

Faculté des sciences

Applications p -harmoniques quand p tend vers 2

Auteur : Benoît Van Vaerenbergh
Promoteurs : Jean Van Schaftingen
Lecteurs : Heiner Olbermann et Pedro Vaz
Année académique 2020-2021

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
FACULTÉ DES SCIENCES
ÉCOLE DE MATHÉMATIQUES

**APPLICATIONS p -HARMONIQUES
QUAND p TEND VERS 2**

BENOÎT VAN VAERENBERGH
PROMOTEUR : JEAN VAN SCHAFTINGEN
LECTEURS : HEINER OLBERMANN, PEDRO VAZ

Mémoire de master
Juin 2021

Remerciements

Je remercie le professeur Jean Van Schaftingen pour sa bienveillance, son aide et sa disponibilité tout au long de cette année malgré une pandémie mondiale qui n'a pas facilité les choses. C'est un plaisir pour moi de travailler et discuter avec vous.

Mes remerciements vont aussi à ma famille et à Joyce qui m'ont soutenu pendant mes études et pour la rédaction de ce mémoire. Merci Joyce pour tes conseils et ce que tu m'inspires.

Enfin, merci à Jean-Sébastien Bach, Steve Reich, Nik Bärtsch et Aka Moon sans qui la rédaction de ce mémoire eût été bien (trop) silencieuse.

Table des matières

Table des matières	6
Introduction	9
Le problème et ses hypothèses	13
1 En l'absence d'obstructions topologiques	15
1.1 Compacité à travers les espaces L^p	18
1.2 Approximation par presque-minimiseurs	25
2 <i>Intermezzo</i> : convergence à travers les L^p	29
3 Homotopie dans un cadre non-continu	35
3.1 Fonctions à oscillation moyenne évanescence	36
3.2 Les inclusions $W^{1/2,2} \subset \text{VMO}$ et $W^{1,2} \subset \text{VMO}$	38
3.3 Définition de l'homotopie dans $\text{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$	41
3.4 Lien avec l'homotopie continue et approximation de fonctions dans VMO	43
3.5 Caractérisation de $\text{VMO}(\mathcal{M}, \mathbb{R}^\nu)$	44
3.6 La projection $\Pi_{\mathcal{N}}$ sur le point le plus proche	45
3.7 Approximation dans $\text{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$	46
3.8 Pourquoi $W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ peut être vide	49
3.9 Surjectivité de la trace	51
3.10 Caractérisation des données au bord g admettant une extension	55
3.11 Conclusion	59
4 Quantifier le problème d'extension	61
4.1 Résolutions topologiques	61
4.2 Extension de degré zéro	63
4.3 Pourquoi $W_g^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ n'est jamais vide	66
4.4 Quantifier la non-extension	66
4.5 Borne inférieure locale	69
4.6 Énergie singulière, $\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g)$	71
4.7 Continuité de $p \mapsto \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g)$	72
4.8 Résolutions topologiques de Sobolev p -minimales	73
4.9 Énergie renormalisée, $\mathcal{E}_2^{\text{ren}}$	74

4.10	Conclusion	79
5	Borne supérieure sur les presque-minimiseurs	81
6	Densité dans $W^{1,p}(\Omega_\delta, \mathcal{N})$ de la classe $\mathcal{R}^{1,2}(\Omega_\delta, \mathcal{N})$	83
6.1	Changer les valeurs de u sur des boules	84
6.2	Démonstration de la proposition de densité	86
7	Bornes inférieures	91
7.1	Croissance du rayon de boules	92
7.2	La croissance de la fonction Ξ	93
7.3	Fusion de boules	94
7.4	Preuve de la proposition 7.1 d'expansion des boules	96
7.5	Borne inférieure globale	99
7.6	Compacité de familles de boules	102
7.7	Borne inférieure globale : cas de $W^{1,p}$	104
8	Compacité et convergence de presque-minimiseurs	107
8.1	Existence d'une sous-suite convergente quand $p \uparrow 2$, $W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) = \emptyset$. . .	107
8.2	Quantifier l'inclusion $a \in \Omega$	109
8.3	Démonstration de la proposition 8.1	110
8.4	Convergence des presque-minimiseurs vers une application renormalisable .	117
	Conclusion	125
	Liste des énoncés	128
	Bibliographie	133

Introduction

Dans ce mémoire, nous nous intéressons au problème qui consiste à minimiser parmi toutes les applications u , dont le domaine est un sous-ensemble Ω du plan et dont l'image est sujette à une contrainte \mathcal{N} , la fonctionnelle de Dirichlet

$$\int_{\Omega} \frac{|Du|^2}{2}$$

quand les valeurs au bord de l'application u sont fixées. Quand la donnée au bord est appelée $g : \partial\Omega \rightarrow \mathcal{N}$, le problème s'écrit sous la forme

$$\min \left\{ \int_{\Omega} \frac{|Du|^2}{2} : u : \Omega \rightarrow \mathcal{N} \right. \\ \left. u|_{\partial\Omega} = g \right\}.$$

L'étude de ce problème est motivée par les nombreux exemples venus de la physique, de l'analyse numérique et de la géométrie qu'il englobe. En effet, en mécanique statistique, ce problème décrit un modèle continu pour la configuration de cristaux liquides. Ces derniers sont modélisés par un *spin* $u(x)$ qui donne la direction du spin au point x . Dans ce premier cas, la contrainte consiste en des sphères, $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1, \mathbb{S}^2$, ou si l'on désire négliger l'orientation du spin $\mathcal{N} = \mathbb{RP}_2$ est le plan projectif [11, p.653]. La donnée au bord permet de localiser le problème : il convient de penser que la situation est gelée à l'extérieur du domaine Ω . Aussi, en analyse numérique, la contrainte \mathcal{N} peut prendre la forme de quotient par un sous-groupe fermé de $SO(3)$ lors de la conception de maillages de surfaces [41]. Ensuite, en géométrie riemannienne, ce problème est un pendant naturel et bidimensionnel de la notion de géodésique [68, Section 1.2.4]. Enfin, les solutions de ce problème d'optimisation ont elles-mêmes des applications théoriques. Par exemple, dans la théorie des applications d'ondes (*wave maps*), certaines hypothèses sont formulées en termes du minimum du problème [59, Corollary 1.7].

À la suite de ces exemples, des questions émanent : d'abord, sans doute, la question de l'existence qui suggère directement d'identifier une notion de solution raisonnable ainsi que des hypothèses sur le domaine Ω et la contrainte \mathcal{N} . Ensuite, une caractérisation des solutions du problème est un second point à élucider. Or, concernant l'existence, celle-ci est obstruée par des considérations de topologie : si Ω est un ouvert du plan, disons un disque de rayon 1, et la contrainte \mathcal{N} n'est pas simplement connexe, alors il existe des applications continues $g : \partial\Omega \rightarrow \mathcal{N}$ telle qu'il n'existe pas d'application continues $u : \bar{\Omega} \rightarrow \mathcal{N}$ qui

se restreignent à g . Ce fait motive d'étudier le problème pour des applications u de faible régularité.

Ainsi, nous considérerons des fonctions de Sobolev de régularité $W^{1,2}$ définies sur un ouvert borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ de régularité lipschitzienne de sorte que les domaines lisses de la géométrie et les domaines carrés et rectangles usuels soient compris dans notre analyse. La contrainte \mathcal{N} sera matérialisée par une variété riemannienne compacte \mathcal{N} . Ceci englobe tous les exemples précédents. Dès lors, nous nous tournons vers le problème variationnel suivant

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} \frac{|Du|^2}{2} : u \in W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) \right\}.$$

Nous définissons l'espace de Sobolev des applications à valeurs dans la variété \mathcal{N} et de gradient faible $|Du|$ de carré intégrable, $W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$, dans le chapitre 1. L'indice g signifie que la trace, opérateur de restriction, de u le long du bord $\partial\Omega$ vaut g . En outre, $|Du|^2 = \langle Du, Du \rangle = \text{Trace}({}^t Du Du)$ est le carré de norme de Frobenius du gradient faible.

Toutefois, le choix de la régularité $W^{1,2}$, bien qu'utile dans un contexte variationnel, n'est pas suffisant pour contourner l'obstruction topologique à l'existence [5, Theorem 2]. Une idée, retenue dans ce mémoire, considère des suites de fonctionnelles qui approchent la fonctionnelle de Dirichlet et étudie le comportement des minimiseurs de la famille tend vers la fonctionnelle initiale. Il existe au moins deux familles. La première est celle constituée par la fonctionnelle de Ginzburg–Landau ; pour un choix de $\varepsilon > 0$, on considère des minimiseurs de

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} \frac{|Du|^2}{2} + \frac{F(u)}{\varepsilon^2} : u \in W_g^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^{\nu}) \right\}$$

où, typiquement, $F(u) = \text{dist}^2(u, \mathcal{N})$. Ce type de fonctionnelle est d'abord apparu dans la littérature physique dans le cas $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1$ (nous renvoyons aux références chez SERFATY [57]). L'idée consiste à prendre la limite dans une suite de minimiseurs quand $\varepsilon \downarrow 0$. Intuitivement, quand le paramètre ε tend vers zéro, le second terme de la fonctionnelle de Ginzburg–Landau devient arbitrairement grand, contraignant ainsi le minimiseur associé à ε , disons u_ε , à prendre des valeurs proche de la variété \mathcal{N} . Quand $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1$ et $4F(u) = (|u|^2 - 1)^2$, BÉTHUEL, BRÉZIS et HÉLEIN implémentèrent cette approche [4] (*confer* aussi la synthèse [15]) Récemment, MONTEIL, RODIAC et VAN SCHAFTINGEN [46, 45] ainsi que CANEVARI et ORLANDI [18, 17] donnèrent des jeux d'hypothèses sur $F(u)$ et $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^{\nu}$ pour obtenir la convergence de u_ε pour différentes topologies d'intérêt dans ce problème. Nous ne prétendons pas ici donner un historique précis de l'étude de cette fonctionnelle.

La seconde idée, qu'implémente le mémoire, est d'étudier la limite quand $p \uparrow 2$ des minimiseurs de la p -énergie de Dirichlet

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} \frac{|Du|^p}{p} : u \in W_g^{1,p}(\Omega, \mathcal{N}) \right\}.$$

Les mathématiciens HARDT et LIN [31, 32] complétèrent l'étude de cette famille quand $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1$ en jetant les bases pour le cas général (*confer* aussi STERN [60]). Les applications qui mini-

misent la fonctionnelle sont *applications p-harmoniques* dites *minimisantes* et constituent un sujet d'étude en soi [66, 25]. Ici et dans tout le texte, $p \uparrow 2$ signifie que p tend par valeurs inférieures vers 2. Dans ce problème, cette hypothèse est cruciale car si $p > 2$, les fonctions de $W_g^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ sont continues et même de régularité Höldérienne et par conséquent l'argument d'obstruction topologique continu s'applique. Il convient néanmoins de montrer que $W_g^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ est non vide. Nous proposons, dans ce mémoire, de résoudre le problème pour un variété riemannienne compacte arbitraire en utilisant les outils de [46, 45]. Cette approche est plus intrinsèque car il ne faut *a priori* pas savoir que $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^V$ est une sous-variété de l'espace euclidien.

Décrivons la stratégie de la preuve, que ce mémoire expose, sur un exemple simple : supposons que nous voulions étudier le problème variationnel

$$I = \inf \{F(u) : u \in X(\Omega)\}$$

où $F(u)$ est une fonctionnelle sur $X(\Omega)$ un espace fonctionnel. Supposons qu'il ne soit pas clair que les suites minimisantes de l'infimum I convergent dans $X(\Omega)$. Toutefois, pour $a > 0$, la famille de fonctionnelles

$$I_a = \inf \{F_a(u) : u \in X(\Omega)\}$$

admet au moins un minimiseur que nous notons u_a et $F_a \rightarrow F$ en un certain sens. D'une part, le fait que u_a minimise I_a , nous permet d'écrire que la limite supérieure

$$\overline{\lim}_{a \downarrow 0} F_a(u_a) \leq I. \quad (\text{Borne supérieure})$$

D'autre part, supposons qu'il soit possible de montrer qu'une sous-suite de la famille $(u_a)_a$ converge vers un $u_* \in X(\Omega)$ satisfait

$$F(u_*) \leq \underline{\lim}_{a \downarrow 0} F_a(u_a) \quad (\text{Borne inférieure})$$

La borne supérieure et inférieure combinées livrent

$$I \leq F(u_*) \leq I,$$

montrant ainsi que u_* est minimiseur de I . Pour le problème des applications p -harmoniques nous allons développer le même style d'argument : une borne supérieure et inférieure. Cependant, nous aurons à identifier le bon infimum et à renormaliser la suite des minimiseurs de la p -énergie de Dirichlet pour des raisons expliquées dans le mémoire. Aussi, la démarche présente pour les fonctionnelles I, I_a est robuste : la suite (u_a) aurait être choisie comme étant des *presque*-minimiseurs c'est-à-dire

$$F_a(u_a) - I_a \xrightarrow{a \downarrow 0} 0$$

plutôt qu'une suite de minimiseurs. Cette idée peut être formalisée par la Γ -convergence. Toutefois, cette notion repose sur l'existence d'un espace topologique sous-jacent et la notion de convergence naturelle des presque-minimiseurs de la famille de p -énergie de Dirichlet, que nous considérons, s'écrit

$$\int |u_* - u_p|^p \xrightarrow{p \uparrow 2} 0$$

qui ne semble pas décrire une notion de topologie établie. Dans les termes de notre exemple, cela signifie que l'espace sur lequel est défini F_a varie avec le paramètre a . Ainsi, nous traiterons le cas de presque-minimiseurs de la p -énergie dans l'esprit la Γ -convergence sans pour autant pouvoir formellement la prouver. La nouveauté de notre approche est justement que, contrairement à HARDT et LIN, nous n'utilisons nullement les propriétés de régularité des minimiseurs [25], ce qui nous permet de traiter la classe très générale des presque-minimiseurs de la p -énergie.

Le mémoire débute par l'étude du problème quand il n'y pas d'obstructions topologiques, c'est-à-dire que $W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ n'est pas vide. Ce premier chapitre nous permet de développer un théorème de compacité utile par la suite et d'identifier une notion de convergence pertinente quand $p \uparrow 2$. Le second chapitre étudie cette notion, la définit et donne quelques caractérisations. Ensuite, dans le chapitre 3, nous revisitons la théorie classique de l'homotopie dans la classe des fonctions à oscillation moyenne évanescence qui élargi l'homotopie continue. Ceci nous permet d'expliquer la nature précise des obstructions. Nous prouvons aussi la surjectivité de la trace dans un cadre non-linéaire : il s'agit d'un résultat qui affirme en quelques sorte que la connaissance d'une donnée au bord $\partial\Omega \rightarrow \mathcal{N}$ est équivalent à connaître la donnée au bord sur un voisinage de l'ouvert. Dans le chapitre 4, nous associons une quantité scalaire aux divers objets topologiques et géométriques nécessaires pour quantifier le problème. Dans le chapitre 5, nous établissons la borne supérieure pour l'étude des presque-minimiseurs. Le chapitre 6 identifie une classe dense de fonctions dans $W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ nécessaire pour établir la borne inférieure dans le chapitre 7 : nous utilisons la méthode d'expansion de boules. Le chapitre 8 conclut le mémoire avec un résultat de compacité des suites bornées au sens du chapitre 5 et décrit la convergence des suites d'application p -harmoniques quand $p \uparrow 2$. Ce dernier résultat est le théorème principal du mémoire et généralise au cas d'une variété et de presque-minimiseurs l'approche de HARDT et LIN.

Le problème et ses hypothèses

Le mémoire a pour but de résoudre le problème suivant :

Problème. Étant donné un ouvert borné et régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, une variété riemannienne compacte \mathcal{N} et une donnée au bord $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$, décrire avec précision le comportement des suites de presque-minimiseurs $u_p \in W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ de trace $\text{Trace}_{\partial\Omega} u_p = g$ de la p -énergie de Dirichlet quand $p \uparrow 2$ et identifier un objet limite pour ces suites. En d'autres termes, si la suite u_p satisfait

$$\left[\int_{\Omega} \frac{|Du_p|^p}{p} - \inf \left\{ \int_{\Omega} \frac{|Dv|^p}{p} : v \in W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N}), \text{Trace}_{\partial\Omega} v = g \right\} \right] \xrightarrow{p \uparrow 2} 0,$$

quel sens donner à

$$\lim_{p \uparrow 2} u_p$$

et quelle est la limite ?

L'ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ sera toujours un ouvert borné régulier au sens que son bord est, quitte à changer de système de coordonnées, localement le graphe d'application lipschitzienne. Nous supposons aussi qu'il est connexe. Nous faisons pas d'hypothèses sur sa simple connexité.

La variété riemannienne compacte \mathcal{N} sera pensée plongée isométriquement dans l'espace euclidien \mathbb{R}^v . Le théorème de plongement de Nash garantit l'existence d'un tel plongement [48] (*confer* aussi la preuve sur le blog de TAO [61]). Notons qu'en pratique les exemples de notre introduction possèdent tous un plongement : le cercle S^1 se plonge dans le plan \mathbb{R}^2 , le plan projectif peut être compris comme une variété de matrices.

Nous donnons une réponse à ce problème dans le dernier théorème de ce mémoire en identifiant une limite et plusieurs notions de convergence.

Au sujet des notations, nous notons $\mathbb{B}_{\rho}(a)$ la boule fermées de rayon ρ centrée en $a \in \mathbb{R}^2$. Nous notons $\Omega - \mathbb{B}_{\rho}(a)$ les points de Ω non contenus dans la boule $\mathbb{B}_{\rho}(a)$. Cette notation permet les calculs formels d'ensembles et renseigne sur l'orientation du vecteur normal à la boule. Ensuite, l'intégrale de $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^v$ par rapport à la mesure de Lebesgue est notée

$$\int_{\Omega} f$$

et la mesure de Lebesgue d'un ensemble bidimensionnel mesurable A est notée $|A|$. Concernant les questions de théorie de la mesure, nous n'utilisons pas le quotient par la relation presque partout. Ainsi, les fonctions continues peuvent être évaluées en un point sans l'usage d'un théorème et cette approche rend plus précis certains énoncés. Notons que nous perdons l'unicité de la limite et l'unicité du gradient faible ; néanmoins, ces objets restent définis à un ensemble de mesure nulle près et les énoncés fixent les fonctions mesurables sur tout leur domaine plutôt qu'à leur classe d'équivalence. Aussi, nous notons

$$|Du| = \sqrt{\langle Du, Du \rangle} = \sqrt{\text{Trace}({}^t Du Du)}$$

est la norme de Frobenius du gradient faible.

Ensuite, nous souhaitons attirer l'attention du lecteur sur la liste des énoncés numérotés en page 126 qui doit permettre de facilement localiser les résultats dans le mémoire dans sa version papier.

Enfin, le mémoire entier se réfère à ce résultat :

Lemme (Continuité de la norme). *Fixons $(p_n)_n$ une suite réelle croissante telle que, pour chaque n , $p_n \in [1, p]$ et $p_n \uparrow p$. Alors, si $u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^v)$,*

$$\int_{\Omega} |v|^{p_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |v|^p$$

Cela implique en particulier que la norme L^p est continue en p au sens du lemme, expliquant ainsi le nom de ce résultat.

Chapitre 1

En l'absence d'obstructions topologiques

Le but de ce premier chapitre est de montrer les deux propositions suivantes qui nous permettront d'introduire les outils qui ne concernent pas directement la topologie mais qui nous seront toutefois nécessaires dans le cas générique du problème que nous traitons.

Proposition 1.1 (Existence, $W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) \neq \emptyset$). *Considérons un ouvert borné et régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et une variété compacte \mathcal{N} . Fixons $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$. Supposons qu'il existe $u_0 \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ tel que $\text{Trace}_{\partial\Omega} u_0 = g$. Alors, il existe $u_* \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ tel que $\text{Trace}_{\partial\Omega} u_* = g$ et*

$$\int_{\Omega} \frac{|Du_*|^2}{2} = \inf \left\{ \int_{\Omega} \frac{|Dv|^2}{2} : v \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}), \text{Trace}_{\partial\Omega} v = g \right\}.$$

Rappelons que l'espace de Sobolev, $W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$, des applications $\Omega \rightarrow \mathcal{N}$ est construit comme suit : comme la variété \mathcal{N} est isométriquement plongée dans un espace euclidien, nous la pensons comme sous-variété d'un espace vectoriel $\mathbb{R}^{\nu} : \mathcal{N} \subset \mathbb{R}^{\nu}$. Nous pouvons alors poser pour $p \in [1, \infty]$,

$$W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N}) = W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^{\nu}) \cap \{u : \text{p.p. } u \in \mathcal{N}\}$$

où $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^{\nu})$ est l'espace de Sobolev linéaire [67, Définition 6.1.8]. Nous procédons alors de manière analogue pour l'espace de Sobolev fractionnaire $W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ dont nous rappellerons la définition plus tard, *confer* (3.5). Cette manière de procéder n'est *a priori* pas intrinsèque car elle repose sur un plongement ; il est néanmoins possible de montrer que cette définition est équivalente à une définition qui est davantage intrinsèque (*confer* la thèse de CONVENT [20, Proposition 1.3.6.] en particulier [21, Proposition 1.6]). Néanmoins, l'avantage de cette approche est que cela nous permet de bénéficier de la théorie linéaire sans devoir la reconstruire en présence de la contrainte.

Par exemple, la trace, opérateur de restriction de $W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ à $W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ est construite pour les espaces de Sobolev linéaires correspondants [51, Proposition 15.3][37, Theorem 18.34]. Nous montrons alors que si $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ alors presque partout dans $\partial\Omega$, $\text{Trace}_{\partial\Omega} u \in \mathcal{N}$.

Concernant la trace d'une fonction de $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$ et l'espace fractionnaire $W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathbb{R}^\nu)$, nous utiliserons seulement le fait que si u_n converge dans $W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^\nu)$ alors $\text{Trace}_{\partial\Omega} u_n$ converge dans $W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathbb{R}^\nu)$ [64, Proposition 5.38][51, Proposition 15.3]. Nous noterons aussi

$$W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) = \{u \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) : \text{Trace}_{\partial\Omega} u = g\}.$$

Voici la seconde proposition.

Proposition 1.2 (Approximation par presque-minimiseurs, $W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) \neq \emptyset$). *Considérons un ouvert borné et régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et une variété compacte \mathcal{N} . Fixons $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$. Supposons qu'il existe $u_0 \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ tel que $\text{Trace}_{\partial\Omega} u_0 = g$.*

Fixons $(p_n)_n$ une suite réelle et croissante telle que pour chaque n , $p_n \in]1, 2]$ et $p_n \uparrow 2$. Considérons aussi une suite d'applications $(u_n)_n$ telle que pour chaque n , $u_n \in W^{1,p_n}(\Omega, \mathcal{N})$ vérifie $\text{Trace}_{\partial\Omega} u_n = g$. Enfin, supposons que

$$\left[\int_{\Omega} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} - \inf \left\{ \int_{\Omega} \frac{|Dv|^{p_n}}{p_n} : v \in W^{1,p_n}(\Omega, \mathcal{N}), \text{Trace}_{\partial\Omega} v = g \right\} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (1.1)$$

Alors, il existe $u^ \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ de trace g et une sous-suite $(n_k)_k$*

$$\int_{\Omega} |u_{n_k} - u^*|^{p_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0$$

$$Du_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} Du^* \text{ presque partout,}$$

$$\int_{\Omega} |Du_{n_k} - Du^*|^{p_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

En outre,

$$\int_{\Omega} \frac{|Du^*|^2}{2} = \inf \left\{ \int_{\Omega} \frac{|Dv|^2}{2} : v \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}), \text{Trace}_{\partial\Omega} v = g \right\}. \quad (1.2)$$

Enfin, la sous-suite satisfait

$$\inf \left\{ \int_{\Omega} \frac{|Dv|^{p_{n_k}}}{p_{n_k}} : v \in W^{1,p_{n_k}}(\Omega, \mathcal{N}), \text{Trace}_{\partial\Omega} v = g \right\} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{|Du^*|^2}{2}. \quad (1.3)$$

La première proposition (proposition 1.1) est classique dans le cas $\mathcal{N} = \mathbb{R}$. Nous revisitons la méthode directe en nous assurant que la limite de la suite minimisante prend ses valeurs dans \mathcal{N} . L'hypothèse que l'ensemble sur lequel nous minimisons la fonctionnelle est non vide est importante. Nous verrons dans la suite du mémoire que cette hypothèse n'est pas toujours satisfaite. Dans ce cas, nous allons, dans l'esprit de la seconde proposition, proposer une approche qui donne des minimiseurs dans un nouveau sens. Les fonctions u_* qui satisfont la conclusion de la première proposition sont appelées des applications *harmoniques minimisantes*.

La seconde proposition (proposition 1.2) implique la première et décrit la stabilité en l'exposant $p = 2$ du problème de Dirichlet : si l'énergie est perturbée dans son exposant, il existe une sous-suite de $(n)_n$ telle que la fonction u_n approxime bien la solution u_* et les infima coïncident à la limite, *confer* (1.3). Notons, à ce sujet, qu'il est toujours vrai que

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{p \uparrow 2} \inf \left\{ \int_{\Omega} \frac{|Dv|^p}{p} : v \in W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N}), \text{Trace}_{\partial\Omega} v = g \right\} \\ \leq \inf \left\{ \int_{\Omega} \frac{|Dv|^2}{2} : v \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}), \text{Trace}_{\partial\Omega} v = g \right\}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

En effet, appelons I_p l'infimum à droite et I_2 l'infimum à gauche. Si I_2 n'est pas fini, (1.4) est trivialement satisfaite. Dans les autres cas, fixons v admissible dans l'infimum I_2 . En particulier $v \in W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ quand $p \leq 2$. Par définition d'infimum,

$$I_p \leq \int_{\Omega} \frac{|Dv|^p}{p}$$

A la limite supérieure, nous trouvons par la continuité de la norme,

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow 2} I_p \leq \overline{\lim}_{p \rightarrow 2} \int_{\Omega} \frac{|Dv|^p}{p} = \int_{\Omega} \frac{|Dv|^2}{2}$$

Nous avons donc prouvé (1.4) car l'application v était arbitraire. En termes mathématiques, l'infimum de la p -énergie de Dirichlet est une fonction *semi-continue supérieurement* en p .

Il suffira donc dans la preuve de prouver l'inégalité réciproque pour la limite inférieure. Cela nécessitera un passage à la sous-suite. En effet, la convexité de $|\cdot|^p$ [22, Exemple 1.53], nous permet d'écrire pour un $v \in W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$,

$$\int_{\Omega} \frac{|Dv|^p}{p} \geq \int_{\Omega} \frac{|Du_*|^p}{p} + \int_{\Omega} \langle |Du_*|^{p-2} Du_*, Dv - Du_* \rangle. \quad (1.5)$$

Prenons $v = u_n$, la suite de la proposition 1.2, on obtient à la limite inférieure, par l'hypothèse (1.1) et la continuité de la norme.

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} \geq \int_{\Omega} \frac{|Du_*|^2}{2} + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \langle |Du_*|^{p_n-2} Du_*, Du_n - Du_* \rangle.$$

Ainsi,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} I_{p_n} \geq I_2 + \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \langle |Du_*|^{p_n-2} Du_*, Du_n - Du_* \rangle,$$

et en général la limite inférieure ne vaut pas zéro.

Enfin, comme suite (u_n) , la proposition permet de choisir des $u_n \in W^{1,p_n}(\Omega, \mathcal{N})$ de trace g tels que

$$\int_{\Omega} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} = \inf \left\{ \int_{\Omega} \frac{|Dv|^{p_n}}{p_n} : v \in W^{1,p_n}(\Omega, \mathcal{N}), \text{Trace}_{\partial\Omega} v = g \right\}. \quad (1.6)$$

De telles fonctions sont appelées applications p_n -harmoniques minimisantes. Avec ce vocabulaire, on peut dire que la proposition assure que les suites d'applications p -harmoniques minimisantes admettent, à la sous-suite, une limite harmonique quand $p \uparrow 2$. Toutefois, nous favorisons un énoncé plus robuste en permettant que l'écart entre le membre de gauche et de droite de (1.6) ne soit pas exactement zéro mais une suite qui tend vers zéro quand $p_n \uparrow 2$. Nous parlons alors de suites de presque-minimiseurs. Le cas d'égalité (1.6) dans la proposition 1.2 a déjà été traité dans la littérature : HARDT et LIN [32, Theorem B] dans le cas où la variété $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1$ est un cercle et LUCKHAUS [39] dans le cas général, presque-minimiseurs compris. Notre méthode précise la convergence des applications et évite la convergence faible, peu adaptée au cadre non-linéaire que nous impose la contrainte.

1.1 Compacité à travers les espaces L^p

Afin de prouver les propositions d'existence lorsque $W_{\mathbb{Z}}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) \neq \emptyset$ (propositions 1.1 et 1.2), nous allons utiliser la méthode directe du calcul des variations. A cette fin, nous notons que la seule modification à faire par rapport au cas classique ($\mathcal{N} = \mathbb{R}^v$) est de montrer que les suites bornées au sens décrit ci-dessous (1.7) admettent une sous-suite qui converge vers un élément de $W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$. La preuve n'implique pas de restriction sur l'exposant; c'est pourquoi, nous l'écrivons pour $p \in [1, \infty[$.

Commençons par un résultat de compacité.

Proposition 1.3 (Existence d'une sous-suite convergente dans $W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$). *Fixons $p \in]1, \infty[$ et une suite croissante $(p_n)_n$ telle que $p_n \in]1, \infty[$ et $p_n \uparrow p$. Considérons une suite $(u_n)_n$ telle que*

$$c = \sup_n \int_{\Omega} |u_n|^{p_n} + |Du_n|^{p_n} < +\infty \quad (1.7)$$

alors il existe $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ et une sous-suite de (n) telle que u_{n_k} converge en mesure vers u ,

$$\int_{\Omega} |u_{n_k} - u|^{p_n} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} |Du|^p \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Du_{n_k}|^{p_k} \quad (1.8)$$

Esquisons la preuve que nous présentons en détail dans la section qui suit : nous commençons par montrer la convergence de gauche de (1.8). Pour cela, nous nous réduisons au cas de la dimension finie en projetant la suite (u_n) sur un espace de dimension finie par moyennisation (lemme 1.4). Ensuite, nous utilisons la caractérisation duale de la dérivée faible (lemme 1.8) afin de prouver l'existence de la dérivée faible (proposition 1.7) et la limite qu'elle satisfait en (1.8).

Réduction à la dimension finie

Nous allons utiliser le lemme suivant qui approxime les fonctions de Sobolev par des fonctions constantes par morceaux par moyennisation sur un pavage du plan. Toute fonction intégrable peut être approximée par des fonctions qui prennent un nombre fini de valeurs. Toutefois l'hypothèse $u \in W^{1,p}(\Omega)$ permet de contrôler quantitativement l'approximation par le gradient.

Lemme 1.4 (Lemme d'approximation par moyennisation). *Nous supposons $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ borné et convexe. Pour tout $\epsilon > 0$, il existe un espace vectoriel de dimension finie $V_{\epsilon} \subset L^1(\Omega)$ engendré par une collection finie de fonctions caractéristiques d'ouverts disjoints et un opérateur $P_{\epsilon} : L^1(\Omega) \rightarrow V_{\epsilon}$ qui satisfait pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega)$, $p \geq 1$,*

$$\int_{\Omega} |P_{\epsilon}u|^p \leq \int_{\Omega} |u|^p \quad \text{et} \quad \int_{\Omega} |P_{\epsilon}u - u|^p \leq \epsilon^p \frac{2^{2(p+1)}}{p+1} \int_{\Omega} |Du|^p. \quad (1.9)$$

L'hypothèse de convexité sur le domaine Ω s'explique par l'emploi d'une inégalité de Poincaré [64, Proposition 3.22][38, Theorem 8.11] :

$$\int_{\Omega} \int_{\Omega} |u(x) - u(y)|^p dx dy \leq \frac{2^{2+p}}{p+1} (\text{diam}(\Omega))^p \int_{\Omega} |Du|^p \quad (1.10)$$

valide pour les ouverts $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ bornés et convexes et les fonctions $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^{\nu})$. La preuve adapte un argument de [64, Proposition 3.26][24, Theorem 7.1]. Rappelons la notation moyenne :

$$\int_{\Omega} f = \int_{\Omega} f(x) \frac{dx}{|\Omega|}. \quad (1.11)$$

Démonstration du lemme 1.4. Fixons $\epsilon > 0$. Il existe une famille dénombrable d'ouverts convexes Q_ϵ telle que les ouverts sont deux-à-deux disjoints et

$$\mathbb{R}^2 = \bigcup_{Q \in \mathcal{Q}} \bar{Q} \quad \text{et} \quad \text{diam}(Q) \leq 2\epsilon.$$

Par exemple, $Q_\epsilon = \{Q(a, \epsilon/\sqrt{2}) : a = (\sqrt{2}\epsilon m, \sqrt{2}\epsilon n), m, n \in \mathbb{N}\}$ consiste en tous les carrés de côtés $\sqrt{2}\epsilon$. Notons Q_ϵ^Ω , la collection (finie) d'ouverts qui intersectent Ω . On considère alors l'opérateur $P_\epsilon : L^p(\Omega, \mathcal{N}) \rightarrow L^p(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ défini pour tout $u \in L^p(\Omega, \mathcal{N})$ par

$$x \in \mathbb{R}^2 \mapsto P_\epsilon u(x) = \begin{cases} \int_{\Omega \cap Q} u & \text{si } x \in Q(a, \epsilon) \in Q_\epsilon^\Omega \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vérifions que $P_\epsilon u \in L^p(\mathbb{R}^2)$ dès que $u \in L^p(\Omega)$. Par l'additivité de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |P_\epsilon u|^p &= \sum_{Q \in Q_\epsilon^\Omega} \int_{\Omega \cap Q} |P_\epsilon u|^p \\ &= \sum_{Q \in Q_\epsilon^\Omega} |\Omega \cap Q| \left| \int_{\Omega \cap Q} u \right|^p = \sum_{Q \in Q_\epsilon^\Omega} |\Omega \cap Q|^{1-p} \left| \int_{\Omega \cap Q} u \right|^p \end{aligned}$$

Par l'inégalité de Hölder,

$$|\Omega \cap Q|^{1-p} \left| \int_{\Omega \cap Q} u \right|^p \leq \int_{\Omega \cap Q} |u|^p.$$

Ainsi,

$$\int_{\Omega} |P_\epsilon u|^p \leq \int_{\Omega} |u|^p.$$

D'autre part, en vue de montrer la seconde inégalité de (1.9),

$$\int_{\Omega} |P_\epsilon u - u|^p = \sum_{Q \in Q_\epsilon^\Omega} \int_{\Omega \cap Q} |P_\epsilon u - u|^p = \sum_{Q \in Q_\epsilon^\Omega} \int_{\Omega \cap Q} \left| \int_{\Omega \cap Q} u(x) dx - u(y) \right|^p dy.$$

Par les inégalités de Hölder et Poincaré,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega \cap Q} \left| \int_{\Omega \cap Q} u(x) - u(y) \, dx \right|^p \, dy &\leq \int_{\Omega \cap Q} \int_{\Omega \cap Q} |u(x) - u(y)|^p \, dx \, dy \\ &\leq \frac{2^{2+p} - 2}{2 + p - 1} \text{diam}(\Omega \cap Q)^p \int_{\Omega \cap Q} |Du|^p \\ &\leq \frac{2^{2+p} - 2}{p + 1} (2\epsilon)^p \int_{\Omega \cap Q} |Du|^p. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\int_{\Omega} |P_{\epsilon}u - u|^p \leq \epsilon^p \frac{2^{2(p+1)}}{p+1} \sum_{Q \in \mathcal{Q}_{\epsilon}^{\Omega}} \int_{\Omega \cap Q} |Du|^p = \epsilon^p \frac{2^{2(p+1)}}{p+1} \int_{\Omega} |Du|^p.$$

Nous définissons V_{ϵ} comme l'espace vectoriel engendré par la collection finie de fonctions caractéristiques : $\{\chi_{\Omega \cap Q} : Q \in \mathcal{Q}_{\epsilon}^{\Omega}\}$; cette collection est libre. L'espace V_{ϵ} est donc de dimension finie. \square

Notons la généralité du pavage du plan dans la démonstration précédente.

Lemme 1.5 (Existence en dimension finie). *Fixons $p \in]1, \infty[$, une suite croissante $(p_n)_n$ telle que $p_n \in]1, \infty[$ et $p_n \rightarrow p$ et $\epsilon > 0$. Avec les notations du lemme 1.4, supposons que*

$$c = \sup_n \int_{\Omega} |P_{\epsilon}u_n|^{p_n} < +\infty. \quad (1.12)$$

Alors, il existe $v \in V_{\epsilon}$ et une sous-suite de (u_n) qui satisfait

$$\int_{\Omega} |P_{\epsilon}u_{n_k} - v|^{p_k} \xrightarrow{k \rightarrow \infty} 0.$$

Démonstration du lemme 1.5. Comme V_{ϵ} est de dimension finie, il existe des $\alpha_i^{(n)}$ tels que

$$P_{\epsilon}u_n = \sum_{i=1}^{\dim V_{\epsilon}} \alpha_i^{(n)} \chi_{\Omega \cap Q_i}.$$

Ainsi, comme les $\Omega \cap Q_i$ sont disjoints

$$c = \sup_n \int_{\Omega} |P_{\epsilon}u_n|^{p_n} = \sup_n \sum_{i=1}^{\dim V_{\epsilon}} |\alpha_i^{(n)}|^{p_n} |\Omega \cap Q_i|.$$

Nous concluons la preuve en invoquant le théorème de Bolzano–Weierstrass qui assure l’existence de α_i limites des suites bornées (α_i^n) , ce qui permet de poser

$$v = \sum_{i=1}^{\dim V_\epsilon} \alpha_i \chi_{\Omega \cap Q_i}. \quad \square$$

Preuve de la proposition 1.3 d’existence d’une sous-suite convergente quand $p_n \uparrow p$

Nous procédons en deux temps. Tout d’abord, on obtient la proposition suivante qui donne l’existence de la limite et la convergence (1.8). Nous la pensons comme un analogue non-linéaire du théorème de compacité de Rellich–Kondrachov (pour le cas linéaire, [67, Theorem 6.4.6], [10, Theorem 9.16]). Ensuite, nous nous tournerons vers la convergence du gradient.

Proposition 1.6 (Preuve de la proposition 1.3 – Partie I : Existence d’une sous-suite convergente dans L^{p_n}). *Considérons un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ borné et régulier. Fixons $p \in]1, \infty[$ et une suite croissante $(p_n)_n$ telle que $p_n \in]1, \infty[$ et $p_n \uparrow p$. Considérons une suite $(u_n)_n$ telle que $u_n \in W^{1,p_n}(\Omega, \mathcal{N})$ qui satisfait*

$$c = \sup_n \int_{\Omega} |u_n|^{p_n} + |Du_n|^{p_n} < +\infty \quad (1.13)$$

alors il existe $u \in L^p(\Omega, \mathcal{N})$ et une sous-suite de (u_{n_k}) telle que u_{n_k} converge en mesure vers u et

$$\int_{\Omega} |u_{n_k} - u|^{p_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0. \quad (1.14)$$

Démonstration de la proposition 1.6. Nous pouvons supposer que Ω est convexe. En effet, si Ω n’est pas convexe, on prolonge chaque u_n par une fonction $\bar{u}_n : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^v$ telle que $u_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^v)$ et u_n est à support compact [37, Theorem 13.17]. De plus, nous avons encore 1.19. L’existence d’un tel prolongement est garanti par le fait que l’ouvert est régulier. De plus, $\bar{u}_n|_{\Omega} = u_n$. Après, comme Ω est borné, il est contenu dans une boule de large rayon qu’on considère comme l’ensemble convexe désiré.

