

Faculté des sciences

Opérateur de type Dirac et trou noir BHTZ

Auteur : Louis De Man

Promoteur·rice : Pierre Bieliavsky

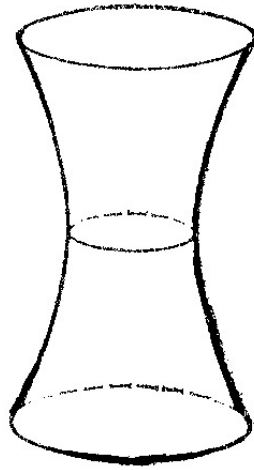
Lecteur·rices : Jean Van Schaftingen et Heiner Olbermann

Année académique 2019-2020

Master[120] en sciences mathématiques, finalité approfondie

Opérateur de type Dirac et trou noir BHTZ

Louis De Man



PROMOTEUR : PIERRE BIELIAVSKY

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN

FACULTÉ DES SCIENCES

ÉCOLE DE MATHÉMATIQUE

2019–2020

Remerciements

Merci à Pierre Bieliavsky pour sa disponibilité exceptionnelle, son enthousiasme communicatif et ses conseils précieux à tous les niveaux.

Merci à Thibaut Grouy pour son exposé sur l'opérateur de Dirac et ses notes parfaites qui ont éclairé beaucoup de mes trous noirs.

Merci à mon Papa, pour ses relectures orthographiques héroïques de ce mémoire sympathique mais hermétique.

Table des matières

Remerciements	iii
Introduction	1
Chapitre 1. Groupe spin et représentations spinorielles	5
1.1. Algèbres de Clifford	5
1.2. Le groupe Spin	6
1.3. Représentations spinorielles	8
1.4. Spin(2,1)	11
Chapitre 2. Fibrés et connexions	15
2.1. Fibrés vectoriels	16
2.2. Fibrés principaux	18
2.3. Fibrés vectoriels associés	23
2.4. Propriété de construction	26
Chapitre 3. L'opérateur de Dirac dans le cadre riemannien	31
3.1. Structure spinorielle et multiplication de Clifford	32
3.2. Opérateur de Dirac	37
3.3. Formule de Lichnerowicz-Weitzenböck	38
3.4. Structure hermitienne	43
Chapitre 4. Géométrie du trou noir non-rotationnel en dimension 2+1	49
4.1. Espaces Anti-de Sitter	49
4.2. Feuilletage d'AdS ₃ en espaces AdS ₂	52
4.3. Construction du trou noir	55
4.4. Horizons du trou noir et structure causale	56
4.5. Un autre système de coordonnées	60
Chapitre 5. Opérateur de type Dirac sur AdS ₂	65
5.1. Structure spinorielle pseudo-riemannienne	65
5.2. Construction	66
5.3. Propriétés	69
Conclusion	75
Notations	77
Bibliographie	79

Introduction

On peut associer à certaines variétés riemanniennes, appelées variétés spin, un triplet spectral $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ qui encode toute l'information géométrique. Un peu plus explicitement, soit M une variété riemannienne spin, compacte et lisse. On définit $\mathcal{A} = C^\infty(M)$ l'algèbre des fonctions lisses à valeurs réelles sur M . Ensuite, un des éléments issu de la structure spinorielle de M est un fibré S appelé fibré des spineurs. Les sections L^2 de ce fibré définissent un espace de Hilbert $\mathcal{H} = L^2(S)$. Enfin, il existe un opérateur différentiel, agissant sur les sections du fibré des spineurs, et en particulier sur \mathcal{H} , qui encode la métrique de la variété. Il s'agit de l'opérateur de Dirac D . On obtient ainsi le triplet spectral associé à M :

$$(\mathcal{A} = C^\infty(M), \mathcal{H} = L^2(S), D).$$

La propriété remarquable de ces triplets est que, sous certaines conditions sur \mathcal{H} et D exposées par A.Connes [8], tout triplet $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D)$ avec \mathcal{A} commutative et unitaire, est isomorphe au triplet spectral d'une unique variété spin. En bref, il est possible d'encoder de manière algébrique et opératoire toute l'information géométrique de certaines variétés riemanniennes. Qu'en est-il des variétés spin pseudo-riemanniennes? Pourrait-on également les associer une à une à des triplets spectraux? La réponse ne se trouve malheureusement pas dans ce mémoire, et pour cause, personne ne la connaît encore.

Dans le cas riemannien, il existe une structure canonique d'espace de Hilbert sur les sections du fibré des spineurs telle que l'opérateur de Dirac a toutes les propriétés nécessaires, et en particulier, est essentiellement auto-adjoint. Dans le cas pseudo-riemannien, une telle structure n'existe pas. L'approche la plus courante pour parer à ce problème dans la littérature actuelle consiste à considérer un triplet spectral identique au cas riemannien auquel on ajoute une involution J qui donne à \mathcal{H} une structure d'espace de Krein (voir [19]). L'opérateur de Dirac est alors Krein-auto-adjoint et, même si on est encore loin d'une caractérisation complète des variétés pseudo-riemanniennes, certaines spécificités de la variété sont encodées dans le triplet spectral augmenté $(\mathcal{A}, \mathcal{H}, D, J)$.

De notre point de vue, un défaut important de cette structure est que, si on considère un espace homogène G/H , l'involution J n'est pas G -invariante. De ce fait, on perd tous les outils de théorie de Lie et d'analyse harmonique développés pour l'étude des opérateurs invariants. Il serait donc intéressant de définir une nouvelle notion d'opérateur de Dirac sur les espaces homogènes pseudo-riemanniens.

Dans ce contexte, l'idée initiale de ce mémoire était de définir un nouvel opérateur de type Dirac, compatible avec la théorie des espaces homogènes, sur des variétés pseudo-riemanniennes. Un des objectifs de cela est de réaliser une analyse spectrale de cet opérateur sur un espace lorentzien présentant une structure causale singulière, le trou noir BHTZ. Ce travail a été mené sur deux fronts ; d'une part, une analyse du trou noir BHTZ et d'autre part, la construction d'un nouvel opérateur de type Dirac. Ainsi, ce mémoire contient deux volets. Le premier, composé des chapitres 1, 2, 3 et 5 à pour objectif la définition d'un nouvel opérateur de Dirac, et présente les notions nécessaires à sa construction. Le deuxième, le chapitre 4, est une étude géométrique du trou noir BHTZ. Nous espérons que ces deux parties se rejoindront dans le futur.

Le résultat principal du premier volet, est la définition d'un nouvel opérateur de type Dirac sur l'espace anti-de Sitter de dimension 2, considéré en tant qu'espace homogène $\text{AdS}_2 := \text{SL}_2(\mathbb{R})/\text{Spin}(1,1)$. L'idée centrale est de construire cet opérateur comme agissant dans les sections de carré sommable d'un fibré de rang infini associé à une représentation unitaire de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$. Nous démontrons que cet opérateur est G -invariant et, grâce à l'unitarité de la représentation, symétrique. Ces propriétés permettent d'être optimiste concernant la possibilité de réaliser une analyse spectrale. Une construction similaire est réalisée par K.Habermann afin de définir un opérateur de Dirac dans un cadre symplectique [15]. Il serait intéressant de déterminer quels outils de la théorie d'Habermann peuvent être transposés dans notre contexte des espaces homogènes.

Les trois premiers chapitres du mémoire sont un long cheminement vers cette construction. Chaque chapitre présente, aussi clairement que possible, certaines de ses composantes. Ainsi, le premier chapitre est consacré aux algèbres de Clifford, aux groupes Spin et à la représentation spinorielle. Le deuxième chapitre introduit les notions de fibrés vectoriels, principaux et associés et définit les connexions sur ces fibrés. Il se conclut par la propriété de construction, qui établit que tout fibré vectoriel s'obtient à partir d'un fibré principal par représentation. Le troisième chapitre a pour objectif de définir l'opérateur de Dirac riemannien. Pour ce faire, on passe par trois étapes inévitables : la structure spinorielle, le fibré des spineurs et la multiplication de Clifford. Nous démontrons également la formule de Lichnerowicz-Weitzenböck qui réalise l'opérateur de Dirac comme une racine carrée du Laplacien à un terme de courbure près. Enfin, nous présentons la structure hermitienne de l'espace $L^2(S)$ des sections L^2 du fibré des spineurs et démontrons que l'opérateur de Dirac est symétrique par rapport à celle-ci. Le chapitre 5 est consacré à la construction et aux propriétés de notre opérateur de type Dirac présenté plus haut.

Le deuxième volet consiste en une étude géométrique du trou noir BHTZ non-rotationnel en dimension 2+1. Comme découvert par Bañados, Henneaux, Teitelboim et Zanelli [1][2], ce trou noir s'obtient par identification de l'espace anti-de Sitter de dimension 3 par un sous-groupe discret de son groupe d'isométries. Dans le chapitre 4, nous réalisons l'espace AdS_3

comme un feuilletage en espace AdS_2 et étudions l'évolution de l'horizon du trou noir à travers ce feuilletage. Certains problèmes de revêtements doubles, présents dans la littérature existante, ont été corrigés. Nous présentons également un nouveau système de coordonnées plus global et une manière plus lisible d'écrire l'horizon.

Le chemin est encore long avant de réunir les deux volets de ce travail. Premièrement, pour espérer une analyse spectrale satisfaisante, il ne suffit pas que notre opérateur soit symétrique ; il faut également qu'il soit essentiellement auto-adjoint. Ensuite, il faut déterminer comment effectuer l'analyse spectrale sur notre fibré de rang infini. Pour ce faire, il est peut-être possible de tirer parti des outils développés par K.Habermann dans son approche symplectique de l'opérateur de Dirac. Si l'on parvient à réaliser cela, on pourra effectuer l'analyse spectrale sur l'espace AdS_3 et découvrir quelles informations sur le trou noir sont encodées par notre opérateur.

Groupe spin et représentations spinorielles

Les trois premières sections de ce chapitre présentent de manière succincte quelques résultats et définitions qui s'avéreront utiles dans la suite de ce travail. Pour un exposé plus détaillé sur ces notions, le lecteur est invité à consulter les notes de Combet [7], le livre de Chevalley [6] ou encore l'ouvrage de Friedrich [13] sur lesquels ce chapitre est basé. La quatrième section est une description détaillée de $\text{Spin}(2, 1)$ et de son algèbre de Lie. Elle contient une preuve de l'isomorphisme entre $\text{Spin}(2, 1)$ et $\text{SL}_2(\mathbb{R})$.

1.1. Algèbres de Clifford

On considère un corps commutatif K de caractéristique différente de 2 et un espace vectoriel V de dimension m sur K . On définit une forme quadratique Q de signature quelconque sur V avec B la forme bilinéaire associée :

$$Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x), \quad \forall \lambda \in K, x \in V$$

$$B(x, y) = Q(x + y) - Q(x) - Q(y)$$

$$B(x, x) = 2Q(x).$$

DÉFINITION 1.1. On note $T(V)$ l'algèbre tensorielle de V et $I(Q)$ l'idéal bilatère engendré dans $T(V)$ par les éléments de la forme

$$x \otimes x - Q(x).e, \quad x \in V.$$

L'algèbre quotient $\mathcal{C} = T(V)/I(Q)$ est appelée **l'algèbre de Clifford** de Q sur V .

REMARQUE 1.2. \mathcal{C} se décompose en une somme directe de deux sous-espaces. On note σ la projection canonique de $T(V)$ dans \mathcal{C} et on pose $\mathcal{C}^\pm = \sigma(T^\pm(V))$ où $T^+(V)$ et $T^-(V)$ sont respectivement les sous-espaces des tenseurs d'ordre pairs et impairs dans $T(V)$. Alors, \mathcal{C}^+ est une sous-algèbre de \mathcal{C} et

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \oplus \mathcal{C}^-.$$

On définit l'application linéaire

$$\alpha : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

par $\alpha(x) = x$ si $x \in \mathcal{C}^+$ et $\alpha(x) = -x$ si $x \in \mathcal{C}^-$. Clairement, $\alpha^2 = \text{Id}$ où Id est l'identité sur \mathcal{C} . On appelle l'automorphisme α **l'involution principale** de \mathcal{C} . De plus, l'anti-automorphisme

$$\beta : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$$

est défini par $\beta(x_1 \dots x_n) = x_n \dots x_1$ où $x_1, x_2, \dots, x_n \in V$. On a également $\beta^2 = \text{Id}$ et, pour $\zeta, \zeta' \in \mathcal{C}$, $\beta(\zeta\zeta') = \beta(\zeta')\beta(\zeta)$. On appelle β **l'anti-automorphisme principal** de \mathcal{C} .

REMARQUE 1.3. Pour $x, y \in V$ et par définitions de Q, B et \mathcal{C} , on a les relations

$$x^2 = Q(x).e; \quad xy + yx = B(x, y).e$$

pour $e = \sigma(1)$. Alors, si $\{e_1, \dots, e_m\}$ est une base de V , une base de \mathcal{C} est donnée par l'ensemble $\{e_{i_1 \dots i_n} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq m\}$ et l'élément e . Ainsi, l'algèbre \mathcal{C} peut être vue comme un espace vectoriel de dimension 2^m et \mathcal{C}^\pm des sous-espaces vectoriels de dimension 2^{m-1} .

Le résultat suivant permet d'étendre certaines applications linéaires d'un espace vectoriel V vers une algèbre \mathcal{A} en homomorphismes d'algèbres entre \mathcal{C} et \mathcal{A} . Une preuve est présentée dans le livre de Chevalley [6].

THÉORÈME 1.4. Soit ϕ une application linéaire de V vers une algèbre \mathcal{A} sur K . Si ϕ respecte la relation de Clifford, i.e. si $(\phi(x))^2 = Q(x).e$ pour $x \in V$, alors ϕ s'étend en un homomorphisme de \mathcal{C} dans \mathcal{A} . De plus, si $\phi(V)$ engendre \mathcal{A} , alors $\phi(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$.

COROLLAIRE 1.5. Si $\dim \mathcal{A} \geq 2^m$ et $\phi(V)$ engendre \mathcal{A} , alors ϕ s'étend en un isomorphisme de \mathcal{C} dans \mathcal{A} .

1.2. Le groupe Spin

Dans la suite, on suppose que V est un espace vectoriel réel muni de la base orthonormée $\{e_1, \dots, e_m\}$. On note \mathcal{C}_* le groupe des éléments inversibles de \mathcal{C} .

