (Higgins, Schrag 2003). Cependant il fut montré par la suite que ce temps est nettement insuffisant si l'on étudie plus en détail le cycle hydrologique pour des pressions partielles très élevées de CO_2 dans l'atmosphère. Il apparaît alors que l'intensité du cycle hydrologique, et notamment le ruissellement de l'eau sur les continents n'augmente que peu (jusqu'à 22% selon (Le Hir 2009)) dans de telles conditions, contrairement à ce qui était supposé jusqu'alors. Cela conduit à un temps de rétablissement de l'équilibre après la sortie de glaciation de l'ordre de quelques millions d'années (Le Hir 2009). Or les relevés géologiques indiquent que les entrées en glaciation ont eu lieu à des intervalles de quelques *dizaines* de millions d'années. B. Mills (2011) tente d'expliquer le délai qui sépare les entrées en glaciation au Néoprotérozoïque par un taux d'érosion limité cinétiquement. Cette démarche est d'une certaine façon dans le prolongement de celle entreprise par (Le Hir 2009) dont les résultats servent de référence. Dans (Mills 2011), cette contrainte sur le taux d'érosion cinétique amène à des temps de stabilisation du système à la sortie d'une glaciation plus élevés que pour (Le Hir 2009), justement de l'ordre de la *dizaine* de millions d'années.

L'ajout d'un feedback glace-albédo dans le système simplifié du modèle COPSE conduit ainsi à des oscillations potentiellement compatibles avec les glaciations dont témoignent les traces géologiques. De cette façon, l'écart temporel entre les deux glaciations majeures pourrait être expliqué par une limitation du taux d'érosion des roches silicatées (Mills 2011).

1.2 Objectifs

Notre objectif au cours de ce travail sera de se baser sur l'article écrit par B.Mills (2011) afin de réaliser dans un premier temps une étude en système dynamique du modèle COPSE réduit. Ce faisant, nous proposerons quelques modifications structurelles et conceptuelles du modèle afin de le rendre plus réaliste d'un point de vue physique. Nous reconstruirons également le modèle COPSE pour en comprendre le comportement et le fonctionnement. Ceci nous permettra de mieux cerner le contexte de l'étude (Mills 2011).

Lors de l'analyse en système dynamique, nous examinerons la stabilité des oscillations observées par B. Mills (2011). Nous déterminerons entre autres la propension du modèle à garder le même comportement qualitatif sous changements de quelques paramètres que

nous avons estimés critiques. Nous tenterons ainsi de localiser d'éventuelles bifurcations et de comprendre ce qu'elles représentent d'un point de vue physique.

Enfin, nous proposerons une paramétrisation alternative de l'albédo et étudierons la façon dont cela affecte le comportement dynamique du modèle. Nous donnerons ainsi quelques éléments par rapport à la viabilité de l'hypothèse formulée par B. Mills dans son étude.

En appliquant cette démarche, nous évaluerons la pertinence et l'intérêt de l'hypothèse présentée dans (Mills 2011) ainsi que la robustesse des résultats qui y sont présentés à la lumière des diagrammes de bifurcations que nous aurons réalisés.

2 Modèles et méthodes numériques

2.1 Implémentation du Modèle

2.1.1 Contenu

Nous développons maintenant le contenu du modèle COPSE réduit tel qu'utilisé dans (Mills 2011). Les tableaux qui suivent sont directement issus de cet article. Le tableau 3 présente le système dynamique et les fonctions constitutives du modèle COPSE simplifié utilisés dans (Mills 2011). Celui-ci conserve deux réservoirs du modèle COPSE initial.

Réservoir	Equation d'évolution	Taille initiale
Phosphates océaniques	$\frac{dP}{dt} = phosw - mopb - fepb - capb$	$3.1 \cdot 10^{15} \text{ mol}$
Carbone atmosphérique et océanique	$\frac{dA}{dt} = oxidw + ocdeg + ccdeg - mocb - silw$	$3.193 \cdot 10^{18} \text{ mol}$

TABLE 3 – *Système d'équations du modèle COPSE réduit (Mills 2011)*

Le tableau 4 présente le développement des termes apparaissant dans les équations du système dynamique apparaissant dans le tableau 3. La signification de chaque terme correspond à celle que nous avons énoncée dans la section 1.1.2.2.

Fonction	Equation
mocb	$k_1 \left(\frac{P}{P_0} \right)^2$
phosw	$k_8 \left(\frac{2}{12} \frac{silw}{silw_0} + \frac{5}{12} \frac{oxidw}{oxidw_0} \right)$
mopb	$\frac{mocb}{CP_{sea}}$
capb	$k_2 \frac{mocb}{mocb_0}$
fepb	$\frac{k_3}{k_4} (1 - anox(P)) \frac{mocb}{mocb_0}$
anox	$1 - k_4 \left(\frac{P_0}{P} \right)$
silw	$k_5 \{ (W_{max} - W_K) (1 + \exp(-k_3 (W_K - W_{max})))^{-1} + W_K \}$
W_K	$W_{glacial} \rho \exp(k_1 \frac{T-T_0}{TT_0}) (\exp(k_2 (T - T_0)))^{0.65} \sqrt{NCO_2}$
oxidw	$k_7 W_{glacial}$
ocdeg	$k_9 D$
ccdeg	$k_{10} D$

TABLE 4 – *Fonctions du modèle COPSE réduit (Mills 2011)*

Le tableau 5 présente les constantes utilisées dans (Mills 2011) qui se rapportent aux fonctions du tableau 4. Hormis k_4 et CP_{sea} , ces constantes représentent les valeurs estimées des flux géologiques dans les conditions actuelles.

Constante	Valeur	rôle
k_1	$9 \cdot 10^{15} \text{ mol } C \text{ yr}^{-1}$	Enfouissement de carbone organique
k_2	$1.5 \cdot 10^{10} \text{ mol } P \text{ yr}^{-1}$	Enfouissement de phosphates de calcium
k_3	$6 \cdot 10^9 \text{ mol } P \text{ yr}^{-1}$	Enfouissement de phosphates de fer
k_4	0.86	Fraction d'oxygène initiale
k_5	$6.65 \cdot 10^{12} \text{ mol } C \text{ yr}^{-1}$	Erosion de silicates
k_6	$1.335 \cdot 10^{13} \text{ mol } C \text{ yr}^{-1}$	Erosion de carbonates
k_7	$7.75 \cdot 10^{12} \text{ mol } C \text{ yr}^{-1}$	Erosion par oxydation
k_8	$5.7 \cdot 10^{10} \text{ mol } P \text{ yr}^{-1}$	Erosion de phosphore réactif
k_9	$1.25 \cdot 10^{12} \text{ mol } C \text{ yr}^{-1}$	Dégazage de carbone organique
k_{10}	$6.65 \cdot 10^{12} \text{ mol } C \text{ yr}^{-1}$	Dégazage de carbonates
CP_{sea}	250 mol/mol	Rapport d'enfouissement Carbone/Phosphore

TABLE 5 – Constantes du modèle COPSE réduit (Mills 2011)

Les tableaux présentés ci-dessus présentent donc la base du modèle qui est issue de COPSE (Bergman 2004). A ce système vient s'ajouter un feedback glace albédo que nous développons en détail dans la section suivante.

2.1.2 Paramétrisation originelle du feedback glace-albédo

Les oscillations qui surviennent dans le modèle de (Mills 2011) reposent en majeure partie sur l'implémentation du feedback glace-albédo. La paramétrisation des dépendances entre température, albédo et d'autres grandeurs (CO_2 , taux d'érosion et autres) joue donc un rôle crucial dans la reproduction des conditions climatiques lors des épisodes de glaciation du Néoprotérozoïque. Dans (Mills 2011), le feedback glace albédo est paramétrisé comme suit.

La température est calculée sur base du bilan radiatif terrestre sous forme d'une équation diagnostique,

$$T = T_{EBM} + \mu F_{CO_2} .$$

Le premier terme est la température d'équilibre radiatif que nous pouvons écrire (Goosse 2015)

$$T_{EBM} = \left(\frac{S(1 - \alpha)}{4\sigma(1 - \frac{\epsilon}{2})} \right)^{\frac{1}{4}},$$

avec S la constante solaire dont la valeur pour le Néoprotérozoïque est estimée à $1298W/m^2$. α est l'albédo, σ la constante de Stefan-Boltzmann et ϵ la transmittivité de la Terre estimée à 0.773.

A ce point de référence vient s'ajouter une perturbation due au forçage radiatif des gaz à effet de serre, dont nous ne considérons que le dioxyde de carbone. Dans le second terme, nous avons $\mu = 0.1815$, le paramètre de sensibilité climatique, et F_{CO_2} qui représente le forçage radiatif dû aux variations de CO_2 . Celui-ci est donné sous forme polynomiale par

$$F_{CO_2} = a\lambda^4 + b\lambda^3 + c\lambda^2 + d\lambda + e,$$

avec $a = 0.2507$, $b = 3.9216$, $c = 23.8113$, $d = 83.4113$, $e = 131.6138$ et enfin $\lambda = \log_{10}(CO_2^{atm})$. La concentration en CO_2 atmosphérique est quant à elle modélisée par

$$CO_2^{atm} = \phi = \frac{gA}{A + h},$$

avec $g = 0.78$, A le réservoir en carbone atmosphérique et océanique repris de COPSE et $h = 10^{20} \text{ mol}$ si $\alpha = 0.3$ et $h = 5.3 \cdot 10^{20} \text{ mol}$ si $\alpha = 0.6$. La formulation de F_{CO_2} est issue de (Clough 2005) et (Goldblatt 2009) et celle de CO_2^{atm} de (Lewis 1998).

La paramétrisation de l'albédo s'écrit quant à elle lorsque la Terre n'est pas couverte de glace

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_{base} & : T > T_{crit} \\ \alpha_{ice} & : T \leq T_{crit} \end{cases}.$$

Lorsqu'elle est couverte de glace

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_{base} & : T > T_{escape} \\ \alpha_{ice} & : T \leq T_{escape} \end{cases},$$

où l'on définit $\alpha_{base} = 0.3$, $\alpha_{ice} = 0.6$, $T_{crit} = 283K$ la température d'entrée en glaciation et $T_{escape} = 263K$ la température de sortie de glaciation.

Enfin, un aspect central de l'étude de B.Mills (2011) réside dans la formulation du taux d'érosion de roches silicatées qu'il suppose cinétiquement limité jusqu'à ce que la limite de transport de matériel érodé soit atteinte. Cela s'écrit

$$W = \begin{cases} W_K & : W_K < W_{max} \\ W_{max} & : W_K \geq W_{max} \end{cases},$$

avec W le taux d'érosion total, W_K le taux d'érosion limité cinétiquement et W_{max} le taux maximal de transport. La transition entre le taux d'érosion limité cinétiquement et le taux maximal de transport se fait via une fonction sigmoïde définie comme

$$W = (W_{max} - W_K) (1 + e^{-100(W_{max} - W_K)})^{-1} + W_K,$$

qui permet au taux d'érosion de tendre vers une asymptote ayant pour valeur W_{max} lorsque $W_K \geq W_{max}$.

Les autres fonctions qui entrent en compte dans le modèle sont directement dérivées de COPSE, moyennant adaptation. Le lecteur intéressé trouvera davantage de détails dans (Mills 2011, supplementary material).

2.1.3 Pistes d'amélioration dans la paramétrisation de l'albédo

Bien que le modèle de B.Mills (2011) produise des oscillations entre événements Snow-ball Earth et périodes interglaciaires qui peuvent s'apparenter aux conditions climatiques suggérées par les relevés géologiques, celui-ci semble néanmoins perfectible sur certains aspects. Notre attention se porte essentiellement sur la paramétrisation de l'albédo. D'un point de vue physique, il semble peu intuitif d'imaginer un albédo qui puisse dépendre de l'histoire du système, même s'il est raisonnable d'avoir deux températures différentes pour un même forçage en fonction de l'histoire de celui-ci.

Nous proposons une paramétrisation de l'albédo qui concorde mieux avec notre intuition physique, et surtout, qui n'est plus dépendante de l'histoire du système. Celle-ci nous est inspirée de l'article de (Müller-Stoffels 2012) qui présente et compare entre elles plusieurs paramétrisations possibles de l'albédo en fonction de la température dans le cadre d'une étude sur la réversibilité de la diminution de l'étendue de la banquise arctique. Notons que (Müller-Stoffels 2012) propose une paramétrisation en *tangente hyperbolique*. Nous prenons à la place une fonction *arctangente* que nous normalisons, de telle façon que ces deux paramétrisations sont équivalentes.

$$\alpha = 0.5 - \frac{1}{8} \arctan(\gamma T) \frac{2}{\pi},$$

où γ est un paramètre qui influence la pente de la fonction *arctangente* et où T est exprimée par commodités en °C. Nous avons ainsi une relation entre albédo et température a priori plus réaliste. Mais peut-on en déduire que la disparition de l'hystérèse implique

la destruction complète des oscillations ? La réponse à cette question est heureusement négative. En effet, en fonction de la valeur du paramètre γ , comme nous l'observerons plus en détail dans la suite, le système peut exhiber soit un équilibre stable, soit deux équilibres stables et un instable entre lesquels il oscillera à cause du forçage radiatif dû au dioxyde de carbone.

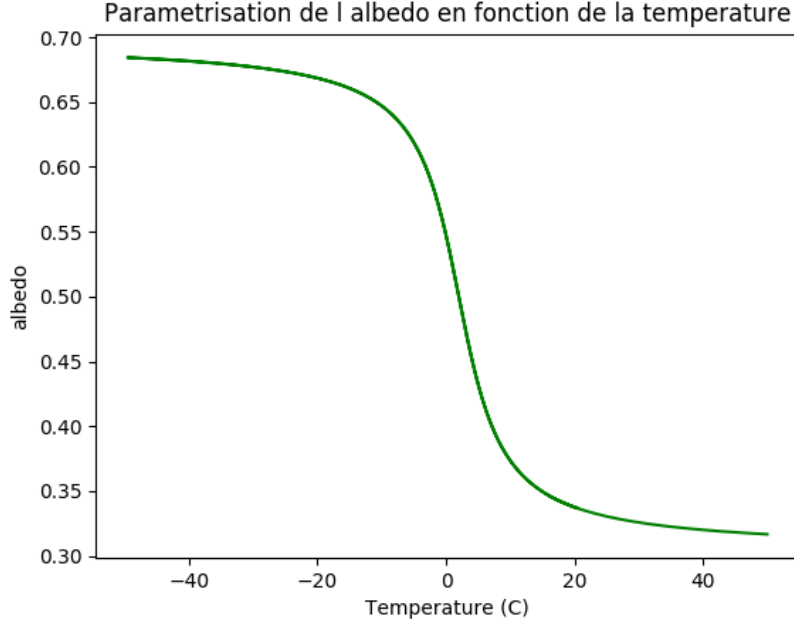


Fig. 5 – Paramétrisation de l'albédo en fonction de la température

2.1.4 Paramétrisation à la Budyko-Sellers

Les travaux de Budyko (1969) et Sellers (1969) font office de standards en ce qui concerne les modèles radiatifs à une dimension. Leurs paramétrisations se retrouvent dans une grande variété de publications depuis les années 70. Ces deux chercheurs ont indépendamment développé un modèle radiatif en une dimension (la latitude). Dans leurs travaux, la Terre est subdivisée en un certain nombre de bandes de latitudes dont la température varie en fonction de l'insolation reçue et des transferts de chaleur entre latitudes voisines. De ces modèles, nous reprenons, moyennant adaptation, la paramétrisation de l'albédo. Pour une bande de latitude i , celui-ci s'exprime

$$\alpha_i = \begin{cases} \alpha_{ice} & \text{si } T < T_{ice} \\ \alpha_{land} & \text{si } T > T_{land} \\ \alpha_{ice} + \left[\alpha_{land} - \alpha_{ice} \frac{T - T_{ice}}{T_{land} - T_{ice}} \right] & \text{autrement} \end{cases},$$

où α_{ice} correspond à l'albédo lorsque la Terre est couverte de glace, α_{land} lorsqu'elle en est dépourvue et nous avons bien sûr $T_{ice} < T_{land}$. Le modèle est ainsi très simple, en dessous

de T_{ice} , la bande de latitude est entièrement recouverte de glace, au dessus de T_{land} elle en est dépourvue et dans le cas où la température est comprise entre ces deux valeurs de température, l'albédo est déterminé par une interpolation linéaire entre α_{land} et α_{ice} .