Fixons $\epsilon > 0$. Par le lemme d’approximation (lemme 1.4), il existe un opérateur P_ϵ et un espace vectoriel de dimension finie V_ϵ tel que pour chaque n , $P_\epsilon u_n \in V_\epsilon$. En particulier, par (1.9) et notre hypothèse (1.19),

$$\sup_n \int_{\Omega} |P_\epsilon u_n|^p \leq c. \quad (1.15)$$

Par le lemme 1.5, il existe v tel que, quitte à considérer une sous-suite de (u_n) , nous avons

$$\int_{\Omega} |P_\epsilon u_{n_k} - v|^{p_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} 0.$$

Par l'inégalité triangulaire pour tout $m \leq n$,

$$\begin{aligned} \|u_n - u_m\|_{L^{p_m}(\Omega)} &\leq \|u_n - P_\epsilon u_n\|_{L^{p_m}(\Omega)} + \|P_\epsilon u_n - v\|_{L^{p_m}(\Omega)} \\ &\quad + \|v - P_\epsilon u_m\|_{L^{p_m}(\Omega)} + \|P_\epsilon u_m - u_m\|_{L^{p_m}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (1.16)$$

Comme la suite $(p_n)_n$ est croissante, les termes aux extrémités du membre de gauche de (1.16) sont majorés par l'inégalité de Hölder et (1.9) :

$$\begin{aligned} \|u_n - P_\epsilon u_n\|_{L^{p_m}(\Omega)} + \|P_\epsilon u_m - u_m\|_{L^{p_m}(\Omega)} \\ \leq \epsilon \sup_m (|\Omega|^{\frac{1}{p_m} - \frac{1}{p_n}} + 1)^{p_n} \sqrt{\frac{2^{2(p_n+1)}}{p_n + 1}} \|Du_n\|_{L^{p_n}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Par notre hypothèse (1.7), le membre de droite est uniformément borne en m, n par un multiple de ϵ . Les termes centraux de (1.16), $\|P_\epsilon u_n - v\|_{L^{p_m}(\Omega)}$ et $\|v - P_\epsilon u_m\|_{L^{p_m}(\Omega)}$, peuvent être majorés par

$$\begin{aligned} \|P_\epsilon u_n - v\|_{L^{p_m}(\Omega)} + \|v - P_\epsilon u_m\|_{L^{p_m}(\Omega)} \\ \leq |\Omega|^{\frac{1}{p_m} - \frac{1}{p_n}} \|P_\epsilon u_n - v\|_{L^{p_n}(\Omega)} + \|v - P_\epsilon u_m\|_{L^{p_m}(\Omega)}. \end{aligned} \quad (1.18)$$

En combinant (1.16), (1.17) et (1.18), on observe que pour tout $\eta > 0$, il existe $N > 0$ tel que si $m, n \geq N$, alors

$$|\Omega|^{\frac{1}{p_m} - 1} \|u_n - u_m\|_{L^1(\Omega)} \leq \|u_n - u_m\|_{L^{p_m}(\Omega)} \leq \eta.$$

Donc u_n est de Cauchy dans L^1 , appelons u sa limite. Cela implique que la suite u_n converge en mesure vers u . Par le lemme de Fatou,

$$\|u - u_m\|_{L^{p_m}(\Omega)} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u_m\|_{L^{p_m}(\Omega)} \leq \eta,$$

montrant ainsi la convergence de la suite (u_n) annoncée en (1.14). \square

Pour la limite inférieure que satisfait la suite des gradient, nous suivons WILLEM [67, Theorem 6.1.7].

Proposition 1.7 (Preuve de la proposition 1.3 – Partie II : existence de la dérivée faible). *Fixons $p \in]1, \infty[$ et une suite croissante $(p_n)_n$ telle que $p_n \in]1, \infty[$ et $p_n \rightarrow p$. Considérons une suite $(u_n)_n$ telle que $u_n \in W^{1, p_n}(\Omega, \mathcal{N})$ qui satisfait*

$$c = \sup_n \int_{\Omega} |Du_n|^{p_n} < +\infty \quad (1.19)$$

et $u_n \rightarrow u$ dans L^1_{loc} . Alors, u admet une dérivée faible $Du \in L^p$ qui satisfait

$$\int_{\Omega} |Du|^p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Du_n|^{p_n}$$

Par la monotonie de l'intégrale, notons que l'hypothèse (1.19) implique pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$ que

$$c = \sup_n \int_{\omega} |Du_n|^{p_n}$$

et donc par la proposition 1.7 nous obtenons pour tout ouvert $\omega \subset \Omega$

$$\int_{\omega} |Du|^p \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\omega} |Du_n|^{p_n}.$$

Rappelons que par le théorème de représentation de FRÉCHET–RIESZ–KOLMOGOROV, nous pouvons montrer le lemme suivant [22, Theorem 1.37][37, Theorem 11.62].

Lemme 1.8 (Caractérisation de la dérivée faible par dualité). *Fixons $1 < p < \infty$. Une fonction $u \in L^1_{\text{loc}}(\Omega, \mathbb{R}^v)$ admet un gradient faible $Du \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^v)$ si et seulement s'il existe $A > 0$ tel que, pour chaque $\varphi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^v)$ à support compact dans Ω ,*

$$\left| \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \right| \leq A^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |\varphi|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

De plus, dans ce cas,

$$\int_{\Omega} |Du|^p \leq A. \tag{1.20}$$

La preuve de la proposition 1.7 consiste alors à montrer que l'on peut choisir

$$A = \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Du_n|^{p_n},$$

qui est borné par l'hypothèse (1.19).

Démonstration de la proposition 1.7. Nous observons que pour chaque $\varphi \in C^\infty(\Omega, \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^\nu)$ à support compact dans Ω ,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} u \operatorname{div} \varphi \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} u_n \operatorname{div} \varphi \right| \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \int_{\Omega} \langle Du_n, \varphi \rangle \right| \\ &\leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |Du_n|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p_n}} \left(\int_{\Omega} |\varphi|^{p'_n} \right)^{\frac{1}{p'_n}} \\ &= \left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Du_n|^{p_n} \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{\Omega} |\varphi|^{p'} \right)^{\frac{1}{p'}}, \end{aligned}$$

où l'on a utilisé la continuité de la norme. Par la caractérisation duale des espaces de Sobolev linéaires (lemme 1.8), u admet un gradient faible $Du \in L^p$ qui satisfait, par (1.20),

$$\int_{\Omega} |Du|^p \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |Du_n|^{p_n}$$

donnant ainsi la conclusion désirée pour le gradient. □

1.2 Approximation par presque-minimiseurs

Pour montrer la proposition 1.2 qui assure que les suites de presque-minimiseurs admettent une sous-suite convergente, nous allons utiliser l'inégalité de Hanner dans les cas où $p \leq 2$: pour toutes fonctions $v, w \in L^p(\Omega)$, (*confer* HANNER [30, Theorem 4.1.9 (c)], WILLEM [67, Theorem 4.1.9 (c)] ou la démonstration plus classique chez LIEB et LOSS [38, Theorem 2.5]) :

$$\begin{aligned} \|v + w\|_{L^p(\Omega)}^p + \|v - w\|_{L^p(\Omega)}^p \\ \geq (\|v\|_{L^p(\Omega)} + \|w\|_{L^p(\Omega)})^p + \left| \|v\|_{L^p(\Omega)} - \|w\|_{L^p(\Omega)} \right|^p. \end{aligned} \quad (1.21)$$

La continuité de la norme combinée à cette inégalité jouent le rôle de convexité uniforme pour la notion de convergence d'intérêt dans ce problème.

Démonstration de la proposition 1.2. On commence par montrer que les suites de presque-minimiseurs de l'énoncé satisfont les suites u_n telles que

$$\sup_n \int_{\Omega} |Du_n|^{p_n} < +\infty. \quad (1.22)$$

Posons pour cela

$$I_p = \inf \left\{ \int_{\Omega} \frac{|Dv|^p}{p} : v \in W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N}), \text{Trace}_{\partial\Omega} v = g \right\}$$

et considérons la fonction

$$u_0 \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) \subset W^{1,p_n}(\Omega, \mathcal{N})$$

qui satisfait $\text{Trace}_{\partial\Omega} u_0 = g$ donnée par hypothèse. Dès lors, la queue de la suite (u_n) satisfait

$$\int_{\Omega} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} \leq I_2 + 1 \leq \int_{\Omega} \frac{|Du_0|^{p_n}}{p_n} + 1$$

Comme $u_0 \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$, l'inégalité de Hölder montre donc (1.22).

Par une inégalité de Poincaré, comme u_n et u_0 ont la même trace, nous avons que

$$\sup_n \int_{\Omega} |u_n|^{p_n} + |Du_n|^{p_n} < +\infty. \quad (1.23)$$

Par la proposition d'existence d'une sous-suite convergente 1.3 appliquée aux suites (p_n) et (u_n) , on obtient l'existence d'un $u^* \in W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ et d'une sous-suite qui satisfait

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_{n_k} - u^*|^{p_k} = 0,$$

qui est le premier résultat de convergence annoncé. Dans la suite nous notons la sous-suite (u_n) .

Par la propriété 1.7 appliquée à $u_n + u^*$, on a

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \|Du_n + Du^*\|_{L^{p_n}(\Omega)}^{p_n} \geq 4 \|Du^*\|_{L^2(\Omega)}^2 \geq 8I_2. \quad (1.24)$$

Dans l'inégalité de Hanner, (1.21), nous choisissons $v = Du_n + Du^*$ et $w = Du_n - Du^*$, ce qui donne

$$\begin{aligned} 2^{p_n} (\|Du_n\|_{L^{p_n}(\Omega)}^{p_n} + \|Du^*\|_{L^{p_n}(\Omega)}^{p_n}) &\geq \\ &(\|Du_n + Du^*\|_{L^{p_n}(\Omega)} + \|Du_n - Du^*\|_{L^{p_n}(\Omega)})^{p_n} \\ &+ \left| \|Du_n + Du^*\|_{L^{p_n}(\Omega)} - \|Du_n - Du^*\|_{L^{p_n}(\Omega)} \right|^{p_n}. \end{aligned} \quad (1.25)$$

D'une part, par l'hypothèse (1.1) et la continuité de la norme,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} 2^{p_n} (\|Du_n\|_{L^{p_n}(\Omega)}^{p_n} + \|Du^*\|_{L^{p_n}(\Omega)}^{p_n}) \leq 2^2 ((2 \liminf_{n \rightarrow \infty} I_{p_n})^2 + \|Du^*\|_{L^2(\Omega)}^2).$$

D'autre part, par (1.24), la limite supérieure du membre de gauche de (1.25) est minorée par

$$\begin{aligned} & \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Du_n + Du^*\|_{L^{p_n}(\Omega)} \right)^2 + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Du_n - Du^*\|_{L^{p_n}(\Omega)}^2 \\ & \quad + \left| \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Du_n - Du^*\|_{L^{p_n}(\Omega)} - \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Du_n + Du^*\|_{L^{p_n}(\Omega)} \right|^2 \\ & \geq 8\|Du^*\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Du_n - Du^*\|_{L^{p_n}(\Omega)} \right)^2 + 0, \quad (1.26) \end{aligned}$$

où le zéro correspond à la simplification du double produit. Pour échanger les limites inférieures et supérieures avec les parenthèses, nous avons considéré la sous-suite qui réalise toutes les limite inférieures et supérieures de sorte à uniquement traiter des limites classiques.

Ainsi,

$$2^2(4(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I_{p_n})^2 + \|Du^*\|_{L^2(\Omega)}^2) \geq 8\|Du^*\|_{L^2(\Omega)}^2 + 2\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Du_n - Du^*\|_{L^{p_n}(\Omega)} \right)^2.$$

Par la semi-continuité supérieure de I_{p_n} (confer la limite (1.4)) et du fait que u^* est admissible dans l'infimum,

$$\begin{aligned} \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Du_n - Du^*\|_{L^{p_n}(\Omega)} \right)^2 & \leq 8\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I_{p_n} \right)^2 - 2\|Du^*\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq 8\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I_{p_n} \right)^2 - 2\|Du^*\|_{L^2(\Omega)}^2 \leq 8I_2^2 - 2\|Du^*\|_{L^2(\Omega)}^2 \\ & \leq 2\|Du^*\|_{L^2(\Omega)}^2 - 2\|Du^*\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0. \quad (1.27) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Du_n - Du^*\|_{L^{p_n}(\Omega)} = 0 \quad \text{et} \quad I_2 = \int_{\Omega} \frac{|Du^*|^2}{2}$$

puisque les inégalités de (1.27) sont en fait des égalités. Par conséquent, nous avons prouvé (1.2) ainsi que les deux premières convergences annoncées par l'énoncé. Pour la convergence presque partout de Du_n , nous remarquons que la limite précédente implique de la convergence dans L^1 et donc par la réciproque partielle du théorème de convergence dominée de Lebesgue [67, Proposition 4.2.10], nous déduisons qu'une sous-suite de Du_n converge presque partout vers Du_* . Enfin, la convergence des infima suit de la seconde (in)égalité qui assure que

$$8\left(\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I_{p_n} \right)^2 - 2\|Du^*\|_{L^2(\Omega)}^2 = 8\left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} I_{p_n} \right)^2 - 2\|Du^*\|_{L^2(\Omega)}^2 = 8I_2^2 - 2\|Du^*\|_{L^2(\Omega)}^2,$$

concluant ainsi la preuve. □

Nous prouvons maintenant l'existence de minimiseurs pour l'énergie de Dirichlet (proposition 1.1) comme conséquence de la proposition 1.2.

Démonstration de la proposition 1.1. Les suites minimisantes de l'énergie de Dirichlet satisfont par une inégalité de Poincaré l'hypothèse 1.1 de la proposition 1.2 avec la suite constante $p_n = 2$. □

1.2.1 Conclusion

La preuve précédente de l'existence d'une sous-suite (proposition 1.3) a l'avantage de ne pas se reposer sur la convergence faible qui est une notion linéaire. Dans la section suivante, nous discutons de la convergence que satisfait la sous-suite de $(u_n)_n$ dans la conclusion des propositions 1.2 et 1.3.

Chapitre 2

Intermezzo : convergence à travers les L^p

Dans le chapitre précédent, nous avons observé que la condition

$$\int_{\Omega} |u_n - u|^{p_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

est récurrente. Nous nous proposons de brièvement l'étudier et de la définir.

Le premier chapitre se place dans un cadre non-linéaire et évite les référence à la convergence faible qui est une notion très linéaire. Si, toutefois, on s'autorise à utiliser une telle notion alors il est possible de montrer la proposition suivante qui permet de déduire partiellement la conclusion de la proposition 1.3.

Proposition 2.1 (Convergence faible des suite bornées à travers les L^p). *Fixons $(p_n)_n$ une suite réelle croissante telle que pour chaque n , $p_n \in]1, 2]$ et $\lim_{n \rightarrow \infty} p_n = p$. Supposons qu'une suite $v_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ satisfait*

$$c = \sup_n \int_{\Omega} |v_n|^{p_n} < +\infty$$

alors il existe $v \in L^p(\Omega)$ tel que pour toute $\phi : \Omega \rightarrow \mathcal{N}$ lisses alors

$$\int_{\Omega} \phi v_{n_k} \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} v \phi.$$

De plus,

$$\int_{\Omega} |v|^p \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |v_{n_k}|^{p_k}. \quad (2.1)$$

La queue de la suite est bornée dans $L^q(\Omega)$, $q \in]1, p]$ si bien qu'elle admet une sous-suite qui converge faiblement dans L^q . L'expression (2.1) s'obtient par dualité.

Le résultat qui précède et le premier chapitre motivent la définition suivante.

Définition 2.2 (Convergence à travers les L^p). Une suite $(u_n)_n$ converge à travers les $L^p(\Omega, \mathcal{N})$ relativement à une suite croissante (p_n) , $p_n \in [1, \infty[$ qui converge vers $p \in [1, \infty[$ s'il existe $u \in L^p(\Omega, \mathcal{N})$ tel que $u_n \rightarrow u$ en mesure et

$$\int_{\Omega} |u_n|^{p_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u|^p.$$

Si $(p_n)_n$ est une suite croissante comme dans la définition, la suite constante $u \in L^p$ converge à travers les L^p par la continuité de la norme. Avec ce formalisme, la proposition 2.1 précédente s'interprète comme de la convergence faible formelle. L'avantage de décomposer la convergence en une convergence mesurable et une convergence en norme est que cela évite de comparer les valeurs de u et de u_n avec la norme euclidienne $|\cdot|$ héritée du plongement $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^v$; la convergence en mesure a été retenue plutôt que la convergence presque partout car la topologie de la convergence en mesure est métrisable.

Penchons-nous sur quelques définitions équivalentes.

Proposition 2.3 (Formulations équivalentes de la convergence à travers les L^p). *Considérons $(u_n)_n$ une suite de fonctions mesurables, définies sur un ouvert de mesure finie Ω vers $u \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^v)$ pour chaque n . Aussi, considérons une suite réelle $(p_n)_n \subset [1, +\infty[$ croissante et qui tend vers $p \geq 1$. Alors, les conditions suivantes sont équivalentes :*

- (a) $\int_{\Omega} |u_n|^{p_n} \rightarrow \int_{\Omega} |u|^p$ et $u_n \rightarrow u$ en mesure.
- (b) $\int_{\Omega} |u_n - u|^{p_n} \rightarrow 0$.
- (c) $\int_{\Omega} |u_n |u_n|^{\frac{p_n}{p}-1} - u|^p \rightarrow 0$ et $u_n \rightarrow u$ en mesure.
- (d) $\int_{\Omega} |u_n |u_n|^{p_n-p} - u |u|^{p_n-p}|^{(\frac{p_n}{p-1})'} \rightarrow 0$, où $(\frac{p_n}{p-1})' = \frac{p_n}{p_n-p+1}$ et $u_n \rightarrow u$ en mesure.

La condition (b) implique la convergence en mesure par l'inégalité de Tchebychev. Quand $p = 2$, la condition (d) se lit

$$\int_{\Omega} |u_n |u_n|^{p_n-2} - u |u|^{p_n-2}|^{p'_n} \rightarrow 0$$

où p'_n est l'exposant de Hölder conjugué à p_n . Dans l'énoncé de la proposition 2.3, nous avons utilisé la convention, que pour $\alpha < 0$,

$$u |u|^\alpha(x) = \begin{cases} u(x) |u(x)|^\alpha & \text{si } u(x) \neq 0 \\ 0 & \text{si } u(x) = 0. \end{cases}$$

L'équivalence entre le point (a) et (b) est à comparer avec la caractérisation de la convergence en norme L^p [67, Proposition 4.2.6][7, Theorem 2.8.9].

Nous adaptons, dans la preuve de la proposition 2.3, le lemme de Brezis–Lieb [12] qui donne des équivalences quantitatives. La preuve utilisera toutefois la méthode de WILLEM [67, Theorem 4.2.7]; la constante explicite est due à LIEB et LOSS [38, Theorem 1.9]. Par exemple, plutôt que de prouver l'équivalence entre (a) et (b), nous prouvons, sous l'hypothèse de la convergence en mesure et d'une borne uniforme sur la suite u_n que

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} |u_n|^{p_n} - \int_{\Omega} |u_n - u|^{p_n} - \int_{\Omega} |u|^p \right]. \quad (2.2)$$

Comme p_n varie, il convient d'expliciter les constantes que la démonstration classique utilise. On commence par démontrer une inégalité algébrique :

Lemme 2.4 (Inégalité algébrique du lemme de Brézis–Lieb). *Fixons $\epsilon > 0$. Si $1 < p < \infty$, alors pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,*

$$||a + b|^p - |a|^p - |b|^p| \leq \epsilon |b|^p + c(p, \epsilon) |a|^p$$

où

$$c(p, \epsilon) = \begin{cases} 1 & \text{si } p = 1 \\ \max \left((1 - (1 + \epsilon)^{-\frac{1}{p-1}})^{1-p} - 1, \left(\frac{p-1}{\epsilon} \right)^{\frac{p^2}{p-1}} + 1 \right) & \text{si } p > 0. \end{cases}$$

L'avantage d'expliciter la constante $c(p, \epsilon)$ est que si $(p_n)_n$ est une suite telle $p_n \in [1, p]$ alors on vérifie que

$$C(p, \epsilon) = \sup_n c(p_n, \epsilon) < +\infty. \quad (2.3)$$

Démonstration du lemme 2.4. Quand $p = 1$, cela suit de l'inégalité triangulaire. Quand $p > 1$, par la convexité de $|\cdot|^p$, pour $0 < t < 1$

$$|a + b|^p \leq (|a| + |b|)^p = \left((1-t) \frac{|a|}{1-t} + t \frac{|b|}{t} \right)^p \leq (1-t)^{1-p} |a|^p + t^{1-p} |b|^p.$$

Nous posons alors

$$t = \frac{1}{(1 + \epsilon)^{\frac{1}{p-1}}},$$

ce qui donne

$$|a + b|^p - |b|^p \leq \epsilon |b|^p + c(p, \epsilon) |a|^p.$$

Pour l'autre inégalité, nous observons par la convexité et la différentiabilité de $|\cdot|^p$,

$$|a + b|^p \geq |b|^p + \langle p|b|^{p-2}b, a + b - b \rangle.$$

Donc, par l'inégalité de Young,

$$|b|^p - |a + b|^p \leq p \left[\sqrt[p-1]{\frac{\epsilon}{p-1}} |b|^{p-1} \right] \cdot \sqrt[p-1]{\frac{p-1}{\epsilon}} |a| \leq \epsilon |b|^p + \left(\frac{p-1}{\epsilon} \right)^{\frac{p-2}{p-1}} |a|^p. \quad \square$$

La preuve de la proposition 2.3 fait usage du lemme de Fatou pour la convergence en mesure.

Lemme 2.5 (Lemme de Fatou pour la convergence en mesure). *Considérons une suite de fonctions mesurables $(u_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^v)$ qui converge en mesure vers $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^v$ alors*

$$\int_{\Omega} |u| \leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n|.$$

Nous donnons une preuve basée sur la représentation en millefeuille (n.t. de *layer cake representation*; *confer* (2.4)) des fonctions intégrables et la version du lemme de Fatou pour la convergence presque partout qui a l'avantage de ne pas considérer des sous-suites (*confer* BOGACHEV [7, Theorem 2.8.5.]

Démonstration du lemme 2.5. Par la convergence en mesure, pour tout $t > 0$,

$$|\{x \in \Omega : |u_n|(x) \geq t\}| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} |\{x \in \Omega : |u|(x) \geq t\}|.$$

Nous remarquons que l'intégrale toute fonction intégrable $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^v$ s'écrit

$$\int_{\Omega} |v| = \int_0^{\infty} |\{x \in \Omega : |v|(x) \geq t\}| dt. \quad (2.4)$$

Cette identité s'obtient en la vérifiant à la main pour les fonctions qui prennent un nombre fini de valeurs, lesquelles forment une partie dense des fonctions intégrables. Ainsi, par le lemme de Fatou pour la convergence ponctuelle,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |u| &= \int_0^{\infty} |\{x \in \Omega : |u|(x) \geq t\}| dt \\ &\leq \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} |\{x \in \Omega : |u_n|(x) \geq t\}| dt = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n|. \end{aligned} \quad \square$$

Nous disposons maintenant de tous les ingrédients de la preuve.

Démonstration de la proposition 2.3. Nous notons que les conditions (a)–(d) impliquent la convergence en mesure de la suite u_n et, par l'inégalité de Hölder, que

$$c = \sup_n \int |u_n|^{p_n}.$$

Par le lemme 2.5 de Fatou,

$$\int_{\Omega} |u|^p \leq c.$$

Fixons $\epsilon > 0$. Par le lemme 2.4 algébrique, où l'on choisit $a = u_n - u$ et $b = u$ et $p = p_n$, on déduit du lemme 2.5 de Fatou que

$$\begin{aligned} (\lim_{n \rightarrow \infty} c(p_n, \epsilon)) \int_{\Omega} |u|^p &\leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \epsilon |u_n - u|^{p_n} + c(p_n, \epsilon) |u|^p \\ &\quad + \left| |u_n|^{p_n} - |u_n - u|^{p_n} - |u|^p \right| dx \\ &\leq 2^p c \epsilon + (\lim_{n \rightarrow \infty} c(p_n, \epsilon)) \int_{\Omega} |u|^p \\ &\quad - \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| |u_n|^{p_n} - |u_n - u|^{p_n} - |u|^p \right| dx. \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \left| |u_n|^{p_n} - |u_n - u|^{p_n} - |u|^p \right| dx \leq 2^p c \epsilon,$$

ce qui montre (2.2) par le fait que le nombre $\epsilon > 0$ est arbitraire et donc l'équivalence entre (a) et (b) est démontrée.

Pour montrer l'équivalence (a)–(c), il suffit de démontrer.

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} |u_n|^{p_n} - \int_{\Omega} |u_n| |u_n|^{\frac{p_n}{p} - 1} - u|^p - \int_{\Omega} |u|^p \right]$$

et pour (a)–(d),

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} |u_n|^{p_n} - \int_{\Omega} |u_n| |u_n|^{p_n - p} - u |u|^{p_n - p} \left| \frac{p_n}{p-1} \right|' - \int_{\Omega} |u|^p \right].$$

Pour l'équivalence (a)–(c), on choisit dans le lemme algébrique

$$a = u_n |u_n|^{\frac{p_n}{p} - 1} - u, \quad b = u \quad \text{et} \quad p = p$$

et pour l'équivalence (a)–(d),

$$a = u_n |u_n|^{p_n - p} - u |u|^{p_n - p}, \quad b = u |u|^{p_n - p} \quad \text{et} \quad p = \left(\frac{p_n}{p-1} \right)'$$

et nous procédons comme plus haut. □

Conclusion

En résumé, la convergence à travers les L^p est une notion qui permet de décrire la convergence du problème que nous étudions, admet des reformulations proches du cas où la suite p_n est constante et en constitue une généralisation. Dans la suite, nous emploierons le vocabulaire présenté ici mais pas les résultats. La proposition essentielle étant celle qui assure l'existence d'une sous-suite convergente à travers les L^p (proposition 1.3).

Chapitre 3

Homotopie dans un cadre non-continu

Le premier chapitre fait l'hypothèse forte (proposition 1.1 et 1.2) que pour $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$, l'ensemble des fonctions $W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ de trace g est non vide sous la forme équivalente qu'il existe

$$u_0 \in W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}). \quad (3.1)$$

Nous nous intéressons donc au problème d'extension d'une fonction depuis le bord d'un domaine de dimension 2 à tout l'intérieur de ce dernier qui aurait ses valeurs dans la variété compacte \mathcal{N} . Par exemple, existe-t-il une fonction de la boule unité $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^2$ vers le cercle, $\mathbb{B} \rightarrow \mathbb{S}^1$, dont la restriction au bord serait

$$\partial\mathbb{B} = \mathbb{S}^1 \ni x \mapsto x?$$

Ce problème est bien compris en topologie dans une discipline appelée *théorie de l'homotopie* et la réponse est négative, montrant ainsi que l'hypothèse (3.1) n'est pas toujours satisfaite. La théorie classique de l'homotopie suppose les fonctions continues. Toutefois, le problème variationnel que nous étudions nous oblige à penser ce problème d'extension pour des fonctions de Sobolev, dont l'énergie

$$\int_{\Omega} \frac{|Du|^2}{2}$$

est finie et, par conséquent, l'homotopie dans un cadre qui n'est pas seulement continu. En effet, les fonctions de Sobolev peuvent présenter des discontinuités. Par exemple, la fonction

$$x \in \mathbb{B} \mapsto (\cos(\ln|x|)^\alpha, \sin(\ln|x|)^\alpha)$$

n'est pas continue quand $\alpha > 0$. Elle a toutefois un gradient faible sur \mathbb{B} qui est de carré intégrable dès que l'on impose $\alpha < 1/2$. En effet, nous pouvons calculer que

$$\int_{\mathbb{B}} |Du|^2 = \frac{2\pi\alpha^2}{2\alpha - 1} \int_0^1 \frac{d}{dr} (\ln r)^{2\alpha-1} dr$$

qui est fini par le choix de α .

Ainsi, nous allons présenter une extension de la théorie de l'homotopie à une classe de fonctions non continues. La première partie de ce chapitre y est dédiée. Nous y intro-

duisons une nouvelle classe de fonctions qui contient tant les fonctions continues que les fonctions de Sobolev lorsque $p \geq 2$: il s'agit des fonctions à *oscillation moyenne évanescente*.

La contrainte non-linéaire du problème que nous étudions —le fait que les fonctions prennent des valeurs dans une variété— nécessite que nous introduisions le concept de *voisinage tubulaire* d'une variété : nous avons besoin de projeter les fonctions sur la variété depuis l'espace ambiant. Cet outil nous servira tant pour la théorie de l'homotopie que pour un théorème nécessaire dans notre approche : la surjectivité de la trace.

3.1 Fonctions à oscillation moyenne évanescente

Nous allons explorer quelques résultats classiques de la théorie de l'homotopie pour les fonctions qui satisfont la définition suivante.

Définition 3.1 (Fonction à oscillation moyenne évanescente – VMO). Fixons $\mathcal{M} = \bar{\Omega}$ ou $\partial\Omega$. Une fonction $u \in \text{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ est une fonction $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{M}, \mathbb{R}^v)$ telle que pour presque tout $x \in \mathcal{M}$, $u(x) \in \mathcal{N}$ et

$$\sup_{\substack{a \in \mathcal{M}, \\ 0 < \delta < \delta_0 \\ \mathbb{B}_\delta(a) \subset \mathcal{M}}} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} |u(x) - u(y)| \, dx \, dy \xrightarrow{\delta \downarrow 0} 0. \quad (3.2)$$

Quand $\mathcal{M} = \partial\Omega$, nous pouvons considérer les boules fermées $\mathbb{B}_\delta(a)$ comme des boules géodésiques ou

$$\mathbb{B}_\delta(a) = \{x \in \partial\Omega : \text{dist}_{\mathcal{M}}(x, a) \leq \delta\}$$

où l'on choisi

$$\text{dist}_{\partial\Omega}(x, y) = |x - y|$$

et, de même, $\text{dist}_\Omega(x, y) = |x - y|$. Notons que notre hypothèse que l'ouvert Ω est seulement de régularité lipschitzienne ne nous permet pas de bénéficier du cadre de la géométrie différentielle mais seulement de la théorie métrique : en effet, on peut vérifier sous notre jeu d'hypothèse que $\partial\Omega$ est une variété lipschitzienne de dimension 1. c'est-à-dire dont les cartes sont des applications bilipschitziennes. Cette observation nous permet de préciser que quand $\mathcal{M} = \partial\Omega$, il faut comprendre $dx \, dy$ dans (3.2) comme le produit par elle-même de la mesure de Hausdorff (normalisée) induite. De même, le volume de la boule qui apparaît dans la moyenne (*confer* (1.11) pour la notation de la moyenne d'une fonction) est mesuré grâce à cette mesure. Notons-la \mathcal{H}^1 . Alors, quand $\mathcal{M} = \partial\Omega$, la définition (3.2), s'écrit très explicitement

$$\sup_{\substack{a \in \partial\Omega \\ \mathbb{B}_\delta(a) = \{x \in \partial\Omega : \text{dist}_{\partial\Omega}(a, x) \leq \delta\}}} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} |u(x) - u(y)| \frac{d\mathcal{H}^1(x) \, d\mathcal{H}^1(y)}{\mathcal{H}^1(\mathbb{B}_\delta(a))^2} \xrightarrow{\delta \downarrow 0} 0. \quad (3.3)$$

Ce fait motive une écriture métrique dans la suite de cette section pour la source \mathcal{M} des applications $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ que nous considérons, comme l'ont fait UGOZZONI et LANCONELLI [62].

Notons qu'en dimension 2, la 2-mesure de Hausdorff coïncide avec la mesure de Lebesgue bidimensionnelle et par conséquent, en dimension 2, la définition 3.2 s'écrit aussi comme (3.3) où l'on a remplacé les \mathcal{H}^1 par des \mathcal{H}^2 . Cette observation va nous permettre de travailler de manière unifiée.

En anglais, cette classe s'intitule la classe des fonctions à *vanishing mean oscillation*, VMO, que nous traduisons par oscillation moyenne évanescence. L'oscillation réfère à l'écart $|u(x) - u(y)|$ que l'on moyennise (*confer* (1.11) pour la notation de la moyenne d'une fonction) dans la définition (3.2). Cette notion a été introduite par SARASON [56]. Notre démarche s'inspire de celle de BREZIS et NIRENBERG dans leurs deux articles *Degree theory and BMO Part I* et *Part II* [13, 14]. Nous pourrions vouloir écrire les résultats avec la structure métrique de la variété riemannienne \mathcal{N} et remplacer dans la définition (3.2) $|u(x) - u(y)|$ par la quantité plus intrinsèque $\text{dist}_{\mathcal{N}}(u(x), u(y))$ mais les arguments présentés ici reposent fortement sur le fait que la variété \mathcal{N} est isométriquement plongée dans un espace euclidien \mathbb{R}^V , c'est pourquoi nous avons retenu la première écriture.

Concernant la limite dans (3.2), cette dernière est non-quantitative dans le sens qu'on a pas d'information sur la vitesse de convergence à l'instar de la définition de continuité en $\epsilon - \delta$. On peut d'ailleurs observer le résultat suivant qui montre qu'une information quantitative sur la vitesse de convergence impliquerait que les fonctions soient continues.

Proposition 3.2 (Plongement de Morrey–Companato). *Si $\mathcal{M} = \partial\Omega$ ou Ω . Fixons $\alpha > 0$, $u \in L^1_{\text{loc}}(\mathcal{M})$ et une constante $A > 0$. Si*

$$\sup_{\substack{a \in \mathcal{M} \\ \mathbb{B}_\delta(a) \subset \mathcal{M}}} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} |u(x) - u(y)| \, dx \, dy \leq A\delta^\alpha. \quad (3.4)$$

Alors, en modifiant les valeurs de u sur un ensemble de mesure nulle, nous obtenons une application continue et satisfait pour un $B > 0$ qui dépend de A , α et \mathcal{M} ,

$$|u(x) - u(y)| \leq B \text{dist}_{\mathcal{M}}(x, y)^\alpha.$$

Pour une preuve, nous renvoyons à [51, Proposition 16.9] et [64, Section 3.8.2 et 5.7] et les références citées.

Enfin, nous observons que les fonctions uniformément continues $\mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ satisfont la définition 3.2. En particulier, $C(\bar{\Omega}, \mathcal{N}) \subset \text{VMO}(\bar{\Omega}, \mathcal{N})$ et $C(\partial\Omega, \mathcal{N}) \subset \text{VMO}(\partial\Omega, \mathcal{N})$. Dans la suite, nous montrerons que $\text{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ contient les classes de fonctions d'intérêt pour le problème que nous étudions, à savoir $W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ et $W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$. Puis nous

définirons l'homotopie des applications dans VMO, ce qui nécessitera l'introduction d'une topologie sur la classe de fonctions.

3.2 Les inclusions $W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N}) \subset \text{VMO}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ et $W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) \subset \text{VMO}(\Omega, \mathcal{N})$

L'intérêt de la classe de fonctions à oscillation moyenne évanescence est qu'elle contient l'espace de Sobolev $W^{1,2}$ et l'espace de Sobolev fractionnaire $W^{1/2,2}$. Pour rappel, si $\mathcal{M} = \partial\Omega$ est de dimension 1, plongée dans \mathbb{R}^2 , on a

$$W^{1/2,2}(\mathcal{M}, \mathcal{N}) = \left\{ u \in L^2(\mathcal{M}, \mathbb{R}^v) : \text{p.p. } u(x) \in \mathcal{N} \text{ et } \mathcal{E}_{\mathcal{M}}^{1/2,2}(u) < +\infty \right\} \quad (3.5)$$

où

$$\mathcal{E}_{\mathcal{M}}^{1/2,2}(u) = \iint_{\mathcal{M} \times \mathcal{M}} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{\text{dist}_{\mathcal{M}}^2(x, y)} \, dx \, dy.$$

Rappelons qu'on a choisi $\text{dist}_{\partial\Omega}(x, y) = |x - y|$. Le terme *fractionnaire* désigne le nombre $s = 1/2$ qui se réfère à la classe plus large des espaces de Sobolev fractionnaires $W^{s,p}(\mathcal{W}, \mathbb{R}^v)$ où l'on exige que l'énergie fractionnaire de Gagliardo,

$$\mathcal{E}_{\mathcal{W}}^{s,p}(u) = \iint_{\mathcal{W} \times \mathcal{W}} \left[\frac{|u(x) - u(y)|}{\text{dist}_{\mathcal{W}}(x, y)^s} \right]^p \frac{dx \, dy}{\text{dist}_{\mathcal{W}}(x, y)^{\dim(\mathcal{W})}}$$

soit finie. On note que dans le cas où $\dim(\mathcal{W}) = 1, s = 1/2$ et $p = 2$, on retrouve bien l'énergie fractionnaire de la définition (3.5). On peut montrer dans le cadre euclidien, $\mathcal{M} = \mathbb{R}^\mu$, que l'espace $W^{1/2,2}(\mathbb{R}^\mu)$ admet une description en tant qu'espace interpolé de $L^2(\mathbb{R}^\mu)$ et $W^{1,2}(\mathbb{R}^\mu)$ (confer LEONI [37, Theorem 17.24] pour un énoncé précis de ce résultat et PONCE [51, Proposition 15.6] pour une inégalité d'interpolation en L^2 et $W^{1,2}$). Toutefois, nous n'utiliserons pas ce fait.

Nous commençons par montrer que l'oscillation moyenne, la double intégrale moyenne de (3.2) est contrôlée par les énergies de Sobolev sur la boule correspondante (3.6)–(3.7).

Proposition 3.3 (Oscillation moyenne contrôlée par les énergies de Sobolev). *Si*

$$\text{vol}_{\mathbb{R}^\mu}(|x| \leq 1)$$

désigne le volume de la boule unité dans \mathbb{R}^μ , nous avons les inégalités suivantes.

1. Fixons $p \geq 2$. Considérons $u \in W^{1,p}(\mathbb{B}_\delta(a), \mathcal{N})$ alors pour tout boule $\mathbb{B}_\delta(a) \subset \mathbb{R}^\mu$,

$$\int_{\mathbb{B}_\delta(a)} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} |u(x) - u(y)| \, dx \, dy \leq \frac{8}{\sqrt[p]{\text{vol}_{\mathbb{R}^\mu}(|x| \leq 1)}} \delta^{1-\frac{\mu}{p}} \left(\int_{\mathbb{B}_\delta(a)} |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.6)$$

2. Considérons $u \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ alors pour tout boule $\mathbb{B}_\delta(a) \subset \partial\Omega$,

$$\int_{\mathbb{B}_\delta(a)} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} |u(x) - u(y)| \, dx \, dy \leq \left(\iint_{\mathbb{B}_\delta(a) \times \mathbb{B}_\delta(a)} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{\text{dist}_{\partial\Omega}^2(x, y)} \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.7)$$

Démonstration de la proposition 3.3. Pour le premier point, on note par l'inégalité de Poincaré (1.10),

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} |u(x) - u(y)| \, dx \, dy \\ \leq 4 \frac{\text{diam}(\mathbb{B}_\delta(a))}{\text{vol}_{\mathbb{R}^\mu}(|x - a| \leq \delta)} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} |Du| = \frac{8}{\text{vol}_{\mathbb{R}^\mu}(|x| \leq 1) \delta^{\mu-1}} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} |Du| \end{aligned}$$

car la boule est euclidienne. Ensuite, par Hölder,

$$\int_{\mathbb{B}_\delta(a)} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} |u(x) - u(y)| \, dx \, dy \leq \frac{8}{\text{vol}_{\mathbb{R}^\mu}(|x| \leq 1) \delta \text{vol}_{\mathbb{R}^\mu}(|x| \leq 1)^{1-\frac{1}{p}}} \left(\int_{\mathbb{B}_\delta(a)} |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

donnant ainsi le résultat annoncé (3.6).

Pour le second point,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} |u(x) - u(y)| \, dx \, dy &= \iint_{\mathbb{B}_\delta(a) \times \mathbb{B}_\delta(a)} \frac{|u(x) - u(y)|}{\text{dist}_{\partial\Omega}(x, y)} \text{dist}_{\partial\Omega}(x, y) \, dx \, dy \\ &\leq \text{diam}(\mathbb{B}_\delta(a)) \iint_{\mathbb{B}_\delta(a) \times \mathbb{B}_\delta(a)} \frac{|u(x) - u(y)|}{\text{dist}_{\partial\Omega}(x, y)} \, dx \, dy, \quad (3.8) \end{aligned}$$

où nous avons observé que le diamètre satisfait

$$\text{diam}(\mathbb{B}_\delta(a)) = \sup_{x, y \in \mathbb{B}_\delta(a)} \text{dist}_{\partial\Omega}(x, y) = \sup_{(x, y) \in \mathbb{B}_\delta(a) \times \mathbb{B}_\delta(a)} \text{dist}_{\partial\Omega}(x, y).$$

Aussi, comme la dimension de l'ouvert est l'unité, par la définition de mesure de Hausdorff induite par la métrique $\text{dist}_\Omega(x, y) = |x - y|$,

$$\text{diam}(\mathbb{B}_\delta(a)) = \mathcal{H}^1(\mathbb{B}_\delta(a)). \quad (3.9)$$

Ensuite, par l'inégalité de Hölder,

$$\iint_{\mathbb{B}_\delta(a) \times \mathbb{B}_\delta(a)} \frac{|u(x) - u(y)|}{\text{dist}_{\partial\Omega}(x, y)} \, dx \, dy \leq \left(\mathcal{H}^1(\mathbb{B}_\delta(a)) \cdot \mathcal{H}^1(\mathbb{B}_\delta(a)) \right)^{1-\frac{1}{2}} \left(\iint_{\mathbb{B}_\delta(a) \times \mathbb{B}_\delta(a)} \frac{|u(x) - u(y)|^2}{\text{dist}_{\partial\Omega}^2(x, y)} \, dx \, dy \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (3.10)$$

Concaténant (3.8) et (3.10) avec l'observation (3.9), on obtient le résultat annoncé (3.7). \square

Nous déduisons de la proposition 3.3 précédente le corollaire suivant.

Corollaire 3.4. *Nous avons les inclusions suivantes.*

1. $W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N}) \subset \text{VMO}(\Omega, \mathcal{N})$ pour $p \geq 2$.
2. $W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N}) \subset \text{VMO}(\partial\Omega, \mathcal{N})$.

