

Construction d'une géométrie non commutative invariante euclidienne à deux dimensions : champ magnétique conjugué dans l'espace de phase

Mémoire présenté en vue de l'obtention du grade académique de
Master [120] en sciences physiques, finalité approfondie.

UCLouvain, Faculté des Sciences, École de physique

Valentin Weber

Promoteur: Prof. Jan Govaerts

Lecteur: Prof. Pierre Bieliavsky

Lecteur: Prof. Philippe Ruelle

Année académique
2019-2020

Table des matières

Remerciements	1
Introduction	3
1 Un système magnétique classique engendrant une géométrie non commutative	5
1.1 Équations du mouvement de Euler-Lagrange	5
1.2 Analyse Hamiltonienne du système	6
1.3 Comportement quantique d'un système magnétique	10
2 Le formalisme Lagrangien et Hamiltonien d'une géométrie non commutative	17
2.1 Action de premier ordre	17
2.2 Crochets d'un Lagrangien associé à un potentiel scalaire	20
2.3 Crochets de Poisson d'un Lagrangien d'un champ magnétique	21
2.4 Crochets de Poisson d'un Lagrangien d'un champ magnétique conjugué	23
2.5 Crochets de Poisson d'un Lagrangien d'un champ magnétique et d'un champ magnétique conjugué	24
3 Création d'un environnement quantique d'une géométrie non-commutative sur l'espace des positions	27
3.1 Le théorème de Darboux	28
3.2 Quantification d'un système non commutatif	29
3.3 Construction de la représentation $ \vec{x}, \theta\rangle$ par la relation de Schrödinger-Robertson . . .	31
3.4 Quelques propriétés de la représentation $ \vec{x}, \theta\rangle$	35
3.4.1 Éléments de matrice d'opérateurs selon $ \vec{x}, \theta\rangle$	35
3.4.2 La relation de complétude et le $*$ -produit	36
3.5 La représentation $ \vec{x}, \theta\rangle$ sous forme d'états cohérents	37
3.5.1 Rappels sur les états cohérents canoniques	37
3.5.2 Les états cohérents pour la représentation non commutative	39
3.6 L'équation de Schrödinger et conservation du courant de probabilité	40
3.7 Exemple : Le potentiel harmonique non commutatif	43
4 Le puits infini dans une géométrie non commutative	45
4.1 L'équation de Schrödinger définie sur plusieurs domaines distincts	45
4.2 Qu'est-ce qu'un puits infini ?	47
4.3 Le puits infini dans le cas commutatif	49
4.4 Le projecteur $\hat{P}_0$ classique sur un espace non commutatif	49
4.4.1 Changement de représentation de $\hat{P}_0$	50
4.4.2 La fonction d'onde $\phi(\vec{x})$ dans le puits de potentiel classique	50

4.4.3	Le puits de potentiel rectangulaire	51
4.4.4	Le puits de potentiel circulaire	52
4.5	Un puits de potentiel nativement non commutatif	54
4.5.1	Le Théorème de l'application conforme de Riemann	54
4.5.2	Construction du projecteur	55
4.5.3	L'approche naïve du projecteur $\hat{\mathbb{P}}_{f,M}$	57
4.6	Approche du puits de potentiel par une algèbre enveloppante	60
Conclusion		65
Annexes		67
A	Calcul des opérateurs $\hat{x}$ et $\hat{y}$ et de leur commutateur	67
B	Compléments de calcul de la partie 3.4.1	70
C	Compléments de calcul de la partie 3.4.2	77
Bibliographie		82

Remerciements

Ce mémoire n'aurait pas été possible sans l'aide de mon promoteur de mémoire Prof. Jan Go-vaerts. Ses idées, ses suggestions et son aide à travers l'année m'ont grandement aidé à comprendre le sujet et m'ont permis de découvrir une nouvelle perspective de la physique. De plus, même pendant la période de confinement due au Covid-19, ses notes ont su me maintenir à jour et m'ont permis de progresser sur le sujet. Je l'en remercie grandement et exprime toute ma gratitude

Je voudrais remercier les lecteurs de ce mémoire, Prof. Pierre Bieliavsky et Prof. Philippe Ruelle, qui ont accepté de lire le mémoire.

En dernier, j'aimerais aussi remercier ma famille, qui m'a encouragé pendant la période de confinement, me permettant ainsi de garder toute ma motivation lors de l'écriture de ce travail.

Introduction

Les années 1290 marquent l'avènement d'une invention importante pour l'humanité : il s'agit de l'invention des lunettes correctives. Auparavant, les personnes ayant une vue myope ou hypermétrope et les personnes âgées devaient se contenter de voir un monde flou et accepter leur sort. Pourtant, l'invention des lunettes changea la vie de millions voire milliards de personnes, pouvant à nouveau voir clairement. L'humain a toujours tenté de développer des outils qui permettent d'améliorer l'interaction avec le monde autour de lui. Pourtant, nous pouvons nous poser la question : est-ce que le monde physique est changé si nous portons les lunettes ? Évidemment que non, lorsque nous observons par exemple un arbre avec ou sans lunettes, l'arbre sera le même bien que l'observation de celui-ci soit bien différente. Cependant, nous pouvons nous accorder qu'une image floue est moins bien traitée par notre cerveau, même si l'information qui entre dans notre œil est la même que celle qui entre dans un œil sain.

Cette analogie peut être appliquée à la physique. Au fil des siècles, des théories de plus en plus complexes ont émergées, permettant de comprendre le monde. Cependant, ces théories n'auraient pas pu être découvertes, si leurs inventeurs n'avaient pas les outils mathématiques nécessaires : la mécanique Newtonienne avait besoin du calcul infinitésimal, la mécanique quantique du formalisme opérationnel, la relativité générale est construite sur la géométrie Riemannienne etc. Bien que les exemples soient bien connus, ils illustrent comment des outils mathématiques nouveaux ont pu être utilisés dans un contexte d'une nouvelle physique. Certains domaines seraient restés inaccessibles jusqu'à aujourd'hui si ce n'était pas pour ces instruments. Nous sommes ainsi liés par les outils que nous utilisons.

Dans ce contexte, nous pouvons retrouver la recherche de l'unification des théories quantiques et de la théorie de la relativité générale, afin de trouver une théorie de la gravitation quantique. De nombreuses tentatives ont été abordées à travers de nombreuses théories, que ce soient les théories des cordes ou la gravitation quantique à boucles. Malheureusement, ces théories n'arrivent toujours pas à un résultat concluant. Il semble que les avancées à ce niveau sont dues à un manque de nouveaux instruments mathématiques. Dans cette optique, de plus en plus d'évidence apparaît ces dernières dizaines d'années que les coordonnées de l'espace-temps sont non commutatives, c.-à-d. que l'utilisation de la géométrie devient de plus en plus intéressante.

La raison pourquoi nous nous intéressons à la géométrie non commutative vient du fait que nous avons besoin de hautes énergies afin de pouvoir inspecter les distances de l'ordre du domaine quantique, ce qui aurait comme effet de modifier la géométrie même de l'espace-temps. Cela entraîne une granularité de l'espace-temps, puisque l'énergie nécessaire afin d'atteindre une résolution de l'échelle de Planck entraînerait la formation de trous noirs. Nous aurions ainsi une seconde relation d'incertitude qui apparaîtrait sur les coordonnées spatiales (voire même temporelles) due à une géométrie non-commutative, qui permettrait d'implémenter une notion de longueur minimale [1][2]. Cette relation de commutation peut avoir une forme simple, comme par exemple,

$$[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\theta, \tag{0.0.1}$$

où θ représente une constante et $\hat{x}_i$ des opérateurs position en mécanique quantique. Il s'agit de cette géométrie non commutative à laquelle nous allons nous intéresser dans ce mémoire, c.-à-d. d'une géométrie non-commutative sur l'espace de configuration, aussi appelé, dans le cadre de la mécanique quantique, l'espace des positions.

Notre mémoire se consacrera à la construction et l'analyse de cette géométrie non commutative à deux dimensions en la justifiant à partir d'une considération physique, qui prendra la forme d'un Lagrangien d'un système contenant un champ magnétique modifié situé dans l'espace de conjugaison, qu'on appelle aussi un champ magnétique conjugué. Cette approche se distingue des approches précédentes de la géométrie non commutative sur l'espace des positions, qui partent directement de l'équation (0.0.1), nous pouvons prendre comme exemple le papier de F. Scholtz suivant [3]. Nous allons mettre quelques restrictions quant au cadre du mémoire : la géométrie utilisée, malgré la non-commutativité, reste euclidienne, nous allons ainsi travailler dans un cadre non-relativiste.

Le mémoire progressera selon les étapes suivantes :

- Dans le premier chapitre, nous allons commencer par regarder comment obtenir une géométrie non commutative à travers un champ magnétique classique (c.-à-d. non conjugué), en le regardant selon une perspective classique et quantique.
- Le deuxième chapitre se consacrera à calculer les crochets de Poisson à partir d'une classe de Lagrangiens appelés les actions de premier ordre. Nous allons aussi introduire le champ magnétique non conjugué, qui nous permettra d'obtenir la géométrie non commutative sur l'espace de configuration.
- Lors du troisième chapitre, nous allons quantifier notre système et donc passer au domaine quantique, transformant les crochets de Poisson en commutateurs. De plus, nous considérons un espace en deux dimensions avec un champ magnétique conjugué. Nous construirons ensuite une représentation de ces coordonnées non commutatives dans un espace de Hilbert quantique, dont nous pouvons ainsi analyser les propriétés en gardant en esprit l'espace commutatif.
- Pour le dernier chapitre, nous allons appliquer cette géométrie non commutative à un exemple : le puits de potentiel non commutatif, que nous analyserons à travers plusieurs approches.

Conventions

Nous allons utiliser quelques conventions d'écriture, qui facilitent la présentation du travail et permettent une lecture plus facile du mémoire par le lecteur.

- Bien que ce sera parfois écrit explicitement, les intégrales sans domaines d'intégration, sont intégrées sur tout le domaine $\mathbb{R}$. En pratique, nous avons que $\int d^n \vec{x} f(\vec{x}) = \int_{\mathbb{R}^n} d^n \vec{x} f(\vec{x})$.
- Nous allons utiliser la convention de sommation d'Einstein (euclidienne), la plupart des indices dédoublés seront donc sommés (peu importe la position de cet indice), à l'exception de l'indice i qui ne sera pas sommé. Cependant, si nous décidons de sommer l'indice i , il le sera explicitement indiqué (principalement en faisant apparaître le symbole de sommation $\sum$). Ainsi, les indices j et k seront souvent utilisés comme des indices de sommation.
- Nous n'utilisons pas de système d'unité explicite à travers nos calculs, comme il s'agit tout d'abord d'une discussion théorique. Toutes les dimensions (T , L , M) seront donc implicites, mais resteront bien évidemment consistantes à travers les calculs.

Chapitre 1

Un système magnétique classique engendrant une géométrie non commutative

Le premier chapitre de ce mémoire analysera comment un champ magnétique peut nous amener à une géométrie non commutative, dans notre cas, sur l'espace de conjugaison. Elle nous servira comme exemple et guide pour les chapitres suivants. Nous allons commencer cette analyse par un petit rappel du magnétisme classique. Nous n'allons pas considérer des champs électriques dans ce chapitre et les champs magnétiques seront bien stationnaires dans le temps, ce qui vaudra aussi pour les chapitres suivants.

1.1 Équations du mouvement de Euler-Lagrange

L'équation du mouvement pour une particule de masse m dans un champ magnétique et dans un potentiel constant est donné par,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} - \frac{\partial L}{\partial x_i} = 0, \quad (1.1.1)$$

avec un Lagrangien donné par,

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}) + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}), \quad (1.1.2)$$

x_i étant des coordonnées cartésiennes. Le potentiel magnétique est donné par $\vec{A}(\vec{x})$, qui est donc constant dans le temps. Le Lagrangien ne contient pas explicitement la charge de la particule, nous avons décidé de l'absorber à l'intérieur du potentiel magnétique¹. Ce Lagrangien est aussi soumis à un autre potentiel scalaire $V(\vec{x})$. Nous trouvons ainsi que,

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{d}{dt} \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}) + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \right)$$

1. Elle n'intervient de toute façon uniquement comme coefficient devant le potentiel magnétique $\vec{A}(\vec{x})$.

$$\begin{aligned}
&= \frac{d}{dt} (m\dot{x}_i + A_i(\vec{x})) \\
&= m\ddot{x}_i + \frac{dA_i(\vec{x})}{dt} \\
&= m\ddot{x}_i + \dot{x}_j \frac{\partial A_i(\vec{x})}{\partial x_j} + \frac{\partial A_i(\vec{x})}{\partial t}, \quad (\text{en rappelant que } j \text{ est sommé,}) \\
\Rightarrow \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} &= m\ddot{x}_i + \dot{x}_j \frac{\partial A_i(\vec{x})}{\partial x_j}.
\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

D'autre part, nous avons,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial L}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}) + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \right) \\
&= -\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x})) \\
&= -\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_i} (\dot{x}_j A_j(\vec{x})), \\
\Rightarrow \frac{\partial L}{\partial x_i} &= -\frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_i} + \left(\dot{x}_j \frac{\partial A_j(\vec{x})}{\partial x_i} \right).
\end{aligned} \tag{1.1.4}$$

Par conséquent, l'équation du mouvement finale est donnée par,

$$m\ddot{x}_i + \left(\dot{x}_j \left(\frac{\partial A_i(\vec{x})}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j(\vec{x})}{\partial x_i} \right) \right) + \frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_i} = 0. \tag{1.1.5}$$

Ainsi, en définissant le champ magnétique comme $\vec{B}(\vec{x}) = \vec{\nabla}_{\vec{x}} \times \vec{A}(\vec{x})$, nous retrouvons sans difficulté l'équation du mouvement d'une particule de masse m dans un champ magnétique,

$$m\ddot{\vec{x}} - \dot{\vec{x}} \times \vec{B}(\vec{x}) + \vec{\nabla}_{\vec{x}} V(\vec{x}) = 0. \tag{1.1.6}$$

1.2 Analyse Hamiltonienne du système

À présent, nous allons aussi faire quelques rappels sur la mécanique Hamiltonienne. L'Hamiltonien d'un système classique s'obtient en prenant la transformée de Legendre du Lagrangien L , ce qui nous donne pour le Lagrangien donné en (1.1.2),

$$H = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - L = \vec{p} \cdot \dot{\vec{x}} - \frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 + V(\vec{x}) - \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}). \tag{1.2.1}$$

En calculant le moment conjugué, nous obtenons,

$$\begin{aligned}
p_i &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \dot{x}_i} \left(\frac{1}{2} m \dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}) + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}) \right) \\
&= m\dot{x}_i + A_i(\vec{x}).
\end{aligned} \tag{1.2.2}$$

Nous allons décider de nommer la quantité de mouvement $\vec{\pi} = m\dot{\vec{x}}$, qui est de ce fait reliée au moment conjugué par,

$$\vec{p} = \vec{\pi} + \vec{A}. \tag{1.2.3}$$

Nous pouvons à présent calculer les équations canoniques de Hamilton, données par,

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}. \quad (1.2.4)$$

Ainsi nous pouvons calculer les équations du mouvement engendrées par l'Hamiltonien de base (1.2.1), qui peut se réécrire, en ayant $\vec{x} = (\vec{p} - \vec{A}(\vec{x}))/m$,

$$\begin{aligned} H &= \frac{\vec{p}}{m} \cdot (\vec{p} - \vec{A}(\vec{x})) - \frac{1}{2} \frac{1}{m} (\vec{p}^2 + \vec{A}^2(\vec{x}) - 2\vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{x})) + V(\vec{x}) - \frac{1}{m} (\vec{p} - \vec{A}(\vec{x})) \cdot \vec{A}(\vec{x}) \\ &= \frac{\vec{p}^2}{m} - \frac{1}{m} \vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{x}) - \frac{1}{2m} \vec{p}^2 - \frac{1}{2m} \vec{A}^2(\vec{x}) + \frac{1}{m} \vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{x}) + V(\vec{x}) - \frac{1}{m} \vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{x}) + \frac{1}{m} \vec{A}^2(\vec{x}) \\ &= \frac{1}{2m} \vec{p}^2 - \frac{1}{m} \vec{p} \cdot \vec{A}(\vec{x}) + \frac{1}{2m} \vec{A}^2(\vec{x}) + V(\vec{x}), \end{aligned} \quad (1.2.5)$$

ce qui nous donne l'Hamiltonien dépendant de l'espace de phase $(\vec{x}, \vec{p})$,

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2m} (\vec{p} - \vec{A}(\vec{x}))^2 + V(\vec{x}). \quad (1.2.6)$$

Ceci nous donne la possibilité de calculer les équations de Hamilton, qui dépendent des deux quantités suivantes,

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{1}{m} p_i - \frac{1}{m} \vec{A}_i(\vec{x}), \quad (1.2.7)$$

et,

$$\frac{\partial H}{\partial x_i} = \frac{1}{m} \sum_j \frac{\partial A_j}{\partial x_i} (p_j - A_j) + \frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_i}. \quad (1.2.8)$$

Les équations de Hamilton donnent,

$$\dot{x}_i = \frac{1}{m} p_i - \frac{1}{m} A_i(\vec{x}), \quad \dot{p}_i = -\frac{1}{m} \frac{\partial A_j}{\partial x_i} (p_j - A_j) - \frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_i}. \quad (1.2.9)$$

La première équation nous redonne l'expression (1.2.3). En recombinaison des deux équations ensemble, nous sommes ainsi aptes à retrouver l'équation du mouvement donnée par l'équation (1.1.5).

Venons-en à une quantité qui se révélera importante pour la suite, les crochets de Poisson,

$$\{A, B\} = \sum_j^{\text{all}} \left(\frac{\partial A}{\partial x_j} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial B}{\partial x_j} \frac{\partial A}{\partial p_j} \right). \quad (1.2.10)$$

Par définition, nous pouvons constater que les variables dynamiques $\vec{x}$ et $\vec{p}$ constituant l'espace de phase canonique donnent,

$$\{x_i, x_j\} = 0, \quad \{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\} = 0. \quad (1.2.11)$$

Puisque ces crochets de Poisson relient les variables dynamiques entre elles, nous allons appeler cela les crochets de Poisson canoniques. Nous pouvons constater que les coordonnées des espaces de configuration et de conjugaison possèdent des crochets de Poisson triviaux (c.-à-d. nuls). Par contre, le crochet reliant les deux espaces est différent : la géométrie de l'espace formée par les coordonnées $(\vec{x}, \vec{p})$ est donc fondamentalement non commutative. La structure soutenant l'espace de phase est ainsi donnée par une structure symplectique. Mais nous sommes uniquement intéressés par la commutativité/non commutativité des espaces de configuration et conjugaison. Ainsi, par abus de langage, nous allons appeler le cas où nous utilisons les coordonnées canoniques le cas commutatif, malgré le fait que $\{x_i, p_j\} \neq 0$. D'autre part, à nouveau par abus de langage, dès que nous avons des crochets de Poisson non triviaux reliant les variables dynamiques de l'espace de conjugaison ou de l'espace de configuration entre elles (voire même les deux à la fois), nous parlerons du cas non-commutatif. En effet, il ne nous est pas possible de trouver de tels cas avec les variables canoniques $\vec{x}$ et $\vec{p}$. Ainsi, regardons comment nous pouvons atteindre ce cas non commutatif en procédant à un changement de variable : nous allons calculer les crochets de Poisson pour la quantité de mouvement $\vec{\pi}$. Calculons d'abord les quantités suivantes :

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_i}(p_j - A_j(\vec{x})) = -\frac{\partial A_j(\vec{x})}{\partial x_i}, \quad (1.2.12)$$

$$\frac{\partial \pi_j}{\partial p_i} = \frac{\partial}{\partial p_i}(p_j - A_j(\vec{x})) = \delta_{ij}. \quad (1.2.13)$$

Nous obtenons les crochets de Poisson suivants,

$$\begin{aligned} \{\pi_i, \pi_j\} &= \left(\frac{\partial \pi_i}{\partial x_k} \frac{\partial \pi_j}{\partial p_k} - \frac{\partial \pi_j}{\partial x_k} \frac{\partial \pi_i}{\partial p_k} \right) \\ &= \left(-\frac{\partial A_i(\vec{x})}{\partial x_k} \delta_{jk} + \frac{\partial A_j(\vec{x})}{\partial x_k} \delta_{ik} \right) \\ &= \frac{\partial A_j(\vec{x})}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i(\vec{x})}{\partial x_j}, \end{aligned} \quad (1.2.14)$$

et,

$$\begin{aligned} \{x_i, \pi_j\} &= \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k} \frac{\partial \pi_j}{\partial p_k} - \frac{\partial \pi_j}{\partial x_k} \frac{\partial x_i}{\partial p_k} \right) \\ &= \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_k} \frac{\partial \pi_j}{\partial p_k} \right) \\ &= (\delta_{ik} \delta_{jk}) \\ &= \delta_{ij}. \end{aligned} \quad (1.2.15)$$

Et donc les nouveaux crochets de Poisson sont donnés par,

$$\{x_i, x_j\} = 0, \quad \{x_i, \pi_j\} = \delta_{ij}, \quad \{\pi_i, \pi_j\} = F_{ij}(\vec{x}), \quad (1.2.16)$$

avec $F_{ij}(\vec{x}) = \frac{\partial A_j(\vec{x})}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i(\vec{x})}{\partial x_j}$. Les relations ci-dessus obtenues sont moins triviales : en effet, le troisième crochet est non nul, ce qui le rend "non commutatif". L'Hamiltonien, qui est maintenant écrit comme,

$$H(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2m}(\vec{\pi})^2 + V(\vec{x}), \quad (1.2.17)$$

et les crochets de Poisson sont tout ce dont nous avons besoin afin de calculer les équations du mouvement. Nous avons l'équation du mouvement générale, pour une quantité quelconque A ,

$$\frac{dA}{dt} = \frac{\partial A}{\partial t} + \{A, H\}. \quad (1.2.18)$$

Cette équation nous permet donc de donner les équations du mouvement de Hamilton, en prenant en compte la non commutativité. Dans notre cas, cela nous donne

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{d\pi_i}{dt} = \frac{\partial \pi_i}{\partial x_k} \frac{\partial H}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial \pi_i}{\partial p_k}, \quad (1.2.19)$$

ce que nous pouvons réécrire en terme du nouvel espace de phase $(\vec{x}, \vec{p})$,

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \pi_j} \frac{\partial \pi_j}{\partial p_i}, \quad \frac{d\pi_i}{dt} = \frac{\partial \pi_i}{\partial x_k} \frac{\partial H}{\partial \pi_j} \frac{\partial \pi_j}{\partial p_k} - \frac{\partial H}{\partial x_k} \frac{\partial \pi_i}{\partial p_k}. \quad (1.2.20)$$

Dans notre cas particulier, en utilisant (1.2.3), nous obtenons,

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \pi_i}, \quad \frac{d\pi_i}{dt} = -\frac{\partial A_i}{\partial x_k} \frac{\partial H}{\partial \pi_k} - \frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad (1.2.21)$$

et en reprenant l'Hamiltonien en (1.2.6), nous obtenons les équations de Hamilton pour les coordonnées $(\vec{x}, \vec{\pi})$,

$$\dot{x}_i = \frac{\pi_i}{m}, \quad \dot{\pi}_i = -\frac{\pi_k}{m} \frac{\partial A_i(\vec{x})}{\partial x_k} - \frac{\partial V(\vec{x})}{\partial x_i}. \quad (1.2.22)$$

Nous pouvons constater que nous retrouvons nos équations du mouvement Hamiltoniennes canoniques si nous reprenons le changement de variable de $\vec{\pi}$ vers $\vec{p}$. Comme nous pouvons voir, l'information essentielle se trouve dans les crochets de Poisson qui nous donnent les informations nécessaires au mouvement de la particule, en plus de l'information du système qui se trouve dans l'Hamiltonien. Cependant, il nous fallait toujours passer par des relations de changements de variable. Nous pouvons considérer les calculs ci-dessus comme un échauffement à ce que nous allons faire dans le prochain chapitre. En effet, nous allons raffiner la méthodique afin de créer un formalisme qui ne prend en compte uniquement des crochets élémentaires sur les coordonnées et de l'Hamiltonien, qui permettent de généraliser l'approche particulière que nous avons suivie ci-dessus. Nous allons retrouver cette approche dans le deuxième chapitre.

Maintenant, excepté pour avoir obtenu une nouvelle perspective des équations du mouvement, à quoi cela nous a-t-il servi ? Nous constatons que le Hamiltonien n'est plus dépendant du potentiel magnétique $\vec{A}(\vec{x})$, ce qui le rend par ainsi invariant de jauge. En effet, cela fait du sens puisque la quantité de mouvement est déjà elle-même invariante de jauge.

1.3 Comportement quantique d'un système magnétique

Nous allons maintenant voir ce qui se passe lorsque nous passons à la mécanique quantique. Cependant, nous n'allons pas nous intéresser directement à la non commutativité, nous allons simplement observer le comportement de ce système dans la représentation commutative. Pour cela, nous utiliserons la quantification canonique, en remplaçant les coordonnées par des opérateurs, ce qui nous permettra d'observer des propriétés que nous utiliserons plus tard dans le mémoire. Dans la littérature, on utilise habituellement uniquement les relations de quantifications canoniques données par,

$$\begin{aligned} \{x_i, x_j\} &= 0, & [\hat{x}_i, \hat{x}_j] &= 0, \\ \{x_i, p_j\} &= \delta_{ij}, & [\hat{x}_i, \hat{p}_j] &= i\hbar\delta_{ij}, \\ \{p_i, p_j\} &= 0, & [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0. \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad (1.3.1)$$

Il est relativement facile de généraliser ces relations de commutations pour n'importe quel système de coordonnées en utilisant le théorème de Darboux (ou plutôt un corollaire de ce dernier). Il nous dit que peu importe les coordonnées que nous utilisons, il est possible de retrouver une transformation bijective vers des coordonnées canoniques. Comme nous pouvons réutiliser la transformation inverse sur les opérateurs et leurs relations de commutation, nous retrouvons une loi de commutation plus générale donnée par,

$$i\hbar\{A, B\}\mathbb{I} = [\hat{A}, \hat{B}], \quad (1.3.2)$$

avec $A \rightarrow \hat{A}$ et $B \rightarrow \hat{B}$ la correspondance entre les quantités A, B définies dans le sens classique et les opérateurs $\hat{A}, \hat{B}$ les représentant. Cependant, nous entrerons plus en profondeur à propos de ce théorème lors du troisième chapitre. De plus, les fonctions définies en fonction de l'espace de phase peuvent être représentées comme des opérateurs, tel que l'Hamiltonien par exemple, qui peut être écrit comme,

$$\hat{H} = H(\hat{\vec{x}}, \hat{\vec{p}}). \quad (1.3.3)$$

Nous allons brièvement rappeler quelques propriétés des opérateurs $\hat{\vec{x}}$ et $\hat{\vec{p}}$. Nous pouvons retrouver la relation de correspondance en utilisant les états dans les représentations $\{|\vec{x}\rangle\}$ et $\{|\vec{p}\rangle\}$, qui peuvent être donnés par leur relation par rapport aux opérateurs $\hat{x}_i$ et $\hat{p}_i$:

$$\hat{x}_i |\vec{x}\rangle = x_i |\vec{x}\rangle, \quad \hat{p}_i |\vec{p}\rangle = p_i |\vec{p}\rangle, \quad (1.3.4)$$

qui vérifient tous les deux la relation d'orthogonalité,

$$\langle \vec{x} | \vec{x}' \rangle = \delta(\vec{x} - \vec{x}'), \quad \langle \vec{p} | \vec{p}' \rangle = \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \quad (1.3.5)$$

et la relation de complétude,

$$\int_{\mathbb{R}^n} d^n \vec{x} |\vec{x}\rangle \langle \vec{x}| = \mathbb{I}, \quad \int_{\mathbb{R}^n} d^n \vec{p} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| = \mathbb{I}. \quad (1.3.6)$$

Nous pouvons aussi rappeler la définition des fonctions d'ondes $\phi(\vec{x})$ qui est donnée par,

$$\langle \vec{x} | \phi \rangle = \phi(\vec{x}), \quad (1.3.7)$$

et de sa transformée de Fourier $\tilde{\phi}(\vec{p})$,

$$\langle \vec{p} | \phi \rangle = \tilde{\phi}(\vec{p}). \quad (1.3.8)$$

Nous avons ainsi les propriétés suivantes,

$$\langle \vec{x} | \hat{x} | \phi \rangle = \vec{x} \phi(\vec{x}), \quad \langle \vec{x} | \hat{p} | \phi \rangle = -i\hbar \vec{\nabla} \phi(\vec{x}). \quad (1.3.9)$$

Nous avons aussi les deux propriétés suivantes, qui font intervenir des fonctions d'opérateurs,

$$\langle \vec{x} | \hat{f} | \phi \rangle = f(x) \phi(\vec{x}), \quad (1.3.10)$$

et en calculant le commutateur $[\hat{f}, \hat{p}]$, nous obtenons,

$$\begin{aligned} \langle \vec{x} | [\hat{f}, \hat{p}] | \phi \rangle &= \langle \vec{x} | \hat{f}(\hat{x}) \hat{p} | \phi \rangle - \langle \vec{x} | \hat{p} \hat{f}(\hat{x}) | \phi \rangle \\ &= f(x) \langle \vec{x} | \hat{p} | \phi \rangle - \langle \vec{x} | \hat{p} \left(\int d^3 x' |x'\rangle \langle x'| \right) f(\hat{x}) | \phi \rangle \\ &= -i\hbar \vec{\nabla} \phi(\vec{x}) + i\hbar \int d^3 x' \nabla \delta(x' - x) f(x') \phi(x') \\ &= -i\hbar \vec{\nabla} \phi(\vec{x}) + i\hbar \vec{\nabla} f(x) \phi(\vec{x}) + i\hbar f(x) \vec{\nabla} \phi(\vec{x}) \\ &= i\hbar \vec{\nabla} f(x) \phi(\vec{x}). \end{aligned} \quad (1.3.11)$$

L'Hamiltonien nous est donné en remplaçant les coordonnées de l'espace de phase par les opérateurs correspondants,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} (\hat{p} - \vec{A}(\hat{x}))^2 + V(\hat{x}). \quad (1.3.12)$$

À présent, pour trouver le spectre d'énergie, il nous suffit d'appliquer l'équation de Schrödinger stationnaire, donnée par,

$$\hat{H} | \phi \rangle = E | \phi \rangle. \quad (1.3.13)$$

En utilisant (1.3.12), nous obtenons,

$$\frac{1}{2m} (\hat{p} - \vec{A}(\hat{x}))^2 | \phi \rangle + V(\hat{x}) | \phi \rangle = E | \phi \rangle. \quad (1.3.14)$$

Cette équation peut se réécrire comme,

$$\frac{1}{2m} (\hat{p}^2 + \vec{A}(\hat{x})^2 - (\hat{p} \cdot \vec{A}(\hat{x}) + \vec{A}(\hat{x}) \cdot \hat{p}) | \phi \rangle + V(\hat{x}) | \phi \rangle = E | \phi \rangle. \quad (1.3.15)$$

Et en y insérant le commutateur, nous obtenons,

$$\frac{1}{2m}(\hat{p}^2 + \vec{A}(\hat{x})^2 - (2\vec{A}(\hat{x})\hat{p} - [\vec{A}(\hat{x}), \hat{p}]) |\phi\rangle + V(\hat{x}) |\phi\rangle = E |\phi\rangle. \quad (1.3.16)$$

À partir de cette forme, nous pouvons décider résoudre l'équation directement pour la fonction d'onde $\phi(\vec{x})$. Cependant, afin de ne pas nous compliquer la tâche, nous n'allons pas tenter de résoudre cette équation directement, mais, à la place, prendre un cas particulier en deux dimensions.

- D'une part, définissons notre potentiel magnétique tel que le champ magnétique correspondant soit constant dirigé vers l'axe z . Nous pouvons choisir $\vec{A}(x, y, z) = \frac{B}{2} \cdot (-y, x, 0)$, qui vérifie bien $\vec{\nabla} \times \vec{A} = (0, 0, B) = \vec{B}$. Comme la coordonnée z n'intervient pas, nous pouvons définir le potentiel en deux dimensions tel que,

$$\vec{A}(x, y) = \frac{B}{2}(-y, x). \quad (1.3.17)$$

Nous allons rappeler que la charge est ici cachée dans la définition de B .

- Le potentiel scalaire $V(\vec{x})$ aura la forme d'un oscillateur harmonique tel que $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2\vec{x}^2$.