Traiter des modèles climatiques avec une extension spatiale n'est toutefois pas l'objet de notre étude, nous allons procéder de façon légèrement différente. Pour commencer, nous faisons l'hypothèse que la température sur Terre varie linéairement entre l'équateur et les pôles. Nous testerons dans la suite des amplitudes thermiques entre ces deux latitudes de 30°C puis 40°C. Ceci est une estimation basée sur le fait que la température moyenne annuelle au Pôle Nord est actuellement d'environ -15°C et à l'équateur d'environ 25°C . Néanmoins cette grandeur n'est pas figée dans le temps, et dépend notamment de la répartition des masses continentales à la surface de la Terre (Stanley 2014). Nous gardons la formulation pour calculer la température moyenne qui a été introduite dans (Mills 2011). Ceci implique qu'avec la connaissance de la température moyenne, il est facile de trouver la latitude pour laquelle la température à chaque pas de temps sera de 0°C . Dans notre modèle, cette latitude définira la marge de glace, nous considérons que toutes les latitudes supérieures sont couvertes de glace tandis que les latitudes inférieures en sont dépourvues. Enfin, à chaque pas de temps nous intégrons sur la sphère la surface couverte de glace, ce qui nous permet de calculer l'albédo moyen de la Terre. Cet albédo moyen rentre alors dans le calcul de la température via la formulation de l'équilibre radiatif.

2.1.5 Ajustements supplémentaires

Hormis la formulation de l'albédo, B.Mills recourt pour certaines grandeurs à une paramétrisation discontinue, conditionnelle. C'est le cas par exemple pour le paramètre h qui intervient dans la modélisation du taux de CO_2 atmosphérique. D'un point de vue physique, ce paramètre correspond de façon grossière au stockage de carbone dans les océans lorsque la température diminue. Le paramètre h est défini comme

$$h = \begin{cases} 1 \cdot 10^8 \text{ mol} & \text{si } \alpha = 0.3 \\ 5.3 \cdot 10^8 \text{ mol} & \text{si } \alpha = 0.6 \end{cases}.$$

La grandeur $W_{glacial}$ se trouve dans le même cas de figure. Celle-ci intervient dans la formulation du taux d'érosion cinétique W_K et est définie par

$$W_{glacial} = \begin{cases} 1 & \text{si } \alpha = 0.3 \\ 10^{-2} & \text{si } \alpha = 0.6 \end{cases}.$$

Dans les deux cas, nous préférons adopter une paramétrisation continue sur base d'une fonction arctangente de l'albédo comme suit

$$h = 300 + 200 \arctan(100 (\alpha - 0.5)) \frac{2}{\pi} ,$$

et

$$W_{glacial} = 0.501 - 0.5 \arctan(100 (\alpha - 0.5)) \frac{2}{\pi} .$$

Premièrement, cela semble plus réaliste d'un point de vue physique, mais cette paramétrisation a aussi l'avantage non-négligeable de faciliter le calcul numérique lors de l'application des algorithmes de continuation.

2.2 Notions théoriques à propos des systèmes dynamiques

Les modèles climatiques avec lesquels nous avons été amenés à travailler sont exprimés sous forme de systèmes dynamiques. Il s'agit en pratique de systèmes d'équations différentielles non linéaires couplées. L'intégration temporelle d'un tel système reproduit le comportement dynamique d'une variable considérée.

Le lecteur intéressé par la compréhension approfondie des systèmes dynamiques non-linéaires pourra se référer à l'ouvrage de S.H.Strogatz : *Nonlinear Dynamics And Chaos (1994)* dont le bref résumé qui suit est directement inspiré.

Afin de présenter certains aspects essentiels de l'étude des systèmes dynamiques, considérons un système général

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= f_1(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \dot{x}_n &= f_n(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

Un équilibre du système, aussi appelé point fixe, est un point du système qui est stationnaire sous la dynamique de ce dernier. L'équilibre x_* est défini par

$$f(x_*) = 0 .$$

Un équilibre peut bien sûr être stable, si le système y retourne après avoir subi une petite perturbation. Dans le cas contraire, si le système s'éloigne de son point d'équilibre sous l'effet d'une telle perturbation, celui-ci est instable.

Nous appelons trajectoire du système les valeurs que prennent l'ensemble des variables du système en fonction du temps. Dans le cadre du modèle COPSE, nous pourrions ainsi

observer un équilibre si nous constatons que la taille des réservoirs géologiques est stationnaire.

La structure des trajectoires du système peut changer lorsque l'on fait varier les paramètres de celui-ci. Certains équilibres peuvent apparaître ou disparaître de cette façon, leur stabilité peut également changer. De tels changements qualitatifs dans la dynamique d'un système sont des bifurcations. Les valeurs de paramètres pour lesquelles ces bifurcations surviennent sont appelées points de bifurcation.

Il existe plusieurs types de bifurcations. Le premier est la bifurcation "col-noeud" (saddle-node). Celle-ci survient lorsqu'en faisant varier un paramètre du système, deux points fixes se rejoignent pour s'annihiler. Pour l'illustrer, nous reprenons l'exemple de Strogatz pour le système dynamique $\dot{x} = r + x^2$. En fonction du signe du paramètre r , nous observons deux équilibres de stabilités opposées (figure 6 (a)), un équilibre méta-stable (figure 6(b)) ou plus aucun équilibre (figure 6(c)).

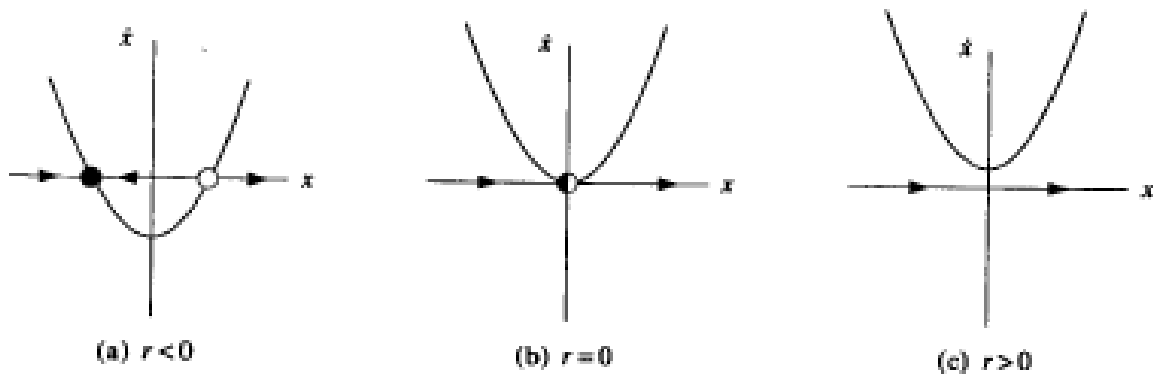


Fig. 6 – Exemple de bifurcation col-noeud (Strogatz 1994). On observe un équilibre stable et un équilibre instable converger l'un vers l'autre à mesure que r augmente, pour disparaître lorsque celui-ci devient positif. Le cas $r = 0$ donne lieu à un équilibre méta-stable, c'est donc ce cas-ci le point de bifurcation.

Le deuxième exemple de bifurcation que nous abordons est la bifurcation fourchette (pitchfork). Celle-ci s'illustre par le fait qu'un équilibre peut donner lieu, sous variation d'un paramètre, à deux équilibres de même stabilité et un équilibre de stabilité opposée à la fois. Ceci se comprend en considérant par exemple le système $\dot{x} = rx - x^3$. À nouveau le comportement du système est très différent en fonction du signe de r , comme le montre le diagramme de phase de la figure 7.

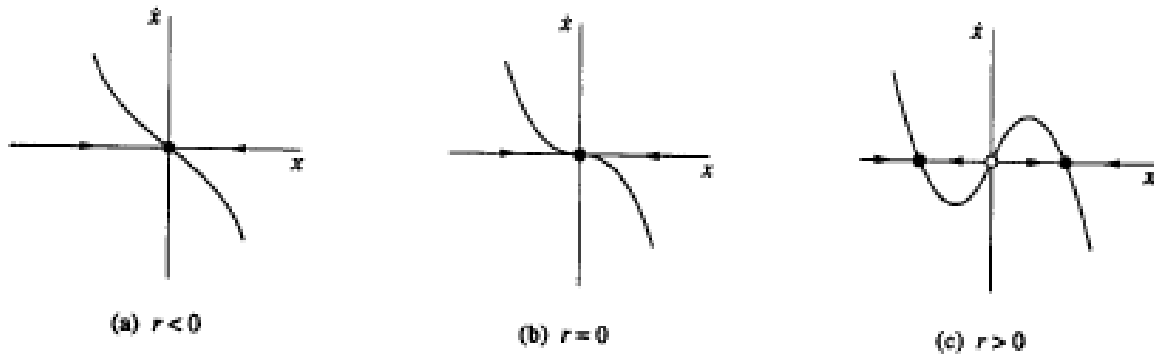


Fig. 7 – Exemple de bifurcation fourchette (Strogatz 1994). On observe que l'équilibre stable présent dans le cas $r < 0$ donne lieu à deux équilibres stables et un équilibre instable lorsque $r > 0$.

Nous observons en effet bien qu'un équilibre stable lorsque $r < 0$ donne deux équilibres stables et un équilibre instable lorsque $r > 0$. Afin de mieux visualiser le comportement du système sous l'effet du paramètre r , nous introduisons maintenant le concept de diagramme de bifurcation. Il s'agit d'un graphique qui présente la valeur de la variable considérée à l'équilibre en fonction du paramètre d'intérêt. Dans le cas de l'exemple de la figure 7, cela donne

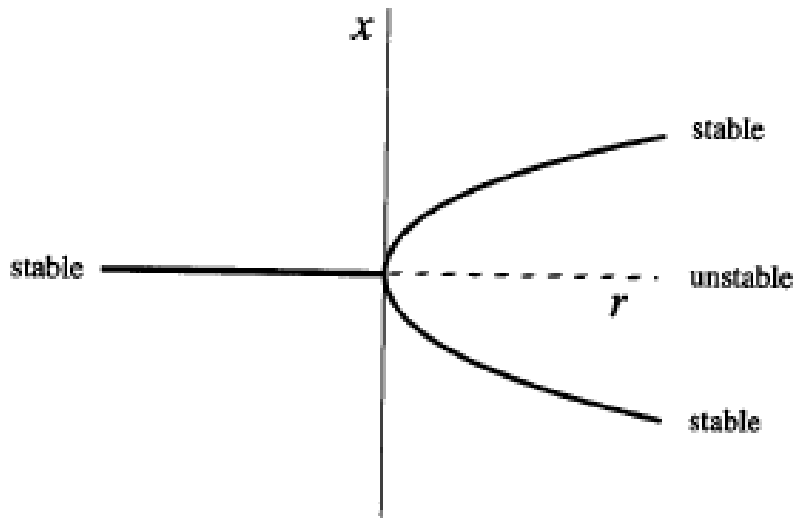


Fig. 8 – Diagramme de bifurcation fourchette (Strogatz1994)

Avant d'aborder le dernier exemple de bifurcation qui nous occupera dans ce travail, notons que les exemples de systèmes dynamiques introduits jusqu'ici étaient unidimensionnels. D'autres comportements peuvent survenir lorsque la dimension du système augmente, il est notamment courant d'observer des comportements oscillatoires. Ceci nous amène au concept de cycle limite, qui est une extension du concept d'équilibre. Il s'agit de trajectoires fermées et isolées dans l'espace des phases qui, comme les équilibres, ont

une stabilité caractéristique. Ainsi la trajectoire du système tendra vers le cycle limite si celui-ci est stable et s'en éloignera s'il est au contraire instable. Le fait remarquable par rapport aux systèmes dynamiques qui présentent des cycles limites stables est que ceux-ci ont un comportement oscillatoire auto-entretenu, c'est à dire que les oscillations ont lieu en l'absence de tout forçage externe



Fig. 9 – Visualisation de cycles limites (Strogatz 1994). Dans le cas du cycle limite stable, le système converge vers le cycle. Dans le cas instable il s'en éloigne. Dans le cas métastable, le système converge vers le cycle ou diverge en fonction des conditions initiales.

Un des exemples les plus célèbres de systèmes dynamiques présentant un cycle limite est l'oscillateur de Van der Pol. Il fut historiquement développé dans l'étude des circuits électriques utilisés par les premières radios. Il a également été utilisé en climatologie dans l'étude des oscillations climatiques au Pléistocène (Crucifix, 2012). Celui-ci peut s'écrire sous la forme

$$\begin{cases} (1) : \dot{y} = a - x \\ (2) : \dot{x} = \left(y - x - \frac{x^3}{3}\right) / \epsilon \end{cases} .$$

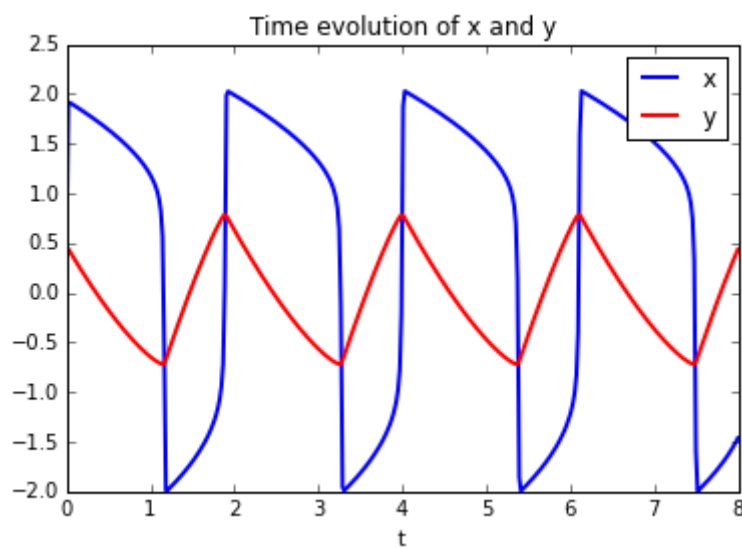


Fig. 10 – Evolution temporelle de l'oscillateur de Van der Pol

L'oscillateur de Van der Pol est un exemple d'oscillateur de relaxation, c'est à dire un oscillateur dont les variables ont des échelles de temps caractéristiques très différentes. Sa dynamique illustre ainsi le phénomène de branches lentes et rapides, on peut analyser celle-ci en se référant à la figure 11. On peut en effet observer que la trajectoire du système oscille globalement entre deux branches stables. Ainsi lorsqu'il se trouve sur une branche stable, celui-ci suit une dynamique lente, il est progressivement conduit vers l'un des deux points où l'équilibre disparaît. Lorsque le système atteint ce point du diagramme de phase, il suit la phase rapide de l'oscillateur jusqu'à atteindre la seule branche stable qui reste à sa disposition. A partir de ce moment, le système suit à nouveau la phase lente de la dynamique et recommence le cycle.

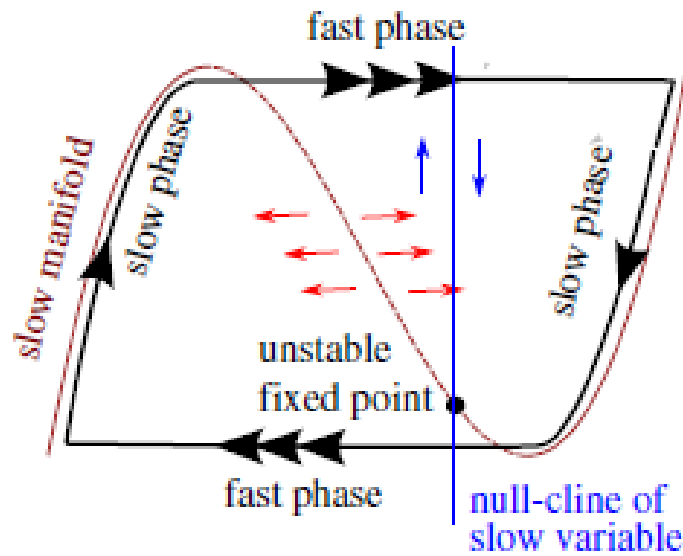


Fig. 11 – Dynamique de l'oscillateur de Van der Pol (Crucifix 2012)

La séparation des échelles de temps dépend du paramètre ϵ . Au plus celui-ci est petit au plus la dynamique dans la direction x est rapide par rapport à la direction y . Nous illustrons sur la figure 12 le comportement du système en fonction de ϵ . Nous pouvons observer qu'au plus ϵ devient grand, au plus la distinction entre phase lente et phase rapide s'atténue.