DÉFINITION 1.6. On appelle respectivement **groupe de Clifford** et **groupe de Clifford spécial** de Q les groupes

$$\Gamma = \{s \in \mathcal{C}_* : sVs^{-1} \subset V\} \quad \text{et} \quad \Gamma^+ = \Gamma \cap \mathcal{C}^+.$$

On définit l'application

$$\chi : \Gamma \rightarrow \text{GL}(V); \quad s \mapsto \chi(s)$$

telle que, pour $x \in V$ et $s \in \Gamma$, $\chi(s)(x) = sxs^{-1}$. On calcule

$$Q(\chi(s)(x)).e = Q(sxs^{-1}).e = (sxs^{-1})^2 = sx^2s^{-1} = Q(x).e.$$

Donc, χ est un homomorphisme de Γ dans le groupe orthogonal $O(V, Q)$:

$$\chi : \Gamma \rightarrow O(V, Q).$$

REMARQUE 1.7. Le noyau de χ est l'ensemble $Z \cap \mathcal{C}_*$ où Z est le centre de \mathcal{C} . En effet, si $\chi(s) = \text{Id}$, alors $x = sxs^{-1}$ pour tout $x \in V$ et $s \in Z \cap \mathcal{C}_*$. Réciproquement, si $s \in Z \cap \mathcal{C}_*$, alors s est inversible et $sVs^{-1} \subset V$ donc $s \in \Gamma$ et il est clair que $\chi(s) = \text{Id}$. Cette observation est peu intéressante sans une description de Z . Heureusement, ce problème est vite résolu. En effet, soit $\{e_1, \dots, e_m\}$ une base Q -orthonormée de V . On considère les applications

$$\Lambda_i : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}; \quad \Lambda_i(\zeta) = \frac{1}{2}(\zeta + e_i \zeta e_i).$$

On observe que $\zeta \in Z$ si et seulement si $\Lambda_i(\zeta) = \zeta$ pour $e_i^2 = 1$ et $\Lambda_i(\zeta) = 0$ pour $e_i^2 = -1$, pour tout $i = 1, \dots, m$. En calculant Λ_i en les vecteurs de base de \mathcal{C} , i.e. $\{e_{i_1 \dots i_n} : 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_n \leq m\}$ et l'élément e , on se convainc facilement que $Z = \mathbb{R}.e$ si m est pair et $Z = \mathbb{R}.e + \mathbb{R}.e_1 \dots e_m$ si m est impair.

REMARQUE 1.8. On va montrer que $V \cap \Gamma$ est l'ensemble des vecteurs non isotropes de V et que, pour $x \in V \cap \Gamma$, $-\chi(x)$ est la symétrie par rapport à l'hyperplan orthogonal à x . Puisque $x \in \Gamma$, x est inversible et donc non-isotrope. En effet,

$$x^2 = Q(x).e \Rightarrow x^{-1} = \frac{x}{Q(x)}.$$

De plus, pour $x \in V \cap \Gamma$ et $y \in V$, on calcule

$$\chi(x)(y) = xyx^{-1} = xy.Q^{-1}(x).x = \frac{x}{Q(x)}(-xy + B(x, y).e) = -\left(y - B(x, y)\frac{x}{Q(x)}\right)$$

(voir remarque 1.3). Donc, $\chi(x) = \sigma\tau_x$ où σ est la symétrie $x \rightarrow -x$ de V et τ_x la symétrie par rapport à l'hyperplan orthogonal à x .

THÉORÈME 1.9. (**Cartan-Dieudonné**) *Tout élément $A \in O(Q)$ peut s'écrire sous la forme $A = \tau_{x_1} \dots \tau_{x_n}$ où $n \leq m$ et où les τ_i sont des symétries orthogonales par rapport à des hyperplans orthogonaux à des vecteurs non isotropes.*

THÉORÈME 1.10. *Pour m pair, on a $\chi(\Gamma) = O(Q)$, $\chi(\Gamma^+) = \text{SO}(Q)$. Pour m impair, on a $\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma^+) = \text{SO}(Q)$.*

DÉMONSTRATION. Par le théorème de Cartan-Dieudonné et la remarque 1.8, tout élément de $A \in O(Q)$ s'écrit

$$A = \tau_{x_1} \dots \tau_{x_n} = \sigma^n \chi(x_1 \dots x_n).$$

Par conséquent, $\det A = (-1)^n$ et $A \in \text{SO}(Q)$ si et seulement si n est pair et $\text{SO}(Q) \subseteq \chi(\Gamma^+)$. On note $\{e_1, \dots, e_m\}$ une base Q -orthonormée de V . Dans le cas où m est pair, on a $\sigma = \chi(e_1 \dots e_m)$. Donc, pour n impair,

$$A = \sigma^n \chi(x_1 \dots x_n) = \sigma \chi(x_1 \dots x_n) = \chi(e_1 \dots e_m x_1 \dots x_n)$$

et donc $\chi(\Gamma) = O(Q)$. De plus, pour tout $A \in \chi(\Gamma^+)$, $\det A = 1$. On en déduit que $\chi(\Gamma^+) = \text{SO}(Q)$. Dans le cas où m est impair, $\sigma \notin \chi(\Gamma)$. En effet, si $\sigma \in \chi(\Gamma)$, alors on a $\chi(s) = \sigma$ pour un certain $s \in \Gamma$ et $e_1 \dots e_m = se_1 \dots e_m s^{-1} = -e_1 \dots e_m$ ce qui est absurde. D'où, $A \in \chi(\Gamma)$ dès que $\det A = 1$, et donc, $\chi(\Gamma) = \chi(\Gamma^+) = \text{SO}(Q)$. \square

Considérons l'application $\Upsilon : s \rightarrow \beta(s)s$, où $s \in \Gamma$ et β est l'anti-automorphisme principal de \mathcal{C} introduit dans la remarque 1.

PROPOSITION 1.11. *Υ est un homomorphisme de Γ dans $\mathbb{R}.e$.*

DÉFINITION 1.12. Le **groupe Spin** ou **groupe de Clifford spécial réduit**, noté $\text{Spin}(Q)$ ou Γ_0^+ , est le noyau de l'homomorphisme $\Upsilon^+ : \Gamma^+ \rightarrow \mathbb{R}e$ défini par $s \rightarrow \beta(s)s$ où β est l'anti-automorphisme principal de \mathcal{C} .

PROPOSITION 1.13. *Pour $m > 2$, le groupe $\text{Spin}(Q) = \Gamma_0^+$ est connexe et $\chi(\Gamma_0^+) = \text{SO}_0(Q)$ où $\text{SO}_0(Q)$ est la composante connexe de $\text{SO}(Q)$ contenant l'identité.*

THÉORÈME 1.14. *Le groupe $\text{Spin}(Q)$ est un **revêtement double** de $\text{SO}_0(Q)$ et on a la suite exacte*

$$1 \rightarrow \mathbb{Z}_2 \rightarrow \text{Spin}(Q) \rightarrow \text{SO}_0(Q) \rightarrow 1.$$

DÉMONSTRATION. Il suit de la remarque 1.7 et de la définition de Γ_0^+ que le noyau de l'homomorphisme $\chi : \Gamma_0^+ \rightarrow \text{SO}_0(Q)$ est donné par $\ker \chi = \pm e$. \square

COROLLAIRE 1.15. *Si Q est définie positive, $\text{Spin}(Q)$ est compact.*

On définit naturellement une structure de groupe de Lie sur $\text{Spin}(Q)$.

THÉORÈME 1.16. *Le groupe $\text{Spin}(Q)$ est un groupe de Lie de dimension $\frac{m(m-1)}{2}$. Son algèbre de Lie, notée $\text{spin}(Q)$, est engendrée par $\{e_i e_j : i < j\}$ avec le crochet $[x, y] = xy - yx$.*

DÉMONSTRATION. Soit la représentation $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \text{End}(\mathcal{C}) \simeq \text{End}(\mathbb{R}^{2^m})$ définie par $\rho(\zeta)(\eta) = \zeta\eta$. L'application ρ est linéaire et injective donc $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \rho(\mathcal{C})$ est un isomorphisme et $\rho(\mathcal{C})$ est un sous-espace vectoriel de $\text{End}(\mathcal{C})$. De plus, $\text{GL}(\mathcal{C})$ est ouvert dans $\text{End}(\mathcal{C})$ et le groupe

$$\mathcal{C}_* = \text{GL}(\mathcal{C}) \cap \rho(\mathcal{C})$$

est fermé. Comme tout sous groupe fermé d'un groupe de Lie est un sous-groupe de Lie, \mathcal{C}_* est un sous-groupe de Lie de $\text{GL}(\mathcal{C})$. De plus, $\text{Spin}(Q)$ est fermé dans \mathcal{C}_* . Par conséquent, $\text{Spin}(Q)$ est un groupe de Lie et sa dimension est une conséquence directe du théorème 1.14. Les détails du calcul de l'algèbre de Lie se trouvent dans les notes de Combet [7]. \square

1.3. Représentations spinorielles

Une représentation d'une algèbre ou d'un groupe permet de manipuler ses éléments comme les endomorphismes d'un espace vectoriel, i.e. des matrices! On utilisera plus loin la représentation spinorielle pour décrire l'algèbre de Lie de $\text{Spin}(2, 1)$ et sur le chemin pour définir l'opérateur de Dirac.

DÉFINITION 1.17. *Une représentation d'une algèbre \mathcal{A} sur un corps \mathbb{K} dans un espace vectoriel V sur \mathbb{K} est un homomorphisme d'algèbres $\rho : \mathcal{A} \rightarrow \text{End}(V)$.*

1.3.1. Considérations générales. Soient $(\mathbb{R}^{(p,q)}, Q)$ avec $p + q = n$ et $\{e_1, \dots, e_n\}$ la base canonique de $\mathbb{R}^{(p,q)}$ et $\mathcal{C}^{(p,q)}$ l'algèbre de Clifford de $(\mathbb{R}^{(p,q)}, Q)$. On note

$$\mathcal{C}_c^{(p,q)} = \mathcal{C}^{(p,q)} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$$

le complexifié de $\mathcal{C}^{(p,q)}$. En particulier, $\mathcal{C}_c^{(p,q)}$ est l'algèbre de Clifford de $(\mathbb{C}^{p,q}, Q_c)$ où Q_c est l'extension \mathbb{C} -bilinéaire de Q . En passant au complexifié, la forme quadratique n'est plus définie par sa signature et on peut écrire

$$\mathcal{C}_c^{(p,q)} = \mathcal{C}^n \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathcal{C}_c^n.$$

En particulier, pour $n = 2$, $\mathcal{C}_c^2 = \mathcal{C}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$ où l'algèbre \mathcal{C}^2 est engendrée par e_1, e_2 tels que

$$e_1^2 = e_2^2 = -1 \quad e_1 e_2 + e_2 e_1 = 0.$$

On a supposé ici que Q avait une signature négative, ce qui n'a plus d'importance lorsqu'on passe au complexifié. D'autre part, l'espace vectoriel sous-jacent à l'algèbre complexe $M_2(\mathbb{C})$ admet pour base

$$g_1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad g_2 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad g_3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Id} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec les relations

$$g_1^2 = g_2^2 = -1 \quad g_1 g_2 + g_2 g_1 = 0.$$

Par le théorème 1.4 et le corollaire 1.5, $\mathcal{C}_c^2 = \mathcal{C}^2 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = M_2(\mathbb{C})$. Cette observation est importante car elle permet d'écrire

$$\mathcal{C}_c^{n+2} = \mathcal{C}_c^n \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{C}_c^2 = \mathcal{C}_c^n \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}).$$

Par récurrence, cela implique

- pour $n = 2r$: $\mathcal{C}_c^n = M_2(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \dots \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}) = \text{End}(\mathbb{C}^{2^r})$.
- pour $n = 2r + 1$: $\mathcal{C}_c^n = \mathcal{C}_c^1 \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \dots \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C})$ où $\mathcal{C}_c^1 = \mathcal{C}^1 \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}$ et donc $\mathcal{C}_c^n = (M_2(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \dots \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C})) \oplus (M_2(\mathbb{C}) \otimes_{\mathbb{C}} \dots \otimes_{\mathbb{C}} M_2(\mathbb{C})) = \text{End}(\mathbb{C}^{2^r}) \oplus \text{End}(\mathbb{C}^{2^r})$.

On note $S_n = \mathbb{C}^{2^r}$ l'espace vectoriel des n -spineurs complexes pour $n = 2r$ et $n = 2r + 1$ et on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_c^n &= \text{End}(S_n) \quad \text{pour } n = 2r \\ \mathcal{C}_c^n &= \text{End}(S_n) \oplus \text{End}(S_n) \quad \text{pour } n = 2r + 1. \end{aligned}$$

La représentation spinorielle de l'algèbre de Clifford \mathcal{C}_c^n est donnée par

$$\kappa : \mathcal{C}_c^n \xrightarrow{\sim} \text{End}(S_n)$$

pour n pair et

$$\kappa : \mathcal{C}_c^n \xrightarrow{\sim} \text{End}(S_n) \oplus \text{End}(S_n) \xrightarrow{p_1} \text{End}(S_n)$$

pour n impair. Par restriction, on obtient des représentations de \mathcal{C}_c^n et $\text{Spin}(n)$

$$\rho := \kappa|_{\text{Spin}(n)} : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Aut}(S_n).$$

PROPOSITION 1.18. *Les représentations*

$$\kappa : \mathcal{C}_c^n \xrightarrow{\sim} \text{End}(S_n)$$

et

$$\kappa : \mathcal{C}_c^n \xrightarrow{\sim} \text{End}(S_n) \oplus \text{End}(S_n) \xrightarrow{p_1} \text{End}(S_n)$$

sont fidèles.

1.3.2. Construction explicite. On considère $\mathbb{R}^{(p,q)}$ tel que $p + q = 2r$, avec une base orthonormée $\{e_1, \dots, e_{2r}\}$. Comme ci-dessus, $\mathcal{C}_c^{(p,q)} = \mathcal{C}_c^{2r} = \mathcal{C}(\mathbb{C}^{2r})$.

REMARQUE 1.19. En général, la forme quadratique Q n'est pas forcément non dégénérée. Si $Q \equiv 0$ sur un espace vectoriel V , alors $xx = 0$ et $xy = -yx$ pour tout $x, y \in V$ et $\mathcal{C}(V, 0) = \wedge V$, l'algèbre extérieure de V .

