

Optimisation des structures de tensegrité composées de modules prismatiques

Mémoire présenté par
Lindy BOUCHER

en vue de l'obtention du grade de master en
Ingénieur civil des constructions

Promoteur
Pierre LATTEUR

Lecteurs
Catherine DONEUX, Sébastien GOESSENS, Jean-François REMACLE

Année académique 2016-2017

**Optimisation des structures de tensegrité composées
de modules prismatiques**

Lindy Lindsay Boucher

*« All structures, properly understood, from the solar system
to the atom, are tensegrity structures. Universe is omnidimensional integrity »*

R.B. Fuller

Remerciements

Lorsque Pierre LATTEUR m'a expliqué le sujet de ce mémoire, j'ai immédiatement été enthousiaste face au caractère innovant de ce concept et séduit par l'esthétique dont il est doté. Les premiers mois de travail n'ont cependant pas été si joyeux. En effet, la complexité du sujet et la quantité de matière à assimilé m'ont tout d'abord effrayé. Mais à force de persévérance et grâce aux nombreuses séances de questionnements, je suis finalement parvenu à franchir ces obstacles et la suite de mon travail s'est finalement révélé passionnant. Je tiens donc premièrement à le remercier pour sa grande disponibilité et le temps qu'il m'a consacré tout au long de cette année. Son enthousiasme, ses conseils et sa bonne humeur quotidienne n'ont cessé de me motiver à approfondir mes recherches. J'aimerais donc également le remercier pour l'intérêt qu'il a démontré lors de toutes nos entrevues. Il est parvenu au terme de mon travail à me transmettre sa passion pour la tenségrité.

Je remercie également Alexy BASTIEN, Quentin GRAVY, Marc ELIAERS et Jonas FERON pour le travail qu'ils ont effectué durant leur mémoire et qui ont permis d'atteindre aujourd'hui cet état d'aboutissement.

Jonas FERON m'a également apporté son aide dans la relecture de mon travail. Ses remarques et ses conseils m'ont été d'une grande utilité. Je tiens donc à le remercier tout particulièrement et je lui souhaite d'ores et déjà bonne chance pour son doctorat.

Merci à Sébastien GOESSENS pour sa précieuse aide avec l'imprimante 3D. Grâce à ses nombreux tests, je suis finalement parvenu à imprimer correctement différents modules de tenségrité.

Je remercie aussi Sébastien QUITTELIER du service de support informatique pour le temps qu'il a consacré à l'installation de l'IDE PyCharm pour programmer en Python sur tous les ordinateurs d'une salle informatique de l'UCL. J'ai ainsi pu lancer mes simulations numériques pendant presque 2 mois sur plusieurs ordinateurs. Sans son aide, je ne serais jamais parvenu à approfondir autant mes recherches.

Je remercie d'avance les membres du jury Catherine DONEUX, Sébastien GOESSENS, Jean-François REMACLE pour le temps qu'ils prendront à lire ce travail de fin d'études et pour l'intérêt qu'ils lui porteront.

Merci à Geoffrey CIAMARRA, mon ami de toujours, et à Danielle LAMBEAUX, ma grand-mère, pour la relecture attentive de ce mémoire.

Je tiens finalement à remercier ma famille et plus particulièrement mes parents, Jean-Louis BOUCHER et Nathalie THIELEMANS, et mon frère, Mike BOUCHER, pour leur encouragement et leur soutien sans faille tout au long de mes études. Merci à eux pour l'intérêt qu'ils ont montré pour ce mémoire. J'espère qu'au terme de mon travail la tenségrité leur sera moins énigmatique. Et enfin, merci à mes amis proches.

Table des matières

INTRODUCTION.....	1
CHAPITRE 1 : LA TENSÉGRITÉ.....	5
1.1 LES DÉBUTS DU PRINCIPE DE TENSÉGRITÉ	5
1.2 DÉFINITIONS.....	6
1.3 TYPOLOGIE DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ	7
1.3.1 Cellules élémentaires.....	7
1.3.2 Assemblage de cellules élémentaires	8
1.4 LE SIMPLEX.....	9
1.5 LA NON-LINÉARITÉ DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ	12
CHAPITRE 2 : CALCUL APPROXIMATIF DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ PAR UNE APPROCHE LINÉAIRE	15
2.1 MÉTHODE LINÉAIRE D'ÉLÉMENTS FINIS	15
2.1.0 Principe général.....	15
2.1.1 Matrices de raideur locales des éléments	15
2.1.2 Matrice de raideur globale de la structure.....	17
2.1.3 Conditions aux appuis	18
2.1.4 Résolution du système d'équations	19
2.1.5 Post traitement des résultats	19
2.1.6 Conclusion	19
2.2 OPTIMISATION	20
2.2.1 Optimisation de la précontrainte	20
2.2.2 Optimisation des sections.....	22
2.2.3 Optimisation de la structure.....	24
CHAPITRE 3 : CALCUL NON-LINÉAIRE DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ.....	29
3.1 INTRODUCTION À LA NON-LINÉARITÉ.....	29
3.2 CALCUL AU SECOND ORDRE.....	30
3.2.1 Structure non-linéaire calculée au second ordre	30
3.3 MÉTHODE NON-LINÉAIRE D'ÉLÉMENTS FINIS	31
3.3.1 Principe de résolution	31
3.3.2 Matrice de raideur non-linéaire	31
3.3.3 Avancement dans la solution	32
3.3.4 Equation de contrainte $\Delta\lambda$	34
3.3.5 Solveur non-linéaire.....	36
CHAPITRE 4 : OPTIMISATION DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ.....	39
4.1 OPTIMISATION DE LA PRÉCONTRAÎTE	40
4.1.1 Principe de superposition	40
4.1.2 Méthodes d'optimisation de la précontrainte.....	41
4.2 OPTIMISATION DES SECTIONS	45
4.2.1 Influence du degré d'hyperstaticité	45
4.2.2 Dimensionnement suivant l'indicateur de flambement Ψ	46
4.2.3 Méthodes d'optimisation des sections	46
4.2.4 Processus d'optimisation des sections.....	48
4.3 OPTIMISATION DE LA STRUCTURE	49
4.3.1 Théorie des indicateurs morphologiques.....	49
4.3.2 Indicateurs morphologiques non-linéaires	50
4.3.3 Prise en compte de la précontrainte dans l'optimisation de la structure	53
4.3.4 Exemples et confirmations numériques	54
4.3.5 Conclusion de l'optimisation de la structure	56

4.4	OPTIMISATION COMPLÈTE D'UNE STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ	57
4.4.1	<i>Procédure générale</i>	57
CHAPITRE 5 : PRÉSENTATION DES MODULES DE TENSÉGRITÉ POUR LES PASSERELLES		61
5.1	LES PASSERELLES DE TENSÉGRITÉ	61
5.2	MODULES DE TENSÉGRITÉ DANS LA CONCEPTION D'UNE PASSERELLE	61
5.2.1	<i>État d'autocontrainte des modules de tenségrité</i>	62
5.2.2	<i>Le quadruplex</i>	64
5.2.3	<i>Le pentaplex</i>	68
5.2.4	<i>L'hexaplex</i>	71
5.2.5	<i>Les anneaux de tenségrité</i>	73
5.2.6	<i>Le module dérivé de Richard FULLER</i>	77
5.3	ELANCEMENT GÉOMÉTRIQUE DES MODULES DE TENSÉGRITÉ PRISMATIQUES	80
5.4	CONCLUSION	81
CHAPITRE 6 : FAISABILITÉ D'UTILISATION DES MODULES DE TENSÉGRITÉ POUR LES PASSERELLES		83
6.1	STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE SIMPLEX	84
6.1.1	<i>Définition de la structure</i>	84
6.1.2	<i>Hyperstatiticé d'une structure composée de simplex</i>	84
6.1.3	<i>Résultats de l'optimisation sans la prise en compte du poids propre</i>	85
6.1.4	<i>Résultats de l'optimisation avec la prise en compte du poids propre</i>	87
6.1.5	<i>Conclusion</i>	92
6.2	STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE QUADRUPLEX SUIVANT L'ORIENTATION N°1	93
6.2.1	<i>Définition de la structure</i>	93
6.2.2	<i>Hyperstatiticé d'une structure composée de quadruplex</i>	93
6.2.3	<i>Résultats de l'optimisation sans la prise en compte du poids propre</i>	96
6.2.4	<i>Résultats de l'optimisation avec la prise en compte du poids propre</i>	98
6.2.5	<i>Conclusion</i>	100
6.3	STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE QUADRUPLEX SUIVANT L'ORIENTATION N°2	100
6.3.1	<i>Définition de la structure</i>	100
6.3.2	<i>Résultats de l'optimisation sans la prise en compte du poids propre</i>	101
6.3.3	<i>Résultats de l'optimisation avec la prise en compte du poids propre</i>	103
6.3.4	<i>Conclusion</i>	106
6.4	STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE PENTAPLEX SUIVANT L'ORIENTATION N°1	106
6.4.1	<i>Définition de la structure</i>	106
6.4.2	<i>Hyperstatiticé d'une structure composée de pentaplex</i>	106
6.4.3	<i>Résultats de l'optimisation sans la prise en compte du poids propre</i>	107
6.4.4	<i>Résultats de l'optimisation avec la prise en compte du poids propre</i>	108
6.4.5	<i>Conclusion</i>	111
6.5	STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE PENTAPLEX SUIVANT L'ORIENTATION N°2	111
6.5.1	<i>Définition de la structure</i>	111
6.5.2	<i>Résultats de l'optimisation sans la prise en compte du poids propre</i>	111
6.5.3	<i>Résultats de l'optimisation avec la prise en compte du poids propre</i>	114
6.5.4	<i>Conclusion</i>	116
6.6	STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES D'HEXAPLEX SUIVANT L'ORIENTATION N°1	116
6.6.1	<i>Définition de la structure</i>	116
6.6.2	<i>Résultats de l'optimisation sans la prise en compte du poids propre</i>	117
6.6.3	<i>Résultats de l'optimisation avec la prise en compte du poids propre</i>	120
6.6.4	<i>Conclusion</i>	122
6.7	STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES D'HEXAPLEX SUIVANT L'ORIENTATION N°2	122
6.7.1	<i>Définition de la structure</i>	122
6.7.2	<i>Résultats de l'optimisation sans la prise en compte du poids propre</i>	123
6.7.3	<i>Résultats de l'optimisation avec la prise en compte du poids propre</i>	125
6.7.1	<i>Conclusion</i>	126

6.8	STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES D'ANNEAUX DE TENSÉGRITÉ.....	126
6.8.1	<i>Définition de la structure</i>	126
6.8.2	<i>Hyperstaticité d'une structure composée d'anneaux de tenségrité à base pentagonale</i>	126
6.8.3	<i>Résultats de l'optimisation sans la prise en compte du poids propre</i>	127
6.8.4	<i>Conclusion</i>	128
6.9	STRUCTURES COMPOSÉES DE MODULES DE FULLER	128
6.9.1	<i>Définition de la structure</i>	128
6.9.2	<i>Étude d'une structure composée de modules de Fuller</i>	128
6.10	CONCLUSION	130
CHAPITRE 7 : COMPARAISON DE L'EFFICACITÉ DES MODULES PRISMATIQUES		131
7.1	LES PASSERELLES DE TENSÉGRITÉ DE 10 m DE PORTÉE	132
7.1.1	<i>Analyse des résultats</i>	132
7.2	LES PASSERELLES DE TENSÉGRITÉ DE 20 m DE PORTÉE.....	135
7.2.1	<i>Analyse des résultats</i>	135
7.3	LES PASSERELLES DE TENSÉGRITÉ DE 30 m DE PORTÉE.....	138
7.3.1	<i>Analyse des résultats</i>	138
7.4	LES PASSERELLES DE TENSÉGRITÉ DE 40 m DE PORTÉE.....	141
7.4.1	<i>Analyse des résultats</i>	141
7.5	CONCLUSION	144
CHAPITRE 8 : CAS PRATIQUE, DIMENSIONNEMENT D'UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ		147
8.1	EXEMPLE PRATIQUE.....	147
8.1.1	<i>Données et hypothèses</i>	147
8.1.2	<i>Cas n°1 : $L = 20\text{ m}$</i>	148
8.1.3	<i>Cas n°2 : $L = 40\text{ m}$</i>	150
8.1.4	<i>Considérations pratiques</i>	153
8.2	CONCLUSION	156
CONCLUSION ET PERSPECTIVES		157
ANNEXE A : STRUCTURE NON-LINÉAIRE EN GRANDS DÉPLACEMENTS.....		161
ANNEXE B : DÉMONSTRATION DE LA MATRICE DE RAIDEUR NON-LINÉAIRE		163
ANNEXE C : ÉQUATIONS DE CONTRAINTE.....		167
ANNEXE D : INFLUENCE DE L'INCLINAISON DU CHARGEMENT EXTÉRIEUR		169
TABLE DES ANNEXES		I
TABLE DES FIGURES.....		II
BIBLIOGRAPHIE		VI

Table des symboles

Symbole	Unité	Signification
b	$[m]$	Largeur du tablier d'une passerelle
\bar{c}	$[-]$	Matrice des degrés de liberté bloqués par les conditions aux appuis
c_{base}	$[-]$	Nombre de côtés de la base polygonale d'un anneau de tensegrité
c_x	$[-]$	Cosinus directeur selon x
c_y	$[-]$	Cosinus directeur selon y
D	$[m]$	Largeur d'une structure
\bar{D}	$[m]$	Matrice des déplacements imposés aux appuis
f_y	$[Pa]$	Limite d'élasticité du matériau
h	$[m]$	Hauteur d'une section d'un élément
i	$[-]$	Itération de l'optimisation des sections
j	$[-]$	Itération de l'optimisation de la précontrainte
k	$[-]$	Itération de la méthode non-linéaire d'éléments finis
l	$[-]$	Longueur d'incrémentatation
l_d	$[m]$	Longueur du câble central du module de Fuller
l_e	$[m]$	Décalage entre 2 modules de Fuller consécutifs
m	$[-]$	Rapport entre l'épaisseur et la hauteur d'une section
n_b	$[-]$	Nombre de barres d'un module prismatique
p	$[N]$	Chargement incrémental
q	$[-]$	Facteur de forme des sections
\bar{r}	$[N]$	Vecteur des forces de réaction aux appuis
t	$[m]$	Épaisseur d'une section creuse
\bar{d}	$[m]$	Vecteur de déplacement des nœuds d'une structure
\bar{d}_{loc}	$[m]$	Vecteur de déplacement des nœuds d'un élément
v	$[m]$	Vélocité incrémentale
A	$[m^2]$	Aire d'un élément
A_b	$[m^2]$	Aire d'une barre

A_c	$[m^2]$	Aire d'un câble
B_e	$[-]$	Nombre total d'éléments d'une structure
E	$[Pa]$	Module d'élasticité
E_b	$[Pa]$	Module d'élasticité d'une barre
E_c	$[Pa]$	Module d'élasticité d'un câble
F	$[N]$	Charge externe totale appliquée sur une structure
H	$[m]$	Hauteur d'une structure
I	$[m^4]$	Inertie d'un élément
I_s	$[-]$	Degré d'hyperstatiticé d'une structure
\bar{K}_0	$[N/m]$	Matrice de raideur globale de la structure initiale
$\bar{K}_{0,loc}$	$[N/m]$	Matrice de raideur locale d'un élément initial
\bar{K}_k	$[N/m]$	Matrice de raideur globale de la structure courante
$\bar{K}_{k,loc}$	$[N/m]$	Matrice de raideur locale d'un élément courant
L	$[m]$	Portée d'une structure
L_0	$[m]$	Longueur initiale d'un élément
L_k	$[m]$	Longueur déformé d'un élément au pas incrémental k
N	$[N]$	Effort normal
N_{nodes}	$[-]$	Nombre total de nœuds d'une structure
N_H	$[N]$	Composante horizontale de l'effort normal
N_V	$[N]$	Composante verticale de l'effort normal
P	$[N]$	Précontrainte
PP	$[N]$	Poids propre
P_H	$[N]$	Composante horizontale de la précontrainte
P_V	$[N]$	Composante verticale de la précontrainte
R_{appuis}	$[-]$	Nombre de réactions d'appuis
S	$[-]$	Nombre de modules d'une structure de tenségrité
\bar{T}	$[-]$	Matrice de changement de base
U	$[Nm]$	Energie élastique interne de la structure

V	$[m^3]$	Volume total de matière
W	$[-]$	Indicateur de volume
W_{ext}	$[Nm]$	Travail des forces externes sur la structure
X	$[m]$	Abscisse d'un nœud dans son repère local
Y	$[m]$	Ordonnée d'un nœud dans son repère local
α	$[^\circ]$	Angle de rotation entre les bases d'un module prismatique
α_x	$[^\circ]$	Angle d'inclinaison entre le repère local d'un élément et le repère global de la structure
β	$[-]$	Facteur de sensibilité à la précontrainte
δ	$[m]$	Flèche maximale de la structure
λ	$[-]$	Paramètre d'incrément adimensionnel
λ_e	$[-]$	Élancement d'un élément
Λ	$[-]$	Élancement réduit d'un élément
μ	$[-]$	Condition d'extrémités des éléments
σ	$[Pa]$	Contrainte de dimensionnement du matériau
σ_b	$[Pa]$	Contrainte de dimensionnement d'une barre
σ_c	$[Pa]$	Contrainte de dimensionnement d'un câble
σ_{crit}	$[Pa]$	Contrainte admissible critique du matériau
ρ	$[N/m^3]$	Poids volumique du matériau
ϕ_b	$[m]$	Diamètre des barres
ϕ_c	$[m]$	Diamètre des câbles
Δ	$[-]$	Indicateur de déplacement
Π	$[Nm]$	Energie potentielle totale de la structure
Φ	$[-]$	Indicateur de poids propre
Ψ	$[-]$	Indicateur de flambement

Introduction

Bien qu'inventées il y a une cinquantaine d'années, les structures de tensegrité demeurent inconnues aux yeux de la majeure partie de la population. Ce concept structural novateur a essentiellement été utilisé pour la réalisation d'œuvres artistiques pour son aspect visuellement léger. En effet, à l'heure actuelle, on ne recense que très peu d'ouvrages de tensegrité construits dans le monde.

Cette absence d'ouvrage d'art dans le génie civil résulte de plusieurs difficultés inhérentes aux structures de tensegrité : elles sont très déformables et nécessitent des calculs numériques particulièrement complexes.

Ce travail de mémoire s'inscrit dans une thématique de recherche concernant les systèmes de tensegrité. Il vise tout d'abord à améliorer l'outil numérique de calcul et d'optimisation en y intégrant le poids propre. Ensuite, il va tenter d'étendre la faisabilité des structures de tensegrité.

Ce travail de recherche débute au cours de l'année académique 2013-2014. Alexis BASTIN et Quentin GRAVY s'intéressent tout d'abord aux différentes typologies de tensegrité de manière générale. Parmi elles, un module attire tout particulièrement leur attention par son aspect simple et esthétique : le simplex. Après réflexion, ce système semble capable d'accueillir en son sein une passerelle piétonne. Ils relèvent ainsi le défi de concevoir une passerelle de tensegrité composée d'une succession de simplex.

Au cours de leur étude, ils font rapidement face à un problème intrinsèque aux structures de tensegrité. En effet, elles sont instables au premier ordre et se comportent donc non-linéairement. Ils développent ainsi une méthode linéaire d'éléments finis capable de calculer approximativement les structures de tensegrité. Ces résultats peuvent être remis en question.

Au cours de l'année académique 2014-2015, Marc ELIAERS met au point une méthode non-linéaire d'éléments finis capable de modéliser le comportement physique des structures de tensegrité.

Afin d'optimiser ces structures de tensegrité, Jonas FERON développe, au cours de l'année académique 2015-2016, un outil numérique complet qui intègre à la fois le calcul non-linéaire et les méthodes d'optimisation basées sur les indicateurs morphologiques. Au terme de son mémoire, il réussit à étendre cette théorie aux structures 3D, non-linéaires et précontraintes. Il parvient finalement, grâce à ces indicateurs morphologiques, à prouver la faisabilité des structures de tensegrité composées de simplex.

Mon objectif est donc tout d'abord de poursuivre le travail de Jonas FERON afin de compléter l'optimisation des structures de tensegrité basée sur les indicateurs morphologiques en y intégrant désormais le poids propre. Une fois chose faite, on pourra élargir la réflexion quant à l'efficacité de ces structures. Ensuite, plusieurs typologies de tensegrité différentes seront étudiées. La théorie des indicateurs morphologiques va permettre de prouver, ou non, leur faisabilité. La finalité de la présente étude est donc de comparer l'efficacité des diverses possibilités de structures de tensegrité dans la conception d'une passerelle piétonne.

Ce mémoire s'articule autour de 8 chapitres :

Le Chapitre 1 présente le concept de tensegrité dans son ensemble. Il permet de comprendre le fonctionnement général de ces systèmes. Les difficultés liées aux calculs numériques de ces structures seront également exposées.

Le Chapitre 2 synthétise le travail d'Alexis BASTIEN et Quentin GRAVY. La méthode linéaire d'éléments finis ainsi que les différents types d'optimisation y sont détaillés. La théorie des indicateurs morphologiques sera également introduite.

Le Chapitre 3 explique la méthode non-linéaire d'éléments finis développée par Marc ELIAERS pour calculer les structures de tensegrité.

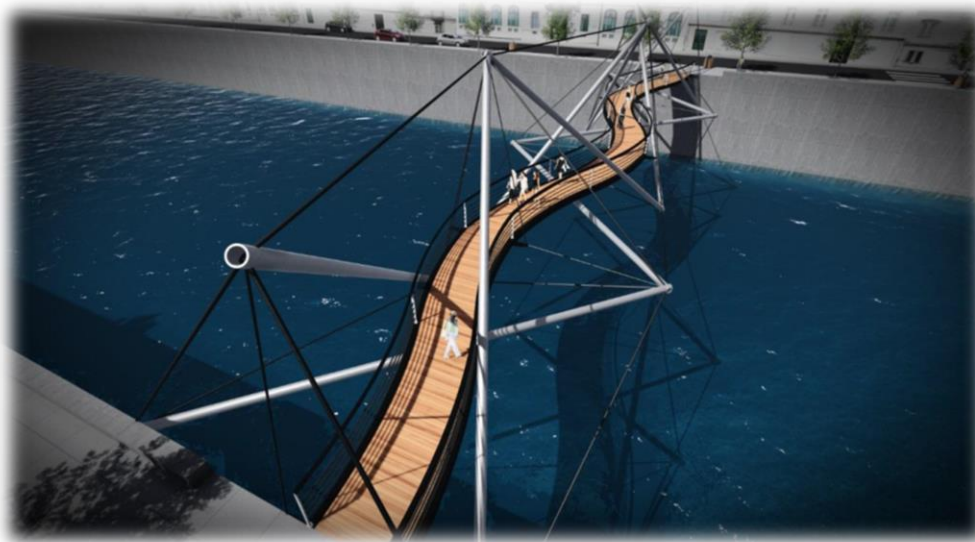
Le Chapitre 4 synthétise le mémoire de Jonas FERON. L'optimisation sur base du calcul non-linéaire des structures de tensegrité sera expliquée. On verra notamment comment adapter la théorie des indicateurs morphologiques aux structures non-linéaires et précontraintes. Le processus d'optimisation sera également modifié afin d'intégrer le poids propre.

Le Chapitre 5 présente d'autres modules de tensegrité avec lesquelles on pourrait imaginer concevoir une passerelle. En effet, jusqu'à présent, seules les passerelles composées de simplex ont fait l'objet d'une étude (voir la figure ci-dessous). Au total, 5 nouveaux modules seront introduits.

Le Chapitre 6 étudie chaque module de tensegrité individuellement. La théorie des indicateurs morphologiques va permettre de déterminer leur efficacité et de prouver, ou non, leur faisabilité. L'impact de la prise en compte du poids propre sera tout particulièrement étudié.

Le Chapitre 7 compare l'efficacité des différents modules de tensegrité. Les indicateurs morphologiques vont ainsi permettre d'établir des tables de pré dimensionnement classant les modules en fonction de leur efficacité. Ces tables serviront de guide pour un concepteur intéressé dans la réalisation d'une passerelle de tensegrité.

Enfin, le Chapitre 8 propose un exemple concret d'une passerelle de tensegrité et compare son efficacité en fonction du module de tensegrité choisi. La hauteur de passage au sein de la passerelle sera également étudiée.



PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE SIMPLEX

Bref résumé

Le concepteur intéressé dans la réalisation d'une passerelle piétonne esthétique et novatrice sera séduit par la tenségrité. Ce nouveau concept structural, à la pointe de l'innovation, assure des structures à la fois ingénieuses et audacieuses.

En termes d'esthétisme, l'aspect visuellement léger de la passerelle de tenségrité représentée ci-dessus est admirable. Il s'agit d'une structure composée d'une succession de simplex. Les autres modules de tenségrité assurent également cette allure remarquable.

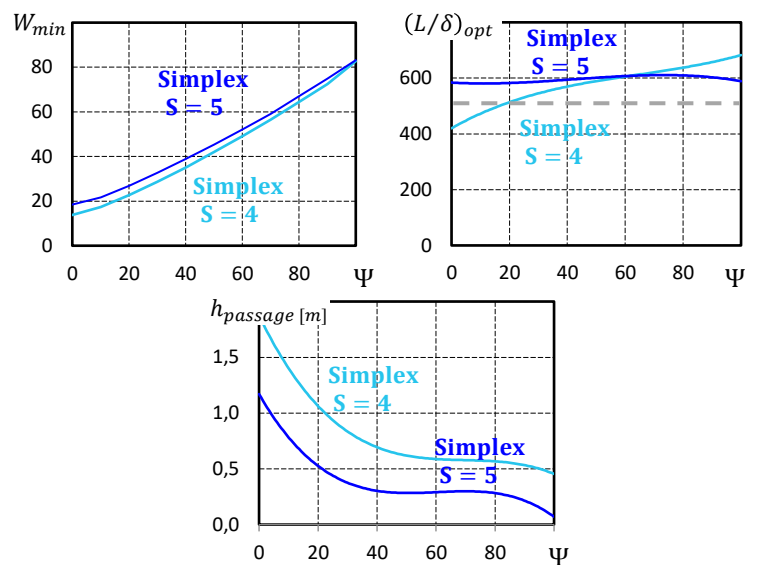
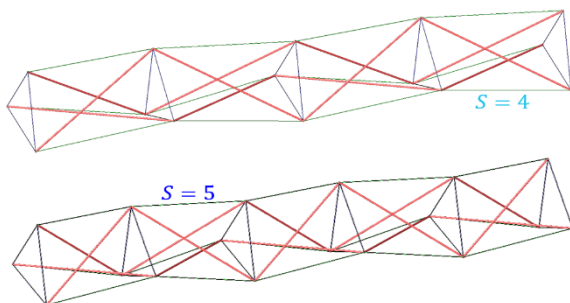
Au terme de ce travail, des tables de pré dimensionnement seront disponibles afin de guider le lecteur vers la solution la plus efficace.

En guise de sommaire, voici une brève synthèse illustrant certains aboutissements de ce mémoire.

Soit une passerelle de tenségrité de 40 m de portée en acier S235 avec un tablier de 2 m de large. Plusieurs solutions assurent une rigidité suffisante pour respecter le critère de l'Eurocode. Parmi elles, voici les structures les moins volumineuses, représentées à l'aide des courbes d'efficacité de l'indicateur de volume. La hauteur de passage disponible au sein de la passerelle est également donnée :

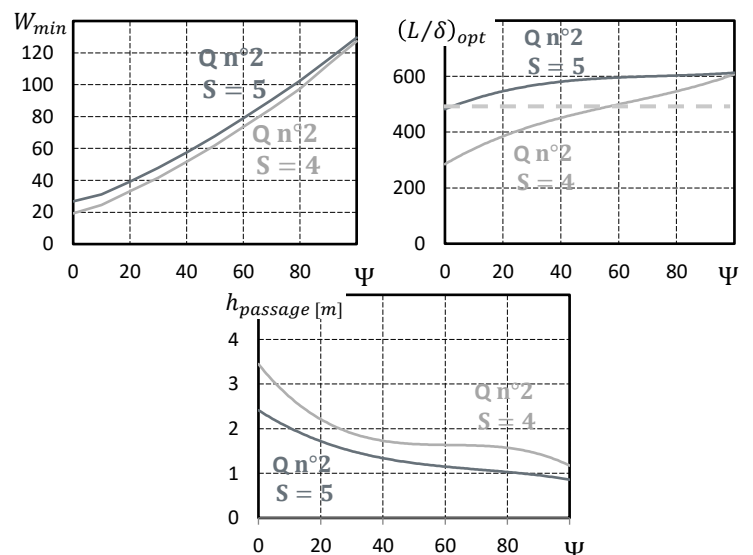
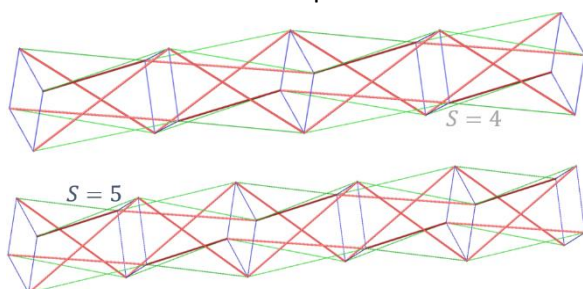
1. Le simplex :

- 12 éléments/module : 9 câbles & 3 barres ;
- Base triangulaire ;
- Angle de rotation des bases : $\alpha = 30^\circ$;
- Nombre de modules optimal : $S = 4 - 5$.



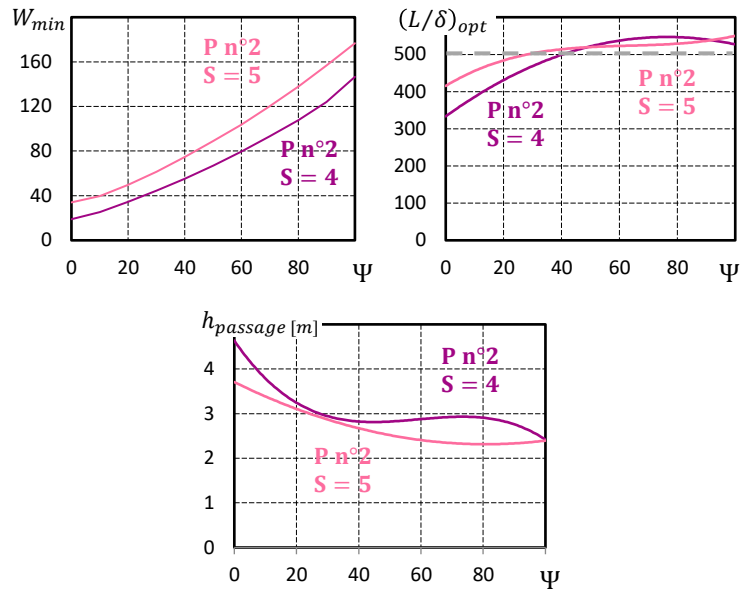
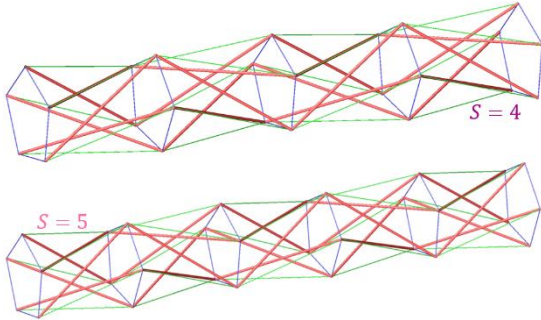
2. Le quadruplex n°2

- 16 éléments/module : 12 câbles & 4 barres ;
- Base carrée ;
- Angle de rotation des bases : $\alpha = 45^\circ$;
- Nombre de modules optimal : $S = 4 - 5$.



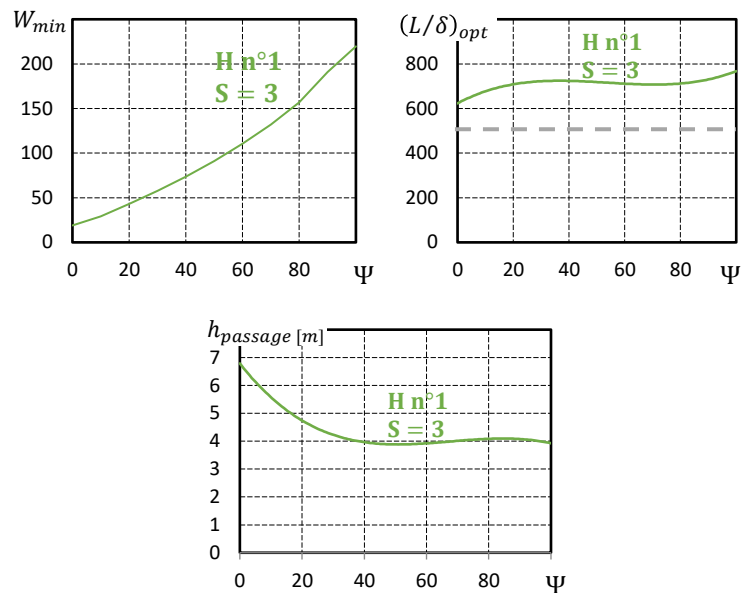
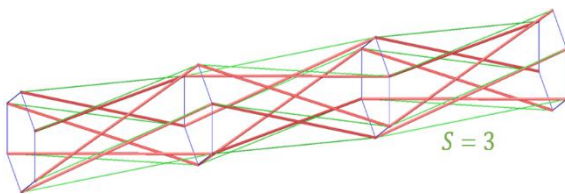
3. Le pentaplex n°2

- 20 éléments/module : 15 câbles & 5 barres ;
- Base pentagonale ;
- Angle de rotation des bases : $\alpha = 54^\circ$;
- Nombre de modules optimal : $S = 4 - 5$.



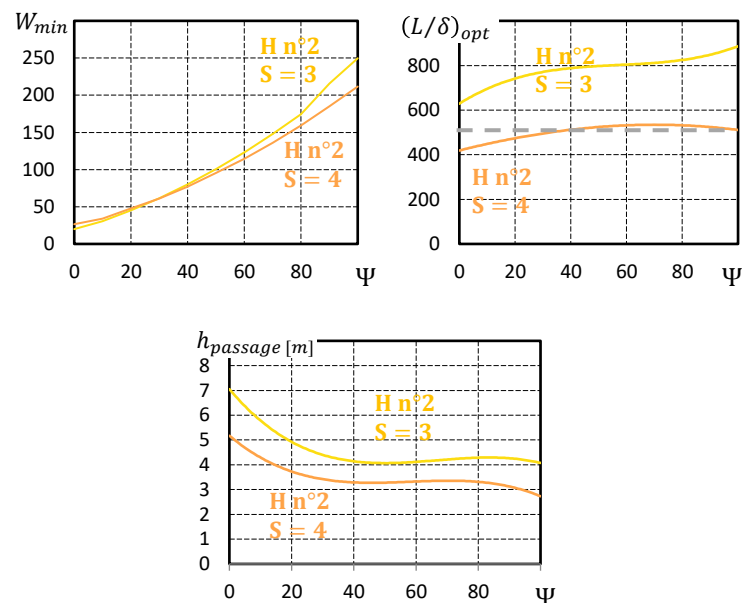
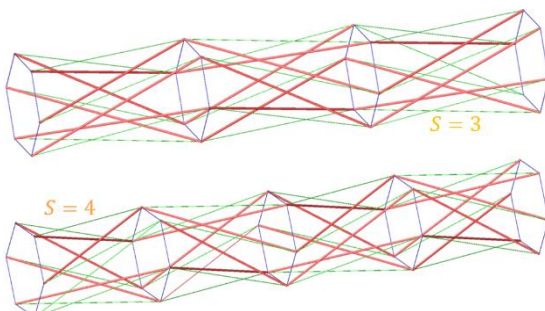
4. L'hexaplex n°1

- 24 éléments/module : 18 câbles & 6 barres ;
- Base hexagonale ;
- Angle de rotation des bases : $\alpha = 60^\circ$;
- Nombre de modules optimal : $S = 3$.



5. L'hexaplex n°2

- 24 éléments/module : 18 câbles & 6 barres ;
- Base hexagonale ;
- Angle de rotation des bases : $\alpha = 60^\circ$;
- Nombre de modules optimal : $S = 3 - 4$.



Chapitre 1 : La tenségrité

Ce premier chapitre synthétise le mémoire d’Alexy BASTIEN et Quentin GRAVY, « Etude d’une passerelle de tenségrité composée de simplex » [1], réalisé lors de l’année académique 2013-2014. L’ensemble de leur travail forme une première approche sur ce nouveau principe structural. Il constitue ainsi la base sur laquelle je me suis appuyé tout au long de ce mémoire.

Ce chapitre est également largement inspiré du mémoire de Marc ELIAERS, « Calcul non-linéaire des structures de tenségrité » [2], réalisé lors de l’année académique 2014 – 2015 et celui de Jonas FERON, « Optimisation des structures de tenségrité sur base d’indicateurs morphologiques » [3], réalisé lors de l’année académique 2015-2016.

Tout d’abord, les origines et le concept de tenségrité seront présentées. Un exemple de système de tenségrité sera ensuite étudié afin de bien comprendre les différentes propriétés de ces structures. Enfin, les difficultés liées aux calculs de ces structures seront exposées.

1.1 Les débuts du principe de tenségrité

Apparues il y a une cinquantaine d’années, l’historique des structures de tenségrité est assez vague. Plusieurs acteurs de l’époque ont joué un rôle primordial dans l’invention de ce concept. On peut ainsi retrouver plusieurs brevets valides dans le courant des années 1960.

L’étymologie du mot anglais « tensegrity », duquel est tiré la traduction française « tenségrité », nous renseigne un peu plus sur les origines de ce concept. Il s’agit d’un mot inventé par l’architecte américain Richard BUCKMINSTER FULLER issu de la contraction de « tensional integrity », ce qui signifie que l’intégrité de ces structures est assurée par ses éléments en tension. Grand vulgarisateur de structures innovantes dans les années 1950, Richard FULLER inventa ce terme pour décrire les sculptures d’un de ses élèves, Kenneth SNELSON [10].



(A) « MOVING COLUMN »



(B) « EARLY X-PIECE »

FIGURE 1.1 – DÉBUT DE LA TENSÉGRITÉ : SCULPTURES DE KENNETH SNELSON [10]

Par la suite, ces deux protagonistes ne cesseront de multiplier les sculptures et maquettes illustrant ce nouveau concept.

En France, à une époque similaire, les systèmes de tenségrité apparaissent également. On doit cette découverte à l'architecte hongrois David GEORGES EMMERICH. Il utilisa le nom de structures « *autotendantes* » [10] pour définir ce nouveau principe structural. Le terme « tenségrité » reste cependant préféré car il est plus synthétique et plus proche du terme anglophone.

Ces trois personnes citées ci-dessus sont ainsi considérées comme les pères fondateurs des structures de tenségrité.



FIGURE 1.2 – STRUCTURES AUTOTENDANTES D'APRÈS DAVID GEORGES EMMERICH [12]

1.2 Définitions

Plusieurs définitions du concept de tenségrité ont été données au fil du temps. Si on se réfère à l'inventeur du terme, Richard BUCKMINSTER FULLER, il s'agit de structures dont les éléments comprimés semblent flotter au sein des éléments tendus, ou selon ses termes :

« Islands of compression in a sea of tension » [4]

Cette définition, bien qu'éclairante sur le principe structural des structures de tenségrité, reste floue quant à sa nature technique. Pour pallier à cela, on peut se référer à la définition proposée par l'un des pionniers de la tenségrité, René MOTRO :

« Les systèmes de tenségrité sont des systèmes réticulés spatiaux en état d'autocontrainte. Tous leurs éléments ont une fibre moyenne rectiligne et sont d'une taille équivalente. Les éléments tendus n'ont pas de rigidité en compression et constituent un réseau continu. Les éléments comprimés n'ont pas de rigidité en traction et constituent un ensemble discontinu. Chaque nœud reçoit un et un seul élément comprimé et au moins trois câbles. » [5]

Il s'agit donc de structures dont la rigidité et la stabilité sont assurées par un état d'autocontrainte, c'est-à-dire un état d'efforts internes présent dans les éléments de la structure et en l'absence de tout chargement extérieur. Dès lors, les éléments comprimés sont de type barre, tandis que les éléments tendus sont de type câble ou tirant. Enfin, tous ces éléments sont connectés par des nœuds.

Il est intéressant de souligner le caractère restrictif de cette dernière définition proposée par René MOTRO. En effet, elle limite les systèmes de tenségrité à des modules dont chaque nœud reçoit au minimum trois câbles et une seule barre. Il existe néanmoins des systèmes de tenségrité qui ne correspondent pas tout à fait à cette définition. En effet, on peut concevoir des systèmes dans lesquels plusieurs barres s'articulent sur un nœud. Il existe également des modules où deux câbles seulement arrivent à un nœud.

Dans le cadre de mon mémoire, un élargissement du concept de tenségrité s'avère nécessaire. En effet, plusieurs systèmes de tenségrité vont être étudiés tout au long de ce travail, certains ne

répondant pas exactement à cette première définition. La multitude de structures existantes s'apparentant à de la tenségrité a conduit à la proposition plus générale suivante : « *Un système de tenségrité est un système dans un état d'auto équilibre stable, comprenant un ensemble discontinu de composants comprimés à l'intérieur d'un continuum de composants tendus* » [11]. On veillera à s'assurer que les structures étudiées au cours de ce travail répondent à cette dernière définition.

Voici un exemple de module de tenségrité qui ne répond pas à la définition donnée par René MOTRO. Il comporte uniquement des nœuds à deux ou quatre câbles.

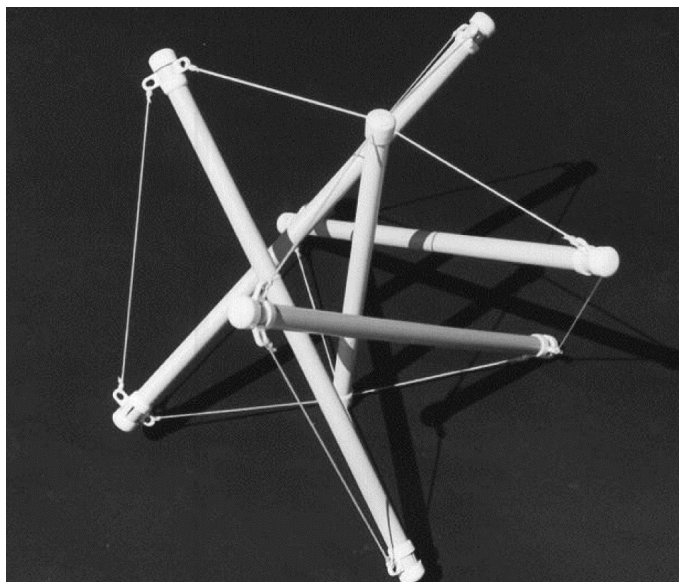


FIGURE 1.3 – MODULE AVEC NŒUDS À DEUX CÂBLES [10]

Dans le cadre de ce mémoire, on ajoutera à cette définition deux hypothèses supplémentaires :

- Les nœuds sont de type rotule ;
- Le chargement externe est de type ponctuel et s'applique aux nœuds de la structure.

Les structures de tenségrité peuvent donc être modélisées comme des structures de type treillis 3D. La particularité réside dans les efforts internes qui sont uniquement normaux. En effet, il n'y a pas d'effort tranchant ni de moment fléchissant dans un treillis. Les éléments comprimés sont de type barre et sont précontraints et les éléments tendus sont de type câbles.

1.3 Typologie des structures de tenségrité

Les structures de tenségrité peuvent être classées en deux catégories. Les cellules (ou modules) élémentaires qui, si elles sont réduites, perdent leur caractère de tenségrité, et les structures composées d'assemblages de cellules élémentaires.

Notons qu'il existe une grande diversité de structures de tenségrité. Seules les cellules les plus simples seront présentées dans ce chapitre afin de se familiariser avec ce nouveau concept.

1.3.1 Cellules élémentaires

Les cellules de tenségrité élémentaires sont, pour la plupart, des structures prismatiques. Celles-ci sont classées selon leur forme géométrique globale. Les modules élémentaires les plus répandus sont composés de base en forme de polygone régulier. Ainsi, une cellule élémentaire à base triangulaire est appelée un simplex. Il est composé de trois barres en compression et neuf câbles en tension. Il s'agit de l'un des plus simples modules de tenségrité.

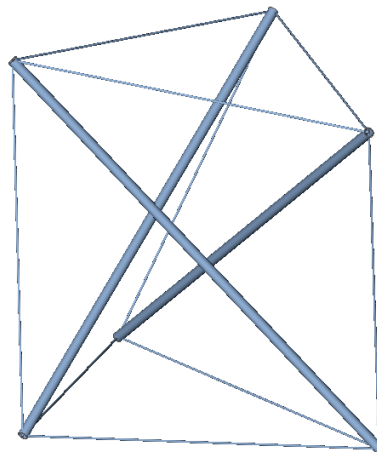
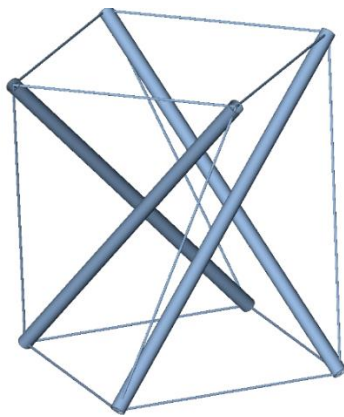
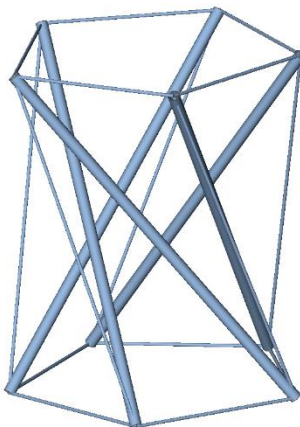


FIGURE 1.4 — SIMPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

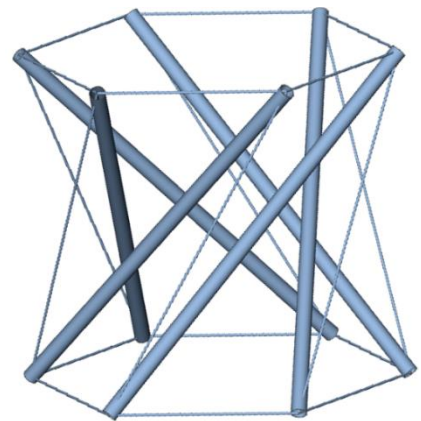
Lorsque l'on augmente le nombre de côtés de la base du module élémentaire à quatre, cinq ou six, on obtient respectivement un quadruplex, un pentaplex et un hexaplex.



(A) QUADRUPLEX



(B) PENTAPLEX



(C) HEXAPLEX

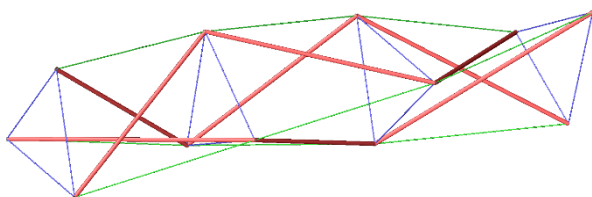
FIGURE 1.5 — MODULES PRISMATIQUES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

1.3.2 Assemblage de cellules élémentaires

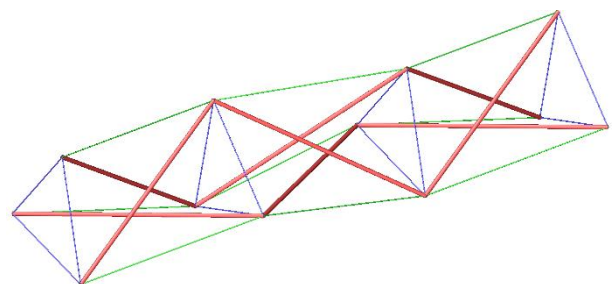
Les structures de tensegrité composées sont donc un assemblage de cellules élémentaires. On peut les diviser en deux familles.

Les assemblages unidimensionnels :

Ils se composent par empilement de cellules élémentaires identiques. Il existe deux méthodes pour effectuer l'empilement. Soit une disposition par empilement simple, ce qui donne un aspect torsadé à la structure formée. Soit une disposition par empilement alterné, où les cellules sont retournées avant d'être empilées.



(A) EMPILEMENT SIMPLE

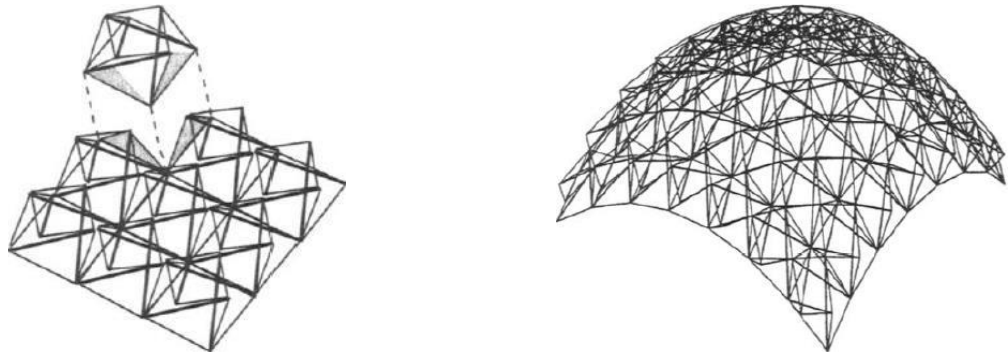


(B) EMPILEMENT ALTERNÉ

FIGURE 1.6 — ASSEMBLAGES UNIDIMENSIONNELS DE SIMPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Les assemblages bidimensionnels :

Ils sont composés par juxtapositions de cellules élémentaires les unes à côtés des autres à la manière d'un pavage. Ces structures peuvent être à plusieurs nappes c'est-à-dire un empilement d'assemblages bidimensionnels et/ou à simple ou double courbure.

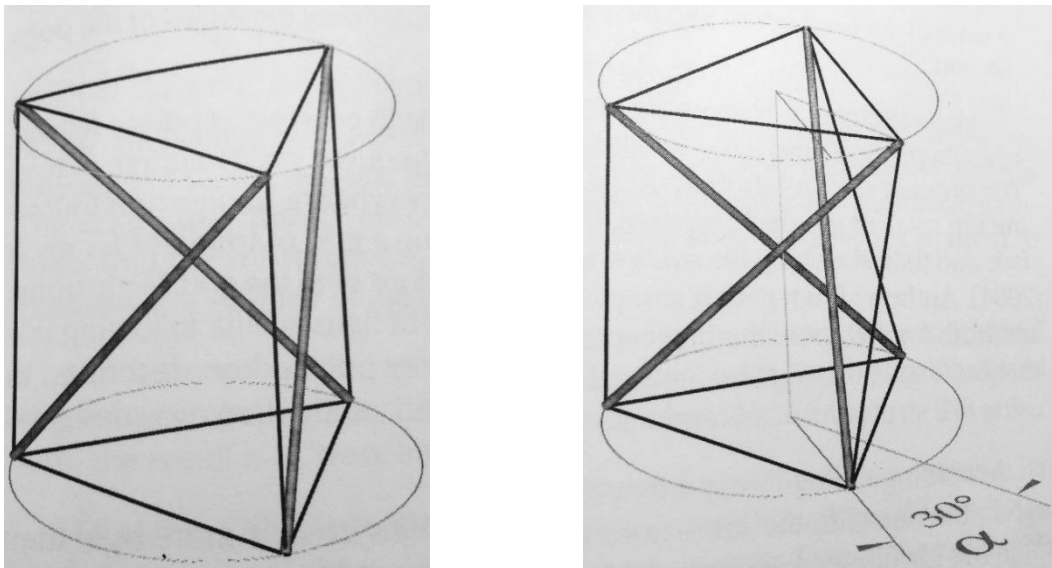


(A) GRILLE PLANE (B) GRILLE À DOUBLE COURBURE
FIGURE 1.7 — ASSEMBLAGES BIDIMENSIONNELS [5]

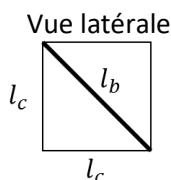
1.4 Le simplexe

Le travail des trois mémoires précédents s'est porté sur l'étude et le dimensionnement d'une passerelle composée d'une succession de simplexe. Il semble intéressant d'expliquer rigoureusement le comportement de ce type de cellule élémentaire pour bien comprendre les aboutissements de ces années antérieures. Dans un chapitre ultérieur (voir Chapitre 5), d'autres modules élémentaires, pouvant également être utilisés dans la conception d'une passerelle de tenségrité, seront présentés.

En réalisant une étude géométrique d'un simplexe régulier, c'est-à-dire où tous les câbles ont une même longueur l_c et toutes les barres ont une même longueur l_b , on peut établir une relation géométrique liant le rapport entre ces longueurs et l'angle de rotation relatif des bases du simplexe α :



(A) SIMPLEX AVEC $\alpha = 0^\circ$ (B) SIMPLEX AVEC $\alpha = 30^\circ$
FIGURE 1.8—SIMPLEX ET SON ANGLE DE ROTATION α [13]



$$r \triangleq \frac{l_b}{l_c} = \sqrt{1 + \frac{2}{\sqrt{3}} \sin(\alpha + 60^\circ)}$$

On peut représenter l'inverse de cette fonction :

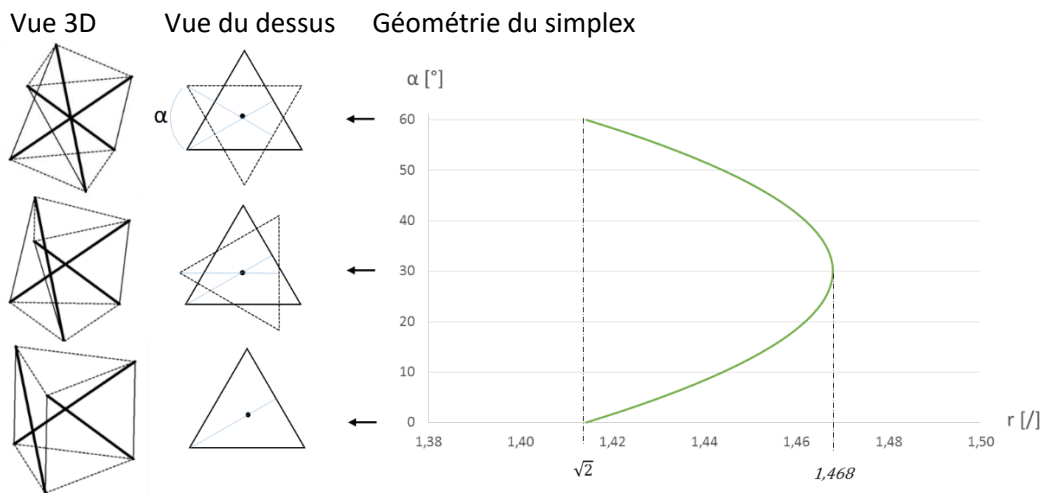


FIGURE 1.9 – GÉOMÉTRIE DU SIMPLEX [3]

De ce graphe, on peut tirer plusieurs conclusions sur l'état géométrique du simplex :

Si on impose une longueur de barres l_b alors :

- Pour une longueur de câbles l_c trop grande, telle que $r < \sqrt{2}$, la géométrie n'est physiquement pas possible. Les câbles sont trop longs et les barres sont donc libres de déplacement ;
- Pour une longueur de câbles l_c , telle que $r = \sqrt{2}$, la géométrie peut être fixée soit à $\alpha = 0^\circ$ ou à $\alpha = 60^\circ$. Ce dernier cas correspond au croisement des barres en un même point ;
- Pour une longueur de câbles l_c qui diminue, telle que $\sqrt{2} \leq r < 1,468$, la géométrie peut être fixée à deux valeurs d'angles de rotation α ;
- Pour une longueur de câbles l_c , telle que $r = 1,468$, la géométrie fixe l'angle de rotation à $\alpha = 30^\circ$. Cependant, la structure ne possède aucune rigidité, car cette géométrie n'impose pas d'état d'autocontrainte. Une faible perturbation (par exemple : une augmentation infinitésimale de l_c entraînant ainsi une diminution de r) suffit à mettre en torsion la structure vers un angle $\alpha = 30^\circ \pm \epsilon$. Le simplex possède donc une instabilité intrinsèque de torsion pour l'angle $\alpha = 30^\circ$;
- Une longueur de câbles l_c initiale trop courte, telle que $r > 1,468$, implique un allongement des câbles par traction et un raccourcissement des barres par compression de telle sorte que le système résultant tend lui-même vers $r = 1,468$. La géométrie est ainsi fixée de manière univoque à $\alpha = 30^\circ$. Cependant, à l'inverse du cas précédent, la structure possède une certaine rigidité car la géométrie lui impose un état d'autocontrainte. En effet, une faible perturbation n'a plus d'impact sur la géométrie générale de la structure. La structure reviendra ainsi à sa position initiale après la perturbation. Le simplex est donc en état d'autocontrainte et est en équilibre stable pour $\alpha = 30^\circ$. Cela correspond à la définition de la tenségrité proposée par René MOTRO (cfr §1.2). Cet état de sollicitation interne est indépendant de toute liaison avec l'extérieur (d'où le terme d'*autocontrainte*), il est propre à la géométrie des éléments et est introduit dès le montage du système.

N.B. La réflexion ci-dessus repose uniquement sur une relation géométrique. Cependant, les simplex avec un angle différent de 30° ne sont physiquement possibles que lorsque les câbles transversaux sont remplacés par des barres rigides.

Pour mieux comprendre ce phénomène, analysons l'analogie suivante : soit deux murs espacés d'une distance fixe $2L$ et reliés par deux barres rotulées identiques de longueur l . Distinguons plusieurs cas suivant la dimension des barres par rapport à la distance entre les murs :

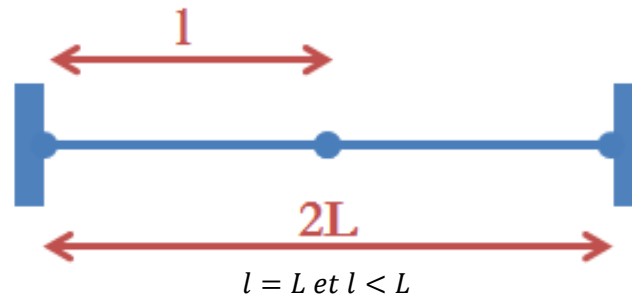


FIGURE 1.10 – ANALOGIE AU PHÉNOMÈNE D'AUTOCONTRAINTÉ (A) [1]

- $l = L$: Les barres sont horizontales et n'ont aucun effort interne. Cette situation correspond au cas du simplex $\alpha = 30^\circ$ où l'état d'autocontrainte est nul ;
- $l < L$: Les barres sont horizontales et en traction. Lorsque le système est perturbé, il revient automatiquement à sa position initiale. Cet état d'équilibre stable correspond au cas du simplex $\alpha = 30^\circ$ en état d'autocontrainte ;

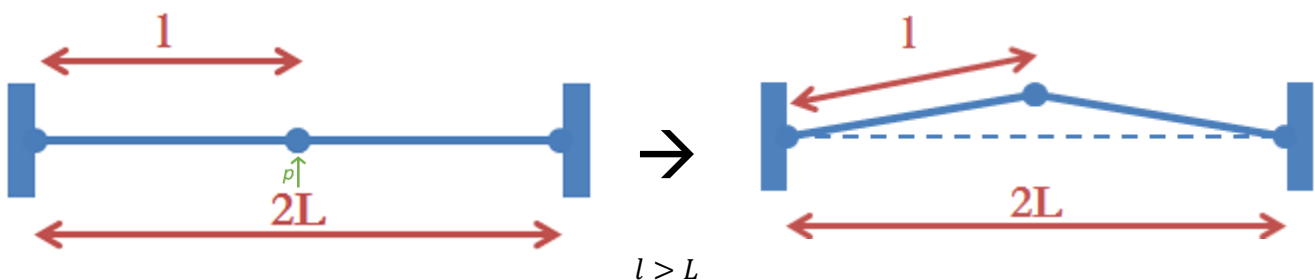


FIGURE 1.11 – ANALOGIE AU PHÉNOMÈNE D'AUTOCONTRAINTÉ (B) [1]

- $l > L$: Si les barres sont maintenues en position horizontale, le système est en équilibre instable. En effet, une perturbation p le fera s'éloigner définitivement de sa position initiale vers un état d'équilibre stable. Cette situation correspond au cas du simplex $\sqrt{2} \leq r < 1,468$ avec $\alpha \neq 30^\circ$. Une seconde perturbation, opposée à la première et suffisamment élevée, fera déplacer le système vers la position d'équilibre stable opposée, en passant par la position d'équilibre instable. Ce phénomène est appelé « snap through ». Il sera étudié plus en détail en annexe (voir Annexe A).

Pour mieux appréhender le rôle de l'autocontrainte au sein de telles structures et expliquer comment cet état initial particulier peut exister, il est également possible de faire une analogie entre la mise en autocontrainte d'un système de tenségrité et la mise en pression d'un ballon [14].

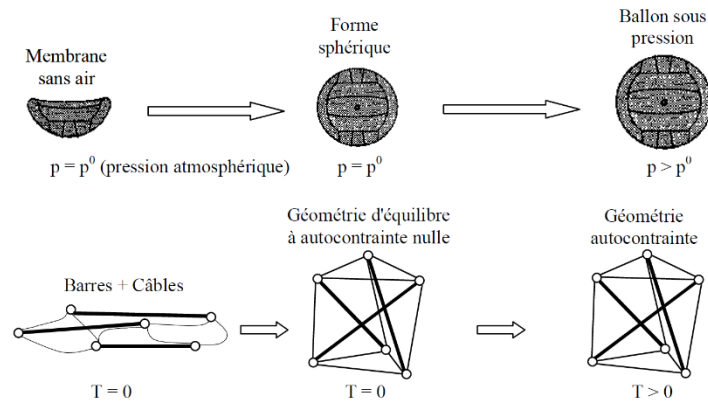


FIGURE 1.12 – ANALOGIE AU PHÉNOMÈNE D'AUTOCONTRAINTÉ : MISE EN PRESSION D'UN BALLON [14]

- Lorsqu'un ballon est dégonflé, sa géométrie est quelconque et la pression de l'air à l'intérieur p est égale à la pression atmosphérique p_0 . Pour le gonfler, il faut injecter de l'air. Si le volume insufflé est égal au volume limité par son enveloppe, le ballon atteint sa forme définitive mais la membrane n'est pas tendue. La pression intérieure est donc toujours égale à la pression atmosphérique p_0 . Ce cas de figure correspond au cas du simplex $\alpha = 30^\circ$ où l'état d'autocontrainte est nul. Le système est stable mais ne possède aucune rigidité ;
- Si on augmente encore la quantité d'air injectée, la pression intérieure du ballon va s'accroître de sorte que $p > p_0$. La membrane va alors se tendre, ce qui va donner de la rigidité au ballon. Cette situation correspond au cas du simplex $\alpha = 30^\circ$ en état d'autocontrainte. L'état de sollicitation interne stabilise et rigidifie le système.

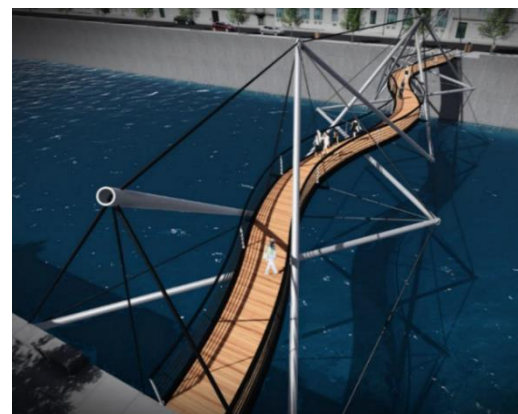
1.5 La non-linéarité des structures de tensegrité

Cette section explique les difficultés intrinsèques du calcul des structures de tensegrité liées à leur non-linéarité. Elle est basée sur les résultats du mémoire d'Alexy BASTIEN et Quentin GRAVY, « Étude d'une passerelle de tensegrité composée de simplex ».

Au cours de leur mémoire, Alexy BASTIEN et Quentin GRAVY ont eu l'idée de réaliser une passerelle de tensegrité composée d'une succession de simplex. La géométrie est telle qu'il est possible de passer un tablier au travers de la structure. Pour ne pas avoir des moments de flexion, il est nécessaire d'avoir des charges ponctuelles appliquées aux nœuds et non pas sur les barres. C'est pourquoi le tablier serait suspendu aux nœuds supérieurs des modules. De cette manière, les éléments ne travaillent qu'en traction et en compression, ce qui est similaire au comportement d'un treillis 3D.



(A) SANS TABLIER



(B) AVEC TABLIER

FIGURE 1.13 – PASSERELLE DE TENSEGRITÉ COMPOSÉE DE SIMPLEX [1]

En étudiant la structure à l'aide d'une méthode linéaire d'éléments finis, ils ont été confrontés à plusieurs difficultés intrinsèques des structures de tensegrité. En effet, elles sont non-linéaires.

Pour mieux comprendre cette particularité, reprenons l'analogie des 2 barres rotulées soumises à une charge externe F :

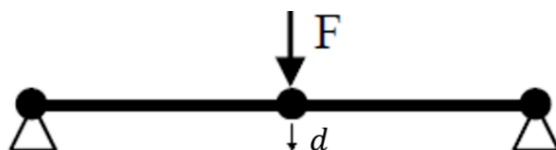


FIGURE 1.14 – ANALOGIE À LA NON-LINÉARITÉ : DÉFINITION EFFORT EXTERNE ET DÉPLACEMENT [3]

Si on veut effectuer l'équilibre des efforts internes et des charges externes à l'aide d'un calcul linéaire au premier ordre, on se rend compte que l'équilibre des efforts verticaux n'est pas respecté. En effet, si on étudie la stabilité des barres de part et d'autre de la rotule, on observe qu'aucun effort n'empêche la barre de pivoter indéfiniment autour de son appui. La résolution de ce système mène donc à un déplacement vertical d de valeur infinie. Cela s'appelle une instabilité numérique : bien que physiquement la solution existe, la méthode de calcul linéaire utilisée ne permet pas de trouver cette solution.

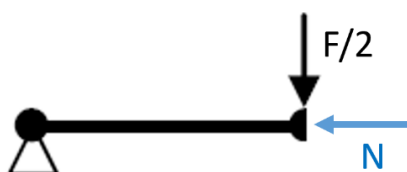


FIGURE 1.15 – ANALOGIE À LA NON-LINÉARITÉ : EFFORTS INTERNES ET INSTABILITÉ NUMÉRIQUE [3]

Pour pouvoir résoudre correctement ce système, il faut effectuer un calcul au second ordre, c'est-à-dire sur la structure déformée.

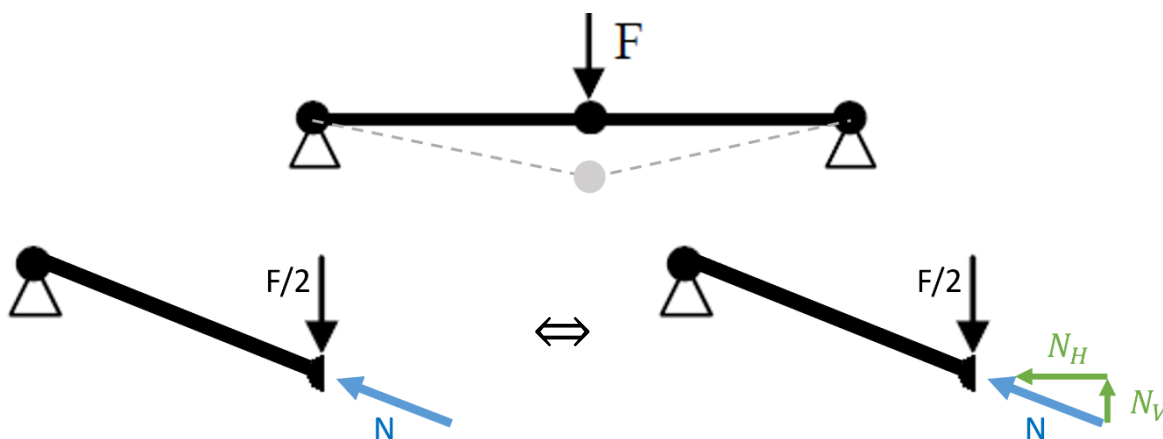


FIGURE 1.16 – ANALOGIE À LA NON-LINÉARITÉ : CALCUL AU SECOND ORDRE DES EFFORTS INTERNES [3]

On voit que si on considère la structure déformée, l'équilibre des efforts verticaux peut être désormais respecté. En effet, l'effort normal N peut se décomposer en une composante verticale N_V qui permet de reprendre l'effort vertical $F/2$. On peut ainsi calculer une solution physique. Cette solution mène à une relation non-linéaire entre le déplacement d et l'effort externe appliqué. Cette méthode de résolution non-linéaire, qui a fait l'objet du mémoire de Marc ELIAERS, sera expliquée plus en détail dans un chapitre ultérieur (cfr Chapitre 3 – Calcul non-linéaire des structures de tensegrité).

Chapitre 2 : Calcul approximatif des structures de tenségrité par une approche linéaire

Au cours de leur mémoire, Alexy BASTIEN et Quentin GRAVY ont développé une méthode linéaire d'éléments finis afin de calculer numériquement les structures de tenségrité. C'est un prérequis nécessaire pour comprendre la méthode non-linéaire d'éléments finis développée par Marc ELIAERS qui sera utilisée dans la suite de ce mémoire.

Cette section est largement inspirée :

- du livre de Pierre LATTEUR, « Calculer une structure : de la théorie à l'exemple » [7] ;
- du cours de Jean-François REMACLE « LAUCE 2125 : Finite Elements for Structures » [6] ;
- du mémoire « Calcul non-linéaire des structures de tenségrité » de Marc ELIAERS [2] ;
- du mémoire « Optimisation des structures de tenségrité sur base d'indicateurs morphologiques » de Jonas FERON [3].

2.1 Méthode linéaire d'éléments finis

2.1.0 Principe général

Cette méthode linéaire d'éléments finis permet de calculer les déplacements des nœuds de la structure ainsi que les efforts internes dans chacune des barres et les réactions d'appuis. Le principe de la méthode se base sur la résolution d'un système d'équations traduisant l'équilibre des forces en chaque nœud de la structure.

La méthode est divisée en 5 étapes :

1. Matrices de raideur locales des éléments
2. Matrice de raideur globale de la structure
3. Traitement des conditions aux appuis
4. Résolution du système d'équations
5. Post traitement des résultats

2.1.1 Matrices de raideur locales des éléments

Tout d'abord, on étudie indépendamment chaque élément (barre ou câble) de la structure. Les équations d'équilibre sont exprimées en chaque nœud :

$$\bar{F}_{int} = \bar{F}_{ext}$$

Avec \bar{F}_{int} les forces appliquées sur les nœuds par les efforts internes dans les éléments et \bar{F}_{ext} les forces externes appliquées aux nœuds de la structure.

Les efforts internes étant uniquement normaux, on peut écrire par la loi de Hooke :

$$F_{int} = \frac{EA}{L_0} \Delta l$$

Soit un élément isolé dans un repère local en 2D, dans ce cas, $\Delta l = d_{2X} - d_{1X}$:

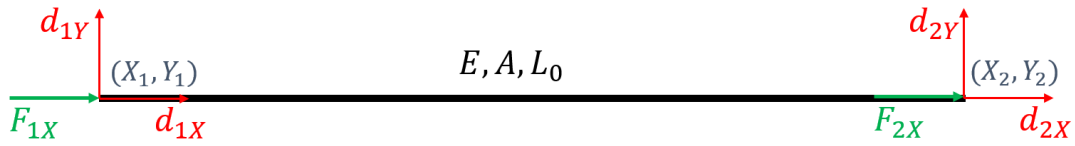


FIGURE 2.1 – ÉLÉMENT ISOLÉ DANS UN REPÈRE LOCAL 2D [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Le vecteur des efforts internes appliqués aux nœuds de l'élément isolé en question s'écrit :

$$\bar{F}_{int} = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{1X} \\ d_{1Y} \\ d_{2X} \\ d_{2Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \end{bmatrix}$$

$$\bar{F}_{int} = \bar{K}_{0,loc} \bar{d}_{loc} = \bar{F}_{ext}$$

Où :

- $\bar{K}_{0,loc}$ est la matrice de raideur locale de l'élément (dimension 6×6 en 3D) ;
- \bar{d}_{loc} est le vecteur de déplacement des nœuds de l'élément (dimension 6×1 en 3D) ;
- \bar{F}_{ext} est le vecteur des forces externes appliquées aux deux nœuds de l'élément (dimension 6×1 en 3D).

Si on considère un élément isolé dans un repère global 2D et dont les extrémités de l'élément en question sont les nœuds i et j de la structure :

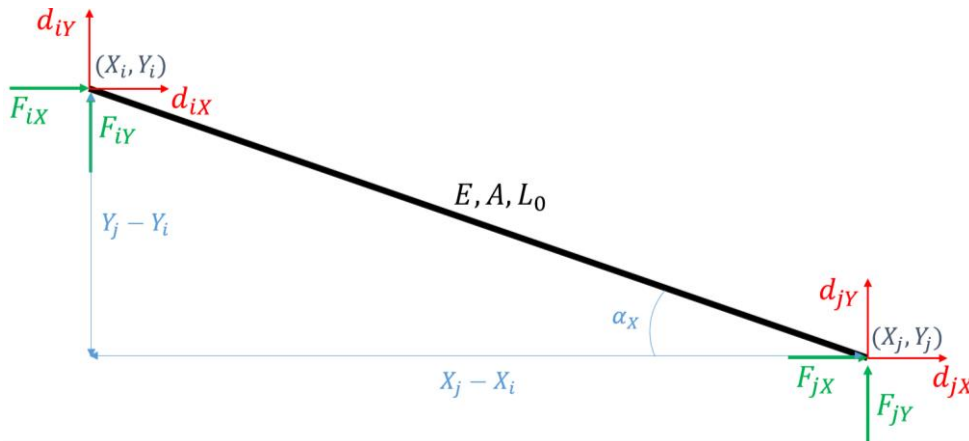


FIGURE 2.2 – ÉLÉMENT ISOLÉ DANS UN REPÈRE GLOBAL 2D [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

L'angle α_x est l'inclinaison entre le repère local de l'élément et le repère global de la structure. Ainsi, pour passer du repère local au repère global, il faut utiliser la matrice de changement de base suivante :

$$\bar{T}_{i,j} = \begin{bmatrix} \cos \alpha_x & \sin \alpha_x & 0 & 0 \\ -\sin \alpha_x & \cos \alpha_x & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha_x & \sin \alpha_x \\ 0 & 0 & -\sin \alpha_x & \cos \alpha_x \end{bmatrix}$$

Le système d'équations d'équilibre de cet élément s'écrit donc :

$$\bar{T}_{i,j}^T \bar{K}_{0,loc} \bar{T}_{i,j} \bar{d}_{loc} = \bar{F}_{ext}$$

$$\begin{array}{l}
 \text{nœud } i \\
 \text{nœud } j
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \begin{array}{cc}
 \text{nœud } i & \text{nœud } j \\
 \begin{array}{cc}
 \overbrace{\begin{bmatrix} c_X^2 & c_X c_Y \\ c_X c_Y & c_Y^2 \end{bmatrix}} & \overbrace{\begin{bmatrix} -c_X^2 & -c_X c_Y \\ -c_X c_Y & -c_Y^2 \end{bmatrix}} \\
 \begin{array}{cc}
 \begin{bmatrix} c_X^2 & -c_X c_Y \\ -c_X c_Y & -c_Y^2 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c_X^2 & c_X c_Y \\ c_X c_Y & c_Y^2 \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \right\}
 \begin{bmatrix} d_{iX} \\ d_{iY} \\ d_{jX} \\ d_{jY} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \end{bmatrix} \quad \text{où} \quad \begin{cases} c_X = \cos \alpha_X = \frac{X_j - X_i}{L_0} \\ c_Y = \sin \alpha_X = \frac{Y_j - Y_i}{L_0} \end{cases}$$

2.1.2 Matrice de raideur globale de la structure

Il faut ensuite assembler chaque matrice de raideur locale de chaque élément pour ainsi former une unique matrice de raideur globale de la structure \bar{K}_0 .

Le système d'équations d'un élément isolé peut se réécrire de manière simplifiée :

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{ii} & \bar{A}_{ij} \\ \bar{A}_{ji} & \bar{A}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_i \\ \bar{d}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_i \\ \bar{F}_j \end{bmatrix}$$

Avec $\bar{d}_i = (d_{iX}, d_{iY})$ et $\bar{F}_i = (F_{iX}, F_{iY})$.

En ajoutant cet élément au système d'équations général de la structure :

$$\begin{array}{l}
 \text{nœud } i \\
 \text{nœud } j
 \end{array}
 \left\{ \begin{array}{l}
 \begin{array}{cc}
 \text{nœud } i & \text{nœud } j \\
 \begin{array}{cc}
 \overbrace{\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}} & \overbrace{\begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}} \\
 \begin{array}{cc}
 \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \dots & \dots \\ \dots & \dots \end{bmatrix}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}
 \right\}
 \begin{bmatrix} \bar{d}_i \\ \bar{d}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_i \\ \bar{F}_j \end{bmatrix}$$

$\underbrace{\hspace{15em}}_{\bar{K}_0} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{\bar{d}} \quad \underbrace{\hspace{2em}}_{\bar{F}_{ext}}$

La matrice de raideur globale de la structure est donc obtenue en répétant cette opération pour chaque élément de la structure. Finalement, le système d'équations d'équilibre de la structure devient :

$$\bar{K}_0 \bar{d} = \bar{F}_{ext}$$

Où :

- \bar{K}_0 est la matrice de raideur globale de la structure (dimension $3N \times 3N$ en 3D) ;
- \bar{d} est le vecteur de déplacement des nœuds (dimension $3N \times 1$ en 3D) : l'inconnue du système ;
- \bar{F}_{ext} est le vecteur des forces externes appliquées aux nœuds (dimension $3N \times 1$ en 3D).

Remarque sur l'énergie au sein de la structure :

Déterminer l'état d'équilibre d'une structure revient à trouver la déformation de la structure qui minimise son énergie potentielle totale.

L'équation obtenue ci-dessus n'est en fait rien d'autre que l'expression du problème de minimisation de l'énergie potentielle de la structure. En effet, soit [6] :

- $U = \frac{1}{2} \bar{d}^t \bar{K}_0 \bar{d}$: l'énergie élastique interne de la structure ;
- $W_{ext} = \bar{d}^t \bar{F}_{ext}$: le travail exercé par les forces externes appliquées sur la structure ;
- $\Pi = U - W_{ext} = \frac{1}{2} \bar{d}^t \bar{K}_0 \bar{d} - \bar{d}^t \bar{F}_{ext}$: l'énergie potentielle totale de la structure.

Le problème de minimisation de l'énergie potentielle totale s'écrit donc :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{d}} = 0 \Leftrightarrow \bar{K}_0 \bar{d} = \bar{F}_{ext}$$

2.1.3 Conditions aux appuis

Il faut encore prendre en compte les réactions d'appuis et imposer les conditions aux limites de la structure. Certains déplacements sont en effet bloqués. Ces conditions d'appuis s'apparentent à des contraintes qu'il faut appliquer à notre système d'équations. Notre problème de minimisation de l'énergie potentielle totale devient donc un problème de minimisation sous contraintes. Une stratégie adéquate utilisée pour l'optimisation sous contraintes d'égalité est la méthode des multiplicateurs de Lagrange.

Soit la structure soumise à M contraintes aux appuis. On souhaite donc imposer à notre problème de minimisation :

$$\bar{c} \bar{d} = \bar{D}$$

Où :

- \bar{c} est la matrice des contraintes (dimension $M \times 3N$ en 3D) : Pour chaque ligne correspondant à une contrainte, la colonne du degré de liberté bloqué vaut 1 ;
- \bar{d} est le vecteur de déplacement des nœuds (dimension $3N \times 1$ en 3D) : l'inconnue du système ;
- \bar{D} est le vecteur des déplacements imposés (dimension $M \times 1$). Il vaut en général 0 si l'appui est fixe.

Notre problème de minimisation sous contrainte peut ainsi s'écrire :

$$\min_{\bar{d}} \Pi = \frac{1}{2} \bar{d}^t \bar{K}_0 \bar{d} - \bar{d}^t \bar{F}_{ext} \quad \text{sous} \quad \bar{c} \bar{d} = \bar{D}$$

La fonction des contraintes peut s'écrire : $\bar{g} = \bar{c} \bar{d} - \bar{D} = 0$

Enfin, le Lagrangien s'exprime par la fonction :

$$\begin{aligned} L(\bar{d}, \bar{r}) &= \Pi(\bar{d}) + \bar{g}^t(\bar{d}) \bar{r} \\ &\Leftrightarrow \\ L(\bar{d}, \bar{r}) &= \frac{1}{2} \bar{d}^t \bar{K}_0 \bar{d} - \bar{d}^t \bar{F}_{ext} + (\bar{c} \bar{d} - \bar{D})^t \bar{r} \end{aligned}$$

où \bar{r} est le vecteur des multiplicateurs de Lagrange (dimension $M \times 1$). Dans notre cas, il représente la valeur des forces de réactions aux appuis.

Le problème de minimisation sous contraintes s'écrit alors : $\nabla L(\bar{d}, \bar{r}) = 0$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial \bar{d}} = 0 & \Leftrightarrow \bar{K}_0 \bar{d} - \bar{F}_{ext} + \bar{c}^t \bar{r} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \bar{r}} = 0 & \Leftrightarrow \bar{c} \bar{d} - \bar{D} = 0 \end{cases}$$

Le système de $3N + M$ équations peut finalement se réécrire sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_0 & \bar{c}^t \\ \bar{c} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d} \\ \bar{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{ext} \\ \bar{D} \end{bmatrix}$$

La résolution de ce système fournit donc les déplacements des nœuds qui assurent l'équilibre de la structure en respectant les conditions d'appuis. Il permet également de déterminer les forces de réactions aux appuis.

2.1.4 Résolution du système d'équations

Pour résoudre le système d'équations, on procède par inversion de la matrice :

$$\begin{bmatrix} \bar{d} \\ \bar{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_0 & \bar{c}^t \\ \bar{c} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{F}_{ext} \\ \bar{D} \end{bmatrix}$$

Comme tous les termes à droite de l'égalité sont connus, on obtient :

- \bar{d} est le vecteur de déplacement des nœuds (dimension $3N \times 1$ en 3D) ;
- \bar{r} est le vecteur des réactions aux appuis de la structure (dimension $M \times 1$).

2.1.5 Post traitement des résultats

Une fois les déplacements calculés, on peut obtenir les efforts internes par post-traitement des résultats. En reconsidérant chaque barre individuellement, les efforts internes se calculent de la manière suivante :

$$\bar{F}_{int} = \bar{K}_{0,loc} \bar{d}_{loc}$$

Où \bar{d}_{loc} est le vecteur de déplacement des nœuds de la barre qui est à présent connu.

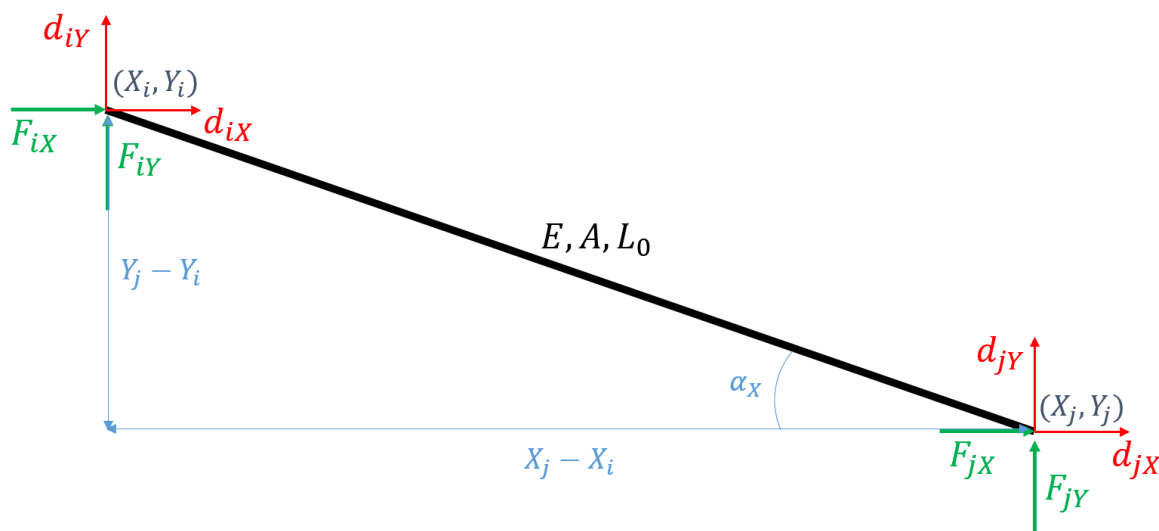


FIGURE 2.3 – ÉLÉMENT ISOLÉ DANS UN REPERE GLOBAL 2D [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

L'effort normal vaut enfin $N = F_{jX} \cos \alpha_X - F_{jY} \sin \alpha_X$ ($= -F_{iX} \cos \alpha_X + F_{iY} \sin \alpha_X$). On a cette relation opposée car chaque barre est en équilibre.