Ces considérations permettent de réécrire l'équation (1.3.16) sous la forme suivante,

$$\left(\frac{1}{2m}(\hat{p}_x^2 + \hat{p}_y^2 + \frac{B^2}{4}(\hat{x}^2 + \hat{y}^2) - B(-\hat{y}\hat{p}_x + \hat{x}\hat{p}_y)) |\phi\rangle + (\frac{1}{2}m\omega^2(\hat{x}^2 + \hat{y}^2)) |\phi\rangle = E |\phi\rangle, \quad (1.3.18)$$

où l'opérateur $\hat{p}$ est décomposé comme $\hat{p} = (\hat{p}_x, \hat{p}_y)$. En regroupant les termes et en posant la définition de la fréquence cyclotron $\omega_c = \frac{B}{m}$, nous avons,

$$\left(\frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\frac{\omega_c^2}{4} + \omega^2)\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m(\frac{\omega_c^2}{4} + \omega^2)\hat{y}^2 - \frac{\omega_c}{2}(-\hat{y}\hat{p}_x + \hat{x}\hat{p}_y) \right) |\phi\rangle = E |\phi\rangle. \quad (1.3.19)$$

La forme de l'équation suggère de prendre la variable suivante $\Omega^2 = \frac{\omega_c^2}{4} + \omega^2$, ce qui nous donne l'équation suivante,

$$\left(\frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2\hat{x}^2 + \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2\hat{y}^2 - \frac{\omega_c}{2}(-\hat{y}\hat{p}_x + \hat{x}\hat{p}_y) \right) |\phi\rangle = E |\phi\rangle. \quad (1.3.20)$$

Nous pouvons constater que $\hat{H}_{x0}$ et $\hat{H}_{y0}$ définis par,

$$\hat{H}_{x0} = \frac{\hat{p}_x^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2\hat{x}^2, \quad \hat{H}_{y0} = \frac{\hat{p}_y^2}{2m} + \frac{1}{2}m\Omega^2\hat{y}^2, \quad (1.3.21)$$

où $\hat{H}_{x0}$ et $\hat{H}_{y0}$ sont les Hamiltoniens qui définissent un oscillateur harmonique sur leur axe respectif. Nous pourrions définir des états $|n_x, n_y\rangle$ qui diagonalisent l'Hamiltonien total $\hat{H}$. Cependant, il faut prendre le terme de la forme $(-\hat{y}\hat{p}_x + \hat{x}\hat{p}_y)$ en compte, que nous pouvons d'ailleurs définir comme un moment angulaire orbital donné par,

$$\hat{L}_z = -\hat{y}\hat{p}_x + \hat{x}\hat{p}_y. \quad (1.3.22)$$

L'équation de Schrödinger totale peut ainsi s'écrire de façon simplifiée,

$$\left(\hat{H}_0 - \frac{\omega_c}{2} \hat{L}_z \right) |\phi\rangle = E |\phi\rangle. \quad (1.3.23)$$

Notre but sera de trouver des états qui diagonalisent l'équation (1.3.23), en particulier les opérateurs $\hat{H}_0$ et $\hat{L}_z$. Définissons d'abord les opérateurs d'échelle respectifs à x et y ,

$$\begin{aligned} \hat{a}_x &= \sqrt{\frac{m\Omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} + \frac{i}{m\Omega} \hat{p}_x \right), & \hat{a}_y &= \sqrt{\frac{m\Omega}{2\hbar}} \left(\hat{y} + \frac{i}{m\Omega} \hat{p}_y \right), \\ \hat{a}_x^\dagger &= \sqrt{\frac{m\Omega}{2\hbar}} \left(\hat{x} - \frac{i}{m\Omega} \hat{p}_x \right), & \hat{a}_y^\dagger &= \sqrt{\frac{m\Omega}{2\hbar}} \left(\hat{y} - \frac{i}{m\Omega} \hat{p}_y \right), \end{aligned} \quad (1.3.24)$$

qui montent ou descendent les états propres $|n_x, n_y\rangle$ de la façon suivante,

$$\begin{aligned} \hat{a}_x |n_x, n_y\rangle &= \sqrt{n_x} |n_x - 1, n_y\rangle, & \hat{a}_y |n_x, n_y\rangle &= \sqrt{n_y} |n_x, n_y - 1\rangle, \\ \hat{a}_x^\dagger |n_x, n_y\rangle &= \sqrt{n_x + 1} |n_x + 1, n_y\rangle, & \hat{a}_y^\dagger |n_x, n_y\rangle &= \sqrt{n_y + 1} |n_x, n_y + 1\rangle. \end{aligned} \quad (1.3.25)$$

Ces opérateurs d'échelle vérifient leur relation de commutation habituelle donnée par,

$$[\hat{a}_x, \hat{a}_x^\dagger] = \mathbb{1}, \quad [\hat{a}_y, \hat{a}_y^\dagger] = \mathbb{1}, \quad (1.3.26)$$

formant ainsi toujours une algèbre de Fock. Ces opérateurs nous redonnent bien les opérateurs $\hat{H}_{i0}$,

$$\hat{H}_{x0} = \hbar\Omega(\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \frac{1}{2}), \quad \hat{H}_{y0} = \hbar\Omega(\hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y + \frac{1}{2}). \quad (1.3.27)$$

Les relations inverses des opérateurs d'échelles sont données par,

$$\begin{aligned} \hat{x} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega}} (\hat{a}_x^\dagger + \hat{a}_x), & \hat{p}_x &= i\sqrt{\frac{\hbar m\Omega}{2}} (\hat{a}_x^\dagger - \hat{a}_x), \\ \hat{y} &= \sqrt{\frac{\hbar}{2m\Omega}} (\hat{a}_y^\dagger + \hat{a}_y), & \hat{p}_y &= i\sqrt{\frac{\hbar m\Omega}{2}} (\hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_y). \end{aligned} \quad (1.3.28)$$

Ainsi, l'opérateur $\hat{L}_z$ réécrit en termes des opérateurs d'échelle donne,

$$\hat{L}_z = -i\frac{\hbar}{2} ((\hat{a}_y^\dagger \hat{a}_x^\dagger - \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_x) + (\hat{a}_y \hat{a}_x^\dagger - \hat{a}_y \hat{a}_x)) + i\frac{\hbar}{2} ((\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y) + (\hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger - \hat{a}_x \hat{a}_y)). \quad (1.3.29)$$

$$\Rightarrow \hat{L}_z = i\hbar(-\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger). \quad (1.3.30)$$

La forme de $\hat{L}_z$ nous indique déjà qu'on n'obtiendra pas la diagonalisation nécessaire avec les états $|n_x, n_y\rangle$, comme le prouve le calcul suivant :

$$\hat{L}_z |n_x, n_y\rangle = i\hbar(-\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger) |n_x, n_y\rangle$$

$$= -i\hbar\sqrt{n_x+1}\sqrt{n_y} |n_x+1, n_y-1\rangle + i\hbar\sqrt{n_y+1}\sqrt{n_x} |n_x-1, n_y+1\rangle. \quad (1.3.31)$$

Afin de remédier à ce petit problème, nous devons examiner comment se comportent $\hat{H}_{x0}$, $\hat{H}_{y0}$ et $\hat{L}_z$: nous constatons que $\hat{H}_{x0}$ et $\hat{H}_{y0}$ ne s'intéressent qu'à un axe à la fois, tandis que $\hat{L}_z$ mélange les deux directions entre elles. Nous allons tenter d'imiter cette situation et définir de nouveaux opérateurs d'échelle donnés par,

$$\hat{a}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x - i\hat{a}_y), \quad \hat{a}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x + i\hat{a}_y), \quad (1.3.32)$$

sont les opérateurs d'échelle d'hélicité et leurs adjoints sont donnés par,

$$\hat{a}_+^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger + i\hat{a}_y^\dagger), \quad \hat{a}_-^\dagger = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_x^\dagger - i\hat{a}_y^\dagger). \quad (1.3.33)$$

Et les équations inverses donnent,

$$\begin{aligned} \hat{a}_x &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_+ + \hat{a}_-), & \hat{a}_y &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}_+ - \hat{a}_-), \\ \hat{a}_x^\dagger &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_+^\dagger + \hat{a}_-^\dagger), & \hat{a}_y^\dagger &= \frac{i}{\sqrt{2}}(\hat{a}_-^\dagger - \hat{a}_+^\dagger). \end{aligned} \quad (1.3.34)$$

Définissons aussi les opérateurs Hamiltoniens suivants,

$$\hat{H}_{+0} = \hbar\Omega(\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ + \frac{1}{2}), \quad \hat{H}_{-0} = \hbar\Omega(\hat{a}_-^\dagger \hat{a}_- + \frac{1}{2}). \quad (1.3.35)$$

Ainsi, nous devons montrer que,

- $\hat{H}_0$ vérifie $\hat{H}_0 = \hat{H}_{+0} + \hat{H}_{-0}$,
- les états $|n_+, n_-\rangle$ diagonalisent $\hat{L}_z$.

En premier, il suffit de voir que $\hat{H}_0 = \hat{H}_{+0} + \hat{H}_{-0}$ implique directement que $\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_- = \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y$. Nous avons,

$$\begin{aligned} \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_- &= \frac{1}{2}(\hat{a}_x^\dagger + i\hat{a}_y^\dagger)(\hat{a}_x - i\hat{a}_y) + \frac{1}{2}(\hat{a}_x^\dagger - i\hat{a}_y^\dagger)(\hat{a}_x + i\hat{a}_y) \\ &= \frac{1}{2}(\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x - i\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + i\hat{a}_y^\dagger \hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x - i\hat{a}_y^\dagger \hat{a}_x + \hat{a}_x^\dagger i\hat{a}_y + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y) \\ &= \hat{a}_x^\dagger \hat{a}_x + \hat{a}_y^\dagger \hat{a}_y. \end{aligned} \quad (1.3.36)$$

Ce qui prouve la première affirmation. Montrons que $\hat{L}_z$ est bien diagonalisé. Écrivons l'opérateur en fonction de $\hat{a}_+$ et $\hat{a}_-$. Nous pouvons écrire les nouveaux opérateurs de nombre comme,

$$\hat{n}_+ = \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+, \quad \hat{n}_- = \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_-. \quad (1.3.37)$$

Reprenons l'équation (1.3.30) et on peut noter,

$$\begin{aligned}
\hat{L}_z &= i\hbar(-\hat{a}_x^\dagger \hat{a}_y + \hat{a}_x \hat{a}_y^\dagger) \\
&= \frac{\hbar}{2}((\hat{a}_+^\dagger + \hat{a}_-^\dagger)(\hat{a}_+ - \hat{a}_-) - (\hat{a}_+ + \hat{a}_-)(\hat{a}_-^\dagger - \hat{a}_+^\dagger)) \\
&= \frac{\hbar}{2}(\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ - \hat{a}_+^\dagger \hat{a}_- + \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_+ - \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_- - \hat{a}_+ \hat{a}_-^\dagger - \hat{a}_- \hat{a}_+^\dagger + \hat{a}_+ \hat{a}_+^\dagger + \hat{a}_- \hat{a}_-^\dagger) \\
&= \frac{\hbar}{2}(\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ - \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_- - \hat{a}_- \hat{a}_+^\dagger + \hat{a}_+ \hat{a}_-^\dagger) \\
&= \hbar(\hat{a}_+^\dagger \hat{a}_+ - \hat{a}_-^\dagger \hat{a}_-). \tag{1.3.38}
\end{aligned}$$

Maintenant que nous avons écrit l'opérateur de moment angulaire orbital de façon bien plus convenable, nous pouvons utiliser les définitions des opérateurs de nombre $\hat{n}_+$ et $\hat{n}_-$ afin d'écrire,

$$\hat{L}_z = \hbar(\hat{n}_+ - \hat{n}_-). \tag{1.3.39}$$

Cet opérateur permet bien de diagonaliser les états $|\phi\rangle$, qui seront donc donnés comme des états propres $|n_+, n_-\rangle$, ce qui nous permet de déduire le spectre d'énergie. Revenons à l'équation (1.3.23),

$$\begin{aligned}
\hat{H}|\phi\rangle &= (\hat{H}_0 - \frac{\omega_c}{2}\hat{L}_z)|\phi\rangle \\
&= \hbar\Omega(\hat{n}_+ + \hat{n}_- + 1)|\phi\rangle - \hbar\frac{\omega_c}{2}(\hat{n}_+ - \hat{n}_-)|\phi\rangle. \tag{1.3.40}
\end{aligned}$$

Comme nous pouvons le constater, l'Hamiltonien est composé entièrement d'opérateurs de nombre, qui commutent entre eux. Nous pouvons donner l'équation en termes de sa base composée de vecteurs propres, $|n_+, n_-\rangle$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\hat{H}|n_+, n_-\rangle &= \hbar\Omega(\hat{n}_+ + \hat{n}_- + 1)|n_+, n_-\rangle - \hbar\frac{\omega_c}{2}(\hat{n}_+ - \hat{n}_-)|n_+, n_-\rangle \\
&= \hbar\Omega(n_+ + n_- + 1)|n_+, n_-\rangle - \hbar\frac{\omega_c}{2}(n_+ - n_-)|n_+, n_-\rangle. \tag{1.3.41}
\end{aligned}$$

Ainsi, le spectre de l'énergie est donnée par,

$$E_{n_+, n_-} = \hbar((\Omega - \frac{\omega_c}{2})n_+ + (\Omega + \frac{\omega_c}{2})n_- + \Omega). \tag{1.3.42}$$

La fonction d'onde en elle-même est plus difficile à calculer dans notre jauge, il est cependant possible de calculer les fonctions d'onde dans la jauge de Landau donnée par $\vec{A}(\vec{x}) = B(0, x)$ [4]. En fin de partie, nous regardons comment nous avons moyen de faire apparaître une géométrie non commutative à partir du système que nous sommes occupés d'étudier. Maintenant, nous allons créer des commutateurs qui seront ainsi non triviaux grâce à un projecteur particulier, que nous allons définir de la façon suivante,

$$\hat{\mathbb{P}}_0 = \hat{\mathbb{P}}(n_- = 0) = \sum_{j=0}^{\infty} |j, 0\rangle \langle j, 0|, \tag{1.3.43}$$

qui sera la projection d'un état quelconque sur le niveau lorsque $n_- = 0$. Nous pouvons généraliser cela pour n'importe quel naturel n_- par ailleurs. Nous allons créer de nouvelles coordonnées, qui sont données par

$$\bar{x} = \hat{\mathbb{P}}_0 \hat{x} \hat{\mathbb{P}}_0, \quad \bar{y} = \hat{\mathbb{P}}_0 \hat{y} \hat{\mathbb{P}}_0. \quad (1.3.44)$$

Après quelques calculs, qui se trouvent dans l'annexe A (il ne s'agit pas de calculs intéressants), nous pouvons constater que $\bar{x}$ et $\bar{y}$ sont donnés par,

$$\bar{x} = \frac{1}{2} \frac{\hbar}{m\Omega} \sum_j (\sqrt{j+1} |j, 0\rangle \langle j+1, 0| + \sqrt{j+1} |j+1, 0\rangle \langle j, 0|), \quad (1.3.45)$$

$$\bar{y} = \frac{i}{2} \frac{\hbar}{m\Omega} \sum_j (\sqrt{j+1} |j, 0\rangle \langle j+1, 0| - \sqrt{j+1} |j+1, 0\rangle \langle j, 0|). \quad (1.3.46)$$

Nous pouvons ainsi constater que le commutateur est donné à nouveau après quelques calculs, par,

$$[\bar{x}, \bar{y}] = \frac{i}{2} \frac{\hbar}{m\Omega} \hat{\mathbb{P}}_0, \quad (1.3.47)$$

nous retrouvons donc à nouveau le projecteur. Nous pouvons constater qu'il y a moyen de créer un espace non commutatif sur l'espace des positions grâce au moyen d'un système composé d'un champ magnétique constant. Cependant, cela reste seulement une curiosité remarquable et nous n'allons pas nous attarder là-dessus ; notre approche pour créer un espace non commutatif est différente de celle-ci. De plus, ce résultat n'est pas aussi simple à manipuler d'un point de vue numérique. Cela dit, il s'agirait d'un bon sujet pour une étude future.

Chapitre 2

Le formalisme Lagrangien et Hamiltonien d'une géométrie non commutative

Dans le chapitre précédent, nous avons pu faire quelques rappels sur le magnétisme et sa connexion à la non commutativité, ce qui nous permet d'obtenir un ressenti plus intuitif pour l'approche que nous allons effectuer. Cependant, comme notre sujet de mémoire parle d'une géométrie non-commutative sur l'espace des positions plutôt que sur l'espace des moments conjugués, il nous faudrait aussi une partie qui l'introduit correctement. En effet, pour la géométrie non commutative sur l'espace de conjugaison, nous avons une approche à partir d'un système physique déjà existant. Dans le cas que nous allons présenter dans ce travail, nous devons donc en quelque sorte procéder par une sorte d'analogie afin de trouver notre résultat.

Ainsi, nous avons pu apercevoir une petite partie de ce que signifie obtenir une géométrie non commutative sur le domaine classique, qui s'exprime par l'apparition de crochets de Poisson non-triviaux. Cependant, l'approche utilisée dans la partie précédente dépendait toujours des coordonnées canoniques. Nous allons donc reprendre une méthode développée par J. Govaerts dans le papier suivant [5], qui permet de calculer la forme des crochets de Poisson directement à partir de la forme du Lagrangien du système, moyennant quelques conditions. Ensuite, ce formalisme nous permet de déterminer un système de coordonnées pour l'espace de phase qui nous permettra de trouver une géométrie non commutative sur l'espace de phase.

2.1 Action de premier ordre

Rappelons quelques faits en premier : nous nous souvenons que l'évolution temporelle d'un système est donnée par la minimisation de l'action suivante,

$$S(\vec{z}) = \int_{t_i}^{t_f} dt L(\vec{z}, \dot{\vec{z}}). \quad (2.1.1)$$

Le système de coordonnées $\vec{z} = (z_1, \dots, z_N)$ qui se retrouve dans le Lagrangien sont les coordonnées reprenant tous les degrés de liberté (au nombre de N) du système que nous considérons, qui représente donc l'espace de phase. Dans le formalisme Hamiltonien, ces coordonnées sont souvent représentées par des coordonnées canoniques généralisées $\vec{q} = q_1, \dots, q_{\frac{N}{2}}$ et de leur moments

conjugués canoniques $\vec{p} = p_1, \dots, p_{\frac{N}{2}}$, qui ne sont donc qu'un cas particulier d'un système de coordonnées $\vec{z} = (q_1, \dots, q_{\frac{N}{2}}, p_1, \dots, p_{\frac{N}{2}})$ possible. Nous pouvons donc définir un Lagrangien $L(\vec{z}, \dot{\vec{z}})$ sur ce système de coordonnées. A priori, ce Lagrangien semble posséder $2N$ degrés de libertés, ce qui n'est qu'une illusion, puisque le système possède toujours N degrés de libertés dû au formalisme Hamiltonien. Nous devons donc recourir à ce qu'on appelle le formalisme Hamiltonien contraint, qui maintient le système en à N degrés de liberté par l'action d'une contrainte. Dans le cas du formalisme Hamiltonien habituel, on retrouve cette contrainte sous la forme de la définition des moments conjugués $\frac{\partial L}{\partial q_i} = p_i$. C'est dans ce formalisme que nous allons travailler, au lieu d'utiliser le formalisme Lagrangien habituel.

Maintenant, nous allons développer une méthodique qui nous permet de trouver des crochets de Poisson à partir du Lagrangien associé à la formulation Hamiltonienne d'un système dynamique. Ce Lagrangien devra satisfaire quelques conditions au préalable :

- L'action S associée doit être du premier ordre, c.-à-d. elle doit être linéaire dans les dérivées $\dot{\vec{z}}$. Le Lagrangien peut donc être caractérisé par la forme suivante,

$$L(\vec{z}, \dot{\vec{z}}) = \dot{z}_j K_j(\vec{z}) - \mathcal{V}(\vec{z}). \quad (2.1.2)$$

Par la suite, on appellera ce type de Lagrangien une action de premier ordre.

- De plus, bien que ce soit implicite dans la forme ci-dessus, nous allons supposer que le Lagrangien n'a pas une dépendance explicite dans le temps, mais que la dépendance dans le temps se manifeste uniquement à travers les coordonnées $\vec{z}(t)$, ce qui peut aussi s'exprimer par,

$$\frac{\partial L}{\partial t} = 0. \quad (2.1.3)$$

La raison pour laquelle nous plaçons ces conditions est que nous restreignons nos classes de Lagrangiens (ou de façon équivalente, nos classes d'Hamiltoniens), qui engendreront ainsi une classe de crochets de Poisson. Nous pourrions étudier et ainsi calculer ces crochets de Poisson avec la méthode que nous allons décrire ci-dessous. La particularité de cette méthode est que nous pouvons déterminer les crochets de Poisson sans devoir passer par les variables canoniques de l'espace de phase.

En quoi consiste cette méthode ? Définissons la quantité suivante,

$$M_{ij} = \frac{\partial K_j}{\partial z_i} - \frac{\partial K_i}{\partial z_j}, \quad (2.1.4)$$

avec l'indice j qui n'est exceptionnellement pas sommé. Nous constatons qu'il s'agit d'une matrice qui rassemble des éléments qui ressemblent à un rotationnel. De plus, la matrice est antisymétrique,

$$M = -M^T. \quad (2.1.5)$$

Tant que M n'est pas singulière, nous pouvons trouver son inverse qui se dénotera simplement M^{-1} . Le Lagrangien nous permet de calculer l'équation du d'Euler-Lagrange (j est à nouveau sommé),

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{z}_i} = \frac{d}{dt} K_i(\vec{z}) = \dot{z}_j \frac{\partial K_i(\vec{z})}{\partial z_j}, \quad \frac{\partial L}{\partial z_i} = \dot{z}_j \frac{\partial K_j(\vec{z})}{\partial z_i} - \frac{\partial \mathcal{V}(\vec{z})}{\partial z_i}. \quad (2.1.6)$$

Ceci nous mène à l'expression suivante,

$$\dot{z}_j M_{ji} + \frac{\partial \mathcal{V}(\vec{z})}{\partial z_i} = 0, \quad (2.1.7)$$

que nous pouvons modifier un peu pour obtenir,

$$\dot{z}_i = M_{ij}^{-1} \frac{\partial \mathcal{V}(\vec{z})}{\partial z_j}. \quad (2.1.8)$$

Avant de continuer, pausons d'abord les calculs et regardons ce que nous avons effectué. Notre Lagrangien ressemble à une transformée de Legendre d'un Hamiltonien donné par $\mathcal{V}(\vec{z})$, avec les moments conjugués donnés par K_A . Il nous manque seulement la structure des crochets de Poisson, qui nécessite dans le formalisme Hamiltonien l'utilisation des variables canoniques $\vec{p}$ et $\vec{q}$. Heureusement, tout comme le reste de notre approche, il est possible d'inférer la forme des crochets de Poisson, sans passer par un ensemble de coordonnées spécifiques.

Pour cela, nous allons jeter un œil aux crochets de Poisson canoniques donnés par,

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial q_j} \frac{\partial B}{\partial p_j} - \frac{\partial B}{\partial q_j} \frac{\partial A}{\partial p_j}, \quad (2.1.9)$$

que nous pouvons transformer afin de les écrire en fonction des crochets fondamentaux $\{z_i, z_j\}$,

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial A}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \right) \left(\frac{\partial B}{\partial z_l} \frac{\partial z_l}{\partial p_j} \right) - \left(\frac{\partial B}{\partial z_l} \frac{\partial z_l}{\partial q_j} \right) \left(\frac{\partial A}{\partial z_k} \frac{\partial z_k}{\partial p_j} \right) \\ &= \frac{\partial A}{\partial z_k} \left(\frac{\partial z_k}{\partial q_j} \frac{\partial z_l}{\partial p_j} - \frac{\partial z_k}{\partial q_j} \frac{\partial z_l}{\partial p_j} \right) \frac{\partial B}{\partial z_l} \\ &= \frac{\partial A}{\partial z_k} \{z_k, z_l\} \frac{\partial B}{\partial z_l}, \end{aligned} \quad (2.1.10)$$

ce qui nous donne une définition alternative pour les crochets de Poisson,

$$\{A, B\} = \frac{\partial A}{\partial z_k} \{z_k, z_l\} \frac{\partial B}{\partial z_l}. \quad (2.1.11)$$

Nous allons rappeler l'équation (1.2.18) : les équations du mouvement peuvent prendre la forme de,

$$\dot{z}_i = \{z_i, H\}. \quad (2.1.12)$$

En combinant les deux expressions (2.1.8) et (2.1.12), nous obtenons,

$$\dot{z}_i = \{z_i, z_j\} \frac{\partial H}{\partial z_j}. \quad (2.1.13)$$

Revenons à l'équation (2.1.8). Nous avons déjà indiqué plus tôt que la formulation du Lagrangien L implique que $\mathcal{V}(\vec{z})$ correspond à un Hamiltonien. Ainsi, comme $\mathcal{V}(\vec{z}) = H(\vec{z})$, nous pouvons comparer (2.1.8) à (2.1.13), ce qui nous permet d'inférer la forme des crochets (avec j qui n'est pas sommé),

$$\{z_i, z_j\} = M_{ij}^{-1}. \quad (2.1.14)$$

Ainsi nous sommes arrivés à reproduire certaines structures faisant partie du formalisme Hamiltonien sans devoir passer explicitement par les variables canoniques. Cela nous met en avantage puisqu'on n'est plus lié à une représentation particulière de l'espace de phase. De plus, un autre avantage est le fait que nous obtenons une représentation matricielle de nos crochets de Poisson et l'inversion de M peut être exploitée pour certains cas, grâce à l'application de méthodes numériques. D'autre part, le lecteur pourrait se demander si le cas du Lagrangien L en (2.1.2) ne serait pas une famille de Lagrangiens trop restrictive, possédant très peu d'applications. En effet, la plupart des Lagrangiens ne sont pas des actions de premier ordre. Cependant, nous allons pouvoir en tirer profit ici pour le cas de notre système composé d'un champ magnétique et son analogue, le champ magnétique "conjugué". Nous allons prendre un exemple afin d'illustrer comment utiliser ce formalisme particulier.

2.2 Crochets d'un Lagrangien associé à un potentiel scalaire

Prenons donc un Lagrangien basique qui nous est donné dans ce cas,

$$L(\vec{x}, \dot{\vec{x}}) = \frac{m}{2} \sum_i \dot{x}_i^2 - V(\vec{x}), \quad (2.2.1)$$

avec x_i représentant la position et $V(\vec{x})$ étant un potentiel quelconque, par exemple le potentiel harmonique.

À première vue, le Lagrangien ne correspond pas à celui défini en (2.1.2). Cependant, essayons de l'adapter afin d'obtenir une action de premier ordre. Cette possibilité nous donne en rappelant que $\mathcal{V}$ est supposé correspondre à l'Hamiltonien, dépendant des coordonnées de l'espace de phase. Dans notre cas, nous avons déjà ce qu'il faut : il suffit de prendre l'Hamiltonien correspondant et d'exprimer le Lagrangien en fonction de celui-ci. Ainsi le moment conjugué et l'Hamiltonien sont,

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = m\dot{x}_i, \quad H(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2m} \sum_i p_i^2 + V(x). \quad (2.2.2)$$

Si nous prenons ainsi la transformée de Legendre de l'Hamiltonien défini ci-dessus afin d'obtenir à nouveau le Lagrangien, nous obtenons donc la forme requise pour obtenir une action de premier ordre, qui est donné par,

$$L(\vec{x}, \vec{p}, \dot{\vec{x}}, \dot{\vec{p}}) = \sum_i p_i \dot{x}_i - \left(\frac{1}{2m} \sum_i p_i^2 + V(x) \right). \quad (2.2.3)$$

En substituant $p_i = m\dot{x}_i$ dans l'équation précédente, nous obtenons bien à nouveau le Lagrangien en (2.2.1).

Nous allons calculer ainsi les crochets généralisés. Nous allons écrire ici par convention que toute quantité associée à x_i aura un indice latin et toute quantité associée à p_i aura un indice grec, convention que nous garderons pour toute cette partie. Ainsi, la forme des coefficients K_a est donnée,

— pour le coefficient associé à $\dot{x}_i$:

$$K_i = p_i, \quad (2.2.4)$$

— pour le coefficient associé à $\dot{p}_i$:

$$K_i = 0. \quad (2.2.5)$$

Ainsi, nous pouvons calculer la matrice M_{AB} qui sera donnée en quatre blocs ; la première moitié des indices (indices latins) de chaque ligne et colonne sera dédiée aux indices associés à x_i et la deuxième moitié des indices (indices grecs) sera associé à p_ι .

$$\begin{aligned} M_{ab} &= \frac{\partial K_b}{\partial x_a} - \frac{\partial K_a}{\partial x_b} = \frac{\partial p_b}{\partial x_a} - \frac{\partial p_a}{\partial x_b} = 0, & M_{a\beta} &= \frac{\partial K_\beta}{\partial x_a} - \frac{\partial K_a}{\partial p_\beta} = 0 - \frac{\partial p_a}{\partial p_\beta} = -\delta_{a\beta}, \\ M_{\alpha b} &= \frac{\partial K_b}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial K_\alpha}{\partial x_b} = \frac{\partial p_\beta}{\partial p_\alpha} - 0 = \delta_{\alpha b}, & M_{\alpha\beta} &= \frac{\partial K_\beta}{\partial p_\alpha} - \frac{\partial K_\alpha}{\partial p_\beta} = 0. \end{aligned} \quad (2.2.6)$$

Il est temps d'appliquer la formule $\{z_A, z_B\} = M_{AB}^{-1}$. La matrice en blocs est d'une forme simple donnée par,

$$M_{AB} = \begin{pmatrix} M_{ab} & M_{a\beta} \\ M_{\alpha b} & M_{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.7)$$

dont l'inverse est simplement donné par,

$$M_{AB}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.2.8)$$

ce qui nous permet d'obtenir les crochets généralisés donnés par,

$$\begin{aligned} \{x_a, x_b\} &= M_{ab}^{-1} = 0, & \{x_a, p_\beta\} &= M_{a\beta}^{-1} = \delta_{a\beta}, \\ \{p_\alpha, x_b\} &= M_{\alpha b}^{-1} = -\delta_{\alpha b}, & \{p_\alpha, p_\beta\} &= M_{\alpha\beta}^{-1} = 0. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Nous voyons que les crochets canoniques nous donnent à nouveau les mêmes résultats que les crochets de Poissons habituels, c.-à-d. définis par la définition en (1.2.11). Ici, notre cas relativement simple possède un choix de coordonnées évident. Le prochain cas nous permettra de choisir

2.3 Crochets de Poisson d'un Lagrangien d'un champ magnétique

Lors du cas précédent, le choix des coordonnées de l'espace de phase est relativement évident, nous avons utilisé des coordonnées canoniques. Cependant, passons à une situation où le choix de coordonnées le plus "intelligent" n'est pas forcément canonique. Nous avons déjà rencontré cette situation auparavant lors du premier chapitre dans la section 1.2. Ce deuxième exemple permettra de comprendre comment nous pouvons obtenir d'une manière presque immédiate une géométrie non commutative sur l'espace de conjugaison, c.-à-d. trouver les crochets de Poisson des coordonnées $\vec{x}$ et $\vec{\pi}$. Nous allons procéder de manière similaire à la section précédente. Prenons, d'une part le Lagrangien et le Hamiltonien du système,

$$L = \frac{1}{2}m\dot{\vec{x}}^2 - V(\vec{x}) + \dot{\vec{x}} \cdot \vec{A}(\vec{x}), \quad H(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{1}{2m}(\vec{p} - \vec{A}(\vec{x}))^2 + V(\vec{x}), \quad (2.3.1)$$

qui représentent tous les deux le système composé du champ magnétique à condition que nous avons $\vec{p} = m\dot{\vec{x}} + \vec{A}(\vec{x})$. Nous pouvons transformer le Lagrangien en une action de premier ordre d'une façon relativement élégante en passant par une complétion au carré. En effet, le Lagrangien peut s'écrire comme,

$$L = \frac{1}{2m}(m\dot{\vec{x}} + \vec{A}(\vec{x}))^2 - \frac{1}{2m}\vec{A}^2(\vec{x}) - V(\vec{x}), \quad (2.3.2)$$

Afin de pouvoir faire apparaître l'Hamiltonien, nous allons insérer le moment conjugué,

$$L = -\frac{1}{2m}(\vec{p} - (m\dot{\vec{x}} + \vec{A}(\vec{x})))^2 + \frac{1}{2m}(m\dot{\vec{x}} + \vec{A}(\vec{x}))^2 - \frac{1}{2m}\vec{A}^2(\vec{x}) - V(\vec{x}), \quad (2.3.3)$$

Ceci nous donne,

$$L = \dot{\vec{x}} \cdot \vec{p} - \left(\frac{1}{2m}(\vec{p} - \vec{A}(\vec{x}))^2 + V(\vec{x}) \right). \quad (2.3.4)$$

Nous remarquerons que nous obtenons notre action de premier ordre avec dans la partie de droite notre Hamiltonien¹. Ensuite, définissons notre élément π_i , qu'on va prendre de la même forme telle que définie en (1.2.3), c.-à-d. $p_i = \pi_i + A_i(\vec{x})$, que nous allons remplacer dans l'Hamiltonien,

$$L = \sum_i \dot{x}_i(\pi_i + A_i(\vec{x})) - \left(\frac{1}{2m} \sum_i \pi_i^2 + V(\vec{x}) \right). \quad (2.3.5)$$

Le Lagrangien est ainsi bien de la forme requise, il est donc prêt à l'utilisation. Maintenant, calculons les coefficients K_A qui sont donnés par,

— le coefficient associé à $\dot{x}_i$:

$$K_i = \pi_i + A_i(\vec{x}), \quad (2.3.6)$$

— le coefficient associé à $\dot{\pi}_i$:

$$K_i = 0. \quad (2.3.7)$$

Ceci nous donne les éléments de la matrice M_{AB} :

$$\begin{aligned} M_{ab} &= \frac{\partial}{\partial x_a}(\pi_b + A_b(\vec{x})) - \frac{\partial}{\partial x_b}(\pi_a + A_a(\vec{x})) = F_{ab}(\vec{x}), & M_{a\beta} &= 0 - \frac{\partial}{\partial \pi_\beta}(\pi_a + A_a(\vec{x})) = -\delta_{a\beta}, \\ M_{a\beta} &= 0 - \frac{\partial}{\partial \pi_\beta}(\pi_a + A_a(\vec{x})) = -\delta_{a\beta}, & M_{\alpha\beta} &= 0. \end{aligned} \quad (2.3.8)$$

Avant de procéder avec le calcul des crochets, nous allons rapidement rappeler comment calculer l'inverse d'une matrice par blocs 4×4 . Il est donné par,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1} + A^{-1}B(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & -A^{-1}(D - CA^{-1}B)^{-1} \\ -(D - CA^{-1}B)^{-1}CA^{-1} & (D - CA^{-1}B)^{-1} \end{pmatrix}, \quad (2.3.9)$$

en supposant que A et le complément de Schur $D - CA^{-1}B$ sont inversibles. Nous avons aussi une formule complémentaire dans le cas où nous ne pouvons pas inverser les résultats,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (A - BD^{-1}C)^{-1} & -(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \\ -D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1} & D^{-1} + D^{-1}C(A - BD^{-1}C)^{-1}BD^{-1} \end{pmatrix}, \quad (2.3.10)$$

1. Nous remarquerons aussi que nous aurions pu simplement utiliser la transformée de Legendre en forçant les définitions de variables, ce que nous avons faits lors de la première partie. D'autre part, nous aurions pu procéder aussi comme on l'a fait ici dans la partie précédente

avec la matrice D et le complément de Schur $A - BD^{-1}C$ inversibles. Pour le moment, nous avons la possibilité de prendre l'une ou l'autre formule. Nous avons donc que M_{AB} est donné par

$$M_{AB} = \begin{pmatrix} M_{ab} & M_{a\beta} \\ M_{\alpha b} & M_{\alpha\beta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{ab} & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.3.11)$$

et son inverse est donc obtenu par,

$$M_{AB}^{-1} = \begin{pmatrix} F_{ab} & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \mathbb{I} \\ -\mathbb{I} & F_{\alpha\beta} \end{pmatrix}, \quad (2.3.12)$$

ce qui nous permet d'obtenir les crochets,

$$\begin{aligned} \{x_a, x_b\} &= M_{ab}^{-1} = 0, & \{x_a, \pi_\beta\} &= M_{a\beta}^{-1} = \delta_{a\beta}, \\ \{\pi_\alpha, x_b\} &= M_{\alpha b}^{-1} = -\delta_{\alpha b}, & \{\pi_\alpha, \pi_\beta\} &= M_{\alpha\beta}^{-1} = F_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

Et comme prévu, nous obtenons ce que nous avons déjà trouvé en (1.2.16). Pour l'instant, nous n'avons que retrouvé des résultats dont nous sommes bien au courant. Nous sommes donc rassurés que les choses fonctionnent comme prévues, et grâce à cette préparation, nous pouvons l'utiliser sur des exemples qui sont moins intuitifs à comprendre et à manipuler par l'approche plus traditionnelle. Un tel système sera étudié dans la section suivante.