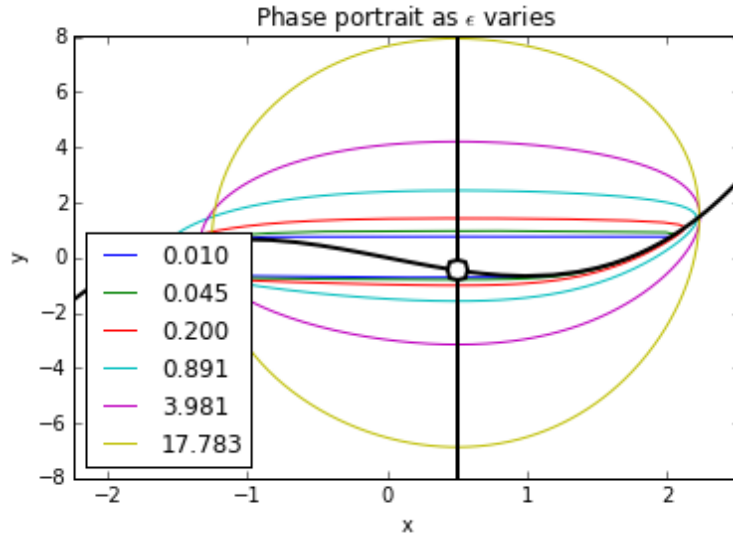


Fig. 12 – Plan de phase de l'oscillateur de Van der Pol pour différentes valeurs de ϵ dans l'équation (2) du système.

Le concept de cycle limite nous permet maintenant de mentionner la notion de bifurcation de Hopf. Celle-ci permet au système de passer d'un point fixe stable à un cycle limite ou inversement.

2.3 Méthodes de continuation

Dans la section qui suit, nous prenons un peu de distance avec la climatologie pour nous intéresser de plus près aux méthodes numériques permettant l'étude des systèmes dynamiques. Il s'agit là d'un contenu plus technique et certainement plus difficile à appréhender, mais nous pensons toutefois que cela éclaire nos résultats par la suite et permet de mieux en cerner les limites

2.3.1 Méthodes de base

Comme nous l'avons énoncé dans la section 1.2, un des objectifs de ce travail est de construire des diagrammes de bifurcation pour le système dynamique de COPSE. Cela se fait grâce à l'implémentation d'une méthode algorithmique de continuation. Le principe de la méthode est de calculer une solution approchée d'un système dynamique non-linéaire en faisant varier la valeur de ses paramètres. S'ensuit donc la construction d'une "branche" de solution.

Afin de donner une intuition de la façon de procéder en pratique, considérons un exemple inspiré de l'ouvrage de W.J.F.Govaerts (2000) (p.57). Soit l'équation

$$G(x, \alpha) = 0 ,$$

où $(x \in \mathbb{R}^N, \alpha \in \mathbb{R}, G(x, \alpha) \in \mathbb{R}^N)$, qui pourrait exprimer, dans notre contexte, le point fixe d'un système dynamique. Supposons que nous ayons une première solution (x_0, α_0) , il s'agit de trouver une nouvelle solution (x_1, α_1) . Pour ce faire, nous avons donc besoin d'un point initial $(\hat{x}, \hat{\alpha})$ et d'une stratégie pour trouver (x_1, α_1) . Nous pouvons choisir $\hat{\alpha}$ et poser $\hat{\alpha} = \alpha_1$. Ainsi x_1 s'obtient en résolvant l'équation

$$G(x, \alpha_1) = 0 ,$$

en utilisant la méthode de Newton. Cela permet de construire une séquence $x^0, x^1, x^2, \dots$ avec $x^0 = \hat{x} = x_0$. Nous avons ainsi

$$\begin{aligned} G_x(x^k, \alpha_1) \Delta x^k &= -G(x^k, \alpha_1), \\ x^{k+1} &= x^k + \Delta x^k , \end{aligned}$$

où G_x est la matrice Jacobienne du système

$$G_x = \frac{\partial G_i(x)}{\partial x_j} ,$$

avec G_i , la i^{eme} composante de G , et x_j , la j^{eme} composante de x avec $i, j = 1, \dots, N$.

En d'autres termes, il s'agit d'appliquer une méthode de type prédicteur-correcteur pour trouver notre solution. Dans ce cas-ci, on prend pour prédicteur la droite $x = x_0$, puis on détermine le correcteur dans le plan $\alpha = \alpha_1$.

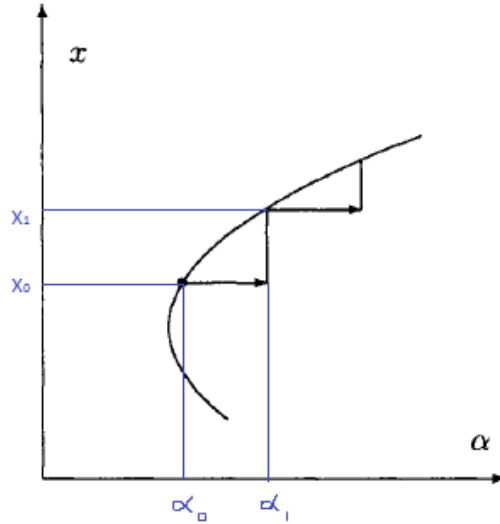


Fig. 13 – Continuation par paramétrisation naturelle

Ceci constitue la base historique des méthodes de continuation. Il existe bien sûr d'autres façons plus élaborées et plus efficaces de procéder. Par exemple, la méthode de Newton utilisée peut être remplacée par n'importe quelle autre méthode permettant de résoudre des équations non-linéaires. Ainsi, au lieu de prendre une ligne droite comme prédicteur, on peut également utiliser la tangente à la courbe. De l'identité

$$G(x(\alpha), \alpha) = 0 ,$$

vient

$$G_x x'_\alpha = -G_\alpha ,$$

où x'_α s'obtient en résolvant un système semblable à ce qui a été fait dans le cas précédent. Le prédicteur s'écrit cette fois

$$\hat{x} = x_0 + (\hat{\alpha} - \alpha_0)x'_\alpha(0) .$$

Le correcteur se trouve à nouveau dans le plan $\alpha = \alpha_1$.

Visuellement, cela prend l'allure montrée sur la figure 14.

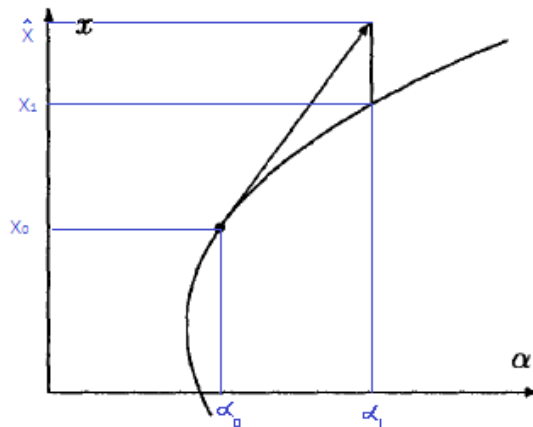


Fig. 14 – Continuation par tangente

2.3.2 Méthode des pseudo-longueurs d'arcs

Notons à présent que les méthodes décrites ci-dessus illustrent le principe et les bases historiques des méthodes de continuation, mais que celles-ci ne sont pas adaptées lorsque l'on cherche à étudier les bifurcations d'un système dynamique. Une façon bien plus efficace de procéder est notamment d'utiliser la méthode des pseudo-longueurs d'arcs. Le principe en est le suivant. Reprenons l'exemple général utilisé jusqu'ici (toujours inspiré de l'ouvrage de W.J.F.Govaerts (2000)).

Commençons par énoncer une proposition indispensable à la bonne compréhension de la méthode qui suit, et qui permet de définir la notion de plan tangent.

Considérons une application C^1 $G : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-k}$ ($N > k \geq 1$). Soit $\xi(t)$ une courbe C^1 dans l'espace nul S de G , c'est à dire

$$G_i(\xi(t)) \equiv 0 \quad pour 1 \leq i \leq N - k .$$

En dérivant, nous avons

$$\frac{\partial G_i}{\partial x_1} \dot{\xi}_1 + \frac{\partial G_i}{\partial x_2} \dot{\xi}_2 + \cdots + \frac{\partial G_i}{\partial x_N} \dot{\xi}_N \equiv 0 \, .$$

Le vecteur tangent de chaque courbe ξ dans S est donc dans le noyau du Jacobien au point considéré.

Proposition : Soit $G : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^{N-k}$ ($N > k \geq 1$) une application C^1 et supposons que pour $\bar{x} \in \mathbb{R}^N$, $G(\bar{x}) = 0$ et $G_x(\bar{x})$ est de rang maximal $N - k$. Si $p = (p_1, \dots, p_N)$ est

dans le noyau de $J = G_x(\bar{x})$, alors il existe une courbe $x = \xi(t)$ dans $\mathbb{R}^N$ qui se trouve dans $S = \{x \in \mathbb{R}^N \mid G(x) = 0\}$ et pour laquelle $\xi(0) = \bar{x}$ et $\dot{\xi}(0) = p$.

Le lecteur intéressé trouvera la preuve de cette proposition dans l'ouvrage de W.J.F.Govaerts (2000) à la page 30.

Définition : Soit $k, N \in \mathbb{N}, N > k \geq 1, S$ une variété C^1 de dimension k dans $\mathbb{R}^N$, $\bar{x} \in S$ et $G : U \rightarrow \mathbb{R}^{N-k}$ une fonction définie localement sur S au point $\bar{x}$. L'espace nul de $G_x(\bar{x})$ est appelé espace tangent de S au point $\bar{x}$.

De plus, par la proposition, la définition de l'espace tangent de S en un point est indépendante du choix de la fonction G définie localement, telle que $G(x) = 0$ pour $x \in S$ et x proche de $\bar{x}$.

Revenons maintenant à la méthode des pseudo-longueurs d'arcs. Supposons que nous connaissions deux points appartenant à la branche de solution : (x_1, α_1) et (x_0, α_0) ainsi que le vecteur tangent en (x_0, α_0) , t_0 . Il s'agit de trouver le vecteur tangent t_1 à la branche au point (x_1, α_1) . Nous avons

$$[G_x \ G_\alpha] t_1 = 0 .$$

Cette équation permet de déterminer t_1 à une constante près. Afin de conserver la direction le long de la branche de solution, nous imposons la condition suivante sur les vecteurs tangents t_0 et t_1 , $t_0^T t_1 = 1$. Ensuite, en écrivant t_0 et t_1 sous forme de composantes : $t_1 = (t_1^{(x)}, t_1^{(\alpha)})$, nous pouvons réécrire les équations $[G_x \ G_\alpha] t_1 = 0$ et $t_0^T t_1 = 1$ sous forme d'un système

$$\begin{pmatrix} G_x & G_\alpha \\ t_0^{(x)T} & t_0^{(\alpha)} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_1^{(x)} \\ t_1^{(\alpha)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} ,$$

où G_x est une matrice $n \times n$, G_α et $t_0^{(x)}$ sont des n -vecteurs et $t_0^{(\alpha)}$ est un scalaire.

De façon générale, une matrice de la forme

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C^T & D \end{pmatrix} ,$$

où $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, B et $C \in \mathbb{R}^{n \times m}$ et $D \in \mathbb{R}^{m \times m}$ est appelée *matrice de bord*, avec dimension de bord m . Si nous fixons une longueur d'incrément Δs , le prédicteur s'écrit

$$\hat{x} = x_1 + \frac{\Delta s}{\|t_1\|} t_1^{(x)}$$

$$\hat{\alpha} = \alpha_1 + \frac{\Delta s}{\|t_1\|} t_1^{(\alpha)} .$$

Nous pouvons observer au passage que la grandeur Δs mesure la longueur d'arc le long de la tangente, et donne ainsi une approximation de la longueur d'arc le long de la branche de solution. C'est ce qui donne son nom à la méthode que nous utilisons.

Il existe plusieurs façons d'obtenir le correcteur de la méthode. Nous présentons ici la méthode de Keller (Keller 1977). Nous cherchons une solution au système originel dans le plan orthogonal au vecteur tangent t_1 . Afin de calculer le point suivant de la branche, il faut résoudre le système

$$\begin{aligned} G(x, \alpha) &= 0 \\ t_1^{(x)T}(x - \hat{x}) + t_1^{(\alpha)T}(\alpha - \hat{\alpha}) &= 0 , \end{aligned}$$

qui a pour Jacobien

$$\begin{pmatrix} G_x & G_\alpha \\ t_1^{(x)T} & t_1^{(\alpha)T} \end{pmatrix} .$$

Il y a cependant un point à éclaircir par rapport à la notion de plan orthogonal. En effet, si x et α sont de dimensions différentes, la notion d'orthogonalité dans l'espace qui s'y rapporte n'est pas clairement définie. En pratique, cette difficulté est contournée, dans le logiciel AUTO notamment (Doedel 2012), en utilisant des poids dans la définition du correcteur. Celui-ci s'écrit alors

$$\begin{aligned} G(x, \alpha) &= 0 \\ \theta_x^2 t_1^{(x)T}(x - \hat{x}) + \theta_\alpha^2 t_1^{(\alpha)T}(\alpha - \hat{\alpha}) &= 0 . \end{aligned}$$

où les poids θ_x et θ_α sont tous deux strictement positifs.

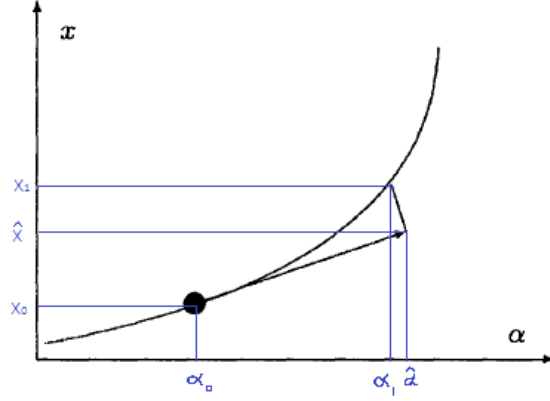


Fig. 15 – Correction dans le plan perpendiculaire à la tangente (méthode de Keller)

2.3.3 Méthode de Moore-Penrose

La dernière méthode que nous abordons est celle de Moore-Penrose. Celle-ci repose sur le calcul de matrices inverses. Notre explication de cette méthode est en grande partie inspirée du manuel *MATCONT and CL_MATCONT : Continuation toolboxes in matlab* de W.J.F.Govaerts (2006).

Soit A une matrice de dimensions $N \times (N + 1)$ de rang maximal. La matrice inverse de Moore-Penrose est définie comme $A^+ = A^T(AA^T)^{-1}$.

Considérons maintenant le système linéaire

$$\begin{aligned} Ax &= b \\ v^T x &= 0, \end{aligned}$$

où A est une matrice $N \times (N + 1)$ de rang maximal, $x, v \in \mathbb{R}^{N+1}$ et $b \in \mathbb{R}^N$. La grandeur x représente un point de la courbe et v le vecteur tangent à la courbe au point x et orthogonal au plan défini par A , autrement dit $Av = 0$.

