

**Louvain School of Management**

# **Simulation des flux de circulation : Application au ring de Bruxelles**

Auteurs : Ryckmans Charles  
Promoteur : De Wolf Daniel  
Année académique 2021-2022  
Travail de fin d'études (TFE) en vue d'obtenir le titre de  
Master (60) en Sciences de Gestion  
Horaire de jour



# Table des matières

|          |  |           |
|----------|--|-----------|
| <b>1</b> | <b>Introduction</b>  | <b>1</b>  |
| <b>2</b> | <b>Formulation mathématique</b>  | <b>3</b>  |
| 2.1      | Indices . . . . .  | 3         |
| 2.2      | Paramètres . . . . .   | 5         |
| 2.3      | Variables de décisions . . . . .   | 6         |
| 2.3.1    | Variables indépendantes . . . . .  | 6         |
| 2.3.2    | Variables dépendantes . . . . .  | 6         |
| 2.4      | Objectif . . . . .   | 7         |
| 2.4.1    | Fonction objectif . . . . .  | 7         |
| 2.4.2    | Solution d'équilibre . . . . .   | 7         |
| 2.4.3    | Unicité de la solution . . . . .   | 7         |
| 2.5      | Contraintes . . . . .  | 8         |
| 2.5.1    | Satisfaction à la demande de déplacement . . . . .                                 | 8         |
| 2.5.2    | Positivité des flux . . . . .  | 8         |
| 2.5.3    | Calcul des temps d'arcs . . . . .  | 8         |
| 2.5.4    | Calcul des flux d'arcs, des temps de chemin et du temps total . . . . .            | 9         |
| 2.6      | Type de problème à résoudre . . . . .  | 9         |
| <b>3</b> | <b>Résolution avec Excel</b>   | <b>11</b> |
| 3.1      | Implémentation des variables, des contraintes et de l'objectif . . . . .           | 11        |
| 3.1.1    | Matrice d'incidence $\delta_{p,a}$ . . . . .                                       | 11        |
| 3.1.2    | Flux des chemins $f_p$ . . . . .   | 11        |
| 3.1.3    | Flux $x_a$ et temps de traversé $t_a$ des arcs . . . . .                           | 11        |
| 3.1.4    | Flux des paires origine-destination . . . . .                                      | 12        |
| 3.1.5    | Coût des chemins $c_p$ . . . . .   | 12        |
| 3.1.6    | Coût total du réseau $t_T$ . . . . .   | 13        |
| 3.1.7    | Fonction objectif $z(\mathbf{x})$ . . . . .  | 13        |
| 3.2      | Implémentation du solveur . . . . .  | 13        |
| <b>4</b> | <b>Analyse des résultats</b>   | <b>15</b> |
| 4.1      | Résultats du cas général . . . . .   | 15        |
| 4.1.1    | Flux $f_p$ et temps de parcours $c_p$ des chemins . . . . .                        | 15        |
| 4.1.2    | Flux $x_a$ et temps de traversée $t_a$ des arcs . . . . .                          | 17        |
| 4.1.3    | Coût total du réseau . . . . .   | 18        |
| 4.2      | Résultats en cas de réduction du nombre de voies sur l'arc Louvain-Namur . . . . . | 19        |
| 4.2.1    | Flux $f_p$ et temps de parcours $c_p$ des chemins . . . . .                        | 19        |
| 4.2.2    | Flux $x_a$ et temps de traversée $t_a$ des arcs . . . . .                          | 20        |
| 4.2.3    | Coût total du réseau . . . . .   | 22        |
| <b>5</b> | <b>Conclusion</b>  | <b>23</b> |

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Annexes</b>  | <b>27</b> |
| A.1 Listes et illustrations des chemins . . . . .                                     | 27        |
| A.2 Matrice d'incidence entre les chemins et les paires origine-destination . . . . . | 29        |
| A.3 Matrice d'incidence entre les chemins et les arcs . . . . .                       | 30        |

# Chapitre 1

## Introduction



FIGURE 1.1 – Embouteillage sur le Ring de Bruxelles : 10 kilomètres de files.[3]

Si vous habitez près de Bruxelles, il est fort probable que vous vous soyez déjà retrouvé aux heures de pointes, bloqués sur le Ring par la circulation dense des véhicules. La société INRIX a d'ailleurs publié un classement du niveau de congestion d'un grand ensemble de villes d'Europe, d'Amérique et de Russie [1]. La ville de Bruxelles est classée troisième ville la plus embouteillée d'Europe. Ce classement a été réalisé sur base de différents critères tels que le nombre d'heures perdues, la densité du réseau routier, la vitesse moyenne des véhicules, etc.

Il semble évident que la ville de Bruxelles est impactée négativement par ce problème. Il suffit de regarder le nombre d'heures perdues par an qui s'élève à 134 en 2021. On peut aussi penser à l'impact écologique engendré par le surplus de consommation du grand nombre de véhicules bloqués dans les bouchons.

La congestion du trafic routier est un sujet étudié depuis plusieurs années sur lequel se penche ce travail de fin d'études et plus particulièrement sur les embouteillages du Ring de Bruxelles. L'intérêt de ce genre de modèle est de pouvoir prédire l'impact de différents scénarios de transport et ainsi pouvoir mieux y faire face en proposant des solutions adaptées. Ce type de problème est plus communément connu sous le nom de *problème d'affectation du trafic*. L'objectif du travail est de modéliser le Ring de Bruxelles comme on pourrait le faire pour une chaîne de production classique d'un produit quelconque. Pour ce faire, il est modélisé par un ensemble de noeuds reliés par des arcs, eux-mêmes occupés par les différents véhicules du réseau qui cherchent chacun à minimiser leur temps de trajet individuel. On cherche en fait à obtenir une solution dite d'équilibre de l'utilisateur [4].

Cette solution d'équilibre est obtenue dans un modèle de circulation lorsque plus personne, en changeant de trajet, ne peut arriver plus rapidement à destination. En d'autres mots, on atteint une

solution d'équilibre lorsque tous les utilisateurs ayant une même origine et une même destination ne peuvent diminuer leur temps de trajet en changeant d'itinéraire. Ceci implique deux conditions : s'ils utilisent deux chemins différents à l'équilibre, ces deux chemins doivent avoir le même temps et si un chemin n'est pas utilisé à l'équilibre, il doit avoir un temps supérieur ou égal au temps des chemins utilisés. C'est un comportement normal finalement, s'il existe un chemin plus rapide pour arriver à destination, alors les gens vont changer de chemin. Il est à noter que les GPS et applications de smartphone vont automatiquement proposer un chemin plus intéressant s'il existe. Grâce à cette nouvelle technologie, on peut s'assurer que l'information des temps de parcours est connue en temps réel de tous les utilisateurs.

Le travail est structuré en 3 chapitres principaux, en dehors des chapitres d'introduction et de conclusion. Le chapitre 2 permet de poser les bases mathématiques en définissant les indices, les paramètres, les variables, les contraintes mais surtout l'objectif du modèle. Les données à obtenir pour un tel modèle sont de deux types : soit des données caractérisant le réseau en lui-même (infrastructure de transport, rue, carrefour, etc.) soit des données caractérisant la demande de déplacement entre différents points du réseau. C'est donc dans ce chapitre que certaines hypothèses vont être posées quant à la quantité de véhicules occupant le réseau mais aussi à la capacité des différents segments du Ring.

La formulation mathématique permet ensuite d'implémenter le modèle dans Excel. C'est dans le chapitre 3 qu'on explique en détails comment obtenir la solution d'équilibre de ce problème à l'aide du solveur d'Excel. La première partie est consacrée à l'implémentation du modèle mathématique sur Excel tandis que la seconde concerne le solveur en particulier.

Le chapitre 4 présente les résultats en analysant deux cas distincts : d'abord un cas de figure général et ensuite un cas fictif où des travaux sur le ring ralentiraient les voitures sur deux arcs bien précis.

# Chapitre 2

## Formulation mathématique

Un modèle mathématique est défini par 5 caractéristiques principales : les indices, les paramètres, les variables de décisions, la fonction objectif et la contrainte. C'est à travers ces 5 caractéristiques qu'est structuré ce chapitre.

La sixième et dernière sous-section de ce chapitre est dédiée à la discussion du modèle utilisé et plus particulièrement de l'éventuel ajout d'une contrainte additionnelle au modèle.

### 2.1 Indices

—  $i \in N$  = ensemble des différents noeuds du ring :

$$N = \{A, B, G, L, N, P\}$$

—  $a \in A$  = ensemble des différents arcs du ring :

$$A = \{(A, L), (L, A), (L, N), (N, L), (N, P), (P, N), (P, G), (G, P), (A, G), (G, A), (G, B), (B, G), (B, L), (L, B)\}$$

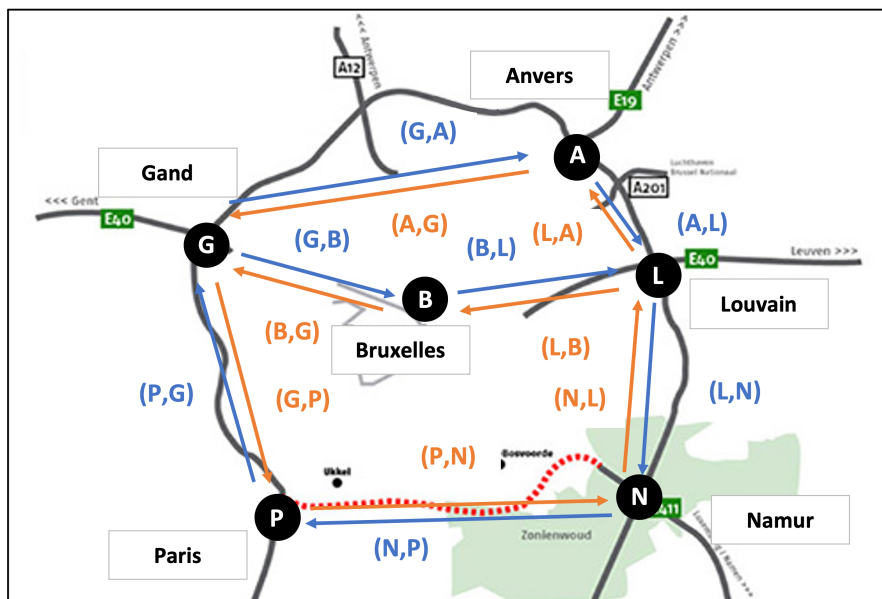


FIGURE 2.1 – Schéma du Ring : noeuds et arcs.