2.4 Crochets de Poisson d'un Lagrangien d'un champ magnétique conjugué

Ainsi, nous allons procéder au point clef de ce chapitre : supposons qu'à la place du potentiel magnétique, nous avons un potentiel magnétique "conjugué", qui se manifestera à travers un terme $\dot{\pi}_i \Phi_i(\vec{\pi})$, qui, dans un premier temps, remplacera le terme $\dot{x}_i A_i(\vec{x})$. Ce Lagrangien est donc donné par,

$$L = \sum_i \dot{x}_i \pi_i + \sum_i \dot{\pi}_i \Phi_i(\vec{\pi}) - \left(\frac{1}{2m} \sum_i \pi_i^2 + V(\vec{x}) \right). \quad (2.4.1)$$

Cela nous mène donc aux coefficients K_A , nous avons,

— le coefficient associé à $\dot{x}_i$:

$$K_i = \pi_i, \quad (2.4.2)$$

— le coefficient associé à $\dot{\pi}_l$:

$$K_l = \Phi_l(\vec{\pi}). \quad (2.4.3)$$

Passons directement à M_{AB} ,

$$\begin{aligned} M_{ab} &= \frac{\partial \pi_b}{\partial x_a} - \frac{\partial \pi_a}{\partial x_b} = 0, & M_{a\beta} &= \frac{\partial \Phi_\beta(\vec{\pi})}{\partial x_a} - \frac{\partial \pi_a}{\partial \pi_\beta} = -\delta_{a\beta}, \\ M_{\alpha b} &= \frac{\partial \pi_b}{\partial \pi_\alpha} - \frac{\partial \Phi_\alpha(\vec{\pi})}{\partial x_b} = \delta_{\alpha b}, & M_{\alpha\beta} &= \frac{\partial \Phi_\beta(\vec{\pi})}{\partial \pi_\alpha} - \frac{\partial \Phi_\alpha(\vec{\pi})}{\partial \pi_\beta} = \Phi_{\alpha\beta}. \end{aligned} \quad (2.4.4)$$

Ainsi, nous obtenons les crochets généralisés²,

2. Bien que nous avons gardé la même lettre, Φ_α représente le potentiel du champs magnétique conjugué et $\Phi_{\alpha\beta}$ est défini par l'élément de matrice $M_{\alpha\beta}$.

$$\begin{aligned} \{x_a, x_b\} &= M_{ab}^{-1} = \Phi_{ab}, & \{x_a, \pi_\beta\} &= M_{a\beta}^{-1} = \delta_{a\beta}, \\ \{\pi_\alpha, x_b\} &= M_{\alpha b}^{-1} = -\delta_{\alpha b}, & \{\pi_\alpha, \pi_\beta\} &= M_{\alpha\beta}^{-1} = 0. \end{aligned} \quad (2.4.5)$$

Nous avons donc trouvé un Lagrangien qui permet d'avoir des crochets de Poisson non triviaux sur $\vec{x}$. Cependant, bien que nos développements de calculs soient relativement similaires au cas précédent, il est toujours surprenant de pouvoir atteindre ce résultat, qui est significativement plus difficile à atteindre dans le cas où nous utilisons les crochets de Poisson canoniques du formalisme Hamiltonien. Ces crochets peuvent être utilisés pour développer un formalisme quantique dans lequel le commutateur $[x_i, x_j]$ est non trivial : les coordonnées x_i ne commuteront plus entre elles ! Malheureusement, Φ_{ab} n'est pas évident à manipuler sous sa forme actuelle. Nous allons donc choisir un champ magnétique conjugué constant situé en deux dimensions, qui sera défini comme le champ magnétique constant en (1.3.17). Ainsi,

$$\vec{\Phi}(\vec{x}) = \frac{\bar{\theta}}{2}(-x_2, x_1), \quad (2.4.6)$$

où nous avons défini l'amplitude de ce champ par $\bar{\theta}$.³ Nous obtenons les éléments de matrice $\Phi_{ab} = \epsilon_{ab}\bar{\theta}$, qui nous mènent aux crochets suivants,

$$\{x_a, x_b\} = \epsilon_{ab}\bar{\theta}, \quad \{x_a, \pi_\beta\} = \delta_{a\beta}, \quad \{\pi_\alpha, \pi_\beta\} = 0. \quad (2.4.7)$$

C'est à l'aide de ces crochets que nous allons quantifier un système classique afin d'obtenir une géométrie non-commutative sur l'espace des positions. L'avantage de ces crochets est évidemment le fait qu'ils ne dépendent que d'un paramètre, qui de plus est constant.

2.5 Crochets de Poisson d'un Lagrangien d'un champ magnétique et d'un champ magnétique conjugué

Cependant, avant de clôturer cette partie, nous allons jeter un coup d'œil sur le cas où nous avons le champ $\vec{A}(\vec{x})$ et $\vec{\Phi}(\vec{\pi})$ allumés en même temps. Nous obtenons donc le Lagrangien suivant

$$L = \sum_i \dot{x}_i(\pi_i + A_i(\vec{x})) + \sum_i \dot{\pi}_i \Phi_i(\vec{\pi}) - \left(\frac{1}{2m} \sum_i \pi_i^2 + V(\vec{x})\right) \quad (2.5.1)$$

Procédons comme dans les sections précédentes :

— le coefficient associé à $\dot{x}_i$:

$$K_i = \pi_i + A_i(\vec{x}), \quad (2.5.2)$$

— le coefficient associé à $\dot{\pi}_i$:

$$K_i = \Phi_i(\vec{\pi}). \quad (2.5.3)$$

Les éléments composant M_{AB} sont :

3. Notons que la charge “conjuguée” d'une particule dans un champ magnétique conjugué a à nouveau été absorbée à l'intérieur de $\bar{\theta}$.

$$\begin{aligned} M_{ab} &= F_{ab}(\vec{x}), & M_{a\beta} &= -\delta_{a\beta}, \\ M_{\alpha b} &= \delta_{\alpha b}, & M_{\alpha\beta} &= \Phi_{\alpha\beta}(\vec{\pi}). \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Comme nous voyons, cette matrice n'est pas aussi simple à inverser que les exemples précédents, où soit $\Phi_{\alpha\beta}$, soit F_{ab} , était nul. En utilisant d'abord (2.3.9), nous pouvons inverser M_{AB} tel que,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} F & -\mathbb{I} \\ \mathbb{I} & \Phi \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} F^{-1} - F^{-1}(\Phi + F^{-1})^{-1}F^{-1} & -F^{-1}(\Phi + F^{-1})^{-1} \\ -(\Phi + F^{-1})^{-1}F^{-1} & (\Phi + F^{-1})^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.5.5)$$

Et nous allons aussi utiliser (2.3.10) pour trouver

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} (F + \Phi^{-1})^{-1} & (F + \Phi^{-1})^{-1}\Phi^{-1} \\ -\Phi^{-1}(F + \Phi^{-1})^{-1} & \Phi^{-1} - \Phi^{-1}(F + \Phi^{-1})^{-1}\Phi^{-1} \end{pmatrix}. \quad (2.5.6)$$

Nous constatons que dans les deux cas, nous obtenons des relations assez lourdes en termes de calculs quant aux matrices inversées. De plus, nous constatons que des expressions non triviales apparaissent aussi dans les crochets du type $\{\pi_\alpha, x_b\}$. Nous allons donc reprendre les potentiels des deux champs constants définis en (1.3.17) et (2.4.6) afin de faciliter tout calcul (tout en fixant les dimensions). Ainsi, F et Φ (et leurs inverses) sont donnés par

$$F = \begin{pmatrix} 0 & B \\ -B & 0 \end{pmatrix}, \quad F^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{B} \\ \frac{1}{B} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.5.7)$$

$$\Phi = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\theta} \\ -\bar{\theta} & 0 \end{pmatrix}, \quad \Phi^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\bar{\theta}} \\ \frac{1}{\bar{\theta}} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5.8)$$

Nous obtenons la matrice M suivante :

$$M = \begin{pmatrix} 0 & B & 1 & 0 \\ -B & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & \bar{\theta} \\ 0 & -1 & -\bar{\theta} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.5.9)$$

Il suffit d'utiliser une des deux formules d'inversion en haut pour trouver M^{-1} ,

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\bar{\theta}}{B\bar{\theta}-1} & -\frac{1}{B\bar{\theta}-1} & 0 \\ \frac{\bar{\theta}}{B\bar{\theta}-1} & 0 & 0 & -\frac{1}{B\bar{\theta}-1} \\ \frac{1}{B\bar{\theta}-1} & 0 & 0 & -\frac{B}{B\bar{\theta}-1} \\ 0 & \frac{1}{B\bar{\theta}-1} & \frac{B}{B\bar{\theta}-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad (2.5.10)$$

ce qui nous donne les crochets généralisés,

$$\begin{aligned} \{x_a, x_b\} &= M_{ab}^{-1} = \epsilon_{ab} \frac{\bar{\theta}}{1 - B\bar{\theta}}, & \{x_a, \pi_\beta\} &= M_{a\beta}^{-1} = \frac{1}{1 - B\bar{\theta}} \delta_{a\beta}, \\ \{\pi_\alpha, x_b\} &= M_{\alpha b}^{-1} = -\frac{1}{1 - B\bar{\theta}} \delta_{\alpha b}, & \{\pi_\alpha, \pi_\beta\} &= M_{\alpha\beta}^{-1} = \epsilon_{\alpha\beta} \frac{B}{1 - B\bar{\theta}}. \end{aligned} \quad (2.5.11)$$

Comme nous pouvons le constater, nous obtenons les crochets obtenus plus haut si nous faisons tendre B ou θ vers zero. Ce qui nous frappe pourtant est l'apparition du facteur $\frac{1}{1-B\theta}$, qui modifie tous les crochets d'un même facteur multiplicatif. En effet, dans les cas précédents, nous ne modifions qu'un espace à la fois, c.-à-d. que soit $\vec{x}$, soit $\vec{\pi}$ correspondait à l'espace de configuration/conjugaison canonique. Ici, $\vec{x}$ et $\vec{\pi}$ sont composés d'un mélange des deux espaces composant l'espace de phase canonique, d'où l'apparition de ces expressions non triviales dans $\{x_a, \pi_\beta\}$. En guise de point final, nous pouvons comparer nos résultats à l'article suivant [6] de F.J. Vanhecke *et al.*. L'article recherche aussi les crochets de Poisson d'un champ magnétique normal et conjugué. La différence principale se trouve dans l'approche utilisée : tandis que nous avons utilisé les propriétés de l'action de premier ordre, l'article approche une méthode basée sur la formulation symplectique de l'espace de phase. Nous retrouvons comme attendu les mêmes résultats, à quelques notations près. L'avantage de notre approche se retrouve dans la simplicité de la méthode. De plus, notre méthode est facilement applicable à un cas quelconque et l'approche matricielle permet une application numérique de notre méthode plus aisée à utiliser.

Chapitre 3

Création d'un environnement quantique d'une géométrie non-commutative sur l'espace des positions

Maintenant, nous passons au chapitre principal de ce mémoire, lors duquel nous allons analyser la géométrie non commutative sur l'espace des positions dans un environnement quantique. Lors du chapitre précédent, nous avons pu trouver des crochets d'un Lagrangien non triviaux en $\vec{x}$. Par ailleurs, nous allons utiliser le cas du champ magnétique conjugué constant, c.-à-d. que nous allons utiliser les crochets définis en (2.4.7). Ces crochets seront plus simples à manipuler, sans perdre d'autant leur intérêt puisque, comme nous allons le voir plus tard, le paramètre θ nous donnera la possibilité de contrôler la commutativité du système. Si nous appliquons ainsi la quantification canonique sur les crochets définis, nous obtenons donc des commutateurs correspondants à l'espace des positions qui sont eux aussi non triviaux, et changeront ainsi la façon par laquelle nous voyons la géométrie sur l'espace de configuration quantique.

Nous allons préciser que cette partie est inspiré des développements de J. Govaerts, qui peuvent être retrouvés dans la note suivante [7].

Reprenons ici le Lagrangien, qui nous a permis d'écrire ces crochets de Poisson que nous avons écrits en (2.4.1), dont nous allons changer quelques notations :

$$L = \dot{x}_j p_j + \dot{p}_j \Phi_j(\vec{p}) - \left(\frac{1}{2m} p_j^2 + V(\vec{x}) \right) \quad (3.0.1)$$

Nous avons remplacé la notation pour l'espace de configuration π_i par p_i . En effet, il s'agit bien des moment conjugués : d'une part, nous pouvons calculer directement le moment conjugué par $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}_i} = \pi_i$. D'autre part, en regardant les crochets de l'espace de conjugaison en (2.4.5), $\{\pi_i, \pi_j\} = 0 = \{p_i, p_j\}$, nous constatons que nous retrouvons nos coordonnées de conjugaison canoniques. Si nous regardons les crochets de l'espace de configuration en (2.4.5), $\{x_i, x_j\} = \Phi_{ij}$, nous constatons qu'il ne s'agit pas des coordonnées de l'espace de configuration canoniques. Toutefois, nous nous souvenons que pour les deux types de coordonnées $\vec{p}$ (moments conjugués) et $\vec{\pi}$ (quantité de mouvement) d'un système composé d'un champ magnétique normal, nous étions en mesure de trouver une interprétation pour chacune des deux coordonnées. Malheureusement, il n'y a pas d'interprétation intuitive de la coordonnée $\vec{x}$ qu'on retrouve dans la situation du champ magnétique conjugué. De plus, la nature abstraite du champ magnétique conjugué ne rend pas sa représentation intuitive facile. Nous allons référencer cette coordonnée au cours du reste du texte

par la “coordonnée non commutative” ou plus généralement, si nous utilisons l’entièreté de l’espace de phase, nous parlerons du cas non commutatif. Cependant, grâce au théorème de Darboux, nous avons moyen de retrouver les coordonnées de l’espace de configuration commutatives au moyen d’une transformation, ce que nous allons spécifier dans la prochaine section.

Maintenant, prenons comme nous l’avons fait déjà avant, un champ constant nous menant à un potentiel du type,

$$\Phi_i(\vec{p}) = \epsilon_{ij} \bar{\theta} p_j, \quad (3.0.2)$$

que nous avons déjà utilisé lors du chapitre précédent. Nous pouvons aussi réduire le nombre de dimensions d’un nombre arbitraire à deux, ce qui nous facilitera la tâche afin de calculer les détails de la démarche et évite un bagage trop encombrant. Rappelons aussi, que ϵ est le symbole de Levi-Civita en deux dimensions. Ce qui nous donne le Lagrangien d’une particule de masse m ,

$$L(x, \dot{x}, p, \dot{p}) = \dot{x}_j p_j + \sum_i \frac{1}{2} \epsilon_{ij} \bar{\theta} p_i \dot{p}_j - \left(\frac{1}{2m} \sum_i p_i^2 + V(\vec{x}) \right). \quad (3.0.3)$$

Fort heureusement, nous connaissons les crochets de Poisson correspondant aux coordonnées de l’espace de phase, que nous avons déjà calculés en (2.4.7) :

$$\{x_i, x_j\} = \epsilon_{ij} \bar{\theta}, \quad \{x_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\} = 0, \quad (3.0.4)$$

ce qui nous donne bien un crochet de Poisson non nul pour $\{x_1, x_2\} = \bar{\theta}$, ce qui nous donne des coordonnées dans l’espace de configuration non commutatives.

3.1 Le théorème de Darboux

Comme déjà dit auparavant, les coordonnées $\vec{x}$ de l’espace de configuration trouvées dans le Lagrangien (3.0.1) ne correspondent pas aux coordonnées de l’espace de configuration canonique et par ce fait, ne correspond pas à la représentation intuitive de la position que nous avons de notre vie de tous les jours. Est-ce que ce système est physiquement valable ? Cette question est un peu ambiguë puisqu’elle peut se poser de deux façons différentes : un tel système existe-t-il ou un tel système peut-il exister ?

La réponse à la première question est négative pour le moment : en effet, les données expérimentales à ce sujet n’ont pas encore révélé l’existence d’un champ magnétique conjugué, après tout il ne s’agit de première vue que d’un exercice a priori mathématique et théorique. La deuxième question peut être répondue avec le théorème de Darboux, qui nous permettra par la suite aussi de quantifier notre système d’une façon plus correcte.

Le théorème de Darboux [8] implique le fait qu’il n’existe pas d’invariant géométrique pour une variété symplectique. Ainsi, nous pouvons toujours trouver un changement de coordonnées tel que nous pouvons retrouver les crochets de Poisson canoniques, ce qui signifie que nous pouvons toujours trouver une transformation bijective qui nous permettra de retrouver des coordonnées canoniques de l’espace de phase. Finalement, nous pouvons répondre à notre deuxième question positivement, puisque tout système physique, tant qu’il est décrit dans un espace de phase, peut être décrit par des coordonnées canoniques ; nous sommes en mesure de retrouver les coordonnées canoniques dans le cas du système magnétique conjugué. Reprenons le cas du magnétisme classique, il nous suffisait de pratiquer la transformation $\pi_i + A_i = p_i$ pour retrouver l’espace de phase canonique et donc le cas commutatif. Nous allons faire pareil avec l’espace de configuration $\vec{x}$: nous pouvons tenter

dans un premier temps une transformation du type $x_i + \Phi_i = y_i$, dans notre cas particulier, nous avons,

$$x_i + \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\bar{\theta}p_j = y_i, \quad \implies \quad \begin{aligned} x_1 + \frac{1}{2}\bar{\theta}p_2 &= y_1, \\ x_2 - \frac{1}{2}\bar{\theta}p_1 &= y_2. \end{aligned} \quad (3.1.1)$$

Le Lagrangien peut être réécrit en fonction des coordonnées $\vec{y}$,

$$L(y, \dot{y}, p, \dot{p}) = \dot{y}_1 p_1 + \dot{y}_2 p_2 - \left(\frac{1}{2m} \sum_{i=1,2} p_i^2 + V(y, p) \right). \quad (3.1.2)$$

Il est facile de voir que ce Lagrangien nous donne bien les crochets canoniques¹,

$$\{y_i, y_j\} = 0, \quad \{y_i, p_j\} = \delta_{ij}, \quad \{p_i, p_j\} = 0. \quad (3.1.3)$$

Nous obtenons ainsi à nouveau l'espace de phase avec un choix de coordonnées canoniques. Le Lagrangien ainsi décrit une particule de masse m , se mouvant dans un potentiel $V(y, p)$. Ainsi, nous pouvons répondre à une des questions posées en haut : la variable de l'espace conjugué p correspond bien au moment conjugué, comme on n'applique pas la transformation sur p . Nous pouvons aisément généraliser cette transformation à un champ Φ_i quelconque.

Par ailleurs, nous allons utiliser la notation en haut pour distinguer le cas commutatif du cas non commutatif : à partir de maintenant, nous allons utiliser les coordonnées $\vec{x}$ pour décrire l'espace de configuration non commutatif et les coordonnées $\vec{y}$ pour décrire l'espace de configuration commutatif.

3.2 Quantification d'un système non commutatif

Bien que nous puissions quantifier le système directement à partir des crochets de Poisson des coordonnées $\vec{x}$ et $\vec{p}$, le théorème de Darboux nous donne les moyens de quantifier le système d'une façon "plus propre". Nous définissons nos opérateurs $\hat{x}_i$ de la façon suivante,

$$\begin{aligned} \hat{x}_1 + \frac{1}{2}\bar{\theta}\hat{p}_2 &= \hat{y}_1, & \hat{x}_1 &= \hat{y}_1 - \frac{1}{2}\bar{\theta}\hat{p}_2, \\ \hat{x}_2 - \frac{1}{2}\bar{\theta}\hat{p}_1 &= \hat{y}_2, & \hat{x}_2 &= \hat{y}_2 + \frac{1}{2}\bar{\theta}\hat{p}_1. \end{aligned} \quad (3.2.1)$$

De façon plus générale, nous avons,

$$\hat{x}_i + \frac{1}{2}\bar{\theta}\epsilon_{ij}\hat{p}_j = \hat{y}_i, \quad \hat{x}_i = \hat{y}_i - \frac{1}{2}\epsilon_{ij}\bar{\theta}\hat{p}_j. \quad (3.2.2)$$

Nous quantifions notre système à partir de $\vec{y}$ et $\vec{p}$, c.-à.-d.,

1. Il est aussi possible évidemment de calculer ces crochets directement à partir de la définition de $\vec{x}$.

$$\begin{aligned} \{y_i, y_j\} &= 0, & [\hat{y}_i, \hat{y}_j] &= 0, \\ \{y_i, p_j\} &= \delta_{ij}, & [\hat{y}_i, \hat{p}_j] &= \hbar \delta_{ij} \mathbf{1}, \\ \{p_i, p_j\} &= 0, & [\hat{p}_i, \hat{p}_j] &= 0. \end{aligned} \quad \Longrightarrow \quad (3.2.3)$$

Ce qui, après avoir utilisé (3.2.2), nous donne ainsi,

$$[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta \epsilon_{ij} \mathbf{1}, \quad [\hat{x}_i, \hat{p}_j] = i\hbar \delta_{ij} \mathbf{1}, \quad [\hat{p}_i, \hat{p}_j] = 0, \quad (3.2.4)$$

où nous avons défini $\theta \equiv \hbar \bar{\theta}$, que nous allons utiliser pour le reste du mémoire.

Désormais, nous aimerions obtenir une représentation de cette algèbre. On peut déjà choisir deux bases pour cette représentation, les bases $|\vec{y}\rangle$ et $|\vec{p}\rangle$, qui correspondent ainsi à l'état propre "position" et l'état propre "impulsion". Leur spectre d'états propres est donné par,

$$\hat{y}_i |\vec{y}\rangle = y_i |\vec{y}\rangle, \quad \hat{p}_i |\vec{p}\rangle = p_i |\vec{p}\rangle. \quad (3.2.5)$$

Avec leur relation d'orthogonalité et de complétude données par,

$$\langle \vec{y}' | \vec{y} \rangle = \delta(\vec{y}' - \vec{y}), \quad \langle \vec{p}' | \vec{p} \rangle = \delta(\vec{p}' - \vec{p}), \quad (3.2.6)$$

$$\int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{y} |\vec{y}\rangle \langle \vec{y}| = \mathbf{1}, \quad \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{p} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p}| = \mathbf{1}. \quad (3.2.7)$$

Ainsi, les fonctions d'ondes de l'état quantique $|\psi\rangle$ représenté par rapport aux deux bases sont,

$$\langle \vec{y} | \psi \rangle = \psi(\vec{y}), \quad \langle \vec{p} | \psi \rangle = \tilde{\psi}(\vec{p}), \quad (3.2.8)$$

dont nous savons que $\tilde{\psi}(\vec{p})$ est la transformée de Fourier de $\psi(\vec{y})$. Nous allons rappeler d'autres relations utiles ici, que nous pouvons retrouver dans l'ouvrage de Cohen-Tannoudji [9], qui sont,

$$\langle \vec{y} | \vec{p} \rangle = \langle \vec{p} | \vec{y} \rangle^* = \frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{y}}, \quad (3.2.9)$$

ce qui nous donne bien la relation de Fourier $\tilde{\psi}(\vec{p}) = \int_{\mathbb{R}^2} d^2 \vec{y} \langle \vec{p} | \vec{y} \rangle \psi(\vec{y})$. Les relations suivantes,

$$\langle \vec{y} | \hat{p}_i | \psi \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y_i} \psi(\vec{y}), \quad \langle \vec{p} | \hat{y}_i | \psi \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i} \tilde{\psi}(\vec{p}), \quad (3.2.10)$$

nous donnent l'action sur les bases telle que,

$$\langle \vec{y} | \hat{p}_i | \vec{y}' \rangle = -i\hbar \frac{\partial}{\partial y_i} \delta(\vec{y} - \vec{y}'), \quad \langle \vec{p} | \hat{y}_i | \vec{p}' \rangle = i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i} \delta(\vec{p} - \vec{p}'). \quad (3.2.11)$$

Nous pouvons déjà calculer quelques résultats de l'opérateur $\hat{x}_i$,

$$\langle \vec{y} | \hat{x}_1 | \psi \rangle = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\theta}{2\hbar} p_2 \right) \psi(\vec{y}), \quad \langle \vec{y} | \hat{x}_2 | \psi \rangle = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\theta}{2\hbar} p_1 \right) \psi(\vec{y}). \quad (3.2.12)$$

Ces relations étant rappelées, nous aimerions savoir ce qu'on pourrait faire avec $\hat{x}_i$. Nous pourrions imaginer obtenir un état qui nous donne,

$$\hat{x}_i |\vec{x}\rangle = x_i |\vec{x}\rangle. \quad (3.2.13)$$

Une telle relation contredit la relation de commutation non triviale qui caractérise $\hat{x}_i$. Nous pourrions penser à définir une base pour chaque coordonnée tel que nous avons $|x_1\rangle$ et $|x_2\rangle$ séparément. Cependant, nous savons que lorsque $\theta = 0$, nous sommes supposés obtenir $\vec{x} = \vec{y}$, ce qui nous permet de dire qu'on peut avoir un état $|\vec{x}, \theta\rangle$ qui tend aussi vers $|\vec{y}\rangle = |\vec{x}, \theta = 0\rangle$, ce qui rend la représentation sous forme d'un seul état nécessaire. Afin de trouver un état qui satisfait nos besoins nous allons lui imposer deux conditions supplémentaires dans la prochaine section, ce qui simplifiera son calcul.

3.3 Construction de la représentation $|\vec{x}, \theta\rangle$ par la relation de Schrödinger-Robertson

Comme nous ne savons pas exactement à quoi sont supposés ressembler nos états $|\vec{x}, \theta\rangle$, nous devons les construire nous-mêmes. Pour cela, nous devons considérer trois éléments importants : un tel état doit contenir uniquement l'information que nous lui donnons, c.-à-d. l'information que nous lui donnons à propos de $\vec{x}$ et θ , il doit pouvoir engendrer l'entière de l'espace de Hilbert et il doit satisfaire la relation $|\vec{y}\rangle = |\vec{x}, \theta = 0\rangle$, c.-à-d. au moment où nous annulons la relation de commutation. Comme nous voyons, nous ne lui forçons ni la relation d'orthogonalité ni la relation de complétude, ce qui nous donne le risque d'obtenir une base surcomplète de l'espace de Hilbert. Mais après, nous sommes libres de décider des autres conditions que nous souhaitons lui attribuer. Nous allons lui en donner deux.

La première condition sera l'imposition de la minimisation de la relation d'incertitude de Schrödinger-Robertson [10][11], donnée par,

$$(\Delta\hat{A})^2(\Delta\hat{B})^2 \geq \frac{1}{4}\langle(-i)[\hat{A}, \hat{B}]\rangle^2 + \frac{1}{4}\langle\{\hat{A} - \langle\hat{A}\rangle, \hat{B} - \langle\hat{B}\rangle\}\rangle, \quad (3.3.1)$$

qui est valable pour n'importe quels opérateurs hermitiens $\hat{A}$ et $\hat{B}$. Cette relation est plus stricte et plus complète que la relation de Heisenberg bien connue donnée par,

$$(\Delta\hat{A})^2(\Delta\hat{B})^2 \geq \frac{1}{4}\langle(-i)[\hat{A}, \hat{B}]\rangle^2, \quad (3.3.2)$$

mais elle est moins restrictive, ce qui la rend moins utile pour des fins de minimisation (nous risquons de contredire la relation de Schrödinger-Robertson). La relation de Heisenberg nous donne dans notre cas pour le commutateur $[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\theta$,

$$\Delta x_1 \Delta x_2 \geq \frac{\theta}{2}. \quad (3.3.3)$$

Pourquoi vouloir minimiser la relation de Schrödinger-Robertson ? Deux raisons peuvent être prises en compte :

1. La première est une raison un peu plus heuristique. Il s'agit de faire en sorte que nous rendrons notre système le plus "classique" possible. En effet, bien que notre monde soit régi par la mécanique quantique microscopiquement, nous observons dans notre monde macroscopique une physique composée de quantités et concepts "classiques", qui, doivent se refléter dans le

3.3. CONSTRUCTION DE LA REPRÉSENTATION $|\vec{X}, \theta\rangle$ PAR LA RELATION DE SCHRÖDINGER-ROBERTSON

monde quantique par l'existence d'observables. Bien que souvent, nous utilisons le fait que $\hbar \rightarrow 0$ pour atteindre la limite classique, cette approche ignore que $\hbar$ est fondamentalement une constante finie. À la place, nous pouvons tenter de minimiser les états, ce qui les rend le plus "classique" possibles, sans ignorer le fait que nous avons une valeur finie pour $\hbar$.