Nous avons que $AA^+b = b$. De plus

$$v^T A^+b = \langle Av, (AA^T)^{-1}b \rangle = 0.$$

La solution à ce système est donnée par

$$x = A^+b.$$

Supposons que nous ayons un point de prédiction X^0 , il s'agit de trouver le point x de la courbe qui minimise la distance à X^0 . Cela revient à résoudre le problème d'optimisation

$$\min_x \{ \|x - X^0\| \mid G(x) = 0 \} .$$

Le système à résoudre est donc

$$\begin{aligned} G(x) &= 0 \\ w^T(x - X^0) &= 0 , \end{aligned}$$

où w est le vecteur tangent au point x . Dans une méthode de Newton traditionnelle, on linéarise autour de X^0 . Le développement de Taylor donne

$$\begin{aligned} G(x) &= G(X^0) + G_x(X^0)(x - X^0) + O(\|x - X^0\|^2) \\ w^T(x - X^0) &= v^T(x - X^0) + O(\|x - X^0\|^2) . \end{aligned}$$

En négligeant les termes de second ordre, la solution s'écrit

$$x = X^0 - G_x^+(X^0)G(X^0) .$$

Le vecteur nul de $G_x(X_0)$ n'étant pas connu, celui-ci est approximé par $V_0 = v_i$, le vecteur tangent à x_i . Il s'agit donc de résoudre l'équation $G(x) = 0$ dans un plan perpendiculaire au vecteur tangent.

La deuxième équation du système peut s'écrire

$$\langle x - X^k, V^k \rangle = 0 ,$$

avec $G_x(X_{k-1})V_k = 0$ pour $k = 1, 2, \dots$. L'itération s'écrit ainsi

$$\begin{aligned} X^{k+1} &= X^k - H_x^{-1}(X^k, V^k)H(X^k, V^k) \\ V^{k+1} &= V^k - H_x^{-1}(X^k, V^k)R(X^k, V^k) \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} H(X, V) &= \begin{pmatrix} G(X) \\ 0 \end{pmatrix} \\ H_x(X, V) &= \begin{pmatrix} G_x(X) \\ V^T \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$R(X, V) = \begin{pmatrix} G_x(X)V \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Chaque itération converge ainsi vers le point de la courbe x_{i+1} et le vecteur tangent correspondant v_{i+1} . Le principal avantage qu'offre cette méthode par rapport à la précédente est que l'on n'a pas besoin de connaître le point suivant de la courbe avant de calculer le vecteur tangent à ce point. Les deux sont calculés simultanément par itération.

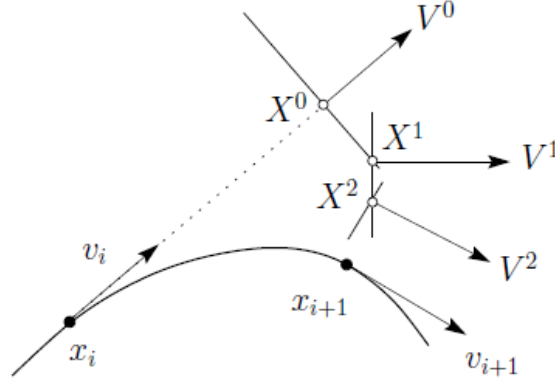


Fig. 16 – Continuation de Moore-Penrose

2.3.4 Logiciels de continuation

Plusieurs logiciels ont été conçus pour traiter les systèmes dynamiques avec des méthodes de continuation. Les deux standards les plus utilisés sont MATCONT et AUTO.

Comme son nom l'indique, *MATCONT* est une extension de *MATLAB*, implémentée entre autres par W.J.F.Govaerts que nous avons cité précédemment. Cette extension permet l'analyse de bifurcations et la continuation numérique en utilisant un interface *MATLAB*. Le logiciel nécessite cependant une licence *MATLAB*. Il s'agit-là du principal (peut-être même du seul) inconvénient de celui-ci.

AUTO est quant à lui un logiciel tout à fait open source, développé durant les années 1970 par des chercheurs du CALTECH, et a connu bon nombre de mises à jour et d'évolutions (la plus récente en 2007). Bien qu'AUTO soit un logiciel à la robustesse reconnue et qu'il ait été gardé au goût du jour, il n'en reste pas moins que celui-ci est basé sur le langage FORTRAN et que l'interface dont il dispose est quelque peu archaïque. Ce point entraîne malheureusement une réelle difficulté de prise en main de cet outil.

Dans le cadre de ce travail, nous avons donc fait le pari de trouver un support qui allierait l'aspect open source d'AUTO à l'aspect pratique et "user-friendly" de *MATLAB*. Cette philosophie nous a conduit à opter pour le logiciel PyDSTool.

2.3.5 PyDSTool et PyCont

Comme nous l'avons suggéré dans la section précédente, PyDSTool (Python Dynamical System Tool) est un logiciel d'analyse de systèmes dynamiques qui permet l'analyse de bifurcations et la continuation numérique grâce à son module PyCont. Ce logiciel est implémenté en *Python* et se veut facile d'utilisation grâce à une syntaxe tirant profit des possibilités de programmation orientée objet qu'offre ce langage. Il s'appuie notamment sur les librairies NumPy, SciPy et Matplotlib.

Il fut développé dans le courant des années 2000 principalement par Robert Clewley, professeur du département de mathématiques et statistiques de l'institut des neurosciences de la Georgia State University (<https://pydstool.github.io/biosketch/index.html>) et Drew LaMar, professeur assistant au collège William and Mary de Williamsburg en Virginie.

Le but de ce package est d'offrir un panel d'outils numériques pour la simulation et l'analyse de systèmes dynamiques dans un cadre scientifique. En effet, le contexte originel dans lequel il fut développé était la modélisation des processus non-linéaires ayant lieu en biologie cellulaire. La philosophie prise lors du développement de PyDSTool est d'abord le confort d'utilisation au sens où celle-ci doit rester intuitive, mais sans sacrifier les performances pour autant. Ainsi, en fonction de l'utilisation qui en est faite, PyDSTool offre la possibilité d'utiliser un compilateur C ou FORTRAN, bien plus performants, grâce à un système de "traduction" qui permet à l'utilisateur de ne programmer qu'en *Python*.

Ainsi, PyDSTool prend la forme d'une hiérarchie de classes abstraites qui permettent à l'utilisateur de manipuler des objets prédéfinis qui se veulent en accord avec son intuition mathématique du problème auquel il est confronté. A noter que ces classes sont accessibles et modifiables par l'utilisateur.

En ce qui concerne le traitement de la continuation numérique, PyDSTool dispose d'un module nommé PyCont, élaboré principalement par D.LaMar (<https://pydstool.github.io/PyDSTool/PyCont.html>). PyCont dispose de nombreux outils permettant l'analyse de bifurcations dérivés de AUTO. Ainsi, PyCont comprend des méthodes de continuation implémentées en *Python* même pour tout ce qui concerne les équilibres et les bifurcations. Dans le traitement des cycles limites cependant, PyCont fait appel à un interface AUTO rudimentaire ainsi qu'à un compilateur C ou FORTRAN plus performants pour ce type de calculs (<https://pydstool.github.io/PyDSTool/PyCont.html>). Nous explicitons les méthodes de continuation de PyCont plus en détail dans les chapitres suivants.

2.3.6 Traitements des équilibres et bifurcations

Etant donné un système dynamique quelconque, il suffit de choisir le (ou les) paramètre libre et la variable d'intérêt pour que PyCont calcule la valeur approximative de l'équilibre

vers lequel converge le système pour la valeur choisie du paramètre, à supposer toutefois que le système converge. Dans le cas où le système ne présente aucun équilibre pour la valeur choisie de paramètre (il explose), la continuation n'a bien sûr pas lieu d'être. Dans le cas où le système converge vers un cycle limite, la démarche est quelque peu différente et sera explicitée par la suite.

Ainsi de façon générale, lorsque PyCont converge vers un premier équilibre stable via la valeur fournie par l'utilisateur dans la définition des paramètres du système dynamique, celui-ci peut commencer la continuation par une méthode de Moore-Penrose. Il va de ce fait trouver la valeur de la variable choisie pour laquelle le système va se stabiliser après avoir incrémenté la valeur du paramètre d'un incrément défini par l'utilisateur. PyCont stocke ces valeurs successives d'équilibre dans un objet *newcurve* de la classe *ContClass* automatiquement créée lorsque PyDSTool construit le système dynamique défini par l'utilisateur. Cette classe reprend d'ailleurs toutes les informations relatives au système et est donc une signature de celui-ci.

La branche d'équilibre se construit ainsi itérativement et il est possible de présenter graphiquement à la fin du processus grâce à la fonction *display* qui offre exactement les mêmes options qu'un graphique construit via Matplotlib. Le nombre total d'incréments utilisés pour construire la branche de solutions est également choisi par l'utilisateur.

Au cours de la construction de la courbe d'équilibre, PyCont est capable de détecter les bifurcations ainsi que leurs types. Les types de bifurcations détectés sont non seulement ceux que nous avons présenté plus haut dans la section précédente, mais également d'autres points spécifiques comme les points de doublement de période ou des bifurcations particulières comme les points de Cusp, de Bogdanov-Takens ou Neimark-Sacker.

Lorsqu'une bifurcation est détectée, il est alors possible de définir une nouvelle courbe qui débute au point de bifurcation et qui suit la nouvelle branche d'équilibre ou de cycle limite. L'utilisateur peut alors définir le type de courbe qu'il souhaite construire en fonction de la bifurcation rencontrée, en tenant compte du fait qu'en fonction du type de courbe choisi, les bifurcations détectées peuvent être de types différents. Une liste exhaustive des possibilités offertes par PyCont est disponible sur la page <https://pydstool.github.io/PyDSTool/PyCont.html>.

2.3.7 Traitement des cycles limites

L'étude des cycles limites avec PyCont peut se faire de différentes façons. Nous avons esquissé une première façon de faire au point précédent, il est en effet possible de démarrer l'analyse sur un point stable du système et de construire une branche d'équilibre stable jusqu'à atteindre une bifurcation de Hopf pour ensuite donner l'instruction de construire une branche cycle-limite à partir de cette bifurcation.

Une seconde façon de procéder consiste à suggérer soi-même une période approximative des cycles limites que PyCont est supposé trouver, et à partir de cette information il pourra lui-même calculer la période exacte et commencer la construction de la branche de solution en cycle limite. Notons que cette façon de faire est plus difficile à mettre en oeuvre que la précédente mais elle permet d'aborder des systèmes qui ne présentent pas nécessairement de bifurcations de Hopf pour chaque paramètre d'intérêt.

3 Résultats

3.1 COPSE

La première étape de notre étude fut de reconstruire le modèle COPSE complet afin de nous familiariser avec celui-ci, ainsi que toute la logique et les concepts qui le sous-tendent. Cela nous a également permis d’aborder plus facilement le modèle réduit puisque nous avons pu comprendre les changements introduits dans (Mills 2011) et l’impact de ceux-ci sur le fonctionnement du modèle. Cette étape fut par ailleurs l’occasion de nous familiariser avec l’analyse numérique des systèmes dynamiques et les méthodes de continuation.

Commençons par préciser que le modèle COPSE est disponible en *MATLAB*, ce qui nécessite donc impérativement une license pour pouvoir l’utiliser. De plus, celui-ci se compose d’une dizaine de fichiers quelquefois très volumineux. C’est pourquoi, plutôt que de travailler avec ces codes, nous avons pris le parti de reconstruire COPSE en langage *Python* de façon plus concise en tirant avantage du package *PyDSTool*.

La seule composante du modèle qui nous a fait défaut fut les forçages du système. En effet, ceux-ci sont utilisés dans le modèle original sous divers formats, certains sont extraits de fichiers de données inutilisables dans le cadre de notre méthode. Pour contourner cette difficulté, nous les avons paramétrisé nous-même de manière à obtenir un comportement proche de celui qui apparaît dans (Bergman 2004). Cette façon de faire ne nous permet bien évidemment pas de reproduire les forçages de façon précise, mais elle est néanmoins suffisante pour obtenir des résultats comparables à ceux apparaissant dans (Bergman 2004).

Dans la suite, nous présentons des exemples de simulations temporelles que nous comparons avec (Bergman 2004) et de diagrammes de bifurcation que nous avons obtenu avec le modèle COPSE complet.

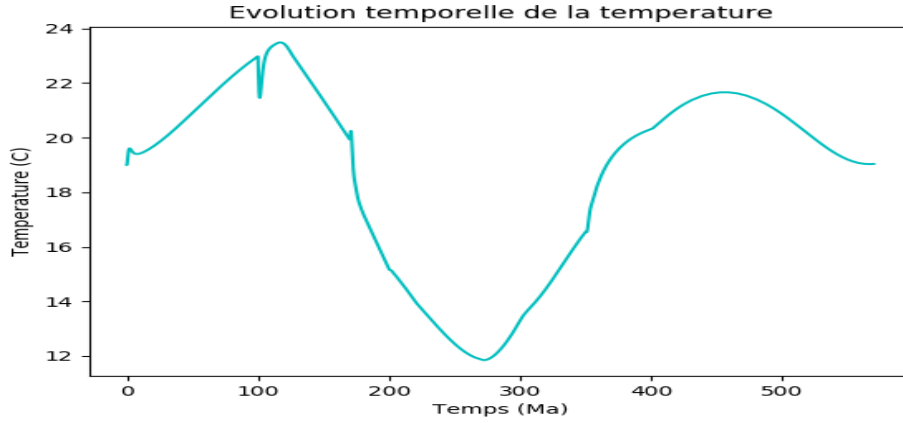


Fig. 17 – Simulation de l'évolution temporelle de la température ($^{\circ}\text{C}$) obtenue avec le modèle COPSE complet.

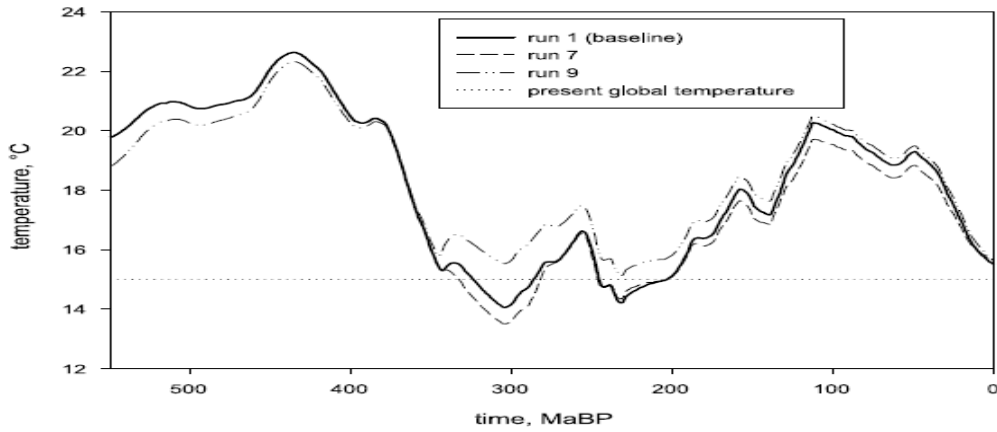


Fig. 18 – Evolution temporelle de la température ($^{\circ}\text{C}$) issue de (Bergman 2004). Les différents traits correspondent à des simulations faites sur base d'hypothèses différentes. Nous nous intéressons principalement à la courbe en trait plein, qui correspond aux conditions "standard".

Les figures 17 et 18 montrent chacune une reconstruction des températures pendant l'éon Phanérozoïque obtenue avec le modèle COPSE. La figure 18 est directement issue de (Bergman 2004) tandis que la figure 17 est réalisée par nos soins. La comparaison entre ces deux figures met en évidence une proximité tant dans le comportement qualitatif du modèle que dans l'intervalle des valeurs de températures atteintes. Tenant compte du fait que nous avons modélisé les forçages du système de façon moins détaillée et moins précise que ce qui est fait dans (Bergman 2004), nous estimons que la reconstruction du modèle COPSE en *Python* dans le cadre de PyDSTool, et de façon plus économe en espace de stockage ainsi qu'en temps de calcul, est un succès.

Dans la suite, nous nous intéressons à la stabilité du modèle COPSE aux variations de paramètres. Nous effectuons donc une analyse de bifurcations du modèle complet. Cependant, nous avons pu nous rendre compte que ce modèle est d'une très grande stabilité.