2.1.6 Conclusion

Pour pouvoir appliquer cette méthode linéaire à une structure de tensegrité, il faut trouver un moyen de lever l'instabilité numérique qui y est présente (cfr §1.5). Alexy BASTIEN et Quentin GRAVY ont utilisé un artifice de calcul en ajoutant des barres de faible dimension à la structure. Cependant, ces barres supplémentaires entraînent une erreur et remettent en question l'ensemble des résultats obtenus. La méthode linéaire n'est donc pas adaptée aux structures de tensegrité. Une méthode non-linéaire semble mieux appropriée et sera présentée au chapitre suivant.

2.2 Optimisation

Après avoir calculé une structure, il est intéressant d'analyser les résultats afin qu'ils vérifient certains critères. Si un critère n'est pas respecté, il faut modifier un des paramètres de la structure et recommencer le calcul. Ce processus itératif s'appelle l'optimisation.

Alexy BASTIEN et Quentin GRAVY ont proposé 3 types d'optimisation :

- Optimisation de la précontrainte ;
- Optimisation des sections ;
- Optimisation de la structure.

Ces méthodes d'optimisation sont basées sur le calcul des structures suivant la méthode linéaire d'éléments finis. Malgré la remise en question des résultats, elles font office de prérequis aux méthodes d'optimisation qui seront appliquées lors du calcul non-linéaire.

Cette section est inspirée :

- du chapitre 15 du livre de Pierre LATTEUR, « Calculer une structure : de la théorie à l'exemple » [7] ;
- du mémoire « Optimisation des structures de tenségrité sur base d'indicateurs morphologiques » de Jonas FERON [3].

2.2.1 Optimisation de la précontrainte

Un câble ne peut pas reprendre de la compression. Il faut donc s'assurer que chaque câble de la structure travaille en traction après l'application des charges externes. C'est le premier critère à vérifier.

Simultanément, il est important de vérifier que toutes les barres soient comprimées. En effet, si ce n'est pas le cas, on ne peut pas considérer la structure en tant que telle comme une structure de tenségrité (cfr §1.2). Ce critère sera primordial dans l'étude de structures de tenségrité composées de modules élémentaires plus complexes.

2.2.1.1 Procédure de mise en tension des câbles

L'introduction de l'effort de précontrainte dans l'ensemble des câbles de la structure a été déterminé en utilisant la notion de « matrice de sensibilité ». C'est un concept imaginé par Alexy BASTIEN et Quentin GRAVY [1].

Il est basé sur le fait que l'application d'une précontrainte dans un câble influence le comportement de toute la structure. Ainsi, l'effort normal observé dans les câbles et les barres peut, dès lors, s'exprimer comme une fraction de l'effort de précontrainte introduit. Le rapport entre l'effort normal dans l'élément i et l'effort de précontrainte unitaire introduit dans l'élément j donne donc ce qu'ils ont appelé le « facteur de sensibilité β_i^j ». Tous ces facteurs peuvent être représentés dans une matrice appelée « la matrice de sensibilité ».

L'effort normal dans un câble vaut donc la somme de la contribution de la précontrainte et de l'effort interne dû aux charges externes. Le principe d'implémentation consiste à vérifier, pour chaque câble, que l'effort normal est au moins égal à zéro :

$$\begin{bmatrix} \beta_1^1 & \dots & \beta_1^n \\ \dots & \dots & \dots \\ \beta_n^1 & \dots & \beta_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_{préc,1} \\ \dots \\ F_{préc,n} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} N_{ext,1} \\ \dots \\ N_{ext,n} \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} 0 \\ \dots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Ce système d'inéquation ne possède pas une solution unique. Il existe en effet plusieurs combinaisons de $F_{prec,i}$ permettant de tendre tous les câbles et vérifier ces inéquations. De manière à atteindre une combinaison optimale, il faut également minimiser l'introduction totale de précontrainte dans la structure ($\min \sum_i F_{prec,i}$).

Alexy BASTIEN et Quentin GRAVY ont élaboré une procédure capable de trouver une solution admissible vérifiant ce système, mais il n'y a aucune certitude que cette solution soit le minimum de l'inéquation.

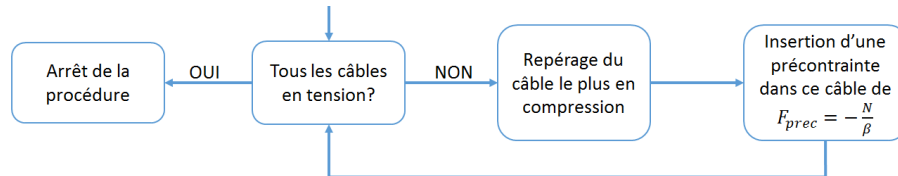


FIGURE 2.4 – PROCÉDURE DE MISE EN TENSION DES CÂBLES [1]

2.2.1.2 Exemple

Soit la structure de tenségrité ci-dessous composée d'une succession de simplex :

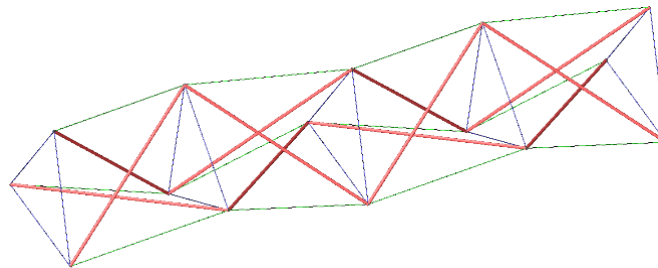


FIGURE 2.5 – STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE 4 SIMPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

L'application de charges externes aux nœuds supérieurs de cette structure peut, par exemple, mener aux résultats suivants :

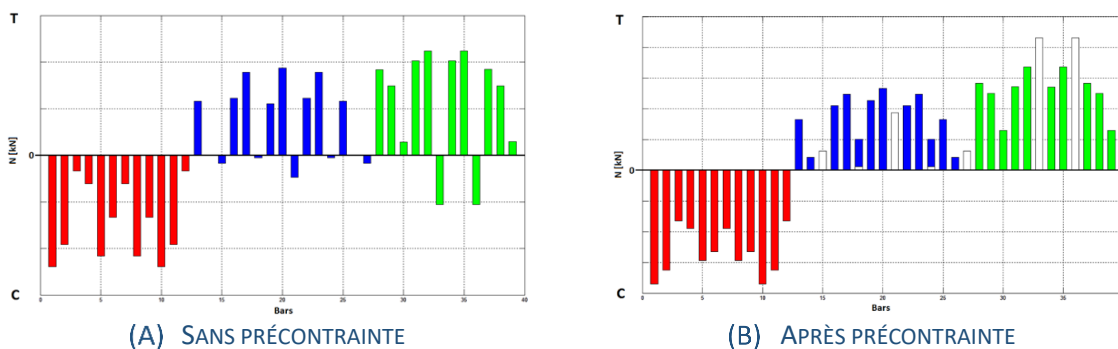


FIGURE 2.6 – EFFORTS INTERNES DANS LES ÉLÉMENTS DE LA STRUCTURE [3]

Dans la figure (A), on observe qu'après l'application des charges externes, certains câbles (en bleu et vert) sont en compression.

La figure (B) représente la valeur des efforts internes après l'introduction de la précontrainte (en blanc) dans certains câbles. On voit que tous les câbles sont maintenant en tension.

Il est intéressant de remarquer que les efforts normaux ont globalement augmenté dans tous les éléments. Cela illustre le fait que lorsque l'on introduit une précontrainte dans un câble, elle se répartit dans l'ensemble de la structure.

2.2.2 Optimisation des sections

Après avoir optimisé la précontrainte, il faut déterminer les sections optimales des éléments de la structure et s'assurer que les efforts internes n'excèdent pas la résistance du matériau. Le critère est différent entre les barres en compression et les câbles en tension. En effet, il faut prendre en compte le phénomène de flambement pour les éléments en compression.

Pour faciliter l'optimisation, les câbles et les barres seront choisis de même matériau tel que $E_c = E_b = E$ et $\sigma_c = \sigma_b = \sigma$. Cette hypothèse sera appliquée tout au long de ce mémoire.

On considère donc un matériau ayant une contrainte admissible $\sigma \leq f_y$, avec f_y la limite d'élasticité du matériau. Par facilité d'optimisation, Alexy BASTIEN et Quentin GRAVY imposaient également que toutes les barres aient une section similaire (creuse ou non) et que tous les câbles aient le même diamètre. Ce critère peut être relativement répressif sur le volume total de la structure et donc indirectement sur son poids propre. On verra par la suite que les structures de tensegrité sont très massives et qu'une meilleure optimisation des sections s'avère plus pertinente.

Pour le cas de structures composées de simplex, qui est l'un des systèmes de tensegrité le plus simple en termes de nombre d'éléments (cfr §1.4), l'impact sur le volume reste acceptable. Cependant, le critère perd son sens dans le cas de modules plus complexes, composés d'un plus grand nombre d'éléments. Une méthode d'optimisation des sections mieux appropriée sera présentée dans un chapitre ultérieur (cfr §4.2).

L'aire des câbles A_c est donc déterminée afin que le câble le plus tendu travaille à la contrainte admissible σ :

$$\frac{N_{tract,max}}{A_c} = \sigma \Leftrightarrow A_c = \frac{N_{tract,max}}{\sigma}$$

En ce qui concerne l'aire des barres A_b , elle est déterminée de telle sorte que la barre la plus comprimée travaille à la contrainte admissible critique σ_{crit} , plus faible que σ , qui tient compte du phénomène de flambement. Selon la formule d'Euler corrigée [7], on a :

$$\frac{N_{comp,max}}{A_b} = \sigma_{crit} = \frac{\sigma}{1 + \Lambda^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Lambda = \lambda_e / (\pi \sqrt{E/\sigma}) & \text{(l'élancement réduit)} \\ \lambda_e = \mu l \sqrt{A_b/I} & \text{(l'élancement)} \end{cases}$$

En isolant A_b , on obtient l'expression suivante :

$$A_b = \frac{N_{comp,max}}{2\sigma} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \Psi^2} \right)$$

Où $\Psi = \mu \sigma / \sqrt{qEN}$ est l'indicateur de flambement développé par Pierre LATTEUR [8]. C'est le témoin de la sensibilité au flambement de l'élément. Il dépend :

- du type de matériau, défini par son module d'élasticité E et sa contrainte admissible σ ;
- de la longueur de l'élément l ;
- de l'effort interne N présent dans l'élément ;

- des conditions aux extrémités μ de l'élément. Dans le cadre de ce mémoire, on considère toujours $\mu = 1$, ce qui correspond au cas d'un élément dont les extrémités sont rotulées ;

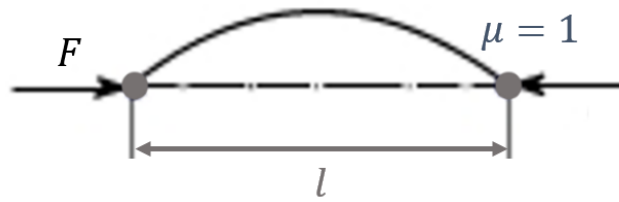


FIGURE 2.7 – CONDITIONS AUX EXTRÉMITÉS TELLES QUE $\mu = 1$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

- du facteur de forme $q = I/A^2$ de la section. Il s'avère que ce facteur dépend uniquement du type de section (carré ou circulaire) et du paramètre m qui est défini comme le rapport entre l'épaisseur t et la hauteur h de la section. Les sections sont donc pleines pour $m = 0,5$ et creuses pour $m < 0,5$:

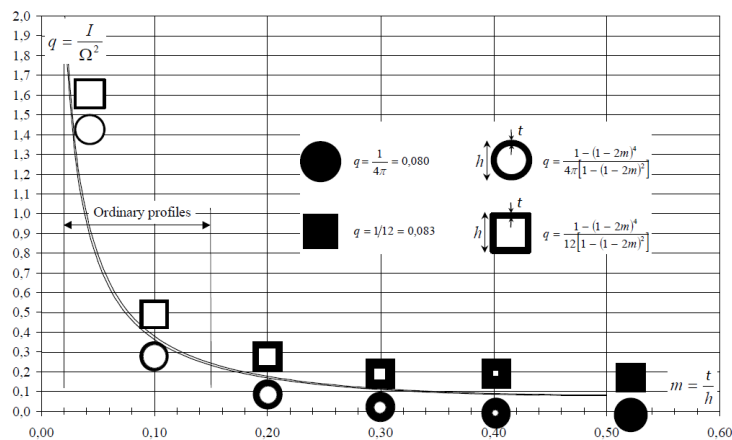


FIGURE 2.8 – FACTEUR DE FORME q POUR LES SECTIONS CIRCULAIRES ET CARRÉES, CREUSES ET PLEINES [8]

Lorsque $\Psi \rightarrow 0$, on retrouve l'expression d'un élément insensible au flambement : $A_b = \frac{N_{comp,max}}{\sigma}$

Lorsque $\Psi \rightarrow \infty$, l'élément est très sensible au flambement et est dimensionné selon la formule théorique d'Euler [7] : $A_b = \frac{\mu l}{\pi} \sqrt{\frac{N_{comp,max}}{qE}}$

Lorsqu'une structure est isostatique, les trois équations fondamentales de la statique suffisent à calculer tous les efforts internes. Ainsi, les efforts normaux N sont indépendants des dimensions des sections des éléments de la structure. Les sections optimales A_b, A_c des barres et des câbles s'obtiennent donc directement après un seul calcul des efforts internes de la structure.

Lorsque la structure est hyperstatique, les efforts normaux N dépendent des dimensions des sections des éléments de la structure, tel que $N = f(A)$. Les sections optimales A_b, A_c des barres et des câbles s'obtiennent à l'aide d'un processus itératif. L'algorithme suivant a été imaginé :

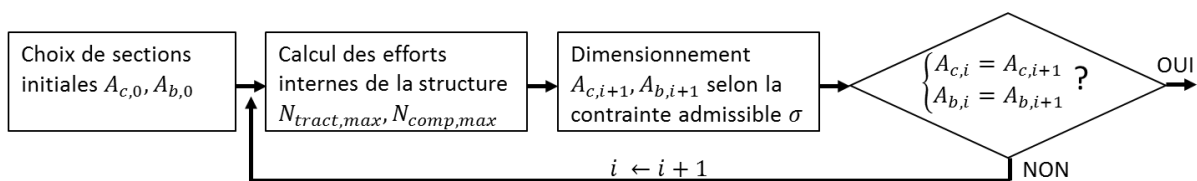


FIGURE 2.9 – ALGORITHME D'OPTIMISATION DES SECTIONS [3]

2.2.2.1 Remarque sur l'hyperstatiticé des structures de tenségrité

Les structures hyperstatiques nécessitent, en général, moins de matière car les efforts y sont mieux répartis et globalement plus faibles. Elles permettent également de réduire les déformations [7]. On verra par la suite que l'un des problèmes majeurs des structures de tenségrité est leur manque de rigidité et donc leurs déformations. C'est pourquoi, au cours de ce mémoire, on étudiera uniquement les structures de tenségrité hyperstatiques, et non isostatiques, dont le degré d'hyperstatiticé vaut $I_s = 1$.

2.2.3 Optimisation de la structure

Une fois que l'optimisation de la précontrainte et des sections a été réalisée, il pourrait être intéressant de déterminer, par exemple, la structure qui aura la déformation minimale, ou encore celle qui aura le volume de matière le plus faible. La méthode d'optimisation structurale sur base des indicateurs morphologiques semble être l'outil parfait pour répondre à ces questions. Il s'agit d'une méthode développée par Pierre LATTEUR dans sa thèse de doctorat [8] pour les structures au comportement linéaire.

2.2.3.1 La théorie des indicateurs morphologiques

Pour illustrer cette théorie, supposons une structure de portée L et soumise à une charge externe totale F . On aimerait optimiser cette structure de manière à minimiser le volume de matière.

Pour optimiser une telle structure, les paramètres à prendre en compte peuvent être nombreux : la hauteur de la structure H , les caractéristiques des matériaux E et σ , les caractéristiques des sections, etc.

N.B. Pour simplifier la géométrie des structures et l'optimisation structurale, on considère dans ce mémoire que la largeur des structures D n'est pas un paramètre. Elle sera imposée par la hauteur H de la structure.

Une façon de diminuer la complexité de cette optimisation structurale est de rassembler ces nombreux paramètres dans des nombres adimensionnels, moins nombreux. C'est le principe de la méthode des indicateurs morphologiques.

On peut distinguer deux types d'indicateurs morphologiques : les indicateurs primaires et les indicateurs secondaires.

Tout d'abord, les indicateurs morphologiques primaires, qui dépendent explicitement :

- soit de la forme de la structure : c'est le cas de l'élanement géométrique de la structure L/H ;
- soit de la forme des éléments de la structure : c'est le cas du facteur de forme $q \triangleq I/A^2$ (cfr §2.2.2). Il caractérise la forme des sections ;
- soit d'un ensemble de paramètres : c'est le cas de l'indicateur de flambement de la structure $\Psi \triangleq \mu\sigma L/\sqrt{qEF}$ qui est le témoin de la sensibilité globale d'une structure au flambement.

Chacun de ces indicateurs primaires a une influence sur les résultats de la structure car ce sont des paramètres de l'optimisation.

Pour étudier ces résultats, il existe les indicateurs morphologiques secondaires qui eux dépendent implicitement d'un ou plusieurs indicateurs primaires. Ce sont les plus importants car ils sont représentatifs d'une grandeur ou d'un phénomène physique. Ils permettent ainsi de comparer des structures différentes entre elles.

On s'est intéressé à deux indicateurs morphologiques secondaires :

- $W \triangleq \frac{\sigma V}{FL}$: l'indicateur de volume. Il est l'image du volume total V de la structure ;
- $\Delta \triangleq \frac{E\delta}{\sigma L}$: l'indicateur de déplacement. Il est l'image de la flèche maximale δ de la structure.

Dans le cas de structures au comportement linéaire, ces indicateurs de résultats ne dépendent que de deux indicateurs primaires [8] :

$$\begin{cases} W = f\left(\frac{L}{H}, \Psi\right) \\ \Delta = f\left(\frac{L}{H}, \Psi\right) \end{cases}$$

Notons que ces relations ne prennent pas en compte le poids propre de la structure mais seulement la charge externe F . On verra par la suite comment intégrer plus formellement le poids propre dans l'optimisation structurale et ainsi obtenir la géométrie optimale réelle de la structure, c'est-à-dire celle qui considère comme charge totale F_{tot} : la charge externe F et son poids propre.

Pour mieux comprendre le fonctionnement de ces indicateurs morphologiques, considérons une structure avec un indicateur de flambement Ψ fixé. En étudiant l'indicateur de volume W , on pourrait obtenir un graphique de la forme suivante. Notons qu'il est fonction uniquement de l'élançement géométrique, tel que $W = f\left(\frac{L}{H}, \Psi = \text{fixé}\right)$.

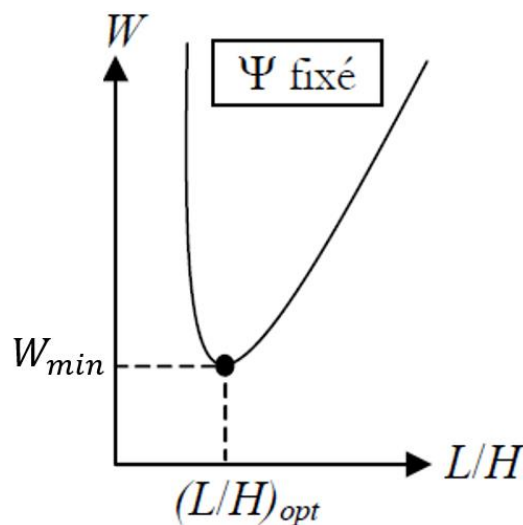


FIGURE 2.10 – INDICATEUR DE VOLUME EN FONCTION DE L'ÉLANÇEMENT GÉOMÉTRIQUE [7]

Ce graphique illustre l'intérêt des indicateurs morphologiques. En effet, pour un même indicateur de flambement Ψ , le volume minimum W_{min} d'un type de structure sera toujours obtenu pour une même valeur d'élançement géométrique $(L/H)_{opt}$, et cela quels que soient le type de matériau σ et E , la portée L , et la charge externe F . Cela veut dire que deux structures différentes d'une typologie donnée avec un même indicateur de flambement Ψ partagent le même graphique $W = f\left(\frac{L}{H}, \Psi = \text{fixé}\right)$. Il est de même pour l'indicateur de déplacement Δ .

Ainsi, si on considère deux structures complètement différentes, avec comme seuls points communs le même indicateur de flambement Ψ et le même élançement géométrique L/H . Leur volume V et leur déformation δ seront évidemment différents, pourtant elles auront un indicateur de volume W et un indicateur de déplacement Δ identiques.

Les indicateurs morphologiques révèlent donc toute leur puissance. Ces nombres adimensionnels permettent de tirer des conclusions sur toutes les configurations de structures possibles en étudiant seulement un petit échantillon de ces structures. En effet, deux structures différentes se comportent de manière identique si elles possèdent un même indicateur de flambement Ψ . Etudier les résultats d'une seule structure par valeur de Ψ , permet de représenter le comportement de l'infinité de structures possibles.

Parmi cette infinité de structures possibles, on s'intéresse à celles qui minimisent le volume de matière. On s'attardera également par la suite à celles qui minimisent les déformations, car il s'agit d'un problème majeur des structures de tensegrité. Ces différentes structures optimales sont représentées à l'aide des courbes d'efficacité.

Les courbes d'efficacité par rapport au volume de matière sont formées en sélectionnant, pour chaque valeur de l'indicateur de flambement Ψ , le point $(L/H_{opt}, W_{min})$ qui minimise l'indicateur de volume W (voir Figure 2.11). Il s'agit donc de déterminer l'élanement optimal $(L/H)_{opt}$ pour lequel on a une quantité de matière minimale W_{min} et cela pour chaque graphique $W = f(L/H, \Psi = \text{fixé})$. Les graphiques résultants (W_{min}, Ψ) et $(L/H_{opt}, \Psi)$ sont appelés les « courbes d'efficacité » de la structure. Dans le cas des courbes d'efficacité par rapport au volume de matière, elles représentent l'ensemble des configurations les plus légères au sein d'une famille de structures de même morphologie. Elles permettent donc de dimensionner une structure de manière optimale quels que soient les paramètres de la structure.

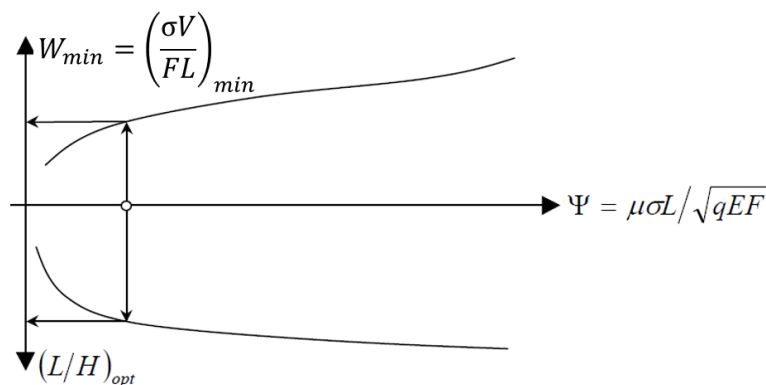


FIGURE 2.11 – COURBES D'EFFICACITÉ REPRÉSENTATIVE D'UN TYPE DE STRUCTURE [7]

Les courbes d'efficacité par rapport aux déformations de la structure sont formées de manière similaire, en sélectionnant, pour chaque valeur de l'indicateur de flambement Ψ , le point $(L/H_{opt}, \Delta_{min})$ qui minimise la flèche δ de la structure. Il s'agit donc de déterminer l'élanement optimal $(L/H)_{opt}$ pour lequel on a une flèche minimale Δ_{min} et cela pour chaque graphique $\Delta = f(L/H, \Psi = \text{fixé})$.

Ces courbes d'efficacité permettent également de comparer plusieurs typologies de structures entre elles et de justifier quantitativement un choix structural plutôt qu'un autre.

L'efficacité d'une passerelle de tensegrité peut donc être comparée à celle d'une passerelle composée d'un système structural plus basique comme un treillis par exemple [3].

On peut également comparer différentes typologies de passerelle de tensegrité afin de déterminer les plus efficaces en termes de volume de matière et de déformations. Les trois mémoires précédents se sont basés sur l'étude d'une passerelle de tensegrité composée uniquement de simplex. On verra au cours de ce mémoire qu'il existe d'autres modules élémentaires de tensegrité pouvant être utilisés dans la conception d'une passerelle.

2.2.3.2 Prise en compte du poids propre de la structure

Les relations des indicateurs W et Δ présentées précédemment ne prennent pas en compte le poids propre de la structure.

Considérons une structure soumise à une charge extérieure F . Si les sections des différents éléments ont été optimisées individuellement, la répartition du poids propre résultant de cette optimisation ajoute à la charge initiale F une charge supplémentaire. Si on considère un matériau de poids volumique ρ , la structure est désormais soumise à un nouveau cas de charge $F_{PP} = \rho V$. Comme on considère uniquement des charges extérieures nodales, il faut répartir le poids propre de la structure sur l'ensemble des nœuds.

La répartition du poids propre sur chaque nœud de la structure s'effectue de la façon suivante : pour chaque élément de la structure, on décompose son poids propre en deux forces verticales de valeurs égales que l'on applique aux deux nœuds de l'élément comme une force externe.

Pour illustrer cela, considérons deux éléments d'une structure dont les extrémités sont les nœuds i, j et k :

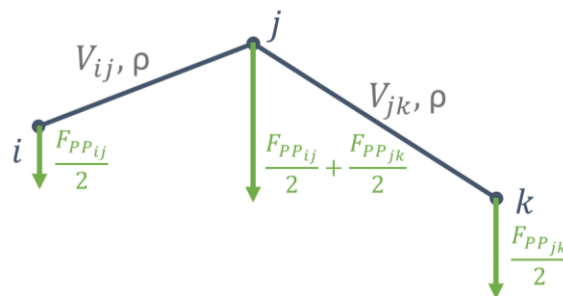


FIGURE 2.12 – RÉPARTITION DU POIDS PROPRE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

La répartition du poids propre de chaque élément dépend du volume de l'élément :

$$\begin{cases} F_{PPij} = \rho V_{ij} \\ F_{PPjk} = \rho V_{jk} \end{cases}$$

Une fois le poids propre de la structure réparti sur chaque nœud, le vecteur des forces externes de la structure \bar{F}_{ext} doit être mis à jour pour prendre en compte ce nouveau cas de charge :

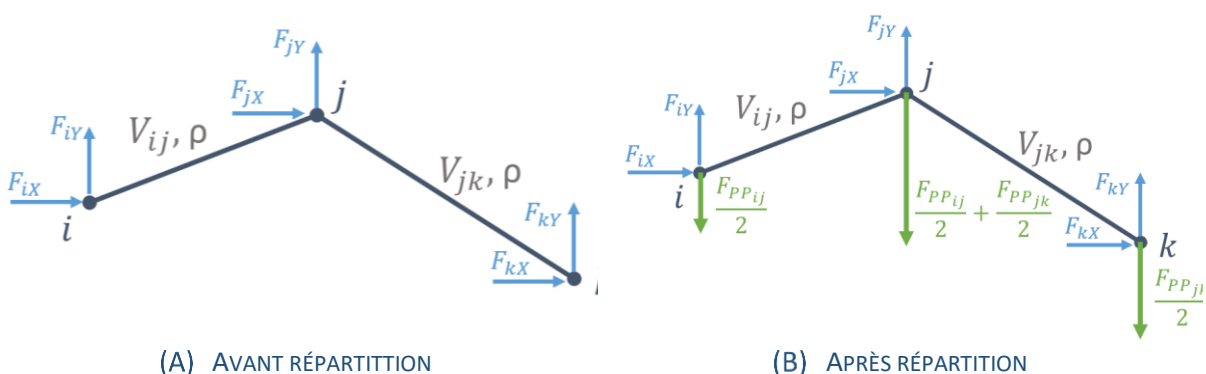


FIGURE 2.13 – RÉPARTITION DU POIDS PROPRE ET CHARGE EXTERNE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

La structure, dont les éléments avaient été précédemment « optimisés » sur base de la charge externe F , n'est donc plus optimale puisqu'elle est désormais soumise à deux cas de charges différents. La charge externe totale est désormais égale à :

$$F_{tot} = F + F_{PP}$$

Pour un certain matériau, la géométrie optimale réelle de la structure (c'est-à-dire celle qui prend également en compte son poids propre) et l'indicateur de volume qui lui est relatif ne peuvent donc s'obtenir que par un processus itératif (cfr §4.4).

On voit que le poids propre de la structure est désormais un nouveau paramètre de l'optimisation. Il a donc une influence sur les résultats de l'optimisation. Heureusement, la théorie des indicateurs morphologiques va à nouveau permettre d'accélérer la démarche d'optimisation. En effet, il est possible de montrer que le poids propre peut être pris en compte à condition de définir un nouvel indicateur morphologique primaire : l'indicateur de poids propre. Comme son nom l'indique, il est le reflet du poids propre de la structure. Cet indicateur, noté Φ , constitue un nouveau paramètre à considérer dans l'expression des indicateurs de volume ou de déplacement :

$$\begin{cases} W = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \Phi\right) \\ \Delta = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \Phi\right) \end{cases} \quad \text{avec} \quad \Psi \triangleq \frac{\mu\sigma L}{\sqrt{qEF}} \quad \text{et} \quad \Phi \triangleq \frac{\rho L}{\sigma}$$

L'optimisation structurale devient alors plus complexe puisqu'elle fait désormais intervenir un troisième paramètre.

Cet indicateur intègre donc plus formellement le poids propre de la structure aux charges et donne ainsi une indication sur la portée limite des passerelles de tenségrité. En effet, il peut être intéressant d'analyser l'importance du poids propre d'une structure par rapport à son chargement extérieur lorsque la portée augmente.

Un autre indicateur morphologique secondaire va être utilisé à cet effet : $\rho V/F$. Cet indicateur sera nommé « l'indicateur de pourcentage de poids propre » ou encore « l'indicateur d'efficacité matérielle ». Il représente le pourcentage de poids propre d'une structure par rapport aux charges extérieures F . Ainsi, une structure qui a tendance à reprendre essentiellement son poids propre manque en ce sens « d'efficacité matérielle ». Cet indicateur sera présenté plus en détail dans une section ultérieure (cfr §4.3.5.2).

Chapitre 3 : Calcul non-linéaire des structures de tenségrité

Ce chapitre présente une synthèse du mémoire réalisé par Marc ELIAERS, « Calcul non-linéaire des structures de tenségrité » [2], réalisé lors de l'année académique 2014-2015. Il est donc également fortement inspiré du chapitre 2 du mémoire de Jonas FERON qui a déjà réalisé ce travail de synthèse.

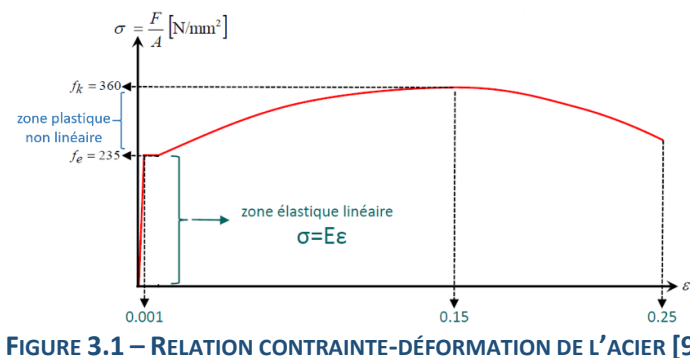
Au cours de ce chapitre, la méthode non-linéaire d'éléments finis, développée pour calculer les structures de tenségrité, sera expliquée. Cette méthode non-linéaire a été validée par Marc ELIAERS [2] et Jonas FERON [3].

3.1 Introduction à la non-linéarité

Il existe deux types de non-linéarité dans une structure : la non-linéarité matérielle et la non-linéarité géométrique.

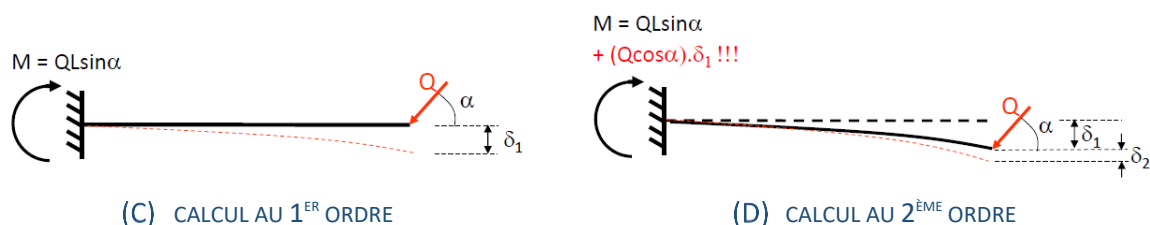
- *Non-linéarité matérielle :*

La non linéarité matérielle concerne les éléments sous-dimensionnés. En effet, lorsqu'un élément avec une trop faible section est soumis à une contrainte dépassant la limite d'élasticité du matériau, le matériau rentre dans son domaine plastique. Les déformations ne respectent alors plus la loi linéaire de Hooke $\sigma = E\varepsilon$ et deviennent irréversibles et non-linéaires. Certains matériaux ductiles comme l'acier ont la capacité de se déformer plastiquement avant la rupture.



- *Non-linéarité géométrique :*

La non-linéarité géométrique concerne les structures subissant d'importantes déformations. Dans ce cas, la structure doit être calculée sur base de sa déformée, on parle alors de calcul au second ordre :



Si la déformation δ_1 de la structure est très faible, la structure déformée est pratiquement confondue avec la structure initiale. L'équilibre de la structure peut alors se calculer sur base de sa géométrie initiale. C'est ce qu'on appelle un calcul au premier ordre. Cette hypothèse simplificatrice permet de réduire le nombre de calculs.

Lorsque la déformation δ_1 n'est plus négligeable, l'erreur commise par un calcul au premier ordre devient trop importante. Il faut alors calculer la structure au second ordre. Cela consiste à analyser l'effet de l'application de la charge sur la structure déformée jusqu'à ce que la déformation δ_n devienne négligeable. L'équilibre de la structure sera ainsi le résultat d'une multitude d'ordres successifs ($\delta_1, \delta_2, \delta_3 \dots$).

Dans le cadre de ce mémoire, seules les non-linéarités géométriques seront considérées. Les éléments seront toujours dimensionnés de façon à ce que les matériaux restent dans leur domaine élastique linéaire. Ils suivront donc toujours la loi linéaire de Hooke.

3.2 Calcul au second ordre

Pour mieux se familiariser au comportement non-linéaire des structures de tenségrité, il est intéressant d'illustrer à l'aide d'exemples le fonctionnement du calcul au second ordre. Il permet notamment d'expliquer le phénomène de « snap through » aperçu précédemment (cfr §1.4). Ces explications complémentaires seront disponibles en annexe (voir Annexe A).

3.2.1 Structure non-linéaire calculée au second ordre

Reprenons la structure non-linéaire composée de deux barres rotulées analogue à une structure de tenségrité (cfr §1.5) :

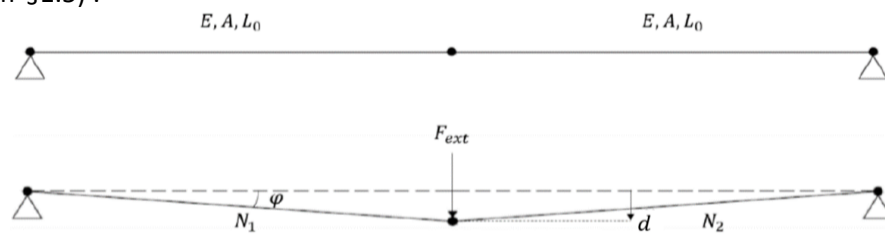


FIGURE 3.3 – STRUCTURE NON-LINÉAIRE [2]

Cette structure est instable numériquement au premier ordre. Une méthode linéaire est donc incapable de donner une solution à ce problème. Elle possède cependant une solution analytique si le calcul est effectué au second ordre, c'est-à-dire sur la structure déformée.

L'analyse de cette structure fournit les solutions analytiques de la déformation et des efforts internes [2] :

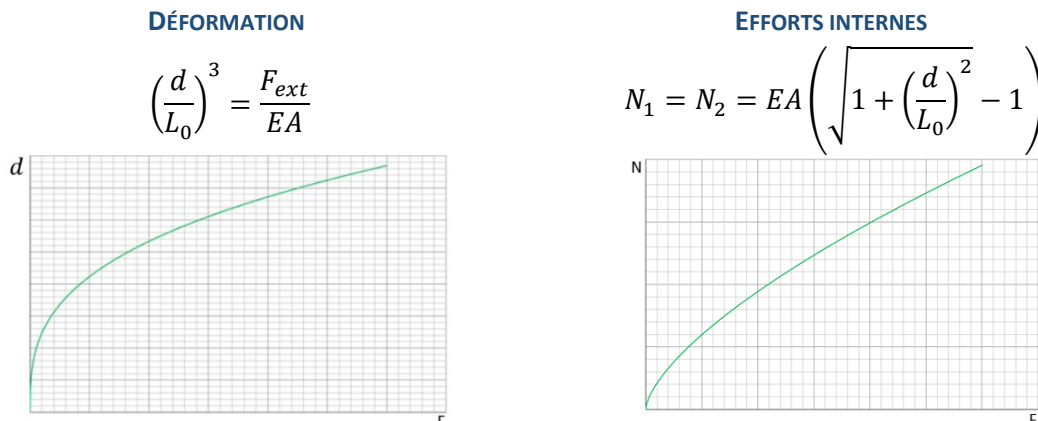


FIGURE 3.4 – SOLUTION ANALYTIQUE DE LA STRUCTURE NON-LINÉAIRE [2]

On remarque que la relation déformation-chargement n'est plus linéaire. Cela reflète le caractère irrégulier de la raideur de la structure. En effet, au départ, un faible chargement engendre une importante déformation : la structure a peu de raideur. Ensuite, au fur et à mesure que la structure est chargée, celle-ci se raidit et ses déformations diminuent.

3.3 Méthode non-linéaire d'éléments finis

Comme vu précédemment, une méthode linéaire d'éléments finis ne semble pas adaptée aux structures de tensegrité. En effet, en plus d'être instables numériquement, les structures de tensegrité peuvent avoir d'importantes déformations à cause de leur manque de rigidité. L'étude au premier ordre mènerait à des résultats erronés. C'est pourquoi Marc ELIAERS a développé une méthode non-linéaire d'éléments finis capable de résoudre numériquement ces structures. En effet, une analyse au second ordre fournit des résultats proches de la réalité physique et modélise correctement certains phénomènes comme les grands déplacements. Cependant, les calculs s'en retrouvent beaucoup plus complexes et longs.

3.3.1 Principe de résolution

La méthode non-linéaire repose sur le principe « d'avancement dans la solution » par pas incrémentaux.

Initialement la structure n'est pas chargée. On décompose la charge totale F_{ext} en incréments de charges ΔF_k . On applique un premier incrément de charge ΔF_1 à la structure initiale. On calcule ensuite la structure avec la méthode linéaire d'éléments finis (cfr §2.1), ce qui nous permet de trouver les efforts internes dans les éléments ΔN_1 et le déplacement des nœuds Δd_1 . Cette solution correspond à la nouvelle situation initiale. On avance comme cela dans la solution jusqu'à avoir appliqué toute la charge, tel que $\bar{F}_{k+1} = F_{ext}$. L'avancement dans la solution se déroule comme suit :

$$\bar{F}_{k+1} = \bar{F}_k + \Delta \bar{F}_k \quad \bar{N}_{k+1} = \bar{N}_k + \Delta \bar{N}_k \quad \bar{d}_{k+1} = \bar{d}_k + \Delta \bar{d}_k$$

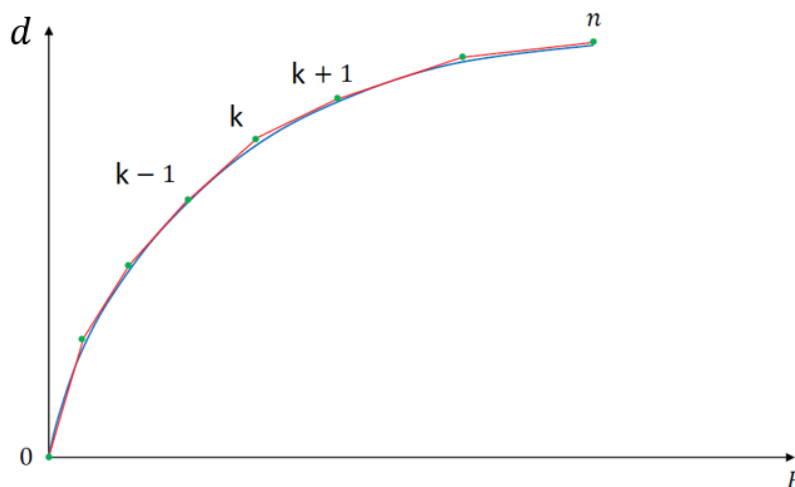


FIGURE 3.5 – RÉOLUTION PAR PAS INCRÉMENTAUX [2]

Le problème est donc linéarisé en chaque point incrémental k , mais la solution numérique est globalement non-linéaire et s'approche de la solution physique si le nombre d'incrémentes est suffisamment grand. La méthode linéaire correspond au cas $n = 1$.

3.3.2 Matrice de raideur non-linéaire

En chaque pas incrémental k , la méthode linéaire d'éléments finis est appliquée mais en prenant en compte le caractère non-linéaire de la structure dans la matrice de raideur. En effet, la raideur de ces structures n'est pas constante (cfr §3.2.1).

Pour un élément dont les extrémités sont les nœuds i et j de la structure, la matrice de raideur s'écrit :

$$\bar{K}_{k,loc} = \frac{EA}{L_k} \begin{bmatrix} c_X^2 & c_X c_Y & -c_X^2 & -c_X c_Y \\ c_X c_Y & c_Y^2 & -c_X c_Y & -c_Y^2 \\ -c_X^2 & -c_X c_Y & c_X^2 & c_X c_Y \\ -c_X c_Y & -c_Y^2 & c_X c_Y & c_Y^2 \end{bmatrix} + \frac{N_k}{L_k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{cases} c_X = \cos \alpha_X = \frac{X_{j,k} - X_{i,k}}{L_k} \\ c_Y = \cos \alpha_Y = \frac{Y_{j,k} - Y_{i,k}}{L_k} \end{cases}$$

On voit que la matrice de raideur est maintenant composée de deux termes : un premier terme « élastique » linéaire, similaire à celui présent dans la méthode linéaire, et un second terme « géométrique » prenant en compte les non-linéarités. Ce terme géométrique dépend de l'effort interne N présent dans la structure. En le négligeant, on retrouve le système utilisé dans la méthode linéaire (cfr §2.1.2).

En 3D, la partie non-linéaire de la matrice de raideur a la forme suivante :

$$\bar{K}_{k,loc,N-L} = \frac{N_k}{L_k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

NB : L'expression de cette matrice de raideur non-linéaire a été démontrée par Pierre LATTEUR [15] et est développée en annexe (voir Annexe B).

La méthode linéaire des éléments finis est ensuite exactement semblable (cfr §2.1.2). La matrice globale est assemblée et les conditions aux appuis sont prises en compte. Le système est ensuite résolu et fournit les résultats d'un pas incrémental, à savoir les déplacements, les efforts internes et les réactions aux appuis.

3.3.3 Avancement dans la solution

Pour bien comprendre le principe d'avancement dans la solution (cfr §3.3.1), plusieurs paramètres sont à définir. En premier lieu, définissons le paramètre d'incrément adimensionnel λ . Ce paramètre permet de mesurer l'avancement dans la solution par un scalaire compris entre 0 et 1.

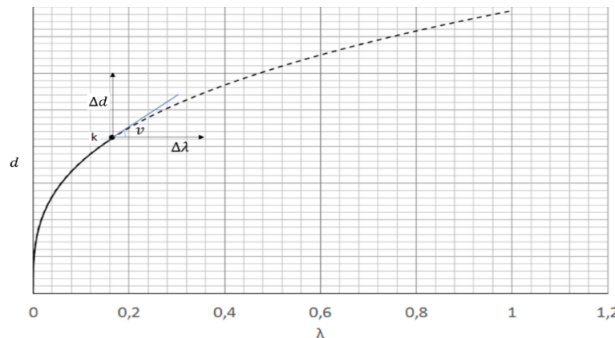


FIGURE 3.6 – PARAMÈTRE D'INCRÉMENT ADIMENSIONNEL [2]

La situation initiale correspond à $\lambda = 0$ et la situation finale est atteinte lorsque toute la charge extérieure a été appliquée, c'est-à-dire lorsque $\lambda = 1$.

Ensuite, définissons le chargement incrémental :

$$\bar{p} = \frac{\partial \bar{F}_{ext}}{\partial \lambda} \quad (3-1)$$

Généralement, par facilité, on décide de le prendre indépendant de λ . Dans ce cas, il est choisi arbitrairement de manière proportionnelle.

Ainsi, le chargement incrémental appliqué à chaque itération vaut le chargement total :

$$\bar{p} = \bar{F}_{ext} \quad (3-2)$$

Ensuite, définissons la vitesse incrémentale \bar{v} , qui est le rapport entre le déplacement et le paramètre d'incrémentation. Elle est tangente au chemin de solution en chaque pas incrémental k (cfr Figure 3.6) :

$$\bar{v} = \frac{\partial \bar{a}_k}{\partial \lambda} \quad (3-3)$$

Cette vitesse incrémentale s'obtient en résolvant le système selon la méthode linéaire à chaque pas :

$$\bar{v} = \bar{K}_k^{-1} \bar{p} = \bar{K}_k^{-1} \bar{F}_{ext} \quad (3-4)$$

Où \bar{K}_k est la matrice de raideur globale de la structure au pas incrémental k . Elle est assemblée à partir des matrices de raideur locales $\bar{K}_{k,loc}$ de chaque élément selon la méthode définie en section 2.1.2.

On voit que la vitesse incrémentale \bar{v} obtenue à l'équation (3-4) correspond, dans ce cas, aux déplacements dus à l'application de toute la charge externe \bar{F}_{ext} sur la structure déformée de raideur \bar{K}_k .

N.B. Dans cette expression, les conditions d'appuis n'ont pas été ajoutées au système afin d'alléger l'écriture. Le système total, avec la prise en compte des appuis, est présenté plus loin (voir équation (3-7)).

Cependant, la méthode non-linéaire repose sur le principe d'avancement dans la solution. On souhaite donc décomposer la charge externe \bar{F}_{ext} en incrément de charge ΔF_k de manière à avancer petit à petit dans la solution. On définit ainsi un paramètre d'avancement dans la solution : $\Delta \lambda$.

L'incrément de charge devient alors :

$$\Delta \bar{F}_k = \bar{p} \Delta \lambda = \bar{F}_{ext} \Delta \lambda$$

Si le paramètre $\Delta \lambda$ est suffisamment petit, l'incrément de déplacement $\Delta \bar{a}_k$ peut alors s'écrire :

$$\Delta \bar{a}_k = \bar{v} \Delta \lambda$$

L'incrément d'efforts internes $\Delta \bar{N}_k$ est alors calculé à partir de l'incrément de déplacement $\Delta \bar{a}_k$, par post-traitement, de la même manière que pour la méthode linéaire (cfr §2.1.5). Il peut également s'écrire en fonction de $\Delta \lambda$:

$$\Delta \bar{N}_k = \bar{N} \Delta \lambda$$

Avec \bar{N} , les efforts internes dans la structure lorsque toute la charge externe \bar{F}_{ext} est appliquée.

La nouvelle situation initiale suivante $k + 1$ est ainsi obtenue à partir de la situation précédente k :

k		$k + 1$
$\Delta \bar{F}_k = \bar{F}_{ext} \Delta \lambda$	\rightarrow	$\bar{F}_{k+1} = \bar{F}_k + \Delta \bar{F}_k$
$\Delta \bar{d}_k = \bar{v} \Delta \lambda$		$\bar{d}_{k+1} = \bar{d}_k + \Delta \bar{d}_k$
$\Delta \bar{N}_k = \bar{N} \Delta \lambda$		$\bar{N}_{k+1} = \bar{N}_k + \Delta \bar{N}_k$

Tout le problème réside dans le choix du paramètre $\Delta \lambda$. Il doit être suffisamment petit pour que le point $k + 1$ soit proche du point k et que la solution numérique converge vers la solution physique.

3.3.4 Equation de contrainte $\Delta \lambda$

Le choix du paramètre $\Delta \lambda$ est primordial pour l'efficacité de l'avancement dans la solution. Il existe plusieurs formes d'équations de contrainte qui permettent de déterminer $\Delta \lambda$. On peut en citer trois principales : la contrainte de chargement, la contrainte de déplacement, et la contrainte Arclength. Seule la contrainte Arclength sera développée car elle s'avère être la plus efficace dans notre cas. Le lecteur non familiarisé avec ces équations de contrainte est invité à prendre connaissance des 2 autres équations présentées en annexe (voir Annexe C).

3.3.4.1 Contrainte Arclength

L'équation de contrainte Arclength possède les avantages de la contrainte de chargement et de déplacement mais en évitant leurs inconvénients (voir Annexe C). Elle s'exprime par la formule suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{1 + \|\bar{v}\|^2}} |\bar{v}^t \Delta \bar{d}_k + \Delta \lambda| = l \quad (3-5)$$

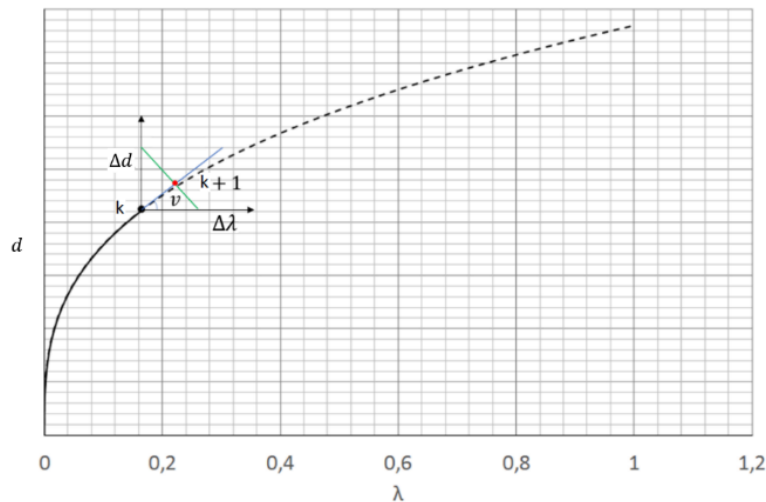


FIGURE 3.7 – INTERPRÉTATION GRAPHIQUE : CONTRAINTE ARCLength [2]

Avantages

Lorsque la raideur de la structure est très élevée, $\|\bar{v}\| \rightarrow 0$. L'équation (3-5) devient $|\Delta \lambda| = l$. L'avantage de la méthode de la contrainte de chargement est donc conservé (cfr Annexe C.1).

Lorsque la raideur de la structure est nulle, $\|\bar{v}\| \rightarrow \infty$. L'équation (3-5) devient $\|\Delta \bar{d}_k\| = l$. L'avantage de la méthode de la contrainte de déplacement est donc conservé (cfr Annexe C.2).

Cette méthode fonctionne ainsi quelle que soit la rigidité de la structure.

3.3.4.2 Conclusion

L'avancement dans la solution au point $k + 1$ est obtenu en résolvant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \Delta \bar{d}_k = \bar{v} \Delta \lambda \\ \frac{1}{\sqrt{1 + \|\bar{v}\|^2}} |\bar{v}^t \Delta \bar{d}_k + \Delta \lambda| = l \end{cases} \quad (3-6)$$

Par substitution, on obtient l'équation de contrainte suivante :

$$|\Delta \lambda| = \frac{l}{\sqrt{1 + \|\bar{v}\|^2}}$$

Le choix de l'équation de contrainte $\Delta \lambda$ joue un grand rôle dans la convergence de la solution.

Il en est de même pour la longueur d'incrément l . Sa valeur est choisie de manière arbitraire. Un compromis doit ainsi être trouvé entre la précision de la méthode et le temps de calcul alloué.

Au cours de ce mémoire, plusieurs structures de tenségrité seront étudiées, certaines plus rigides ou plus complexes que d'autres. La valeur de la longueur d'incrément doit donc être adaptée en fonction de la structure étudiée.

Dans le cas de structures composées de simplex, Jonas FERON avait considéré une longueur d'incrément $l = 0,01$ [3].

Pour les autres modules de tenségrité, la valeur a été ajustée afin de réduire le temps de calcul. Après plusieurs essais, la longueur d'incrément a finalement été fixée à $l = 1/60$. On a donc perdu un peu en précision pour réduire le temps de calcul, qui était devenu long pour certaines structures.

Reprenons la structure non-linéaire étudiée précédemment (cfr §1.5). L'erreur commise par le solveur non-linéaire peut être observée en fonction du choix de la longueur d'incrément :

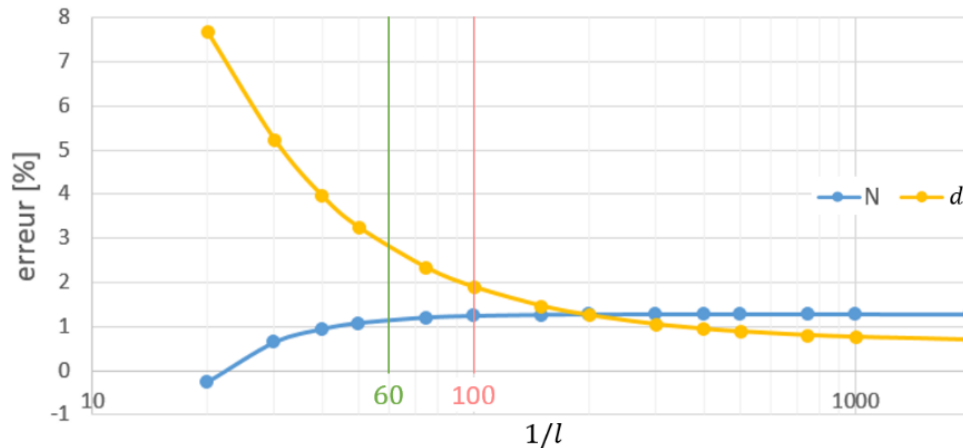


FIGURE 3.8 – ERREUR DE LA SOLUTION NUMÉRIQUE POUR DIFFÉRENTES LONGUEURS D'INCRÉMENTATION l [3]

L'erreur commise reste faible et est conservatrice car elle entraîne un léger surdimensionnement de la structure.

3.3.5 Solveur non-linéaire

Le solveur non-linéaire peut être représenté par l'algorithme suivant :

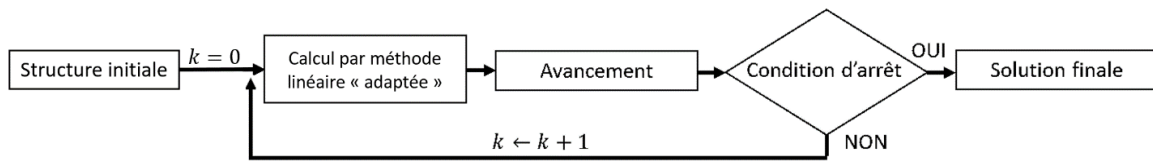


FIGURE 3.9 – ALGORITHME DE LA MÉTHODE NON-LINÉAIRE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

3.3.5.1 Structure initiale

Tout d'abord, les différents paramètres de la structure doivent être définis. La géométrie, les matériaux, les sections des éléments, le chargement et les conditions aux appuis sont ainsi fixés. Il faut également choisir une longueur incrémentale l . L'indice d'avancement k est initialisé à 0.

3.3.5.2 Méthode linéaire « adaptée »

Lors de chaque itération k , les matrices de raideurs locales $\bar{K}_{k,loc}$ de chaque élément sont constituées (cfr §3.3.2) et assemblées en une matrice de raideur globale \bar{K}_k de la structure (cfr §2.1.2). On parle de méthode linéaire « adaptée » car la matrice de raideur a été adaptée au cas non-linéaire.

Lorsque la raideur de la structure est nulle, cette matrice est singulière, et n'est donc pas inversible. Dans ce cas, le système ci-dessous doit être légèrement perturbé. En pratique, la raideur d'une structure de tenségrité est initialement nulle lorsqu'elle n'est pas en état d'autocontrainte. Dans le cas du simplex, on a vu que la structure ne possédait aucune rigidité lorsque $\alpha = 30^\circ$ (cfr §1.4). C'est pourquoi, le système est alors initialement perturbé en partant de $\alpha = 30,001^\circ$. Les autres systèmes de tenségrité étudiés seront également perturbés de manière similaire.

On impose ensuite les conditions d'appuis de la structure (cfr §2.1.3).

Le système peut finalement être résolu et fournit la valeur de la vitesse incrémentale \bar{v} (équivalent au déplacement des nœuds) et les réactions aux appuis \bar{r} :

$$\begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_k & \bar{c}^t \\ \bar{c} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{D} \end{bmatrix} \quad (3-7)$$

Enfin, les efforts internes \bar{N} sont obtenus par post traitement des résultats (cfr §2.1.5).

3.3.5.3 Avancement

Une fois la vitesse incrémentale déterminée, on peut calculer le paramètre d'incrémentation suivant la méthode de la contrainte Arclength (cfr §3.3.4.1) :

$$\begin{aligned} |\Delta\lambda| &= \frac{l}{\sqrt{1 + \|\bar{v}\|^2}} \\ \lambda_{k+1} &= \lambda_k + \Delta\lambda \end{aligned} \quad (3-8)$$

Ce paramètre permet d'avancer et de converger vers une estimation de la solution physique :

<u>Charge appliquée :</u>	<u>Déplacements :</u>	<u>Efforts internes :</u>
$\Delta\bar{F}_k = \bar{p} \Delta\lambda$	$\Delta\bar{d}_k = \bar{v} \Delta\lambda$	$\Delta\bar{N}_k = \bar{N} \Delta\lambda$
$\bar{F}_{k+1} = \bar{F}_k + \Delta\bar{F}_k$ $\Leftrightarrow \bar{F}_{k+1} = \bar{p} \lambda_{k+1}$	$\bar{d}_{k+1} = \bar{d}_k + \Delta\bar{d}_k$	$\bar{N}_{k+1} = \bar{N}_k + \Delta\bar{N}_k$

3.3.5.4 Condition d'arrêt

Les itérations s'arrêtent lorsque toute la charge externe a été appliquée sur la structure, c'est-à-dire lorsque :

$$\lambda_{k+1} = 1$$

Si cette condition d'arrêt est vérifiée, la solution est atteinte : les déplacements et efforts internes finaux de la structure sont donc obtenus.

Dans le cas contraire, on recommence le processus : le point $k + 1$ est considéré comme nouvelle situation initiale et la méthode linéaire « adaptée » est alors à nouveau appliquée.

On remarque, au vu de l'équation (3-8), que λ_{k+1} peut être plus grand que 1. Dans ce cas, la charge externe appliquée sur la structure est plus grande que celle exactement souhaitée. Pour des raisons de précision d'optimisation, une condition vérifiant que λ_{k+1} s'arrête exactement à 1 a été ajoutée.

Après plusieurs essais, le nombre d'itérations maximal k_{max} du solveur non-linéaire a été posé égal à :

$$k_{max} = \frac{10}{l} \quad \text{avec } l = \text{la longueur d'incrément}$$

Cette valeur est suffisante pour permettre au solveur de converger vers une solution malgré les importantes déformations de la structure étudiée. Cependant, lorsque les déformations deviennent trop importantes, le temps de calcul augmente considérablement, il faut alors que le solveur s'arrête.

Chapitre 4 : Optimisation des structures de tensegrité

Ce chapitre synthétise le mémoire de Jonas FERON, « Optimisation des structures de tensegrité sur base d'indicateurs morphologiques » [3], réalisé lors de l'année académique 2015–2016. Son travail constitue la base sur laquelle le présent mémoire s'est appuyé afin d'étudier les autres passerelles de tensegrité imaginées dans le Chapitre 5.

Le problème initial des structures de tensegrité réside dans leurs déformations. Celles-ci peuvent être très importantes à cause du manque de rigidité intrinsèque de ces structures. Il est donc nécessaire de les précontraindre.

Au terme de son travail, Jonas FERON a réussi à démontrer la faisabilité de passerelles de tensegrité composées de simplex. Pour cela, il a dû étendre la théorie des indicateurs morphologiques, développée initialement pour des structures 2D linéaires (cfr §2.2.3.1), aux structures 3D hyperstatiques, non-linéaires et précontraintes.

Jonas FERON n'a pas démontré formellement cette extension des indicateurs morphologiques, il s'est uniquement appuyé sur les résultats numériques qui semblaient tous le confirmer. Par la suite, une publication scientifique [15] a été réalisée dans laquelle cette extension de la théorie des indicateurs morphologiques a été démontrée rigoureusement.

Au cours de ce chapitre, seule l'approche moins formelle de la démonstration de l'extension des indicateurs morphologiques sera présentée. Elle permet au lecteur, qui n'est pas familier avec cet outil d'optimisation, de comprendre plus facilement la démarche générale. Pour consulter la démonstration complète, le lecteur est invité à lire l'article scientifique suivant « A design tool for lattice and tensegrity structures based on a stiffness and volume optimization algorithm using morphological indicators » [15].

Dans ce chapitre, les structures sont calculées avec la méthode non-linéaire (cfr §3.3). Afin de vérifier certains critères, les résultats sont optimisés.

Au cours de l'optimisation par approche linéaire des structures de tensegrité (cfr §2.2), Alexy BASTIEN et Quentin GRAVY ont proposé 3 types d'optimisation :

- Optimisation de la précontrainte ;
- Optimisation des sections ;
- Optimisation de la structure sur base des indicateurs morphologiques.

Tout d'abord, l'optimisation basée sur le calcul non-linéaire sera expliquée. En effet, la non-linéarité modifie les méthodes d'optimisation développées pour les structures linéaires. On verra notamment comment adapter la théorie des indicateurs morphologiques aux structures non-linéaires et précontraintes.

Certaines modifications ont été apportées à l'optimisation en vue d'améliorer la robustesse de l'outil des indicateurs morphologiques. On peut citer notamment la prise en compte du poids propre dans le processus d'optimisation.

4.1 Optimisation de la précontrainte

Le premier critère à vérifier est que tous les câbles de la structure de tenségrité soient tendus après l'application des charges externes.

4.1.1 Principe de superposition

Lorsqu'une structure a un comportement linéaire, le principe de superposition est respecté :

« Les effets statiques (efforts internes, contraintes et déplacements) engendrés par un ensemble d'actions sont égaux à la somme algébrique des effets statiques engendrés par chacune des actions prise isolément » [9]

Ce principe n'est plus respecté lorsque la structure est non-linéaire. En effet, si l'application d'une charge F_1 engendre une déformation d_1 , alors l'application d'une charge $F_2 = 2F_1$ produira une déformation $d_2 \neq 2d_1$.

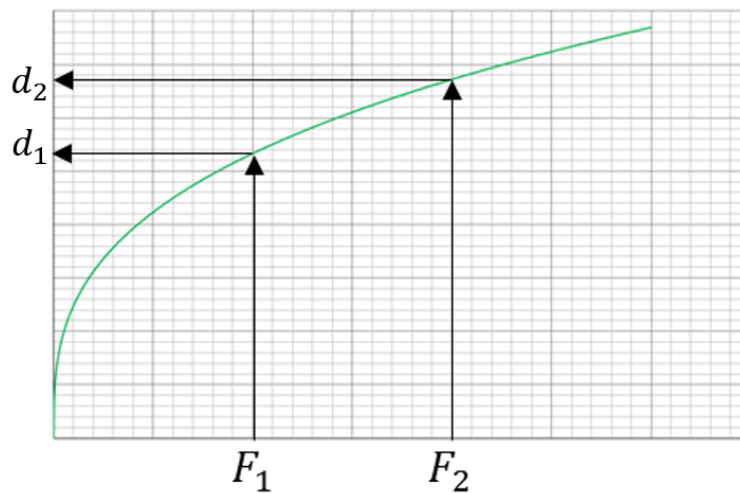


FIGURE 4.1 – INVALIDITÉ DU PRINCIPE DE SUPERPOSITION [3]

Ce raisonnement est également valable pour les efforts internes N , tel que $N_2 \neq 2N_1$. La méthode d'optimisation de la précontrainte utilisée pour le calcul linéaire (cfr § 2.2.1) n'est donc plus valable.

Pour rappel, le principe était le suivant : les efforts internes engendrés par la charge externe étaient d'abord calculés (Figure 4.2 A). On introduisait ensuite la précontrainte nécessaire, de manière à contrebalancer les efforts de compression présents dans les câbles (Figure 4.2 B). Cependant, puisque le principe de superposition n'est plus respecté, cette méthode n'est plus valable.

En effet, en réalité, la structure est d'abord initialement précontrainte (Figure 4.2 C) et ensuite on applique la charge externe (Figure 4.2 D). Or, le principe de superposition n'étant plus respecté, les résultats sont différents suivant l'ordre d'application de la précontrainte P et de la charge externe F_{ext} , tel que :

$$N(F_{ext} + P) \neq N(F_{ext})_{t1} + N(P)_{t2} \neq N(P)_{t1} + N(F_{ext})_{t2}$$

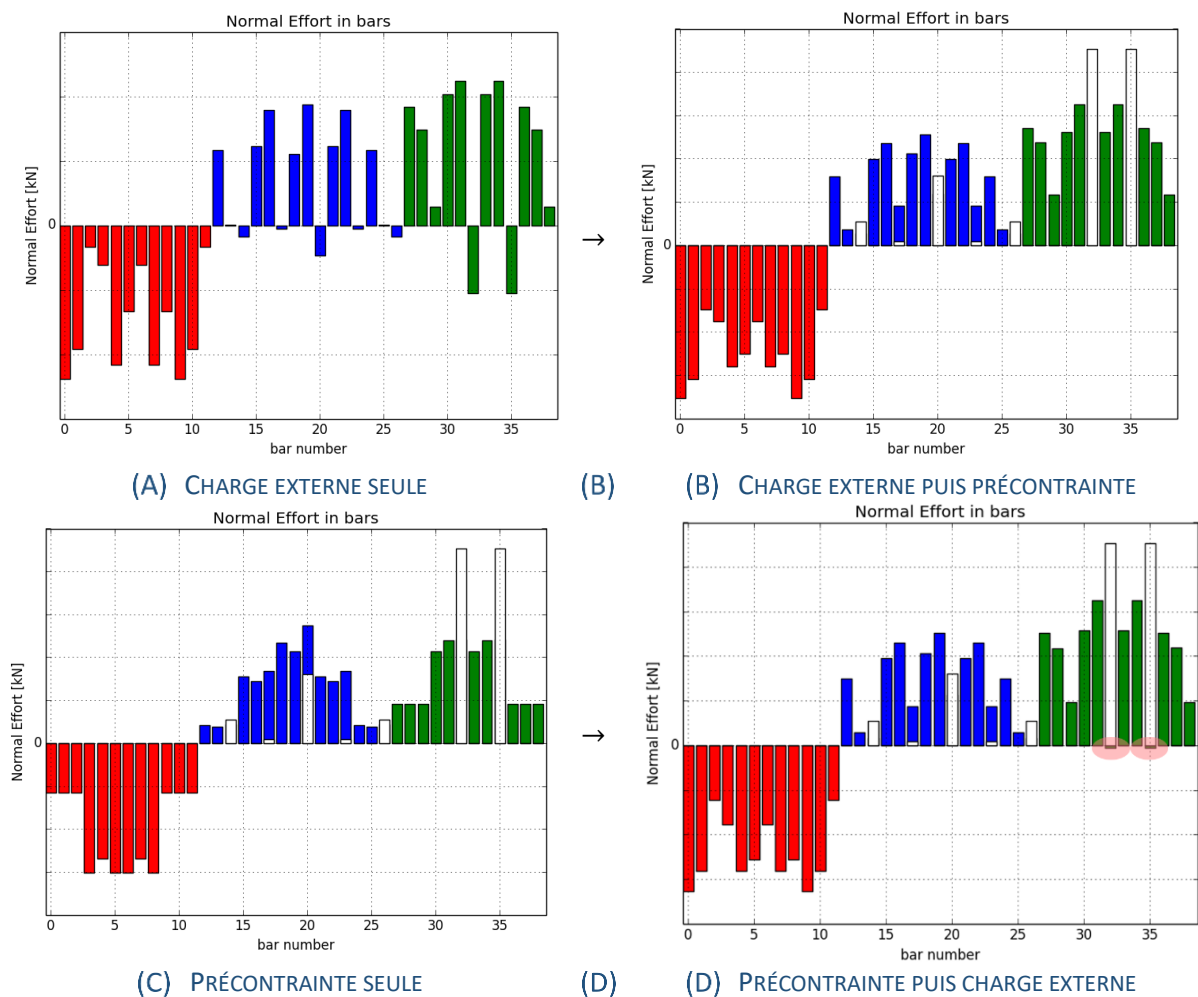


FIGURE 4.2 – EXEMPLE D’EFFORTS INTERNES DANS UNE STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ SOUMISE AUX CHARGES EXTERNES ET À LA PRÉCONTRAÎTE [3]

N.B. sur la figure ci-dessus, on a en rouge les barres, en bleu et vert les câbles et en blanc la précontrainte.

On remarque donc que la précontrainte calculée via l’optimisation de la précontrainte utilisée pour l’approche linéaire n’est plus suffisante pour tendre tous les câbles de la structure (Figure 4.2 D).

Une nouvelle méthode d’optimisation de la précontrainte doit être mise au point pour les structures non-linéaires.

4.1.2 Méthodes d’optimisation de la précontrainte

Nous allons maintenant élaborer une méthode pour appliquer la précontrainte dans une structure de tenségrité, malgré la non-linéarité.

Par manque d’expertise et par facilité, nous avons opté pour un scénario de précontrainte uniforme, c’est-à-dire que la précontrainte introduite initialement dans les éléments de la structure est uniforme. Les charges externes sont ensuite appliquées dans un second temps. L’objectif de la méthode est donc de déterminer la valeur de la précontrainte à introduire dans les éléments de la structure afin que la charge externe ne détende pas les câbles. Deux scénarios de mise en précontrainte ont été étudiés :

1. Câbles précontraints uniformément
2. Barres précontraintes uniformément

4.1.2.1 Câbles précontraints uniformément

La première approche intuitive consiste à précontraindre initialement tous les câbles de la structure de manière uniforme. Il faut ensuite vérifier que la précontrainte introduite est capable de contrebalancer les efforts internes de compression engendrés dans les câbles par l'application d'une charge externe.

Méthode numérique :

La méthode numérique pour appliquer une précontrainte P dans un câble d'une structure est la suivante :

- Tout d'abord, on considère que tous les nœuds de la structure sont bloqués. La précontrainte P est introduite en tendant le câble. En pratique, cela revient ainsi à réduire la longueur du câble.

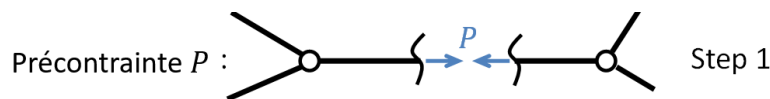


FIGURE 4.3 – APPLICATION D'UNE PRÉCONTRAINTÉ P DANS UN CÂBLE [15]

- On veut ensuite extérioriser cette précontrainte afin de connaître son effet sur l'ensemble de la structure. La force extérieure produisant le même effet que la précontrainte, c'est-à-dire, raccourcir le câble, est donc théoriquement une charge extérieure de compression s'appliquant sur le câble :

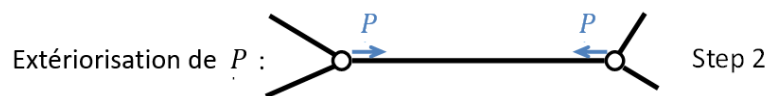


FIGURE 4.4 – PRÉCONTRAINTÉ P EXTÉRIORISÉE [15]

- Tous les nœuds sont ensuite relâchés et on observe le comportement de la structure. Pour cela, on calcule donc la structure avec la méthode non-linéaire (cfr §3.3). La structure est ainsi calculée avec la précontrainte extériorisée comme unique chargement externe. Le solveur non-linéaire fournit alors les efforts internes N_i dans les éléments. La précontrainte s'est donc répartie dans l'ensemble de la structure :

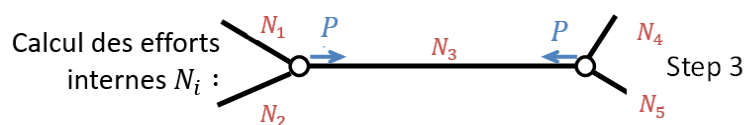


FIGURE 4.5 – RÉPARTITION DE LA PRÉCONTRAINTÉ P DANS LA STRUCTURE [15]

- Finalement, on intériorise à nouveau la précontrainte P . Comme la précontrainte P s'est répartie dans la structure, l'effort de tension résultant $N_{pré}$ dans le câble est plus faible que la précontrainte initialement introduite P . Il vaut $N_{pré} = P + N_3$.

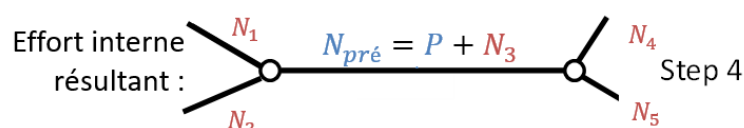


FIGURE 4.6 – EFFORTS INTERNES RÉSULTANT DE L'APPLICATION D'UNE PRÉCONTRAINTÉ P [15]

Résultats :

Soit une structure de tensegrité, on peut obtenir les résultats suivants après l'application d'une précontrainte uniforme P dans tous les câbles de la structure :

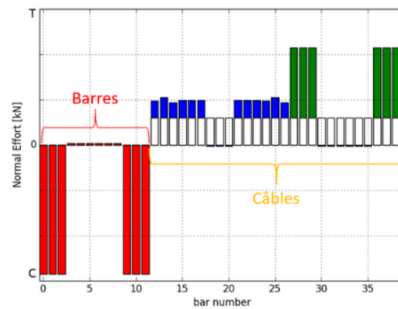


FIGURE 4.7 – EXEMPLE D'EFFORTS INTERNES APRÈS L'APPLICATION D'UNE PRÉCONTRAÎNTE UNIFORME DANS TOUS LES CÂBLES D'UNE STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE SIMPLEX [3]

La Figure 4.7 représente les efforts internes résultant de l'application d'une précontrainte uniforme (P) en blanc. On remarque que la précontrainte d'un câble peut tendre certains câbles et comprimer d'autres, et similairement pour les barres. Ceci illustre à nouveau la répartition de la précontrainte dans la structure. Cette répartition peut ainsi entraîner des efforts internes de compression dans les câbles avant même l'application de la charge externe.

Cette méthode de mise en précontrainte n'est donc pas en mesure d'assurer la tension des câbles de la structure après l'application d'une charge externe F .

4.1.2.2 Barres précontraintes uniformément

Jonas FERON a ensuite imaginé un second scénario de précontrainte [3]. Il consiste à pré-comprimer uniformément les barres de la structure. En pratique, cela peut se réaliser à l'aide de vérins insérés au sein des barres.

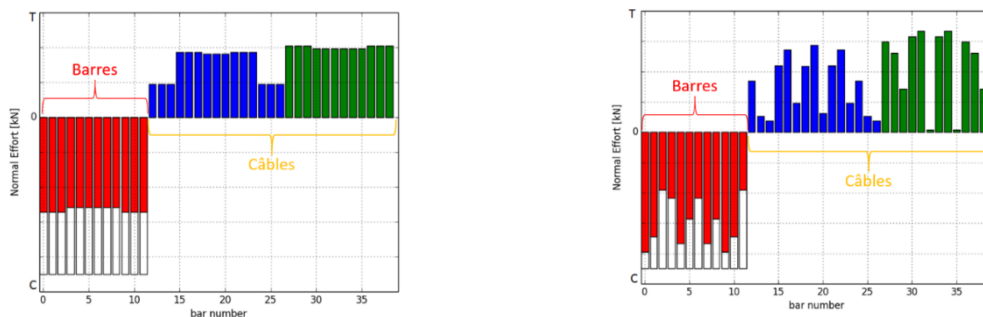
Méthode numérique :

Le raisonnement de la méthode numérique pour pré-comprimer une barre d'une structure est similaire au cas de l'application d'une précontrainte dans un câble.

La précontrainte est désormais appliquée en comprimant la barre, ce qui revient, en pratique, à allonger la longueur de la barre. La précontrainte extériorisée est alors une charge extérieure de traction s'appliquant sur la structure.

Résultats :

Soit une structure de tensegrité, on peut obtenir les résultats suivants après l'application d'une pré-compression uniforme P dans toutes les barres de la structure :



(A) PRÉ COMPRESSION SEULE

(B) PRÉ COMPRESSION ET CHARGE EXTERNE

FIGURE 4.8 – EXEMPLE D'EFFORTS INTERNES DANS UNE STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE SIMPLEX SOUMISE À UNE PRÉ COMPRESSION ET UNE CHARGE EXTERNE [3]

On remarque que cette méthode de précontrainte permet de tendre initialement tous les câbles, et d'assurer leur tension après l'application d'une charge externe F . Les efforts internes de compression engendrés par la charge externe sont donc contrebalancés.

Cette méthode semble donc propice aux structures de tensegrité composées de simplex. Il restera à s'assurer qu'elle fonctionne également pour les structures de tensegrité composées de modules plus complexes.

Cette méthode d'optimisation de la précontrainte illustre un scénario, parmi l'infinité d'autres scénarios envisageables, qui permet de tendre tous les câbles d'une structure de tensegrité après l'application de la charge externe. Il existe très certainement d'autres méthodes plus optimales, telles que l'insertion d'une précontrainte dans des câbles judicieusement sélectionnés. Ces scénarios optimaux de précontrainte devront faire l'objet d'une future étude.

4.1.2.3 Processus d'optimisation de la précontrainte

Jonas FERON a développé un processus d'optimisation de la précontrainte simple et efficace. Il consiste à augmenter la pré compression P introduite dans les barres par incréments de précontrainte ΔP jusqu'à ce que tous les câbles soient tendus après l'application de la charge externe F .

L'incrément de précontrainte ΔP doit être judicieusement choisi. Il faut trouver un compromis entre précision et durée de calcul. En effet, il faut une valeur suffisamment petite pour obtenir une précision correcte et ne pas tendre trop les câbles, car cela induirait un surdimensionnement. Cependant, une valeur trop petite entraînerait un nombre trop important d'itérations.

L'incrément a été fixé par la formule suivante :

$$\Delta P = F/n \quad \text{avec } n \in \mathbb{N}$$

La valeur du coefficient a été fixée à $n = 10$ après plusieurs essais.

La précontrainte introduite dans chaque barre à l'itération j vaut donc :

$$P_j = j \frac{F}{n}$$

Afin de rester réaliste, la précontrainte finale introduite dans la structure doit être limitée. En effet, une précontrainte trop importante mènerait à des sections démesurées et donc à une structure irréalisable. Une condition d'arrêt a donc été ajoutée au processus d'optimisation de la précontrainte :

$$P_j < 50F$$

La pré compression totale appliquée dans chaque barre de la structure ne peut donc pas dépasser une certaine valeur équivalente à 50 fois la charge externe F . Si la précontrainte dépasse cette limite, la structure est alors considérée comme impossible. Cette valeur limite a été posée arbitrairement et a été volontairement surévaluée. L'objectif derrière ce choix est de réaliser une étude la plus complète possible.

Le processus d'optimisation de la précontrainte peut finalement être résumé de la façon suivante :

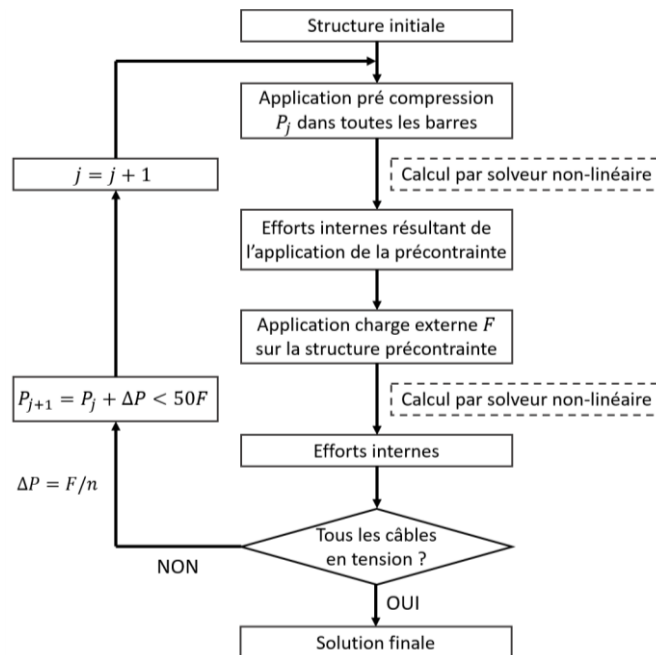


FIGURE 4.9 – ALGORITHME D’OPTIMISATION DE LA PRÉCONTRAINTÉ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]

4.2 Optimisation des sections

Une fois la valeur de la précontrainte déterminée, il faut s’assurer que les efforts internes dans les éléments de la structure n’excèdent pas la résistance du matériau.

Quel que soit le degré d’hyperstaticité de la structure, l’optimisation des sections d’une structure non-linéaire s’effectue toujours à l’aide d’un processus itératif. Cette propriété sera tout d’abord démontrée à l’aide d’un simple contre-exemple, ensuite les différentes méthodes de dimensionnement des sections seront présentées.

Pour rappel, on s’intéresse uniquement aux structures de tensegrité hyperstatiques (cfr §2.2.2.1).

4.2.1 Influence du degré d’hyperstaticité

Comme vu précédemment dans la section 2.2.2 Optimisation des sections par la méthode linéaire : lorsque la structure est isostatique, les efforts internes N ne dépendent pas des sections des éléments de la structure.

Cette propriété des structures isostatiques n’est plus valable lorsque les structures ont un comportement non-linéaire. On peut démontrer cela par un simple contre-exemple.

Reprenons la structure isostatique non-linéaire étudiée dans la section 3.2.1 :

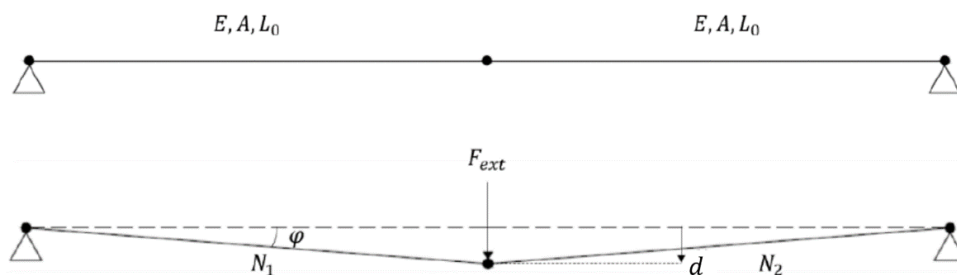


FIGURE 4.10 – STRUCTURE ISOSTATIQUE NON-LINÉAIRE [2]

L'étude de cette structure mène aux solutions analytiques suivantes :

Déformation :

$$\left(\frac{d}{L_0}\right)^3 = \frac{F_{ext}}{EA}$$

Efforts internes :

$$N_1 = N_2 = EA \left(\sqrt{1 + \left(\frac{d}{L_0}\right)^2} - 1 \right)$$

On voit que les efforts internes N_1 et N_2 dépendent de la section A des éléments. Cette propriété peut être généralisée à l'ensemble des structures non-linéaires.

L'optimisation des sections d'une structure non-linéaire s'effectue donc toujours suivant un processus itératif indépendamment du degré d'hyperstaticité de la structure. En effet, modifier la section d'un élément entraîne une redistribution des efforts internes dans l'ensemble de la structure. L'optimisation des sections sera donc similaire pour une structure isostatique ou hyperstatique.

4.2.2 Dimensionnement suivant l'indicateur de flambement Ψ

Comme vu précédemment, il est possible de dimensionner les éléments d'une structure à l'aide de l'indicateur de flambement Ψ développé par Pierre LATTEUR [8]. Chaque élément e d'une structure sera ainsi dimensionné suivant sa sensibilité au flambement :

- Soit l'élément est insensible au flambement, tel que $\Psi_e = 0$ (toujours le cas pour les câbles) :

$$A_e = N_e / \sigma$$

- Soit l'élément est plus ou moins sensible au flambement, tel que $\Psi_e = \mu \sigma l_e / \sqrt{q_e E N_e}$:

$$A_e = \frac{N_e}{2\sigma} \left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2} \Psi_e^2} \right)$$

- Soit l'élément est très sensible au flambement, tel que $\Psi_e \rightarrow \infty$. L'élément sera alors dimensionné suivant la formule théorique d'Euler [7] :

$$A_e \rightarrow \mu \frac{l_e}{\pi} \sqrt{\frac{N_e}{q_e E}}$$

Une fois la structure calculée avec la méthode non-linéaire et les efforts internes déterminés, chaque élément e est redimensionné selon une des méthodes d'optimisation des sections existantes.

4.2.3 Méthodes d'optimisation des sections

Au cours de l'optimisation des sections basée sur l'approche linéaire (cfr §2.2.2), seule la méthode des « Sections traction/compression » a été développée. Dans le cadre de ce mémoire, deux méthodes ont été étudiées :

- Sections traction/compression
- Sections câbles bases/câbles longitudinaux/barres

La deuxième méthode « Sections câbles bases/câbles longitudinaux/barres » est une amélioration de la première méthode.