—  $od \in OD$  = ensemble des paires origines-destinations :

$$OD = \{(A, P), (L, G), (L, B), (N, B), (N, G), (G, B), (P, B)\}$$

Ces paires définissent les différents noeuds de départ et d'arrivée possibles des différents véhicules du réseau.

—  $p \in P =$  ensemble des différents chemins :

$$P = \{1, 2, 3, 4, \dots, 24\}$$

Pour chaque paire origine-destination, on identifie tous les chemins possibles qui partent de l'origine pour atteindre la destination en question. À titre d'illustration, ça a été fait pour la première paire Anvers-Paris.

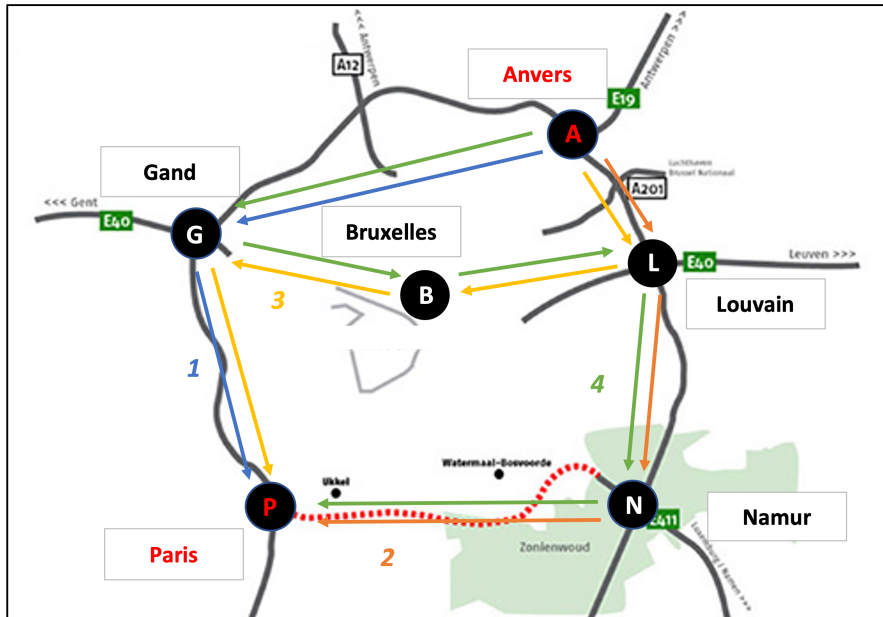


FIGURE 2.2 – 4 chemins possibles pour le trajet Anvers-Paris.

La figure 2.2 illustre donc les 4 différents chemins possibles pour rejoindre Paris à partir d'Anvers. Ces 4 chemins sont résumés au tableau 2.1.

| P | <i>Anvers</i> → <i>Paris</i>  |
|---|-------------------------------|
| 1 | (A,G) (G,P)                   |
| 2 | (A,L) (L,N) (N,P)             |
| 3 | (A,L) (L,B) (B,G) (G,P)       |
| 4 | (A,G) (G,B) (B,L) (L,N) (N,P) |

TABLE 2.1 – Indices des arcs correspondants aux 4 chemins du trajet Anvers-Paris.

Les illustrations ainsi que les tableaux reprenant les 20 autres chemins possibles pour les autres paires origine-destination sont repris en annexe A.1.

On définit ensuite la matrice d'incidence entre les chemins et les paires origine-destination de la façon suivante :

$$\delta_{p,od} = \begin{cases} 1 & \text{si } p \text{ est un chemin de la paire } od. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.1)$$

Son expression matricielle se trouve en annexe A.2. Cette matrice revient à attribuer une paire origine-destination à chaque chemin. Le tableau 2.2 permet, de façon plus claire, de relier chaque chemin à sa paire origine-destination. Il donne donc exactement la même information que la matrice d'incidence  $\delta_{p,od}$ .

| <b>p</b> | <b>origine - destination</b> | <b>p</b> | <b>origine - destination</b> | <b>p</b> | <b>origine - destination</b> |
|----------|------------------------------|----------|------------------------------|----------|------------------------------|
| 1        | Anvers - Paris               | 9        | Louvain - Bruxelles          | 17       | Namur - Gand                 |
| 2        | Anvers - Paris               | 10       | Louvain - Bruxelles          | 18       | Gand - Bruxelles             |
| 3        | Anvers - Paris               | 11       | Namur - Bruxelles            | 19       | Gand - Bruxelles             |
| 4        | Anvers - Paris               | 12       | Namur - Bruxelles            | 20       | Gand - Bruxelles             |
| 5        | Louvain - Gand               | 13       | Namur - Bruxelles            | 21       | Paris - Bruxelles            |
| 6        | Louvain - Gand               | 14       | Namur - Bruxelles            | 22       | Paris - Bruxelles            |
| 7        | Louvain - Gand               | 15       | Namur - Gand                 | 23       | Paris - Bruxelles            |
| 8        | Louvain - Bruxelles          | 16       | Namur - Gand                 | 24       | Paris - Bruxelles            |

TABLE 2.2 – Correspondance entre les chemins et les paires origine-destination

Les différents arcs sont exprimés par le couple  $(i, j)$  où  $i \in N$  est le noeud de départ et  $j \in N$  le noeud d'arrivée de l'arc. Ceci permet de mettre en évidence la notion d'arc orientée. En effet, l'arc  $(i, j)$  est totalement distinct de l'arc  $(j, i)$  malgré le fait qu'ils relient tous les deux les mêmes noeuds. Il pourrait très bien y avoir des ralentissements importants sur le premier alors que le second serait quasiment vide de toute circulation. De plus, les deux sens de circulation sont totalement séparés sur une autoroute.

Un exemple typique de cette situation est le cas de l'E411 vers 8h du matin un jour de semaine : les bandes en direction de Bruxelles sont fortement congestionnées tandis que celles sortant de la ville sont nettement moins sujettes à une circulation dense.

Les différentes paires origine-destination s'expriment de la même façon que pour les arcs, c'est à dire par un couple de noeuds  $(o, d)$  où  $o$  et  $d \in N$ . Dans ce cas,  $o$  indique alors l'origine du trajet tandis que  $d$  indique la destination.

## 2.2 Paramètres

Il faut d'abord commencer par définir le temps de traversée d'un arc : il représente le temps nécessaire à une voiture pour parcourir l'arc reliant deux noeuds du Ring. Ce temps dépend bien évidemment du nombre de voitures  $x_a$  occupant l'arc  $a$  que l'on appelle aussi flux de l'arc.

Dans notre modèle, on considère que le temps de traversée d'un arc est décrit par une fonction linéaire de  $x_a$ . Cette fonction caractérisant chaque arc et dépendant des paramètres  $a_a$  et  $b_a$  est d'ailleurs décrite, à la section 2.5, comme une contrainte du modèle. Le temps de traversée  $t_a$  quant à lui est décrit à la section 2.3, comme un variable dépendante du modèle. Cette variable est obtenue à partir du flux  $x_a$  de la façon suivante :

$$t_a(x_a) = a_a + b_a x_a \quad \forall a \quad (2.2)$$

Les valeurs des coefficients  $a_a$  et  $b_a$  pour chaque arc déterminé à partir de leurs noeuds d'origine et de destination sont repris dans le tableau 2.3

| Origine | Destination | $a_a$ | $b_a$   |
|---------|-------------|-------|---------|
| Anvers  | Louvain     | 3     | 0,00320 |
| Louvain | Namur       | 3     | 0,00315 |
| Namur   | Paris       | 11    | 0,01104 |
| Paris   | Gand        | 13    | 0,01312 |
| Gand    | Anvers      | 7     | 0,00701 |
| Gand    | Bruxelles   | 5     | 0,01012 |
| Louvain | Bruxelles   | 4     | 0,00801 |

TABLE 2.3 – Coefficients  $a_a$  et  $b_a$  des différents arcs du Ring  $\forall a \in A$ .

Il est important de noter que les valeurs de ces coefficients sont identiques pour deux arcs reliant les deux mêmes noeuds dans les deux sens. Par exemple, l'arc partant de Louvain et qui arrive à Anvers a les mêmes coefficients  $a$  et  $b$  que celui qui part d'Anvers pour rejoindre Louvain.

Dans la suite du travail,  $q_{od}$  est appelé *taux de voyage*. Les différents taux de voyage de chaque paire origine-destination sont repris dans le tableau 2.4. La valeur de ce paramètre correspond au nombre de voitures se rendant à la destination  $d$  à partir de l'origine  $o$ .

| $od$  | Origine | Destination | $q_{od}$ |
|-------|---------|-------------|----------|
| (A,P) | Anvers  | Paris       | 1400     |
| (L,G) | Louvain | Gand        | 500      |
| (L,B) | Louvain | Bruxelles   | 900      |
| (N,B) | Namur   | Bruxelles   | 850      |
| (N,G) | Namur   | Gand        | 500      |
| (G,B) | Gand    | Bruxelles   | 860      |
| (P,B) | Paris   | Bruxelles   | 650      |

TABLE 2.4 – Taux de voyage  $q_{od} \forall od \in OD$ .

En conclusion, les 3 paramètres du modèle sont les suivant :

- $a_a$  = ordonnée à l'origine de la fonction de temps de traversée de l'arc  $a$ ,  $\forall a \in A$ .
- $b_a$  = pente de la fonction de temps de traversée de l'arc  $a$ ,  $\forall a \in A$ .
- $q_{od}$  = nombre de voitures circulant entre l'origine  $o$  et la destination  $d$ ,  $\forall (o, d) \in OD$ .

## 2.3 Variables de décisions

### 2.3.1 Variables indépendantes

- $f_p$  = nombre de voitures utilisant le chemin  $p$  exprimé en véhicules par heure.

Dans la suite,  $f_p$  est appelé *flux du chemin  $p$* .

### 2.3.2 Variables dépendantes

À partir des flux  $f_p$ , on est capable de déduire les autres variables dites dépendantes.

- $x_a$  = flux de voitures utilisant l'arc  $a$  exprimé en véhicules par heure.

Cette première variable est assez simple à calculer vu qu'elle correspond à la somme des

flux des chemins utilisant l'arc en question :

$$x_a = \sum_{p|a \in p} f_p \quad \forall a \quad (2.3)$$

—  $t_a$  = temps de traversée de l'arc  $a$  exprimé en minutes.

Il dépend quant à lui uniquement des paramètres  $a_a$  et  $b_a$  et a déjà été défini plus tôt par la relation linéaire (2.2).