On peut écrire \mathbb{C}^{2r} comme la somme directe de deux sous-espaces totalement isotropes de même dimension,

$$\mathbb{C}^{2r} = W' \oplus W''.$$

On construit les bases $\{f'_1, \dots, f'_r\}$ et $\{f''_1, \dots, f''_r\}$ de W' et W'' telles que $B_c(f'_i, f''_j) = \delta_{ij}$, et l'idéal à gauche

$$\mathcal{I} = \mathcal{C}_c^{2r} . \Sigma$$

où $\Sigma = f''_1 \dots f''_r$. Puisque W' est totalement isotrope, l'algèbre de Clifford restreinte à W' est $\mathcal{C}(W') = \wedge W'$, comme dans la remarque 1.19. En comparant les bases de \mathcal{I} et $\mathcal{C}(W')$ on a directement l'isomorphisme

$$\mathcal{I} \simeq \mathcal{C}(W') = \wedge W'.$$

Considérons la représentation linéaire de \mathcal{C}_c^{2r} donnée par l'isomorphisme d'algèbres

$$\rho : \mathcal{C}_c^{2r} \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{I}); \quad a \mapsto \rho(a)$$

où $\rho(a)$ est l'action à gauche de a sur l'idéal \mathcal{I} :

$$\rho(a) : \mathcal{I} \rightarrow \mathcal{I}; \quad \rho(a)(x) = ax.$$

Cela induit les équivalences suivantes :

$$\mathcal{C}_c^{2r} \simeq \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{I}) \simeq \text{End}_{\mathbb{C}}(\wedge W') \simeq \text{End}(\mathbb{C}^{2r}).$$

On note $S_n = \wedge W'$ et on appelle S_n l'espace des spineurs. La décomposition en somme directe de \mathcal{C}_c^{2r} induit la décomposition

$$\mathcal{I} = \mathcal{C}_c^{2r} . \Sigma = (\mathcal{C}_c^{2r})^+ . \Sigma \oplus (\mathcal{C}_c^{2r})^- . \Sigma = \wedge^+ W' \oplus \wedge^- W'$$

et la restriction de ρ à $(\mathcal{C}_c^{2r})^+$ donne l'isomorphisme

$$\rho^+ : (\mathcal{C}_c^{2r})^+ \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\wedge^+ W') \times \text{End}_{\mathbb{C}}(\wedge^- W').$$

On note $\wedge^{\pm} W' = S_n^{\pm}$ et on appelle S_n^+ et S_n^- les espaces de demi-spineurs. Il est clair que la dimension de \mathcal{C}_c^{m-1} est égale à la dimension de $(\mathcal{C}_c^m)^+$. Par conséquent, l'application linéaire

$$\ell : \mathbb{R}^{m-1} \rightarrow (\mathcal{C}_c^m)^+ : e_i \mapsto e_i e_m$$

s'étend en un isomorphisme d'algèbres par le théorème 1.4 et le corollaire 1.5,

$$\ell : \mathcal{C}_c^{m-1} \xrightarrow{\sim} (\mathcal{C}_c^m)^+.$$

On a $\mathcal{C}_c^{m-1} \simeq (\mathcal{C}_c^m)^+$ et cette construction simple permet de passer de la dimension paire à la dimension impaire.

1.4. Spin(2,1)

Nous allons appliquer la construction de la section 1.3.2 pour donner une représentation de $\text{spin}(2,1)$. Nous démontrerons également l'isomorphisme $\text{Spin}(2,1) \simeq \text{SL}_2(\mathbb{R})$.

Considérons $\mathbb{R}^{(2,2)}$ muni de la base canonique $\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$ avec la métrique

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les vecteurs

$$\begin{aligned} f'_1 &= \frac{1}{2}(e_1 + ie_2) & f''_1 &= \frac{1}{2}(e_1 - ie_2) \\ f'_2 &= \frac{1}{2}(ie_3 + e_4) & f''_2 &= \frac{1}{2}(ie_3 - e_4) \end{aligned}$$

vérifient les propriétés suivantes :

- (1) $\{f'_1, f'_2, f''_1, f''_2\}$ est une base de $\mathbb{C}^{(2,2)} = \mathbb{C}^4$
- (2) ils sont isotropes par rapport à Q_c et $\{f'_1, f'_2\}, \{f''_1, f''_2\}$ engendrent deux sous-espaces totalement isotropes, respectivement notés W' et W''
- (3) $B_c(f'_i, f''_j) = \delta_{ij}$, pour $i, j = 1, 2$.

On pose $\Sigma = f''_1 f''_2$ et on définit l'idéal à gauche $\mathcal{I} = \mathcal{C}_c^4 \Sigma$. Une base de \mathcal{I} est donnée par

$$\{f''_1 f''_2, f'_1 f''_1 f''_2, f'_2 f''_1 f''_2, f'_1 f'_2 f''_1 f''_2\}.$$

Puisque W' est totalement isotrope dans V' , l'algèbre de Clifford coïncide avec l'algèbre extérieure sur W' et $\{1, f'_1, f'_2, f'_1 f'_2\}$ est une base de $\mathcal{C}(W')$. Par conséquent, on a l'isomorphisme

$$\mathcal{I} \simeq \mathcal{C}(W') = \bigwedge W'.$$

On considère la représentation donnée par l'isomorphisme d'algèbres

$$\rho : \mathcal{C}_c^4 \rightarrow \text{End}_{\mathbb{C}}(\mathcal{I}); \quad a \mapsto [\rho(a) x \mapsto \rho(a)x = a.x].$$

On souhaite calculer explicitement les matrices $\rho(e_i)$ qui définiront la représentation de $\mathcal{C}^{(2,2)}$. Par exemple, on obtient la matrice $\rho(f'_1)$ en appliquant $\rho(f'_1)$ aux éléments de la base de \mathcal{I} . Pour ce faire, on utilise les règles de commutation induites par les relations de Clifford et on obtient

$$\begin{aligned} \rho(f'_1) f''_1 f''_2 &= f'_1 f''_1 f''_2 \\ \rho(f'_1) f'_1 f''_1 f''_2 &= f'_1 f'_1 f''_1 f''_2 = 0 \\ \rho(f'_1) f'_1 f'_2 f''_1 f''_2 &= 0 \\ \rho(f'_1) f'_2 f''_1 f''_2 &= f'_1 f'_2 f''_1 f''_2 \end{aligned}$$

d'où

$$\rho(f'_1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On procède de même pour $\rho(f''_1), \rho(f'_2)$ et $\rho(f''_2)$ et, comme $\rho(e_1) = \rho(f'_1 + f''_1) = \rho(f'_1) + \rho(f''_1)$, on obtient

$$\rho(e_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

De la même manière, on obtient les matrices

$$(-i) \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

respectivement pour $\rho(e_2), \rho(e_3)$ et $\rho(e_4)$. On vérifie que ces matrices vérifient les relations de Clifford et on obtient une représentation de $\mathcal{C}^{(2,2)}$. Pour passer de cette représentation à celle de $\mathcal{C}^{(2,1)}$, on considère l'application

$$\ell : \mathbb{R}^{(2,1)} \rightarrow (\mathcal{C}^{(2,2)})^+; \quad e_j \mapsto e_j e_4, \quad j = 1, 2, 3$$

décrite à la fin de la section précédente et on définit une nouvelle représentation $\rho^{(2,1)}$ telle que

$$\rho^{(2,1)}(e_j) = \rho(e_j)\rho(e_4).$$

On pose $\gamma_j = \rho^{(2,1)}(e_j)$ et les matrices γ_1, γ_2 et γ_3 sont respectivement données par

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Les matrices $\text{Id}, \gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_1\gamma_2, \gamma_1\gamma_3, \gamma_2\gamma_3$ et $\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ donnent une représentation de l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}(\mathbb{R}^{(2,1)})$. Par restriction, les matrices $\mu_1 = \gamma_1\gamma_2, \mu_2 = \gamma_1\gamma_3$ et $\mu_3 = \gamma_2\gamma_3$, respectivement

$$(-i) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (-i) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (-1) \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

donnent une représentation de $\text{spin}(2,1)$, l'algèbre de Lie de $\text{Spin}(2,1)$. À l'aide de celle-ci, nous allons montrer que $\text{Spin}(2,1) \simeq \text{SL}_2(\mathbb{R})$.

Tout d'abord, nous allons construire un isomorphisme d'algèbre de Lie

$$\phi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) := \text{Lie}(\text{SL}_2(\mathbb{R})) \rightarrow \mathfrak{spin}(2, 1).$$

Pour ce faire, considérons la base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ donnée par

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

et définissons l'application ϕ par $\phi(H) = \mu_1$, $\phi(J) = \mu_2$, $\phi(S) = \mu_3$. On rappelle que le crochet de Lie pour un groupe de matrice est simplement le commutateur $[X, Y] = XY - YX$. On vérifie facilement que ϕ respecte le crochet de Lie, i.e. $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)]$, et comme les deux espaces sont de même dimension, ϕ est un isomorphisme d'algèbres de Lie.

Ensuite, nous allons montrer que $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ est également un revêtement double de $\text{SO}_0(2, 1)$. Considérons l'homomorphisme de groupe donné par l'action adjointe de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ sur son algèbre de Lie

$$\text{Ad} : \text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{Aut}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})),$$

$$\text{Ad}_g(X) = gXg^{-1}.$$

On rappelle que la forme de Killing sur une algèbre de Lie est donnée par

$$B(X, Y) = \text{Tr}(\text{ad}_X \circ \text{ad}_Y)$$

où $\text{ad}_X(Y) = [X, Y]$ et que pour $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ elle prend la forme

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

après normalisation. De plus, la forme de Killing est invariante par automorphisme et en particulier

$$B(\text{Ad}_g X, \text{Ad}_g Y) = B(X, Y).$$

Cela implique $\text{Ad}_g \in O(2, 1)$, $\forall g \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$. Or, on sait que $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ est connexe et comme Ad est un homomorphisme de groupes, $\text{Ad}(\text{SL}_2(\mathbb{R}))$ doit également être connexe. Donc, pour tout $g \in \text{SL}_2(\mathbb{R})$, Ad_g appartient à la composante connexe de l'identité de $O(2, 1)$, c'est-à-dire $\text{SO}_0(2, 1)$. Il nous reste à montrer que

$$\text{Ad} : \text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{SO}_0(2, 1)$$

est surjectif et de noyau $\ker(\text{Ad}) = \{\pm \text{Id}\}$. Un simple calcul suffit à vérifier $\ker(\text{Ad}) = \{\pm \text{Id}\}$. La surjectivité demande un peu plus d'efforts. Considérons la différentielle de l'action adjointe

$$\text{Ad}_* = \text{ad} : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{so}_0(2, 1); \quad \text{ad}_X(Y) = [X, Y]$$

où $\mathfrak{so}_0(2, 1)$ est l'algèbre de Lie de $\text{SO}_0(2, 1)$. Cette application définit un isomorphisme d'algèbres de Lie. En effet, les seules matrices qui commutent avec une base de $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ sont des multiples de l'identité, d'où $\ker(\text{ad}) = \{c\text{Id} : c \in \mathbb{R}\} \cap \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \{0\}$. De plus $\mathfrak{so}_0(2, 1)$ et $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ sont toutes deux de dimension 3. On conclut que $\text{ad} : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{so}_0(2, 1)$ est un isomorphisme

d'algèbres de Lie. Par le théorème d'inversion locale, il existe un voisinage U de Id dans $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ et un voisinage W de Id dans $\text{SO}_0(2,1)$ tels que $\text{Ad} : U \rightarrow W$ est un isomorphisme de groupes de Lie. On utilise le résultat de théorie de Lie ci-dessous.

PROPOSITION 1.20. *Si G est un groupe de Lie connexe, alors tout voisinage ouvert d'un point de G contient un ensemble de générateurs de G .*

La surjectivité de $\text{Ad} : \text{SL}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \text{SO}_0(2,1)$ suit directement de la proposition 1.20 et on conclut que $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ est un revêtement double de $\text{SO}_0(2,1)$.

Résumons ce que nous avons obtenu depuis le début de cette section ; d'une part, on a un isomorphisme d'algèbres de Lie

$$\phi : \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathfrak{spin}(2,1),$$

d'autre part, $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ est un revêtement double de $\text{SO}_0(2,1)$

$$\text{SL}_2(\mathbb{R}) \xrightarrow{\mathbb{Z}_2} \text{SO}_0(2,1).$$

Grâce au théorème 1.14, on sait que $\text{Spin}(2,1)$ est également un revêtement double de $\text{SO}_0(2,1)$. On conclut comme souhaité que

$$\text{Spin}(2,1) = \text{SL}_2(\mathbb{R}).$$

EXEMPLE 1.21. Les isomorphismes entre certains groupes Spin de basses dimensions et des groupes de Lie connus sont appelés isomorphismes accidentels. A toutes fins utiles, nous retranscrivons ici une liste de quelques uns de ces isomorphismes.

Pseudo-riemannien	Riemannien
$\text{Spin}(1,1) = \text{GL}(1, \mathbb{R}) = \mathbb{R}_0$	$\text{Spin}(1) = O(1) = \{+1, -1\}$
$\text{Spin}(2,1) = \text{SL}(2, \mathbb{R})$	$\text{Spin}(2) = U(1) = \text{SO}(2)$
$\text{Spin}(3,1) = \text{SL}(2, \mathbb{C})$	$\text{Spin}(3) = \text{Sp}(1) = \text{SU}(2)$
$\text{Spin}(2,2) = \text{SL}(2, \mathbb{R}) \times \text{SL}(2, \mathbb{R})$	$\text{Spin}(4) = \text{SU}(2) \times \text{SU}(2)$
$\text{Spin}(4,1) = \text{Sp}(1,1)$	$\text{Spin}(5) = \text{Sp}(2)$
$\text{Spin}(5,1) = \text{SL}(2, \mathbb{H})$	$\text{Spin}(6) = \text{SU}(4)$

Fibrés et connexions

En toute généralité, un fibré est un espace topologique E , qui a localement une structure de produit $A \times F$. L'identification locale de E au produit $A \times F$ se fait via une application $\pi : E \rightarrow A$ qui, sur de petites régions de E , ressemble à la projection de $A \times F$ sur A . Plus précisément, pour tout $x \in A$, il existe un voisinage U de x et un homéomorphisme $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times F$. La paire (U, ϕ) est appelée **trivialisat**ion locale de E . On appelle E l'espace total, A la base et F la fibre, accrochée en chaque point de A . Dans ce chapitre, les

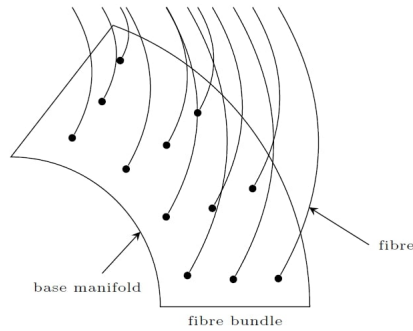


FIGURE 1. Représentation graphique d'un fibré

fibrés que nous allons considérer auront toujours pour base une variété riemannienne C^∞ notée M , mais la nature des fibres changera en fonction du type de fibré considéré :

- dans un fibré vectoriel, F sera un espace vectoriel
- dans un fibré principal, F sera l'orbite d'un point de l'espace total par l'action d'un groupe de Lie G
- dans un fibré vectoriel associé (construit à partir d'un fibré principal, d'où le nom), F sera un espace vectoriel obtenu par représentation du groupe de Lie G .