Démonstration du corollaire 3.4. Pour le premier point, par le point 1 proposition précédente 3.3, si $\delta < 1$,

$$\int_{\mathbb{B}_\delta(a)} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} |u(x) - u(y)| \, dx \, dy \leq \frac{8}{\sqrt[p]{\pi}} \left(\int_{\mathbb{B}_\delta(a)} |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad (3.11)$$

Par hypothèse, $|Du|^p \in L^1(\Omega)$. Par le théorème d'intégrabilité uniforme de Vitali,

$$\sup_{\substack{a \in \mathcal{M} \\ \mathbb{B}_\delta(a) \subset \mathcal{M}}} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} |Du|^p \xrightarrow{\delta \downarrow 0} 0,$$

montrant ainsi par l'étau (3.11) que $u \in \text{VMO}(\Omega, \mathcal{N})$ par la définition (3.2).

Pour le second point, nous procédons de manière analogue en considérant le second point de la proposition 3.3 et la fonction uniformément intégrable

$$\frac{|u(x) - u(y)|^2}{\text{dist}_{\partial\Omega}^2(x, y)} \in L^1(\partial\Omega \times \partial\Omega). \quad \square$$

Quand $p > 2$, on peut être plus précis par le plongement de Morrey–Companato, proposition 3.2.

Corollaire 3.5. Fixons $p > 2$. Si $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$, alors, en modifiant les valeurs de u sur un ensemble de mesure nulle u est continue et satisfait pour tout $x, y \in \Omega$

$$|u(x) - u(y)| \leq C \operatorname{dist}_\Omega(x, y)^{1-\frac{2}{p}}$$

où C est un nombre qui dépend de la norme de u dans $W^{1,p}(\Omega)$.

Le fait que nous n'identifions pas les fonctions égales à un ensemble de mesure nul près, nous empêche d'énoncer un résultat succinct comme dans le corollaire précédent 3.4. Le nombre 2 dans le preuve est en fait la dimension de Ω . On peut en effet montrer que si (\mathcal{M}, g) est une variété de dimension $\dim \mathcal{M}$ et compacte alors, si $p > \dim \mathcal{M}$, les fonctions $u \in W^{1,p}(\mathcal{M})$ admettent un représentant précis höldérien d'exposant $\alpha = 1 - \dim \mathcal{M}/p$ (3.2). Le fait que l'inégalité stricte sur p soit requise s'explique par l'absence de contrôle quantitatif dans l'inégalité (3.6) sur les oscillations de la proposition précédente 3.3 quand $p = 2$.

Démonstration du corollaire 3.5. Par (3.6),

$$\int_{\mathbb{B}_\delta(a)} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} |u(x) - u(y)| \, dx \, dy \leq \frac{8\delta^{1-\frac{2}{p}}}{\sqrt[p]{|\mathbb{B}_1|}} \left(\int_\Omega |Du|^p \right)^{\frac{1}{p}}. \quad (3.12)$$

la conclusion se déduit alors du théorème de plongement Morrey–Companato, proposition 3.2. \square

3.3 Définition de l'homotopie dans $\operatorname{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$

Dans cette section, \mathcal{M} est un espace métrique muni de la mesure de Hausdorff induite; on observe que la définition de VMO , définition 3.2, fait encore sens sous cette hypothèse seule. Rappelons que les deux exemples principaux sont $\mathcal{M} = \partial\Omega$ et $\mathcal{M} = \bar{\Omega}$.

L'homotopie déforme continûment une fonction en une autre; c'est pourquoi il convient d'introduire une topologie sur l'ensemble $\operatorname{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

Définition 3.6 (Convergence dans $\operatorname{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$). Une suite $(u_n)_n$ de fonctions dans $\operatorname{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ converge dans $\operatorname{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ vers un $u \in L^1_{\operatorname{loc}}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ si u_n converge vers u

en mesure et

$$\left| \sup_{\substack{a \in \mathcal{M}, \delta > 0 \\ \mathbb{B}_\delta(a) \subset \mathcal{M}}} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} |u_n(x) - u_n(y)| \, dx \, dy - \sup_{\substack{a \in \mathcal{M}, \delta > 0 \\ \mathbb{B}_\delta(a) \subset \mathcal{M}}} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} |u(x) - u(y)| \, dx \, dy \right| \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (3.13)$$

Cette définition est différente de ce qui se fait classiquement [13, 56] mais est équivalente par une variante de [67, Proposition 4.2.6]. Ce choix est par exemple fait en [42, Equation 2.38] et est justifié par la même remarque que pour la convergence à travers les L^p (confer définition 2.2).

Nous pouvons alors définir l'homotopie.

Définition 3.7 (Homotopie dans VMO). Deux fonctions $u, v \in \text{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ sont *homotopes* s'il existe une fonction $H \in C([0, 1], \text{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N}))$, appelée homotopie, si pour tout $t > 0$ dans un voisinage de zéro, on a presque partout sur \mathcal{M}

$$H(t) = u \quad \text{et} \quad H(1 - t) = v.$$

Plus précisément, les égalités

$$H(t, x) = u(x) \quad \text{et} \quad H(1 - t, x) = v(x)$$

sont satisfaites pour presque tout $x \in \mathcal{M}$ et $t \in [0, \eta[$ pour un $\eta > 0$ donné. Quand $t \in [0, 1]$, $x \in \mathcal{M} \mapsto H(t, x)$ est une fonction entre u et v , qui prend presque toutes ces valeurs dans la variété \mathcal{N} . La continuité de $H \in C([0, 1], \text{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N}))$ requise dans la définition doit être comprise séquentiellement au regard de la définition 3.6 c'est-à-dire que si $t_n \rightarrow t$ dans $[0, 1]$, la suite d'application $H(t_n)_n$ tend vers $H(t)$ dans VMO.

Le fait que la définition exige que l'homotopie H soit constante sur un voisinage de $t = 0$ et $t = 1$ s'explique par la nécessité d'avoir une notion stable par changement de u et v sur un ensemble de mesure nulle. Quand $t \geq 0$ est proche de zéro, $H(t)(x)$ vaut $u(x)$ pour tout x , montrant par là que H a bien une valeur en $t = 0$. On procède de manière similaire pour $t = 1$. Cette remarque prouve que l'homotopie est une relation d'équivalence, ce que nous formulons comme un lemme pour référence future.

Lemme 3.8 (L'homotopie dans $\text{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ est une relation d'équivalence). *De la définition d'homotopie, nous obtenons les trois propriétés suivantes :*

1. $u \in \text{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ est homotope dans $\text{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ à elle-même.

2. Si $H(t, \cdot)$ définit une homotopie dans $\text{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ entre u et v , $H(1 - t, \cdot)$ définit une homotopie dans $\text{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ entre v et u .
3. Si u et v sont homotopes dans $\text{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ et v et w sont homotopes dans $\text{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ alors u et w sont homotopes dans $\text{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

Comme exemple d'homotopie dans VMO , il y a les homotopies continues de fonctions uniformément continues lues «à la bonne vitesse». Si $H(t, \cdot)$ est une homotopie continue entre $H(0, \cdot)$ et $H(1, \cdot)$, nous considérons une application lisse

$$\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \tag{3.14}$$

telle que pour un $1/2 > \eta > 0$,

$$\begin{aligned} \theta &= 0 \text{ sur } [0, \eta] \\ &= 1 \text{ sur } [1 - \eta, 1]. \end{aligned}$$

Nous définissons alors $H(\theta(t), \cdot)$ comme étant l'homotopie dans VMO entre $H(0, \cdot)$ et $H(1, \cdot)$.

Dans la suite, nous allons montrer que le concept d'homotopie dans VMO n'est pas trivial en exposant le fait que les classes d'homotopies dans VMO correspondent exactement avec l'adhérence dans VMO des classes d'homotopies libres continues de fonctions continues.

3.4 Lien avec l'homotopie continue et approximation de fonctions dans VMO

Le but de cette sous-section est de montrer la proposition suivante.

Proposition 3.9 (Équivalence des homotopies). *Fixons $u, v \in \text{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ deux fonctions homotopes dans $\text{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. Si $u, v : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ sont continues, alors elles sont continûment homotopes.*

Pour prouver cette proposition, nous allons requérir à l'approximation de fonction dans VMO par analogie avec ce qui se fait pour l'homotopie lisse : si $u, v : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$ sont lisses et continûment homotopes, alors elles sont différentiablement homotopes (*confer* LEE [35, Theorem 6.29] ou MUKERJEE [47, Lemma 2.6.3]).

Voici le schéma de la preuve de la proposition 3.9 : nous allons nous baser sur un résultat d'approximation dans le cas euclidien (proposition 3.10), $\mathcal{N} = \mathbb{R}^V$: il existe une suite de fonction continues qui va nous permettre d'approximer les fonctions $u \in \text{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ au

sens de la convergence dans VMO (définition 3.6). Le problème est que l'approximation ne prend pas nécessairement ses valeurs dans la variété plongée \mathcal{N} . Nous avons donc une suite $(u_n)_n$ de fonction convergent dans $\text{VMO}(\mathcal{M}, \mathbb{R}^V)$. L'idée est alors de projeter l'approximation u_n via la projection $\Pi_{\mathcal{N}}$ sur le point de \mathcal{N} le plus proche de $u_n(x)$. C'est à cette étape que la définition de VMO est cruciale ainsi que le fait que la variété est plongée. On montre alors que $\Pi_{\mathcal{N}} \circ u_n$ converge vers la fonction u que l'on voulait approximer.

3.5 Caractérisation de $\text{VMO}(\mathcal{M}, \mathbb{R}^V)$

Le théorème suivant est dû à SARASON [56, Theorem 1] (*confer* aussi [13, Lemma A.5]).

Proposition 3.10 (Théorème de Sarason). *Fixons $\mathcal{M} = \partial\Omega$ ou Ω . Alors, $u \in \text{VMO}(\mathcal{M}, \mathbb{R}^V)$ si et seulement u satisfait*

$$\sup_{\substack{a \in \mathcal{M}, \delta > 0 \\ \mathbb{B}_\delta(a) \subset \mathcal{M}}} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} |u(x) - u(y)| \, dx \, dy < +\infty \quad (3.15)$$

et il existe une suite de fonctions continues $u_n : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}^V$ telles que $u_n \rightarrow u$ dans VMO.

Puisqu'il est possible d'uniformément approcher les fonctions continues par des fonctions lisses, on peut supposer dans le cas où $\mathcal{M} = \bar{\Omega}$ que la suite est lisse à l'intérieur du domaine Ω . Si $\partial\Omega$ est lisse, on peut prendre les $u_n : \partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^V$ lisses jusqu'au bord. Aussi, si $\partial\Omega$ est lisse, on peut le considérer comme une variété et supposer que la suite approximante u_n donnée est lisse également.

Les fonctions qui satisfont uniquement la condition (3.15) sont appelées les fonctions à oscillation moyenne bornée (BMO pour *bounded mean oscillation*) et trouvent leur utilité dans d'autres domaines des mathématiques. Toutefois, nous n'utiliserons pas les propriétés de cette classe de fonctions.

La preuve consiste à montrer que la moyenne

$$x \in \mathcal{M} \mapsto \int_{\mathbb{B}_{\varepsilon_n}(x)} u$$

converge vers u dans VMO. Ce choix d'approximation n'est pas anodin puis qu'il se comporte bien avec la définition de $\text{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. En effet, il est possible de montrer la proposition suivante.

Proposition 3.11 (Approximation par moyenne dans VMO). *La famille indexée par $\delta > 0$ décrite par*

$$x \in \mathcal{M} \mapsto \int_{\mathcal{M} \cap \mathbb{B}_\delta(x)} u$$

est continue et converge vers u dans $\text{VMO}(\mathcal{M}, \mathbb{R}^v)$ quand $\delta \downarrow 0$ dès que $u \in \text{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$.

En particulier, cela montre que les classes d'équivalence d'homotopie dans VMO coïncident avec l'adhérence dans VMO des classes d'équivalence d'homotopie continue.

En effet, comme les fonctions continues ont leur oscillation moyenne évanescence, une classe d'équivalence d'homotopie continue est nécessairement dans la classe d'équivalence d'homotopie dans VMO. Inversément, deux fonctions dans VMO sont homotopes dans VMO à des fonctions continues par la proposition précédente 3.11 (il convient de remplacer δ par la fonction $\theta(t)$ nulle près de $t = 0$ et constante égale à 1 près de $t = 1$). Ces deux fonctions continues sont continûment homotopes dans VMO si et seulement si elles sont homotopes dans VMO par la proposition 3.9 que nous allons montrer. Par transitivité de l'homotopie, les deux fonctions dans VMO sont homotopes si et seulement si elles peuvent être approchées par des fonctions continues continûment homotopes. Les détails de cette affirmation sont décrits chez ABBONDANDOLO [1, Theorem 2.1].

3.6 La projection $\Pi_{\mathcal{N}}$ sur le point le plus proche

Il est possible de projeter un point de \mathbb{R}^v sur la sous-variété \mathcal{N} pour peu que ce point ne soit pas trop éloigné.

Proposition 3.12 (Existence d'un voisinage tubulaire d'une variété riemannienne). *Toute variété riemannienne $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^v$ admet une rétraction lisse $\Pi_{\mathcal{N}} : U \rightarrow \mathcal{N}$ qui satisfait les propriétés suivantes :*

- $U \subset \mathbb{R}^v$ est un ouvert qui contient le fermé \mathcal{N} .
- $\Pi_{\mathcal{N}}|_{\mathcal{N}} : \mathcal{N} \rightarrow \mathcal{N}$ est l'identité c'est-à-dire que pour chaque $x \in \mathcal{N}$, $\Pi(x) = x$.

On dit alors que l'ouvert U est un voisinage tubulaire de \mathcal{N} . Sans perte de généralité, nous pouvons le supposer de la forme

$$U = \mathcal{N} + B(0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^v : \text{dist}(x, \mathcal{N}) < \delta\}$$

que nous noterons simplement \mathcal{N}_δ .

Par la définition de sous-variété, il existe en tout point p de \mathcal{N} un voisinage U_p du point p où une rétraction locale $\Pi_{\mathcal{N} \cap U_p} : U_p \rightarrow \mathcal{N} \cap U_p$ existe. Une stratégie de preuve repose sur cette observation et puis colle les rétraction locales [26, proposition 4.1][40, Theorem 7.1].

Une autre stratégie consiste à projeter les points proches de \mathcal{N} le long du vecteur normal [47, Theorem 7.1.5][64, Proposition 6.2]. Les deux approches ne sont pas équivalentes : la seconde utilise une dérivée en utilisant le théorème des fonctions implicites ou bien le fait que le fibré cotangent est une variété différentiable.

3.7 Approximation dans $VMO(\mathcal{M}, \mathcal{N})$

Nous avons maintenant tous les ingrédients pour prouver la proposition 3.9 d'équivalence des homotopies dans $VMO(\mathcal{M}, \mathcal{N})$. La preuve utilise cruciallement la structure de VMO . Nous admettrons notamment cette caractérisation des compacts dans VMO : les familles de fonctions qui satisfont uniformément la définition d'application à oscillation moyenne évanescence.

Lemme 3.13 (Caractérisation des compacts de $VMO(\mathcal{M}, \mathcal{N})$). *Fixons $\mathcal{M} = \partial\Omega$ ou Ω . Une famille de fonction $\mathcal{U} \subset VMO(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ est précompacte pour la convergence dans $VMO(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ si et seulement si*

$$\sup_{u \in \mathcal{U}} \sup_{\substack{a \in \mathcal{M}, \\ 0 < \delta < \delta_0 \\ \mathbb{B}_\delta(a) \subset \mathcal{M}}} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} \int_{\mathbb{B}_\delta(a)} |u(x) - u(y)| dx dy \xrightarrow{\delta_0 \downarrow 0} 0.$$

Nous l'appliquerons à l'image de l'intervalle $[0, 1]$ par une homotopie H . Ce résultat est dû à BREZIS et NIRENBERG [13, Lemma A.16].

Nous pouvons maintenant passer à la preuve d'équivalence entre homotopie continue et dans VMO .

Démonstration de la proposition 3.9. Considérons $H \in C([0, 1], VMO(\mathcal{M}, \mathcal{N}))$ l'homotopie entre les fonctions continues u et v . Fixons $\eta > 0$ tel que $H(t)$ est constante sur $[0, \eta]$ et $[1 - \eta, 1]$ donné par la définition 3.7. Fixons aussi $\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ continu tel que

$$\begin{aligned} \theta &= 0 \text{ sur } [0, \eta/2] \cup [1 - \eta/2, 1] \\ &\in]0, 1] \text{ sur }]\eta/2, 1 - \eta/2[. \end{aligned}$$

Nous voudrions poser pour un $\epsilon_0 > 0$,

$$\tilde{H}(t)(x) = \Pi_{\mathcal{N}} \left[\int_{\mathcal{M} \cap \mathbb{B}_{\epsilon_0 \theta(t)}(x)} H(t) \right]. \quad (3.16)$$

Comme la fonction $\theta(t)$ peut être nulle il convient de donner un sens au terme entre crochets qui est

$$\int_{\mathcal{M} \cap \mathbb{B}_{\epsilon_0 \theta(t)}} H(t) = \begin{cases} H(t) & \text{si } \epsilon_0 \theta(t) = 0 \\ \int_{\mathcal{M} \cap \mathbb{B}_{\epsilon_0 \theta(t)}} H(t) & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.17)$$

Pour utiliser la projection $\Pi_{\mathcal{N}}$, il faudrait que le terme entre crochets soit dans le voisinage tubulaire $U_\delta = \{x \in \mathbb{R}^v : \text{dist}(\mathcal{N}, x) < \delta\}$. Quand $t \in [0, \eta/2] \cup [1 - \eta/2, 1]$, alors le terme entre crochets devient $H(t)$ qui vaut u ou v , lesquelles prennent leur valeur dans \mathcal{N} . Il reste le complémentaire, $] \eta/2, 1 - \eta/2 [$ sur lequel nous allons estimer la distance à \mathcal{N} . Fixons $t \in] \eta/2, 1 - \eta/2 [$. Par la définition d'infimum, pour un $y \in \mathcal{M}$,

$$\text{dist} \left(\int_{\mathcal{M} \cap \mathbb{B}_{\epsilon_0 \theta(t)}(a)} H(t), \mathcal{N} \right) \leq \left| \int_{\mathcal{M} \cap \mathbb{B}_{\epsilon_0 \theta(t)}(a)} H(t)(x) \, dx - H(t)(y) \right|.$$

Si l'on moyennise par rapport à y ,

$$\begin{aligned} \text{dist} \left(\int_{\mathcal{M} \cap \mathbb{B}_{\epsilon_0 \theta(t)}(a)} H(t), \mathcal{N} \right) &\leq \int_{\mathcal{M} \cap \mathbb{B}_{\epsilon_0 \theta(t)}(a)} \int_{\mathcal{M} \cap \mathbb{B}_{\epsilon_0 \theta(t)}(a)} |H(t)(x) - H(t)(y)| \, dx \, dy \\ &\leq \sup_{t \in [0, 1]} \left[\sup_{a \in \mathcal{M}, \delta < \epsilon_0} \int_{\mathcal{M} \cap \mathbb{B}_\delta(a)} \int_{\mathcal{M} \cap \mathbb{B}_\delta(a)} |H(t)(x) - H(t)(y)| \, dx \right]. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Si $H(t)$ ne dépend pas de t , on peut simplement utiliser la définition des fonctions à oscillation moyenne bornée. Dans le cas général, il faut une approximation uniforme en t . Pour cela, nous notons que l'ensemble

$$\{H(t)\}_{t \in [0, 1]}$$

est compact dans $\text{VMO}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$: en effet, c'est l'image d'un compact par une fonction continue. Par la caractérisation des compacts dans VMO , il existe un $\epsilon_0 > 0$ tel que le terme entre crochets de (3.18) est plus petit que $\delta/2$. En particulier, la moyenne (3.17) est dans le voisinage tubulaire de \mathcal{N} et donc nous pouvons définir

$$\tilde{H} : (t, x) \in [0, 1] \times \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{N}$$

par la formule (3.16).

Montrons que \tilde{H} est une homotopie continue entre u et v . Par la définition (3.16) et le choix de la fonction θ , $H(0)$ et $H(1)$ valent bien u et v respectivement. Il reste à montrer que $\tilde{H} \in C([0, 1], C(\mathcal{M}, \mathcal{N})) = C([0, 1] \times \mathcal{M}, \mathcal{N})$. Comme $\Pi_{\mathcal{N}}$ est continue, il suffit de montrer que la moyenne (3.17) est continue en (t, x) . Nous commençons par observer que

$$[0, 1] = [0, 2\eta/3] \cup [2\eta/3, 1 - 2\eta/3] \cup [1 - 2\eta/3, 1].$$

Sur les intervalles $[0, 2\eta/3]$ et $[1 - 2\eta/3, 1]$, $H(t)$ est constante comme fonction de t et vaut une fonction continue : soit u soit v . Montrant par là que \tilde{H} est continue sur $([0, 2\eta/3] \cup [1 - 2\eta/3, 1]) \times \mathcal{M}$.

Ensuite, sur l'intervalle restant, $[2\eta/3, 1 - 2\eta/3]$, nous savons, par la continuité de θ ,

$$\theta_0 = \inf_{[2\eta/3, 1 - 2\eta/3]} \theta > 0.$$

Considérons une suite $t_n \in [2\eta/3, 1 - 2\eta/3]$ qui converge vers un t et une suite $(x_n)_n$ de points $x_n \in \mathcal{M}$ qui converge vers x . Par l'inégalité triangulaire,

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathcal{M} \cap \mathbb{B}_{\varepsilon_0 \theta(t_n)}(x_n)} H(t_n) - \int_{\mathcal{M} \cap \mathbb{B}_{\varepsilon_0 \theta(t)}(x)} H(t) \right| &\leq \\ &\left| \int_{\mathcal{M} \cap \mathbb{B}_{\varepsilon_0 \theta(t_n)}(x_n)} H(t_n) - \int_{\mathcal{M} \cap \mathbb{B}_{\varepsilon_0 \theta(t_n)}(x)} H(t_n) \right| \\ &+ \left| \int_{\mathcal{M} \cap \mathbb{B}_{\varepsilon_0 \theta(t_n)}(x)} H(t_n) - \int_{\mathcal{M} \cap \mathbb{B}_{\varepsilon_0 \theta(t)}(x)} H(t) \right|. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Dans l'autre cas, on majore le premier terme de (3.19) par

$$\begin{aligned} \frac{1}{|\mathcal{M} \cap \mathbb{B}_{\varepsilon_0 \theta(t_n)}(x)|} \sup_n \int_{\mathcal{M} \cap (\mathbb{B}_{\varepsilon_0 \theta(t_n)}(x) \Delta \mathbb{B}_{\varepsilon_0 \theta(t_n)}(x_n))} |H(t_n)| \\ \leq \frac{|\mathcal{M} \cap (\mathbb{B}_{\varepsilon_0 \theta(t_n)}(x) \Delta \mathbb{B}_{\varepsilon_0 \theta(t_n)}(x_n))|}{|\mathcal{M} \cap \mathbb{B}_{\varepsilon_0 \theta(t_n)}(x)|} \sup_n \|H(t_n)\|_{L^\infty(\mathcal{M})} \end{aligned}$$

où le Δ désigne la différence symétrique. Le supremum est fini car la variété est compacte et, comme $\theta(t_n) \geq \theta_0 > 0$, la fraction tend bien vers 0 quand $n \uparrow \infty$.

Pour le second terme, on utilise le fait que $u_n \rightarrow u$ dans L^1 et $\rho_n \rightarrow \rho$, $\rho, \rho_n \geq \theta_0$ alors

$$\int_{\mathbb{B}_{\rho_n}(x)} u_n \rightarrow \int_{\mathbb{B}_\rho(x)} u$$

uniformément en $x \in \mathcal{M}$. Le volume des boules converge et donc par la règle du produit de calcul des limites, il suffit de montrer que

$$\int_{\mathbb{B}_{\rho_n}(x)} u_n \rightarrow \int_{\mathbb{B}_\rho(x)} u,$$

ce qui peut se voir par une variante du théorème de convergence dominée de Lebesgue (*confer* BOGACHEV [7, Theorem 2.8.8]) ou le théorème d'intégrabilité uniforme de VITALI [67, Theo-

rem 3.1.9]. Nous donnerons une preuve directe de ce résultat pour un nombre arbitraire de boules dans la preuve de la proposition 7.9.

Ceci conclut la preuve de la continuité de \tilde{H} qui fournit l'homotopie désirée et achève par conséquent la démonstration. \square

3.8 Pourquoi $W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ peut être vide

Dans cette section, nous discutons comment des obstructions topologiques peuvent empêcher l'existence d'applications dans $W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ où $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$. Plus tard, nous verrons que ces obstructions n'apparaissent pas quand $p < 2$: il existe toujours $u_0 \in W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ de trace g . Bien que les applications des espaces de Sobolev $W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ et $W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ ne soient pas continues, commençons par discuter l'existence de fonctions continues $\bar{\Omega} \rightarrow \mathcal{N}$ dont la restriction serait une application continue $\partial\Omega \rightarrow \mathcal{N}$ donnée.

De la théorie de l'obstruction, nous savons que l'application identité $\text{Id}_{\mathbb{S}^1} : \partial\mathbb{B}_1(0) = \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ ne s'étend pas en une application continue $u : \mathbb{B}_1(0) \rightarrow \mathcal{N}$ qui se restreint en l'identité sur le bord du disque. Ceci fournit un exemple de donnée au bord $g = \text{Id}_{\mathbb{S}^1}$ continue telle que la classe des applications continues qui se restreignent au bord en g ,

$$\{u : \mathbb{B}_1(0) \rightarrow \mathcal{N} : u|_{\partial\mathbb{B}_1(0)} = g\},$$

est vide. Ce résultat est souvent mentionné comme corollaire après la construction d'invariants topologiques : par le degré topologique ou plus généralement par la théorie des groupes d'homotopie. Toutefois, nous retiendrons une preuve courte qui utilise le fait suivant : $g : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ s'étend au disque $\mathbb{B}_1(0)$ si et seulement si la fonction g admet l'écriture $(\cos \varphi, \sin \varphi)$ où $\varphi : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}$ est une application continue qui relève g . Nous nous référons à la preuve de de R. Brown, qui prête l'idée à Eilenberg [16].

Dans le cas des fonctions de Sobolev, nous avons la proposition suivante qui caractérise les exemples où la donnée au bord $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ rend l'espace de Sobolev $W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ correspondant vide en termes des données au bord continues qui n'admettent pas d'extension.

Proposition 3.14 (Caractérisation des données au bord $g \in W^{1/2,2}$ qui admettent une extension $W^{1,2}$). *Fixons $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert régulier borné et $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^v$ une variété plongée. La fonction $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ admet une extension $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ de trace $\text{Trace}_{\partial\Omega} u = g$ si, et seulement si, g est homotope dans $\text{VMO}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ à une application continue $g_0 : \partial\Omega \rightarrow \mathcal{N}$ qui s'étend à $u_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathcal{N}$ continue qui se restreint à g_0 sur le bord du domaine Ω .*

Ce résultat que nous allons prouver est un analogue d'un résultat de la théorie de l'homotopie qui assure que deux applications $\partial\Omega \rightarrow \mathcal{N}$ continues et continûment homotopes dont l'une s'étend à $\bar{\Omega} \rightarrow \mathcal{N}$ admettent une homotopie continue $[0, 1] \times \partial\Omega \rightarrow \mathcal{N}$ qui les

étend toutes les deux. Il s'agit d'une instance de la *propriété d'extension des homotopies* [33, p. 14][29, Theorem 2.9]

Nous pouvons résumer la proposition 3.14 en disant que l'obstruction d'une fonction g d'énergie de Sobolev fractionnaire finie, définie sur le bord $\partial\Omega$, à s'étendre en une fonction $\bar{\Omega} \rightarrow \mathcal{N}$ de Sobolev de gradient de carré intégrable est la même que celle rencontrée dans le cas où g serait continue.

Cette proposition fut mise à jour par BÉTHUEL et DEMENGEL [5, Theorem 2]. Toutefois, nous avons retenu la formulation d'ISOBE [34, Theorem 1.1] que nous avons élargie à la classe des fonctions à oscillation moyenne évanescente. Notons qu'il existe d'autres formulations pour les *obstructions à l'extension* : ISOBE [34, Theorem 1.2] et MAZOWEICKA et VAN SCHAFTINGEN [42, Theorem 1.2].

Les ingrédients de la preuve de la proposition 3.14 sont la propriété que nous venons de décrire, un résultat d'approximation (lemme 3.16) et ce résultat de surjectivité de la trace :

Proposition 3.15 (Surjectivité de la trace : de $W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ à $u \in W^{1,2}(\partial\Omega + B(0, \delta), \mathcal{N})$). Fixons $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ un ouvert régulier borné et $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^v$ une variété plongée. Pour toute application $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$, il existe un $\delta > 0$ telle que g admet une extension $U \in W^{1,2}(\partial\Omega + B(0, \delta), \mathcal{N})$ de trace $\text{Trace}_{\partial\Omega} u = g$ définie sur un voisinage du bord

$$\partial\Omega + B(0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x, \partial\Omega) < \delta\}.$$

De plus, l'extension U peut-être choisie lipschitzienne en dehors de tout voisinage de $\partial\Omega$.

Le $\delta > 0$ est en général fini. Cela est dû à la non-linéarité qu'engendre la variété \mathcal{N} . Dans le cas linéaire, c'est-à-dire $\mathcal{N} = \mathbb{R}^v$, nous pouvons étendre l'application g à tout le plan \mathbb{R}^2 ; ce résultat remonte à GAGLIARDO [27] (*confer* les ouvrages de références [51, Proposition 15.12][37, Theorem 18.34]). Notons aussi que nous ne donnons pas d'estimation de la forme

$$\int_{\partial\Omega + B(0, \delta)} |Du|^2 \leq C_{\text{ext}}(\Omega, \mathcal{N}) \|g\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})}^2$$

car, à nouveau, le contexte non-linéaire nous en empêche (*confer* VAN SCHAFTINGEN pour un contre-exemple explicite [64] et MIRONESCU et VAN SCHAFTINGEN pour une discussion à propos de ce phénomène non-linéaire [44, Theorem 8b])). Mentionnons aussi un argument dans la thèse de PETRACHE pour l'espace de Sobolev critique en dimension 4, $W^{1,4}(\mathbb{B}^4, \mathbb{S}^3)$ où \mathbb{B}^4 est la boule unité de \mathbb{R}^4 [49, Proposition 9.16] (*confer* aussi l'article de PETRACHE et RIVIÈRE qui en a découlé [50, Proposition 2.8.] où l'explication est plus succincte).

Le nom de la proposition 3.15, surjectivité de la trace, réfère au fait que la trace fait correspondre une application de $W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ à un élément de l'ensemble $W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ (*confer* page 4). Ici, il s'agit en quelque sorte d'une réciproque. Écrite ainsi, la proposition

3.15 ne semble pas avoir de précédent dans la littérature. Toutefois, elle semble être bien connue des experts [46, Définition 5.4][45, (6.5)]. Dans le traitement de notre problème, cette proposition nous permet de penser la donnée au bord, non comme un élément de l'espace fractionnaire $W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ mais plutôt comme un élément de $W^{1,2}(\Omega_\delta - \Omega, \mathcal{N})$ de trace g le long de Ω . Ici,

$$\Omega_\delta = \Omega + B(0, \delta) = \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(x, \Omega) < \delta\}.$$

Cette observation va s'avérer très utile dans la suite du mémoire.

Dès la proposition 3.15 prouvée, nous pourrions démontrer la proposition 3.14 en nous ramenant à des considérations d'homotopie continue.

3.9 Surjectivité de la trace

Démonstration de la proposition 3.15. Voici les étapes de la preuve.

1. Extension d'une application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{N}$ à support compact à un $u_0 : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^\nu$ [51, Proposition 15.12].
2. Extension d'une application g depuis une partie du bord $\partial\Omega$ vers une application $\partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^\nu$ [37, Theorem 18.34].
3. Collage des applications du point 2 via des partitions de l'unité pour obtenir une extension définie sur tout $\partial\Omega$, $\bar{u} : \partial\Omega \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^\nu$.
4. Projection de \bar{u} sur la variété \mathcal{N} .
5. Conclusion.

Étape 1 : Extension d'une application $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{N}$ à support compact à un $\bar{u} : \mathbb{R} \times [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}^\nu$. Fixons $g \in W^{1/2,2}(\mathbb{R}, \mathcal{N})$. Pour $(x, t) \in \mathbb{R} \times [0, \infty[$, nous posons, pour $\rho : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ lisse à support dans la boule unité $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^2$,

$$u_0(x, t) = \rho_t * g(x) = \frac{1}{t} \int_{\mathbb{R}} \rho(x - y)g(y) dy \text{ avec } \rho_t(z) = \frac{1}{t}\rho(z/t). \quad (3.20)$$

Remarquons qu'il s'agit d'une identité entre deux vecteurs de \mathbb{R}^ν .

Il convient de montrer que

- (i) $\|u_0\|_{L^2(\mathbb{R} \times [0, \infty[)} \leq \|g\|_{L^2(\mathbb{R})}$ mais cela est clair par les propriétés de la convolution.
- (ii) L'application u_0 , ainsi définie possède un gradient faible qui satisfait

$$\|Du_0\|_{L^2(\mathbb{R} \times [0, \infty[)} \leq C \|g\|_{W^{1/2,2}(\mathbb{R} \times \{0\})}. \quad (3.21)$$

L'existence du gradient faible est assurée par le lemme de Dubois–Raymond [67, Theorem 6.1.4]. Nous aurons simplement à justifier la majoration.

(iii) Enfin, nous utiliserons la continuité de la trace pour conclure que la trace de u_0 le long de $\mathbb{R} \times \{0\}$ coïncide avec l'application g .

Le point (i) étant traité, nous commençons par (ii) – (3.22). Voici des propriétés de ρ_t qui découlent de sa définition :

Affirmation. La fonction ρ_t satisfait

(a) $\text{Spt}(\rho_t) \subset \mathbb{B}_t(0)$.

(b) $\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dt} \rho_t(x) dx = \frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}} \rho_t(x) dx = 0$.

(c) $\int_{\mathbb{R}} \frac{d}{dx} \rho_t(x) dx = 0$.

(d) Le gradient de $(t, x) \mapsto \rho_t(x)$ satisfait $|D\rho_t(x)| \leq At^{-1}\chi_{\mathbb{B}_t(0)}(x)$ pour un $A > 0$ qui dépend de ρ .

Pour (3.22), nous commençons par observer par (b) et (c) que le gradient de u_0 vérifie

$$Du_0(x, t) = \int_{\mathbb{R}} D\rho_t(x - y)g(y) dy = \int_{\mathbb{R}} D\rho_t(x - y)[g(y) - g(x)] dy.$$

Ainsi, par l'inégalité de Hölder,

$$\begin{aligned} |Du_0(x, t)| &\leq \|D\rho_t\|_{L^2} \left[\int_{\mathbb{B}_t(x)} |g(x) - g(y)|^2 dy \right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \frac{A^2}{t^3} \left[\int_{\mathbb{B}_t(x)} |g(x) - g(y)|^2 dy \right]^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

par le point (d). Nous obtenons (3.22) en intégrant et le théorème de Fubini

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} |Du_0(x, t)|^2 dx dt &\leq A^2 \int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \int_{\mathbb{B}_t(x)} |g(x) - g(y)|^2 dy dt dx \\ &= A^2 \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} |g(x) - g(y)|^2 \int_{|x-y|}^\infty \frac{dt}{t^3} dy dx \\ &= \frac{A^2}{3} \iint_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}} \frac{|g(x) - g(y)|^2}{|x - y|^2} dx dy. \end{aligned}$$

Maintenant, nous montrons le point (iii). Il convient de montrer que

$$\text{Trace}_{\mathbb{R} \times \{0\}} u_0(x, t) = g(x).$$

Par les propriétés de la convolution,

$$u_0(\cdot, s) = \rho_s * g \xrightarrow[s \downarrow 0]{} g$$

dans $W^{1,2}(\mathbb{R})$. Par la continuité de la trace, nous concluons que

$$\text{Trace}_{\mathbb{R} \times \{0\}} u_0 = \lim_{s \downarrow 0} \text{Trace}_{\mathbb{R} \times \{0\}} u_0(\cdot, s + \cdot) = \text{Trace}_{\mathbb{R} \times \{0\}} \lim_{s \downarrow 0} u_0(\cdot, s + \cdot) = g$$

presque partout où, pour la dernière identité, nous avons utilisé la continuité de $u_0(\cdot, t)$ quand $t > 0$.

Étape 2 : Extension d'une application g depuis une partie du bord $\partial\Omega$ vers une application $\partial\Omega \rightarrow \mathbb{R}^v$. Nous allons étendre $g : \partial\Omega \rightarrow \mathcal{N}$ sur une famille finie d'ouverts $U \subset \partial\Omega$ qui recouvrent $\partial\Omega$ et où une lecture en cartes $\phi_i : U_i \rightarrow V_i \subset \mathbb{R}^v$ bilipschitziennes est possible. Considérons une partition de l'unité $(\varphi_i : \partial\Omega \rightarrow [0, 1])$ subordonnée aux ouverts U et consistant en des fonctions lisses positives, dont le support satisfait $\text{Spt}\varphi_i \subset U_i$ et enfin dont la somme égale la fonction constamment égale à 1 [67, Proposition 6.1.16]. Dès que l'on pose $g_i = \varphi_i g$, nous avons

$$g = \sum_i \varphi_i g = \sum_i g_i.$$

Lue en carte, g_i définit une application $g_i \circ \phi^{-1} \in W^{1/2,2}(V, \mathbb{R}^v)$. Le choix de la fonctions φ_i nous permet d'étendre la fonction $g_i \circ \phi^{-1}$ par zéro en dehors de V . Nous étendons, alors, comme dans l'étape 1, *confer* (3.20), par

$$u_i(x, t) = \rho_t * (g_i \circ \phi^{-1})(x).$$

Pour chaque i , cette fonction satisfait

- (i) $u_i \in W^{1,2}(\mathbb{R} \times [0, \infty[, \mathbb{R}^v)$
- (ii) $\text{Trace}_{\mathbb{R} \times \{0\}} u_i = g_i \circ \phi^{-1}$.

Étape 3 : Collage des applications Posons pour chaque $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, \infty)$

$$\bar{u}(x, t) = \sum_i u_i(\phi(x), t) \in W^{1,2}(\Omega \times [0, \infty[, \mathbb{R}^v) \quad (3.22)$$

avec, à nouveau, la convention que $u_i(\phi(\cdot), \cdot)$ est étendue par zéro. La trace est invariante par difféomorphismes ([64, Proposition 3.36] ou par densité) et est linéaire, si bien que

$$\text{Trace}_{\Omega \times \{0\}} \bar{u} = \sum_{i=1}^k \text{Trace}_{\Omega \times \{0\}} u_i(\phi(\cdot), \cdot) = \sum_{i=1}^k g_i = g \sum_{i=1}^k \varphi_i = g.$$

Nous avons donc exhibé une extension de g qui prend ses valeurs dans \mathbb{R}^v . Notons que \bar{u} est lipschitzienne sur $\Omega \times [t, \infty[$; les fonctions u_i sont lisse mais les cartes ne sont que bilipschitziennes et la partition de l'unité lipschitzienne.