2. La deuxième raison, qui est aussi la raison principale pour laquelle nous avons choisi cette approche, se trouve dans le fait que des états minimisant la relation d'incertitude peuvent être représentés par des états cohérents donnés sur un espace de Fock donnés par,

$$|\mathcal{Z}\rangle = e^{-\mathcal{Z}\bar{a}} e^{\mathcal{Z}a^\dagger} |0\rangle, \quad (3.3.4)$$

avec $\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(\hat{x}_1 + i\hat{x}_2)$ et $\mathcal{Z} = \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(x_1 + ix_2)$. Ces états de Fock nous permettent ainsi d'avoir un ensemble surcomplet d'états sur l'espace de Hilbert, ce qui remplit bien une des conditions que nous recherchons. [3] [12]

Ainsi, nous pouvons rappeler des résultats qui se trouvent dans le papier suivant [13], qui nous donnent une équation que doivent satisfaire les états $|\psi\rangle$ minimisant la relation de Schrödinger-Robertson. Pour des opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$, nous avons,

$$\left((\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle) - \lambda (\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle) \right) |\psi\rangle = 0, \quad (3.3.5)$$

avec λ un paramètre (possiblement complexe) donné par les relations suivantes,

$$\lambda = \frac{\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)(\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle) \rangle}{(\Delta B)^2} = \frac{(\Delta A)^2}{\langle (\hat{A} - \langle \hat{A} \rangle)(\hat{B} - \langle \hat{B} \rangle) \rangle}. \quad (3.3.6)$$

Nous rappelons que la valeur moyenne d'une observable est donnée par (l'indice en ψ est optionnel et sera la plupart du temps implicite dans notre développement),

$$\langle \hat{O} \rangle_\psi = \frac{\langle \psi | \hat{O} | \psi \rangle}{\langle \psi | \psi \rangle}, \quad (3.3.7)$$

et son écart-type par $\Delta \hat{O}$ par

$$(\Delta \hat{O})^2 = \langle (\hat{O} - \langle \hat{O} \rangle)^2 \rangle. \quad (3.3.8)$$

Revenons à notre cas où $\hat{A} = \hat{x}_1$ et $\hat{B} = \hat{x}_2$, ce qui nous donne,

$$(\hat{x}_1 - \lambda \hat{x}_2) |\psi\rangle = (\langle \hat{x}_1 \rangle - \lambda \langle \hat{x}_2 \rangle) |\psi\rangle, \quad (3.3.9)$$

avec,

$$\lambda = \frac{\langle (\hat{x}_1 - \langle \hat{x}_1 \rangle)(\hat{x}_2 - \langle \hat{x}_2 \rangle) \rangle}{(\Delta x_2)^2} = \frac{(\Delta x_1)^2}{\langle (\hat{x}_1 - \langle \hat{x}_1 \rangle)(\hat{x}_2 - \langle \hat{x}_2 \rangle) \rangle}. \quad (3.3.10)$$

Afin de résoudre cette équation, nous allons multiplier cette équation par $\langle \vec{p} |$,

$$\langle \vec{p} | (\hat{x}_1 - \lambda \hat{x}_2) |\psi\rangle = \langle \vec{p} | (\langle \hat{x}_1 \rangle - \lambda \langle \hat{x}_2 \rangle) |\psi\rangle, \quad (3.3.11)$$

ce qui nous donne,

$$\langle \vec{p} | \left(\hat{y}_1 - \frac{1}{2} \bar{\theta} \hat{p}_2 - \lambda (\hat{y}_2 + \frac{1}{2} \bar{\theta} \hat{p}_1) \right) | \psi \rangle = (\langle \hat{x}_1 \rangle - \lambda \langle \hat{x}_2 \rangle) \tilde{\psi}(\vec{p}), \quad (3.3.12)$$

et en utilisant les relations établies dans la section précédente et en notant $\bar{x}_i = \langle \hat{x}_i \rangle$ nous obtenons,

$$\frac{\partial}{\partial p_1} \tilde{\psi}(\vec{p}) + \frac{i}{2\hbar^2} \lambda \theta p_1 \tilde{\psi}(\vec{p}) + \frac{i}{\hbar} \bar{x}_1 \tilde{\psi}(\vec{p}) - \lambda \frac{\partial}{\partial p_2} \tilde{\psi}(\vec{p}) + \frac{i}{2\hbar^2} \theta p_2 \tilde{\psi}(\vec{p}) - \frac{i}{\hbar} \lambda \bar{x}_2 \tilde{\psi}(\vec{p}) = 0. \quad (3.3.13)$$

Afin de résoudre cette équation, nous allons imposer une condition supplémentaire : l'invariance sous les rotations autour de la position moyenne $\bar{x}_i$. Cette invariance permettra de poser que $\Delta x_1 = \Delta x_2$, ce qui permet de créer une sorte de sphère d'incertitude entourant la position moyenne. Comme nous n'avons ainsi plus de direction distinguée sous les rotations, ce qui a comme conséquence que nous n'avons plus de corrélation entre les différentes directions. Cela signifie que,

$$\{\langle \hat{x}_1 - \langle \hat{x}_1 \rangle, \hat{x}_2 - \langle \hat{x}_2 \rangle\} = 0. \quad (3.3.14)$$

Revenons à λ , qu'on peut écrire comme,

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\frac{1}{2} \{\langle \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle, \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle\} - \frac{1}{2} i \langle (-i) [\hat{A}, \hat{B}] \rangle}{(\Delta B)^2} \\ &= \frac{(\Delta A)^2}{\{\frac{1}{2} \langle \hat{A} - \langle \hat{A} \rangle, \hat{B} - \langle \hat{B} \rangle\} + \frac{1}{2} i \langle (-i) [\hat{A}, \hat{B}] \rangle}. \end{aligned} \quad (3.3.15)$$

Ce qui nous donne dans le cas des opérateurs $\hat{x}_i$,

$$\lambda = -\frac{\frac{1}{2} i \theta}{(\Delta x_2)^2} = \frac{(\Delta x_1)^2}{\frac{1}{2} i \theta}. \quad (3.3.16)$$

Comme nous savons que $\Delta x_1 = \Delta x_2$, les seules valeurs possibles pour λ est $\lambda = \pm i$ qu'on peut aussi écrire comme $\lambda = i\eta$ avec $\eta = \pm 1$. Ainsi, nous pouvons écrire plus facilement (3.3.13),

$$\frac{\partial}{\partial p_1} \tilde{\psi}(\vec{p}) + \frac{1}{2\hbar^2} \eta \theta p_1 \tilde{\psi}(\vec{p}) + \frac{i}{\hbar} \bar{x}_1 \tilde{\psi}(\vec{p}) - i\eta \left(\frac{\partial}{\partial p_2} \tilde{\psi}(\vec{p}) + \frac{1}{2\hbar^2} \eta \theta p_2 \tilde{\psi}(\vec{p}) + \frac{i}{\hbar} \bar{x}_2 \tilde{\psi}(\vec{p}) \right) = 0. \quad (3.3.17)$$

En supposant une solution du type $\tilde{\psi}(\vec{p}) = \tilde{\psi}_1(\vec{p}) \tilde{\psi}_2(\vec{p})$, il est facile de voir que nous obtenons une solution du type,

$$\begin{aligned} \tilde{\psi}(\vec{p}) &= N (e^{-\frac{i}{\hbar} \bar{x}_1 p_1} e^{-\frac{\eta \theta}{4\hbar^2} p_1^2}) (e^{-\frac{i}{\hbar} \bar{x}_2 p_2} e^{-\frac{\eta \theta}{4\hbar^2} p_2^2}) \\ &= N e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot \vec{p}} e^{-\frac{\eta \theta}{4\hbar^2} \vec{p}^2}, \end{aligned} \quad (3.3.18)$$

avec N , le facteur de normalisation. Afin d'avoir un facteur de normalisation fini, nous voyons que nous devons avoir $\eta \theta < 0$, ce qui nous permet d'absorber η à l'intérieur de θ afin que nous ayons toujours $\theta > 0$. Nous voyons que la quantité dépend de $\vec{p}$, de $\vec{x}$ et de θ . Comme $\tilde{\psi}(\vec{p})$ s'écrit $\langle \vec{p} | \psi \rangle$,

3.3. CONSTRUCTION DE LA REPRÉSENTATION $|\vec{x}, \theta\rangle$ PAR LA RELATION DE SCHRÖDINGER-ROBERTSON

nous en déduisons que l'entièreté de l'information sur $\vec{x}$ et de θ doit se trouver dans $|\psi\rangle$. Nous pouvons ainsi définir l'état $|\vec{x}, \theta\rangle$, dont nous définirons l'espérance comme,

$$\frac{\langle \vec{x}, \theta | \hat{x}_i | \vec{x}, \theta \rangle}{\langle \vec{x}, \theta | \vec{x}, \theta \rangle} = x_i, \quad (3.3.19)$$

ce qui nous permet d'écrire,

$$\langle \vec{p} | \vec{x}, \theta \rangle = N e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot \vec{p}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} \vec{p}^2}. \quad (3.3.20)$$

Nous allons choisir notre facteur de normalisation en comparant l'expression précédente à (3.2.9). Nous aimerons ainsi que les deux expressions coïncident lorsqu'on tend vers la limite commutative $\theta = 0$; nous pouvons donc choisir le facteur de normalisation tel que $N = \frac{1}{2\pi\hbar}$, ce qui nous donne bien :

$$\langle \vec{p} | \vec{x}, \theta \rangle = \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot \vec{p}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} \vec{p}^2}. \quad (3.3.21)$$

Testons ainsi cette normalisation avec,

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \theta | \vec{x}', \theta \rangle &= \int d^2 \vec{p} \langle \vec{x}, \theta | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{x}', \theta \rangle \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int d^2 \vec{p} e^{-\frac{i}{\hbar} (\vec{x} - \vec{x}') \cdot \vec{p}} e^{-\frac{\theta}{2\hbar^2} \vec{p}^2}. \end{aligned} \quad (3.3.22)$$

Si nous tendons θ vers $\theta = 0$, nous obtenons,

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int d^2 \vec{p} e^{-\frac{i}{\hbar} (\vec{x}' - \vec{x}) \cdot \vec{p}} \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int d^2 \vec{p} e^{-\frac{i}{\hbar} (\vec{x}' - \vec{x}) \cdot \vec{p}} \\ &= \delta(\vec{x}' - \vec{x}), \end{aligned} \quad (3.3.23)$$

ce qui correspond à notre attente. Ainsi, le cas général est donné par (dans le cas $\theta \neq 0$),

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \theta | \vec{x}', \theta \rangle &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int d^2 \vec{p} e^{-\frac{i}{\hbar} (\vec{x}' - \vec{x}) \cdot \vec{p}} e^{-\frac{\theta}{2\hbar^2} \vec{p}^2} \\ &= \frac{1}{2\pi\theta} e^{-\frac{1}{2\theta} (\vec{x}' - \vec{x})^2}. \end{aligned} \quad (3.3.24)$$

Ainsi, nous avons pu construire notre représentation en termes des états $|\vec{x}, \theta\rangle$, sans pour autant contredire ce que nous avons déjà défini avant; nous retrouvons $|\vec{y}\rangle$ dans la limite commutative $\theta = 0$, les états forment une base surcomplète grâce à la saturation des états $|\vec{x}, \theta\rangle$ et finalement les états $|\vec{x}, \theta\rangle$ contiennent bien toute l'information nécessaire.

Avant de continuer, regardons la relation (3.3.24). Comme nous constatons, la relation diminue le pic obtenu par une fonction de Dirac, à une simple courbe Gaussienne. Cette courbe induit donc un floutage que nous avons sur notre état; contrairement à la certitude que nous avons avec nos états $|\vec{y}\rangle$, nous observons ainsi une distribution de probabilité plus lisse et plus étendue. Cette courbe s'aplatit au fur et à mesure que nous augmentons la valeur de θ (nous pouvons aussi parler

d'augmentation de l'intensité du champ magnétique conjugué). Nous pouvons interpréter cela en quelque sorte comme un envahissement des coordonnées de configuration par les coordonnées de conjugaison. En effet, nous avons la confirmation en observant la définition des opérateurs $\hat{x}$ en (3.2.2). De plus, il s'agit une manifestation de la non commutativité par laquelle nous avons construit notre système. Cette non commutativité nous posera quelques difficultés dans la suite du mémoire : en effet, il est difficile de pouvoir définir des domaines bornés dans le plan non commutatif comme dans le cas commutatif. Avant de discuter cette question, tentons de trouver quelques propriétés de cette représentation, afin de pouvoir nous attaquer plus facilement à des exemples physiques concrets.

3.4 Quelques propriétés de la représentation $|\vec{x}, \theta\rangle$

3.4.1 Éléments de matrice d'opérateurs selon $|\vec{x}, \theta\rangle$

Chaque état $|\vec{x}, \theta\rangle$ se peut décomposer par rapport à la base $|\vec{p}\rangle$ de la façon suivante

$$|\vec{x}, \theta\rangle = \int d^2\vec{p} |\vec{p}\rangle \langle \vec{p} | \vec{x}, \theta \rangle. \quad (3.4.1)$$

Grâce à cette décomposition, nous pouvons calculer quelques résultats divers dont les calculs ont été placés en annexe B, afin de garder de la visibilité dans le texte,

$$\langle \vec{x}, \theta | \hat{x}_i | \vec{x}', \theta \rangle = \frac{1}{2\pi\theta} \left(\frac{(x_i + x'_i)}{2} - i\epsilon_{ij} \frac{(x_j - x'_j)}{2} \right) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x} - \vec{x}')^2}. \quad (3.4.2)$$

Ceci nous permet de confirmer le résultat sur la valeur moyenne de $\hat{x}_i$,

$$\langle \vec{x}, \theta | \hat{x}_i | \vec{x}, \theta \rangle = \frac{1}{2\pi\theta} \left(\frac{1}{2}(x_i + x_i) - \epsilon_{ij} \frac{i}{2}(x_j - x_j) \right) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x} - \vec{x})^2} = \frac{1}{2\pi\theta} x_i. \quad (3.4.3)$$

Ce résultat est particulièrement utile afin de calculer les prochains résultats :

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \theta | \hat{x}_i^2 | \vec{x}', \theta \rangle &= \frac{1}{4\pi\theta} \left(\theta + \frac{(x'_i - x_i)^2}{2} + 2x_i x'_i - (\epsilon_{ij})^2 \frac{(x'_j - x_j)^2}{2} \right. \\ &\quad \left. - \epsilon_{ij}(x_j - x'_j)(x_i + x'_i) \right) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}' - \vec{x})^2}. \end{aligned} \quad (3.4.4)$$

$$\langle \vec{x}, \theta | \hat{p}_i | \vec{x}', \theta \rangle = i \frac{\hbar}{\theta} (x_i - x'_i) \frac{1}{2\pi\theta} e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x} - \vec{x}')^2}, \quad (3.4.5)$$

$$\langle \vec{x}, \theta | \hat{p}_i^2 | \vec{x}', \theta \rangle = \frac{\hbar^2}{\theta} \left(1 - \frac{1}{\theta} (x_i - x'_i)^2 \right) \frac{1}{2\pi\theta} e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x} - \vec{x}')^2}. \quad (3.4.6)$$

Dans les équations ci-dessus, l'indice i n'est pas sommé, nous pouvons aussi retrouver le résultat lorsque nous sommions l'indice i :

$$\langle \vec{x}, \theta | \hat{x}^2 | \vec{x}', \theta \rangle = \frac{1}{2\pi\theta} (\theta + \vec{x} \cdot \vec{x}' - i\vec{x} \times \vec{x}') e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}' - \vec{x})^2}, \quad (3.4.7)$$

$$\langle \vec{x}, \theta | \hat{p}^2 | \vec{x}', \theta \rangle = 2 \frac{\hbar^2}{\theta} \left(1 - \frac{1}{2\theta} (\vec{x} - \vec{x}')^2 \right) \frac{1}{2\pi\theta} e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x} - \vec{x}')^2}. \quad (3.4.8)$$

3.4.2 La relation de complétude et le *-produit

Nous avons pu voir dans la section 3.3 que nous n'avons pas pu retrouver la relation d'orthogonalité que nous connaissons par exemple de $|\vec{y}\rangle$ ou $|\vec{p}\rangle$. Cependant, qu'en est-il de la relation de complétude ? Lors de la construction de la représentation $|\vec{x}, \theta\rangle$, nous avons stipulé que nous obtenons par la minimisation de la relation d'incertitude un ensemble de vecteurs sur-complet sur l'espace de Hilbert, ce qui nous indique que notre relation de complétude n'est plus valable. Il suffit de tester si $\int d^2\vec{x} |\vec{x}, \theta\rangle \langle \vec{x}, \theta|$ correspond à l'opérateur identité. Nous voyons que,

$$\int d^2\vec{x} \langle \vec{p}|\vec{x}, \theta\rangle \langle \vec{x}, \theta|\vec{p}'\rangle = \int d^2\vec{x} \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{x}\cdot(\vec{p}-\vec{p}')} e^{-\frac{\theta}{2\hbar^2}\vec{p}^2} \neq \delta(\vec{p}-\vec{p}'), \quad (3.4.9)$$

ce qui est bien différent du delta de Dirac $\delta(\vec{p}-\vec{p}')$ qu'on aurait dû obtenir afin de pouvoir satisfaire la relation de complétude. En effet, il y a à nouveau un effet de brouillage qui intervient dans nos équations. Cependant, dans l'usage habituel de la mécanique classique, la relation de complétude se révèle souvent utile, puisque cela nous donne la capacité de faire apparaître la représentation correspondante au milieu d'une expression (comme nous le faisons souvent avec $\int d^2\vec{p} \langle \vec{p}|\vec{p}\rangle$). Ce problème peut être réglé avec ce qu'on appelle le *-produit, aussi appelé le "star-product". Il s'utilise de la manière suivante :

$$f(x) *_x g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{\theta}{2}\right)^n \frac{\partial^n f(x)}{\partial x^n} \frac{\partial^n g(x)}{\partial x^n}, \quad (3.4.10)$$

ce qui peut être aussi écrit comme,

$$*_x = e^{\frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x}}. \quad (3.4.11)$$

Ceci nous permet aussi de définir le *-produit multivarié,

$$*_{\vec{x}} = e^{\frac{\theta}{2} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}}}. \quad (3.4.12)$$

Ce produit peut effectivement nous donner une relation de complétude valable, qui sera donnée par,

$$\int d^2\vec{x} |\vec{x}, \theta\rangle *_x \langle \vec{x}, \theta| = \mathbb{1}. \quad (3.4.13)$$

Nous le montrons en fonction de $|\vec{p}\rangle$:

$$\begin{aligned} \int d^2\vec{x} \langle \vec{p}|\vec{x}, \theta\rangle *_x \langle \vec{x}, \theta|\vec{p}'\rangle &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{x} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{x}\cdot\vec{p}} e^{\frac{\theta}{2} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{x}}} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{x}\cdot\vec{p}'} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}(\vec{p}^2 + \vec{p}'^2)} \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{x} \prod_{i=1,2} (e^{-\frac{i}{\hbar}x_i p_i} e^{\frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}} e^{\frac{i}{\hbar}x_i p'_i} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}(p_i^2 + p_i'^2)}) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{x} \prod_{i=1,2} (e^{-\frac{i}{\hbar}x_i p_i} e^{\frac{\theta}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i}} e^{\frac{i}{\hbar}x_i p'_i} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}(p_i^2 + p_i'^2)}) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{x} \prod_{i=1,2} \left(\sum_n \left(\frac{\theta}{2}\right)^n \frac{\partial^n}{\partial x_i^n} e^{-\frac{i}{\hbar}x_i p_i} \frac{\partial^n}{\partial x_i^n} e^{\frac{i}{\hbar}x_i p'_i} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}(p_i^2 + p_i'^2)} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{x} \prod_{i=1,2} \left(\sum_n \left(\frac{\theta}{2}\right)^n \left(-\frac{i}{\hbar}p_i\right)^n \left(\frac{i}{\hbar}p'_i\right)^n e^{-\frac{i}{\hbar}x_i(p_i - p'_i)} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}(p_i^2 + p_i'^2)} \right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{x} \prod_{i=1,2} (e^{\frac{\theta}{4\hbar^2} 2p_i p'_i} e^{-\frac{i}{\hbar} x_i (p_i - p'_i)} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (p_i^2 + p'^2_i)}) \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{x} \prod_{i=1,2} (e^{-\frac{i}{\hbar} x_i (p_i - p'_i)} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (p_i - p'_i)^2}) \\
&= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{x} (e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot (\vec{p} - \vec{p}')} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (\vec{p} - \vec{p}')^2}) \\
&= \delta(\vec{p} - \vec{p}'), \tag{3.4.14}
\end{aligned}$$

où nous avons justifié la dernière ligne par le fait que si nous avons une fonction $f(x)$ telle que $f(0) = 1$, nous avons, pour une fonction $g(x)$ quelconque, que $\int dx f(x) g(x) \delta(x) = f(0)g(0) = g(0)$. Nous avons donc prouvé notre résultat en (3.4.13). Ce résultat nous permet de représenter la fonction d'onde exprimée en fonction de l'espace de configuration, qui sont écrites comme,

$$\psi_\theta(\vec{x}) = \int d^2\vec{p} \langle \vec{x}, \theta | \vec{p} \rangle \tilde{\psi}(\vec{p}), \quad \tilde{\psi}(\vec{p}) = \int d^2\vec{x} \langle \vec{p} | \vec{x}, \theta \rangle *_x \psi_\theta(\vec{x}), \tag{3.4.15}$$

où nous avons donc,

$$|\psi\rangle = \int d^2\vec{x} |\vec{x}, \theta\rangle *_x \psi_\theta(\vec{x}), \quad \psi_\theta(\vec{x}) = \langle \vec{x}, \theta | \psi \rangle. \tag{3.4.16}$$

Nous notons que dans la limite commutative le $*$ -produit redevient un simple produit, et les résultats ci-dessus reproduisent bien les résultats de la représentation canonique. De plus, nous allons citer des propriétés qui seront utiles par la suite, que nous allons cependant démontrer en annexe C,

$$[|\vec{x}, \theta\rangle *_x \langle \vec{x}, \theta |, \hat{p}_i] = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} (|\vec{x}, \theta\rangle *_x \langle \vec{x}, \theta |), \tag{3.4.17}$$

$$[|\vec{x}, \theta\rangle *_x \langle \vec{x}, \theta |, \hat{\vec{p}}^2] = -i\hbar \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot (|\vec{x}, \theta\rangle *_x (-i\hbar \vec{\nabla}_{\vec{x}}) \langle \vec{x}, \theta |), \tag{3.4.18}$$

$$[|\vec{x}, \theta\rangle *_x \langle \vec{x}, \theta |, \hat{x}_i] = -\frac{i}{2} \theta \epsilon_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (|\vec{x}, \theta\rangle *_x \langle \vec{x}, \theta |). \tag{3.4.19}$$

3.5 La représentation $|\vec{x}, \theta\rangle$ sous forme d'états cohérents

Nous avons affirmé lors de la construction des états non commutatifs, que la saturation de la relation de commutation implique que nous pouvons écrire les états $|\vec{x}, \theta\rangle$ comme des états cohérents, tel que nous pouvons l'apercevoir dans l'expression (3.3.4). Avant de pouvoir construire ces états, nous allons faire quelques rappels.

3.5.1 Rappels sur les états cohérents canoniques

À la base des états cohérents se trouve une algèbre de Fock et un espace de Fock, qui sont respectivement donnés par :

$$[\hat{a}, \hat{a}^\dagger] = 1, \tag{3.5.1}$$

et,

$$\hat{a}|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle, \quad \hat{a}^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle, \quad (3.5.2)$$

pour des naturels n . Ils vérifient les propriétés d'orthogonalité et de complétude :

$$\langle m|n\rangle = \delta_{mn}, \quad \sum_{n=0}^{\infty} |n\rangle \langle n| = \mathbf{1}. \quad (3.5.3)$$

Nous pouvons construire à partir de l'état fondamental $|0\rangle$ tous les états $|n\rangle$, tel que,

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}} (\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle. \quad (3.5.4)$$

Par conséquent, définissons le scalaire complexe $z = x_1 + ix_2$, tel que nous obtenons l'opérateur de déplacement, qui est par ailleurs unitaire,

$$\hat{D}(z, \bar{z}) = e^{z\hat{a}^\dagger - \bar{z}\hat{a}}, \quad (3.5.5)$$

qui nous permet de définir nos états cohérents canoniques par

$$|z\rangle = \hat{D}(z, \bar{z}) |0\rangle. \quad (3.5.6)$$

En utilisant la formule de Baker–Campbell–Hausdorff (BCH), pour deux opérateurs $\hat{A}$ et $\hat{B}$ commutant avec leur commutateur $e^{\hat{A}}e^{\hat{B}} = e^{\hat{A}+\hat{B}+\frac{1}{2}[\hat{A},\hat{B}]}$, nous pouvons écrire,

$$|z\rangle = e^{z\hat{a}^\dagger - \bar{z}\hat{a}} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} e^{z\hat{a}^\dagger} |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (z\hat{a}^\dagger)^n |0\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n!}} z^n |n\rangle. \quad (3.5.7)$$

Cette expression des états cohérents nous donne les propriétés suivantes,

$$\hat{a}|z\rangle = z|z\rangle, \quad \langle z|z\rangle = 1, \quad \langle n|z\rangle = e^{-\frac{1}{2}|z|^2} \frac{1}{\sqrt{n!}} z^n. \quad (3.5.8)$$

Nous pouvons aussi exprimer la relation de complétude de l'espace de Fock en fonction de l'espace cohérent, tel que,

$$\int \frac{dz d\bar{z}}{2\pi} |z\rangle \langle z| = \mathbf{1}. \quad (3.5.9)$$

De plus nous pouvons donner une densité de probabilité par,

$$\rho_n(z, \bar{z}) = |\langle z|n\rangle|^2 = \frac{1}{n!} r^{2n} e^{-r^2}. \quad (3.5.10)$$

3.5.2 Les états cohérents pour la représentation non commutative

Ainsi, comme déjà annoncé lors de la section 3.3, lors de la saturation de la relation de commutation $[\hat{x}_1, \hat{x}_2] = i\theta\mathbf{1}$, nous pouvons obtenir une algèbre de Fock donnée par relation de commutation $[\hat{a}, \hat{a}^\dagger]$, nous donne ainsi,

$$\hat{a} = \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(\hat{x}_1 + i\hat{x}_2), \quad (3.5.11)$$

ce qui nous donne donc l'opérateur de déplacement suivant,

$$\hat{D}(\mathcal{Z}, \bar{\mathcal{Z}}) = e^{-\mathcal{Z}\bar{\mathcal{Z}}} e^{\mathcal{Z}\hat{a}^\dagger}, \quad (3.5.12)$$

avec $\mathcal{Z} = \frac{1}{\sqrt{2\theta}}(x_1 + ix_2)$. Nous pouvons ainsi donner notre état cohérent par,

$$|\mathcal{Z}\rangle = \hat{D}(\mathcal{Z}, \bar{\mathcal{Z}}) |0\rangle. \quad (3.5.13)$$

Il nous donne donc bien,

$$\hat{a} |\mathcal{Z}\rangle = \mathcal{Z} |\mathcal{Z}\rangle. \quad (3.5.14)$$

Cependant, nous pouvons le constater que nous avons aussi,

$$(\hat{x}_1 + i\hat{x}_2) |\mathcal{Z}\rangle = (x_1 + ix_2) |\mathcal{Z}\rangle. \quad (3.5.15)$$

Observant que nous n'avons pas de dépendance en θ dans l'expression précédente, nous pouvons aussi définir de nouveaux opérateurs d'échelle, donnés par,

$$\hat{b} = \hat{x}_1 + i\hat{x}_2 = \sqrt{2\theta}\hat{a}, \quad (3.5.16)$$

qui vérifient donc,

$$[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 2\theta. \quad (3.5.17)$$

En définissant $z = x_1 + ix_2 = 2\theta\mathcal{Z}$, nous avons,

$$\hat{b} |z\rangle = z |z\rangle. \quad (3.5.18)$$

Cette représentation est à mettre sur le même pied que la représentation $|\vec{x}, \theta\rangle$ comme elle décrit le même espace. De plus, $|z\rangle$ contient la même information que $|\vec{x}, \theta\rangle$, ce qui nous permet d'écrire,

$$|z, \theta\rangle = |\vec{x}, \theta\rangle, \quad (3.5.19)$$

où nous avons explicité le terme θ dans $|z\rangle$. Ainsi, $|z\rangle$ partage toutes les mêmes propriétés, bien que certaines soient écrites autrement. Nous avons donc toujours la même normalisation,

$$\langle z, \theta | z, \theta \rangle = \frac{1}{2\pi\theta}. \quad (3.5.20)$$

Et de la même façon, nous pouvons écrire,

$$\langle z, \theta | z', \theta \rangle = \frac{1}{2\pi\theta} e^{-\frac{1}{2\theta}|z-z'|^2}. \quad (3.5.21)$$

Notons encore quelques propriétés des opérateurs de Fock $\hat{b}$, qui pourront être utiles plus tard.

Posons d'abord les notations suivantes, que nous définissons de façon analogue à (3.5.16),

$$p = p_1 + ip_2, \quad \bar{p} = p_1 - ip_2. \quad (3.5.22)$$

Par rapport à la représentation $|\vec{p}\rangle$, nous pouvons écrire,

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} | \hat{b} | \phi \rangle &= \langle \vec{p} | (\hat{x}_1 + i\hat{x}_2) | \phi \rangle \\ &= \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\theta}{2\hbar} p_2 + i \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\theta}{2\hbar} p_1 \right) \right) \tilde{\phi}(\vec{p}) \\ &= \left(i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial p_1} + i \frac{\partial}{\partial p_2} \right) + i \frac{\theta}{2\hbar} (p_1 + ip_2) \right) \tilde{\phi}(\vec{p}) \\ &= 2i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial \bar{p}} + \frac{\theta}{4\hbar^2} \bar{p} \right) \tilde{\phi}(\vec{p}), \end{aligned} \quad (3.5.23)$$

et,

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} | b^\dagger | \phi \rangle &= \langle \vec{p} | (\hat{x}_1 - i\hat{x}_2) | \phi \rangle \\ &= \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\theta}{2\hbar} p_2 - i \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\theta}{2\hbar} p_1 \right) \right) \tilde{\phi}(\vec{p}) \\ &= \left(i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial p_1} - i \frac{\partial}{\partial p_2} \right) - i \frac{\theta}{2\hbar} (p_1 - ip_2) \right) \tilde{\phi}(\vec{p}) \\ &= 2i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\theta}{4\hbar^2} \bar{p} \right) \tilde{\phi}(\vec{p}), \end{aligned} \quad (3.5.24)$$

où nous pouvons rappeler les expressions suivantes,

$$\langle \vec{y} | \hat{x}_1 | \psi \rangle = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p_1} - \frac{\theta}{2\hbar} p_2 \right) \psi(\vec{y}), \quad \langle \vec{y} | \hat{x}_2 | \psi \rangle = \left(i\hbar \frac{\partial}{\partial p_2} + \frac{\theta}{2\hbar} p_1 \right) \psi(\vec{y}). \quad (3.5.25)$$

3.6 L'équation de Schrödinger et conservation du courant de probabilité

À présent, nous allons nous intéresser à la dynamique d'un tel système non commutatif, qui sera principalement exprimée par l'équation de Schrödinger, qui reste dans un premier temps inchangée quant à sa forme. L'équation de Schrödinger pour un état quantique $|\psi, t\rangle$ est donnée par,

$$i\hbar \frac{d}{dt} |\psi, t\rangle = \hat{H} |\psi, t\rangle = \left(\frac{1}{2m} \hat{p}^2 + V_q(\hat{x}_i) \right) |\psi, t\rangle. \quad (3.6.1)$$

Nous avons défini $V_q(\hat{x}_i)$ comme $V_q(\hat{x}_i) = \frac{1}{2}(V(\hat{x}_i) + V(\hat{x}_i)^\dagger)$ (avec $V(x_i)$ le potentiel classique) afin de pouvoir être certain que l'Hamiltonien $\hat{H}$ sera bien hermitien. L'évolution temporelle de $|\psi, t\rangle$ est donnée par,

$$|\psi, t\rangle = e^{-\frac{i}{\hbar}(t-t_0)\hat{H}} |\psi, t_0\rangle, \quad (3.6.2)$$

qui possèdent donc la même normalisation,

$$\langle \psi, t | \psi, t \rangle = \langle \psi, t_0 | \psi, t_0 \rangle, \quad (3.6.3)$$

qu'on va supposer être égale à l'unité dans notre discussion. Bien que l'équation de Schrödinger reste inchangée par rapport aux états, regardons la forme de l'équation si nous considérons les fonctions d'onde $\langle \vec{x}, \theta | \psi, t \rangle = \psi_\theta(\vec{x}, t)$. Multiplions pour cela l'équation de Schrödinger (3.6.1) par la gauche par $\langle \vec{x}, \theta |$,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi_\theta(\vec{x}, t) = \langle \vec{x}, \theta | \hat{H} | \psi, t \rangle = \langle \vec{x}, \theta | \left(\frac{1}{2m} \hat{p}^2 + V_q(\hat{x}_i) \right) | \psi, t \rangle. \quad (3.6.4)$$

En rajoutant des facteurs $|\vec{x}, \theta\rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta|$ à l'intérieur, nous obtenons,

$$i\hbar \frac{d}{dt} \psi_\theta(\vec{x}, t) = \int d^2 \vec{x}' \left(\frac{1}{2m} \langle \vec{x}, \theta | \hat{p}^2 | \vec{x}', \theta \rangle *_{\vec{x}'} \psi_\theta(\vec{x}', t) + \langle \vec{x}, \theta | V_q(\hat{x}_i) | \vec{x}', \theta \rangle *_{\vec{x}'} \psi_\theta(\vec{x}', t) \right). \quad (3.6.5)$$

Cette équation n'est certes pas la plus simple d'un point de vue calculatoire, cependant, nous connaissons déjà l'expression de $\langle \vec{x}, \theta | \hat{p}^2 | \vec{x}', \theta \rangle$ grâce (3.4.8) et pour des cas simples de $V_q(\hat{x}_i)$, il est possible de calculer certains cas explicites.

Un autre but de cette section est aussi de rétablir la relation de continuité. En effet, pour une fonction d'onde sur l'espace de configuration canonique $\psi(\vec{y}, t) = \langle \vec{y} | \psi, t \rangle$, nous avons la densité de probabilité donnée par $\rho(\vec{y}, t) = \psi^*(\vec{y}, t) \psi(\vec{y}, t)$, qui vérifie donc

$$\int d^2 \vec{y} \rho(\vec{y}, t) = 1, \quad (3.6.6)$$

et le courant de probabilité donné par $\vec{J}(\vec{y}, t) = \frac{i\hbar}{2m} (\nabla_{\vec{y}}(\psi^*(\vec{y}, t))\psi(\vec{y}, t) - \psi^*(\vec{y}, t)\nabla_{\vec{y}}(\psi(\vec{y}, t)))$ qui sont reliés par la relation de continuité,

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (3.6.7)$$

à condition que $\theta = 0$. En effet, la présence de l'opérateur $\hat{x}$ ne permet pas d'obtenir la relation de continuité ci-dessus. Pour cela, nous aimerions trouver une relation de continuité pour l'espace de configuration non commutatif en $\vec{x}$ à la place. Définissons ainsi la densité d'une manière similaire,

$$1 = \langle \psi, t | \psi, t \rangle = \int d^2 \vec{x} \langle \psi, t | \vec{x}, \theta \rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta | \psi, t \rangle. \quad (3.6.8)$$

Nous pouvons donc définir notre densité de probabilité par,

$$\rho(\vec{x}, t) = \psi^*(\vec{x}, t) *_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, t). \quad (3.6.9)$$

Nous allons tenter de commencer par calculer $\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t)$ et voir si nous pouvons trouver une expression qui nous permettra de calculer $J(\vec{x}, t)$.

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t) = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi^*(\vec{x}, t) *_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, t) + \psi^*(\vec{x}, t) *_{\vec{x}} (i\hbar) \frac{\partial}{\partial t} \psi(\vec{x}, t). \quad (3.6.10)$$

En utilisant l'équation de Schrödinger et son dual donné par $-i\hbar \langle \psi, t | \frac{\partial}{\partial t} = \langle \psi, t | \hat{H}$, nous obtenons,

$$\begin{aligned}
i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t) &= -\langle \psi, t | \hat{H} | \vec{x}, \theta \rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta | \psi, t \rangle + \langle \psi, t | \vec{x}, \theta \rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta | \hat{H} | \psi, t \rangle \\
&= \langle \psi, t | [|\vec{x}, \theta\rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta|, \hat{H}] | \psi, t \rangle \\
&= \langle \psi, t | [|\vec{x}, \theta\rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta|, \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + V_q(\hat{x}_i)] | \psi, t \rangle,
\end{aligned} \tag{3.6.11}$$

ce qui nous donne la relation,

$$-\frac{\partial}{\partial t} \rho(\vec{x}, t) = \frac{i}{\hbar} \langle \psi, t | [|\vec{x}, \theta\rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta|, \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + V_q(\hat{x}_i)] | \psi, t \rangle. \tag{3.6.12}$$

Notre deuxième étape est d'extraire $\vec{J}$ de la partie droite de l'équation. Nous constatons que nous avons calculé deux contributions pour $\vec{J}$, une contribution cinétique donnée par $\hat{p}^2$ et une contribution de potentiel donnée par $V_q(\hat{x}_i)$.