En effet, cela est dû au fait que COPSE contient des feedbacks négatifs mettant en jeu des fonctions exponentielles. Nous ne rentrerons pas dans les détails techniques dans ce travail, mais nous notons que la réaction du système aux perturbations est d'être ramené de façon exponentielle vers sa trajectoire d'équilibre. De ce fait, nous n'avons pu observer ni bifurcations ni cycles limites dans le cadre du modèle COPSE complet. Cela implique également que les variations et les oscillations que nous pouvons observer dans l'article (Bergman 2004), ou dans notre simulation de la figure 17 sont uniquement dues aux forçages du système. Sur la figure 19, nous présentons un exemple de diagramme de bifurcation de la température par rapport à la constante k_2 qui correspond au flux d'enfouissement du carbone organique marin.

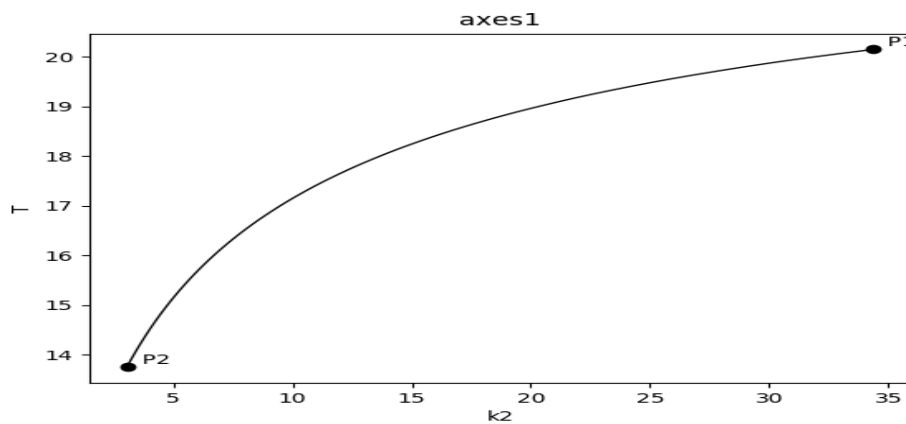


Fig. 19 – Diagramme de bifurcation de la température ($^{\circ}\text{C}$) et de la constante k_2 représentant le flux d'enfouissement de carbone organique marin obtenu avec le modèle COPSE complet.

Comme nous venons de le suggérer, ce diagramme de bifurcation montre que l'évolution de la température par rapport au paramètre k_2 suit une branche d'équilibre stable pour toute valeur de celui-ci. Ce comportement est général, on le retrouve également pour les autres constantes utilisées dans le modèle.

3.2 Paramétrisation en *arctangente* de l'albédo

3.2.1 Simulations temporelles et comparaison avec (Mills 2011)

Nous présentons dans la suite une série de simulations que nous réalisons cette fois avec le modèle COPSE réduit présenté dans la section 2.1. Celles-ci retracent l'évolution temporelle des différentes variables d'intérêt. Nous y incluons également certains graphiques issus de (Mills 2011) utiles pour établir des comparaisons. Nous reprenons dans nos simulations les paramètres fournis dans (Mills 2011, supplementary material), avec la paramétrisation de l'albédo en *arctangente* présentée dans la section 2.4.2.

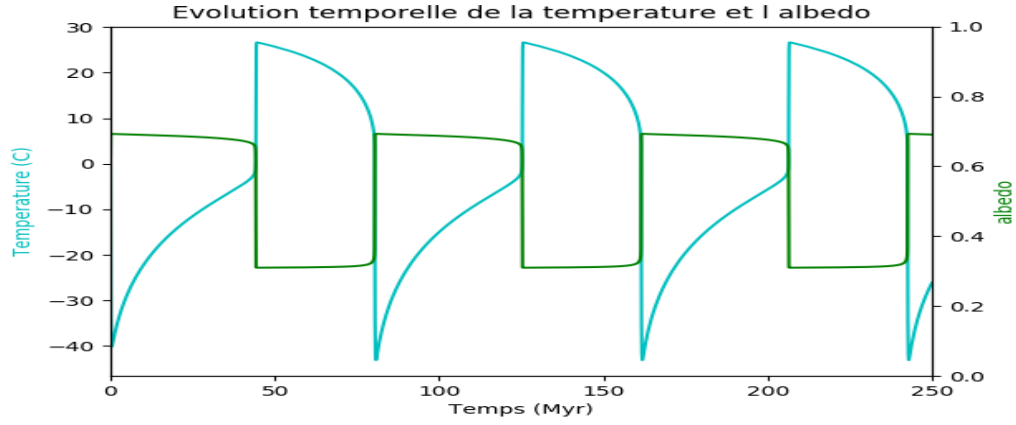


Fig. 20 – Evolution temporelle de la température ($^{\circ}\text{C}$) et de l'albédo

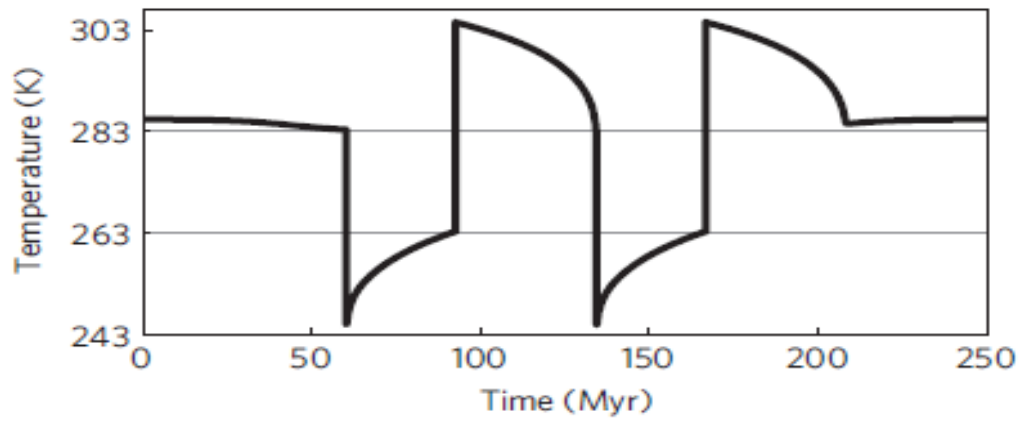


Fig. 21 – Evolution temporelle de la température présentée dans (Mills 2011)

Nous observons des oscillations de grande amplitude en température. Celle-ci évolue entre environ -40°C et 30°C en moyenne globale. L'albédo quant à lui passe de façon brutale mais continue de 0.3 à environ 0.7 (Figure 20). Ces valeurs sont proches de celles qui apparaissent dans (Mills 2011), le crédit physique que l'on peut y accorder nous paraît toutefois discutable puisque les températures qui régnaient sur Terre au Néoprotérozoïque restent très incertaines.

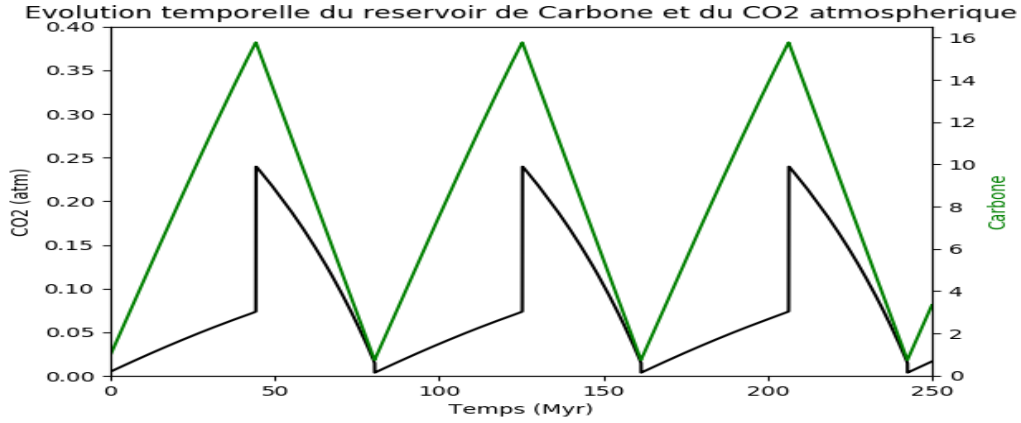


Fig. 22 – Evolution temporelle du réservoir de Carbone normalisé par rapport à sa valeur actuelle estimée et du CO_2 en atmosphères

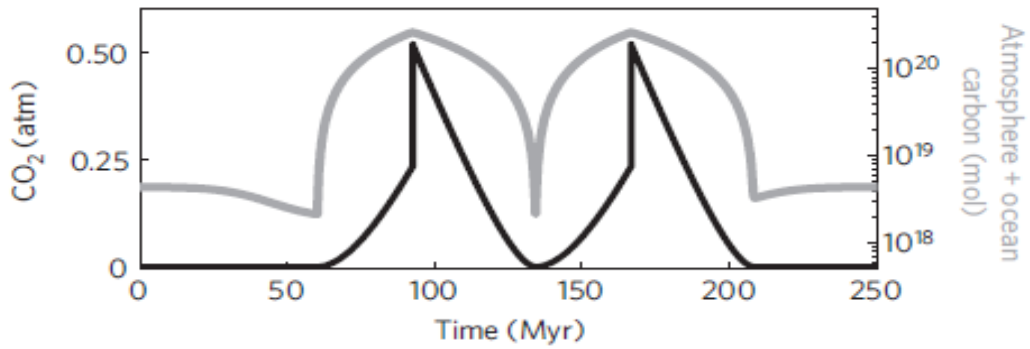


Fig. 23 – Evolution temporelle de la concentration en CO_2 (atm) et du réservoir de Carbone (mol) présentés dans (Mills 2011)

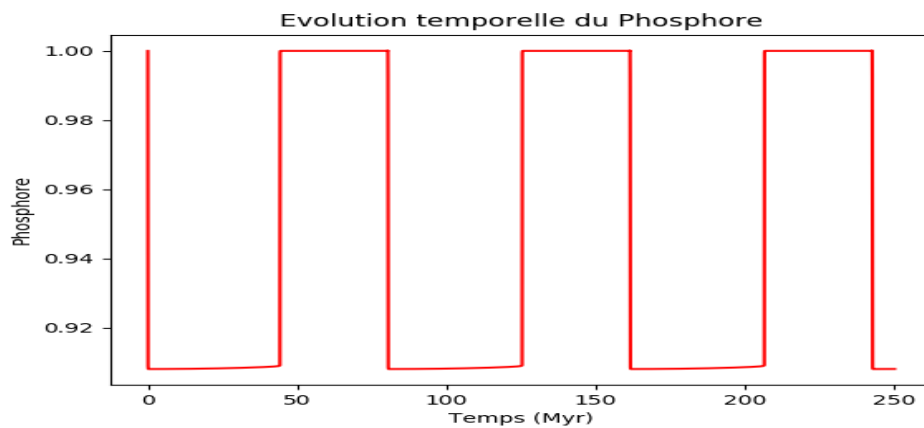


Fig. 24 – Evolution temporelle du réservoir de Phosphore normalisé par rapport à sa valeur actuelle estimée

Chacun peut maintenant comprendre comment fonctionne le modèle en pratique. Dans

(Mills 2011), celui-ci repose sur un phénomène d'hystérèse directement causé par la paramétrisation de l'albédo dans. Le modèle, une fois lancé tend naturellement vers un équilibre radiatif. Si l'on suppose sans perte de généralité que l'état initial est une Terre dépourvue de glace, le taux d'érosion de roches silicatées sera élevé et aura pour effet de capter du CO_2 atmosphérique, donc de faire diminuer cette grandeur. Au fur et à mesure que celui-ci diminue, son forçage radiatif diminue, entraînant un refroidissement global jusqu'à ce que le système atteigne la température critique en deça de laquelle le feedback positif glace-albédo s'enclenche. En pratique, l'albédo passe brusquement d'une valeur de 0.3 à 0.6 et la planète se retrouve instantanément couverte de glace. La température d'équilibre radiatif vers laquelle tend le système en l'absence de forçage dû CO_2 est bien plus basse et la Terre connaît alors une période glaciaire. Le taux d'érosion atteint quant à lui sa valeur minimale et cela permet à la quantité de carbone atmosphérique d'augmenter progressivement, entraînant ainsi une augmentation du forçage radiatif dû au CO_2 . La température du système augmente alors jusqu'à atteindre la valeur critique au-delà de laquelle le feedback s'enclenche dans l'autre sens. La Terre se retrouve subitement dépourvue de glace, la température d'équilibre radiatif reprend sa valeur initiale tout comme le taux d'érosion, la Terre connaît alors une période interglaciaire et ainsi de suite.

On peut également constater que dans le cas de notre paramétrisation en *arctangente*, malgré la disparition de l'hystérèse dans la relation albédo-température, le système fonctionne de façon identique. Pour comprendre cela, il faut se rendre compte qu'il y a toujours un phénomène d'hystérèse à l'oeuvre, mais que celui-ci existe entre la température et la quantité de carbone (ou de façon équivalente entre l'albédo et la quantité de carbone). Pour s'en convaincre, il suffit d'observer la figure 25. On observe alors qu'à chaque température correspond deux valeurs du réservoir de carbone, en fonction de l'histoire du système.

La comparaison entre nos simulations et celles de B.Mills nous permet de considérer que nos résultats sont en bon accord avec ceux présentés dans (Mills 2011). En effet, les cycles que nous avons produits ont une amplitude et une période quasiment identiques. Les légères différences observées peuvent s'expliquer par le fait que B.Mills utilise un facteur d'amplification de l'érosion cinétique variable alors que nous avons pris une valeur fixe dans la fourchette de variabilité de ce paramètre, que nous étudierons plus en détail dans la suite. Ce point nous permet également de noter que notre paramétrisation de l'albédo est à peu de choses près équivalente à celle mise en oeuvre dans (Mills 2011) en ayant le mérite d'être physiquement plus raisonnable.

Sur la figure 22, nous observons que le réservoir de Carbone atmosphérique et océanique oscille entre sa valeur de référence, c'est à dire sa valeur actuelle estimée, et plus de 16 fois cette valeur. Ceci a un impact direct sur la concentration atmosphérique de CO_2 , comme on peut le voir sur la figure 22. Celle-ci oscille depuis des valeurs très faibles jusqu'à plus

de 0.25 *atm*. On peut observer là une légère différence quantitative avec le modèle de B.Mills (figure 23) où le réservoir de Carbone atteint environ 50 fois sa valeur actuelle et la concentration en CO_2 atteint une valeur de 0.5 *atm*. Enfin, le phosphore oscille entre sa valeur actuelle estimée et 0.92 fois cette valeur.

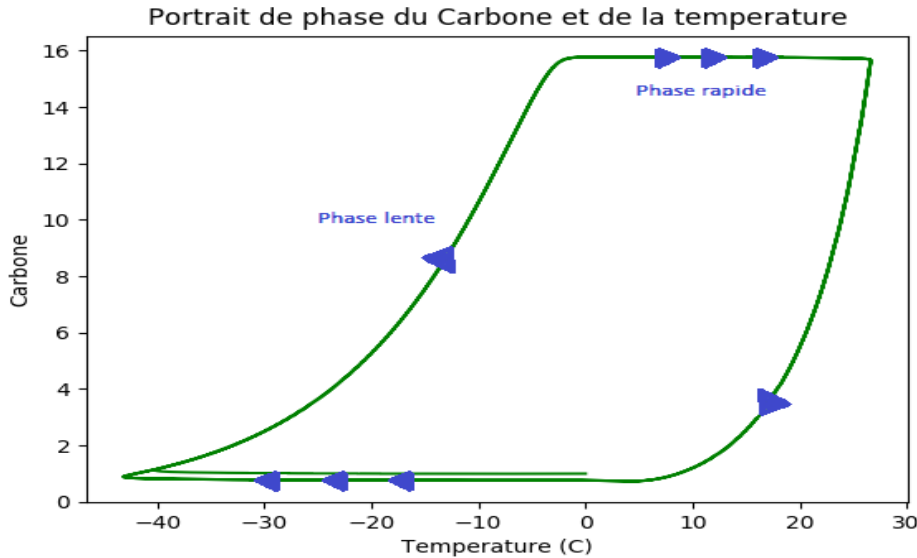


Fig. 25 – Portrait de phase du réservoir de Carbone normalisé par rapport à sa valeur actuelle estimée et de la température en $^{\circ}C$

Le comportement général du modèle rappelle clairement celui de l'oscillateur de Van der Pol, on peut s'en convaincre en comparant les figures 20 et 22 à la figure 10. Comme attendu, nous observons des oscillations d'ampleur importante dans la zone paramétrique identifiée dans (Mills 2011). Le système connaît successivement des périodes de glaciation et des interglaciaires. La figure 25 est l'analogue de la figure 11. On peut y observer les branches lentes et rapides de la dynamique du système.