Étape 4 : Projection de \bar{u} sur la variété \mathcal{N} . Nous avons qu'il existe $\delta_{\mathcal{N}} > 0$ tel que la projection lisse sur la variété \mathcal{N} est définie

$$\Pi : \{x \in \mathbb{R}^v : \text{dist}(x, \mathcal{N}) < \delta_{\mathcal{N}}\} \rightarrow \mathcal{N}.$$

Nous voudrions poser $u = \Pi \circ \bar{u}$. Pour cela, il faut s'assurer que les valeurs de \bar{u} ne sont pas trop loin de \mathcal{N} . Nous raisonnons comme dans la preuve de la proposition 3.9. Nous estimons pour chaque $x \in \partial\Omega$ et $t > 0$,

$$\text{dist}(\bar{u}(x, t), \mathcal{N}) \leq |\bar{u}(x, t) - g(y)| \quad (3.23)$$

$$\begin{aligned} &\leq \sum_{i=1}^k |\varphi_i(x)(u_i(\phi_i(x), t) - g \circ \phi_i^{-1} \circ \phi_i(y))| \\ &= \sum_{i=1}^k |u_i(\phi_i(x), t) - g \circ \phi_i^{-1} \circ \phi_i(y)| \end{aligned} \quad (3.24)$$

car $\varphi_1 \leq 1$. Pour chaque i , on estime

$$\begin{aligned} &|u_i(\phi_i(x), t) - g \circ \phi_i^{-1} \circ \phi_i(y)| \\ &= |\rho_t * g_i(\phi(x)) - g_i(\phi(y))| \\ &\leq \frac{\|\rho\|_\infty}{t} \int_{\{|\phi_i(x) - \phi_i(y)| \leq t\}} |g_i(z) - g_i(y)| \, dz. \end{aligned}$$

Reprenant (3.23)–(3.24), nous trouvons que

$$\text{dist}(\bar{u}(x, t), \mathcal{N}) \leq \|\rho\|_\infty \sum_{i=1}^k \frac{1}{t} \int_{\{|\phi_i(x) - \phi_i(y)| \leq t\}} |g_i(z) - g_i(y)| \, dz \quad (3.25)$$

Comme la famille finie de cartes ϕ est bilipschitzienne, il existe une constante telle que pour tout $i = 1, \dots, k$,

$$|\phi_i(x) - \phi_i(y)| \geq L|x - y|$$

si bien que le membre de droite de (3.25) est majoré par

$$\text{dist}(\bar{u}(x, t), \mathcal{N}) \leq \|\rho\|_\infty \sum_{i=1}^k 2L \int_{\{|x-y| \leq \frac{t}{L}\}} |g_i(z) - g_i(y)| \, dz.$$

où nous avons utilisé la notation moyenne. Nous considérons la moyenne maintenant par rapport à la variable y sur l'intervalle $\{|x - y| \leq \frac{t}{L}\}$ pour obtenir

$$\text{dist}(\bar{u}(x, t), \mathcal{N}) \leq \|\rho\|_\infty \sum_{i=1}^k 2L \int_{\{|x-y| \leq \frac{t}{L}\}} \int_{\{|x-y| \leq \frac{t}{L}\}} |g_i(z) - g_i(y)| \, dz.$$

Comme chaque g_i est dans l'espace $W^{1/2,2}$, il est également dans VMO et donc, par l'état,

$$\limsup_{t \downarrow 0} \sup_{x \in \partial\Omega} \text{dist}(\bar{u}(x, t), \mathcal{N}) = 0.$$

Il existe donc un $T > 0$ tel que si $0 < t < T$, alors \bar{u} est suffisamment proche de la variété \mathcal{N} . On pose alors pour chaque $(x, t) \in \partial\Omega \times [0, T[$, $u = \Pi \circ \bar{u}$. Par le principe de superposition (confer [37, Theorem 12.69][64, Proposition 3.16], $u \in W^{1,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$. Enfin,

$$\text{Trace}_{\partial\Omega \times \{0\}} u = \Pi \circ g = g.$$

Étape 5 : Conclusion. Par la régularité de $\partial\Omega$, nous savons qu'il existe un difféomorphisme bilipschitzien $\Phi^{int} : \partial\Omega \times [0, 1] \rightarrow (\partial\Omega + B(0, \delta)) \cap \bar{\Omega}$ pour un $\delta > 0$ suffisamment petit, l'extension est alors donnée par

$$u^{int} = u \circ \Phi^{int} : (\partial\Omega + B(0, \delta)) \cap \bar{\Omega} \rightarrow \mathcal{N}$$

qui est de trace $g : \partial\Omega \rightarrow \mathcal{N}$. De façon analogue, il existe un difféomorphisme bilipschitzien $\Phi^{ext} : \partial\Omega \times [0, 1] \rightarrow (\partial\Omega + B(0, \delta)) \cap \overline{\mathbb{R}^2 - \Omega}$ et on obtient

$$u^{ext} = u \circ \Phi^{ext} : (\partial\Omega + B(0, \delta)) \cap \overline{(\mathbb{R}^2 - \Omega)} \rightarrow \mathcal{N}.$$

Si nous posons

$$U = \begin{cases} u^{ext} & \text{sur } (\partial\Omega + B(0, \delta)) \cap \overline{(\mathbb{R}^2 - \Omega)} \\ u^{int} & \text{sur } (\partial\Omega + B(0, \delta)) \cap \bar{\Omega}, \end{cases}$$

nous obtenons $U \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ de trace $\text{Trace}_{\partial\Omega} U = g$. En effet, si deux fonctions de Sobolev sur deux domaines adjacents coïncident sur le bord au sens de la trace, alors par la définition de gradient faible et le théorème d'intégration par parties pour la trace [51, Exercice 15.1 (a)][2, Proposition 5.6.2], le recollement de ces deux fonctions admet une dérivée faible de carré intégrable.

Ceci conclut la preuve de la surjectivité de la trace. □

Comment nous allons le voir dans la section suivante, on ne peut en général pas étendre g à tout le domaine Ω .

3.10 Caractérisation des données au bord g qui admettent une extension – preuve de la proposition 3.14

Pour rappel, nous voulons montrer que $g \in W^{1/2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ s'étend si et seulement si elle est homotope à une fonction continue $g_0 : \partial\Omega \rightarrow \mathcal{N}$ qui est la restriction d'une fonction continue $u_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathcal{N}$ (confer proposition 3.14).

Comme il y a deux implications à prouver, nous divisons la preuve en deux.

Démonstration de la proposition 3.14 quand $g = \text{Trace}_{\partial\Omega}u$ et $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$. Supposons que $g \in W^{1/2,2}(\Omega, \mathcal{N})$ soit la trace d'une fonction $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$. Nous voulons montrer que g est homotope à une fonction continue $\partial\Omega \rightarrow \mathcal{N}$ qui est la restriction d'une application continue $\bar{\Omega} \rightarrow \mathcal{N}$. On étend

$$u : \Omega + B(0, \delta_0) \rightarrow \mathcal{N}$$

dans $W^{1,2}$ par la proposition de la surjectivité de la trace (proposition 3.15) ou, plus simplement, par le théorème d'extension par réflexion [37, Theorem 13.17][67, Lemma 6.2.1]. Pour $t > 0$ suffisamment petit, la convolution avec le noyau régularisant et lisse standard $\rho_t * u$ existe.

Ensuite, fixons $T > 0$ tel que si $0 < t \leq T$ alors $\rho_t * u$ existe et

$$\text{dist}(\rho_t * u, \mathcal{N}) \leq \delta_0$$

où δ est le rayon du voisinage tubulaire de sorte que la projection

$$\Pi : \{x \in \mathbb{R}^v : \text{dist}(x, \mathcal{N}) < \delta\} \rightarrow \mathcal{N}.$$

existe. Nous posons $\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ lisse et constante égale à 0 dans un voisinage de zéro et constante égale à 1 dans un voisinage de 1. Nous définissons pour $0 < t \leq T$ et $x \in \Omega$

$$H(t, x) = \Pi \circ (\rho_{T\theta(t)} * u(x)).$$

Comme la projection Π est Lipschitzienne, par les propriétés de la convolution, nous avons

1. L'application $H(1, \cdot)$ est continue sur $\bar{\Omega}$. Nous posons $g_0 = H(1, \cdot)|_{\partial\Omega}$ et $u_0 = H(1, \cdot)$ qui, nous allons le voir, donnent les applications annoncées.
2. L'application $t \rightarrow H(t, \cdot)$ est constante autour de $t = 0$ et $t = 1$ respectivement par le choix de la fonction θ .
3. L'application $t \rightarrow H(t, \cdot)$ porte l'homotopie à oscillation moyenne évanescence entre g et $H(1, \cdot)$. En effet, dans $W^{1,2}$

$$H(t, \cdot) \xrightarrow[t \downarrow 0]{} \Pi \circ u = u.$$

Par la continuité de la trace, dans $W^{1/2}$

$$\text{Trace}_{\partial\Omega}H(t, \cdot) \xrightarrow[t \downarrow 0]{} \text{Trace}_{\partial\Omega}u = g.$$

Or, $W^{1/2,2} \subset \text{VMO}$ avec injection continue par la proposition 3.3 (*confer* (3.7)). Nous raisonnons de façon analogue pour les autres points de continuités $t \in]0, 1]$. En particulier, la fonction $t \rightarrow H(t, \cdot)$ est séquentiellement continue dans VMO .

Ceci conclut la preuve de la première implication. □

Pour l'autre implication, nous ramenons le problème à la situation décrite par ce lemme :

Lemme 3.16 (Lemme de mollification dans la variété). *Considérons un ouvert régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et une fonction mesurable $u : \Omega \rightarrow \mathcal{N}$ telle que, dans un voisinage du bord de Ω , $u \in W^{1,2}$ et, sur Ω , $u \in \text{VMO}(\Omega, \mathcal{N})$. Alors, nous pouvons modifier les valeurs de l'application u , loin du bord, de sorte que $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$.*

Par la surjectivité de la trace, une fonction s'étend toujours dans $W^{1,2}$ sur un voisinage de celui-ci. Si l'on arrive à prolonger continûment ou dans VMO cette extension à tout l'ouvert, en fait nous obtenons une extension à valeur dans la variété sur tout l'ouvert.

Les outils principaux pour prouver ce lemme sont la caractérisation des compacts dans VMO (lemme 3.13) et une technique de mollification adaptative introduite par BOUSQUET, PONCE et VAN SCHAFTINGEN [8, Section 3].

Démonstration du lemme 3.16. Fixons une fonction $\phi : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ lisse et positive telle que $\phi = 0$ près du bord, 1 à l'intérieur et $\|D\phi\|_{L^\infty(\bar{\Omega})} < 1$ que nous fixerons plus tard. Nous posons pour $t > 0$ suffisamment petit

$$\bar{u}(x) = \Pi_{\mathcal{N}} \circ \int_{\Omega} \frac{1}{t^2} \rho\left(\frac{y}{t}\right) u(x - y\phi(x)) \, dy, \quad (3.26)$$

où $\Pi_{\mathcal{N}}$ est la projection sur \mathcal{N} et $\rho : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ est un noyau de convolution usuel : positif, lisse, à support compact dans la boule unité et d'intégrale unité sur \mathbb{R}^2 . Nous posons $\rho_t = \rho(\cdot/t)/t^2$. Le choix de t dépend du choix de ϕ ; le fait qu'un tel $t > 0$ existe suit du fait que $v_x(y) = u(x - y\phi(x))$ est à oscillation moyenne évanescence. La correspondance $x \in \bar{\Omega} \mapsto v_x \in \text{VMO}(\Omega, \mathcal{N})$ est continue (en montrant, par exemple, que la correspondance est dans $C(\bar{\Omega}, W^{1,2}(\Omega, \mathbb{R}^{\nu}))$) et donc la famille $(v_x)_{x \in \bar{\Omega}}$ est compacte. On montre alors que

$$\begin{aligned} \text{dist} \left(\int_{\Omega} \frac{1}{t^2} \rho\left(\frac{y}{t}\right) u(x - y\phi(x)) \, dy, \mathcal{N} \right) \\ \leq \|\rho\|_{L^\infty(\mathbb{R}^2)} \int_{\mathbb{B}_t(x)} \int_{\mathbb{B}_t(x)} |v_x(y) - v_x(z)| \, dy \, dz \end{aligned}$$

et le choix de t est donné par le lemme de caractérisation des compacts de VMO, lemme 3.13.

L'application \bar{u} a les propriétés désirées dès que ϕ sera choisi. En effet, supposons que l'application u soit de régularité $W^{1,2}$ dans $\partial\Omega_{3\delta}$ pour un $\delta > 0$. Ici,

$$\partial\Omega_{3\delta} = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) \leq 3\delta\}.$$

Nous choisissons la fonction positive ϕ comme étant nulle sur $\partial\Omega_\delta$ et strictement positive sur $\Omega - \partial\Omega_{2\delta}$. Ainsi, si x est tel que $\phi(x) = 0$, c'est-à-dire près du bord, alors

$$\bar{u}(x) = \Pi_{\mathcal{N}} \circ \left[\int_{\Omega} \rho_t(y) dy u(x) \right] = \Pi_{\mathcal{N}} \circ u(x) = u(x).$$

Sur $\partial\Omega_{2\delta} - \partial\Omega_\delta$, \bar{u} est de régularité $W^{1,2}$ car ϕ est lisse et u y est de régularité $W^{1,2}$ aussi. Sur $\Omega - \partial\Omega_{2\delta}$,

$$\phi_0 = \inf_{\Omega - \partial\Omega_{2\delta}} \phi > 0.$$

Par le changement de variable $y' = x - y\phi(x)$, nous pouvons montrer que l'intégrale de (3.26) est lisse sur $\Omega - \partial\Omega_{2\delta}$ et donc $W^{1,2}$. \square

Démonstration de la proposition 3.14 quand g est homotope à une fonction $\partial\Omega \rightarrow \mathcal{N}$ qui s'étend. Fixons $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$. Supposons que g est homotope dans $\text{VMO}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ à $u_0|_{\partial\Omega}$ où $u_0 : \bar{\Omega} \rightarrow \mathcal{N}$ est continue.

Par la surjectivité de la trace (proposition 3.15), il existe une application $U \in W^{1,2}(\partial\Omega \times [0, 1], \mathcal{N})$ telle que

$$\text{Trace}_{\partial\Omega \times \{0\}} U = g \quad \text{et} \quad \text{Trace}_{\partial\Omega \times \{1\}} U = U|_{\partial\Omega \times \{1\}}$$

est continue. Cette application définit une homotopie dans VMO entre g et $\text{Trace}_{\partial\Omega \times \{1\}} U$, quitte à lire U avec une application θ qui la rende localement constante près de $t = 0$ et $t = 1$ (confer (3.14)). Or, par hypothèse, g est également homotope à $u_0|_{\partial\Omega}$. Par la transitivité de l'homotopie (lemme 3.8, point 3), $U|_{\partial\Omega \times \{1\}}$ et $u_0|_{\partial\Omega}$ sont homotopes dans VMO . Or, par la proposition d'approximation (proposition 3.9), nous pouvons les supposer continûment homotopes.

Maintenant, nous utilisons des arguments d'homotopie continue. Comme $u_0|_{\partial\Omega}$ s'étend à $\bar{\Omega}$, il en va de même pour $U|_{\partial\Omega \times \{1\}}$ qui s'étend à tout $\bar{\Omega} \times \{1\}$, appelons-la $V : \bar{\Omega} \times \{1\} \rightarrow \mathcal{N}$. Nous avons donc construit une application

$$(\partial\Omega \times [0, 1]) \cup (\bar{\Omega} \times \{1\}) \rightarrow \mathcal{N}$$

en concaténant l'extension U avec V . Or le domaine de cette application est difféomorphe à $\bar{\Omega}$ de manière lipschitzienne. Cela donne une application $v : \Omega \rightarrow \mathcal{N}$ qui est de régularité $W^{1,2}$ dans un voisinage du bord et continue loin du bord. Par l'invariance par difféomorphisme lipschitzien la trace de v est $\text{Trace}_{\partial\Omega} v = g$.

Pour obtenir une application qui est $W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$, nous régularisons la fonction loin du bord $\partial\Omega$ à l'aide du lemme ci-dessus (lemme 3.16) pour obtenir une application u qui conclut la preuve. \square

3.11 Conclusion

De ce chapitre, nous retiendrons que l'homotopie «fait sens» pour les fonctions à oscillation moyenne bornée. Cette classe contient trois exemples : les fonctions uniformément continues, $W^{1/2,2}$ et $W^{1,2}$. Cela nous a permis de donner un critère pour savoir si $W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ est vide en fonction de critères purement topologiques (*confer* proposition 3.14).

Chapitre 4

Quantifier le problème d'extension

Dans le chapitre qui précède, nous avons reformulé en termes topologiques le fait que, pour une donnée $g : \partial\Omega \rightarrow \mathcal{N}$, l'ensemble des applications de Sobolev de trace g , $W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$, est vide ou non. Dans ce chapitre, nous allons quantifier ce fait en termes d'une énergie, l'énergie singulière $\mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g)$. Les outils que nous allons développer nous permettront de montrer la proposition suivante, cruciale pour notre approche et due à HARDT et LIN [31]

Proposition 4.1 ($W_g^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$, $p < 2$, est non vide). *Sur un ouvert borné régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, il existe une constante $C(p, \Omega, \mathcal{N}) > 0$ telle que pour tout $g \in W^{\frac{1}{2},2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$, si $p < 2$, il existe $u_0 \in W_g^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ qui satisfait*

$$\left(\int_{\Omega} |Du_0|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq C(p, \Omega, \mathcal{N}) \|g\|_{W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})}. \quad (4.1)$$

En effet, dès cette proposition prouvée, nous pourrions considérer des limites d'application p -harmoniques minimisantes et plus généralement des presque-minimiseurs de la p -énergie de Dirichlet quand $p \uparrow 2$; en effet, la classe sur laquelle nous minimisons est non-vide. Nous introduisons aussi, dans ce chapitre, la classe de fonctions dans laquelle nous nous attendons à observer de telles limites : ce sont des fonctions dans $W^{1,2}$ sur Ω sauf en un nombre fini de points où nous quantifions ce fait. Il s'agit d'*applications renormalisables*.

4.1 Résolutions topologiques

Nous avons vu qu'une application continue $g : \partial\Omega \rightarrow \mathcal{N}$ n'est en général pas la restriction d'une application continue $\bar{\Omega} \rightarrow \mathcal{N}$. Si toutefois, nous nous autorisons à retirer des points de l'ouvert ou des petites boules, il existe des applications u qui satisfont la définition suivante.

Définition 4.2 (Résolution topologique continue). Sur un ouvert borné régulier du plan $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, nous disons qu'une famille de lacet continu $(\gamma_i : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{N})_{i=1,\dots,k}$ constitue une *résolution topologique* d'une application continue $g : \partial\Omega \rightarrow \mathcal{N}$ s'il existe k points (a_1, \dots, a_k) , distincts deux-à-deux et inclus dans l'ouvert Ω ainsi un rayon $\rho > 0$ pour lesquels pour tout $i \neq j$,

$$\mathbb{B}_\rho(a_i) \cap \mathbb{B}_\rho(a_j) = \emptyset \quad \text{et} \quad \mathbb{B}_\rho(a_i) \cap \partial\Omega = \emptyset, \quad (4.2)$$

il existe une application continue

$$u : \bar{\Omega} - \bigcup_{i=1}^k B(a_i, \rho) \rightarrow \mathcal{N}$$

qui satisfait

$$u|_{\partial\Omega} = g \quad \text{et} \quad u(a_i + (\cdot)\rho)|_{\mathbb{S}^1} = \gamma_i$$

pour chaque $i = 1 \dots, k$.

Cette définition est tirée de MONTEIL, RODIAC et VAN SCHAFTINGEN [46, Définition 2.1]. Parfois, nous dirons aussi que u résout g le long des $(\gamma_i : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{N})_{i=1,\dots,k}$.

Fixons $(a_i)_{i=1,\dots,k}$ comme dans la définition et posons

$$\rho(a_i)_{i=1,\dots,k} = \min_{i \neq j=1,\dots,k} \left(\frac{|a_i - a_j|}{2}, \text{dist}(a_i, \partial\Omega) \right). \quad (4.3)$$

Alors si

$$0 < \rho < \rho(a_i)_{i=1,\dots,k},$$

alors ρ satisfait automatiquement la condition de non-intersection (4.2). Nous utiliserons cette notation tout au long du mémoire.

Nous voudrions étendre la définition 4.2 au cadre non-continu que le problème variationnel nous impose. Commençons par noter que les lacets γ_i peuvent toujours être choisis lisses et en particulier $W^{1/2,2}$ car toute fonction continue $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{N}$ est homotope à une application lisse. En effet, si $\tilde{\gamma} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{R}^v$ est lisse et uniformément proche de γ et donc de la variété \mathcal{N} , l'application

$$t \in [0, 1] \mapsto H(t, \cdot) = \Pi_{\mathcal{N}}((1-t)\gamma + t\tilde{\gamma})$$

existe et décrit l'homotopie entre u et $H(1, \cdot)$ qui est lisse. Ici, $\Pi_{\mathcal{N}}$ est la projection sur la variété \mathcal{N} .

Supposons maintenant qu'on ait une application $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$. Du chapitre précédent, nous savons que g est homotope dans $\text{VMO}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ à une application continue

$\partial\Omega \rightarrow \mathcal{N}$ (confer proposition 3.11), laquelle admet une résolution topologique continue portée par une application continue

$$\bar{\Omega} - \bigcup_{i=1}^k B(a_i, \rho) \rightarrow \mathcal{N}.$$

Par la proposition 3.14, il existe une application $u \in W^{1,2}(\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i), \mathcal{N})$ telle que

$$\text{Trace}_{\partial\Omega} u = g \quad \text{et} \quad \text{Trace}_{S^1} u(a_i + (\cdot)\rho) = \gamma_i.$$

Nous venons de montrer que le concept suivant admet des exemples.

Définition 4.3 (Résolution topologique de Sobolev). Sur un ouvert borné régulier du plan $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, nous disons qu'une famille de lacets $\gamma_i \in W^{1,2}(S^1, \mathcal{N})$, appelés *singularités*, constitue une *résolution topologique de Sobolev* d'une application $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ s'il existe k points $(a_i)_{i=1,\dots,k}$ et un rayon $0 < \rho < \rho(a_i)_{i=1,\dots,k}$ il existe une application

$$u \in W^{1,2}(\bar{\Omega} - \bigcup_{i=1}^k B(a_i, \rho), \mathcal{N})$$

qui satisfait

$$\text{Trace}_{\partial\Omega} u = g \quad \text{et} \quad \text{Trace}_{S^1} u(a_i + (\cdot)\rho) = \gamma_i$$

pour chaque $i = 1 \dots, k$.

Comme cas particuliers, nous avons les résolutions topologiques triviales où $k = 0$ et $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$.

Pour montrer que $W_g^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ nous allons «boucher les trous» de la résolution topologique à l'aide d'une extension radiale disponible quand la donnée est de régularité $W^{1,p}(S^1, \mathcal{N})$, $p < 2$. Dans la littérature, cette méthode s'appelle extension de degré zéro [58, Section 2.6][52] et semble remonter à BÉTHUEL et ZHENG [6, Lemma A.4].

4.2 Extension de degré zéro

Dans cette section nous expliquons la surjectivité de la trace quand $g \in W^{1,p}(\partial\mathbb{B}_\rho(a), \mathcal{N})$. Voici un résultat précis :

Proposition 4.4 (Extension de degré zéro). *Fixons $1 \leq p < 2$, $\mathbb{B}_\rho(a) \subset \mathbb{R}^2$ et $g \in W^{1,p}(\partial\mathbb{B}_\rho(a), \mathcal{N})$ alors la fonction radiale u définie pour $x \in \mathbb{B}_\rho(a)$ par*

$$u(x) = g\left(\rho \frac{x-a}{|x-a|}\right) \quad (4.4)$$

possède un gradient faible et satisfait

$$\int_{\mathbb{B}_\rho(a)} |Du|^p = \frac{\rho}{2-p} \int_{S_\rho^1} |g'|^p d\mathcal{H}^1. \quad (4.5)$$

En particulier, $u \in W^{1,p}(\mathbb{B}_\rho(a), \mathcal{N})$ et $\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\rho(a)} u = g$.

Rappelons le lemme suivant qui stipule que, quand l'exposant p est inférieur à la dimension de la source, avoir une dérivée faible p -intégrable est une propriété qui ne voit pas les ensembles de petite dimension.

Lemme 4.5 (Stabilité de $W^{1,p}$ par perturbations de taille \mathcal{H}^0). *Fixons $1 \leq p < 2$ et $\mathbb{B}_\rho(a) \subset \mathbb{R}^2$. Une application mesurable $u : \Omega \rightarrow \mathcal{N}$ satisfait $u \in W^{1,p}(\mathbb{B}_\rho(a), \mathcal{N})$ si et seulement si $u \in W^{1,p}(\mathbb{B}_\rho(a) - \{a\}, \mathcal{N})$*

Pour une preuve, voir MAZ'YA [43, Section 1.1.18] ou VAN SCHAFTINGEN [64, Proposition 3.17] et les références qu'ils contiennent.

Démonstration de la proposition 4.4. Par invariance par translation, nous supposons que $a = 0$. En coordonnées polaires, u possède une dérivée faible sur $\mathbb{B}_\rho(a) - \{a\}$ dans les directions radiale et angulaire et donc u possède un gradient faible sur $\mathbb{B}_\rho(a) - \{a\}$. Fixons $0 < \sigma < \rho$, en coordonnées polaires, nous avons

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{B}_\rho(a) - \mathbb{B}_\sigma(a)} |Du|^p &= \int_\sigma^\rho r \int_{S^1(a)} |Du|^p(\sigma r) d\mathcal{H}^1(\sigma) dr \\ &= \int_\sigma^\rho r^{1-p} \int_{S^1(a)} |[g(\rho \cdot)]'|^p(\sigma) d\mathcal{H}^1(\sigma) dr \end{aligned}$$

Nous obtenons donc

$$\int_{\mathbb{B}_\rho(a) - \mathbb{B}_\sigma(a)} |Du|^p = \frac{\rho^{2-p} - \sigma^{2-p}}{2-p} \int_{S_\rho^1(a)} \rho^{p-1} |g'|^p d\mathcal{H}^1.$$

Par le théorème de convergence monotone, quand $\sigma \downarrow 0$, nous observons que $|Du| \in L^p(\mathbb{B}_\rho(a))$ et

$$\int_{\mathbb{B}_\rho(a)} |Du|^p = \frac{\rho}{2-p} \int_{S_\rho^1(a)} |g'|^p d\mathcal{H}^1. \quad (4.6)$$

Nous concluons par le lemme 4.5 pour en tirer que $u \in W^{1,p}(\mathbb{B}_\rho(a))$. Concernant l'affirmation sur la trace, cela suit par densité. \square

Quand $p \uparrow 2$, l'extension radiale ne permet plus de conclure :

Proposition 4.6 (*Addendum de la proposition 4.4, extension de degré zéro, cas de $p = 2$*). Si $p = 2$, $g \in W^{1,2}(\partial\mathbb{B}_\rho(a), \mathcal{N})$, nous avons que u définie comme en (4.4) satisfait pour $0 < \sigma < \rho$,

$$\int_{\mathbb{B}_\rho(a) - \mathbb{B}_\sigma(a)} |Du|^2 = \rho \ln \frac{\rho}{\sigma} \int_{\mathbb{S}_\rho^1} |g'|^2 d\mathcal{H}^1. \quad (4.7)$$

Toutefois, pour tout $t > 0$, nous avons

$$t^2 |\{x \in \mathbb{B}_\rho(a) : |Du|(x) \geq t\}| \leq \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}_\rho^1} \min(|g'|^2, (t^2 \rho)^2) d\mathcal{H}^1. \quad (4.8)$$

Concernant la seconde estimation, (4.8), notons que par l'inégalité de Tchebychev, nous avons toujours

$$t^2 |\{x \in \mathbb{B}_\rho : |v(x)| \geq t\}| \leq \int_{\mathbb{B}_\rho(a)} |v|^2. \quad (4.9)$$

Ainsi, dans (4.8), le membre de droite est toujours plus petit que l'intégrale du carré.

Démonstration de l'addendum, proposition 4.6. La première conclusion, (4.7), suit de (4.6) quand $p \uparrow 2$. Pour la seconde, nous écrivons, par un changement de variable, pour tout $t > 0$,

$$\begin{aligned} t^2 |\{x \in \mathbb{B}_\rho : |Du|(x) \geq t\}| &= t^2 \int_0^\rho |\{x \in \partial\mathbb{B}_r : |Du|(x) \geq t\}| dr \\ &= t^2 \int_0^\rho r |\{x \in \partial\mathbb{B}_\rho(a) : |g'|(x) \geq rt\}| dr. \end{aligned} \quad (4.10)$$

D'une part, le dernier terme de l'égalité (4.10) est majoré par $t^2 r^2 / 2 |\mathcal{H}^1(\partial\mathbb{B}_\rho(a))|$. D'autre part, par le changement de variable $\tau = rt$, ce précédent terme (4.10) vaut

$$\begin{aligned} \int_0^{t\rho} \tau |\{x \in \partial\mathbb{B}_\rho(a) : |g'|(x) \geq \tau\}| d\tau &\leq \int_0^\infty \tau |\{x \in \partial\mathbb{B}_\rho(a) : |g'|(x) \geq \tau\}| d\tau = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{S}_\rho^1} |g'|^2 d\mathcal{H}^1 \end{aligned}$$

par la représentation en millefeuille (2.4). Cela montre (4.8). \square

4.3 Pourquoi $W_g^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ n'est jamais vide

Nous prouvons maintenant la proposition de l'introduction de ce chapitre (proposition 4.1). Toutefois, notre preuve ne livre pas l'estimation (4.1). Le résultat avec estimation est dû à HARDT et LIN [31, Theorem 6.2].

Démonstration de la proposition 4.1 sans estimation. Fixons $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$. Considérons une résolution topologique de Sobolev $(\gamma_i : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{N})_{i=1,\dots,k}$ portée par $u \in W^{1,2}(\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i), \mathcal{N})$. Par le théorème de Fubini, il existe $\rho < \rho' < \rho(a_i)_{i=1,\dots,k}$ tel que

$$\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho'}(a_i)} u = u|_{\partial\mathbb{B}_{\rho'}(a_i)}$$

est de régularité $W^{1,2}(\partial\mathbb{B}_{\rho'}(a_i))$. Par le plongement de Morrey–Companato (proposition 3.2), $u|_{\partial\mathbb{B}_{\rho'}(a_i)} : \partial\mathbb{B}_{\rho'}(a_i) \rightarrow \mathcal{N}$ y est continue.

Nous pouvons alors définir une fonction dans $\bar{u} \in W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ comme suit : $\bar{u} = u$ sur $\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}'_\rho(a_i)$ et sur chaque $\mathbb{B}'_\rho(a_i)$ nous étendons $u|_{\partial\mathbb{B}_{\rho'}(a_i)}$ de façon radiale avec la proposition 4.4. La trace de l'extension radiale le long de $\mathbb{B}'_\rho(a_i)$ est $u|_{\partial\mathbb{B}_{\rho'}(a_i)}$ car cette dernière est continue et elle coïncide avec la trace de u en $\partial\mathbb{B}'_\rho(a_i)$ par construction. L'application \bar{u} est dans $W^{1,p}$ sur

$$\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}'_\rho(a_i) \quad \text{et} \quad \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}'_\rho(a_i)$$

et les traces coïncident. Par la définition de gradient faible et le théorème d'intégration par parties, $\bar{u} \in W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$. La construction donne aussi

$$\text{Trace}_{\partial\Omega} \bar{u} = g = \text{Trace}_{\partial\Omega} u = g,$$

concluant ainsi la preuve. □

4.4 Quantifier la non-extension

Nous voudrions quantifier le fait qu'une application $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ puisse ou non s'étendre à tout Ω dans $W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$. En général, l'ouvert Ω n'est pas simplement connexe. Pour simplifier, commençons par quantifier la non-extension d'une application continue $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{N}$ vers une application continue définie sur la boule unité $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^2$, $\mathbb{B} \rightarrow \mathcal{N}$. De la topologie générale, nous savons que g s'étend si et seulement si g est homotope à une constante. En effet, il suffit de lire l'homotopie le long du rayon de la boule \mathbb{B} pour obtenir l'extension ou la définir ainsi. Nous pourrions donc définir et calculer

$$\lambda(\gamma) = \inf\{\ell(\tilde{\gamma}) : \tilde{\gamma} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{N} \text{ est homotope à } \gamma\} \quad (4.11)$$

où $\ell(\tilde{\gamma})$ est la longueur de la courbe $\tilde{\gamma}$ supposée lisse :

$$\ell(\tilde{\gamma}) = \int_{\mathbb{S}^1} |\tilde{\gamma}'|.$$

Si $\lambda(\gamma) = 0$, cela veut dire que γ est homotope à une constante ou encore s'étend dans \mathbb{B} . Dans les autres cas, cela mesure la longueur de la plus courte courbe homotope à γ . Intuitivement, nous nous attendons à ce qu'une grande longueur $\lambda(\gamma)$ soit le signe que la courbe γ soit davantage emmêlée dans la variété \mathcal{N} . Par exemple, quand la variété $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1$, $\lambda(\gamma) = 2\pi \deg(\gamma)$ où $\deg(\gamma)$ est le degré de l'application $\gamma : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathbb{S}^1$ [46, Section 2.2]; ce nombre compte le nombre de tours que réalise la courbe γ dans le cercle. Par conséquent, $2\pi \deg(\gamma)$ correspond à la longueur de la courbe.

Observons que cette définition fait sens quand $\gamma \in \text{VMO}(\mathbb{S}^1, \mathcal{N})$ et que l'homotopie est comprise dans le sens $\text{VMO}(\mathbb{S}^1, \mathcal{N})$ également. Comme toute courbe $\gamma \in \text{VMO}(\mathbb{S}^1, \mathcal{N})$ est homotope à une courbe lisse, nous pouvons supposer que $\tilde{\gamma}$ est lisse.

Commençons par nous assurer que l'infimum dans la définition (4.11) est fini et atteint.

Géodésiques fermées.

Proposition 4.7 (Existence de géodésiques fermées). *Considérons une variété riemannienne \mathcal{N} compacte. Fixons $\gamma \in \text{VMO}(\mathbb{S}^1, \mathcal{N})$. Il existe une géodésique de vitesse constante $\tilde{\gamma} : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{N}$ lisse qui réalise*

$$\ell(\tilde{\gamma}) = \lambda(\gamma).$$

Une telle application est appelée géodésique fermée.

De plus, le spectre des longueurs $\{\lambda(\gamma) : \gamma \in \text{VMO}(\mathbb{S}^1, \mathcal{N})\}$ est un sous-ensemble discret de la droite réelle.

Le spectre des longueurs est un invariant riemannien fin puisqu'il permet de calculer le spectre du Laplacien dans certain cas; nous renvoyons vers l'article de COLIN DE VERDIÈRE [65] pour les hypothèses précises.

En effet, la compacité est requise dans la preuve pour que les classes de fonctions $\mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{N}$ équi-continues soient précompactes pour l'uniforme convergence; il s'agit du critère d'Ascoli–Arzela. Ce phénomène se manifeste sur la surface de révolution $\mathbb{S}^1 \times \text{Graphe}(\exp) \subset \mathbb{R}^3$ où le lacet $\mathbb{S}^1 \times (0, \exp(0))$ est homotope à $\mathbb{S}^1 \times (0, \exp(-t))$ pour chaque $t \in \mathbb{R}$. Or, quand $t \uparrow +\infty$, la longueur de ce lacet tend vers 0. C'est également essentiel pour garantir l'existence d'un *rayon de normalité* $r > 0$ tel que toute courbe fermée qui a son image dans la boule géodésique $\mathbb{B}_r(a)$ est homotope au point $a \in \mathcal{N}$. L'existence

de l'exponentielle riemannienne assure qu'en chaque point un tel rayon existe mais il peut dépendre du point. La compacité ôte cette dépendance.

Notons que l'hypothèse n'est pas non plus nécessaire puisque l'espace \mathbb{R}^V et le cylindre $S^1 \times \mathbb{R}$ sont des variétés riemanniennes qui satisfont la conclusion de la proposition sans pour autant être compactes.

Nous donnons la preuve de ce résultat car il utilise finement le fait que \mathcal{N} est une variété riemannienne compacte [19, Theorem 2.2][36, Proposition 6.28]. Nous avons retenu la preuve des géomètres qui a l'avantage d'expliciter nos hypothèses sur la variété \mathcal{N} . La méthode directe du calcul des variations s'applique aussi. Nous ne donnons pas tous les détails dans la preuve mais insistons sur les résultats cruciaux de géométrie qui justifient notre hypothèse de compacité sur la variété \mathcal{N} . L'affirmation sur le fait que le spectre est discret pour des courbes de VMO est écrite chez [45, Proposition 3.2].

Démonstration de la proposition 4.7. Si γ est homotope à une constante, nous observons que cette constante définit une fonction lisse qui réalise l'infimum.

Supposons que γ ne soit pas d'homotopie triviale. Nous avons $\lambda(\gamma) < \infty$ car γ est homotope à une fonction lisse. Fixons $r > 0$ le rayon de normalité décrit plus haut. Il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que

$$2\lambda(\gamma) < rn. \quad (4.12)$$

Considérons une suite minimisante de courbes lisses que nous pouvons paramétrer à vitesse constante $(\gamma_k : S^1 \rightarrow \mathcal{N})_k$ telle que

$$\ell(\gamma_k) \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \lambda(\gamma).$$

Par le théorème d'Ascoli–Arzela, il existe une courbe $\gamma_0 : S^1 \rightarrow \mathcal{N}$ continue. Maintenant, pour chaque $i \in \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, nous remplaçons

$$\gamma_0|_{[\frac{i}{n}, \frac{i+1}{n}]}$$

par la géodésique de longueur minimale de $\gamma_0(i/n)$ à $\gamma_0((i+1)/n)$. Par le choix de n , (4.12), cela ne change pas la classe d'homotopie.

Par un argument par l'absurde, il est possible de montrer que la nouvelle courbe ainsi construite est de longueur $\lambda(\gamma)$ [19, Theorem 2.2][36, Proposition 6.28].

Enfin, la courbe construite n'est que C^∞ par morceaux. Près d'un angle éventuel, nous pouvons lisser dans une boule géodésique de rayon inférieur à r , la courbe en diminuant la longueur totale.

Pour montrer que le spectre de longueur est discret, nous devons montrer que les suites convergentes dans $\{\lambda(\gamma) : \gamma \in \text{VMO}(S^1, \mathcal{N})\}$ admettent une sous-suite constante. Étant donné une telle suite, nous considérons la suite correspondante de géodésiques qui réalisent

l'infimum. Cette suite de géodésiques admet une sous-suite par le théorème d'Ascoli–Arzela. Or, deux courbes uniformément proches sont homotopes et donc la suite des longueurs λ devient constante à partir d'un certain rang dans la suite. \square

La systole

Comme le spectre des longueurs est discret, il existe une première valeur non nulle dans $\{\lambda(\gamma) : \gamma \in \text{VMO}(\mathbb{S}^1, \mathcal{N})\}$. Ce nombre est appelé la *systole* de la variété \mathcal{N} et nous le noterons

$$\text{Sys}_{\mathcal{N}} = \inf\{\lambda(\gamma) \neq 0 : \gamma \in \text{VMO}(\mathbb{S}^1, \mathcal{N})\}.$$

Par définition $\text{Sys}_{\mathcal{N}} > 0$ et ce nombre correspond par définition à la longueur de la géodésique non homotope à une constante qui minimise la longueur. On peut aussi penser ce nombre comme un seuil entre homotopie triviale et non triviale : comme le spectre est discret $\lambda(\gamma) < \text{Sys}_{\mathcal{N}}$ si et seulement si γ est homotope à une constante. Notons que cela quantifie l'extension : puisque $\gamma : \partial\mathbb{B} \rightarrow \mathcal{N}$ s'étend à \mathbb{B} si et seulement si elle est homotope à une constante.

4.5 Borne inférieure locale

La quantité $\lambda(\gamma)$ permet également d'estimer inférieurement la p -énergie de Dirichlet sur des anneaux. Cette proposition nous servira dans la dernière section car par un processus d'expansion de boules (proposition 7.1) nous obtiendrons une borne inférieure de la p -énergie sur tout l'ouvert Ω .

Proposition 4.8 (Borne inférieure locale sur un anneau). *Si $\sigma > \rho > 0$ et $u \in W^{1,2}(\mathbb{B}_{\sigma}(a) - \mathbb{B}_{\rho}(a), \mathcal{N})$, alors pour $p \in [1, 2[$,*

$$(2 - p) \int_{\mathbb{B}_{\sigma}(a) - \mathbb{B}_{\rho}(a)} \frac{|Du|^p}{p} \geq \frac{\lambda^p(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\sigma}(a)} u)}{2p\pi} ((2\pi\sigma)^{2-p} - (2\pi\rho)^{2-p}). \quad (4.13)$$

Quand $p = 2$,

$$\int_{\mathbb{B}_{\sigma}(a) - \mathbb{B}_{\rho}(a)} \frac{|Du|^2}{2} \geq \frac{\lambda^2(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\sigma}(a)} u)}{4\pi} \ln \frac{\sigma}{\rho}. \quad (4.14)$$

Si $u \in W^{1,2}(\mathbb{B}_{\sigma}(a) - \{a\})$, on peut faire tendre $\rho \downarrow 0$ pour obtenir une version de la proposition sur un disque épointé. La seconde inégalité de la proposition donne une estimation sur l'énergie de Dirichlet nécessaire pour étendre la fonction $\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\sigma}} u$ au disque $\mathbb{B}_{\sigma}(a) - \mathbb{B}_{\rho}(a)$.

Le sens précis de $\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\sigma(a)}u)$ est le suivant : nous pensons

$$\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\sigma(a)}u \in W^{1/2}(\mathbb{S}^1, \mathcal{N}) \subset \text{VMO}(\mathbb{S}^1, \mathcal{N}) \quad (4.15)$$

qui est alors une courbe admissible dans l'infimum de λ .

Quand $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1$, l'estimation (4.13) fût établie par HARDT et LIN [32, Lemma 2.3]. Quant à (4.14), elle apparaît dans la preuve de [46, Lemma 2.11].