— Commençons par calculer la contribution cinétique $\vec{J}_K$ de $\vec{J}$. Nous avons,

$$\frac{i}{\hbar} \langle \psi, t | [|\vec{x}, \theta\rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta|, \frac{1}{2m} \hat{p}^2] | \psi, t \rangle. \tag{3.6.13}$$

Nous pouvons utiliser la relation (3.4.18), afin de trouver,

$$\begin{aligned}
&= -\frac{i}{\hbar} \langle \psi, t | \frac{i\hbar}{2m} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot (|\vec{x}, \theta\rangle *_{\vec{x}} (-i\hbar \vec{\nabla}_{\vec{x}}) \langle \vec{x}, \theta|) | \psi, t \rangle \\
&= -\frac{i\hbar}{2m} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot (\psi^*(\vec{x}, t) *_{\vec{x}} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, t)).
\end{aligned} \tag{3.6.14}$$

Ceci nous permet de définir $\vec{J}_K$ comme,

$$\vec{J}_K(\vec{x}, \theta) = -\frac{i\hbar}{2m} \psi^*(\vec{x}, t) *_{\vec{x}} \vec{\nabla}_{\vec{x}} \psi(\vec{x}, t). \tag{3.6.15}$$

— Maintenant, calculons la contribution due au potentiel V_q .

$$\langle \psi, t | [|\vec{x}, \theta\rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta|, V_q(\hat{x}_i)] | \psi, t \rangle. \tag{3.6.16}$$

Le problème de cette expression est que le potentiel peut prendre une forme quelconque, ce qui le rend difficile à analyser. Remarquons cependant que cette quantité est censée disparaître dans la limite commutative; il s'agit donc d'un terme intrinsèquement lié à la non commutativité de l'espace de configuration (dont dépend entièrement $V_q(\hat{x}_i)$). Il est difficile de trouver une expression qui est facilement lisible, c'est pour cela que nous allons définir $\vec{J}_V$ de la façon suivante²,

$$\langle \psi, t | [|\vec{x}, \theta\rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta|, V_q(\hat{x}_i)] | \psi, t \rangle = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\theta}{2\hbar} J_{V,i}(\vec{x}, t) \right). \tag{3.6.17}$$

2. Dans une note de J. Govaerts datant du 18 Mars 2020, il est indiqué qu'il est possible d'écrire la contribution de $\vec{J}_V(\vec{x}, t)$ sous forme d'une intégrale par contour donnée par $\frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\theta}{2\hbar} J_{V,i}(\vec{x}, t) \right) =$

$\oint_{C_0} \frac{du}{2i\pi} \frac{1}{u^2} \langle \psi, t | V_q \left(\hat{x}_i + u \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\theta}{2\hbar} \epsilon_{ji} |\vec{x}, \theta\rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta| \right) \right) | \psi, t \rangle.$

Finalement, ces deux contributions nous permettent d'écrire le courant de probabilité de la façon suivante,

$$\vec{J}(\vec{x}, t) = \vec{J}_K(\vec{x}, t) + \frac{\theta}{2\hbar} \vec{J}_V(\vec{x}, t), \quad (3.6.18)$$

ce qui nous permet d'écrire notre équation de continuité,

$$\vec{\nabla}_{\vec{x}} \left(\vec{J}_K(\vec{x}, t) + \frac{\theta}{2\hbar} \vec{J}_V(\vec{x}, t) \right) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (3.6.19)$$

Notons que nous avons volontairement exprimé le facteur θ devant $\vec{J}_V(\vec{x}, t)$ (à la place de l'absorber dans ce dernier), afin de mettre en évidence la contribution non commutative de l'équation de continuité.

3.7 Exemple : Le potentiel harmonique non commutatif

Maintenant, nous allons nous intéresser à un système particulier relativement simple avant de passer à la dernière partie du mémoire. Cet exemple nous montre comment la géométrie non commutative intervient dans le cas où nous utilisons un potentiel dépendant de $\hat{\vec{x}}$.

Nous allons considérer un système composé d'un potentiel harmonique dans l'espace des $\vec{x}$, donné par,

$$V_q(\hat{\vec{x}}) = \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{\vec{x}}^2. \quad (3.7.1)$$

l'Hamiltonien est ainsi donné par,

$$\hat{H} = \frac{1}{2m} \hat{p}^2 + \frac{1}{2} m \omega_0^2 \hat{\vec{x}}^2. \quad (3.7.2)$$

Nous allons résoudre ce problème (alias trouver le spectre d'énergie), en l'approchant de la même manière que pour un champ magnétique "normal". D'abord, écrivons les termes $\hat{x}_1^2$ et $\hat{x}_2^2$ explicitement en fonction de $\hat{\vec{p}}$ et $\hat{\vec{y}}$. Nous avons,

$$\hat{x}_1^2 = \hat{y}_1^2 - \frac{\theta}{\hbar} \hat{y}_1 \hat{p}_2 + \frac{\theta^2}{4\hbar^2} \hat{p}_2^2, \quad \hat{x}_2^2 = \hat{y}_2^2 + \frac{\theta}{\hbar} \hat{y}_2 \hat{p}_1 + \frac{\theta^2}{4\hbar^2} \hat{p}_1^2. \quad (3.7.3)$$

Ceci nous donne,

$$\hat{\vec{x}}^2 = \hat{y}_1^2 + \hat{y}_2^2 - \frac{\theta}{\hbar} (\hat{y}_1 \hat{p}_2 - \hat{y}_2 \hat{p}_1) + \frac{\theta^2}{4\hbar^2} (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2). \quad (3.7.4)$$

Et nous obtenons l'Hamiltonien,

$$\begin{aligned} \hat{H} &= \frac{1}{2m} (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) + \frac{1}{2} m \omega_0^2 (\hat{y}_1^2 + \hat{y}_2^2) - \frac{\theta}{\hbar} \frac{1}{2} m \omega_0^2 (\hat{y}_1 \hat{p}_2 - \hat{y}_2 \hat{p}_1) + \frac{m \omega_0^2 \theta^2}{8\hbar^2} (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) \\ &= \frac{1}{2M} (\hat{p}_1^2 + \hat{p}_2^2) + \frac{1}{2} M \Omega_0^2 (\hat{y}_1^2 + \hat{y}_2^2) - \frac{\theta}{2\hbar} M \Omega_0^2 (\hat{y}_1 \hat{p}_2 - \hat{y}_2 \hat{p}_1), \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

où nous avons fait le changement $\frac{1}{M} = \frac{1}{m} + \frac{m\omega_0^2\theta^2}{4\hbar^2}$ et $\frac{m}{M}\omega_0^2 = \Omega_0^2$. Nous constatons que l'Hamiltonien possède une forme similaire à (1.3.20), ce qui nous incite à écrire,

$$\left(\hat{H}_0 - \frac{\theta}{2\hbar} M \Omega_0^2 \hat{L}_z \right) |\phi\rangle = E |\phi\rangle. \quad (3.7.6)$$

Ainsi, nous pouvons définir nos opérateurs d'échelle par

$$\hat{a}_i = \sqrt{\frac{m\Omega_0}{2\hbar}} \left(\hat{y}_i + \frac{i}{m\Omega_0} \hat{p}_i \right), \quad (3.7.7)$$

et nos opérateurs d'échelle d'hélicité par,

$$\hat{a}_+ = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1 - i\hat{a}_2), \quad \hat{a}_- = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{a}_1 + i\hat{a}_2). \quad (3.7.8)$$

Nous pouvons reprendre les mêmes états qui diagonalisent l'Hamiltonien dans le cas magnétique classique, $|n_+, n_- \rangle$. En leur associant les opérateurs de nombre correspondants, nous pouvons écrire,

$$\hat{H} |\phi\rangle = \hbar\Omega_0(\hat{n}_+ + \hat{n}_- + 1) |\phi\rangle - \frac{\theta}{2} M \Omega_0^2 (\hat{n}_+ - \hat{n}_-) |\phi\rangle. \quad (3.7.9)$$

Nous obtenons donc un spectre d'énergie donnée par,

$$E_{n_+, n_-} = \hbar\Omega_0 \left(\left(1 - \frac{\theta}{2\hbar} M\right) n_+ + \left(1 + \frac{\theta}{2\hbar} M\right) n_- + 1 \right). \quad (3.7.10)$$

La forme du spectre d'énergie n'est pas si différente de celui trouvé lors de l'analyse du spectre d'énergie d'un champ magnétique, à la différence que nous devons redéfinir certaines quantités différemment. Cela peut sembler surprenant à première vue, puisque nous avons initialement tenté de faire apparaître un oscillateur harmonique. Cependant, comme déjà dans le cas du magnétisme normal, l'expression d'un oscillateur harmonique apparaît de façon naturelle dans l'Hamiltonien (indépendante de l'oscillateur harmonique défini à travers le potentiel V). Comme déjà dans la section 1.3, il sera difficile de résoudre l'équation de Schrödinger explicitement et donc de trouver la fonction d'onde $\psi_\theta(\vec{x}, t)$, nous restreindrons notre analyse sur le spectre de l'énergie.

Chapitre 4

Le puits infini dans une géométrie non commutative

Après avoir pu construire cette géométrie non commutative et la représentation $|\vec{x}, \theta\rangle$ qui va avec, nous avons pu réaliser qu'elles décrivent la même physique et qu'il s'agit juste d'une face alternative de la physique telle que donnée par la représentation commutative. Ensuite, nous avons pu nous intéresser à leurs propriétés, toujours en observant comment la non commutativité transforme nos quantités calculées. Bien que nous ayons pu travailler sur un exemple auparavant, nous allons nous intéresser à un autre cas particulier : le puits de potentiel infini.

Quelle est la particularité de cette approche ? Rappelons-nous comment nous définissons un puits infini dans le cas des coordonnées commutatives : nous choisissons un domaine D sur lequel nous supposons avoir un potentiel constant, tandis que sur le complément de ce domaine, nous définissons un potentiel qui possède une valeur infinie. Une conséquence de cette approche est que la fonction d'onde sera nulle sur le complément du domaine D . De plus, nous allons supposer que nous avons des conditions de continuité et de saut sur le bord de ce domaine. Voici donc le problème : nous pouvons déterminer avec certitude le bord du domaine sur un espace commutatif, ce que nous ne pouvons pas faire dans le cas non commutatif. On se rappelle, les états ne forment plus une relation d'orthogonalité aussi stricte et précise comme dans le cas commutatif avec $\langle \vec{y} | \vec{y}' \rangle = \delta(\vec{y} - \vec{y}')$, qui sont nécessaires afin de pouvoir définir les conditions de continuité sur les bords. A priori, il pourrait s'agir d'une tâche vaine voire impossible a priori, c'est pour cela que nous allons essayer de répondre à la question suivante : qu'est-ce qui caractérise un puits infini ? Ou plutôt : comment allons-nous généraliser le puits infini à une géométrie non commutative ? Cette section est principalement inspirée des notes [14][15][16][17] écrites par J. Govaerts dans le cadre de ce mémoire.

4.1 L'équation de Schrödinger définie sur plusieurs domaines distincts

Nous allons d'abord observer de plus près comment définir l'équation de Schrödinger sur plusieurs domaines. Nous allons simplifier notre discussion en prenant un système avec deux domaines distincts : le domaine D et son complément $\bar{D}$ donné par $\bar{D} \equiv \mathbb{R}^2 \setminus D$. Dénotons le projecteur général associé au domaine D par $\hat{P}$, qu'on va juste définir à travers les propriétés générales d'un projecteur,

4.1. L'ÉQUATION DE SCHRÖDINGER DÉFINIE SUR PLUSIEURS DOMAINES DISTINCTS

$$\hat{P} = \hat{P}^2, \quad \hat{P} = \hat{P}^\dagger, \quad (4.1.1)$$

ce qui le rend a priori indépendant d'une géométrie commutative ou non commutative. Maintenant, nous allons définir le projecteur $\hat{Q}$ sur l'espace $\bar{D}$, qui est simplement défini comme un complément à $\hat{P}$, tel que,

$$\hat{Q} = \mathbb{1} - \hat{P}, \quad \hat{P} = \mathbb{1} - \hat{Q}, \quad \hat{Q} + \hat{P} = \mathbb{1}. \quad (4.1.2)$$

Nous pouvons constater que ce projecteur respecte bien les propriétés (4.1.1) :

$$\hat{Q}^\dagger = (\mathbb{1} - \hat{P})^\dagger = \mathbb{1}^\dagger - \hat{P}^\dagger = \mathbb{1} - \hat{P} = \hat{Q}, \quad (4.1.3)$$

$$\hat{Q}^2 = (\mathbb{1} - \hat{P})^2 = \mathbb{1} - 2\hat{P} + \hat{P}^2 = \mathbb{1} - 2\hat{P} + \hat{P} = \mathbb{1} - \hat{P} = \hat{Q}. \quad (4.1.4)$$

De plus nous avons la propriété suivante,

$$\hat{P}\hat{Q} = \hat{P}(\mathbb{1} - \hat{P}) = \hat{P} - \hat{P}^2 = \hat{P} - \hat{P} = 0 (= \hat{Q}\hat{P}). \quad (4.1.5)$$

Nous allons à présent réécrire l'équation de Schrödinger d'une telle façon qu'elle dépende de l'opérateur $\hat{P}$, mais aussi afin qu'elle contienne les "conditions de bord" directement à l'intérieur d'elle. Maintenant, nous pouvons définir nos deux potentiels sur chaque domaine : sur le domaine D , nous avons le potentiel $V_{1,q}$ et sur le domaine complémentaire $\bar{D}$, nous avons le potentiel $V_{2,q}$. Cependant, afin de résoudre l'équation de Schrödinger, nous ne pouvons pas simplement superposer ces deux potentiels en un tel que nous avons le potentiel $V_q = V_{1,q} + V_{2,q}$. Nous allons désigner chaque potentiel associé à leur domaine avec le projecteur respectif :

$$V_q = V_{1,q}\hat{P} + V_{2,q}\hat{Q}. \quad (4.1.6)$$

Ensuite, nous pouvons aussi réécrire l'état $|\phi\rangle$, comme une combinaison de deux états tel que,

$$|\phi\rangle = (\hat{P} + \hat{Q})|\phi\rangle = \hat{Q}|\phi\rangle + \hat{P}|\phi\rangle, \quad (4.1.7)$$

où nous définissons,

$$\hat{P}|\phi_1\rangle = \hat{P}|\phi\rangle, \quad \hat{Q}|\phi_2\rangle = \hat{Q}|\phi\rangle, \quad (4.1.8)$$

tel que nous avons finalement,

$$|\phi\rangle = \hat{P}|\phi_1\rangle + \hat{Q}|\phi_2\rangle. \quad (4.1.9)$$

Écrivons l'équation de Schrödinger :

$$\left(\frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V_{1,q}(\hat{y})\hat{P} + V_{2,q}(\hat{y})\hat{Q}\right)|\phi\rangle = E|\phi\rangle, \quad (4.1.10)$$

Nous savons que les états de $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$ vérifient leur propre équation de Schrödinger données par :

$$\left(\frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V_{1,q}(\hat{y})\right)|\phi_1\rangle = E|\phi_1\rangle, \quad \left(\frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V_{2,q}(\hat{y})\right)|\phi_2\rangle = E|\phi_2\rangle. \quad (4.1.11)$$

Nous pouvons constater que les états $|\phi_1\rangle$ et $|\phi_2\rangle$ et même les deux potentiels sont aussi définis en dehors de leur domaine (c.-à-d. pas seulement sur le domaine restreint par l'opérateur $\hat{P}$ ou $\hat{Q}$). Ce qui nous intéresse principalement, c'est que les équations ci-dessus et l'équation (4.1.10) sont supposés concorder seulement sur leurs domaines respectifs. Ainsi, ce qui se passe en dehors ne nous intéresse pas et peut prendre n'importe quelle forme.

Ce qui nous permet de définir les deux opérateurs suivants :

$$\hat{H}_1 \equiv \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V_{1,q}(\hat{y}), \quad \hat{H}_2 \equiv \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + V_{2,q}(\hat{y}). \quad (4.1.12)$$

Maintenant, multiplions ces équations à droite par $\hat{P}$ ou $\hat{Q}$,

$$\hat{P}\hat{H}_1|\phi_1\rangle = E\hat{P}|\phi_1\rangle, \quad \hat{Q}\hat{H}_2|\phi_2\rangle = E\hat{Q}|\phi_2\rangle. \quad (4.1.13)$$

Notons que nous ne connaissons rien des relations de commutation entre les projecteurs et $\hat{H}_i$ pour l'instant ; par défaut, ils ne commutent pas. Ensuite, remplaçons (4.1.9) dans (4.1.10), ce qui nous donne,

$$\left(\frac{1}{2m}\hat{p}^2\hat{P}|\phi_1\rangle + \frac{1}{2m}\hat{p}^2\hat{Q}|\phi_2\rangle + V_{1,q}(\hat{y})\hat{P}|\phi_1\rangle + V_{2,q}(\hat{y})\hat{Q}|\phi_2\rangle\right) = E\hat{P}|\phi_1\rangle + E\hat{Q}|\phi_2\rangle, \quad (4.1.14)$$

et en simplifiant avec les $\hat{H}_i$,

$$(\hat{H}_1\hat{P}|\phi_1\rangle + \hat{H}_2\hat{Q}|\phi_2\rangle) = E\hat{P}|\phi_1\rangle + E\hat{Q}|\phi_2\rangle. \quad (4.1.15)$$

Finalement, si nous utilisons les équations (4.1.11) dans la précédente et en remplaçant $\hat{Q} = \mathbb{1} - \hat{P}$, nous obtenons,

$$\hat{H}_1\hat{P}|\phi_1\rangle - \hat{H}_2\hat{P}|\phi_2\rangle = \hat{P}\hat{H}_1|\phi_1\rangle - \hat{P}\hat{H}_2|\phi_2\rangle. \quad (4.1.16)$$

Nous obtenons donc la relation qui permet donc de donner les conditions sur les bords, qui peut s'écrire sous une forme compacte comme,

$$[\hat{H}_1, \hat{P}]|\phi_1\rangle = [\hat{H}_2, \hat{P}]|\phi_2\rangle. \quad (4.1.17)$$

4.2 Qu'est-ce qu'un puits infini ?

Maintenant que nous avons pu définir les conditions régissant la frontière des deux domaines, aussi appelées les conditions aux bords, nous pouvons tenter de créer un puits de potentiel non commutatif. Lorsque nous travaillons dans le cas commutatif, nous définissons habituellement le projecteur comme en (4.3.1), qui semble être le plus naturel à utiliser sur l'espace de configuration

(commutatif). Malheureusement, nous avons pu constater que ce projecteur ne fonctionne plus sur des coordonnées non commutatives ; c'est ici que nous faisons intervenir la force de la méthodique introduite dans la section précédente.

Nous constatons que la définition des projecteurs $\hat{P}$ et $\hat{Q}$ en (4.1.2) peut être faite sans devoir les associer à un domaine D particulier. En effet, nous avons principalement utilisé D pour donner une intuition à la démarche que l'on développait. Cela signifie que nous résolvons le plus gros problème : celui qui liait le domaine de projection à ses conditions le reliant à son domaine complémentaire, qui est dès lors bien formalisée par (4.1.17). Nous pouvons donc utiliser bien d'autres définitions de projecteurs.

Qu'en est-il du puits de potentiel infini ? Dans le cas commutatif, le puits infini est défini par un potentiel qui est constant (ou plutôt nul dans notre cas, comme nous pouvons définir un potentiel à une transformation de jauge près) sur un domaine D concerné et vaut $+\infty$ en dehors de ce domaine tel que,

$$V(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in D, \\ +\infty & \text{si } x \notin D. \end{cases} \quad (4.2.1)$$

Comme conséquence, nous avons l'annulation de la fonction d'onde $\phi(\vec{y})$ sur l'entière de D complémentaire de D . Dans ce cas, (4.1.17), nous donne la condition suivante¹

$$\left[\hat{p}^2, \hat{P} \right] |\phi_1\rangle = 0. \quad (4.2.3)$$

Ceci sera la condition qui définira notre puits de potentiel infini, pour deux raisons :

- Nous pouvons nous débarrasser de l'expression explicite du potentiel, qui possède en sa définition l'infini, ce que certains pourraient appeler une monstruosité. Nous transférons ainsi le rôle du potentiel vers celui du projecteur, qui remplit son rôle d'une façon plus propre, voire plus rigoureuse.
- Deuxièmement, rappelons juste qu'on appelle le puits de potentiel aussi la particule dans une boîte : en effet, le but original de ce système est d'observer ce qui se passe pour un système quantique duquel nous avons enlevé la possibilité de pratiquer un effet tunnel (ou autre effet qui implique une fonction d'onde non nulle dans une certaine zone définie). Le potentiel, ayant une valeur infinie, a été créé par nécessité afin de pouvoir créer une fonction d'onde nulle. Finalement, une particule dans une boîte est une particule qui possède uniquement la possibilité de se retrouver libre sur un domaine bien défini, ce qui nous est possible grâce à la condition (4.2.3).

Dorénavant, nous définissons notre potentiel infini grâce à un projecteur que nous pouvons ainsi définir en fonction du domaine souhaité. Cependant, dans la suite, nous n'allons pas tenter d'aller dans des définitions de projecteurs trop abstraites, notre but de départ est de rester au plus proche de ce que nous faisons dans le cas du puits de potentiel "classique" dans l'espace de configuration commutatif. Nous allons donc procéder comme avant : tenter de trouver un opérateur $\hat{P}_\theta$ qui prend en compte la non commutativité, et qui se transforme en $\hat{P}_0$ dans la limite commutative.

1. Dans le cas où nous avons des potentiels constants et finis sur les deux domaines, la condition est donnée par

$$\left[\hat{p}^2, \hat{P} \right] |\phi_1\rangle = \left[\hat{p}^2, \hat{P} \right] |\phi_2\rangle. \quad (4.2.2)$$

4.3 Le puits infini dans le cas commutatif

Nous savons que le potentiel décrivant ce système est discontinu : en effet, il sépare l'équation de Schrödinger sur plusieurs domaines, qu'on peut ainsi résoudre individuellement sur ces domaines. Il s'agit donc de projeter les états $|\psi\rangle$ sur les domaines en question par un opérateur de projection. Dans le cas commutatif, nous pouvons donc définir un projecteur sur un domaine D tel que,

$$\hat{P}_0 = \int_D d^2\vec{y} |\vec{y}\rangle \langle \vec{y}| = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{y} |\vec{y}\rangle \chi_0(\vec{y}) \langle \vec{y}|, \quad (4.3.1)$$

avec $\chi_0(\vec{y})$ la fonction caractéristique associée au domaine D , qui vaut l'unité lorsque $\vec{y}$ appartient à D et nulle dans le cas contraire. Nous constatons que l'opérateur est hermitien $\hat{P}_0 = \hat{P}_0^\dagger$ et, comme nous avons que $\chi_0(\vec{y}) = \chi_0(\vec{y})^2$, vérifie la propriété principale d'un projecteur,

$$\hat{P}_0 = \hat{P}_0^2. \quad (4.3.2)$$

Nous constatons deux problèmes à cette approche :

- La propriété $\hat{P}_0 = \hat{P}_0^2$ (4.3.2) est uniquement vérifiée dans le cas purement commutatif, nous ne pouvons donc généraliser $\hat{P}_0$ de façon naïve au cas non commutatif.
- Nous ne possédons pas de méthode générale afin de faire appliquer les conditions aux bords, telle que la condition de continuité et de saut pour la fonction d'onde $\phi(\vec{y})$ par exemple. De plus, nous ne savons pas si nous pouvons créer des bords bien définis dans le cas non commutatif.

Il nous est donc impossible de construire un projecteur dépendant de coordonnées non commutatives défini par,

$$\hat{P}_\theta = \int_D d^2\vec{x} |\vec{x}, \theta\rangle \langle \vec{x}, \theta| = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{x} |\vec{x}, \theta\rangle \chi_\theta(\vec{x}) \langle \vec{x}, \theta|. \quad (4.3.3)$$

Nous devons ainsi tenter une autre approche à ce problème, ce que nous allons faire de deux façons différentes.

4.4 Le projecteur $\hat{P}_0$ classique sur un espace non commutatif

Notre première tentative de construction d'un projecteur valable faisant intervenir les états $|\vec{x}, \theta\rangle$ comme en (4.3.3) a ainsi échoué. Cependant, comme déjà dit auparavant, nous n'avons pas la possibilité de définir un bord ∂D pour un domaine D non commutatif. Intuitivement, cela signifie que quelque part nous avons une limite floue sur un domaine sur $\vec{x}$. Ceci signifie que si nous repassons au commutatif correspondant, nous ne pouvons qu'obtenir un bord bien défini, "non-flou". Ainsi, cela signifie que nous sommes capables de construire un projecteur agissant sur la représentation non-commutative à partir du projecteur défini en (4.3.1). De cette manière, nous trouvons que $\hat{P}_\theta = \hat{P}_0$. Ceci peut s'avérer frustrant, puisque nous ne définissons pas de "nouvelle physique". Toutefois, cela nous permettra de comparer comment se comportent les fonctions d'ondes $\phi(\vec{x})$ en fonction de leur contrepartie commutative. L'approche reste tout aussi frugale, bien que la physique considérée est issue d'un environnement commutatif.

4.4.1 Changement de représentation de $\hat{\mathbb{P}}_0$

Pour exprimer le projecteur $\hat{\mathbb{P}}_0 = \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{y} |\vec{y}\rangle \chi_0(\vec{y}) \langle \vec{y}|$ sous une forme prenant en compte la non commutativité sous forme du paramètre θ , nous allons utiliser les relations de complétude de $|\vec{p}\rangle$ et $|\vec{x}, \theta\rangle$. Comme avant, nous sous-entendons que chaque intégration est faite sur tout l'espace $\mathbb{R}^2$.

$$\begin{aligned} \hat{\mathbb{P}}_0 &= \int_{\mathbb{R}^2} d^2\vec{y} |\vec{y}\rangle \chi_0(\vec{y}) \langle \vec{y}| \\ &= \int d^2\vec{y} d^2\vec{p} d^2\vec{p}' d^2\vec{x} d^2\vec{x}' |\vec{x}', \theta\rangle *_{\vec{x}'} \langle \vec{x}', \theta | \vec{p}' \rangle \langle \vec{p}' | \vec{y} \rangle \chi_0(\vec{y}) \langle \vec{y} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{x}, \theta \rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta | \\ &= \int d^2\vec{x} d^2\vec{x}' |\vec{x}', \theta\rangle *_{\vec{x}'} \chi_\theta(\vec{x}', \vec{x}) *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta | = \hat{\mathbb{P}}_\theta, \end{aligned} \quad (4.4.1)$$

où nous avons défini,

$$\begin{aligned} \chi_\theta(\vec{x}', \vec{x}) &= \int d^2\vec{y} d^2\vec{p} d^2\vec{p}' \langle \vec{x}', \theta | \vec{p}' \rangle \langle \vec{p}' | \vec{y} \rangle \chi_0(\vec{y}) \langle \vec{y} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{x}, \theta \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int d^2\vec{y} d^2\vec{p} d^2\vec{p}' e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{y}-\vec{x}')\cdot\vec{p}'} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}\vec{p}'^2} \chi_0(\vec{y}) e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{x}-\vec{y})\cdot\vec{p}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}\vec{p}^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int d^2\vec{y} \frac{\pi(2\hbar)^2}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}(\vec{y}-\vec{x}')^2} \chi_0(\vec{y}) \frac{\pi(2\hbar)^2}{\theta} e^{-\frac{1}{\theta}(\vec{x}-\vec{y})^2} \\ &= \frac{1}{(\pi\theta)^2} \int d^2\vec{y} e^{-\frac{1}{\theta}(\vec{y}-\vec{x}')^2} \chi_0(\vec{y}) e^{-\frac{1}{\theta}(\vec{x}-\vec{y})^2}. \end{aligned} \quad (4.4.2)$$

Bien qu'il s'agit du même opérateur dans le cas commutatif que non commutatif, nous retrouvons l'expression commutative de $\hat{\mathbb{P}}_\theta$. Nous pouvons constater que nous avons dû transformer notre fonction caractéristique $\chi_0(\vec{y})$ en une fonction caractéristique effective $\chi_\theta(\vec{x}', \vec{x})$, qui montre à nouveau le flou que nous obtenons sur l'espace non commutatif vis à vis de la netteté de la représentation commutative, que nous retrouvons déjà dans la relation d'orthogonalité.

4.4.2 La fonction d'onde $\phi(\vec{x})$ dans le puits de potentiel classique

Certes, maintenant que nous avons pu exprimer $\hat{\mathbb{P}}_\theta$ sous la représentation $|\vec{x}, \theta\rangle$, nous en n'avons plus besoin. En effet, bien que $\phi(\vec{y})$ et $\phi(\vec{x})$ sont des fonctions d'ondes différentes, elles représentent le même état, et leur différence ne se trouve qu'à une transformation près. Ainsi, cette transformation est donnée par,

$$\begin{aligned} \phi_\theta(\vec{x}) &= \int d^2\vec{y} d^2\vec{p} \langle \vec{x} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{y} \rangle \phi(\vec{y}) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{y} d^2\vec{p} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{x}\cdot\vec{p}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar}\vec{p}^2} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{y}\cdot\vec{p}} \phi(\vec{y}), \end{aligned} \quad (4.4.3)$$

et la transformation inverse par,

$$\phi(\vec{y}) = \int d^2\vec{x} d^2\vec{p} \langle \vec{y} | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \vec{x} \rangle *_{\vec{x}} \phi(\vec{x})$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{y} d^2\vec{p} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{y}\cdot\vec{p}} e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{x}\cdot\vec{p}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar}\vec{p}^2} \phi(\vec{y}). \quad (4.4.4)$$

Ces transformations sont justes d'un point de vue technique. Cependant, elles font parfois oublier que $\phi(\vec{y})$ est défini sur deux domaines, sur D où elle est non-nulle et en dehors, où elle est strictement nulle. Afin d'être sûr que nous intégrons sur le bon domaine dans la suite, nous pouvons restreindre l'intégration sur D tel que²,

$$\phi_\theta(\vec{x}) = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{p} \int_D d^2\vec{y} e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{y}-\vec{x})\cdot\vec{p}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar}\vec{p}^2} \phi(\vec{y}). \quad (4.4.5)$$

Cependant, ce domaine nous rend la tâche d'intégration plus difficile que si nous intégrions une fonction sur tout le plan $\mathbb{R}^2$. Ainsi, nous ne pouvons pas promettre d'obtenir un résultat "propre"; il aura des expressions sous formes d'intégrales qui resteront. Nous simplifions l'expression par intégration sur $\vec{p}$:

$$\phi_\theta(\vec{x}) = \int_D d^2\vec{y} \frac{1}{\pi\theta} e^{-\frac{1}{\theta}(\vec{y}-\vec{x})^2} \phi(\vec{y}). \quad (4.4.6)$$

Cette transformation peut se représenter par le noyau Gaussien $G_\theta(\vec{a}) = \frac{1}{\pi\theta} e^{-\frac{1}{\theta}\vec{a}^2}$, tel que,

$$\phi_\theta(\vec{x}) = \int_D d^2\vec{y} G_\theta(\vec{x} - \vec{y}) \phi(\vec{y}). \quad (4.4.7)$$

Nous remarquons que si nous posons $D = \mathbb{R}^2$, nous obtenons l'expression utilisée pour la transformation de Weierstraß³. Il s'agit en réalité de la transformation utilisée pour tout $\phi(\vec{y})$, puisque dans le cas du puits de potentiel, nous avons décidé de réexprimer le projecteur dans l'intégrale. Il s'agit d'une transformation utilisée dans le traitement d'image comme outil de correction d'erreur, afin de créer un effet de flou Gaussien [18]. Notre intuition que nos coordonnées $\vec{x}$ correspondent intuitivement à un flou sur l'espace de configuration est justifiée.

Nous pouvons nous intéresser à deux cas, celui du puits de potentiel de forme carrée et celui du puits de potentiel circulaire.

4.4.3 Le puits de potentiel rectangulaire

Commençons avec le puits de potentiel possédant un bord rectangulaire. Nous dénotons le domaine par $D = [0, L_1] \times [0, L_2]$. Les fonctions d'onde sur les coordonnées commutatives qui décrivent le système doivent vérifier l'équation stationnaire,

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \vec{\nabla}^2 \phi(\vec{y}) = E \phi(\vec{y}), \quad (4.4.8)$$

qui vérifient les conditions aux bords suivantes,

$$\phi(\vec{y})|_{\vec{y} \in \partial D} = 0, \quad \hat{n} \cdot \vec{\nabla}_{\vec{y}} \phi(\vec{y})|_{\vec{y} \in \partial D} = 0. \quad (4.4.9)$$

2. En réalité, nous ne faisons qu'appliquer le projecteur $\hat{\mathbb{P}}_0$ une deuxième fois sur $|\phi\rangle$.

3. En réalité, il s'agit de la transformation de Weierstraß généralisée, puisque nous y avons rajouté un terme θ , qui permet de moduler la "force" de la transformation.

Dans notre cas, nous pouvons appliquer la condition que dans les cas où le bord est différentiable et admet un vecteur normal $\hat{n}$, c.-à-d. partout sauf sur les quatre coins du rectangle. Mais ces conditions suffisent dans notre cas. Les solutions pour une certaine valeur propre de l'énergie E_{n_1, n_2} sont donc données par,

$$\phi_{n_1, n_2}(\vec{y}) = \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}} \sin\left(n_1 \frac{\pi}{L_1} y_1\right) \sin\left(n_2 \frac{\pi}{L_2} y_2\right), \quad \text{si } \vec{x} \in D, \quad (4.4.10)$$

avec $\vec{y} = (y_1, y_2)$ et n_1, n_2 des naturels qui vérifient $n_1 + n_2 \neq 0$. Chaque énergie propre est donnée par,

$$E_{n_1, n_2} = \frac{\pi^2 \hbar^2}{2m} \left(\frac{n_1^2}{L_1^2} + \frac{n_2^2}{L_2^2} \right). \quad (4.4.11)$$

Ainsi, nous obtenons les fonctions d'onde $\phi_{n_1, n_2; \theta}(\vec{x})$, par la transformation en (4.4.7),

$$\begin{aligned} \phi_{n_1, n_2; \theta}(\vec{x}) &= \frac{2}{\sqrt{L_1 L_2}} \int_0^{L_1} dy_1 \frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} e^{-\frac{1}{\theta}(y_1 - x_1)^2} \sin\left(n_1 \frac{\pi}{L_1} y_1\right) \\ &\quad \times \int_0^{L_2} dy_2 \frac{1}{\sqrt{\pi\theta}} e^{-\frac{1}{\theta}(y_2 - x_2)^2} \sin\left(n_2 \frac{\pi}{L_2} y_2\right). \end{aligned} \quad (4.4.12)$$

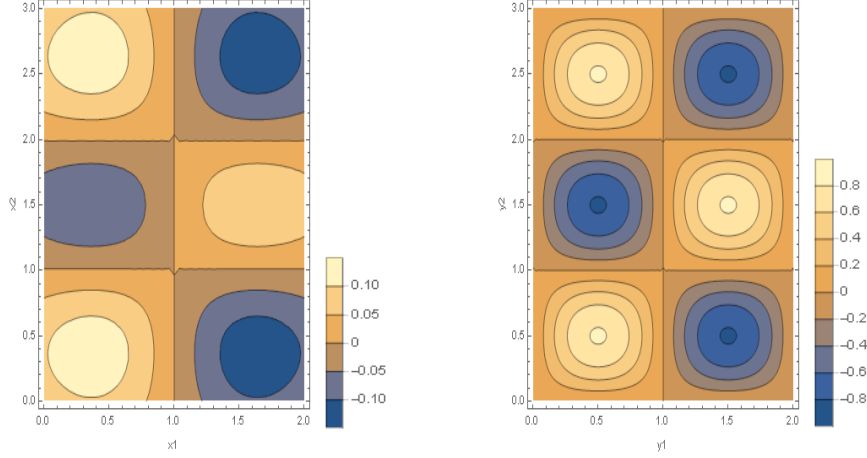
Nous aimerions trouver une manière plus transparente d'écrire cette expression, cependant, les intégrales ne nous donnent pas des termes forcément plus clairs et ne se résolvent pas explicitement dans la plupart des cas. Nous devons donc rester sur cette représentation, que nous pouvons évaluer numériquement, ce que nous avons fait dans la figure 4.1b, que nous avons pu tracer grâce au logiciel Mathematica.