3.2.2 analyse de bifurcations

Nous présentons dans cette section les résultats concernant les analyses de bifurcations que nous avons produites. Le modèle COPSE, bien que largement réduit dans le cadre de ce travail, reste relativement important par le nombre de paramètres et de termes apparaissant dans ses équations différentielles. Dans la version que nous avons construite, le modèle contient 34 paramètres pour 3 variables indépendantes. Une étude complète et exhaustive de notre modèle reviendrait donc à analyser le comportement de chacune des 3 variables par rapport aux variations de chacun des 34 paramètres, en d'autres termes à construire un diagramme en 102 dimensions. Etant donné la difficulté que nous avons à visualiser un tel espace, la première tâche qui nous incombe est donc de faire un choix dans les paramètres à analyser. Ce choix s'est fait par rapport aux paramètres

cruciaux analysés dans l'étude de B.Mills (2011) et par rapport à la pertinence physique. Notre variable d'intérêt sera par la suite systématiquement la température car c'est la grandeur la plus facile à concevoir intuitivement dans le cadre d'une étude ayant trait à des événements de glaciation.

Nous commençons notre analyse par le paramètre d'amplification du taux d'érosion cinétique ρ .

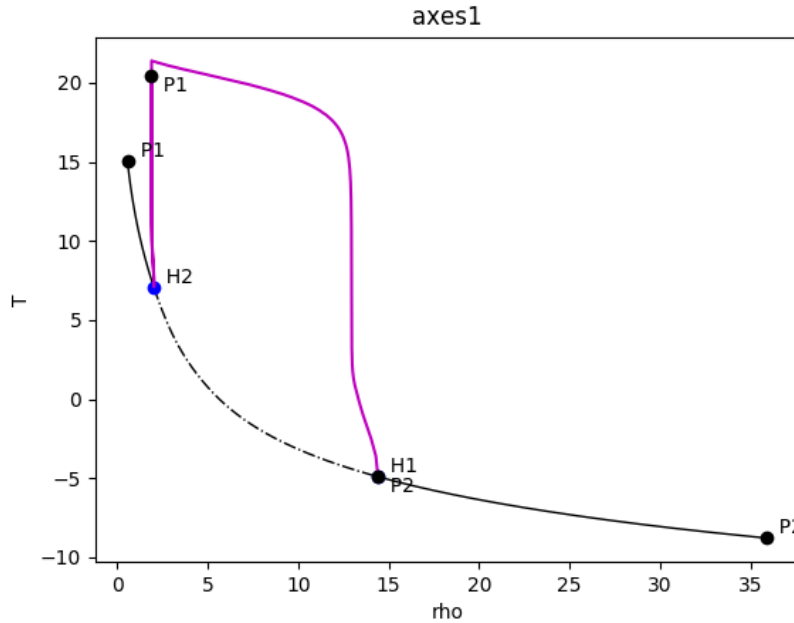


Fig. 26 – Diagramme de bifurcations par rapport au facteur d'amplification du taux d'érosion cinétique. Les régions stables sont représentées en traits pleins, les régions instables en pointillés. La courbe noire représente une branche d'équilibre et la courbe violette une branche de cycle limite.

Ce diagramme représente le comportement de la température par rapport aux variations du paramètre ρ . La courbe noire représente un point fixe stable lorsque celle-ci est continue, instable lorsqu'elle est pointillée. La courbe mauve est une courbe de cycle limite, elle indique la valeur maximale de température atteinte par les cycles en fonction de ρ . Ceci nous donne une idée précise du comportement du système lorsque l'on fait varier le taux d'érosion cinétique. Le système converge vers un équilibre stable pour des taux d'érosion faibles ($\rho < 2$) et pour des taux d'érosion très élevés ($\rho > 14$). La zone du milieu est quant à elle caractérisée par un comportement de cycle limite. La transition entre ces deux régimes se fait par des bifurcations de Hopf.

Il est intéressant de noter que dans (Mills 2011), on fait varier ce paramètre entre des valeurs de 1 et 3, passant ainsi par la bifurcation et déclenchant les cycles limites du même fait. C'est ce que l'on peut voir sur la figure 27, dont on peut voir l'effet sur la

figure 21.

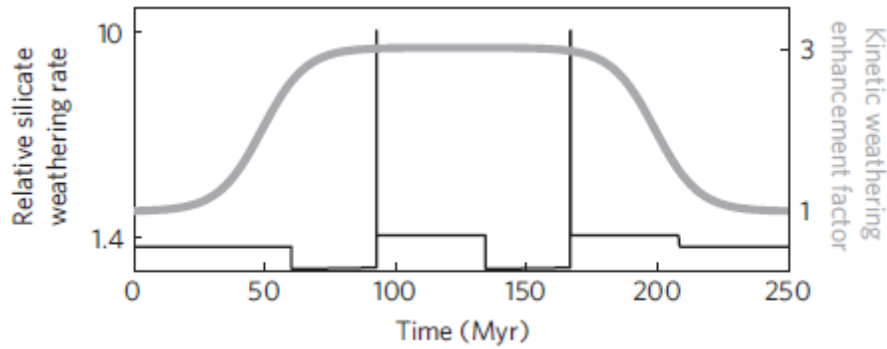


Fig. 27 – Traitement du paramètre ρ dans (Mills 2011)

Nous abordons maintenant le paramètre S , la valeur de la constante solaire. Etudier la réaction du système à des variations dans la constante solaire est particulièrement intéressant étant donné que celle-ci varie au cours du temps. Puisque l'activité solaire augmente légèrement au fur et à mesure que celui-ci consomme son hydrogène par fusion nucléaire, l'insolation moyenne par unité de surface au sommet de l'atmosphère augmente elle aussi sur une échelle de temps géologique. Ainsi, on estime qu'à la fin de l'éon Protérozoïque celle-ci valait 1298 W/m^2 (Mills 2011) tandis que la valeur mesurée de nos jours est de 1361 W/m^2 .

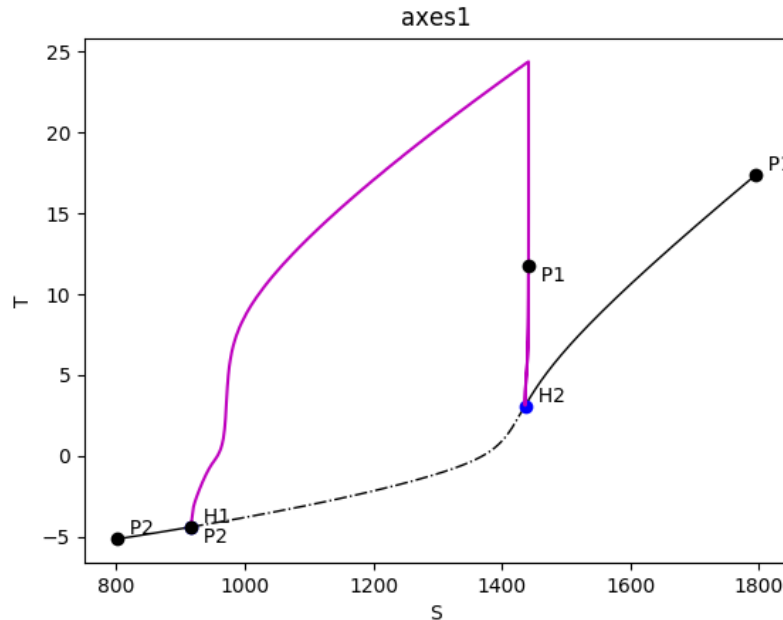


Fig. 28 – Diagramme de bifurcations par rapport à la constante solaire S exprimée en W/m^2 . Les régions stables sont représentées en traits pleins, les régions instables en pointillés. La courbe noire représente une branche d'équilibre et la courbe violette une branche de cycle limite.

Nous observons pour ce paramètre un comportement semblable à celui observé pour ρ . Pour des valeurs de S inférieures à 900 W/m^2 ou supérieures à 1450 W/m^2 , le système converge vers un équilibre stable. Pour des valeurs intermédiaires, cette branche de solution donne lieu à deux bifurcations de Hopf entre lesquelles ce dernier converge vers un cycle limite stable. La température maximale atteinte par les cycles augmente proportionnellement à S . Il en est de même dans la zone d'équilibre stable, ce qui est tout à fait intuitif puisqu'au plus S est élevé, au plus le système reçoit d'énergie.

3.3 Paramétrisation à la Budyko-Sellers

Dans la suite, nous utilisons la paramétrisation abordée dans la section 2.4.3, et nous observons les différences que cela induit sur le comportement du système. Nous commençons à nouveau par le paramètre ρ .

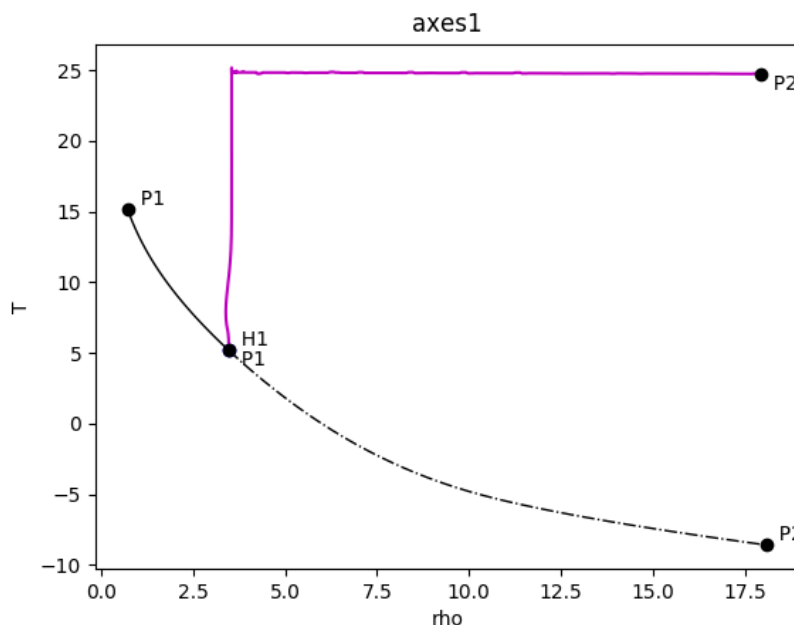


Fig. 29 – Diagramme de bifurcations par rapport à ρ selon la paramétrisation à la Budyko-Sellers. Les régions stables sont représentées en traits pleins, les régions instables en pointillés. La courbe noire représente une branche d'équilibre et la courbe violette une branche de cycle limite.

En comparant les figures 27 et 29, on observe un comportement différent. Pour de faibles valeurs de ρ , le système converge toujours vers un équilibre stable dont la température d'équilibre est inversement proportionnelle à ρ . En augmentant la valeur de ce paramètre, nous arrivons à nouveau à une bifurcation de Hopf qui donne lieu à un régime de cycles limites, aux environs de $\rho = 3$. Nous notons que la bifurcation est rencontrée pour une valeur légèrement plus grande que dans le cas précédent. Ensuite, il n'y a plus qu'une seule bifurcation de Hopf, le système ne converge donc plus jamais vers un équilibre si

l'on continue à augmenter le paramètre ρ . Nous remarquons aussi que les températures maximales atteintes dans la zone de cycles limites sont globalement plus élevées que sur le diagramme de la figure 27. De plus, la température maximale des oscillations semble indépendante de la valeur de ρ .

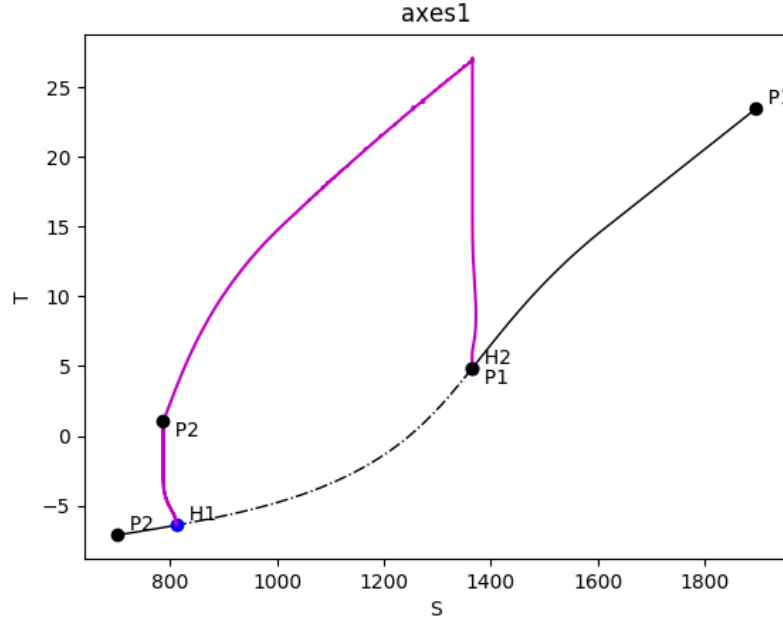


Fig. 30 – Diagramme de bifurcations par rapport à S (exprimé en W/m^2) selon la paramétrisation à la Budyko-Sellers. Les régions stables sont représentées en traits pleins, les régions instables en pointillés. La courbe noire représente une branche d'équilibre et la courbe violette une branche de cycle limite.

Sur la figure 30, nous montrons le comportement du système en fonction de variations de la constante solaire S . Celle-ci a la même allure que la figure 28, à la différence près que la fenêtre de valeurs pour laquelle on observe des cycles limites est légèrement décalée vers des valeurs plus faibles de S . L'intervalle de valeurs $1298 W/m^2 - 1361 W/m^2$ se situe à nouveau entièrement dans la zone de cycles limites.

Maintenant que nous avons une idée précise des différences qu'entraîne la paramétrisation modifiée de l'albédo "à la Budyko-Sellers", nous remettons en question l'une des principales hypothèses que nous avons formulée en construisant cette dernière. Nous avons initialement supposé que l'amplitude thermique entre l'équateur et les pôles était en moyenne de $30^\circ C$. Analysons maintenant le comportement du système si l'on suppose que cette amplitude thermique est plutôt de $40^\circ C$. Faire varier l'amplitude thermique entre l'équateur et les pôles n'est pas dénué de sens. Cette grandeur peut en effet fortement varier en fonction de la répartition spatiale des principales masses continentales (Stanley 2014).

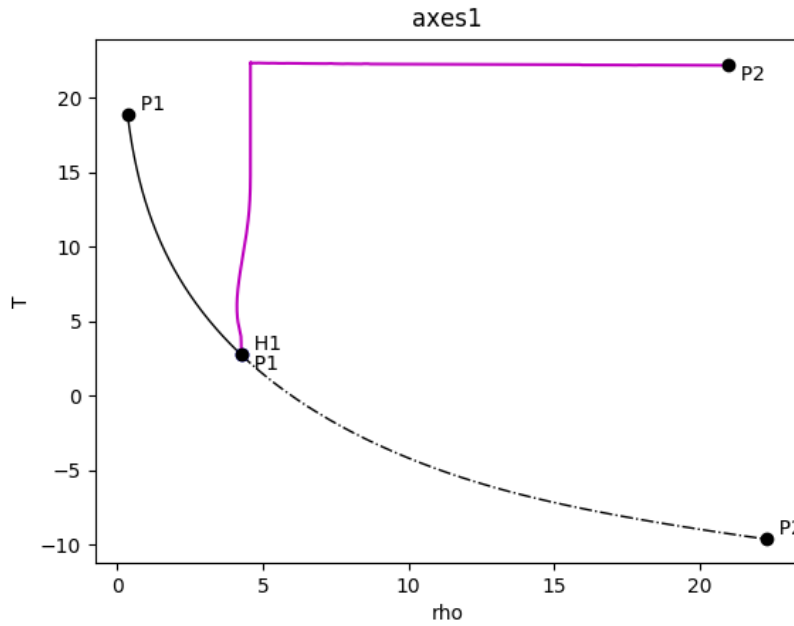


Fig. 31 – Diagramme de bifurcations par rapport à ρ selon la paramétrisation à la Budyko-Sellers, sous l'hypothèse d'une amplitude thermique de 40°C . Les régions stables sont représentées en traits pleins, les régions instables en pointillés. La courbe noire représente une branche d'équilibre et la courbe violette une branche de cycle limite.