Démonstration de la proposition 4.8. L'intégration polaire suivie de l'inégalité de Jensen donne

$$\int_{\mathbb{B}_\sigma(a) - \mathbb{B}_\rho(a)} |Du|^p = \int_\rho^\sigma \int_{\mathbb{S}_r(a)} |Du|^p |\mathbb{S}_r| \, d\sigma \, dr \geq \int_\rho^\sigma \left(\int_{\mathbb{S}_r(a)} |Du| \, d\sigma \right)^p |\mathbb{S}_r| \, dr.$$

D'une part, nous avons l'estimation suivante : pour tout $r \in [\sigma, \rho]$

$$\int_{\mathbb{S}_r(a_i)} |Du| \geq \lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)}u)$$

qui s'obtient en écrivant le gradient en coordonnées polaires :

$$Du = Du_r + \frac{1}{r} Du_\theta.$$

On observe que la restriction $\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)}u$ définit une courbe admissible dans la définition de l'infimum de $\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)}u)$ au sens de (4.15). On obtient donc

$$\int_{\mathbb{S}_r(a_i)} |Du| \geq \frac{1}{r} \int_{\mathbb{S}_r(a_i)} |Du_\theta| = \int_{\mathbb{S}(a_i)} |Du_\theta|(r \cdot) \geq \lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)}u). \quad (4.16)$$

Remarquons que pour chaque $r \in [\sigma, \rho]$, $\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)}u$ et $\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\sigma(a_i)}u$ sont homotopes dans VMO. En effet, l'homotopie est donnée par $t \mapsto u(\theta(t)x)$ où θ est localement constante en $t = 0$ et vaut r et localement constante en $t = 1$ et vaut σ . La continuité de l'homotopie suit du fait que cette fonction est continue dans $W^{1,2}$. L'homotopie implique alors

$$\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_r(a)}u) = \lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\sigma(a)}u). \quad (4.17)$$

D'autre part, $|\mathbb{S}_r| = 2\pi r$. Ainsi, on conclut que

$$\int_{\mathbb{B}_\sigma(a) - \mathbb{B}_\rho(a)} |Du|^p \geq \int_\rho^\sigma \frac{\lambda(\gamma_i)^p}{|\mathbb{S}_r|^{p-1}} = \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\sigma(a)}u)^p}{(2\pi)^{p-1}(2-p)} (\sigma^{2-p} - \rho^{2-p}).$$

Le cas $p = 2$ suit en passant à la limite dans le cas $p < 2$ soit en raisonnant de manière similaire. \square

De la preuve, nous observons que, pour $u \in W^{1,2}(\mathbb{B}_\sigma(a) - \{a\})$, la limite

$$\lambda(u, a_i) = \lim_{\rho \downarrow 0} \lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\rho(a)} u) \quad (4.18)$$

existe. En effet, de (4.17), nous savons qu'à partir d'un ρ suffisamment petit, le membre de droite de (4.18) devient constant. Cette convention est classique pour le degré topologique [26, Chap. III Proposition 1.1].

L'argument d'homotopie ne fonctionne pas quand $p < 2$ toutefois, nous avons la variante suivante pour le cercle $\mathbb{S}_r^1(a) \subset \mathbb{R}^2$ et valide pour des applications de $W^{1,p}(\mathbb{S}_r^1(a), \mathcal{N})$ quand $1 \leq p < 2$.

Proposition 4.9 (Borne inférieure locale sur les cercles). *Si $\rho > 0$ et $u \in W^{1,p}(\mathbb{S}_r^1(a), \mathcal{N})$, $1 \leq p < 2$, alors*

$$\frac{1}{r} \int_{\mathbb{S}_r^1(a)} |Du_\theta|^p \geq \frac{\lambda^p(\text{Trace}_{\mathbb{S}_r^1(a)} u)}{(2\pi r)^{2-p}}.$$

Comme le cercle est de dimension 1, nous savons que l'application de l'énoncé admet un représentant absolument continu (*confer* proposition 3.2) et donc, si ce représentant est encore noté u ,

$$\text{Trace}_{\mathbb{S}_r^1(a)} u = u|_{\mathbb{S}_r^1(a)} = u$$

qui est une courbe admissible dans la définition de λ . La notation de la trace est justifiée par les applications de cette proposition.

Démonstration de la proposition 4.9. Par l'inégalité de Jensen,

$$\frac{1}{r} \int_{\mathbb{S}_r^1(a)} |Du_\theta|^p \geq \frac{1}{r} \frac{1}{(2\pi r)^{p-1}} \left(\int_{\mathbb{S}_r^1(a)} |Du_\theta| \right)^p$$

et nous concluons par (4.16). \square

4.6 Énergie singulière, $\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g)$

Le spectre des longueurs compris, nous pouvons quantifier, la non-extension d'une application $\partial\Omega \rightarrow \mathcal{N}$ comme suit sans restriction de simple connexité sur le bord. L'introduction de cette quantité est due à MONTEIL, RODIAC et VAN SCHAFTINGEN [45, Definition 2.5] dans le cas $p = 2$.

Définition 4.10 (Énergie singulière, $\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g)$). Fixons $1 \leq p \leq 2$ et une application $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$, la quantité

$$\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g) = \inf \left\{ \sum_{i=1}^k \frac{\lambda^p(\gamma_i)}{4p\pi} : \right. \\ \left. (\gamma_i : \mathbb{S}^1 \rightarrow \mathcal{N})_{i=1,\dots,k} \text{ est une résolution topologique de Sobolev de } g \right\}.$$

est appelée p -énergie singulière de g .

Si $\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g) = 0$, alors nous sommes en présence d'une résolution topologique triviale. En d'autres termes, g admet une extension $\Omega \rightarrow \mathcal{N}$. Dans les autres cas, cela donne un nombre qui, s'il est grand, témoigne soit d'un grand nombre de singularités γ_i soit que les singularités γ_i ont une grande longueur.

4.7 Continuité de $p \mapsto \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g)$

Pour les besoins du mémoire, nous avons défini l'énergie singulière avec un paramètre p qui correspondra au même paramètre que $p \uparrow 2$. Assurons que $p \mapsto \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g)$ est une fonction continue.

Proposition 4.11 (Continuité en p de $\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g)$). *Considérons $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$. Si $1 < p < 2$, alors*

$$\text{Sys}_{\mathcal{N}}^{2-p} \frac{1/4\pi}{1/2p\pi} \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\gamma) \leq \mathcal{E}_2^{\text{sg}}(\gamma) \leq \frac{1/4\pi}{[1/2p\pi]^{\frac{2}{p}}} \left(\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\gamma) \right)^{\frac{2}{p}}.$$

En particulier, par l'étau,

$$\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g) \xrightarrow[p \uparrow 2]{} \mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g).$$

De cette proposition, on conclut qu'on peut toujours supposer, pour une donnée au bord g fixée, que la p -énergie singulière est uniformément bornée en $p \in (1, 2]$.

La preuve consiste à considérer des infima sur les résolutions topologiques de Sobolev dans ce lemme avec $C(Q) = \frac{1}{2Q\pi}$ et le choix $Q = 2$ et $P = p$.

Lemme 4.12 (Inégalité algébrique). *Considérons $1 < P < Q < \infty$. Posons $E_P = C(P) \sum_{i=1}^k \lambda_k^P$ où $k \in \mathbb{N}_*$ et $\lambda_k \geq s > 0$. Alors,*

$$s^{Q-P} \frac{C(Q)}{C(P)} E_P \leq E_Q \leq \frac{C(Q)}{C(P)^{Q/P}} (E_P)^{\frac{Q}{P}}.$$

Démonstration du lemme. Notons que

$$s^{Q-P} \sum_{i=1}^k \lambda_k^P \leq \sum_{i=1}^k \lambda_k^Q \leq \left(\sum_{i=1}^k \lambda_k^P \right)^{\frac{Q}{P}}$$

en utilisant, d'une part, la comparaison des normes $\ell^P(\mathbb{N})$ discrètes et, d'autre part, notre hypothèse $\lambda_k \geq s$. \square

4.8 Résolutions topologiques de Sobolev p -minimales

Une résolution topologique de Sobolev p -minimale de $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$, $p \in [1, 2]$, est une résolution topologique de Sobolev de g où les singularités $(\gamma_i)_{i=1, \dots, k}$ vérifient

$$\sum_{i=1}^k \frac{\lambda^p(\gamma_i)}{2p\pi} = \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g).$$

Comme le spectre de longueurs est discret, il existe de tels objets. Notons que les $(\gamma_i)_{i=1, \dots, k}$ forment une résolution topologique de Sobolev.

Proposition 4.13 (Existence de résolutions topologiques de Sobolev p -minimales). *Fixons un ouvert borné et régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, une donnée $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ et $p \in [1, 2]$. Il existe une résolution topologique de Sobolev p -minimale.*

Démonstration de la proposition 4.13. Comme il existe une résolution topologique pour toute donnée $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$, l'infimum $\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g)$ est fini. Considérons une suite minimisante $(\gamma_i^{(n)})_{i=1, \dots, k_n}$ telle que

$$\sum_{i=1}^{k_n} \frac{\lambda^p(\gamma_i^{(n)})}{2p\pi} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g).$$

Par l'existence de la systole,

$$k_n \frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^p}{2p\pi} \leq \sum_{i=1}^{k_n} \frac{\lambda^p(\gamma_i^{(n)})}{2p\pi}$$

et donc k_n est uniformément borné. Quitte à passer à une sous-suite, nous pouvons supposer que $k_n = k$ est constant. Aussi, pour chaque $i = 1, \dots, k$,

$$\frac{\lambda^p(\gamma_i^{(n)})}{2p\pi} \leq \sum_{i=1}^k \frac{\lambda^p(\gamma_i^{(n)})}{2p\pi}.$$

Donc, quitte à passer i fois à la sous-suite, nous pouvons supposer que chaque $\lambda(\gamma_i^{(n)})$ est constant. Mais, alors, cette sous-suite satisfait pour tout n ,

$$\sum_{i=1}^k \frac{\lambda^p(\gamma_i^{(n)})}{2p\pi} = \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g),$$

donnant ainsi l'existence annoncée. □

4.9 Énergie renormalisée, $\mathcal{E}_2^{\text{ren}}$

Après avoir défini une énergie pour la donnée au bord $g \in W^{1/2}$, nous nous tournons vers les résolutions topologiques de Sobolev. Nous l'avons vu dans l'extension radiale (proposition 4.4), pour « boucher les trous », le paramètre $p = 2$ est critique. Nous nous attendons donc à ce que des minimiseurs de la p -énergie de Dirichlet tendent vers les minimiseurs d'une énergie qui compenserait exactement ce fait. Voici une définition précise également introduite en [45, Définition 7.1] :

Définition 4.14 (Applications renormalisables et énergie renormalisée, $W_{\text{ren}}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ et $\mathcal{E}_2^{\text{ren}}$). Fixons un ouvert borné et régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et donnée au bord $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$. Une application mesurable $u : \Omega \rightarrow \mathcal{N}$ est dite *renormalisable* s'il existe $k \in \mathbb{N}$ points (a_1, \dots, a_k) distincts deux-à-deux de Ω tels que $u \in W^{1,2}(\Omega - \{a_1, \dots, a_k\}, \mathcal{N})$, son *énergie renormalisée*

$$\mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u) = \liminf_{\rho \downarrow 0} \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du|^2}{2} - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\rho(a_i)} u)^2}{4\pi} \ln \frac{1}{\rho}$$

est finie et sa trace $\text{Trace}_{\partial\Omega} u = g$. La classe des applications renormalisables est notée $W_{\text{ren},g}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$.

Contrairement au cas de $W^{1,p}$, une application de $W^{1,2}(\Omega - \{a_1, \dots, a_k\})$ n'est en général pas dans $W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ (confer lemme 4.5) : c'est le cas par exemple de l'application $x \in \mathbb{B}_1(0) \mapsto x/|x|$ qui est de régularité $W^{1,2}(\mathbb{B}_1(0) - \{0\})$. Par simplicité, nous supposons toujours que dans la définition $\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\rho(a_i)} u) > 0$. S'il advenait toutefois que $\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\rho(a_i)} u) = 0$ pour un i donné, le fait que $u \in W_{\text{ren},g}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ implique pour

$\sigma \in]0, \rho(a_i)_{i=1, \dots, k}[$ que

$$\begin{aligned} & \lim_{\rho \downarrow 0} \int_{\mathbb{B}_\sigma(a_i) - \mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du|^2}{2} \\ & \leq \lim_{\rho \downarrow 0} \int_{\bigcup_{i=1}^k (\mathbb{B}_\sigma(a_i) - \mathbb{B}_\rho(a_i))} \frac{|Du|^2}{2} - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_\rho(a_i)} u)^2}{4\pi} \ln \frac{\sigma}{\rho} \\ & \leq \mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u) + \sum_{i=1}^k \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_\rho(a_i)} u)^2}{4\pi} \ln \frac{1}{\sigma}. \end{aligned}$$

Par le lemme de Fatou, $|Du|$ est de carré intégrable sur $\mathbb{B}_\sigma(a_i)$.

En fait dans la définition, la limite inférieure est une limite (*confer* [45, Lemma 2.11] dans le cas $p = 2$) :

Lemme 4.15 (Décroissance de la p -énergie renormalisée tronquée à ρ). *Fixons un ouvert borné et régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et donnée au bord $g \in W^{1/2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ et $u \in W_{\text{ren},g}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$. En prenant $(a_i)_{i=1, \dots, k}$ comme dans la définition, les fonctions*

1. $\rho \in [0, \rho(a_i)_{i=1, \dots, k}[\mapsto \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du|^2}{2} - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_\rho(a_i)} u)^2}{4\pi} \ln \frac{1}{\rho}$,
2. pour $p \in [1, 2[$,

$$\rho \in [0, \rho(a_i)_{i=1, \dots, k}[\mapsto \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du|^p}{p} - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_\rho(a_i)} u)^p}{2p\pi} \frac{(2\pi)^{2-p} - (2\pi\rho)^{2-p}}{2-p}$$

sont décroissantes.

La preuve repose sur la borne inférieure locale (proposition 4.8) et motive la définition de la p -énergie renormalisée : pour $u \in W_{\text{ren},g}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$,

$$\mathcal{E}_p^{\text{ren}}(u) = \lim_{\rho \downarrow 0} \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du|^p}{p} - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_\rho(a_i)} u)^p}{2p\pi} \frac{(2\pi)^{2-p} - (2\pi\rho)^{2-p}}{2-p}.$$

Au moins formellement,

$$\mathcal{E}_p^{\text{ren}}(u) \xrightarrow[p \uparrow 2]{} \mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u). \quad (4.19)$$

Nous verrons plus bas que c'est en effet le cas.

Démonstration du lemme 4.15. Par la continuité de la norme, il suffit de montrer que la seconde famille de fonctions est croissante car une limite ponctuelle de fonctions croissantes est croissante; il est aussi possible de raisonner comme dans le cas $p = 2$. Dans le cas du

point 2 , nous fixons $0 < \rho < \sigma < \rho(a_i)_{i=1,\dots,k}$. La soustraction de la fonction évaluée en ρ par la fonction évaluée en σ donne

$$\begin{aligned} & \int_{\bigcup_{i=1}^k (\mathbb{B}_\sigma(a_i) - \mathbb{B}_\rho(a_i))} \frac{|Du|^p}{p} - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\rho(a_i)} u)^p}{2p\pi} \frac{(2\pi\sigma)^{2-p} - (2\pi\rho)^{2-p}}{2-p} \\ & \geq \sum_{i=1}^k \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\rho(a_i)} u)^p}{2p\pi} \frac{(2\pi\sigma)^{2-p} - (2\pi\rho)^{2-p}}{2-p} \\ & \quad - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\rho(a_i)} u)^p}{2p\pi} \frac{(2\pi\sigma)^{2-p} - (2\pi\rho)^{2-p}}{2-p} \end{aligned}$$

par la borne inférieure proposition 4.8 appliquée à $\mathbb{B}_\sigma(a_i) - \mathbb{B}_\rho(a_i)$ pour chaque $i = 1, \dots, k$. \square

Donnons une autre forme de l'énergie renormalisée qui ne fait pas apparaître de limite.

Proposition 4.16 (Expression polaire de l'énergie renormalisée $\mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u)$). *Fixons un ouvert borné et régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et donnée au bord $g \in W^{1/2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ et $u \in W_{\text{ren},g}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$. En prenant $(a_i)_{i=1,\dots,k}$ comme dans la définition d'application renormalisable et si $\sigma \in]0, \rho(a_i)_{i=1,\dots,k}[$,*

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u) + \sum_{i=1}^k \frac{\lambda^2(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\sigma(a_i)} u)}{4\pi} \ln \frac{1}{\sigma} \\ & = \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\sigma(a_i)} \frac{|Du|^2}{2} + \sum_{i=1}^k \int_0^\sigma \left[\int_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du|^2}{2} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\sigma(a_i)} u)^2}{4\pi r} \right] dr. \quad (4.20) \end{aligned}$$

Réciproquement, si le membre de droite est fini pour un $\sigma \in]0, \rho(a_i)_{i=1,\dots,k}[$ alors $u \in W_{\text{ren},g}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ et satisfait (4.20).

Si $p \in [1, 2]$,

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_p^{\text{ren}}(u) + \sum_{i=1}^k \frac{\lambda^p(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\sigma(a_i)} u)}{2p\pi} \frac{(2\pi)^{2-p} - (2\pi\sigma)^{2-p}}{2-p} \\ & = \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\sigma(a_i)} \frac{|Du|^p}{p} \\ & \quad + \sum_{i=1}^k \int_0^\sigma \left[\int_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du|^p}{p} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\sigma(a_i)} u)^p (2\pi r)^{2-p}}{2p\pi r} \right] dr. \quad (4.21) \end{aligned}$$

En particulier, la proposition et sa preuve nous apprennent que les termes entre crochets sont des fonctions intégrables sur $[0, \rho(a_i)_{i=1,\dots,k}]$. Cette observation sera utile plus

tard quand la somme dans (4.20) sera un terme d'erreur. Par la régularité de l'intégrale, cette somme tend vers zéro quand $\sigma \downarrow 0$ par la régularité de l'intégrale. Ainsi, quand $\sigma \downarrow 0$, dans la seconde identité 4.21, nous obtenons que

$$\mathcal{E}_p^{\text{ren}}(u) + \sum_{i=1}^k \frac{\lambda^p(u, a_i)}{2p\pi} \frac{(2\pi)^{2-p}}{2-p} = \int_{\Omega} \frac{|Du|^p}{p}, \quad (4.22)$$

montrant par là que les applications renormalisables appartiennent à la classe $W_g^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$.

Démonstration de la proposition 4.16. Par définition de l'énergie renormalisée et l'existence de la limite dans la définition (confer lemme 4.15)

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u) + \sum_{i=1}^k \frac{\lambda^2(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\sigma}(a_i)}u)}{4\pi} \ln \frac{1}{\sigma} \\ &= \lim_{\rho \downarrow 0} \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_{\sigma}(a_i)} \frac{|Du|^2}{2} + \sum_{i=1}^k \left[\int_{\mathbb{B}_{\sigma}(a_i) - \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} \frac{|Du|^2}{2} - \frac{\lambda^2(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\sigma}(a_i)}u)}{4\pi} \ln \frac{\sigma}{\rho} \right] \\ &= \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_{\sigma}(a_i)} \frac{|Du|^2}{2} + \sum_{i=1}^k \lim_{\rho \downarrow 0} \int_{\rho}^{\sigma} \left[\int_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du|^2}{2} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)}u)^2}{4\pi r} \right] dr. \end{aligned}$$

En raisonnant comme dans la proposition 4.8, c'est-à-dire par l'inégalité de Jensen et l'écriture du gradient en coordonnées polaires, le terme entre crochets est positif. La conclusion suit alors du théorème de convergence monotone de Levi. La réciproque consiste à procéder dans l'autre sens.

La preuve de la seconde identité suit exactement les mêmes étapes. \square

Nous sommes maintenant en mesure de prouver la limite quand $p \uparrow 2$ annoncée en (4.19).

Proposition 4.17 (Approximation de $\mathcal{E}_2^{\text{ren}}$ par $\mathcal{E}_p^{\text{ren}}$ quand $p \uparrow 2$). *Fixons un ouvert borné et régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et donnée au bord $g \in W^{1/2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ et $u \in W_{\text{ren},g}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$. Nous avons*

$$\mathcal{E}_p^{\text{ren}}(u) \xrightarrow{p \uparrow 2} \mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u).$$

Dans le cas du cercle $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1$, ce type de résultat était déjà connu en 1995 pour les *applications harmoniques canoniques* du problème de Ginzburg–Landau [4, Section I.3] en témoigne la thèse de RADULESCU [53, Theorem 1 page xi]; toutefois, les articles qui découlèrent de la thèse ne semblent pas faire mention de ce résultat.

Démonstration de 4.17. Par la proposition 4.16 précédente, il suffit de montrer que (4.21) tend vers (4.20) quand $p \uparrow 2$. La continuité de la norme assure que l'intégrale sur le domaine $\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\sigma(a_i)$ converge. Nous avons donc réduit le problème à devours prouver que pour chaque $i = 1, \dots, k$,

$$\int_0^\sigma \left[\int_{\partial \mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du|^p}{p} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_\sigma(a_i)} u)^p (2\pi r)^{2-p}}{2p\pi r} \right] dr$$

$$\xrightarrow{p \uparrow 2} \int_\rho^\sigma \left[\int_{\partial \mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du|^2}{2} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_r(a_i)} u)^2}{4\pi r} \right] dr.$$

Comme l'application u possède un gradient de carré intégrable loin des points

$$(a_1, \dots, a_k),$$

pour presque chaque $r \in [0, \rho(a_i)_{i=1, \dots, k}]$, $|Du|$ est de carré intégrable sur le cercle $\partial \mathbb{B}_r(a_i)$. En particulier par la continuité de la norme, pour presque chaque $r \in [0, \rho(a_i)_{i=1, \dots, k}]$, le terme entre crochets du membre de gauche converge vers le membre de droite. Cherchons un chapeau de Lebesgue en vue d'appliquer le théorème de convergence dominée. Pour cela, nous fixons $r \in [0, \rho(a_i)_i]$ pour lequel l'énergie sur $\partial \mathbb{B}_r(a_i)$ est finie. Ensuite, par l'inégalité de Young avec exposants

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{2-p} = 1,$$

on observe que

$$|Du|^p \cdot \left(\frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_\sigma(a_i)} u)}{2\pi r} \right)^{2-p} \leq p \frac{|Du|^2}{2} + \left(\frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_\sigma(a_i)} u)}{2\pi r} \right)^2 \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{2} \right). \quad (4.23)$$

En multipliant l'inégalité (4.23) précédente par

$$\frac{1}{p} \cdot \left(\frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_\sigma(a_i)} u)}{2\pi r} \right)^{p-2},$$

nous obtenons

$$\frac{|Du|^p}{p} - \frac{1}{p} \left(\frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_\sigma(a_i)} u)}{2\pi r} \right)^p$$

$$\leq \left(\frac{2\pi r}{\lambda(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_\sigma(a_i)} u)} \right)^{2-p} \left[\frac{|Du|^2}{2} - \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_\sigma(a_i)} u)}{2\pi r} \right)^2 \right] \quad (4.24)$$

que l'on intègre sur les cercles $\partial\mathbb{B}_r(a_i)$:

$$\int_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du|^p}{p} d\mathcal{H}^1 - \frac{1}{p} \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\sigma(a_i)} u)^p}{(2\pi r)^{p-1}} \\ \leq \left(\frac{2\pi\rho(a_i)_{i=1,\dots,k}}{\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\sigma(a_i)} u)} \right)^{2-p} \left[\int_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du|^2}{2} d\mathcal{H}^1 - \frac{1}{2} \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\sigma(a_i)} u)^2}{2\pi r} \right].$$

Par hypothèse le terme entre crochets est intégrable et fournit donc un chapeau de Lebesgue à la famille. Nous concluons par le théorème de convergence dominée de Lebesgue. \square

4.10 Conclusion

Nous avons maintenant quantifié le problème en termes d'énergies qui encodent la topologie et qui sont stables par passage à la limite $p \uparrow 2$. Nous pouvons maintenant passer au programme annoncé dans l'introduction à savoir la mise au point d'une borne supérieure et d'une borne inférieure à l'énergie renormalisée.

Chapitre 5

Borne supérieure sur les presque-minimiseurs

Nous commençons par donner une borne supérieure sur les suites d'applications de presque-minimiseurs de la p -énergie de Dirichlet. Cette étape dans le cas $W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) \neq \emptyset$ était simple puisque tout $u_0 \in W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ était admissible dans la définition d'infimum (confer proposition 1.2, en particulier la borne (1.23) dans la preuve). Sous notre hypothèse

$$W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) = \emptyset$$

ou de manière équivalente $\mathcal{E}^{\text{sg}}(g) \neq 0$, on ne peut espérer une telle borne : en effet, la proposition 1.3 d'existence d'une sous-suite convergente impliquerait l'existence d'une limite $u_0 \in W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$, qui est vide. Dès lors, il est naturel que la borne supérieure fasse apparaître la p -énergie de Dirichlet que l'on retranche d'une quantité qui tend vers $+\infty$ quand $p \uparrow 2$.

Proposition 5.1 (Borne supérieure sur la p -énergie de Dirichlet). *Considérons un ouvert borné et régulier Ω et $g \in W^{1/2,2}(\Omega, \mathcal{N})$. Posons pour $p \in]1, 2[$*

$$I_p = \inf \left\{ \int_{\Omega} \frac{|Dv|^p}{p} : v \in W_g^{1,p}(\Omega, \mathcal{N}) \right\}. \quad (5.1)$$

Considérons une famille $(u_p)_p$ telle que $u_p \in W_g^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ et

$$\epsilon_p = \left[I_p - \int_{\Omega} \frac{|Du_p|^p}{p} \right] \xrightarrow{p \uparrow 2} 0. \quad (5.2)$$

Alors, pour tout $u \in W_{\text{ren},g}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$, dès que l'on associe les k points $a_i \in \Omega$ de la définition d'application renormalisable, nous obtenons pour $\rho \in]0, \rho(a_i)_i[$

$$\overline{\lim}_{p \uparrow 2} \left[\int_{\Omega} \frac{|Du_p|^p}{p} - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda^p(u, a_i)}{2p\pi} \frac{(2\pi)^{2-p}}{2-p} \right] \leq \mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u). \quad (5.3)$$

Dans le cas du cercle $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1$ et de minimiseurs, HARDT et LIN disposent de l'énoncé suivant [32, Theorem 2.10] :

$$\int_{\Omega} \frac{|Du_p|^p}{p} \leq \sum_{i=1}^k \frac{\lambda^p(u, a_i)}{2p\pi} \frac{(2\pi)^{2-p}}{2-p} + C(\Omega, [g]_{\text{Lip}}).$$

Nous bénéficions de l'énergie renormalisée $\mathcal{E}_2^{\text{ren}}$ introduite par MONTEIL, RODIAC et VAN SCHAFTINGEN [46, Definition 7.1].

La limite supérieure que satisfait la famille $(u_p)_p$ est également satisfaite par le $u \in W_{\text{ren},g}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ de l'énoncé. En effet, par la proposition 4.17,

$$\mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u) = \lim_{p \uparrow 2} \mathcal{E}_p^{\text{ren}}(u) = \overline{\lim}_{p \uparrow 2} \mathcal{E}_p^{\text{ren}}(u).$$

Or, par l'écriture de $\mathcal{E}_p^{\text{ren}}$ en coordonnées polaires (proposition 4.16), évaluée en $\sigma = 0$,

$$\mathcal{E}_p^{\text{ren}}(u) = \int_{\Omega} \frac{|Du|^p}{p} - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda(u, a_i)^p}{2p\pi} \frac{(2\pi)^{2-p}}{2-p},$$

où l'écriture $\lambda(u, a_i)$ a été définie en (4.18).

Ainsi,

$$\mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u) = \lim_{p \uparrow 2} \int_{\Omega} \frac{|Du|^p}{p} - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda(u, a_i)^p}{2p\pi} \frac{(2\pi)^{2-p}}{2-p}. \quad (5.4)$$

Dés lors, pour prouver la borne supérieure (proposition 5.1), il suffit de savoir que $W_{\text{ren},g}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) \subset W_g^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$. Cela suit de l'écriture de $\mathcal{E}_p^{\text{ren}}$ en coordonnées polaires (confer (4.21) de la proposition 4.16).

Démonstration de la proposition 5.1. Par (5.4), notre hypothèse (5.2) et le fait que

$$W_{\text{ren},g}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) \subset W_g^{1,p}(\Omega, \mathcal{N}),$$

nous trouvons

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u) &= \overline{\lim}_{p \uparrow 2} \int_{\Omega} \frac{|Du|^p}{p} - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u)^p}{2p\pi} \frac{(2\pi)^{2-p}}{2-p} \\ &\geq \overline{\lim}_{p \uparrow 2} \int_{\Omega} \frac{|Du_p|^p}{p} - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u)^p}{2p\pi} \frac{(2\pi)^{2-p}}{2-p} + \epsilon_p. \end{aligned}$$

Par les propriétés de la limite supérieure, le dernier membre vaut le résultat annoncé. \square

Chapitre 6

Densité dans $W^{1,p}(\Omega_\delta, \mathcal{N})$ de la classe $\mathcal{R}^{1,2}(\Omega_\delta, \mathcal{N})$

Pour établir la borne inférieure, nous allons la construire pour une classe dense de fonctions de $W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ puis passer à la limite. Cette classe dense de fonctions consiste en les fonctions $W^{1,2}$ sur tout le domaine à l'exception d'un nombre fini de points. Pour des raisons techniques, à partir de maintenant, nous pensons les applications de $W_g^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ comme des applications définies sur

$$\Omega_\delta = \bar{\Omega} + B(0, \delta) \{x \in \mathbb{R}^2 : \text{dist}(\bar{\Omega}, x) \leq \delta\}.$$

Par la surjectivité de la trace (proposition 3.15), pour tout $g \in W^{1/2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$, il existe $\delta > 0$ et $U \in W^{1,2}(\Omega_\delta - \Omega, \mathcal{N})$ de trace $\text{Trace}_{\partial\Omega} u = g$. Nous étendons alors $u \in W_g^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ par

$$u = \begin{cases} u & \text{sur } \Omega \\ U & \text{sur } \Omega_\delta - \Omega. \end{cases} \quad (6.1)$$

Les traces coïncidant, $u \in W^{1,p}(\Omega_\delta, \mathcal{N})$. Notons que la correspondance $g \mapsto U$ n'est pas canonique mais dès lors que nous avons construit U (confer la preuve de la proposition 3.15) à partir de g , cette association ne fait pas de choix. Dès à présent, à $g \in W^{1/2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$, nous associons $\delta > 0$ et U via la construction que nous venons de décrire. Au regard du problème que nous venons de décrire, ceci ne pose pas de problème car g est une donnée du problème.

Voici une définition précise de la classe dense :

Définition 6.1 (La classe $\mathcal{R}^{1,2}(\Omega_\delta, \mathcal{N})$). Pour une variété riemannienne \mathcal{N} , sur un ouvert régulier et borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et une donnée $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$, nous disons que $u \in \mathcal{R}^{1,2}(\Omega_\delta, \mathcal{N})$ s'il existe $k \in \mathbb{N}$ point $a_1, \dots, a_k \in \Omega$ tels que $u \in W^{1,2}(\Omega_\delta - \{a_1, \dots, a_k\}, \mathcal{N})$.

La présence de g dans la définition a pour but de fixer $\delta > 0$.

Notons que si $v \in R(\Omega, \mathcal{N})$ alors $v \in W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ dès que $p < 2$ par le lemme de perturbation sur des ensembles de mesure \mathcal{H}^0 , lemme 4.5. En particulier, v possède un gradient faible sur tout Ω .

La proposition de densité s'énonce comme suit :

Proposition 6.2 (Densité de la classe $\mathcal{R}^{1,2}(\Omega_\delta, \mathcal{N})$). *Fixons une variété riemannienne \mathcal{N} , un ouvert régulier et borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, $p < 2$ et $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$. Considérons $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ de trace $\text{Trace}_{\partial\Omega} u = g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ étendu par (6.1). Pour tout $\epsilon > 0$, il existe $v \in \mathcal{R}^{1,2}(\Omega_\delta, \mathcal{N})$ telle que*

$$\int_{\Omega_\delta} |u - v|^p + \int_{\Omega_\delta} |Du - Dv|^p \leq \epsilon.$$

De plus, $\text{Trace}_{\partial\Omega} v$ et $\text{Trace}_{\partial\Omega} u$ sont homotopes dans $\text{VMO}(\partial\Omega, \mathcal{N})$.

La stratégie de la preuve est la suivante : pour un $\eta > 0$ petit, nous recouvrons le domaine Ω de boules de rayon η . Par compacité, il y en a un nombre fini. Nous distinguons alors les boules en deux classes : les *bonnes* boules qui satisfont une estimation du type

$$\int_{2\mathbb{B}} |Du|^p < \Lambda \eta^{2-p}$$

pour un $\Lambda > 0$. Ici, $2\mathbb{B}$ désigne la boule \mathbb{B} dont le volume a été doublé. Les *mauvaises* boules vérifient

$$\Lambda \eta^{2-p} \leq \int_{2\mathbb{B}} |Du|^p.$$

Sur les bonnes boules, le choix d'un $\Lambda > 0$ suffisamment petit va nous permettre de projeter des régularisation du u sur la variété \mathcal{N} tandis que sur les mauvaises boules, dont l'aire est contrôlée, on procède par extension radiale.

L'approche que nous venons de décrire remonte à Béthuel [3, Theorem 2] et fut adaptée par PONCE et VAN SCHAFTINGEN [52] puis avec BOUSQUET [9, 8]. Cette méthode apparaît aussi chez GASTEL et NERF [28]. Notre contribution est l'homotopie des traces dans ce contexte. Notons que la classe $\mathcal{R}^{1,2}$ qui apparaît dans les articles sus-mentionnés consiste plutôt en des fonctions lisses sur Ω en dehors d'un nombre fini de points plutôt que des fonctions de régularité $W^{1,2}$.

Afin de ne pas alourdir les énoncés qui suivent nous allons fixer une application u qui vérifie les hypothèses de la proposition 6.2 ainsi que le domaine Ω et la variété \mathcal{N} . Nous étendons u via (6.1).

6.1 Changer les valeurs de u sur des boules

Voici deux lemmes que nous allons admettre.

Lemme 6.3 (Changer u sur les mauvaises boules). Fixons $\Lambda > 0$. Il existe une constante $C_p > 0$ telle que, pour toute boule $\mathbb{B}_\eta(a) \subset \Omega_\delta$ telle que

$$\Lambda\eta^{2-p} \geq \int_{\mathbb{B}_{2\eta}(a)} |Du|^p.$$

Il existe une application $v \in W^{1,p}(\Omega_\delta, \mathcal{N})$ et $\eta' \in]\frac{3}{2}\eta, 2\eta[$ telle que

- (i) v est de régularité $W^{1,2}$ sur $\mathbb{B}_\eta(a) - \{a\}$.
- (ii) $u = v$ sur $\Omega_\delta - \mathbb{B}_{2\eta}(a)$.
- (iii) $\int_{\Omega_\delta} |Du - Dv|^p \leq C_p \int_A |Du|^p$ pour un ouvert $A \subset \mathbb{B}_{2\eta}$ qui vérifie $|A| \leq \frac{C_p}{\Lambda} \eta^p \int_A |Du|^p$.
- (iv) $\int_{\Omega_\delta} |u - v|^p \leq C_p \eta^p \int_{\mathbb{B}_{2\eta}(a)} |Du - Dv|^p$.

Ce premier lemme se base essentiellement sur la proposition 4.4 d'extension radiale continue autour de a . Ensuite, un argument d'approximation donne une fonction lisse et donc en particulier $W^{1,2}$ sur la boule. Ce lemme est écrit pour $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^N)$ chez [52, Proposition 4.1] et $W^{k,p}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ chez [28, Lemma 2].

Voyons le second lemme. Dans l'énoncé, le nombre $\text{Conv}(\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n)$ désigne le rayon de convexité de la variété \mathcal{N} quand elle est plongée dans \mathbb{R}^n . Il réfère à un nombre strictement positif qui donne la taille du rayon maximal qu'une boule géodésique peut avoir pour que l'enveloppe convexe dans \mathbb{R}^n soit contenue dans le voisinage tubulaire de \mathcal{N} . La compacité de la variété \mathcal{N} garantit que ce nombre soit fini. En particulier, ce nombre dépend du plongement choisi.

Lemme 6.4 (Changer u sur les bonnes boules). Il existe $\Lambda = \Lambda(p) > 0$ et une constante $C_p(\mathcal{N}) > 0$ qui dépend de p et de \mathcal{N} , tels que pour toute boule $\mathbb{B}_\eta(a) \subset \Omega_\delta$ qui satisfait

$$\Lambda\eta^{2-p} < \int_{\mathbb{B}_{2\eta}(a)} |Du|^p$$

et

$$2\eta \leq \text{Conv}(\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n),$$

il existe une application $v \in W^{1,p}(\Omega_\delta, \mathcal{N})$ telle que

- (i) v est $W^{1,2}$ sur $\mathbb{B}_\eta(a)$.
- (ii) $u = v$ sur $\Omega_\delta - \mathbb{B}_{2\eta}(a)$.
- (iii) $\int_{\Omega_\delta} |Du - Dv|^p \leq C_p(\mathcal{N}) \int_A |Du|^p$ pour un ouvert $A \subset \mathbb{B}_{2\eta}$ qui vérifie $|A| \leq C_p \eta^p \int_A |Du|^p$.

$$(iv) \int_{\Omega_\delta} |u - v|^p \leq C_p(\mathcal{N}) \eta^p \int_{\mathbb{B}_{2\eta}} |Du - Dv|^p.$$

Le choix de $\Lambda > 0$ est choisi de sorte à ce que u soit suffisamment proche de la variété \mathcal{N} , permettant ainsi de mollifier et projeter l'application sur la variété \mathcal{N} . Ce lemme est écrit pour $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{S}^N)$ chez [52, Proposition 5.1] et $W^{k,p}(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ chez [28, Lemma 3].

6.2 Démonstration de la proposition de densité

Nous suivons l'article [52, Theorem 1.7] pour ce qui concerne l'approximation.

Démonstration de la proposition 6.2. Nous commençons par recouvrir l'ouvert Ω par des boules d'une façon précise.

Fixons $\eta > 0$ tel que

$$2\eta < \text{Conv}(\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^n) \quad \text{et} \quad 4\eta < \delta. \quad (6.2)$$

La première condition va nous permettre d'appliquer le lemme des bonnes boules (*confer* lemme 6.4) tandis que la seconde condition assure qu'une boule de rayon 2η centrée dans Ω est contenue dans Ω_δ . Plus tard dans la preuve nous le choisirons plus précisément.

Par une variante du théorème de recouvrement de Besicovitch [7, Theorem 5.8.1], nous pouvons recouvrir le compact $\bar{\Omega}$ par un nombre fini de boules $\mathbb{B}_\eta(a_i)$ qui consiste en $\beta \in \mathbb{N}$ familles finies de boules $\mathcal{B}^1, \dots, \mathcal{B}^\beta$ telles que si $\mathbb{B}_\eta(a_i)$ et $\mathbb{B}_\eta(a_j)$ appartiennent à la même famille alors

$$\mathbb{B}_{2\eta}(a_i) \cap \mathbb{B}_{2\eta}(a_j) = \emptyset.$$

Il est important de noter que le nombre β ne dépend ni du compact ni du choix de η . Aussi, nous pouvons supposer que toutes les boules sont centrées dans l'ouvert Ω . En effet, si une boule est centrée en un point du bord, il suffit de la recouvrir par des boules qui ne sont pas centrées sur le bord. Enfin, par simplicité, nous supposons que chaque famille contient $k \in \mathbb{N}$ boules.

Fixons $\Lambda > 0$ comme dans le lemme 6.4. Sous cette condition, la conclusion des deux lemmes est la même selon que la boule soit bonne ou mauvaise. Posons $u_0 = u$ nous allons construire inductivement une suite d'approximation u_1, \dots, u_β . Pour construire u_j à partir de u_{j-1} nous appliquons les lemmes 6.3 et 6.4 inductivement à u_j avec les boules de la collection \mathcal{B}^j . Nous obtenons après itération des boules de \mathcal{B}_j , une application $u_{j+1} \in W^{1,p}(\Omega_\delta, \mathcal{N})$ telle que, si nous posons

$$A^j = \bigcup_{i=1}^k A_i^j$$

où les A_i^j sont les ensembles A donnés par les lemmes, nous obtenons

- (i) u_{j+1} est de régularité $W^{1,2}$ sur $\bigcup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}^j} (\mathbb{B}_\eta(a) - \{a\})$.
- (ii) $u_{j+1} = u_j$ sur $\Omega_\delta - \bigcup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}^j} \mathbb{B}_\eta(a)$.
- (iii) $\int_{\Omega_\delta} |Du_{j+1} - Du_j|^p \leq C_p(\mathcal{N}) \int_{A^j} |Du_j|^p$ pour un ouvert $A^j \subset \Omega_{\delta/2}$ qui vérifie $|A^j| \leq C_p(\mathcal{N}) \eta^p \int_{\Omega_\delta} |Du_j|^p$.
- (iv) $\int_{\Omega_\delta} |u_{j+1} - u_j|^p \leq C_p(\mathcal{N}) \eta^p \int_{\Omega_\delta} |Du - Dv|^p$.

Pour écrire le point (iii), nous avons utilisé le fait que la famille \mathcal{B}^j consiste en des boules disjointes pour observer que

$$\begin{aligned} |A^j| &= \sum_{i=1}^k |A_i^j| \leq C_p(\mathcal{N}) \eta^p \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{B}_{2\eta}^i(a)} |Du|^p \\ &= C_p(\mathcal{N}) \eta^p \int_{\bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_{2\eta}^i(a)} |Du|^p \leq C_p(\mathcal{N}) \eta^p \int_{\Omega_\delta} |Du_j|^p. \end{aligned}$$

Maintenant, nous montrons inductivement que pour tout $j = 1, \dots, \beta$, nous avons

- (i) u_j est de régularité $W^{1,2}$ sur $\bigcup_{l=1}^j \bigcup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}^l} (\mathbb{B}_\eta(a) - \{a\})$.
- (ii) $u_j = u_0$ sur $\Omega_\delta - \bigcup_{l=1}^j \bigcup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}^l} \mathbb{B}_\eta(a)$.
- (iii) $\int_{\Omega_\delta} |Du_j - Du_0|^p \leq C_p^j(\mathcal{N}) \int_{B^j} |Du|^p$ pour un ouvert $B^j = \bigcup_{j=1}^l A^j \subset \Omega_{\delta/2}$ tel que $|B^j| \leq C_p^j(\mathcal{N}) \eta^p \int_{\Omega_\delta} |Du_0|^p$.
- (iv) $\int_{\Omega_\delta} |u_j - u_0|^p \leq C_p^j(\mathcal{N}) \eta^p \int_{\Omega} |Du - Dv|^p$.