Nous pouvons placer la fonction d'onde dans un graphique, en particulier un tracé de contour, que l'on va comparer au tracé de contour de la fonction d'onde commutative de même énergie. Dans notre cas, nous avons choisi les fonctions d'onde avec $n_1 = 2$ et $n_2 = 3$. La fonction d'onde est réelle dans les deux cas. Nous remarquons que la fonction $\phi_{n_1, n_2; \theta}(\vec{x})$ déborde au-delà de la limite imposée par ∂D , distance qui devient de plus en plus grande plus on augmente la valeur de θ . Nous constatons que la fonction d'onde se dilue en quelque sorte, comme attendu d'une transformation Gaussienne. Nous pouvons constater que cette dilution est significative puisque l'amplitude de la fonction d'onde non commutative a diminuée de façon significative si on la compare à sa contrepartie commutative.

4.4.4 Le puits de potentiel circulaire

À présent, nous allons nous intéresser à un puits possédant une forme circulaire, de rayon R et centrée sur l'origine des coordonnées $\vec{y}$. Le domaine D est ainsi donné par $D = \mathbb{D}(0, R)$. Le problème et sa solution est aussi bien connu dans la littérature [19]. Nous travaillons en coordonnées polaires, avec $\vec{y} = (y_1, y_2) = (r_y \cos \varphi_y, r_y \sin \varphi_y)$ et $\vec{x} = (x_1, x_2) = (r_x \cos \varphi_x, r_x \sin \varphi_x)$. Les fonctions de Bessel de première espèce sont données par $J_l(r_y)$, avec $y_{l, n}$ représentant le n ième zéro de $J_l(r_y)$, avec $l \in \mathbb{Z}_0$ et $n \in \mathbb{N}_0$. L'équation à résoudre reste la même qu'en (4.4.8), avec les mêmes conditions (à part le fait que nous avons changé de domaine), ce qui nous donne les solutions du cas commutatif :

$$\phi_{l, n}(\vec{y}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{R |J_{l+1}(y_{l, n})|} e^{il\varphi_y} J_l\left(r_y \frac{y_{l, n}}{R}\right), \quad (4.4.13)$$



(a) Tracé de contours de la fonction d'onde $\phi_{n_1, n_2; \theta}(\vec{x})$ NON commutative avec $\theta = 0.5$, $n_1 = 2$ et $n_2 = 3$ en fonction des coordonnées $\vec{x} = (x_1, x_2)$

(b) Tracé de contours de la fonction d'onde $\phi_{n_1, n_2}(\vec{y})$ commutative avec $n_1 = 2$ et $n_2 = 3$ en fonction des coordonnées $\vec{y} = (y_1, y_2)$

FIGURE 4.1 – Tracé de contour des fonctions d'ondes du puits de potentiel rectangulaire dans le cas commutatif et non commutatif

où le spectre d'énergie est donné par,

$$E_{l,n} = \frac{\hbar^2}{2mR^2} y_{l,n}^2. \quad (4.4.14)$$

À nouveau, transformons cela pour obtenir la fonction d'onde sous les coordonnées non commutatives :

$$\phi_{l,n;\theta}(\vec{x}) = \int_0^R dr_y r_y \int_0^{2\pi} d\varphi_y \frac{1}{\pi\theta} e^{-\frac{1}{\theta}(r_y^2 + r_x^2 - 2r_y r_x \cos(\varphi_y - \varphi_x))} \phi_{l,n}(\vec{y}). \quad (4.4.15)$$

Nous avons la possibilité, comme l'intégration est périodique sur φ_y , de la transformer sans problème par $\varphi_y \rightarrow \varphi_y + \varphi_x$, ce qui nous permet d'écrire $\phi_{l,n;\theta}(\vec{x})$ tel que,

$$\phi_{l,n;\theta}(\vec{x}) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}\theta} \frac{1}{R|J_{l+1}(y_{l,n})|} e^{-\frac{1}{\theta}r_x^2} e^{il\varphi_x} \int_0^R dr_y r_y \int_0^{2\pi} d\varphi_y e^{-\frac{1}{\theta}(r_y^2 - 2r_y r_x \cos(\varphi_y))} e^{il\varphi_y} J_l(r_y \frac{y_{l,n}}{R}). \quad (4.4.16)$$

Ainsi, nous pouvons placer toutes les expressions intégrales dans une fonction,

$$F_l(r_x) = \int_0^R dr_y r_y \int_0^{2\pi} d\varphi_y e^{-\frac{1}{\theta}(r_y^2 - 2r_y r_x \cos(\varphi_y))} e^{il\varphi_y} J_l(r_y \frac{y_{l,n}}{R}), \quad (4.4.17)$$

pour obtenir,

$$\phi_{l,n;\theta}(\vec{x}) = \frac{1}{\pi^{\frac{3}{2}}\theta} \frac{1}{R|J_{l+1}(y_{l,n})|} e^{-\frac{1}{\theta}r_x^2} e^{il\varphi_x} F_l(r_x). \quad (4.4.18)$$

Ainsi, comme auparavant, nous ne pouvons pas simplifier toutes les expressions intégrales, c'est pour cela que nous allons recourir à des outils numériques afin de visualiser ce qui se passe sur la fonction d'onde.

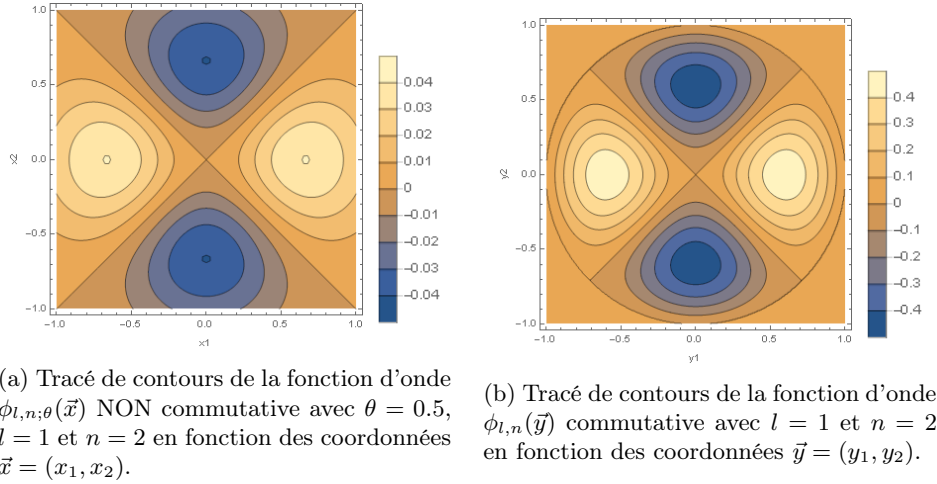


FIGURE 4.2 – Tracé de contour de la partie réelle des fonctions d'ondes du puits de potentiel circulaire dans le cas commutatif et non commutatif.

Nous allons à nouveau analyser la fonction d'onde de façon numérique en générant un tracé de contour comme pour le puits de potentiel rectangulaire, situé dans la figure 4.2b. Cependant, comme la fonction d'onde n'est pas purement réelle, nous avons décidé de n'analyser la partie réelle des deux fonctions d'ondes. Nous constatons effectivement un comportement similaire que dans le scénario précédent : la fonction d'onde diminue en amplitude et semble se disperser vers l'extérieur, confirmant à nouveau le comportement prédit par la transformée Gaussienne.

4.5 Un puits de potentiel nativement non commutatif

Il semble difficile de concevoir une autre manière de construire un projecteur associé à un domaine borné et connexe, comme $\hat{\mathbb{P}}_0$ semblait être le seul choix évident à faire. Cependant, nous pouvons retrouver dans la littérature des cas de projecteurs qui tentent d'imiter les propriétés d'un projecteur associé à un domaine circulaire. Nous pouvons par exemple en retrouver un suivant le papier [20] de F. Scholtz *et al.* Nous allons essayer de reconstruire un projecteur similaire en nous appuyant sur une construction en utilisant la représentation sous forme d'états cohérents de $|\vec{x}, \theta\rangle$ et en se servant du "Théorème de l'application conforme" de Riemann [21]. Nous allons commencer par introduire ce théorème.

4.5.1 Le Théorème de l'application conforme de Riemann

Le théorème affirme qu'il est possible de trouver une et une seule transformation qui amène un domaine D vers le cercle unité, en ayant fixé un point a qui deviendrait le centre de ce disque.

Le théorème est donné comme suit : Prenons un domaine borné, ouvert et simplement connexe dans le plan complexe. Nous donnons un point spécifique à l'intérieur de ce domaine, tel que $z_0 \in D$ et une direction angulaire donnée par ϕ_0 . Ainsi, il existe une et une seule transformation biholomorphe $f(z)$ qui envoie le domaine D sur le disque ouvert U_1 , tel que,

$$f(z_0) = 0, \quad \frac{df}{dz}(z_0) = \left| \frac{df}{dz}(z_0) \right| e^{i\phi_0}, \quad |f(z)| < 1. \quad (4.5.1)$$

Cette transformation peut aussi s'écrire comme,

$$f(z) = (z - z_0)e^{g(z)}. \quad (4.5.2)$$

Nous pouvons déduire que, comme nous savons que $|\lim_{z \rightarrow \zeta \in \partial D} f(z)| = 1$ et $|f(z)| < 1$, nous avons,

$$\lim_{z \rightarrow \zeta \in \partial D} \operatorname{Re}\{g(z)\} = -\ln |\zeta - z_0|. \quad (4.5.3)$$

Dans la suite nous allons noter la transformation $f(z) = w$, tel que nous avons une paramétrisation du disque unité. Comme le titre du théorème nous le dit, nous obtenons une transformation conforme, qui donc conserve les angles mais pas les éléments de surfaces.

Maintenant, calculons la surface du domaine de D , donnée par,

$$S_0 = \int_D d^2 \vec{x} = \int_D dx_1 dx_2 = \int_D \frac{dz d\bar{z}}{2}, \quad (4.5.4)$$

et la surface du disque unité est donné par,

$$\pi = S_f = \int_D \frac{dw d\bar{w}}{2} = \int_D \frac{dz d\bar{z}}{2} \left| \frac{df(z)}{dz} \right|^2, \quad (4.5.5)$$

ce qui montre que les éléments de surface infinitésimaux ne sont pas conservés à travers la transformation conforme.

Nous pouvons considérer le fait que le théorème d'application conforme considère un choix relativement particulier quant au disque unité, alors qu'un disque de rayon R_0 n'est éloignée qu'à une transformation d'échelle près. Afin de pouvoir exprimer cette transformation pour un disque de rayon quelconque, nous allons fixer sa normalisation par,

$$|\lim_{z \rightarrow \zeta \in \partial D} f(z)| = R_0, \quad (4.5.6)$$

ce qui nous donne,

$$\lim_{z \rightarrow \zeta \in \partial D} \operatorname{Re}\{g(z)\} = -\ln \left(\frac{|\zeta - z_0|}{R_0} \right). \quad (4.5.7)$$

Nous sommes dorénavant en mesure d'exprimer la transformation $w = f(z)$ vers un disque de rayon R_0 .

4.5.2 Construction du projecteur

Pour cette construction, nous allons exploiter le fait que nous pouvons utiliser les états cohérents afin de procéder à la construction du projecteur associé un domaine D . Pour cela, nous pouvons utiliser la correspondance $\vec{x} = (x_1, x_2) \iff z = x_1 + ix_2$, afin de définir le domaine D sur $\mathbb{R}^2$ sur l'espace complexe.

Nous avons donc nos états cohérents donnés par $\hat{b}|z\rangle = z|z\rangle$, que nous avons défini lors en (3.5.16); nous pouvons considérer la transformation $f(z)$ de D vers le disque U_{R_0} , que nous pouvons donner comme une fonction d'opérateur, tel que nous avons (en considérant un développement en série de $f(z)$),

$$f(\hat{b})|z, \theta\rangle = f(z)|z, \theta\rangle = w|z, \theta\rangle, \quad (4.5.8)$$

où nous avons défini $f(z) = w$. Nous constatons que pour la valeur de z_0 , nous avons,

$$f(\hat{b}) |z_0, \theta\rangle = f(z_0) |z, \theta\rangle = 0 |z, \theta\rangle = 0. \quad (4.5.9)$$

Ainsi, nous pouvons constater que $|z_0, \theta\rangle$ agit en quelque sorte comme un vide de Fock. Cependant, $f(\hat{b})$ et $f(\hat{b})^\dagger (= \bar{f}(\hat{b}^\dagger))$ n'agissent certainement pas comme une algèbre de Fock, mais nous pouvons considérer ces opérateurs comme des pseudo-algèbres de Fock, en tentant d'imiter leur comportement. Ainsi nous allons tenter de créer des états, qui ressembleront à,

$$\bar{f}(\hat{b}^\dagger)^n |z_0, \theta\rangle, \quad (4.5.10)$$

dont nous devons encore déterminer la normalisation. Nous la calculons en regardant,

$$\langle z_0, \theta | f(\hat{b})^n \bar{f}(\hat{b}^\dagger)^m |z_0, \theta\rangle. \quad (4.5.11)$$

Si nous développons $f(\hat{b})^n$ et $\bar{f}(\hat{b}^\dagger)^m$ en série, nous réalisons qu'ils ont le même nombre de puissances. En prenant en compte que leur commutateur est donné par $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 2\theta$, si $n \neq m$, l'expression sera nulle, puisque au moins une puissance n'a pas su être absorbée par le commutateur. Nous allons trouver la normalisation en calculant,

$$\langle z_0, \theta | f(\hat{b})^n \bar{f}(\hat{b}^\dagger)^m |z_0, \theta\rangle = \frac{1}{2\pi\theta} (2\theta)^n \gamma_n(\theta) n! \delta_{n,m}, \quad (4.5.12)$$

où nous avons choisi $\gamma_n(\theta)$ tel que $\gamma_n(\theta) = 1$ si $f(z) = z$. En effet, si $f(z) = z$, nous avons que $\langle z_0, \theta | f(\hat{b})^n \bar{f}(\hat{b}^\dagger)^m |z_0, \theta\rangle = \langle z_0, \theta | (\hat{b})^n (\hat{b}^\dagger)^m |z_0, \theta\rangle = \frac{1}{2\pi\theta} (2\theta)^n n! \delta_{n,m}$, où, pour la dernière égalité, nous nous sommes servis du commutateur $[\hat{b}, \hat{b}^\dagger] = 2\theta$. Ceci, nous donne la normalisation pour les pseudo-états de Fock donnés par,

$$|n, f\rangle = \sqrt{\frac{2\pi\theta}{(2\theta)^n \gamma_n(\theta) n!}} \bar{f}(\hat{b}^\dagger)^n |z_0, \theta\rangle, \quad (4.5.13)$$

tel que nous avons la normalisation $\langle m, f | n, f\rangle = \delta_{n,m}$ pour des naturels m, n . Ceci engendre un sous-espace H_f de l'espace de Hilbert engendré par $|\vec{x}, \theta\rangle$, nommé H_θ .

Nous pouvons ainsi considérer des pseudo-états cohérents (qu'on va aussi simplement appeler états cohérents par abus de langage), donnés en analogie aux états cohérents habituels, en utilisant le fait que $f(z) = w$,

$$|w, U_{R_0}\rangle = e^{-\frac{1}{2}|w|^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{w^n}{\sqrt{n!}} |n, f\rangle, \quad (4.5.14)$$

avec la normalisation $\langle w, U_{R_0} | w, U_{R_0}\rangle = 1$. Comme w est défini sur tout le disque U_{R_0} , nous pouvons définir le projecteur suivant,

$$\hat{\mathbb{P}}_f \equiv \int \frac{dw d\bar{w}}{2\pi} |w, U_{R_0}\rangle \langle w, U_{R_0}|, \quad (4.5.15)$$

qui possède bien les propriétés,

$$\hat{\mathbb{P}}_f^\dagger = \hat{\mathbb{P}}_f, \quad \hat{\mathbb{P}}_f^2 = \hat{\mathbb{P}}_f. \quad (4.5.16)$$

Nous avons donc un projecteur associé au sous-espace H_f , que nous pouvons aussi écrire tel que,

$$\hat{\mathbb{P}}_f = \sum_{n=0}^{\infty} |n, f\rangle \langle n, f|. \quad (4.5.17)$$

Maintenant, il nous suffit juste de définir le projecteur suivant, qui est associé au disque de rayon R_0 ,

$$\hat{\mathbb{P}}_{f,M} = \sum_{n=0}^M |n, f\rangle \langle n, f|. \quad (4.5.18)$$

Si le domaine D est un disque de centre z_0 , nous constatons que nous avons pu construire l'équivalent d'un projecteur d'un puits infini circulaire dans le cas non commutatif. Nous allons finir avec la fixation du rayon R_0 , qui est donnée, en comparant avec F. Scholtz [20] *et al.*,

$$\pi R_0^2 = 2\pi\theta(M + \alpha), \quad (4.5.19)$$

où α est un choix arbitraire selon comment on considère la distance carrée dans le plan non commutatif. Ainsi, afin d'obtenir à nouveau la situation commutative, nous devons gérer M et θ de manière telle que la surface du disque reste fixée,

$$\lim_{\theta \rightarrow 0, M \rightarrow +\infty} 2\pi\theta(M + \alpha) = \pi R_0^2. \quad (4.5.20)$$

4.5.3 L'approche naïve du projecteur $\hat{\mathbb{P}}_{f,M}$

Nous allons résoudre le problème du puits de potentiel en l'appliquant directement la condition (4.2.3),

$$[\hat{p}^2, \hat{\mathbb{P}}_{f,M}] |\phi\rangle = 0. \quad (4.5.21)$$

Comme nous aimerions appliquer le cas du potentiel sur un domaine circulaire, la transformation devient triviale avec $f(z) = z$. Ceci nous donne la possibilité d'écrire les états $|n, f\rangle$ comme,

$$|n, f\rangle = \sqrt{\frac{2\pi\theta}{(2\theta)^n n!}} (\hat{b}^\dagger)^n |z_0, \theta\rangle. \quad (4.5.22)$$

Ainsi, l'opérateur $\hat{\mathbb{P}}_{f,M}$ peut être écrit comme,

$$\hat{\mathbb{P}}_{f,M} = \sum_{n=0}^M |n, f\rangle \langle n, f| = \sum_{n=0}^M \frac{2\pi\theta}{(2\theta)^n n!} (\hat{b}^\dagger)^n |z_0, \theta\rangle \langle z_0, \theta| \hat{b}^n. \quad (4.5.23)$$

Nous allons exprimer notre fonction d'onde $\phi(\vec{x})$ en fonction de $\tilde{\phi}(\vec{p})$. Calculons d'abord $\hat{\mathbb{P}}_{f,M}$ en fonction de $|\vec{p}\rangle$.

$$\langle \vec{p} | \hat{\mathbb{P}}_{f,M} | \vec{p}' \rangle = \sum_{n=0}^M \frac{2\pi\theta}{(2\theta)^n n!} \langle \vec{p} | (\hat{b}^\dagger)^n | z_0, \theta \rangle \langle z_0, \theta | \hat{b}^n | \vec{p}' \rangle. \quad (4.5.24)$$

Nous calculons d'abord,

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{p} | (\hat{b}^\dagger)^n | z_0, \theta \rangle &= 2i\hbar \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\theta}{4\hbar^2} \bar{p} \right)^n \langle \vec{p} | z_0, \theta \rangle \\
 &= \frac{(2i\hbar)^n}{2\pi\theta} \left(\frac{\partial}{\partial p} - \frac{\theta}{4\hbar^2} \bar{p} \right)^n e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} p\bar{p}} \\
 &= \frac{(2i\hbar)^n}{2\pi\theta} \left(-2 \frac{\theta}{4\hbar^2} \bar{p} \right)^n e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} p\bar{p}} \\
 &= \frac{1}{2\pi\theta} (-i2\theta\bar{p})^n e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} p\bar{p}}, \tag{4.5.25}
 \end{aligned}$$

ce qui nous donne pour le projecteur,

$$\begin{aligned}
 \langle \vec{p} | \hat{\mathbb{P}}_{f,M} | \vec{p}' \rangle &= \sum_{n=0}^M \frac{2\pi\theta}{(2\theta)^n n!} \frac{1}{2\pi\theta} (-i2\theta)^n (i2\theta)^n (p'\bar{p})^n e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (p\bar{p} + p'\bar{p}')} \\
 &= \sum_{n=0}^M \frac{1}{n!} (p'\bar{p})^n e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (p\bar{p} + p'\bar{p}')}, \tag{4.5.26}
 \end{aligned}$$

ce qui nous permet de calculer la condition des “conditions de bord”,

$$\begin{aligned}
 &\langle \vec{p} | [\hat{p}^2, \hat{\mathbb{P}}_{f,M}] | \phi \rangle \\
 &= \langle \vec{p} | (\hat{p}^2 \hat{\mathbb{P}}_{f,M} - \hat{\mathbb{P}}_{f,M} \hat{p}^2) | \phi \rangle \\
 &= \int d^2\vec{p}' d^2\vec{p}'' (\langle \vec{p} | \hat{p}^2 | \vec{p}'' \rangle \langle \vec{p}'' | \hat{\mathbb{P}}_{f,M} | \vec{p}' \rangle - \langle \vec{p} | \hat{\mathbb{P}}_{f,M} | \vec{p}'' \rangle \langle \vec{p}'' | \hat{p}^2 | \vec{p}' \rangle) \langle \vec{p}' | \phi \rangle \\
 &= \int d^2\vec{p}' (|p|^2 - |p'|^2) \langle \vec{p} | \hat{\mathbb{P}}_{f,M} | \vec{p}' \rangle \langle \vec{p}' | \phi \rangle \\
 &= \int d^2\vec{p}' (|p|^2 - |p'|^2) \left(\sum_{n=0}^M \frac{1}{n!} (p'\bar{p})^n e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (p\bar{p} + p'\bar{p}')} \right) \tilde{\phi}(\vec{p}'). \tag{4.5.27}
 \end{aligned}$$

Nous obtenons ainsi la condition suivante,

$$\int d^2\vec{p}' (|p|^2 - |p'|^2) \left(\sum_{n=0}^M \frac{1}{n!} (p'\bar{p})^n e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (p\bar{p} + p'\bar{p}')} \right) \tilde{\phi}(\vec{p}') = 0. \tag{4.5.28}$$

Afin de regarder la validité de la condition, prenons une particule libre confinée dans un puits de potentiel. La solution à l'équation de Schrödinger en représentation $\vec{p}$ pour une particule libre peut être écrite de la façon suivante,

$$\tilde{\phi}(\vec{p}) = \delta\left(\frac{r_p^2}{2m} - E\right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_n e^{in\varphi_p}, \tag{4.5.29}$$

où (r_p, φ_p) représentent les coordonnées polaires de $\vec{p}$ et χ_n représente des coefficients potentiellement complexes.⁴ Passons dans l'espace non commutatif,

4. Comme l'équation de Schrödinger de la particule libre ne dépend pas de l'espace de configuration, le spectre d'énergie de la particule libre sera la même pour le cas commutatif tout comme pour le cas non commutatif.

$$\begin{aligned}
 \phi(\vec{x}) &= \int d^2\vec{p} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{x}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}\vec{p}^2} \tilde{\phi}(\vec{p}) \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int d^2\vec{p} e^{\frac{i}{\hbar}(r_x r_p \cos(\varphi_x - \varphi_p))} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}r_p^2} \tilde{\phi}(\vec{p}) \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int d^2\vec{p} e^{\frac{i}{\hbar}(r_x r_p \cos(\varphi_x - \varphi_p))} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}r_p^2} \tilde{\phi}(\vec{p}) \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int d^2\vec{p} e^{\frac{i}{\hbar}(r_x r_p \cos(\varphi_x - \varphi_p))} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}r_p^2} \left(\delta\left(\frac{r_p^2}{2m} - E\right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_n e^{in\varphi_p} \right). \tag{4.5.30}
 \end{aligned}$$

Or nous pouvons écrire l'expression suivante,

$$e^{iz \cos \varphi} = \sum_{m \in \mathbb{Z}} i^m e^{im\varphi} J_m(z), \tag{4.5.31}$$

ce qui nous donne,

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \int r_p dr_p \int_0^{2\pi} d\varphi_p \sum_{m \in \mathbb{Z}} (i^m e^{im\varphi_x} e^{-im\varphi_p} J_m\left(\frac{1}{\hbar} r_x r_p\right)) e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}r_p^2} \left(\delta\left(\frac{r_p^2}{2m} - E\right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_n e^{in\varphi_p} \right) \\
 &= \frac{1}{2\pi\hbar} \sqrt{2mE} \int_0^{2\pi} d\varphi_p \sum_{m \in \mathbb{Z}} (i^m e^{im\varphi_x} e^{-im\varphi_p} J_m\left(\frac{1}{\hbar} r_x \sqrt{2mE}\right)) e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}(2mE)} \left(\sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_n e^{in\varphi_p} \right) \\
 &= \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}(2mE)} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\chi_n i^n e^{in\varphi_x} J_n\left(\frac{1}{\hbar} r_x \sqrt{2mE}\right)). \tag{4.5.32}
 \end{aligned}$$

Dans le cas non commutatif, nous obtenons,

$$\phi(\vec{y}) = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE} \sum_{n \in \mathbb{Z}} (\chi_n i^n e^{in\varphi_x} J_n\left(\frac{1}{\hbar} r_x \sqrt{2mE}\right)). \tag{4.5.33}$$

Nous pouvons vérifier que nous retrouvons le cas du puits infini circulaire en posant la condition $J_n(kR) = 0$ avec $k = \frac{1}{\hbar} \sqrt{2mE}$. Nous allons essayer de tomber sur des formes similaires dans notre développement avec le projecteur $\hat{P}_{f,M}$, afin de pouvoir comparer nos résultats.

À présent, nous allons insérer (4.5.29) dans (4.5.28),

$$\int d^2\vec{p}' (|p|^2 - |p'|^2) \left(\sum_{n=0}^M \frac{1}{n!} (r_p')^n e^{in\phi_p'}(\vec{p}) e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}(p\vec{p} + p'\vec{p}')} \right) \left(\delta\left(\frac{r_p'^2}{2m} - E\right) \sum_{n \in \mathbb{Z}} \chi_n e^{in\varphi_p'} \right) = 0, \tag{4.5.34}$$

ce qu'on peut écrire comme,

$$(|p|^2 - 2Em) \left(\sum_{n=0}^{-M} \frac{1}{n!} \chi_n (\sqrt{2Em})^n e^{in\phi_p'}(\vec{p}) e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}(r_p'^2 + 2Em)} \right) = 0, \tag{4.5.35}$$

Ces conditions sont insuffisantes : en effet, nous pouvons constater que nous avons des conditions valables uniquement pour des valeurs de n allant de 0 à $-M$. Le problème vient surtout quand nous

tentons de retrouver le cas commutatif en faisant tendre $M \rightarrow \infty$ et $\theta \rightarrow 0$, nous ne retrouvons pas les conditions du cas commutatif, qui donne une condition pour toutes les valeurs de n dans les naturels. Il semble que nous ayons été trop vite et que nous devons trouver une approche plus délicate.

4.6 Approche du puits de potentiel par une algèbre enveloppante

Bien que nous n'ayons pas pu retrouver les résultats satisfaisant nos conditions concernant la "physicalité" de notre méthodique, nous pouvons nous intéresser à l'article de F. G. Scholtz *et al.* qui propose une approche alternative, bien que similaire à la nôtre. À la place de considérer des états physiques d'un espace de Hilbert $\phi_\theta(\vec{x})$, il considère représenter cet espace de Hilbert par des opérateurs $\hat{\phi}_\theta(\hat{\vec{x}})$. Nous allons tenter de relier cette approche avec notre approche plus classique.