Ce chapitre a pour but de définir rigoureusement ces objets et d'exposer certaines de leurs propriétés. Quelques exemples importants sont présentés ainsi que les définitions des différentes connexions sur ces fibrés. Le lien entre fibré vectoriel et fibré principal est également mis en évidence. A chaque fibré vectoriel de rang k on peut associer un fibré $GL(k, \mathbb{R})$ -principal. Via la représentation naturelle $GL(k, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k$ un deuxième fibré vectoriel est associé à ce fibré principal. Le fait est que le fibré vectoriel de départ et le fibré associé d'arrivée sont isomorphes.

Les chapitres 2 et 3 sont principalement basé sur l'excellent exposé de Thibaut Grouy. Les références utilisées sont le livre de T.Friedrich [13] ainsi que les notes de A.Mathew [18], S.Gutt [14] et S.D.Freed [12].

2.1. Fibrés vectoriels

Dans les chapitres deux et trois, sauf indication contraire, M désignera une variété Riemannienne de dimension n et \hat{g} la métrique riemannienne associée.

DÉFINITION 2.1. Soit M une variété C^∞ . Un **fibré vectoriel de rang k** sur M est la donnée d'une variété lisse E et d'une application C^∞ surjective $\pi : E \rightarrow M$ tels que

- (1) les fibres sont des espaces vectoriels de dimension $k : E_x = \pi^{-1}(x)$ pour tout $x \in M$.
- (2) pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x et un difféomorphisme

$$\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$$

tel que, si $\ell \in \pi^{-1}(y)$, $\phi(\ell) = (y, \phi_y(\ell))$ où $\phi_y : E_y \rightarrow \mathbb{R}^k$ est un isomorphisme d'espace vectoriel.

La paire (U, ϕ) est appelée *trivialisatation locale*. On appelle également M l'espace de base, E l'espace total et π la projection.

EXEMPLE 2.2. (1) L'exemple le plus basique est le fibré trivial $E = M \times \mathbb{R}^k$ où π est simplement la projection sur le premier facteur.

(2) Un autre exemple facile à visualiser est le fibré tangent. L'espace total $TM = \coprod_{x \in M} T_x M$ est l'union disjointe de tous les espaces tangents à une variété M et l'application $\pi : TM \rightarrow M$ est telle que $\pi(v) = x$ pour $v \in T_x M$. Intuitivement, à chaque point x de M est accrochée une fibre qui est l'espace tangent à M au point x . Le fibré tangent à un rôle central en géométrie riemannienne vu que c'est sur les espaces tangents que la métrique est définie.

(3) Il existe un autre fibré vectoriel important sur une variété M . Il s'agit du fibré cotangent T^*M , le dual du fibré tangent. Ainsi, en chaque point $x \in M$, $T_x^*M = (T_x M)^*$. Le fibré tangent est isomorphe au fibré cotangent via l'identification

$$X_p \in T_p M \mapsto \hat{g}(X_p, -) \in T^*M.$$

Cet isomorphisme et son inverse sont habituellement notés \flat et \sharp et on les appelle les isomorphismes musicaux.

REMARQUE 2.3. Si on a deux trivialisations locales (U_α, ϕ_α) et (U_β, ϕ_β) l'application

$$\phi_\alpha \circ \phi_\beta^{-1} : U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{R}^k \rightarrow U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{R}^k ; (x, \ell) \mapsto (x, g_{\alpha\beta}(x).\ell)$$

induit une application $g_{\alpha\beta} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{GL}(k, \mathbb{R})$ appelée **fonction de transition**. Les fonctions de transition respectent les conditions de compatibilité suivantes :

$$g_{\alpha\beta} \circ g_{\beta\gamma} \circ g_{\gamma\alpha} = \text{Id sur } U_\alpha \cap U_\beta \cap U_\gamma \text{ et } g_{\alpha\alpha} = \text{Id.}$$

DÉFINITION 2.4. Une **section** d'un fibré vectoriel $E \xrightarrow{\pi} M$ est une application C^∞

$$s : M \rightarrow E$$

telle que $\pi \circ s = \text{Id}_M$, i.e. $\pi(s(x)) = x$ pour tout $x \in M$. On note $\Gamma^\infty(E)$ l'espace des sections de E .

DÉFINITION 2.5. Les sections du fibré tangent sont des fonctions

$$X : M \rightarrow TM ; \quad x \mapsto X_x \in T_x M$$

qui associent un vecteur à chaque point de la variété. On les appelle **champ de vecteurs** et on note $\chi^\infty(M)$ l'espace des champs de vecteurs lisses sur M .

EXEMPLE 2.6. — La section nulle est la fonction qui envoie chaque $x \in M$ sur l'élément nul de l'espace vectoriel $\pi^{-1}(x)$. Cette section est définie sur toute la variété M , par conséquent on la qualifera de globale, par opposition aux sections locales, définies sur un ouvert $U \subset M$.

— Les sections lisses du fibré cotangent sont des 1-formes différentiels. C'est-à-dire des fonctions lisses $\omega \in \Omega^1(M, \mathbb{R}) = \Gamma^\infty(T^*M)$, qui donnent une application $\omega_x : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ en chaque point $x \in M$.

DÉFINITION 2.7. Une **connexion linéaire** ∇ sur un fibré vectoriel $E \xrightarrow{\pi} M$ est une application bilinéaire

$$\nabla : \chi^\infty(M) \times \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(E) ; \quad (X, s) \mapsto \nabla_X s$$

respectant les conditions suivantes

- (1) $\nabla_{fX}s = f\nabla_X s ; \quad f \in C^\infty(M), X \in \chi^\infty(M), s \in \Gamma^\infty(E)$
- (2) $\nabla_X(fs) = (X.f)s + f\nabla_X s ; \quad f \in C^\infty(M), X \in \chi^\infty(M), s \in \Gamma^\infty(E)$.

L'application $\nabla_X : \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(E)$ est appelée **dérivée covariante le long de X** .

REMARQUE 2.8. Les connexions définies sur le fibré tangent TM

$$\nabla : \chi^\infty(M) \times \chi^\infty(M) \rightarrow \chi^\infty(M) ; \quad (X, Y) \mapsto \nabla_X Y$$

sont appelées **connexions affines**. Le théorème fondamental de la géométrie riemannienne (voir par exemple [17]) nous dit que sur chaque variété riemannienne ou pseudo-riemannienne (M, \hat{g}) , il existe une unique connexion affine

- qui préserve la métrique, $\nabla \hat{g} = 0$ i.e. $X(\hat{g}(X, Z)) = \hat{g}(\nabla_X Y, Z) + \hat{g}(Y, \nabla_X Z)$
- sans torsion, i.e. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$

appelée **connexion de Levi-Civita** que l'on notera ∇^{LC} .

REMARQUE 2.9. On peut écrire localement, c'est à dire dans une paramétrisation locale, les objets définis jusqu'ici. Soient M une variété lisse de dimension n et $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$ une trivialisatation locale de E . Soient également (U, φ) une carte de M munissant U du

système de coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) et $\{e_1, \dots, e_k\}$ une base de \mathbb{R}^k . Les coordonnées locales sur U , induisent une base de $T_x M$ en chaque point $x \in U$

$$\partial x_1|_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_x, \dots, \partial x_n|_x = \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_x.$$

On obtient une bijection

$$\psi : U \times \mathbb{R}^n \rightarrow \bigcup_{x \in U} T_x M; \quad \psi(x, y_1, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^n y_i \partial x_i|_x$$

ou encore

$$\tilde{\psi} = (\varphi, \text{Id}) \circ \psi^{-1} : \bigcup_{x \in U} T_x M \rightarrow \varphi(U) \times \mathbb{R}^n$$

qui définit une structure de variété C^∞ de dimension $2n$ sur le fibré tangent. On appellera les champs vecteurs $\{\partial x_1, \dots, \partial x_n\}$ un repère local sur TM . De manière similaire, on pose $\tilde{e}_\alpha(x) = \phi^{-1}(x, e_\alpha)$ de sorte que \tilde{e}_α est une section de E et $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_k\}$ un repère local sur E . Alors,

$$\nabla_{\partial x_j} \tilde{e}_\alpha = \theta_{j\alpha}^\beta \tilde{e}_\beta$$

où θ représente la 1-forme locale

$$\theta : TM|_U \rightarrow \mathfrak{gl}(k, \mathbb{R}); \quad X_x = X_x^j \partial x_j|_x \mapsto \left(X_x^j \theta_{j\alpha}^\beta(x) \right)_{\alpha, \beta}.$$

En particulier, pour la connexion de Levi-Civita ∇^{LC} , on note

$$\theta_{j\alpha}^\beta = \Gamma_{j\alpha}^\beta$$

et les $\Gamma_{j\alpha}^\beta$ sont appelés symboles de Christoffel. On remarque également que, pour $\eta \in \Gamma^\infty(E)$,

$$\nabla_X \eta|_U = \sum_{j=1}^n X^j \nabla_{\partial x_j} \eta = \sum_{j=1}^n \hat{g}(\partial x_j, X) \nabla_{\partial x_j} \eta.$$

Cela implique qu'une connexion linéaire sur E peut se voir comme une fonction à valeur dans les sections de $T^*M \otimes E$

$$\nabla : \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(T^*M \otimes E); \quad \eta \mapsto \sum_{j=1}^n \hat{g}(\partial x_j, -) \otimes \nabla_{\partial x_j} \eta.$$

DÉFINITION 2.10. Pour tout $X, Y \in \chi^\infty(M)$ et pour tout $\sigma \in \Gamma^\infty(E)$, on définit l'application

$$R^\nabla(X, Y) \sigma = \nabla_X \nabla_Y \sigma - \nabla_Y \nabla_X \sigma - \nabla_{[X, Y]} \sigma.$$

On appelle R^∇ le tenseur de courbure associé à ∇ sur E .

2.2. Fibrés principaux

Dans ce qui suit,

$$R : G \times G \rightarrow G; \quad R_g(g') = g'g$$

$$L : G \times G \rightarrow G; \quad L_g(g') = gg'$$

dénotent la multiplication, respectivement à droite et à gauche, dans un groupe G .

DÉFINITION 2.11. Soient G un groupe de Lie et M une variété C^∞ . Un **fibré G -principal** sur M est la donnée d'une variété lisse P , avec une application C^∞ surjective $\Pi : P \rightarrow M$, et d'une action à droite de G sur P telles que

- (1) $\Pi(p.g) = \Pi(p)$ pour tout $p \in P$ et tout $g \in G$ et les fibres

$$P_x := \Pi^{-1}(x) = \{p.g \mid g \in G, \text{ pour } p \in \Pi^{-1}(x)\} \simeq G$$

sont les orbites de points $p \in P$ sous l'action de G

- (2) pour tout $x \in M$, il existe un voisinage U de x et un difféomorphisme.

$$\phi : \Pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G$$

tels que, si $p \in \Pi^{-1}(x)$, $\phi(p) = (x, \phi_x(p))$, où $\phi_x : \Pi^{-1}(x) \rightarrow G$ est un difféomorphisme. De plus, ϕ est G -équivariant, i.e. $\phi(p.g) = \phi(p)g$ où l'action à droite de G sur $U \times G$ est donnée par

$$(U \times G) \times G \rightarrow U \times G ; \quad (x, g).g' = (x, gg').$$

La paire (U, ϕ) est appelée *trivialisatation locale*.

REMARQUE 2.12. — L'analogie avec la définition de fibré vectoriel est immédiate.

Ici, ce sont des copies de G données par les orbite des points $p \in P$ qui jouent le rôle de fibres et P est l'espace total. On peut définir les fonctions de transition de la même manière.

— Le difféomorphisme $P_x \simeq G$ implique que le groupe G agit librement et transitivement sur les fibres et

$$M \simeq P/G := \{pG \mid p \in P\}.$$

EXEMPLE 2.13. Les exemples 2, 3 et 4 ci-dessous seront d'une grande importance dans ce qui suit.

- (1) L'exemple le plus simple est le fibré trivial $P = M \times G$, où Π est simplement la projection sur le premier facteur et l'action à droite est triviale :

$$(M \times G) \times G \rightarrow M \times G ; \quad ((m, g), g') \mapsto (m, gg').$$

- (2) Soit un groupe G agissant transitivement sur un espace topologique X . On appelle alors X un **espace homogène**. En fixant un point $x_0 \in X$ et en définissant le stabilisateur H de ce point pour l'action de G , on a $X = G/H$. En particulier, si X est une variété lisse, on a une structure de fibré H -principal sur X :

$$\Pi : G \rightarrow X = G/H$$

avec l'action à droite

$$G \times H \rightarrow G ; \quad (g, h) \mapsto g.h$$

et les fibres

$$\Pi^{-1}(x) = \{g.h \mid h \in H \text{ pour } g \in \Pi^{-1}(x)\} = gH \simeq H.$$

Si G est un groupe de Lie et H un sous-groupe de Lie, G/H aura une structure de fibré H -principal de la même manière.

(3) Soit un fibré vectoriel de rang k , $E \xrightarrow{\pi} M$, on définit $F(E) = \coprod_{x \in M} F(E)_x$ où

$$F(E)_x := \left\{ p : \mathbb{R}^k \rightarrow E_x : p \text{ est un isomorphisme linéaire} \right\}.$$

Cette construction définit un fibré $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ -principal $F(E) \xrightarrow{\Pi} M$, avec l'action à droite

$$p \cdot g := p \circ g : \mathbb{R}^k \rightarrow E_{\pi(p)}$$

pour $g \in \mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ et $p \in F(E)$. Une construction similaire est possible sur tout fibré vectoriel. On appelle $F(E)$ le **fibré des bases**. Intuitivement, en chaque point $x \in M$, on attache le groupe des bases de la fibre E_x , i.e. $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$.