Si $l = 1$, cela suit de la construction de u_1 à partir de u_0 . Supposons donc que la propriété est vraie pour un $j \in [1, \beta - 1]$ et montrons-la pour $j + 1$. Les propriétés (i) et (ii) suivent de la définition de u_{j+1} , la propriété (iv) de l'inégalité triangulaire. Il reste la propriété (iii) à prouver. Observons par l'inégalité triangulaire et notre hypothèse d'induction que

$$\left(\int_{\Omega_\delta} |Du_{j+1} - Du_0|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_{\Omega_\delta} |Du_{j+1} - Du_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega_\delta} |Du_j - Du_0|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

qui est majoré par

$$\begin{aligned}
& \sqrt[p]{C_p(\mathcal{N})} \left(\int_{A^j} |Du_j|^p \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\int_{\Omega_\delta} |Du_j - Du_0|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \sqrt[p]{C_p(\mathcal{N})} \left(\int_{A^j} |Du_0|^p \right)^{\frac{1}{p}} + (1 + \sqrt[p]{C_p(\mathcal{N})}) \left(\int_{\Omega_\delta} |Du_j - Du_0|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\
& \leq \sqrt[p]{C_p(\mathcal{N})} \left(\int_{A^j} |Du_0|^p \right)^{\frac{1}{p}} + (1 + \sqrt[p]{C_p(\mathcal{N})}) C_p^j(\mathcal{N}) \left(\int_{B^j} |Du_0|^p \right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Nous posons

$$C_p^{j+1}(\mathcal{N}) = \left(\sqrt[p]{C_p(\mathcal{N})} + (1 + \sqrt[p]{C_p(\mathcal{N})}) C_p^j(\mathcal{N}) \right)^p$$

de sorte que

$$\left(\int_{\Omega_\delta} |Du_{j+1} - Du_0|^p \right)^{\frac{1}{p}} \leq \sqrt[p]{C_p^{j+1}(\mathcal{N})} \left(\int_{B^j \cup A^j} |Du_0|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Or, $B^{j+1} = B^j \cup A^j$, ce qui montre l'estimation sur la différence des gradients. Il reste à estimer

$$\begin{aligned}
|B^{j+1}| & \leq |B^j| + |A^j| \\
& \leq C_p^j(\mathcal{N}) \eta^p \int_{\Omega_\delta} |Du_0|^p + C_p(\mathcal{N}) \eta^p \int_{\Omega_\delta} |Du_j|^p \\
& \leq C_p^j(\mathcal{N}) \eta^p \int_{\Omega_\delta} |Du_0|^p + C_p(\mathcal{N}) \eta^{2p} \left(\int_{\Omega_\delta} |Du_0|^p + \int_{\Omega_\delta} |Du_j - Du_0|^p \right) \\
& \leq \left(C_p^j(\mathcal{N}) + C_p(\mathcal{N}) 2^p (1 + C_p^j(\mathcal{N})) \right) \eta^p \int_{\Omega_\delta} |Du_0|^p
\end{aligned}$$

par notre hypothèse d'induction et l'estimation sur la différence des gradients que nous venons de montrer. Nous supposons, quitte à redéfinir $C_p^{j+1}(\mathcal{N})$ que la quantité entre crochets est égale à $C_p^{j+1}(\mathcal{N})$.

Posons $v = u_\beta$. Après β itérations nous obtenons, vu que $u_0 = u$, et que la collection de boules recouvre Ω ,

- (i) v est de régularité $W^{1,2}$ sur $\Omega_\delta - \{a_1, \dots, a_n\}$ où $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \Omega$ consiste en les centres des boules.
- (ii) $v = u$ sur $\Omega_\delta - \Omega_{\delta/2}$.
- (iii) $\int_{\Omega_\delta} |Dv - Du|^p \leq C_p^\beta(\mathcal{N}) \int_{B^\beta} |Du|^p$ pour un ouvert $B^\beta \subset \Omega_{\delta/2}$ tel que $|B^\beta| \leq C_p^\beta(\mathcal{N}) \eta^p \int_{\Omega_\delta} |Du|^p$

$$(iv) \int_{\Omega_\delta} |v - u|^p \leq C_p^\beta(\mathcal{N}) \eta^p \int_{\Omega} |Du - Dv|^p.$$

Le premier point suit du fait que u est de régularité $W^{1,2}$ en dehors de Ω . Le second point se justifie par le choix du rayon η des boules.

Observons par la régularité de l'intégrale que quand $\eta \downarrow 0$, les membres de gauche des points (iii) et (iv) tendent vers zéro. Comme $C_p^\beta(\mathcal{N})$ est une constante universelle, étant donné $\epsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ qui satisfait (6.2) tel que

$$\int_{\Omega_\delta} |v - u|^p + \int_{\Omega_\delta} |Dv - Du|^p \leq \epsilon.$$

Ceci montre la conclusion d'approximation.

Pour l'argument d'homotopie, observons que $\text{Trace}_{\partial\Omega} u$ et $\text{Trace}_{\partial\Omega_\delta} u$ sont homotopes. En effet, la fonction est de régularité $W^{1,2}$ sur $\Omega_\delta - \Omega$. Cet ouvert est bilipschitzien et il existe un difféomorphisme bilipschitzien entre $\Omega_\delta - \Omega$ et $\partial\Omega \times [0, 1]$. La lecture de u le long de $\partial\Omega \times \{t\}$, $t \in [0, 1]$ définit l'homotopie dans VMO désirée pour peu que la lecture soit localement constante près de $t = 0$ et $t = 1$. Ensuite, la construction de $v \in W^{1,2}(\Omega_\delta - \{a_1, \dots, a_n\}, \mathcal{N})$ où $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \Omega$, a permis de préserver les valeurs de u sur $\Omega_\delta - \Omega_{\delta/2}$ et en particulier

$$\text{Trace}_{\partial\Omega_\delta} v = \text{Trace}_{\partial\Omega_\delta} u.$$

Comme $v|_{\Omega_\delta - \Omega} \in W^{1,2}(\Omega_\delta - \Omega, \mathcal{N})$, $\text{Trace}_{\partial\Omega_\delta} v$ et $\text{Trace}_{\partial\Omega} v$ sont homotopes par le même argument que plus haut. Enfin, par la transitivité de l'homotopie

$$\text{Trace}_{\partial\Omega} u \quad \text{et} \quad \text{Trace}_{\partial\Omega} v$$

sont homotopes, concluant ainsi la preuve. □

Chapitre 7

Bornes inférieures

Dans cette section, nous voulons établir une borne inférieure pour la p -énergie qui coïncide avec la borne supérieure quand $p \uparrow 2$. Voici l'inégalité que nous voulons établir (*confer* proposition 7.7) : il existe une constante C_p qui tend vers l'unité quand $p \uparrow 2$ telle que

$$\int_{\Omega_\delta} \frac{|Du|^p}{p} \geq C_p \cdot \frac{\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g)}{2-p}.$$

Nous posons $\Omega_\delta = \bar{\Omega} + B(0, \delta)$. Pour montrer une telle borne nous suivons l'approche qui fonctionne dans le cas de la fonctionnelle de Ginzburg-Landau (*confer* SANDIER [54] et SERFATY [55, Chapter 4], MONTEIL, RODIAC et VAN SCHAFTINGEN[45, Proposition 6.9]). L'idée est de borner d'abord sur de petites boules qui contiennent une charge topologique λ et, ensuite, de laisser grandir cette famille de boules selon un paramètre temporel. Par boules, nous entendons des disques $\mathbb{B}_\rho(a) \subset \mathbb{R}^2$. On obtient dans notre cas la proposition suivante :

Proposition 7.1 (Expansion de boules). *Fixons $p \in]1, 2[$, $g \in W^{1/2, 2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$, $u \in \mathcal{R}^{1,2}(\Omega_\delta, \mathcal{N})$ de trace $\text{Trace}_{\partial\Omega} u = g$. Supposons qu'il existe $c > 0$ tel que*

$$(2-p) \int_{\Omega_\delta} \frac{|Du|^p}{p} \leq c.$$

Pour tout $\eta \in]0, \delta/2[$, posons

$$T^{p-1} = \frac{\pi\eta}{c}.$$

Pour chaque $t \in [0, T]$, il existe une collection finie de boules fermées $\mathcal{B}(t)$ telle que

(i) Pour tout $t \in [0, T]$ et pour chaque boule $\mathbb{B} \in \mathcal{B}(t)$, $\mathbb{B} \subset \bar{\Omega}_\delta$ et

$$\sum_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}(t)} \text{diam}(\mathbb{B}) \leq 2\eta.$$

(ii) Pour tout $t \in [0, T[$, les boules de la collection $\mathcal{B}(t)$ sont deux à deux disjointes.

(iii) Pour tout $s, t \in [0, T]$, tels que $s < t$, $\bigcup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}(s)} \mathbb{B} \subset \bigcup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}(t)} \mathbb{B}$.

(iv) Pour tout $t \in [0, T]$, pour toute boule $\mathbb{B}_{\rho(t)} \in \mathcal{B}(t)$,

$$2\pi\rho(t) = \int_0^t \sum_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}(s) \cap \mathbb{B}_{\rho(t)}} (\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}}u))^{\frac{1}{p-1}} ds.$$

(v) Pour tout $t \in]0, T]$, pour toute boule $\mathbb{B}_{\rho(t)} \in \mathcal{B}(t)$,

$$c \geq (2-p) \int_{\mathbb{B}_{\rho(t)}} \frac{|Du|^p}{p} \geq (2\pi\rho(t))t^{1-p}.$$

La preuve montre aussi que l'intégrande du point (iv) est une fonction en escalier (fonction simple) et donc intégrable. Le point (iv) implique que quand $t = 0$, la collection de boules $\mathcal{B}(0)$ est un ensemble fini de points dans Ω ; ce sont des boules dégénérées.

Plus tard, dans la proposition 8.1, nous allons faire tendre $\eta \downarrow 0$. Il peut alors paraître paradoxal d'étudier un processus d'expansion de boules. L'idée est que cette construction donne un temps qui dépend de c et non de la fonction u . Le choix de c , dans la preuve de la proposition 8.1 sera de la forme

$$c = \sup_{p \in [1, 2[} (2-p) \int_{\Omega_\delta} \frac{|Du_p|^p}{p},$$

où u_p est une suite de presque minimiseurs de la p -énergie de Dirichlet.

Pour la preuve nous collectons quelques résultats techniques tout en expliquant les idées principales de la proposition 7.1.

7.1 Croissance du rayon de boules

La preuve de la proposition 7.1 repose sur une construction d'une famille de boules qui grandit en fonction du paramètre temporel t . Au temps t , le rayon d'une boule $\mathbb{B}_{\rho(t)}^i$ sera choisi comme

$$2\pi\rho(t) = t\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\mathbb{B}_{\rho(t)}^i).$$

Ceci implique que seules les boules qui contiennent une charge grandissent. Toutefois, le rayon ne peut être défini de cette manière, puisqu'il apparaît de part et d'autre de l'égalité. La preuve utilise le fait que l'énergie singulière d'une boule qui grandit avec t est constante tant que l'ensemble des singularités que contient la boule reste le même.

Comme nous imposons une taille maximale aux boules de la proposition 7.1, les boules ne peuvent grandir indéfiniment. On peut estimer le temps T minimal pour qu'une telle collection existe. Tout d'abord, supposons que la somme des rayons satisfait, au regard du point (i) :

$$\sum_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}(T)} \text{diam}(\mathbb{B}) = 2\eta.$$

La condition (i) ne donne qu'une inégalité; nous supposons qu'elle est saturée.

Dès lors, en sommant (v) sur les boules de la collection $\mathcal{B}(T)$, on obtient

$$\begin{aligned} c &\geq (2-p) \int_{\Omega_\delta} \frac{|Du|^p}{p} \geq (2-p) \int_{\bigcup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}(t)} \mathbb{B}} \frac{|Du|^p}{p} \\ &\geq \pi \sum_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}(T)} \text{diam}(\mathbb{B}) T^{1-p} = \pi\eta T^{1-p} \end{aligned}$$

montrant ainsi que T doit satisfaire

$$T^{p-1} \geq \frac{\pi\eta}{c}. \quad (7.1)$$

Dans la preuve, nous montrons que le processus de croissance de boules s'arrête précisément quand T^{p-1} est égal au membre de droite de (7.1).

7.2 La croissance de la fonction Ξ

Dans la preuve de la proposition d'extension de boules (proposition 7.1), nous faisons croître le rayon en fonction du temps et proportionnellement à l'énergie singulière de la fonction u sur cette boule. Nous aurons besoin de savoir qu'une certaine fonction qui dépend du rayon et de l'énergie est croissante dans le temps.

Lemme 7.2 (Croissance de la fonction Ξ). *Fixons $p \in]1, 2[$. Posons $E (= \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g)^{\frac{1}{p-1}}) > 0$. Pour tout $t \geq t_* > 0$, on définit*

$$2\pi\rho(t) = 2\pi\rho(t_*) + (t - t_*)E$$

Supposons que pour tout $t > t_$, $2\pi\rho(t) \geq tE$ (c'est-à-dire $2\pi\rho(t_*) \geq t_*E$). Alors la fonction*

$$\Xi : t \in [t_*, +\infty) \mapsto E^{p-1}(2\pi\rho(t))^{2-p} - \frac{2\pi\rho(t)}{t^{p-1}}$$

est croissante.

Démonstration. On dérive pour observer que

$$\Xi'(t) = (2-p)E^{p-1}(2\pi\rho(t))^{1-p}E + (p-1)(2\pi\rho(t))t^{-p} - \frac{E}{t^{p-1}}.$$

Observons que

$$\frac{1}{\frac{1}{p-1}} + \frac{1}{\frac{1}{2-p}} = 1$$

définissent des exposants de Young. Nous sommes donc invité à poser

$$A^{\frac{1}{2-p}} = (2\pi\rho(t))^{1-p}E^p \quad \text{et} \quad B^{\frac{1}{p-1}} = (2\pi\rho(t))t^{-p},$$

ou encore

$$A = E^{p(2-p)}(2\pi\rho(t))^{(1-p)(2-p)} \quad \text{et} \quad B = (2\pi\rho(t))^{p-1}t^{-p(p-1)}.$$

Ainsi par l'inégalité de Young, et par notre hypothèse

$$\begin{aligned} \Xi'(t) &\geq AB - \frac{E}{t^{p-1}} = E^{p(2-p)}(2\pi\rho(t))^{(1-p)(2-p)+(p-1)}t^{-p(p-1)} - \frac{E}{t^{p-1}} \\ &= E^{p(2-p)}(2\pi\rho(t))^{(p-1)^2}t^{-p(p-1)} - \frac{E}{t^{p-1}} \\ &\geq E^{p(2-p)+(p-1)^2}t^{(p-1)^2-p(p-1)} - \frac{E}{t^{p-1}} = 0. \end{aligned} \quad \square$$

On note l'importance de l'hypothèse $p \in]1, 2[$.

La croissance des rayons pourrait aussi impliquer que deux boules s'intersectent après un certain temps : ce cas est traité par un processus de fusion de boules que nous présentons maintenant.

7.3 Fusion de boules

Décrivons le processus de fusion de boules élaboré par SANDIER [54, p.386] depuis repris maintes fois (*confer* [45, Lemma 6.4][55, Lemma 4.1][63, Lemma 4.3]). Nous y avons ajouté une condition de débordement. En effet, après fusion de boules, il convient de vérifier que la collection résultante ne déborde pas trop de l'ouvert Ω .

Lemme 7.3 (Fusion de boules dans l'espace euclidien). *Considérons \mathcal{B}_* une collection finie de boules $\mathbb{B} = \mathbb{B}_{\rho_i}(a_i)$ dans \mathbb{R}^2 . Il existe une collection \mathcal{B}^* de boules telles que*

1. $\bigcap_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}^*} \bar{\mathbb{B}}_i \neq \emptyset$.

2. \mathcal{B}^* recouvre \mathcal{B}_* au sens où $\bigcup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}_*} \mathbb{B} \subset \bigcup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}^*} \mathbb{B}$.

3. La somme des rayons est conservée : $\sum_{\mathbb{B}_\rho \in \mathcal{B}_*} \rho = \sum_{\mathbb{B}_\rho \in \mathcal{B}^*} \rho$.

Si de plus, étant donné un ouvert Ω régulier,

(i) pour toute boule $\mathbb{B} \in \mathcal{B}$, $\mathbb{B} \subset \bar{\Omega}_\delta$,

(ii) pour toute boule $\mathbb{B} \in \mathcal{B}$, $\mathbb{B} \cap \Omega \neq \emptyset$,

(iii) $\sum_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}} \text{diam}(\mathbb{B}) \leq \delta$.

Alors, après fusion de la collection \mathcal{B}_* , la collection fusionnée \mathcal{B}^* , satisfait encore les trois points (i)–(iii).

Démonstration. Si la collection de boules \mathcal{B}_* ne contient que $k = 2$ boules $\mathbb{B}_{\rho_1}(a_1)$ et $\mathbb{B}_{\rho_2}(a_2)$ dont les adhérences ne sont pas disjointe, on pose

$$\mathcal{B}^* = \{\mathbb{B}_{\rho_1 + \rho_2}(c)\} \quad \text{où} \quad c = \frac{\rho_1 a_1 + \rho_2 a_2}{\rho_1 + \rho_2}.$$

Dans ce cas la somme des rayons est clairement conservée. Il reste donc à montrer que la boule construite recouvre les deux autres. Supposons que $x \in \mathbb{B}_{\rho_1}(a_1)$. On a donc $|a_1 - x| \leq \rho_1$. On observe alors que

$$|c - x| \leq |c - a_1| + |a_1 - x| \leq \frac{\rho_2}{\rho_1 + \rho_2} |a_2 - a_1| + \rho_1.$$

Les deux boules s'intersectant, on a que la distance entre les rayons des boules $|a_1 - a_2| \leq \rho_1 + \rho_2$. Cette observation nous permet de voir que $|c - x| \leq \rho_1 + \rho_2$ et donc que $x \in \mathbb{B}_{\rho_1}(a_1)$. Le cas symétrique où $x \in \mathbb{B}_{\rho_2}(a_2)$ est analogue.

Si la collection de boules \mathcal{B}_* contient $k > 2$ et qu'elle ne satisfait pas le point 1, alors elle contient au moins deux boules dont les adhérences s'intersectent que l'on fusionne comme au point précédent. On obtient alors une collection de boules avec $k - 1$ boules. Si elles sont d'adhérence disjointe alors on appelle cette collection \mathcal{B}^* . Dans l'autre cas, on a $k - 1$ boules dont au moins deux s'intersectent.

Enfin, si la collection \mathcal{B}_* possède d'emblée des boules d'adhérence disjointe, alors on pose $\mathcal{B}^* = \mathcal{B}_*$.

Au vu du processus d'induction du lemme de fusion, il suffit de prouver que les trois points (i)–(iii) pour le cas où il y a deux boules

$$\mathbb{B}_1 = \mathbb{B}_{\rho_1}(a_1), \mathbb{B}_2 = \mathbb{B}_{\rho_2}(a_2) \subset \Omega_\delta$$

telle $\rho_1 + \rho_2 \leq \delta/2$.

Comme la boule \mathbb{B}_F résultant de la fusion, contient les deux boules précédentes en particulier elle satisfait encore le point (ii). Il existe donc $x \in \Omega \cap \mathbb{B}_F$. Le point (iii) est satisfait parce que la fusion diminue le diamètre total. Montrons le point (i) : si $y \in \mathbb{B}_F$,

$$\text{dist}(y, \bar{\Omega}) \leq |y - x| \leq \text{diam}(\mathbb{B}_F) \leq \delta$$

ce qui conclut la preuve. □

7.4 Preuve de la proposition 7.1 d'expansion des boules

Nous passons à la preuve de la proposition 7.1 qu'on subdivise en trois lemmes. Les deux derniers sont des routines que nous itérons pour obtenir la conclusion.

Démonstration. Par hypothèse, il existe un ensemble de k points $a_i \in \Omega$ tels que $u \in W^{1,2}(\Omega_\delta - \{a_1, \dots, a_k\}, \mathcal{N})$.

Lemme 7.4 (Amorçage). *Il existe $t_* \in]0, T]$ tel qu'il existe une collection $\mathcal{B}(t), t \in [0, t_*[$ qui satisfait les points (i)–(v).*

Démonstration. Fixons $\rho \in]0, \rho(a_1, \dots, a_k)[$, de sorte que les boules $\mathbb{B}_\rho(a_i)$ ne s'intersectent pas et n'intersectent pas le bord $\partial\Omega$. Par invariance homotopique, la fonction

$$\rho \in]0, \rho(a_1, \dots, a_k)[\mapsto \lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\rho} u)$$

est constante. Appelons $\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_0} u)$ sa valeur quand $\rho \downarrow 0$. On observe aussi que

$$\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho_i}(a_i)} u) \leq \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_0(a_i)} u)^p}{2p\pi}. \quad (7.2)$$

Nous définissons alors pour tout $t \geq 0$,

$$2\pi\rho_i(t) = t(\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho_i}(a_i)}(u)))^{\frac{1}{p-1}} = \int_0^t (\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho_i}(a_i)}(u)))^{\frac{1}{p-1}} ds.$$

On définit t_* comme le dernier temps t où les boules ne s'intersectent pas. Précisément,

$$t_* = \sup\{t > 0 : \mathbb{B}_{\rho_i(t)}(a_i) \cap \mathbb{B}_{\rho_j(t)}(a_j) \neq \emptyset, \mathbb{B}_{\rho_i(t)}(a_i) \cap \partial\Omega_\delta \neq \emptyset\}.$$

On pose pour tout $t \in [0, t_*]$

$$\mathcal{B}(t) = \{\mathbb{B}_{\rho_i(t)}(a_i) : i = 1, \dots, k\}.$$

Les conditions (i)–(iv) sont satisfaites. Pour la (v), on a par la proposition 4.8 que pour tout $t \in]0, t_*]$ et pour chaque $\sigma \in]0, \rho(t)[$,

$$(2 - p) \int_{\mathbb{B}_{\rho_i(t)(a_i)} - \mathbb{B}_\sigma(a_i)} \frac{|Du|^p}{p} \geq \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_0} u)^p}{2p\pi} ((2\pi\rho_i(t))^{2-p} - (2\pi\sigma)^{2-p}),$$

Par théorème de convergence monotone, on passe à la limite $\sigma \downarrow 0$ et on trouve par le choix de $\rho_i(t)$,

$$(2 - p) \int_{\mathbb{B}_{\rho_i(t)(a_i)}} \frac{|Du|^p}{p} \geq \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_0} u)^p}{2p\pi} (2\pi\rho_i(t))^{2-p} \leq (2\pi\rho_i(t))t^{1-p}$$

où on a employé (7.2). Cela prouve le point (v) et conclut le lemme d'amorçage. \square

A la suite de ce lemme, il y a plusieurs options :

- D'une part, $t_* = T$, alors on arrête le processus de construction.
- D'autre part, $t_* < T$. Dans ce cas, on peut continuer le processus. Il y a, là aussi, deux situations,
 - Soit en $t \uparrow t_*$, deux boules (ou plus) deviennent tangentes c'est-à-dire que la condition (ii) n'est plus satisfaite. Dans ce cas, le lemme de fusion (lemme 7.5) permet d'étendre le domaine de définition $(0, t_*)$ de $\mathcal{B}(t)$ à $(0, t_*]$.
 - Soit en $t = t_*$, les cinq conditions sont satisfaites. On pose alors $\mathcal{B}(t_*) = \{\mathbb{B}_{\rho(t_*)}\}$ avec les notations du lemme d'amorçage. On a donc un intervalle de la forme $(0, t_*]$ et on peut étendre cet intervalle d'existence avec le lemme d'extension (lemme 7.6).

Lemme 7.5 (Fusion). *Supposons qu'il existe une collection de boules $\mathcal{B}(t)$ qui satisfait les conditions (i)–(v) pour tout $t \in [0, t_*]$, $t_* < T$. Supposons qu'en en $t \uparrow t_*$, seule la condition (ii) n'est plus valide. Alors, on peut définir $\mathcal{B}(t_*)$ de sorte que (i)–(v) soient satisfaites pour tout $t \in [0, t_*]$.*

Démonstration. Appelons $\mathcal{B}(t_*)^*$ la collection de boules en $t \uparrow t_*$. L'union $\bigcup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}(t_*)^*} \mathbb{B}$ consiste en un nombre fini de composantes connexes. Le lemme de fusion de boules (lemme 7.3), il existe une collection que nous appelons $\mathcal{B}(t_*)$ telle que les boules de $\mathbb{B} \in \mathcal{B}(t_*)$ sont disjointes. En particulier, cela montre les conditions (ii) et (iii). Supposons que deux boules aient fusionné : $\mathbb{B}_{\rho_1(t_*)(a_1)}$ et $\mathbb{B}_{\rho_2(t_*)(a_2)}$ en une nouvelle boules $\mathbb{B}_{\rho^*(c)}$ où, $\rho = \rho_1 + \rho_2$. Si bien que les conditions (iv) et (v) sont satisfaites en t_* en sommant simplement les inégalités en $t \uparrow t_*$.

Pour le point (i), comme $\eta < 2\delta$, le lemme 7.3 assure aussi que les boules fusionnées restent bien dans l'ensemble élargi Ω_δ . \square

Maintenant que la collection est définie sur un intervalle $(0, t_*]$, on prolonger cet intervalle d'existence avec le lemme qui voici.

Lemme 7.6 (Extension). *S'il existe une famille de collection $\mathcal{B}(t)$ satisfaisant les conditions (i)–(v) pour tout $t \in [0, t_*]$, $t_* \neq T$ alors on peut prolonger l'intervalle d'existence de $\mathcal{B}(t)$ à $(0, t^*)$, $t_* < t \leq t^* \leq T$ en satisfaisant les cinq conditions.*

Démonstration. Considérons $\mathcal{B}(t_*) = \{\mathbb{B}_{\rho_i(t_*)}(b_i) : i = 1, \dots, l\}$. Pour la prolonger, on pose pour tout $t \geq t_*$

$$2\pi\rho_i(t) = 2\pi\rho_i + (t - t_*) (\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\mathbb{B}_{\rho_i(t_*)}(b_i)))^{\frac{1}{p-1}}.$$

En d'autres termes, seules les boules portant de l'énergie sont agrandies. On définit

$$\mathcal{B}(t) = \{\mathbb{B}_{\rho_i(t)}(b_i) : i = 1, \dots, l\}$$

pour tout $t \in (t_*, t^*)$ où

$$t^* = \sup\{t \in]t_*, T[: \mathbb{B}_{\rho_i(t)}(b_i) \cap \mathbb{B}_{\rho_j(t)}(b_j) \neq \emptyset, \mathbb{B}_{\rho_i(t)}(b_i) \cap \partial\Omega_\delta \neq \emptyset\}.$$

Montrons que pour tout $t \in (t_*, t^*)$, les cinq conditions sont satisfaites. Les conditions (i) – (iii) le sont par construction. Pour la condition (iv), nous observons que

$$\begin{aligned} 2\pi\rho_i(t) &= 2\pi\rho_i + (t - t_*) (\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho_i(t_*)}(b_i)} u))^{\frac{1}{p-1}} \\ &= \int_0^{t_*} \sum_{\mathbb{B}' \in \mathcal{B}(s) \cap \mathbb{B}_{\rho_i(t_*)}(b_i)} (\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}'} u))^{\frac{1}{p-1}} ds \\ &\quad + \int_{t_*}^t (\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\mathbb{B}_{\rho_i(t_*)}(b_i)} u))^{\frac{1}{p-1}} ds. \end{aligned}$$

Par invariance homotopique, $\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\mathbb{B}_{\rho_i(t_*)}(b_i)} u) = \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\mathbb{B}_{\rho_i(s)}(b_i)} u)$ pour chaque $s \in [t_*, t[$ et par construction

$$\{\mathbb{B}' \in \mathcal{B}(s) \cap \mathbb{B}_{\rho_i(t_*)}(b_i)\} \cup \{\mathbb{B}_{\rho_i(s)}(a_i)\} = \{\mathbb{B}' \in \mathcal{B}(s) \cap \mathbb{B}_{\rho_i(s)}(b_i)\},$$

si bien que l'additivité de l'intégrale

$$2\pi\rho_i(t) = \int_0^t \sum_{\mathbb{B}' \in \mathcal{B}(s) \cap \mathbb{B}_{\rho_i(s)}(b_i)} (\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}'} u))^{\frac{1}{p-1}},$$

ce qui est la condition (iv).

Pour montrer la condition (v) au temps t , on utilise, dans l'ordre, l'additivité de l'intégrale, la proposition 4.8, la validité de la condition (v) au temps t_* et la croissance de la

fonction Ξ (lemme 7.2). En effet,

$$\begin{aligned}
(2-p) \int_{\mathbb{B}_{\rho_i(t)}(b_i)} \frac{|Du|^p}{p} &= (2-p) \int_{\mathbb{B}_{\rho_i(t)}(b_i) - \mathbb{B}_{\rho_i(t_*)}(b_i)} \frac{|Du|^p}{p} \\
&\quad + (2-p) \int_{\mathbb{B}_{\rho_i(t_*)}(b_i)} \frac{|Du|^p}{p} \\
&\geq \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho_i(t)}(b_i)})(2\pi\rho_i(t))^{2-p} - (2\pi\rho_i(t_*))^{2-p}) \\
&\quad + (2\pi\rho_i(t_*))t_*^{1-p} \\
&\geq (2\pi\rho_i(t))t^{1-p},
\end{aligned}$$

ce qui prouve (v). □

Après le lemme d'extension, il y a deux cas :

- Soit $t^* = T$, et alors on arrête le processus,
- Soit $t^* < T$, et deux boules ou plus sont sur le point de devenir tangentes. On peut alors appliquer l'opération de fusion et réitérer le lemme d'extension. Nous obtenons donc une suite croissante d'intervalle $(0, t_j^*)_{j=1, \dots, l}$ en répétant le processus.
 - Soit pour un l , $t_l^* = T$, et dans ce cas, on cesse le processus.
 - Si le premier point n'arrive pas, cela contredit le fait qu'il y a un nombre fini de boules. En effet, à chaque opération de fusion, le nombre de boules décroît strictement, si bien qu'on ne peut répéter indéfiniment le processus de fusion et donc d'extension. Seul le premier cas survient donc.

Nous avons donc construit pour tout $t \in [0, T]$, une collection finie de boules $\mathcal{B}(t)$ qui satisfait les cinq conditions annoncées. □

7.5 Borne inférieure globale

De la proposition d'expansion des boules, on déduit la borne inférieure globale :

Proposition 7.7 (Borne inférieure globale, cas de $\mathcal{R}^{1,2}(\Omega_\delta, \mathcal{N})$). *Considérons $\{a_i\}_{i=1, \dots, k} \subset \Omega$ et fixons $u \in W^{1,2}(\Omega_\delta - \{a_i\}_{i=1, \dots, k}, \mathcal{N})$ de trace $g \in W^{1/2,2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$ c'est-à-dire $u \in \mathcal{R}^{1,2}(\Omega_\delta, \mathcal{N})$. Fixons $c > 0$ tel que pour un $p \in]1, 2[$, on ait*

$$(2-p) \int_{\Omega} \frac{|Du|^p}{p} \leq c.$$

Alors, pour tout $0 < \eta \leq \delta/2$, il existe une collection de boules ouvertes \mathcal{B} telle que

1. Leur intersection deux à deux est vide.

2. Leur rayon est plus petit que η .
3. Pour toute boule $\mathbb{B} \in \mathcal{B}$, $\mathbb{B} \subset \Omega_\delta$ et

$$(2-p) \int_{\mathbb{B}} \frac{|Du|^p}{p} \geq \left(\frac{\pi\eta}{c}\right)^{\frac{2-p}{p-1}} \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^p}{2\pi p}\right)^{\frac{2-p}{p-1}} \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}}u). \quad (7.3)$$

Enfin, nous avons la borne inférieure

$$(2-p) \int_{\Omega_\delta} \frac{|Du|^p}{p} \geq \left(\frac{\pi\eta}{c}\right)^{\frac{2-p}{p-1}} \times \begin{cases} \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^p}{2\pi p}\right)^{\frac{2-p}{p-1}} \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g) \\ \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^p}{2\pi p}\right)^{\frac{1}{p-1}} \#\mathcal{B} \end{cases} \quad (7.4)$$

Démonstration de la proposition 7.7. Par la proposition 7.1, il existe, pour tout $t \in [0, T = p^{-1}\sqrt{\frac{\pi\eta}{c}}]$, une collection de boules fermées $\mathcal{B}(t)$ qui satisfont les conditions (i)–(v). Nous allons montrer que

$$\mathcal{B} = \{\text{int}(\mathbb{B}_{\rho(T)}) : \mathbb{B}_{\rho(T)} \in \mathcal{B}(T), \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho(T)}}u) \neq 0\}.$$

satisfait la conclusion de la proposition.

Les conditions (i) et (ii) impliquent respectivement les conditions (1) et (2). Pour la 3, on concatène (iv) et (v) pour trouver

$$(2-p) \int_{\mathbb{B}_{\rho(T)}} \frac{|Du|^p}{p} \geq \frac{1}{T^{p-1}} \int_0^T \sum_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}(s) \cap \mathbb{B}_{\rho(T)}} (\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}}u))^{\frac{1}{p-1}}. \quad (7.5)$$

Nous avons

$$(\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}}u))^{\frac{1}{p-1}} \geq \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}}u) \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^p}{2p\pi}\right)^{\frac{2-p}{p-1}}.$$

Si $\mathcal{E}^{\text{sg}} = 0$, c'est vrai. Dans l'autre cas, on utilise le fait que $1/p-1 > 1$, si bien que

$$\begin{aligned} & (\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}}u))^{\frac{1}{p-1}} \\ &= (\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}}u)) (\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}}u))^{\frac{2-p}{p-1}} \geq \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}}u) \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^p}{2p\pi}\right)^{\frac{2-p}{p-1}}. \end{aligned}$$

Ainsi, pour tout $s \in]0, T]$,

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}(s) \cap \mathbb{B}_{\rho(T)}} (\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}} u))^{\frac{1}{p-1}} \\ \geq \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^p}{2p\pi} \right)^{\frac{2-p}{p-1}} \sum_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}(s) \cap \mathbb{B}_{\rho(T)}} \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}} u) \\ \geq \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^p}{2p\pi} \right)^{\frac{2-p}{p-1}} \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho(T)}} u). \end{aligned}$$

De (7.5), on trouve donc

$$(2-p) \int_{\mathbb{B}_{\rho(T)}} \frac{|Du|^p}{p} \geq T^{2-p} \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^p}{2p\pi} \right)^{\frac{2-p}{p-1}} \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho(T)}} u).$$

Nous avons donc montré (7.3) grâce à la définition de T . Pour montrer (7.4), on somme l'inégalité précédente sur les boules $\mathbb{B}_{\rho(T)}$ qui satisfont $\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho(T)}} u) \neq 0$ (> 0), cela donne

$$\begin{aligned} (2-p) \int_{\Omega_\delta} \frac{|Du|^p}{p} \\ \geq (2-p) \int_{\cup_{\mathbb{B}_{\rho(T)} \in \mathcal{B}} \mathbb{B}_{\rho(T)}} \frac{|Du|^p}{p} \geq \left(\frac{\pi\eta}{c} \right)^{\frac{2-p}{p-1}} \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^p}{2p\pi} \right)^{\frac{2-p}{p-1}} \sum_{\mathbb{B}_{\rho(T)} \in \mathcal{B}} \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho(T)}} u). \end{aligned}$$

Nous concluons en remarquant que

$$\sum_{\mathbb{B}_{\rho(T)} \in \mathcal{B}} \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho(T)}} u) \geq \begin{cases} \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g) \\ \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^p}{2\pi p} \right) \#\mathcal{B}. \end{cases}$$

En effet, la première inégalité suit du fait que $(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho(T)}} u)_{\mathbb{B}_{\rho(T)} \in \mathcal{B}}$ forme une résolution topologique de g car $u \in W^{1,2}(\Omega_\delta - a_1, \dots, a_k, \mathcal{N})$; la seconde suit de la définition de l'énergie singulière $\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g)$. \square

Maintenant que nous avons démontré la borne inférieure pour la classe dense $\mathcal{R}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ nous voudrions par un procédé de limite l'obtenir pour les fonctions $W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$. L'obstruction majeure est que nous devons passer à la limite sur la collection de boules de la proposition 7.7, ce que nous faisons dans la section suivante.

7.6 Compacité de familles de boules

Le lemme suivant assure qu'une collection de familles de boules admet une collection limite de boules telle que les centres et les rayons convergent. La formulation n'est pas évidente.

Lemme 7.8 (Compacité de familles finies de boules). *Dans un compact $K \subset \mathbb{R}^N$, considérons, pour chaque n , une collection finie de boules fermées notée*

$$\mathcal{B}_n = \{\mathbb{B}_{\rho_i^n}(a_i^n) : i = 1, \dots, k_n = \#\mathcal{B}_n\}$$

Supposons d'une part que $c = \sup_n \#\mathcal{B}_n < +\infty$ et d'autre part que pour chaque n et chaque $i = 1, \dots, k_n$, $\mathbb{B}_{\rho_i^n}(a_i^n) \subset K$.

Alors, il existe une collection limite

$$\mathcal{B} = \{\mathbb{B}_{\rho_i}(a_i) : i = 1, \dots, k = \#\mathcal{B}\}$$

telle que, $\#\mathcal{B} \leq c$ et pour toute boule $\mathbb{B} \in \mathcal{B}$, on a $\mathbb{B} \subset K$. En outre, il existe une sous-suite $(n_k)_k$ telle que $\#\mathcal{B}_{n_k} = \#\mathcal{B}$ et pour tout $i = 1, \dots, k$

$$a_i^{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} a_i \quad \text{et} \quad \rho_i^{n_k} \xrightarrow[k \rightarrow \infty]{} \rho_i$$

Si de plus on suppose que, pour chaque n , la collection \mathcal{B}_n consiste en des boules d'intérieurs disjoints deux à deux alors la collection limite \mathcal{B} hérite de cette propriété. De plus,

$$|\mathbb{B}_{\rho_i^n}(a_i^n) \Delta \mathbb{B}_{\rho_i}(a_i)| \rightarrow 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{B}_{\rho_i^n}(a_i^n) \rightarrow \mathbb{B}_{\rho_i}(a_i)$$

au sens de Hausdorff.

Ici, $\mathbb{B}_{\rho_i^n}(a_i^n) \Delta \mathbb{B}_{\rho_i}(a_i)$ désigne la différence symétrique des deux boules ; la convergence au sens de Hausdorff est explicitée dans la preuve.

Les ingrédients essentiels de la preuve sont la propriété de Bolzano-Weierstrass (*de toute suite réelle bornée, il est possible d'extraire une sous-suite convergente*) et le fait que la fonction «distance à un ensemble» est (uniformément) continue (*confer WILLEM [67, Proposition 1.3.17]*). Ce type de résultat est souvent inclus dans les preuves ; nous avons décidé de l'expliciter. Ce lemme peut être pensé comme une version précisée pour des familles de boules du principe de sélection de Blaschke [23, Proposition 6 – Lemma 8].

Démonstration du lemme 7.8. Par la propriété de Bolzano-Weierstrass, on peut supposer quitte à passer à une sous-suite que $k = \#\mathcal{B}_n$ est constant. Ce faisant, on observe que pour chaque $i = 1, \dots, k$, $(a_i^n)_n$ et $(\rho_i^n)_n$ sont des suites bornées. En effet, la première est une suite contenue dans le compact K , la seconde car $|\mathbb{B}_{\rho_i^n}(a_i^n)| \leq |K|$. Ainsi, on peut supposer que ces deux suites convergent. Appelons a_i et ρ_i leurs limites respectives.

Nous avons donc une collection de boules $\mathbb{B}_{\rho_i}(a_i)$. Éventuellement, le rayon limite ρ_i est nul. On définit la collection limite comme

$$\mathcal{B} = \{\mathbb{B}_{\rho}(a) : a \in \{a_1, \dots, a_k\} \quad \text{et} \quad \rho = \frac{1}{2} \min_{i:a_i=a} \text{diam}(\mathbb{B}_{\rho_i}(a_i))\}.$$

La notation ensembliste assure qu'il n'y a pas de doublons tandis que le minimum choisit le plus petit rayon si $a_i = a_j$.

Montrons que chaque boule de la collection limite est bien dans K . Le centre a_i est dans K car K est compact et donc fermé. Comme pour chaque n , $\mathbb{B}_{\rho_i^n}(a_i^n) \subset K$, on a que

$$\rho_i^n \leq \text{dist}(\partial K, a_i^n)$$

qui est une inégalité qui passe à la limite grâce à la continuité de la fonction «distance à un ensemble».