—  $c_p$  = coût du chemin  $p$  = temps de parcours du chemin  $p$  exprimé en minutes.

Il correspond à la somme des temps passés sur chacun des arcs du chemin en question :

$$c_p = \sum_{a \in p} t_a \quad \forall p \quad (2.4)$$

—  $t_T$  = temps total passé sur le réseau par l'ensemble des voitures.

Il peut être calculé des deux façons suivantes :

$$t_T = \sum_a x_a t_a = \sum_p f_p c_p \quad (2.5)$$

## 2.4 Objectif

### 2.4.1 Fonction objectif

L'objectif du modèle se concentre sur une fonction spécifique. On cherche dans ce cas-ci à minimiser la fonction qui correspond à la somme des intégrales des temps de traversée par rapport au nombre de voitures  $x_a$ .

$$\min z(\mathbf{x}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(x_a) dx_a \quad (2.6)$$

Où  $\mathbf{x}$  est le vecteur regroupant les différents flux  $x_a$ .

### 2.4.2 Solution d'équilibre

Sheffi [4] a montré que si on résolvait ce problème-là avec les contraintes présentées à la section suivante, la solution de ce problème correspond à une solution d'équilibre de l'utilisateur.

La solution est dite d'équilibre si plus aucun utilisateur du réseau n'est capable de réduire son temps de trajet en changeant d'itinéraire. Cela revient à dire que les chemins empruntés par les voitures ayant la même paire origine-destination ont le même temps de trajet et que les autres chemins entre  $o$  et  $d$  ont un temps supérieur à celui des chemins empruntés. Ce concept semble assez logique et intuitif quand on y pense, aucune voiture ne changera de chemin si ça a comme conséquence d'augmenter son temps de traversée individuel.

C'est d'ailleurs, comme on le verra plus tard, ce comportement individualiste qui a pour effet négatif de ne pas minimiser le temps total passé sur réseau. La solution obtenue par le modèle n'est donc, d'un point de vue de l'intérêt général, pas optimale mais correspond plus à la réalité des choses.

### 2.4.3 Unicité de la solution

Si les deux hypothèses suivantes sont vérifiées, Sheffi [4] montre que la solution du problème est unique en terme de  $x_a$ . Cela revient à dire qu'il n'y a qu'une seule valeur possible comme solution pour chaque variable  $x_a$ . Ce n'est par contre pas le cas pour les flux  $f_p$ . Dans certains cas, il peut y avoir plusieurs jeux de solutions possibles de  $f_p$  qui donnent toutes les mêmes valeurs de  $x_a$ .

### Hypothèse 1

Cette première hypothèse stipule que la variation de trafic sur un arc n'influence en rien le temps de parcours d'un autre arc.

$$\frac{\partial t_a(x_a)}{\partial x_b} = 0, \quad \forall a \neq b \quad (2.7)$$

Cette hypothèse est assez logique et vérifiée dans la plupart des cas. Il faut tout de même discuter du cas de deux arcs de sens opposés qui joignent les mêmes noeuds. Lorsqu'il y a une augmentation importante du trafic dans un sens, les voitures dans l'autre sens vont parfois avoir tendance à freiner pour voir ce qui se passe de l'autre côté, ce qui est contraire à l'hypothèse. Dans notre cas, on fait l'hypothèse simplificatrice que les deux sens de circulations sont totalement indépendants et que ces deux arcs n'interagissent donc d'aucune façon entre eux.

### Hypothèse 2

Cette seconde hypothèse exprime le fait que l'ajout d'une voiture sur un arc quelconque ne peut que faire ralentir le temps de traversée de cet arc.

$$\frac{\partial t_a(x_a)}{\partial x_a} > 0, \quad \forall a \quad (2.8)$$

Il semble en effet totalement contre-intuitif qu'ajouter du trafic résulte en une diminution du temps de traversée. Avec la définition donnée à la section 2.2 de la fonction  $t_a$ , la dérivée correspond au paramètre  $b_a$  qui est toujours positif. Cette condition est donc bien vérifiée.

## 2.5 Contraintes

Le modèle mathématique se clôture par ses différentes contraintes. Celles-ci restreignent le champ des solutions possibles à la minimisation de la fonction objectif.

### 2.5.1 Satisfaction à la demande de déplacement

Cette première contrainte impose que le flux total depuis l'origine jusqu'à la destination se répartisse entre les différents chemins possibles et ce pour chaque couple origine-destination :

$$\sum_{p \in od} f_p = q_{od} \quad \forall od \quad (2.9)$$

### 2.5.2 Positivité des flux

Cette contrainte exprime le fait qu'un flux négatif est impossible. En effet, la contrainte (2.9) impose un flux de véhicules partant d'une certaine origine et qui cherche à rejoindre un objectif bien précis. Un flux négatif est absurde puisque cela reviendrait à imposer un flux partant de l'objectif pour rejoindre l'origine. Si une telle situation avait lieu, ces deux demandes de déplacement origine-destination seraient totalement distinctes. Rappelons d'ailleurs que les deux sens d'une voie sont modélisés comme deux arcs séparés et indépendants.

$$f_p \geq 0 \quad \forall p \quad (2.10)$$

### 2.5.3 Calcul des temps d'arcs

Cette contrainte que l'on retrouve déjà à la section 2.2 exprime la relation entre le temps de traversée de l'arc noté  $t_a$  et le flux sur l'arc noté  $x_a$ . Cette fonction est appelée *fonction de performance* de l'arc  $a$ .

$$t_a(x_a) = a_a + b_a x_a \quad \forall a \quad (2.11)$$

### 2.5.4 Calcul des flux d'arcs, des temps de chemin et du temps total

Les trois dernières contraintes ci-dessous ont déjà été détaillées précédemment dans le travail.

$$x_a = \sum_{p|a \in p} f_p \quad \forall a \quad (2.12)$$

$$c_p = \sum_{a \in p} t_a \quad \forall p \quad (2.13)$$

$$t_T = \sum_a x_a t_a = \sum_p f_p c_p \quad (2.14)$$

On remarque que  $t_a$  dépend directement des valeurs prises par  $x_a$  tandis que  $x_a$  est une variable dépendante des variables indépendantes  $f_p$  et que  $c_p$  dépend des variables dépendantes  $t_a$ .

## 2.6 Type de problème à résoudre

Intuitivement, on pourrait vouloir imposer une dernière contrainte : que les flux soient des nombres entiers. Dans un premier temps, on ne le fera pas. En fait, dans les modèles de circulation, on prend généralement des milliers de véhicules par heure. Donc, à partir du moment où les flux sont des milliers, ce n'est pas trop grave d'avoir un résultat arrondi à l'unité. En effet, pour un gestionnaire de réseau, c'est l'ordre de grandeur qui est important et non pas de savoir si il y aura 1242,3 ou 1242 voitures sur tel ou tel arc. Ajouter une contrainte de nombres entiers sur un modèle à 24 flux comme celui-ci ne pose pas de problèmes mais ce n'est malheureusement pas le cas pour un modèle réel doté de millions de variables. On se rend vite compte que ça devient totalement impossible à résoudre pour un solveur.

Pour résoudre des problèmes en nombres entiers, on utilise l'approche de Branch and Bound qui introduit 2 sous-problèmes à chaque fois que l'algorithme rencontre une variable non-entière. La figure 2.3 permet de comprendre le fonctionnement de base de cette méthode pour un cas simple présentant 2 variables non-entière  $X_1$  et  $X_2$ . Pour cet exemple simpliste présentant que deux variables, l'algorithme aura finalement 7 sous-problèmes à traiter : SP0 à SP6. Pour un problème doté d'un nombre de variables de l'ordre du million, on se rend vite compte que la tâche s'avère impossible. Imposer une telle contrainte de nombre entier pour des petits exemples fonctionne donc bien mais pour des grands exemples, le problème devient non-soluble.

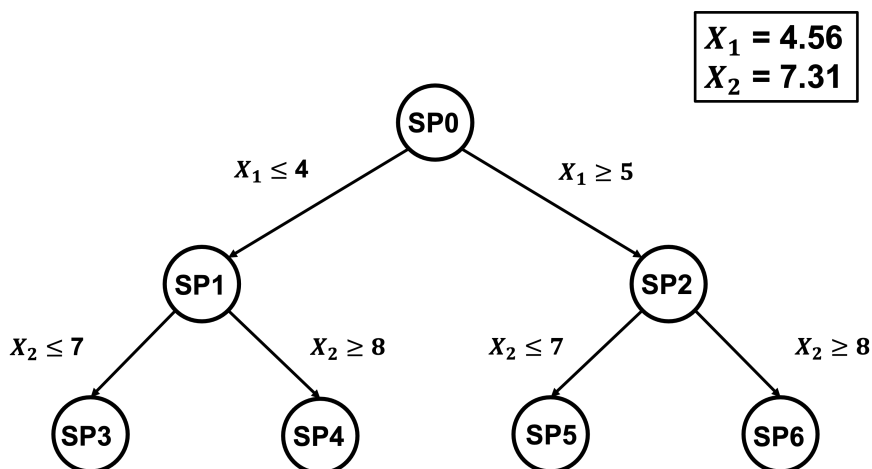


FIGURE 2.3 – Exemple simple de l'algorithme Branch and bound.

En principe, les variables de flux devraient être entières mais comme on a généralement de grands nombres, l'arrondi de la solution est suffisant et permet d'éviter d'introduire une difficulté supplémentaire. On peut tout de même essayer d'ajouter cette contrainte au modèle qui, dans notre cas est

petit et présente finalement assez peu de variables.

$$f_p \in \mathbb{Z} \quad \forall p \tag{2.15}$$

Ceci permet de vérifier si l'ajout d'une telle contrainte a une grande influence sur les résultats ou non. On comparera alors le congestion globale du réseau pour savoir si le fait d'arrondir ne change strictement rien au résultat ou non.

Il y a deux façons de rentrer les contraintes en Excel : soit comme de vraies contraintes soit par des formules de calculs. Les équations (2.9), (2.10) et (2.15) sont directement rentrées en Excel comme des contraintes tandis que les autres contraintes sont rentrées en Excel via des formules de calculs. Pour plus de détails, le chapitre 3 présente l'implémentation de ce modèle mathématique avec Excel.

# Chapitre 3

## Résolution avec Excel

Pour des cas très simples, il est possible de résoudre analytiquement le modèle mathématique présenté au chapitre précédent. Lorsque le modèle se complique et comporte un grand nombre d'arcs et de chemins possibles, il faut faire appel à un solveur informatique qui permet de fournir la solution d'équilibre du réseau réel. Dans le cadre de ce travail, on utilise le solveur Excel mais il en existe bien d'autres tels que le programme GAMS, largement répandu et réputé comme très efficace.