Dans le cas du paramètre ρ , nous observons que l'amplitude thermique n'impacte pas le comportement du système d'un point de vue qualitatif, nous observons toujours une seule bifurcation de Hopf qui marque le passage d'une convergence vers un équilibre stable à un comportement de cycle limite. D'un point de vue quantitatif cependant, nous observons que la bifurcation survient pour une valeur de ρ comprise entre 4 et 5. De plus, la température maximale des cycles est légèrement plus faible que dans le cas précédent. Ceci a une certaine importance puisque si l'on s'en tient aux taux d'érosion cinétique analysés dans l'étude de B.Mills, on n'observe plus d'oscillations pour la période du Néoprotérozoïque. Il faut nécessairement considérer des taux plus élevés.

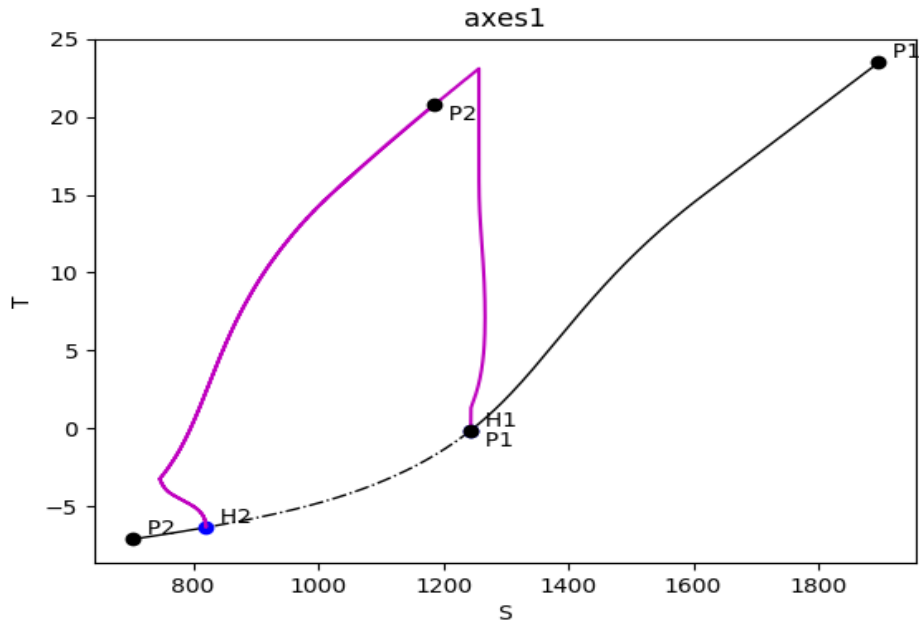


Fig. 32 – Diagramme de bifurcations par rapport à S (exprimé en W/m^2) selon la paramétrisation à la Budyko-Sellers pour une amplitude thermique de $40^\circ C$ et $\rho = 3$. Les régions stables sont représentées en traits pleins, les régions instables en pointillés. La courbe noire représente une branche d'équilibre et la courbe violette une branche de cycle limite.

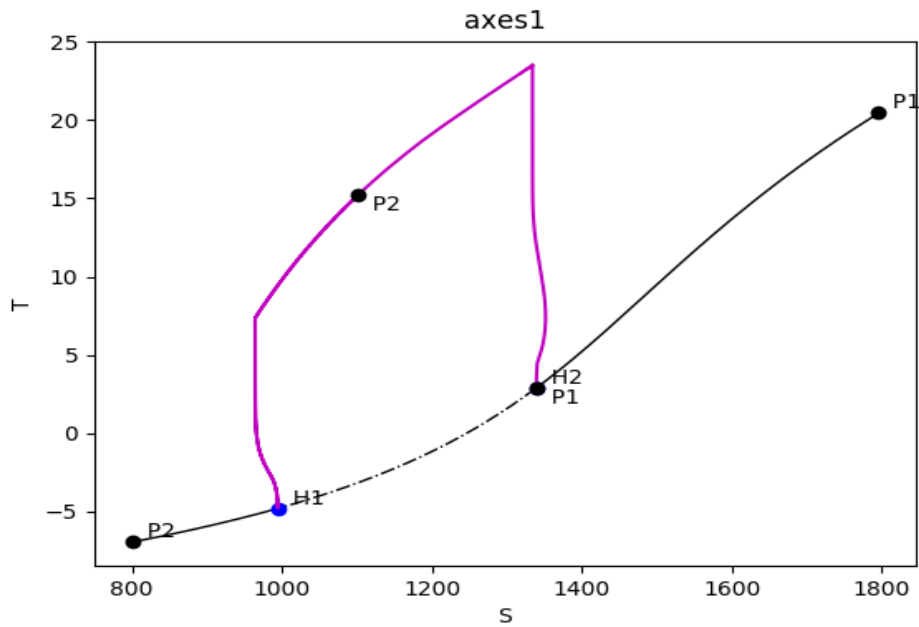


Fig. 33 – Diagramme de bifurcations par rapport à S (exprimé en W/m^2) selon la paramétrisation à la Budyko-Sellers pour une amplitude thermique de $40^\circ C$ et $\rho = 5$. Les régions stables sont représentées en traits pleins, les régions instables en pointillés. La courbe noire représente une branche d'équilibre et la courbe violette une branche de cycle limite.

Dans le cas du paramètre S , nous présentons deux figures. La première pour une valeur de ρ légèrement inférieure à la bifurcation de Hopf observée sur la figure 31, la seconde pour une valeur légèrement supérieure à celle-ci. La différence est que dans le premier cas, l'intervalle de valeurs $1298W/m^2 - 1361W/m^2$ est situé entièrement en dehors de la zone de cycles limites, au contraire du second cas. La figure 32 suggère un comportement relativement intrigant pour S aux alentours de $800W/m^2$, nous pensons qu'il s'agit d'une anomalie d'ordre purement numérique causée par notre méthode de continuation et non d'une bifurcation présente de fait dans le système.

Le message à retenir de ce dernier point est principalement l'impact des hypothèses de travail que l'on se donne sur le comportement du modèle, de façon très générale. Dans le cas qui nous occupe, le comportement du système ne change pas radicalement, mais l'emplacement des bifurcations rencontrées varie de façon non-négligeable, ce qui entraîne localement des différences majeures. La simplicité du modèle que nous utilisons nous prémunit d'effets très surprenants, mais nous avons tout de même pu observer des apparitions ou disparitions de bifurcations en passant à la paramétrisation à la Budyko-Sellers.

Si l'on observe maintenant attentivement les diagrammes de bifurcations présentés dans cette section, on peut apercevoir un phénomène particulier sur les branches de solutions correspondant aux cycles limites (mauves) au voisinage de certaines bifurcations de Hopf, où ces branches sont quasiment verticales. Nos diagrammes laissent à penser que le système passe brusquement d'un cycle limite avec une certaine amplitude d'oscillations à un équilibre stable lorsque la bifurcation de Hopf est franchie. Si l'on y regarde de plus près, on peut de plus remarquer que la branche de solution n'est pas droite et verticale, elle zig-zague ! Ces "zigzags" n'ont bien entendu rien de physique, ils témoignent uniquement des difficultés rencontrées par notre algorithme de continuation. Il faut noter que la branche en question n'est pas supposée être verticale, la transition entre les régimes d'équilibre et de cycles limites au travers de la bifurcation de Hopf est bel et bien continue, mais elle se fait sur un intervalle de valeurs du paramètre extrêmement réduit. Cette transition est tellement abrupte qu'il s'agit d'un réel challenge pour les méthodes numériques de traiter ce cas de figure.

Ce phénomène est loin d'être un cas isolé survenant par hasard dans notre modèle, cela est caractéristique d'un grand nombre de systèmes slow-fast, c'est à dire des systèmes dynamiques mettant en scène des variables aux échelles de temps caractéristiques de variations très éloignées. Surviennent alors des orbites canard (Desroches, 2010). Comme nous l'avons vu avec l'oscillateur de Van der Pol, le comportement d'un tel système est caractérisé par des oscillations entre deux variétés stables, où la dynamique est lente. Lors des "sauts" du système d'une variété à l'autre, lorsque celui-ci converge vers la nouvelle branche stable, il suit une dynamique rapide. Dans le cas d'une orbite canard, le système ne converge pas vers la nouvelle branche d'équilibre, il retourne au contraire sur la branche initiale.

Nous pouvons constater que notre modèle produit bien des orbites canard, que nous avons ici pour $\rho = 2.78$.

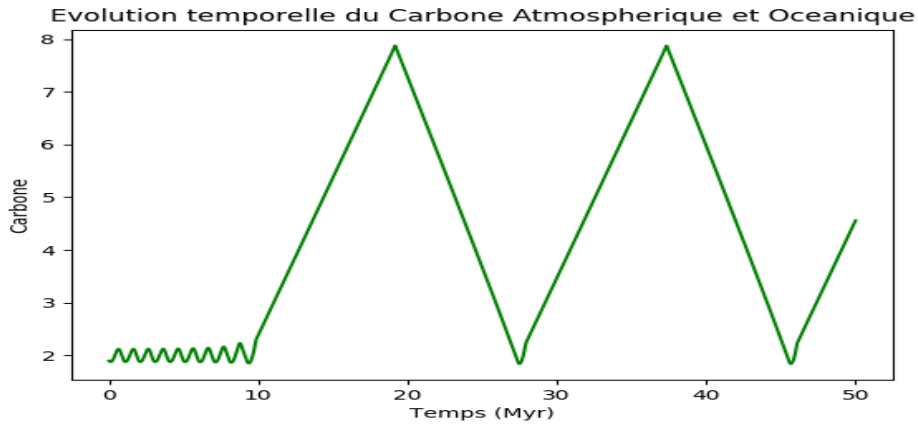


Fig. 34 – Evolution temporelle du réservoir de carbone présentant des orbites canard

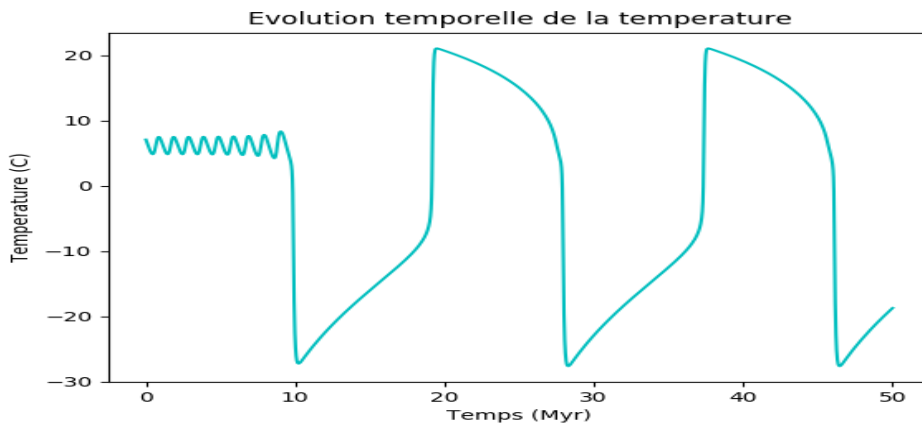


Fig. 35 – Evolution temporelle de la température présentant des orbites canard

Sur les figures 34 et 35, on observe les orbites canard au début de la séquence, ce sont des oscillations plus rapides et de plus faible amplitude que les cycles limites. Il faut noter que les orbites canard sont très instables, nous les obtenons pour un intervalle de valeurs du paramètre ρ très réduit dans le voisinage très proche de la bifurcation de Hopf. De plus, le système finit par converger vers la trajectoire de cycle limite. Les figures 36 et 37 présentent le plan de phase du réservoir de carbone et la température. La seconde est un zoom de la première, mettant en évidence plus clairement les orbites canard.

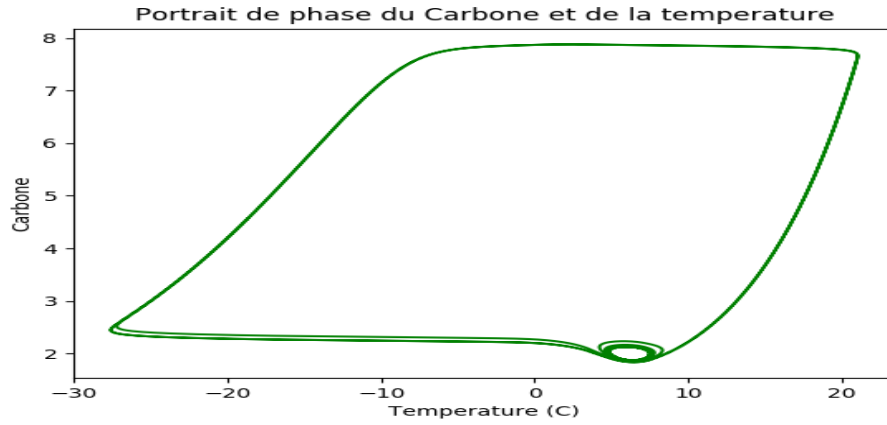


Fig. 36 – Portrait de phase du réservoir de Carbone et de la température présentant des orbites canard

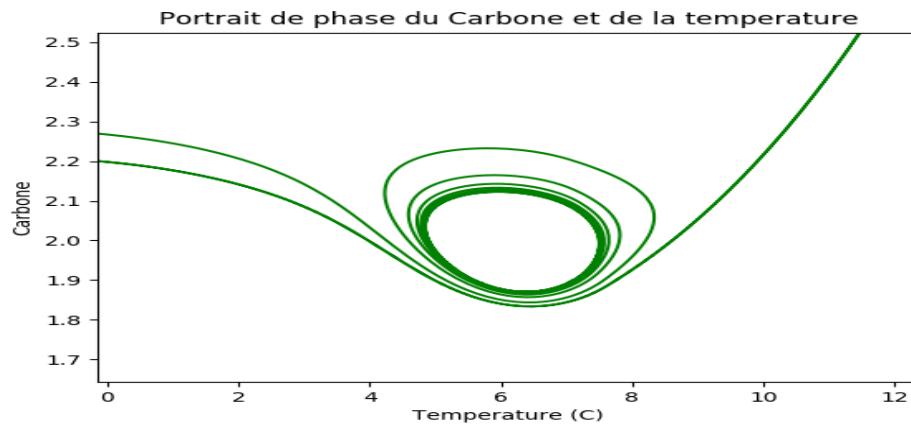


Fig. 37 – Zoom de la figure 36 sur les orbites canard

4 Discussion

4.1 Conclusions

L'objectif que nous nous étions donné était de sélectionner un modèle paléoclimatique et de l'analyser sous l'angle d'outils d'analyse numérique afin d'en comprendre le comportement qualitatif. Ceci avait pour but de nous donner une idée de la robustesse des résultats obtenus dans l'étude (Mills 2011).

Dans cette optique, nous avons dans un premier temps sélectionné les outils numériques permettant de mettre en oeuvre les méthodes de continuation nécessaires à notre ouvrage. Nous avons ensuite reconstruit le modèle proposé dans l'étude de B.Mills en nous efforçant de garder un regard critique sur les différentes paramétrisations qui rentrent en compte. Ainsi, nous avons pu reproduire les résultats de (Mills 2011) et produire une analyse en système dynamique de ce modèle. Ce faisant, nous avons confronté plusieurs paramétrisations plausibles de l'albédo tout en remettant en question nos propres hypothèses.