(4) Sur le fibré tangent d'une variété riemannienne orientée (M, \hat{g}) , la métrique permet de définir le fibré $\mathrm{SO}(n)$ -principal des bases orthonormées orientées. On définit $\mathrm{SO}(M) := \coprod_{x \in M} \mathrm{SO}(M)_x$ où

$$\mathrm{SO}(M)_x = \left\{ p : (\mathbb{R}^n, \langle \cdot, \cdot \rangle) \rightarrow (T_x M, \hat{g}) \right\}$$

où p est une isométrie bijective préservant l'orientation. Intuitivement, en chaque point $x \in M$, on attache le groupe des bases orthonormées orientées de $T_x M$.

DÉFINITION 2.14. Soit $P \xrightarrow{\Pi} M$ un fibré G -principal et TP le fibré tangent à P . Une connexion G -principale sur P est une 1-forme

$$\omega : TP \rightarrow \mathfrak{g} := \mathrm{Lie}(G)$$

telle que

(1) pour tout $A \in \mathfrak{g}$, $\omega_p(A_p^*) = A$ où $A_p^* := \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (p \cdot \exp(tA))$, $p \in P$ et $\omega_p = \omega|_{T_p P}$. On appelle A^* le champ fondamental associé à A .

(2) ω est G -équivariant, i.e. pour tout $g \in G$ et pour tout $X \in \chi^\infty(P)$, $\omega(R_{g*} X) = \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\omega(X))$.

THÉORÈME 2.15. Tout fibré principal $P \xrightarrow{\Pi} M$ admet une connexion principale si M est précompacte.

Le lecteur peut trouver une preuve de ce résultat dans le livre de Kobayashi et Nomizu [17].

REMARQUE 2.16. Notons tout d'abord que l'application ω_p est surjective pour tout p . Ensuite, on définit l'espace

$$H_p := \ker(\omega_p)$$

et l'espace

$$V_p := \left\{ A_p^* : A \in \mathfrak{g} \right\} = \ker(\Pi_{*p})$$

isomorphe à \mathfrak{g} , où $\Pi_{*p} : T_p P \rightarrow T_{\Pi(p)} M$. L'égalité $V_p = \ker(\Pi_*)$ vient du fait que les fibres de P sont les orbites de G et $\Pi(p \cdot g) = \Pi(p)$. Par conséquent,

$$\Pi_{*p}(A_p^*) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\Pi(p \cdot \exp(tA))) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\Pi(p)) = 0$$

et V_p est inclus dans $\ker(\Pi_{*p})$. L'argument dimensionnel $\dim(\ker(\Pi_{*p})) = \dim(P) - \dim(M) = \dim(\mathfrak{g})$ implique l'égalité. L'espace V_p est l'espace tangent à la fibre contenant p (i.e. l'orbite pG) en p . Il est appelé **l'espace vertical**. On remarque également que V_p et H_p sont tous deux contenus dans T_pP . De plus, par définition de ω , il est clair que $H_p \cap V_p = \{0\}$. Par surjectivité de ω ,

$$\dim(H_p) = \dim(\ker(\omega_p)) = \dim(T_pP) - \dim(\mathfrak{g}) = \dim(T_pP) - \dim(V_p),$$

d'où

$$V_p \oplus H_p = T_pP.$$

Par conséquent,

$$\Pi_{*p}|_{H_p} : H_p \rightarrow T_{\Pi(p)}M$$

est un isomorphisme linéaire et on appelle H_p **l'espace horizontal**. Cet isomorphisme implique que pour tout $x \in M$ et tout $X_x \in T_xM$, il existe un unique $\bar{X}_p \in H_p$ tel que $\Pi_{*p}(\bar{X}_p) = X_x$, pour $p \in \Pi^{-1}(x)$. On appelle \bar{X}_p le **relevé horizontal** de X_x en p . La conclusion de cette remarque est que $\coprod_{p \in P} H_p$ définit une distribution G -invariante sur P appelée **distribution horizontale**. En fait, on peut montrer qu'on a une connexion G -principale sur P si et seulement si on a une distribution horizontale G -invariante sur P .

DÉFINITION 2.17. La 2-forme de courbure associée à ω , notée $\Omega \in \Omega^2(P, \mathfrak{g})$, est donnée par

$$\Omega := d\omega + [\omega, \omega]$$

où $d\omega$ est la dérivée extérieure de ω , définie pour tout $X, Y \in \chi^\infty(P)$ par

$$d\omega(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$$

et $[\omega, \omega]$ est la 2-forme définie par

$$[\omega, \omega](X, Y) = [\omega(X), \omega(Y)].$$

REMARQUE 2.18. Pour tout $X, Y \in \chi^\infty(P)$,

$$\begin{aligned} \Omega(X, Y) &= d\omega(X, Y) + [\omega(X), \omega(Y)] \\ &= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) + [\omega(X), \omega(Y)]. \end{aligned}$$

En particulier,

$$\Omega_p(\bar{X}_p, \bar{Y}_p) = -\omega_p([\bar{X}, \bar{Y}]_p)$$

et donc,

$$\Omega(\bar{X}_p, \bar{Y}_p) = 0 \iff [\bar{X}, \bar{Y}]_p \in H_p.$$

Cela revient à dire que la courbure est nulle sur les espaces H_p si et seulement si la distribution horizontale est involutive.

REMARQUE 2.19. A chaque fibré vectoriel de rang k , $E \xrightarrow{\pi} M$, on peut associer le fibré des bases $F(E) \xrightarrow{\Pi} M$ de l'exemple 2.13. De plus, la connexion linéaire ∇ sur E induit une connexion principale ω sur $F(E)$ et donc un lien entre leur tenseurs de courbure. Dans cette remarque, on montre comment se construit une connexion $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ -principale sur $F(E)$ à partir de la connexion sur E et on donne le lien entre les courbures associées à ces deux connexions. Soit $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$, une trivialisatation locale de E . Cela nous donne directement une trivialisatation locale de $F(E)$:

$$(\tilde{\phi}) : \Pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathrm{GL}(k, \mathbb{R}); \quad p \mapsto \left(\Pi(p), \phi|_{E_{\Pi(p)}} \circ p \right)$$

où $p : \mathbb{R}^n \rightarrow T_{\Pi(p)}M$ est un isomorphisme linéaire. On définit également la section locale sur $F(E)$,

$$\sigma : U \rightarrow \Pi^{-1}(U); \quad x \mapsto \tilde{\phi}^{-1}(x, \mathrm{Id})$$

telle que pour tout $p \in F(E)_x$, $p = \sigma(x).g$ où $g \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ et $\tilde{\phi}(p) = (x, g)$. On cherche une application

$$\omega_p : T_p F(E) \rightarrow \mathfrak{gl}(k, \mathbb{R}) := \mathrm{Lie}(\mathrm{GL}(k, \mathbb{R}))$$

respectant les conditions de la définition 2.14. Il semble raisonnable de considérer le difféomorphisme

$$\tilde{\phi}_{*p} : T_p F(E) \rightarrow T_x M \oplus T_g \mathrm{GL}(k, \mathbb{R}).$$

Pour tout $A \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{R})$ et tout $X_x \in T_x M$,

$$\omega_{\sigma(x).g} \left(\tilde{\phi}_{*(x,g)}^{-1} (X_x + L_{g*\mathrm{Id}} A) \right) = \omega_p \left(R_{g*\sigma(x)} \sigma_{*x} X_x + A_p^* \right) := \mathrm{Ad}_{g^{-1}}(\theta(X_x)) + A$$

où θ est la 1-forme locale associée à ∇ (voir remarque 2.9). La première égalité vient de $R_g(\sigma(x)) = \sigma(x).g = p = \tilde{\phi}^{-1}(x, g)$ et

$$\begin{aligned} \tilde{\phi}_{*(x,g)}^{-1} (L_{g*\mathrm{Id}} A) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \tilde{\phi}^{-1}(x, g \cdot \exp(tA)) \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \tilde{\phi}^{-1}(x, g) \cdot \exp(tA) = A_{\tilde{\phi}^{-1}(x,g)}^* = A_p^*. \end{aligned}$$

La deuxième fait de ω une connexion $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ -principale. En effet, on peut vérifier que cette expression est invariante par changement trivialisatation locale et respecte les conditions de la définition 2.14. On appelle $\omega \in \Omega^1(F(E), \mathfrak{gl}(k, \mathbb{R}))$ la connexion $\mathrm{GL}(k, \mathbb{R})$ -principale associée à ∇ . Cette construction implique la relation suivante entre les courbures de ∇ et de ω .

PROPOSITION 2.20. *Pour tout $X, Y \in \chi^\infty(M)$, $\eta \in \Gamma^\infty(E)$, $x \in M$ et $p \in \Pi^{-1}(x)$,*

$$R_x^\nabla(X_x, Y_x)\eta(x) = p \left(\Omega_p(\bar{X}_p, \bar{Y}_p) p^{-1}(\eta(x)) \right).$$

En particulier, si on considère le fibré des bases, $F(M)$ associé au fibré tangent d'une variété lisse M , on obtient la même formule que dans le cas général mais ∇ est une connexion affine sur le fibré tangent. Sur une variété riemannienne (M, \hat{g}) , on peut considérer le fibré $\mathrm{SO}(M)$

des bases orthonormées orientées. Les calculs du cas général tiennent toujours mais on peut choisir ∇ comme la connexion de Levi-Civita ∇^{LC} définie par les symboles de Christoffel

$$\nabla_{\partial_{x_j}}^{LC} \tilde{e}_\alpha = \Gamma_{j\alpha}^\beta \tilde{e}_\beta$$

avec $\tilde{e}_\alpha(x) = \phi^{-1}(x, e_\alpha)$ et $\tilde{\phi} : \Pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \text{SO}(n)$. La condition métrique de la connexion de Levi-Civita, $\nabla^{LC} \hat{g} = 0$, et le fait que $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ soit un repère orthonormé impliquent $\Gamma_{j\alpha}^\beta + \Gamma_{j\beta}^\alpha = 0$. Alors, pour tout $x \in U$,

$$\left(\Gamma_{j\alpha}^\beta(x) \right)_{\alpha, \beta} \in \mathfrak{so}(n)$$

où $\mathfrak{so}(n)$ est l'algèbre de Lie de $\text{SO}(n)$, donnée par l'ensemble des matrices antisymétriques.

2.3. Fibrés vectoriels associés

DÉFINITION 2.21. Soit $P \xrightarrow{\Pi} M$ un fibré G -principal et soit

$$\rho : G \times V \rightarrow V; \quad (g, v) \mapsto \rho(g)v$$

une représentation de G sur un espace vectoriel réel V de dimension finie. Le **fibré vectoriel associé**, noté $E := P \times_\rho V \xrightarrow{\tilde{\Pi}} M$ est défini via l'action

$$(P \times V) \times G \rightarrow P \times V; \quad (p, v).g := (pg, \rho(g^{-1})v)$$

par

$$E = (P \times V)/G = \{[p, v] : p \in P, v \in V\}$$

où $[p, v].g = \{(p, v).g, g \in G\}$. Alors, E est un fibré vectoriel de rang $\dim(V)$ sur M avec

$$\tilde{\Pi} : E \rightarrow M; \quad [p, v] \mapsto \Pi(p).$$

REMARQUE 2.22. Cette définition nécessite quelques explications. Elle introduit un fibré vectoriel $E = P \times_\rho V \xrightarrow{\tilde{\Pi}} M$ associé à un fibré G -principal via une représentation ρ du groupe G . L'espace total est E et les fibres

$$\tilde{\Pi}^{-1}(x) = \{[p, v] \mid v \in V, \text{ pour chaque } p \in \Pi^{-1}(x)\} \simeq V$$

héritent de la structure d'espace vectoriel de V :

$$a[p, v] + b[p, w] = [p, av + bw].$$

De plus, une trivialisat on locale de P dans le fibré G -principal de départ

$$\phi : \Pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G; \quad p \mapsto (\Pi(p), a),$$

induit une trivialisat on locale de E dans le fibré vectoriel associ e par

$$\tilde{\phi} : \tilde{\Pi}^{-1}(U) \rightarrow U \times V; \quad p \mapsto (\Pi(p), \rho(a)v).$$

PROPOSITION 2.23. On peut voir les sections de $E = P \times_\rho V$ comme des fonctions lisses   valeurs dans V via l'isomorphisme

$$\Gamma^\infty(P \times_\rho V) \simeq C_\rho^\infty(P, V) := \{\hat{\sigma} \in C^\infty(P, V) \mid \hat{\sigma}(p.g) = \rho(g^{-1})\hat{\sigma}(p), \forall p \in P, \forall g \in G\}.$$

DÉMONSTRATION. Si $\hat{\sigma} \in C^\infty_\rho(P, V)$ on définit $\sigma(x) := [p, \hat{\sigma}(p)]$ pour tout $x \in M$ et un $p \in P_x$ i.e. $\Pi(p) = x$. L'application $\sigma : M \rightarrow E$ est bien définie car

$$[p \cdot g, \hat{\sigma}(p \cdot g)] = [p \cdot g, \rho(g^{-1})\hat{\sigma}(p)] = [p, \hat{\sigma}(p)].$$

De plus, on a

$$\tilde{\Pi}(\sigma(x)) = \tilde{\Pi}([p, \hat{\sigma}(p)]) = \Pi(p) = x,$$

et σ est une section de E . Réciproquement, on associe à une section $\sigma : M \rightarrow E$ la fonction $\hat{\sigma} : P \rightarrow V$ définie par $\sigma(\Pi(p)) = [p, \hat{\sigma}(p)]$. \square

DÉFINITION 2.24. Soit $\omega \in \Omega^1(P; \mathfrak{g})$ une connexion G -principale sur P . La connexion linéaire ∇ sur $E = P \times_\rho V$ satisfaisant, pour tout $\eta \in \Gamma^\infty(E)$ et pour tout $X \in \chi^\infty(M)$, l'identité,

$$\widehat{\nabla_X \eta}(p) := \hat{\eta}_{*p}(\overline{X}_p) \quad \text{où, } \overline{X}_p \in H_p$$

est appelée la **connexion associée** à ω sur E .