### 3.1 Implémentation des variables, des contraintes et de l'objectif

#### 3.1.1 Matrice d'incidence $\delta_{p,a}$

La première chose à mettre en place en Excel est d'y introduire la matrice d'incidence entre les chemins et les arcs  $\delta_{p,a}$  qui est définie de la façon suivante.

$$\delta_{p,a} = \begin{cases} 1 & \text{si } a \text{ est un arc constituant le chemin } p. \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (3.1)$$

L'expression de cette matrice est donnée en annexe A.3. Elle permet de faire correspondre à chaque chemin, les arcs qui le composent, ce qui facilite l'implémentation du modèle sur Excel. En d'autres mots, elle permet de faire correspondre à chaque arc, les chemins qui passent par cet arc.

#### 3.1.2 Flux des chemins $f_p$

La deuxième étape consiste à allouer 24 cellules pour les 24 flux des différents chemins qui sont les variables indépendantes du modèle mathématique.

$$\mathbf{f}_p = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ \dots \\ f_{24} \end{pmatrix} \quad (3.2)$$

#### 3.1.3 Flux $x_a$ et temps de traversé $t_a$ des arcs

On est maintenant capable de procéder au calcul de la congestion de chacun des arcs du Ring. On cherche à obtenir le flux de voiture  $x_a$  et le temps de traversée  $t_a$  de chaque arc. Le calcul du flux se fait à partir de la matrice d'incidence  $\delta_{p,a}$  de la façon suivante, et correspond à la contrainte (2.12) présentée au chapitre précédent.

$$x_a = \sum_p \delta_{p,a} f_p \quad \forall a \quad (3.3)$$

Reprenons un exemple avec l'arc Anvers-Louvain ( $A, L$ ).

$$x_{(A,L)} = \sum_p \delta_{p,(A,L)} f_p = \sum_p \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ \dots \\ f_{14} \\ f_{15} \\ \dots \\ f_{19} \\ f_{20} \\ f_{21} \\ f_{22} \\ \dots \end{pmatrix} = f_2 + f_3 + f_{14} + f_{19} + f_{22} \quad (3.4)$$

Le calcul du temps de traversé est plus aisé et s'obtient à partir des flux  $x_a$  que l'on vient d'obtenir ainsi que des paramètres  $a_a$  et  $b_a$  de chaque arc  $a$  à l'aide de l'expression (2.11).

### 3.1.4 Flux des paires origine-destination

À partir des valeurs des flux  $f_p$ , on est capable de calculer le flux total de voitures sur chaque paire origine-destination pour pouvoir plus tard introduire la contrainte (2.9) dans le modèle.

Mathématiquement, ces différents flux peuvent être obtenus à l'image de l'équation (3.4), à partir de la matrice d'incidence  $\delta_{p,od}$  et les flux  $f_p$ . En pratique, ce calcul a été réalisé manuellement sur Excel. Si on s'attarde sur l'expression de la matrice  $\delta_{p,od}$ , on se rend compte que la réalisation est plus aisée que pour le cas précédent ce qui permet de se passer de l'utilisation de la matrice d'incidence pour l'implémentation sur Excel.

$$q_{od} = \sum_p \delta_{p,od} f_p \quad \forall od \quad (3.5)$$

Pour illustrer le propos, prenons l'exemple de la paire Anvers-Paris dont la contrainte de flux s'écrit de la façon suivante :

$$f_1 + f_2 + f_3 + f_4 = q_{(A,P)} = 1400 \quad (3.6)$$

### 3.1.5 Coût des chemins $c_p$

Avant d'introduire la fonction objectif, on ajoute d'abord la contrainte (2.13) qui permet d'obtenir le temps de parcours de chaque chemin  $c_p$  à l'aide de la matrice d'incidence  $\delta_{p,a}$  et des temps de traversée de chaque arc  $t_a$ .

$$c_p = \sum_a \delta_{p,a} t_a \quad \forall p \quad (3.7)$$

Illustrons à nouveau cette formule en supposant que l'on souhaite connaître le temps de trajet total du chemin 1, le premier des 4 chemins possibles reliant Anvers à Paris.

$$c_1 = \sum_a \delta_{1,a} t_a = \sum_a \begin{pmatrix} 0 \\ \dots \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ \dots \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} t_{(A,L)} \\ \dots \\ t_{(G,P)} \\ t_{(G,A)} \\ t_{(A,G)} \\ \dots \end{pmatrix} = t_{(G,P)} + t_{(A,G)} \quad (3.8)$$

### 3.1.6 Coût total du réseau $t_T$

Cette variable dépendante se calcule aisément, soit à partir de  $x_a$  et  $t_p$ , soit à partir de  $f_p$  et  $c_p$  avec les égalités (2.5). Elle permet d'avoir une vision globale du niveau de congestion du réseau et sera un bon outil pour l'analyse faite au chapitre 4.

### 3.1.7 Fonction objectif $z(\mathbf{x})$

Il suffit maintenant d'exprimer la fonction objectif  $z(\mathbf{x})$  à partir de l'expression de la fonction linéaire de  $t_a$  définie plus tôt dans le travail.

$$z(\mathbf{x}) = \sum_a \int_0^{x_a} t_a(x_a) dx_a = \sum_a \int_0^{x_a} (a_a + b_a x_a) dx_a = \sum_a \left[ a_a x_a + b_a \frac{x_a^2}{2} \right]_0^{x_a} = \sum_a \left( a_a x_a + b_a \frac{x_a^2}{2} \right) \quad (3.9)$$

## 3.2 Implémentation du solveur

La cellule allouée pour calculer la fonction objectif  $z(\mathbf{x})$  est celle qui est désignée manuellement dans le solveur Excel comme " l'objectif à .. ". Comme on peut le voir à la figure 3.1, c'est la première chose qu'il faut introduire dans le solveur Excel.

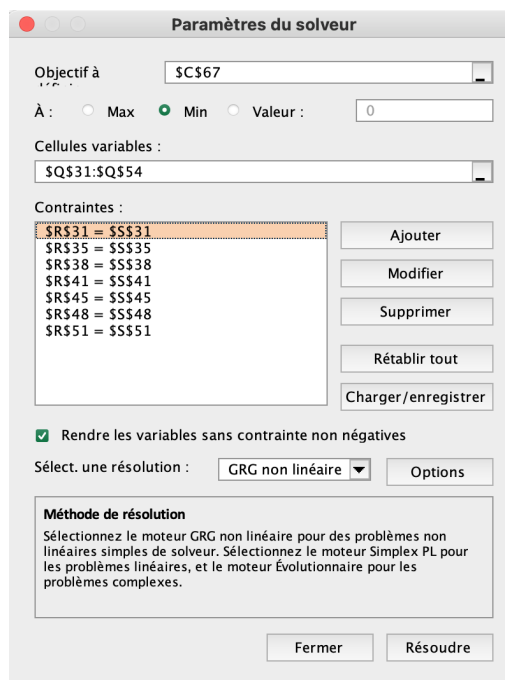


FIGURE 3.1 – Solveur Excel : interface.

Il faut ensuite déterminer s'il faut, maximiser, minimiser ou imposer une valeur à cette fonction objectif. Dans notre cas, comme on l'a vu à la section 2.4, on cherche à minimiser la fonction.

Les cellules variables désignées dans le solveur sont les 24 cellules allouées pour le vecteur  $\mathbf{f}_p$ . L'algorithme cherche, en faisant varier les valeurs de ces cellules, à minimiser la valeur de la cellule objectif.

Évidemment, il faut tenir compte de certaines contraintes à introduire directement dans le solveur qui sont les contraintes (2.9) et (2.10). Ces deux contraintes sont tout de même introduites de façon différente. La contrainte de satisfaction à la demande de déplacement est introduite à l'emplacement

”*Contraintes :*” dédié pour introduire manuellement les contraintes tandis que la contrainte de positivité des flux est introduite en cochant la case ”*Rendre les variables sans contrainte non négatives*” qui se trouve juste en dessous. On aurait pu introduire les deux manuellement mais l’algorithme est plus efficace si on l’indique explicitement en cochant la case dédiée.

Les 4 autres contraintes sont introduites implicitement en appliquant simplement leur définition pour calculer  $t_a$ ,  $x_a$ ,  $c_p$  et  $t_T$  dans le programme. On retrouve bien, à la figure 3.1, que la contrainte (2.10) qui impose des flux  $f_p$  positifs est bien imposée en cochant la case correspondante. Les 7 autres contraintes introduites explicitement dans le solveur correspondent à la contrainte (2.9) appliquée aux 7 paires origine-destination.

Dans le cas où l’on prend en compte la contrainte additionnelle de flux entier  $f_p$ , elle est ajoutée manuellement de la même manière que la contrainte (2.9) en imposant une valeur entière aux différentes cellules occupées pour  $f_p$ .

La dernière chose à déterminer avant de lancer les calculs est la méthode de résolution. Dans le cadre de ce travail, l’objectif n’étant pas linéaire, le modèle est non-linéaire. C’est pourquoi on opte pour l’algorithme non-linéaire du *Gradient Réduit Généralisé*. On peut faire remarquer que toutes les contraintes du modèle sont linéaires, seul l’objectif est non-linéaire. Ceci facilite en fait la résolution du problème par le solveur.

# Chapitre 4

## Analyse des résultats

La première partie de ce chapitre est dédiée à l'analyse du cas de base avec les valeurs des paramètres donnés par les tableaux 2.3 et 2.4. C'est la situation habituelle du Ring actuel. Dans cette section, l'importance de la contrainte additionnelle de flux  $f_p$  entier est discutée.

La seconde partie du chapitre est consacrée à une situation particulière où des travaux ont lieu entre les noeuds Louvain et Namur. Pour simuler une telle situation, on suppose que le paramètre  $b$  des deux arcs reliant ces noeuds est doublé. L'objectif étant d'analyser en quoi ces travaux influencent l'ensemble du réseau.