Si l'on suppose que la collection \mathcal{B}_n est constituée de boules disjointes deux à deux alors pour tout $i, j = 1, \dots, k$ tels que $i \neq j$, on a que

$$\rho_i^n \leq \left| \frac{\rho_i^n a_i^n + \rho_j^n a_j^n}{\rho_i^n + \rho_j^n} - a_i^n \right| \quad \text{ou} \quad (\rho_i^n + \rho_j^n) \rho_i^n \leq |\rho_i^n a_i^n + \rho_j^n a_j^n - (\rho_i^n + \rho_j^n) a_i^n|$$

qui passe aussi à la limite. Quand ρ_i et ρ_j ne sont pas simultanément nuls, cela implique que les boules sont encore disjointes.

On veut maintenant estimer

$$\begin{aligned} & \text{dist}(\mathbb{B}_{\rho_i^n}(a_i^n), \mathbb{B}_{\rho_i}(a_i)) \\ &= \inf\{\epsilon > 0 : \mathbb{B}_{\rho_i}(a_i) \subset (\mathbb{B}_{\rho_i^n}(a_i^n) + B(0, \epsilon)) \text{ et } \mathbb{B}_{\rho_i^n}(a_i^n) \subset (\mathbb{B}_{\rho_i}(a_i) + B(0, \epsilon))\} \end{aligned}$$

En se basant sur le fait que $\mathbb{B}_{\rho_i^n}(a_i^n) + B(0, \epsilon) = B(a_i^n, \rho_i^n + \epsilon)$, on trouve que $\text{dist}(\mathbb{B}_{\rho_i^n}(a_i^n), \mathbb{B}_{\rho_i}(a_i)) \leq |\rho_i^n - \rho_i| + |a_i^n - a_i|$.

La différence symétrique,

$$|\mathbb{B}_{\rho_i^n}(a_i^n) \Delta \mathbb{B}_{\rho_i}(a_i)|$$

est majorée par le volume de la différence deux boules centrées en la moyenne $\rho_i^n a_i^n + \rho_i a_i / \rho_i^n + \rho_i$ de rayons respectifs

$$R_n = \max \left| \frac{\rho_i^n a_i^n + \rho_i a_i}{\rho_i^n + \rho_i} - a_i \right| + \rho_i, \left| \frac{\rho_i^n a_i^n + \rho_i a_i}{\rho_i^n + \rho_i} - a_i^n \right| + \rho_i^n$$

et

$$r_n = \max \left(\sqrt{(\rho_i)^2 + \left| \frac{\rho_i^n a_i^n + \rho_i a_i}{\rho_i^n + \rho_i} - a_i \right|^2}, \sqrt{(\rho_i^n)^2 + \left| \frac{\rho_i^n a_i^n + \rho_i a_i}{\rho_i^n + \rho_i} - a_i^n \right|^2} \right)$$

par le théorème de Pythagore. On observe que les deux rayons tendent vers ρ_i , si bien que la différence symétrique tend vers zéro. \square

7.7 Borne inférieure globale : cas de $W^{1,p}$

Proposition 7.9 (Borne inférieure globale, $W^{1,p}$). *Fixons $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ de trace $g \in W^{1/2}(\partial\Omega, \mathcal{N})$. Nous étendons l'application u par $U \in W^{1,2}(\Omega_\delta - \Omega, \mathcal{N})$ comme donné dans la surjectivité de la trace. Fixons $c > 0$ tel que pour un $p \in]1, 2[$, on ait*

$$(2-p) \int_{\Omega_\delta} \frac{|Du|^p}{p} \leq c.$$

Alors, pour tout $0 < \eta < \delta$, il existe une collection de boules fermées \mathcal{B} telle que

1. Leur union est contenue dans Ω_δ .
2. L'intersection de l'intérieur de deux boules est vide.
3. Leur rayon est plus petit que η .
4. Pour toute boule $\mathbb{B} \in \mathcal{B}$, $\mathbb{B} \subset \Omega_\delta$ et

$$(2-p) \int_{\bigcup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}} \mathbb{B}} \frac{|Du|^p}{p} \geq \left(\frac{\pi\eta}{c}\right)^{\frac{2-p}{p-1}} \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^p}{2\pi p}\right)^{\frac{2-p}{p-1}} \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g). \quad (7.6)$$

Enfin, nous avons la borne inférieure

$$\left((2-p) \int_{\Omega_\delta} \frac{|Du|^p}{p}\right)^{p-1} \geq \left(\frac{\pi\eta}{c}\right)^{2-p} \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^p}{2\pi p}\right) \#\mathcal{B}. \quad (7.7)$$

La différence entre cette proposition et son analogue pour la classe dense $\mathbb{R}^{1,2}$, proposition 7.7 est que l'on perd l'estimation inférieure boule par boule. Il n'est en effet pas clair de savoir comment $\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}}u)$ passe à la limite dans $W^{1,p}$ en u .

Démonstration de la proposition 7.9. Considérons, par la proposition de densité 6.2, une suite de fonctions $(v_n)_n$ telle que pour chaque n , il existe $k_n \in \mathcal{N}$ points $\{a_1, \dots, a_{k_n}\} \subset \Omega$, de sorte que

$$v_n \in W^{1,2}(\Omega_\delta - \{a_1, \dots, a_{k_n}\}, \mathcal{N}),$$

$\text{Trace}_{\partial\Omega}v_n$ est homotope à $\text{Trace}_{\partial\Omega}u = g$ et

$$\int_{\Omega} |u - v_n|^p + |Du - Dv_n|^p \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Comme les traces sont homotopes, $\mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g) = \mathcal{E}_2^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial\Omega}v_n)$. En effet, une résolution topologique de g est aussi une résolution topologique de $\text{Trace}_{\partial\Omega}v_n$: il suffit de réaliser l'homotopie entre $\text{Trace}_{\partial\Omega}v_n$ et g sur un voisinage du bord, puis d'utiliser la résolution topologique de g sur le reste du domaine.

Ensuite, par la borne inférieure, cas de $W^{1,2}$, (7.4), il existe pour tout n , une collection de boules \mathcal{B}_n telle que

$$\left((2-p) \sup_{n \geq 0} \int_{\Omega_\delta} \frac{|Dv_n|^p}{p} \right)^{p-1} \geq \left(\frac{\pi\eta}{c} \right)^{2-p} \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^p}{2\pi p} \right) \#\mathcal{B}_n$$

Dès lors par le lemme de compacité de boules, quitte à passer à une sous-suite, nous savons que la collection \mathcal{B}_n tend au sens du lemme, vers une collection limite \mathcal{B} qui satisfait les conditions 1,2 et 3.

Enfin, il convient de montrer (7.6). De son pendant $\mathcal{R}^{1,2}$, (7.3), nous savons que pour tout n ,

$$\begin{aligned} & (2-p) \int_{\cup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}_n} \mathbb{B}} \frac{|Dv_n|^p}{p} \\ & \geq \left(\frac{\pi\eta}{c} \right)^{\frac{2-p}{p-1}} \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^p}{2\pi p} \right)^{\frac{2-p}{p-1}} \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(\text{Trace}_{\partial\Omega}v_n) = \left(\frac{\pi\eta}{c} \right)^{\frac{2-p}{p-1}} \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^p}{2\pi p} \right)^{\frac{2-p}{p-1}} \mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g). \end{aligned} \quad (7.8)$$

L'inégalité est justifiée par le fait que $v_n \in \mathcal{R}^{1,2}(\Omega_\delta, \mathcal{N})$ et que $(\text{Trace}_{\cup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}_n} \mathbb{B}}v_n)$ est une résolution topologique de $\text{Trace}_{\partial\Omega}v_n$, qui est homotope à g , expliquant l'égalité de (7.8). Il convient de s'assurer que le terme de gauche tend vers

$$(2-p) \int_{\cup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}} \mathbb{B}} \frac{|Du|^p}{p}$$

quand $n \rightarrow \infty$. La convergence forte de gradients implique, par la réciproque partielle du théorème de convergence dominée [67, Proposition 4.2.10], la convergence presque partout de ceux-ci à la sous-suite et l'existence d'un $g \in L^p$ tel que pour chaque n , $|Du_n| \leq g$. Nous observons alors que, pour $t > 0$ donné,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} |\chi_{\cup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}_n} \mathbb{B}} Dv_n - \chi_{\cup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}} \mathbb{B}} Du|^p = \\ & \int_{\{w_n \geq t\}} |\chi_{\cup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}_n} \mathbb{B}} Dv_n - \chi_{\cup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}} \mathbb{B}} Du|^p \\ & \quad + \int_{\{w_n < t\}} |\chi_{\cup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}_n} \mathbb{B}} Dv_n - \chi_{\cup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}} \mathbb{B}} Du|^p \end{aligned} \quad (7.9)$$

où nous avons posé

$$w_n = |\chi_{\cup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}_n} \mathbb{B}} Dv_n - \chi_{\cup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}} \mathbb{B}} Du|$$

qui converge vers zéro en mesure car le produit de deux suites convergeant presque partout convergent presque partout. Reprenant (7.9), nous majorons

$$\int_{\Omega} |\chi_{\cup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}_n} \mathbb{B}} Dv_n - \chi_{\cup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}} \mathbb{B}} Du|^p \leq 2^p \int_{\{w_n \geq t\}} (|g|^p + |Du|^p) + t^p |\Omega|$$

et donc, par la convergence en mesure et la régularité de l'intégrale,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\chi_{\cup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}_n} \mathbb{B}} Dv_n - \chi_{\cup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}} \mathbb{B}} Du|^p \leq 0 + t^p |\Omega|.$$

Or, $t > 0$ était arbitraire. Cela montre que

$$(2-p) \int_{\cup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}_n} \mathbb{B}} \frac{|Dv_n|^p}{p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} (2-p) \int_{\cup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}} \mathbb{B}} \frac{|Du|^p}{p},$$

concluant ainsi la preuve. □

Chapitre 8

Compacité et convergence de presque-minimiseurs

Dans cette section, nous montrons que les suites bornées au sens de la borne supérieure (proposition 5.1) admettent une sous-suite convergente vers une application renormalisée $u_* \in W_{\text{ren},g}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$.

8.1 Existence d'une sous-suite convergente quand $p \uparrow 2$, $W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) = \emptyset$

Proposition 8.1 (Existence d'une sous-suite convergente quand $p \uparrow 2$, $W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) = \emptyset$).
Sur un ouvert régulier et borné $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et un variété riemannienne plongée $\mathcal{N} \subset \mathbb{R}^v$. Fixons $g \in W^{1/2,2}(\Omega, \mathcal{N})$. Considérons deux suites $(p_n)_n$ et $(u_n)_n$ telles que $p_n \uparrow 2$ est croissante et pour chaque n , $u_n \in W^{1,p_n}(\Omega, \mathcal{N})$ et de trace $\text{Trace}_{\partial\Omega} u_n = g$.

Supposons également que la suite u_n vérifie pour toute famille de charges $(\lambda(\gamma_1), \dots, \lambda(\gamma_k))$ formant une résolution topologique de la donnée g telle que

$$\sum_{i=1}^k \frac{\lambda^2(\gamma_i)}{4\pi} = \mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g), \quad (8.1)$$

la limite supérieure

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} - \frac{(2\pi)^{2-p_n}}{(2-p_n)} \sum_{i=1}^k \frac{\lambda(\gamma_i)^{p_n}}{2\pi p_n} \right] \leq C. \quad (8.2)$$

Alors, il existe une application $u_* \in W_{\text{ren}}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ de trace $\text{Trace}_{\partial\Omega} u_* = g$ telle qu'il existe $a_1, \dots, a_k \in \Omega$ de sorte qu'une sous-suite encore notée (u_n) satisfait pour $\rho \in]0, \rho(a_i)[$ et

ouvert $\omega \subset \Omega - \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i)$,

$$\int_{\omega} \frac{|Du_*|^2}{2} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\omega} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n},$$

et u_n converge vers u_* en mesure, presque partout sur Ω et à travers les L^p :

$$\int_{\Omega} |u_n - u_*|^{p_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Le nombre de points satisfait

$$\kappa \leq \frac{4\pi \mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g)}{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^2}. \quad (8.3)$$

Près des points (a_1, \dots, a_{κ}) , nous avons pour tout $i = 1, \dots, \kappa$ et $\rho \in [0, \rho(a_i)_i]$,

$$\begin{aligned} & \int_0^{\rho} \int_{\partial \mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du_*|^2}{2} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda^2(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*)}{4\pi r} dr \\ & \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{B}_{\rho}(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} - \frac{\lambda^{p_n}(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*)}{2p_n \pi} \frac{(2\pi\rho)^{2-p_n}}{2-p_n}. \end{aligned} \quad (8.4)$$

De plus, l'application u_* résout g le long des singularités $(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho}(a_1)} u_*, \dots, \text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho}(a_{\kappa})} u_*)$ et vérifie pour tout $\rho \in [0, \rho(a_i)_i]$,

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\lambda^2(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*)}{4\pi} = \mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g). \quad (8.5)$$

Il s'agit donc d'une résolution topologique de Sobolev 2-minimale.

Enfin, $u_* \in W_{\text{ren},g}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ et

$$\mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u_*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} - \frac{(2\pi)^{2-p_n}}{2-p_n} \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\lambda^{p_n}(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*)}{2p_n \pi}. \quad (8.6)$$

Rappelons que si $\rho = 0$, la charge topologique $\lambda(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*)$ s'interprète comme

$$\lambda(u_*, a_i) = \lim_{\rho \downarrow 0} \lambda(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*)$$

comme expliqué en (4.18). Cette proposition est un analogue de la proposition 1.3 sous l'hypothèse $W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) = \emptyset$.

Dans le cas du cercle, $\mathcal{N} = \mathbb{S}^1$, nous retrouvons des idées de cette proposition chez HARDT et LIN [32, Section 3 et 4] et aussi chez STERN [60, Section 5.2]. Nous adaptons la preuve de MONTEIL, RODIAC et VAN SCHAFTINGEN [45, Theorem 7.1] développé dans le cadre de l'analyse de la fonctionnelle de Ginzburg–Landau.

8.2 Quantifier l'inclusion $a \in \Omega$

Dans la preuve, nous allons identifier les points a_i , $i = 1, \dots, \kappa$. Ils seront construits comme limite de points $(a_i^n)_n$ inclus dans Ω . Ce domaine étant par hypothèse ouvert, la limite appartient à $\bar{\Omega}$. Toutefois, le lemme suivant ainsi que les estimations développées dans le mémoire nous permettrons de conclure que $a_i \in \Omega$.

Lemme 8.2 (L'inclusion $a \in \Omega$). *Considérons un ouvert borné et régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ et une variété riemannienne compacte \mathcal{N} . Fixons $a \in \mathbb{R}^2$, et $0 < \sigma < \tau$. Si $u \in W^{1,2}(\mathbb{B}_\tau(a) - \mathbb{B}_\sigma(a), \mathcal{N})$, alors,*

$$\int_{(\mathbb{B}_\tau(a) - \mathbb{B}_\sigma(a)) \cap \Omega} \frac{|Du|^2}{2} \geq \frac{\lambda^2(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\tau(a)} u)}{4\pi\nu_\tau^\sigma(a)} \ln \frac{\tau}{\sigma} \times \left[1 - \frac{\sqrt{2\pi}}{\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\tau(a)} u)} \left(\frac{1}{\ln \frac{\tau}{\sigma}} \int_{\mathbb{B}_\tau(a) - (\mathbb{B}_\sigma(a) \cup \Omega)} |Du|^2 \right) \right]^2$$

où

$$\nu_\tau^\sigma(a) = \frac{1}{2\pi \ln \frac{\tau}{\sigma}} \int_{(\mathbb{B}_\tau(a) - \mathbb{B}_\sigma(a)) \cap \Omega} |x - a|^{-2} dx.$$

Observons que $\nu_\tau^\sigma(a) \leq 1$ et que $\nu_\tau^\sigma(a) = 1$ si et seulement si l'anneau $\mathbb{B}_\tau(a) - \mathbb{B}_\sigma(a) \subset \Omega$. En particulier, $\nu_\tau^\sigma(a) = 1$ implique $a \in \Omega$. Dans la preuve de la proposition 8.1, nous appliquerons le lemme quand $v \in W^{1,2}(\Omega_\delta - \{a_1, \dots, a_\kappa\}, \mathcal{N})$. En utilisant $\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\tau(a)} u) \geq \text{Sys}_{\mathcal{N}}$, nous minorons le terme entre crochets par

$$\left[1 - \frac{\sqrt{2\pi}}{\text{Sys}_{\mathcal{N}}} \left(\frac{1}{\ln \frac{\tau}{\sigma}} \int_{\Omega_\delta - \Omega} |Dv|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right]^2 \quad (8.7)$$

qui a l'avantage de ne pas dépendre des valeurs de u à l'intérieur de Ω .

Ce lemme est tiré de [46, Lemme 6.2].

8.3 Démonstration de la proposition 8.1

Démonstration de la proposition 8.1. Nous étendons chaque terme de la suite $(u_n)_n$ à l'ouvert Ω_δ comme décrit en (6.1) : pour chaque n , l'application u_n devient $u_n : \Omega_\delta \rightarrow \mathcal{N}$ en posant pour $U \in W^{1,2}(\Omega_\delta - \Omega, \mathcal{N})$ de trace $\text{Trace}_{\partial\Omega} U = g$

$$u_n = \begin{cases} u_n & \text{sur } \Omega \\ U & \text{sur } \Omega_\delta - \Omega. \end{cases} \quad (8.8)$$

Comme les traces coïncident, u_n possède un gradient faible sur tout Ω_δ .

Ensuite, considérons une suite $(\eta_m)_m$ telle que pour chaque m , $\eta_m > 0$, $\eta_m \downarrow 0$ et $\eta_n^{2-p_n} \rightarrow 1$.

Etape 1 : Identifier les point singuliers (a_1, \dots, a_κ) de u_ .* Par notre hypothèse (8.2),

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (2 - p_n) \int_{\Omega_\delta} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} \leq 0 + \sum_{i=1}^k \frac{\lambda^2(\gamma_i)}{4\pi} = \mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g). \quad (8.9)$$

Par conséquent,

$$c = \sup_n (2 - p_n) \int_{\Omega_\delta} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} < \infty.$$

Par la proposition 7.9 appliquée à la constante c , pour tout m et pour tout n , il existe une collection de boules ouvertes $\mathcal{B}_{m,n}$ telle que les boules sont d'intérieurs disjoints, pour tout m , pour tout n et pour chaque $\mathbb{B} \in \mathcal{B}_{m,n}$, $\mathbb{B} \subset \Omega_\delta$, $\text{diam}(\mathbb{B}) \leq 2\eta_m$ et

$$(2 - p_n) \int_{\cup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}_{m,n}} \mathbb{B}} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} \geq \left(\frac{\pi\eta_m}{c} \right)^{\frac{2-p_n}{p_n-1}} \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^{p_n}}{2\pi p_n} \right)^{\frac{2-p_n}{p_n-1}} \mathcal{E}_{p_n}^{\text{sg}}(g) \quad (8.10)$$

et

$$c \geq (\pi\eta_m)^{2-p_n} \times \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^{p_n}}{2\pi p_n} \right) \#\mathcal{B}_{m,n} \quad (8.11)$$

qui se déduit de

$$\left((2 - p_n) \int_{\Omega_\delta} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} \right)^{p_n-1} \geq (\pi\eta_m)^{2-p_n} \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^{p_n}}{2\pi p_n} \right) \#\mathcal{B}_{m,n} \quad (8.12)$$

Par la borne (8.11), on observe que pour tout m , le nombre de boules satisfait

$$\sup_n \#\mathcal{B}_{n,m} < +\infty$$

Par le lemme de convergence des boules (lemme 7.8), la collection $\mathcal{B}_{n,m}$ admet une collection limite \mathcal{B}_m dont la des rayons des boules n'excède pas $2\eta_m$ et qui est contenue dans Ω_δ . De plus, quitte à extraire pour chaque m , une sous-suite en n , on a la convergence des centres et des rayons de la collection $\mathcal{B}_{n,m}$ vers ceux de la collection \mathcal{B}_m . Un argument diagonal, nous permet de supposer que la sous-suite ne dépend pas du choix de m . En sus, nous observons que

$$\#\mathcal{B}_m = \lim_{n \rightarrow \infty} \#\mathcal{B}_{n,m} \leq \frac{4c\pi}{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^2} \quad (8.13)$$

en vertu de (8.11). En particulier, le nombre de boules de la collection limite est uniformément borné en m . On peut donc extraire une sous-suite en m pour obtenir une suite de boules \mathcal{B}_m qui converge vers une collection limite \mathcal{B} . Comme $\eta_m \downarrow 0$, nous savons que \mathcal{B} consiste en $\kappa \in \mathbb{N}$ points que nous appelons

$$\{a_1, \dots, a_\kappa\} \subset \bar{\Omega}$$

où $\kappa \leq 4c\pi/\text{Sys}_{\mathcal{N}}^2$ au vu de (8.11). Plus tard, nous montrerons que $a_i \in \Omega$ pour chaque $i = 1, \dots, \kappa$.

Observons que par (8.12) et (8.9),

$$\kappa = \lim_{m \rightarrow \infty} \#\mathcal{B}_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} \#\mathcal{B}_{m,n} \leq \frac{4\pi}{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^2} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (2 - p_n) \int_{\Omega_\delta} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} \leq \frac{4\pi}{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^2} \mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g)$$

car, par la continuité de la norme,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (2 - p_n) \int_{\Omega_\delta - \Omega} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (2 - p_n) \int_{\Omega_\delta - \Omega} \frac{|DU|^{p_n}}{p_n} = 0.$$

Cela montre l'estimation sur le nombre de points (8.3).

Étape 2 : Existence de u_ .* Fixons $\rho \in]0, \rho(a_i)_i[$. Par la convergence de boules, si m est suffisamment grand et $n \geq n_0(m)$ est suffisamment grand par rapport à m , nous avons les inclusions suivantes :

$$\bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i) \supset \bigcup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}_m} 2\mathbb{B} \supset \bigcup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}_{m,n}} \mathbb{B}.$$

Pour tout m suffisamment grand, par la monotonie de l'intégrale, la borne inférieure (8.10) et notre hypothèse (8.2), nous observons que

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_\delta - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_\delta - \bigcup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}_{m,n}} \mathbb{B}} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} \quad (8.14)$$

$$\begin{aligned} &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_\delta - \Omega} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} + \int_{\Omega} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} - \int_{\bigcup_{\mathbb{B} \in \mathcal{B}_{m,n}} \mathbb{B}} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} \\ &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_\delta - \Omega} \frac{|DU|^{p_n}}{p_n} + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\left(\int_{\Omega} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} - \frac{(2\pi)^{2-p_n}}{(2-p_n)} \sum_{i=1}^k \frac{\lambda(\gamma_i)^{p_n}}{2\pi p_n} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{(2\pi)^{2-p_n}}{(2-p_n)} \sum_{i=1}^k \frac{\lambda(\gamma_i)^{p_n}}{2\pi p_n} - \left(\frac{\pi\eta_m}{c} \right)^{\frac{2-p_n}{p_n-1}} \cdot \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}}{2p_n\pi} \right)^{\frac{2-p_n}{p_n-1}} \mathcal{E}_{p_n}^{\text{sg}}(g) \right) \right] \\ &\leq \int_{\Omega_\delta - \Omega} \frac{|DU|^2}{2} + C \quad (8.15) \\ &\quad + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(2\pi)^{2-p_n}}{(2-p_n)} \sum_{i=1}^k \frac{\lambda(\gamma_i)^{p_n}}{2\pi p_n} - \left(\frac{\pi\eta_m}{c} \right)^{\frac{2-p_n}{p_n-1}} \cdot \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}}{2p_n\pi} \right)^{\frac{2-p_n}{p_n-1}} \frac{\mathcal{E}_{p_n}^{\text{sg}}(g)}{2-p_n} \right]. \end{aligned}$$

Rappelons que les $(\gamma_i)_{i=1,\dots,k}$ satisfont

$$\mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g) = \sum_{i=1}^k \frac{\lambda(\gamma_i)^2}{4\pi}.$$

Affirmation. Il existe des constantes $A, B > 0$, pour tout m , telles que le terme entre crochets de (8.15), noté $C(\eta_m)$, est majoré par

$$C(\eta_m) \leq A + \mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g) \ln \frac{B}{\eta_m}. \quad (8.16)$$

Preuve de l'affirmation. Par le lemme algébrique 4.12, le terme entre crochets est majoré par

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2-p_n} \left[\frac{(2\pi)^{2-p_n} p_n}{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^{2-p_n}} \mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g) - \left(\frac{\pi\eta_m}{c} \right)^{\frac{2-p_n}{p_n-1}} \cdot \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}}{2p_n\pi} \right)^{\frac{2-p_n}{p_n-1}} \frac{[1/2p\pi]^{\frac{2}{p}}}{1/4\pi} (\mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g))^{\frac{p_n}{2}} \right] \\ &\leq \frac{\mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g)}{2-p_n} \left[\frac{(2\pi)^{2-p_n} p_n}{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^{2-p_n} 2} - \left(\frac{\pi\eta_m}{c} \right)^{\frac{2-p_n}{p_n-1}} \cdot \left(\frac{\text{Sys}_{\mathcal{N}}}{2p_n\pi} \right)^{\frac{2-p_n}{p_n-1}} \frac{[1/2p_n\pi]^{\frac{2}{p_n}}}{1/4\pi} (\mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g))^{\frac{p_n-2}{2}} \right] \\ &\quad \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g) A' + \mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g) \ln \frac{B}{\eta_m}. \end{aligned}$$

Nous prenons $A = \max(\mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g)A', 1)$. □

De (8.14), (8.15) et (8.16), pour chaque m ,

$$\sup_{n \geq n_0} \int_{\Omega_\delta - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_{2\eta_m}(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} < +\infty. \quad (8.17)$$

Comme la variété \mathcal{N} est compacte, la suite u_n est bornée sur Ω_δ dans L^∞ . En particulier la suite, u_n satisfait pour chaque m , l'hypothèse de la proposition de compacité à travers les L^p , proposition 1.3.

Dès lors, par la proposition 1.3, nous trouvons par un argument diagonal détaillé ci-dessous que, pour tout $\rho \in]0, \rho(a_1, \dots, a_k)[$, quitte à passer à une sous-suite en n , u_n converge vers u_* sur Ω_δ en mesure et presque partout vers une application $u_* \in W^{1,2}(\Omega_\delta - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i), \mathbb{R}^v)$. Aussi,

$$\int_{\Omega} |u_* - u_n|^{p_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (8.18)$$

De plus, pour tout $\rho \in]0, \rho(a_i)_i[$ et ouvert $\omega \subset \Omega_\delta - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i)$,

$$\int_{\omega} \frac{|Du_*|^2}{2} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\omega} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n}. \quad (8.19)$$

Par la convergence presque partout u_* prend presque toutes ses valeurs dans la variété \mathcal{N} . Enfin, $\text{Trace}_{\partial\Omega} u_* = g$ et u_* vaut U sur $\Omega_\delta - \Omega$ par la définition de u_n en (8.8). Notons que la suite $Du_n + Du_*$ satisfait aussi une borne uniforme telle que (8.17). Nous avons donc montré (83).

Preuve de l'argument diagonal. Comme la variété \mathcal{N} est compacte, $\sup_n \|u_n\|_{L^\infty(\Omega)}$ est fini. Pour tout m , nous avons donc, par (8.17),

$$\sup_{n \geq n_0} \int_{\Omega_\delta - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_{2\eta_m}(a_i)} |u_n|^{p_n} + \int_{\Omega_\delta - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_{2\eta_m}(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} < +\infty.$$

Pour chaque m , par la proposition 1.3, il existe une sous-suite $u_{n,m}$ de u_n et une limite $u_* \in W^{1,2}(\Omega_\delta - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_{2\eta_1}(a_i), \mathbb{R}^v)$ telle que (8.19) est satisfait

$$\int_{\Omega_\delta - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_{2\eta_m}(a_i)} |u_* - u_{m,n}|^{p_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Nous choisissons comme sous-suite $u_{n,n}$ et nous la notons encore (u_n) . Quitte à passer à une sous-suite, $u_n \rightarrow u_*$ presque partout sur Ω_δ . En particulier u_* possède presque toutes ces valeurs dans \mathcal{N} .

Pour montrer (8.18), nous notons que, pour tout m, n

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_\delta} |u_* - u_n|^{p_n} \\ & \leq \int_{\Omega_\delta - \bigcup_{i=1}^l \mathbb{B}_{2\eta_m}(a_i)} |u_* - u_n|^{p_n} + 2^{p_n} \left| \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{2\eta_m}(a_i) \right| \left(\sup_n \|u_n\|_{L^\infty(\Omega)} + \|u_*\|_{L^\infty(\Omega)} \right). \end{aligned}$$

À la limite supérieure,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega_\delta} |u_* - u_n|^{p_n} \leq 0 + 2^2 \left| \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{2\eta_m}(a_i) \right| \left(\sup_n \|u_n\|_{L^\infty(\Omega_\delta)} + \|u_*\|_{L^\infty(\Omega_\delta)} \right).$$

Nous pouvons alors faire tendre $m \rightarrow \infty$. Le terme restant tend vers zéro. Cela montre (8.18). Fixons $\omega \subset \Omega - \{a_i\}$. Par la proposition 1.7, nous obtenons (83). \square

Étape 3 : pour tout $i = 1, \dots, \kappa, a_i \in \Omega$

Nous savons du lemme 8.2 et sa variante (8.7) que

$$\int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{2\eta_m}(a_i)} \frac{|Du_*|^2}{2} \geq \ln \frac{\bar{\rho}}{2\eta_m} \cdot \left[1 - D(\eta_m)^{\frac{1}{2}} \right] \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\lambda^2(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{2\eta_m}(a_i)} u_*)}{4\pi v_{\bar{\rho}}^{2\eta_m}(a_i)} \quad (8.20)$$

où

$$D(\eta_m) = \frac{2\pi}{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^2 \ln \frac{c}{\eta_m}} \int_{\Omega_\delta - \Omega} |Dv|^2$$

tend vers zéro quand $\eta_m \downarrow 0$. Ici, $\bar{\rho} = \rho(a_i)_i$ est le rayon de non intersection et $v_{\bar{\rho}}^{2\eta_m}(a_i)$ est un nombre, calculé par une intégrale, plus petit que 1 tel que si $v_{\bar{\rho}}^0(a_i) = 1$, alors $a_i \in \Omega$.

Par (8.19) et la limite supérieure de la majoration (8.14)–(8.15) ainsi que le calcul de limite (8.16),

$$\int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{2\eta_m}(a_i)} \frac{|Du_*|^2}{2} \leq A + \mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g) \ln \frac{B}{\eta_m}. \quad (8.21)$$

Concaténant (8.20) et (8.21), nous trouvons comme $v_{\bar{\rho}}^{2\eta_m}(a_i) \leq 1$,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g) & \leq \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\lambda^2(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{2\eta_m}(a_i)} u_*)}{4\pi} \\ & \leq \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\lambda^2(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{2\eta_m}(a_i)} u_*)}{4\pi v_{\bar{\rho}}^{2\eta_m}(a_i)} \leq \frac{A + \mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g) \ln \frac{B}{\eta_m}}{\ln \frac{\bar{\rho}}{2\eta_m} \cdot \left[1 - D(\eta_m)^{\frac{1}{2}} \right]} \xrightarrow{m \rightarrow \infty} \mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g). \end{aligned}$$

Ainsi, $\nu_\rho^0(a_i) = 1$ pour chaque i , ce qui montre $a_i \in \Omega$. On obtient aussi, l'existence d'un m_0 tel que si $m \geq m_0$,

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\lambda^2(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{2\eta m}(a_i)} u_*)}{4\pi} = \mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g).$$

En effet, cette identité est vraie à la limite $m \rightarrow \infty$ et le spectre de longueur est discret. Nous avons donc prouvé que $(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\rho(a_1)} u_*, \dots, \text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\rho(a_\kappa)} u_*)$ est une résolution topologique 2-minimale de g : en effet, par invariance homotopique, pour chaque $i = 1, \dots, \kappa$

$$\lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_\rho(a_i)} u_*) = \lambda(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\eta m}(a_i)} u_*).$$

Étape 4 : Affirmation. Par le théorème de Fubini et lemme de Fatou, pour presque tout $\rho \in]0, \rho(a_i)_i[$,

$$\int_{\partial\mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du_*|^2}{2} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} < +\infty. \quad (8.22)$$

Preuve de l'affirmation. Dans (83), nous prenons ω qui est un anneau $\mathbb{B}_{\sigma_2}(a_i) - \mathbb{B}_{\sigma_1}(a_i)$, $0 < \sigma_1 < \sigma_2 < \rho(a_i)_i$ autour d'un point a_i . Par lemme de Fatou,

$$\int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\sigma_1}^{\sigma_2} \int_{\partial\mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} < +\infty.$$

Par le théorème de Fubini, pour presque tout $\rho \in [\sigma_1, \sigma_2]$,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} < +\infty.$$

Par une variante de la proposition 1.7,

$$\int_{\partial\mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du_*|^2}{2} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} < +\infty.$$

Le choix de σ_1, σ_2 étant arbitraire, il est possible d'écrire l'intervalle

$$]0, \rho(a_i)_i[= \bigcup_{n \geq 0} \left[\frac{\rho(a_i)_i}{2^{n+1}}, \frac{\rho(a_i)_i}{2^n} \right[$$

et de répéter l'argument pour chacun de ses intervalles. □

Étape 5 : Près des singularités Pour montrer (8.4), nous partons de (8.22).

Ainsi, pour chaque $i = 1, \dots, \kappa$,

$$\begin{aligned} \int_0^\rho \int_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du_*|^2}{2} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda^2(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} u_*)}{4\pi r} dr \\ \leq \int_0^\sigma \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda^2(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} u_*)}{4\pi r} dr. \end{aligned} \quad (8.23)$$

Par les propriétés d'additivité des limites inférieures et supérieures,

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} d\mathcal{H}^1 &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} d\mathcal{H}^1 \right. \\ &\quad \left. - \frac{\lambda^{p_n}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} u_*)(2\pi r)^{2-p_n}}{2p_n\pi r} + \frac{\lambda^{p_n}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} u_*)(2\pi r)^{2-p_n}}{2p_n\pi r} \right] \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda^{p_n}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} u_*)(2\pi r)^{2-p_n}}{2p_n\pi r} \right] \\ &\quad + \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\lambda^{p_n}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} u_*)(2\pi r)^{2-p_n}}{2p_n\pi r}. \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda^2(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} u_*)}{4\pi r} \\ \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda^{p_n}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} u_*)(2\pi r)^{2-p_n}}{2p_n\pi r} \right]. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Dès lors, par (8.24) et 8.23,

$$\int_0^\rho \int_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du_*|^2}{2} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda^2(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} u_*)}{4\pi r} dr \quad (8.25)$$

$$\begin{aligned} &\leq \int_0^\rho \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda^2(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} u_*)}{4\pi r} dr \\ &\leq \int_0^\rho \liminf_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda^{p_n}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} u_*)(2\pi r)^{2-p_n}}{2p_n\pi r} \right] dr \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_0^\rho \left[\int_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda^{p_n}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} u_*)(2\pi r)^{2-p_n}}{2p_n\pi r} \right] dr \\ &= \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} - \frac{\lambda^{p_n}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} u_*)}{2p_n\pi} \frac{(2\pi\rho)^{2-p_n}}{2-p_n}. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Cela prouve (8.4).

Étape 6 : Limite inférieure et énergie renormalisée

Observons que par l'étape 3 et 6 (8.25)–(8.26), que

$$\int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} \frac{|Du_*|^2}{2} + \sum_{i=1}^{\kappa} \int_0^{\rho} \int_{\partial \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} \frac{|Du_*|^2}{2} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda^2(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*)}{4\pi r} dr \quad (8.27)$$

$$- \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\lambda^2(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*)}{4\pi} \ln \frac{1}{\rho} \quad (8.28)$$

$$\begin{aligned} &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} + \sum_{i=1}^{\kappa} \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{B}_{\rho}(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} - \frac{\lambda^{p_n}(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*)}{2p_n \pi} \frac{(2\pi\rho)^{2-p_n}}{2-p_n} \\ &\quad + \liminf_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\lambda^{p_n}(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*)}{2p_n \pi} \frac{(2\pi\rho)^{2-p_n} - (2\pi)^{2-p_n}}{2-p_n} \\ &\leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} - \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\lambda^{p_n}(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*)}{2p_n \pi} \frac{(2\pi)^{2-p_n}}{2-p_n} \end{aligned}$$

par les propriétés des limites inférieures et l'additivité de l'intégrale. Or, par l'expression en coordonnées polaires de l'énergie renormalisée $\mathcal{E}_2^{\text{ren}}$, proposition 4.16, nous savons que (8.27) vaut aussi $\mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u_*)$. Cela montre (8.6).

Cela conclut la preuve. \square

8.4 Convergence des presque-minimiseurs vers une application renormalisable

La compacité des suites bornées assurée, nous pouvons conclure avec les suites de presque-minimiseurs quand $p \uparrow 2$. Pour alléger les notations, nous posons

$$\mathcal{W}_{\min}(u_*) \quad (8.29)$$

$$\begin{aligned} &= \inf \left\{ \mathcal{E}_2^{\text{ren}}(v) : v \in W_{\text{ren}}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}), \text{Trace}_{\partial \Omega} v = g, \text{ les singularités } (\gamma_i)_{i,\dots,k} \right. \\ &\quad \text{de } v \text{ forment une résolution topologique 2-minimale de } g. \text{ De plus, si l'on note } \\ &\quad (\tilde{\gamma}_i)_{i,\dots,k} \text{ les singularités associés à } u_*, \text{ alors le } k\text{-tuplet } (\lambda(\gamma_i))_{i,\dots,k} \text{ est une} \\ &\quad \left. \text{permutation de } (\lambda(\tilde{\gamma}_i))_{i,\dots,k} \right\}. \end{aligned}$$

Théorème 8.3 (Convergence de presque-minimiseurs quand $p \uparrow 2$, $W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) = \emptyset$). *Sur un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ régulier. Considérons une suite croissante (p_n) de nombres réels telle que*

$p_n \uparrow 2$ ainsi qu'une suite de presque-minimiseurs $u_n \in W^{1,p_n}(\Omega, \mathcal{N})$ tels que $\text{Trace}_{\partial\Omega} u_n = g \in W^{1/2,2}(\Omega, \mathcal{N})$ qui satisfont

$$\left[\int_{\Omega} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} - \inf \left\{ \int_{\Omega} \frac{|Dv|^{p_n}}{p_n} : v \in W^{1,p_n}(\Omega, \mathcal{N}), \text{Trace}_{\partial\Omega} v = g \right\} \right] \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (8.30)$$

Sous ces hypothèses, il existe $u_* \in W_{\text{ren}}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ de trace $\text{Trace}_{\partial\Omega} u_* = g$ tel que

$$\mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u_*) = \mathcal{W}_{\min}(u_*). \quad (8.31)$$

De plus, il existe (a_1, \dots, a_{κ}) telle que pour tout $0 < \rho < \rho(a_i)_i$, la restriction de u_* l'ouvert $\Omega - \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i)$ est une application harmonique minimisante par rapport à ses propres conditions au bord :

$$\int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} \frac{|Du_*|^2}{2} = \inf \left\{ \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} \frac{|Dv|^2}{2} : \begin{array}{l} v \in W^{1,2}(\Omega - \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i), \mathcal{N}) \\ \text{Trace}_{\partial\Omega} v = g, \\ \text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho}(a_i)} v = \text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_* \\ \text{pour chaque } i = 1, \dots, \kappa. \end{array} \right\}. \quad (8.32)$$

En outre, il existe une sous-suite de $u_n \in W_g^{1,p_n}(\Omega, \mathcal{N})$ telle que, comme dans la proposition 8.1 précédente, u_n converge vers u_* en mesure, presque partout sur Ω et à travers les L^p :

$$\int_{\Omega} |u_n|^{p_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_*|^2. \quad (8.33)$$

Près des singularités, nous avons pour tout $i = 1, \dots, \kappa$,

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{B}_{\rho}(a_i)} \frac{|Du_{p_n}|^{p_n}}{p_n} &= \frac{\lambda^{p_n} (\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*) (2\pi\rho)^{2-p_n}}{2p_n\pi (2-p_n)} \\ &= \int_0^{\rho} \left[\int_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du|^2}{2} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda^2 (\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*)}{4\pi r} \right] dr. \end{aligned} \quad (8.34)$$

Le nombre de points satisfait

$$\kappa \leq \frac{4\pi \mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g)}{\text{Sys}_{\mathcal{N}}^2}. \quad (8.35)$$

De surcroît, l'application u_* résout g le long de $(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho}(a_1)} u_*, \dots, \text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho}(a_{\kappa})} u_*)$ et vérifie

$$\sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\lambda^2 (\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*)}{4\pi} = \mathcal{E}_2^{\text{sg}}(g). \quad (8.36)$$

Il s'agit donc d'une résolution topologique de Sobolev 2-minimale.

Aussi,

$$\int_{\Omega} \frac{|Du_*|^{p_n}}{p_n} - \int_{\Omega} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (8.37)$$

En particulier, notant I_{p_n} les infima qui apparaissent dans notre hypothèse (8.30),

$$\int_{\Omega} \frac{|Du_*|^{p_n}}{p_n} - I_{p_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (8.38)$$

Ensuite, nous avons pour tout $\rho \in]0, \rho(a_i)_i[$, $Du_n \rightarrow Du_*$ en mesure sur Ω et pour chaque $\rho \in]0, \rho(a_i)_i[$

$$\int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} |Du_n|^{p_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} |Du_*|^2. \quad (8.39)$$

Enfin,

$$\sup_{t>0} t^{p_n} |\Omega \cap \{ ||Du_n|^{p_n/2} - |Du_*|^{p_n/2} |^{1/p_n} \geq t \}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0. \quad (8.40)$$

Comme dans [45, Theorem 7.3], nous déduisons ce théorème de la proposition de compacité quand $p \uparrow 2$, proposition 8.1. Il généralise l'approche de HARDT et LIN au cas d'une variété compacte \mathcal{N} et de suites de presque-minimiseurs [32].