Il existe d'autres méthodes mais elles s'avèrent beaucoup moins appropriées au cas des structures de tenségrité. Elles ne seront donc pas présentées dans ce mémoire.

4.2.3.1 Sections traction/compression

Le principe de cette méthode d'optimisation consiste à dimensionner les éléments d'une structure selon 2 catégories :

- Tous les éléments en compression sont redimensionnés avec la même dimension que l'élément le plus sollicité en compression :

$$A_{comp} = \max(A_{e,comp})$$

- Tous les éléments en traction sont redimensionnés avec la même dimension que l'élément le plus sollicité en traction :

$$A_{tract} = \max(A_{e,tract})$$

Dans le cas d'une structure de tensegrité, cela revient à dimensionner tous les câbles avec la même section et de même avec toutes les barres.

Le choix de la méthode d'optimisation des sections est décisif sur le volume total de matière de la structure et donc indirectement sur leur efficacité. En effet, démontrer la faisabilité de ces structures est une chose, il faut encore qu'elles soient compétitives et efficaces par rapport aux autres typologies de structures existantes. Il est donc primordial, pour réaliser une étude de comparaison pertinente, de choisir une méthode d'optimisation des sections réaliste et performante. C'est pourquoi cette méthode d'optimisation des *Sections traction/compression* a été améliorée.

4.2.3.2 Sections câbles bases/câbles longitudinaux/barres

Au cours des mémoires précédents, on s'est uniquement intéressé aux structures de tensegrité composées de simplex, l'étude va être désormais étendue à des modules de tensegrité plus complexes (cfr Chapitre 5).

Pour rappel, le simplex est l'un des systèmes de tensegrité le plus simple en termes de nombre d'éléments (cfr §1.4). Les modules plus complexes étant composés d'un plus grand nombre d'éléments, l'impact du choix de la méthode d'optimisation des sections devient significatif sur le volume de matière de la structure. Pour ces modules, la méthode d'optimisation des *Sections traction/compression* s'avère beaucoup moins pertinente. En effet, certains câbles se retrouvent surdimensionnés et tendent à augmenter le volume de matière de la structure. De fait, la tension dans les câbles des bases des modules (voir Figure 4.11, en bleu) a tendance à être globalement différente que dans les câbles longitudinaux liant les bases (voir Figure 4.11, en vert). Il semble donc intéressant de distinguer ces deux types de câbles dans l'optimisation.

Une nouvelle méthode d'optimisation des sections a donc été imaginée. Elle consiste à dimensionner les éléments d'une structure de tensegrité selon 3 catégories. Les 3 catégories sont les suivantes :

- Câbles des bases : il s'agit des câbles formant les bases des modules (en bleu) ;
- Câbles longitudinaux : il s'agit des câbles liant les bases des modules entre eux (en vert) ;
- Barres (en rouge).

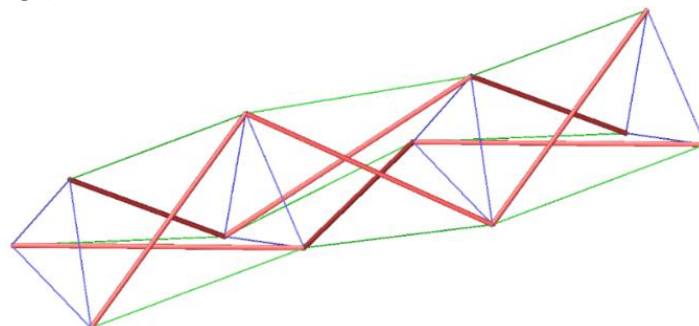


FIGURE 4.11 – EXEMPLE DE STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE 3 SIMPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Dans cet exemple, les câbles des bases (en bleu Figure 4.12) reprennent globalement moins d'efforts que les câbles longitudinaux (en vert Figure 4.12). Il est donc pertinent de distinguer leurs sections :

$$N_{max,bases} < N_{max,long} \rightarrow A_{bases} < A_{long}$$

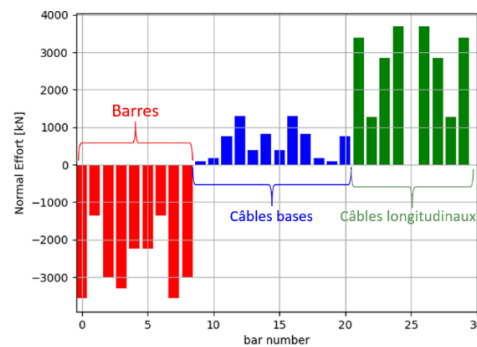


FIGURE 4.12 – EXEMPLE D’EFFORTS INTERNES DANS UNE STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE SIMPLEX [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]

Le principe d’optimisation est donc le suivant :

- Toutes les barres comprimées sont redimensionnées avec la dimension de la barre la plus comprimée :

$$A_{barres} = \max(A_{e,barres})$$

- Tous les câbles des bases sont redimensionnés avec la dimension du câble de base le plus tendu :

$$A_{bases} = \max(A_{e,bases})$$

- Tous les câbles longitudinaux sont redimensionnés avec la dimension du câble longitudinal le plus tendu :

$$A_{long} = \max(A_{e,long})$$

4.2.4 Processus d’optimisation des sections

Le processus d’optimisation des sections peut alors être résumé de la façon suivante :

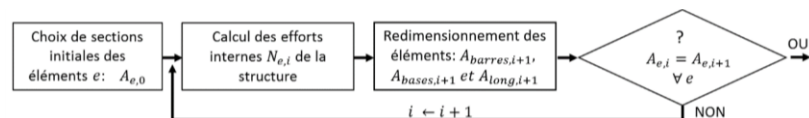


FIGURE 4.13 – ALGORITHME D’OPTIMISATION DES SECTIONS [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]

Premièrement, l’ensemble des sections initiales sont choisies toutes identiques avec une valeur posée arbitrairement. La structure est ensuite calculée par la méthode non-linéaire (cfr §3.3) de manière à déterminer les efforts internes présents dans les éléments. Les éléments sont alors redimensionnés selon la méthode d’optimisation « Sections câbles bases/câbles longitudinaux/barres ». Enfin, le calcul recommence sur la nouvelle structure redimensionnée. Le processus itératif s’arrête finalement lorsque la méthode converge, c’est-à-dire lorsque les sections de tous éléments ne varient plus d’une itération à l’autre.

La condition d’arrêt $A_{e,i} = A_{e,i+1}$ du processus itératif est très précise et demande un nombre important d’itérations, ce qui augmente énormément le temps de calcul. Au cours de son mémoire [3], Jonas FERON a proposé une condition d’arrêt qui accepte une certaine imprécision : l’erreur maximale commise sur l’aire d’un élément de la structure doit être inférieure à la moyenne de toutes les aires divisées par un facteur 200. Après plusieurs essais sur d’autres modules, le facteur a été corrigé à 150 afin de diminuer le nombre d’itérations, tout en conservant une précision suffisante. La condition d’arrêt est finalement la suivante :

$$\max |A_{e,i+1} - A_{e,i}| < \frac{A_{moy,i}}{150}$$

4.3 Optimisation de la structure

Une fois que les sections des éléments ont été optimisées, on aimerait connaître la structure la plus efficace en termes de volume et/ou de déformations.

Comme dit précédemment, le problème intrinsèque des structures de tensegrité réside dans leurs déformations. Leur volume de matière doit donc être minimisé tout en veillant à ce que les déformations restent acceptables.

Dans le cas d'une passerelle piétonne de portée L , la norme considère que la flèche verticale maximum δ est acceptable si :

$$\delta \leq L/500$$

Ce critère peut également s'écrire :

$$\frac{L}{\delta} \geq 500$$

L'optimisation de la structure consiste donc à déterminer la structure la plus légère respectant cette contrainte de déformation.

4.3.1 Théorie des indicateurs morphologiques

Comme pour l'optimisation de la structure basée sur l'approche linéaire (cfr §2.2.3), la théorie des indicateurs morphologiques, développée par Pierre LATTEUR [8], semble être l'outil adéquat pour effectuer cette optimisation. Cette théorie initialement, développée pour les structures au comportement linéaire, doit toutefois être étendue aux structures non-linéaires et précontraintes.

Pour rappel, une façon de diminuer la complexité de l'optimisation structurale est de rassembler les paramètres définissant une structure dans des nombres adimensionnels appelés indicateurs morphologiques.

On a tout d'abord les indicateurs primaires, paramètres de l'optimisation, qui ont donc une influence sur les résultats de l'optimisation :

- L/H : l'élanement géométrique de la structure ;
- $\Psi \triangleq \mu\sigma L/\sqrt{qEF}$: l'indicateur de flambement étendu à la structure. Il témoigne de la sensibilité de la structure au flambement. Dans cette formule, le paramètre $q \triangleq I/A^2$ est le facteur de forme ;
- $\Phi \triangleq \rho L/\sigma$: l'indicateur de poids propre.

Pour étudier ces résultats, il existe les indicateurs morphologiques secondaires qui sont représentatifs d'une grandeur ou d'un phénomène physique. Ils permettent ainsi de comparer des structures différentes entre elles :

- $W \triangleq \frac{\sigma V}{FL}$: l'indicateur de volume. Il est l'image du volume totale V de la structure ;
- $\Delta \triangleq \frac{E\delta}{\sigma L}$: l'indicateur de déplacement. Il est l'image de la flèche maximale δ de la structure.

Dans le cas de structures au comportement linéaire, ces indicateurs de résultats ne dépendent que de trois indicateurs primaires (cfr §2.2.3.2) :

$$\begin{cases} W = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \Phi\right) \\ \Delta = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \Phi\right) \end{cases}$$

Cependant, cette dernière propriété n'est plus vérifiée pour les structures non-linéaires et précontraintes.

Jonas FERON n'avait pas pris en compte l'indicateur de poids propre dans son optimisation [3]. Cependant, les structures de tensegrité sont de nature volumineuse dues à leur précontrainte. Le poids propre peut ainsi devenir très important. Il devient alors essentiel d'introduire ce nouvel indicateur pour se rendre compte de l'efficacité réelle de ces structures. Le processus d'optimisation devra alors être adapté.

4.3.2 Indicateurs morphologiques non-linéaires

Nous allons maintenant étendre la théorie des indicateurs morphologiques aux structures non-linéaires. Une approche moins formelle de la démonstration va être présentée car elle permet au lecteur de comprendre facilement la démarche générale.

On s'intéresse ici aux structures non-linéaires, non précontraintes. On verra ensuite que la théorie des indicateurs morphologiques reste valable pour les structures non-linéaires et précontraintes également.

Le poids propre ne sera pas pris en compte afin d'alléger la démonstration.

Considérons la structure ci-dessous calculée au second ordre :

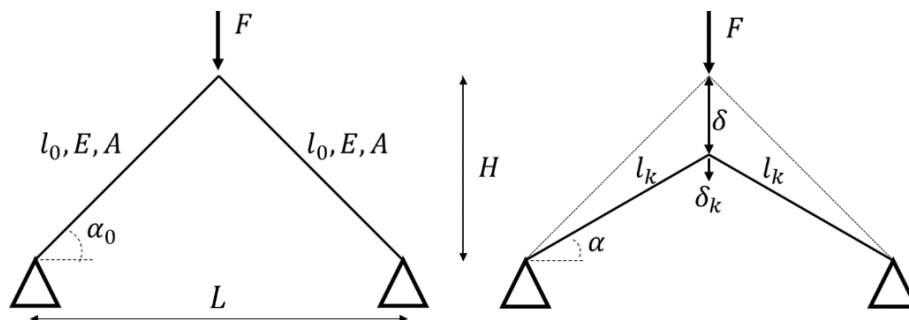


FIGURE 4.14 – SCHÉMA DE LA STRUCTURE ÉTUDIÉE [3]

4.3.2.1 Indicateur de déplacement non-linéaire

Le *théorème de la force unité* permet de calculer le déplacement d'un point d'une structure isostatique en considérant celle-ci comme une autre structure, de géométrie identique, mais soumise à un effort unitaire dirigé dans le sens du déplacement recherché.

Dans le cas d'une structure hyperstatique, on peut utiliser le *théorème de Pasternak* qui stipule que le théorème de la force unité reste d'application lorsque la structure soumise à l'effort unitaire est rendue isostatique de façon quelconque.

Pour la structure ci-dessus, le moment fléchissant est négligeable, les déformations sont alors provoquées par l'effort normal. On peut ainsi écrire par le *théorème de Pasternak* :

$$\delta = \int \frac{N_{\Sigma F}^n n_1^0}{EA} dl$$

Où :

- $N_{\Sigma F}^n$: l'effort normal dans la structure hyperstatique initiale de degré d'hyperstatiticé égal à n
- n_1^0 : l'effort normal dans cette même structure rendue isostatique de façon quelconque, dans laquelle l'effort unitaire est exercé dans la même direction que le déplacement recherché.

La déformation de la structure ci-dessus à l'itération k vaut donc :

$$\delta_k = 2 \frac{N_k n_k l_k}{EA} \quad (4-1)$$

Si on dimensionne l'élément sans prendre en compte le flambement : $A = N_k / \sigma$. La déformation de la structure peut alors s'écrire :

$$\delta_k = 2 \frac{\sigma}{E} n_k l_k \quad (4-2)$$

Où n_k est l'effort normal engendré par un effort unitaire appliqué sur la structure rendue isostatique :

$$n_k = \frac{1}{2 \sin \alpha} \quad (4-3)$$

Avec :

$$\sin \alpha = \frac{H - \delta}{l_k} \quad \text{où} \quad l_k = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + (H - \delta)^2} \quad (4-4)$$

En injectant (4-3) et (4-4) dans l'équation (4-2), on obtient :

$$\delta_k = \frac{\sigma}{E} \frac{\frac{L^2}{4} + (H - \delta)^2}{H - \delta}$$

Enfin, par la mise en évidence de H :

$$\frac{\delta_k}{H} = \frac{\sigma}{E} \frac{0.25 \left(\frac{L}{H}\right)^2 + \left(1 - \frac{\delta}{H}\right)^2}{1 - \frac{\delta}{H}} \quad (4-5)$$

Si H est grand par rapport à δ , tel que $\delta/H \rightarrow 0$, alors la structure se comporte linéairement. En effet, en négligeant δ/H , l'équation (4-5) peut s'écrire :

$$\frac{\delta}{H} = \frac{\sigma}{E} \left(0.25 \left(\frac{L}{H}\right)^2 + 1 \right)$$

En faisant apparaître l'indicateur de déplacement Δ :

$$\Delta = \frac{E\delta}{\sigma L} = 0.25 \frac{L}{H} + \frac{H}{L} = f\left(\frac{L}{H}\right) \quad (4-6)$$

On constate que l'indicateur de déplacement dépend uniquement de l'élanement. En prenant en compte le flambement, il fait alors intervenir l'indicateur de flambement Ψ et devient [8] :

$$\Delta = \frac{E\delta}{\sigma L} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi\right)$$

Cependant, lorsque la structure est non-linéaire, δ n'est plus négligeable par rapport H . L'équation (4-5) est donc implicite et peut être résolue numériquement :

$$\frac{\delta}{H} = f\left(\frac{L}{H}, \frac{\sigma}{E}\right)$$

Cette dernière équation peut s'exprimer de manière plus adéquate :

$$\frac{L}{\delta} = f\left(\frac{L}{H}, \frac{E}{\sigma}\right)$$

En prenant en compte le flambement via l'indicateur de flambement Ψ , l'expression ci-dessus devient :

$$\frac{L}{\delta} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}\right)$$

On introduit ainsi l'indicateur de déplacement non-linéaire L/δ . Il sera préféré à l'indicateur de déplacement Δ pour des raisons de lisibilité. Ce nouvel indicateur secondaire prend en considération l'effet de raideur de la structure sur le déplacement via l'indicateur de raideur du matériau E/σ .

L'indicateur de poids propre Φ permet d'intégrer, plus formellement, le poids propre de la structure au sein des charges. L'indicateur de déplacement L/δ devient alors :

$$\frac{L}{\delta} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi\right)$$

4.3.2.2 Indicateur de volume non-linéaire

Le volume de la structure étudiée peut s'écrire :

$$V = 2Al_0 \quad \text{où} \quad l_0 = \sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2 + H^2}$$

Si on dimensionne l'élément sans prendre en compte le flambement : $A = \frac{N_k}{\sigma} = \frac{F}{2\sigma \sin \alpha}$

En se rappelant de l'équation (4-4), le volume de la structure peut s'écrire :

$$V = \frac{F}{\sigma} \sqrt{\frac{\left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 + (H - \delta)^2\right] \cdot \left[\left(\frac{L}{2}\right)^2 + H^2\right]}{H - \delta}}$$

Enfin par la mise en évidence de H , on fait apparaître l'indicateur de volume :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = \frac{H}{L} \sqrt{\frac{\left[0.25 \left(\frac{L}{H}\right)^2 + \left(1 - \frac{\delta}{H}\right)^2\right] \cdot \left[0.25 \left(\frac{L}{H}\right)^2 + 1\right]}{1 - \frac{\delta}{H}}} \quad (4-7)$$

Si H est grand par rapport à δ , tel que $\delta/H \rightarrow 0$, alors la structure se comporte linéairement. En effet, en négligeant δ/H , l'équation (4-7) peut s'écrire :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = 0.25 \frac{L}{H} + \frac{H}{L} = f\left(\frac{L}{H}\right)$$

On constate que l'indicateur de volume dépend uniquement de l'élancement. En prenant en compte le flambement, il fait alors intervenir l'indicateur de flambement Ψ et devient [8] :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi\right)$$

Cependant, lorsque la structure est non-linéaire, δ n'est plus négligeable par rapport H . L'équation (4-7) s'écrit alors :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \frac{\delta}{H}\right)$$

Sachant que $\frac{\delta}{H}$ peut s'écrire de manière plus adéquate :

$$\frac{\delta}{H} = f\left(\frac{L}{H}, \frac{\sigma}{E}\right) \rightarrow \frac{L}{\delta} = f\left(\frac{L}{H}, \frac{E}{\sigma}\right)$$

On peut écrire :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \frac{E}{\sigma}\right)$$

En prenant en compte le flambement via l'indicateur de flambement Ψ , l'expression ci-dessus devient :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}\right)$$

L'indicateur de volume non-linéaire W prend également en considération l'effet de raideur de la structure sur le volume via l'indicateur de raideur E/σ .

L'indicateur de poids propre Φ permet d'intégrer, plus formellement, le poids propre de la structure au sein des charges. L'indicateur de volume W devient alors :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi\right)$$

4.3.3 Prise en compte de la précontrainte dans l'optimisation de la structure

La théorie des indicateurs morphologiques vient d'être étendue aux structures 3D, hyperstatiques et non-linéaires. Cependant, les structures de tenségrité sont des structures précontraintes. Il faut alors vérifier que la théorie reste valable pour des structures 3D, hyperstatiques, non-linéaires et précontraintes.

Pour une structure de tenségrité donnée, il existe plusieurs scénarios possibles d'application de la précontrainte permettant de tendre tous les câbles. L'un d'entre eux consiste à comprimer toutes les barres de la structure (cfr §4.1.2).

La précontrainte est appliquée à la structure comme une part $j(F/n)$ de la charge externe F (cfr §4.1.2.3), et peut être considérée comme une charge externe également. La théorie des indicateurs morphologiques non-linéaires reste donc valable si la structure est précontrainte.

Ainsi, 2 structures différentes, dimensionnées suivant la même méthode (cfr §4.2.4) et avec les mêmes nombres adimensionnels $(L/H, \Psi, E/\sigma, \Phi)$, auront besoin du même nombre d'itérations j pour tendre tous les câbles. Cela signifie également que les 2 structures auront les mêmes valeurs d'indicateurs de déplacement L/δ et de volume W .

4.3.3.1 Indicateur de précontrainte

La répartition des efforts internes dans une structure de tenségrité de même typologie dépend ainsi uniquement des nombres adimensionnels $L/H, \Psi, E/\sigma, \Phi$. La même quantité de précontrainte doit donc s'appliquer dans les structures partageant ces 4 nombres adimensionnels de manière à tendre tous les câbles.

Pour étudier la précontrainte à introduire dans les structures de tenségrité, Jonas FERON a introduit un 3^{ème} indicateur morphologique secondaire au cours de son mémoire [3]. Il l'a baptisé l'indicateur de précontrainte P/F . Celui-ci représente la pré compression P à introduire dans toutes les barres afin que tous les câbles soient tendus après l'application des charges externes totales F sur la structure.

Cet indicateur dépend logiquement des mêmes nombres adimensionnels $L/H, \Psi, E/\sigma$:

$$\frac{P}{F} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}\right)$$

En prenant en compte l'indicateur de poids propre Φ , l'indicateur de précontrainte devient :

$$\frac{P}{F} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi\right)$$

4.3.4 Exemples et confirmations numériques

Pour confirmer numériquement la validité de ces indicateurs morphologiques non-linéaires, considérons une structure de tensegrité hyperstatique ($I_s = 1$) composée de 4 simplex ($S = 4$), de portée L , de hauteur H et soumise à une charge externe uniformément répartie F . Le poids propre est désormais pris en compte dans l'optimisation afin de s'assurer que la théorie fonctionne également avec l'indicateur de poids propre Φ .

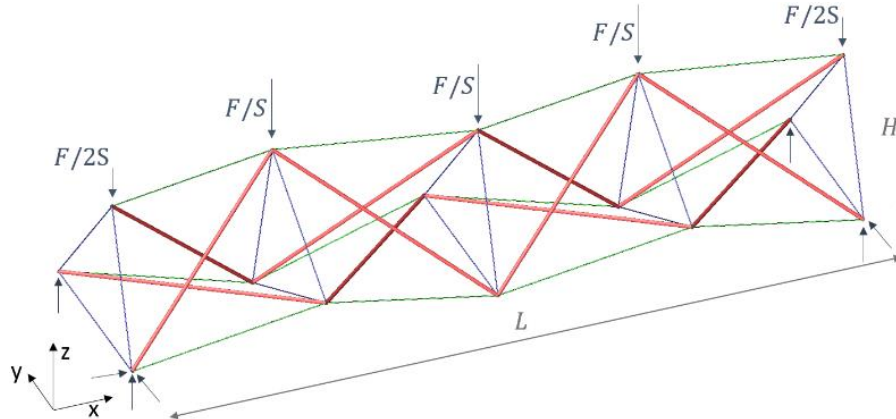


FIGURE 4.15 – STRUCTURE DE TENSEGRITÉ COMPOSÉE DE SIMPLEX : $S = 4, I_s = 1$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

La structure est précontrainte en appliquant une pré compression dans chaque barre (cfr §4.1.2) et les sections sont déterminées grâce à l'optimisation des sections selon la méthode « *Sections câbles bases/câbles longitudinaux/barres* » (cfr §4.2.3.2).

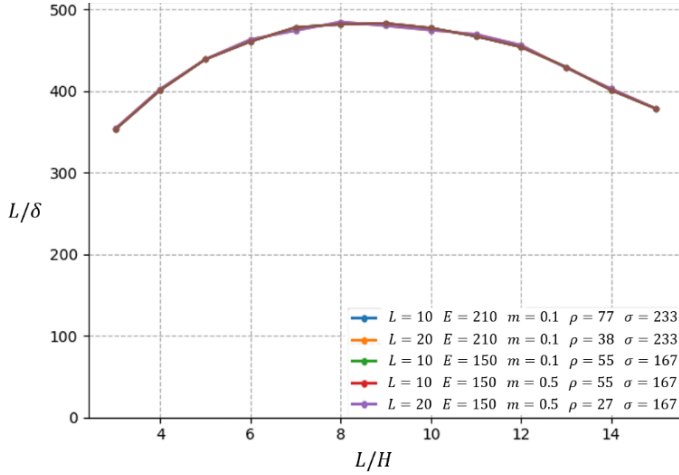
Plusieurs configurations sont étudiées afin de confirmer la théorie des indicateurs morphologiques. Les indicateurs morphologiques primaires sont donc fixés et déterminent les paramètres restants :

- La hauteur H est déterminée par l'élancement L/H . Pour rappel (cfr §2.2.3.1), la largeur D est imposée par la hauteur H de la structure et n'est donc pas un paramètre ;
- La charge externe F est déterminée par l'indicateur de flambement Ψ . Lorsque la structure est insensible au flambement ($\Psi = 0$), la charge est choisie arbitrairement. Lorsque le flambement est pris en compte dans l'optimisation, la charge n'est plus un paramètre de base de la structure. En effet, elle est imposée par l'indicateur de flambement : $F = (\mu\sigma L)^2 / (qE\Psi^2)$. Dans cette équation, q est le facteur de forme des sections. Il dépend uniquement du paramètre m et de la forme des sections. Il est déterminé grâce à la Figure 2.8 ;
- La contrainte admissible du matériau σ est déterminée par l'indicateur de raideur E/σ . Dans le cas d'un acier S235 travaillant à la limite d'élasticité, l'indicateur de raideur est imposé à $E/\sigma = \frac{210.10^3}{235} = 893,6 \approx 900$;
- Une fois que le matériau est fixé, la portée de la structure est imposée par la valeur de l'indicateur de poids propre : $L = (\Phi \sigma) / \rho$.

Si l'indicateur de flambement vaut $\Psi = 30$ et l'indicateur de poids propre est choisi égal à $\Phi = 33 \times 10^{-4}$, on peut obtenir les résultats suivants :

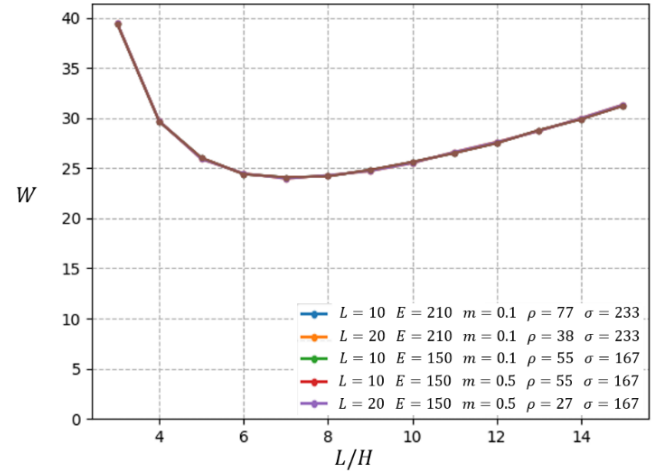
INDICATEUR DE DÉPLACEMENT

$$\frac{L}{\delta} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi = 30, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 33 \times 10^{-4}\right)$$



INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi = 30, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 33 \times 10^{-4}\right)$$



INDICATEUR DE PRÉCONTRAINTE

$$\frac{P}{F} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi = 30, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 33 \times 10^{-4}\right)$$

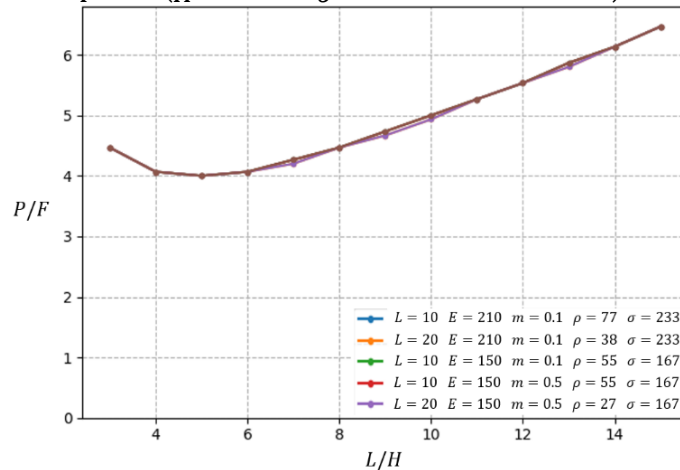


FIGURE 4.16 – INDICATEURS MORPHOLOGIQUES DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE SIMPLEX : $S = 4$, $E/\sigma = 900$, $\Psi = 30$, $\Phi = 33 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

On remarque que plusieurs configurations – pour l'élanement $L/H = 7, 9, 13$ – n'ont pas convergé vers la même valeur de précontrainte P/F . Cela résulte de l'imprécision numérique de la méthode de précontrainte par incrément. En effet, pour ces configurations, un incrément de précontrainte en moins a été nécessaire pour tendre tous les câbles. Cependant, l'incrément de précontrainte est suffisamment faible pour que les indicateurs de déplacement et de volume soient peu affectés.

On peut donc considérer que les indicateurs morphologiques sont indépendants des paramètres de la structure. Ceci confirme numériquement la théorie des indicateurs morphologiques étendue aux structures 3D, hyperstatiques, non-linéaires et précontraintes.

Insistons sur le fait qu'on vient également de prouver numériquement que la théorie fonctionne correctement lorsque l'on prend en compte le poids propre dans l'optimisation grâce à l'ajout de l'indicateur de poids propre Φ !

4.3.5 Conclusion de l'optimisation de la structure

La théorie des indicateurs morphologiques est finalement étendue aux structures 3D, hyperstatiques, non-linéaires et précontraintes. Elle va permettre de trouver la structure de tenségrité optimale répondant aux critères suivants :

$$\begin{cases} \min(W) = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi\right) \\ \frac{L}{\delta} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi\right) \geq 500 \\ \frac{P}{F} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi\right) < 50 \end{cases}$$

Ces nombres adimensionnels vont ainsi permettre de tirer des conclusions sur toutes les configurations de structures possibles en étudiant seulement un échantillon de ces structures. Cependant, on remarque que ce puissant outil perd en efficacité dans le cas de structures non-linéaires et précontraintes. En effet, la théorie des indicateurs morphologiques non-linéaires a été étendue par l'ajout d'un facteur de dépendance E/σ . De plus, la précontrainte rend les structures de tenségrité relativement massives. Il devient donc essentiel de prendre en compte l'indicateur de poids propre Φ .

4.3.5.1 Limitation du poids propre

Les structures de tenségrité sont très volumineuses, de telle façon que le poids propre ρV peut dépasser largement la charge extérieure totale F . En pratique, il n'est pas très pertinent de réaliser une passerelle reprenant essentiellement son propre poids. C'est pourquoi un critère pour limiter le poids propre a été imaginé :

$$\rho V < 3F$$

Le poids propre de la structure doit rester inférieur à 3 fois la charge extérieure F . Ce critère, purement arbitraire, permet de se rendre compte de l'efficacité matérielle de certaines structures.

Afin de réaliser une étude complète, plusieurs approches seront analysées au cours de l'optimisation :

1. Sans la prise en compte du poids propre, tel quel $\Phi = 0$
2. Avec la prise en compte du poids propre :
 - 2.1. Sans le critère de limitation du poids propre
 - 2.2. Avec le critère de limitation du poids propre : $\rho V < 3F$

Lorsque le critère de limitation du poids propre sera appliqué, les structures avec un poids propre trop important ($\rho V \geq 3F$) seront considérées comme irréalisables.

4.3.5.2 Indicateur d'efficacité matérielle

Afin d'étudier plus facilement l'importance du poids propre des structures de tenségrité, un 4^{ème} indicateur morphologique secondaire a été ajouté aux côtés de l'indicateur de déplacement L/δ , de volume W et de précontrainte P/F . Il a été introduit par Pierre LATTEUR dans sa thèse de doctorat [8]. Ce nouvel indicateur peut être nommé « l'indicateur de pourcentage de poids propre » ou encore « l'indicateur d'efficacité matérielle ».

L'indicateur d'efficacité matérielle $\rho V/F$ représente ainsi le pourcentage de poids propre d'une structure par rapport aux charges extérieures F .

En d'autres termes, au plus cet indicateur est important, au plus le poids propre de la structure est prépondérant face au chargement externe. La structure aura alors tendance à reprendre essentiellement son propre poids et aura peu d'efficacité matérielle.

Cet indicateur peut être obtenu à partir de l'indicateur de volume W lorsque l'on prend en compte le poids volumique ρ du matériau :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} \rightarrow \frac{\rho V}{F} = \frac{\rho W L}{\sigma} = W \Phi$$

Il s'agit en fait de l'indicateur de volume W multiplié par l'indicateur de poids propre Φ . Il est donc linéairement proportionnel à l'indicateur de volume.

Il dépend logiquement des mêmes nombres adimensionnels $L/H, \Psi, E/\sigma, \Phi$:

$$\frac{\rho V}{F} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi\right)$$

Reprenons la structure de tensegrité composée de 4 simplex (cfr Figure 4.15), mais en prenant en compte le poids propre via différentes valeurs de Φ . On obtient les résultats suivants :

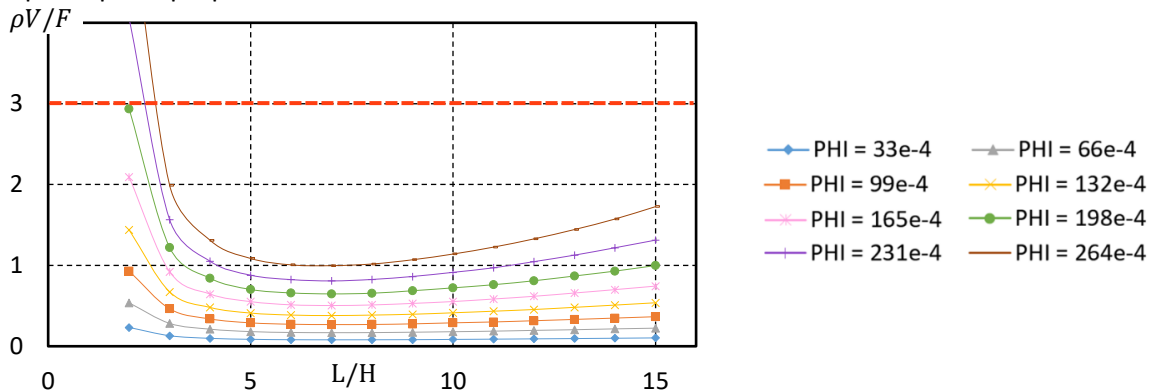


FIGURE 4.17 – INDICATEUR DE POURCENTAGE DE POIDS PROPRE DE STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE SIMPLEX :
 $S = 4, E/\sigma = 900, \Psi = 30, \Phi = 33 \times 10^{-4} - 264 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

N.B. La ligne en pointillée rouge représente le critère de limitation du poids propre $\rho V/F < 3$.

L'importance du poids propre augmente rapidement avec l'indicateur de poids propre. En effet, multiplié par 2 l'indicateur de poids propre revient à multiplier le poids propre de la structure par un facteur supérieur à 2. Les structures de tensegrité de grande portée auront donc tendance à reprendre essentiellement leur poids propre.

4.4 Optimisation complète d'une structure de tensegrité

L'optimisation d'une structure de tensegrité est un processus long et fastidieux. Pour étudier ces structures, un programme a été développé dans le langage *Python*. Il s'agit d'un outil numérique très complet basé sur le calcul non-linéaire et intégrant les différentes méthodes d'optimisation. Pour bien comprendre son fonctionnement général, il semble intéressant de détailler les différentes étapes de la procédure d'optimisation d'une structure de tensegrité quelconque.

Le calcul d'une seule structure de tensegrité prend un certain temps. C'est pourquoi plusieurs astuces numériques ont été utilisées en vue de réduire le plus possible le temps de calcul. Les résultats qui seront présentés ultérieurement sont ainsi l'aboutissement de plusieurs semaines de calculs par ordinateur et sur plusieurs ordinateurs simultanément.

4.4.1 Procédure générale

L'algorithme d'optimisation développé pour étudier une structure de tensegrité peut être résumé de la façon suivante (voir Figure 4.18) :

A. Initialisation de la structure

Tout d'abord, plusieurs paramètres initiaux sont fixés afin de définir le matériau de la structure. Pour simplifier l'optimisation, le même matériau est utilisé pour les barres et les câbles (cfr §2.2.2). On fixe

ainsi, une fois pour toute, le module d'élasticité E et la contrainte admissible σ du matériau choisi. Dans le cas d'un acier S235, on a $E = 210 [GPa]$ et $\sigma = 235 [MPa]$.

On pose ensuite la valeur de l'indicateur de poids propre Φ . Dans le cas d'un acier de masse volumique égale à $7850 [kg/m^3]$, le poids volumique vaut $\rho = 77008,5 \approx 77 \times 10^3 [N/m^3]$. La longueur de la structure L est ainsi imposée par la valeur de l'indicateur de poids propre :

$$\Phi = \frac{\rho L}{\sigma} = \text{fixé} \rightarrow L = \frac{\Phi \sigma}{\rho}$$

L'indicateur de flambement Ψ de la structure est également fixé. Le facteur de forme q et la charge externe totale F sont ainsi choisis arbitrairement de façon à respecter : $\sigma L / \sqrt{qEF} = \Psi$.

On considère une structure composée de S modules de tenségrité. La typologie de la structure est donc fixée.

B. Optimisation

Une fois les paramètres initiaux de la structure fixés, il reste à choisir une valeur de l'indicateur de l'élanement L/H . On peut alors définir la géométrie de la structure ainsi que les conditions d'appuis, et la répartition des charges externes sur les nœuds de la structure. Les sections initiales A_0 des éléments sont posées arbitrairement.

Le processus d'optimisation peut enfin débuter. L'optimisation complète d'une structure de tenségrité est basée sur l'optimisation de la précontrainte, des sections et de la structure (voir Figure 4.18).

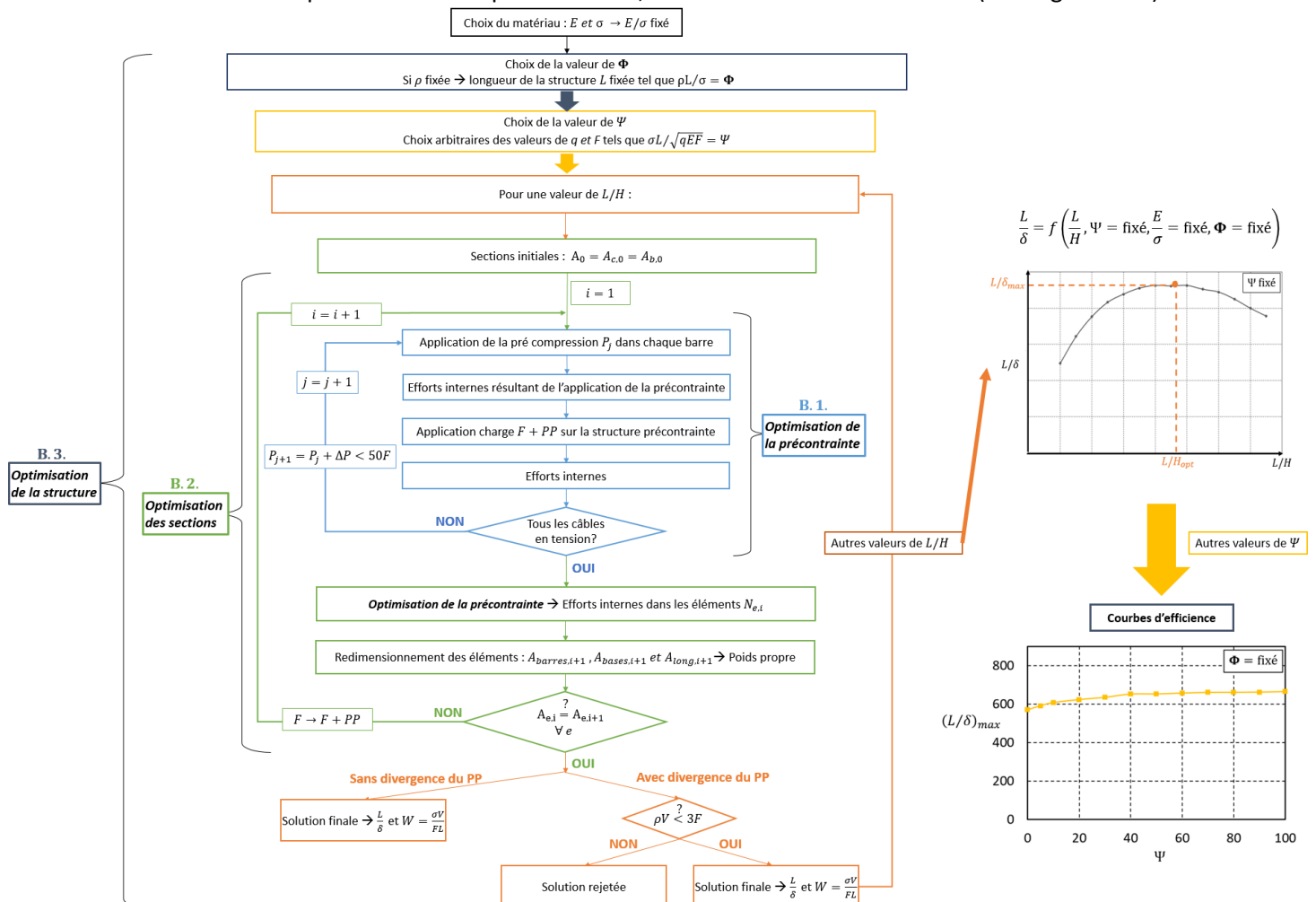


FIGURE 4.18 – ALGORITHME D'OPTIMISATION D'UNE STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

B.1. Optimisation de la précontrainte

L'optimisation de la précontrainte est réalisée suivant la méthode d'optimisation de la précontrainte développée pour les structures de tenségrité (cfr §4.1.2). Pour rappel, le processus itératif consiste à augmenter la précompression P introduite dans chaque barre par incréments de précontrainte $\Delta P = F/n$, avec n à définir suivant la structure étudiée et la précision recherchée (typiquement égal à 10), jusqu'à ce que tous les câbles soient tendus après l'application de la charge externe F et du poids propre.

Pour réduire le nombre d'itérations, et donc le temps de calcul, plusieurs astuces numériques ont été utilisées. Tout d'abord, il n'est pas nécessaire de recommencer depuis le début l'optimisation de la précontrainte à chaque itération i des sections. En effet, après plusieurs itérations des sections, on commence à se rapprocher des dimensions finales de la structure et donc de la précontrainte P . Il est ainsi préférable de recommencer l'optimisation à partir d'une précontrainte proche de celle obtenue à l'itération précédente.

Pour une structure de configuration fixée ($L/H, E/\sigma, \Phi$), plus sa sensibilité au flambement augmente, plus elle doit être précontrainte (voir Figure 4.19). Ainsi, pour une valeur Ψ , si l'optimisation de la précontrainte ne respecte pas le critère $P < 50F$, alors les structures de même configuration, mais avec un indicateur de flambement Ψ supérieur, ne respecteront pas non plus ce critère et leurs calculs pourront donc être omis car ces structures seront également considérées comme irréalisables.

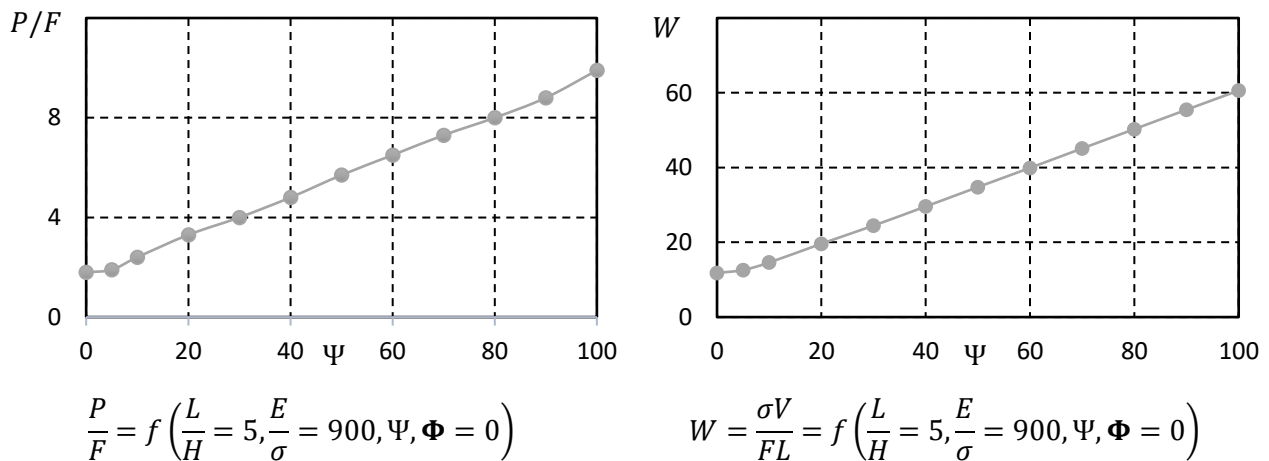


FIGURE 4.19 – EXEMPLE D'INDICATEUR DE PRÉCONTRAINTE ET DE VOLUME POUR UNE STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ AVEC $L/H = \text{fixé}$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

B.2. Optimisation des sections

L'optimisation des sections est réalisée suivant la méthode « Sections câbles bases/câbles longitudinaux/barres » (cfr §4.2.3). A chaque itération i , la précontrainte est optimisée, les éléments sont redimensionnés et le poids propre est recalculé jusqu'à atteindre convergence.

Pour une structure de configuration fixée ($L/H, E/\sigma, \Phi$), plus sa sensibilité au flambement augmente, plus elle est précontrainte et donc plus son volume augmente (voir Figure 4.19). Ainsi, pour une valeur Ψ , si l'optimisation des sections mène à une structure ne respectant pas le critère de limitation du poids propre $\rho V < 3F$ (cfr §4.3.5.1), alors l'ensemble des structures de même configuration mais avec un indicateur de flambement Ψ supérieur ne respecteront pas non plus ce critère.

Lorsque le critère de limitation du poids propre n'est pas appliqué, le poids propre des structures peut augmenter tant que le critère de précontrainte $P < 50F$ est respecté.

B.3. Optimisation de la structure

Une fois la structure optimisée, on peut calculer les indicateurs morphologiques de la configuration étudiée : L/δ et W . En répétant ce processus pour plusieurs valeurs de L/H (par exemple pour $L/H = 2 \dots 15$), on obtient les courbes suivantes : $\frac{L}{\delta} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi = \text{fixé}, \frac{E}{\sigma} = \text{fixé}, \Phi = \text{fixé}\right)$ et $W = f\left(\frac{L}{H}, \Psi = \text{fixé}, \frac{E}{\sigma} = \text{fixé}, \Phi = \text{fixé}\right)$.

En répétant cet algorithme pour différentes valeurs de Ψ , de 0 à 100, on obtient les courbes d'efficacité de l'indicateur de déplacement et de l'indicateur de volume (cfr §2.2.3.1). Pour cela, il suffit de sélectionner, pour chaque valeur de Ψ , le point $(L/H)_{opt}$ qui maximise $(L/\delta)_{max}$ et celui qui minimise W_{min} . Pour des valeurs de Ψ supérieures à 100, les structures deviennent incontestablement trop massives et peu efficaces. Elles ne seront donc pas étudiées.

Pour étudier l'influence de la portée L des structures, on peut également faire varier l'indicateur de poids propre Φ . Lorsque le poids propre est pris en compte, on étudiera des valeurs de Φ comprises entre 33×10^{-4} et 333×10^{-4} , ce qui correspond à des structures en acier S235 avec des portées allant de $L = 10 [m]$ à $L = 100 [m]$. Les courbes d'efficacité seront ainsi calculées pour chaque valeur de Φ .

Pour étudier les différentes typologies d'une structure, on fera également varier le nombre de modules de tensegrité S composant la structure, de $S = 2$ à $S = 10$.

Ce long processus sera utilisé pour étudier les différentes structures de tensegrité qui seront présentées au chapitre suivant (cfr Chapitre 5). Les résultats seront présentés au Chapitre 6.

Chapitre 5 : Présentation des modules de tensegrité pour les passerelles

Les possibilités d'application de la tensegrité sont très vastes mais, pour la plupart, restent de l'ordre de l'utopie, fautes d'avancées technologiques [10]. Ce concept novateur a suscité l'intérêt de nombreux chercheurs de différents horizons. Les domaines sont en effet très variés : la biomécanique et la thérapeutique, l'aéronautique, les mathématiques et le génie civil [12]. Ce dernier domaine est celui auquel on s'intéresse depuis ces 4 dernières années à travers les différents mémoires réalisés. Plus précisément, ces travaux se sont portés sur la réalisation d'une passerelle de tensegrité.

Au cours des trois premiers mémoires, les différents auteurs se sont concentrés uniquement sur l'étude de passerelles de tensegrité composées de simplex. Cependant, existe-il d'autres modules de tensegrité pouvant être utilisés comme structure portante pour une passerelle ?

Ce chapitre présente différents modules de tensegrité avec lesquels on pourrait imaginer concevoir une passerelle. Une attention toute particulière sera portée sur leur géométrie. On s'intéressera également à la hauteur de passage disponible au sein de la passerelle pour les usagers. Ces modules seront ensuite étudiés dans le Chapitre 6.

5.1 Les passerelles de tensegrité

L'aboutissement de ce long travail de recherche est arrivé à la conclusion suivante : les passerelles de tensegrité sont réalisables. Leur faisabilité a été démontrée grâce à la théorie des indicateurs morphologiques. Ces indicateurs morphologiques permettent ainsi de pré dimensionner des passerelles de tensegrité en vue d'optimiser les déformations ou le volume de matière. Ils permettent également de comparer quantitativement des typologies de structures différentes et justifier, ou du moins comparer, le choix d'une solution basée sur le concept de tensegrité par rapport à un autre.

Cependant, jusqu'à présent, toutes les conclusions sur la faisabilité et l'efficacité des passerelles de tensegrité se sont basées uniquement sur les résultats obtenus sur des structures de tensegrité composées de simplex. Cependant, il existe une multitude d'autres modules de tensegrité avec lesquels on pourrait imaginer concevoir une passerelle.

En effet, rien nous prouve que le simplex est le système de tensegrité le plus efficace pour la conception d'une passerelle. Il serait alors intéressant de comparer les différents modules de tensegrité entre eux. La théorie des indicateurs morphologiques semble être l'outil idéal pour réaliser cette étude. En effet, ayant été démontrée pour des structures 3D, non-linéaires et précontraintes, cette théorie reste valable quel que soit le système de tensegrité.

5.2 Modules de tensegrité dans la conception d'une passerelle

Pour qu'une structure de tensegrité soit utilisée comme structure portante pour une passerelle, il faut qu'un tablier puisse passer au sein de la structure. Il est également nécessaire que ce tablier puisse être suspendu aux nœuds de la structure, en ne reposant pas sur les barres, afin d'éviter tout phénomène de flexion. De nombreux modules élémentaires pourraient ainsi être capables d'accueillir une passerelle.

Cependant, la complexité de certains modules rend la réalisation d'une potentielle passerelle beaucoup trop compliquée, voir irréalisable. En effet, le prochain grand défi est la construction même d'une structure de tensegrité, et indirectement sa méthodologie de mise en œuvre, de montage, de mise en précontrainte, etc. Ainsi, après de nombreuses recherches, seuls les modules qui paraissaient les plus réalistes ont été retenus et seront étudiés.

Il est également important de noter que la géométrie des modules doit être suffisamment symétrique pour que les nœuds de la structure soient déterminés à partir de la longueur L et de la hauteur H de la structure. En effet, pour pouvoir étudier efficacement ces modules sur base des indicateurs morphologiques, il faut que leur géométrie générale ne dépende que de l'élanement L/H . C'est pourquoi, la largeur des structures D ne doit pas être un paramètre de l'optimisation. Elle doit être imposée par la hauteur H de la structure. Certaines simplifications seront donc faites de manière à obtenir cette symétrie recherchée.

Au total, 5 nouveaux modules de tensegrité seront considérés :

- Le quadruplex ;
- Le pentaplex ;
- L'hexaplex ;
- Les anneaux de tensegrité ;
- Le module dérivé de Richard FULLER.

Les trois premiers modules sont des systèmes de tensegrité prismatiques comme le simplex. Pour ces modules, plusieurs orientations du système seront envisagées. Pour rappel, les polygones composant les bases des modules prismatiques sont réguliers.

Les passerelles seront composées d'une succession de modules identiques. Dans le cas des modules prismatiques, les cellules seront assemblées par empilement alterné (cfr §1.3.2).

N.B. Le module dérivé de Richard FULLER n'a pas abouti à des résultats concluants et son étude a finalement été abandonnée. Il s'agit d'un bon exemple illustrant les limites de la méthode d'optimisation utilisée. En effet, on verra, dans le chapitre suivant, que le problème intrinsèque de ce module est intimement lié à la méthode de précontrainte (cfr §6.9.2).

5.2.1 État d'autocontrainte des modules de tensegrité

Pour qu'une structure soit considérée comme un système de tensegrité en tant que tel, il faut qu'elle corresponde à la définition de la tensegrité (cfr §1.2). Pour cela, le système doit donc être en état d'autocontrainte et en équilibre stable.

Dans le cas des modules prismatiques, cet état d'auto-équilibre stable est assuré par un angle de rotation entre les bases polygonales supérieures et inférieures. En 1976, Hugh KENNER affirma que cet angle de rotation α dépendait uniquement du nombre de barres n_b du module prismatique, et pouvait être obtenu par la formule suivante [13] :

$$\alpha = 90^\circ - \frac{180^\circ}{n_b} \quad (5-1)$$

5.2.1.1 Le simplexe

Dans le cas d'un simplexe (cfr §1.4), on a $n_b = 3 : \alpha = 90^\circ - \frac{180^\circ}{3} = 30^\circ$.

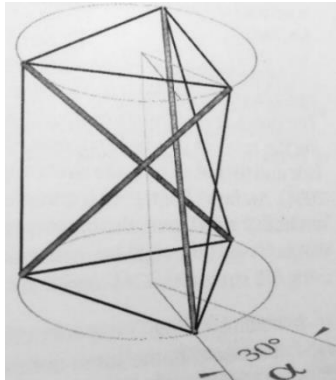


FIGURE 5.1 – ANGLE DE ROTATION α POUR UN SIMPLEX [13]

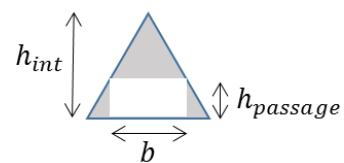
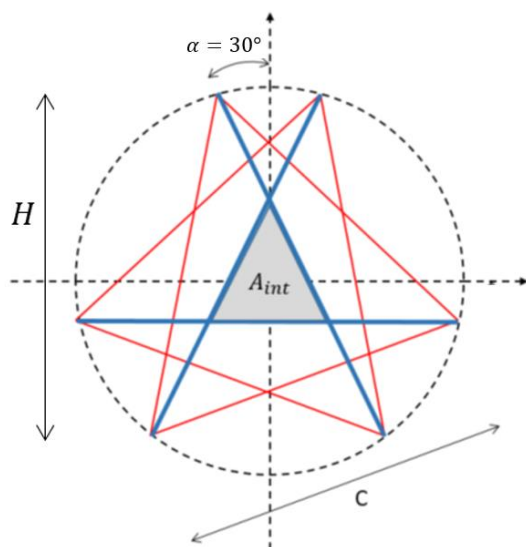
Si on considère une passerelle de tenségrité composée d'une succession de simplexe avec un tablier rectiligne de largeur b :



FIGURE 5.2 – PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE D'UNE SUCCESSION DE SIMPLEX [1]

Afin que la passerelle soit praticable, une hauteur minimale de passage est nécessaire pour que les promeneurs puissent se déplacer sans être gênés par les éléments de la structure.

La hauteur de passage disponible au sein de la passerelle s'obtient grâce aux relations géométriques :



$$h_{\text{passage}} = h_{\text{int}} - \frac{b}{2} \tan 60^\circ$$

$$h_{\text{int}} = \sqrt{A_{\text{int}} \sqrt{3}}$$

$$A_{\text{int}} = \sqrt{3} \frac{L^2}{\chi^2} \sin^2 \left(30^\circ - \frac{\alpha}{2} \right)$$

$$\chi = \frac{L}{C} = \frac{\sqrt{3} L}{3 H} \left(\cos \left(\frac{\alpha}{2} \right) + \cos \left(60^\circ - \frac{\alpha}{2} \right) \right)$$

FIGURE 5.3 – HAUTEUR DE PASSAGE D'UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE SIMPLEX [1]

5.2.2 Le quadruplex

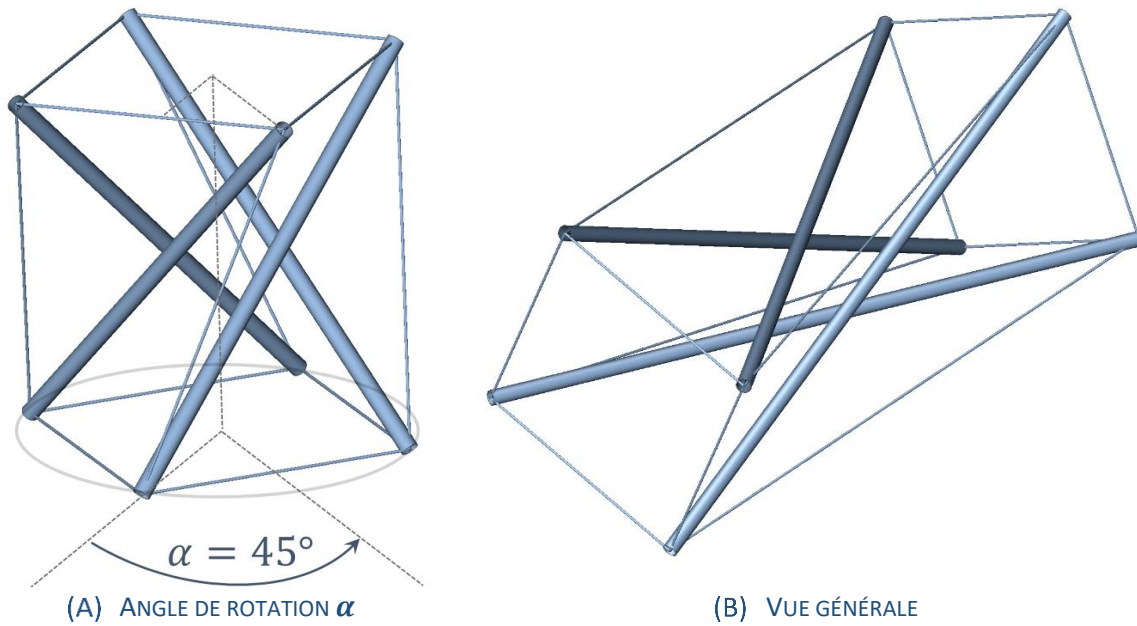


FIGURE 5.4 – QUADRUPLIX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Le quadruplex est un module élémentaire prismatique. Ses bases sont carrées, et il se compose de 4 barres en compression et 12 câbles en tension. D'après la formule (5-1), l'angle de rotation α des 2 bases, nécessaire pour obtenir un état d'auto-équilibre stable, est de :

$$\alpha = 90^\circ - \frac{180^\circ}{4} = 45^\circ$$

Il est tout à fait envisageable de faire passer une passerelle au sein de cette structure. On pourrait considérer deux orientations possibles du module :

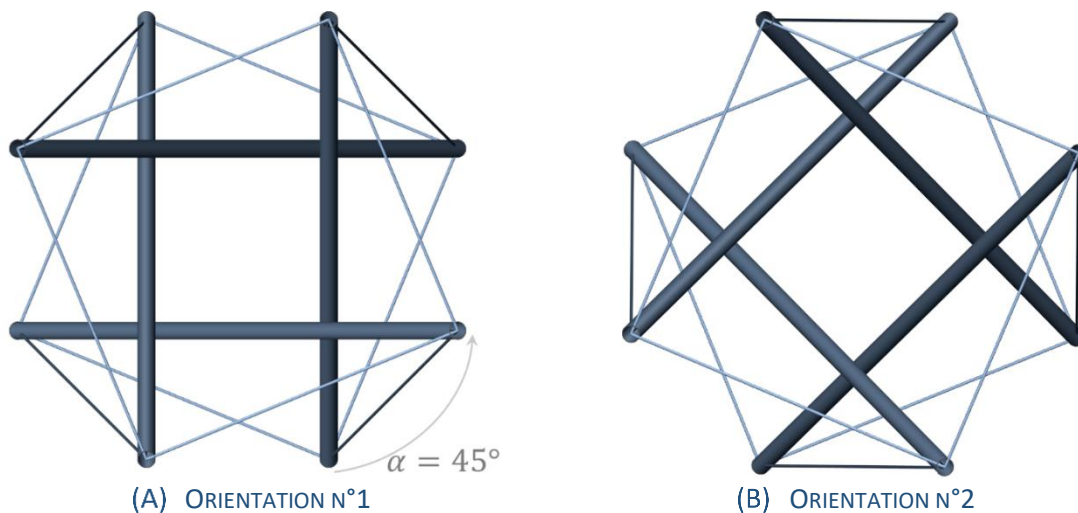


FIGURE 5.5 – ORIENTATIONS DU QUADRUPLIX - VUE TRANSVERSALE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Parmi les deux dispositions, la première semble plus appropriée à la conception d'une passerelle. En effet, elle assure une hauteur de passage plus grande sans être gênée par des éléments de la structure. Les deux possibilités seront néanmoins étudiées.

En ce qui concerne le tablier de la passerelle, il sera suspendu aux nœuds supérieurs. Il est intéressant de noter que pour la première orientation, les câbles pour suspendre un tablier rectiligne ne peuvent pas être verticaux (voir Figure 5.5). Le tablier induira ainsi des charges externes inclinées.

5.2.2.1 Géométrie générale

La position des nœuds des deux orientations du quadruplex est identique. Seul l'agencement des éléments du module est différent (voir Figure 5.5). Nous allons donc nous concentrer uniquement sur l'orientation n°1 pour analyser la géométrie générale d'un quadruplex.

Soit un quadruplex suivant l'orientation n°1 avec une hauteur H et une longueur l :

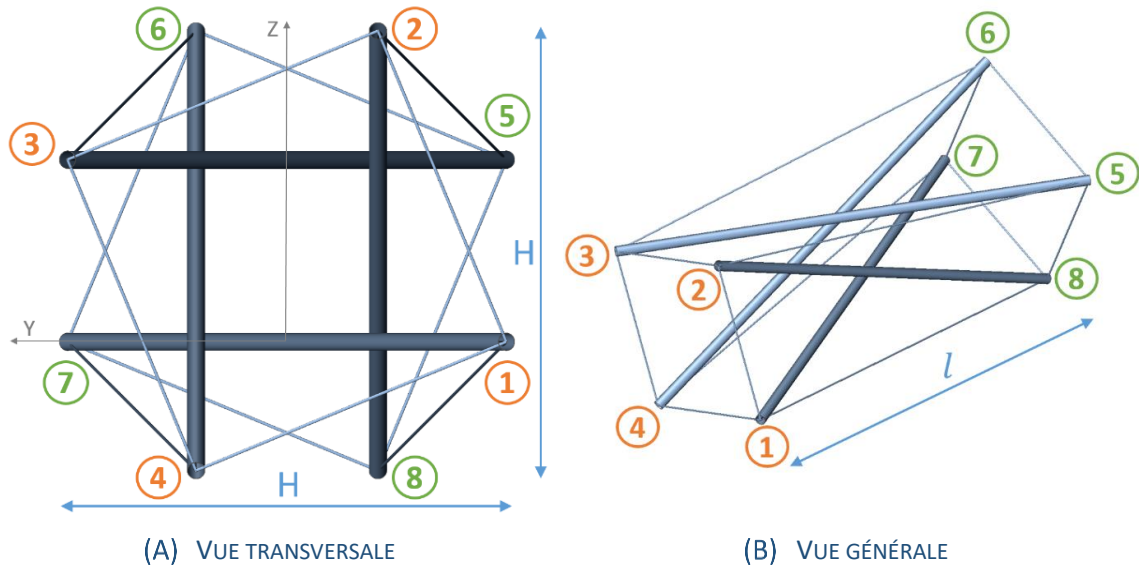


FIGURE 5.6 – GÉOMÉTRIE D'UN QUADRUPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

La géométrie régulière des bases du quadruplex impose automatiquement la largeur égale à la hauteur H . Elle ne sera donc pas paramètre de la géométrie.

Si on considère le repère global ci-dessus (voir Figure 5.6), les coordonnées des 8 nœuds sont les suivantes :

Nœud n°	X	Y	Z
1	0	$-H/2$	0
2	0	$-\frac{H}{2} \tan\left(\frac{45^\circ}{2}\right)$	$\frac{H}{2} \left(1 + \tan\left(\frac{45^\circ}{2}\right)\right)$
3	0	$H/2$	$H \tan\left(\frac{45^\circ}{2}\right)$
4	0	$\frac{H}{2} \tan\left(\frac{45^\circ}{2}\right)$	$-\frac{H}{2} \left(1 - \tan\left(\frac{45^\circ}{2}\right)\right)$
5	l	$-H/2$	$H \tan\left(\frac{45^\circ}{2}\right)$
6	l	$\frac{H}{2} \tan\left(\frac{45^\circ}{2}\right)$	$\frac{H}{2} \left(1 + \tan\left(\frac{45^\circ}{2}\right)\right)$
7	l	$H/2$	0
8	l	$-\frac{H}{2} \tan\left(\frac{45^\circ}{2}\right)$	$-\frac{H}{2} \left(1 - \tan\left(\frac{45^\circ}{2}\right)\right)$

Illustrons ce nouveau module par un exemple. Soit une passerelle de tenségrité composée d'une succession de 4 quadruplex suivant l'orientation n°1 :

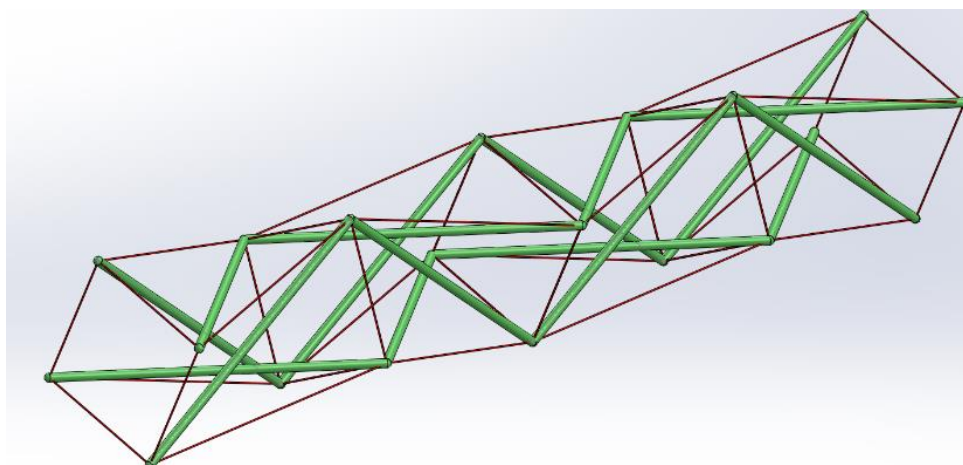
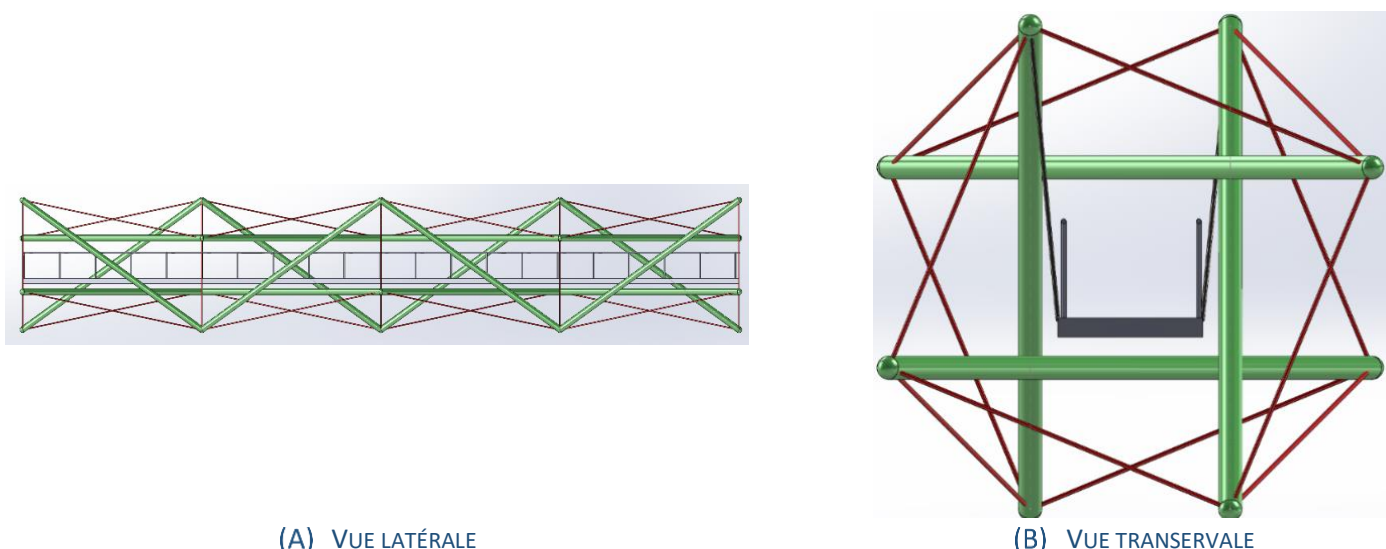


FIGURE 5.7 – EXEMPLE DE STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE 4 QUADRUPLEX SUIVANT L'ORIENTATION N°1 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Dans ce cas, le tablier de la passerelle pourrait être suspendu en alternance aux nœuds supérieurs :



(A) VUE LATÉRALE

(B) VUE TRANSVERALE

FIGURE 5.8 – PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE 4 QUADRUPLEX SUIVANT L'ORIENTATION N°1 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Comme mentionné précédemment, les câbles de suspension du tablier ne sont pas verticaux lorsque le tablier est rectiligne. Cette inclinaison induit des charges externes inclinées s'appliquant aux nœuds d'accrochage du tablier.

5.2.2.2 Hauteur de passage au sein de la structure

Afin que la passerelle soit praticable, une hauteur minimale de passage est nécessaire pour que les promeneurs puissent se déplacer sans être gênés par les éléments de la structure.

La hauteur de passage disponible au sein d'une passerelle composée d'une succession de quadruplex n°1 (voir Figure 5.8) s'obtient grâce à la relation géométrique :

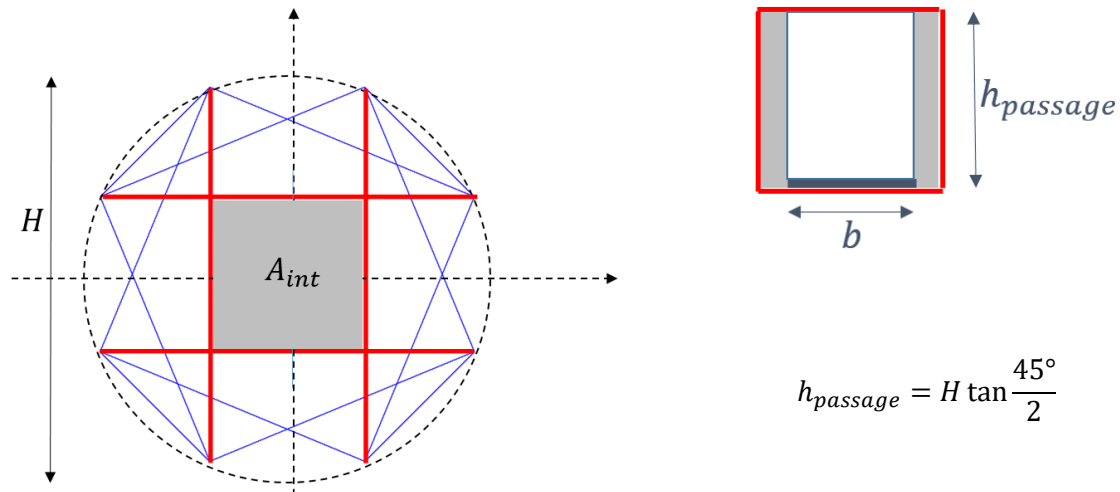


FIGURE 5.9 – HAUTEUR DE PASSAGE D'UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE QUADRUPLEX N°1
[ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Dans le cas d'une passerelle composée d'une succession de quadruplex n°2, la hauteur de passage disponible s'obtient grâce aux relations géométriques suivantes :

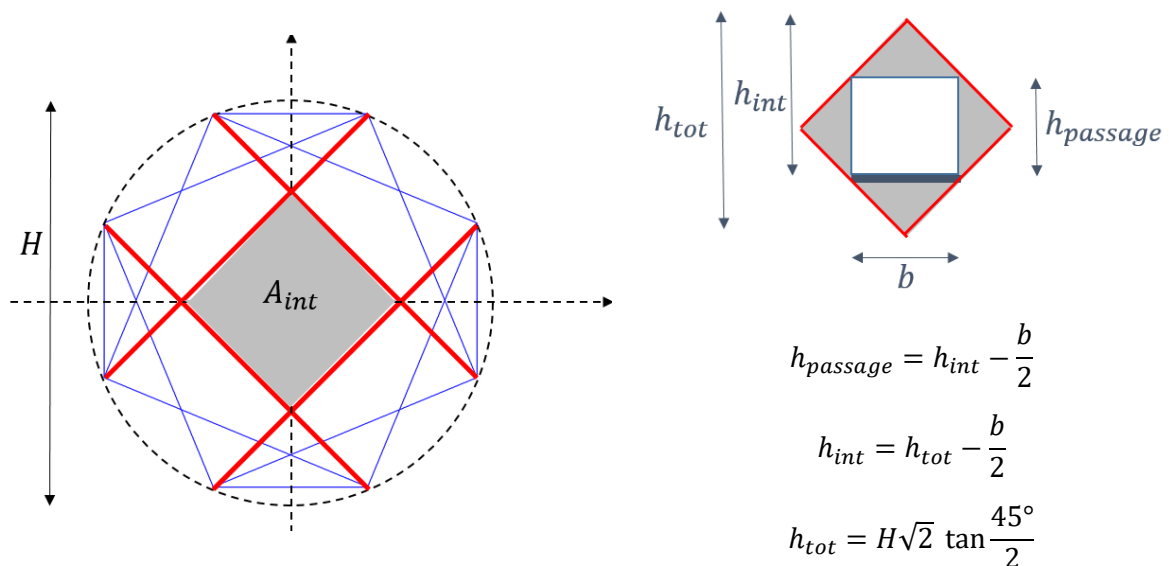
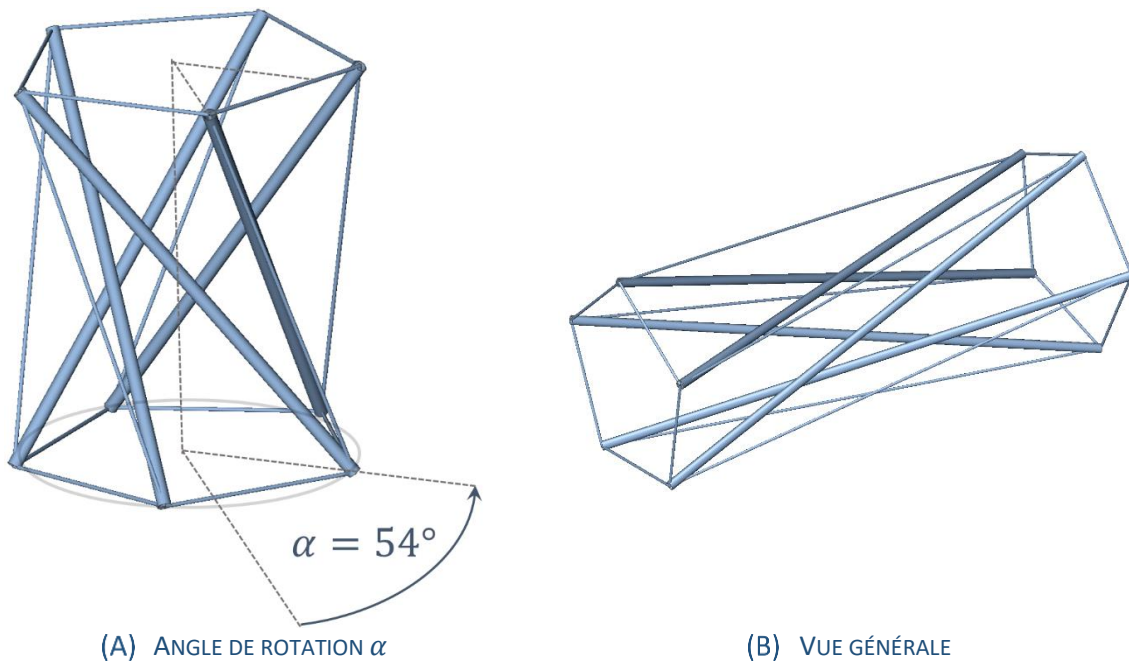


FIGURE 5.10 – HAUTEUR DE PASSAGE D'UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE QUADRUPLEX N°2
[ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

5.2.3 Le pentaplex

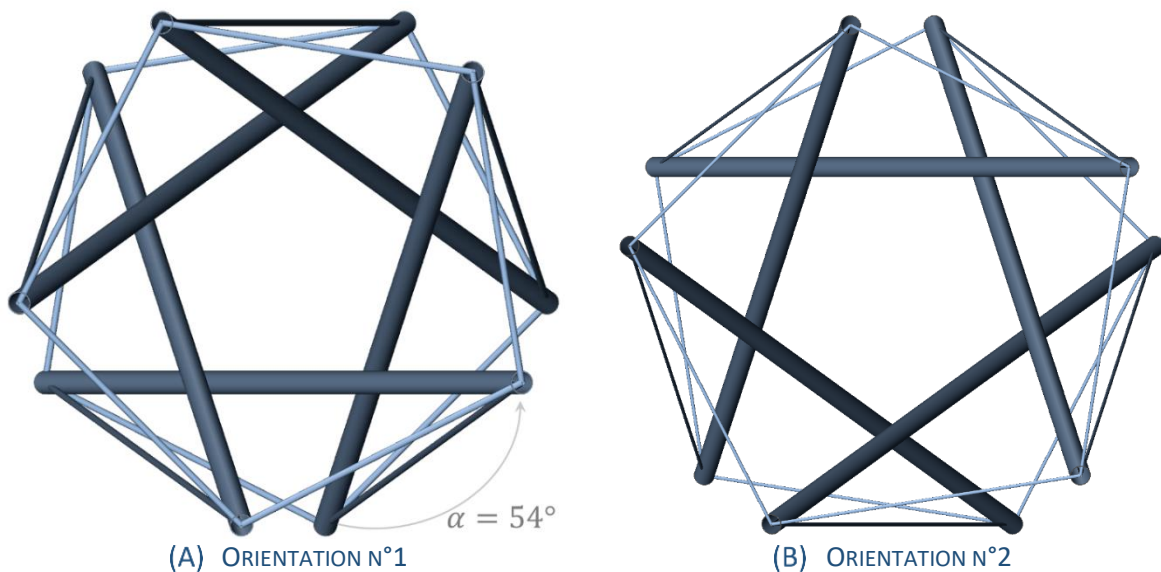


(A) ANGLE DE ROTATION α (B) VUE GÉNÉRALE
FIGURE 5.11 – PENTAPLEX [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]

Le pentaplex est également un module de tenségrité prismatique. Ses bases sont des pentagones réguliers, et il se compose de 5 barres et 15 câbles. D’après la formule (5-1), l’angle de rotation α entre les 2 bases, nécessaire pour obtenir un état d’auto-équilibre stable, est de :

$$\alpha = 90^\circ - \frac{180^\circ}{5} = 54^\circ$$

Il est également possible de faire passer une passerelle au sein de ce module suivant deux orientations :



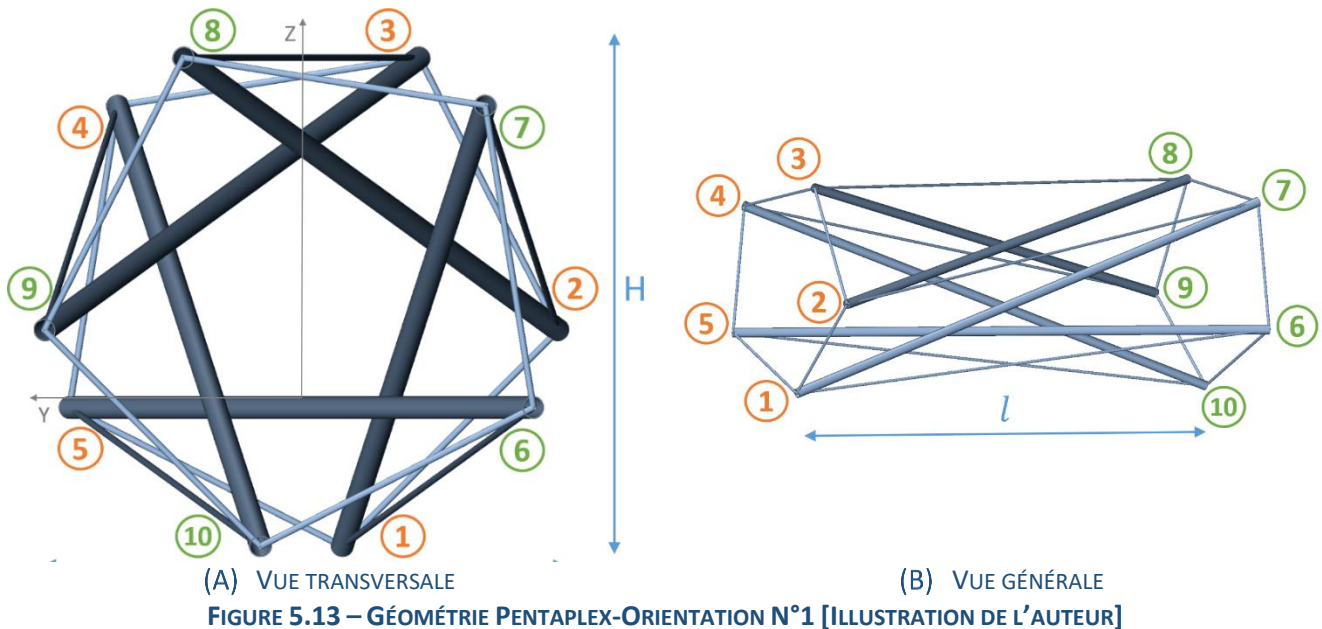
(A) ORIENTATION N°1 (B) ORIENTATION N°2
FIGURE 5.12 – ORIENTATIONS DU PENTAPLEX - VUE TRANSVERSALE [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]

Le tablier de la passerelle sera également suspendu aux nœuds supérieurs de la structure. De manière similaire au quadruplex, la première orientation du pentaplex ne permet pas de suspendre un tablier rectiligne avec des câbles verticaux. Le tablier induira donc des charges externes inclinées.

5.2.3.1 Géométrie générale

En observant attentivement les deux orientations, on remarque qu'il s'agit du même module mais retourné à 180° (voir Figure 5.12). Nous allons donc nous concentrer uniquement sur l'orientation n°1 pour analyser la géométrie générale d'un pentaplex.

Soit un pentaplex suivant l'orientation n°1 avec une hauteur H et de longueur l :



De manière similaire au quadruplex, la géométrie régulière des bases du pentaplex fixe la largeur du module D . Elle n'est donc pas un paramètre de la géométrie.