### 4.1 Résultats du cas général

#### 4.1.1 Flux $f_p$ et temps de parcours $c_p$ des chemins

Tout d'abord, discutons des résultats obtenus pour les flux  $f_p$  dans les deux cas de figure. On observe vite que les résultats sont identiques, aux arrondis près.

| Sans la contrainte |                         |          |                         |          |                         | Avec la contrainte |                         |          |                         |          |                         |
|--------------------|-------------------------|----------|-------------------------|----------|-------------------------|--------------------|-------------------------|----------|-------------------------|----------|-------------------------|
| <b>p</b>           | <b><math>f_p</math></b> | <b>p</b> | <b><math>f_p</math></b> | <b>p</b> | <b><math>f_p</math></b> | <b>p</b>           | <b><math>f_p</math></b> | <b>p</b> | <b><math>f_p</math></b> | <b>p</b> | <b><math>f_p</math></b> |
| 1                  | 475.51                  | 9        | 0.00                    | 17       | 0.00                    | 1                  | 476.00                  | 9        | 0.00                    | 17       | 0.00                    |
| 2                  | 924.49                  | 10       | 0.00                    | 18       | 860.00                  | 2                  | 924.00                  | 10       | 0.00                    | 18       | 860.00                  |
| 3                  | 0.00                    | 11       | 850.00                  | 19       | 0.00                    | 3                  | 0.00                    | 11       | 850.00                  | 19       | 0.00                    |
| 4                  | 0.00                    | 12       | 0.00                    | 20       | 0.00                    | 4                  | 0.00                    | 12       | 0.00                    | 20       | 0.00                    |
| 5                  | 0.00                    | 13       | 0.00                    | 21       | 616.24                  | 5                  | 0.00                    | 13       | 0.00                    | 21       | 616.00                  |
| 6                  | 500.00                  | 14       | 0.00                    | 22       | 0.00                    | 6                  | 500.00                  | 14       | 0.00                    | 22       | 0.00                    |
| 7                  | 0.00                    | 15       | 0.00                    | 23       | 33.76                   | 7                  | 0.00                    | 15       | 0.00                    | 23       | 34.00                   |
| 8                  | 900.00                  | 16       | 500.00                  | 24       | 0.00                    | 8                  | 900.00                  | 16       | 500.00                  | 24       | 0.00                    |

TABLE 4.1 – Résultats des flux  $f_p$  [véhicules/heure] des 24 chemins.

Par souci de concision et de clarté, les autres résultats obtenus avec le modèle prenant en compte la contrainte de flux entier ne sont pas présentés dans la suite de ce travail. Les valeurs obtenues variant très peu pour l'ensemble des autres variables, les présenter en détails n'aurait pas beaucoup d'intérêt. La plupart du temps, les différences des temps  $t_a$  et  $c_p$  sont de l'ordre de la seconde et les différences des flux  $f_p$  et  $x_a$  sont de l'ordre d'une demi-voiture, ce qui est bien évidemment négligeable. Dans la suite, on travaille donc avec le modèle qui ne considère pas cette contrainte additionnelle de flux entier.

Le tableau 4.2 permet de bien visualiser les résultats obtenus pour les 24 différents chemins correspondant aux 7 paires origine-destination différentes.

| <b>p</b> | <b><math>f_p</math></b> | <b><math>c_p</math></b> | <b>origine - destination</b> |
|----------|-------------------------|-------------------------|------------------------------|
| 1        | 475.51                  | 33.08                   | Anvers - Paris               |
| 2        | 924.49                  | 33.08                   | Anvers - Paris               |
| 3        | 0.00                    | 57.55                   | Anvers - Paris               |
| 4        | 0.00                    | 64.90                   | Anvers - Paris               |
| 5        | 0.00                    | 32.35                   | Louvain - Gand               |
| 6        | 500.00                  | 18.44                   | Louvain - Gand               |
| 7        | 0.00                    | 48.20                   | Louvain - Gand               |
| 8        | 900.00                  | 22.29                   | Louvain - Bruxelles          |
| 9        | 0.00                    | 38.38                   | Louvain - Bruxelles          |
| 10       | 0.00                    | 68.14                   | Louvain - Bruxelles          |
| 11       | 850.00                  | 29.65                   | Namur - Bruxelles            |
| 12       | 0.00                    | 45.74                   | Namur - Bruxelles            |
| 13       | 0.00                    | 62.23                   | Namur - Bruxelles            |
| 14       | 0.00                    | 77.54                   | Namur - Bruxelles            |
| 15       | 0.00                    | 42.29                   | Namur - Gand                 |
| 16       | 500.00                  | 39.71                   | Namur - Gand                 |
| 17       | 0.00                    | 60.26                   | Namur - Gand                 |
| 18       | 860.00                  | 19.94                   | Gand - Bruxelles             |
| 19       | 0.00                    | 35.25                   | Gand - Bruxelles             |
| 20       | 0.00                    | 60.26                   | Gand - Bruxelles             |
| 21       | 616.24                  | 41.02                   | Paris - Bruxelles            |
| 22       | 0.00                    | 56.34                   | Paris - Bruxelles            |
| 23       | 33.76                   | 41.02                   | Paris - Bruxelles            |
| 24       | 0.00                    | 57.11                   | Paris - Bruxelles            |

TABLE 4.2 – Résultats des flux  $f_p$  [véhicules/heure] et du temps de parcours  $c_p$  [minutes].

### Flux des chemins $f_p$

Pour la paire Anvers-Paris, seuls 2 chemins sur 4 sont empruntés. Ce résultat se reflète dans les coûts de chemin : les coûts  $c_p$  des chemins 1 et 2 sont identiques et inférieurs à ceux des chemins 3 et 4. Les autres paires origine-destination optent toutes pour un seul chemin mis à part pour la paire Gand-Bruxelles qui répartit aussi ses utilisateurs sur 2 chemins, les chemins 21 et 23. On vérifie à nouveau bien que ces 2 chemins ont un temps identique et inférieur aux temps des chemins non-utilisés 22 et 24.

Notons d'ailleurs que le nombre de voitures empruntant le chemin 23 est très faible par rapport au nombre de voitures empruntant l'autre chemin possible pour rejoindre Bruxelles à partir de Paris. Ce chemin 23 passe d'ailleurs par l'arc sur lequel des travaux fictifs vont avoir lieu pour le deuxième cas de figure présenté à la section 4.2 de ce chapitre.

### Temps de parcours des chemins $c_p$

Les résultats obtenus pour les coûts  $c_p$  permettent de vérifier que l'on ait bien atteint la solution d'équilibre. Pour ce faire, il faut vérifier que les chemins empruntés par les utilisateurs vérifient les 2 conditions suivantes :

- si deux chemins différents sont empruntés pour relier un noeud d'origine à un noeud de destination, ils ont automatiquement le même temps de traversée ;
- si un chemin n'est pas emprunté, c'est qu'il existe un autre chemin reliant la même origine à la même destination qui présente un temps de traversée plus court.

Si une de ces deux conditions n'est pas vérifiée, c'est que certains utilisateurs pourraient changer d'itinéraire pour diminuer leur temps de trajet et que la solution n'est donc pas à l'équilibre. Si on se réfère uniquement aux valeurs de  $c_p$  reprises au tableau 4.2, on doit pouvoir déduire quels sont les chemins qui sont empruntés par les utilisateurs du réseau et lesquels ne le sont pas.

Prenons l'exemple de la première paire origine-destination qui est celle reliant Anvers à Paris. Les chemins 3 et 4 ne devraient pas être empruntés car ils ont des temps de traversée plus importants que ceux du chemin 1 et 2. De plus, les chemins 1 et 2 ont bien le même temps de traversée, ce qui vérifie la première condition d'une solution d'équilibre. Ce qui vient d'être dit correspond bien à ce qu'on observe au niveau des flux  $f_p$ . En procédant de la même manière pour les autres chemins, on peut s'assurer que les résultats sont corrects, ce qui est bien le cas.

#### 4.1.2 Flux $x_a$ et temps de traversée $t_a$ des arcs

Le tableau 4.3 permet de bien visualiser les résultats obtenus en terme de flux  $x_a$  et de temps de traversée  $t_a$  pour les 14 arcs différents.

| <b>a</b> | <b><math>x_a</math></b> | <b><math>t_a</math></b> | <b>a</b> | <b><math>x_a</math></b> | <b><math>t_a</math></b> |
|----------|-------------------------|-------------------------|----------|-------------------------|-------------------------|
| (A,L)    | 924.50                  | 5.96                    | (L,A)    | 500.00                  | 4.60                    |
| (L,N)    | 924.50                  | 5.91                    | (N,L)    | 1383.80                 | 7.36                    |
| (N,P)    | 924.50                  | 21.21                   | (P,N)    | 33.80                   | 11.37                   |
| (P,G)    | 616.20                  | 21.09                   | (G,P)    | 475.50                  | 19.24                   |
| (G,A)    | 0.00                    | 7.00                    | (A,G)    | 975.50                  | 13.84                   |
| (G,B)    | 1476.20                 | 19.94                   | (B,G)    | 500.00                  | 10.06                   |
| (B,L)    | 0.00                    | 4.00                    | (L,B)    | 2283.80                 | 22.29                   |

TABLE 4.3 – Résultats des flux  $x_a$  [véhicules/heure] et des temps de traversée  $t_a$  [minutes].

#### Flux des arcs $x_a$

La figure 4.1 permet d'avoir une approche plus visuelle des résultats des flux  $x_a$  repris dans le tableau 4.3.

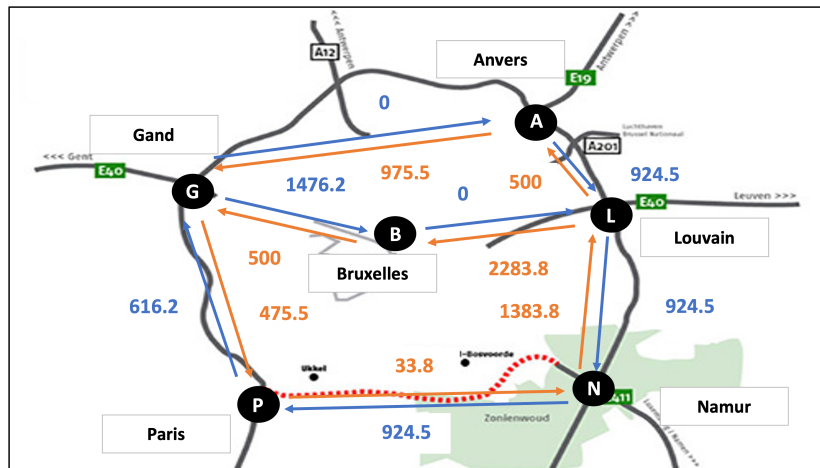


FIGURE 4.1 – Schéma du Ring : flux  $x_a$  des 14 arcs [véhicules/heure].