Ce théorème donne une première réponse au problème posé dans ce mémoire (*confer* page 13) : nous obtenons une limite u_* qui consiste en une application renormalisée (définition 4.14) et nous obtenons diverses convergences. Tout d'abord, notons que (8.37) et (8.38) constituent un analogue de (1.3) dans la proposition 1.2 où $W_{\mathcal{G}}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ était supposé non vide. En outre, nous avons la convergence à travers les L^p (8.33) pour la suite u_* , étudiée dans le chapitre 2. Ensuite, la convergence à travers les L^p des gradients faibles loin des singularités (8.39). Près des singularités (8.34), nous avons identifié une quantité qui tend vers l'infini quand $p \uparrow 2$ qui permet d'observer une sorte de convergence renormalisée. Enfin, (8.40) donne une convergence plus faible pour la norme de Frobenius des gradients qui a l'avantage de s'affranchir des singularités.

Démonstration du théorème 8.3. La borne supérieure (proposition 5.1) implique l'hypothèse de la proposition précédente, proposition 8.1. Par la proposition d'existence quand $p \uparrow 2$, proposition 8.1, il existe une sous-suite $(u_n)_n$ de $(u_p)_p$ qui converge vers un $u_* \in W_{\text{ren}}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ et

$$\mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u_*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} - \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\lambda^{p_n} (\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*) (2\pi)^{2-p_n}}{2p_n \pi (2-p_n)}.$$

Du fait que u_n est une suite de presque-minimiseurs par notre hypothèse, nous avons aussi pour tout $v \in W_{\text{ren},g}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$.

$$\mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u_*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{|Dv|^{p_n}}{p_n} - \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\lambda^{p_n} (\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*) (2\pi)^{2-p_n}}{2p_n \pi (2-p_n)}.$$

Si les singularités $(\gamma_i)_{i=1,\dots,k}$ associées à l'application renormalisable v forment une résolution topologique 2-minimale, qui satisfait la condition décrite par $\mathcal{W}_{\min}(u_*)$, nous avons donc, au vu de l'expression qu'admet $\mathcal{E}_p^{\text{ren}}$, (5.4), et le fait que $\mathcal{E}_p^{\text{ren}} \rightarrow \mathcal{E}_2^{\text{ren}}$ quand $p \uparrow 2$ (proposition 4.17),

$$\mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u_*) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{|Dv|^{p_n}}{p_n} - \frac{(2\pi)^{2-p_n}}{2-p_n} \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\lambda^{p_n}(\gamma_i)}{2\pi p_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E}_{p_n}^{\text{ren}}(v) = \mathcal{E}_2^{\text{ren}}(v). \quad (8.41)$$

Cela montre que $\mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u_*) \leq \mathcal{W}_{\min}(u_*)$. Or, u_* est également admissible dans l'infimum $\mathcal{W}_{\min}(u_*)$. Cela prouve $\mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u_*) = \mathcal{W}_{\min}(u_*)$.

La proposition précédente, proposition 8.1, implique aussi (8.33), (8.35) et (8.36).

Considérons les points (a_1, \dots, a_{κ}) associés à u_* . Pour $0 < \rho < \rho(a_i)_i$, nous considérons une application v qui satisfait les propriétés suivantes :

$$\begin{cases} v \in W^{1,2}(\Omega - \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i), \mathcal{N}) \\ \text{Trace}_{\partial\Omega} v = g, \\ \text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho}(a_i)} v = \text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_* \text{ pour chaque } i = 1, \dots, \kappa. \end{cases}$$

Sur $\bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i)$, nous posons $v = u_*$. Ainsi $v \in W_{\text{ren},g}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$. De plus v satisfait la condition décrite par $\mathcal{W}_{\min}(u_*)$. Par l'expression en coordonnées polaires de l'énergie renormalisée, proposition 4.16, et, $\mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u_*) = \mathcal{W}_{\min}(u_*)$,

$$0 \geq \mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u_*) - \mathcal{E}_2^{\text{ren}}(v) = \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} \frac{|Du_*|^2}{2} - \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} \frac{|Dv|^2}{2}.$$

Cela prouve (8.32).

Ensuite, évaluant (8.41) en $v = u_*$, nous trouvons, d'une part,

$$\mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} - \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\lambda^{p_n}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*) (2\pi)^{2-p_n}}{2p_n\pi} \frac{1}{2-p_n}. \quad (8.42)$$

et d'autre part,

$$\mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u_*) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{|Du_*|^{p_n}}{p_n} - \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\lambda^{p_n}(\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*) (2\pi)^{2-p_n}}{2p_n\pi} \frac{1}{2-p_n} \quad (8.43)$$

que nous aurions aussi pu déduire de (5.4) et de la proposition 4.17. La différence entre (8.42) et (8.43) s'écrit

$$0 = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} \frac{|Du_*|^{p_n}}{p_n} - \int_{\Omega} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} \right]$$

Cela montre (8.37) et par conséquent (8.38).

Montrons maintenant que pour tout $0 < \rho < \rho(a_i)_i$,

$$\int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i)} |Du_{p_n}|^{p_n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i)} |Du_*|^2 \quad (8.44)$$

en vue de démontrer la convergence forte du gradient. De la proposition 8.1 précédente, en particulier (83), nous savons que

$$\int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du_*|^2}{2} \leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} \quad (8.45)$$

Il convient de montrer que l'inégalité inverse a lieu pour obtenir (8.44). De l'expression de l'énergie renormalisée en coordonnées polaires (proposition 4.16), nous avons que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du_*|^2}{2} &= \mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u_*) + \sum_{i=1}^k \frac{\lambda^2(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_\rho(a_i)} u_*)}{4\pi} \ln \frac{1}{\rho} \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \int_0^\rho \left[\int_{\partial \mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du_*|^2}{2} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_\rho(a_i)} u_*)^2}{4\pi r} \right] dr. \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda^{p_n}(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_\rho(a_i)} u_*) (2\pi)^{2-p_n}}{2\pi p_n (2-p_n)} \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^k \frac{\lambda^{p_n}(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_\rho(a_i)} u_*) (2\pi)^{2-p_n} - (2\pi\rho)^{2-p_n}}{2p_n \pi (2-p_n)} \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \int_0^\rho \left[\int_{\partial \mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du_*|^2}{2} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_\rho(a_i)} u_*)^2}{4\pi r} \right] dr. \end{aligned}$$

en utilisant (8.42). Donc, par la somme de limites,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du_*|^2}{2} &\geq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} \\ &\quad + \varliminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} - \sum_{i=1}^k \frac{\lambda^{p_n}(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_\rho(a_i)} u_*) (2\pi\rho)^{2-p_n}}{2p_n \pi (2-p_n)} \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \int_0^\rho \left[\int_{\partial \mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du_*|^2}{2} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda^2(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_\rho(a_i)} u_*)}{4\pi r} \right] dr. \\ &\geq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} + 0 \end{aligned}$$

où, pour la dernière inégalité, nous avons utilisé 8.4. Cela montre (8.44). Du dernier calcul, nous obtenons également

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du_{p_n}|^{p_n}}{p_n} - \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\lambda^{p_n} (\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_\rho(a_i)} u_*) (2\pi\rho)^{2-p_n}}{2p_n\pi} \frac{(2\pi\rho)^{2-p_n}}{2-p_n} = \sum_{i=1}^k \int_0^\rho \left[\int_{\partial \mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du|^2}{2} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda^2 (\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_r(a_i)} u_*)}{4\pi r} \right] dr. \quad (8.46)$$

Fixons un $i = 1, \dots, \kappa$. En appliquant 8.4 à (8.46) pour $j \neq i, j = 1, \dots, \kappa$, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{B}_\rho(a_i)} \frac{|Du_{p_n}|^{p_n}}{p_n} - \frac{\lambda^{p_n} (\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_\rho(a_i)} u_*) (2\pi\rho)^{2-p_n}}{2p_n\pi} \frac{(2\pi\rho)^{2-p_n}}{2-p_n} = \int_0^\rho \left[\int_{\partial \mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du|^2}{2} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda^2 (\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_r(a_i)} u_*)}{4\pi r} \right] dr. \quad (8.47)$$

Cela montre la convergence près des singularités (8.34).

Nous prouvons maintenant la convergence à travers les L^p du gradient Du_n vers Du sur $\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i)$. Nous avons

$$4 \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i)} |Du_*|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i)} |Du_n + Du_*|^{p_n}$$

qui résulte de la convergence presque partout de u_n . De cette limite inférieure, de (8.44) et de l'inégalité de Hanner (1.21), nous trouvons : pour chaque n ,

$$2^{p_n} \left(\|Du_n\|_{L^{p_n}(\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i))}^{p_n} + \|Du_*\|_{L^{p_n}(\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i))}^{p_n} \right) \geq \left(\|Du_n + Du\|_{L^{p_n}(\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i))} + \|Du_n - Du_*\|_{L^{p_n}(\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i))} \right)^{p_n} + \left| \|Du_n + Du_*\|_{L^{p_n}(\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i))} - \|Du_n - Du_*\|_{L^{p_n}(\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i))} \right|^{p_n}$$

Cela donne, après un éventuel passage à la sous-suite, *confer* (1.26),

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \|Du_n - Du_*\|_{L^{p_n}(\Omega - \bigcup_{i=1}^k \mathbb{B}_\rho(a_i))} \leq 0.$$

Pour la convergence en mesure des gradients, nous avons, par l'inégalité de Tchebychev, pour tout $\rho \in]0, \rho(a_i)_i[$

$$\begin{aligned} & |\Omega \cap \{|Du_n - Du| \geq t\}| \\ & \leq \left| \left(\Omega - \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i) \right) \cap \{|Du_n - Du| \geq t\} \right| + \kappa |\mathbb{B}_{\rho}| \\ & \leq \frac{1}{t^{p_n}} \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} |Du_n - Du_*|^{p_n} + \kappa |\mathbb{B}_{\rho}|. \end{aligned}$$

A la limite supérieure,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} |\Omega \cap \{|Du_n - Du| \geq t\}| \leq 0 + \kappa |\mathbb{B}_{\rho}|$$

mais $\rho > 0$ était arbitraire. Nous avons montré (8.39) et la convergence en mesure des gradients.

Pour tout n et pour tout t nous écrivons par l'additivité de la mesure, l'inégalité $\left| |a|^{\frac{p_n}{2}} - |b|^{\frac{p_n}{2}} \right|^{\frac{2}{p_n}} \leq ||a| - |b||$ ainsi que l'inégalité de Chebichev,

$$t^{p_n} |\{\Omega : \left| |Du_n|^{\frac{p_n}{2}} - |Du|^{\frac{p_n}{2}} \right| \geq t^{\frac{p_n}{2}}\}| \quad (8.48)$$

$$= t^{p_n} |\{\Omega - \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i) : \left| |Du_n|^{\frac{p_n}{2}} - |Du|^{\frac{p_n}{2}} \right| \geq t^{\frac{p_n}{2}}\}| \quad (8.49)$$

$$+ t^{p_n} |\{\bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i) : \left| |Du_n|^{\frac{p_n}{2}} - |Du|^{\frac{p_n}{2}} \right| \geq t^{\frac{p_n}{2}}\}|$$

$$\leq t^{p_n} |\{\Omega - \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i) : ||Du_n| - |Du|| \geq t\}|$$

$$+ t^{p_n} |\{\bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i) : \left| |Du_n|^{\frac{p_n}{2}} - |Du|^{\frac{p_n}{2}} \right| \geq t^{\frac{p_n}{2}}\}|$$

$$\leq \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} ||Du_n| - |Du||^{p_n} + t^{p_n} |\{\bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i) : ||Du_n| - |Du|| \geq t\}|$$

Définissons une fonction $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$U = \sum_{i=1}^{\kappa} \frac{\lambda(\text{Trace}_{\partial \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*)}{|x - a_i|} \chi_{\mathbb{B}_{\rho}(a_i)}.$$

Nous avons alors

$$\begin{aligned}
& t^{p_n} \left| \left\{ \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i) : \left| |Du_n|^{\frac{p_n}{2}} - |Du|^{\frac{p_n}{2}} \right| \geq t^{\frac{p_n}{2}} \right\} \right| \\
& \leq t^{p_n} \left| \left\{ \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i) : \left| |Du_n|^{\frac{p_n}{2}} - |U|^{\frac{p_n}{2}} \right| \geq t^{\frac{p_n}{2}}/2 \right\} \right| \\
& \quad + t^{p_n} \left| \left\{ \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i) : \left| |U|^{\frac{p_n}{2}} - |Du|^{\frac{p_n}{2}} \right| \geq t^{\frac{p_n}{2}}/2 \right\} \right|. \quad (8.50)
\end{aligned}$$

Par l'inégalité de Chebichev (cas de $q = 2$) et le choix de U ,

$$\begin{aligned}
& t^{p_n} \left| \left\{ \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i) : \left| |Du_n|^{\frac{p_n}{2}} - |U|^{\frac{p_n}{2}} \right| \geq t^{\frac{p_n}{2}}/2 \right\} \right| \leq 2^2 \sum_{i=1}^{\kappa} \int_{\mathbb{B}_{\rho}(a_i)} (|Du_n|^{\frac{p_n}{2}} - |U|^{\frac{p_n}{2}})^2 \\
& = 4p_n \sum_{i=1}^{\kappa} \int_0^{\rho} \int_{\mathbb{S}_r^1(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda^{p_n} (\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*) (2\pi r)^{2-p_n}}{2\pi p_n r} dr \quad (8.51)
\end{aligned}$$

Un résultat analogue est valide pour le second terme (8.50) où u_n est formellement remplacé par u_* . En reprenant, les majorations (8.48) et (8.51), nous trouvons, par la limite (8.46),

$$\begin{aligned}
& \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{t > 0} t^{p_n} \left| \left\{ \Omega : \left| |Du_n|^{\frac{p_n}{2}} - |Du|^{\frac{p_n}{2}} \right| \geq t^{\frac{p_n}{2}} \right\} \right| \quad (8.52) \\
& \leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega - \bigcup_{i=1}^{\kappa} \mathbb{B}_{\rho}(a_i)} \left| |Du_n| - |Du| \right|^{p_n} \\
& \quad + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 4p_n \sum_{i=1}^{\kappa} \int_0^{\rho} \int_{\mathbb{S}_r^1(a_i)} \frac{|Du_n|^{p_n}}{p_n} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda^{p_n} (\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*) (2\pi r)^{2-p_n}}{2\pi p_n r} dr \\
& \quad + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} 4p_n \sum_{i=1}^{\kappa} \int_0^{\rho} \int_{\mathbb{S}_r^1(a_i)} \frac{|Du_*|^{p_n}}{p_n} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda^{p_n} (\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_{\rho}(a_i)} u_*) (2\pi r)^{2-p_n}}{2\pi p_n r} dr \\
& = 0 + 16 \sum_{i=1}^{\kappa} \int_0^{\rho} \left[\int_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} \frac{|Du_*|^2}{2} d\mathcal{H}^1 - \frac{\lambda^2 (\text{Trace}_{\partial\mathbb{B}_r(a_i)} u_*)}{4\pi r} \right] dr.
\end{aligned}$$

Or, nous savons de la proposition 4.16, que le terme entre crochets est intégrable sur $[0, \rho(a_i)_i]$. Par la continuité de l'intégrale, nous obtenons (8.40), quand $\rho \downarrow 0$.

Ceci conclut la preuve. □

Conclusion

Dans ce travail, nous avons formulé une première réponse au problème que nous nous étions posé : nous avons donné plusieurs notions raisonnables de convergence pour les applications p -harmoniques quand $p \uparrow 2$ vers des applications renormalisables. Ces idées se trouvent synthétisées dans le dernier théorème de ce mémoire. Nous avons ainsi généralisé l'approche existante de la convergence des applications p -harmoniques. Cela nous a emmené sur quelques domaines des mathématiques remarquables : l'homotopie des applications à oscillation moyenne évanescence, l'approximation d'applications de Sobolev à valeurs dans une variété et les méthodes utilisées pour l'étude de la fonctionnelle de Ginzburg–Landau avec, en filigrane, la théorie de l'homotopie et de la géométrie riemannienne.

De prime abord, l'approximation par applications p -harmoniques devait être simple car les applications étudiées conservent leurs valeurs dans la variété. Or, les difficultés sont survenues quand il a fallu considérer des limites en p dans des quantités venant de la théorie des espaces de Lebesgue L^p . Aussi, cette approche nous a obligé à conserver une forme très explicite des constantes apparaissant dans les inégalités ; il était, en effet, nécessaire de savoir si elle passait à la limite quand $p \uparrow 2$: ceci a alourdi considérablement l'écriture. Enfin, la convergence à travers les L^p n'est ni topologique ni linéaire : il n'y a pas d'espace topologique linéaire sous-jacent ; nous avons dû modifier les preuves de l'analyse fonctionnelle à notre cadre non-linéaire.

Ce mémoire pose plusieurs questions : tout d'abord, concernant la variété, la compacité est-elle nécessaire ? Nous pensons que des hypothèses sur le spectre de longueurs pourraient remplacer cette hypothèse. La compacité de la variété implique que le spectre des longueurs est discret et est utile car les applications sont bornées mais ce dernier fait pourrait être supplanté par une inégalité de type Poincaré. Aussi, nous pensons que la convergence peut encore être améliorée en considérant l'équation d'Euler–Lagrange des applications p -harmoniques.

Ensuite, la question des applications p -harmoniques stationnaires quand $p \uparrow 2$ a été traitée par STERN pour le cas du cercle : notre méthode permet-elle traiter ces applications stationnaires ?

Enfin, de façon plus conjecturale, l'ouvert, source des applications p -harmoniques, pourrait lui aussi être une surface ou même une variété de dimension supérieure avec ou sans bord. La variété pourrait alors être un fibré de cette surface ou variété. Comment se généralisent les idées présentées dans ce mémoire ?

Liste des énoncés

Continuité de la norme	14
Existence quand $W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) \neq \emptyset$, proposition 1.1	15
Définition de $W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$	15
Trace d'une fonction dans $W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$	16
Définition de $W_g^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$	16
Approximation par presque-minimiseurs, $W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) \neq \emptyset$, proposition 1.2	16
Semi-continuité supérieure de la p -énergie de Dirichlet	17
Existence d'une sous-suite convergente dans $W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$, proposition 1.3	18
Approximation de fonctions de Sobolev par moyennisation, lemme 1.4	19
Existence d'une sous-suite convergente en dimension finie, lemme 1.5	21
Preuve de la proposition 1.3 – I/II, proposition 1.6	22
Preuve de la proposition 1.3 – II/II, proposition 1.7	23
Caractérisation de la dérivée faible par dualité, lemme 1.8	24
Démonstration de la proposition 1.7	24
Inégalité de Hanner	25
Démonstration de la proposition 1.2	25
Démonstration de la proposition 1.1	28
Convergence faible des suite bornées à travers les L^p , proposition 2.1	29
Convergence à travers les L^p , définition 2.2	30
Formulations équivalentes convergence à travers les L^p , proposition 2.3	30
Inégalité algébrique du lemme de Brézis–Lieb, lemme 2.4	31
Démonstration du lemme 2.4	31
Lemme de Fatou pour la convergence en mesure, lemme 2.5	32
Démonstration de la proposition 2.3	32
Fonction à oscillation moyenne évanescence – VMO, définition 3.1	36
Plongement de Morrey–Companato, proposition 3.2	37
Définition de $W^{1/2,2}$, (3.5)	38
Oscillation moyenne contrôlée par les énergies de Sobolev, proposition 3.3	38
Injections dans VMO, corollaire 3.4	40
Continuité de $W^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$ quand $p > 2$, corollaire 3.5	41
Convergence dans $VMO(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, définition 3.6	41
Homotopie dans VMO, définition 3.7	42
L'homotopie dans $VMO(\mathcal{M}, \mathcal{N})$ est une relation d'équivalence, lemme 3.8	42
Équivalence des homotopies, proposition 3.9	43
Théorème de Sarason, proposition 3.10	44

Approximation par moyenne dans VMO, 3.11	44
Équivalence entre l'homotopie VMO et l'homotopie continue	45
Existence d'un voisinage tubulaire d'une variété riemannienne, proposition 3.12	45
Caractérisation des compacts de $VMO(\mathcal{M}, \mathcal{N})$, lemme 3.13	46
Démonstration de la proposition 3.9	46
Données au bord $g \in W^{1/2,2}$ ayant un extension $W^{1,2}$, proposition 3.14	49
Surjectivité de la trace, proposition 3.15	50
Démonstration de la proposition 3.15	51
Démonstration de la proposition 3.14 quand $g = \text{Trace}_{\partial\Omega} u$, $u \in W^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$	56
Lemme de mollification dans la variété], lemme 3.16	57
Démonstration de la proposition 3.14	58
$W_g^{1,p}(\Omega, \mathcal{N})$, $p < 2$, est non vide, proposition 4.1	61
Résolution topologique continue, définition 4.2	62
Résolution topologique de Sobolev, définition 4.3	63
Extension de degré zéro, proposition 4.4	64
Stabilité de $W^{1,p}$ par perturbations de taille \mathcal{H}^0 , lemme 4.5	64
Extension de degré zéro, cas de $p = 2$, proposition 4.6	65
Démonstration de la proposition 4.1 sans estimation	66
Définition de géodésique fermée	66
Existence de géodésiques fermées, proposition 4.7	67
Définition de la systole	69
Borne inférieure locale sur un anneau, proposition 4.8	69
Borne inférieure locale sur les cercles, proposition 4.9	71
Énergie singulière, $\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g)$, définition 4.10	72
Continuité en p de $\mathcal{E}_p^{\text{sg}}(g)$, proposition 4.11	72
Définition des résolutions topologiques de Sobolev p -minimales	73
Existence de résolutions topologiques de Sobolev p -minimales, proposition 4.13	73
Applications renormalisables $W_{\text{ren}}^{1,2}(\Omega, \mathcal{N})$ et énergie renormalisée $\mathcal{E}_2^{\text{ren}}$, déf. 4.14	74
Décroissance de la p -énergie renormalisée tronquée à ρ , lemme 4.15	75
Expression polaire de l'énergie renormalisée $\mathcal{E}_2^{\text{ren}}(u)$, proposition 4.16	76
Approximation de $\mathcal{E}_2^{\text{ren}}$ par $\mathcal{E}_p^{\text{ren}}$ quand $p \uparrow 2$, proposition 4.17	77
Borne supérieure sur la p -énergie de Dirichlet, proposition 5.1	81
La classe $\mathcal{R}^{1,2}(\Omega_\delta, \mathcal{N})$, définition 6.1	83
Densité de la classe $\mathcal{R}^{1,2}(\Omega_\delta, \mathcal{N})$, proposition 6.2	84
Changer u sur les mauvaises boules, lemme 6.3	85
Changer u sur les bonnes boules, lemme 6.4	85
Démonstration de la proposition 6.2	86
Expansion de boules, proposition 7.1	91
Croissance de la fonction Ξ , lemme 7.2	93
Fusion de boules dans l'espace euclidien, lemme 7.3	94
Démonstration de la proposition 7.1 d'expansion des boules	96
Lemme d'amorçage, lemme 7.4	96
Lemme de fusion, lemme 7.5	97

Lemme d'extension, lemme 7.6	98
Borne inférieure globale, cas de $\mathcal{R}^{1,2}(\Omega_\delta, \mathcal{N})$, proposition 7.7	99
Compacité de familles finies de boules, lemme 7.8	102
Borne inférieure globale, $W^{1,p}(\Omega_\delta, \mathcal{N})$, proposition 7.9	104
Existence d'une sous-suite quand $p \uparrow 2$, $W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) = \emptyset$, proposition 8.1	107
L'inclusion $a \in \Omega$, lemme 8.2	109
Convergence de presque-minimiseurs quand $p \uparrow 2$, $W_g^{1,2}(\Omega, \mathcal{N}) = \emptyset$, théorème 8.3	117

Bibliographie

- [1] Alberto ABBONDANDOLO. « On the homotopy type of VMO ». In : *Topological Methods in Nonlinear Analysis* 7.2 (1^{er} juin 1996), p. 431. DOI : 10.12775/TMNA.1996.018 (cf. p. 45).
- [2] Hedy ATTOUCH, Giuseppe BUTTAZZO et Gérard MICHAILLE. *Variational analysis in Sobolev and BV spaces : applications to PDEs and optimization*. Second edition. MOS-SIAM series on optimization 17. Philadelphia : Society for Industrial et Applied Mathematics : Mathematical Optimization Society, 2014. 793 p. (cf. p. 55).
- [3] Fabrice BETHUEL. « The approximation problem for Sobolev maps between two manifolds ». In : *Acta Mathematica* 167.1 (1991), p. 153-206. DOI : 10.1007/BF02392449 (cf. p. 84).
- [4] Fabrice BETHUEL, Haïm BREZIS et Frédéric HÉLEIN. *Ginzburg-Landau Vortices*. Boston, MA : Birkhäuser Boston, 1994 (cf. pp. 10, 77).
- [5] Fabrice BETHUEL et Franoise DEMENGEL. « Extensions for Sobolev mappings between manifolds ». In : *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 3.4 (1995), p. 475-491 (cf. pp. 10, 50).
- [6] Fabrice BETHUEL et Xiaomin ZHENG. « Density of smooth functions between two manifolds in Sobolev spaces ». In : *Journal of Functional Analysis* 80.1 (), p. 60-75. DOI : 10.1016/0022-1236(88)90065-1 (cf. p. 63).
- [7] V. I. BOGACHEV. *Measure theory*. New York : Springer, 2007 (cf. pp. 31, 32, 48, 86).
- [8] Pierre BOUSQUET, Augusto PONCE et Jean VAN SCHAFTINGEN. « Strong density for higher order Sobolev spaces into compact manifolds ». In : *Journal of the European Mathematical Society* 17.4 (2015), p. 763-817. DOI : 10.4171/JEMS/518 (cf. pp. 57, 84).
- [9] Pierre BOUSQUET, Augusto C PONCE et Jean VAN SCHAFTINGEN. « A case of density in $W^{2,p}(M, N)$ ». In : *Comptes Rendus Mathématique* 346.13-14 (2008), p. 735-740 (cf. p. 84).
- [10] Haim BREZIS. *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*. New York, NY : Springer New York, 2010 (cf. p. 22).
- [11] Haïm BREZIS, Jean-Michel CORON et Elliott H. LIEB. « Harmonic maps with defects ». In : *Communications in Mathematical Physics* 107.4 (déc. 1986), p. 649-705. DOI : 10.1007/BF01205490 (cf. p. 9).

- [12] Haïm BREZIS et Elliott LIEB. « A Relation Between Pointwise Convergence of Functions and Convergence of Functionals ». In : *Proceedings of the American Mathematical Society* 88.3 (1983). Publisher : American Mathematical Society, p. 486-490. DOI : 10.2307/2044999 (cf. p. 31).
- [13] Haïm BREZIS et Louis NIRENBERG. « Degree theory and BMO; part I : Compact manifolds without boundaries ». In : *Selecta Mathematica* 1.2 (sept. 1995), p. 197-263. DOI : 10.1007/BF01671566 (cf. pp. 37, 42, 44, 46).
- [14] Haïm BREZIS et Louis NIRENBERG. « Degree theory and BMO; part II : Compact manifolds with boundaries ». In : *Selecta Mathematica* 2.3 (mar. 1996), p. 309-368. DOI : 10.1007/BF01587948 (cf. p. 37).
- [15] Haïm BREZIS et Augusto PONCE. « Équation de Ginzburg-Landau et singularités : Cours présenté à l'IMPA par Augusto Ponce, d'après le cours de master de Haïm Brezis à l'Université de Paris VI ». In : (2004), p. 78 (cf. p. 10).
- [16] Robert F. BROWN. « Elementary Consequences of the Noncontractibility of the Circle ». In : *The American Mathematical Monthly* 81.3 (mar. 1974), p. 247. DOI : 10.2307/2319523 (cf. p. 49).
- [17] Giacomo CANEVARI et Giandomenico ORLANDI. « Topological singular set of vector-valued maps, I : Applications to manifold-constrained Sobolev and BV spaces ». In : *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 58.2 (2019), p. 1-40 (cf. p. 10).
- [18] Giacomo CANEVARI et Giandomenico ORLANDI. « Topological singular set of vector-valued maps, II : Γ -convergence for Ginzburg-Landau type functionals ». In : *arXiv :2003.01354* (2020) (cf. p. 10).
- [19] Manfredo Perdigão do CARMO. *Riemannian Geometry*. Mathematics : theory and applications. Birkhäuser, 1992. 300 p. ISBN : 978-3-7643-3490-1 (cf. p. 68).
- [20] Alexandra CONVENT. « Intrinsic Sobolev maps between manifolds ». Supervisor : Jean Van Schaftingen. Thèse de doct. Louvain-la-Neuve : UCLouvain, juin 2017. 167 p. URL : <http://hdl.handle.net/2078.1/186337> (cf. p. 15).
- [21] Alexandra CONVENT et Jean VAN SCHAFTINGEN. « Intrinsic weak derivatives and Sobolev spaces between manifolds ». In : *Ann. Sc. Norm. Superiore Cl. Sc XVI* (2016), p. 97-128. DOI : 10.2422/2036-2145.201312_005 (cf. p. 15).
- [22] Bernard DACOROGNA. *Introduction to the calculus of variations*. 3rd edition. Covent Garden, London ; Hackensack, NJ : Imperial College Press, 2015. 311 p. (cf. pp. 17, 24).
- [23] Guy DAVID. *Singular Sets of Minimizers for the Mumford-Shah Functional*. Progress in Mathematics. Birkhäuser Basel, 2005 (cf. p. 102).
- [24] Eleonora DI NEZZA, Giampiero PALATUCCI et Enrico VALDINOCI. « Hitchhikers guide to the fractional Sobolev spaces ». In : *Bulletin des Sciences Mathématiques* 136.5 (juil. 2012), p. 521-573 (cf. p. 19).
- [25] Frank DUZAAR et Giuseppe MINGIONE. « The p -harmonic approximation and the regularity of p -harmonic maps ». In : *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 20.3 (1^{er} juil. 2004), p. 235-256. DOI : 10.1007/s00526-003-0233-x (cf. pp. 11, 12).

- [26] ENRIQUE OUTERLO et RUIZ, JESUS M. *Mapping Degree Theory*. Graduate studies in mathematics 108. American Mathematical Society, 2009 (cf. pp. 45, 71).
- [27] Emilio GAGLIARDO. « Caratterizzazioni delle tracce sulla frontiera relative ad alcune classi di funzioni in class n variabili ». In : *Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova* 27 (1957), p. 284-305 (cf. p. 50).
- [28] Andreas GASTEL et Andreas J. NERF. « Density of smooth maps in $W^{k,p}(M, N)$ for a close to critical domain dimension ». In : *Annals of Global Analysis and Geometry* 39.2 (fév. 2011), p. 107-129. DOI : 10.1007/s10455-010-9225-1 (cf. pp. 84-86).
- [29] Piotr HAJLASZ. « Sobolev Mappings between Manifolds and Metric Spaces ». In : *Sobolev Spaces In Mathematics I : Sobolev Type Inequalities*. Sous la dir. de Vladimir MAZ'YA. International Mathematical Series. New York, NY : Springer, 2009, p. 185-222. DOI : 10.1007/978-0-387-85648-3_7 (cf. p. 50).
- [30] Olof HANNER. « On the uniform convexity of L^p and l^p ». In : *Arkiv för Matematik* 3.3 (fév. 1956). Editeur d'origine : Institut Mittag-Leffler, p. 239-244 (cf. p. 25).
- [31] Robert HARDT et Fang-Hua LIN. « Mappings minimizing the L^p norm of the gradient ». In : *Communications on Pure and Applied Mathematics* 40.5 (sept. 1987), p. 555-588. DOI : 10.1002/cpa.3160400503 (cf. pp. 10, 61, 66).
- [32] Robert HARDT et Fang-Hua LIN. « Singularities for p -energy minimizing unit vector-fields on planar domains ». In : *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 3.3 (1995), p. 311-341 (cf. pp. 10, 18, 70, 82, 109, 119).
- [33] Allen HATCHER. *Algebraic Topology*. Cambridge ; New York : Cambridge University Press, 29 oct. 2009. 556 p. (cf. p. 50).
- [34] Takeshi ISOBE. « Obstructions to the extension problem of Sobolev mappings ». In : *Topological Methods in Nonlinear Analysis* 21.2 (1^{er} juin 2003), p. 345. DOI : 10.12775/TMNA.2003.021 (cf. p. 50).
- [35] John M. LEE. *Introduction to Smooth Manifolds*. T. 218. Graduate Texts in Mathematics. New York, NY : Springer New York, 2012 (cf. p. 43).
- [36] John M. LEE. *Introduction to Riemannian Manifolds*. T. 176. Graduate Texts in Mathematics. Cham : Springer International Publishing, 2018 (cf. p. 68).
- [37] Giovanni LEONI. *A first course in Sobolev spaces*. Second edition. Graduate studies in mathematics volume 181. Providence, Rhode Island : American Mathematical Society, 2017. 734 p. (cf. pp. 16, 22, 24, 38, 50, 51, 55, 56).
- [38] Elliott H. LIEB et Michael Loss. *Analysis*. 2nd ed. Graduate studies in mathematics v. 14. Providence, RI : American Mathematical Society, 2001. 346 p. (cf. pp. 19, 25, 31).
- [39] Stephan LUCKHAUS. « Convergence of minimizers for the p -Dirichlet integral ». In : *Mathematische Zeitschrift* 213.1 (1^{er} mai 1993), p. 449-456. DOI : 10.1007/BF03025730 (cf. p. 18).
- [40] J. LUUKKAINEN et J. VÄISÄLÄ. « Elements of Lipschitz topology ». In : *Annales Academiae Scientiarum Fennicae Series A I Mathematica* 3 (1977), p. 85-122. DOI : 10.5186/aasfm.1977.0315 (cf. p. 45).

- [41] Alexis MACQ, Maxence REBEROL, François HENROTTE, Pierre-Alexandre BEAUFORT, Alexandre CHEMIN, Jean-François REMACLE et Jean VAN SCHAFTINGEN. « Ginzburg-Landau energy and placement of singularities in generated cross fields ». In : *arXiv :2010.16381* (30 oct. 2020) (cf. p. 9).
- [42] Katarzyna MAZOWIECKA et Jean VAN SCHAFTINGEN. « Quantitative characterization of traces of Sobolev maps ». In : *arXiv :2101.10934v1* (26 jan. 2021) (cf. pp. 42, 50).
- [43] Vladimir MAZ'YA. *Sobolev Spaces*. T. 342. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Berlin, Heidelberg : Springer Berlin Heidelberg, 2011 (cf. p. 64).
- [44] Petru MIRONESCU et Jean VAN SCHAFTINGEN. « Trace theory for Sobolev mappings into a manifold ». In : *arXiv :2001.02226* (7 jan. 2020) (cf. p. 50).
- [45] Antonin MONTEIL, Rémy RODIAC et Jean VAN SCHAFTINGEN. « Ginzburg-Landau relaxation for harmonic maps on planar domains into a general compact vacuum manifold ». In : *arXiv :2008.13512v1* (31 août 2020) (cf. pp. 10, 11, 51, 68, 71, 74, 75, 91, 94, 109, 119).
- [46] Antonin MONTEIL, Rémy RODIAC et Jean VAN SCHAFTINGEN. « Renormalised energies and renormalisable singular harmonic maps into a compact manifold on planar domains ». In : *arXiv :2006.14823v3* (1^{er} sept. 2020) (cf. pp. 10, 11, 51, 62, 67, 70, 82, 109).
- [47] Amiya MUKHERJEE. *Differential Topology*. Cham : Springer International Publishing, 2015 (cf. pp. 43, 46).
- [48] John NASH. « The Imbedding Problem for Riemannian Manifolds ». In : *Annals of Mathematics* 63.1 (1956). Publisher : Annals of Mathematics, p. 20-63. DOI : 10.2307/1969989 (cf. p. 13).
- [49] Mircea PETRACHE. « Weak bundle structures and a variational approach to Yang-Mills Lagrangians in supercritical dimensions ». Supervisor : Tristan Rivière. Thèse de doct. ETH Zurich, 2017. 167 p. URL : <https://people.math.ethz.ch/~triviere/pdf/phd/petrache.pdf> (cf. p. 50).
- [50] Mircea PETRACHE et Tristan RIVIÈRE. « Global gauges and global extensions in optimal spaces ». In : *Analysis & PDE* 7.8 (31 déc. 2014), p. 1851-1899. DOI : 10.2140/apde.2014.7.1851 (cf. p. 50).
- [51] Augusto PONCE. *Elliptic PDEs, Measures and Capacities : From the Poisson Equation to Nonlinear Thomas-Fermi Problems*. Tracts in Mathematics 23. Zürich, Switzerland : European Mathematical Society Publishing House, 31 oct. 2016. 463 p. (cf. pp. 16, 37, 38, 50, 51, 55).
- [52] Augusto C. PONCE et Jean VAN SCHAFTINGEN. « Closure of Smooth Maps in $W^{1,p}(\mathbb{B}^3, \mathbb{S}^2)$ ». In : *Differential and Integral Equations* 22.9/10 (2009), p. 881-900 (cf. pp. 63, 84-86).
- [53] Vicentiu RADULESCU. « Analyse de quelques problèmes liés à l'équation de Ginzburg-Landau ». Thèse de doct. Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), 1995. URL : <http://math.ucv.ro/~radulescu/> (cf. p. 77).

- [54] Etienne SANDIER. « Lower Bounds for the Energy of Unit Vector Fields and Applications ». In : *Journal of Functional Analysis* 152.2 (1^{er} fév. 1998), p. 379-403 (cf. pp. 91, 94).
- [55] Etienne SANDIER et Sylvia SERFATY. *Vortices in the Magnetic Ginzburg-Landau Model*. Birkhäuser Basel, 2007 (cf. pp. 91, 94).
- [56] Donald SARASON. « Functions of vanishing mean oscillation ». In : *Transactions of the American Mathematical Society* 207 (1975), p. 391-405 (cf. pp. 37, 42, 44).
- [57] Sylvia SERFATY. « Coulomb Gases and Ginzburg-Landau Vortices ». In : *Zurich lectures in advanced mathematics* (2015) (cf. p. 10).
- [58] Leon SIMON. *Theorems on Regularity and Singularity of Energy Minimizing Maps*. Birkhäuser Basel, 1996 (cf. p. 63).
- [59] Jacob STERBENZ et Daniel TATARU. « Energy dispersed large data wave maps in 2+1 dimensions ». In : *Communications in Mathematical Physics* 298.1 (août 2010), p. 139-230. DOI : 10.1007/s00220-010-1061-4 (cf. p. 9).
- [60] Daniel STERN. « p -Harmonic Maps to S^1 and Stationary Varifolds of Codimension 2 ». In : *Calculus of Variations and Partial Differential Equations* 59.6 (2020), p. 1-47 (cf. pp. 10, 109).
- [61] Terence TAO. *Notes on the Nash embedding theorem*. Blog de Terence Tao. 11 mai 2016. URL : <https://terrytao.wordpress.com/2016/05/11/notes-on-the-nash-embedding-theorem/> (visité le 20/05/2021) (cf. p. 13).
- [62] Francesco UGUZZONI et Ermanno LANCONELLI. « Degree Theory for VMO Maps on Metric Spaces ». In : *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa-Classe di Scienze* 1.3 (2002), p. 569-601 (cf. p. 37).
- [63] Jean VAN SCHAFTINGEN. « Estimates by gap potentials of free homotopy decompositions of critical Sobolev maps ». In : *Advances in Nonlinear Analysis* 9.1 (10 déc. 2019), p. 1214-1250. ISSN : 2191-950X. DOI : 10.1515/anona-2020-0047 (cf. p. 94).
- [64] Jean VAN SCHAFTINGEN. *Sobolev mappings into manifolds : nonlinear methods for approximation, extension and lifting problems*. (en préparation). 2021 (cf. pp. 16, 19, 37, 46, 50, 53, 55, 64).
- [65] Yves Colin de VERDIÈRE. « Spectre du laplacien et longueurs des géodésiques périodiques. I ». In : *Compositio Mathematica* 27.1 (1973), p. 83-106 (cf. p. 67).
- [66] S. W. WEI. « Representing homotopy groups and spaces of maps by p -harmonic maps ». In : *Indiana University Mathematics Journal* 47.2 (1998). DOI : 10.1512/iumj.1998.47.1179 (cf. p. 11).
- [67] Michel WILLEM. *Functional Analysis*. Cornerstones. New York, NY : Springer New York, 2013 (cf. pp. 15, 22, 23, 25, 27, 31, 42, 48, 51, 53, 56, 102, 105).
- [68] Yuanlong XIN. *Geometry of Harmonic Maps*. Progress in Nonlinear Differential Equations and Their Applications. Boston : Birkhauser Boston Inc, 1996 (cf. p. 9).

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
Faculté des sciences

Place des sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/sc