Si on considère le repère global ci-dessus (voir Figure 5.13). Pour simplifier l'écriture, posons $R = \frac{H}{\cos 27^\circ + \cos 9^\circ}$, le rayon du cercle circonscrit des deux bases pentagonales du pentaplex. Les coordonnées des 10 nœuds sont les suivantes :

Nœud n°	X	Y	Z
1	0	$-R \sin 9^\circ$	$-R(\cos 9^\circ - \sin 27^\circ)$
2	0	$-R \cos 9^\circ$	$R(\sin 27^\circ - \sin 9^\circ)$
3	0	$-R \sin 27^\circ$	$R(\cos 27^\circ + \sin 27^\circ)$
4	0	$\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$R\left(\sin 27^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
5	0	$R \cos 27^\circ$	0
6	l	$-R \cos 27^\circ$	0
7	l	$-\frac{R\sqrt{2}}{2}$	$R\left(\sin 27^\circ + \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$
8	l	$R \sin 27^\circ$	$-\frac{H}{2}\left(1 - \tan\left(\frac{45^\circ}{2}\right)\right)$
9	l	$R \cos 9^\circ$	$R(\sin 27^\circ - \sin 9^\circ)$
10	l	$R \sin 9^\circ$	$-R(\cos 9^\circ - \sin 27^\circ)$

5.2.3.2 Hauteur de passage au sein de la structure

La hauteur de passage disponible au sein d'une passerelle composée d'une succession de pentaplex n°1 s'obtient grâce aux relations géométriques :

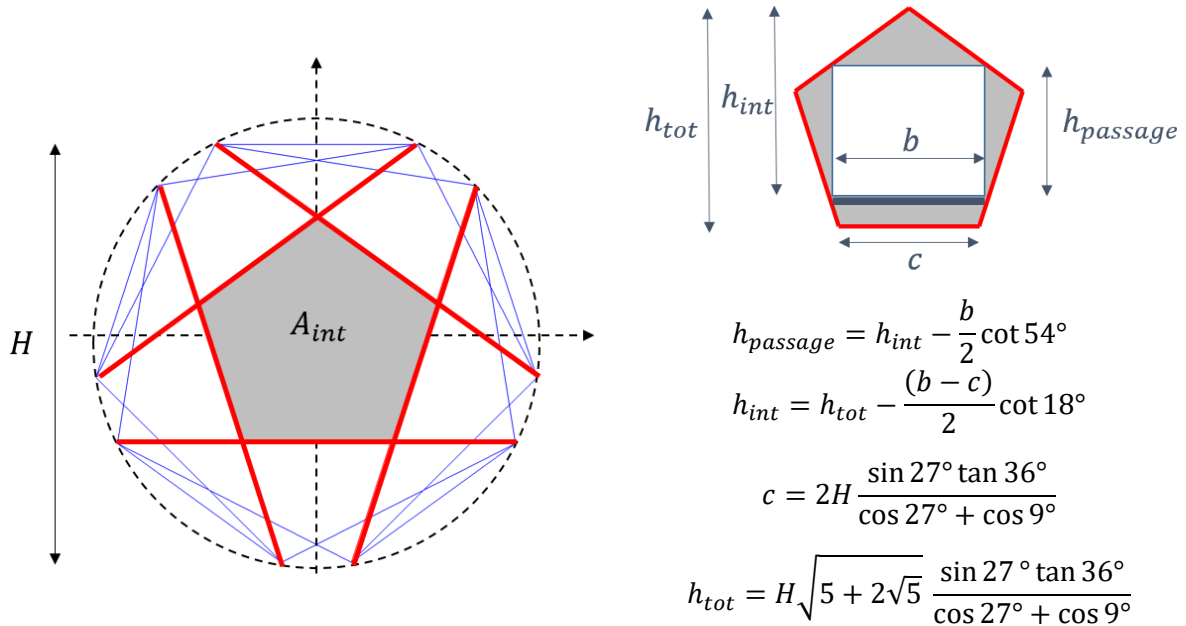


FIGURE 5.14 – HAUTEUR DE PASSAGE D'UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE PENTAPLEX N°1
[ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Dans le cas d'une passerelle composée d'une succession de pentaplex n°2, la hauteur de passage disponible s'obtient grâce aux relations géométriques suivantes :

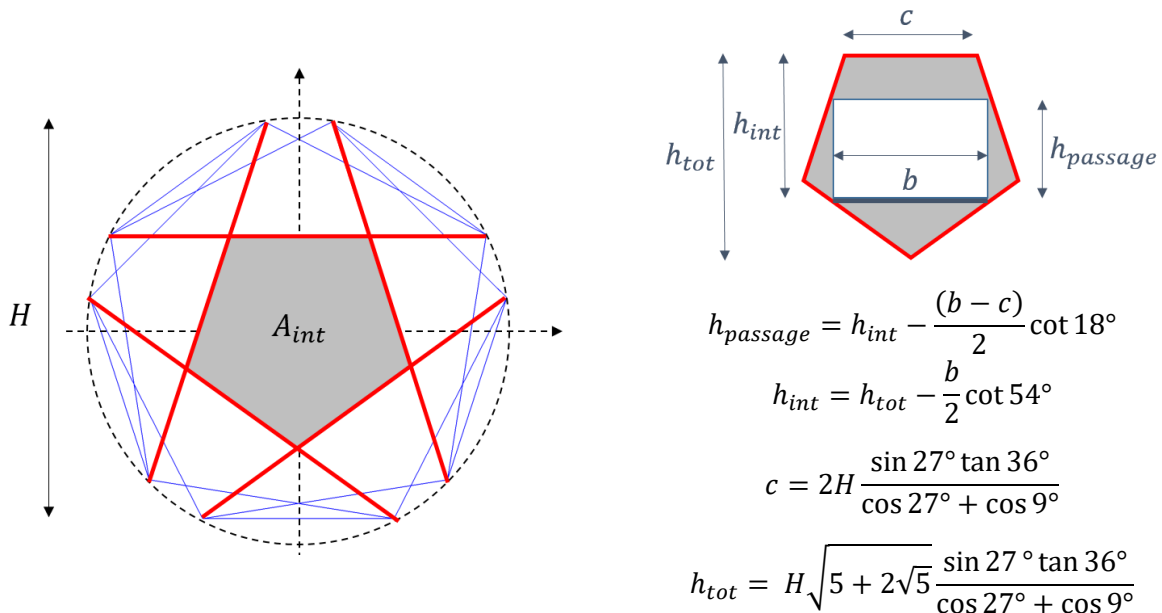


FIGURE 5.15 – HAUTEUR DE PASSAGE D'UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE PENTAPLEX N°2
[ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

5.2.4 L'hexaplex

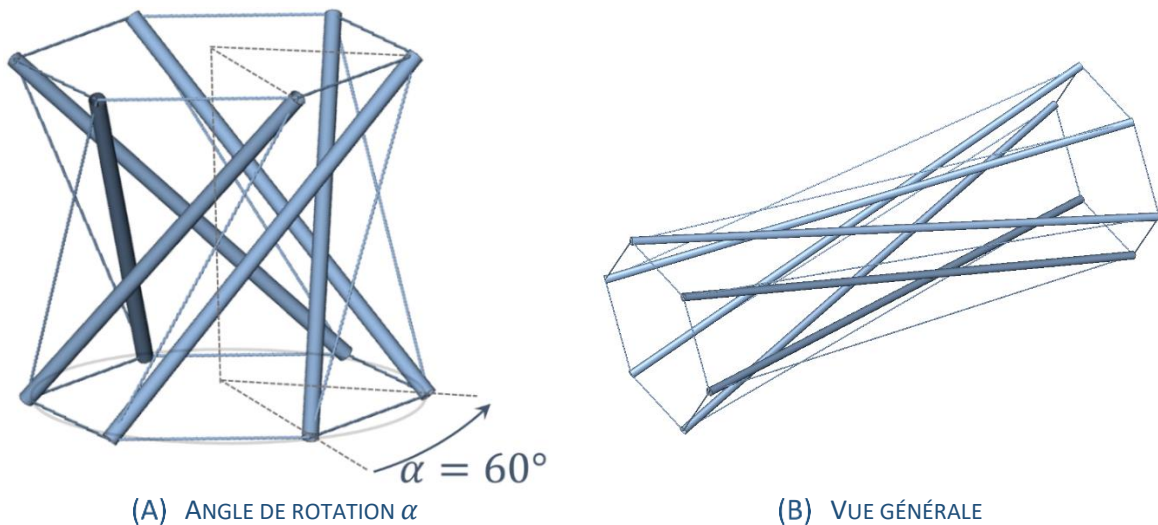


FIGURE 5.16 – L'HEXAPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Le dernier module de tensegrité prismatique qui sera étudié est l'hexaplex. Il est composé de 6 barres et de 18 câbles. Ses bases sont des hexagones réguliers. D'après la formule (5-1), l'angle de rotation α entre les 2 bases, nécessaire pour obtenir un état d'auto-équilibre stable, est de :

$$\alpha = 90^\circ - \frac{180^\circ}{6} = 60^\circ$$

L'hexaplex est particulier par rapport aux modules prismatiques précédents car ses bases sont alignées. En effet, son angle de rotation α correspond à la moitié de son angle interne.

Deux orientations ont été étudiées :

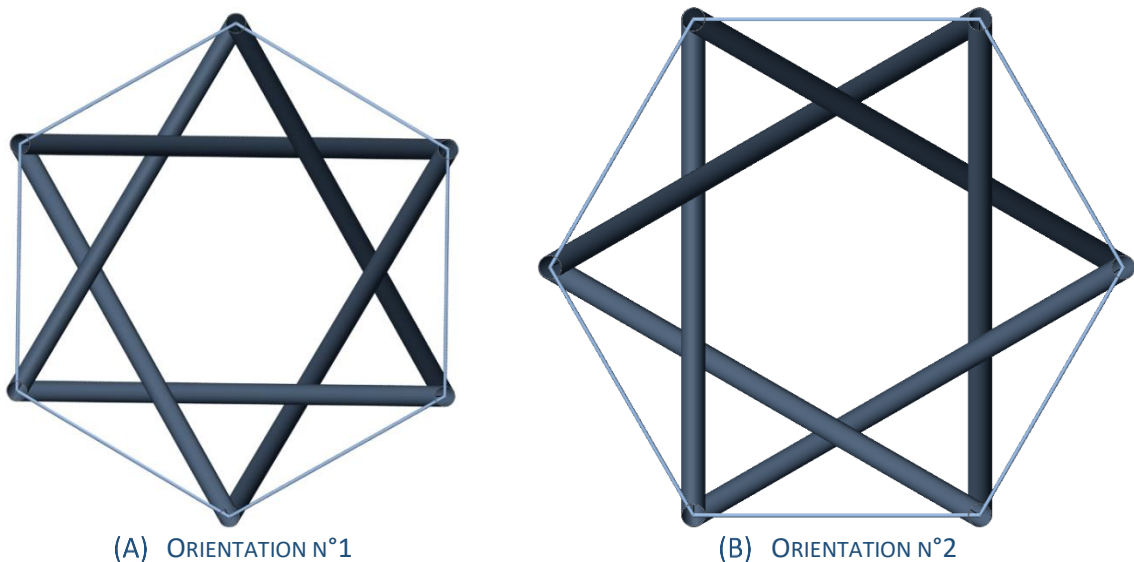


FIGURE 5.17 – ORIENTATIONS DE L'HEXAPLEX - VUE TRANSVERSALE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Le tablier de la passerelle est également suspendu aux nœuds supérieurs de la structure. La deuxième orientation de l'hexaplex ne permet pas de suspendre le tablier avec des câbles verticaux. Le tablier induira ainsi des charges externes inclinées.

La forme régulière de l'hexaplex lui confère une géométrie très simple. C'est pourquoi le détail de la géométrie est omis.

5.2.4.1 Hauteur de passage au sein de la structure

La hauteur de passage d'une structure composée d'une succession d'hexaplex n°1 s'obtient par les relations géométriques :

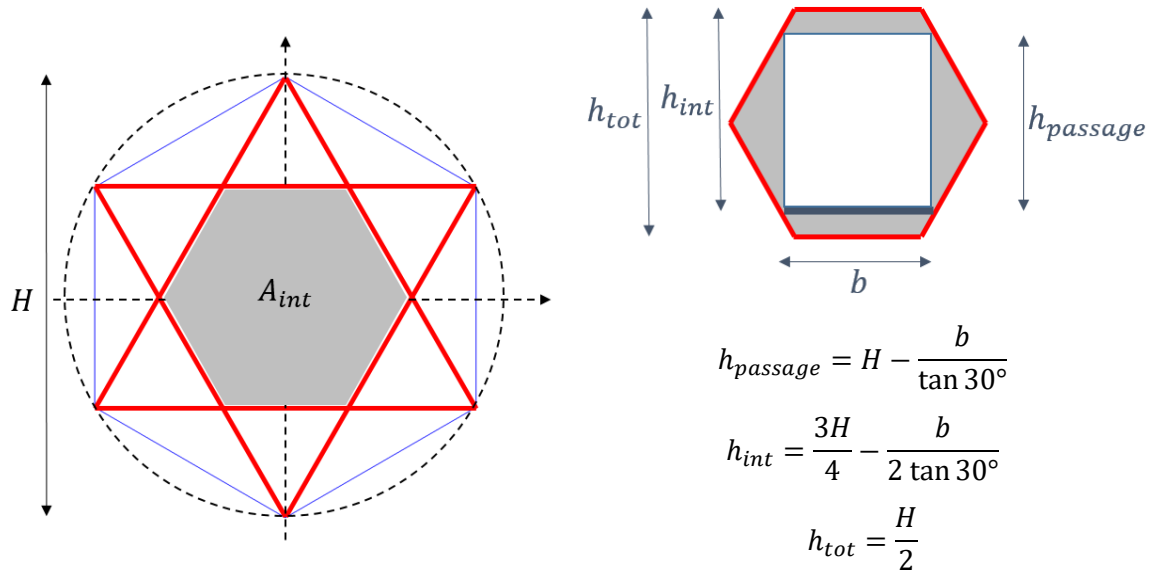


FIGURE 5.18– HAUTEUR DE PASSAGE D'UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE D'HEXAPLEX N°1
[ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

De manière similaire, la hauteur de passage d'une structure composée d'une succession d'hexaplex n°2 s'obtient par les relations géométriques :

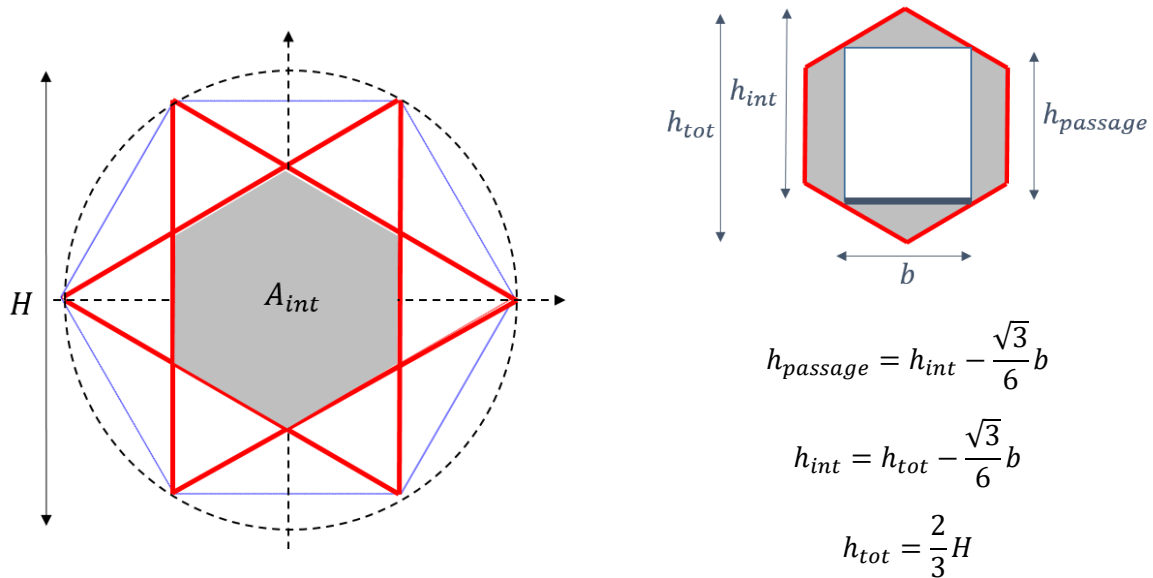
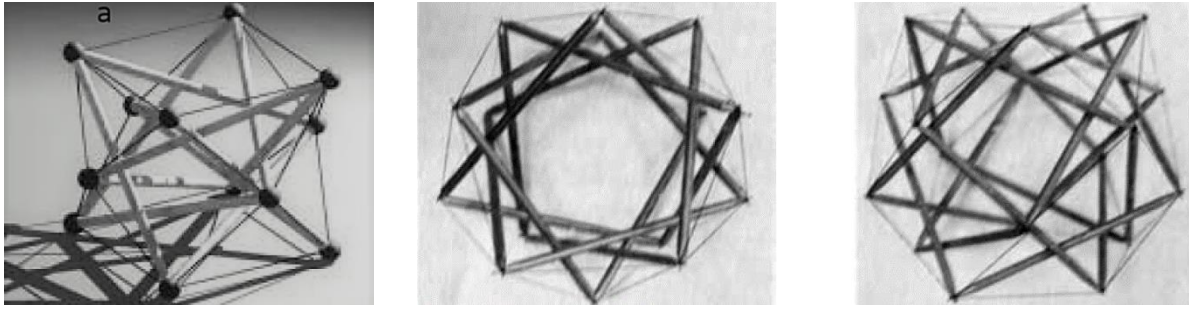


FIGURE 5.19 – HAUTEUR DE PASSAGE D'UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE D'HEXAPLEX N°2
[ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

5.2.5 Les anneaux de tensegrité

On doit l'invention du concept de l'anneau de tensegrité à Anthony PUGH qui a publié un livre en 1976 intitulé « An introduction to tensegrity » dans lequel il présente la conception de plusieurs systèmes de tensegrité [16]. En retravaillant un module existant appelé « diamond pattern » [16], il donne naissance à une nouvelle famille de module tensegrité qu'il nommera « circuit pattern » mais qui sera rebaptisé par la suite « anneau de tensegrité ». Cette dénomination provient de l'espace intérieur libre dont ce module est doté. Il existe une grande diversité de module de cette famille. Nous citerons seulement les 3 principaux anneaux de tensegrité : l'anneau à base carrée, pentagonale ou hexagonale.



(A) ANNEAU À BASE CARRÉE

(B) ANNEAU À BASE PENTAGONALE

(C) ANNEAU À BASE HEXAGONALE

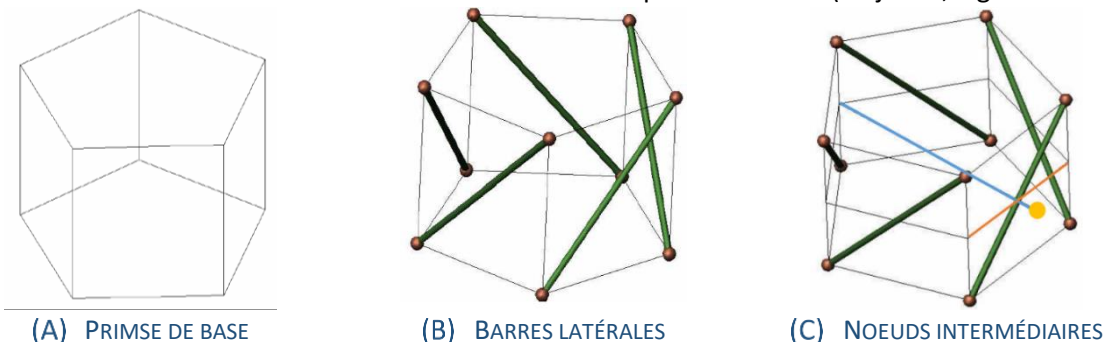
FIGURE 5.20 – ANNEAUX DE TENSEGRITÉ D'APRÈS A. PUGH [16]

On remarque que les éléments comprimés de ces modules ne sont plus des barres discontinues mais un ensemble de barres liées formant un ou plusieurs circuits fermés. Cela justifie l'appellation proposée par l'inventeur : « Circuit Pattern ». On voit ici l'importance d'avoir élargi la définition de tensegrité proposée par René MOTRO (cfr §1.2). En effet, ce module ne respecte pas la condition de discontinuité des barres proposée par René MOTRO dans sa définition.

5.2.5.1 Construction d'un module

Pour bien comprendre la géométrie des anneaux de tensegrité, nous allons tout d'abord étudier les étapes de conception des trois configurations d'anneaux de tensegrité citées ci-dessus. Cette section est inspirée d'un chapitre de la thèse de NGUYEN Anh Dung, « Etude du comportement mécanique et du pliage d'un anneau de tensegrité à base pentagonale », réalisé en 2009 [17].

La géométrie de base des anneaux de tensegrité est celle d'un prisme droit dont le polygone générateur est soit carré, pentagonal ou hexagonal (voir Figure 5.20). Sur chaque face latérale du prisme, une barre appelée « barre latérale » est mise en place selon la diagonale de la face (Figure 5.21-B). En traçant un plan horizontal à mi-hauteur du prisme, on obtient l'emplacement de ce que l'on appellera les « nœuds intermédiaires » (Figure 5.21-C). Leur position suit une règle bien spécifique : « sur la section droite à mi-hauteur du prisme (en orange, Figure 5.21-C), depuis le sommet du polygone, on trace une droite perpendiculaire au côté opposé (en bleu, Figure 5.21-C). » [17] Leur position se trouve sur cette droite et se situe en dehors du prisme de base (en jaune, Figure 5.21-C).



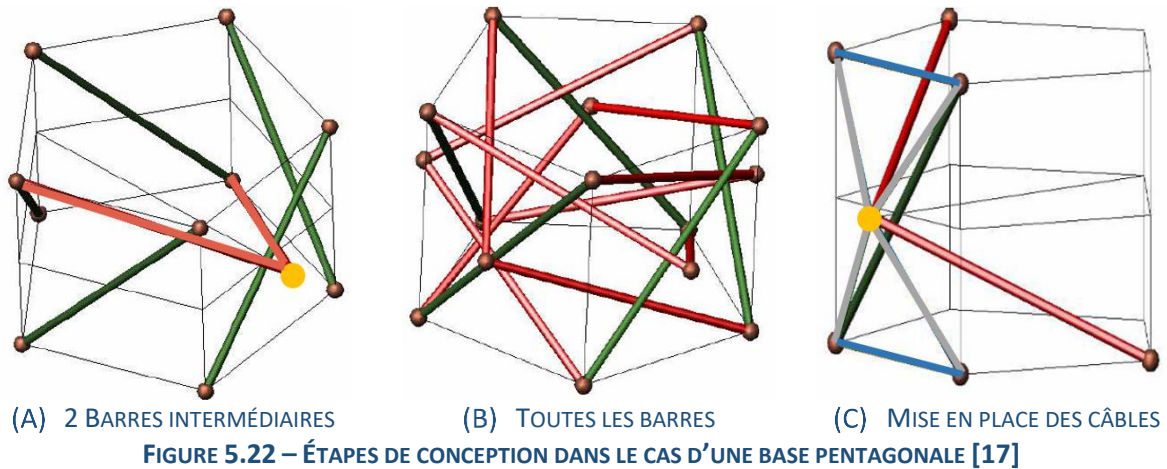
(A) PRISME DE BASE

(B) BARRES LATÉRALES

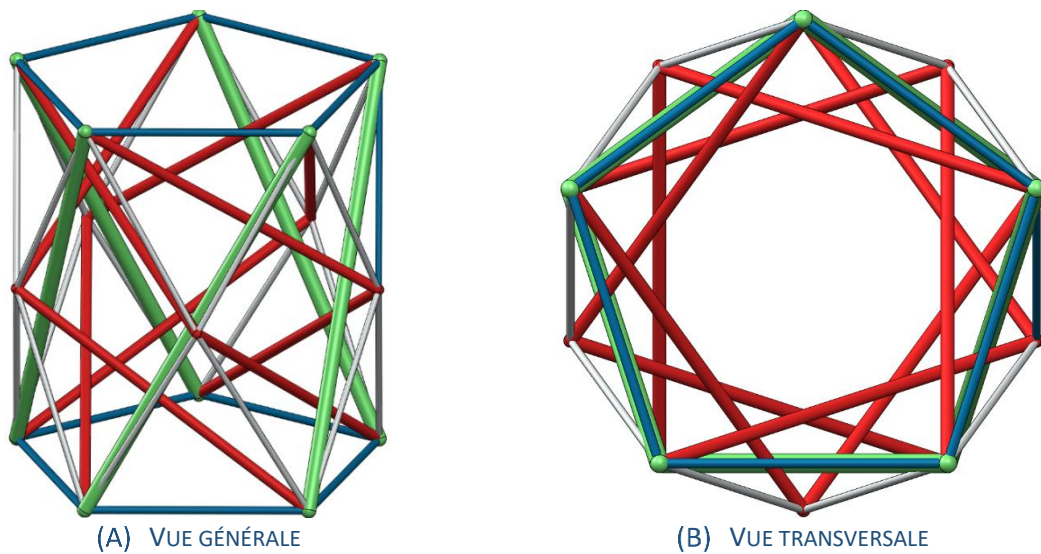
(C) NOEUDS INTERMÉDIAIRES

FIGURE 5.21 – ÉTAPES DE CONCEPTION DANS LE CAS D'UNE BASE PENTAGONALE [17]

Ensuite, à partir du nœud intermédiaire, on ajoute 2 barres (en rouge, Figure 5.22-A), que l'on nommera « barres intermédiaires », dont l'une est reliée à un nœud de la base inférieure et l'autre à un nœud de la base supérieure (Figure 5.22-A). Les autres paires de barres sont mises en place de façon similaire (Figure 5.22-B).



Ensuite, des câbles sont placés sur les deux polygones de base du prisme (en bleu, Figure 5.22-C). A chaque nœud intermédiaire, 4 câbles sont également liés aux nœuds des bases du prisme (en gris, Figure 5.22-C). On obtient finalement le module de tensegrité désiré.



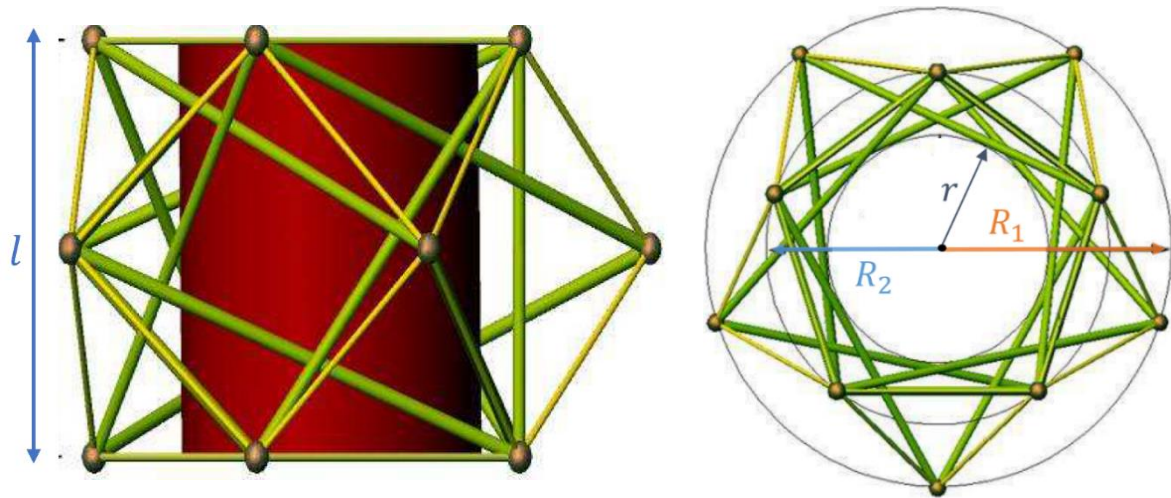
Théoriquement, cette conception peut se généraliser à partir de prismes droits à c_{base} cotés ($c_{base} > 3$). Cependant, dans la pratique, les modules sont pertinents et réalisables uniquement pour $c_{base} = 4, 5$ ou 6 . En effet, à partir de $c_{base} = 7$, le module devient beaucoup moins esthétique dû au nombre important d'éléments, ce qui rend la structure sans intérêt.

Dans la suite de ce mémoire, seul l'anneau de tensegrité à base pentagonale ($c_{base} = 5$) sera étudié. En effet, il semble présenter la meilleure efficacité structurale car il possède un circuit unique de barres contrairement aux autres anneaux [17].

Il est composé de 15 barres et 30 câbles, soit 45 éléments. On remarque que le nombre d'éléments est beaucoup plus important que pour les modules prismatiques. Le volume de matière sera donc inévitablement important. La prise en compte du poids propre dans l'optimisation sera essentielle pour juger de la réelle pertinence de ce module de tensegrité.

5.2.5.2 L'anneau de tensegrité à base pentagonale

La géométrie d'un anneau de tensegrité dépend de plusieurs paramètres : la longueur l du module, le rayon R_1 du cercle circonscrit formé par les nœuds intermédiaires et le rayon R_2 du cercle circonscrit aux bases pentagonales.

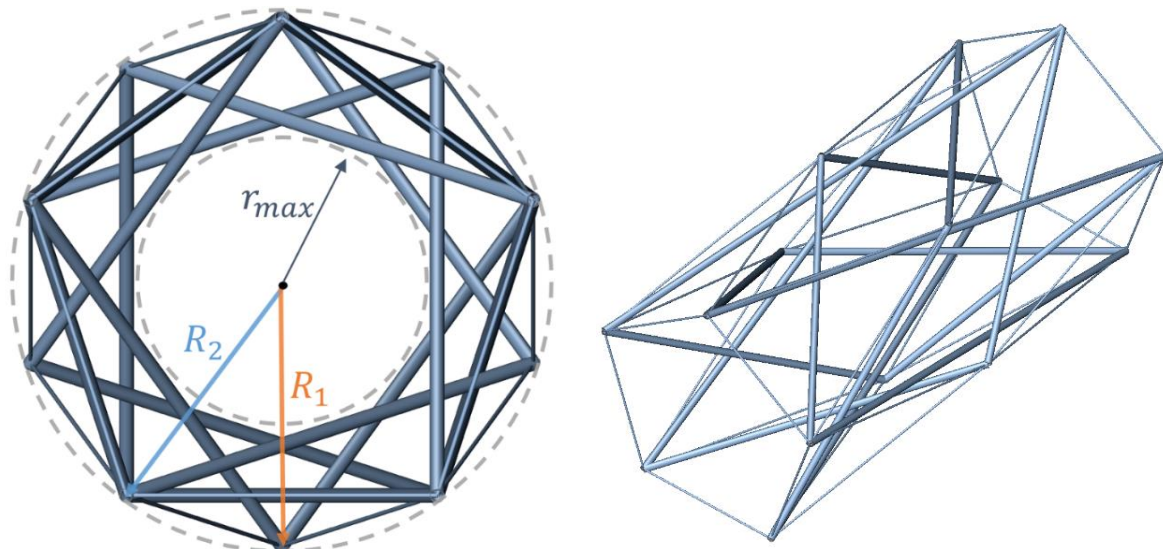


(A) VUE DE CÔTÉ (B) VUE TRANSVERSALE
FIGURE 5.24 – ANNEAUX DE TENSÉGRITÉ À BASE PENTAGONALE : R_1 ET R_2 [16]

Ces 3 paramètres permettent de générer une infinité de modules possibles. Cependant en vue d'une optimisation future, nous allons considérer le module le plus régulier possible. C'est pourquoi on va s'intéresser au cas où $R_1 = R_2 = R$. Cette homogénéité permet de simplifier la géométrie.

Cette configuration est également la plus efficace en termes d'utilisation de l'espace intérieur de l'anneau, ce qui nous intéresse tout particulièrement dans le cas d'une passerelle. En effet, le rayon intérieur r_{int} atteint un optimum (voir Figure 5.25).

Si on considère un tablier en son sein, il sera suspendu par des câbles aux 2 nœuds supérieurs de chaque module.



(A) VUE TRANSVERSALE (B) VUE GÉNÉRALE
FIGURE 5.25 – ANNEAU DE TENSÉGRITÉ À BASE PENTAGONALE : $R_1 = R_2 = R$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

La conception d'une passerelle se fait par l'assemblage bout à bout de plusieurs anneaux de tensegrité :

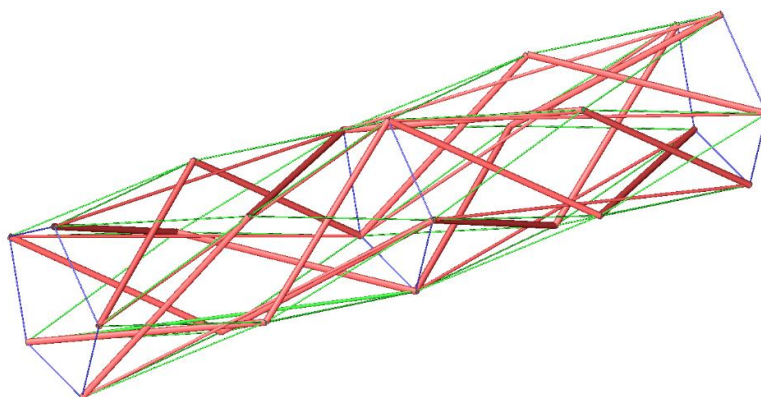


FIGURE 5.26 – STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE 2 ANNEAUX À BASE PENTAGONALE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

5.2.5.3 Géométrie générale

Étudions maintenant la géométrie d'un tel module. Soit un anneau de tensegrité à base pentagonale de hauteur H et de longueur l :

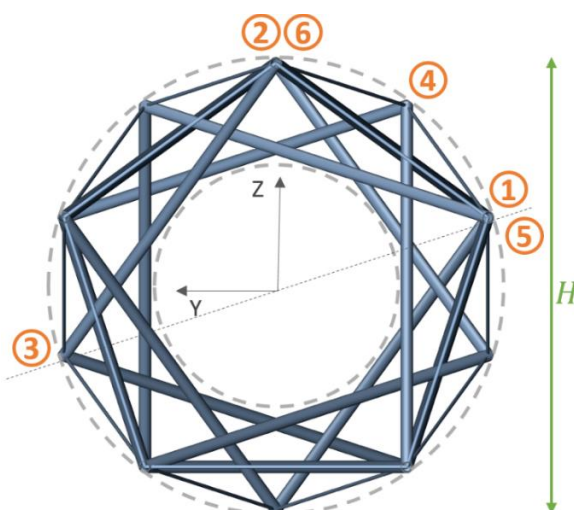


FIGURE 5.27 – ANNEAU DE TENSÉGRITÉ À BASE PENTAGONALE DE HAUTEUR H [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

En vue d'éclaircir les notations, posons $R = H/2$. La symétrie du module permet de limiter l'étude à seulement 6 nœuds. Si on considère le repère global ci-dessus (voir Figure 5.27), les coordonnées des nœuds concernés sont les suivantes :

Nœud n°	X	Y	Z
1	0	$-R \sin \frac{2\pi}{5}$	$R \cos \frac{2\pi}{5}$
2	0	0	R
3	$\frac{l}{2}$	$R \sin \frac{2\pi}{5}$	$R \cos \frac{2\pi}{5}$
4	$\frac{l}{2}$	$-R \sin \frac{\pi}{5}$	$R \cos \frac{\pi}{5}$
5	l	$-R \sin \frac{2\pi}{5}$	$R \cos \frac{2\pi}{5}$
6	l	0	R

5.2.6 Le module dérivé de Richard FULLER

Ce module de tensegrité est inspiré d'une structure imaginée par l'architecte américain Richard FULLER (1959) inventée pour la réalisation d'un mât.



FIGURE 5.28 – MÂT DE FULLER [RICHARD FULLER]

En retravaillant cette structure, Alexy BASTIEN et Quentin GRAVY ont imaginé un module de tensegrité composé de 4 barres et 5 câbles, avec lequel ils ont conçu des structures de types mât de tensegrité [1]. Par facilité de langage, nous appellerons ce système de tensegrité « module de Fuller » dans la suite de ce mémoire.

Comme pour les anneaux de tensegrité (cfr §5.2.5), on voit à nouveau l'importance d'avoir élargi la définition de tensegrité proposée par René MOTRO (cfr §1.2). En effet, ce module enfreint le concept de discontinuité des barres et ne respecte pas la condition stipulant qu'un nœud doit recevoir au minimum 3 câbles.

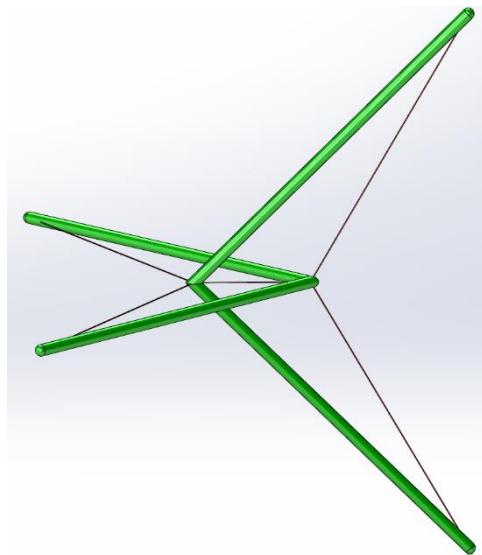


FIGURE 5.29 – DÉRIVE DU MODULE DE FULLER [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Après réflexion, Sébastien GOESSENS s'est rendu compte que ce système de tensegrité pouvait également être utilisé dans la conception d'une passerelle. En effet, si on relie chaque module par 8 câbles (en bleu, voir Figure 5.30) et que l'on effectue une symétrie des modules assemblés, on obtient une structure symétrique en son milieu, dont les 2 modules centraux sont reliés par 2 longs câbles (en rouge, voir Figure 5.30).

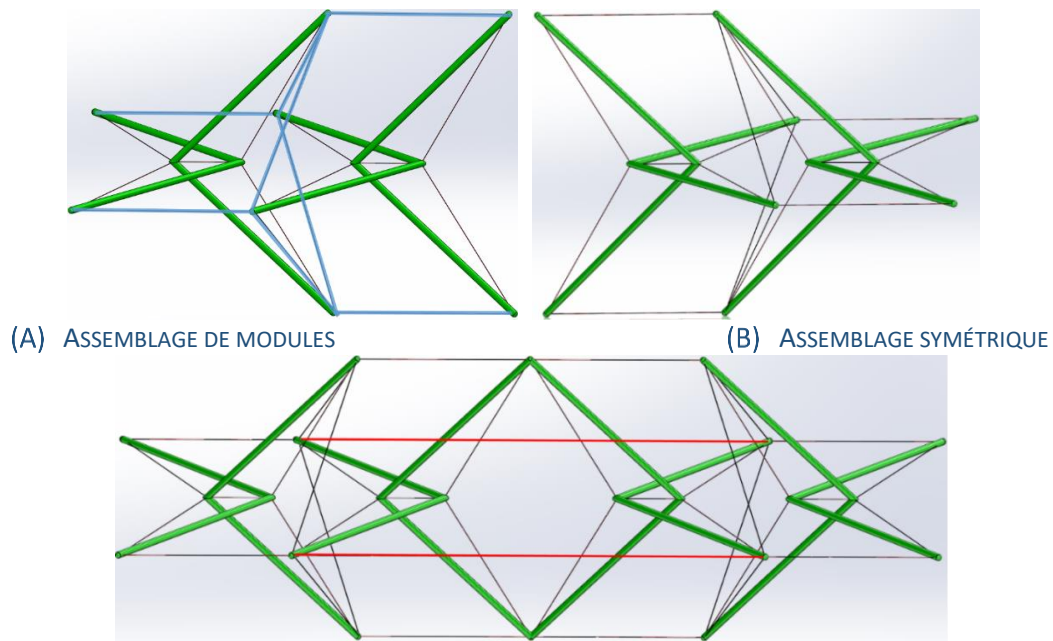


FIGURE 5.30 – ASSEMBLAGE DE 4 MODULES DE FULLER [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

La forme générale de la structure permet de faire passer un tablier troué au niveau des barres supérieures. Le tablier serait alors suspendu aux nœuds supérieurs de la structure. Une telle passerelle aurait l'allure suivante :

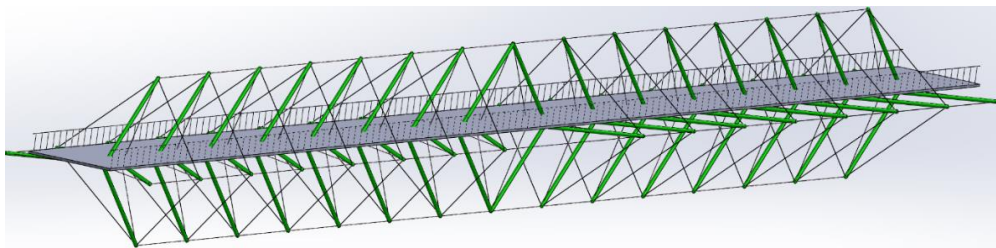


FIGURE 5.31 – PASSERELLE COMPOSÉE DE MODULES DE FULLER [SÉBASTIEN GOESSENS]

5.2.6.1 Géométrie générale

La géométrie de ce type de structure est très complexe, elle mérite donc de s'y attarder avec beaucoup d'attention.

Plusieurs simplifications géométriques ont été faites afin d'obtenir un module suffisamment symétrique. La géométrie doit en effet pouvoir être entièrement définie à partir de la longueur L et de la hauteur H de la structure.

Tout d'abord, analysons la géométrie du module seul. Soit un module de Fuller de hauteur H :



FIGURE 5.32 – GÉOMÉTRIE MODULE DE FULLER [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Pour simplifier la géométrie, on considère que la largeur D du module est égale à sa hauteur. Elle n'est donc pas un paramètre de la structure.

La géométrie du module est relativement uniforme. En effet, les 4 barres ont la même longueur et forment 2 paires de barres perpendiculaires. Les 4 câbles principaux sont également de mêmes longueurs. Seul le câble central reliant les sommets des deux paires de barres est de longueur différente. Les câbles principaux forment un angle de 120° avec les barres (voir Figure 5.32). La distance l_d séparant les sommets des deux paires de barres, et équivalente à la longueur du câble central, est calculée avec la relation géométrique suivante :

$$l_d = \frac{H}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

Maintenant intéressons-nous à la géométrie de deux modules consécutifs de hauteur H :

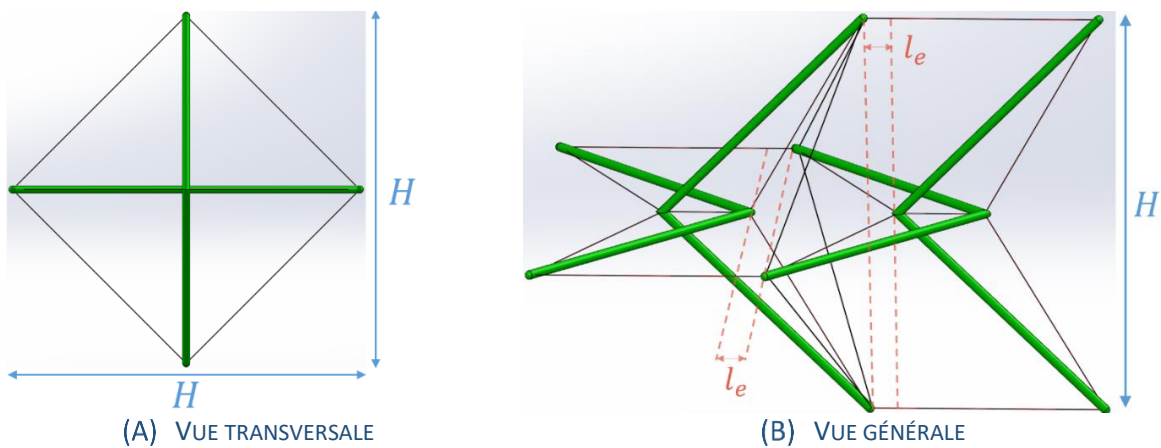


FIGURE 5.33 – GÉOMÉTRIE DE 2 MODULES DE FULLER [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

On remarque que les modules successifs ne sont pas assemblés l'un à la suite de l'autre. En effet, il existe un décalage, que l'on appellera l_e (voir Figure 5.33) entre deux modules consécutifs. La longueur de ce décalage dépend de la longueur de la structure L , de sa hauteur H et du nombre total de modules assemblés S . Il peut être positif ou négatif. En effet, s'il est positif, les modules s'éloignent l'un de l'autre et s'il est négatif, ils se rapprochent.

Illustrons cette particularité par un exemple. Soit deux structures de même longueur L composées de $S = 6$ modules de Fuller :

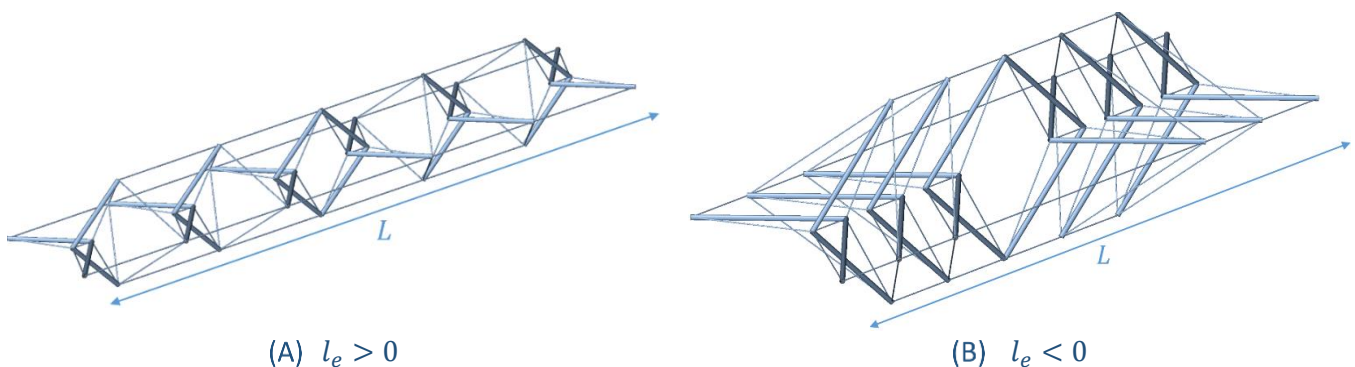


FIGURE 5.34 – VALEUR DU PARAMÈTRE l_e [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Si on considère une structure composée de S modules ($S \neq 1$ et pair), de longueur L et de hauteur H , alors la valeur du décalage l_e entre 2 modules est déterminée par la relation géométrique suivante :

$$l_e = \left(\frac{L}{2} - \frac{H}{2}(S + 1) + l_d \right) \frac{1}{S - 1} \quad \text{avec} \quad l_d = \frac{H}{2} \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3} \right)$$

5.3 Elancement géométrique des modules de tenségrité prismatiques

L'élancement géométrique d'une passerelle est une caractéristique essentielle dans la conception. Afin de bien visualiser l'allure des modules en fonction de leur élancement et de se rendre compte des résultats qui suivront, nous allons représenter les modules prismatiques pour différentes valeurs de L/H :

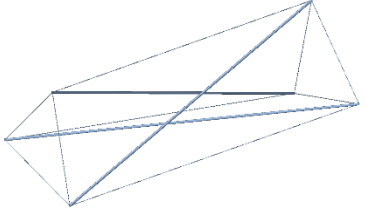
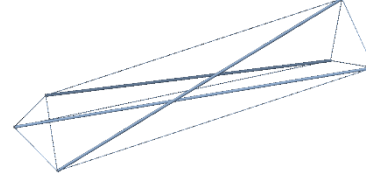
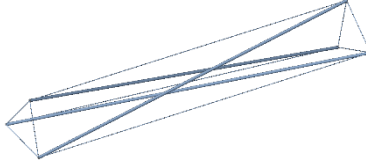
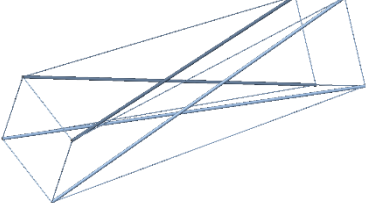
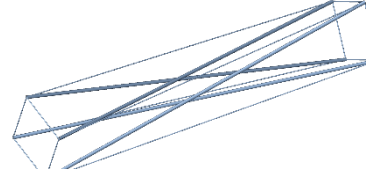
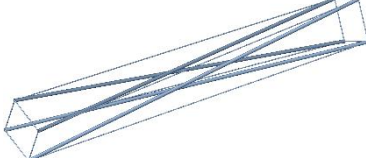
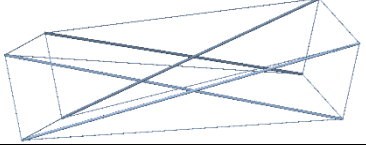
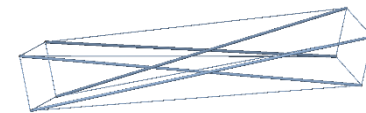
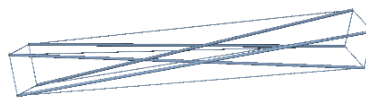
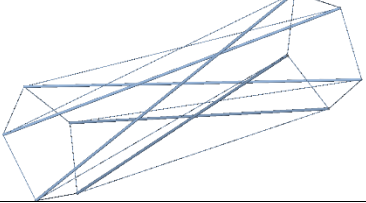
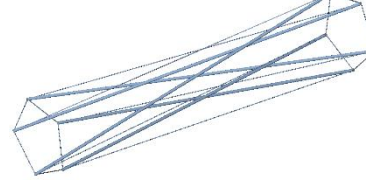
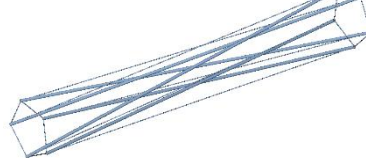
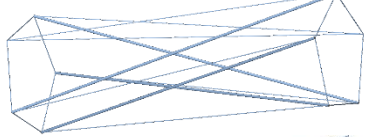
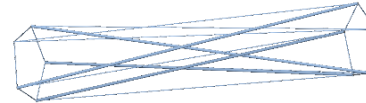
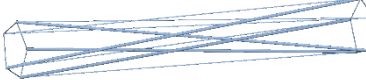
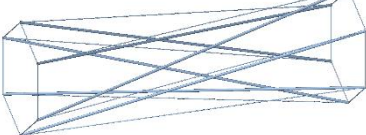


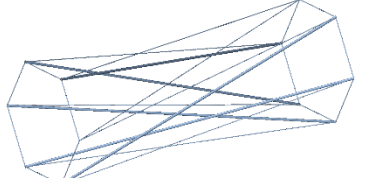
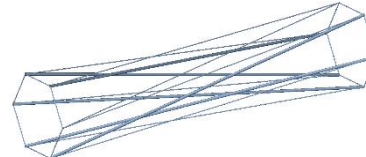
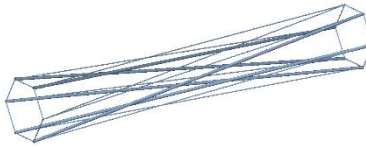
	$L/H = 3$	$L/H = 5$	$L/H = 7$
Simplex			
Quadruplex n°1			
Quadruplex n°2			
Pentaplex n°1			
Pentaplex n°2			
Hexaplex n°1			
Hexaplex n°2			

FIGURE 5.35 – ELANCEMENT DES MODULES DE TENSÉGRITÉ PRISMATIQUES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

On remarque que l'élancement géométrique influence beaucoup l'espace intérieur du module. Les structures de tenségrité très élancées réduisent ainsi considérablement la possibilité d'accueillir un tablier.

5.4 Conclusion

La tenségrité a un avenir indéniable dans le génie civil. En effet, un grand nombre de modules de tenségrité possède une géométrie qui s'accorde parfaitement avec la conception d'une passerelle.

Au départ, une dizaine de modules de tenségrité avaient été envisagés. Cependant, la complexité d'optimisation de certains systèmes m'a contraint à réduire l'étude. En effet, la géométrie devait être suffisamment symétrique pour pouvoir être définie à partir de 2 paramètres uniquement : la longueur et la hauteur de la structure. Seuls les modules les plus pertinents ont donc été retenus. J'ai ainsi considéré 8 nouveaux modules de tenségrité : 6 modules prismatiques et 2 modules plus complexes.

Le nombre d'éléments des modules prismatiques est d'autant plus élevé que le nombre de côtés de la base augmente. Un hexaplex (24 éléments) sera ainsi composé de deux fois plus d'éléments que le simplex (12 éléments).

L'anneau de tenségrité à base pentagonale est composé d'un nombre considérable d'éléments comparé aux modules prismatiques (45 éléments). Les structures composées d'un faible nombre d'anneaux de tenségrité seront donc préférées. De plus, la complexité de conception de ce module peu remettre en question sa réelle faisabilité. En effet, la mise en œuvre d'une telle structure peut s'avérer très laborieuse.

Le module de Fuller est composé uniquement de 9 éléments. Il s'agit du module avec le plus faible nombre d'éléments. Cependant, le nombre de modules doit obligatoirement être pair pour former une passerelle de tenségrité.

Le volume de matière est inévitablement lié au nombre d'éléments du module. Intuitivement, le simplex devrait donc mener à un volume de matière globalement plus faible.

Certaines orientations des modules prismatiques induisent des charges externes inclinées dans le cas d'un tablier rectiligne. C'est le cas du quadruplex n°1, du pentaplex n°1 et de l'hexaplex n°2. Cette inclinaison des câbles de suspension dépend de la largeur du tablier de la passerelle et revient donc au concepteur. Il s'agit d'un paramètre supplémentaire de la structure. C'est pourquoi, pour ne pas compliquer l'optimisation avec un paramètre additionnel, cet angle d'inclinaison a été négligé. Les charges externes seront donc uniquement verticales. Cette hypothèse n'est pas irréaliste car on pourrait imaginer un tablier curviligne positionné de façon à obtenir des charges externes exclusivement verticales. L'influence de l'inclinaison du chargement extérieur sera étudiée en annexe (voir Annexe D).

Les différents modules seront d'abord étudiés individuellement afin de prouver leur faisabilité sur base du critère de déformation proposé par la norme (voir Chapitre 6). Leur efficacité sera ensuite comparée (voir Chapitre 7).

Chapitre 6 : Faisabilité d'utilisation des modules de tenségrité pour les passerelles

Dans ce chapitre, les modules de tenségrité présentés précédemment, simplex compris, seront étudiés individuellement. Chaque module sera optimisé suivant la méthode d'optimisation développée au Chapitre 4. Au total, 9 modules différents seront analysés :

- Le simplex ;
- Le quadruplex : orientations n°1 et n°2 ;
- Le pentaplex : orientations n°1 et n°2 ;
- L'hexaplex : orientations n°1 et n°2 ;
- L'anneau de tenségrité à base pentagonale ;
- Le module de Fuller.

L'étude complète d'un module est longue et très dense en informations (cfr §4.4). Seuls les résultats les plus pertinents seront présentés afin de tirer les conclusions nécessaires pour comprendre l'efficacité de chaque module. L'objectif est de déterminer si ces modules de tenségrité peuvent être utilisés comme structure portante pour une passerelle.

Nous allons ainsi analyser la faisabilité et l'efficacité de chaque module de tenségrité à l'aide de la théorie des indicateurs morphologiques étendues aux structures 3D, hyperstatiques, non-linéaires et précontraintes (cfr §4.3.2). Ce puissant outil va ainsi permettre de tirer des conclusions sur l'infinité de configurations de structures possibles en étudiant seulement un échantillon de ces structures au travers de 4 nombres adimensionnels $L/H, \Psi, E/\sigma, \Phi$.

Les courbes d'efficacité de l'indicateur de déplacement L/δ et de l'indicateur de volume W (cfr §2.2.3.1) vont permettre de tirer les conclusions quant à la faisabilité et à l'efficacité des modules.

Cet outil permet également de comparer quantitativement des typologies de structures différentes. Il sera donc à nouveau utilisé dans le chapitre suivant.

Avant de débiter l'étude, chaque structure de tenségrité sera définie. L'objectif est de fixer une fois pour toute chaque typologie de structure. Au cours de cette étape, la répartition de la charge externe F au niveau des nœuds sera établie. On portera un intérêt tout particulier à l'hyperstatiticé des structures et à la manière dont les appuis seront agencés pour obtenir le degré d'hyperstatiticé recherché ($I_s = 1$) (cfr §2.2.2.1). On verra que la position des appuis doit être réfléchié afin que le système de tenségrité s'établisse correctement lorsque l'on applique le chargement externe sur la structure précontrainte.

L'étude complète d'un module de tenségrité prend en compte 2 approches d'optimisation (cfr §4.3.5.1) :

1. Sans la prise en compte du poids propre, tel quel $\Phi = 0$;
2. Avec la prise en compte du poids propre :
 - 2.1. Sans le critère de limitation du poids propre ;
 - 2.2. Avec le critère de limitation du poids propre : $\rho V < 3F$.

Afin de simplifier l'étude, les résultats avec le critère de limitation du poids propre ne seront pas présentés. L'importance du poids propre face au chargement externe sera toutefois étudiée à l'aide de l'indicateur de pourcentage de poids propre (ou d'efficacité matérielle) (cfr §4.3.5.2).

Les résultats des 2 approches seront comparés afin de se rendre compte de l'intérêt de la prise en compte du poids propre dans l'optimisation.

Les structures seront étudiées en appliquant le processus d'optimisation des structures de tensegrité développé précédemment (cfr §4.4.1). Pour rappel, la précontrainte est donc optimisée en pré comprimant uniformément toutes les barres de la structure. L'aire des sections est trouvée selon la nouvelle méthode d'optimisation des sections imaginée (cfr Sections câbles bases/câbles longitudinaux/barres – §4.2.3.2). Les résultats obtenus pour le simplex (pour $\Phi = 0$) seront donc différents des résultats de Jonas FERON [3] car il a utilisé une autre méthode d'optimisation des sections.

L'influence du poids propre sera tout d'abord étudiée en considérant une valeur similaire de l'indicateur de poids propre ($\Phi = 132 \times 10^{-4}$) pour chaque module de tensegrité. Dans le cas d'une structure en acier S235, cela correspond à une structure de portée $L = 40$ m.

On verra également que la portée de la structure a un impact sur le nombre de modules S optimal.

6.1 Structures de tensegrité composées de simplex

6.1.1 Définition de la structure

Soit la structure de tensegrité composée de S simplex, de portée L , de hauteur H , soumise à une charge externe F uniformément répartie sur les nœuds supérieurs de la structure et dont le degré d'hyperstatiticé vaut $I_s = 1$:

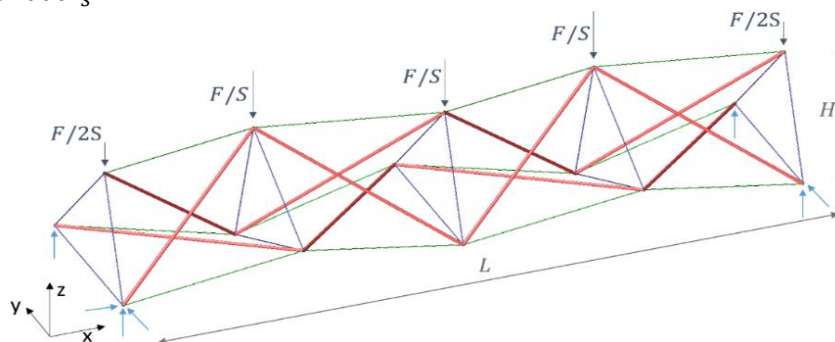


FIGURE 6.1 – DÉFINITION STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE SIMPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

6.1.2 Hyperstatiticé d'une structure composée de simplex

Le degré d'hyperstatiticé total I_s d'une structure 3D, dont les éléments sont uniquement soumis à de l'effort normal, est donné par la formule suivante [7] :

$$I_s = B_e + R_{appuis} - 3N_{nodes} \quad (6-1)$$

Avec :

- B_e : le nombre total d'éléments ;
- R_{appuis} : le nombre de réactions d'appuis. C'est l'inconnue à déterminer de manière à obtenir $I_s = 1$;
- N_{nodes} : le nombre total de nœuds.

Dans le cas d'une structure composée de S simplexes, on a : $B_e = 9S + 3$ et $N_{nodes} = 3(S + 1)$.

Le nombre de réactions d'appuis R_{appuis} pour obtenir $I_s = 1$ vaut donc :

$$I_s = 9S + 3 + R_{appuis} - 9(S + 1) = 1 \rightarrow R_{appuis} = 7$$

Les 7 appuis sont alors positionnés intuitivement au niveau des 4 nœuds inférieurs des 2 modules d'extrémité (en bleu clair, voir Figure 6.1). Le système de tenségrité s'établit correctement lorsque l'on applique la charge externe. Autrement dit, il n'y a pas un déplacement exagéré des nœuds, comme on pourra le voir pour les modules suivants lorsqu'on ne positionne pas correctement les appuis (cfr §6.2.2).

6.1.3 Résultats de l'optimisation sans la prise en compte du poids propre

Tout d'abord, nous allons nous intéresser aux structures composées d'une succession de simplex sans prendre en compte le poids propre dans l'optimisation, tel que $\Phi = 0$.

Pour rappel, les courbes d'efficacité de l'indicateur de déplacement L/δ sont formées en sélectionnant, pour chaque Ψ , le point $(L/H)_{opt}$ qui maximise l'indicateur de déplacement $(L/\delta)_{max}$. L'indicateur de volume W_{opt} et l'indicateur de précontrainte $(P/F)_{opt}$ associés à cet optimum de déplacement sont également représentés.

Par souci de clarté, les courbes de tendances des résultats numériques de $(L/H)_{opt}$, W_{opt} et $(P/F)_{opt}$ sont présentées.

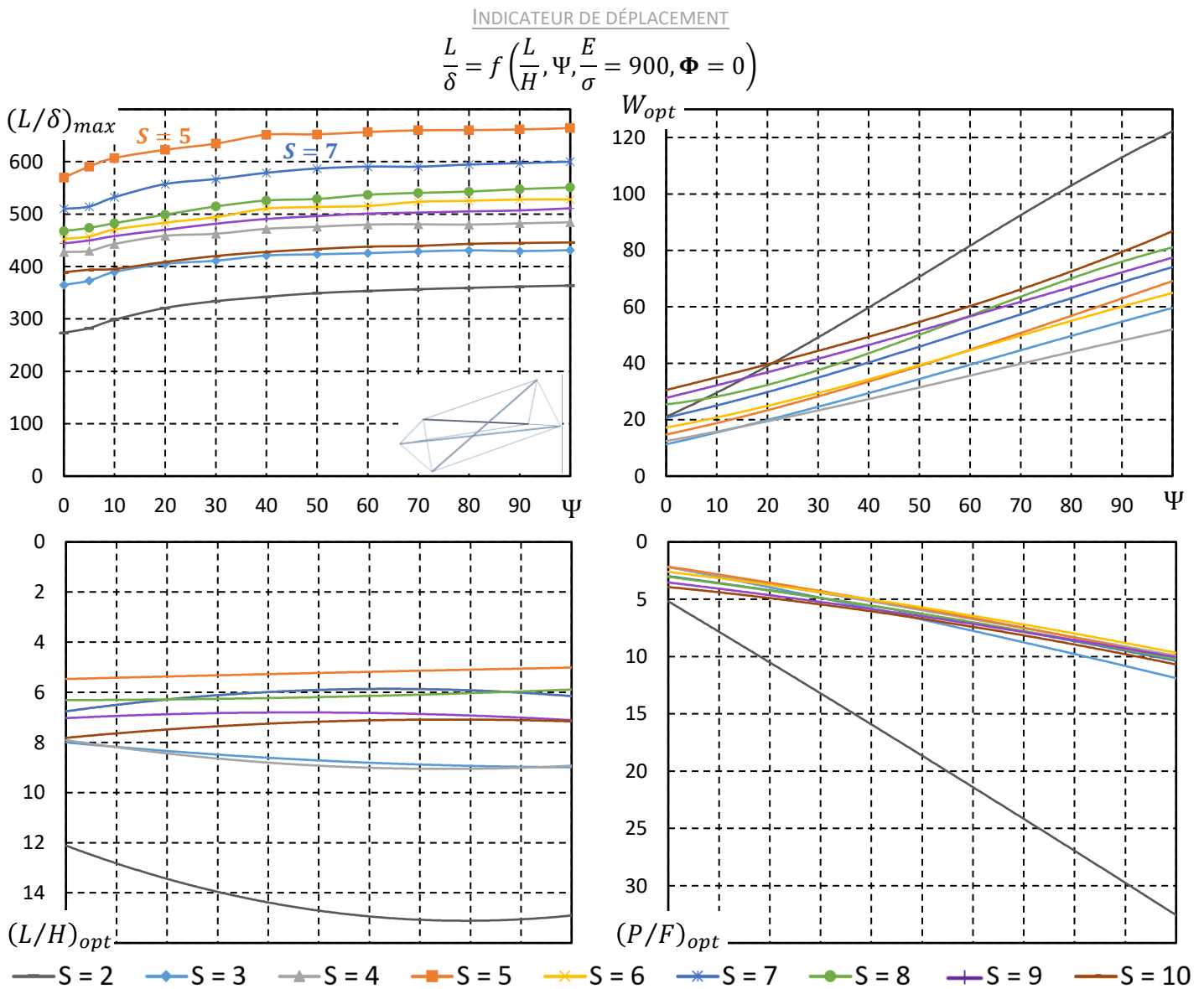


FIGURE 6.2 – COURBES D'EFFICACITÉ L/δ DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE SIMPLEX – $S = 2 - 10$, $E/\sigma = 900$, $\Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

- Lorsque l'indicateur de flambement Ψ devient grand, les déformations δ se stabilisent mais le volume de matière et la précontrainte continuent à augmenter ;
- Lorsque le nombre de simplex devient trop important ($S \geq 10$), l'efficacité des structures chute. En effet, le volume de matière augmente et les déformations δ deviennent trop importantes ;
- Plusieurs structures sont capables de respecter le critère de déformation $L/\delta \geq 500$: $S = 5, 6, 7, 8, 9$:
 - Les structures composées de $S = 5, 7$ respectent toujours le critère de déformation quelle que soit la valeur de l'indicateur de flambement Ψ . Parmi elles, les structures composées de 5 ($S = 5$) simplex sont les moins déformables et requièrent une quantité de matière raisonnable. Il s'agit également des structures les plus légères et les moins élancées ;
 - Les structures composées de 6 simplex respectent le critère de déformation pour $\Psi > 30$, celles composées de 8 simplex pour $\Psi > 20$ et celle composées de 9 simplex pour $\Psi > 60$;
- Les structures composées de $S = 2, 3, 4, 10$ simplex ne respectent pas le critère de déformation. Ce résultat illustre la puissance des indicateurs morphologiques : même les structures qui optimisent les déformations ne garantissent pas une rigidité suffisante. Elles sont donc a priori irréalisables. Parmi elles, les structures composées de 2 simplex ($S = 2$) donnent les plus mauvais résultats. Elles se déforment énormément et sont beaucoup plus lourdes.

Les 2 premières observations sont valables pour tous les modules de tenségrité étudiés.

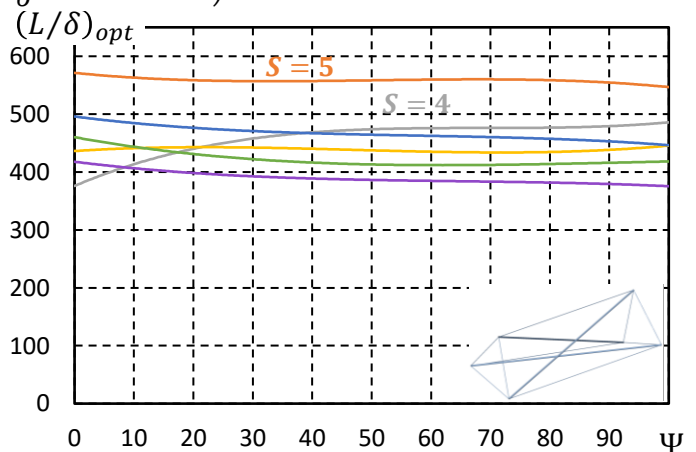
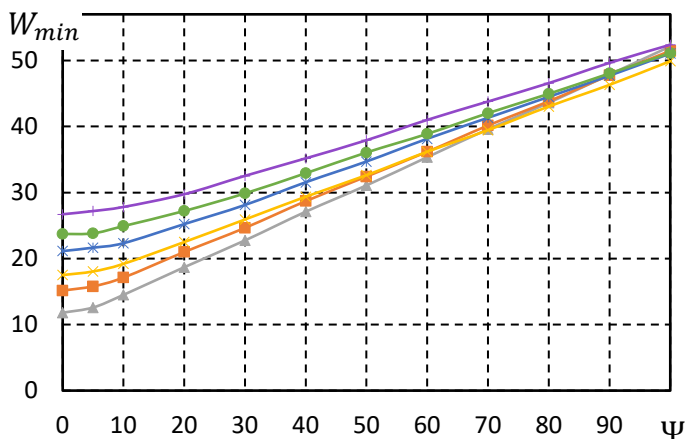
Pour rappel, les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W sont formées en sélectionnant, pour chaque Ψ , le point $(L/H)_{opt}$ qui minimise l'indicateur de volume W_{min} . L'indicateur de déplacement $(L/\delta)_{opt}$ et l'indicateur de précontrainte $(P/F)_{opt}$ associés à cet optimum de volume sont également représentés.

Les structures ne respectant jamais le critère de déformation (sauf $S = 4$) ne seront plus représentées afin d'alléger les graphiques.

Par souci de clarté, les courbes de tendances des résultats numériques de $(L/H)_{opt}$, $(L/\delta)_{opt}$ et $(P/F)_{opt}$ sont présentées.

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 0\right)$$



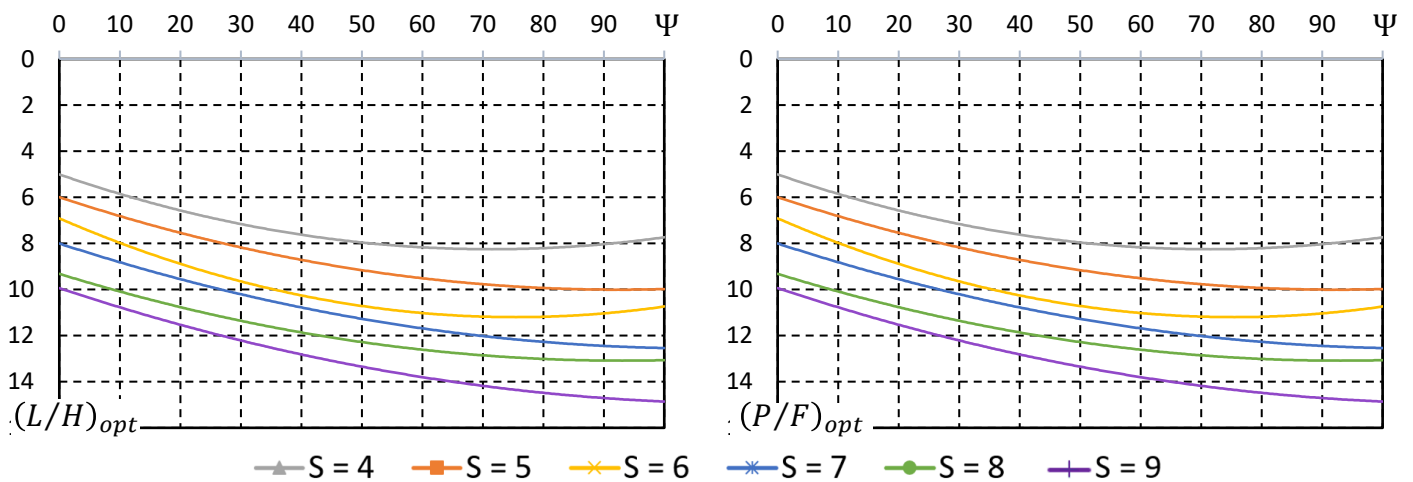


FIGURE 6.3 – COURBES D’EFFICACITÉ W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE SIMPLEX – $S = 4 - 9$, $E/\sigma = 900, \Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]

Constatations :

- Plus l’indicateur de flambement Ψ est grand, plus le volume minimum de matière à mettre en œuvre et la précontrainte sont grands. Le volume de matière est ainsi l’image de la précontrainte. En effet, plus une structure est précontrainte, plus les efforts internes sont importants et plus le volume de matière nécessaire pour assurer la résistance de la structure augmente ;
- Plus le nombre de simplex S est élevé, plus l’élancement L/H de la structure doit être grand pour obtenir le volume minimum de matière ;
- Pour un même nombre de simplex S :
 - Plus l’indicateur de flambement Ψ est grand, plus l’élancement L/H de la structure doit être grand ;
 - Plus l’élancement L/H est grand, plus la précontrainte et le volume minimum de matière sont importants.
- Les structures composées de 5 simplex ($S = 5$) sont à nouveau les plus efficaces. Il s’agit de la seule configuration de S simplex dont les déformations δ associées au volume de matière minimum respectent le critère $L/\delta \geq 500$. Insistons sur le caractère exceptionnel de ce résultat : ces structures optimisées selon le volume de matière à mettre en œuvre assurent également des déformations acceptables.

Les 3 premières observations s’appliquent à tous les modules de tensegrité prismatiques (quadruplex, pentaplex, hexaplex).

6.1.4 Résultats de l’optimisation avec la prise en compte du poids propre

Pour ne pas surcharger les graphiques, nous allons étudier uniquement les configurations de structures les plus intéressantes. On va donc se concentrer sur les structures avec un nombre de simplex $S = 3 - 7$.

Dans le but d’étudier l’influence du poids propre, nous allons considérer 2 valeurs de l’indicateur de poids propre : $\Phi = 33 \times 10^{-4}$ et 132×10^{-4} . Dans le cas d’une structure en acier S235, ces valeurs correspondent respectivement à des structures de portée $L = 10$ m et 40 m. Dans ce cas, augmenter la valeur de l’indicateur de poids propre Φ ou la portée des structures revient au même.

Afin de se rendre compte de l’importance du poids propre face au chargement extérieur, l’indicateur d’efficacité matérielle $\rho V \setminus F$ est également représenté. Pour rappel, l’indicateur d’efficacité matérielle

est linéairement proportionnel à l'indicateur de volume (cfr §4.3.5.2). C'est pourquoi il sera représenté sur le même graphique que l'indicateur de volume.

Soit les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W pour $\Phi = 33 \times 10^{-4}$:

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 33 \times 10^{-4}\right)$$

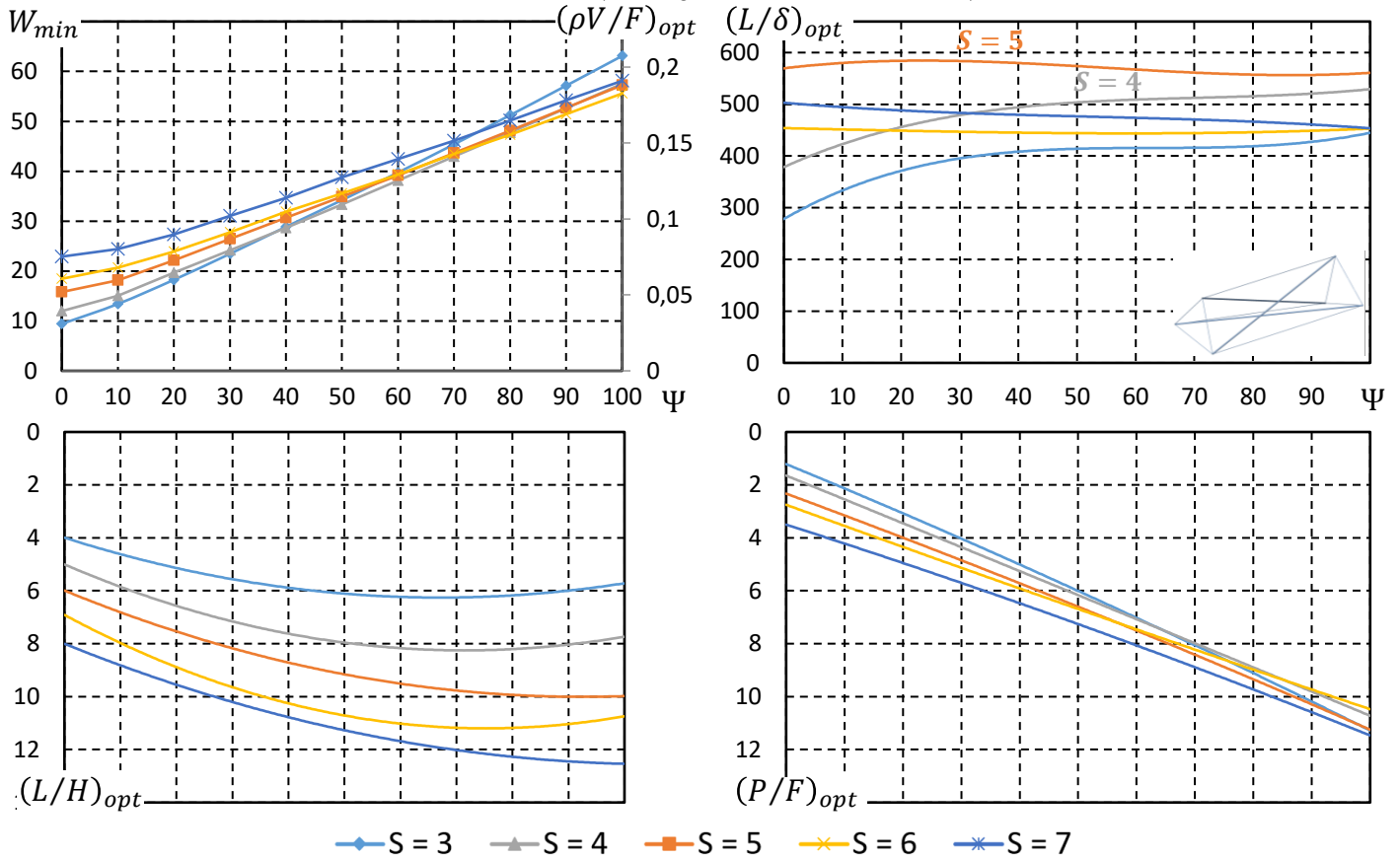


FIGURE 6.4 – COURBES D'EFFICACITÉ W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE SIMPLEX – $S = 3 - 7$, $E/\sigma = 900$, $\Phi = 33 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations & comparaisons avec cas $\Phi = 0$ (cfr Figure 6.3) :

- Plus l'indicateur de flambement Ψ est grand, plus l'impact du poids propre sur le volume minimum et la précontrainte est important ;
- L'élanement optimal $(L/H)_{opt}$ ne semble pas influencé par l'indicateur de poids propre. En effet, on obtient un graphique similaire au cas $\Phi = 0$;
- Le volume de matière minimum et la précontrainte ont légèrement augmenté par rapport au cas $\Phi = 0$. Le poids propre n'a donc pas beaucoup d'influence pour des structures de petite portée. Il est étonnant de constater que cette augmentation de charge a induit une diminution des déformations δ pour certaines structures ;
- Les structures composées de 5 simplexe ($S = 5$) sont toujours les plus efficaces en termes de déformations et de volume minimum de matière.
- On remarque que les structures composées de 4 simplexe ($S = 4$) respectent désormais le critère de déformation à partir de $\Psi \geq 40$;
- L'efficacité matérielle est très bonne. En effet, le poids propre est faible comparé au chargement externe.

La première caractéristique s'applique à tous les modules de tenségrité.

Soit les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W pour $\Phi = 132 \times 10^{-4}$:

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 132 \times 10^{-4}\right)$$

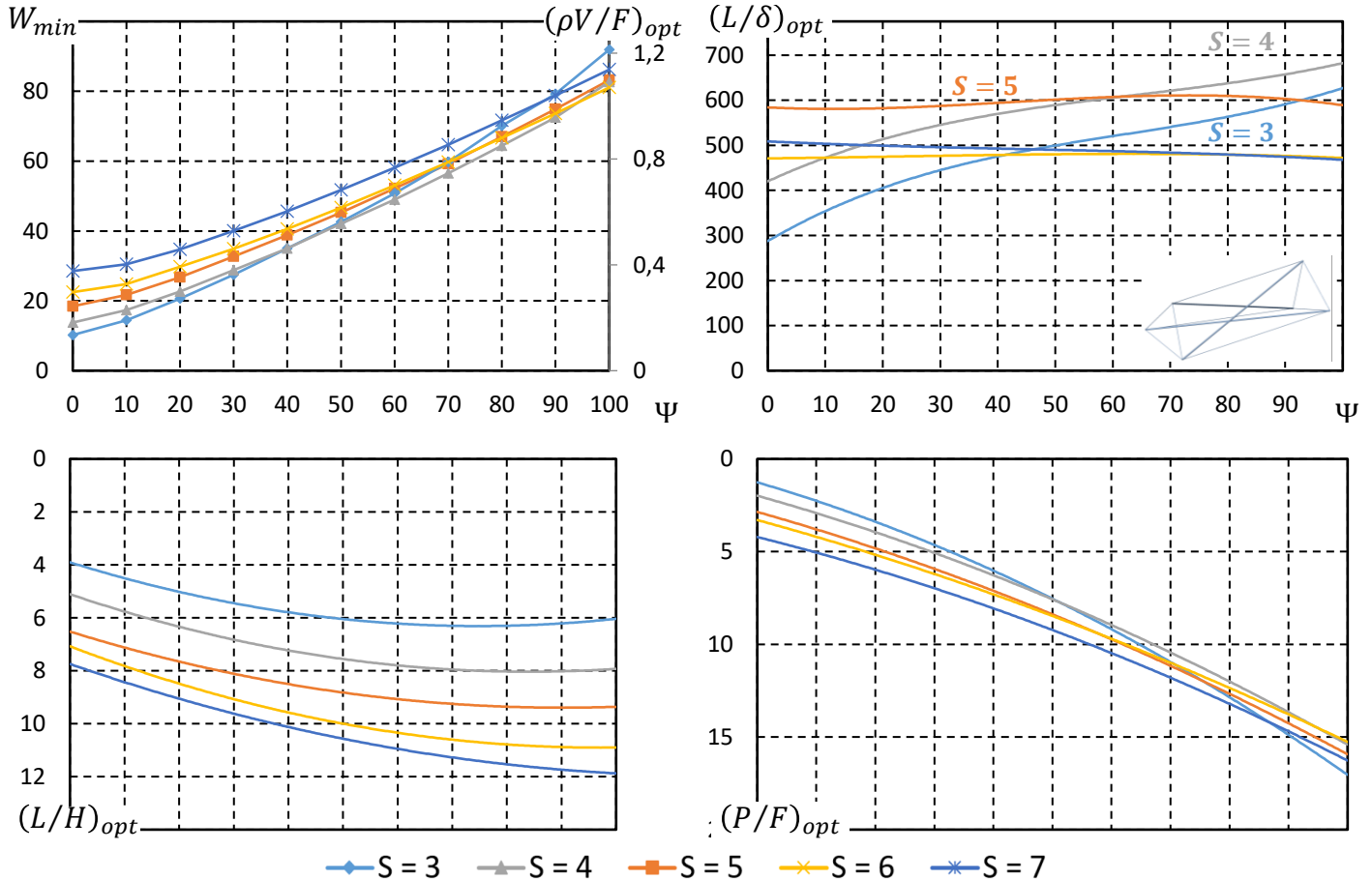


FIGURE 6.5 – COURBES D'EFFICACITÉ W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE SIMPLEX – $S = 3 - 7$, $E/\sigma = 900, \Phi = 132 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations & comparaisons avec cas $\Phi = 33 \times 10^{-4}$ (cfr Figure 6.4) :

- Le volume minimum de matière a globalement augmenté. Plus l'indicateur de flambement Ψ est grand, plus l'impact du poids propre sur le volume minimum et la précontrainte est important ;
- L'élanement optimal $(L/H)_{opt}$ est toujours fort similaire au cas $\Phi = 0$;
- Cette augmentation globale du volume résulte d'une importante augmentation de la précontrainte. On remarque que les structures composées de $S = 4 - 7$ simplexe respectent désormais le critère de déformation $L/\delta \geq 500$. Cependant, la précontrainte et le volume minimum de matière peuvent devenir trop importants ;
- Les structures composées de $S = 5 - 8$ simplexe ont des déformations stables ;
- Les structures composées de $S = 3 - 5$ simplexe sont les plus pertinentes en termes de volume minimum de matière et déformations acceptables ($L/\delta \geq 500$). Cependant, la structure composée de 5 simplexe ($S = 5$) n'est plus la plus efficace. En effet, les structures composées de $S = 3$ (pour $\Psi \geq 50$) et $S = 4$ (pour $\Psi \geq 20$) simplexe sont globalement moins lourdes et moins précontraintes ;

- Le pourcentage de poids propre $\rho V/F$ a fortement augmenté mais reste raisonnable.

Les courbes d'efficacité permettent d'affirmer l'existence de passerelles de tenségrité composées de simplex respectant le critère de déformation de l'Eurocode. Elles mettent également en évidence un inconvénient majeur des structures de tenségrité : le poids propre. Ces structures, visuellement légères, sont en fait très massives.

L'intérêt de la prise en compte du poids propre dans l'optimisation est donc indéniable. En effet, lorsque l'indicateur de poids propre Φ devient important – pour des structures de grande portée L – l'impact du poids propre sur le volume minimum de matière et la précontrainte devient considérable.

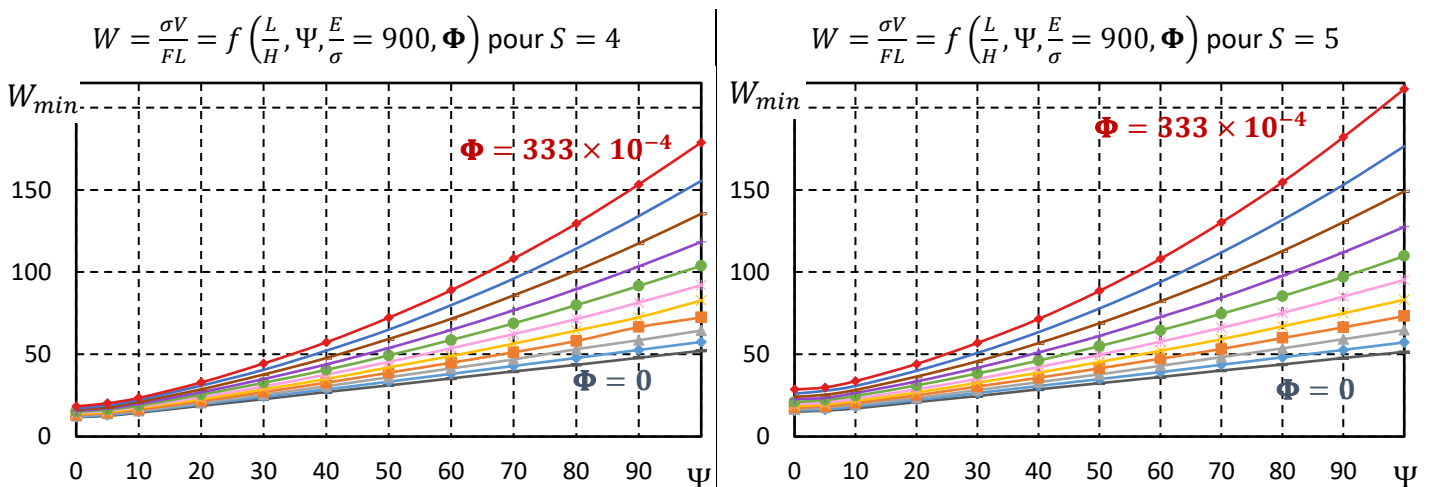
On remarque que la prise en compte du poids propre dans l'optimisation peut diminuer les déformations de certaines typologies de structures. Le poids propre peut ainsi avoir différents impacts sur les résultats :

- Soit le poids propre permet de diminuer les déformations de la structure. Intuitivement, cela pourrait s'expliquer par le fait que le poids propre participe à la rigidité de la structure. La structure aurait un comportement favorable et tirerait profit de son propre poids ;
- Soit le poids propre agit simplement comme une charge supplémentaire que la structure doit reprendre. Les déformations sont alors globalement stables.