REMARQUE 2.25. Soit M une variété de dimension m . Considérons un fibré G -principal $P \xrightarrow{\Pi} M$ et un fibré associé $E := P \times_\rho V \xrightarrow{\tilde{\Pi}} M$ où V est un espace vectoriel de base $\{e_1, \dots, e_k\}$. L'objectif de cette remarque est d'étudier le lien entre la connexion G -principale ω dans P et la connexion linéaire associée ∇ dans E . On définit une trivialisatoin locale de P ,

$$\phi : \Pi^{-1}(U) \rightarrow U \times G,$$

et la trivialisatoin locale induite sur E au sens de la remarque 2.22,

$$\tilde{\phi} : \tilde{\Pi}^{-1}(U) \rightarrow U \times V,$$

avec (x_1, \dots, x_m) des coordonnées locales sur U et les sections locales $\tilde{e}_\alpha \in \Gamma^\infty(E|_U)$, $\alpha \in \{1, \dots, k\}$ définies par

$$\tilde{e}_\alpha : U \rightarrow \tilde{\Pi}^{-1}(U) \quad ; \quad \tilde{e}_\alpha(x) := \tilde{\phi}^{-1}(x, e_\alpha).$$

Par la remarque 2.9, on a une expression locale pour la connexion linéaire ∇ sur E

$$\nabla_{\partial_{x_j}} \tilde{e}_\alpha = \theta_{j\alpha}^\beta \tilde{e}_\beta,$$

où θ est la 1-forme locale

$$\theta : TM|_U \rightarrow \mathfrak{gl}(k, \mathbb{R}) ; \quad X = X^j \partial_{x_j} \mapsto \left(X^j \theta_{j\alpha}^\beta \right)_{\alpha, \beta}.$$

Cependant, par définition de connexion sur un fibré associé, on a la condition supplémentaire

$$\widehat{\nabla_{\partial_{x_j}} \tilde{e}_\alpha}(p) := \hat{\tilde{e}}_{\alpha * p}(\overline{\partial_{x_j}}|_p) \quad \text{où } \overline{\partial_{x_j}}|_p \in H_p := \ker(\omega_p).$$

Pour rappel, $\overline{\partial_{x_j}}|_p$ est l'unique vecteur tel que $\Pi_{*p}(\overline{\partial_{x_j}}|_p) = \partial_{x_j}|_x$ avec $p \in \Pi^{-1}(x)$. On observe

$$\phi_{*p} : T_p P|_{\Pi^{-1}(U)} \rightarrow T_x M \oplus T_{\phi_x(p)} G$$

et donc

$$\phi_{*p}(\overline{\partial_{x_j}}|_p) = \partial_{x_j}|_x + L_{g * e} A$$

où $A \in \mathfrak{g}$. Grâce à la remarque 2.19, et puisque $\overline{\partial x_j}|_p \in \ker(\omega_p)$, on peut écrire, pour $p = \sigma(x).g$ où σ est la section locale de P définie par $\sigma(x) := \phi^{-1}(x, e)$,

$$\omega_p \left(\overline{\partial x_j}|_p \right) = \omega_p \left(\phi_{*(x,g)}^{-1} \left(\partial x_j|_x + L_{g^*e} A \right) \right) = \text{Ad}_{(g^{-1})} \omega_{\sigma(x)} \left(\sigma_{*x} \partial x_j|_x \right) + A = 0$$

d'où,

$$\phi_{*p} \left(\overline{\partial x_j}|_p \right) = \partial x_j|_x - L_{g^*e} \text{Ad}_{(g^{-1})} \omega_{\sigma(x)} \left(\sigma_{*x} \partial x_j|_x \right).$$

Par définition, $\widehat{e}_\alpha : P \rightarrow V$ est l'unique fonction G -équivariante telle que $\widetilde{e}_\alpha(\Pi(p)) = [p, \widehat{e}_\alpha(p)]$.

De plus, pour $x \in U$,

$$\widetilde{e}_\alpha(x) := \phi^{-1}(x, e_\alpha) = [\phi^{-1}(x, e), e_\alpha] = [\sigma(x), e_\alpha].$$

Donc, pour $\Pi(p) = x$ et $p = \sigma(x).g$,

$$\widetilde{e}_\alpha(\Pi(p)) = [\sigma(x), e_\alpha] = [\sigma(x).g, \rho(g^{-1}) e_\alpha] = [p, \rho(g^{-1}) e_\alpha]$$

et

$$\widehat{e}_\alpha(p) = \rho(g^{-1}) e_\alpha.$$

On calcule

$$\widehat{e}_{\alpha^*p} \left(\phi_{*(x,g)}^{-1} (X_x + L_{g^*e} A) \right) = \frac{d}{dt} \Big|_0 \left(\widehat{e}_\alpha \left(\phi^{-1}(\gamma_x(t), g \exp(tA)) \right) \right) = (\rho_{*e} A) \rho(g^{-1}) e_\alpha$$

où $\gamma_x : [-1, 1] \rightarrow M$ est un lacet C^∞ telle que $\gamma_x(0) = x$ et $\dot{\gamma}_x(0) = X_x$. On obtient

$$\begin{aligned} \widehat{e}_{\alpha^*p} \left(\overline{\partial x_j}|_p \right) &= \widehat{e}_{\alpha^*p} \left(\phi_{*(x,g)}^{-1} \left(\partial x_j|_x - L_{g^*e} \text{Ad}_{(g^{-1})} \omega_{\sigma(x)} \left(\sigma_{*x} \partial x_j|_x \right) \right) \right) \\ &= \rho_{*e} \left(\text{Ad}_{(g^{-1})} \omega_{\sigma(x)} \sigma_{*x} \left(\partial x_j|_x \right) \right) (\rho(g^{-1}) e_\alpha) \\ &= \rho(g^{-1}) \left(\rho_{*e} \left(\omega_{\sigma(x)} \sigma_{*x} \left(\partial x_j|_x \right) \right) e_\alpha \right). \end{aligned}$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} \nabla_{\partial x_j} \widetilde{e}_\alpha(x) &= [\sigma(x), \widehat{\nabla}_{\partial x_j} \widetilde{e}_\alpha(\sigma(x))] \\ &= [\sigma(x), \widehat{e}_{\alpha^*p} \left(\overline{\partial x_j}|_p \right)] \\ &= [\sigma(x), \rho_{*e} \left(\omega_{\sigma(x)} \sigma_{*x} \left(\partial x_j|_x \right) \right) e_\alpha] \\ &= [\sigma(x), (\rho_{*e} \left(\omega_{\sigma(x)} \sigma_{*x} \left(\partial x_j|_x \right) \right))_{\alpha, \beta} e_\beta] \\ &= (\rho_{*e} \left(\omega_{\sigma(x)} \sigma_{*x} \left(\partial x_j|_x \right) \right))_{\alpha, \beta} \widetilde{e}_\beta(x) \end{aligned}$$

implique

$$\theta_{j\alpha}^\beta = (\rho_{*e} \left(\omega_{\sigma(x)} \sigma_{*x} \left(\partial x_j|_x \right) \right))_{\alpha, \beta}$$

où θ est la 1-forme associée à ∇ (voir remarque 2.9)

$$\theta = \rho_{*e}(\omega(\sigma_*)) : TM|_U \rightarrow \mathfrak{gl}(V) \simeq \mathfrak{gl}(k, \mathbb{R}).$$

Cette expression définit le lien entre la connexion principale ω sur P et la connexion linéaire ∇ du fibré vectoriel associé, E .

La propriété suivante donne un lien entre la 2-forme de courbure sur un fibré principal et le tenseur de courbure d'un fibré vectoriel associé.

PROPOSITION 2.26. *Pour tout $X, Y \in \chi^\infty(M)$ et pour tout $\sigma \in \Gamma^\infty(E)$,*

$$R^{\widehat{\nabla}(X, Y)}\sigma(p) = -\widehat{\sigma}_{*p} \left(\Omega_p \left(\overline{X}_p, \overline{Y}_p \right)_p^* \right)$$

pour tout $p \in P$.

DÉMONSTRATION. Par définition,

$$\widehat{\nabla}_x \sigma(p) := \widehat{\sigma}_{*p} \left(\overline{X}_p \right) = \overline{X}(\widehat{\sigma})(p)$$

d'où

$$\widehat{\nabla}_X \widehat{\nabla}_Y \sigma(p) = \widehat{\nabla}_Y \widehat{\sigma}_{*p} \left(\overline{X}_p \right) = \overline{X} \left(\widehat{\nabla}_Y \sigma \right)(p) = \overline{X} \left(\overline{Y}(\widehat{\sigma}) \right)(p).$$

Par conséquent, le terme de gauche de l'énoncé se réécrit

$$\begin{aligned} R^{\widehat{\nabla}(X, Y)}\sigma(p) &= (\nabla_X \nabla_Y \sigma - \nabla_Y \nabla_X \sigma - \nabla_{[X, Y]} \sigma)^\wedge(p) \\ &= \overline{X} \left(\overline{Y}(\widehat{\sigma}) \right)(p) - \overline{Y} \left(\overline{X}(\widehat{\sigma}) \right)(p) - \overline{[X, Y]}(\widehat{\sigma})(p) \\ &= [\overline{X}, \overline{Y}] - \overline{[X, Y]}(\widehat{\sigma})(p). \end{aligned}$$

Par la remarque 2.18,

$$\Omega(\overline{X}_p, \overline{Y}_p) = -\omega_p([\overline{X}, \overline{Y}]_p).$$

Comme détaillé dans la remarque 2.16, $T_p P = H_p \oplus V_p$ où $H_p := \ker(\omega_p)$ et $V_p = \ker(\Pi_{*p}) = \{A_p^* : A \in \mathfrak{g}\}$. On peut écrire $[\overline{X}, \overline{Y}]_p = u_p + v_p$ avec $u_p \in H_p$ et $v_p \in V_p$ et on a

$$\Pi_{*p}([\overline{X}, \overline{Y}]_p) = [\Pi_* \overline{X}, \Pi_* \overline{Y}]_{\Pi(p)} = [X, Y]_{\Pi(p)}.$$

Cela permet d'écrire

$$[\overline{X}, \overline{Y}]_p = \overline{[X, Y]}_p + A_p^*$$

où $\omega_p([\overline{X}, \overline{Y}]_p) = A \in \mathfrak{g}$. D'où

$$\Omega(\overline{X}_p, \overline{Y}_p) = -\omega_p([\overline{X}, \overline{Y}]_p) = -A$$

avec $(-\Omega_p(\overline{X}_p, \overline{Y}_p))_p^* = A_p^* = [\overline{X}, \overline{Y}]_p - \overline{[X, Y]}_p$. On conclut la preuve en combinant nos deux observations. \square

2.4. Propriété de construction

Dans cette section, nous allons fusionner la remarques 2.19 avec la définition de fibré associé. Tout d'abord, à partir d'un fibré vectoriel, nous allons construire le fibré des bases comme dans la remarque 2.19. Ensuite, nous considérerons le fibré vectoriel associé via la représentation naturelle

$$\mathrm{GL}(k, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k.$$

Le fait remarquable mis en évidence par la propriété est que le fibré ainsi obtenu est isomorphe au fibré vectoriel de départ.

DÉFINITION 2.27. Soient $E \xrightarrow{\pi_E} M$ et $F \xrightarrow{\pi_F} N$ deux fibrés vectoriels. Un morphisme de fibré est la donnée de deux applications continues f et g telles que le diagramme suivant commute,

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ \pi_E \downarrow & & \downarrow \pi_F \\ M & \xrightarrow{g} & N. \end{array}$$

i.e. $g \circ \pi_E = \pi_F \circ f$. De plus, pour tout $x \in M$,

$$f_x := f|_{E_x} : \pi_E^{-1}(x) \rightarrow \pi_F^{-1}(g(x))$$

est une application linéaire entre espaces vectoriels. Comme π_E est surjective, g est uniquement déterminée par f .

On a un isomorphisme de fibré si f est un difféomorphisme et f_x est un isomorphisme sur les fibres pour tout $x \in M$. Dans le cas où $M = N$, g est simplement l'identité.

PROPOSITION 2.28. Soit $E \xrightarrow{\pi} M$ un fibré vectoriel réel de rang k , alors

$$E \simeq F(E) \times_{\text{GL}} \mathbb{R}^k$$

où $F(E) \xrightarrow{\Pi} M$ est le fibré des bases associé à E et $F(E) \times_{\text{GL}} \mathbb{R}^k \xrightarrow{\tilde{\Pi}} M$ le fibré vectoriel associé via la représentation naturelle

$$\text{GL}(k, \mathbb{R}) \times \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^k; (g, u) \mapsto g(u).$$

DÉMONSTRATION. La preuve consiste simplement à construire cet isomorphisme de fibrés vectoriels, i.e un difféomorphisme C^∞ , $f : E \rightarrow F(E) \times_{\text{GL}} \mathbb{R}^k$ tel que pour tout $x \in M$, $f_x := f|_{E_x} : E_x \rightarrow (F(E) \times_{\text{GL}} \mathbb{R}^k)_x$ est un isomorphisme linéaire et tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F(E) \times_{\text{GL}} \mathbb{R}^k \\ \pi \downarrow & & \downarrow \tilde{\Pi} \\ M & \xrightarrow{\text{Id}} & M. \end{array}$$

Sans entrer dans les détails, pour tout $x \in M$, on définit l'application linéaire

$$f_x : E_x \rightarrow (F(E) \times_{\text{GL}} \mathbb{R}^k)_x; \quad \eta_x \mapsto [p, p^{-1}(\eta_x)],$$

avec $p : \mathbb{R}^k \rightarrow E_x$ un isomorphisme linéaire dans $F(E)_x$. Cette application est bien définie car pour tout $g \in \text{GL}(k, \mathbb{R})$, on a

$$[p \cdot g, (p \cdot g)^{-1}(\eta_x)] = [p \cdot g, g^{-1}(p^{-1}(\eta_x))] = [p, p^{-1}(\eta_x)].$$

On vérifie facilement que f_x est un isomorphisme linéaire. Ensuite, on montre via les trivialisations locales que $f : E \rightarrow F(E) \times_{\text{GL}} \mathbb{R}^k$ est un difféomorphisme. \square

REMARQUE 2.29. Cet isomorphisme de fibrés implique un isomorphisme de sections de fibrés donné par

$$\Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(F(E) \times_{\text{GL}} \mathbb{R}^k) \simeq C_{\text{GL}}^\infty(F(E); \mathbb{R}^k); \quad \eta \mapsto \hat{\eta}$$

avec $\hat{\eta}(p) := p^{-1}\eta(\Pi(p))$.