On remarque d'abord que la grande majorité des arcs sont utilisés. En effet, seulement 2 arcs parmi les 24 sont vides de toute circulation. On observe ensuite que l'arc Louvain-Bruxelles est occupé par un grand nombre de voitures. En effet, la E40 reliant Louvain à Bruxelles est la plus grande porte d'entrée de navetteurs en voiture du ring. Il en est de même, malgré une large différence, pour l'arc Namur-Louvain sur lequel circule pratiquement 1400 utilisateurs du réseau. On se doute donc que des

changements conséquents apportés à cet arc induiraient des perturbations importantes à l'ensemble du réseau.

La raison pour laquelle l'arc Louvain-Bruxelles est fort emprunté vient principalement de sa position stratégique au sein du réseau. À l'inverse, la raison pour laquelle l'arc Namur-Louvain est fort emprunté est fortement lié à sa capacité importante, ce qui y induit indirectement un flot important d'utilisateurs. Les flux résultent en fait d'un équilibre entre deux phénomènes opposés.

- La congestion d'un arc s'accroît lorsque l'on augmente le nombre de véhicules sur cet arc.
- La congestion fait dévier les véhicules des axes encombrés du réseau.

La position et la capacité des arcs sont donc les principaux facteurs qui déterminent les flux de chacun de ces arcs.

### Temps de traversée des arcs $t_a$

À nouveau, la figure 4.2 permet d'avoir une approche plus visuelle des résultats de temps de traversée  $t_a$  repris dans le tableau 4.3.

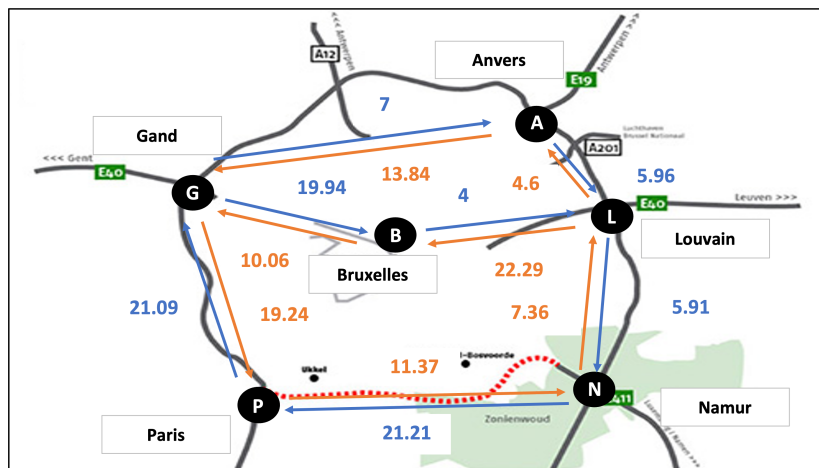


FIGURE 4.2 – Schéma du ring : temps de traversée  $t_a$  des 14 arcs [*minutes*].

Globalement, les résultats des temps de traversée  $t_a$  varient de 4 minutes pour les temps les plus faibles pour monter jusqu'à approximativement 22 minutes. On remarque d'ailleurs que certains arcs, relativement peu empruntés ont des temps de traversée plutôt élevés comme c'est le cas pour l'arc reliant Gand à Paris. C'est en effet un des arcs les plus longs en terme de distance. L'inverse se produit pour l'arc reliant Namur à Louvain : son temps de traversée est faible malgré le flux important de véhicules empruntant cet arc. Ces différences sont bien évidemment liées aux capacités et aux longueurs de ces arcs qui s'avèrent fort différentes.

### 4.1.3 Coût total du réseau

Finalement, pour avoir une valeur globale de la congestion totale du réseau, on peut se référer à la valeur de la fonction objectif  $z(\mathbf{x})$  obtenue.

$$z = 113\,120.45 \text{ [minutes} \cdot \text{voitures]} \quad (4.1)$$

Cette fonction ayant peu de sens physique, il est plus intéressant de s'attarder sur une autre variable qui est le coût total du réseau  $t_T$ . Elle représente en fait le temps total de trajet de l'ensemble

des voitures occupant le Ring.

$$t_T = 164\,464.38 \text{ [minutes} \cdot \text{voitures]} \quad (4.2)$$

Il est important de mettre en évidence le fait que ces valeurs de coût total obtenues ne sont pas forcément les valeurs optimales. En effet, minimiser la fonction objectif  $z(\mathbf{x})$  ne revient pas à minimiser le temps total. Minimiser la variable  $t_T$  revient à supposer que les utilisateurs seraient prêt à sacrifier leur temps personnel en empruntant un chemin plus long pour que l'ensemble du réseau y gagne du temps. La solution ainsi obtenue n'est alors plus une solution *d'équilibre de l'utilisateur* et ne correspond pas au comportement individualiste observé en pratique. Cette solution est dite *solution d'équilibre social*.

On peut tout de même lancer un calcul qui minimise cette variable  $t_T$  au lieu de minimiser la fonction  $z$  pour s'assurer des propos avancés. On se rend en effet compte que les résultats obtenus correspondent à ce qui était attendu. Les nouvelles valeurs  $z^*$  et  $t^*$  ainsi obtenues sont les suivantes :

$$z^* = 113\,746.59 \text{ [minutes} \cdot \text{voitures]} \quad (4.3)$$

$$t_T^* = 163\,894.01 \text{ [minutes} \cdot \text{voitures]} \quad (4.4)$$

On remarque deux choses, la valeur de la fonction objectif a augmentée à l'inverse de la valeur du temps total qui a effectivement diminué.

## 4.2 Résultats en cas de réduction du nombre de voies sur l'arc Louvain-Namur

Le paramètre  $b_a$  des arcs Namur-Louvain et Louvain-Namur sont doublés pour simuler un scénario de travaux qui se produiraient sur cette partie du Ring. Les résultats obtenus dans ce cas de figure seront ainsi comparés avec le cas précédent. Dans la suite de ce chapitre, l'indice A permet de se rapporter au cas de figure général tandis que l'indice B se rapporte au scénario de travaux sur le Ring.

### 4.2.1 Flux $f_p$ et temps de parcours $c_p$ des chemins

Les résultats comparant les flux  $f_{p,A}$  et les temps de parcours  $c_{p,A}$  du cas de figure général avec les flux  $f_{p,B}$  et les temps de parcours  $c_{p,B}$  du scénario de travaux sont repris dans le tableau 4.4.

Les travaux augmentent automatiquement la congestion sur les deux arcs concernés, ce qui a pour effet de délocaliser le trajet de certains véhicules vers d'autres arcs. Par exemple, on observe que 81 utilisateurs changent de trajet en délaissant le chemin 2 au profit du chemin 1. C'est assez simple à comprendre intuitivement lorsque l'on observe la figure 2.2 : les travaux ont réorganisé l'équilibre qui s'était mis en place en déviant une partie du trafic vers l'autre chemin, ce qui va d'ailleurs automatiquement augmenter le temps de parcours de ce chemin.

On remarque d'ailleurs aussi que les chemins 3 et 4 restent largement moins intéressants que les deux autres. Le temps de parcours du chemin 4, passant par l'arc en travaux, augmente de façon significative à l'inverse du temps du chemin 3 qui diminue faiblement. La diminution de  $c_{p,3}$  est induite par les véhicules qui ont changé de trajet pour éviter l'arc en travaux tandis que l'augmentation importante de  $c_{p,4}$  est liée à la réduction de capacité de l'arc en travaux.

Il se passe la même chose pour les paires origine-destination Paris-Bruxelles et Namur-Gand dont les chemins passaient tous par un des arcs en travaux : les utilisateurs se réorganisent pour occuper moins ces arcs.

| <b>p</b> | <b>f<sub>p,A</sub></b> | <b>f<sub>p,B</sub></b> | <b>c<sub>p,A</sub></b> | <b>c<sub>p,B</sub></b> | <b>origine-destination</b> |
|----------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|----------------------------|
| 1        | 475.51                 | 556.90                 | 33.08                  | 34.72                  | Anvers - Paris             |
| 2        | 924.49                 | 843.10                 | 33.08                  | 34.72                  | Anvers - Paris             |
| 3        | 0.00                   | 0.00                   | 57.55                  | 57.43                  | Anvers - Paris             |
| 4        | 0.00                   | 0.00                   | 64.90                  | 67.71                  | Anvers - Paris             |
| 5        | 0.00                   | 0.00                   | 32.35                  | 31.43                  | Louvain - Gand             |
| 6        | 500.00                 | 500.00                 | 18.44                  | 19.01                  | Louvain - Gand             |
| 7        | 0.00                   | 0.00                   | 48.20                  | 51.02                  | Louvain - Gand             |
| 8        | 900.00                 | 900.00                 | 22.29                  | 21.73                  | Louvain - Bruxelles        |
| 9        | 0.00                   | 0.00                   | 38.38                  | 39.29                  | Louvain - Bruxelles        |
| 10       | 0.00                   | 0.00                   | 68.14                  | 71.30                  | Louvain - Bruxelles        |
| 11       | 850.00                 | 850.00                 | 29.65                  | 33.01                  | Namur - Bruxelles          |
| 12       | 0.00                   | 0.00                   | 45.74                  | 50.57                  | Namur - Bruxelles          |
| 13       | 0.00                   | 0.00                   | 62.23                  | 62.99                  | Namur - Bruxelles          |
| 14       | 0.00                   | 0.00                   | 77.54                  | 77.14                  | Namur - Bruxelles          |
| 15       | 0.00                   | 36.05                  | 42.29                  | 42.71                  | Namur - Gand               |
| 16       | 500.00                 | 463.95                 | 39.71                  | 42.71                  | Namur - Gand               |
| 17       | 0.00                   | 0.00                   | 60.26                  | 64.32                  | Namur - Gand               |
| 18       | 860.00                 | 860.00                 | 19.94                  | 20.28                  | Gand - Bruxelles           |
| 19       | 0.00                   | 0.00                   | 35.25                  | 34.43                  | Gand - Bruxelles           |
| 20       | 0.00                   | 0.00                   | 60.26                  | 64.32                  | Gand - Bruxelles           |
| 21       | 616.24                 | 650.00                 | 41.02                  | 42.28                  | Paris - Bruxelles          |
| 22       | 0.00                   | 0.00                   | 56.34                  | 56.34                  | Paris - Bruxelles          |
| 23       | 33.76                  | 0.00                   | 41.02                  | 44.01                  | Paris - Bruxelles          |
| 24       | 0.00                   | 0.00                   | 57.11                  | 61.57                  | Paris - Bruxelles          |

TABLE 4.4 – Résultats des flux  $f_p$  [véhicules/heure] et des temps de trajet  $c_p$  [minutes].