Certaines typologies de structures, à priori efficaces pour des petites portées, perdent leur efficacité lorsque la longueur de la structure augmente. En effet, les structures composées de 5 simplex, initialement les plus performantes pour des petites portées, sont finalement devancées par les structures composées de $S = 3$ et $S = 4$ simplex lorsque la portée augmente. Il est donc primordial de considérer l'indicateur de poids propre Φ pour se rendre compte de l'efficacité réelle d'une typologie de structure.

Etudions l'impact du poids propre sur les structures composées de $S = 4$ et $S = 5$ simplex. Soit les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W , avec le déplacement optimal $(L/\delta)_{opt}$, l'élanement optimal $(L/H)_{opt}$ et le pourcentage de poids propre $(\rho V/F)_{opt}$ associés à cet optimum de volume, pour 10 valeurs de l'indicateur de poids propre comprises entre $\Phi = 33 \times 10^{-4}$ – 333×10^{-4} ($\leftrightarrow L = 10 \text{ m} - 100 \text{ m}$). Le cas $\Phi = 0$ est également représenté :

INDICATEUR DE VOLUME



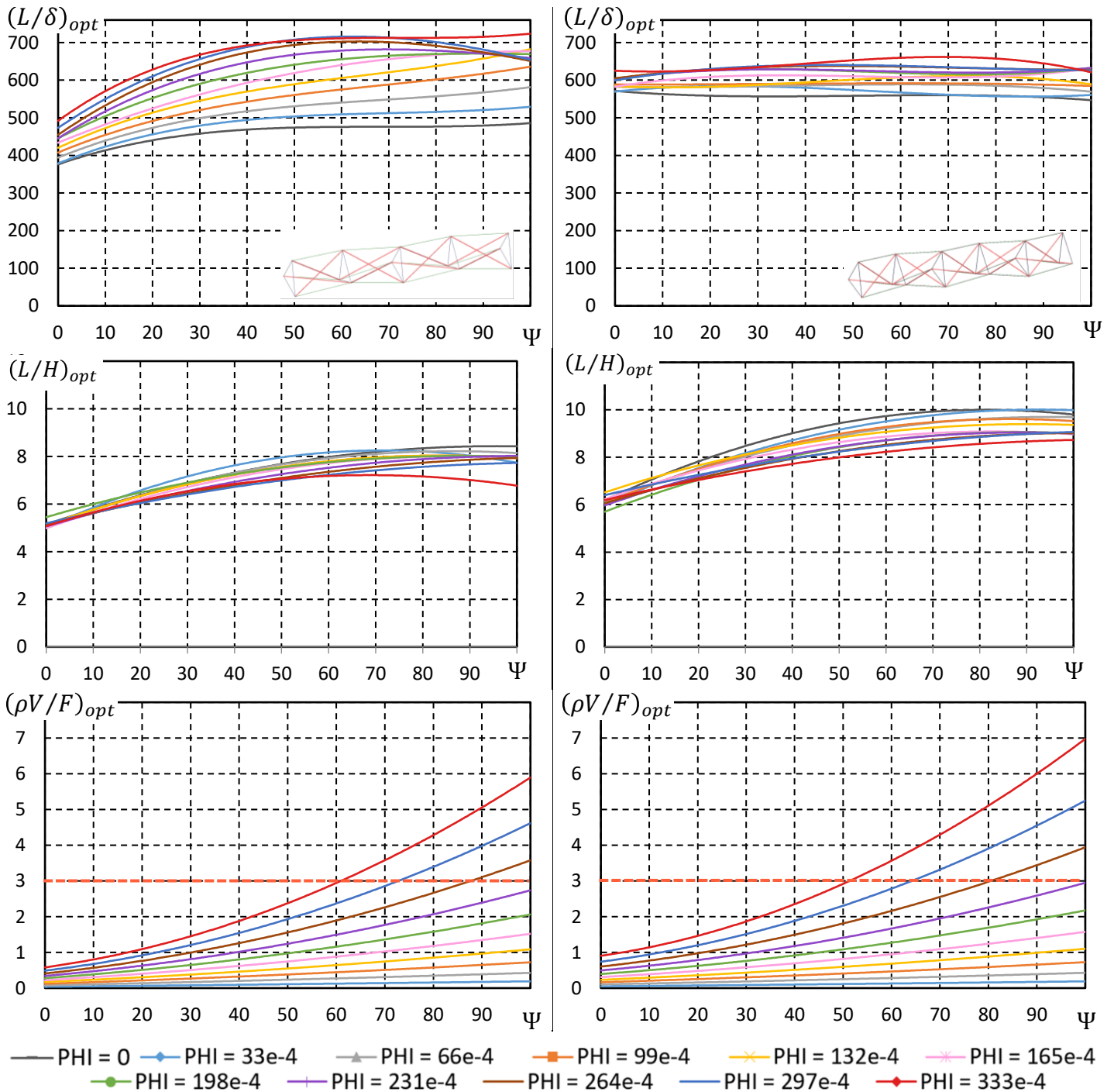


FIGURE 6.6 – COURBES D'EFFICACITÉ W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE SIMPLEX : $S = 4$ & $S = 5$, $E/\sigma = 900$, $\Phi = 0 - 333 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

- Le volume minimum de matière est plus faible pour le cas $S = 4$. Au plus l'indicateur de flambement Ψ et l'indicateur de poids propre Φ sont grands, au plus cette différence de volume minimum devient significative. Cela est très certainement lié au nombre d'éléments plus élevé de $S = 5$;
- Les déformations des structures composées de 5 simplex sont peu influencées par la portée, alors que les structures composées de 4 simplex se rigidifient beaucoup lorsque la portée augmente ;

- Le poids propre a très peu d'influence sur l'élanement optimal $(L/H)_{opt}$. La différence provient uniquement du fait que certaines structures sont écartées car elles ne respectent plus le critère de précontrainte $P < 50F$ lorsque la portée devient importante. Globalement, le même élanement va toujours optimiser le volume de matière d'une structure quelle que soit sa portée !
- Les structures de faible portée ont des résultats très proches du cas $\Phi = 0$. Le poids propre a une réelle influence lorsque la portée augmente ;
- Pour un certain indicateur de poids propre Φ , dès que les structures composées de 4 simplex respectent le critère de déformation $L/\delta \geq 500$, elles seront logiquement préférées aux structures composées de 5 simplex afin de réduire le volume de matière à mettre en œuvre. Lorsque l'indicateur de poids propre Φ devient important, cette réduction de volume, par rapport au cas $S = 5$, s'accompagne aussi d'une diminution des déformations.

Par exemple, si on considère une structure en acier S235 de portée $L = 20$ m, c'est-à-dire avec un indicateur de poids propre $\Phi = 66 \times 10^{-4}$. Pour un indicateur de flambement compris entre $\Psi = 0 - 30$, on optera pour une structure composée de 5 simplex pour limiter les déformations. Cependant, à partir de $\Psi > 30$, la structure composée de 4 simplex répond au critère de déformation et sera alors préférée pour limiter le volume de matière.

Les résultats illustrent bien la nature volumineuse des structures de tenségrité. Le poids propre ρV peut ainsi dépasser largement la charge externe F .

En pratique, il n'est pas très efficace de réaliser une passerelle reprenant essentiellement son poids propre. C'est pourquoi un critère de limitation du poids propre a été imaginé : $\rho V < 3F$ (cfr §4.3.5.1). Il est représenté par la ligne en pointillée rouge (voir Figure 6.6). Si le critère est d'application, les résultats supérieurs à cette ligne sont écartés. Pour la suite de ce chapitre, on se contentera de placer cette ligne de délimitation.

Le pourcentage de poids propre augmente inévitablement avec la portée de la structure. La sensibilité au flambement d'une structure a également une influence significative sur l'efficacité matérielle. En effet, les structures très sensibles au flambement ne savent reprendre qu'une faible charge externe et ont un volume de matière plus important.

6.1.5 Conclusion

L'ensemble des résultats permettent d'affirmer avec certitude que les passerelles de tenségrité composées de simplex sont réalisables. Jonas FERON avait déjà réussi à prouver la faisabilité de ce nouveau type de structure [3] mais il n'avait pas considéré le poids propre de la structure dans son étude. Or, on sait que les structures de tenségrité sont très massives.

En intégrant le poids propre dans l'optimisation, on a pu se rendre compte de l'impact qu'il pouvait avoir sur les déformations et le volume de matière à mettre en œuvre.

Lorsque la portée des structures devient grande, le volume de matière et la précontrainte peuvent devenir considérables, de telle manière que certaines configurations deviennent irréalisables suite à une précontrainte excessive ou un poids propre démesuré face au chargement externe.

Les déformations de ce type de structures de tenségrité sont globalement acceptables. En effet, plusieurs structures permettent de répondre aisément au critère de déformation de l'Eurocode.

On remarque que plusieurs observations peuvent être généralisées aux autres modules de tenségrité. Dès lors, elles ne seront plus mentionnées pour ne pas rendre l'étude redondante.

6.2 Structures de tensegrité composées de quadruplex suivant l'orientation n°1

6.2.1 Définition de la structure

Soit la structure de tensegrité composée de S quadruplex d'orientation n°1 (voir §5.2.2.1), de portée L , de hauteur H , soumise à une charge externe F uniformément répartie sur les nœuds supérieurs de la structure et dont le degré d'hyperstatiticé vaut $I_s = 1$:

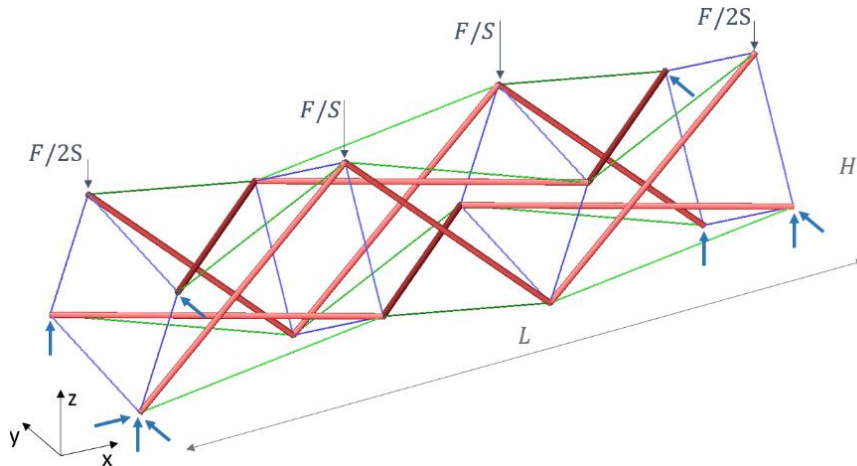


FIGURE 6.7 – DÉFINITION STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE QUADRUPLEX N°1 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

6.2.2 Hyperstatiticé d'une structure composée de quadruplex

Pour rappel, le degré d'hyperstatiticé total I_s d'une structure, dont les éléments sont uniquement soumis à de l'effort normal, peut être calculé à l'aide de l'équation (6-1) :

$$I_s = B_e + R_{appuis} - 3N_{nodes}$$

Dans le cas d'une structure composée de S quadruplex, on a :

$$B_e = 12S + 4$$

$$N_{nodes} = 4(S + 1)$$

Le nombre de réactions d'appuis R_{appuis} pour obtenir $I_s = 1$ vaut donc :

$$I_s = 12S + 4 + R_{appuis} - 12(S + 1) = 1 \rightarrow R_{appuis} = 9$$

Il faut donc positionner 9 appuis afin de rendre la structure hyperstatitique. Ces appuis ne peuvent pas être placés n'importe où. En effet, il faut que le système de tensegrité s'établisse correctement lorsque la structure est précontrainte et que l'on applique la charge externe. Autrement dit, le déplacement des nœuds des 2 bases d'extrémités doit rester réaliste. Les appuis doivent ainsi être positionnés au niveau des 6 nœuds des bases des modules d'extrémité de la structure (en bleu clair, voir Figure 6.7).

L'explication de ce positionnement particulier des appuis reste peu formelle jusqu'à présent. Néanmoins, il s'agit de la seule solution trouvée à ce jour qui permet au système de tensegrité de s'établir correctement. On verra que la méthode de précontrainte utilisée est intimement responsable.

Pour tenter de comprendre cette particularité de modélisation, considérons une simple structure de tensegrité composée d'un seul quadruplex et dont les 9 appuis sont positionnés intuitivement au niveau des 4 nœuds inférieurs (en bleu clair ci-dessous) :

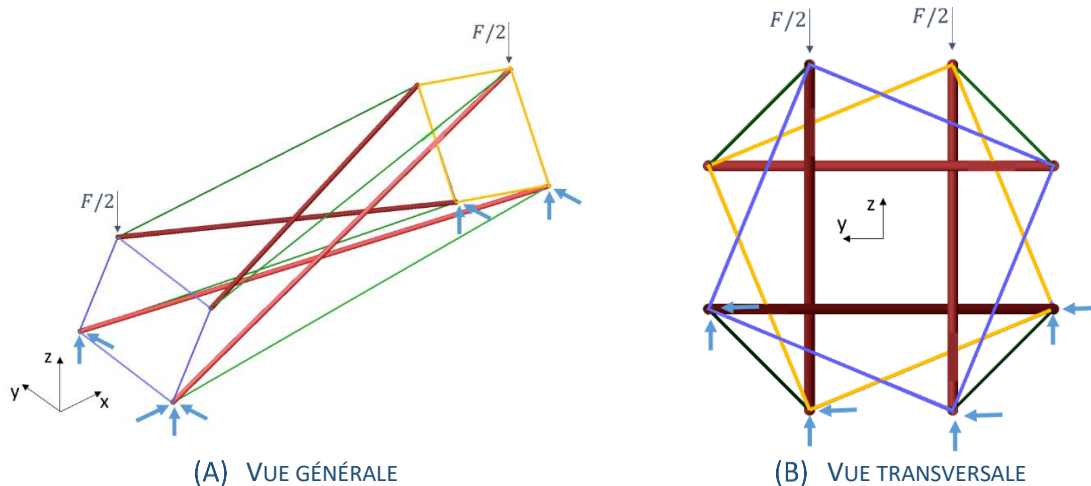


FIGURE 6.8 – STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE D’UN QUADRUPEX – MAUVAIS APPUIS [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]

Lorsque la structure n’est pas chargée et que l’on applique la précontrainte, le système se rigidifie. Pour rappel, la précontrainte est introduite en pré comprimant toutes les barres de façon uniforme. Cette pré compression va tendre les câbles de la structure. Le système de tensegrité s’établit alors correctement et les nœuds des bases sont fixes car la précontrainte introduite est uniforme. La structure déformée coïncide donc avec la structure initiale (voir Figure 6.9).

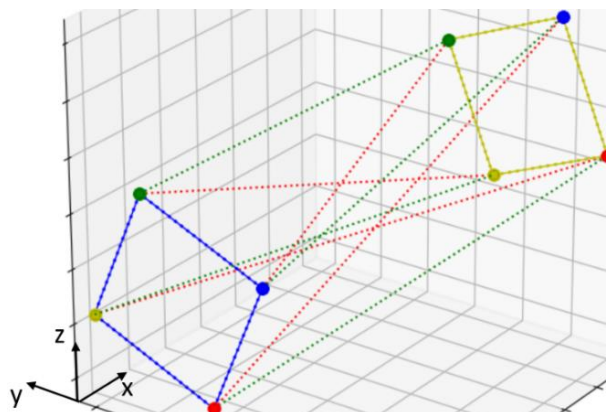


FIGURE 6.9 – DÉFORMATION DE LA STRUCTURE PRÉCONTRAÎTE SANS CHARGEMENT [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]

N.B. en trait plein les câbles des bases de la structure initiale, en pointillé la structure déformée.

Chargeons maintenant la structure précontrainte. La charge répartie s’applique aux 2 nœuds supérieurs des bases. Pour étudier le déplacement des nœuds des bases, nous allons appliquer une charge de plus en plus importante et observer comment réagit la structure :

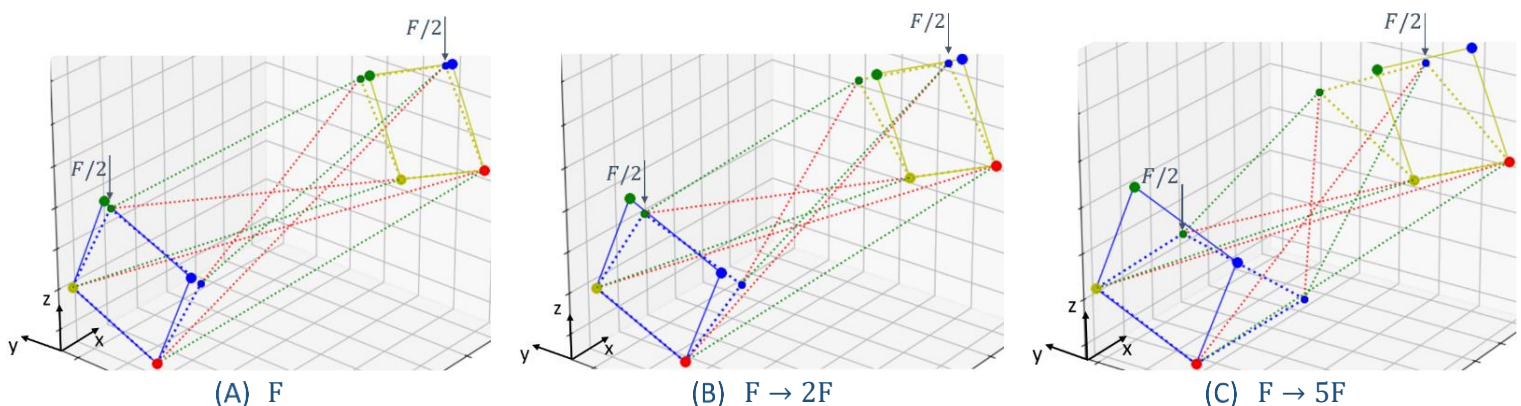


FIGURE 6.10 – DÉFORMATION DE LA STRUCTURE PRÉCONTRAÎTE ET CHARGÉE [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]

On remarque que les nœuds supérieurs des bases se déplacent loin de leur position initiale au fur et à mesure que la charge externe augmente. Les nœuds inférieurs sont fixes. Cependant, malgré le déplacement anormal des nœuds, la précontrainte permet de tendre tous les câbles.

Si on se concentre sur la première base (en bleu, voir Figure 6.8), on constate que si la pré compression P des barres est uniforme, rien ne retient les nœuds supérieurs de se déplacer lorsqu'on applique la charge externe. En effet, la composante verticale de la force résultante au nœud chargé $F_{R,V}$ (en bleu, Figure 6.11) est plus faible que la composante verticale de la précontrainte introduite $P_V (= P_H)$. Les nœuds supérieurs vont alors avoir tendance à se déplacer dans la direction du nœud non chargé.

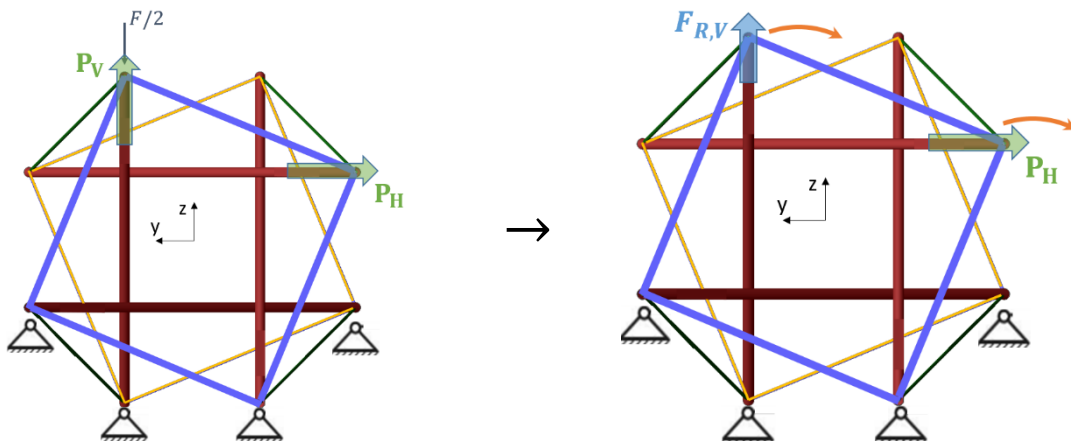


FIGURE 6.11 – DÉPLACEMENT DES NŒUDS SUPÉRIEURS DE LA 1^{ÈRE} BASE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Une solution envisageable serait d'introduire une précontrainte plus importante dans la barre liée au nœud chargé, afin de s'assurer que les nœuds de la base restent fixes. Cependant, cette option a été écartée car elle ne correspond pas à la méthode d'optimisation de la précontrainte développée (cfr §4.1.2).

Une solution alternative a été imaginée. Elle consiste à placer un appui (en y ou en z) aux nœuds supérieurs non chargés (voir Figure 6.12-B). Cela permet de maintenir la position des bases lorsqu'on charge la structure précontrainte. Le système de tenségrité s'établit alors correctement.

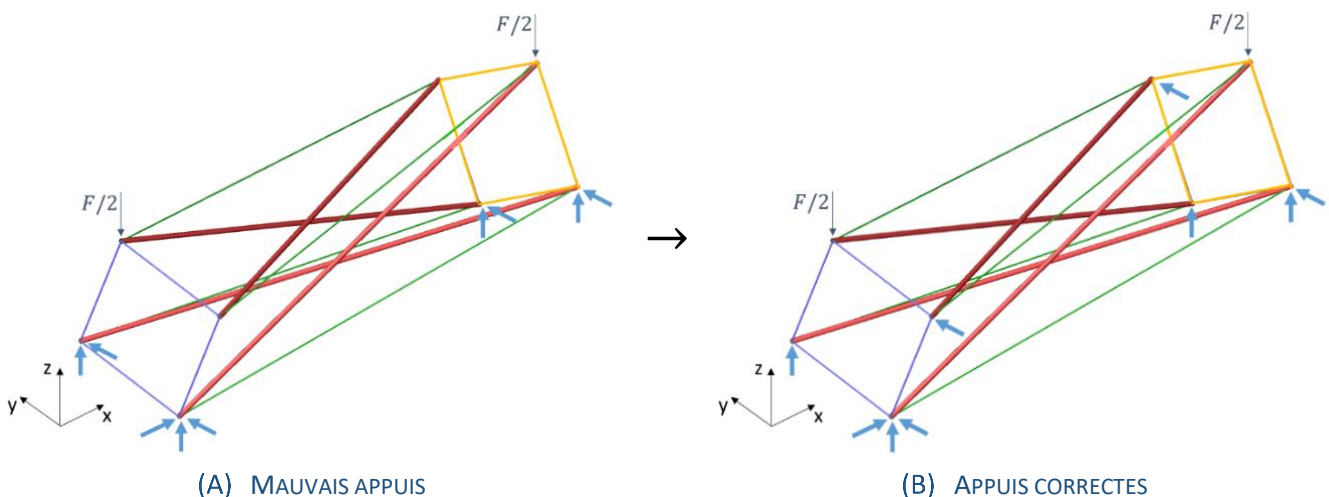


FIGURE 6.12 – POSITIONNEMENT DES APPUIS POUR UNE STRUCTURE COMPOSÉE DE QUADRUPLEX N°1 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Un raisonnement similaire a été appliqué pour tous les modules prismatiques. On verra que le nombre d'appuis varie en fonction du module et peut devenir important. Leur position et le nombre élevé d'appuis peuvent, à première vue, faire douter de la pertinence des résultats.

Or, les appuis sont uniquement placés de cette façon pour s'assurer que le système de tensegrité s'établisse correctement. Le nombre élevé d'appuis se justifie par la formule (6-1).

Néanmoins, une étude plus approfondie sur les appuis des structures tensegrité mériterait d'être réalisée. En effet, positionner de la sorte certains appuis peut s'avérer compliqué à mettre en œuvre.

6.2.3 Résultats de l'optimisation sans la prise en compte du poids propre

Tout d'abord, nous allons nous intéresser à l'étude des structures composées d'une succession de quadruplex n°1 (suivant l'orientation n°1) sans prendre en compte le poids propre dans l'optimisation, tel que $\Phi = 0$.

On obtient les courbes d'efficacité suivantes :

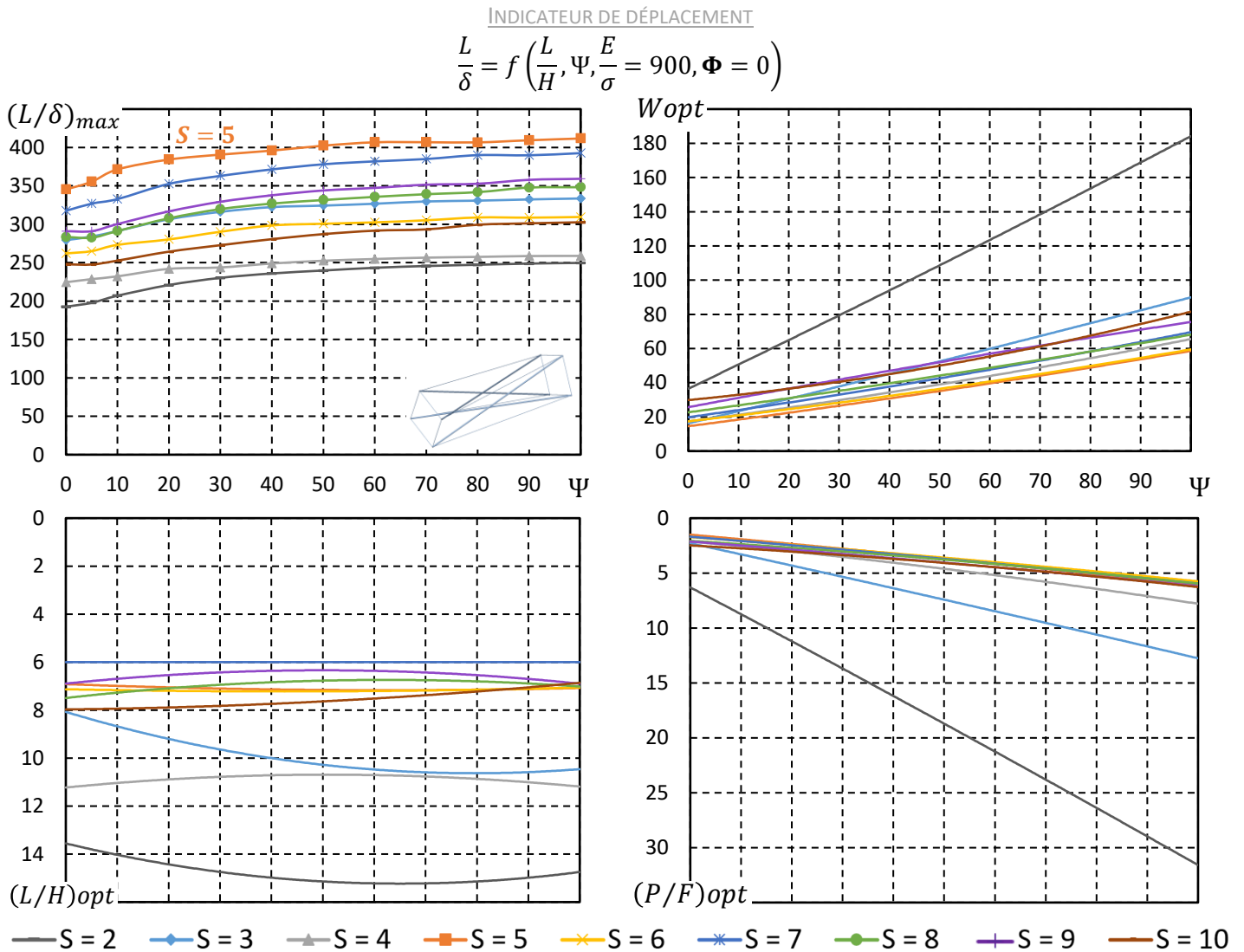


FIGURE 6.13 – COURBES D'EFFICACITÉ L/δ DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE QUADRUPLEX N°1 – $S = 2 - 10, E/\sigma = 900, \Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

- Aucune structure n'est capable de répondre au critère de déformation $L/\delta \geq 500$. Les déformations sont trop importantes malgré la précontrainte introduite ;

- Ce résultat illustre la puissance des indicateurs morphologiques : les structures qui optimisent les déformations ne garantissent toujours pas une rigidité suffisante. Ces structures de tensegrité sont donc a priori irréalisables. Toutefois, on verra à nouveau que le poids propre peut augmenter la rigidité de certaines typologies ;
- Les structures composées de $S = 5$ quadruplex n°1 se déforment moins et sont proches du critère de l'Eurocode ;
- Les structures composées de $S = 2$ quadruplex n°1 donnent les plus mauvais résultats. Elles se déforment énormément et sont beaucoup plus lourdes car la précontrainte introduite est plus importante.

Les structures composées de $S = 2$ quadruplex n°1 ne sont pas représentées dans les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume afin d'alléger les graphiques.

Soit les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W pour $\Phi = 0$:

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 0\right)$$

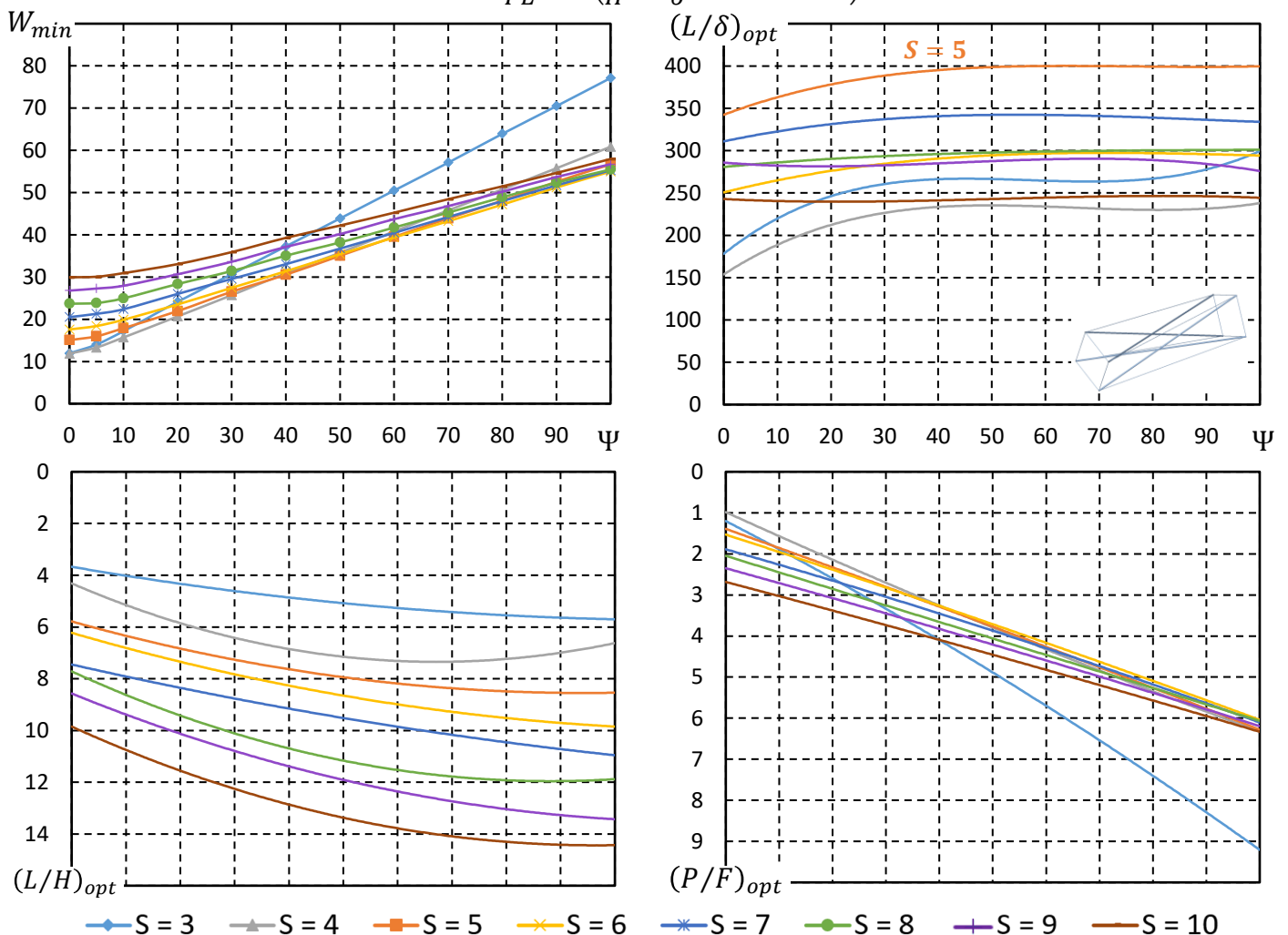


FIGURE 6.14 – COURBES D'EFFICACITÉ W DES STRUCTURES DE TENSEGRITÉ COMPOSÉES DE QUADRUPLEX N°1 – $S = 3 - 10$, $E/\sigma = 900$, $\Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

Les résultats sont similaires à ceux des structures composées de simplex (voir 6.1.3) à la différence près que les déformations sont plus importantes et les structures un peu plus lourdes.

6.2.4 Résultats de l'optimisation avec la prise en compte du poids propre

Les résultats obtenus sans la prise en compte du poids propre ne sont pas concluants. On obtient des structures avec des déformations trop importantes pour respecter le critère de l'Eurocode.

La prise en compte du poids propre va logiquement alourdir les structures et augmenter la précontrainte. Mais, on verra que cela va permettre de diminuer les déformations de certaines typologies de structure. Nous allons donc nous concentrer sur les courbes d'efficacité de l'indicateur de déplacement des structures composées de $S = 3 - 8$ quadruplex n°1 afin de voir si certaines configurations sont en mesure de respecter le critère de déformation.

Afin d'étudier l'influence du poids propre, nous allons considérer comme valeur de l'indicateur de poids propre : $\Phi = 132 \times 10^{-4}$. Dans le cas d'une structure en acier S235, cela correspond à une structure de portée $L = 40$ m. On utilisera cette même valeur de Φ pour les modules de tensegrité suivants.

Soit les courbes d'efficacité de l'indicateur de déplacement L/δ pour $\Phi = 132 \times 10^{-4}$:

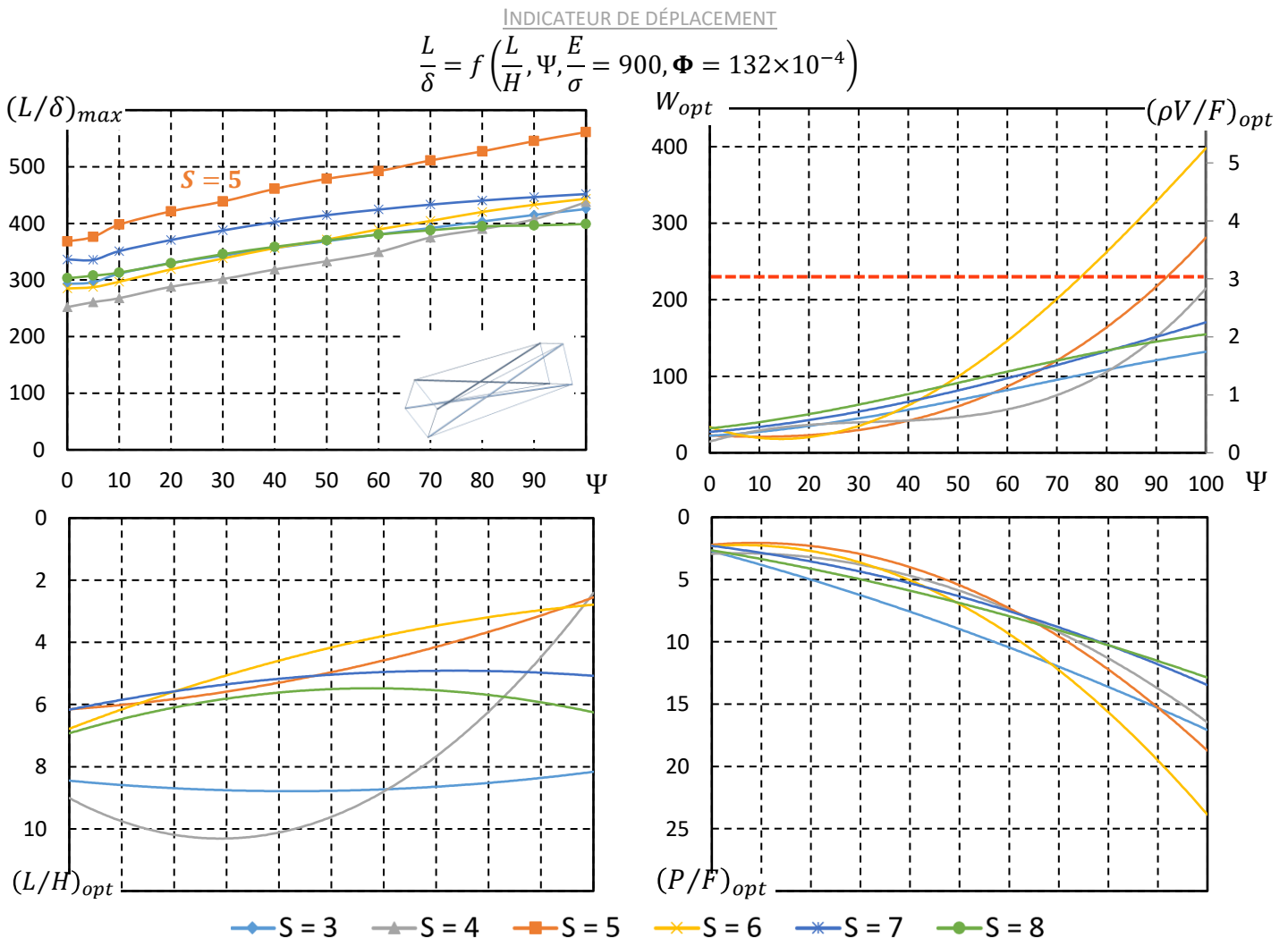


FIGURE 6.15 – COURBES D'EFFICACITÉ L/δ DES STRUCTURES DE TENSEGRITÉ COMPOSÉES DE QUADRUPLEX N°1 – $S = 3 - 8, E/\sigma = 900, \Phi = 132 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

N.B. Comme l'indicateur de pourcentage de poids propre est linéairement proportionnel à l'indicateur de volume, le critère de délimitation du poids propre ($\rho V < 3F$ – lignes en pointillé rouges) peut être placé sur le même graphique. Si le critère est d'application, les résultats supérieurs à cette ligne sont écartés.

Constatations & comparaisons avec cas $\Phi = 0$ (cfr Figure 6.13) :

- Les déformations ont diminué mais au prix d'une importante augmentation du volume de matière et de la précontrainte ;
- Les structures composées de 5 quadruplex n°1 respectent désormais le critère de déformation à partir de $\Psi \geq 60$. Cependant, le volume de matière devient considérable, ce qui remet en question la réelle pertinence de ces structures.

Afin de se rendre compte de l'impact du poids propre sur les déformations et le volume de matière, nous allons étudier plus précisément les structures composées de 5 quadruplex n°1.

Soit les courbes d'efficience de l'indicateur de volume W , avec le déplacement optimal $(L/\delta)_{opt}$, l'élancement optimal $(L/H)_{opt}$ et l'indicateur d'efficacité matérielle $(\rho V/F)_{opt}$ associés à cet optimum de volume, pour 10 valeurs de l'indicateur de poids propre comprises entre $\Phi = 33 \times 10^{-4} - 333 \times 10^{-4}$ ($\leftrightarrow L = 10 \text{ m} - 100 \text{ m}$). Le cas $\Phi = 0$ est également représenté. Ces mêmes valeurs de l'indicateur de poids propre Φ seront utilisées pour analyser l'influence de la portée des modules de tensegrité suivants.

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi\right) \text{ pour } S = 5$$

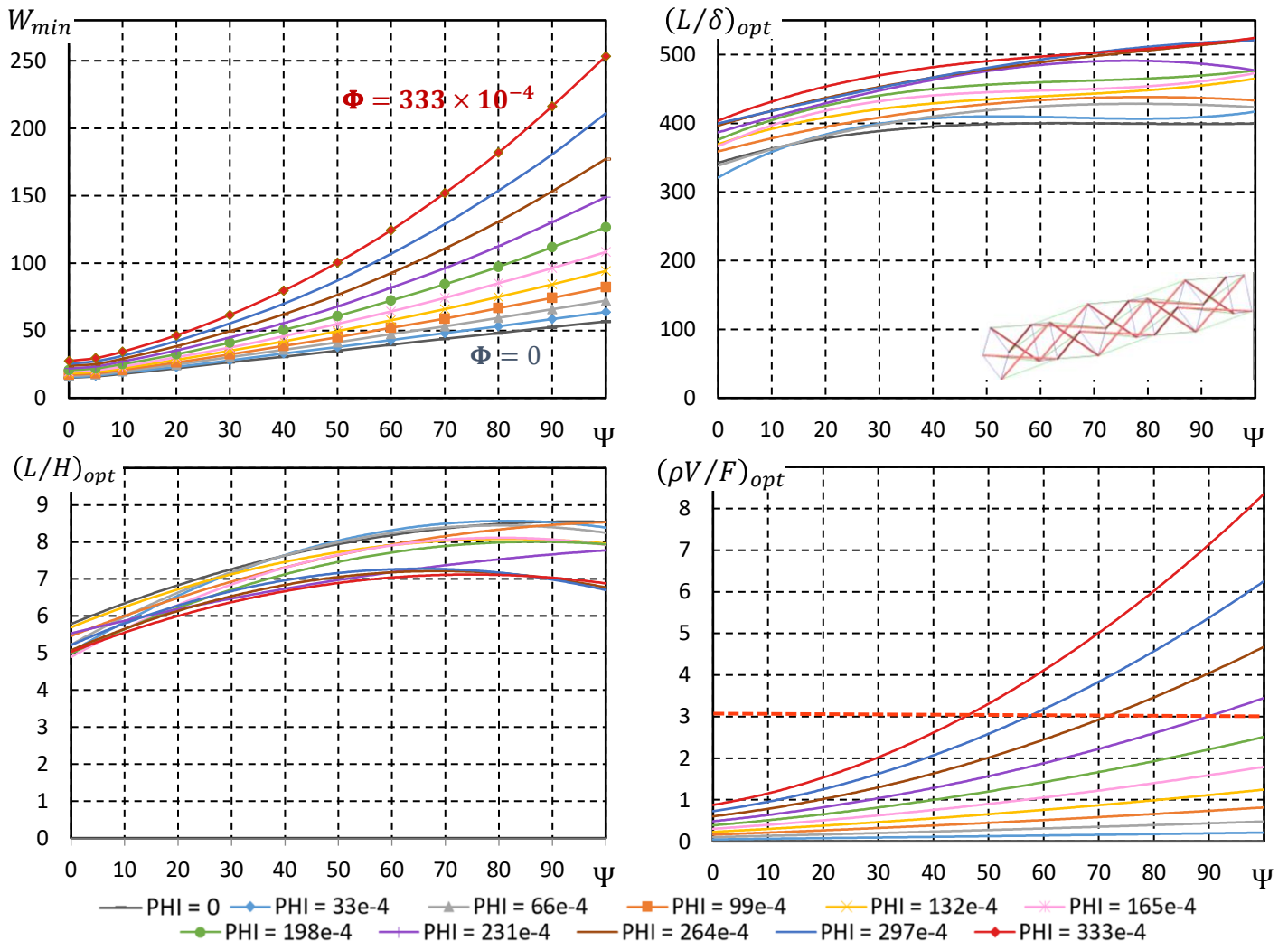


FIGURE 6.16 – COURBES D'EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE QUADRUPLEX N°1 : $S = 5$, $E/\sigma = 900$, $\Phi = 0 - 333 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

- Les déformations diminuent globalement lorsque la portée augmente. Autrement dit, le poids propre a tendance à rigidifier la structure ;
- Les structures de petite portée ont un volume minimum de matière acceptable, mais se déforment trop pour pouvoir respecter le critère de déformation ;
- Lorsque la portée augmente, certaines structures atteignent des déformations jugées acceptables. Cependant, ce gain de rigidité se paie par une augmentation importante du volume de matière ;
- A nouveau, le poids propre a très peu d'influence sur l'élancement optimal $(L/H)_{opt}$. La différence provient uniquement du fait que certaines structures sont écartées car elles ne respectent plus le critère de précontrainte $P < 50F$ lorsque la portée devient importante.

6.2.5 Conclusion

Ce module de tensegrité manque cruellement d'efficacité. En effet, à cause de sa faible rigidité, les déformations restent importantes malgré la précontrainte.

La prise en compte du poids propre a beaucoup d'influence sur les résultats. En effet, le volume de matière à mettre en œuvre devient démesuré lorsque l'indicateur de poids propre augmente, ce qui remet en question la pertinence des structures avec des déformations jugées acceptables.

Il est néanmoins remarquable que le poids propre rigidifie certaines typologies de structure, leur permettant ainsi de respecter le critère de déformation.

6.3 Structures de tensegrité composées de quadruplex suivant l'orientation n°2

6.3.1 Définition de la structure

Soit la structure de tensegrité composée de S quadruplex d'orientation n°2 (voir §5.2.3.1), de portée L , de hauteur H , soumise à une charge externe F uniformément répartie sur les nœuds supérieurs de la structure et dont le degré d'hyperstatiticité vaut $I_s = 1$:

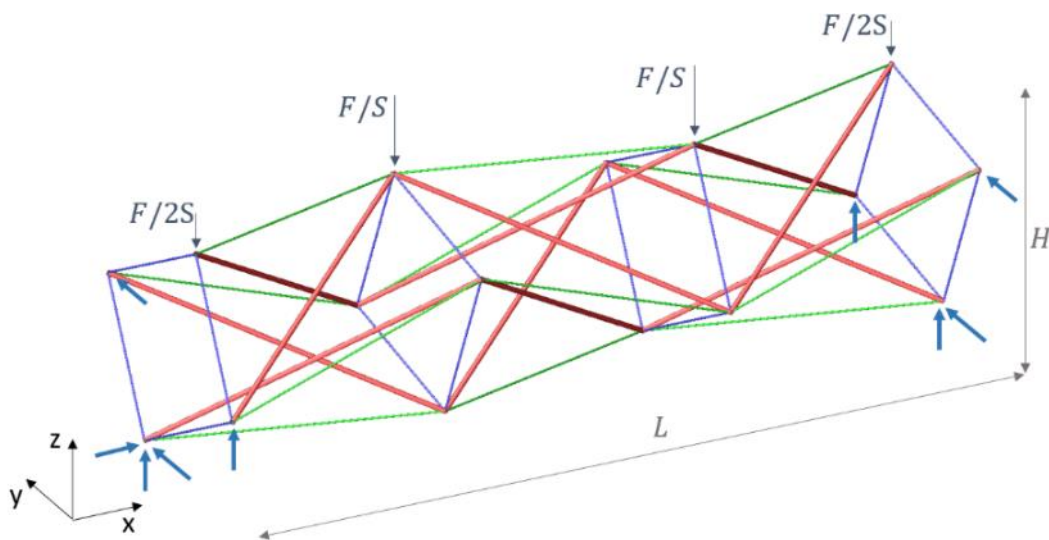


FIGURE 6.17 – DÉFINITION STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE QUADRUPLEX N°2 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Les appuis ont été positionnés en suivant le même raisonnement que pour le quadruplex n°1 (cfr §6.2.2).

6.3.2 Résultats de l'optimisation sans la prise en compte du poids propre

Tout d'abord, nous allons nous intéresser à l'étude des structures composées d'une succession de quadruplex n°2 (suivant l'orientation n°2) sans prendre en compte le poids propre dans l'optimisation, tel que $\Phi = 0$.

On obtient les courbes d'efficacité suivantes :

$$\frac{L}{\delta} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 0\right)$$

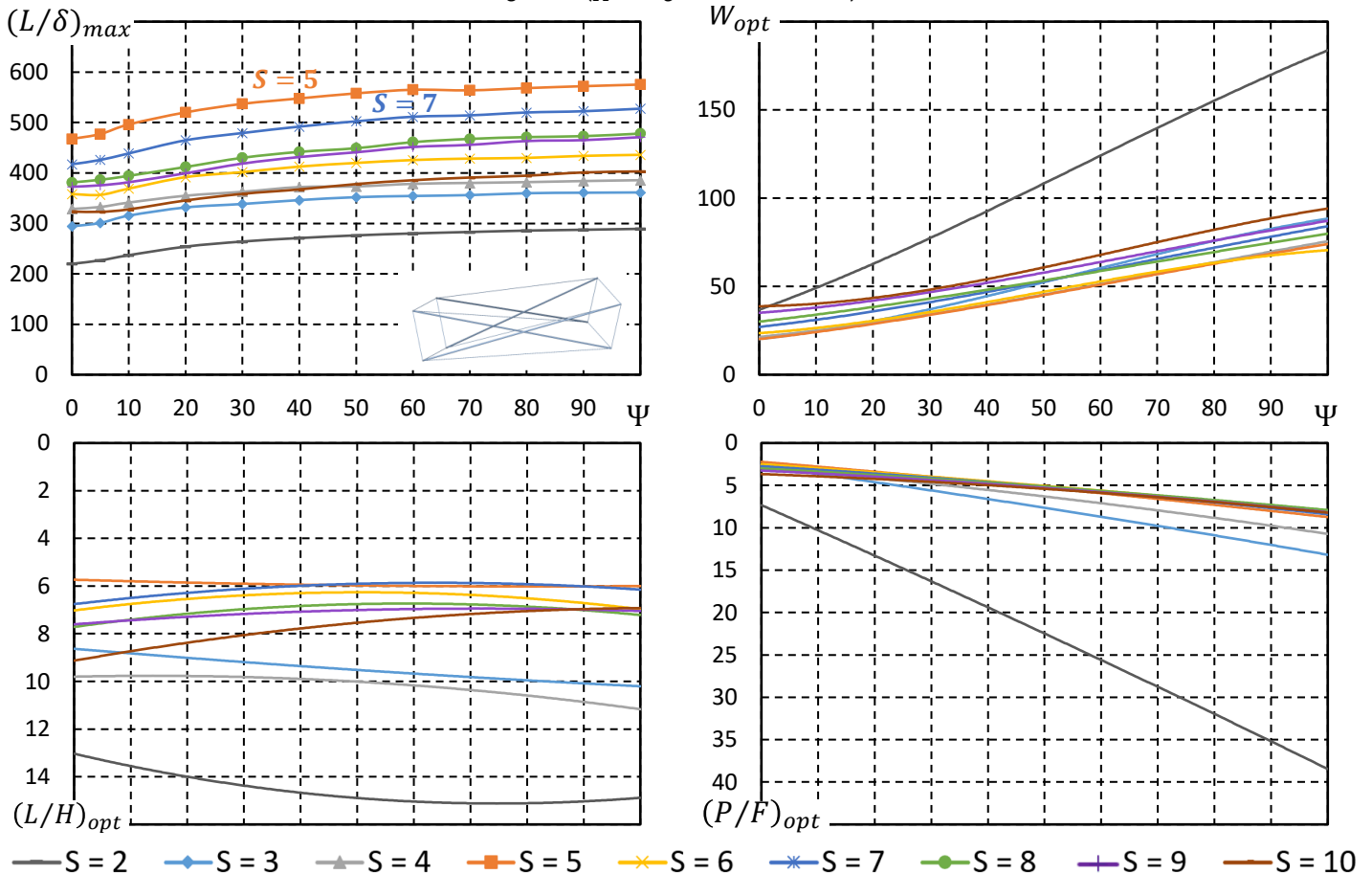


FIGURE 6.18 – COURBES D'EFFICACITÉ L/δ DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE QUADRUPLEX N°2 – $S = 2 - 10, E/\sigma = 900, \Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

- Les déformations sont sensiblement plus faibles que celles des structures composées de quadruplex n°1 (voir Figure 6.13) ;
- Plusieurs structures ($S = 5, 7$) sont capables de respecter le critère de déformation $L/\delta \geq 500$:
 - Pour $S = 5$: le critère de déformation est respecté pour $\Psi > 10$;
 - Pour $S = 7$: le critère de déformation est respecté pour $\Psi \geq 50$;
- Les structures composées de 5 quadruplex n°2 ($S = 5$) sont les moins déformables et requièrent une quantité de matière raisonnable. Il s'agit également des structures les plus légères ;
- Les structures composées de $S = 2$ quadruplex n°2 donnent les plus mauvais résultats. Elles se déforment énormément et sont beaucoup plus lourdes car la précontrainte introduite est plus importante.

Les structures composées de $S = 2$ quadruplex n°2 ne sont pas représentées dans les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume afin d'alléger les graphiques.

Soit les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W pour $\Phi = 0$:

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 0\right)$$

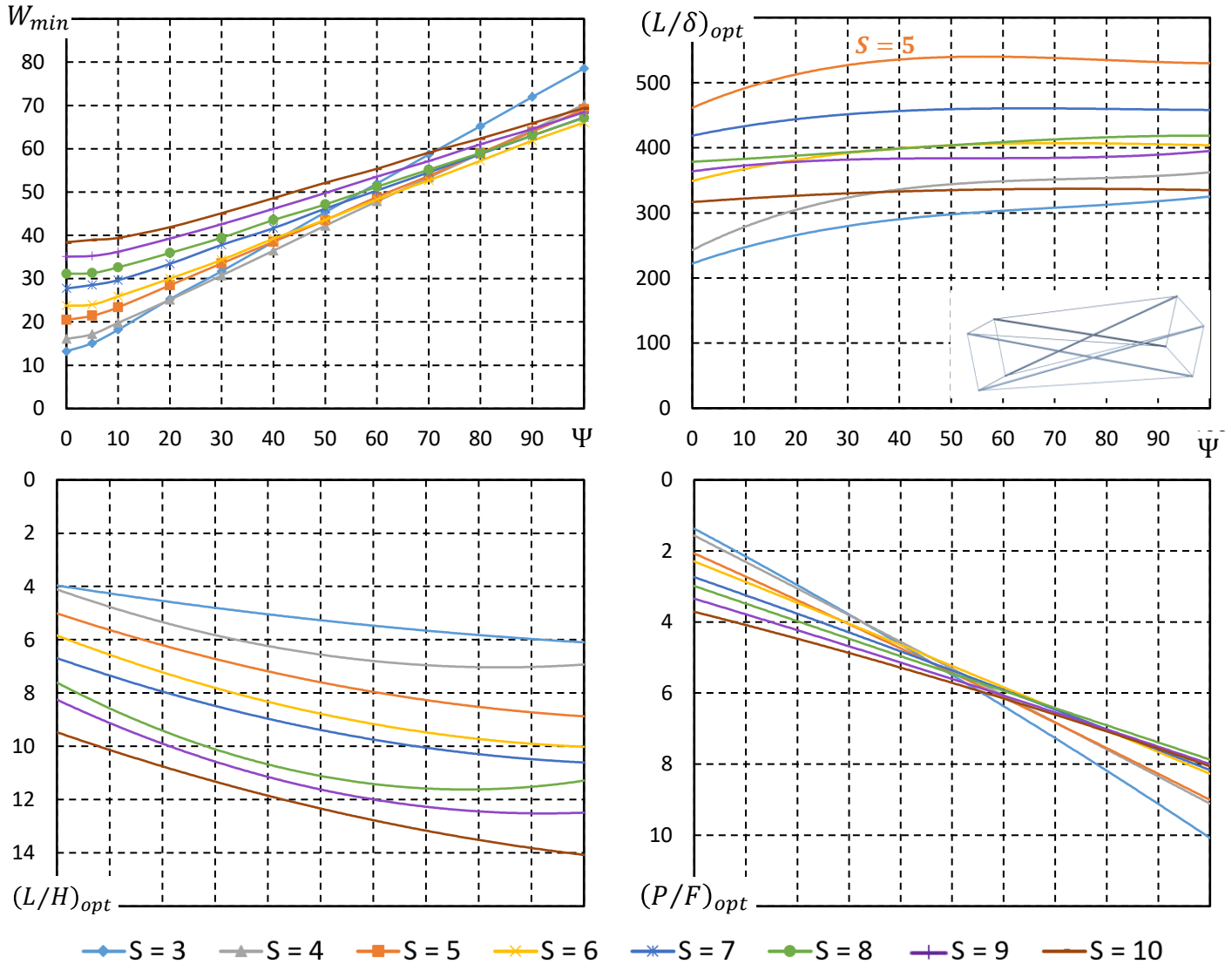


FIGURE 6.19 – COURBES D'EFFICACITÉ W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE QUADRUPLEX N°2 – $S = 3 - 10, E/\sigma = 900, \Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

- Le volume minimum de matière et la précontrainte sont légèrement plus importants que pour le quadruplex n°1 (voir Figure 6.14), alors que les déformations ont fortement diminué ;
- Les structures composées de 5 quadruplex n°2 sont à nouveau les plus efficaces. Il s'agit de la seule configuration de S quadruplex n°2 dont les déformations δ associées au volume de matière minimum respectent le critère $L/\delta \geq 500$ (pour $\Psi > 10$).

6.3.3 Résultats de l'optimisation avec la prise en compte du poids propre

Pour ne pas surcharger les graphiques, nous allons étudier uniquement les configurations de structures les plus intéressantes. On va donc se concentrer sur les structures avec un nombre de quadruplex n°2 égal à $S = 3 - 7$.

Soit les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W pour $\Phi = 132 \times 10^{-4}$:

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 132 \times 10^{-4}\right)$$

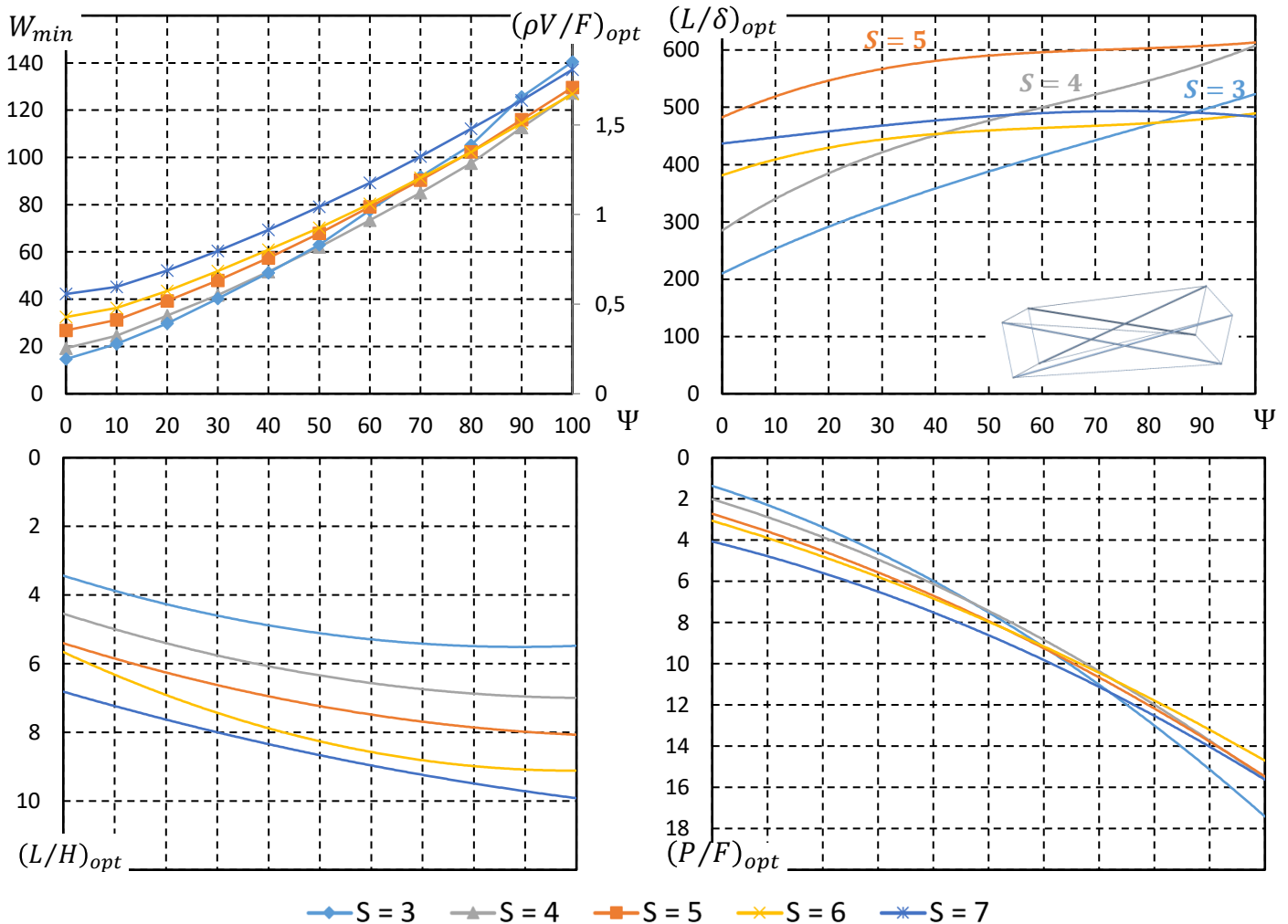


FIGURE 6.20 – COURBES D'EFFICACITÉ W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE QUADRUPLEX N°2 – $S = 3 - 7$, $E/\sigma = 900, \Phi = 132 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations & comparaisons avec cas $\Phi = 0$ (cfr Figure 6.19) :

- Le volume minimum de matière a globalement augmenté. Pour les structures composées de $S = 3 - 6$ quadruplex n°2, le volume a doublé en fonction de la valeur de l'indicateur de flambement Ψ . En effet, plus l'indicateur de flambement Ψ est grand, plus l'impact du poids propre sur le volume minimum et la précontrainte est important. Pour les structures composées de $S = 7$ quadruplex n°2, le volume minimum de matière devient considérable ;
- Cette augmentation globale du volume de matière résulte d'une augmentation de la précontrainte ;
- La prise en compte du poids propre a globalement diminué les déformations ;

- Les structures composées de $S = 4 - 5$ quadruplex n°2 sont les plus pertinentes en termes de volume minimum de matière et déformations acceptables ($L/\delta \geq 500$) ;
- Les structures composées de 5 quadruplex n°2 respectent toujours le critère de déformation. Alors que les structures composées de 4 quadruplex n°2 atteignent des déformations acceptables pour $\Psi \geq 60$;
- On remarque à nouveau que l'influence du poids propre sur les déformations des structures composées de 4 modules est plus importante que sur celles composées de 5 modules ;
- La sensibilité au flambement de la structure joue un rôle déterminant dans le choix de la structure la plus pertinente, c'est-à-dire la structure la plus légère avec des déformations acceptables.

Comme pour le simplex, ce nouveau module de tensegrité génère des structures assez massives. Il est donc primordial de prendre en compte le poids propre dans l'optimisation, d'autant plus lorsque la portée de la structure devient grande.

L'indicateur de poids propre Φ va permettre de se rendre compte de l'efficacité réelle d'une configuration de structure en fonction de sa portée.

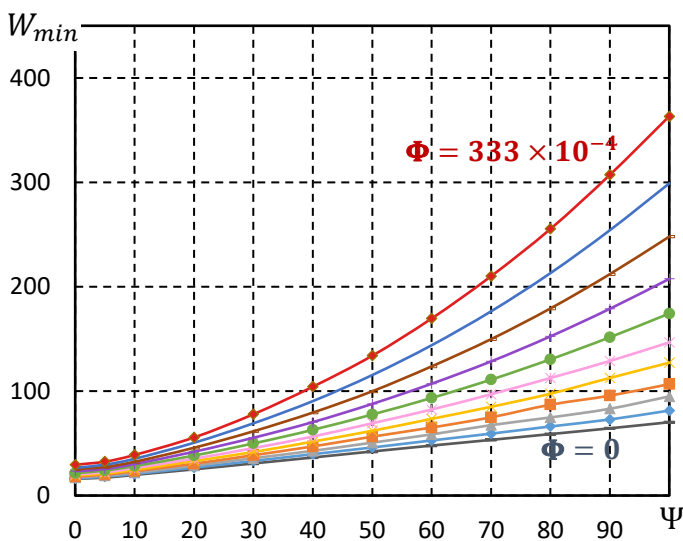
Le poids propre est lié, non seulement à la précontrainte, mais également au nombre d'éléments de la structure. En effet, l'impact du poids propre est d'autant plus significatif que le nombre d'éléments est élevé. Dans le cas d'un quadruplex, ce nombre reste raisonnable (16 éléments/modules).

Afin de se rendre compte de l'impact du poids propre et de son importance face au chargement externe, nous allons étudier plus précisément les structures composées de $S = 4$ et $S = 5$ quadruplex n°2 pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre Φ .

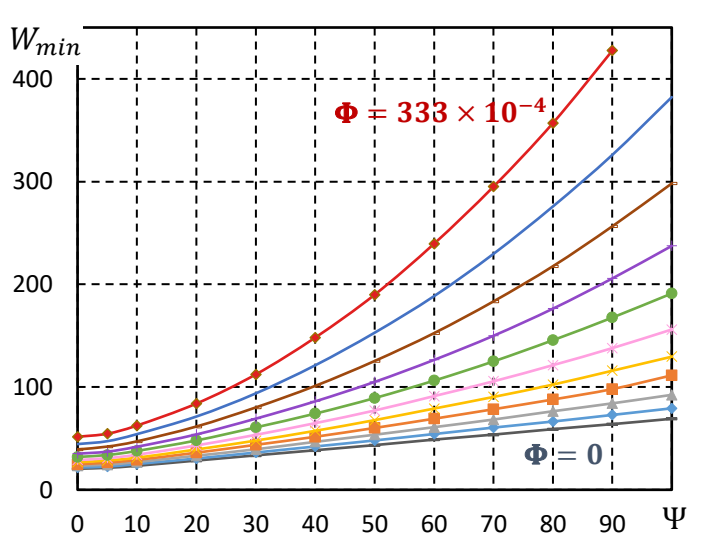
Soit les courbes d'efficience de l'indicateur de volume W :

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi\right) \text{ pour } S = 4$$



$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi\right) \text{ pour } S = 5$$



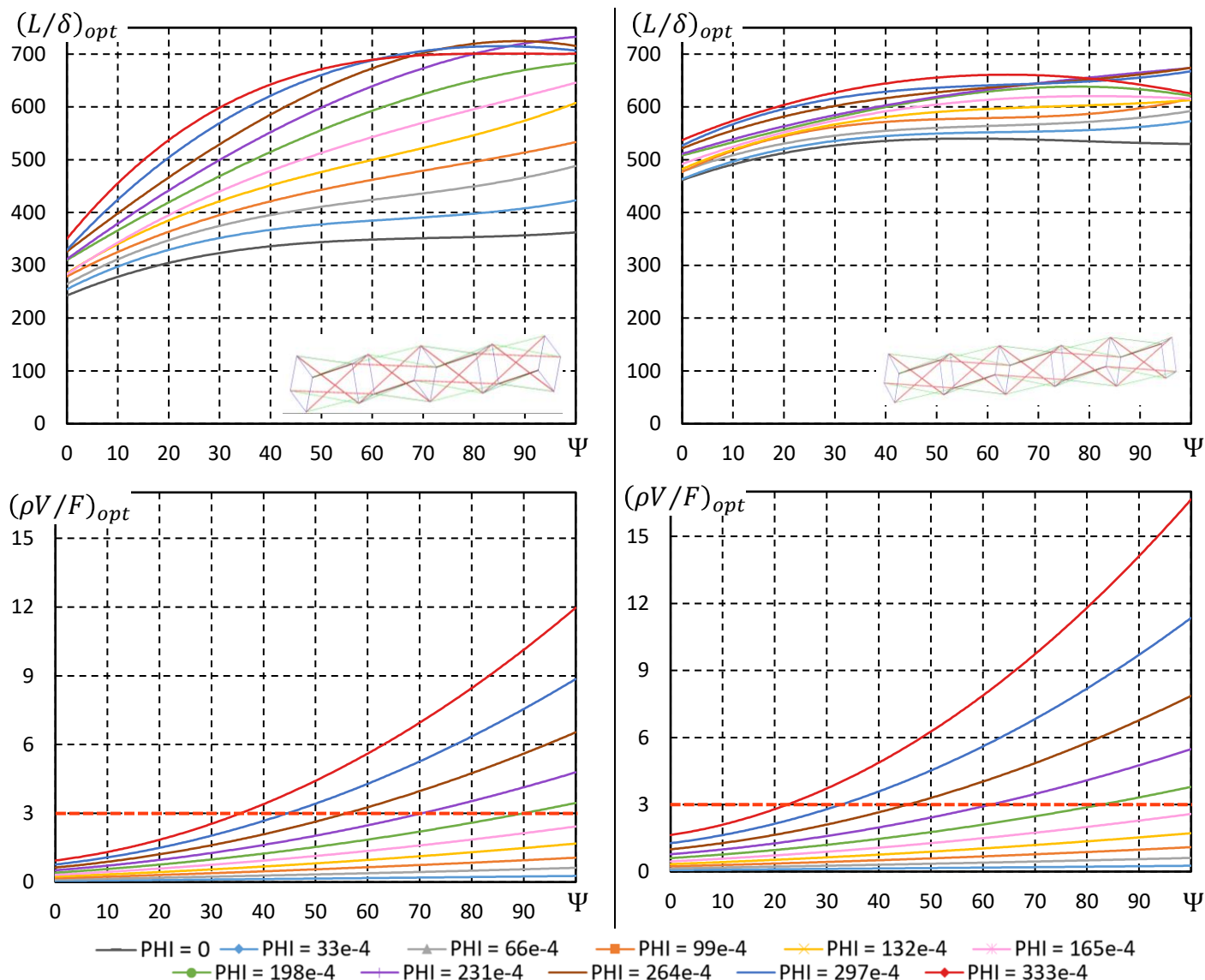


FIGURE 6.21 – COURBES D'EFFICACITÉ W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE QUADRUPLEX N°2 : $S = 4 - 5$, $E/\sigma = 900$, $\Phi = 0 - 333 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

- Suivant l'indicateur de flambement Ψ , on aura tendance à choisir l'une ou l'autre typologie de structure ($S = 4$ ou $S = 5$) afin d'obtenir la structure la plus légère avec les déformations acceptables ;
- Les déformations des structures composées de 4 modules sont favorablement influencées par leur poids propre et cela dès une faible portée ;
- Les déformations des structures composées de 5 modules diminuent également avec la portée mais l'impact est beaucoup moins significatif ;
- Le poids propre des structures de grande portée devient largement supérieur à la charge externe lorsque l'indicateur de flambement Ψ augmente. Ces structures auront tendance à reprendre uniquement leur poids propre et auront peu d'efficacité matérielle ;
- Le critère de limitation du poids propre ($\rho V < 3F$) réduit considérablement la réalisation de structures de grande portée composées de ce type de module. En effet, les structures de portée $L \geq 60$ m ne respectent plus le critère à partir d'une certaine valeur de l'indicateur de flambement Ψ car le poids propre devient trop important.

6.3.4 Conclusion

L'ensemble des résultats permettent d'affirmer que les passerelles de tensegrité composées de quadruplex n°2 sont réalisables.

Ce module est plus approprié pour des structures de petite portée. En effet, lorsque la portée augmente, le poids propre devient vite démesuré face au chargement externe et le volume de matière à mettre en œuvre s'en voit décuplé.

La sensibilité au flambement de la structure et sa portée auront une influence sur le choix du nombre de modules le plus efficace.

6.4 Structures de tensegrité composées de pentaplex suivant l'orientation n°1

6.4.1 Définition de la structure

Soit la structure de tensegrité composée de S pentaplex d'orientation n°1 (voir §5.2.3.1), de portée L , de hauteur H , soumise à une charge externe F uniformément répartie sur les nœuds supérieurs de la structure et dont le degré d'hyperstatiticé vaut $I_s = 1$:

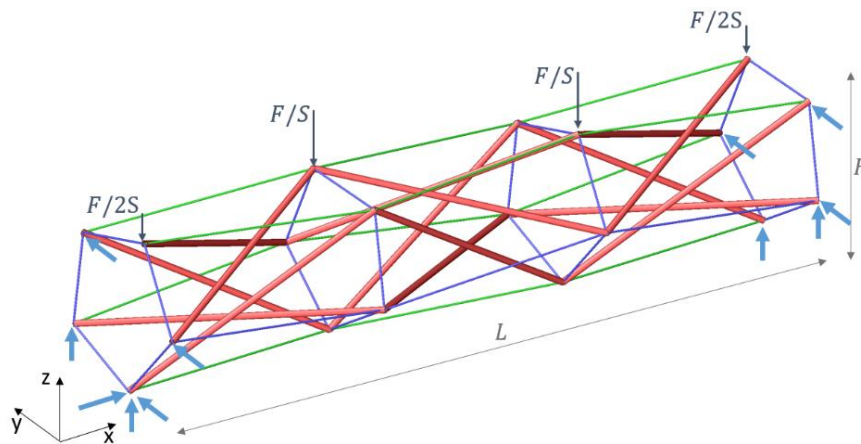


FIGURE 6.22 – DÉFINITION STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE PENTAPLEX N°1 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

6.4.2 Hyperstatiticé d'une structure composée de pentaplex

Le degré d'hyperstatiticé total I_s d'une structure de tensegrité peut être calculé à l'aide de l'équation (6-1) :

$$I_s = B_e + R_{appuis} - 3N_{nodes}$$

Dans le cas d'une structure composée de S pentaplex, on a :

$$B_e = 15S + 5$$

$$N_{nodes} = 5(S + 1)$$

Le nombre de réactions d'appuis R_{appuis} pour obtenir $I_s = 1$ vaut donc :

$$I_s = 15S + 5 + R_{appuis} - 15(S + 1) = 1 \rightarrow R_{appuis} = 11$$

Il faut donc positionner 11 appuis afin de rendre la structure hyperstatitique. Ces appuis ont été positionnés en suivant le même raisonnement que pour le quadruplex n°1 (cfr §6.2.2).

6.4.3 Résultats de l'optimisation sans la prise en compte du poids propre

Tout d'abord, nous allons nous intéresser à l'étude des structures composées d'une succession de pentaplex n°1 (suivant l'orientation n°1) sans prendre en compte le poids propre dans l'optimisation, tel que $\Phi = 0$.

On obtient les courbes d'efficacité suivantes :

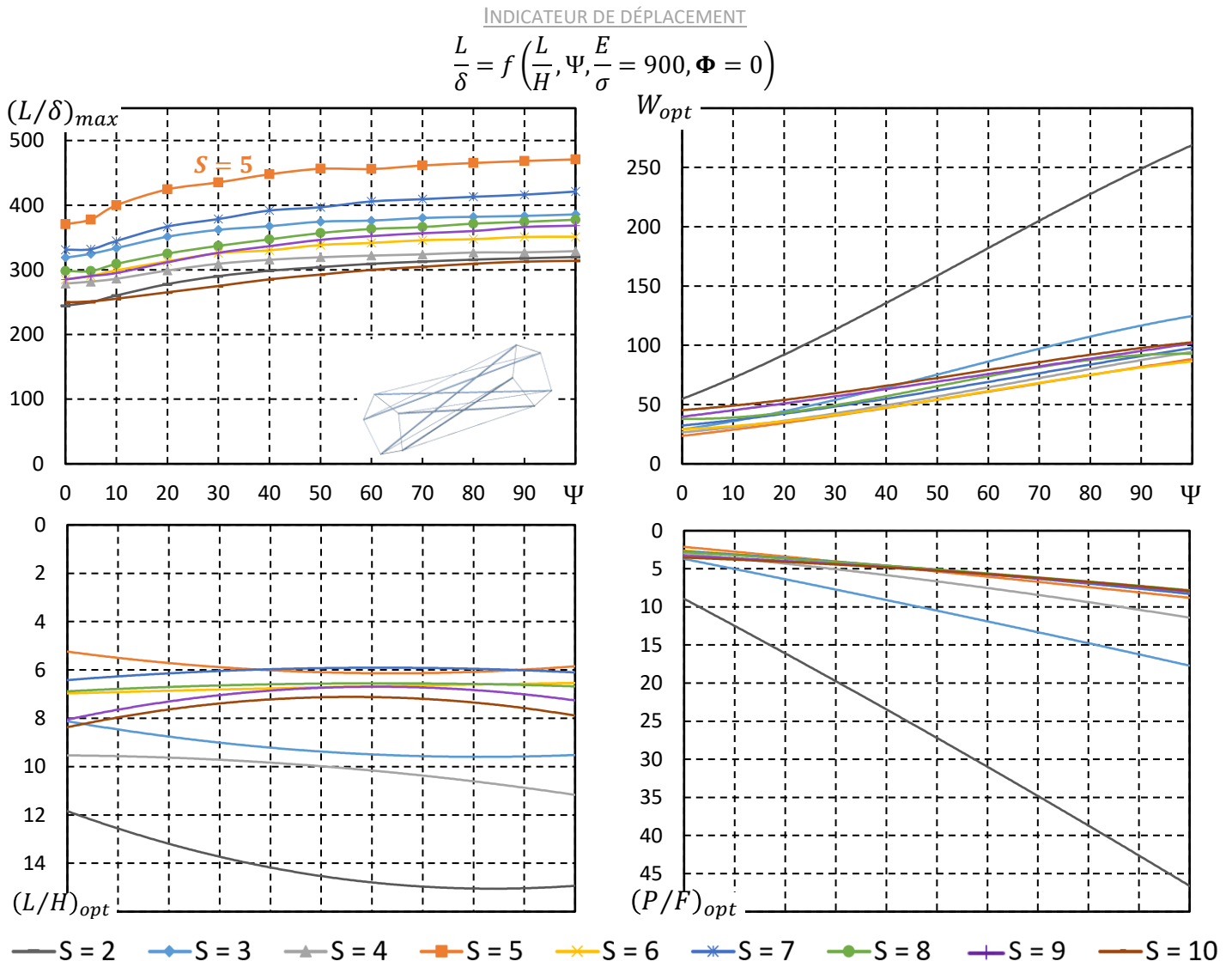


FIGURE 6.23 – COURBES D'EFFICACITÉ L/δ DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE PENTAPLEX N°1 – $S = 2 - 10, E/\sigma = 900, \Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

- Aucune structure n'est capable de répondre au critère de déformation $L/\delta \geq 500$. Les déformations sont trop importantes malgré la précontrainte introduite ;
- Les structures composées de $S = 5$ pentaplex n°1 se déforment moins et sont proches du critère de l'Eurocode ;
- Les structures composées de $S = 2$ pentaplex n°1 donnent les plus mauvais résultats. Elles se déforment énormément et le volume de matière est démesuré car la précontrainte introduite est énorme.

Les structures composées de $S = 2$ pentaplex n°1 ne sont pas représentées dans les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume afin d'alléger les graphiques.

Soit les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W pour $\Phi = 0$:

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 0\right)$$

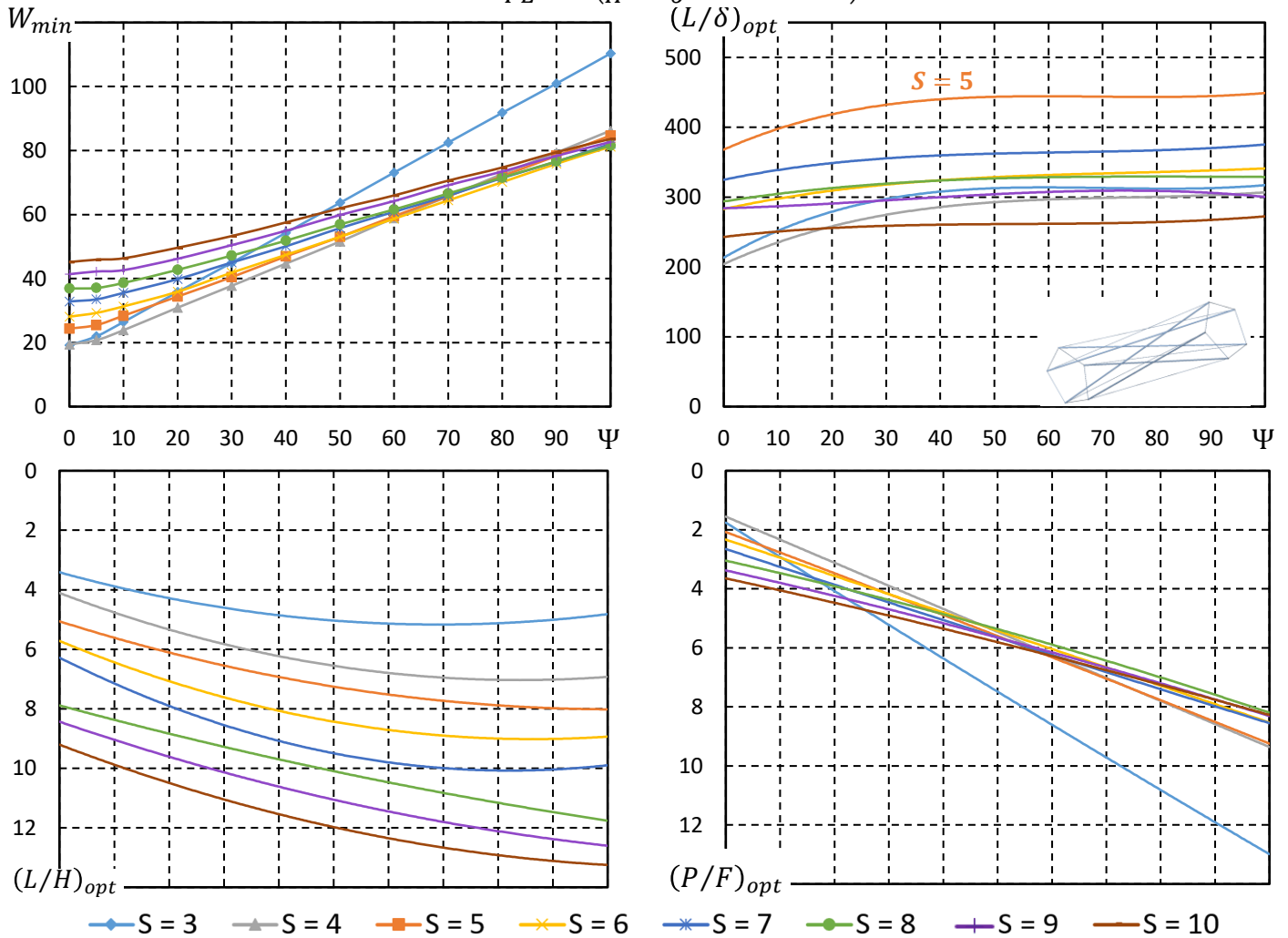


FIGURE 6.24 – COURBES D'EFFICACITÉ W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE PENTAPLEX N°1 – $S = 2 - 10, E/\sigma = 900, \Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

Le nombre d'éléments du module commence à avoir une influence significative sur le volume de matière à mettre en œuvre. En effet, le volume minimum de matière est important alors que la précontrainte introduite est du même ordre de grandeur que les modules précédents.

6.4.4 Résultats de l'optimisation avec la prise en compte du poids propre

Les résultats obtenus sans la prise en compte du poids propre ne sont pas concluants. On obtient des structures qui se déforment trop pour respecter le critère de déformation et qui consomment beaucoup de matière.

La prise en compte du poids propre va logiquement alourdir encore plus ces structures. Cependant, certaines typologies pourraient gagner en rigidité grâce au poids propre et finalement atteindre le critère de déformation.

Nous allons nous concentrer sur les courbes d'efficacité de l'indicateur de déplacement des structures composées de $S = 3 - 7$ pentaplex n°1.