Qu'est-ce que ce résultat implique pour les connexions dans E et $F(E) \times_{\text{GL}} \mathbb{R}^k$? Soit ω la connexion $\text{GL}(k, \mathbb{R})$ -principale sur $F(E)$ associée à ∇ au sens de la remarque 2.19 et $\tilde{\nabla}$ la connexion associée à ω sur $F(E) \times_{\text{GL}} \mathbb{R}^k$ au sens de la remarque 2.25. Il est tentant de supposer que $\nabla \simeq \tilde{\nabla}$ à travers l'isomorphisme de fibrés $E \simeq F(E) \times_{\text{GL}} \mathbb{R}^k$. C'est exactement ce que signifie la proposition suivante.

PROPOSITION 2.30. *Pour tout $X \in \chi^\infty(M)$ et pour tout $\eta \in \Gamma^\infty(E)$,*

$$\widehat{\nabla_X \eta}(p) = \hat{\eta}_{*p} \left(\overline{X}_p \right)$$

où \overline{X}_p est le relevé horizontal de $X_{\Pi(p)}$ par rapport à ω et $\hat{\eta} := p^{-1}\eta(\Pi(p))$.

DÉMONSTRATION. Le résultat est prouvé localement. Soit

$$\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k,$$

une trivialisatoin locale de E , et

$$\tilde{\phi} : \Pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \text{GL}(k; \mathbb{R}); \quad \tilde{\phi}(p) = \left(\Pi(p), \phi|_{E_{\Pi(p)}} \circ p \right)$$

la trivialisatoin locale de $F(E)$ induite par ϕ , avec les coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) sur un ouvert U de M . On note $\{e_1, \dots, e_k\}$ la base canonique de \mathbb{R}^k et $\tilde{e}_\alpha(x) := \phi^{-1}(x, e_\alpha)$. On définit également la section locale de $F(E)$:

$$\sigma : U \rightarrow \Pi^{-1}(U); \quad x \mapsto \tilde{\phi}^{-1}(x, id).$$

On remarque en passant que

$$\phi|_{E_x} \circ \sigma(x) = \text{Id} \implies \sigma(x) = \left(\phi|_{E_x} \right)^{-1} \implies \sigma(x)e_\alpha = \tilde{e}_\alpha(x).$$

On pose $X = X^j \partial_{x_j}$, un champ de vecteur sur M , $p = \tilde{\phi}^{-1}(x, g) = \sigma(x)g$ un point de P et pour $\eta \in \Gamma^\infty(E)$ on peut écrire $\eta|_U = (\eta^\alpha) \tilde{e}_\alpha$. On calcule

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla_X \eta}(p) &= p^{-1}(\nabla_X \eta(x)) \\ &= p^{-1} \left(X_x^j \partial_{x_j} |_{x} (\eta^\alpha) \tilde{e}_\alpha(x) + X_x^j \eta_x^\alpha \theta_{j\alpha}^\beta(x) \tilde{e}_\beta(x) \right) \\ &= g^{-1} \sigma(x)^{-1} \left(X_x^j \partial_{x_j} |_{x} (\eta^\alpha) \tilde{e}_\alpha(x) + X_x^j \eta_x^\alpha \theta_{j\alpha}^\beta(x) \tilde{e}_\beta(x) \right) \\ &= (g^{-1}) \left(X_x^j \partial_{x_j} |_{x} (\eta^\alpha) e_\alpha(x) + X_x^j \eta_x^\alpha \theta_{j\alpha}^\beta(x) e_\beta(x) \right). \end{aligned}$$

De plus, on sait grâce la remarque 2.19,

$$\begin{aligned} \overline{X}_p &= \tilde{\phi}_{*(x,g)}^{-1} \left(X_x - L_{g*id} \text{Ad}(g^{-1}) \left(X_x^j \theta_{j\alpha}^\beta(x) \right)_{\alpha\beta} \right) \\ &= R_{g*\sigma(x)} \left(\tilde{\phi}_{*(x,id)}^{-1} \left(X_x - \left(X_x^j \theta_{j\alpha}^\beta(x) \right)_{\alpha\beta} \right) \right) \\ &= R_{g*\sigma(x)} \left(\sigma_{*x} X_x - \left(\left(X_x^j \theta_{j\alpha}^\beta(x) \right)_{\alpha\beta} \right)_{\sigma(x)}^* \right). \end{aligned}$$

Donc,

$$\begin{aligned}\widehat{\eta}_{*p}(\overline{X}_p) &= \widehat{\eta}_{*p} \left(R_{g_{*\sigma(x)}} \left(\sigma_{*x} X_x - \left((X_x^j \theta_{j\alpha}^\beta(x))_{\alpha\beta} \right)_{\sigma(x)}^* \right) \right) \\ &= (g^{-1}) \widehat{\eta}_{*\sigma(x)} \left(\sigma_{*x} X_x - \left((X_x^j \theta_{j\alpha}^\beta(x))_{\alpha\beta} \right)_{\sigma(x)}^* \right)\end{aligned}$$

où on peut écrire, d'une part,

$$\begin{aligned}\widehat{\eta}_{*\sigma(x)}(\sigma_{*x} X_x) &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \widehat{\eta}(\sigma(\gamma_{X_x}(t))) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \sigma(\gamma_{X_x}(t))^{-1} (\eta_{\gamma_{X_x}(t)}) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \eta_{\gamma_{X_x}(t)}^\alpha \sigma(\gamma_{X_x}(t))^{-1} (\tilde{e}_\alpha(\gamma_{X_x}(t))) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \eta_{\gamma_{X_x}(t)}^\alpha e_\alpha = X_x(\eta^\alpha) e_\alpha\end{aligned}$$

et d'autre part, en posant

$$\begin{aligned}A_x &:= \left((X_x^j \theta_{j\alpha}^\beta(x))_{\alpha\beta} \right)_{\sigma(x)}^*, \\ \widehat{\eta}_{*\sigma(x)}(A_x) &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \widehat{\eta}(\sigma(x) \cdot \exp(tA_x)) = \frac{d}{dt} \Big|_0 \exp(-tA_x) (\widehat{\eta}(\sigma(x))) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \exp(-tA_x) (\eta_x^\alpha e_\alpha) = -A_x (\eta_x^\alpha e_\alpha) \\ &= -\eta_x^\alpha X_x^j \theta_{j\alpha}^\beta(x) e_\beta.\end{aligned}$$

On déduit, comme souhaité,

$$\widehat{\eta}_{*p}(\overline{X}_p) = (g^{-1}) \left(X_x(\eta^\alpha) e_\alpha + \eta_x^\alpha X_x^j \theta_{j\alpha}^\beta(x) e_\beta \right) = (\widehat{\nabla_X \eta})(p).$$

□

On conclut des deux dernières propositions que tout fibré vectoriel est le fibré associé à un fibré principal et toute connexion linéaire est la connexion associée à une connexion principale. Par conséquent, il est suffisant de considérer uniquement les fibrés principaux.

EXEMPLE 2.31. Nous clôturons ce chapitre par un cas particulier important. Soient (M, \widehat{g}) une variété riemannienne orientée et ∇^{LC} la connexion de Levi-Civita correspondante et soit $SO(M) \xrightarrow{\Pi} M$ le fibré des bases orthonormées orientées sur M . Il y a un isomorphisme de fibrés entre le fibré tangent TM et le fibré associé à $SO(M)$ via la représentation naturelle $SO(n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$:

$$TM \simeq SO(M) \times_{SO} \mathbb{R}^n.$$

En effet, on a l'identification

$$X_x \mapsto [p, p^{-1}(X_x)]$$

où $p : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$ est une isométrie linéaire préservant l'orientation et $p \in \Pi^{-1}(x)$. Cela induit également l'isomorphisme

$$\chi^\infty(M) \rightarrow \Gamma^\infty(SO(M) \times_{SO} \mathbb{R}^n) \simeq C_{SO}^\infty(SO(M), \mathbb{R}^n); X \mapsto \widehat{X}$$

sur les sections, avec $\widehat{X}(p) := p^{-1}(X_{\Pi(p)})$. De plus, si $\omega \in \Omega^1(\mathrm{SO}(M); \mathfrak{so}(n))$ est la connexion $\mathrm{SO}(n)$ -principale sur $\mathrm{SO}(M)$ associée à ∇^{LC} , alors pour tout $X, Y \in \chi^\infty(M)$,

$$\widehat{\nabla_X^{LC} Y}(p) = \widehat{Y}_{*p}(\overline{X}_p).$$

où \overline{X}_p est le relevé horizontal de $X_{\Pi(p)}$ par rapport à ω .

L'opérateur de Dirac dans le cadre riemannien

L'opérateur de Dirac est un opérateur différentiel linéaire du premier ordre défini sur une classe de variétés riemanniennes appelées **variétés spinorielles**. Il agit sur les sections d'un fibré vectoriel particulier associé à la variété et appelé **fibré des spineurs**. Une propriété remarquable de cet opérateur réside dans la formule de Lichnerowicz-Weitzenböck qui établit un lien direct entre l'opérateur de Dirac et le Laplacien :

$$D^2\eta = \Delta\eta + Cs(\eta)$$

où C est une constante, s la courbure scalaire et η une section du fibré des spineurs. En substance, le carré de l'opérateur de Dirac est exactement le Laplacien à un terme de courbure près.

Avant de considérer le cas général, regardons ce que l'on obtient dans un cas simple. On considère $\mathbb{R}^{(0,3)}$ avec la métrique définie négative et la base canonique $\{e_1, e_2, e_3\}$. Le laplacien prend alors la forme bien connue

$$\Delta = -\partial_{x_1}^2 - \partial_{x_2}^2 - \partial_{x_3}^2.$$

Considérons un opérateur différentiel du premier ordre

$$D = \gamma^1\partial_{x_1} + \gamma^2\partial_{x_2} + \gamma^3\partial_{x_3}$$

et essayons de voir s'il peut satisfaire la formule de Lichnerowicz-Weitzenböck. Ici la courbure est nulle et $D^2 = \Delta$ si et seulement si les γ^j sont constants et tels que

$$(\gamma^j)^2 = -1, \quad \gamma^j\gamma^k + \gamma^k\gamma^j = 0, \quad j \neq k.$$

Ces équations n'admettent pas de solution complexe. Cependant, on reconnaît ici les propriétés d'une algèbre de Clifford et on a la solution matricielle suivante

$$\gamma^1 = \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \gamma^3 = \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

qui s'avère être une représentation de $\mathcal{C}^{(0,3)}$ donnée par

$$e_1 \mapsto \gamma_1, \quad e_2 \mapsto \gamma_2, \quad e_3 \mapsto \gamma_3.$$

Par conséquent, nous allons devoir définir l'opérateur D comme agissant sur des fonctions C^∞ , $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{C}^2$, appelées **champ de spineurs**, et tel que

$$D\psi := \sum_{j=1}^3 \gamma^j \partial_{x_j} \psi := \sum_{j=1}^3 e_j \bullet \partial_{x_j} \psi$$

où $e_j \bullet v := \gamma^j v$, pour $v \in \mathbb{C}^2$, est la **multiplication de Clifford**.

Ce cas simple permet d'identifier les ingrédients nécessaires à la construction de l'opérateur de Dirac. Premièrement, nous clarifierons l'appellation "champ de spineurs" en identifiant les fonctions ψ comme des sections du fibré des spineurs, noté S . Deuxièmement, nous donnerons une définition générale de l'opérateur différentiel ∂x_j qui deviendra une connexion linéaire ∇^S sur le fibré des spineurs. Troisièmement, nous définirons la multiplication de Clifford μ sur le fibré des spineurs. Ces trois étapes permettront de définir l'opérateur de Dirac comme

$$D := \mu \circ \nabla^S$$

et de démontrer qu'il satisfait la formule de Lichnerowicz-Weitzenböck. Enfin, ce chapitre se conclut par la construction d'une structure hermitienne sur les sections de carré sommable du fibré des spineurs, telle que l'opérateur de Dirac est symétrique.

3.1. Structure spinorielle et multiplication de Clifford

3.1.1. Variétés Spin.

DÉFINITION 3.1. Soit (M, g) une variété riemannienne orientée. Une **structure spinorielle** sur M est un fibré $\text{Spin}(n)$ -principal $\text{Spin}(M) \xrightarrow{\Pi_{\text{Spin}}} M$ tel que, si $\text{SO}(M) \xrightarrow{\Pi_{\text{SO}}} M$ est le fibré des bases orthonormées orientées sur M , on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin}(M) \times \text{Spin}(n) & \xrightarrow{p_1} & \text{Spin}(M) \\ (\Lambda, \lambda) \downarrow & & \downarrow \Lambda \\ \text{SO}(M) \times \text{SO}(n) & \xrightarrow{p_1} & \text{SO}(M) \end{array}$$

où Λ et λ sont des revêtements doubles de $\text{SO}(M)$ et $\text{SO}(n)$.

Toute variété riemannienne orientée n'admet pas de structure spinorielle. Une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une telle structure est que la seconde classe de Stiefel-Whitney soit nulle, comme détaillé dans [13]. On appelle **variétés Spin** les variétés munies d'une structure spinorielle. Notons aussi qu'une structure spinorielle sur une variété n'est en générale pas unique à isomorphisme près.

EXEMPLE 3.2. Même si toute variété riemannienne n'admet pas de structure spinorielle, cette classe contient de nombreuses variétés usuelles dont les exemples ci-dessous :

- (1) les sphères \mathbb{S}^n , pour $n \geq 1$
- (2) toutes les variétés compactes et orientées de dimension inférieure ou égale à 3
- (3) l'espace projectif complexe $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$ est spin pour n impair et non-spin pour n pair.

REMARQUE 3.3. Le revêtement double $\lambda : \text{Spin}(n) \xrightarrow{2:1} \text{SO}(n)$ de la définition 3.1 est identique à l'application χ défini dans la section 1.2, i.e. pour $s \in \text{Spin}(n)$ et $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\lambda(s)x = sx s^{-1}.$$

En particulier, on a une représentation $\lambda : \text{Spin}(n) \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$.