Regardons comment nous pouvons construire cette approche déjà dans le cas commutatif. Nous savons que l'espace de configuration commutatif est relié à l'espace de conjugaison par la transformée de Fourier par,

$$\phi(\vec{y}) = \int d^2\vec{p} \frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{y}} \tilde{\phi}(\vec{p}). \quad (4.6.1)$$

Nous pouvons donc décider de la définition suivante pour l'algèbre enveloppant l'espace de Hilbert (dans le cas commutatif) :

$$\hat{\phi}(\hat{\vec{y}}) = \int d^2\vec{p} \frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\hat{\vec{y}}} \tilde{\phi}(\vec{p}). \quad (4.6.2)$$

Nous allons montrer que nous sommes en mesure de reproduire les états $\phi(\vec{y})$ en nous servant de cette définition. Il suffit d'appliquer l'état $|\vec{y}\rangle$ tel que,

$$\hat{\phi}(\hat{\vec{y}}) |\vec{y}\rangle = \int d^2\vec{p} \frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\hat{\vec{y}}} \tilde{\phi}(\vec{p}) |\vec{y}\rangle = \int d^2\vec{p} \frac{1}{2\pi\hbar} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\vec{y}} \tilde{\phi}(\vec{p}) |\vec{y}\rangle = \phi(\vec{y}) |\vec{y}\rangle, \quad (4.6.3)$$

ce qui donc nous permet de retrouver l'état $|\phi\rangle$,

$$\int d^2\vec{y} \hat{\phi}(\hat{\vec{y}}) |\vec{y}\rangle = \int d^2\vec{y} \phi(\vec{y}) |\vec{y}\rangle = |\phi\rangle. \quad (4.6.4)$$

Ainsi, nous pouvons constater que l'information contenue dans les deux représentations, fonctionnelle comme opérationnelle, est exactement la même. De plus, nous avons pu observer comment passer d'une représentation à l'autre. Il est donc plus aisé de pouvoir généraliser cela au cas non commutatif. Essayons donc la définition suivante pour le cas non commutatif,

$$\hat{\phi}(\hat{\vec{x}}) = \int d^2\vec{p} \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}\vec{p}^2} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\hat{\vec{x}}} \tilde{\phi}(\vec{p}). \quad (4.6.5)$$

Cependant, cette définition est trop contraignante si nous voulons reproduire les résultats de F. Scholtz *et al.*, nous devons rajouter un facteur λ . Ce facteur nous permettra de retrouver

les définitions des opérateurs $\hat{X}_i$ et $\hat{P}_i$, qui agissent sur $\hat{\phi}(\hat{x})$. En rajoutant λ , nous définissons finalement $\hat{\phi}(\hat{x})$ par,

$$\hat{\phi}(\hat{x}) = \int d^2\vec{p} \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{\lambda\theta}{4\hbar^2}\vec{p}^2} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\hat{x}} \tilde{\phi}(\vec{p}). \quad (4.6.6)$$

Comme déjà dit auparavant, nous allons tenter de retrouver les opérateurs $\hat{X}_i$ et $\hat{P}_i$, que nous allons définir en fonction $\hat{x}_i$ et $\hat{p}_i$. Nous allons décider d'écrire chaque opérateur agissant sur $\hat{\phi}(\hat{x})$ avec une majuscule et chaque opérateur agissant sur les états $|\phi\rangle$. La correspondance entre ces deux opérateurs est donnée par,

$$\hat{A}\hat{\phi}(\hat{x}) = \int d^2\vec{p} \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{\lambda\theta}{4\hbar^2}\vec{p}^2} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\hat{x}} \langle\vec{p}|\hat{A}|\phi\rangle. \quad (4.6.7)$$

Pour deux opérateurs, la relation précédente est donnée par,

$$\hat{A}\hat{B}\hat{\phi}(\hat{x}) = \int d^2\vec{p} \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{\lambda\theta}{4\hbar^2}\vec{p}^2} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\hat{x}} \langle\vec{p}|\hat{A}\hat{B}|\phi\rangle. \quad (4.6.8)$$

Nous obtenons donc,

$$\hat{X}_i\hat{\phi}(\hat{x}) = \int d^2\vec{p} \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{\lambda\theta}{4\hbar^2}\vec{p}^2} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\hat{x}} \langle\vec{p}|\hat{x}_i|\phi\rangle, \quad (4.6.9)$$

$$\hat{P}_i\hat{\phi}(\hat{x}) = \int d^2\vec{p} \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{\lambda\theta}{4\hbar^2}\vec{p}^2} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\hat{x}} \langle\vec{p}|\hat{p}_i|\phi\rangle. \quad (4.6.10)$$

Nous pouvons décider d'essayer d'exprimer les résultats uniquement en termes de $\hat{x}_i$ et $\hat{\phi}(\hat{x})$. Pour cela, il suffit de voir que nous pouvons écrire,

$$p_i e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\hat{x}} = \frac{\hbar}{\theta} \left[\epsilon_{ij} \hat{x}_j, e^{\frac{i}{\hbar}\vec{p}\cdot\hat{x}} \right], \quad (4.6.11)$$

qui est prouvée en montrant que,

$$\hat{x}_j e^{\frac{i}{\hbar}p_i\hat{x}_i} = \hat{x}_j \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n p_i^n \hat{x}_i^n, \quad (4.6.12)$$

en utilisant $\hat{x}_j\hat{x}_i^n = \hat{x}_i^n\hat{x}_j + n[\hat{x}_j, \hat{x}_i]\hat{x}_i^{n-1}$, nous avons,

$$\begin{aligned} &= \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n p_i^n (\hat{x}_i^n \hat{x}_j + n[\hat{x}_j, \hat{x}_i]\hat{x}_i^{n-1}) \\ &= \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n p_i^n (\hat{x}_i^n \hat{x}_j) + \sum_{n=0} \frac{1}{n!} \left(\frac{i}{\hbar}\right)^n p_i^n (n[\hat{x}_j, \hat{x}_i]\hat{x}_i^{n-1}) \\ &= e^{\frac{i}{\hbar}p_i\hat{x}_i} \hat{x}_j + \frac{\theta}{\hbar} \epsilon_{ji} p_i e^{\frac{i}{\hbar}p_i\hat{x}_i}. \end{aligned} \quad (4.6.13)$$

Cette relation nous donne donc pour l'opérateur $\hat{P}_i$,

$$\hat{P}_i \hat{\phi}(\vec{x}) = \frac{\hbar}{\theta} \left[\epsilon_{ij} \hat{x}_j, \hat{\phi}(\vec{x}) \right]. \quad (4.6.14)$$

Ainsi, pour l'opérateur $\hat{X}_i$, nous obtenons,

$$\hat{X}_i \hat{\phi}(\vec{x}) = \hat{x}_i \hat{\phi}(\vec{x}) + \frac{1}{2} i \lambda \epsilon_{ij} \left[\hat{x}_j, \hat{\phi}(\vec{x}) \right]. \quad (4.6.15)$$

Nous allons montrer que cette relation est trouvée par le développement suivant,

$$\begin{aligned} \hat{X}_i \hat{\phi}(\vec{x}) &= \int d^2 \vec{p} \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{\lambda\theta}{4\hbar^2} \vec{p}^2} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} (i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i} \tilde{\phi}(\vec{p})) \\ &= - \int d^2 \vec{p} \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{\partial}{\partial p_i} (e^{-\frac{\lambda\theta}{4\hbar^2} \vec{p}^2} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}}) (i\hbar \tilde{\phi}(\vec{p})) \\ &= - \int d^2 \vec{p} \frac{1}{2\pi\hbar} \left(-\frac{\lambda\theta}{2\hbar^2} p_i + \frac{i}{\hbar} \hat{x}_i \right) e^{-\frac{\lambda\theta}{4\hbar^2} \vec{p}^2} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{p} \cdot \vec{x}} (i\hbar \tilde{\phi}(\vec{p})) \end{aligned} \quad (4.6.16)$$

en utilisant (4.6.11), nous avons que,

$$\begin{aligned} &= i\hbar \left(\frac{\lambda\theta}{2\hbar^2} \frac{\hbar}{\theta} \left[\epsilon_{ij} \hat{x}_j, \hat{\phi}(\vec{x}) \right] - \frac{i}{\hbar} \hat{x}_i \hat{\phi}(\vec{x}) \right) \\ &= \hat{x}_i \hat{\phi}(\vec{x}) + i \frac{\lambda}{2} \left[\epsilon_{ij} \hat{x}_j, \hat{\phi}(\vec{x}) \right]. \end{aligned} \quad (4.6.17)$$

À présent, nous allons montrer que ces expressions nous donnent effectivement à nouveau les relations de commutations telles que trouvées en (3.2.4). En effet, après quelques calculs, nous trouvons :

$$[\hat{X}_i, \hat{X}_j] = i\epsilon_{ij}\theta\mathbb{I}, \quad [\hat{X}_i, \hat{P}_j] = i\hbar\mathbb{I}, \quad [\hat{P}_i, \hat{P}_j] = 0, \quad (4.6.18)$$

ce qui nous donne donc les bonnes relations souhaitées. Cependant, dans la section précédente, lors du calcul naïf, nous avons besoin d'une pseudo-algèbre de Fock, qui elle-même se basait sur l'algèbre de Fock engendrée par les opérateurs $\hat{b}$ et $\hat{b}^\dagger$. Tentons donc d'écrire nos expressions en fonctions des opérateurs de Fock. Nous savons que le produit scalaire $\vec{p} \cdot \vec{\hat{x}}$ peut s'écrire comme,

$$\vec{p} \cdot \vec{\hat{x}} = \frac{1}{2} (p\hat{b}^\dagger + \bar{p}\hat{b}), \quad (4.6.19)$$

puisque l'opérateur $\hat{b}$ peut s'exprimer en fonction de $\vec{\hat{x}}$, ce qui nous donne pour (4.6.6),

$$\hat{\phi}(\vec{\hat{x}}) = \int d^2 \vec{p} \frac{1}{2\pi\hbar} e^{-\frac{\lambda\theta}{4\hbar^2} \vec{p}^2} e^{\frac{i}{2\hbar} (p\hat{b}^\dagger + \bar{p}\hat{b})} \tilde{\phi}(\vec{p}). \quad (4.6.20)$$

Dans la suite, afin de pouvoir retrouver les résultats de F. Scholtz, nous allons poser $\lambda = 0$; l'opérateur $\hat{X}_i$ devient,

$$\hat{X}_i \hat{\phi}(\vec{\hat{x}}) = \hat{x}_i \hat{\phi}(\vec{\hat{x}}). \quad (4.6.21)$$

De plus, nous pouvons aussi définir les opérateurs de Fock $\hat{B}$ pour l'algèbre enveloppante, donnés donc par,

$$\hat{B} = \hat{X}_1 + i\hat{X}_2 \qquad \hat{B}^\dagger = \hat{X}_1 - i\hat{X}_2. \quad (4.6.22)$$

Nous pouvons définir des opérateurs similaires pour l'opérateur de moment,

$$\hat{P} = \hat{P}_1 + i\hat{P}_2, \qquad \hat{P}^\dagger = \hat{P}_1 - i\hat{P}_2. \quad (4.6.23)$$

Ainsi, pour trouver leurs expressions en fonction des opérateurs $\hat{x}_i$, $\hat{b}$ et $\hat{b}^\dagger$, nous utilisons (4.6.21) et (4.6.14), nous avons alors,

$$\begin{aligned} \hat{B}\hat{\phi}_\theta(\hat{b}, \hat{b}^\dagger) &= \hat{b}\hat{\phi}_\theta(\hat{b}, \hat{b}^\dagger), & \hat{B}^\dagger\hat{\phi}_\theta(\hat{b}, \hat{b}^\dagger) &= \hat{b}^\dagger\hat{\phi}_\theta(\hat{b}, \hat{b}^\dagger), \\ \hat{P}\hat{\phi}_\theta(\hat{b}, \hat{b}^\dagger) &= -i\frac{\hbar}{\theta} \left[\hat{b}, \hat{\phi}_\theta(\hat{b}, \hat{b}^\dagger) \right], & \hat{P}^\dagger\hat{\phi}_\theta(\hat{b}, \hat{b}^\dagger) &= i\frac{\hbar}{\theta} \left[\hat{b}^\dagger, \hat{\phi}_\theta(\hat{b}, \hat{b}^\dagger) \right]. \end{aligned} \quad (4.6.24)$$

Nous constatons donc que l'équation (4.5.21) peut être donné en fonction de l'algèbre enveloppante,

$$\left[\hat{P}^\dagger \hat{P}, \hat{\mathbb{P}}_{f,M} \right] \hat{\phi}_\theta(\hat{b}, \hat{b}^\dagger) = 0, \quad (4.6.25)$$

où nous pouvons retrouver l'équation de Schrödinger dans [20]. A présent, nous avons toutes les conditions réunies pour pouvoir suivre les développements de l'article mentionné ci-dessus, avec les opérateurs remplissant les bonnes relations de commutation. Le spectre d'énergie est ainsi donné par,

$$E_{m,l}^\theta = \frac{E_{m,l}}{1 + \frac{\theta}{R^2}(m+2)}, \quad \text{avec } m \geq 0, l = 1, 2, \dots, M+1 \quad (4.6.26)$$

$$E_{-m,l}^\theta = \frac{E_{m,l}}{1 + \frac{\theta}{R^2}(-m+2)}, \quad \text{avec } M \geq m > 0, l = 1, 2, \dots, M-m+1 \quad (4.6.27)$$

où $E_{m,l}$ représente l'énergie du système du puits de potentiel traditionnel (on peut aussi parler d'énergie du système commutatif), donné en (4.4.14).

Comme le système est issu d'un potentiel non commutatif, c.-à-d. que nous avons pas pris simplement le cas commutatif et transformé les états commutatifs en états commutatifs, nous observons l'action physique que possède cette non commutativité : en effet, la non commutativité lève la dégénérescence placée sur l'énergie. Cette séparation est entièrement contrôlée par le facteur θ , ce qui nous permet de retrouver le spectre d'énergie commutatif lorsque $\theta = 0$. C'est pourquoi nous pouvons considérer notre système comme une généralisation valable du puits de potentiel commutatif.

Conclusion

Nous voici arrivés à la fin. Nous pouvons constater que notre objectif de base a effectivement été atteint : nous avons pu construire une géométrie euclidienne non-commutative sur l'espace de configuration sur deux dimensions, en le justifiant grâce à un champ magnétique conjugué. Retraçons les étapes qui y ont mené, lors desquelles nous avons pu trouver des résultats intermédiaires tout aussi notables que la prémisse du mémoire.

En premier, nous avons utilisé un champ magnétique afin d'obtenir une géométrie non commutative sur l'espace de conjugaison. Cette partie nous servait principalement comme un échauffement pour la suite. De plus, nous avons trouvé un moyen de trouver une manière différente de trouver des relations de commutation non triviales à travers des projections, différente de la première approche.

En deuxième lieu, nous avons pu trouver une méthodique qui permet de calculer systématiquement les crochets de Poisson pour des actions de premier ordre. Cette méthodique nous a permis de calculer les crochets de Poisson de l'action de premier ordre du champ magnétique conjugué, qui nous donna finalement la géométrie non commutative sur l'espace de configuration. De plus, nous avons pu constater que la méthodique développée était idéale pour des applications numériques, avantage qui a pu être montré dans le mélange entre les deux champs magnétiques classiques et conjugués où nous avons pu exploiter des techniques matricielles.

Lors du troisième chapitre, nous avons pu quantifier le système, en ayant auparavant réduit l'espace de configuration à deux dimensions et pris un champ magnétique conjugué constant, ce qui nous a donné une relation de commutation constante $[\hat{x}_i, \hat{x}_j] = i\theta\epsilon_{ij}$. Ensuite, en utilisant le théorème de Darboux, nous avons pu donner relier les nouvelles coordonnées de l'espace de phase à des coordonnées canoniques, nous donnant ainsi une dualité pour l'espace de configuration. Ensuite, en minimisant la relation de Schrödinger-Robertson, nous avons pu construire une représentation pour les coordonnées non commutatives $\vec{x}$ dans un espace de Hilbert, qui en plus peut s'écrire comme un espace de Fock. Lors de la deuxième partie de ce chapitre, nous remarquons que nous pouvons passer entre l'espace commutatif et l'espace non commutatif de deux manières différentes : d'une part, si nous éteignons le champ magnétique conjugué, nous sommes censés retrouver le cas commutatif; d'autre part, grâce au théorème de Darboux, nous pouvons passer du cas commutatif au cas non commutatif à travers des transformations. Cela se retrouvait aussi dans les diverses propriétés que nous avons établies en analogie aux propriétés connues du cas commutatif (orthogonalité, complétude, etc.).

Lors du dernier chapitre, nous avons principalement mis en application ce que nous avons déjà vu auparavant. Ainsi, en prenant le puits de potentiel, nous avons pu observer que la fonction d'onde semble se diluer, c.-à-d. que les coordonnées non commutatives semblent présenter un "flou". De plus, nous avons pu montrer comment généraliser un puits de potentiel pour n'importe quel projecteur. Ceci nous a permis d'utiliser le théorème de l'application conforme de Riemann afin de

définir un projecteur censé reproduire un puits de potentiel non commutatif. Bien que l'application naïve n'ait pas fonctionné comme prévue, nous avons pu utiliser une algèbre enveloppante et pu retrouver les résultats de F. Scholtz avec succès.

Bien que nous ayons trouvé assez de résultats notables, celui de la dualité commutativité/non commutativité est celui qui interpelle le plus. Ce résultat répond à une question que nous n'avons pas vraiment posée dans ce mémoire, mais qui peu à peu se dévoilait à travers les développements : quelle est la perspective que nous donne la géométrie non commutative ? Pour répondre à cette dernière question finale, nous constatons que malgré le fait que le champ magnétique conjugué n'existe pas (en tout cas, dans notre monde commutatif), ce dernier n'ayant jamais pu être montré expérimentalement, le théorème de Darboux nous permet de prendre un détour quant à l'existence de ce champ, en établissant une correspondance entre le cas commutatif et non commutatif : comme le cas non commutatif n'est qu'un changement de coordonnées par rapport aux coordonnées, et qui par cette instance représente la réalité physique au même titre que le cas commutatif, le champ magnétique conjugué possède une réalité physique dans les coordonnées non commutatives. Ainsi, l'existence de ce champ a été reléguée au rang de perspective ; nous n'avons ainsi pas besoin de savoir si ce champ peut exister dans notre monde, mais comment le faire apparaître. Nous pouvons reprendre notre analogie de l'introduction utilisant les lunettes : la réalité du monde physique n'est pas changée, seulement les outils qui nous permettent de l'analyser.

Ainsi, le champ magnétique conjugué agit comme une compensation à l'apparition de la géométrie non commutative. Cependant, comme nous avons pu le remarquer déjà avec le potentiel harmonique non commutatif et le puits de potentiel non commutatif que si nous démarrons notre système dans la géométrie non commutative (en prenant donc par exemple un potentiel dépendant de l'opérateur $\hat{x}$), nous pouvons observer les effets venus de la non commutativité dans la géométrie commutative. Il est possible par ce moyen de donner une nouvelle direction quant à la recherche d'une gravitation quantique.

Cependant, notre exemple en deux dimensions avec un paramètre constant θ est encore relativement simple. Il est possible d'aller plus loin en considérant par exemple un champ magnétique conjugué plus compliqué tel que par exemple un monopole magnétique conjugué, ce qui nous permet d'ajouter plus de dimensions. De plus, nous pourrions déjà tenter d'appliquer notre correspondance commutativité/non-commutativité (et ainsi aussi les champs magnétiques conjugués) à des systèmes relativistes. Finalement, les possibilités sont nombreuses, seul le futur pourra nous donner une réponse.

Annexes

A Calcul des opérateurs $\hat{x}$ et $\hat{y}$ et de leur commutateur

Il s'agit des calculs de la section 1.3 que nous calculons ici, plutôt que dans le texte principal. Nous allons donc commencer par calculer $\bar{x}$ et $\bar{y}$ explicitement. Puisque $\hat{x}$ et $\hat{y}$ peuvent être décomposés en fonction des opérateurs d'échelle $\hat{a}_+$ et $\hat{a}_-$, nous allons observer comment ces derniers agissent sur $\hat{\mathbb{P}}_0$.

$$\hat{a}_+ \hat{\mathbb{P}}_0 = \hat{a}_+ \sum_j |j, 0\rangle \langle j, 0| = \sum_j \hat{a}_+ |j, 0\rangle \langle j, 0| = \sum_j \sqrt{j} |j-1, 0\rangle \langle j, 0|, \quad (\text{A.1})$$

$$\hat{a}_- \hat{\mathbb{P}}_0 = \hat{a}_- \sum_j |j, 0\rangle \langle j, 0| = 0, \quad (\text{A.2})$$

$$\hat{a}_+^\dagger \hat{\mathbb{P}}_0 = \hat{a}_+^\dagger \sum_j |j, 0\rangle \langle j, 0| = \sum_j \hat{a}_+^\dagger |j, 0\rangle \langle j, 0| = \sum_j \sqrt{j+1} |j+1, 0\rangle \langle j, 0|, \quad (\text{A.3})$$

$$\hat{a}_-^\dagger \hat{\mathbb{P}}_0 = \hat{a}_-^\dagger \sum_j |j, 0\rangle \langle j, 0| = \sum_j |j, 1\rangle \langle j, 0|. \quad (\text{A.4})$$

Maintenant, nous allons nous rapprocher de $\hat{x}$ et $\hat{y}$, en faisant agir $\hat{\mathbb{P}}_0$ par la droite et en définissant de nouveaux opérateurs.

$$\begin{aligned} \bar{a}_+ &= \hat{\mathbb{P}}_0 \hat{a}_+ \hat{\mathbb{P}}_0 \\ &= \sum_{i=0} \sum_{j=0} |j, 0\rangle \langle j, 0| \sqrt{i} |i-1, 0\rangle \langle i, 0| \\ &= \sum_{i=0} \sum_{j=0} |j, 0\rangle \delta_{i-1,j} \sqrt{i} \langle i, 0| \\ &= \sum_{j=0} |j, 0\rangle \sqrt{j+1} \langle j+1, 0|, \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

$$\bar{a}_- = \hat{\mathbb{P}}_0 \hat{a}_- \hat{\mathbb{P}}_0 = 0, \quad (\text{A.6})$$

$$\bar{a}_+^\dagger = \hat{\mathbb{P}}_0 \hat{a}_+^\dagger \hat{\mathbb{P}}_0$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{i=0} \sum_{j=0} |j, 0\rangle \langle j, 0| \sqrt{i+1} |i-1, 0\rangle \langle i, 0| \\
&= \sum_{i=0} \sum_{j=0} |j, 0\rangle \delta_{i+1,j} \sqrt{i} \langle i, 0| \\
&= \sum_{j=0} |j+1, 0\rangle \sqrt{j+1} \langle j, 0|,
\end{aligned} \tag{A.7}$$

$$\begin{aligned}
\bar{a}_{-}^{\dagger} &= \hat{\mathbb{P}}_0 \hat{a}_{-}^{\dagger} \hat{\mathbb{P}}_0 \\
&= \sum_{i=0} \sum_{j=0} |j, 0\rangle \langle j, 0|i, 1\rangle \langle i, 0| = 0.
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Nous savons que $\hat{x}$ et $\hat{y}$ sont donnés par,

$$\begin{aligned}
\hat{x} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\Omega}} (\hat{a}_{+} + \hat{a}_{-} + \hat{a}_{+}^{\dagger} + \hat{a}_{-}^{\dagger}), \\
\hat{y} &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\Omega}} (\hat{a}_{+} - \hat{a}_{-} - \hat{a}_{+}^{\dagger} + \hat{a}_{-}^{\dagger}),
\end{aligned} \tag{A.9}$$

et donc,

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\Omega}} (\bar{a}_{+} + \bar{a}_{-} + \bar{a}_{+}^{\dagger} + \bar{a}_{-}^{\dagger}) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\Omega}} (\bar{a}_{+} + \bar{a}_{+}^{\dagger}), \\
\bar{y} &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\Omega}} (\bar{a}_{+} - \bar{a}_{-} - \bar{a}_{+}^{\dagger} + \bar{a}_{-}^{\dagger}) = \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\Omega}} (\bar{a}_{+} - \bar{a}_{+}^{\dagger}).
\end{aligned} \tag{A.10}$$

En posant,

$$\begin{aligned}
M_j &= \sqrt{j+1} |j, 0\rangle \langle j+1, 0|, \\
W_j &= \sqrt{j+1} |j+1, 0\rangle \langle j, 0|.
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Finalement, $\bar{x}$ et $\bar{y}$ peuvent être donnés par,

$$\begin{aligned}
\bar{x} &= \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\Omega}} \sum_j (M_j + W_j), \\
\bar{y} &= \frac{i}{2} \sqrt{\frac{\hbar}{m\Omega}} \sum_j (M_j - W_j).
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Afin de faciliter le calcul du commutateur, nous allons procéder à quelques calculs préparatoires.

$$\begin{aligned}
\sum_i \sum_j M_i M_j &= \sum_i \sum_j \sqrt{i+1} \sqrt{j+1} |j, 0\rangle \langle j+1, 0|i, 0\rangle \langle i+1, 0| \\
&= \sum_i \sum_j \sqrt{i+1} \sqrt{j+1} |j, 0\rangle \delta_{j+1,i} \langle i+1, 0|
\end{aligned}$$

$$= \sum_j \sqrt{j+1} \sqrt{j+2} |j, 0\rangle \langle j+2, 0|, \quad (\text{A.13})$$

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j M_i W_j &= \sum_i \sum_j \sqrt{i+1} \sqrt{j+1} |j, 0\rangle \langle j+1, 0| i+1, 0\rangle \langle i, 0| \\ &= \sum_i \sum_j \sqrt{i+1} \sqrt{j+1} |j, 0\rangle \delta_{j,i} \langle i, 0| \\ &= \sum_j (j+1) |j, 0\rangle \langle j, 0|, \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j W_i W_j &= \sum_i \sum_j \sqrt{i+1} \sqrt{j+1} |i+1, 0\rangle \langle i, 0| j+1, 0\rangle \langle j, 0| \\ &= \sum_i \sum_j \sqrt{i+1} \sqrt{j+1} |i+1, 0\rangle \delta_{j+1,i} \langle j, 0| \\ &= \sum_j \sqrt{j+1} \sqrt{j+2} |j+2, 0\rangle \langle j, 0|, \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_j W_i M_j &= \sum_i \sum_j \sqrt{i+1} \sqrt{j+1} |j+1, 0\rangle \langle j, 0| i, 0\rangle \langle i+1, 0| \\ &= \sum_i \sum_j \sqrt{i+1} \sqrt{j+1} |j+1, 0\rangle \delta_{j,i} \langle i+1, 0| \\ &= \sum_j j |j, 0\rangle \langle j, 0|. \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

Ainsi, nous pouvons calculer le commutateur de ces opérateurs,

$$\begin{aligned} \bar{x}\bar{y} &= \frac{i}{4} \frac{\hbar}{m\Omega} (\bar{a}_+ + \bar{a}_+^\dagger)(\bar{a}_+ - \bar{a}_+^\dagger) \\ &= \frac{i}{4} \frac{\hbar}{m\Omega} (\bar{a}_+ \bar{a}_+ - \bar{a}_+ \bar{a}_+^\dagger + \bar{a}_+^\dagger \bar{a}_+ - \bar{a}_+^\dagger \bar{a}_+^\dagger) \\ &= \frac{i}{4} \frac{\hbar}{m\Omega} \sum_j \sum_k (M_j M_k - M_j W_k + W_k M_j - W_j W_k) \\ &= \frac{i}{4} \frac{\hbar}{m\Omega} \sum_j \left(\sqrt{j+1} \sqrt{j+2} |j, 0\rangle \langle j+2, 0| - (j+1) |j, 0\rangle \langle j, 0| \right. \\ &\quad \left. + j |j, 0\rangle \langle j, 0| - \sqrt{j+1} \sqrt{j+2} |j+2, 0\rangle \langle j, 0| \right), \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

$$\begin{aligned} \bar{y}\bar{x} &= \frac{i}{4} \frac{\hbar}{m\Omega} (\bar{a}_+ + \bar{a}_+^\dagger)(\bar{a}_+ - \bar{a}_+^\dagger) \\ &= \frac{i}{4} \frac{\hbar}{m\Omega} (\bar{a}_+ \bar{a}_+ + \bar{a}_+ \bar{a}_+^\dagger - \bar{a}_+^\dagger \bar{a}_+ - \bar{a}_+^\dagger \bar{a}_+^\dagger) \\ &= \frac{i}{4} \frac{\hbar}{m\Omega} \sum_j \sum_k (M_j M_k + M_j W_k - W_k M_j - W_j W_k) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{i}{4} \frac{\hbar}{m\Omega} \sum_j \left(\sqrt{j+1} \sqrt{j+2} |j, 0\rangle \langle j+2, 0| + (j+1) |j, 0\rangle \langle j, 0| \right. \\
 &\quad \left. - j |j, 0\rangle \langle j, 0| - \sqrt{j+1} \sqrt{j+2} |j+2, 0\rangle \langle j, 0| \right). \tag{A.18}
 \end{aligned}$$

Et donc, le commutateur final donne,

$$\begin{aligned}
 [\bar{x}, \bar{y}] &= \bar{x}\bar{y} - \bar{y}\bar{x} \\
 &= \frac{i}{2} \frac{\hbar}{m\Omega} \sum_j ((j+1) |j, 0\rangle \langle j, 0| - j |j, 0\rangle \langle j, 0|) \\
 &= \frac{i}{2} \frac{\hbar}{m\Omega} \sum_j (|j, 0\rangle \langle j, 0|) \\
 &= \frac{i}{2} \frac{\hbar}{m\Omega} \hat{\mathbb{P}}_0 \tag{A.19}
 \end{aligned}$$

Ce qui nous ramène au projecteur $\hat{\mathbb{P}}_0$, comme nous pouvons le constater.

B Compléments de calcul de la partie 3.4.1

Voici la preuve de quelques calculs qu'on peut retrouver dans le mémoire, dont la longueur serait trop importante afin de figurer comme matière importante dans le texte principal.

Calcul utiles

Rappelons ces quelques résultats issus du calcul des intégrales Gaussiennes, que nous pouvons retrouver dans l'ouvrage de Gradshteyn et Ryzhik [22]. Nous avons,

$$\int_{\mathbb{R}} dx e^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{\frac{b^2}{4a}} \quad (\text{L'intégrale Gaussienne}), \tag{B.1}$$

$$\int_{\mathbb{R}} dx x e^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \frac{b}{2a} e^{\frac{b^2}{4a}}, \tag{B.2}$$

$$\int_{\mathbb{R}} dx x^2 e^{-ax^2+bx} = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \left(\frac{1}{2a} + \frac{b^2}{4a^2} \right) e^{\frac{b^2}{4a}}. \tag{B.3}$$

Ces quantités nous permettront de calculer certains résultats qui nous serviront plus loin dans le texte.

1. En premier, nous avons l'expression suivante,

$$\left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^2 \int d^2\vec{p} e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{x}'-\vec{x})\cdot\vec{p}} e^{-\frac{\theta}{2\hbar^2}\vec{p}^2} = \frac{1}{2\pi\theta} e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}'-\vec{x})^2}. \tag{B.4}$$

Démonstration.

$$\left(\frac{1}{2\pi\hbar} \right)^2 \int d^2\vec{p} e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{x}'-\vec{x})\cdot\vec{p}} e^{-\frac{\theta}{2\hbar^2}\vec{p}^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \frac{2\hbar^2\pi}{\theta} e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}'-\vec{x})^2} \\
&= \frac{1}{2\pi\theta} e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}'-\vec{x})^2}.
\end{aligned} \tag{B.5}$$

□

2. Nous avons,

$$\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int d^2\vec{p} p_i e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{x}'-\vec{x})\cdot\vec{p}} e^{-\frac{\theta}{2\hbar^2}\vec{p}^2} = -\frac{i\hbar}{2\pi\theta^2} (x'_i - x_i) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}'-\vec{x})^2}. \tag{B.6}$$

Démonstration. En faisant appel à (B.2) (pour l'intégrale contenant p_i , la partie contenant l'autre indice sera résolue par une intégrale Gaussienne), nous obtenons,

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int d^2\vec{p} p_i e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{x}'-\vec{x})\cdot\vec{p}} e^{-\frac{\theta}{2\hbar^2}\vec{p}^2} &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \sqrt{\frac{\pi}{\frac{\theta}{2\hbar^2}}} \left(-\sqrt{\frac{\pi}{\frac{\theta}{2\hbar^2}}} \frac{i}{\hbar} \frac{(\vec{x}'-\vec{x})}{2\frac{\theta}{2\hbar^2}}\right) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}'-\vec{x})^2} \\
&= -\left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \pi \left(\frac{\hbar^2}{\theta}\right)^2 \left(\frac{i}{\hbar}(\vec{x}'-\vec{x})\right) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}'-\vec{x})^2} \\
&= -\frac{i\hbar}{2\pi\theta^2} (x'_i - x_i) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}'-\vec{x})^2}.
\end{aligned} \tag{B.7}$$

□

3. Nous allons supposer dans ce cas que nous n'avons pas de sommation sur l'indice i .

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{p} p_i^2 e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{x}'-\vec{x})\cdot\vec{p}} e^{-\frac{\theta}{2\hbar^2}\vec{p}^2} = \frac{\hbar^2}{2\pi\theta^2} \left(1 - \frac{1}{\theta}(x'_i - x_i)^2\right) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}'-\vec{x})^2}. \tag{B.8}$$

Démonstration. Nous allons procéder de façon similaire au point précédent où nous allons utiliser (B.3) sur l'intégrale contenant uniquement l'indice i et l'intégrale Gaussienne (B.1) sur la partie de l'intégrale avec l'autre indice. Ainsi, nous avons,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{p} p_i^2 e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{x}'-\vec{x})\cdot\vec{p}} e^{-\frac{\theta}{2\hbar^2}\vec{p}^2} &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \frac{\pi}{\frac{\theta}{2\hbar^2}} \left(\frac{1}{2\frac{\theta}{2\hbar^2}} - \frac{1}{\hbar^2} \frac{(x'_i - x_i)^2}{4\left(\frac{\theta}{2\hbar^2}\right)^2}\right) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}'-\vec{x})^2} \\
&= \frac{\hbar^2}{(2\pi\theta)} \left(\frac{1}{\theta} - \frac{(x'_i - x_i)^2}{\theta^2}\right) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}'-\vec{x})^2} \\
&= \frac{\hbar^2}{2\pi\theta^2} \left(1 - \frac{1}{\theta}(x'_i - x_i)^2\right) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}'-\vec{x})^2}.
\end{aligned} \tag{B.9}$$

□

4. En supposant ici que $i \neq j$, de plus, le fait que nous soyons en deux dimensions facilitera le calcul, du fait qu'on peut diviser l'intégrale en seulement deux parties. Comme l'indice j ne sera pas doublé ici, nous ne le supposons pas sommé ici. Nous allons donc utiliser (B.2) sur chacun des deux indices.

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{p} p_i p_j e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{x}'-\vec{x})\cdot\vec{p}} e^{-\frac{\theta}{2\hbar^2}\vec{p}^2} = -\frac{1}{(2\pi)} \frac{\hbar^2}{\theta^3} (x'_i - x_i)(x'_j - x_j) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}'-\vec{x})^2}. \tag{B.10}$$

Démonstration.

$$\frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{p} p_i p_j e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{x}'-\vec{x})\cdot\vec{p}} e^{-\frac{\theta}{2\hbar^2}\vec{p}^2} \quad (\text{B.11})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int dp_i p_i e^{-\frac{i}{\hbar}(x'_i-x_i)p_i} e^{-\frac{\theta}{2\hbar^2}p_i^2} \int dp_j p_j e^{-\frac{i}{\hbar}(x'_j-x_j)p_j} e^{-\frac{\theta}{2\hbar^2}p_j^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \left(-\frac{\hbar^2}{\theta}\right)^2 \int d p_i \frac{\partial}{\partial p_i} e^{-\frac{i}{\hbar}(x'_i-x_i)p_i} e^{-\frac{\theta}{2\hbar^2}p_i^2} \int dp_j \frac{\partial}{\partial p_j} e^{-\frac{i}{\hbar}(x'_j-x_j)p_j} e^{-\frac{\theta}{2\hbar^2}p_j^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \left(-\frac{\hbar^2}{\theta}\right)^2 \left(-\frac{i}{\hbar}\right)^2 (x'_i-x_i)(x'_j-x_j) \frac{2\hbar^2\pi}{\theta} e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}'-\vec{x})^2} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)} \frac{\hbar^2}{\theta^3} (x'_i-x_i)(x'_j-x_j) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}'-\vec{x})^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.12})$$

□

Nous allons passer maintenant à la preuve des quantités présentes dans la section 3.4.1.