Soit les courbes d'efficace de l'indicateur de déplacement L/δ pour $\Phi = 132 \times 10^{-4}$:

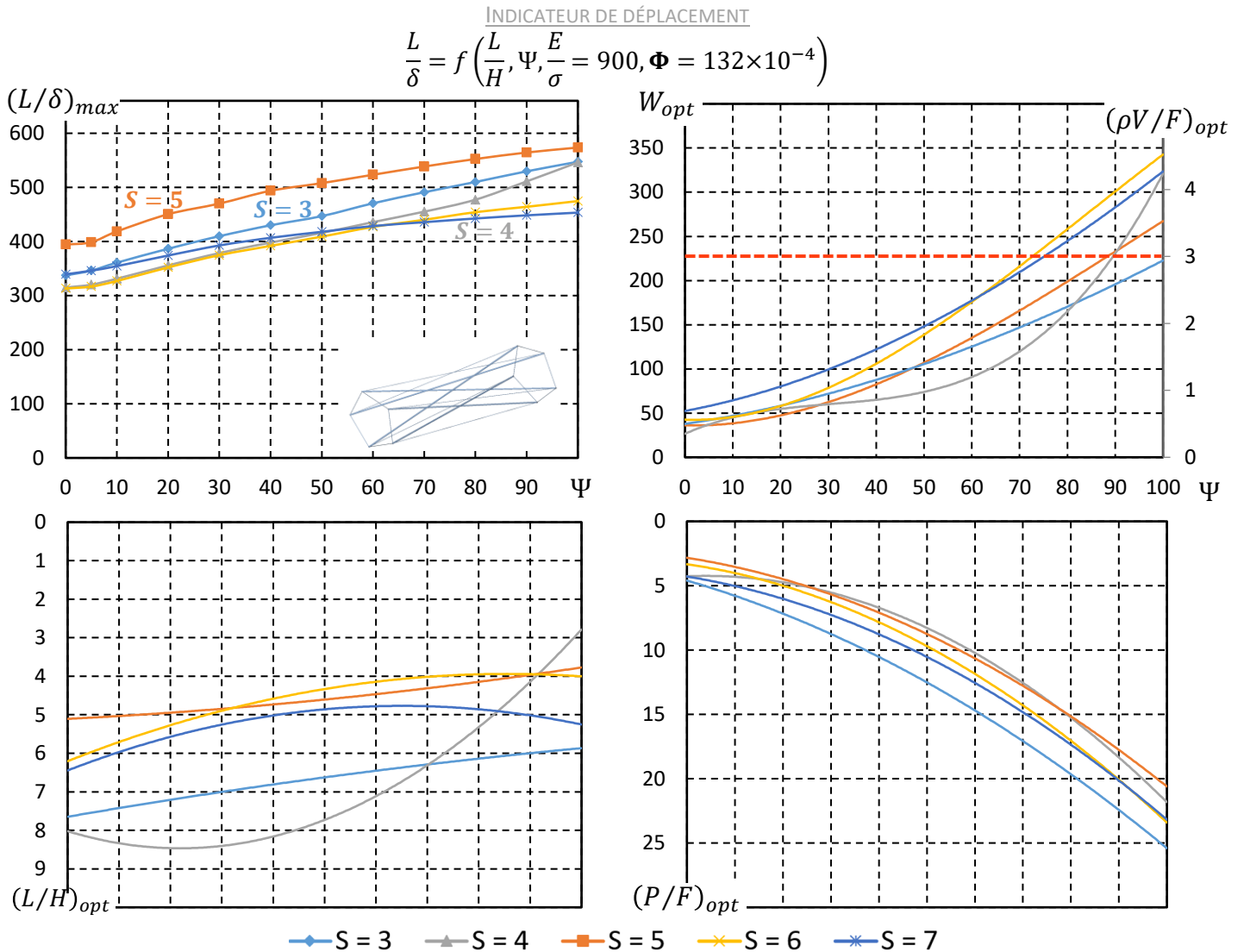


FIGURE 6.25 – COURBES D'EFFICACE L/δ DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE PENTAPLEX N°1 – $S = 3 - 7, E/\sigma = 900, \Phi = 132 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations & comparaisons avec cas $\Phi = 0$ (cfr Figure 6.23) :

- Les déformations ont diminué mais le volume de matière et la précontrainte ont décuplé ;
- Certaines structures respectent désormais le critère de déformation ($S = 3, 4, 5$) lorsque l'indicateur de flambement Ψ est grand. Cependant, la majorité de ces solutions ne sont pas pertinentes car le volume de matière à mettre en œuvre est démesuré :
 - $S = 3$: pour $\Psi > 70$, on obtient un volume de matière $W > 150$;
 - $S = 4$: pour $\Psi \geq 90$, on obtient un volume de matière $W > 225$;
 - $S = 5$: pour $\Psi > 40$, on obtient un volume de matière $W > 75$;
- Suivant l'indicateur de flambement, les structures composées de $S = 3$ ou $S = 5$ modules seront les plus efficaces ;
- Le pourcentage de poids propre est important et atteint rapidement des valeurs supérieures à $\rho V > 3F$ lorsque les déformations deviennent acceptables.

Afin de se rendre compte de l'impact du poids propre et de son importance face au chargement externe, nous allons étudier plus précisément les structures composées de 5 pentaplex n°1 pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre.

Soit les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi\right) \text{ pour } S = 5$$

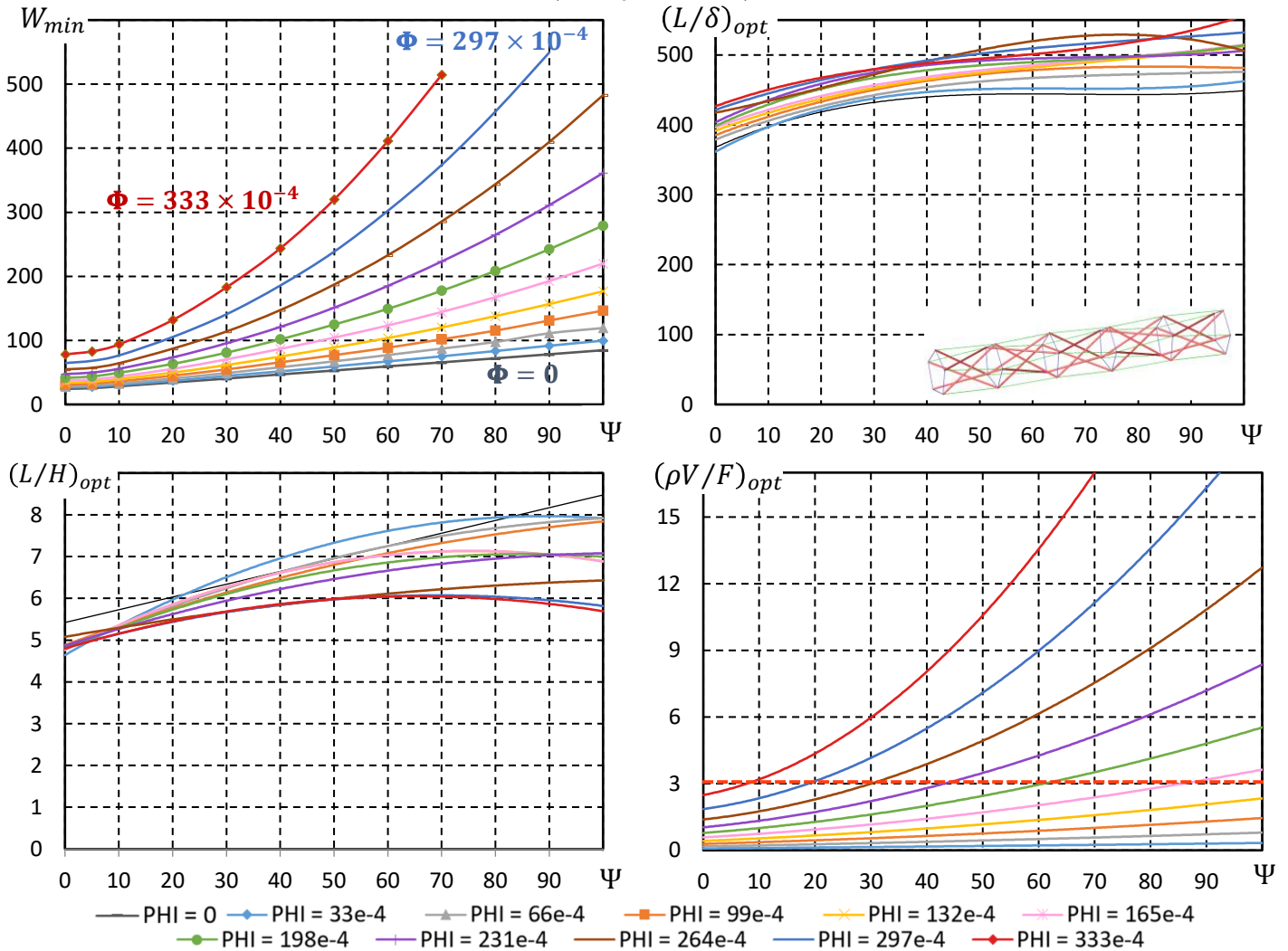


FIGURE 6.26 – COURBES D'EFFICACITÉ W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE PENTAPLEX N°1 : $S = 5$, $E/\sigma = 900$, $\Phi = 0 - 333 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

- Les déformations diminuent légèrement avec la portée de la structure ;
- Le volume minimum de matière devient vite démesuré lorsque la portée de la structure augmente, et cela bien avant avoir atteint des déformations acceptables ;
- Les structures de grande portée ($L = 90 \text{ m} - 100 \text{ m}$) ne respectent plus le critère de précontrainte ($P < 50F$) à partir d'une certaine valeur de l'indicateur de flambement. Ces structures sont considérées comme irréalisables ;
- L'élanement optimal des structures de petite portée est très peu influencé par le poids propre ;
- Les structures avec des déformations jugées acceptables ont très peu d'efficacité matérielle.

6.4.5 Conclusion

Ce module de tensegrité n'est pas très efficace. En effet, il consomme énormément de matière et se déforme beaucoup malgré la précontrainte.

La prise en compte du poids propre a beaucoup d'influence sur le volume de matière à mettre en œuvre et cela même pour des structures de petite portée.

Certaines structures atteignent des déformations acceptables mais uniquement à partir d'une certaine valeur de l'indicateur de flambement.

La réalisation de structures de tensegrité composées de pentaplex n°1 est donc très limitée. En effet, elle est réduite à des structures de faible portée et très sensibles au flambement. Un tel choix structural manquerait cruellement d'efficacité.

6.5 Structures de tensegrité composées de pentaplex suivant l'orientation n°2

6.5.1 Définition de la structure

Soit la structure de tensegrité composée de S pentaplex d'orientation n°2 (voir §5.2.3.1), de portée L , de hauteur H , soumise à une charge externe F uniformément répartie sur les nœuds supérieurs de la structure et dont le degré d'hyperstatiticé vaut $I_s = 1$:

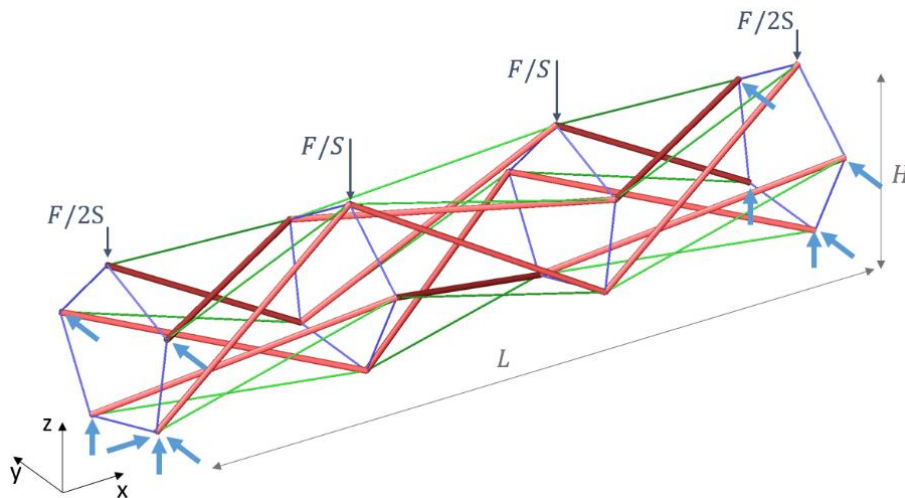


FIGURE 6.27 – DÉFINITION STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE PENTAPLEX N°2 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Les appuis ont été positionnés en suivant le même raisonnement que pour le quadruplex n°1 (cfr §6.2.2).

6.5.2 Résultats de l'optimisation sans la prise en compte du poids propre

Tout d'abord, nous allons nous intéresser à l'étude des structures composées d'une succession de pentaplex n°2 (suivant l'orientation n°2) sans prendre en compte le poids propre dans l'optimisation, tel que $\Phi = 0$.

On obtient les courbes d'efficacité suivantes :

INDICATEUR DE DÉPLACEMENT

$$\frac{L}{\delta} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 0\right)$$

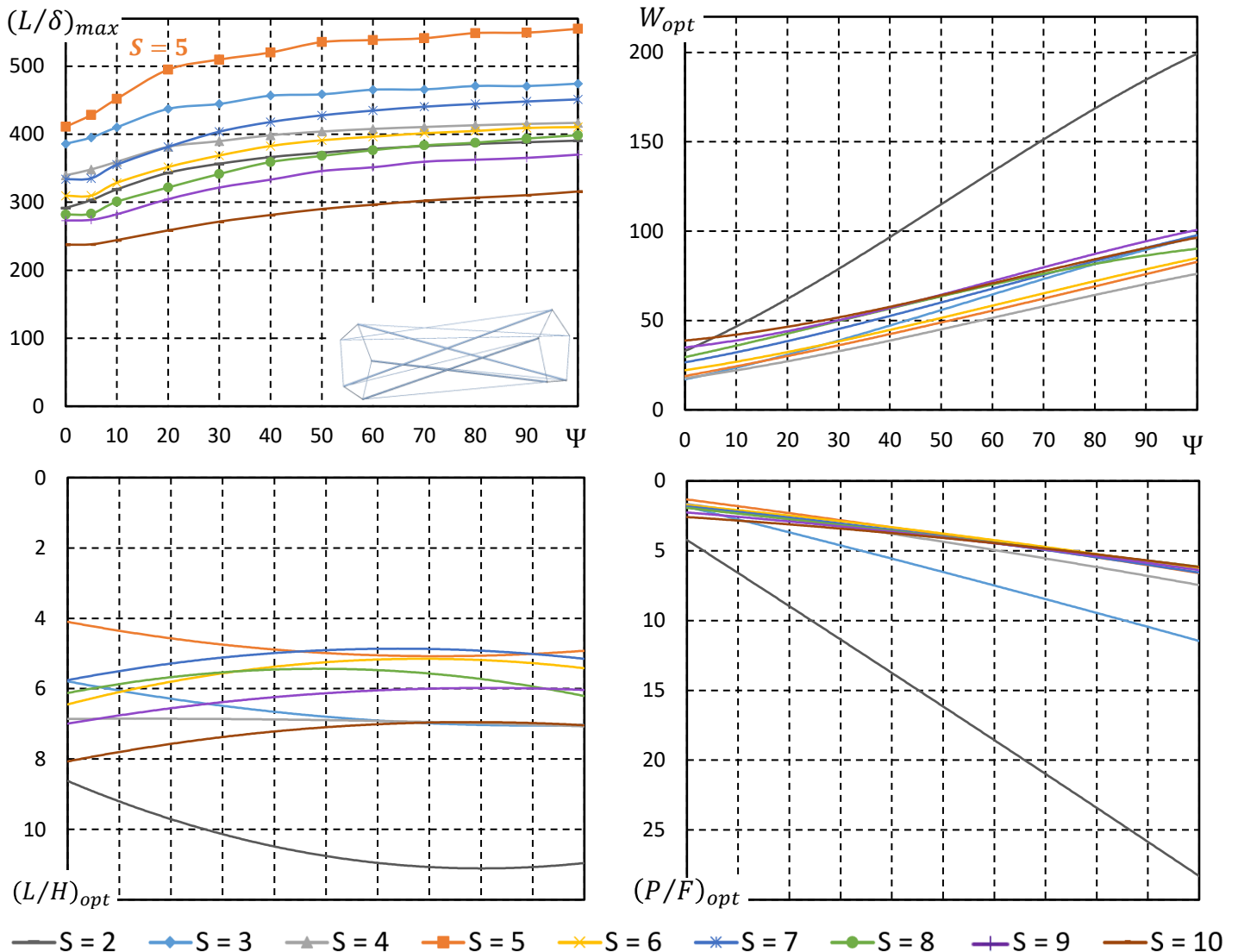


FIGURE 6.28 – COURBES D'EFFICACITÉ L/δ DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE PENTAPLEX N°2 – $S = 2 - 10, E/\sigma = 900, \Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

- Les déformations ont globalement diminué par rapport au pentaplex d'orientation n°1 (voir Figure 6.23) alors que la précontrainte introduite est plus faible ;
- Les structures composées de 5 pentaplex n°2 sont les moins déformables et requièrent une quantité de matière raisonnable. Ce sont d'ailleurs les seuls à respecter le critère de déformation imposé par la norme (pour $\Psi \geq 20$) ;
- Les structures composées de $S = 2$ pentaplex n°2 donnent de très mauvais résultats. Elles se déforment énormément et sont beaucoup plus lourdes car la précontrainte introduite est très importante.

Les structures composées de $S = 2$ pentaplex n°2 ne sont pas représentées dans les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume afin d'alléger les graphiques.

Soit les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W pour $\Phi = 0$:

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 0\right)$$

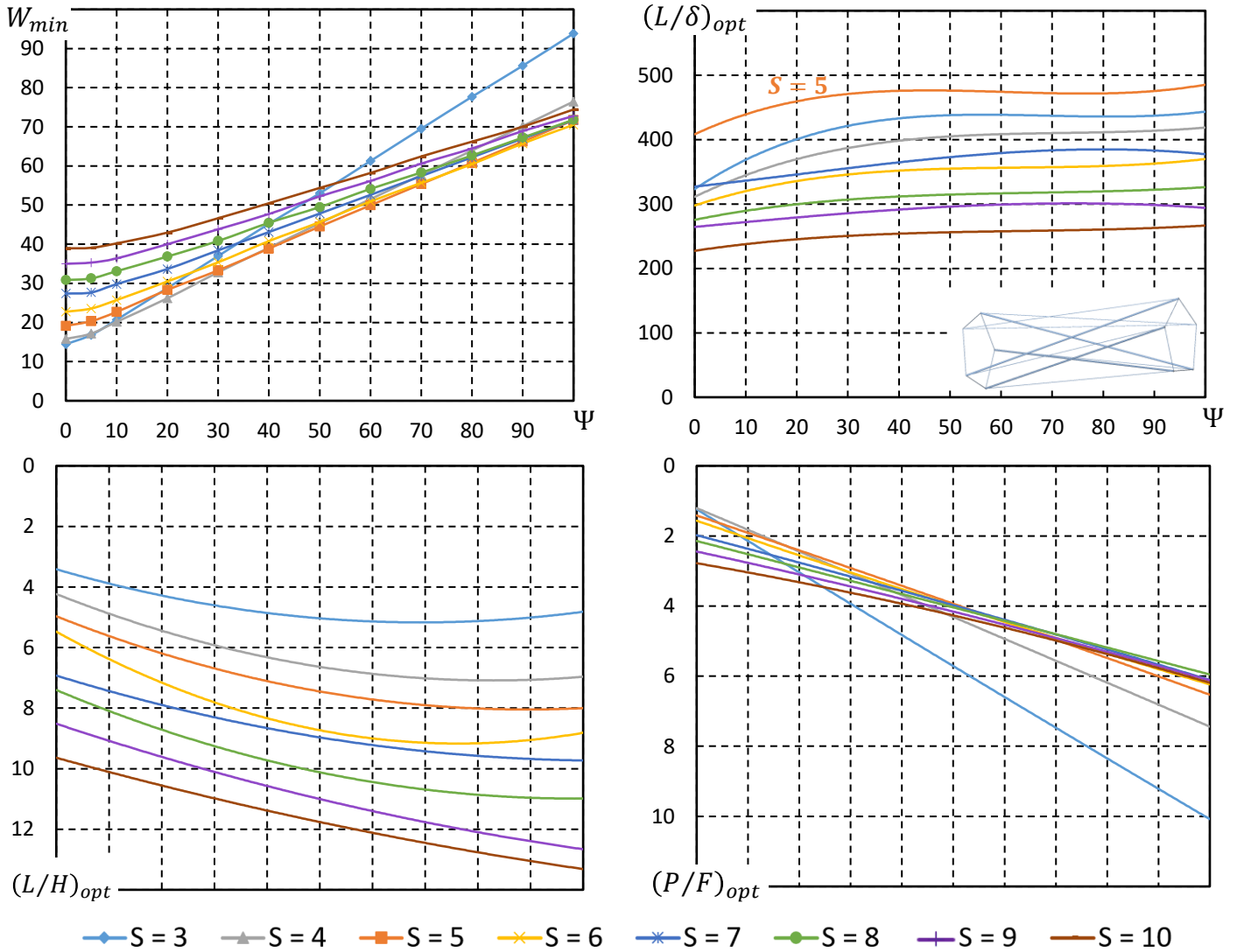


FIGURE 6.29 – COURBES D'EFFICACITÉ W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE PENTAPLEX N°2 – $S = 3 - 10, E/\sigma = 900, \Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

- Pour les structures composées de $S = 4 - 10$ pentaplex n°2, le volume minimum de matière reste raisonnable car la précontrainte introduite est faible. Cependant, ces structures se déforiment trop pour respecter le critère de déformation. Les structures composées de 5 pentaplex n°2 en sont toutefois proches.

6.5.3 Résultats de l'optimisation avec la prise en compte du poids propre

On va se concentrer sur les structures avec un nombre de pentaplex n°2 égal à $S = 3 - 6$.

Soit les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W pour $\Phi = 132 \times 10^{-4}$:

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 132 \times 10^{-4}\right)$$

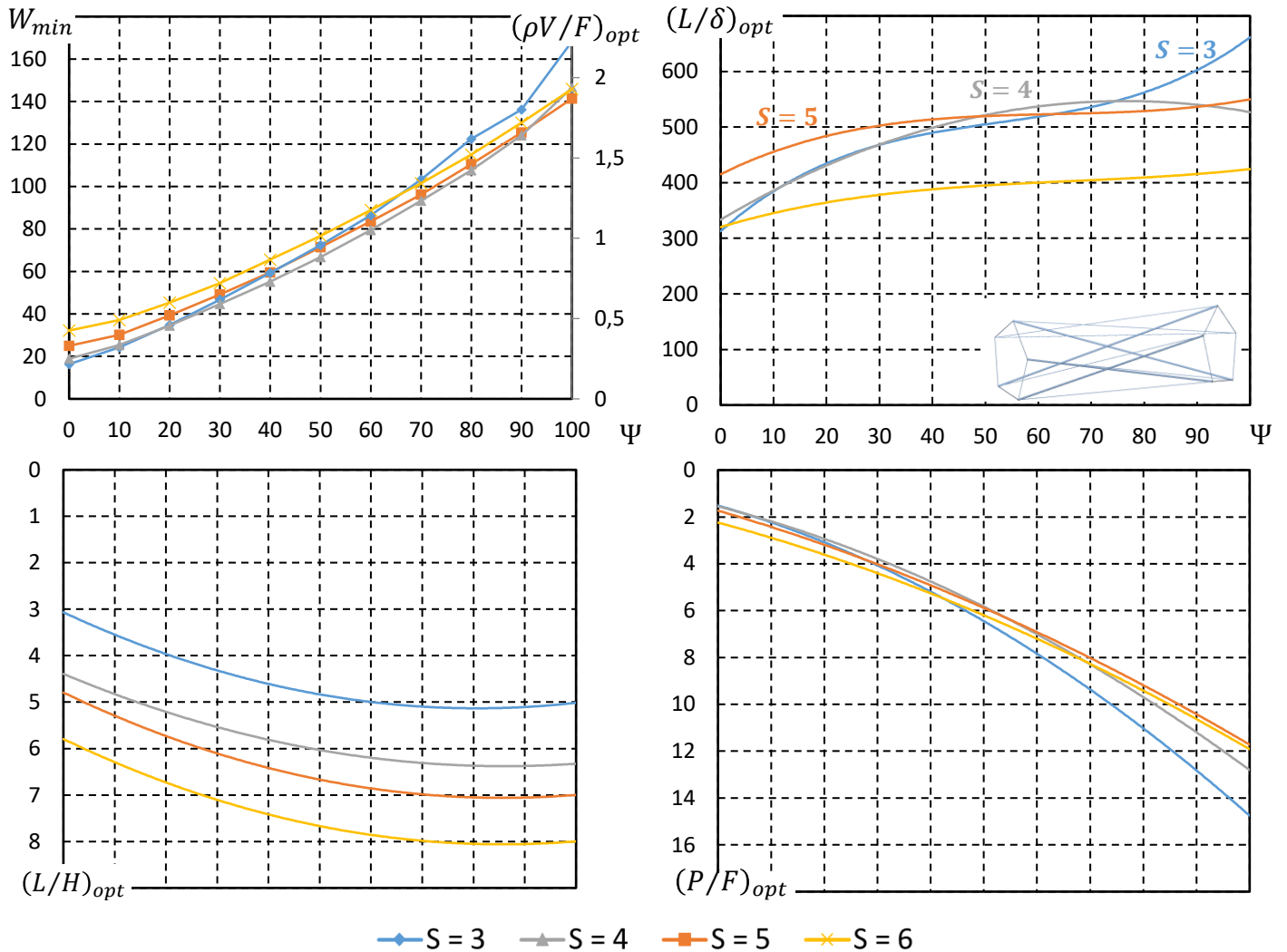


FIGURE 6.30 – COURBES D'EFFICACITÉ W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE PENTAPLEX N°2 – $S = 3 - 6$, $E/\sigma = 900, \Phi = 132 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations & comparaisons avec cas $\Phi = 0$ (cfr Figure 6.29) :

- La diminution de déformation des structures composées de $S = 3$ et $S = 4$ modules est assez remarquable lorsque l'indicateur de flambement augmente. Ces structures de volume minimum de matière respectent désormais le critère de déformation pour $\Psi > 40$;
- Il est de même pour les structures composées de $S = 5$ pentaplex n°2 qui respectent désormais le critère de déformation à partir de $\Psi \geq 30$;
- Les structures composées de $S = 4 - 5$ pentaplex n°2 sont les plus pertinentes en termes de volume minimum de matière et déformations acceptables ($L/\delta \geq 500$). Leur volume minimum de matière a globalement doublé par rapport au cas $\Phi = 0$.

- Il faut que l'indicateur de flambement Ψ soit grand pour que les structures ($S = 3 - 5$) atteignent des déformations acceptables. Or, pour ces valeurs de l'indicateur de flambement, le volume minimum de matière devient important.

Les courbes d'efficacité mettent en évidence l'inconvénient de ce type de module de tensegrité : le poids propre du module lui-même. En effet, ce module a tendance à avoir naturellement un poids propre important car il est composé d'un nombre élevé d'éléments (20 éléments par module).

On obtient des déformations acceptables uniquement lorsque l'indicateur de flambement devient important. En effet, au plus une structure est sensible au flambement, au plus les dimensions des éléments, et donc le volume de matière à mettre en œuvre, sont importants (cfr §4.2.2). Cependant, une structure fort sensible au flambement ne sait pas reprendre beaucoup de charge externe. Elle reprendra alors essentiellement son propre poids.

Afin de se rendre compte de l'impact du poids propre et de son importance face au chargement externe, nous allons étudier plus précisément les structures composées de 5 pentaplex n°2 pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre.

Soit les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W :

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi\right) \text{ pour } S = 5$$

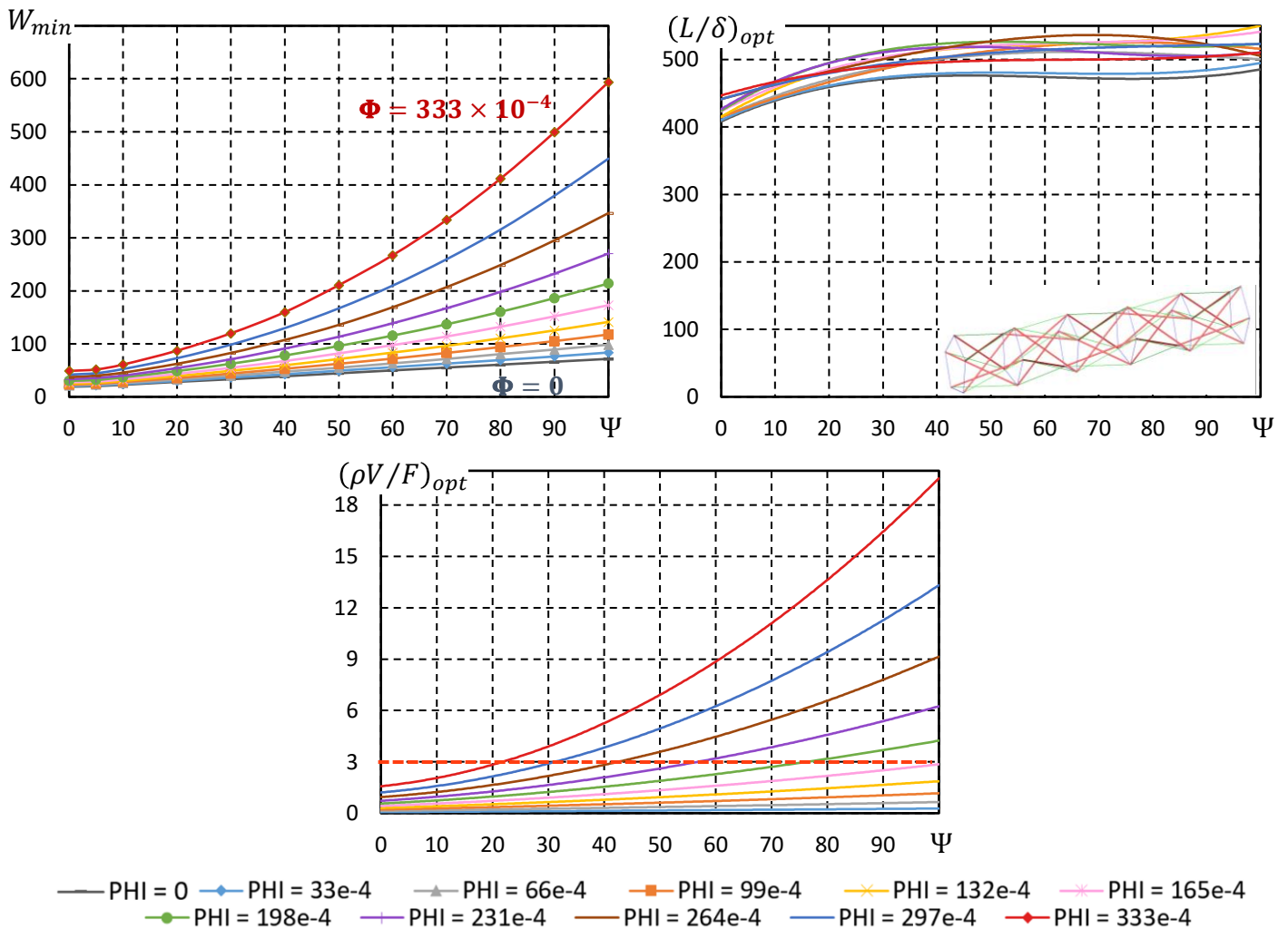


FIGURE 6.31 – COURBES D'EFFICACITÉ W DES STRUCTURES DE TENSEGRITÉ COMPOSÉES DE PENTAPLEX N°2 : $S = 5$, $E/\sigma = 900$, $\Phi = 0 - 333 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

- Les déformations sont globalement trop importantes pour des petites valeurs d'indicateur de flambement ;
- A partir de $L \geq 20$ m, les structures deviennent suffisamment rigides et respectent le critère de l'Eurocode ;
- Le volume minimum de matière devient vite démesuré lorsque la portée et la sensibilité au flambement de la structure augmentent ;
- Le poids propre des structures de grande portée devient largement supérieur à la charge externe lorsque l'indicateur de flambement Ψ augmente. Ces structures auront tendance à reprendre uniquement leur poids propre et auront peu d'efficacité matérielle ;
- Le critère de limitation du poids propre ($\rho V < 3F$) réduit considérablement la réalisation de structures de grande portée composées de ce type de module. En effet, les structures de portée $L \geq 60$ m ne respectent plus le critère à partir d'une certaine valeur de l'indicateur de flambement Ψ .

6.5.4 Conclusion

L'ensemble des résultats permettent d'affirmer que les passerelles de tensegrité composées de pentaplex n°2 sont réalisables mais uniquement à partir d'une certaine valeur de l'indicateur de flambement. Il faut donc y mettre le prix car le volume de matière devient important lorsque la sensibilité au flambement de la structure augmente.

Ce module est plus approprié pour des structures de moyenne portée. En effet, lorsque la portée est trop grande, le poids propre devient vite démesuré face au chargement externe et les structures de petite portée ne sont pas suffisamment précontraintes pour obtenir des déformations acceptables.

Le poids propre est sensiblement favorable à la rigidité du pentaplex n°2. En effet, les structures les plus légères atteignent des déformations acceptables pour des faibles portées ($L \geq 20$ m). Cela illustre à nouveau tout l'intérêt de la prise en compte du poids propre dans l'optimisation.

On a donc pu prouver la faisabilité de structures de tensegrité composées de pentaplex n°2, mais l'efficacité générale de ce module reste faible.

6.6 Structures de tensegrité composées d'hexaplex suivant l'orientation n°1

6.6.1 Définition de la structure

Soit la structure de tensegrité composée de S hexaplex d'orientation n°1 (voir §5.2.4), de portée L , de hauteur H , soumise à une charge externe F uniformément répartie sur les nœuds supérieurs de la structure et dont le degré d'hyperstaticité vaut $I_s = 1$:

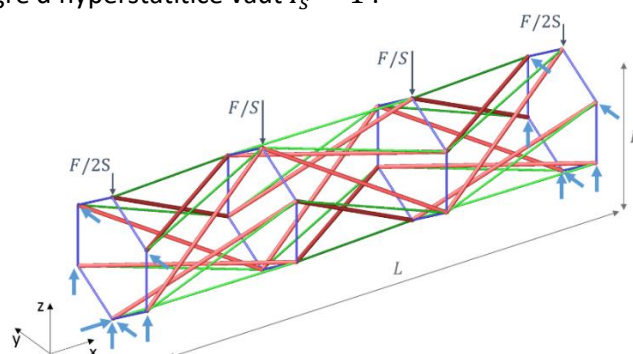


FIGURE 6.32 – DÉFINITION STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE D'HEXAPLEX N°1 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

6.6.1.1 Hyperstatiticé d'une structure composée d'hexaplex

Le degré d'hyperstatiticé total I_s d'une structure de tenségrité peut être calculé à l'aide de l'équation (6-1) :

$$I_s = B_e + R_{appuis} - 3N_{nodes}$$

Dans le cas d'une structure composée de S hexaplex, on a :

$$B_e = 18S + 6$$

$$N_{nodes} = 6(S + 1)$$

Le nombre de réactions d'appuis R_{appuis} pour obtenir $I_s = 1$ vaut donc :

$$I_s = 18S + 6 + R_{appuis} - 18(S + 1) = 1 \rightarrow R_{appuis} = 13$$

Il faut donc positionner 13 appuis afin de rendre la structure hyperstatique. Ces appuis ont été positionnés en suivant le même raisonnement que pour le quadruplex n°1 (cfr § 6.2.2).

6.6.2 Résultats de l'optimisation sans la prise en compte du poids propre

Tout d'abord, nous allons nous intéresser à l'étude des structures composées d'une succession de hexaplex n°1 (suivant l'orientation n°1) sans prendre en compte le poids propre dans l'optimisation, tel que $\Phi = 0$.

On obtient les courbes d'efficience suivantes :

INDICATEUR DE DÉPLACEMENT

$$\frac{L}{\delta} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 0\right)$$

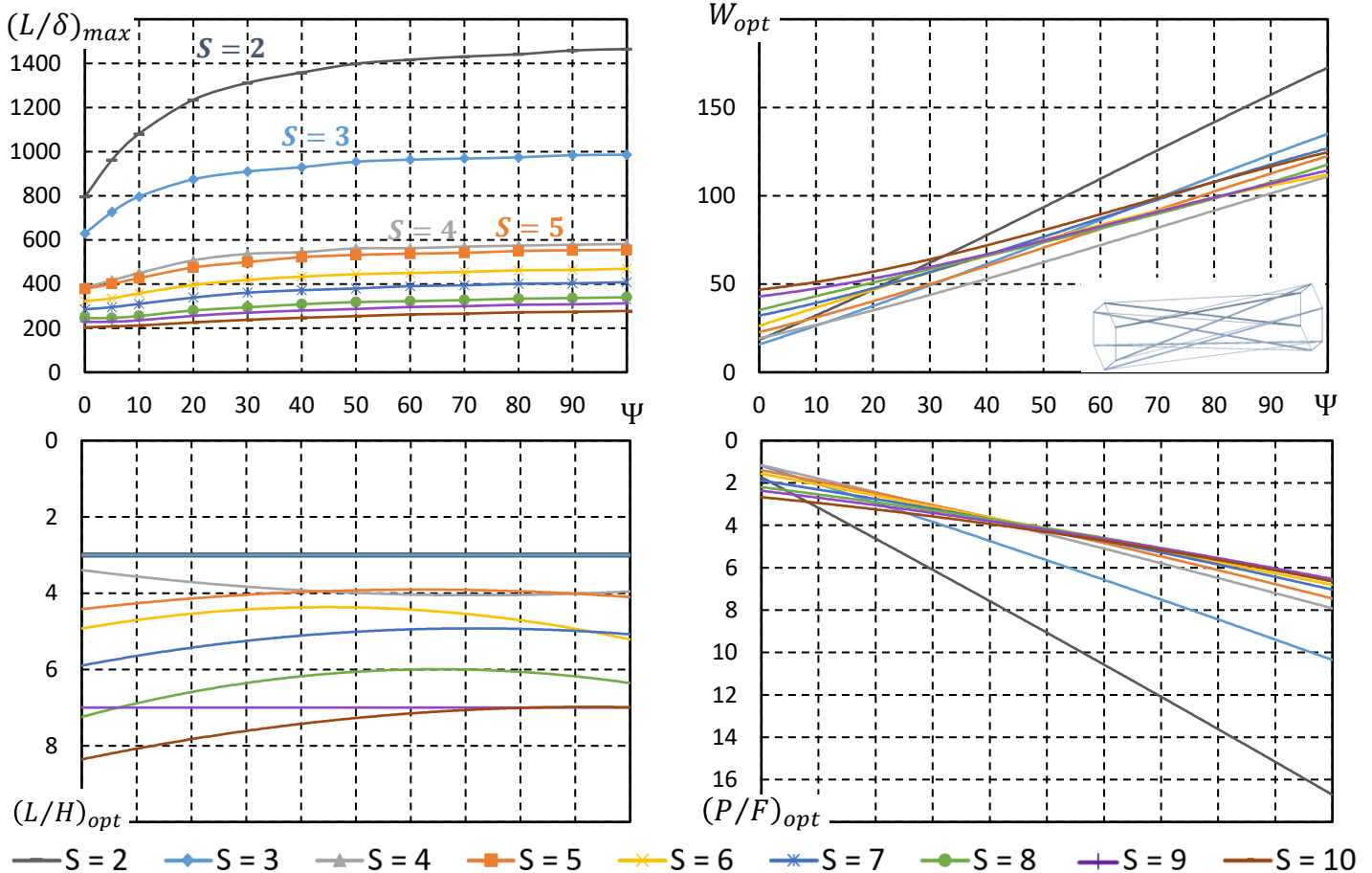


FIGURE 6.33 – COURBES D'EFFICIENCE L/δ DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES D'HEXAPLEX N°1 – $S = 2 - 10, E/\sigma = 900, \Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

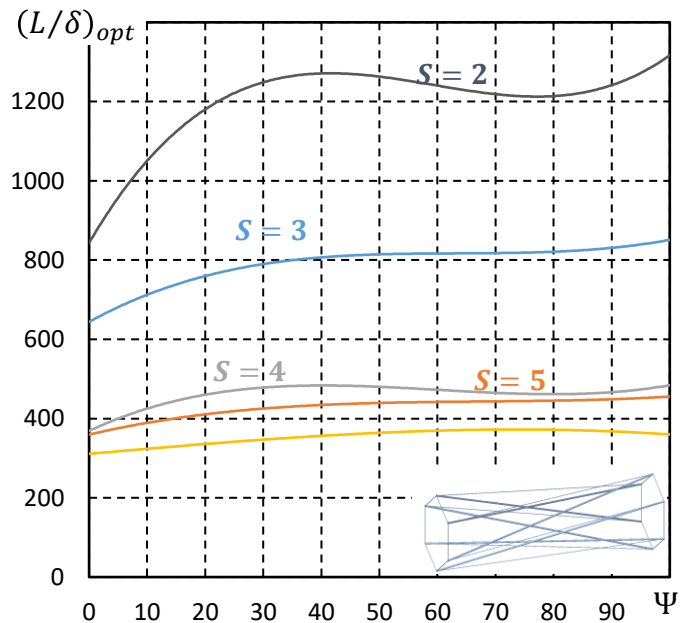
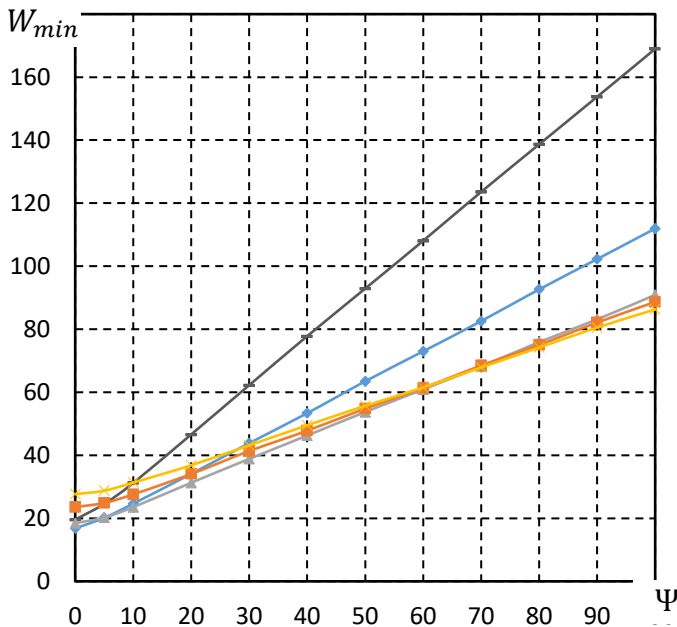
- Les déformations varient énormément en fonction du nombre de modules de la structure. Les structures composées d'un faible nombre de modules sont très rigides et se déforment peu. Lorsque le nombre de modules devient trop élevé, l'efficacité des structures chute ;
- Plusieurs structures sont donc capables de respecter aisément le critère de déformation $L/\delta \geq 500 : S = 2 - 5$;
- Les structures composées de 2 hexaplex n°1 ne se déforment pratiquement pas ($800 < L/\delta < 1470$) . Cependant, elles deviennent vite très volumineuses lorsque l'indicateur de flambement Ψ augmente car la précontrainte introduite s'intensifie rapidement ;
- Les structures composées de 3 hexaplex n°1 sont peu déformables également ($600 < L/\delta < 1000$). De plus, le volume de matière est globalement du même ordre de grandeur que celui des autres structures ;
- L'élanement optimal des structures composées de $S = 2 - 3$ hexaplex n°1 est très faible : $(L/H)_{opt} = 3$;
- Les structures composées de $S = 5 - 6$ hexaplex n°1 acquièrent des déformations acceptables lorsque la sensibilité au flambement de la structure augmente. Ces structures sont moins précontraintes et globalement moins lourdes.

Les structures composées de $S = 7 - 10$ hexaplex n°1 ne sont pas représentées dans les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume afin d'alléger les graphiques.

Soit les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W pour $\Phi = 0$:

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 0\right)$$



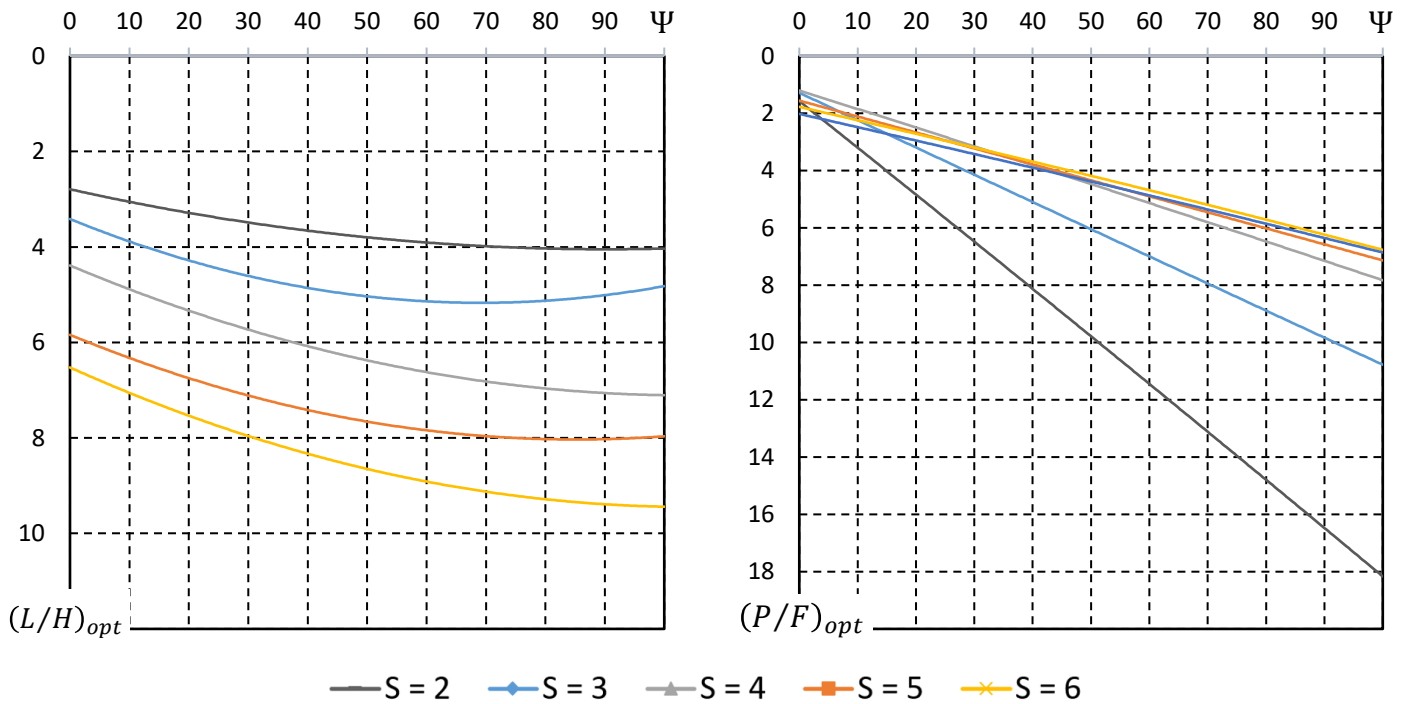


FIGURE 6.34 – COURBES D’EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES D’HEXAPLEX N°1 – $S = 2 - 6, E/\sigma = 900, \Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]

Constatations :

- De manière générale, le volume minimum de matière est relativement important dû au nombre élevé d’éléments par module (24 éléments par hexaplex) ;
- Les structures composées de 2 hexaplex n°1 ont un volume minimum de matière très important mais se déforment peu. La précontrainte introduite est en fait considérable ;
- Les structures composées de 3 hexaplex n°1 ont un volume de matière important lorsque leur sensibilité au flambement augmente. Cependant, ses déformations sont également très faibles ;
- Le meilleur compromis entre déformations acceptables et volume minimum de matière semble être les structures composées de $S = 3 - 4$ hexaplex n°1 suivant l’indicateur de flambement Ψ .

6.6.3 Résultats de l'optimisation avec la prise en compte du poids propre

On va se concentrer sur les structures avec un nombre d'hexaplex n°1 égal à $S = 2 - 6$.

Soit les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W pour $\Phi = 132 \times 10^{-4}$:

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 132 \times 10^{-4}\right)$$

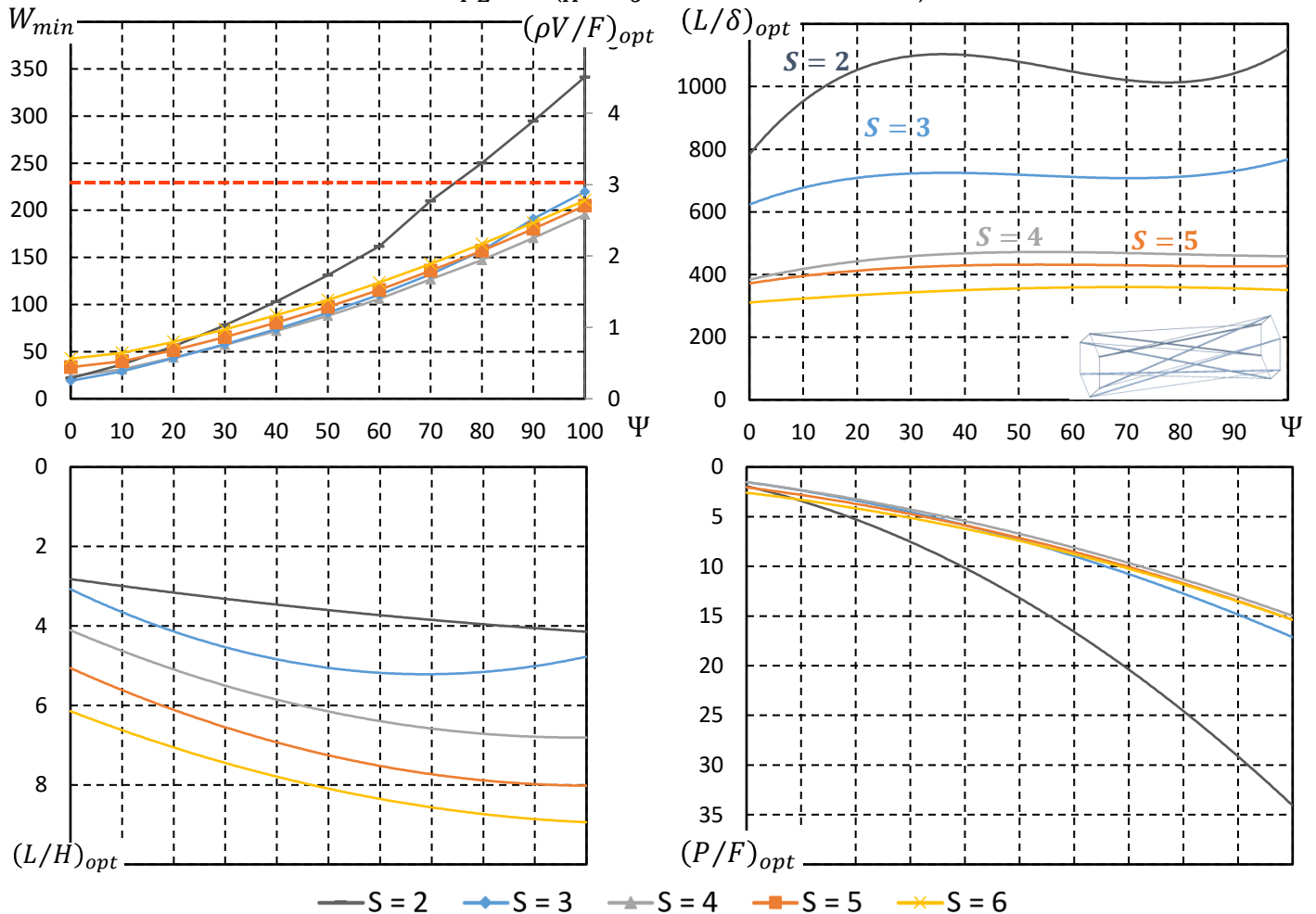


FIGURE 6.35 – COURBES D'EFFICACITÉ W DES STRUCTURES DE TENSÉGRIÉTÉ COMPOSÉES D'HEXAPLEX N°1 – $S = 2 - 6$, $E/\sigma = 900, \Phi = 132 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations & comparaisons avec cas $\Phi = 0$ (cfr Figure 6.34) :

- Malgré les très faibles déformations des structures composées de $S = 2$ hexaplex n°1, ces résultats ne sont exploitables que pour des structures peu sensibles au flambement. En effet, lorsque l'indicateur de flambement Ψ augmente, le volume minimum de matière devient vite démesuré ;
- Les structures composées de $S = 3$ hexaplex n°1 sont les plus pertinentes. Elles se déforiment peu pour un volume minimum de matière de même ordre de grandeur que les autres structures ;
- La précontrainte et le volume minimum de matière ont globalement doublé par rapport au cas sans la prise en compte du poids propre ($\Phi = 0$) ;
- La prise en compte du poids propre a augmenté les déformations de toutes les structures.

Le poids propre du module a un impact significatif sur le volume de matière à mettre en œuvre. Cet impact est d'autant plus important que la structure est sensible au flambement. Les structures deviennent ainsi rapidement trop volumineuses pour être réellement efficaces.

Insistons sur le fait que les déformations des structures composées d'hexaplex n°1 sont défavorablement influencées par la prise en compte du poids propre. En effet, il s'agit du premier module prismatique dont les déformations augmentent avec le poids propre. Cependant, les structures restent suffisamment rigides pour respecter le critère de déformation.

Afin de se rendre compte de l'impact du poids propre et de son importance face au chargement externe, nous allons étudier plus précisément les structures composées de $S = 3$ hexaplex n°1 pour différentes valeurs de l'indicateur de poids propre.

Soit les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi\right) \text{ pour } S = 3$$

INDICATEUR DE VOLUME

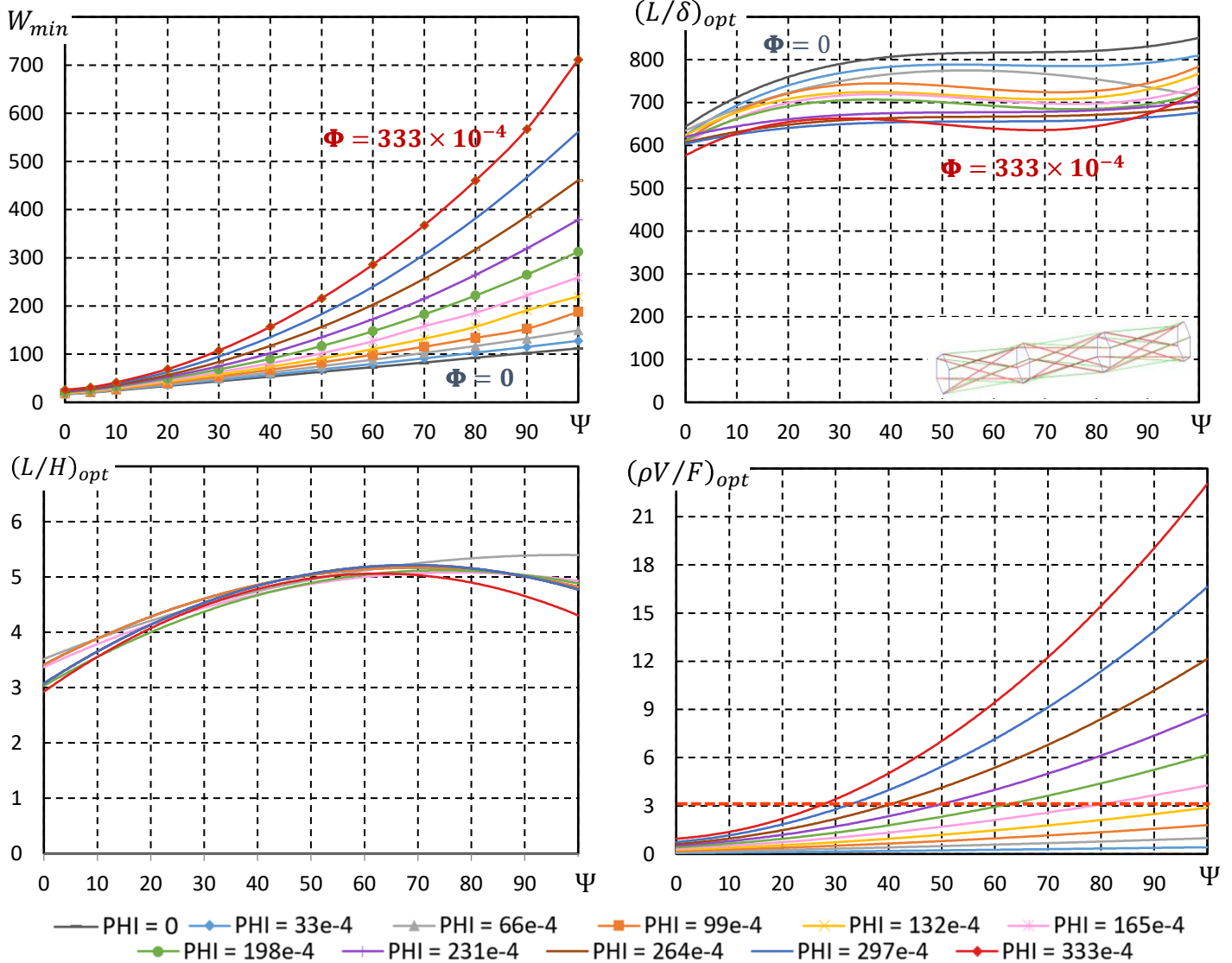


FIGURE 6.36 – COURBES D'EFFICACITÉ W DES STRUCTURES DE TENSÉGRIÉTÉ COMPOSÉES D'HEXAPLEX N°1 : $S = 3$, $E/\sigma = 900$, $\Phi = 0 - 333 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

- Le volume minimum de matière devient vite démesuré lorsque la portée et la sensibilité au flambement de la structure augmentent ;
- Le poids propre des structures de grande portée devient largement supérieur à la charge externe lorsque l'indicateur de flambement Ψ augmente. Ces structures auront tendance à reprendre uniquement leur poids propre et auront très peu d'efficacité matérielle ;
- L'élanement optimal $(L/H)_{opt}$ n'est pas influencé par l'indicateur de poids propre ;
- Les déformations des structures augmentent avec l'indicateur de poids propre ;
- Le critère de limitation du poids propre ($\rho V < 3F$) réduit considérablement la réalisation de structures de grande portée composées de ce type de module. En effet, les structures de portée $L \geq 50$ m ne respectent plus le critère à partir d'une certaine valeur de l'indicateur de flambement Ψ .

6.6.4 Conclusion

L'ensemble des résultats permettent d'affirmer que les passerelles de tensegrité composées de hexaplex n°1 sont réalisables.

Certaines typologies de structures sont très rigides et atteignent des déformations record mais consomment beaucoup de matière en contrepartie.

Ce module de tensegrité est plus approprié pour des structures de petite portée. En effet, lorsque la portée augmente, le poids propre devient vite démesuré face au chargement externe.

La prise en compte du poids propre augmente sensiblement les déformations, contrairement aux autres modules prismatiques pour lesquels le poids propre augmentait la rigidité des structures.

La sensibilité au flambement de ces structures a également un impact considérable sur le volume de matière à mettre en œuvre et donc sur leur efficacité. Pour des grandes portées, ce module est donc limité à des structures très peu sensibles au flambement.

6.7 Structures de tensegrité composées d'hexaplex suivant l'orientation n°2

6.7.1 Définition de la structure

Soit la structure de tensegrité composée de S hexaplex d'orientation n°2 (voir §0), de portée L , de hauteur H , soumise à une charge externe F uniformément répartie sur les 2 nœuds supérieurs de chaque base de la structure et dont le degré d'hyperstaticité vaut $I_s = 1$:

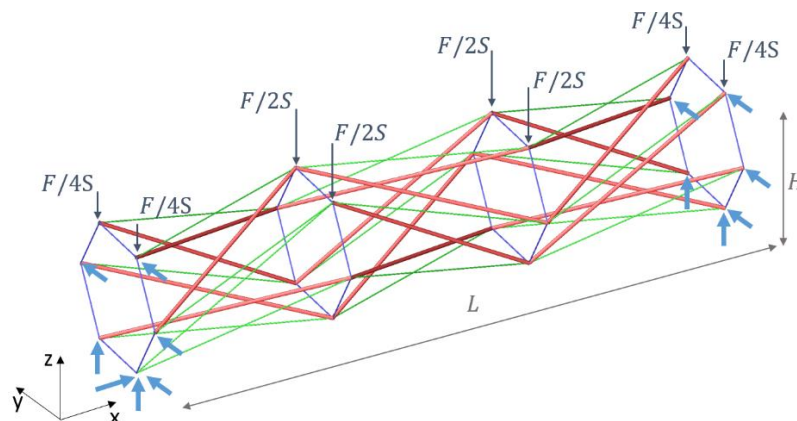


FIGURE 6.37 – DÉFINITION STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE D'HEXAPLEX N°2 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

On remarque que la charge externe est répartie sur les 2 nœuds supérieurs de chaque base. Cela permet de mieux répartir la charge du tablier de la passerelle.

Les appuis ont été positionnés en suivant le même raisonnement que pour le quadruplex n°1 (cfr §6.2.2).

6.7.2 Résultats de l'optimisation sans la prise en compte du poids propre

Tout d'abord, nous allons nous intéresser à l'étude des structures composées d'une succession de hexaplex n°2 (suivant l'orientation n°2) sans prendre en compte le poids propre dans l'optimisation, tel que $\Phi = 0$.

On obtient les courbes d'efficacité suivantes :

INDICATEUR DE DÉPLACEMENT

$$\frac{L}{\delta} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 0\right)$$

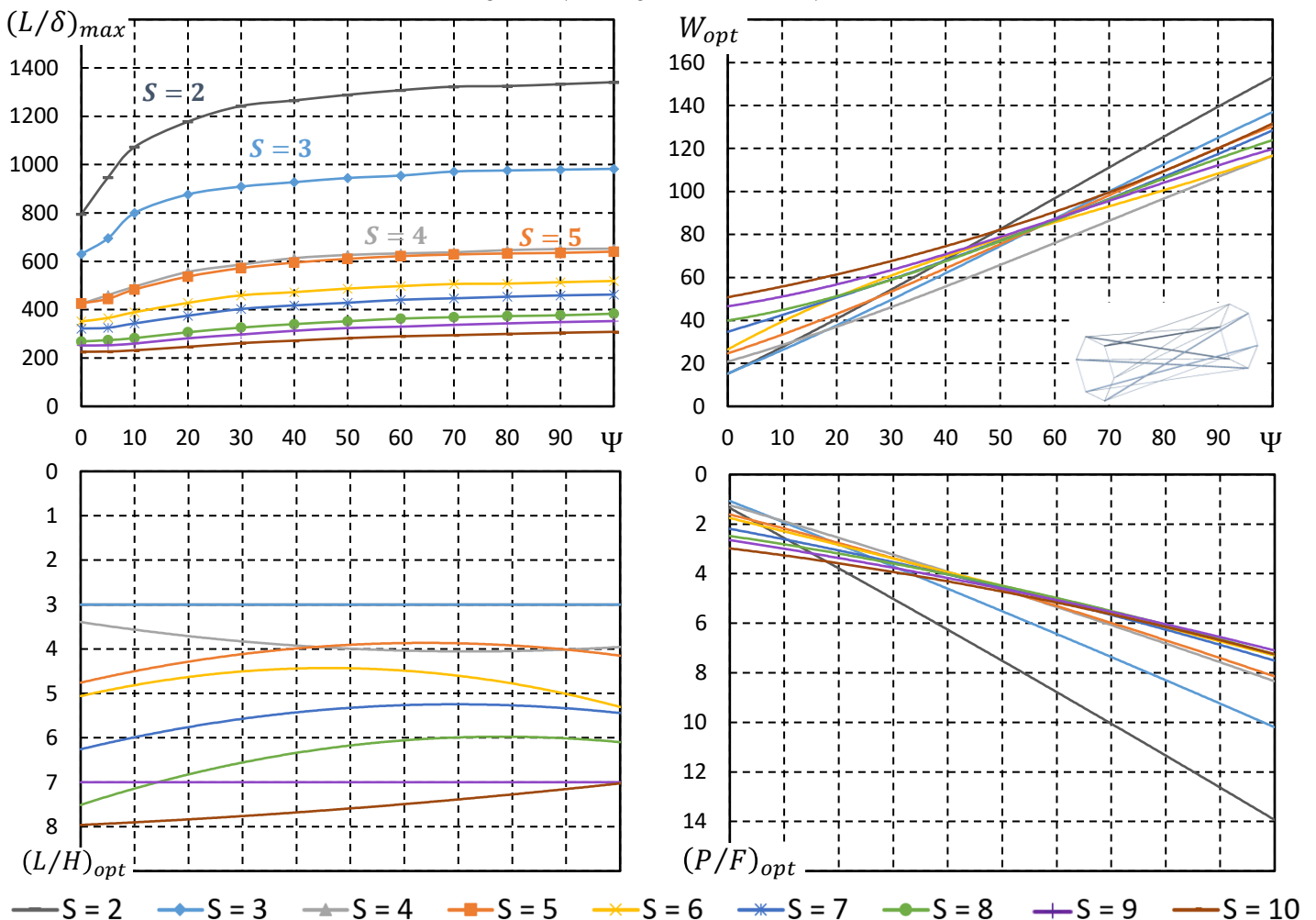


FIGURE 6.38 – COURBES D'EFFICACITÉ L/δ DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES D'HEXAPLEX N°2 – $S = 2 - 10, E/\sigma = 900, \Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

On remarque que les résultats sont globalement identiques au cas de l'hexaplex n°1 (cfr §6.6.2).

Soit les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W pour $\Phi = 0$:

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 0\right)$$

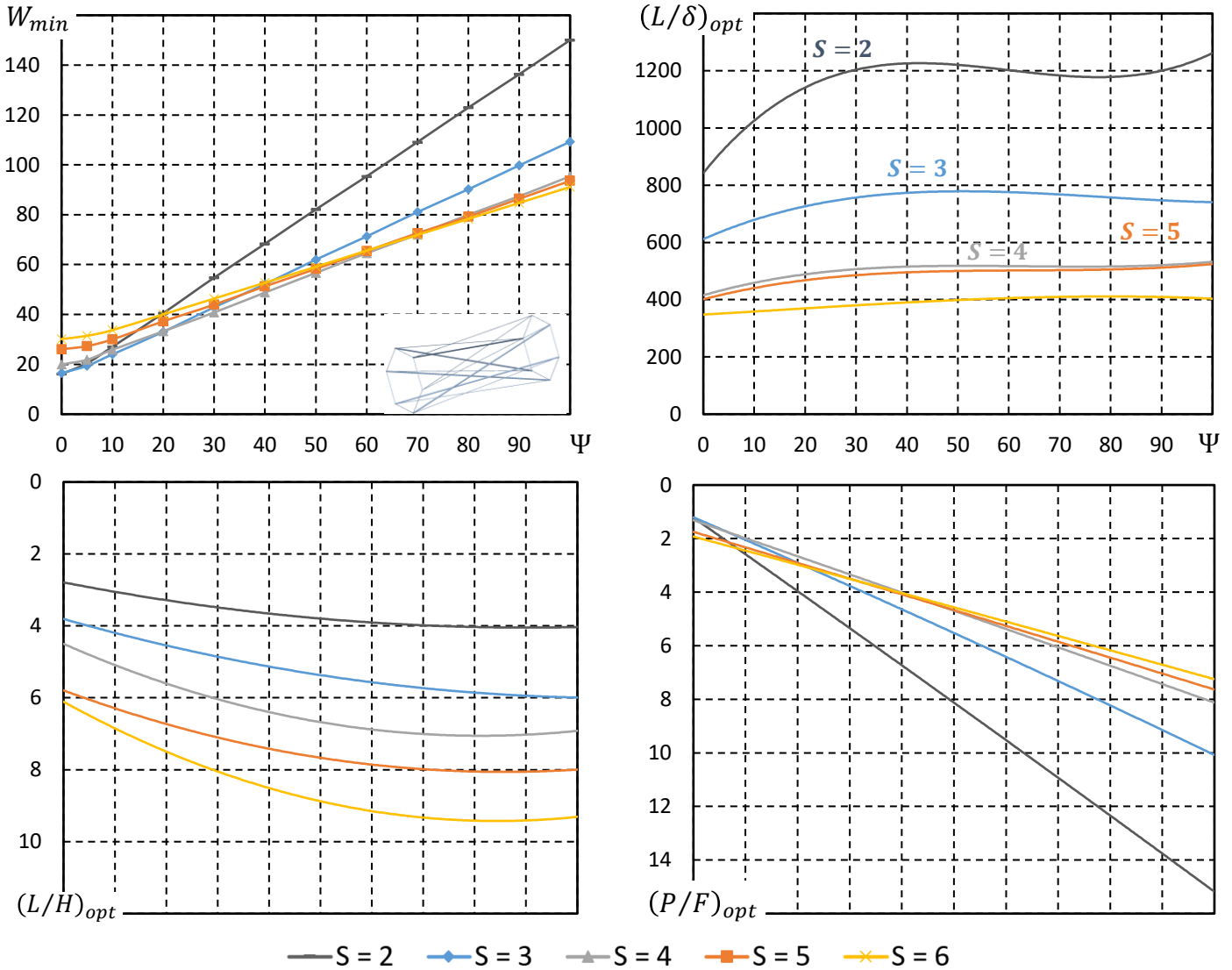


FIGURE 6.39 – COURBES D'EFFICACITÉ W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES D'HEXAPLEX N°2 – $S = 2 - 6, E/\sigma = 900, \Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

- Les résultats sont à nouveau fort semblables au cas de l'hexaplex n°1 (cfr §6.6.2) ;
- Les structures composées de $S = 4$ et $S = 5$ hexaplex n°2 respectent désormais le critère de déformation alors que ce n'était pas le cas pour l'orientation n°1 ;
- Le meilleur compromis entre déformations acceptables et volume minimum de matière est donné par les structures composées de $S = 3 - 4$ hexaplex n°2 suivant l'indicateur de flambement Ψ .

6.7.3 Résultats de l'optimisation avec la prise en compte du poids propre

On va se concentrer sur les structures avec un nombre d'hexaplex n°2 égal à $S = 2 - 6$.

Soit les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W pour $\Phi = 132 \times 10^{-4}$:

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 132 \times 10^{-4}\right)$$

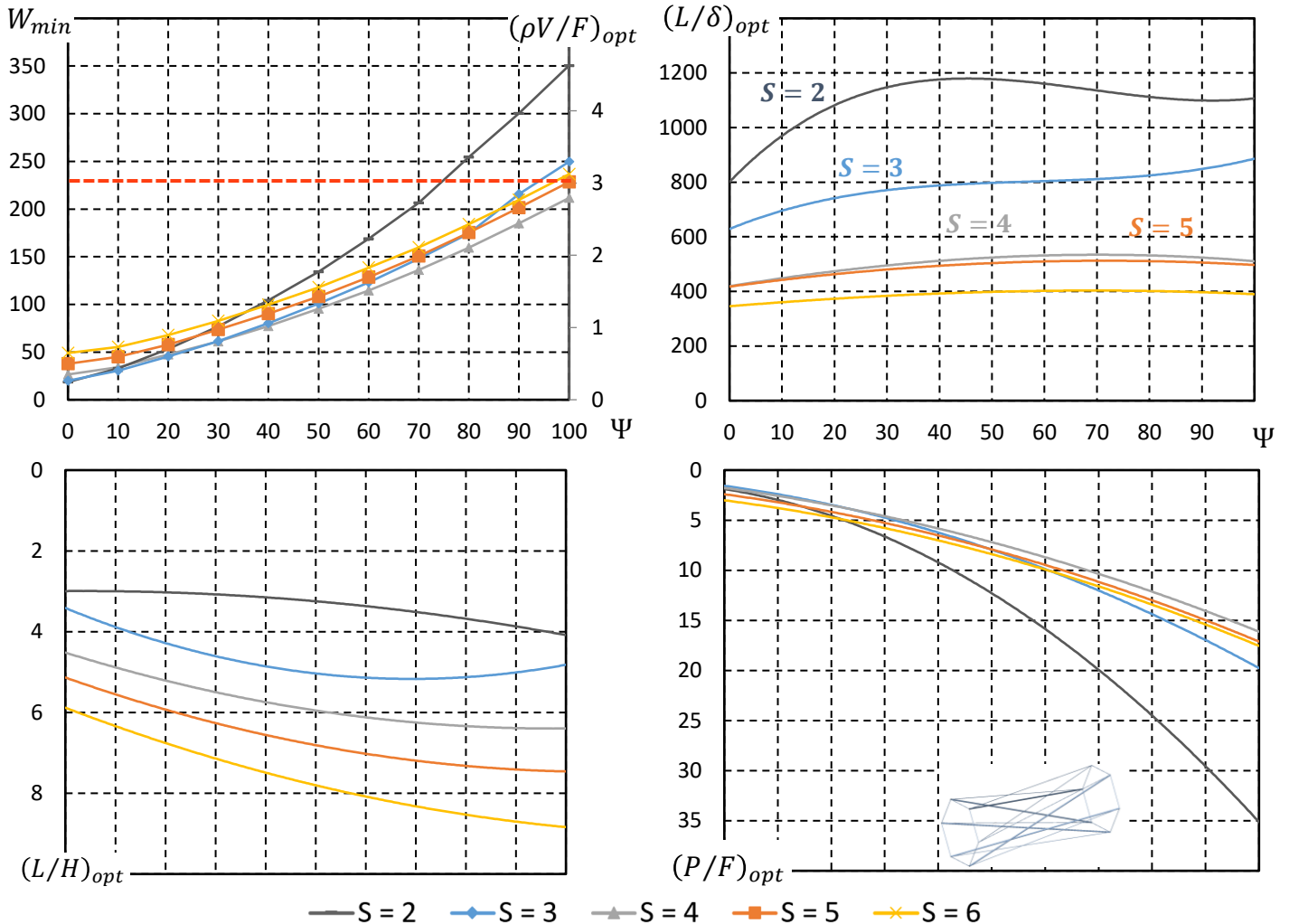


FIGURE 6.40 – COURBES D'EFFICACITÉ W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES D'HEXAPLEX N°2 – $S = 2 - 6$, $E/\sigma = 900, \Phi = 132 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations et comparaisons avec $\Phi = 0$ (cfr Figure 6.39) :

- Les résultats sont à nouveau fort similaires au cas de l'hexaplex n°1 (cfr §6.6.3). Toutefois, les déformations sont plus faibles pour l'orientation n°2 ;
- L'hexaplex n°2 se comporte mieux face au poids propre que l'orientation n°1. En effet, seules déformations des structures composées de $S = 2$ modules ont augmenté ;
- Les structures composées de $S = 3 - 4$ hexaplex n°2 sont les plus pertinentes.

Les deux orientations de l'hexaplex ont donc un comportement très proche. La suite de l'analyse sera ainsi omise car elle aboutit à des conclusions identiques.

6.7.1 Conclusion

L'ensemble des résultats permettent d'affirmer que les passerelles de tensegrité composées d'hexaplex n°2 sont réalisables.

Cette orientation de l'hexaplex se déforme moins que l'orientation n°1 mais consomme un peu plus de matière.

Elle est donc également plus appropriée pour des structures de petite portée. Contrairement à l'orientation n°1, la prise en compte du poids propre a peu d'influence sur les déformations.

6.8 Structures de tensegrité composées d'anneaux de tensegrité

6.8.1 Définition de la structure

Soit la structure de tensegrité composée de S anneaux à base pentagonale (voir §5.2.5.2), de portée L , de hauteur H , soumise à une charge externe F uniformément répartie sur les nœuds supérieurs de la structure :

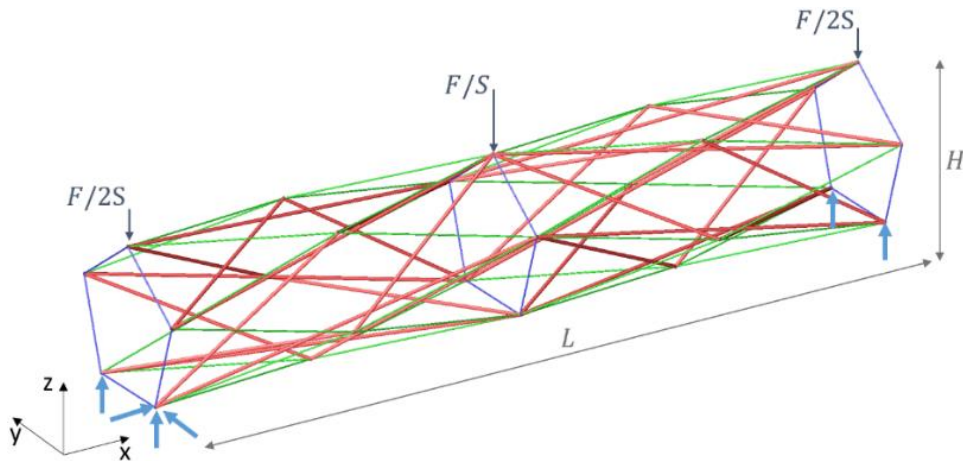


FIGURE 6.41 – DÉFINITION STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE D'ANNEAUX DE TENSÉGRITÉ À BASE PENTAGONALE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

6.8.2 Hyperstaticité d'une structure composée d'anneaux de tensegrité à base pentagonale

Le degré d'hyperstaticité d'une structure composée d'anneaux de tensegrité est particulier. En effet, en reprenant l'équation (6-1) :

$$I_s = B_e + R_{appuis} - 3N_{nodes}$$

Dans le cas d'une structure composée de S anneaux de tensegrité à base pentagonale, on a :

$$B_e = 40S + 5$$

$$N_{nodes} = 15 + 10(S - 1)$$

Le degré d'hyperstaticité I_s de la structure vaut donc :

$$I_s = 40S + 5 + R_{appuis} - 45 - 30(S - 1) \rightarrow I_s = 10(S - 1) + R_{appuis}$$

On remarque que, d'après la formule (6-1), la structure est automatiquement hyperstatique quel que soit le nombre d'appuis.

On a ainsi décidé de positionner arbitrairement 6 appuis (voir Figure 6.41). Ils ont été placés intuitivement au niveau des nœuds inférieurs.

6.8.3 Résultats de l'optimisation sans la prise en compte du poids propre

Nous allons nous intéresser à l'étude des structures composées d'une succession d'anneaux de tensegrité à base pentagonale sans prendre en compte le poids propre dans l'optimisation, tel que $\Phi = 0$.

Seules les structures composées de $S = 2 - 3$ modules seront présentées afin de mettre en évidence les problèmes intrinsèques de ce système de tensegrité : le nombre élevé d'éléments du module et la précontrainte introduite.

Soit les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W :

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 0\right)$$

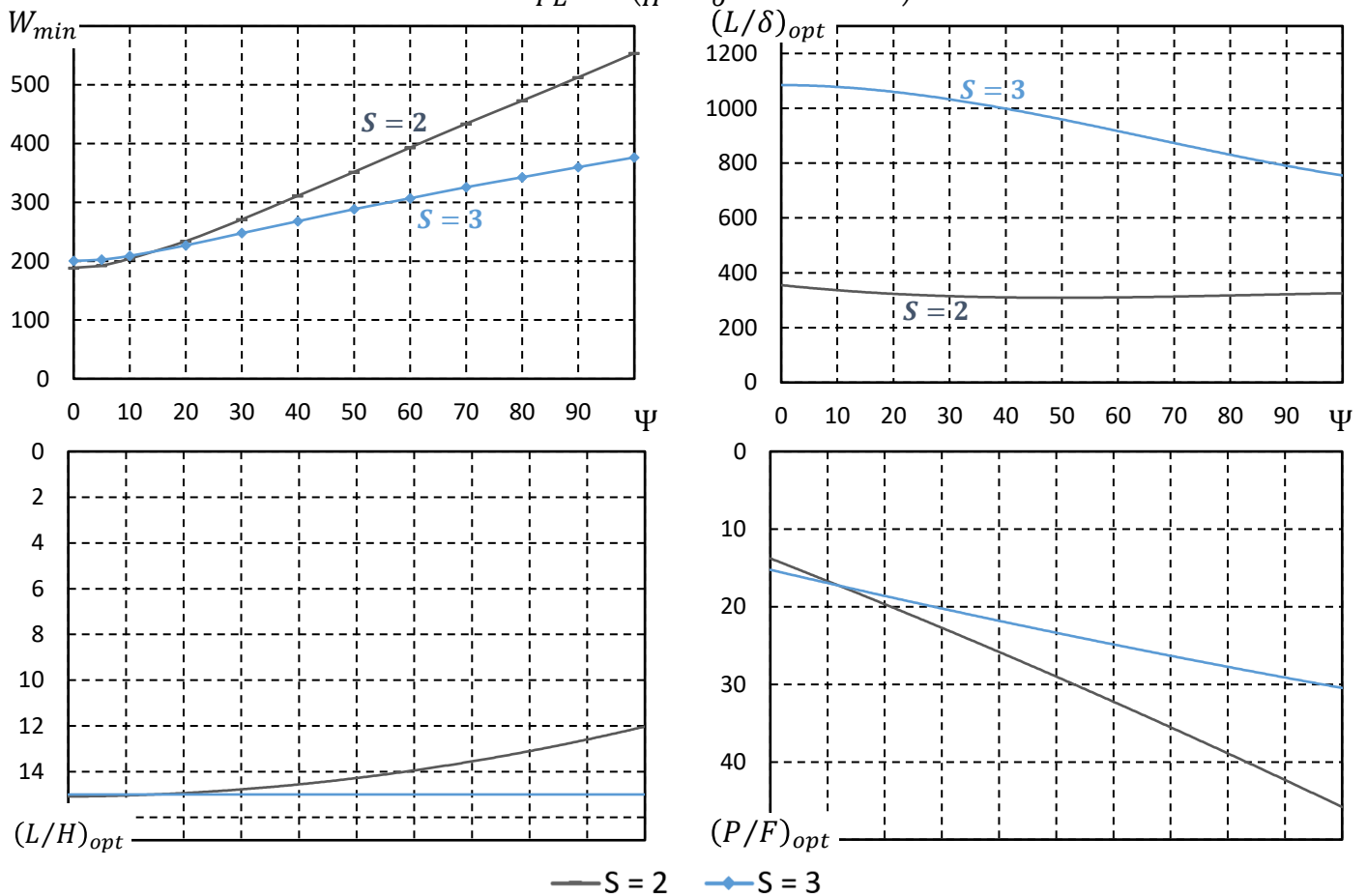


FIGURE 6.42 – COURBES D'EFFICACITÉ W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES D'ANNEAUX DE TENSÉGRITÉ À BASE PENTAGONALE : $S = 2 - 3$, $E/\sigma = 900$, $\Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

- On constate que le volume minimum de matière est colossal. Cela s'explique par le nombre très élevé d'éléments (45 éléments par module) et une précontrainte démesurée malgré un faible indicateur de flambement Ψ ;
- Le volume minimum de matière s'obtient pour de grandes valeurs de l'élançement géométrique. Pour rappel, mon étude s'est concentrée sur les structures avec un élançement géométrique compris entre $L/H = 2 - 15$. Il est donc possible que ces structures possèdent un volume minimum de matière pour des élançements très élevés ($L/H > 15$).

Les résultats ne sont donc pas exploitables malgré les très bonnes déformations de certaines structures.

La prise en compte du poids propre dans l'optimisation va aboutir à des structures encore plus lourdes et d'autant plus irréalistes. C'est pourquoi la suite de l'analyse sera omise.

6.8.4 Conclusion

On peut, dès à présent, conclure que ce module de tensegrité, optimisé suivant la méthode développée précédemment (cfr Chapitre 4), ne permet pas de concevoir des passerelles de tensegrité.

Ces structures pourraient être moins lourdes pour des élancements très élevés ($L/H > 15$). Cependant, des structures si élancées deviennent irréalistes car cela rend impossible le passage d'un tablier.

Au vu des valeurs démesurées de l'indicateur de précontrainte, l'optimisation de la précontrainte (cfr §4.1.2) ne semble pas appropriée à ce module de tensegrité. Une méthode plus efficace pourrait donner des meilleurs résultats.

6.9 Structures composées de modules de Fuller

6.9.1 Définition de la structure

Soit la structure composée de S modules de Fuller (voir §5.2.3.1), de portée L , de hauteur H , soumise à une charge externe F uniformément répartie sur les nœuds supérieurs de la structure :

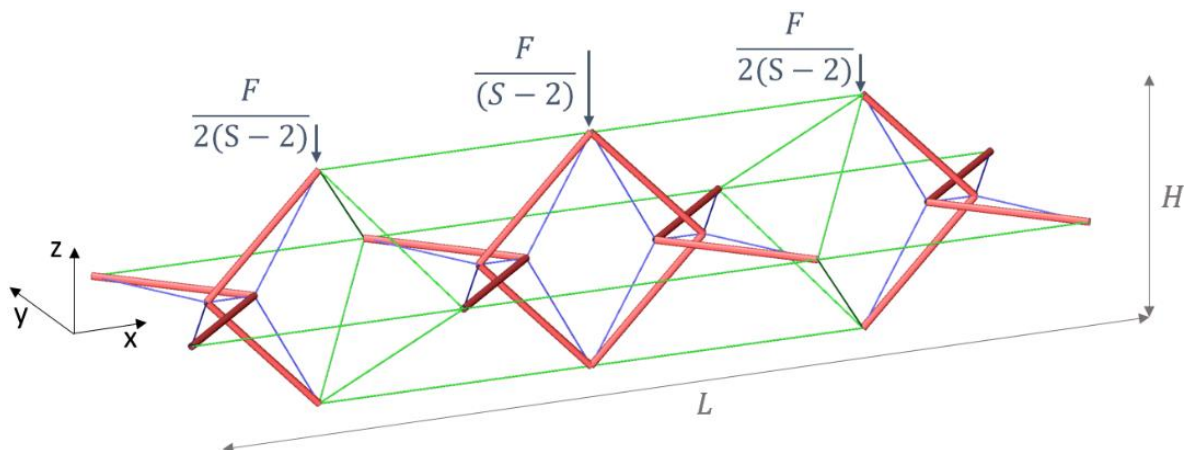


FIGURE 6.43 – DÉFINITION STRUCTURE COMPOSÉE DE MODULES DE FULLER [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Pour rappel, le nombre de modules S doit être pair.

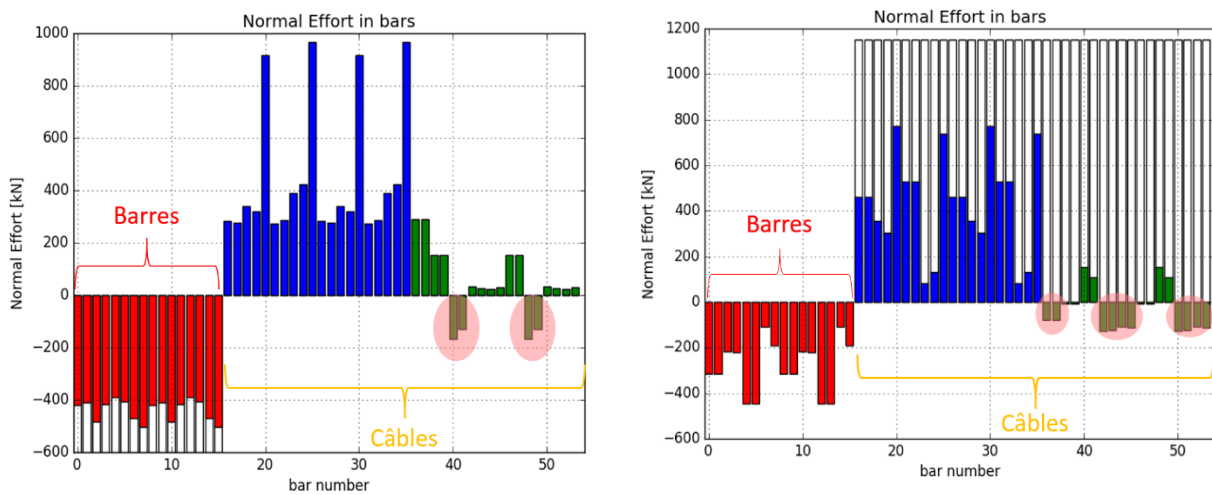
Les appuis ne sont pas représentés sur la figure ci-dessus, car aucun positionnement n'a abouti à des résultats concluants.