Ces changements ont évidemment impacté tous les temps de traversée des chemins empruntés à l'équilibre. Tous ces chemins ont vu leur temps de parcours augmenter sauf le chemin 8 reliant Louvain à Bruxelles. Ce chemin a en fait profité des travaux sur l'arc Namur-Louvain par lequel il ne passait pas mais qui déviait par contre bien une partie du flux de voitures vers l'autre côté du Ring. Cette déviation a donc fait diminuer le nombre de voitures empruntant le seul arc de ce chemin, l'arc Louvain-Bruxelles. Comme on pouvait déjà s'en douter à la section précédente, le faible flux du chemin 23 a été déviée à cause des travaux vers le chemin 21.

#### 4.2.2 Flux $x_a$ et temps de traversée $t_a$ des arcs

Les résultats comparant les flux  $x_{a,A}$  et les temps de parcours  $t_{a,A}$  du cas de figure général avec les flux  $x_{a,B}$  et les temps de parcours  $t_{a,B}$  du scénario de travaux sont repris dans le tableau 4.5.

| <b>a</b> | <b>x<sub>a,A</sub></b> | <b>x<sub>a,B</sub></b> | <b>t<sub>a,A</sub></b> | <b>t<sub>a,B</sub></b> | <b>a</b> | <b>x<sub>a,A</sub></b> | <b>x<sub>a,B</sub></b> | <b>t<sub>a,A</sub></b> | <b>t<sub>a,B</sub></b> |
|----------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|----------|------------------------|------------------------|------------------------|------------------------|
| (A,L)    | 924.50                 | 843.10                 | 5.96                   | 5.70                   | (L,A)    | 500.00                 | 500.00                 | 4.60                   | 4.60                   |
| (L,N)    | 924.50                 | 843.10                 | 5.91                   | 8.31                   | (N,L)    | 1383.80                | 1314.00                | 7.36                   | 11.28                  |
| (N,P)    | 924.50                 | 879.20                 | 21.21                  | 20.71                  | (P,N)    | 33.80                  | 0.00                   | 11.37                  | 11.00                  |
| (P,G)    | 616.20                 | 686.00                 | 21.09                  | 22.00                  | (G,P)    | 475.50                 | 556.90                 | 19.24                  | 20.31                  |
| (G,A)    | 0.00                   | 0.00                   | 7.00                   | 7.00                   | (A,G)    | 975.50                 | 1056.90                | 13.84                  | 14.41                  |
| (G,B)    | 1476.20                | 1510.00                | 19.94                  | 20.28                  | (B,G)    | 500.00                 | 464.00                 | 10.06                  | 9.70                   |
| (B,L)    | 0.00                   | 0.00                   | 4.00                   | 4.00                   | (L,B)    | 2283.80                | 2214.00                | 22.29                  | 21.73                  |

TABLE 4.5 – Résultats des flux  $x_a$  [véhicules/heure] et des temps de traversée  $t_a$  [minutes].

Ce tableau reprend l'ensemble des résultats de flux et de temps de traversée des arcs mais ne permet pas de bien visualiser la situation. C'est pourquoi, il est judicieux de présenter ces résultats directement à travers des schémas du Ring de Bruxelles.

**Flux des arcs  $x_a$**

Ce qui est intéressant à analyser est la variation de véhicules induite par les travaux sur chacun de ces arcs. Cette variation, notée  $\Delta x_a$  est définie comme la différence entre le flux  $x_{a,B}$  et les flux  $x_{a,A}$  de chaque arc. La figure 4.3 illustre ces variations  $\Delta x_a$  pour chaque arc sur un schéma du Ring de Bruxelles.

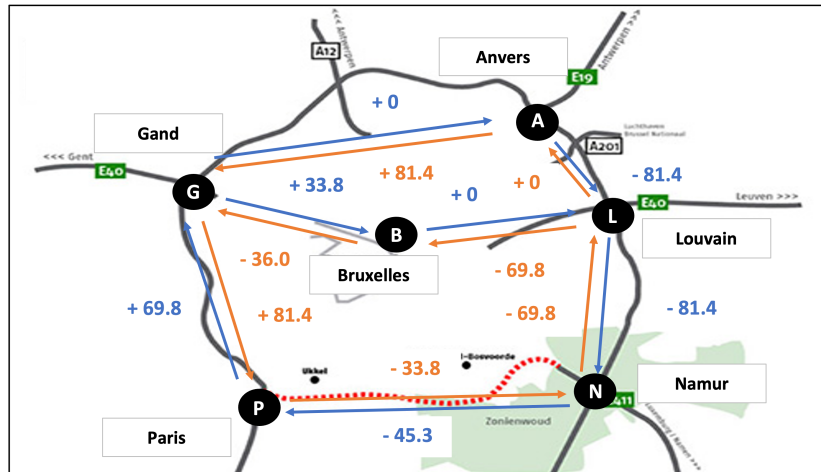


FIGURE 4.3 – Schéma du Ring : variation des flux  $\Delta x_a$  des 14 arcs [véhicules/heure].

L'observation principale que l'on peut faire à partir de la figure 4.3 est la délocalisation d'une partie du flux passant par les arcs reliant Louvain et Namur vers l'autre côté du Ring. Globalement, le flux proche de Louvain et Namur diminue au détriment des arcs proches de la sortie Gand, dont la plupart des flux augmentent.

**Temps de traversée des arcs  $t_a$**

Définissons ensuite la variation de temps  $\Delta t_a$  comme la différence entre les temps de traversée  $t_{a,B}$  et  $t_{a,A}$ . Elle permet de comprendre quel est l'impact des travaux sur le temps de traversée de chaque arc. La figure 4.4 illustre ces valeurs sur un schéma du Ring de Bruxelles.

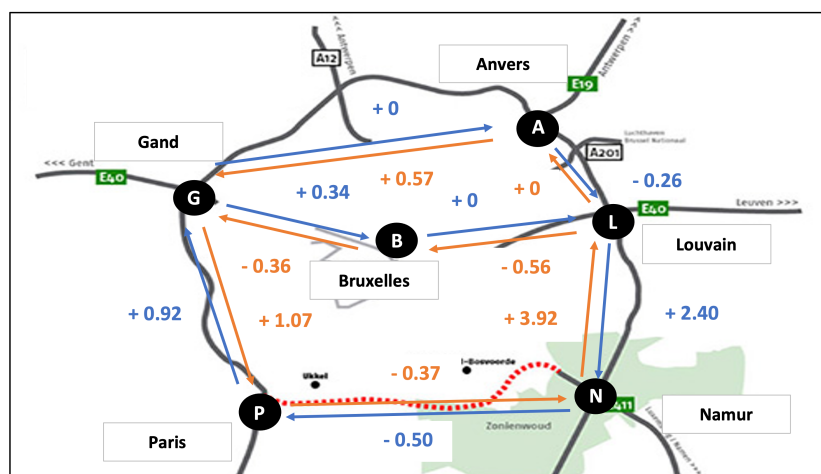


FIGURE 4.4 – Schéma du Ring : variation des temps de traversée  $\Delta t_a$  des 14 arcs [minutes].

Comme on pouvait s'y attendre, le temps de traversée des arcs en travaux ont tous les deux significativement augmenté. À l'inverse, le fait qu'une partie des flux de certains chemins aient été déviés a induit une diminution du temps de traversée de certains arcs proches des axes en travaux. C'est le cas par exemple des arcs Anvers-Louvain et Namur-Paris. À l'inverse, l'augmentation du flux sur les arcs opposés du Ring induit une augmentation de leur temps de traversée. C'est ce qu'on observe par exemple pour l'arc Gand-Paris ou l'arc Anvers-Gand.

Globalement, on observe donc une augmentation des temps de traversée des arcs en travaux, une légère diminution des temps de traversée des arcs proches de ces travaux et une légère augmentation des temps de traversée des arcs plus éloignés des travaux.

### 4.2.3 Coût total du réseau

À l'image des temps de parcours des chemins empruntés, le temps total du réseau a bien évidemment augmenté.

$$t_T = 172\,005.79 \text{ [minutes} \cdot \text{voitures]} \quad (4.5)$$

On peut, à nouveau, définir la variation de temps total  $\Delta t_T$  comme la différence entre  $t_{t,B}$  et  $t_{t,A}$ . On obtient la valeur suivante de variation du temps total :

$$\Delta t_T = 7\,540.40 \text{ [minutes} \cdot \text{voitures]} \quad (4.6)$$

Les travaux ont donc engendré une perte additionnelle d'environ 125 heures à l'ensemble du réseau ce qui revient à, en moyenne, environ 1 minute et 20 secondes de plus de temps de trajet pour chaque utilisateur occupant le réseau.

Cette perte de temps n'est évidemment pas répartie uniformément à l'ensemble des utilisateurs. Les travaux vont par exemple bénéficier aux utilisateurs se rendant à Bruxelles depuis Louvain puisqu'ils vont tous gagner 30 secondes chacun. À l'inverse, l'impact est plus important pour les navetteurs rejoignant Bruxelles depuis Namur puisqu'ils vont perdre presque 3 minutes 30 chacun à cause de ces travaux.

# Chapitre 5

## Conclusion

Le modèle mathématique, implémenté en Excel à l'aide du solveur utilisant l'algorithme non-linéaire du *Gradient Réduit Généralisé* et appliqué sur cet exemple du Ring de Bruxelles a permis d'avoir une idée globale du comportement des utilisateurs du Ring.

En effet, il permet de prédire comment les navetteurs vont se réorganiser dans des situations nouvelles comme des travaux. Le modèle permet aussi d'évaluer l'impact d'autres situations, comme par exemple celle d'un accident survenant sur le Ring ou même pour évaluer l'impact de l'ajout d'une bande à l'un des arcs du Ring. Ce type de modèle est donc très intéressant pour une région comme la région flamande pour avoir une idée de comment les gens vont se réorganiser sur le réseau.

Lorsque certains arcs deviennent plus long ou plus court à parcourir, on observe un impact direct sur les chemins empruntés par le réseau. On peut d'ailleurs observer ce phénomène dans la réalité. Dans le cas de travaux par exemple, les gens vont se reporter sur d'autres chemins jusqu'à ce que le réseau retrouve une nouvelle situation d'équilibre dans laquelle plus aucun utilisateur ne peut améliorer son temps de traversée.