Le calcul de $\langle \vec{x}, \theta | \hat{x}_i | \vec{x}', \theta \rangle$

Nous avons,

$$\langle \vec{x}, \theta | \hat{x}_i | \vec{x}', \theta \rangle = \frac{1}{2\pi\theta} \left(\frac{(\vec{x} + \vec{x}')_i}{2} - i\epsilon_{ij} \frac{(\vec{x} - \vec{x}')_j}{2} \right) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x} - \vec{x}')^2}. \quad (\text{B.13})$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \theta | \hat{x}_i | \vec{x}', \theta \rangle &= \int d^2\vec{p} d^2\vec{p}' \langle \vec{x}, \theta | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \hat{x}_i | \vec{p}' \rangle \langle \vec{p}' | \vec{x}', \theta \rangle \\ &= \int d^2\vec{p} d^2\vec{p}' \langle \vec{x}, \theta | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | (\hat{y}_i - \epsilon_{ij} \frac{1}{2} \frac{\theta}{\hbar} \hat{p}_j) | \vec{p}' \rangle \langle \vec{p}' | \vec{x}', \theta \rangle \\ &= \int d^2\vec{p} d^2\vec{p}' \langle \vec{x}, \theta | \vec{p} \rangle (i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i} \delta(\vec{p} - \vec{p}') - \epsilon_{ij} \frac{1}{2} \frac{\theta}{\hbar} p_j \delta(\vec{p} - \vec{p}')) \langle \vec{p}' | \vec{x}', \theta \rangle \\ &= \int d^2\vec{p} \langle \vec{x}, \theta | \vec{p} \rangle (i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i} - \epsilon_{ij} \frac{1}{2} \frac{\theta}{\hbar} p_j) \langle \vec{p} | \vec{x}', \theta \rangle. \end{aligned} \quad (\text{B.14})$$

Nous avons le résultat intermédiaire suivant,

$$\begin{aligned} i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i} \langle \vec{p} | \vec{x}', \theta \rangle &= i\hbar \frac{1}{2\pi\hbar} \frac{\partial}{\partial p_i} (e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{x}'\cdot\vec{p}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}\vec{p}^2}) \\ &= i(-ix'_i - \frac{\theta}{2\hbar} p_i) \frac{1}{2\pi\hbar} (e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{x}'\cdot\vec{p}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}\vec{p}^2}) \\ &= (x'_i - i \frac{\theta}{2\hbar} p_i) \langle \vec{p} | \vec{x}', \theta \rangle, \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

ce qui nous permet de continuer le calcul à (B.14),

$$\begin{aligned} &= \int d^2\vec{p} \langle \vec{x}, \theta | \vec{p} \rangle (x'_i - i \frac{\theta}{2\hbar} p_i - \epsilon_{ij} \frac{1}{2} \frac{\theta}{\hbar} p_j) \langle \vec{p} | \vec{x}', \theta \rangle \\ &= \left(\frac{1}{2\pi\hbar}\right)^2 \int d^2\vec{p} (x'_i - i \frac{\theta}{2\hbar} p_i - \epsilon_{ij} \frac{1}{2} \frac{\theta}{\hbar} p_j) e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{x}'-\vec{x})\cdot\vec{p}} e^{-\frac{\theta}{2\hbar^2}\vec{p}^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2\pi\theta} \left(\frac{1}{2}(x_i + x'_i) - \epsilon_{ij} \frac{i}{2}(x_j - x'_j) \right) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}' - \vec{x})^2}, \quad (\text{B.16})$$

ce qui conclut la preuve. $\square$

Le calcul de $\langle \vec{x}, \theta | \hat{p}_i | \vec{x}', \theta \rangle$

Nous avons,

$$\langle \vec{x}, \theta | \hat{p}_i | \vec{x}', \theta \rangle = i \frac{\hbar}{\theta} (x_i - x'_i) \frac{1}{2\pi\theta} e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x} - \vec{x}')^2}. \quad (\text{B.17})$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \theta | \hat{p}_i | \vec{x}', \theta \rangle &= \int d^2\vec{p} d^2\vec{p}' \langle \vec{x}, \theta | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \hat{p}_i | \vec{p}' \rangle \langle \vec{p}' | \vec{x}', \theta \rangle \\ &= \int d^2\vec{p} d^2\vec{p}' \langle \vec{x}, \theta | \vec{p} \rangle p_i \delta(\vec{p} - \vec{p}') \langle \vec{p}' | \vec{x}', \theta \rangle \\ &= \int d^2\vec{p} \langle \vec{x}, \theta | \vec{p} \rangle p_i \langle \vec{p} | \vec{x}', \theta \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{p} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{x} \cdot \vec{p}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}\vec{p}^2} p_i e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{x}' \cdot \vec{p}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}\vec{p}^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{p} p_i e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{x}' - \vec{x}) \cdot \vec{p}} e^{-\frac{\theta}{2\hbar^2}\vec{p}^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.18})$$

Nous avons déjà calculé ce genre de résultat auparavant en (B.6), ce qui nous donne,

$$= -\frac{i\hbar}{2\pi\theta^2} (x'_i - x_i) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}' - \vec{x})^2}. \quad (\text{B.19})$$

$\square$

Le calcul de $\langle \vec{x}, \theta | \hat{p}_i^2 | \vec{x}', \theta \rangle$

Nous avons,

$$\langle \vec{x}, \theta | \hat{p}_i | \vec{x}', \theta \rangle = \frac{\hbar^2}{\theta} \left(1 - \frac{1}{\theta} (x'_i - x_i)^2 \right) \frac{1}{2\pi\theta} e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}' - \vec{x})^2}. \quad (\text{B.20})$$

Démonstration. Nous trouvons que,

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \theta | \hat{p}_i^2 | \vec{x}', \theta \rangle &= \int d^2\vec{p} d^2\vec{p}' \langle \vec{x}, \theta | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \hat{p}_i | \vec{p}' \rangle \langle \vec{p}' | \vec{x}', \theta \rangle \\ &= \int d^2\vec{p} d^2\vec{p}' \langle \vec{x}, \theta | \vec{p} \rangle p_i^2 \delta(\vec{p} - \vec{p}') \langle \vec{p}' | \vec{x}', \theta \rangle \\ &= \int d^2\vec{p} \langle \vec{x}, \theta | \vec{p} \rangle p_i^2 \langle \vec{p} | \vec{x}', \theta \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{p} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{x} \cdot \vec{p}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}\vec{p}^2} p_i^2 e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{x}' \cdot \vec{p}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2}\vec{p}^2} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{p} p_i^2 e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{x}' - \vec{x}) \cdot \vec{p}} e^{-\frac{\theta}{2\hbar^2} \vec{p}^2}. \quad (\text{B.21})$$

Ceci a déjà été calculé en (B.8), ce qui nous donne,

$$= \frac{\hbar^2}{\theta} \left(1 - \frac{1}{\theta} (x'_i - x_i)^2\right) \frac{1}{2\pi\theta} e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}' - \vec{x})^2}. \quad (\text{B.22})$$

□

Le calcul de $\langle \vec{x}, \theta | \hat{y}_i^2 | \vec{x}', \theta \rangle$

Nous avons,

$$\langle \vec{x}, \theta | \hat{y}_i^2 | \vec{x}', \theta \rangle = \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\theta} x_i^2 + \pi \frac{(x'_i - x_i)^2}{2\theta} + 2x_i \frac{\pi(x'_i - x_i)}{\theta} \right) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}' - \vec{x})^2}. \quad (\text{B.23})$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \theta | \hat{y}_i^2 | \vec{x}', \theta \rangle &= \int d^2\vec{p} d^2\vec{p}' \langle \vec{x}, \theta | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | \hat{y}_i^2 | \vec{p}' \rangle \langle \vec{p}' | \vec{x}', \theta \rangle \\ &= -\frac{\hbar^2}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{p} d^2\vec{p}' e^{\frac{i}{\hbar}\vec{x} \cdot \vec{p}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} \vec{p}^2} \frac{\partial^2}{\partial p_i^2} \delta(\vec{p} - \vec{p}') e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{x}' \cdot \vec{p}'} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} \vec{p}'^2} \\ &= -\frac{\hbar^2}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{p} e^{\frac{i}{\hbar}\vec{x} \cdot \vec{p}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} \vec{p}^2} \left(-\frac{\theta}{2\hbar^2} + \left(\frac{i}{\hbar} x_i - \frac{\theta}{2\hbar^2} p_i \right)^2 \right) e^{-\frac{i}{\hbar}\vec{x}' \cdot \vec{p}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} \vec{p}^2} \\ &= -\frac{\hbar^2}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2\vec{p} \left(-\frac{\theta}{2\hbar^2} - \frac{1}{\hbar^2} x_i^2 + \left(\frac{\theta}{2\hbar^2} \right)^2 p_i^2 - \frac{i2}{\hbar} \frac{\theta}{2\hbar^2} x_i p_i \right) e^{-\frac{i}{\hbar}(\vec{x}' - \vec{x}) \cdot \vec{p}} e^{-\frac{\theta}{2\hbar^2} \vec{p}^2}, \end{aligned}$$

et en utilisant les résultats issus de (B.1), (B.2) et (B.3), nous obtenons,

$$\begin{aligned} &= -\frac{\hbar^2}{(2\pi\hbar)^2} \left(-\frac{2\pi\hbar^2}{\theta} \frac{\theta}{2\hbar^2} - \frac{2\pi\hbar^2}{\theta} \frac{1}{\hbar^2} x_i^2 + \left(\frac{\theta}{2\hbar^2} \right)^2 \left(\frac{\pi}{2(\frac{\theta}{2\hbar^2})^2} - \frac{\pi}{\hbar^2} \frac{(x'_i - x_i)^2}{4(\frac{\theta}{2\hbar^2})^3} \right) \right. \\ &\quad \left. + \frac{i2}{\hbar} \frac{\theta}{2\hbar^2} x_i \frac{\pi \frac{i}{\hbar} (x'_i - x_i)}{2(\frac{\theta}{2\hbar^2})^2} \right) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}' - \vec{x})^2} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \left(-\frac{2\pi\hbar^2}{\theta} \frac{\theta}{2\hbar^2} - \frac{2\pi\hbar^2}{\theta} \frac{1}{\hbar^2} x_i^2 + \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{\hbar^2} \frac{(x'_i - x_i)^2}{4\frac{\theta}{2\hbar^2}} \right) \right. \\ &\quad \left. - \frac{2}{\hbar} \frac{1}{\hbar} \frac{\theta}{2\hbar^2} x_i \frac{\pi(x'_i - x_i)}{2(\frac{\theta}{2\hbar^2})^2} \right) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}' - \vec{x})^2} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \left(-\pi - \frac{2\pi}{\theta} x_i^2 + \frac{\pi}{2} - \pi \frac{(x'_i - x_i)^2}{2\theta} - \frac{2}{\hbar} \frac{1}{\hbar} x_i \frac{\pi(x'_i - x_i)}{2(\frac{\theta}{2\hbar^2})} \right) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}' - \vec{x})^2} \\ &= -\frac{1}{(2\pi)^2} \left(-\frac{\pi}{2} - \frac{2\pi}{\theta} x_i^2 - \pi \frac{(x'_i - x_i)^2}{2\theta} - 2x_i \frac{\pi(x'_i - x_i)}{\theta} \right) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}' - \vec{x})^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\theta} x_i^2 + \pi \frac{(x'_i - x_i)^2}{2\theta} + 2x_i \frac{\pi(x'_i - x_i)}{\theta} \right) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}' - \vec{x})^2}. \quad (\text{B.24}) \end{aligned}$$

□

Le calcul de $\langle \vec{x}, \theta | \hat{p}_j \hat{y}_i | \vec{x}', \theta \rangle$

Nous avons,

$$\langle \vec{x}, \theta | p_j y_i | \vec{x}', \theta \rangle = \frac{i\hbar}{4\pi\theta^2} (x'_j - x_j)(x'_i + x_i) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}' - \vec{x})^2}. \quad (\text{B.25})$$

Démonstration. Nous trouvons que,

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \theta | p_j y_i | \vec{x}', \theta \rangle &= \int d^2 \vec{p} d^2 \vec{p}' \langle \vec{x}, \theta | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | p_j y_i | \vec{p}' \rangle \langle \vec{p}' | \vec{x}', \theta \rangle \\ &= \int d^2 \vec{p} d^2 \vec{p}' d^2 \vec{p}'' \langle \vec{x}, \theta | \vec{p} \rangle \langle \vec{p} | p_j | \vec{p}'' \rangle \langle \vec{p}'' | y_i | \vec{p}' \rangle \langle \vec{p}' | \vec{x}', \theta \rangle \\ &= \int d^2 \vec{p} d^2 \vec{p}' d^2 \vec{p}'' \langle \vec{x}, \theta | \vec{p} \rangle (p_j \delta(\vec{p} - \vec{p}'')) (i\hbar \frac{\partial}{\partial p_i''} \delta(\vec{p}'' - \vec{p}')) \langle \vec{p}' | \vec{x}', \theta \rangle \\ &= i\hbar \int d^2 \vec{p} d^2 \vec{p}' \langle \vec{x}, \theta | \vec{p} \rangle p_j \frac{\partial}{\partial p_i} \delta(\vec{p} - \vec{p}') \langle \vec{p}' | \vec{x}', \theta \rangle \\ &= i\hbar \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2 \vec{p} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot \vec{p}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} \vec{p}^2} p_j \frac{\partial}{\partial p_i} (e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{x}' \cdot \vec{p}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} \vec{p}^2}) \\ &= -i\hbar \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \int d^2 \vec{p} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot \vec{p}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} \vec{p}^2} p_j \left(\frac{i}{\hbar} x'_i + \frac{\theta}{2\hbar^2} p_i \right) (e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{x}' \cdot \vec{p}} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} \vec{p}^2}) \\ &= -i\hbar \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{\sqrt{\pi}(x'_j - x_j)}{2(\frac{\theta}{2\hbar^2})^{\frac{3}{2}}} \right) \left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\frac{\theta}{2\hbar^2}}} \frac{i}{\hbar} x'_i + \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{\sqrt{\pi}(x'_i - x_i)}{2(\frac{\theta}{2\hbar^2})^{\frac{3}{2}}} \right) \frac{\theta}{2\hbar^2} \right) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}' - \vec{x})^2} \\ &= -i\hbar \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{\pi(x'_j - x_j)}{2(\frac{\theta}{2\hbar^2})^2} \right) \left(\frac{i}{\hbar} x'_i + \left(-\frac{i}{2\hbar} (x'_i - x_i) \right) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}' - \vec{x})^2} \right) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \left(-\frac{i}{\hbar} \frac{\pi(x'_j - x_j)}{4(\frac{\theta}{2\hbar^2})^2} \right) (x_i + x'_i) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}' - \vec{x})^2} \\ &= \frac{i\hbar}{4\pi\theta^2} (x_j - x'_j)(x_i + x'_i) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}' - \vec{x})^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.26})$$

□

Le calcul de $\langle \vec{x}, \theta | \hat{x}_i^2 | \vec{x}', \theta \rangle$

Nous avons,

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \theta | \hat{x}_i^2 | \vec{x}', \theta \rangle &= \frac{1}{4\pi\theta} \left(\theta + \frac{(x'_i - x_i)^2}{2} + 2x_i x'_i - (\epsilon_{ij})^2 \frac{(x'_j - x_j)^2}{2} \right. \\ &\quad \left. - \epsilon_{ij}(x_j - x'_j)(x_i + x'_i) \right) e^{-\frac{1}{2\theta}(\vec{x}' - \vec{x})^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.27})$$

Démonstration. Nous trouvons que

$$\langle \vec{x}, \theta | x_i^2 | \vec{x}', \theta \rangle = \langle \vec{x}, \theta | (y_i - \frac{1}{2}\bar{\theta}\epsilon_{ij}p_j)^2 | \vec{x}', \theta \rangle$$

$$\begin{aligned}
 &= \langle \vec{x}, \theta | (y_i^2 + \frac{1}{4} \bar{\theta} (\epsilon_{ij} p_j)^2 - \bar{\theta} \epsilon_{ij} y_i p_j) | \vec{x}', \theta \rangle \\
 &= \langle \vec{x}, \theta | y_i^2 | \vec{x}', \theta \rangle \\
 &\quad + \frac{1}{4} \bar{\theta}^2 (\epsilon_{ij})^2 \langle \vec{x}, \theta | (p_j)^2 | \vec{x}', \theta \rangle \\
 &\quad - \bar{\theta} \epsilon_{ij} \langle \vec{x}, \theta | y_i p_j | \vec{x}', \theta \rangle \\
 &= \frac{1}{(2\pi)^2} \left(\frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{\theta} x_i^2 + \pi \frac{(x'_i - x_i)^2}{2\theta} + 2x_i \frac{\pi(x'_i - x_i)}{\theta} \right) e^{-\frac{1}{2\theta} (\vec{x}' - \vec{x})^2} \\
 &\quad + \frac{1}{4} \frac{\theta^2}{\hbar^2} (\epsilon_{ij})^2 \left(\frac{\hbar^2}{(2\pi)^2} \frac{1}{\theta^2} (1 - (x'_j - x_j)^2 \frac{1}{\theta}) e^{-\frac{1}{2\theta} (\vec{x}' - \vec{x})^2} \right) \\
 &\quad - \frac{\theta}{\hbar} \epsilon_{ij} \left(\frac{i\hbar}{4\pi\theta^2} (x_j - x'_j) (x_i + x'_i) e^{-\frac{1}{2\theta} (\vec{x}' - \vec{x})^2} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\theta} \left(\frac{\theta}{2} + \frac{(x'_i - x_i)^2}{2} + 2x_i x'_i \right) e^{-\frac{1}{2\theta} (\vec{x}' - \vec{x})^2} \\
 &\quad + \frac{1}{8\pi\theta} \left((\theta - (\epsilon_{ij})^2 (x'_j - x_j)^2) e^{-\frac{1}{2\theta} (\vec{x}' - \vec{x})^2} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{\hbar} \epsilon_{ij} \left(\frac{i\hbar}{4\pi\theta} (x_j - x'_j) (x_i + x'_i) e^{-\frac{1}{2\theta} (\vec{x}' - \vec{x})^2} \right) \\
 &= \frac{1}{4\pi\theta} \left(\theta + \frac{(x'_i - x_i)^2}{2} + 2x_i x'_i \right) e^{-\frac{1}{2\theta} (\vec{x}' - \vec{x})^2} \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi\theta} \left((\epsilon_{ij})^2 \frac{(x'_j - x_j)^2}{2} e^{-\frac{1}{2\theta} (\vec{x}' - \vec{x})^2} \right) \\
 &\quad - \frac{1}{4\pi\theta} \left(\epsilon_{ij} (x_j - x'_j) (x_i + x'_i) e^{-\frac{1}{2\theta} (\vec{x}' - \vec{x})^2} \right). \tag{B.28}
 \end{aligned}$$

□

Le calcul de $\langle \vec{x}, \theta | \hat{x}^2 | \vec{x}', \theta \rangle$

Nous avons,

$$\langle \vec{x}, \theta | \hat{x}^2 | \vec{x}', \theta \rangle = \frac{1}{2\pi\theta} (\theta + \vec{x} \cdot \vec{x}' - i\vec{x} \times \vec{x}') e^{-\frac{1}{2\theta} (\vec{x}' - \vec{x})^2}. \tag{B.29}$$

Démonstration. Nous trouvons que,

$$\begin{aligned}
 &\langle \vec{x}, \theta | \vec{x}^2 | \vec{x}', \theta \rangle \\
 &= \frac{1}{4\pi\theta} \sum_i \left(\theta + \frac{(x'_i - x_i)^2}{2} - (\epsilon_{ij})^2 \frac{(x'_j - x_j)^2}{2} + 2x_i x'_i - i\epsilon_{ij} (x_j - x'_j) (x_i + x'_i) \right) e^{-\frac{1}{2\theta} (\vec{x}' - \vec{x})^2} \\
 &= \frac{1}{4\pi\theta} \left(2\theta + 2 \sum_i x_i x'_i - i2 \sum_i \epsilon_{ij} x_i x'_j \right) e^{-\frac{1}{2\theta} (\vec{x}' - \vec{x})^2} \\
 &= \frac{1}{2\pi\theta} (\theta + \vec{x} \cdot \vec{x}' - i\vec{x} \times \vec{x}') e^{-\frac{1}{2\theta} (\vec{x}' - \vec{x})^2}. \tag{B.30}
 \end{aligned}$$

□

Le calcul de $\langle \vec{x}, \theta | \hat{p}^2 | \vec{x}', \theta \rangle$

Nous avons,

$$\langle \vec{x}, \theta | \hat{p}^2 | \vec{x}', \theta \rangle = 2 \frac{\hbar^2}{\theta} \left(1 - \frac{1}{2\theta} (\vec{x} - \vec{x}')^2 \right) \frac{1}{2\pi\theta} e^{-\frac{1}{2\theta} (\vec{x} - \vec{x}')^2}. \quad (\text{B.31})$$

Démonstration. Nous trouvons que,

$$\begin{aligned} \langle \vec{x}, \theta | \hat{p}^2 | \vec{x}', \theta \rangle &= \sum_i \left(\frac{\hbar^2}{\theta} \left(1 - \frac{1}{\theta} (x'_i - x_i)^2 \right) \frac{1}{2\pi\theta} e^{-\frac{1}{2\theta} (\vec{x}' - \vec{x})^2} \right) \\ &= \sum_i 2 \frac{\hbar^2}{\theta} \left(2 - \frac{1}{2\theta} \sum_i (x'_i - x_i)^2 \right) \frac{1}{2\pi\theta} e^{-\frac{1}{2\theta} (\vec{x}' - \vec{x})^2} \\ &= 2 \frac{\hbar^2}{\theta} \left(1 - \frac{1}{2\theta} (\vec{x} - \vec{x}')^2 \right) \frac{1}{2\pi\theta} e^{-\frac{1}{2\theta} (\vec{x} - \vec{x}')^2}. \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

□

C Compléments de calcul de la partie 3.4.2

Le commutateur $[[\vec{x}, \theta] *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta |, \hat{p}_i]$

Nous avons l'expression suivante,

$$[[\vec{x}, \theta] *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta |, \hat{p}_i] = -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} ([\vec{x}, \theta] *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta |). \quad (\text{C.1})$$

Démonstration. Nous allons utiliser la représentation en $|\vec{p}\rangle$,

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} | [[\vec{x}, \theta] *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta |, \hat{p}_i] | \vec{p}' \rangle &= \langle \vec{p} | \vec{x}, \theta \rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta | \hat{p}_i | \vec{p}' \rangle - \langle \vec{p} | \hat{p}_i | \vec{x}, \theta \rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta | \vec{p}' \rangle \\ &= p'_i \langle \vec{p} | \vec{x}, \theta \rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta | \vec{p}' \rangle - p_i \langle \vec{p} | \hat{p}_i | \vec{x}, \theta \rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta | \vec{p}' \rangle \\ &= (p'_i - p_i) \langle \vec{p} | \vec{x}, \theta \rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta | \vec{p}' \rangle. \end{aligned} \quad (\text{C.2})$$

Dans la preuve de l'expression de la relation de complétude (3.4.13), nous pouvons retrouver l'expression,

$$\langle \vec{p} | \vec{x}, \theta \rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta | \vec{p}' \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} (e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot (\vec{p} - \vec{p}')} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (\vec{p} - \vec{p}')^2}), \quad (\text{C.3})$$

ce qui implique donc,

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \langle \vec{p} | \vec{x}, \theta \rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta | \vec{p}' \rangle = \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} \frac{-i}{\hbar} (p_i - p'_i) (e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot (\vec{p} - \vec{p}')} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (\vec{p} - \vec{p}')^2}), \quad (\text{C.4})$$

ce qui nous permet de terminer la preuve par,

$$= -i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} \langle \vec{p} | \vec{x}, \theta \rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta | \vec{p}' \rangle$$

$$= \langle \vec{p} | (-i\hbar \frac{\partial}{\partial x_i} |\vec{x}, \theta\rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta |) | \vec{p}' \rangle. \quad (\text{C.5})$$

□

Le commutateur $[\vec{x}, \theta] *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta |, \hat{p}_i^2]$

Nous allons maintenant prouver la relation,

$$[\vec{x}, \theta] *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta |, \hat{p}_i^2] = -i\hbar \vec{\nabla}_{\vec{x}} \cdot (|\vec{x}, \theta\rangle *_{\vec{x}} (-i\hbar \vec{\nabla}_{\vec{x}}) \langle \vec{x}, \theta |). \quad (\text{C.6})$$

Démonstration. Nous allons commencer par prouver,

$$[\vec{x}, \theta] *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta |, \hat{p}_i^2] = -i\hbar \frac{\vec{\partial}}{\partial x_i} \cdot \left(|\vec{x}, \theta\rangle *_{\vec{x}} (-i\hbar \frac{\vec{\partial}}{\partial x_i}) \langle \vec{x}, \theta | \right). \quad (\text{C.7})$$

Cette relation se prouve de la façon suivante,

$$\begin{aligned} & \langle \vec{p} | [\vec{x}, \theta] *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta |, \hat{p}_i^2] | \vec{p}' \rangle \\ &= \langle \vec{p} | \vec{x}, \theta \rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta | \hat{p}_i^2 | \vec{p}' \rangle - \langle \vec{p} | \hat{p}_i^2 | \vec{x}, \theta \rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta | \vec{p}' \rangle \\ &= (p_i'^2 - p_i^2) \langle \vec{p} | \vec{x}, \theta \rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta | \vec{p}' \rangle \\ &= (p_i'^2 - p_i^2) \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} (e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot (\vec{p} - \vec{p}')} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (\vec{p} - \vec{p}')^2}) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} (e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot \vec{p}} (-i\hbar)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot \vec{p}'} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (\vec{p} - \vec{p}')^2} - (-i\hbar)^2 \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot \vec{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot \vec{p}'} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (\vec{p} - \vec{p}')^2}), \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

en utilisant l'anti-symétrie de l'expression,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x_i} (e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot \vec{p}} (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x_i} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot \vec{p}'} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (\vec{p} - \vec{p}')^2} - (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x_i} e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot \vec{p}} e^{\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot \vec{p}'} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (\vec{p} - \vec{p}')^2}) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} (-i\hbar) \frac{\partial}{\partial x_i} (e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot \vec{p}} \left((-i\hbar) \frac{\vec{\partial}}{\partial x_i} \right) e^{\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot \vec{p}'} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (\vec{p} - \vec{p}')^2}). \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Nous rappelons ici juste que comme $*_{\vec{x}}$ n'est composé que de dérivées partielles du genre $\frac{\partial^n}{\partial x_i^n}$, l'ordre d'application de $*_{\vec{x}}$ ou de $\frac{\partial}{\partial x_i}$ n'a pas d'importance. Nous pouvons donc écrire,

$$\begin{aligned} &= (-i\hbar) \frac{\vec{\partial}}{\partial x_i} \left(\langle \vec{p} | \vec{x}, \theta \rangle *_{\vec{x}} \left((-i\hbar) \frac{\vec{\partial}}{\partial x_i} \right) \langle \vec{x}, \theta | \vec{p}' \rangle \right) \\ &= \langle \vec{p} | (-i\hbar) \frac{\vec{\partial}}{\partial x_i} \left(|\vec{x}, \theta\rangle *_{\vec{x}} \left((-i\hbar) \frac{\vec{\partial}}{\partial x_i} \right) \langle \vec{x}, \theta | \right) | \vec{p}' \rangle, \end{aligned} \quad (\text{C.10})$$

ce qui termine la preuve.

□

Le commutateur $[\vec{x}, \theta] *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta |, \hat{x}_i]$

Maintenant, prenons la dernière des trois propriétés de commutation,

$$[\vec{x}, \theta] *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta |, \hat{x}_i] = -\frac{i}{2} \theta \epsilon_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (|\vec{x}, \theta\rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta|). \quad (\text{C.11})$$

Démonstration. Nous allons en premier montrer que le commutateur $[\vec{x}, \theta] *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta |, \hat{y}_i]$ est nul. Calculons les deux termes qui le composent :

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} | \vec{x}, \theta \rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta | \hat{y}_i | \vec{p}' \rangle &= \int d^2 \vec{y} d^2 \vec{y}' d^2 \vec{p}'' \langle \vec{p} | \vec{x}, \theta \rangle *_{\vec{x}} |\vec{p}''\rangle \langle \vec{p}'' | \langle \vec{x}, \theta | \vec{y} \rangle \langle \vec{y} | \hat{y}_i | \vec{y}' \rangle \langle \vec{y}' | \vec{p}' \rangle \\ &= \int d^2 \vec{y} d^2 \vec{p}'' \langle \vec{p} | \vec{x}, \theta \rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta | \vec{p}'' \rangle \langle \vec{p}'' | \vec{y} \rangle y_i \langle \vec{y} | \vec{p}' \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int d^2 \vec{y} d^2 \vec{p}'' (e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot (\vec{p} - \vec{p}'')} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (\vec{p} - \vec{p}'')^2}) e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{y} \cdot \vec{p}''} y_i e^{\frac{i}{\hbar} \vec{y} \cdot \vec{p}'}. \end{aligned} \quad (\text{C.12})$$

Nous allons procéder à un changement de variable donné par $\vec{p}'' \rightarrow \vec{p} - \vec{p}''$. Dans le cas où nous avons deux dimensions, le signe devant l'intégrale ne changera pas.

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int d^2 \vec{y} d^2 \vec{p}'' (e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot (\vec{p}'')} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (\vec{p}'')^2}) e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{y} \cdot (\vec{p} - \vec{p}'')} y_i e^{\frac{i}{\hbar} \vec{y} \cdot \vec{p}} \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int d^2 \vec{y} d^2 \vec{p}'' (e^{-\frac{i}{\hbar} (\vec{x} - \vec{y}) \cdot \vec{p}''} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (\vec{p}'')^2}) e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{y} \cdot (\vec{p})} y_i e^{\frac{i}{\hbar} \vec{y} \cdot \vec{p}} \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int d^2 \vec{y} d^2 \vec{p}'' (e^{-\frac{i}{\hbar} (\vec{x} - \vec{y}) \cdot \vec{p}''} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (\vec{p}'')^2}) y_i \end{aligned} \quad (\text{C.13})$$

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int d^2 \vec{y} \frac{4\hbar^2 \pi}{\theta} e^{-\frac{\vec{y}^2}{\theta}} (x_i - y_i) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \frac{4\hbar^2 \pi}{\theta} \pi \theta x_i \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^2} x_i. \end{aligned} \quad (\text{C.14})$$

L'autre terme nous donne ainsi,

$$\begin{aligned} \langle \vec{p} | \hat{y}_i | \vec{x}, \theta \rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta | \vec{p}' \rangle &= \int d^2 \vec{y} d^2 \vec{y}' d^2 \vec{p}'' \langle \vec{p} | \vec{y} \rangle \langle \vec{y} | \hat{y}_i | \vec{y}' \rangle \langle \vec{y}' | \vec{p}'' \rangle \langle \vec{p}'' | \vec{x}, \theta \rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta | \vec{p}' \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int d^2 \vec{y} d^2 \vec{y}' d^2 \vec{p}'' e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{y} \cdot \vec{p}} \delta(\vec{y} - \vec{y}') y_i e^{\frac{i}{\hbar} \vec{y}' \cdot \vec{p}''} (e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot (\vec{p}' - \vec{p}'')} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (\vec{p}' - \vec{p}'')^2}) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int d^2 \vec{y} d^2 \vec{p}'' e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{y} \cdot (\vec{p} - \vec{p}'')} y_i (e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot (\vec{p}' - \vec{p}'')} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (\vec{p}' - \vec{p}'')^2}). \end{aligned} \quad (\text{C.15})$$

Ici, nous allons procéder au changement de variable $\vec{p}'' \rightarrow \vec{p}' - \vec{p}$, qui nous donne,

$$\begin{aligned} &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int d^2 \vec{y} d^2 \vec{p}'' e^{\frac{i}{\hbar} \vec{y} \cdot (\vec{p}'')} y_i (e^{-\frac{i}{\hbar} \vec{x} \cdot (\vec{p}'')} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (\vec{p}'')^2}) \\ &= \frac{1}{(2\pi\hbar)^4} \int d^2 \vec{y} d^2 \vec{p}'' y_i (e^{-\frac{i}{\hbar} (\vec{x} - \vec{y}) \cdot \vec{p}''} e^{-\frac{\theta}{4\hbar^2} (\vec{p}'')^2}) \end{aligned} \quad (\text{C.16})$$

Nous pouvons remarquer que ce résultat correspond au résultat trouvé en (C.13), et il n'est donc pas difficile de voir que ce résultat mène à,

$$[|\vec{x}, \theta\rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta|, \hat{y}_i] = 0. \quad (\text{C.17})$$

Nous pouvons donc déterminer l'expression suivante,

$$[|\vec{x}, \theta\rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta|, \hat{x}_i] = [|\vec{x}, \theta\rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta|, \hat{y}_i] - \frac{\theta}{2\hbar} \epsilon_{ij} [|\vec{x}, \theta\rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta|, \hat{p}_j] \quad (\text{C.18})$$

$$= i \frac{\theta}{2} \epsilon_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} (|\vec{x}, \theta\rangle *_{\vec{x}} \langle \vec{x}, \theta|), \quad (\text{C.19})$$

où nous avons utilisé les expressions en (C.17) et (C.1). □

Bibliographie

- [1] Xavier Calmet. Cosmological constant and noncommutative spacetime. *EPL*, 77(1) :19902, 2007.
- [2] Michael R. Douglas and Nikita A. Nekrasov. Noncommutative field theory. *Rev. Mod. Phys.*, 73 :977–1029, 2001.
- [3] F.G. Scholtz, L. Gouba, A. Hafver, and C.M. Rohwer. Formulation, Interpretation and Application of non-Commutative Quantum Mechanics. *J. Phys. A*, 42 :175303, 2009.
- [4] David Tong. Applications of quantum mechanics. <http://www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/aqm/justsix.pdf>, 2017.
- [5] Jan Govaerts. Hamiltonian Reduction of First Order Actions. *Int. J. Mod. Phys. A*, 5 :3625–3640, 1990.
- [6] F.J. Vanhecke, C. Sigaud, and A.R. da Silva. Noncommutative configuration space. Classical and quantum mechanical aspects. *Braz. J. Phys.*, 36 :194–207, 2006.
- [7] J. Govaerts. Communication privée, note 1, 18 March 2020.
- [8] Gaston Darboux. Sur le problème de pfaff. *Bulletin des Sciences Mathématiques et Astronomiques*, 2e série, 6(1) :49–68, 1882.
- [9] C. Cohen-Tannoudji, B. Diu, and F. Laloë. *Mécanique quantique*. Number vol. 1 in Collection Enseignement des sciences, 16. Masson, 1973.
- [10] H. P. Robertson. An indeterminacy relation for several observables and its classical interpretation. *Phys. Rev.*, 46 :794–801, Nov 1934.
- [11] D.A. Trifonov. Robertson intelligent states. *J. Phys. A*, 30 :5941–5957, 1997.
- [12] D.A. Trifonov. Schrodinger uncertainty relation and its minimization states. *Phys. World*, 24 :107–116, 2001.
- [13] Jan Govaerts. Towards the Quantum Geometry of Saturated Quantum Uncertainty Relations : The Case of the (Q, P) Heisenberg Observables. 6 2018.
- [14] J. Govaerts. Communication privée, note 3, 16 April 2020.
- [15] J. Govaerts. Communication privée, note 4, 24 April 2020.
- [16] J. Govaerts. Communication privée, note 5, 26 April 2020.
- [17] J. Govaerts. Communication privée, note 6, 19 May 2020.
- [18] L.G. Shapiro and G.C. Stockman. *Computer Vision*. Prentice-Hall, Upper Saddle River, NJ, 2001.
- [19] Carl David. The particle in a box (and in a circular box). *Chemistry Education Materials*, 06 2006.

-
- [20] F.G. Scholtz, B. Chakraborty, J. Govaerts, and S. Vaidya. Spectrum of the non-commutative spherical well. *J. Phys. A*, 40 :14581–14592, 2007.
- [21] Bernhard Riemann. *Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Functionen einer veränderlichen complexen Grösse. (Inauguraldissertation, Göttingen 1851.)*, page 3–47. Cambridge Library Collection - Mathematics. Cambridge University Press, 2013.
- [22] Izrail Solomonovich Gradshteyn, I M Ryzhik, Daniel Zwillinger, and Victor Moll. *Table of integrals, series, and products; 8th ed.* Academic Press, Amsterdam, Sep 2014.

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN

Faculté des sciences

Place des sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/sc