6.9.2 Étude d'une structure composée de modules de Fuller

Le problème dans l'optimisation des structures composées de modules de Fuller est lié à la mise en précontrainte de la structure. En effet, aucun scénario de précontrainte développé précédemment – soit précontraindre uniformément tous les câbles ou soit pré-comprimer uniformément toutes les barres (cfr §4.1.2) – ne parvient à tendre tous les câbles de la structure avant l'application de la charge externe.

On ne peut donc pas affirmer qu'il s'agisse réellement d'une structure de tensegrité. En effet, bien que le module de Fuller en lui-même est un module de tensegrité, l'assemblage de plusieurs de ces modules, tel qu'il a été imaginé, ne forme pas à priori une structure de tensegrité (cfr Définitions de la tensegrité-1.2).

Illustrons cela par un exemple. Soit une structure composée de 4 modules de Fuller. Les appuis sont positionnés arbitrairement. On peut obtenir les efforts internes suivants lorsqu'on tente de précontraindre la structure :



(A) Câbles PRÉCONTRAINTS UNIFORMÉMENT

(B) BARRES PRÉCONTRAINTS UNIFORMÉMENT

FIGURE 6.44 – EXEMPLE D’EFFORTS INTERNES DANS UNE STRUCTURE COMPOSÉE DE 4 MODULES DE FULLER APRÈS L’APPLICATION DE LA PRÉCONTRAINTÉ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]

N.B. sur la figure ci-dessus, on a en rouge les barres, en bleu et vert les câbles et en blanc la précontrainte.

On remarque que, malgré l'importante précontrainte introduite, aucun scénario de précontrainte ne parvient à tendre tous les câbles. L'étude de ce module a donc été abandonnée.

Cependant, on ne peut pas conclure que cette structure n'a aucun potentiel structural. Une méthode d'optimisation de la précontrainte plus appropriée pourrait en effet mener à des résultats exploitables.

6.10 Conclusion

Au vu de la multitude de structures de tensegrité existantes, il était évident d'élargir la recherche et d'imaginer d'autres modules de tensegrité dans la conception d'une passerelle.

Au cours de ce chapitre, 9 modules de tensegrité ont été analysés. Seuls les modules de tensegrité prismatiques ont abouti à des résultats pertinents. C'est pourquoi, on se concentrera uniquement sur ces modules pour la suite de ce mémoire.

Chaque module se comporte différemment et possède ses propres spécificités. Cependant, l'ensemble des résultats permettent de mettre l'accent sur plusieurs caractéristiques communes à tous les modules de tensegrité.

Tout d'abord, les structures de tensegrité sont très massives. Cet inconvénient majeur est lié à la précontrainte introduite et au nombre d'éléments des modules.

Ensuite, les structures de tensegrité semblent plus appropriées à la conception de passerelles de petite portée. En effet, lorsque la portée augmente, le volume de matière à mettre en œuvre devient vite démesuré à cause de l'impact du poids propre.

De manière générale, les structures composées d'un trop grand nombre de modules ($S > 8$) se déforment trop et ont peu d'efficacité structurale.

Les structures composées de 2 modules sont globalement les plus précontraintes et consomment énormément de matière.

Certaines typologies de structures semblent posséder une rigidité intrinsèque. En effet, les structures composées de 5 modules sont globalement les moins déformables (sauf pour les structures composées d'hexaplex).

On remarque que l'orientation du module a un impact sur l'efficacité de la structure de tensegrité. En effet, l'orientation n°2 du quadruplex, du pentaplex et de l'hexaplex sont plus efficaces que leur orientation n°1.

On a également pu constater que le poids propre rigidifie les structures de tensegrité. Il est ainsi primordial de le prendre en compte dans l'optimisation afin de déterminer l'efficacité réelle de chaque module en fonction de la portée de la structure. Notons que les structures composées d'hexaplex n°1 dérogent à cette règle.

Plusieurs modules de tensegrité sont donc suffisamment rigides pour respecter le critère de déformation de l'Eurocode. La faisabilité des passerelles de tensegrité a finalement été étendue à d'autres modules de tensegrité.

Le volume de matière à mettre en œuvre varie beaucoup d'un module à l'autre. Certaines structures de tensegrité sont donc, à priori, réalisables mais deviennent extrêmement coûteuses.

Parmi l'ensemble des modules étudiés, seuls 5 modules prismatiques semblent être réellement pertinents : le simplex, le quadruplex n°2, le pentaplex n°2, l'hexaplex n°1 et l'hexaplex n°2.

Un concepteur intéressé par une structure basée sur le concept de tensegrité a toutes les raisons de préférer la solution la moins coûteuse. C'est pourquoi le volume de matière doit être minimisé en choisissant judicieusement le module de tensegrité, le nombre de modules S , et l'élanement L/H de la structure.

Chapitre 7 : Comparaison de l'efficacité des modules prismatiques

Plusieurs modules de tenségrité répondent au critère de déformation $L/\delta \geq 500$ imposé par la norme et peuvent être ainsi utilisés dans la conception d'une passerelle.

On a vu que les structures composées d'anneaux de tenségrité n'aboutissaient pas à des résultats pertinents. C'est pourquoi, la suite de ce mémoire sera centrée uniquement sur les 4 modules prismatiques et leurs différentes orientations.

La théorie des indicateurs morphologiques va permettre de comparer quantitativement les différents modules de tenségrité à l'aide des courbes d'efficacité.

Les structures de tenségrité sont très volumineuses. C'est pourquoi on se concentrera uniquement sur les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W afin de minimiser le volume de matière à mettre en œuvre et donc le prix.

La finalité de cette section est de pouvoir guider un concepteur intéressé dans la réalisation d'une passerelle de tenségrité. La majeure partie du temps, le critère déterminant est le prix de la structure. Il se penchera donc logiquement vers le module de tenségrité le moins cher, autrement dit, la structure la moins volumineuse.

Les autres structures de tenségrité n'en seront pas moins réalisables. Elles pourraient être préférées pour des raisons pratiques, pour l'esthétisme, ou encore pour mettre l'accent sur l'originalité du module. Cependant, le concepteur devra alors revoir son prix à la hausse. Nous verrons notamment au chapitre suivant que la hauteur de passage au sein de la passerelle est décisif sur le choix de la structure de tenségrité la plus efficace.

Nous allons comparer ces structures de tenségrité pour des valeurs de l'indicateur de poids propre comprises entre $\Phi = 33 \times 10^{-4} - 132 \times 10^{-4}$. Dans le cas de structures en acier S235, ces valeurs correspondent à des portées comprises entre $L = 10 \text{ m} - 40 \text{ m}$. Les résultats des structures de tenségrité de plus grande portée ($L = 50 \text{ m} - 100 \text{ m}$) ne seront pas présentés au cours de ce mémoire.

Pour chaque module de tenségrité, seules les typologies les plus efficaces seront présentées, c'est-à-dire les structures dont le nombre de modules S assure un volume minimum de matière et des déformations jugées acceptables ($L/\delta \geq 500$).

Pour chaque portée, un tableau récapitulatif classera les différents modules de tenségrité suivant leur efficacité en fonction de l'indicateur de flambement de la structure. Il fera ainsi office de table de pré dimensionnement.

Les résultats sont issus du processus d'optimisation développé précédemment (cfr Optimisation complète d'une structure de tenségrité – §4.4.1).

7.1 Les passerelles de tensegrité de 10 m de portée

Une passerelle de tensegrité de 10 m de portée en acier S235 équivaut à un indicateur de poids propre égal à $\Phi = 33 \times 10^{-4}$.

Pour cette portée, nous allons nous intéresser aux typologies des structures de tensegrité suivantes :

- Simplex : $S = 4$ et $S = 5$;
- Quadruplex n°2 : $S = 5$;
- Hexaplex n°1 : $S = 3$;
- Hexaplex n°2 : $S = 3$ et $S = 4$.

Aucune structure ne respecte le critère de déformation pour les modules suivants : quadruplex n°1, pentaplex n°1 et pentaplex n°2.

7.1.1 Analyse des résultats

Comme on pouvait s'y attendre, les structures composées de simplex sont les plus efficaces. En effet, elles se déforment peu et sont beaucoup moins volumineuses (voir Figure 7.1). Cette différence de volume de matière est d'autant plus significative que la sensibilité au flambement des structures est grande.

Cependant, lorsque la sensibilité au flambement est très faible ($\Psi \rightarrow 0$), plusieurs modules de tensegrité sont envisageables pour un volume de matière quasiment identique aux structures composées de simplex. En effet, les structures composées de $S = 3$ hexaplex n°1 et n°2 ont un volume minimum de matière presque équivalent au simplex lorsque $\Psi = 0$:

- Simplex – $S = 5$: $W_{min} = 15.9$ et $(L/\delta)_{opt} = 571$;
- Hexaplex n°2 – $S = 3$: $W_{min} = 16.7$ et $(L/\delta)_{opt} = 613$;
- Hexaplex n°1 – $S = 3$: $W_{min} = 17$ et $(L/\delta)_{opt} = 612$.

De plus, ces structures se déforment sensiblement moins, sont peu élancées et la précontrainte introduite est plus faible. Il s'agit donc d'une très bonne solution alternative au simplex.

Lorsque la sensibilité au flambement augmente, les autres modules de tensegrité deviennent très lourds comparés au simplex. Ces structures n'en sont pas moins réalisables mais coûtent beaucoup plus cher.

Malgré les très bons résultats lorsque l'indicateur de flambement est faible, l'hexaplex (n°1 et n°2) induit les structures les plus volumineuses. En effet, son volume de matière peut atteindre des valeurs jusqu'à 2 fois plus importantes que le simplex lorsque la sensibilité de la structure augmente. Il s'agit néanmoins du module de tensegrité le plus rigide et le moins élancé.

L'hexaplex d'orientation n°2 est plus rigide que l'orientation n°1 mais consomme un peu plus de matière.

Le quadruplex n°2 n'est pas très efficace. Certes, il est globalement moins lourd que l'hexaplex (n°1 et n°2) mais reste plus volumineux que le simplex.

Le simplex est inévitablement la solution la plus pertinente en termes de volume minimum de matière et de déformations acceptables. Cependant, il s'agit du module le plus élancé et la précontrainte est globalement plus importante.

Soit les courbes d'efficiences de l'indicateur de volume W pour $\Phi = 33 \times 10^{-4}$:

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 33 \times 10^{-4}\right)$$

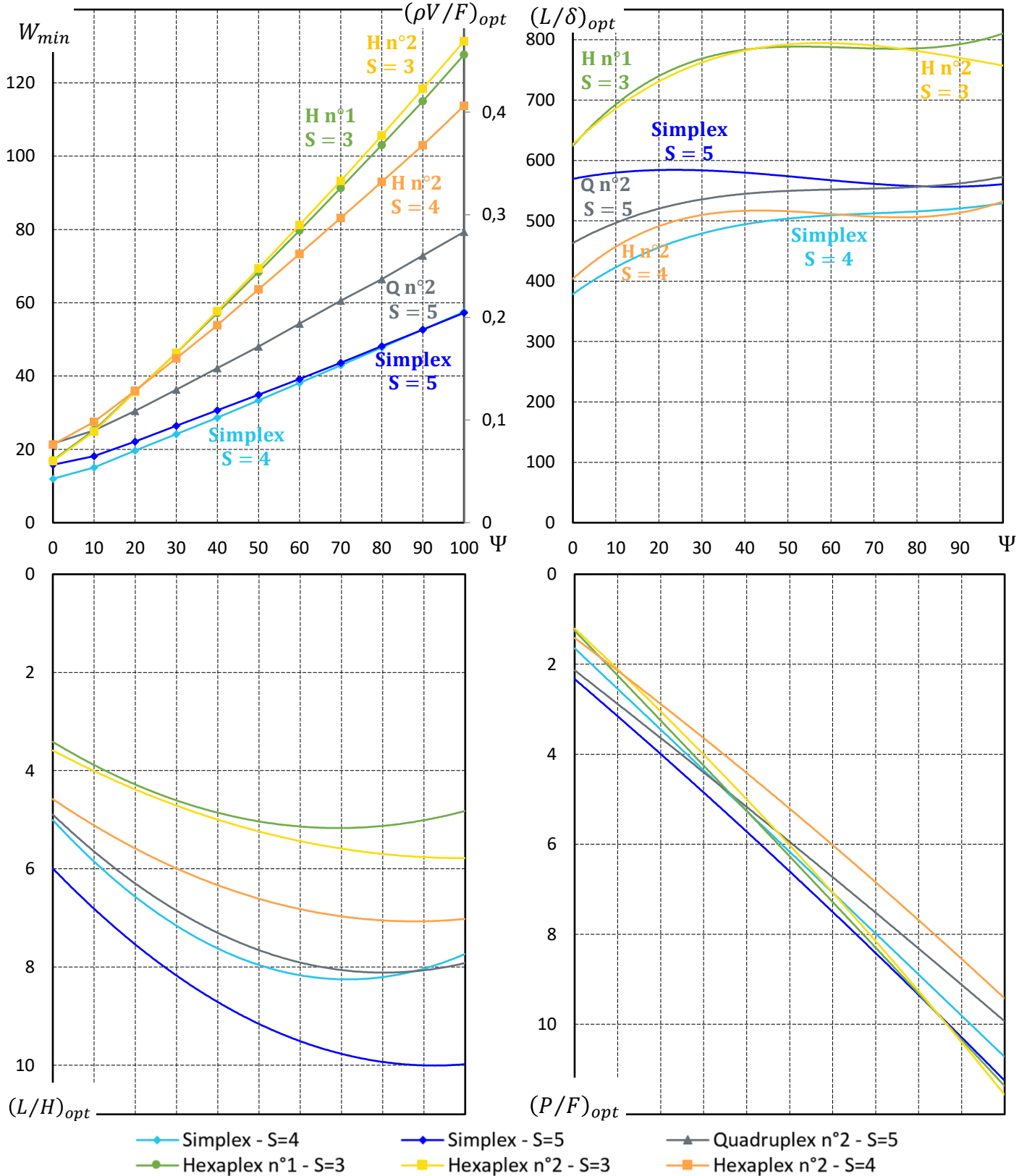


FIGURE 7.1 – COURBES D'EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ : $E/\sigma = 900$, $\Phi = 33 \times 10^{-4}$
[ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

La sensibilité au flambement influence l'efficacité d'un module de tenségrité. Le classement des modules selon leur efficacité varie donc en fonction de l'indicateur de flambement :

- Les structures composées de $S = 5$ quadruplex n°2 ont des déformations acceptables à partir de $\Psi \geq 10$ et sont moins lourdes que les structures composées d'hexaplex ;
- Ensuite, à partir de $\Psi > 20$, les structures composées de $S = 4$ hexaplex n°2 respectent le critère de déformation et seront donc préférées à son analogue composé de $S = 3$ modules ;
- Enfin, lorsque $\Psi \geq 60$, les structures composées de $S = 4$ simplex deviennent les plus efficaces. En effet, elles sont moins lourdes et respectent le critère de l'Eurocode.

On peut ainsi obtenir une table de pré dimensionnement classant l'efficacité de chaque module en fonction de la valeur de l'indicateur de flambement Ψ :

CLASSEMENT DES MODULES DE TENSÉGRITÉ SELON LEUR EFFICACITÉ POUR $L = 10$ m

Ψ	1		2		3		4		5		6	
	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$
0	15.9	571	16.7	613	17	612	/		/		/	
	Simplex – S=5		Hexa. n°2-S=3		Hexa. n°1-S=3							
10	18.2	578	24.8	712	25.1	500	25.2	712	/		/	
	Simplex – S=5		Hexa. n°2-S=3		Quad. n°2-S=5		Hexa. n°1-S=3					
20	22.2	576	30.5	525	35.7	714	35.8	786	/		/	
	Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=3		Hexa. n°1-S=3					
30	26.4	594	36.3	536	44.8	508	46.3	740	46.4	753	/	
	Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3			
40	30.7	571	42.3	549	53.9	523	57.2	765	57.7	782	/	
	Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3			
50	34.9	576	48.1	537	63.7	500	68.4	780	69.4	801	/	
	Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3			
60	38.1	507	39.1	579	54.3	548	73.3	504	79.7	788	81.2	814
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3	
70	42.9	514	43.6	550	60.6	557	83.1	511	91.3	793	93.3	736
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3	
80	47.8	519	48.2	555	66.5	559	92.9	516	103.1	796	105.6	829
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3	
90	52.6	522	52.7	558	72.9	565	103	519	115	797	118.4	752
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3	
100	57.3	526	57.5	526	79.3	569	113.7	524	127.7	801	131.3	758
	Simplex – S=5		Simplex – S=4		Quad. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3	

FIGURE 7.2 – TABLE DE PRÉDIMENSIONNEMENT DE STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ EN ACIER S235 POUR $L = 10$ m [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

N.B. Hexa. = Hexaplex et Quad. = Quadruplex.

On remarque que l'orientation n°2 de l'hexaplex n°2 ($S = 3$ ou 4) est toujours plus efficace que son orientation n°1 ($S = 3$). Elle sera ainsi toujours préférée si on optait pour une structure composée d'hexaplex.

7.2 Les passerelles de tensegrité de 20 m de portée

Une passerelle de tensegrité de 20 m de portée en acier *S235* équivaut à un indicateur de poids propre égal à $\Phi = 66 \times 10^{-4}$.

Pour cette portée, nous allons nous intéresser aux typologies des structures de tensegrité suivantes :

- Simplex : $S = 4$ et $S = 5$;
- Quadruplex n°2 : $S = 5$;
- Pentaplex n°2 $S = 5$;
- Hexaplex n°1 : $S = 3$;
- Hexaplex n°2 : $S = 3$ et $S = 4$.

Aucune structure ne respecte le critère de déformation pour les modules suivants : quadruplex n°1 et pentaplex n°1.

7.2.1 Analyse des résultats

Les résultats sont fort similaires au cas précédent (voir Figure 7.3). En effet, les structures composées de simplex sont à nouveau les plus légères. On constate que cette différence de volume minimum de matière par rapport au simplex augmente également avec la portée de la structure.

Ainsi, au plus la portée sera grande, au plus on sera tenté d'opter pour une structure composée de simplex afin de réduire le volume de matière.

Les structures composées de $S = 5$ pentaplex n°2 respectent désormais le critère de déformation à partir de $\Psi \leq 40$. La prise en compte du poids propre apporte donc de la rigidité à ce module.

De plus, il s'agit des structures de tensegrité les moins précontraintes. Le scénario de précontrainte semble donc bien adapté au pentaplex.

Cependant, le pentaplex est composé d'un nombre élevé d'éléments, son poids propre est donc naturellement important. Il est ainsi légèrement plus volumineux que le quadruplex.

À nouveau, lorsque la sensibilité au flambement est très faible ($\Psi \rightarrow 0$), plusieurs modules de tensegrité sont réalisables pour un volume du même ordre de grandeur. En effet, les structures composées de $S = 3$ hexaplex n°1 et n°2 ont un volume minimum de matière proche du simplex lorsque $\Psi = 0$:

- Simplex – $S = 5$: $W_{min} = 16.6$ et $(L/\delta)_{opt} = 572$;
- Hexaplex n°2 – $S = 3$: $W_{min} = 18$ et $(L/\delta)_{opt} = 629$;
- Hexaplex n°1 – $S = 3$: $W_{min} = 18.2$ et $(L/\delta)_{opt} = 627$.

On remarque que la différence de volume entre le simplex et les hexaplex a légèrement augmenté comparée au cas précédent (cfr §7.1.1).

Notons que l'élanement optimal des modules n'est pas influencé par la portée de la structure.

Soit les courbes d'efficace de l'indicateur de volume W pour $\Phi = 66 \times 10^{-4}$:

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 66 \times 10^{-4}\right)$$

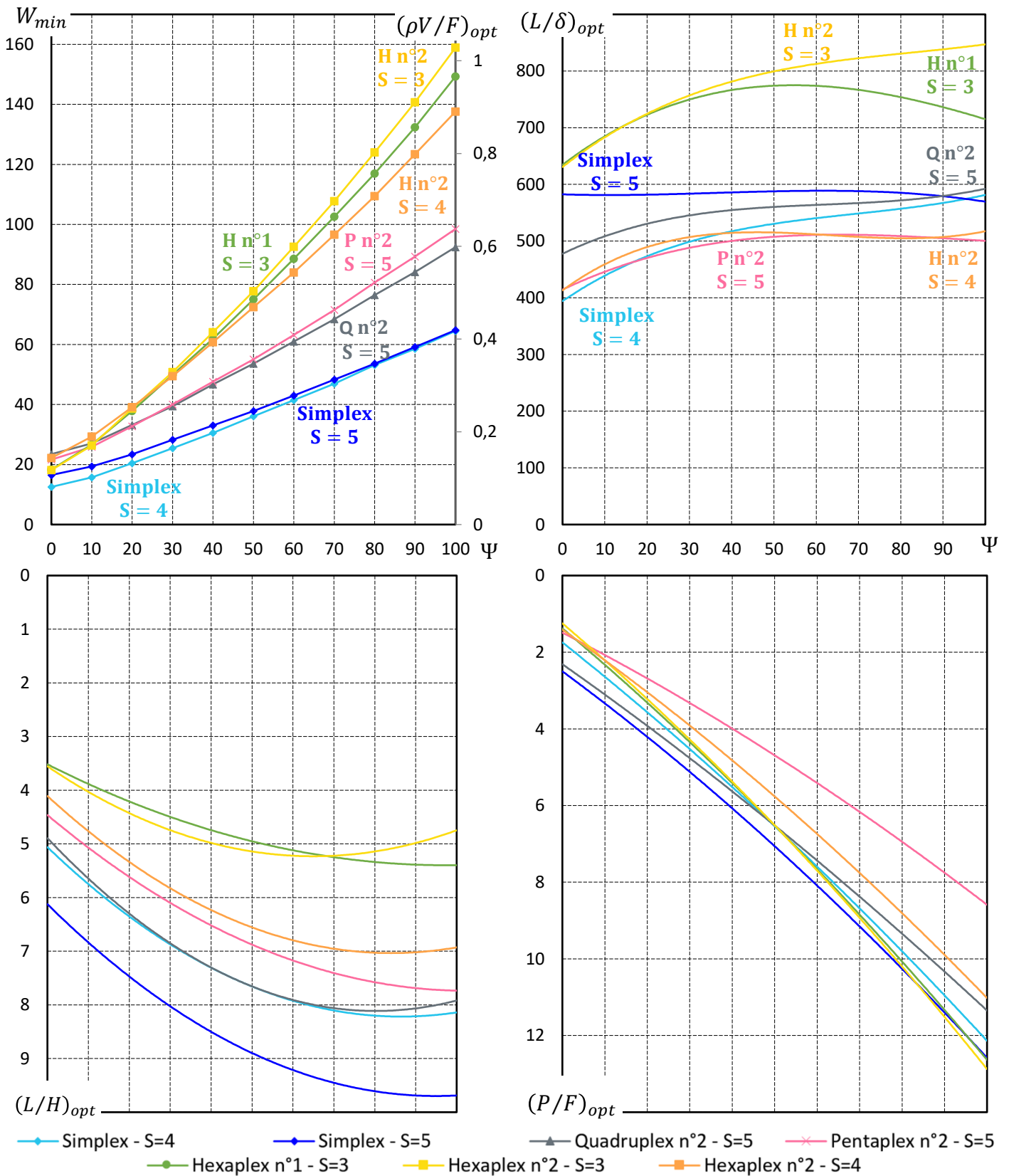


FIGURE 7.3 – COURBES D'EFFICACE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ : $E/\sigma = 900, \Phi = 66 \times 10^{-4}$
[ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Soit la table de pré dimensionnement classant l'efficacité de chaque module en fonction de la valeur de l'indicateur de flambement Ψ :

CLASSEMENT DES MODULES DE TENSÉGRITÉ SELON LEUR EFFICACITÉ POUR $L = 20$ m

Ψ	1		2		3		4		5		6		7	
	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$
0	16.6	572	18	629	18.2	627	/		/		/		/	
	Simplex – S=5		Hexa. n°2-S=3		Hexa. n°1-S=3									
10	19.3	587	26.3	709	26.6	711	27.1	508	/		/		/	
	Simplex – S=5		Hexa. n°2-S=3		Hexa. n°1-S=3		Quad. n°2-S=5							
20	23.4	577	33.2	540	37.8	775	38.6	715	/		/		/	
	Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3							
30	28.3	598	39.4	542	49.4	502	49.9	731	50.8	754	/		/	
	Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3					
40	30.6	511	33	574	46.7	563	60.7	523	62	745	64.1	782	/	
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3			
50	36	527	37.8	579	53.6	548	55	500	72.4	536	75.1	760	77.8	798
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3	
60	41.4	543	43	588	60.9	559	63.2	508	84	500	88.5	767	92.5	813
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3	
70	46.9	551	48.3	594	68.4	568	71.5	516	96.6	502	102.6	769	107.7	823
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3	
80	53.1	555	53.6	597	76.5	578	80.7	526	109.5	507	116.9	765	124	832
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3	
90	58.6	571	59.2	568	84.2	582	89.3	500	123.4	512	132.4	765	140.1	837
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3	
100	64.5	579	64.8	571	92.4	588	98.5	500	137.6	516	149.3	792	159	847
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3	

FIGURE 7.4 – TABLE DE PRÉDIMENSIONNEMENT DE STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ EN ACIER S235 POUR $L = 20$ m
[ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

N.B. Hexa. = Hexaplex, Quad. = Quadruplex et Penta. = Pentaplex.

7.3 Les passerelles de tensegrité de 30 m de portée

Une passerelle de tensegrité de 30 m de portée en acier S235 équivaut à un indicateur de poids propre égal à $\Phi = 99 \times 10^{-4}$.

Pour cette portée, nous allons nous intéresser aux typologies des structures de tensegrité suivantes :

- Simplex : $S = 4$ et $S = 5$;
- Quadruplex n°2 : $S = 5$;
- Pentaplex n°2 : $S = 5$;
- Hexaplex n°1 : $S = 3$;
- Hexaplex n°2 : $S = 3$ et $S = 4$.

Aucune structure ne respecte le critère de déformation pour les modules suivants : quadruplex n°1 et pentaplex n°1.

7.3.1 Analyse des résultats

Les déformations des structures composées de $S = 5$ simplex ne sont pas influencées par la portée. Cependant, les structures composées $S = 4$ simplex se rigidifient d'autant plus que la portée augmente. En effet, elles respectent désormais le critère de déformation à partir de $\Psi > 20$. Elles seront donc préférées car elles sont plus légères.

La précontrainte des structures composées d'hexaplex (n°1 et n°2) a sensiblement augmenté pour des grandes valeurs de l'indicateur de flambement. Elle est désormais supérieure à la précontrainte introduite dans le simplex à partir de $\Psi > 60$. Il en résulte une quantité de matière démesurée.

Cependant, les structures composées de $S = 3$ hexaplex n°1 et n°2 ont toujours un volume minimum de matière très proche du simplex lorsque $\Psi = 0$:

- Simplex – $S = 5$: $W_{min} = 17.8$ et $(L/\delta)_{opt} = 586$;
- Hexaplex n°2 – $S = 3$: $W_{min} = 18.5$ et $(L/\delta)_{opt} = 612$;
- Hexaplex n°1 – $S = 3$: $W_{min} = 18.6$ et $(L/\delta)_{opt} = 611$.

On remarque que les déformations de l'hexaplex ont augmenté avec la portée (cfr §7.2.1).

Soit les courbes d'efficace de l'indicateur de volume W pour $\Phi = 99 \times 10^{-4}$:

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 99 \times 10^{-4}\right)$$

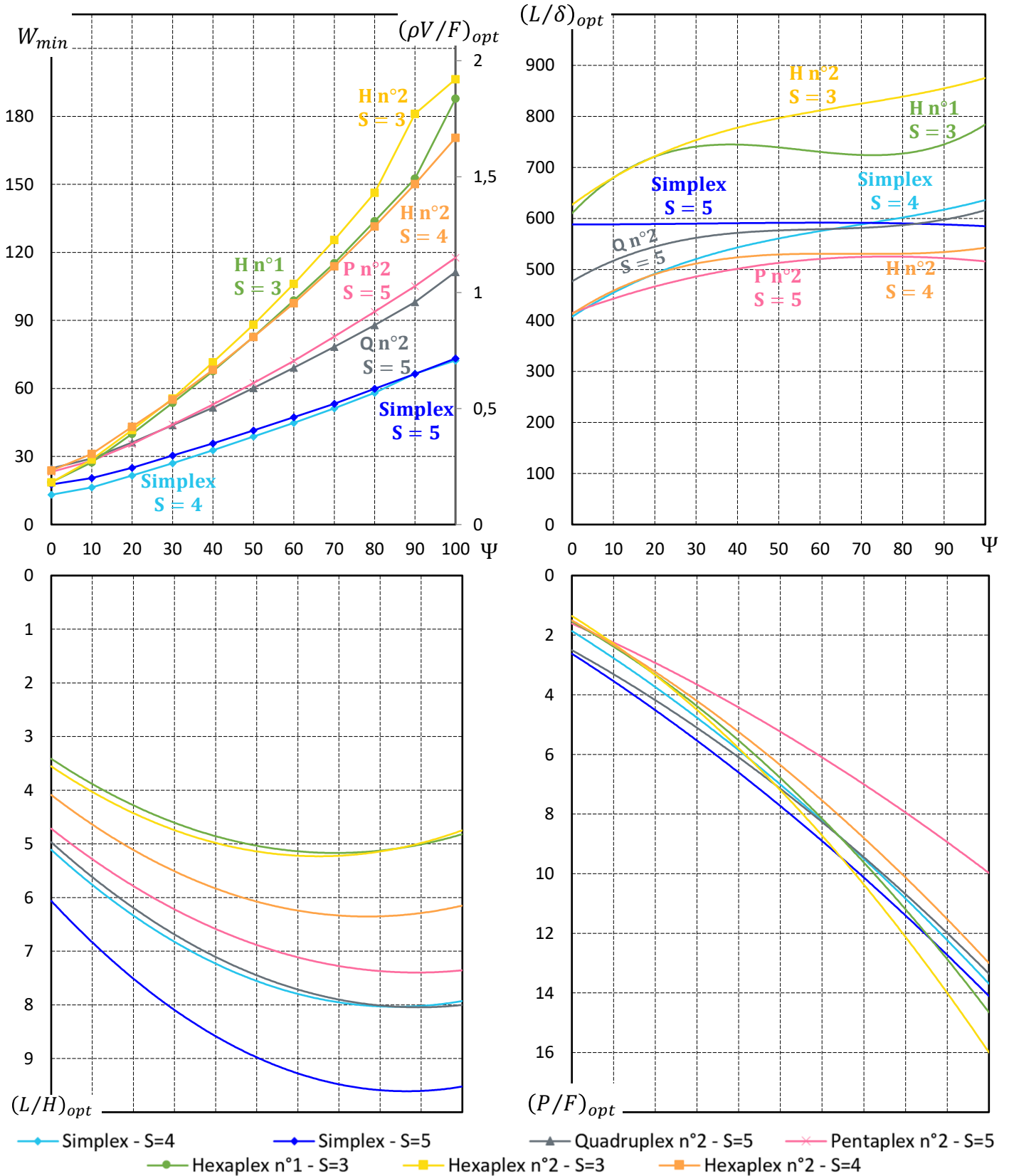


FIGURE 7.5 – COURBES D'EFFICACE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ : $E/\sigma = 900, \Phi = 99 \times 10^{-4}$
[ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Soit la table de pré dimensionnement classant l'efficacité de chaque module en fonction de la valeur de l'indicateur de flambement Ψ :

CLASSEMENT DES MODULES DE TENSÉGRITÉ SELON LEUR EFFICACITÉ POUR $L = 30$ m														
Ψ	1		2		3		4		5		6		7	
	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$
0	17.8	586	18.5	612	18.6	611	/		/		/		/	
	Simplex – S=5		Hexa. n°2-S=3		Hexa. n°1-S=3									
10	20.5	592	27.4	689	28.7	722	29.1	513	/		/		/	
	Simplex – S=5		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3		Quad. n°2-S=5							
20	25.1	583	36.1	549	40	758	41.7	709	43.1	511	/		/	
	Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3		Hexa. n°2-S=4					
30	27.1	524	30.4	605	43.8	556	44.1	503	53.4	715	55.1	500	55.6	746
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=5		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°2-S=3	
40	32.7	534	35.7	578	51.6	572	53	500	67.6	731	68.2	515	71.5	779
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=5		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°2-S=3	
50	38.8	558	41.5	589	60.2	587	62.5	504	82.7	528	82.8	738	88.1	795
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3	
60	44.8	571	47.3	595	69.2	571	72.2	514	97.6	534	98.8	738	106.1	809
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3	
70	51.3	585	53.3	599	78.4	581	82.9	524	113.8	540	115.3	733	125.5	819
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3	
80	58.1	601	60	568	87.9	588	94	532	131.5	545	133.8	733	146.3	828
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3	
90	66.5	633	66.4	611	98	596	105.2	537	150.1	505	152.6	730	181.1	891
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3	
100	72.4	627	73.2	577	111.4	616	117.7	505	170.5	554	187.8	789	196.4	857
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3	

FIGURE 7.6 – TABLE DE PRÉDIMENSIONNEMENT DE STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ EN ACIER S235 POUR $L = 30$ m
[ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

N.B. Hexa. = Hexaplex, Quad. = Quadruplex et Penta. = Pentaplex.

On remarque que l'orientation n°1 de l'hexaplex est désormais plus efficace que l'orientation n°2 pour plusieurs valeurs de l'indicateur de flambement.

7.4 Les passerelles de tensegrité de 40 m de portée

Une passerelle de tensegrité de 40 m de portée en acier *S235* équivaut à un indicateur de poids propre égal à $\Phi = 132 \times 10^{-4}$.

Pour cette portée, nous allons nous intéresser aux typologies des structures de tensegrité suivantes :

- Simplex : $S = 4$ et $S = 5$;
- Quadruplex n°2 : $S = 4$ et $S = 5$;
- Pentaplex n°2 : $S = 4$ et $S = 5$;
- Hexaplex n°1 : $S = 3$;
- Hexaplex n°2 : $S = 3$ et $S = 4$.

Aucune structure ne respecte le critère de déformation pour les modules suivants : quadruplex n°1 et pentaplex n°1.

7.4.1 Analyse des résultats

Les structures composées de $S = 4$ quadruplex n°2 respectent désormais le critère de déformation à partir de $\Psi \geq 60$. Elles sont plus légères et moins élancées que le cas $S = 5$. On remarque que ses déformations varient énormément en fonction de l'indicateur de flambement.

Les structures composées de $S = 4$ pentaplex n°2 atteignent également des déformations acceptables à partir de $\Psi \geq 50$. Elles sont également peu précontraintes mais souffrent de leur nombre élevé d'éléments. Cependant, elles sont globalement moins volumineuses que le cas $S = 5$.

Ces 2 structures illustrent tout l'intérêt de prendre en compte le poids propre dans l'optimisation. En effet, certaines typologies voient leurs déformations diminuer grâce au poids propre. Ainsi, ces structures, qui étaient à priori trop déformables pour être pertinentes, sont finalement efficaces et moins volumineuses.

Le pourcentage de poids propre par rapport au chargement extérieur devient important mais respecte presque toujours la limite $\rho V < 3F$ (cfr §4.3.5.1).

À nouveau, les structures composées de $S = 3$ hexaplex n°1 et n°2 ont un volume minimum de matière très proche du simplex lorsque $\Psi = 0$:

- Simplex – $S = 5$: $W_{min} = 18.4$ et $(L/\delta)_{opt} = 583$;
- Hexaplex n°1 – $S = 3$: $W_{min} = 19$ et $(L/\delta)_{opt} = 595$;
- Hexaplex n°2 – $S = 3$: $W_{min} = 20$ et $(L/\delta)_{opt} = 621$.

On remarque que l'orientation n°1 de l'hexaplex est devenue globalement plus efficace que l'orientation n°2. En effet, la précontrainte introduite est plus faible.

Soit les courbes d'efficace de l'indicateur de volume W pour $\Phi = 132 \times 10^{-4}$:

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 132 \times 10^{-4}\right)$$

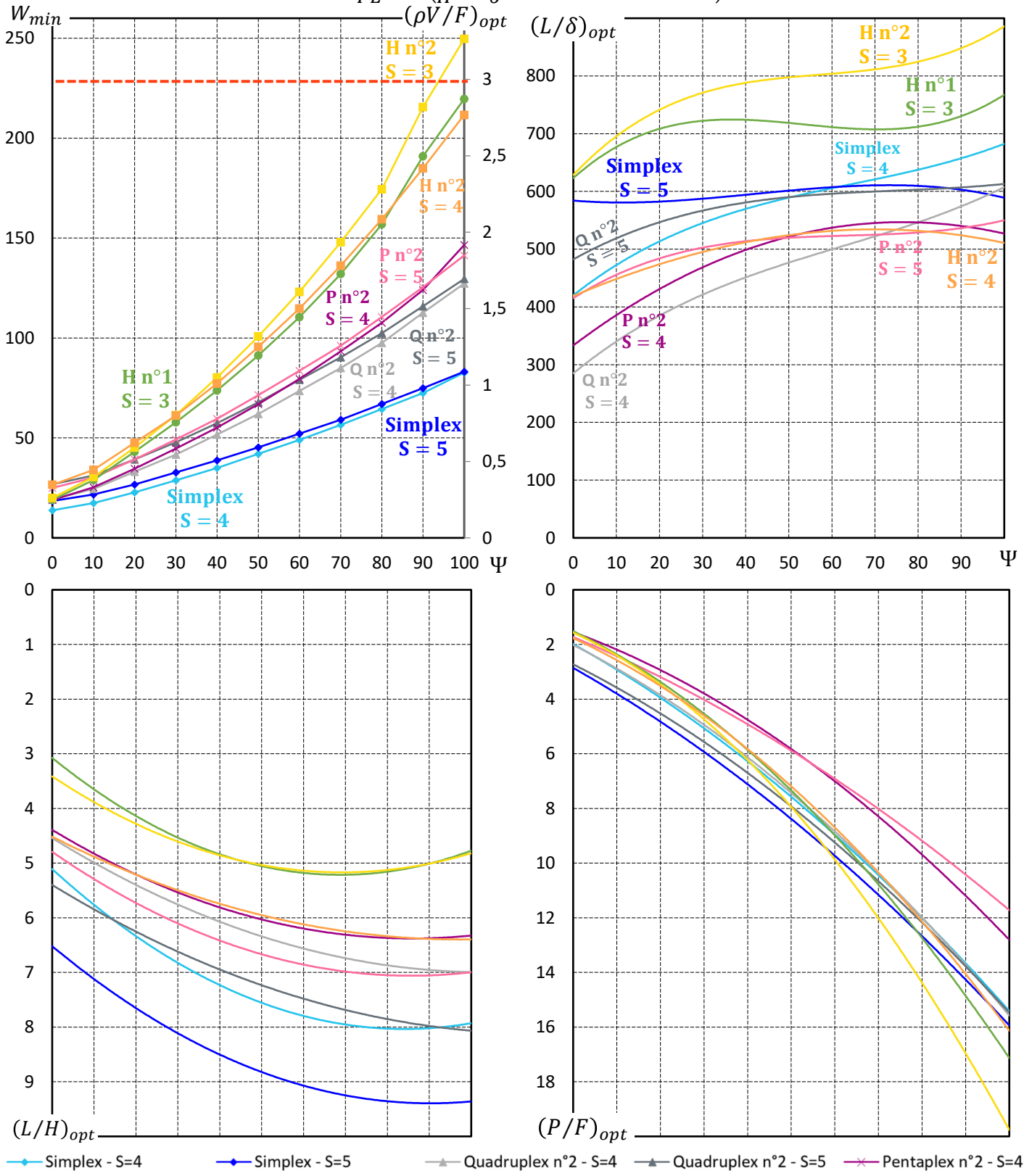


FIGURE 7.7 – COURBES D'EFFICACE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ : $E/\sigma = 900, \Phi = 132 \times 10^{-4}$
[ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Soit la table de pré dimensionnement classant l'efficacité de chaque module en fonction de la valeur de l'indicateur de flambement Ψ . Pour une question de lisibilité, seuls les 7 modules les plus efficaces sont présentés :

CLASSEMENT DES MODULES DE TENSÉGRITÉ SELON LEUR EFFICACITÉ POUR $L = 40$ m

Ψ	1		2		3		4		5		6		7	
	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$
0	18.4	583	19	595	20	621	/		/		/		/	
	Simplex – S=5		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3									
10	21.72	595	29	682	30.4	714	31.3	515	/		/		/	
	Simplex – S=5		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3		Quad. n°2-S=5							
20	22.7	515	26.8	586	39.3	553	43.1	754	45.2	785	47.6	505	/	
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=3		Hexa. n°2-S=4			
30	28.8	545	32.7	567	47.9	557	49.2	508	57.8	698	61.3	500	61.4	742
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=5		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°2-S=3	
40	35	565	38.8	620	57.4	578	59.6	524	73.7	705	77.3	504	80.3	773
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=5		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=4		Hexa. n°2-S=3	
50	42	592	45.3	592	66.8	519	67.8	596	71.4	507	91.2	708	95.6	518
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Penta. n°2-S=4		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=5		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=4	
60	49	604	52.2	600	79.5	531	79.1	611	83.6	518	110.4	709	114.7	525
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Penta. n°2-S=4		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=5		Hexa. n°1-S=3		Hexa. n°2-S=4	
70	56.5	622	59.2	604	85	526	90.4	588	93.3	541	96.2	525	132	712
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=4		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=4		Penta. n°2-S=5		Hexa. n°1-S=3	
80	64.4	640	67	612	97.5	548	102.4	597	107.7	546	110.5	534	156.9	720
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=4		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=4		Penta. n°2-S=5		Hexa. n°1-S=3	
90	72.5	653	75	617	112.7	580	115.9	608	124	553	125.4	540	184.9	542
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=4		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=4		Penta. n°2-S=5		Hexa. n°2-S=4	
100	82.7	684	83.2	580	127.3	602	129.6	615	141.4	546	146.6	519	211.7	500
	Simplex – S=4		Simplex – S=5		Quad. n°2-S=4		Quad. n°2-S=5		Penta. n°2-S=5		Penta. n°2-S=4		Hexa. n°2-S=4	

FIGURE 7.8 – TABLE DE PRÉDIMENSIONNEMENT DE STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ EN ACIER S235 POUR $L = 40$ m
[ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

N.B. Hexa. = Hexaplex, Quad. = Quadruplex et Penta. = Pentaplex.

7.5 Conclusion

Les structures de tenségrité composées de simplex sont indéniablement les plus efficaces. En effet, la géométrie du simplex, composée d'uniquement 12 éléments, lui confère un volume de matière plus faible comparé aux autres modules de tenségrité prismatiques.

Au plus une structure sera sensible au flambement, au plus le simplex sera privilégié aux autres modules. En effet, la précontrainte augmente avec l'indicateur de flambement. Le volume de matière est donc d'autant plus influencé que le nombre d'éléments du module est élevé.

Le pentaplex souffre de son nombre d'éléments malgré qu'il soit moins précontraint que les autres modules. Il a ainsi une efficacité assez proche du quadruplex.

L'efficacité de l'hexaplex chute avec l'indicateur de flambement. En effet, malgré que les structures composées de 3 hexaplex soient très rigides, le nombre d'éléments (60 éléments) reste élevé comparé à une structure composée de 5 simplex par exemple (48 éléments). La précontrainte a donc un impact déterminant sur son volume de matière.

Cependant, lorsque la structure est peu sensible au flambement ($\Psi \rightarrow 0$), la rigidité naturelle de l'hexaplex induit une précontrainte très faible. Les structures composées de 3 hexaplex (n°1 et n°2) deviennent ainsi une alternative efficace au simplex. En effet, elles sont plus rigides, peu élancées, moins précontraintes et consomment une quantité de matière presque équivalente !

La prise en compte du poids propre est essentielle pour les structures de tenségrité. En effet, la portée a un impact considérable sur le volume de matière à mettre en œuvre.

Au plus la portée de la structure sera grande, au plus le simplex sera préféré aux autres modules. En effet, l'impact du poids propre augmente sensiblement le volume de matière des systèmes composés d'un nombre élevé d'éléments.

De plus, plusieurs modules de tenségrité se rigidifient avec le poids propre. Ainsi, certaines typologies, qui semblaient à priori trop déformables pour être pertinentes lorsque le poids propre n'était pas pris en compte, respectent finalement le critère de déformation et sont moins volumineuses que le nombre de modules S initialement le plus efficace sans poids propre.

De manière générale, les structures de tenségrité, bien que visuellement légères, sont très massives, et donc beaucoup plus chères que les structures plus classiques. Un concepteur, désireux de réaliser une passerelle basée sur le concept de tenségrité, a donc tout intérêt à se tourner vers le simplex pour réduire le coût, déjà élevé, de la structure.

Cependant, les autres structures de tenségrité n'en sont pas moins réalisables. Plusieurs contraintes de construction et de mise en œuvre pourraient obliger un concepteur à se tourner vers un autre module de tenségrité que le simplex. Il devra cependant voir son prix à la hausse. On peut imaginer les contraintes suivantes :

- *Passerelle peu élancée* : l'élancement géométrique peut être volontairement choisi plus faible afin d'assurer une hauteur de passage suffisante pour les promeneurs. On optera alors plus volontiers pour une structure composée de quadruplex, de pentaplex ou d'hexaplex en fonction de la sensibilité au flambement et de la hauteur de passage recherchée ;
- *Structure peu précontrainte* : la mise en œuvre de la précontrainte n'est pas chose aisée. Le manque de technique peut ainsi obliger un concepteur à limiter la précontrainte introduite

dans la structure. Il se tournera alors vers une structure composée de pentaplex ou de quadruplex en fonction de la portée ;

- *Structure plus rigide* : le critère de déformation peut être revu à la hausse pour des raisons de sécurité. Le seul module plus rigide que le simplex est l'hexaplex. Cependant, lorsque la sensibilité au flambement augmente, le volume de matière devient vite démesuré.

On verra au chapitre suivant que la hauteur de passage disponible pour les promeneurs est un critère prédominant dans le choix de la typologie optimale de la passerelle de tenségrité. En effet, les structures composées de simplex sont très élancées et n'assurent pas une hauteur de passage suffisante lorsque la portée de la passerelle est faible. On est alors obligé de se tourner vers une solution alternative, plus coûteuse, mais praticable.

Chapitre 8 : Cas pratique, dimensionnement d'une passerelle de tenségrité

Au cours de ce dernier chapitre, nous allons étudier un exemple pratique de passerelle de tenségrité. L'objectif est d'illustrer certains résultats de l'étude de comparaison précédente (voir Chapitre 7).

On va s'intéresser tout d'abord à l'impact de la portée d'une structure sur le choix du nombre de modules S optimal. Pour cela, nous allons considérer 2 portées différentes : $L = 20$ m et $L = 40$ m.

On verra ensuite pour quelle raison pratique un concepteur pourrait se tourner vers un autre module de tenségrité que le simplex.

8.1 Exemple pratique

8.1.1 Données et hypothèses

Soit une passerelle piétonne de tenségrité composée de S modules prismatiques et qui est soumise au critère de l'Eurocode $L/\delta \geq 500$.

Les données géométriques de la structure sont les suivantes :

- La structure est hyperstatique ;
- Les 2 portées de la passerelle sont :
 - $L = 20$ m
 - $L = 40$ m
- La largeur b du tablier est égal à 2 m.

Les données matérielles choisies sont :

- Les sections des éléments sont divisées en 3 catégories (cfr §4.2.3.2) :
 - Les barres ont une forme circulaire creuse dont le diamètre ϕ_b vaut 10 fois l'épaisseur t . Le rapport vaut donc $m = t/\phi_b = 0,1$ et le facteur de forme $q = 0,363$ (cfr Figure 2.8) ;
 - Les câbles des bases des modules ont une forme circulaire pleine et ont un diamètre $\phi_{c,bases}$;
 - Les câbles longitudinaux des modules ont une forme circulaire pleine et ont un diamètre $\phi_{c,long}$;
 - Les diamètres ϕ_b , $\phi_{c,bases}$, $\phi_{c,long}$ des barres et des câbles sont déterminés par l'optimisation des sections (cfr §4.2.3.2).
- Les barres et les câbles de la structure sont en acier S235 dont les propriétés sont :
 - Poids volumique de l'acier : $\rho = 77 \text{ kN/m}^3$;
 - Contrainte admissible : $\sigma = 235 \text{ MPa}$;
 - Module d'élasticité : $E = 210 \text{ GPa}$;
 - L'indicateur de raideur est donc égal à $E/\sigma \approx 900$.
- Les charges extérieures agissant sur la structure sont :
 - Le poids propre du tablier : $0,5 \text{ kN/m}^2$;
 - Une charge variable d'exploitation : 5 kN/m^2 ;
 - Une charge de neige : $0,75 \text{ kN/m}^2$.

La charge externe totale de sollicitation peut être calculée suivant la formule de l'Eurocode :

$$S_{ed} = 1.35G + 1.5Q$$

On obtient ainsi une charge surfacique totale de $9,3 \text{ kN/m}^2$, ce qui correspond à une charge linéaire de $18,6 \text{ kN/m}$ répartie sur la longueur de la structure.

Le poids propre de la structure est pris en compte dans l'optimisation via l'indicateur de poids propre. Il sera déterminé à posteriori.

8.1.2 Cas n°1 : $L = 20 \text{ m}$

Pour cette portée, on obtient une charge externe totale égale à :

$$F = 372 \text{ kN}$$

La sensibilité globale au flambement de la passerelle est donc représentée par l'indicateur de flambement :

$$\Psi = \frac{\sigma L}{\sqrt{qEF}} = 27.7$$

L'indicateur de poids propre d'une structure en acier S235 de 20 m de portée vaut :

$$\Phi = 66 \times 10^{-4}$$

8.1.2.1 Dimensionnement de la passerelle de tensegrité optimale

Les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W (cfr Figure 8.2 ci-dessous) vont permettre de déterminer les structures de tensegrité les moins lourdes et dont les déformations sont jugées acceptables ($L/\delta \geq 500$) :

- Simplex – $S = 5$;
- Quadruplex n°2 – $S = 5$;
- Hexaplex n°1 – $S = 3$;
- Hexaplex n°2 – $S = 3$;
- Hexaplex n°2 – $S = 4$.

Parmi elles, la structure de tensegrité composée de 5 simplex est la plus légère. On va donc opter pour cette typologie de passerelle de tensegrité.

Les indicateurs morphologiques vont permettre de trouver rapidement les dimensions optimales de la structure en se référant aux courbes d'efficacité de l'indicateur de volume, qui font également office de tables de prédimensionnement (cfr Figure 8.2 ci-dessous).

La structure de tensegrité composée de 5 simplex qui minimise le volume de matière, pour un indicateur de flambement $\Psi = 27.7$, a un élancement géométrique $L/H = 7.9$, c'est-à-dire une hauteur $H = 2,5 \text{ m}$.

Chaque barre de la structure doit être pré comprimée par une force $P = 4.8 F = 1782 \text{ kN}$ afin d'éviter que les câbles ne se détendent.

L'indicateur de volume minimum de cette passerelle vaut $W_{min} = 27,1$. Le volume total de matière à mettre en œuvre pour résister à la précontrainte, aux charges externes totales, et au poids propre de la structure est donc égal à :

$$V = \frac{WFL}{\sigma} = 0,86 \text{ m}^3$$

Le poids propre de la passerelle en acier s'élève à :

$$PP = \rho V = 66 \text{ kN}$$

La passerelle reprend ainsi une charge totale :

$$F_{tot} = PP + F = 437 \text{ kN}$$

Le pourcentage de poids propre par rapport aux charges extérieures F s'élève donc à :

$$\frac{\rho V}{F} = 18 \%$$

Enfin, lorsque le chargement extérieur F et le poids propre sont appliqués, la structure précontrainte atteint une flèche maximale égale à $\delta = \frac{L}{590} = 34 \text{ mm}$.

Selon la norme, la flèche ne peut pas dépasser $\delta = L/500 = 40 \text{ mm}$.

Le solveur fournit également les dimensions des barres et des câbles, nécessaires pour résister à la précontrainte, aux charges externes totales, et au poids propre de la structure :

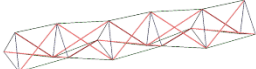
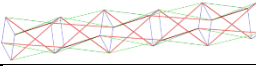
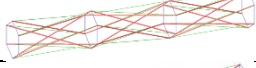

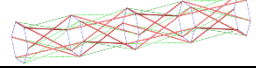
Barres : $\phi_b = 161 \text{ mm}$ et $t = 16 \text{ mm}$;

Câbles des bases : $\phi_{c,bases} = 54 \text{ mm}$;

Câbles longitudinaux : $\phi_{c,long} = 66 \text{ mm}$.

8.1.2.2 Comparaison du dimensionnement suivant la typologie de la passerelle

Soit le tableau comparant les résultats du dimensionnement de la passerelle en fonction de la structure de tenségrité choisie :

Représentation 3D	Module de tenségrité	H [m]	V [m ³]	PP [kN]	P [kN]	δ [mm]	PP/F [%]
	Simplex – $S = 5$	2.5	0.86	66	1782	34	18
	Quadruplex n°2 – $S = 5$	3	1.21	93	1670	36	25
	Hexaplex n°1 – $S = 3$	4.8	1.50	115	1522	26	31
	Hexaplex n°2 – $S = 3$	4.3	1.52	117	1485	26	32
	Hexaplex n°2 – $S = 4$	3.6	1.56	120	1374	36	32

**FIGURE 8.1 – CARACTÉRISTIQUES DES PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ OPTIMALES : $L = 20 \text{ m}$
[ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]**

On comprend bien tout l'intérêt d'opter pour une passerelle de tenségrité composée de 5 simplex. L'économie en volume de matière, et donc en poids propre, est très importante. Cependant, il s'agit des structures les plus précontraintes et les plus élancées.

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 66 \times 10^{-4}\right)$$

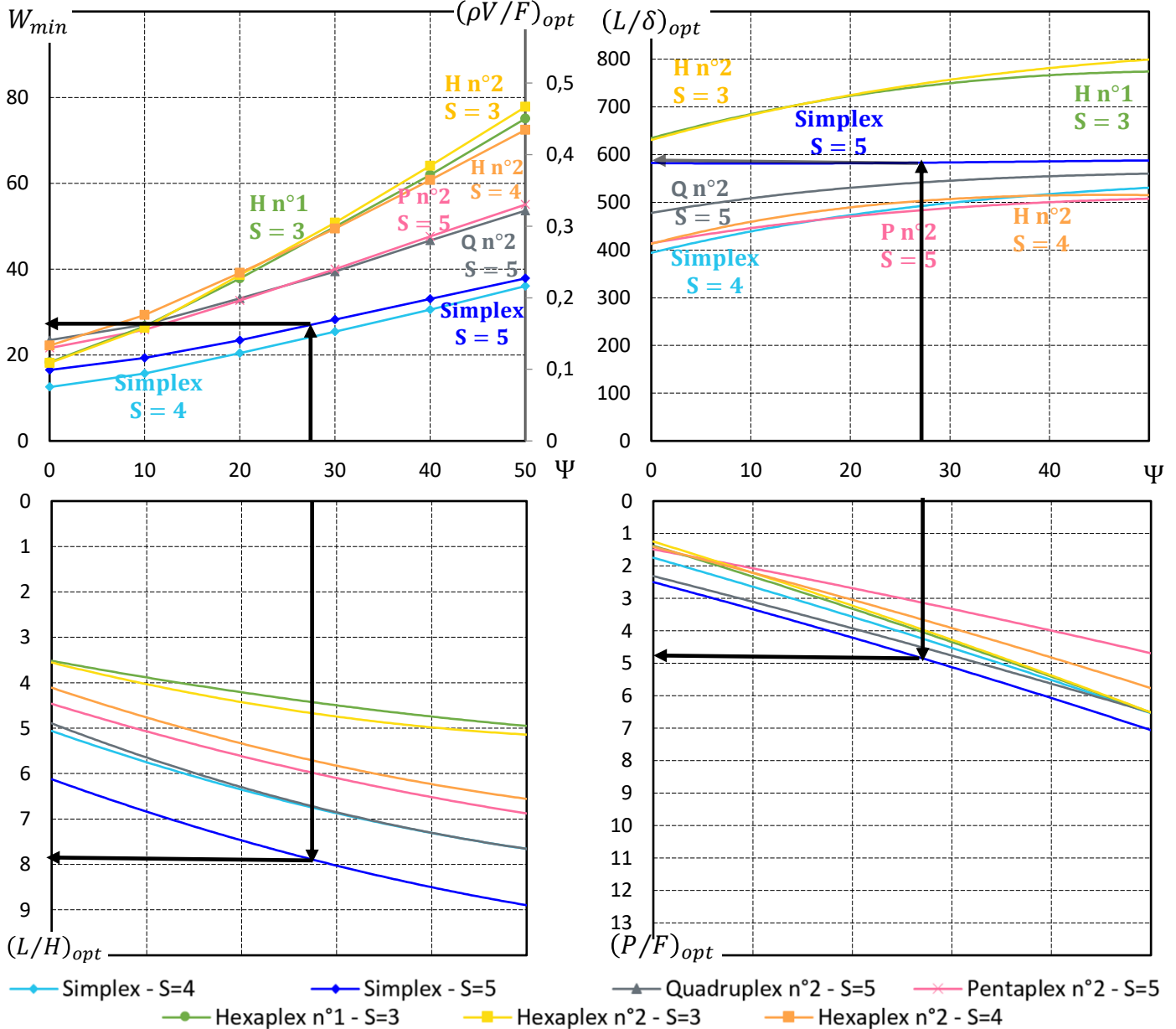


FIGURE 8.2 – TABLE DE PRÉDIMENSIONNEMENT D'UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ EN ACIER S235 POUR $L = 20$ m [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

8.1.3 Cas n°2 : $L = 40$ m

En considérant la même charge linéaire, mais appliquée cette fois-ci sur une structure de 40 m de portée, on obtient une charge externe égale à :

$$F = 744 \text{ kN}$$

La sensibilité globale au flambement de la passerelle est donc représentée par l'indicateur de flambement :

$$\Psi = \frac{\sigma L}{\sqrt{qEF}} = 39.2$$

L'indicateur de poids propre d'une structure en acier S235 de 40 m de portée vaut :

$$\Phi = 232 \times 10^{-4}$$

8.1.3.1 Dimensionnement de la passerelle de tensegrité optimale

Les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W (cfr Figure 7.7) vont permettre de déterminer les structures de tensegrité les moins lourdes et dont les déformations sont jugées acceptables :

- Simplex – $S = 4$;
- Simplex – $S = 5$;
- Quadruplex n°2 – $S = 5$;
- Pentaplex n°2 – $S = 5$;
- Hexaplex n°1 – $S = 3$;
- Hexaplex n°2 – $S = 3$;
- Hexaplex n°2 – $S = 4$.

Parmi elles, la structure de tensegrité composée de 4 simplex est la plus légère. On va donc opter pour cette typologie de passerelle de tensegrité.

On remarque ainsi que la sensibilité au flambement de la passerelle influence le choix de la structure de tensegrité optimale.

De plus, cet exemple illustre tout l'intérêt de la prise en compte du poids propre dans l'optimisation. En effet, le poids propre a permis de diminuer les déformations des structures composées de $S = 4$ simplex, de telle manière qu'elles respectent désormais le critère de déformation pour $\Psi \geq 15$ (pour $\Phi = 232 \times 10^{-4}$). Si le poids propre n'avait pas été pris en compte, cette typologie de tensegrité aurait été écartée à tort comme l'illustre la Figure 8.3. On aurait donc opté pour une structure plus lourde composée de 5 simplex.

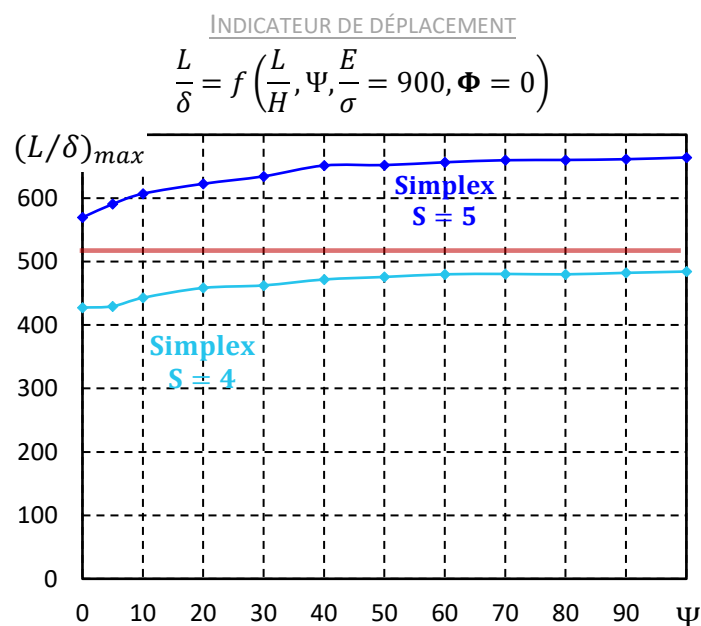


FIGURE 8.3 – COURBES D'EFFICACITÉ L/δ DES STRUCTURES COMPOSÉES DE SIMPLEX POUR $\Phi = 0$
[ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Les indicateurs morphologiques vont permettre de rapidement trouver les dimensions optimales de la structure (cfr Figure 7.7).

La démarche pour déterminer les différentes grandeurs du dimensionnement est similaire au cas précédent (cfr §8.1.2.1).

Les résultats du dimensionnement de la passerelle en fonction de la structure de tensegrité choisie sont résumés dans le tableau ci-dessous :

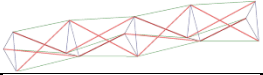
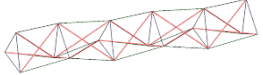
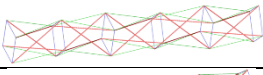
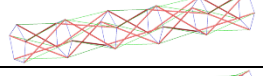
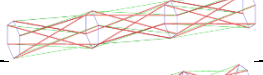
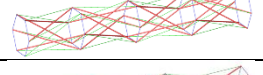

Représentation 3D	Module de tensegrité	H [m]	V [m ³]	PP [kN]	P [kN]	δ [mm]	PP/F [%]
	Simplex – $S = 4$	5,6	4,4	339	4603	71	46
	Simplex – $S = 5$	4,7	4,9	375	5197	67	50
	Quadruplex n°2 – $S = 5$	5,9	7,2	554	4900	69	75
	Pentaplex n°2 – $S = 5$	6,3	7,4	573	3564	79	77
	Hexaplex n°1 – $S = 3$	8,4	9,2	708	4380	56	95
	Hexaplex n°2 – $S = 4$	7,3	9,7	749	4232	76	101
	Hexaplex n°2 – $S = 3$	8,4	10	770	4677	51	104

FIGURE 8.4 – CARACTÉRISTIQUES DES PASSERELLE DE TENSEGRITÉ OPTIMALES : $L = 40$ m
[ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

A nouveau, nous avons tout intérêt à opter pour une passerelle de tensegrité composée de 4 simplex. L'économie en volume de matière, et donc en poids propre, est colossale.

En prenant en compte le poids propre dans l'optimisation, nous avons ainsi réduit la masse de la passerelle de plus de 3,5 tonnes. En effet, la structure composée de 4 simplex respecte désormais le critère de déformation et est plus légère que celle composée de 5 simplex.

Ces résultats illustrent l'impact de la portée d'une structure sur son volume de matière à mettre en œuvre, et donc son poids propre.

En effet, pour une même charge externe linéairement répartie, le poids propre de la structure est devenu 5 fois plus important en doublant simplement la portée.

8.1.4 Considérations pratiques

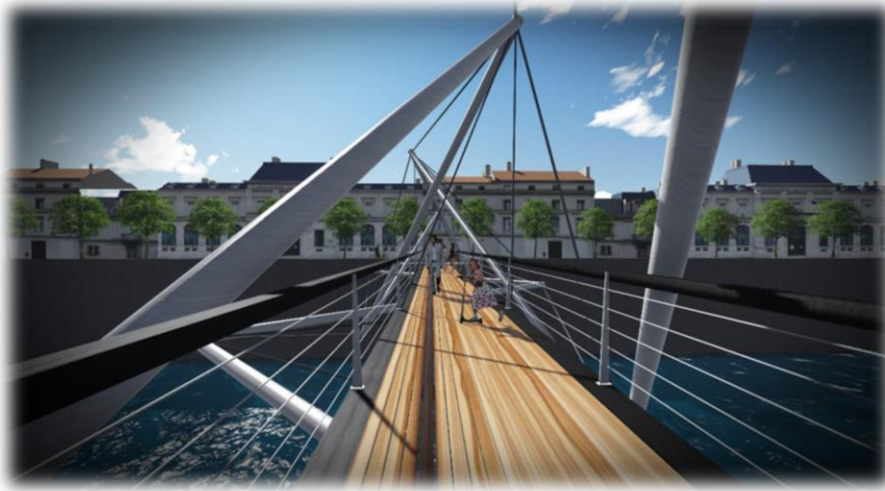


FIGURE 8.5 – VUE D’UNE PASSERELLE COMPOSÉE DE SIMPLEX DU POINT DE VUE D’UN PROMENEUR [1]

Pour que la passerelle soit praticable, il faut une hauteur minimale de passage suffisamment grande pour que les promeneurs puissent se déplacer librement sans être gênés. Il est donc souhaitable que la structure optimale ne soit pas trop élancée.

Il s’agit d’une contrainte qui pourrait motiver un concepteur à opter pour une autre typologie de passerelle de tenségrité. En effet, les structures composées de simplex sont les structures de tenségrité les plus élancées. La hauteur de passage de la passerelle peut ainsi devenir trop faible pour être praticable.

Revenons à notre passerelle de 20 m de portée pour laquelle le simplex ($S = 5$) était la typologie la plus efficace en termes de volume minimum de matière.

La hauteur de passage d’une structure composée de simplex s’obtient à l’aide des relations géométriques (cfr §5.2.1.1) :

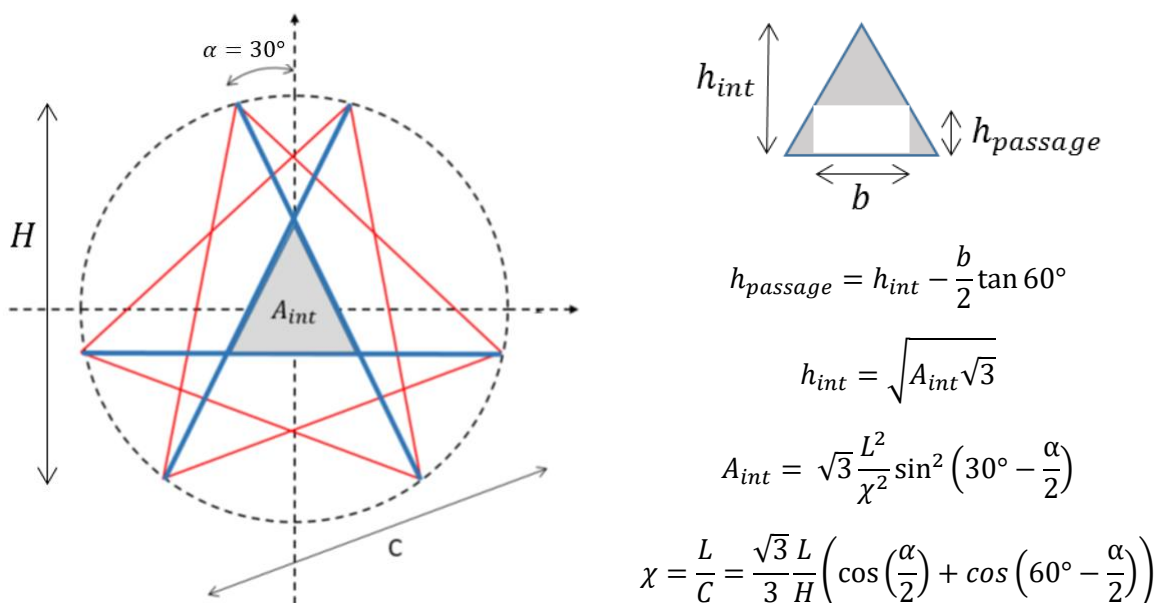


FIGURE 8.6 – HAUTEUR DE PASSAGE D’UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE SIMPLEX [1]

L'élançement géométrique de la structure composée de 5 simplex était de $L/H = 7.9$, ce qui correspond à une hauteur de 2,53 m.

Le triangle de passage disponible au sein de la passerelle n'est donc pas suffisamment grand pour accueillir un tablier de 2 m de large. En effet, la hauteur intérieure h_{int} vaut :

$$h_{int} = 1,2 \text{ m}$$

Afin d'augmenter cette hauteur, on pourrait diminuer volontairement l'élançement L/H de la structure. Cela impliquera forcément une augmentation du volume de matière à mettre en œuvre, et la structure ne serait plus optimale.

Une solution alternative serait de choisir une autre typologie de passerelle de tenségrité pour laquelle l'élançement optimal est plus faible et permet d'accueillir un tablier. Cette option impliquera également une augmentation du volume de matière. Il faudra, dès lors, regarder laquelle des 2 solutions est la plus efficace.

Le second choix optimal, après le simplex, est la structure composée de 5 quadruplex n°2 (voir Figure 8.1).

La hauteur de passage d'une structure composée de quadruplex s'obtient à l'aide des relations géométriques (cfr §5.2.2) :

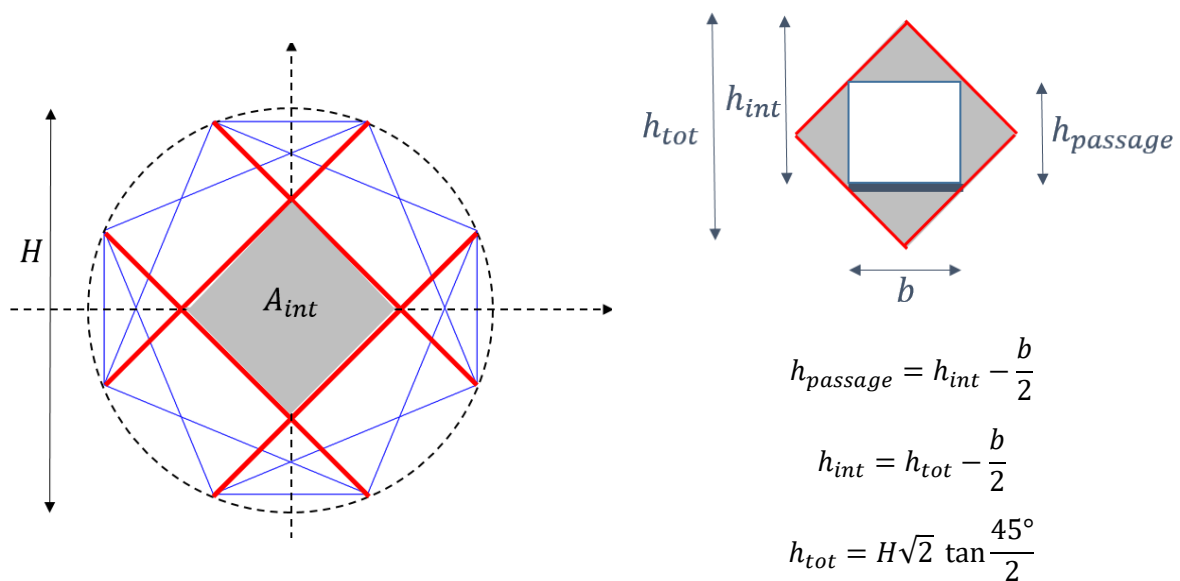


FIGURE 8.7 – HAUTEUR DE PASSAGE D'UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE QUADRUPLEX N°2 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Pour la structure composée de 5 quadruplex n°2, on avait une hauteur $H = 3 \text{ m}$.

A nouveau, le carré de passage disponible au sein de la passerelle n'est pas suffisamment grand pour accueillir un tablier de 2 m de large. En effet, la hauteur totale h_{tot} vaut :

$$h_{tot} = 1,8 \text{ m}$$

La troisième structure optimale était l'hexaplex n°1 avec un nombre de modules $S = 3$ (voir Figure 8.1).

La hauteur de passage d'une structure composée d'hexaplex n°1 s'obtient à l'aide des relations géométriques (cfr §5.2.4) :

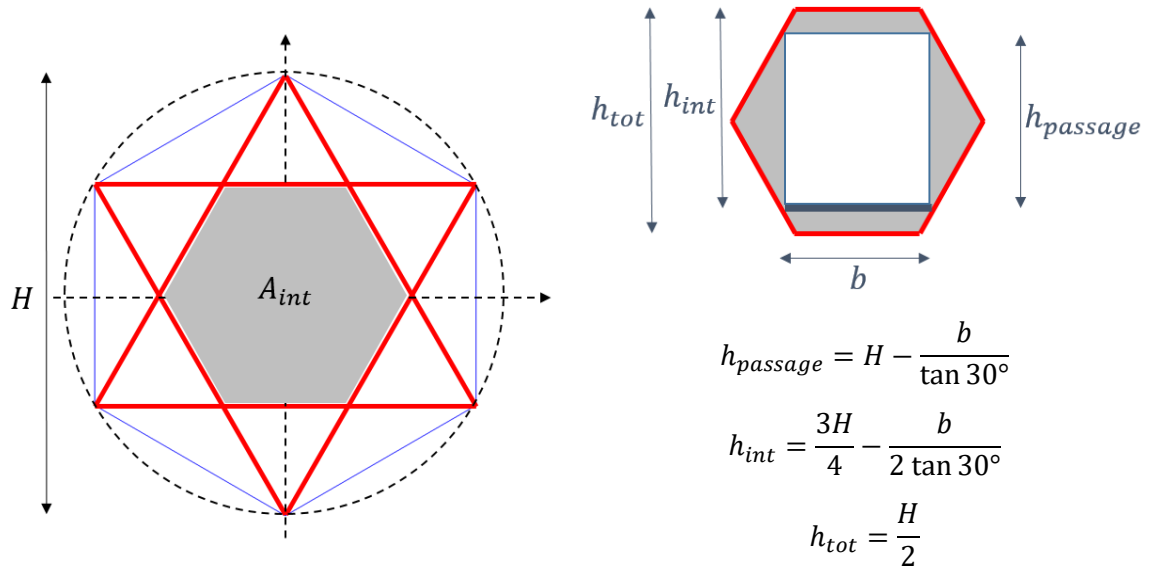


FIGURE 8.8 – HAUTEUR DE PASSAGE D'UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE D'HEXAPLEX N°1
[ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Pour la structure composée de 3 hexaplex n°1, on avait une hauteur $H = 4,8$ m.

Enfin, l'hexagone de passage disponible au sein de la passerelle est suffisamment grand pour accueillir un tablier de 2 m de large. Ses dimensions sont les suivantes :

$$h_{int} = 1,9 \text{ m}$$

$$h_{passage} = 1,34 \text{ m}$$

La passerelle de tenségrité composée de 3 hexaplex n°1 est finalement la seule structure optimale qui permet d'accueillir un tablier. On est donc forcé de se tourner vers cette solution.

Cependant, le volume de matière à mettre en œuvre a sensiblement augmenté. En effet, la passerelle pèse désormais plus de 11 tonnes alors qu'elle n'en faisait que 6,7 pour le simplex.

Si on avait voulu diminuer volontairement l'élancement géométrique de la structure composée de 5 simplex, de manière à obtenir une hauteur minimum de passage similaire ($h_{passage} = 1,34$ m), on aurait obtenu une structure de plus de 13 tonnes avec un élancement très faible ($L/H = 3$). Cela confirme que la passerelle composée de 3 hexaplex n°1 est finalement la structure la plus efficace pour ce cas de figure.

8.2 Conclusion

Les structures composées de simplex sont incontestablement les plus légères. Cette différence de volume de matière est d'autant plus remarquable lorsque la portée de la structure augmente et/ou lorsque l'indicateur de flambement devient grand. En effet, les autres modules de tenségrité souffrent sensiblement de leur nombre d'éléments, et voient leur poids propre décuplé.

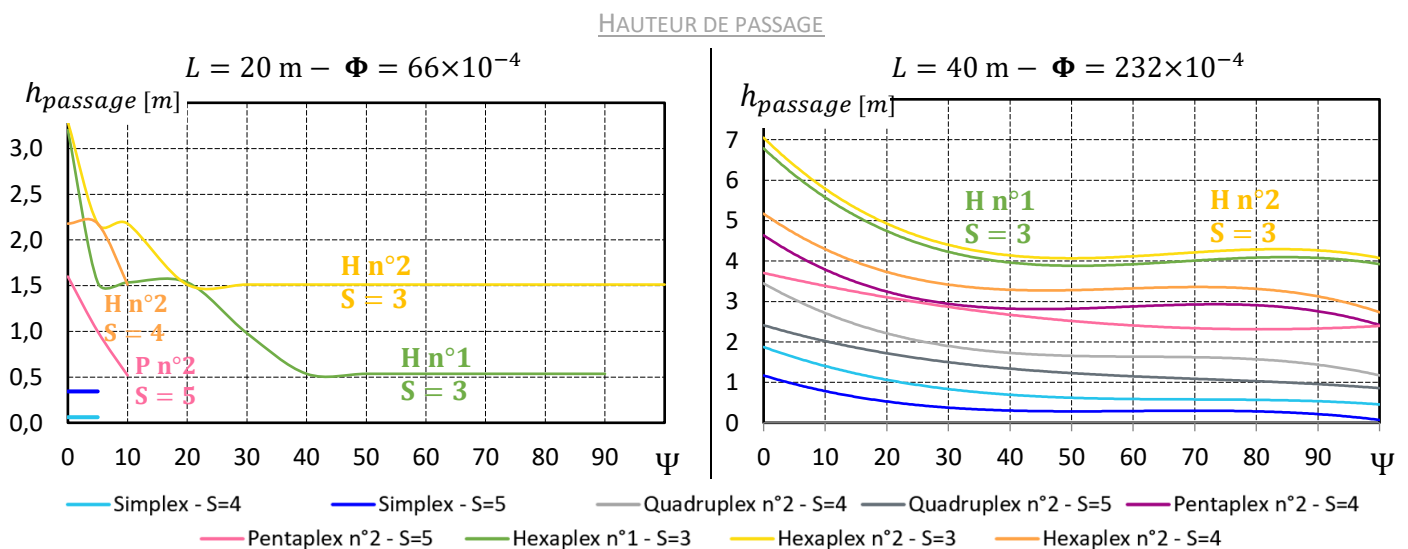
Tout porte à croire que le simplex est la solution optimale dans la conception d'une passerelle piétonne. Cependant, les structures composées de simplex sont très élancées, à tel point que la hauteur de passage disponible pour les piétons est fortement réduite. En effet, lorsque la portée de la structure est faible, le simplex n'offre pas un passage suffisamment grand pour que la passerelle soit réellement praticable.

Un concepteur sera donc obligé de se tourner vers une autre typologie de structure de tenségrité afin d'assurer une accessibilité suffisante pour les promeneurs.

Au terme de cette étude de cas pratique, on se rend compte que la hauteur de passage de la passerelle est décisive sur le choix de la structure de tenségrité optimale. Le simplex a donc sensiblement perdu en efficacité.

Afin de guider un concepteur vers une solution vivable et efficace, la hauteur de passage de chaque structure de tenségrité doit être étudiée en détail.

Soit une passerelle de tenségrité de portée L supportant un tablier rectiligne de 2 m de large. La hauteur de passage h_{passage} , associée à l'élancement optimal $(L/H)_{\text{opt}}$ minimisant le volume de matière de la structure, est donnée par les graphes suivants (pour $L = 20$ m et $L = 40$ m) :



**FIGURE 8.9 – HAUTEUR DE PASSAGE DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ EN ACIER S235
POUR $b = 2$ m [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]**

Ces résultats illustrent très bien le manque d'espace au sein des structures composées de simplex.

De manière générale, un tablier rectiligne ne semble pas approprié aux passerelles de tenségrité de faible portée. En effet, les structures sont globalement trop élancées pour assurer une hauteur de passage suffisante. Un tablier curviligne pourrait être une solution alternative.

Pour chaque projet, une étude similaire doit être réalisée au préalable en fonction de la portée de la passerelle et de la largeur du tablier afin de cibler les structures de tenségrité les plus efficaces en termes d'accessibilité pour les piétons.

Conclusion et perspectives

Ce mémoire est l'aboutissement de 4 années de recherche sur ce concept structural novateur : la tenségrité.

Les 3 premières années ont permis de prouver rigoureusement la faisabilité de structures de tenségrité pour des ouvrages d'art.

Alexis BASTIEN et Quentin GRAVY avaient tout d'abord mis au point une méthode linéaire générale, mais approximative, pour y parvenir. Marc ELIAERS a ensuite réalisé un programme non-linéaire capable de calculer plus fidèlement ces structures. Jonas FERON a finalement adapté la méthode d'optimisation basée sur les indicateurs morphologiques aux structures de tenségrité.

La théorie des indicateurs morphologiques, initialement développée par Pierre LATTEUR pour les structures 2D linéaires, a donc été étendue aux structures 3D, non-linéaires et précontraintes.

La puissance des indicateurs morphologiques est incontestable. Grâce à ces nombres adimensionnels, Jonas FERON a réussi à prouver qu'il existait des passerelles de tenségrité composées de simplex capables de supporter des charges extérieures sans subir de déformations jugées inadmissibles.

Ces indicateurs mettent également en évidence un inconvénient majeur des passerelles de tenségrité : le poids propre. En effet, ces structures sont de nature très massive dues à leur précontrainte. Il est donc primordial d'intégrer le poids propre dans l'optimisation structurale pour se rendre compte de l'efficacité réelle de ces structures.

Afin d'assurer une optimisation basée sur un minimum de paramètres, un nouvel indicateur morphologique primaire a été considéré : l'indicateur de poids propre $\Phi = \rho L / \sigma$. Il permet d'intégrer, plus formellement, le poids propre de la structure au sein des charges.

Pour un matériau défini, ce nouvel indicateur adimensionnel permet également d'étudier l'influence de la portée sur le volume minimum de matière à mettre en œuvre.

Cependant, la prise en compte du poids propre rend inévitablement l'optimisation plus complexe puisqu'elle fait désormais intervenir un quatrième paramètre :

$$\begin{cases} \min(W) = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi\right) \\ \frac{L}{\delta} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi\right) \geq 500 \\ \frac{P}{F} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi\right) < 50 \end{cases}$$

Le poids propre d'une structure de tenségrité peut dépasser largement la charge extérieure totale. Afin d'étudier l'importance du poids propre, un nouvel indicateur de résultat a été introduit : l'indicateur d'efficacité matérielle $\rho V / F$. Il permet de mettre en évidence la tendance de certaines structures de tenségrité à reprendre essentiellement leur propre poids lorsque la portée augmente.

Au cours des 3 premières années, les différents auteurs se sont uniquement concentrés sur les structures de tenségrité composées de simplex et sont finalement parvenus à prouver leur faisabilité.

Au terme de mon travail, je peux désormais affirmer qu'il existe d'autres systèmes de tenségrité pouvant être utilisés dans la conception d'une passerelle. En effet, plusieurs modules de tenségrité sont suffisamment rigides pour respecter le critère de déformation de l'Eurocode.

La théorie des indicateurs morphologiques a permis d'étendre la faisabilité des passerelles de tenségrité à d'autres modules prismatiques, à savoir le quadruplex, le pentaplex et l'hexaplex.

Cet outil permet également de comparer aisément l'efficacité des modules de tenségrité entre eux.

Les structures de tenségrité composées de simplex sont indéniablement les plus efficaces en termes de volume minimum de matière et de déformations acceptables. Toutefois, il est intéressant de noter que les structures composées d'hexaplex révèlent une certaine efficacité lorsque la sensibilité au flambement est très faible.

Les autres structures de tenségrité n'en sont pas moins réalisables mais le volume de matière à mettre en œuvre peut devenir très important.

Finalement, on obtient des tables de pré dimensionnement pour chaque structure de tenségrité. Celles-ci procurent les dimensions qui optimisent les structures du point de vue des déformations ou du volume de matière. Elles permettent à un concepteur de choisir judicieusement la structure de tenségrité la plus efficace.

Bien que le simplex semble être le module le plus compétitif, il existe une multitude d'autres systèmes de tenségrité qui pourraient être utilisés comme structure portante pour une passerelle et qui attendent d'être étudiés.

Toutefois, malgré que les structures composées de simplex soient sensiblement moins massives, elles sont très élancées, à tel point que la hauteur de passage disponible au sein de la passerelle pour les piétons est fortement réduite. En effet, lorsque la portée est faible, le simplex n'offre pas un passage suffisamment grand pour que la passerelle soit réellement praticable. Cette considération pratique devient ainsi un critère décisif quant au choix de la structure de tenségrité optimale.