Ce modèle, dont les hypothèses sont très simplistes, permet donc tout de même d'avoir une idée globale du comportement du réseau routier autour de Bruxelles. Une piste d'amélioration intéressante pour ce travail est de faire une recherche plus poussée pour obtenir les valeurs réelles des paramètres des différents arcs du Ring. L'idée est d'obtenir d'abord les chiffres les plus réalistes possibles des différentes demandes de déplacement. Ensuite, établir une loi plus réaliste modélisant la relation entre les temps de traversée  $t_a$  et les flux  $x_a$ . Il est sûrement possible d'obtenir ces informations plus précises auprès de la région de Bruxelles-Capitale.

Un tel travail permet, entre autre, d'évaluer l'influence de solutions proposées pour diminuer la congestion d'un réseau routier comme celui du Ring de Bruxelles. Mais avant tout et comme proposé par B. Doyen [2], la première solution à un tel problème est de le traiter à sa source. Réduire le nombre de voitures en encourageant le télétravail, l'usage de transport en commun ou encore le covoiturage permettent de diminuer directement la quantité d'utilisateur sur le réseau et donc limite directement sa congestion. De plus, cela permet aussi de réduire les émissions de gaz à effet de serre et ainsi participer à la lutte contre le changement climatique.



# Bibliographie

- [1] *Bruxelles, 3e ville la plus embouteillée du monde*. Consulté le 22 avril 2022. URL : <https://www.moniteurautomobile.be/actu-auto/mobilite/bruxelles-3e-ville-plus-embouteillee-du-monde.html>.
- [2] Bastien DOYEN et Thierry BRÉCHET. « " Bruxelles face à la congestion automobile, quelles solutions crédibles ? » In : ()
- [3] *Il y a dix ans dans Le Soir* : «Les quatre projets pour déboucher le ring de Bruxelles». Consulté le 14 mai 2022. URL : <https://www.moniteurautomobile.be/actu-auto/mobilite/bruxelles-3e-ville-plus-embouteillee-du-monde.html>.
- [4] Yosef SHEFFI. *Urban transportation networks : Equilibrium Analysis with Mathematical Methods*. T. 6. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1985.



# Annexes

## A.1 Listes et illustrations des chemins

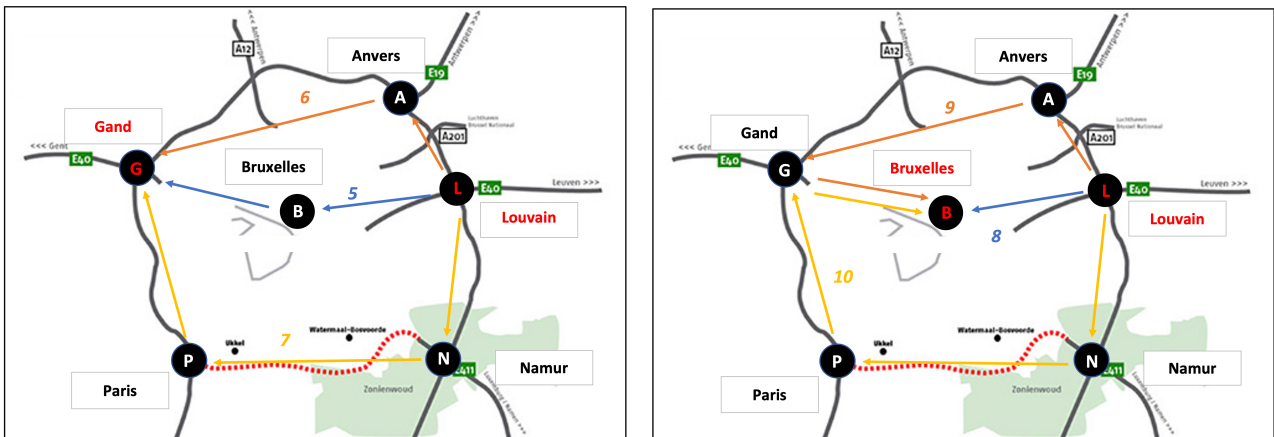


FIGURE 5.1 – Chemins reliant les trajets Louvain-Gand et Louvain-Bruxelles

| P | $q_{op}=500$      |
|---|-------------------|
| 5 | (L,B) (B,G)       |
| 6 | (L,A) (A,G)       |
| 7 | (L,N) (N,P) (P,G) |

TABLE 5.1 – Louvain → Gand

| P  | $q_{op}=900$            |
|----|-------------------------|
| 8  | (L,B)                   |
| 9  | (L,A) (A,G) (G,B)       |
| 10 | (L,N) (N,P) (P,G) (G,B) |

TABLE 5.2 – Louvain → Bruxelles

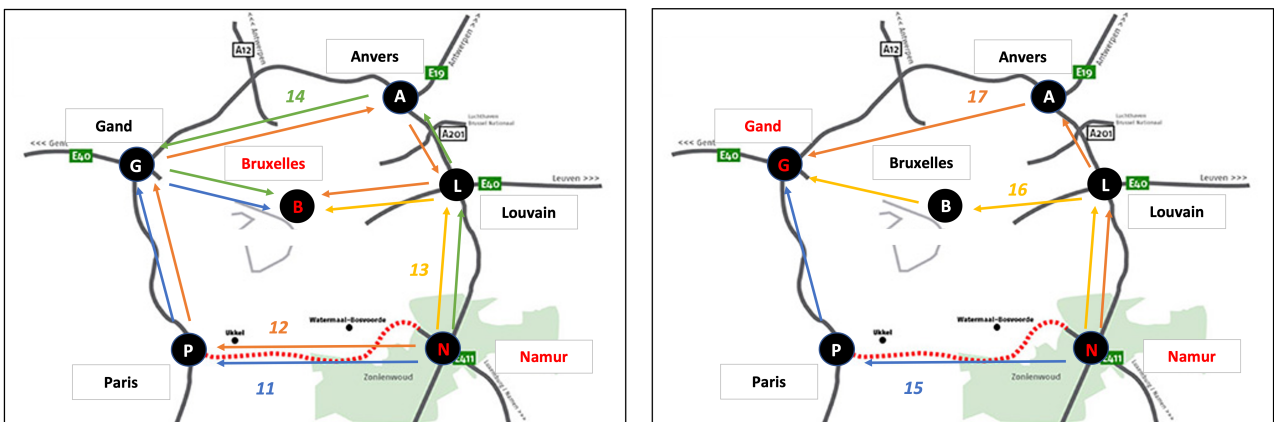


FIGURE 5.2 – Chemins reliant les trajets Namur-Bruxelles et Namur-Gand

| P  | $q_{op}=850$ |       |       |       |       |
|----|--------------|-------|-------|-------|-------|
| 11 | (N,P)        | (P,G) | (G,B) |       |       |
| 12 | (N,P)        | (P,G) | (G,A) | (A,L) | (L,B) |
| 13 | (N,L)        | (L,B) |       |       |       |
| 14 | (N,L)        | (L,A) | (A,G) | (G,B) |       |

TABLE 5.3 – Namur → Bruxelles

| P  | $q_{op}=500$ |       |       |
|----|--------------|-------|-------|
| 15 | (N,P)        | (P,G) |       |
| 16 | (N,L)        | (L,B) | (B,G) |
| 17 | (N,L)        | (L,A) | (A,G) |

TABLE 5.4 – Namur → Gand

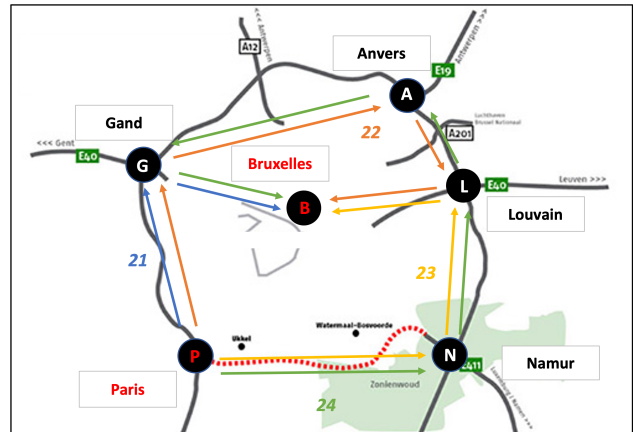
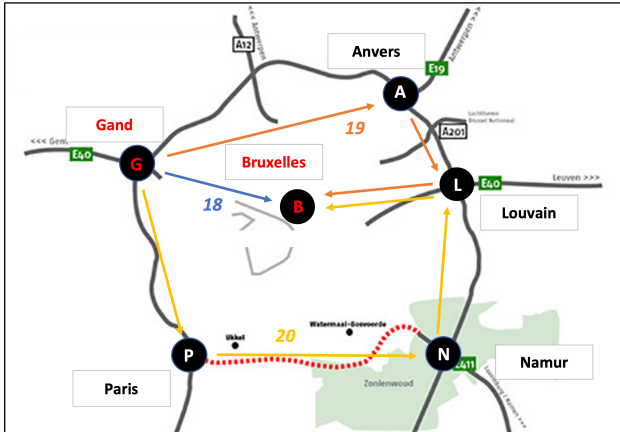


FIGURE 5.3 – Chemins reliant les trajets Gand-Bruxelles et Paris-Bruxelles

| P  | $q_{op}=860$ |       |       |       |  |
|----|--------------|-------|-------|-------|--|
| 18 | (G,B)        |       |       |       |  |
| 19 | (G,A)        | (A,L) | (L,B) |       |  |
| 20 | (G,P)        | (P,N) | (N,L) | (L,B) |  |

TABLE 5.5 – Gand → Bruxelles

| P  | $q_{op}=660$ |       |       |       |       |  |
|----|--------------|-------|-------|-------|-------|--|
| 21 | (P,G)        | (G,B) |       |       |       |  |
| 22 | (P,G)        | (G,A) | (A,L) | (L,B) |       |  |
| 23 | (P,N)        | (N,L) | (L,B) |       |       |  |
| 24 | (P,N)        | (N,L) | (L,A) | (A,G) | (G,B) |  |

TABLE 5.6 – Paris → Bruxelles

## A.2 Matrice d'incidence entre les chemins et les paires origine-destination

$$\delta_{p,od} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.1})$$

### A.3 Matrice d'incidence entre les chemins et les arcs

$$\delta_{p,a} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

**UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN**  
Louvain School of Management

Place des Doyens, 1 bte L2.01.01, 1348 Louvain-la-Neuve  
Boulevard Emile Devreux 6, 6000 Charleroi, Belgique  
Chaussée de Binche 151, 7000 Mons, Belgique

[www.uclouvain.be/lsm](http://www.uclouvain.be/lsm)