Nos résultats montrent qu'un comportement oscillatoire s'obtient dans une gamme de paramètres qui englobe largement celle suggérée dans (Mills 2011). Nous pouvons dès lors conclure à la robustesse des oscillations présentées dans cet article dans les conditions du Néoprotérozoïque. C'est un comportement en grande partie du au feedback glace-albédo modélisé dans cette étude. Par une calibration parcimonieuse des paramètres, il est dès lors possible d'obtenir des oscillations de l'amplitude et de la fréquence recherchées.

Qu'en est-il alors des paramètres qui interviennent dans le modèle ? Notre période géologique d'intérêt étant le Néoprotérozoïque, les indices nous permettant d'avoir une idée des conditions climatiques et géochimiques sont presque inexistantes. Cela suggère d'emblée un taux d'incertitude très important sur chaque paramètre que nous utilisons. La connaissance de l'état initial du système n'a heureusement pas une grande importance puisque nous considérons un modèle déterministe et non chaotique. Ensuite, en ce qui concerne les flux géochimiques, le modèle COPSE se base sur l'hypothèse que ceux-ci sont proportionnels à la quantité de l'élément qui s'y rapporte. La constante de proportionnalité est donc choisie pour chaque flux géochimique comme étant le flux observé actuellement. Cela n'est pas pour autant un gage de certitude puisque les flux géochimiques actuels ne sont pas forcément connus avec un grand degré de précision. Ceci est valable pour les paramètres se rapportant aux flux géochimiques présents dans COPSE. Les paramètres qui rentrent en compte dans les différentes paramétrisations introduites par B.Mills ne correspondent quant à eux pas nécessairement à des quantités physiques, ce sont dans certains cas le fruit d'une calibration du modèle. Cela se rencontre notamment dans la formulation du forçage radiatif du au CO_2 , qui prend la forme d'un polynôme dont les coefficients ont été calibrés dans le but d'obtenir un comportement réaliste qui s'approche des résultats

obtenus dans d'autres études de référence, (Clough 2005) et (Goldblatt 2009).

Quoi qu'il en soit, une analyse quantitative des résultats de B.Mills n'est pas le but premier de ce travail. L'analyse du comportement qualitatif du modèle montre que le système peut globalement converger vers un équilibre ou donner lieu à des cycles limites, passant d'un comportement à l'autre au travers de bifurcations de Hopf. Nous avons pu mettre en évidence le fait que ces bifurcations surviennent pour des valeurs parfois très différentes de paramètres du modèle en fonction des paramétrisations et des hypothèses que l'on se donne. En confrontant une paramétrisation en *arctangente* à la paramétrisation à la Budyko-Sellers, nous avons pu constater l'apparition ou la disparition de bifurcations ainsi qu'un déplacement de ces dernières, ce qui indique que le comportement du système peut changer radicalement dans certaines gammes de paramètres. De ce fait, selon les hypothèses, nous avons observé que notre modèle ne donne plus d'oscillations pour les conditions géochimiques suggérées par l'étude de B.Mills. Il est néanmoins possible qu'un simple recalibrage des différents paramètres permette d'obtenir à nouveau un comportement oscillatoire.

Enfin, en ce qui concerne l'hypothèse de B.Mills quant à l'effet du taux d'érosion cinétique sur la durée des interglaciaires, nous avons pu montrer dans ce travail que ce paramètre est en effet crucial sur le comportement du système. Un taux d'érosion cinétique trop faible induit dans tous les cas une stabilisation du système. Au-delà d'une certaine valeur, celui-ci déclenche un régime oscillatoire, et la durée des périodes interglaciaires est inversement proportionnelle au taux d'érosion cinétique. En conclusion, nos résultats nous laissent penser que l'hypothèse formulée par B.Mills a du sens tant d'un point de vue physique que mathématique.

4.2 Fiabilité des résultats et possibilités d'amélioration

Comme nous l'avons déjà évoqué précédemment, la réalisation de nos analyses en système dynamique a engendré certaines difficultés d'ordre numérique liées à la disparité des échelles de temps caractéristiques des variables de notre modèle. Cela se traduit par des irrégularités que l'on peut constater en regardant en détail nos diagrammes. Ces bruits numériques ainsi que les différentes méthodes que nous avons utilisées pour les minimiser peuvent générer une légère imprécision sur nos diagrammes mais ils n'altèrent pas le comportement de notre système, ce qui est un moindre mal puisque nous nous sommes intéressés davantage à l'aspect qualitatif du modèle. Il est néanmoins possible que des méthodes plus adaptées aux systèmes slow-fast existent, qui permettraient d'obtenir une plus grande précision dans des études de systèmes dynamiques, permettent également d'offrir davantage de souplesse en ce qui concerne les gammes de paramètres et d'échelles de temps à analyser. Des recherches plus poussées sur le sujet existent, et apparaissent notamment dans l'ouvrage de (Berglund 2006).

L'aspect le plus important à remettre en cause concernant la fiabilité des résultats nous semble être les différentes paramétrisations et les hypothèses que nous y avons faites. En effet, nous avons tenté d'appliquer une approche qui allie intérêt physique et simplicité conceptuelle mais il est évident que nos hypothèses et simplifications restent sujettes à discussion. Cet aspect revêt une importance toute particulière compte tenu des différences qualitatives que cela peut induire sur le modèle, comme nous l'avons constaté dans notre analyse. Une façon d'améliorer notre modèle pourrait être d'y inclure une voire deux dimensions spatiales et ainsi de construire une paramétrisation de l'albédo plus proche de celles exposées dans (Budyko 1969) et (Sellers 1969), voire même bien meilleure encore. Une telle entreprise serait toutefois d'une ambition qui dépasse nettement le cadre d'un mémoire. Cependant, il faut noter que cela existe. Dans (Lucarini 2017) par exemple, une analyse de systèmes dynamiques est appliquée à un modèle climatique de complexité intermédiaire : PlaSim (Lunkeit 2011). Cette étude, qui se concentre sur les transitions d'un état à un autre, montre notamment à quel point la dynamique du système et les différents états peuvent se complexifier avec un nombre accru de dimensions et de phénomènes modélisés. De telles méthodes sont également appliquées dans d'autres domaines, comme l'étude des écoulements turbulents à nombre de Reynolds élevé (Wales 2012). Un état de l'art plus exhaustif sur les techniques de continuation appliquées dans un contexte physique est présenté dans (Dijkstra 2014).

Bien que l'albédo joue un rôle crucial dans notre modèle et que sa paramétrisation soit au centre de notre attention, ce n'est probablement pas la seule grandeur qui puisse faire l'objet d'améliorations. Nous pourrions également nous pencher sur les autres paramétrisations comme celle du forçage radiatif du CO_2 par exemple. Nous pouvons noter qu'au lieu d'une paramétrisation polynômiale d'ordre 4 d'une fraction du réservoir de Carbone, les modifications récentes apportées au modèle COPSE comportent une paramétrisation logarithmique de ce forçage. Ceci est probablement plus proche de l'intuition physique et a l'avantage de réduire le nombre de paramètres qui rentrent en compte (Lenton 2018).

Enfin, une dernière façon envisageable d'améliorer notre analyse tout en la rendant plus crédible encore serait de se pencher sur les hypothèses simplificatrices de B.Mills lui ayant permis de passer du modèle COPSE complet au modèle simplifié. Il est possible que certaines de ces simplifications puissent être implémentées de façon moins restrictive pour ainsi tenir compte des variations d'autres réservoirs géologiques. Il serait éventuellement aussi intéressant de tenter d'incorporer un vrai modèle de glace au modèle COPSE en étendant la paramétrisation des différents forçages au Néoprotérozoïque sur base des connaissances géologiques que nous avons de cette ère.

5 Bibliographie

- Berglund, N., Gentz, B., 2006. Noise-Induced Phenomena in Slow-Fast Dynamical Systems : A Sample-Paths Approach. Springer
- Bergman, N.M., Lenton, T.M., Watson, A.J., 2004. COPSE : A new model of biogeochemical cycling over Phanerozoic time. American Journal of Science. pp 397-437
- Berner, R.A., 1991. A Model For Atmospheric CO₂ Over Phanerozoic Time. American Journal Of Science Vol.291 pp.339-376
- Berner, R.A., 1994. GEOCARB II : A Revised Model Of Atmospheric CO₂ Over Phanerozoic Time. American Journal Of Science Vol.294 pp.56-91
- Berner, R.A., Kothavala, Z. 2001. GEOCARB III : A Revised Model Of Atmospheric CO₂ Over Phanerozoic Time. American Journal Of Science Vol.301 pp.182-204
- Budyko, M.I., 1969. The effect of solar radiation variations on the climate of the Earth. Tellus, 21, pp. 611-619
- Clewley, R.H., Sherwood, W.E., LaMar, M.D., Guckenheimer, J.M., 2007. PyDSTool, a software environment for dynamical systems modeling. URL <http://pydstool.sourceforge.net>
- Clough, S.A., 2005. Atmospheric radiative transfer modeling : a summary of the AER codes. Journal of Quantum Spectroscopy vol. 91, pp. 233-244.
- Cowen, R., 2001. Planktonic paradise on Slushball Earth : a scenario for the metazoan radiation. <http://mygeologypage.ucdavis.edu/cowen/historyofflife/slushball.html>.
- Crucifix, M., 2012. Oscillators and relaxation phenomena in Pleistocene climate theory. Phil. Trans. R. Soc. A (2012) 370, 1140–1165
- Desroches, M., Krauskopf, B., Osinga, H.M., 2010. Numerical continuation of canard orbits in slow-fast dynamical systems. IOP Publishing Ltd and London Mathematical Society. pp.739-765
- Dhooge, A., Govaerts, W.J.F., Kuznetsov, Y.A., Mestrom, W., Riet, A.M., Sautois, B., 2006. MATCONT and CL_MATCONT : Continuation toolboxes in matlab. Université de Gand(B), Université d'Utrecht(NL)
- Dijkstra, H.A., Doedel, E.J., Lucarini, V. 2014. Review article : Numerical Bifurcation Methods and their Application to Fluid Dynamics : Analysis beyond Simulation. Commun. Comput. Phys. Vol. 15, No. 1, pp. 1-45
- Doedel, E.J., Oldeman, B.E., 2012. AUTO-07P : Continuation and bifurcation software for ordinary differential equations. Concordia University, Montreal, Canada

-
- Goldblatt, C., Lenton, T.M., Watson, A.J., 2009. An evaluation of the long-wave radiative transfer code used in the Met Office Unified Model. *QUARTERLY JOURNAL OF THE ROYAL METEOROLOGICAL SOCIETY* vol.135, pp. 619-633.
- Goosse, H., 2015. *Climate system dynamics and modelling*. Cambridge University Press.
- Govaerts, W.J.F., 2000. *Numerical Methods For Bifurcations Of Dynamical Equilibria*. SIAM
- Grotzinger, J.P., Jordan, T.H., 2014. *Understanding Earth*. W.H. Freeman
- Harland, W.B., Rudwick, M.J.S., 1964. The great infra-Cambrian ice age. *Scientific American*. 211, pp.28–36
- Higgins, J.A., Schrag, D.P., 2003. Aftermath of a snowball Earth. *Geochem. Geophys. Geosyst.* 4.
- Hoffman, P.F., Kaufman, A.J., Halverson, G.P., Schrag, D.P., 1998. A Neoproterozoic snowball Earth. *Science* Vol.281 pp 1342-1346.
- Keller, H.B., 1977. Numerical solution of bifurcation and nonlinear eigenvalue problems, in *Applications of Bifurcation Theory*. Academic Press, New York. pp. 359-384.
- Kirschvink, J.L., 1992. Late Proterozoic low-latitude global glaciation : the snowball Earth, in : Schopf, J.W., Klein, C.C., 1992. *The Proterozoic Biosphere : A Multidisciplinary Study*, Cambridge University Press. pp.51–52.
- Kump, L.R., Garrels, R.M., 1986. Modelling Atmospheric O₂ In The Global Sedimentary Redox Cycle. *American Journal Of Science* Vol.286 pp.337-360
- Le Hir, G., Donnadieu, Y., Godd  ris, Y., Pierrehumbert, R.T., Ramstein, G. 2009. The snowball Earth aftermath : Exploring the limits of continental weathering processes. *Elsevier. Earth and Planetary Science Letters* 277 pp. 453–463
- Lenton, T.M., Daines, S.J., Mills, J.W., 2018. COPSE reloaded : An improved model of biogeochemical cycling over Phanerozoic time. *Elsevier, Earth-Science Reviews* 178 (2018). pp 1-28.
- Lenton, T.M., Watson, A.J., 2000. Redfield Revisited 1. Regulation Of Nitrate, Phosphate And Oxygen In The Ocean. *GLOBAL BIOGEOCHEMICAL CYCLES*, VOL. 14, NO. 1, pp. 225-248
- Lenton, T.M., Watson, A.J., 2000. Redfield Revisited 2. What Regulates The Oxygen Content Of The Atmosphere. *GLOBAL BIOGEOCHEMICAL CYCLES*, VOL. 14, NO. 1, pp. 249-268,
- Lewis, E. Wallace, D.W.R., 1998. Program developed for CO₂ system calculations. Report

no. ORNL/CDIAC 105, Carbon dioxide Information and Analysis Center, Oak Ridge National Laboratory, Oak Ridge, TN USA.

Lewis, J.P., Weaver, A.J., Eby, M., 2007. Snowball versus slushball Earth : dynamic versus nondynamic sea ice ? J. Geophys. Res. 112, 2156–2202.

Lucarini, V., Bódai, T., 2017. Edge states in the climate system : exploring global instabilities and critical transitions. IOP Publishing Ltd London Mathematical Society. Nonlinearity 30. pp 32-66.

Lunkeit, F. et al. 2011. Planet Simulator reference manual version 16.

Mills, B., Watson, A.J., Goldblatt, C., Boyle, R., Lenton, T.M., 2011. Timing of Neoproterozoic glaciations linked to transport-limited global weathering. Nature Geoscience. pp 861-865.

Müller-Stoffels, M., Wackerbauer, R., 2012. Albedo parametrization and reversibility of sea ice decay. Nonlinear Processes in Geophysics, vol.19, pp.81–94.

Ramstein, G., Donnadieu, Y., Goddérès, Y., 2004. Les glaciations du Protérozoïque. C.R. Geoscience 336 (2004). pp 639-646

Sellers, W.D., 1969. A climate model based on the energy balance of the earth-atmosphere system. Journal of applied meteorology, 8, pp. 392-400

Stanley, S.M., Luczaj, J.A., 2014. Earth System History. W.H. Freeman.

Strogatz, S.H., 1994. Nonlinear Dynamics And Chaos. Addison-Wesley Publishing Company

Wales, C., Gaitonde, A.L., Jones, D., Avitabile, D., 2012. Numerical continuation of high Reynolds number external flows. International Journal for Numerical Methods in Fluids vol. 68(2), pp. 135 - 159

Webographie

www.stratigraphy.org

<https://pydstool.github.io/biosketch/index.html>

<https://pydstool.github.io/PyDSTool/PyCont.html>

Une nouvelle hypothèse concernant les glaciations du Néoprotérozoïque

Alexandre Noël

La présence de sédiments glaciaires retrouvés dans de nombreux endroits du monde dans les strates géologiques datant du Néoprotérozoïque s'explique dans le cadre de la théorie Snowball Earth par des glaciations extrêmes. Durant celles-ci, les calottes polaires se seraient étendues jusqu'à l'équateur et les températures moyennes globales auraient atteint des valeurs extrêmement basses. Un nombre important d'études ont été menées sur les mécanismes d'entrée et de sortie de telles glaciations et de nombreux modèles ont été construits afin de mieux comprendre les différents processus qui entrent en jeu dans le cadre des équilibres entre les principaux cycles biogéochimiques.

Le modèle COPSE a quant à lui été développé pour reproduire les variations climatiques au cours du Phanérozoïque sur base de ces cycles. Plus récemment, il a été adapté, dans une version simplifiée, à l'étude des glaciations du Néoprotérozoïque dans un projet dont le but est de formuler une nouvelle hypothèse pour expliquer les échelles de temps qui séparent ces glaciations.

L'objectif de notre travail est d'effectuer une analyse en système dynamique du modèle COPSE simplifié afin d'étudier la plausibilité et la robustesse de cette hypothèse.

Université catholique de Louvain

Faculté des sciences

Place des sciences, 2bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/sc