De nombreuses études doivent encore être réalisées avant de voir naître la première passerelle en pure tenségrité.

Jusqu'à présent, seules les structures en acier ont été étudiées. Le matériau le plus approprié aux structures de tenségrité doit donc encore être recherché. L'indicateur de poids propre $\Phi = \rho L/\sigma$ et l'indicateur de raideur E/σ permettraient d'ailleurs de comparer l'efficacité de ces différents matériaux.

L'étude des nouveaux modules de tenségrité a mis l'accent sur les limites de l'optimisation de la précontrainte. Une méthode mieux appropriée aux structures de tenségrité mériterait d'être investiguée plus en profondeur. Son objectif serait de prévoir exactement la quantité de précontrainte à introduire dans chaque élément afin d'obtenir une tension minimum donnée dans tous les câbles.

Une étude plus approfondie de l'hyperstatiticé des modules de tenségrité et du positionnement particulier des appuis mériterait d'être réalisée. En effet, certaines solutions envisagées pour l'instant manquent de réalisme.

Seules des charges uniformément réparties ont été considérées jusqu'à présent. Cependant, une passerelle doit être dimensionnée en considérant un déplacement aléatoire des piétons. Une modélisation plus fidèle des charges nécessite donc d'être étudiée.

La suspension d'un tablier rectiligne induit des charges externes inclinées pour certains modules de tenségrité. Or, l'inclinaison des charges peut avoir un impact significatif sur les déformations. Elle rigidifie soit la structure ou la rend plus déformable. Une étude plus approfondie sur la position du tablier permettrait de déterminer l'angle d'inclinaison optimal de chaque module.

En outre, un tablier curviligne semble être une solution alternative appropriée aux structures de tensegrité. En effet, il permet d'éviter tout chargement externe incliné et assure une hauteur de passage plus importante pour les piétons. Cela pourrait ainsi être une échappatoire aux structures composées de simplex qui manque cruellement d'espace intérieur.

Malgré la précontrainte, les structures de tensegrité restent assez déformables sous chargement statique. On peut donc se questionner sur la faisabilité de tels ouvrages au cours d'une analyse dynamique. Par exemple, on pourrait évaluer le comportement vibratoire d'une passerelle de tensegrité sous l'action des piétons.

En analysant précisément chaque module de tensegrité à travers ces différentes études, on pourra finalement comparer leur efficacité globale et déterminer le module le plus approprié pour la conception d'une passerelle de tensegrité.

En élargissant les possibilités d'ouvrages d'art en tensegrité, ce mémoire ouvre la voie vers une multitude de solutions qui méritent d'être approfondies.

Et si je devais donner une dernière perspective, ce serait celle qui a animé tout mon travail, dès la connaissance du sujet : celle qu'un jour proche la tensegrité dépasse le stade d'un système constructif, simplement étudié, pour devenir ouvrage d'art.

Dès lors, je suis ravi d'avoir apporté ma pierre à l'édifice, et j'espère que la tensegrité continuera à faire rêver les amoureux de l'innovation et de l'ingéniosité structurale.

Annexe A : Structure non-linéaire en grands déplacements

Le calcul au second ordre permet de mieux comprendre le phénomène physique de certaines structures. Il permet, par exemple, d'expliquer le phénomène de « snap through » (cfr §1.4). Soit la structure suivante et ses différentes déformées en fonction de l'intensité de la charge :

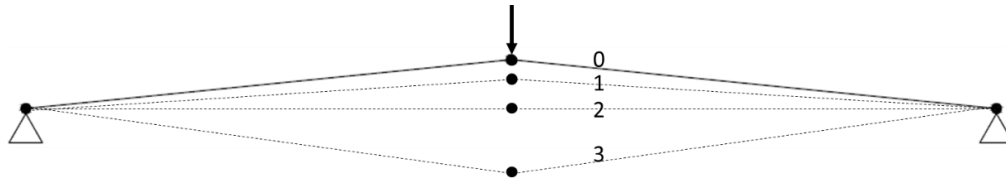
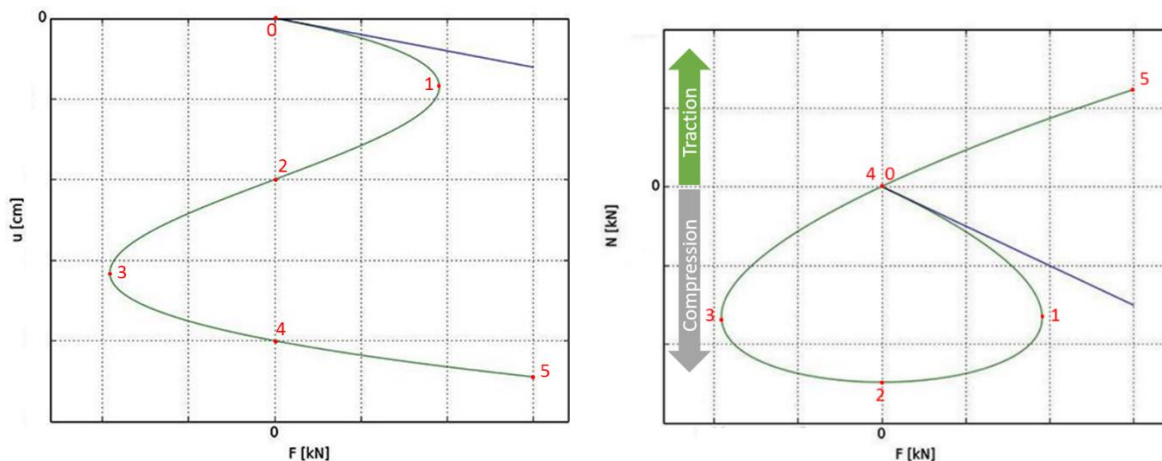


FIGURE ANNEXE A.1 – SNAP THROUGH : APPROCHE INTUITIVE [3]

Cette structure est stable si sa déformation est négligeable. En effet, si la charge est faible, la structure se déforme peu, de telle manière que sa structure déformée est quasiment confondue avec la structure initiale 0. Un calcul au premier ordre donnera ainsi des résultats assez proches de la réalité.

Lorsque la charge augmente, la structure se déforme de plus en plus, jusqu'à atteindre l'état de déformation 3. Ce phénomène est appelé « snap through ». Un calcul au second ordre devient obligatoire pour obtenir une solution réaliste. En effet, le calcul au premier ordre mènerait à un état de déformation 1.

Si on étudie la déformation d , et les efforts normaux N en fonction du chargement F , on peut obtenir des résultats de la forme suivante : les courbes linéaires en bleu par un calcul au premier ordre et les courbes non-linéaires en vert par un calcul au second ordre. On constate, comme dit précédemment, que pour un faible chargement, les deux méthodes donnent des résultats similaires, alors que pour une charge élevée la méthode linéaire est erronée.



(A) DÉPLACEMENT EN FONCTION DE LA CHARGE

(B) EFFORTS INTERNES EN FONCTION DE LA CHARGE

FIGURE ANNEXE A.2 – RÉSULTATS PAR LA MÉTHODE LINÉAIRE (EN BLEU) ET NON-LINÉAIRE (EN VERT) [3]

Pour comprendre l'allure des courbes non-linéaires, attardons-nous aux différents points mis en évidence en rouge :

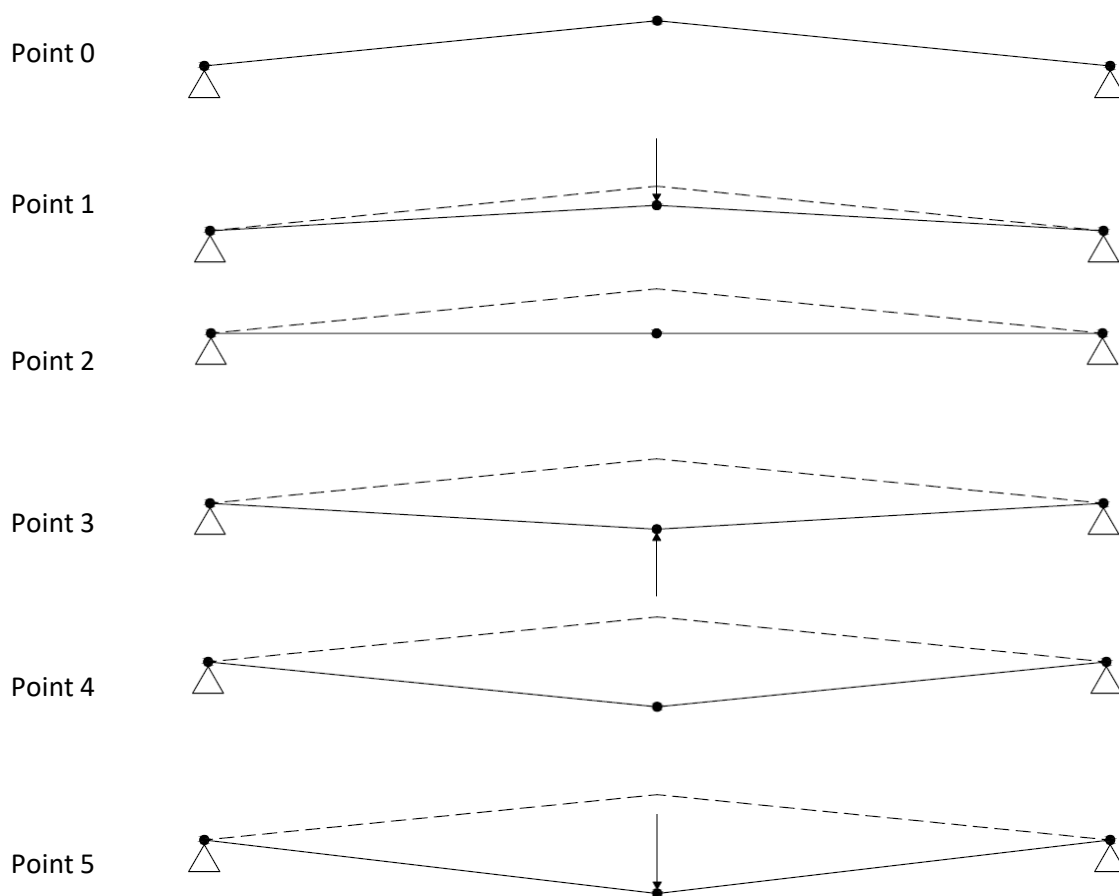


FIGURE ANNEXE A.3 – DÉFORMÉE DE CERTAINS POINTS [2]

Le point 0 correspond à la situation initiale non chargée. La structure est en équilibre et les efforts internes sont nulles.

Au point 1, la charge atteint un maximum local, appelé $F_{cr,st}$. Si on augmente la charge tel que $F > F_{cr,st}$, alors le snap through se produit.

Le point 2 correspond à une situation d'équilibre instable dans laquelle le chargement est nul et l'effort normal de compression est maximal. Une faible perturbation éloignera le système de cette position d'équilibre.

Le point 3 est la situation opposée au point 1. Le sens de l'effort externe est inversé car la charge empêche le système de se décompresser jusqu'au point 4.

Le point 4 est similaire au point 0. Le système est en équilibre stable sans chargement ni effort interne.

Le point 5 est l'état d'équilibre final de la structure. On constate qu'à partir du point 4, les barres sont en traction.

Annexe B : Démonstration de la matrice de raideur non-linéaire

Le caractère non-linéaire des structures de tenségrité doit être pris en compte dans la matrice de raideur. En effet, la raideur de ces structures n'est pas constante (cfr §3.2.1).

L'expression de cette matrice a été démontrée par Pierre LATTEUR [15]. Cette section est donc largement inspirée de cette publication.

Plusieurs hypothèses ont été posées pour réaliser cette démonstration. L'hypothèse principale concerne le comportement élastique des matériaux. On suppose que les déformations des éléments sont suffisamment faibles tel que $(L_{def} - L_0)/L_0 \leq 0.01$. Ce qui revient à dire que $L_{def}/L_0 \leq 1.01$. Pour l'acier, cela voudrait dire que la contrainte dans l'acier atteint 2100 MPa , ce qui est seulement possible pour des câbles à très haute résistance. Pour la plupart des aciers, le rapport excède rarement $0,002$.

Soit un élément isolé dans un repère global en 2D dont les extrémités sont les nœuds i et j de la structure. Ici, le nœud i de l'élément a été dessiné à la même position dans la configuration initiale et déformée pour faciliter la compréhension de la démonstration.

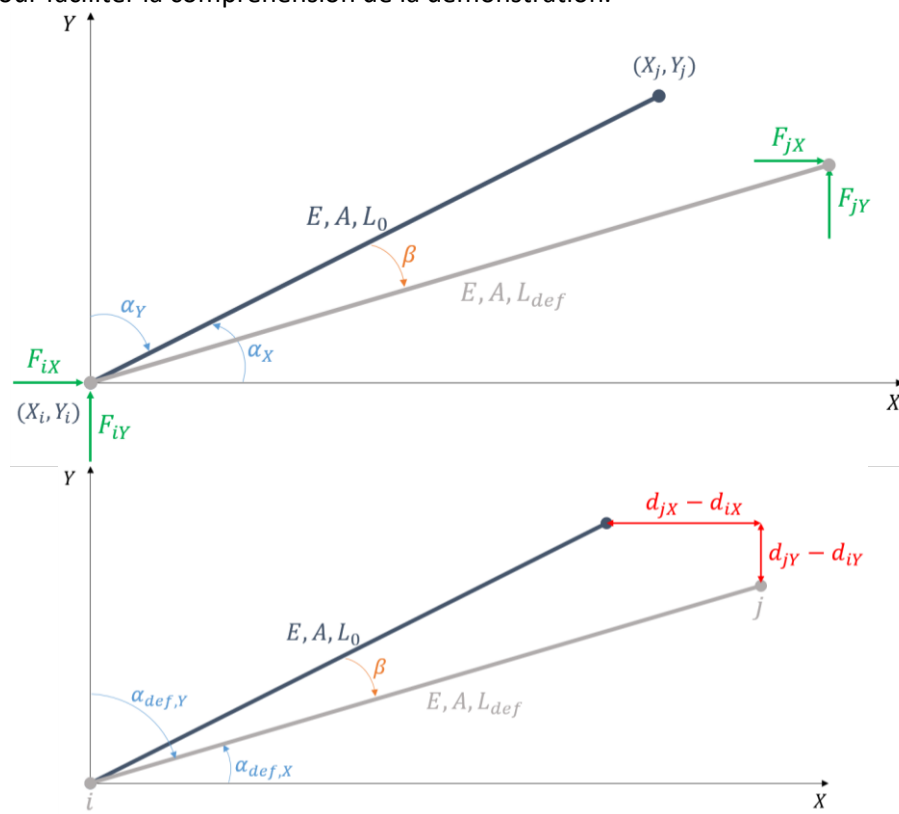


FIGURE ANNEXE B.1 – ÉLÉMENT ISOLÉ DANS UN REPÈRE GLOBAL 2D AVEC SA DÉFORMÉE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

La longueur initiale L_0 de l'élément peut s'écrire :

$$L_0 = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2}$$

La longueur de la déformée L_{def} de l'élément peut se calculer à partir de ses coordonnées initiales :

$$L_{def} = \sqrt{\left((X_j - X_i) + (d_{jX} - d_{iX})\right)^2 + \left((Y_j - Y_i) + (d_{jY} - d_{iY})\right)^2}$$

Ce qui nous donne :

$$L_{def}^2 = (X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + [2(X_j - X_i)(d_{jX} - d_{iX}) + (d_{jX} - d_{iX})^2] + [2(Y_j - Y_i)(d_{jY} - d_{iY}) + (d_{jY} - d_{iY})^2]$$

Ou encore :

$$L_{def}^2 = L_0^2 + [2(X_j - X_i)(d_{jX} - d_{iX}) + (d_{jX} - d_{iX})^2] + [2(Y_j - Y_i)(d_{jY} - d_{iY}) + (d_{jY} - d_{iY})^2] \quad (\text{B-1})$$

En considérant l'hypothèse que $L_{def}/L_0 \leq 1.01$, on a alors :

$$L_{def}^2 - L_0^2 = 2L_0(L_{def} - L_0) \underbrace{\frac{(L_{def} + L_0)}{2L_0}}_{\approx 1} \cong 2L_0(L_{def} - L_0) \quad (\text{B-2})$$

On peut alors éliminer le terme $L_{def}^2 - L_0^2$ en combinant les équations (B-1) et (B-2), on a alors :

$$L_{def} - L_0 = \left[\frac{(X_j - X_i)}{L_0} (d_{jX} - d_{iX}) + \frac{(d_{jX} - d_{iX})^2}{2L_0} \right] + \left[\frac{(Y_j - Y_i)}{L_0} (d_{jY} - d_{iY}) + \frac{(d_{jY} - d_{iY})^2}{2L_0} \right]$$

Ou encore :

$$L_{def} - L_0 = c_X(d_{jX} - d_{iX}) + \frac{(d_{jX} - d_{iX})^2}{2L_0} + c_Y(d_{jY} - d_{iY}) + \frac{(d_{jY} - d_{iY})^2}{2L_0} \quad (\text{B-3})$$

Avec :

$$\begin{cases} c_X = \cos \alpha_X = \frac{X_j - X_i}{L_0} \\ c_Y = \cos \alpha_Y = \frac{Y_j - Y_i}{L_0} \end{cases}$$

L'effort normal N présent dans l'élément peut être calculé à partir de son allongement relatif grâce à la loi de Hooke. L'allongement relatif ε de l'élément n'est rien d'autre que : $\varepsilon = \frac{L_{def} - L_0}{L_0}$. On obtient donc :

$$N = EA\varepsilon = EA \frac{(L_{def} - L_0)}{L_0}$$

Ou encore avec (B-3) :

$$N = \frac{EA}{L_0} \left[c_X(d_{jX} - d_{iX}) + \frac{(d_{jX} - d_{iX})^2}{2L_0} + c_Y(d_{jY} - d_{iY}) + \frac{(d_{jY} - d_{iY})^2}{2L_0} \right] \quad (\text{B-4})$$

Si on considère que l'élément de la structure déformée a atteint un équilibre et est sujet à une force axiale N , alors l'équilibre du nœud i (voir figure ci-dessus) dans le repère global 2D (X, Y) s'écrit :

$$\begin{cases} F_{iX} = -N \cos \alpha_{def,X} = -N \left(\frac{(X_j - X_i) + (d_{jX} - d_{iX})}{L_{def}} \right) \\ F_{iY} = -N \cos \alpha_{def,Y} = -N \left(\frac{(Y_j - Y_i) + (d_{jY} - d_{iY})}{L_{def}} \right) \end{cases} \quad (B-5)$$

Et pour le nœud j :

$$\begin{cases} F_{jX} = -N \cos \alpha_{def,X} = -N \left(\frac{(X_j - X_i) + (d_{jX} - d_{iX})}{L_{def}} \right) \\ F_{jY} = -N \cos \alpha_{def,Y} = -N \left(\frac{(Y_j - Y_i) + (d_{jY} - d_{iY})}{L_{def}} \right) \end{cases} \quad (B-6)$$

Les termes F_X et F_Y sont les composantes de la force externe appliquées aux nœuds extrêmes de l'élément.

En considérant que $L_0/L_{def} \approx 1$ tel que :

$$\begin{cases} \frac{(X_j - X_i)}{L_{def}} \approx \frac{(X_j - X_i)}{L_0} = \cos \alpha_X = c_X \\ \frac{(Y_j - Y_i)}{L_{def}} \approx \frac{(Y_j - Y_i)}{L_0} = \cos \alpha_Y = c_Y \end{cases}$$

Si on écrit les équations (B-5) et (B-6) sous forme matricielle, on obtient le nouveau système d'équations d'équilibre de l'élément :

$$\begin{bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} -c_X \\ -c_Y \\ c_X \\ c_Y \end{bmatrix} + \frac{N}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{iX} \\ d_{iY} \\ d_{jX} \\ d_{jY} \end{bmatrix} \quad (B-7)$$

Si on remplace l'effort normal N dans le premier terme à droite de l'égalité par la relation (B-4), on obtient pour le premier terme de cette matrice :

$$-N c_X = \frac{EA}{L_0} \left[-c_X (d_{jX} - d_{iX}) - c_Y (d_{jY} - d_{iY}) - \frac{(d_{jX} - d_{iX})^2}{2L_0} - \frac{(d_{jY} - d_{iY})^2}{2L_0} \right] c_X$$

Développons cette expression :

$$-N c_X = \frac{EA}{L_0} \left[-c_X^2 (d_{jX} - d_{iX}) - c_Y c_X (d_{jY} - d_{iY}) - \frac{c_X}{2L_0} \left((d_{jX} - d_{iX})^2 + (d_{jY} - d_{iY})^2 \right) \right] \quad (B-8)$$

Si on suppose que les déformations sont « modérées », alors il est vrai que le terme $\frac{|\Delta d_{X,Y}|}{L_0} < 1$ (avec $\Delta d_X = (d_{jX} - d_{iX})$ et $\Delta d_Y = (d_{jY} - d_{iY})$) n'est peut-être pas négligeable, mais $|\Delta d_{X,Y}|^2 \ll |\Delta d_{X,Y}|$. De telle manière que le 3^{ème} terme de la relation (B-8) peut être négligé :

$$c_X \frac{(\Delta d_X^2 + \Delta d_Y^2)}{2L_0} \approx 0 \quad \text{avec} \quad c_X = \cos \alpha_X \leq 1$$

L'expression (B-8) peut alors s'écrire de manière simplifiée :

$$-Nc_X = \frac{EA}{L_0} [-c_X^2(d_{jX} - d_{iX}) - c_Yc_X(d_{jY} - d_{iY})]$$

En répétant cette simplification avec les autres termes de la matrice, on obtient finalement la matrice simplifiée suivante :

$$N \begin{bmatrix} -c_X \\ -c_Y \\ c_X \\ c_Y \end{bmatrix} = \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} c_X^2 & c_Xc_Y & -c_X^2 & -c_Xc_Y \\ c_Xc_Y & c_Y^2 & -c_Xc_Y & -c_Y^2 \\ -c_X^2 & -c_Xc_Y & c_X^2 & c_Xc_Y \\ -c_Xc_Y & -c_Y^2 & c_Xc_Y & c_Y^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} d_{iX} \\ d_{iY} \\ d_{jX} \\ d_{jY} \end{bmatrix}$$

Le système d'équations d'équilibre de l'élément s'écrit finalement :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \end{bmatrix}}_{\bar{F}_{ext}} = \underbrace{\left\{ \frac{EA}{L_0} \begin{bmatrix} c_X^2 & c_Xc_Y & -c_X^2 & -c_Xc_Y \\ c_Xc_Y & c_Y^2 & -c_Xc_Y & -c_Y^2 \\ -c_X^2 & -c_Xc_Y & c_X^2 & c_Xc_Y \\ -c_Xc_Y & -c_Y^2 & c_Xc_Y & c_Y^2 \end{bmatrix} + \frac{N}{L_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}}_{\bar{K}_{loc}} \underbrace{\begin{bmatrix} d_{iX} \\ d_{iY} \\ d_{jX} \\ d_{jY} \end{bmatrix}}_{\bar{d}_{loc}}$$

$$\bar{F}_{ext} = \bar{K}_{loc} \bar{d}_{loc}$$

Où :

- \bar{F}_{ext} est le vecteur des forces externes appliquées aux nœuds (dimension 6×1 en 3D) ;
- \bar{K}_{loc} est la matrice de raideur locale de l'élément (dimension 6×6 en 3D) ;
- \bar{d}_{loc} est le vecteur de déplacement des nœuds extrêmes de l'élément (dimension 6×1 en 3D).

On voit que la matrice de raideur est maintenant composée de deux termes : un premier terme « élastique », et un second terme « géométrique ». Ce terme géométrique dépend de l'effort interne N et donc des déplacements des nœuds comme le montre la relation (B-8). En le négligeant, on retrouve le système utilisé dans la méthode linéaire (cfr §2.1.2)

Comme la méthode non-linéaire repose sur le principe d'avancement dans la solution (cfr §3.3.1), à chaque pas incrémental k , la matrice de raideur devra être recalculée. Celle-ci s'écrit alors :

$$\bar{K}_{k,loc} = \frac{EA}{L_k} \begin{bmatrix} c_X^2 & c_Xc_Y & -c_X^2 & -c_Xc_Y \\ c_Xc_Y & c_Y^2 & -c_Xc_Y & -c_Y^2 \\ -c_X^2 & -c_Xc_Y & c_X^2 & c_Xc_Y \\ -c_Xc_Y & -c_Y^2 & c_Xc_Y & c_Y^2 \end{bmatrix} + \frac{N_k}{L_k} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{cases} c_X = \cos \alpha_X = \frac{X_{j,k} - X_{i,k}}{L_k} \\ c_Y = \cos \alpha_Y = \frac{Y_{j,k} - Y_{i,k}}{L_k} \end{cases}$$

Annexe C : Équations de contrainte

C.1 Contrainte de chargement $|\Delta\lambda| = l$

La contrainte de chargement consiste à fixer le paramètre $\Delta\lambda$ à une valeur qui semble petite. Cette valeur posée arbitrairement est appelée la longueur d'incrément l telle que $|\Delta\lambda| = l$.

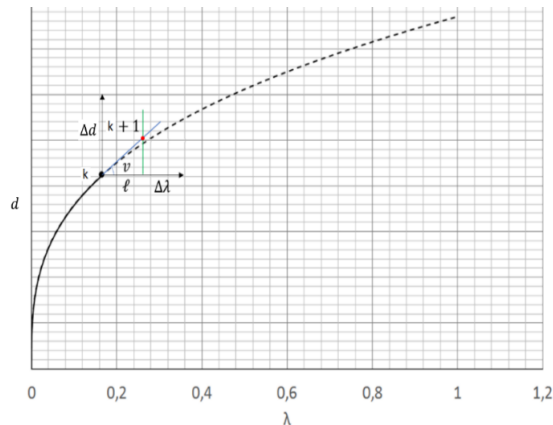


FIGURE ANNEXE C.1 – INTERPRÉTATION GRAPHIQUE : CONTRAINTE DE CHARGEMENT [2]

La figure montre qu'au plus l est petit, au plus l'avancement dans la solution est lent et le nombre total d'itérations grand. En effet, le point $k + 1$ sera alors très proche du point k . À l'inverse, si l est grand, la solution approchée s'éloigne de la solution physique, et le nombre d'itérations diminue. Par exemple, si on considère $l = 0.01$, la solution finale est atteinte en $n = 100$ itérations.

Avantage

Cette méthode fonctionne également lorsque la raideur de la structure est très élevée. Dans ce cas, la résolution du système (3-4) donne le résultat $\|\bar{v}\| \rightarrow 0$.

L'équation (3-3) devient alors $\|\Delta\bar{d}_k\| = \|\bar{v}\|\Delta\lambda \rightarrow 0$. Le point $k + 1$ est donc proche du point k :

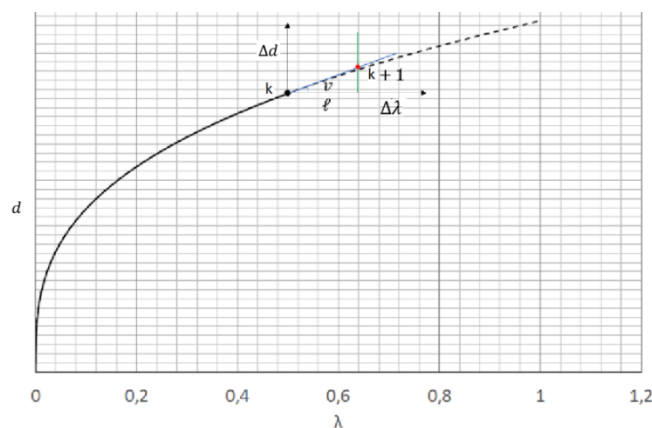


FIGURE ANNEXE C.2 – INTERPRÉTATION GRAPHIQUE : CONTRAINTE DE CHARGEMENT $\|\bar{v}\| \rightarrow 0$ [2]

Désavantage

Cette méthode ne fonctionne pas lorsque la raideur de la structure est nulle. En effet, dans ce cas, la résolution du système (3-4) donne le résultat $\|\bar{v}\| \rightarrow \infty$.

L'équation (3-3) devient alors $\|\Delta \bar{d}_k\| = \|\bar{v}\| \Delta \lambda \rightarrow \infty$. Le point $k + 1$ est donc loin du point k :

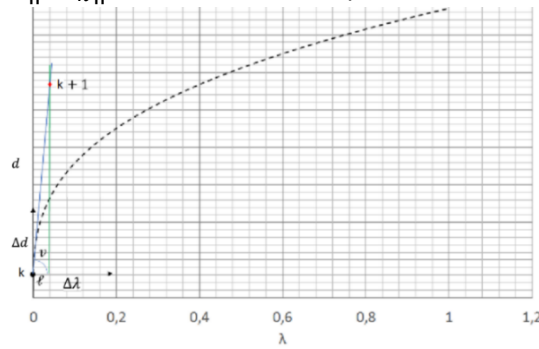


FIGURE C.3 – INTERPRÉTATION GRAPHIQUE : CONTRAINTE DE CHARGEMENT $\|\bar{v}\| \rightarrow \infty$ [2]

C.2 Contrainte de déplacement $\|\Delta \bar{d}_k\| = l$

La méthode de la contrainte de déplacement permet d'éviter l'inconvénient relevé ci-dessus. Elle consiste à imposer $\|\Delta d_k\| = l$.

Avantage

Cette méthode fonctionne lorsque la raideur de la structure est nulle. La résolution du système (3-4) donne le résultat $\|\bar{v}\| \rightarrow \infty$.

L'équation (3-3), pouvant également s'écrire $\Delta \lambda = \frac{\bar{v}^t \Delta \bar{d}_k}{\|\bar{v}\|^2}$, donne donc $\Delta \lambda \rightarrow 0$. Le point $k + 1$ est donc proche du point k :

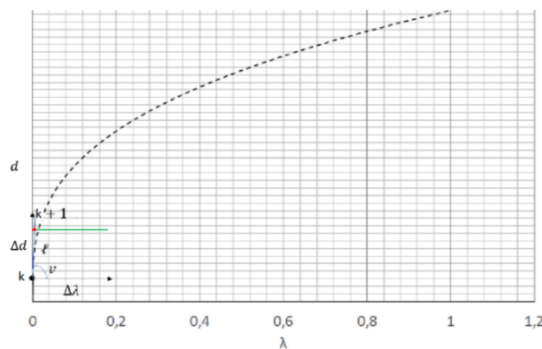


FIGURE ANNEXE C.4 – INTERPRÉTATION GRAPHIQUE : CONTRAINTE DE DÉPLACEMENT $\|\bar{v}\| \rightarrow \infty$ [2]

Désavantage

Lorsque la raideur de la structure est très élevée, cette méthode ne fonctionne plus. En effet, dans ce cas, la résolution du système (3-4) donne le résultat $\|\bar{v}\| \rightarrow 0$.

L'équation (3-3), pouvant également s'écrire $\Delta \lambda = \frac{\bar{v}^t \Delta \bar{d}_k}{\|\bar{v}\|^2}$, donne donc le résultat $\Delta \lambda \rightarrow \infty$. Le point $k + 1$ est donc loin du point k :

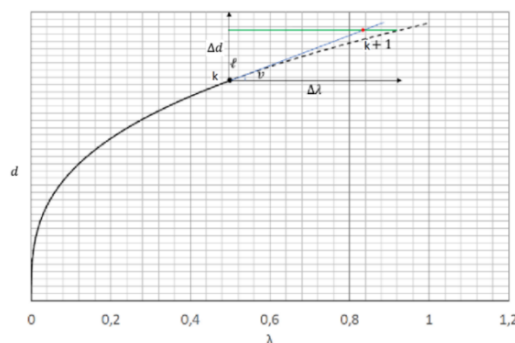


FIGURE ANNEXE C.5 – INTERPRÉTATION GRAPHIQUE : CONTRAINTE DE DÉPLACEMENT $\|\bar{v}\| \rightarrow 0$ [2]

Annexe D : Influence de l'inclinaison du chargement extérieur

La géométrie de certains modules de tensegrité ne permet pas de suspendre verticalement un tablier rectiligne. Les câbles de suspension induisent alors des charges externes inclinées.

Afin d'étudier l'influence de ces charges inclinées, nous allons considérer arbitrairement un angle d'inclinaison pour chaque module.

Les modules, pour lesquels le tablier peut être suspendu par des câbles verticaux, seront également étudiés sous chargement incliné. Dans ce cas, l'inclinaison de la charge externe sera choisie afin d'optimiser la largeur du tablier.

On va se concentrer uniquement sur certaines typologies de chaque structure de tensegrité.

Les structures seront calculées en appliquant le processus d'optimisation développé pour les structures de tensegrité (cfr §4.4). Le poids propre ne sera toutefois pas pris en compte dans l'optimisation.

L'influence de l'inclinaison du chargement extérieur sera étudiée sur les structures de tensegrité suivantes :

- Quadruplex n°1 – $S = 5$;
- Quadruplex n°2 – $S = 5$;
- Pentaplex n°1 – $S = 5$;
- Pentaplex n°2 – $S = 5$;
- Hexaplex n°2 – $S = 3$.

La théorie des indicateurs morphologiques va permettre d'analyser l'impact d'une charge inclinée sur l'efficacité de chaque structure de tensegrité. On va se concentrer uniquement sur les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume.

D.1 Quadruplex n°1

Ce module de tensegrité ne permet pas de suspendre verticalement un tablier rectiligne. Soit un angle d'inclinaison arbitraire des câbles de suspension de $\alpha_{susp.} = 5^\circ$:

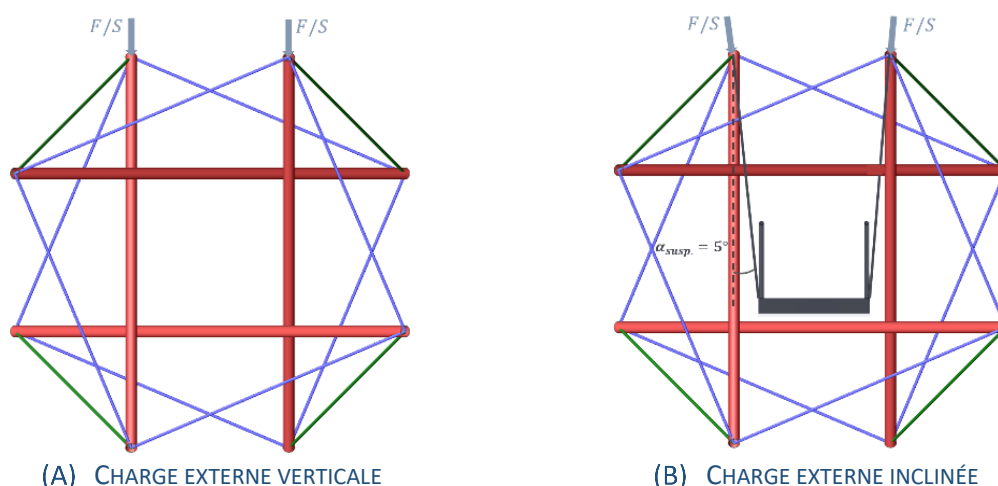


FIGURE ANNEXE D.1 – CHARGEMENT EXTÉRIEUR INCLINÉ POUR UN QUADRUPLEX N°1 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Soit une structure de tensegrité composée de 5 quadruplex d'orientation n°1, de portée L , de hauteur H , soumise à une charge externe F (verticale ou inclinée) uniformément répartie sur les nœuds supérieurs de la structure et dont le degré d'hyperstatiticité vaut $I_s = 1$ (voir §6.2.1).

On obtient les courbes d'efficience de l'indicateur de volume W suivantes :

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 0\right) \text{ pour } S = 5$$

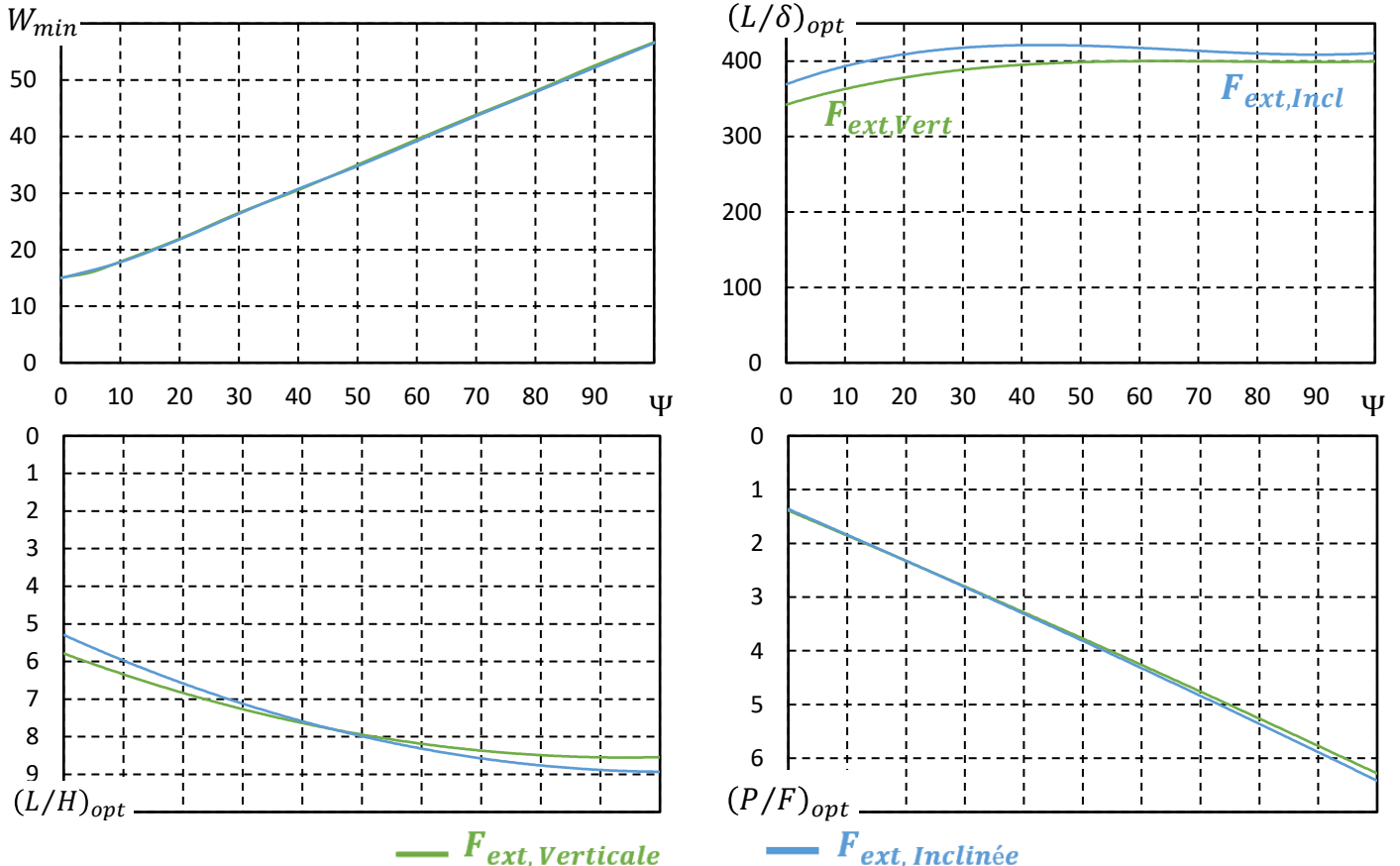


FIGURE ANNEXE D.2 – COURBES D’EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE 5 QUADRUPLEX N°1 - INFLUENCE DE L’INCLINAISON DE LA CHARGE EXTERNE [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]

Constatations :

L’inclinaison du chargement extérieur réduit les déformations de la structure alors que le volume minimum de matière et la précontrainte introduite sont identiques. Cependant, le gain de rigidité n’est pas suffisant pour respecter le critère de déformation $L/\delta \geq 500$.

Ce module de tensegrité semble plus efficace sous chargement incliné car il gagne en rigidité. Les résultats obtenus au cours de son analyse (cfr §6.2) sont donc, à priori, sous-estimés.

Une étude plus approfondie mériterait d’être réalisée. Elle permettrait par exemple de déterminer l’inclinaison optimale de la charge externe.

Peu importe le module de tensegrité, le volume minimum de matière n’est pas, ou très peu, influencé par l’inclinaison de la charge externe.

Il est de même pour la précontrainte et l’élancement géométrique. Leurs graphes ne seront donc plus représentés dans la suite de cette section.

D.2 Quadruplex n°2

Ce module de tensegrité permet de suspendre verticalement un tablier rectiligne. L'influence d'un chargement extérieur incliné est quand même analysée afin d'élargir l'étude. Nous allons considérer une inclinaison des câbles de suspension de telle manière que la largeur du tablier soit maximum. On obtient ainsi un angle d'inclinaison de $\alpha_{susp.} = 9.7^\circ$:

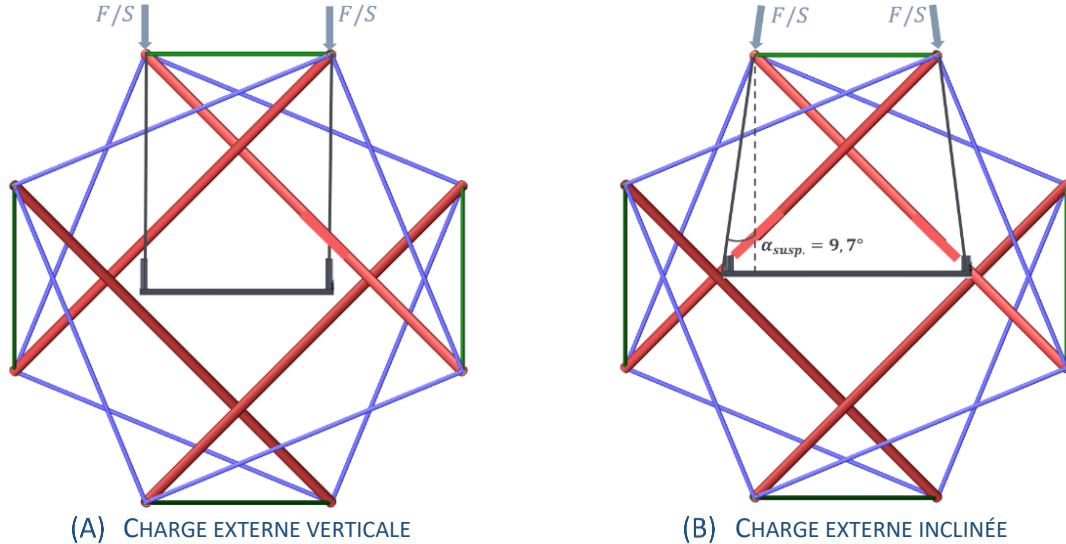


FIGURE ANNEXE D.3 – CHARGEMENT EXTERIEUR INCLINE POUR UN QUADRUPLEX N°2 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

N.B. Une telle inclinaison réduirait considérablement la hauteur de passage pour les piétons.

Notons que les câbles de suspension peuvent être également inclinés dans le sens opposé, et réduire la largeur du tablier. Ce cas ne sera pas analysé au cours de cette étude.

Soit une structure de tensegrité composée de 5 quadruplex d'orientation n°2, de portée L , de hauteur H , soumise à une charge externe F (verticale ou inclinée) uniformément répartie sur les nœuds supérieurs de la structure et dont le degré d'hyperstatiticité vaut $I_s = 1$ (voir §6.3.1).

On obtient les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W suivantes :

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 0\right) \text{ pour } S = 5$$

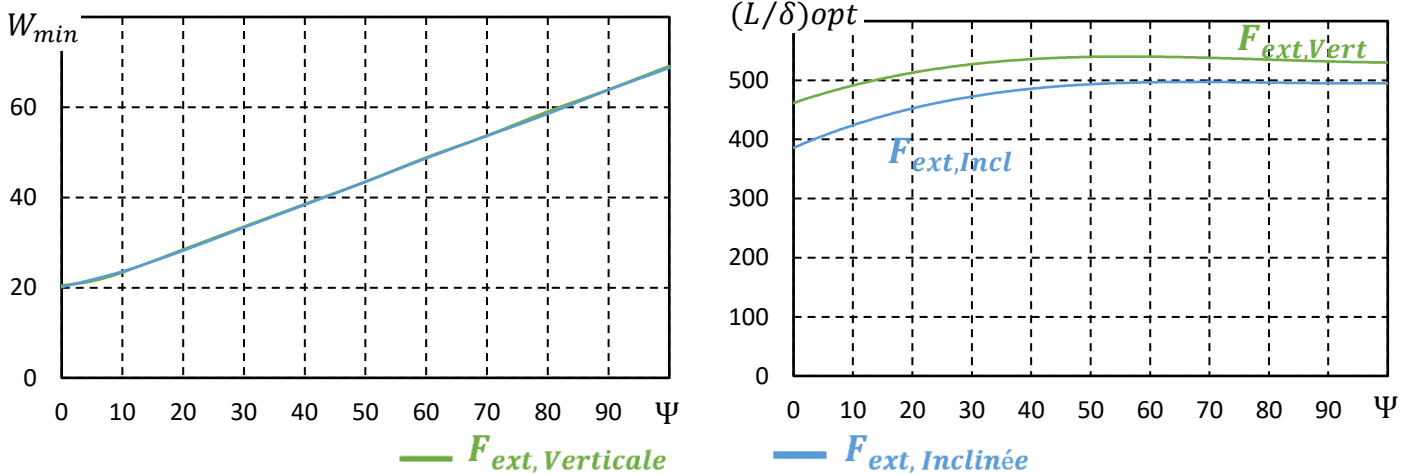


FIGURE ANNEXE D.4 – COURBES D'EFFICACITE W DES STRUCTURES DE TENSEGRITE COMPOSEES DE 5 QUADRUPLEX N°2 - INFLUENCE DE L'INCLINAISON DE LA CHARGE EXTERNE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

L'inclinaison du chargement extérieur augmente légèrement les déformations, mais n'influence pas le volume de matière à mettre en œuvre. Le module a donc perdu en efficacité.

Des câbles de suspension verticaux seront donc préférés pour ce module.

D.3 Pentaplex n°1

Ce module de tensegrité ne permet pas de suspendre verticalement un tablier rectiligne. Nous allons considérer une inclinaison des câbles de suspension de telle manière que la hauteur de passage soit maximum. On obtient ainsi un angle d'inclinaison de $\alpha_{susp.} = 9^\circ$:

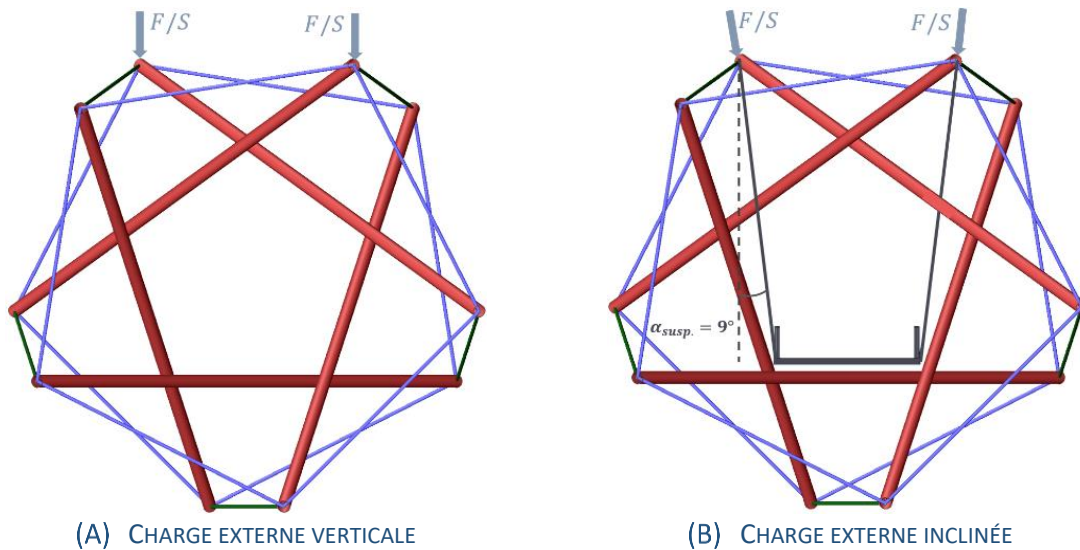


FIGURE ANNEXE D.5 – CHARGEMENT EXTÉRIEUR INCLINÉ POUR UN PENTAPLEX N°1 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Soit une structure de tensegrité composée de 5 pentaplex d'orientation n°1, de portée L , de hauteur H , soumise à une charge externe F (verticale ou inclinée) uniformément répartie sur les nœuds supérieurs de la structure et dont le degré d'hyperstatiticé vaut $I_s = 1$ (voir §6.4.1).

On obtient les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W suivantes :

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 0\right) \text{ pour } S = 5$$

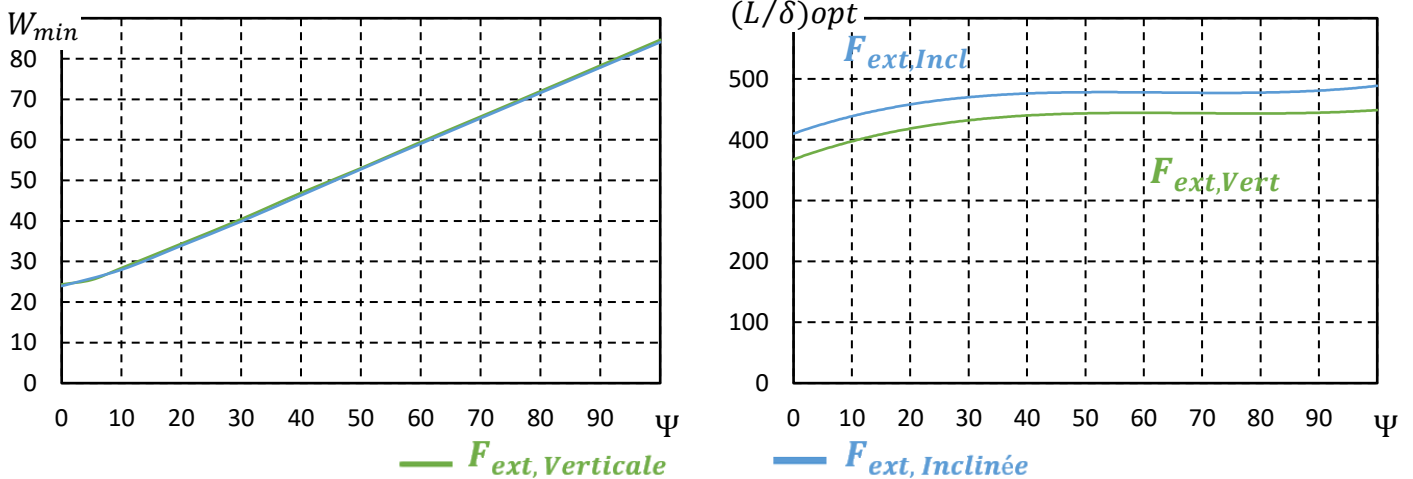


FIGURE ANNEXE D.6 – COURBES D'EFFICACITÉ W DES STRUCTURES DE TENSEGRITÉ COMPOSÉES DE 5 PENTAPLEX N°1 - INFLUENCE DE L'INCLINAISON DE LA CHARGE EXTÉRIEUR [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

L'inclinaison du chargement extérieur réduit les déformations de la structure pour une quantité de matière identique.

Sa rigidité n'est toujours pas suffisante pour respecter le critère de déformation $L/\delta \geq 500$ mais elle s'en rapproche fortement.

La prise en compte du poids propre mènera très certainement à des déformations jugées acceptables, car ce module se rigidifie avec son poids propre (cfr §6.4.4).

Ce module de tensegrité est d'autant plus efficace sous chargement incliné car la position du tablier permet également d'augmenter la hauteur de passage d'une éventuelle passerelle. Il s'agit donc d'une solution qui mériterait d'être étudiée plus en profondeur.

D.4 Pentaplex n°2

Ce module de tensegrité permet de suspendre verticalement un tablier rectiligne. L'influence d'un chargement extérieur incliné est quand même analysé afin d'élargir l'étude. Nous allons donc considérer une inclinaison des câbles de suspension de telle manière que la largeur du tablier soit maximum. On obtient ainsi un angle d'inclinaison de $\alpha_{susp.} = 18^\circ$:

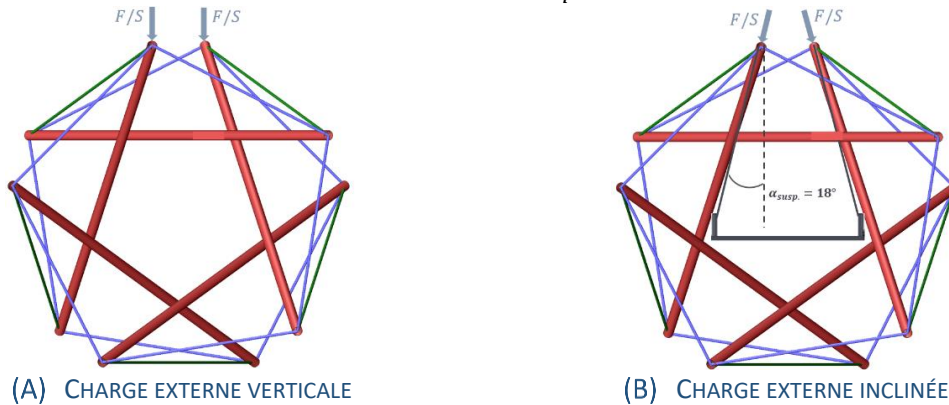


FIGURE ANNEXE D.7 – CHARGEMENT EXTÉRIEUR INCLINÉ POUR UN PENTAPLEX N°2 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Soit une structure de tensegrité composée de 5 pentaplex d'orientation n°2, de portée L , de hauteur H , soumise à une charge externe F (verticale ou inclinée) uniformément répartie sur les nœuds supérieurs de la structure et dont le degré d'hyperstatiticé vaut $I_s = 1$ (voir §6.5.1).

On obtient les courbes d'efficience de l'indicateur de volume W suivantes :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 0\right) \text{ pour } S = 5$$

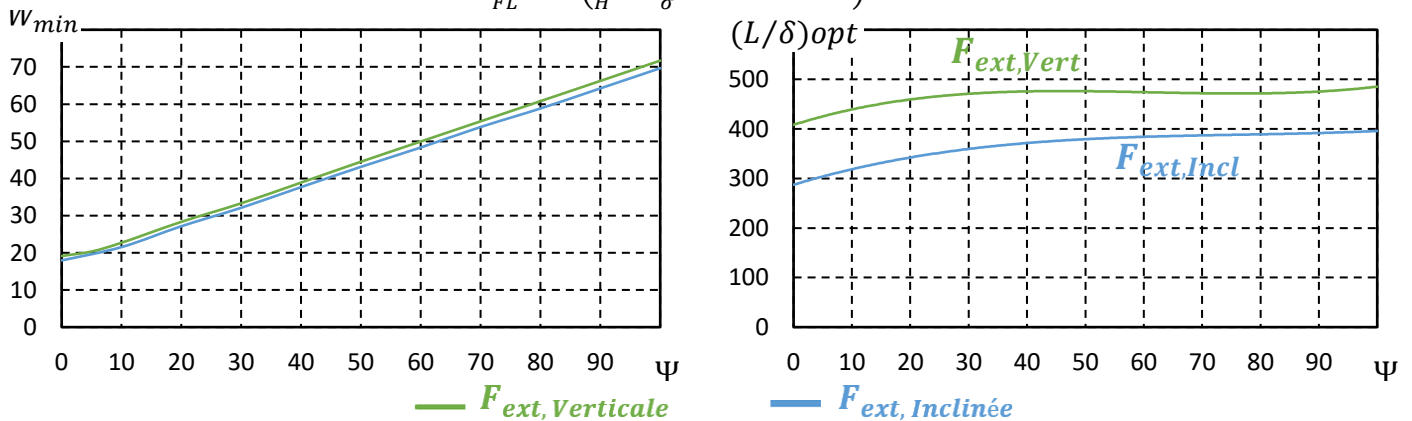


FIGURE ANNEXE D.8 – COURBES D'EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSEGRITÉ COMPOSÉES DE 5 PENTAPLEX N°2 - INFLUENCE DE L'INCLINAISON DE LA CHARGE EXTÉRIEUR [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

L'inclinaison du chargement extérieur augmente sensiblement les déformations pour une quantité de matière presque égale. Le module a donc perdu en efficacité.

Des câbles de suspension verticaux seront donc préférés pour ce module.

D.5 Hexaplex n°2

Ce module de tensegrité ne permet pas de suspendre verticalement un tablier rectiligne. Soit un angle d'inclinaison arbitraire des câbles de suspension de $\alpha_{susp.} = 5^\circ$:

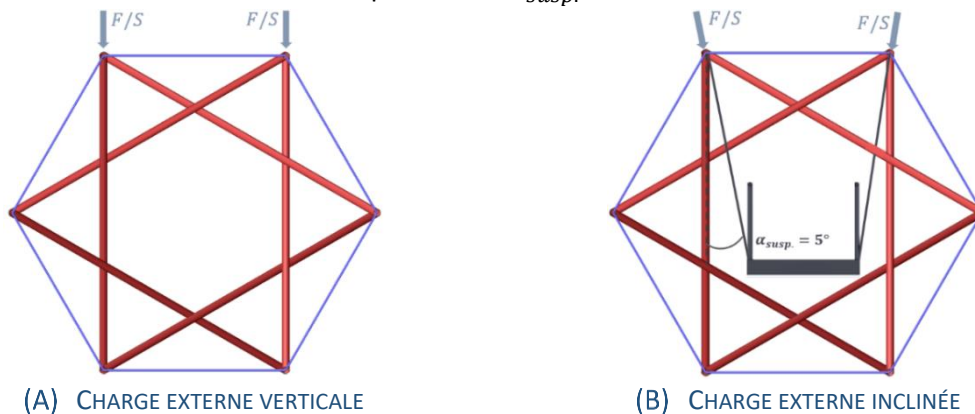


FIGURE ANNEXE D.9 – CHARGEMENT EXTÉRIEUR INCLINÉ POUR UN HEXAPLEX N°2 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Soit une structure de tensegrité composée de 3 hexaplex d'orientation n°2, de portée L , de hauteur H , soumise à une charge externe F (verticale ou inclinée) uniformément répartie sur les 2 nœuds supérieurs des bases de la structure et dont le degré d'hyperstaticité vaut $I_s = 1$ (voir §6.7.1).

On obtient les courbes d'efficacité de l'indicateur de volume W suivantes :

INDICATEUR DE VOLUME

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma} = 900, \Phi = 0\right) \text{ pour } S = 3$$

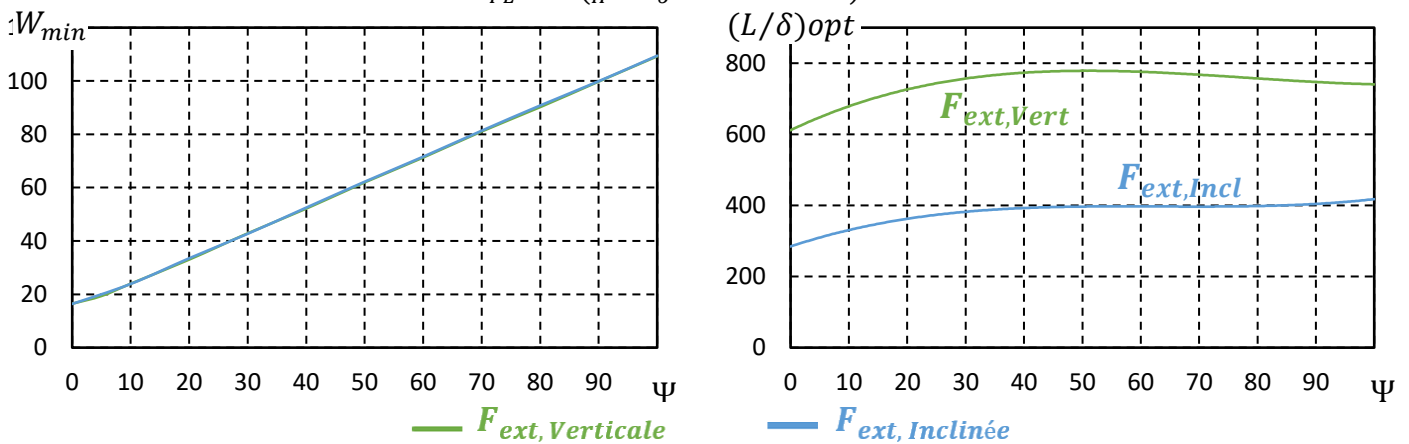


FIGURE ANNEXE D.10 – COURBES D'EFFICACITÉ W DES STRUCTURES DE TENSEGRITÉ COMPOSÉES DE 3 HEXAPLEX N°2 - INFLUENCE DE L'INCLINAISON DE LA CHARGE EXTÉRIEUR [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]

Constatations :

La rigidité de la structure chute considérablement lorsqu'elle est soumise à une charge externe inclinée. Les déformations ne respectent même plus le critère de l'Eurocode.

Il faut donc trouver une alternative au tablier rectiligne pour s'assurer que ses câbles de suspension restent verticaux. On pourrait par exemple opter pour un tablier curviligne.

Table des Annexes

ANNEXE A : STRUCTURE NON-LINÉAIRE EN GRANDS DÉPLACEMENTS	161
ANNEXE B : DÉMONSTRATION DE LA MATRICE DE RAIDEUR NON-LINÉAIRE	163
ANNEXE C : ÉQUATIONS DE CONTRAINTE	167
C.1 CONTRAİNTE DE CHARGEMENT $\Delta\lambda = l$	167
C.2 CONTRAİNTE DE DÉPLACEMENT $\Delta dk = l$	168
ANNEXE D : INFLUENCE DE L'INCLINAISON DU CHARGEMENT EXTÉRIEUR	169
D.1 QUADRUPLEX N°1	169
D.2 QUADRUPLEX N°2	171
D.3 PENTAPLEX N°1.....	172
D.4 PENTAPLEX N°2.....	173
D.5 HEXAPLEX N°2	174

Table des figures

FIGURE 1.1 – DÉBUT DE LA TENSÉGRITÉ : SCULPTURES DE KENNETH SNELSON [10]	5
FIGURE 1.2 – STRUCTURES AUTOTENDANTES D'APRÈS DAVID GEORGES EMMERICH [12]	6
FIGURE 1.3 – MODULE AVEC NŒUDS À DEUX CÂBLES [10]	7
FIGURE 1.4 – SIMPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	8
FIGURE 1.5 – MODULES PRISMATIQUES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	8
FIGURE 1.6 – ASSEMBLAGES UNIDIMENSIONNELS DE SIMPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	8
FIGURE 1.7 – ASSEMBLAGES BIDIMENSIONNELS [5]	9
FIGURE 1.8 – SIMPLEX ET SON ANGLE DE ROTATION α [13]	9
FIGURE 1.9 – GÉOMÉTRIE DU SIMPLEX [3]	10
FIGURE 1.10 – ANALOGIE AU PHÉNOMÈNE D'AUTOCONTRAINTÉ (A) [1]	11
FIGURE 1.11 – ANALOGIE AU PHÉNOMÈNE D'AUTOCONTRAINTÉ (B) [1]	11
FIGURE 1.12 – ANALOGIE AU PHÉNOMÈNE D'AUTOCONTRAINTÉ : MISE EN PRESSION D'UN BALLON [14]	12
FIGURE 1.13 – PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE SIMPLEX [1]	12
FIGURE 1.14 – ANALOGIE À LA NON-LINÉARITÉ : DÉFINITION EFFORT EXTERNE ET DÉPLACEMENT [3]	13
FIGURE 1.15 – ANALOGIE À LA NON-LINÉARITÉ : EFFORTS INTERNES ET INSTABILITÉ NUMÉRIQUE [3]	13
FIGURE 1.16 – ANALOGIE À LA NON-LINÉARITÉ : CALCUL AU SECOND ORDRE DES EFFORTS INTERNES [3]	13
FIGURE 2.1 – ÉLÉMENT ISOLÉ DANS UN REPÈRE LOCAL 2D [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	16
FIGURE 2.2 – ÉLÉMENT ISOLÉ DANS UN REPÈRE GLOBAL 2D [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	16
FIGURE 2.3 – ÉLÉMENT ISOLÉ DANS UN REPÈRE GLOBAL 2D [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	19
FIGURE 2.4 – PROCÉDURE DE MISE EN TENSION DES CÂBLES [1]	21
FIGURE 2.5 – STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE 4 SIMPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	21
FIGURE 2.6 – EFFORTS INTERNES DANS LES ÉLÉMENTS DE LA STRUCTURE [3]	21
FIGURE 2.7 – CONDITIONS AUX EXTRÉMITÉS TELLES QUE $\mu = 1$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	23
FIGURE 2.8 – FACTEUR DE FORME q POUR LES SECTIONS CIRCULAIRES ET CARRÉES, CREUSES ET PLEINES [8]	23
FIGURE 2.9 – ALGORITHME D'OPTIMISATION DES SECTIONS [3]	23
FIGURE 2.10 – INDICATEUR DE VOLUME EN FONCTION DE L'ÉLANCEMENT GÉOMÉTRIQUE [7]	25
FIGURE 2.11 – COURBES D'EFFICIENCE REPRÉSENTATIVE D'UN TYPE DE STRUCTURE [7]	26
FIGURE 2.12 – RÉPARTITION DU POIDS PROPRE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	27
FIGURE 2.13 – RÉPARTITION DU POIDS PROPRE ET CHARGE EXTERNE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	27
FIGURE 3.1 – RELATION CONTRAINTÉ-DÉFORMATION DE L'ACIER [9]	29
FIGURE 3.2 – ILLUSTRATION DU CALCUL AU SECOND ORDRE [9]	29
FIGURE 3.3 – STRUCTURE NON-LINÉAIRE [2]	30
FIGURE 3.4 – SOLUTION ANALYTIQUE DE LA STRUCTURE NON-LINÉAIRE [2]	30
FIGURE 3.5 – RÉOLUTION PAR PAS INCRÉMENTAUX [2]	31
FIGURE 3.6 – PARAMÈTRE D'INCRÉMENTATION ADIMENSIONNEL [2]	32
FIGURE 3.7 – INTERPRÉTATION GRAPHIQUE : CONTRAINTÉ ARCLÉNGTH [2]	34
FIGURE 3.8 – ERREUR DE LA SOLUTION NUMÉRIQUE POUR DIFFÉRENTES LONGUEURS D'INCRÉMENTATION l [3]	35
FIGURE 3.9 – ALGORITHME DE LA MÉTHODE NON-LINÉAIRE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	36
FIGURE 4.1 – INVALIDITÉ DU PRINCIPE DE SUPERPOSITION [3]	40
FIGURE 4.2 – EXEMPLE D'EFFORTS INTERNES DANS UNE STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ SOUMISE AUX CHARGES EXTERNES ET À LA PRÉCONTRAINTÉ [3]	41
FIGURE 4.3 – APPLICATION D'UNE PRÉCONTRAINTÉ P DANS UN CÂBLE [15]	42
FIGURE 4.4 – PRÉCONTRAINTÉ P EXTÉRIORISÉE [15]	42
FIGURE 4.5 – RÉPARTITION DE LA PRÉCONTRAINTÉ P DANS LA STRUCTURE [15]	42
FIGURE 4.6 – EFFORTS INTERNES RÉSULTANT DE L'APPLICATION D'UNE PRÉCONTRAINTÉ P [15]	42
FIGURE 4.7 – EXEMPLE D'EFFORTS INTERNES APRÈS L'APPLICATION D'UNE PRÉCONTRAINTÉ UNIFORME DANS TOUS LES CÂBLES D'UNE STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE SIMPLEX [3]	43
FIGURE 4.8 – EXEMPLE D'EFFORTS INTERNES DANS UNE STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE SIMPLEX SOUMISE À UNE PRÉ COMPRESSION ET UNE CHARGE EXTERNE [3]	43
FIGURE 4.9 – ALGORITHME D'OPTIMISATION DE LA PRÉCONTRAINTÉ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	45

FIGURE 4.10 – STRUCTURE ISOSTATIQUE NON-LINÉAIRE [2].....	45
FIGURE 4.11 – EXEMPLE DE STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE 3 SIMPLEX [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR].....	47
FIGURE 4.12 – EXEMPLE D’EFFORTS INTERNES DANS UNE STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE SIMPLEX [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	48
FIGURE 4.13 – ALGORITHME D’OPTIMISATION DES SECTIONS [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	48
FIGURE 4.14 – SCHÉMA DE LA STRUCTURE ÉTUDIÉE [3].....	50
FIGURE 4.15 – STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE SIMPLEX : $S = 4, I_s = 1$ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR].....	54
FIGURE 4.16 – INDICATEURS MORPHOLOGIQUES DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE SIMPLEX : $S = 4, E/\Sigma = 900, \Psi = 30, \Phi = 33 \times 10 - 4$ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR].....	55
FIGURE 4.17 – INDICATEUR DE POURCENTAGE DE POIDS PROPRE DE STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE SIMPLEX : $S = 4, E/\Sigma = 900, \Psi = 30, \Phi = 33 \times 10 - 4 - 264 \times 10 - 4$ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR].....	57
FIGURE 4.18 – ALGORITHME D’OPTIMISATION D’UNE STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	58
FIGURE 4.19 – EXEMPLE D’INDICATEUR DE PRÉCONTRAINTE ET DE VOLUME POUR UNE STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ AVEC $LH = \text{FIXÉ}$ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	59
FIGURE 5.1 – ANGLE DE ROTATION α POUR UN SIMPLEX [13]	63
FIGURE 5.2 – PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE D’UNE SUCCESSION DE SIMPLEX [1].....	63
FIGURE 5.3 – HAUTEUR DE PASSAGE D’UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE SIMPLEX [1].....	63
FIGURE 5.4 – QUADRUPLEX [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	64
FIGURE 5.5 – ORIENTATIONS DU QUADRUPLEX - VUE TRANSVERSALE [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	64
FIGURE 5.6 – GÉOMÉTRIE D’UN QUADRUPLEX [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	65
FIGURE 5.7 – EXEMPLE DE STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE 4 QUADRUPLEX SUIVANT L’ORIENTATION N°1 [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	66
FIGURE 5.8 – PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE 4 QUADRUPLEX SUIVANT L’ORIENTATION N°1 [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	66
FIGURE 5.9 – HAUTEUR DE PASSAGE D’UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE QUADRUPLEX N°1 [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	67
FIGURE 5.10 – HAUTEUR DE PASSAGE D’UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE QUADRUPLEX N°2 [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	67
FIGURE 5.11 – PENTAPLEX [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	68
FIGURE 5.12 – ORIENTATIONS DU PENTAPLEX - VUE TRANSVERSALE [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR].....	68
FIGURE 5.13 – GÉOMÉTRIE PENTAPLEX-ORIENTATION N°1 [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR].....	69
FIGURE 5.14 – HAUTEUR DE PASSAGE D’UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE PENTAPLEX N°1 [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	70
FIGURE 5.15 – HAUTEUR DE PASSAGE D’UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE PENTAPLEX N°2 [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	70
FIGURE 5.16 – L’HEXAPLEX [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR].....	71
FIGURE 5.17 – ORIENTATIONS DE L’HEXAPLEX - VUE TRANSVERSALE [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR].....	71
FIGURE 5.18 – HAUTEUR DE PASSAGE D’UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE D’HEXAPLEX N°1 [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR].....	72
FIGURE 5.19 – HAUTEUR DE PASSAGE D’UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE D’HEXAPLEX N°2 [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	72
FIGURE 5.20 – ANNEAUX DE TENSÉGRITÉ D’APRÈS A. PUGH [16].....	73
FIGURE 5.21 – ÉTAPES DE CONCEPTION DANS LE CAS D’UNE BASE PENTAGONALE [17]	73
FIGURE 5.22 – ÉTAPES DE CONCEPTION DANS LE CAS D’UNE BASE PENTAGONALE [17].....	74
FIGURE 5.23 – FIN DE LA CONCEPTION - ANNEAU DE TENSÉGRITÉ À BASE PENTAGONALE [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR].....	74
FIGURE 5.24 – ANNEAUX DE TENSÉGRITÉ À BASE PENTAGONALE : R_1 ET R_2 [16]	75
FIGURE 5.25 – ANNEAU DE TENSÉGRITÉ À BASE PENTAGONALE : $R_1 = R_2 = R$ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR].....	75
FIGURE 5.26 – STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE 2 ANNEAUX À BASE PENTAGONALE [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR].....	76
FIGURE 5.27 – ANNEAU DE TENSÉGRITÉ À BASE PENTAGONALE DE HAUTEUR H [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	76
FIGURE 5.28 – MÂT DE FULLER [RICHARD FULLER].....	77
FIGURE 5.29 – DÉRIVE DU MODULE DE FULLER [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR].....	77
FIGURE 5.30 – ASSEMBLAGE DE 4 MODULES DE FULLER [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	78
FIGURE 5.31 – PASSERELLE COMPOSÉE DE MODULES DE FULLER [SÉBASTIEN GOESSENS].....	78
FIGURE 5.32 – GÉOMÉTRIE MODULE DE FULLER [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	78
FIGURE 5.33 – GÉOMÉTRIE DE 2 MODULES DE FULLER [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR].....	79

FIGURE 5.34 – VALEUR DU PARAMÈTRE le [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	79
FIGURE 5.35 – ELANCEMENT DES MODULES DE TENSÉGRITÉ PRISMATIQUES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	80
FIGURE 6.1 – DÉFINITION STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE SIMPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	84
FIGURE 6.2 – COURBES D'EFFICIENCE L/δ DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE SIMPLEX – $S = 2 - 10$, $E\sigma = 900$, $\Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	85
FIGURE 6.3 – COURBES D'EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE SIMPLEX – $S = 4 - 9$, $E\sigma = 900$, $\Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR].....	87
FIGURE 6.4 – COURBES D'EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE SIMPLEX – $S = 3 - 7$, $E\sigma = 900$, $\Phi = 33 \times 10 - 4$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	88
FIGURE 6.5 – COURBES D'EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE SIMPLEX – $S = 3 - 7$, $E\sigma = 900$, $\Phi = 132 \times 10 - 4$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	89
FIGURE 6.6 – COURBES D'EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE SIMPLEX : $S = 4 \& S = 5$, $E\sigma = 900$, $\Phi = 0 - 333 \times 10 - 4$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR].....	91
FIGURE 6.7 – DÉFINITION STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE QUADRUPLEX N°1 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	93
FIGURE 6.8 – STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE D'UN QUADRUPLEX – MAUVAIS APPUIS [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	94
FIGURE 6.9 – DÉFORMATION DE LA STRUCTURE PRÉCONTRAINTÉ SANS CHARGEMENT [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR].....	94
FIGURE 6.10 – DÉFORMATION DE LA STRUCTURE PRÉCONTRAINTÉ ET CHARGÉE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	94
FIGURE 6.11 – DÉPLACEMENT DES NŒUDS SUPÉRIEURS DE LA 1 ^{ÈRE} BASE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	95
FIGURE 6.12 – POSITIONNEMENT DES APPUIS POUR UNE STRUCTURE COMPOSÉE DE QUADRUPLEX N°1 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	95
FIGURE 6.13 – COURBES D'EFFICIENCE L/δ DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE QUADRUPLEX N°1 – $S = 2 - 10$, $E\sigma = 900$, $\Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	96
FIGURE 6.14 – COURBES D'EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE QUADRUPLEX N°1 – $S = 3 - 10$, $E\sigma = 900$, $\Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	97
FIGURE 6.15 – COURBES D'EFFICIENCE L/δ DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE QUADRUPLEX N°1 – $S = 3 - 8$, $E\sigma = 900$, $\Phi = 132 \times 10 - 4$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR].....	98
FIGURE 6.16 – COURBES D'EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE QUADRUPLEX N°1 : $S = 5$, $E\sigma = 900$, $\Phi = 0 - 333 \times 10 - 4$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR].....	99
FIGURE 6.17 – DÉFINITION STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE QUADRUPLEX N°2 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	100
FIGURE 6.18 – COURBES D'EFFICIENCE L/δ DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE QUADRUPLEX N°2 – $S = 2 - 10$, $E\sigma = 900$, $\Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	101
FIGURE 6.19 – COURBES D'EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE QUADRUPLEX N°2 – $S = 3 - 10$, $E\sigma = 900$, $\Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	102
FIGURE 6.20 – COURBES D'EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE QUADRUPLEX N°2 – $S = 3 - 7$, $E\sigma = 900$, $\Phi = 132 \times 10 - 4$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR].....	103
FIGURE 6.21 – COURBES D'EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE QUADRUPLEX N°2 : $S = 4 - 5$, $E\sigma = 900$, $\Phi = 0 - 333 \times 10 - 4$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR].....	105
FIGURE 6.22 – DÉFINITION STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE PENTAPLEX N°1 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	106
FIGURE 6.23 – COURBES D'EFFICIENCE L/δ DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE PENTAPLEX N°1 – $S = 2 - 10$, $E\sigma = 900$, $\Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	107
FIGURE 6.24 – COURBES D'EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE PENTAPLEX N°1 – $S = 2 - 10$, $E\sigma = 900$, $\Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	108
FIGURE 6.25 – COURBES D'EFFICIENCE L/δ DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE PENTAPLEX N°1 – $S = 3 - 7$, $E\sigma = 900$, $\Phi = 132 \times 10 - 4$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR].....	109
FIGURE 6.26 – COURBES D'EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE PENTAPLEX N°1 : $S = 5$, $E\sigma = 900$, $\Phi = 0 - 333 \times 10 - 4$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR].....	110
FIGURE 6.27 – DÉFINITION STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE PENTAPLEX N°2 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	111
FIGURE 6.28 – COURBES D'EFFICIENCE L/δ DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE PENTAPLEX N°2 – $S = 2 - 10$, $E\sigma = 900$, $\Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	112
FIGURE 6.29 – COURBES D'EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE PENTAPLEX N°2 – $S = 3 - 10$, $E\sigma = 900$, $\Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR]	113
FIGURE 6.30 – COURBES D'EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE PENTAPLEX N°2 – $S = 3 - 6$, $E\sigma = 900$, $\Phi = 132 \times 10 - 4$ [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR].....	114

FIGURE 6.31 – COURBES D’EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES DE PENTAPLEX N°2 : $S = 5, E\sigma = 900, \Phi = 0 - 333 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR].....	115
FIGURE 6.32 – DÉFINITION STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE D’HEXAPLEX N°1 [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	116
FIGURE 6.33 – COURBES D’EFFICIENCE L/δ DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES D’HEXAPLEX N°1 – $S = 2 - 10, E\sigma = 900, \Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	117
FIGURE 6.34 – COURBES D’EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES D’HEXAPLEX N°1 – $S = 2 - 6, E\sigma = 900, \Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	119
FIGURE 6.35 – COURBES D’EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES D’HEXAPLEX N°1 – $S = 2 - 6, E\sigma = 900, \Phi = 132 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR].....	120
FIGURE 6.36 – COURBES D’EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES D’HEXAPLEX N°1 : $S = 3, E\sigma = 900, \Phi = 0 - 333 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR].....	121
FIGURE 6.37 – DÉFINITION STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE D’HEXAPLEX N°2 [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	122
FIGURE 6.38 – COURBES D’EFFICIENCE L/δ DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES D’HEXAPLEX N°2 – $S = 2 - 10, E\sigma = 900, \Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	123
FIGURE 6.39 – COURBES D’EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES D’HEXAPLEX N°2 – $S = 2 - 6, E\sigma = 900, \Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	124
FIGURE 6.40 – COURBES D’EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES D’HEXAPLEX N°2 – $S = 2 - 6, E\sigma = 900, \Phi = 132 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR].....	125
FIGURE 6.41 – DÉFINITION STRUCTURE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE D’ANNEAUX DE TENSÉGRITÉ À BASE PENTAGONALE [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	126
FIGURE 6.42 – COURBES D’EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉES D’ANNEAUX DE TENSÉGRITÉ À BASE PENTAGONALE : $S = 2 - 3, E\sigma = 900, \Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR].....	127
FIGURE 6.43 – DÉFINITION STRUCTURE COMPOSÉE DE MODULES DE FULLER [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	128
FIGURE 6.44 – EXEMPLE D’EFFORTS INTERNES DANS UNE STRUCTURE COMPOSÉE DE 4 MODULES DE FULLER APRÈS L’APPLICATION DE LA PRÉCONTRAÎNTE [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	129
FIGURE 7.1 – COURBES D’EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ : $E\sigma = 900, \Phi = 33 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	133
FIGURE 7.2 – TABLE DE PRÉDIMENSIONNEMENT DE STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ EN ACIER S235 POUR $L = 10$ M [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	134
FIGURE 7.3 – COURBES D’EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ : $E\sigma = 900, \Phi = 66 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	136
FIGURE 7.4 – TABLE DE PRÉDIMENSIONNEMENT DE STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ EN ACIER S235 POUR $L = 20$ M [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	137
FIGURE 7.5 – COURBES D’EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ : $E\sigma = 900, \Phi = 99 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	139
FIGURE 7.6 – TABLE DE PRÉDIMENSIONNEMENT DE STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ EN ACIER S235 POUR $L = 30$ M [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	140
FIGURE 7.7 – COURBES D’EFFICIENCE W DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ : $E\sigma = 900, \Phi = 132 \times 10^{-4}$ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	142
FIGURE 7.8 – TABLE DE PRÉDIMENSIONNEMENT DE STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ EN ACIER S235 POUR $L = 40$ M [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	143
FIGURE 8.1 – CARACTÉRISTIQUES DES PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ OPTIMALES : $L = 20$ M [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	149
FIGURE 8.2 – TABLE DE PRÉDIMENSIONNEMENT D’UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ EN ACIER S235 POUR $L = 20$ M [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	150
FIGURE 8.3 – COURBES D’EFFICIENCE L/δ DES STRUCTURES COMPOSÉES DE SIMPLEX POUR $\Phi = 0$ [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR].....	151
FIGURE 8.4 – CARACTÉRISTIQUES DES PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ OPTIMALES : $L = 40$ M [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	152
FIGURE 8.5 – VUE D’UNE PASSERELLE COMPOSÉE DE SIMPLEX DU POINT DE VUE D’UN PROMENEUR [1]	153
FIGURE 8.6 – HAUTEUR DE PASSAGE D’UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE SIMPLEX [1]	153
FIGURE 8.7 – HAUTEUR DE PASSAGE D’UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE DE QUADRUPLEX N°2 [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	154
FIGURE 8.8 – HAUTEUR DE PASSAGE D’UNE PASSERELLE DE TENSÉGRITÉ COMPOSÉE D’HEXAPLEX N°1 [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	155
FIGURE 8.9 – HAUTEUR DE PASSAGE DES STRUCTURES DE TENSÉGRITÉ EN ACIER S235 POUR $b = 2$ M [ILLUSTRATION DE L’AUTEUR]	156

Bibliographie

- [1] BASTIEN, A., & GRAVY, Q. (2014). *Etude d'une passerelle de tensegrité composée de simplex*. Louvain-La-Neuve.
- [2] ELIAERS, M. (2015). *Calcul non-linéaire des structures de tensegrité*. Louvain-La-Neuve.
- [3] FERON, J. (2016). *Optimisation des structures de tensegrité sur base d'indicateurs morphologiques*. Louvain-la-Neuve.
- [4] BUCKMINSTER FULLER, R. (1975). *Synergetics : explorations in the geometry of thinking*. New York: MacMillan publishing co.
- [5] MOTRO, R. (2005). *Tensegrité*. Paris: Hermès Lavoisier.
- [6] REMACLE, J.-F. (2015, Octobre 30). *LAUCE 2125 - Finite Elements for Structures*. Récupéré sur <http://perso.uclouvain.be/jean-francois.remacle/LAUCE2125/lectures.html>
- [7] LATTEUR, P. (2016). *Calculer une structure : de la théorie à l'exemple*. Louvain-La-Neuve: Bruylant-Academia.
- [8] LATTEUR, P. (2000). *Optimisation et prédimensionnement des treillis, arcs, poutres et câbles sur base d'indicateurs morphologiques*. Bruxelles: VUB.
- [9] LATTEUR, P. (2016). *Support du cours LAUCE1181 - Mécanique des structures*. Louvain-La-Neuve.
- [10] RADUCANU, V. (2001). *Architecture et système constructif : cas des systèmes de tensegrité*. Montpellier.
- [11] MEGRET, J.-F. (2003). *La tensegrité vers une biomécanique ostéopathique*. Montpellier.
- [12] FEST, E. (2003). *Une structure active de type tensegrité*. Lausanne.
- [13] JAUREGUI, V. (2010). *Tensegrity structures and their application to architecture*. Cantabrie, Spain: Ediciones de la Universidad de Cantabria.
- [14] QUIRANT, J. (2007). *Système de tensegrité et autocontainte : qualification, sensibilité et incidence sur le comportement*. Montpellier.
- [15] LATTEUR, P., FERON, J., & DENOEL, V. (2017). *A design tool for lattice and tensegrity structures based on a stiffness and volume optimization algorithm using morphological indicators*. Louvain-la-Neuve.
- [16] KHELLAF, N. (2014). *Comportement non linéaire géométrique et matériel des anneaux de tensegrité*. Biskra.
- [17] NGUYEN, A. D. (2009). *Etude du comportement mécanique et du pliage d'un anneau de tensegrité à base pentagonale*. Montpellier.

Rue Archimède, 1 bte L6.11.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique www.uclouvain.be/epl