REMARQUE 3.4. Cette remarque prolonge l'exemple 2.31. Soit (M, \hat{g}) une variété riemannienne orientée de dimension n . On peut alors définir le fibré principal $\text{SO}(M) \xrightarrow{\Pi_{\text{SO}}} M$. Supposons que M soit muni d'une structure spinorielle, i.e. d'un fibré Spin-principal $\text{Spin}(M) \xrightarrow{\Pi_{\text{Spin}}} M$ avec les revêtements doubles λ et Λ tels que le diagramme de la définition 3.1 commute. Alors, on a l'isomorphisme de fibrés

$$\begin{aligned} \text{Spin}(M) \times_{\lambda} \mathbb{R}^n &\rightarrow \text{SO}(M) \times_{\text{SO}} \mathbb{R}^n \\ [q, u] &\mapsto [\tilde{q}, u] \end{aligned}$$

où $\tilde{q} := \Lambda(q)$. Cette application est clairement surjective et elle est injective grâce à la définition des classes d'équivalence. En effet, si $[\tilde{q}_1, u_1] = [\tilde{q}_2, u_2]$, alors q_1 et q_2 appartiennent à la même fibre $\Pi_{\text{Spin}}^{-1}(x) = \text{Spin}(M)_x$. Dès lors, il existe $g \in \text{Spin}(n)$ tel que $q_1 = q_2 \cdot g$. Par conséquent,

$$[\tilde{q}_1, u_1] = [\tilde{q}_2, \lambda(g)u_1] = [\tilde{q}_2, u_2]$$

d'où $\lambda(g)u_1 = u_2$ et

$$[q_1, u_1] = [q_2 \cdot g, \lambda(g^{-1})u_2] = [q_2, u_2].$$

En fusionnant cette remarque avec on a l'exemple 2.31, on a la chaîne d'isomorphismes de fibrés

$$\text{Spin}(M) \times_{\lambda} \mathbb{R}^n \simeq \text{SO}(M) \times_{\text{SO}} \mathbb{R}^n \simeq TM. \quad (3.1)$$

3.1.2. Fibré des spineurs.

DÉFINITION 3.5. Le **fibré des spineurs** est le fibré vectoriel $S := \text{Spin}(M) \times_{\rho} S_n$, associé à $\text{Spin}(M)$ via la représentation spinorielle

$$\rho : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Aut}(S_n),$$

où $\rho = \kappa|_{\text{Spin}(n)}$ et $\kappa : C_c^n \rightarrow \text{End}(S_n)$ est la représentation introduite dans la section 1.3.

DÉFINITION 3.6. On appelle *champ de spineurs* les sections du fibré des spineurs ; c'est-à-dire des fonctions C^∞ , $\psi : \text{Spin}(M) \rightarrow S_n$, Spin-équivariantes (voir proposition 2.23).

REMARQUE 3.7. La connexion de Levi-Civita ∇^{LC} sur (M, \hat{g}) induit naturellement une connexion sur le fibré des spineurs. Si $\omega \in \Omega^1(\text{SO}(M), \text{SO}(n))$ est la connexion $\text{SO}(n)$ -principale sur $\text{SO}(M)$ associée à ∇^{LC} (voir remarque 2.19), alors la connexion $\text{Spin}(n)$ -principale sur $\text{Spin}(M)$, qu'on notera $\tilde{\omega}$, est donnée par le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} T\text{Spin}(M) & \xrightarrow{\tilde{\omega}} & \mathfrak{spin}(n) \\ \Lambda_* \downarrow & & \downarrow \lambda_* \\ T\text{SO}(M) & \xrightarrow{\omega} & \mathfrak{so}(n) \end{array}$$

c'est-à-dire,

$$\tilde{\omega}_q(Z_q) := (\lambda_{*e})^{-1} \omega_{\Lambda(q)}(\Lambda_{*q}Z_q).$$

On vérifie facilement que cette expression définit bien une connexion $\text{Spin}(M)$ -principale. De plus, on peut définir la connexion linéaire ∇^S associée à $\tilde{\omega}$ sur S par

$$\widehat{\nabla_X^S \eta}(q) := \hat{\eta}_{*q}(\bar{X}_q)$$

pour tout $X \in \chi^\infty(M)$ et tout $\eta \in \Gamma^\infty(S)$.

REMARQUE 3.8. On peut établir un lien entre les tenseurs de courbure R^{∇^S} sur le fibré des spineurs et $R^{\nabla^{LC}}$ sur TM . En effet, si on part du fibré tangent TM muni de la connexion de Levi-Civita et qu'on considère le fibré principal $SO(M)$ avec ω la connexion $SO(n)$ -principale associée au sens de la remarque 2.19, on a la relation entre les courbures donnée par la proposition 2.20 :

$$R_x^{\nabla^{LC}}(X_x, Y_x)Z_x = p \left(\Omega_p(\bar{X}_p, \bar{Y}_p) p^{-1}(Z_x) \right)$$

pour $p \in \Pi_{SO}^{-1}(x)$, $x \in M$. De plus, pour $q \in \Pi_{Spin}^{-1}(x)$, les relevés horizontaux sur $SO(M)$ et $Spin(M)$ respectent la relation

$$H_{\Lambda(q)} = \Lambda_{*q}(\tilde{H}_q).$$

Par conséquent,

$$\begin{aligned} R_x^{\nabla^{LC}}(X_x, Y_x)Z_x &= p \left(\Omega_p(\bar{X}_p, \bar{Y}_p) p^{-1}(Z_x) \right) \\ &= \Lambda(q) \left(\Omega_{\Lambda(q)} \left(\Lambda_{*q} \bar{X}_q, \Lambda_{*q} \bar{Y}_q \right) \Lambda(q)^{-1}(Z_x) \right). \end{aligned}$$

Si on note $\tilde{\omega}$ la connexion $Spin(n)$ -principale sur $Spin(M)$ et $\tilde{\Omega}$ la 2-forme de courbure associée, la proposition 2.26 nous donne l'égalité suivante, pour tout $\eta \in \Gamma^\infty(S)$,

$$R^{\widehat{\nabla^S}}(X, Y)\eta(q) = -\hat{\eta}_{*q} \left(\tilde{\Omega}_q \left(\bar{X}_q, \bar{Y}_q \right)^* q \right)$$

avec $q \in Spin(M)$. Par définition de $\tilde{\omega}$ (voir remarque 3.7),

$$\tilde{\Omega}_q \left(\bar{X}_q, \bar{Y}_q \right) = (\tilde{\lambda}_{*e})^{-1} \left(\Omega_{\Lambda(q)} \left(\Lambda_{*q} \bar{X}_q, \Lambda_{*q} \bar{Y}_q \right) \right)$$

donc,

$$\begin{aligned} R^{\widehat{\nabla^S}}(X, Y)\eta(q) &= -\hat{\eta}_{*q} \left(\tilde{\Omega}_q \left(\bar{X}_q, \bar{Y}_q \right)^* q \right) = \frac{d}{dt} \Big|_0 \hat{\eta} \left(q \cdot \exp \left(t \tilde{\Omega} \left(\bar{X}_q, \bar{Y}_q \right) \right) \right) \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \rho \left(\exp \left(t \tilde{\Omega} \left(\bar{X}_q, \bar{Y}_q \right) \right) \right) \hat{\eta}(q) = \rho_{*e} \left(\tilde{\Omega}_q \left(\bar{X}_q, \bar{Y}_q \right) \right) \hat{\eta}(q) \\ &= \rho_{*e} \left((\lambda_{*e})^{-1} \left(\Omega_{\Lambda(q)} \left(\Lambda_{*q} \bar{X}_q, \Lambda_{*q} \bar{Y}_q \right) \right) \right) \hat{\eta}(q) \\ &= \rho_{*e} \left((\lambda_{*e})^{-1} \Lambda^{-1}(q) R_x^{\nabla^{LC}}(X_x, Y_x) \Lambda(q) \right) \hat{\eta}(q). \end{aligned}$$

Localement, on considère une trivialisatation locale de $Spin(M)$

$$\phi : \Pi_{Spin}^{-1}(U) \rightarrow U \times Spin(n).$$

On pose $\sigma(x) := \phi^{-1}(x, e)$, $x \in U$ et $\tilde{e}_\alpha(x) := \Lambda(\sigma(x)) e_\alpha$ où $\{e_1, \dots, e_n\}$ est la base canonique de \mathbb{R}^n , alors $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ est un repère orthonormé local sur TM . Pour $q \in \text{Spin}(M)$, si $\phi(q) = (x, g)$, alors $q = \sigma(x)g$. D'où, avec $\tilde{g} = \lambda(g) \in \text{SO}(n)$,

$$\begin{aligned} R^{\widehat{\nabla^S}}(X, Y)\eta(q) &= \rho_{*e} \left((\lambda_{*e})^{-1} \Lambda^{-1}(\tilde{g}^{-1}\sigma(x)) R_x^{\nabla^{LC}}(X_x, Y_x) \Lambda(\sigma(x)) \tilde{g} \right) \hat{\eta}(q) \\ &= \rho_{*e} \left((\lambda_{*e})^{-1} \text{Ad}(\tilde{g}^{-1}) \left(\Lambda^{-1}(\sigma(x)) R_x^{\nabla^{LC}}(X_x, Y_x) \Lambda(\sigma(x)) \right) \right) \hat{\eta}(q) \\ &= \rho_{*e} \left(\text{Ad}(g^{-1}) (\lambda_{*e})^{-1} \left(\Lambda^{-1}(\sigma(x)) R_x^{\nabla^{LC}}(X_x, Y_x) \Lambda(\sigma(x)) \right) \right) \hat{\eta}(q) \\ &= \rho(g^{-1}) \rho_{*e} \left((\lambda_{*e})^{-1} \left(\Lambda^{-1}(\sigma(x)) R_x^{\nabla^{LC}}(X_x, Y_x) \Lambda(\sigma(x)) \right) \right) \rho(g) \hat{\eta}(q). \end{aligned}$$

On se rappelle que λ est l'homomorphisme

$$\lambda : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{SO}(n); \quad \lambda(s)x = sxs^{-1}$$

et on calcule

$$\lambda_{*e}(e_\alpha e_\beta) e_\gamma = e_\alpha e_\beta e_\gamma - e_\gamma e_\alpha e_\beta$$

ce qui donne $2e_\beta$, $-2e_\alpha$ et 0 respectivement pour $\gamma = \alpha$, $\gamma = \beta$ et $\gamma \neq \alpha, \beta$. En bref,

$$\lambda_{*e}(e_\alpha e_\beta) = 2E_{\alpha\beta}$$

où $E_{\alpha\beta}$ est une matrice telle que toutes les entrées sont nulles à l'exception de $\alpha\beta$ et $\beta\alpha$ qui valent respectivement -2 et 2 . Comme énoncé dans le théorème 1.16,

$$\text{spin}(n) = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{e_\alpha e_\beta \mid \alpha < \beta\}$$

et on remarque

$$\mathfrak{so}(n) = \text{Span}_{\mathbb{R}} \{E_{\alpha\beta} \mid \alpha < \beta\}.$$

Par conséquent,

$$\lambda_{*e} : \text{spin}(n) \rightarrow \mathfrak{so}(n)$$

est un isomorphisme d'algèbres de Lie. Finalement, on a

$$R^{\widehat{\nabla^S}}(X, Y)\eta(q) = \rho_{*e} \left(\text{Ad}(g^{-1}) (\lambda_{*e})^{-1} \left(\sum_{\alpha < \beta} R_x^{\nabla^{LC}}(X_x, Y_x)_{\alpha}^{\beta} E_{\alpha\beta} \right) \right) \hat{\eta}(q)$$

où

$$R_x^{\nabla^S}(X_x, Y_x) \tilde{e}_\alpha(x) = R_x^{\nabla^S}(X_x, Y_x)_{\alpha}^{\beta} \tilde{e}_\beta(x).$$

et, avec un système de coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) sur M

$$R^{\widehat{\nabla^S}}(\partial x_j, \partial x_k)\eta(q) = \rho_{*e} \left(\text{Ad}(g^{-1}) (\lambda_{*e})^{-1} \left(\sum_{\alpha < \beta} R_{jka}^{\nabla^{LC}}(x) E_{\alpha\beta} \right) \right) \hat{\eta}(q)$$

où

$$R_x^{\nabla^{LC}}(\partial x_j|_x, \partial x_k|_x) \tilde{e}_\alpha(x) = R_{jka}^{\nabla^{LC}}(x) \tilde{e}_\beta(x).$$

3.1.3. Multiplication de Clifford.

DÉFINITION 3.9. L'application linéaire $\mu : \mathbb{R}^n \times S_n \rightarrow S_n$ définie par $\mu(x, \psi) = \kappa(x)\psi$ est appelée **multiplication de Clifford**. On notera souvent $\mu(x, \psi) = x \bullet \psi$.

REMARQUE 3.10. Pour compléter cette définition, trois faits importants doivent être soulignés. Tout d'abord, cette application est Spin-équivariante. Pour tout $s \in \text{Spin}(n)$, on a $\kappa(s) = \rho(s)$ et donc

$$\mu(s.(u, \psi)) = \mu(\lambda(s)u, \rho(s)\psi) = \kappa(sus^{-1})\rho(s)\psi = \rho(s)\kappa(u)\psi = \rho(s)\mu(u, \psi).$$

Ensuite, elle induit le morphisme de fibrés associés

$$\mu : (\text{Spin}(M) \times_{\lambda} \mathbb{R}^n) \otimes S \rightarrow S, \quad (3.2)$$

où S est le fibré des spineurs, via

$$\mu([q, x] \otimes [q', \psi]) := [q, \mu(x \otimes \rho(g')\psi)]$$

avec $\Pi_{\text{Spin}}(q) = \Pi_{\text{Spin}}(q')$ et $q' = q.g'$. En particulier,

$$\mu([q, x] \otimes [q, \psi]) := [q, \kappa(x)\psi].$$

Grâce à l'isomorphisme (3.1) de la remarque 3.4, on peut réécrire (3.2) comme

$$\mu : TM \otimes S \rightarrow S$$

tel que pour tout $X \in \chi^{\infty}(M)$, $\eta \in \Gamma^{\infty}(S)$,

$$X \bullet \sigma = \mu(X \otimes \sigma) \in \Gamma^{\infty}(S).$$

De plus, pour tout $q \in \text{Spin}(M)$,

$$\widehat{X \bullet \eta}(q) := \widehat{X} \bullet \widehat{\eta}(q) := \kappa(\widehat{X}(q)) \widehat{\eta}(q) = \mu(\widehat{X} \otimes \widehat{\eta})(q)$$

où \widehat{X} et $\widehat{\eta}$ sont les fonctions C^{∞} données par la proposition 2.23 avec

$$\chi^{\infty}(M) \simeq \Gamma^{\infty}(\text{Spin}(M) \times_{\lambda} \mathbb{R}^n) \simeq C_{\lambda}^{\infty}(\text{Spin}(M), \mathbb{R}^n)$$

et

$$\Gamma^{\infty}(\text{Spin}(M) \times_{\rho} S_n) \simeq C_{\rho}^{\infty}(\text{Spin}(M), S_n).$$

Enfin, on peut étendre la multiplication de Clifford à toute l'algèbre de Clifford

$$\mu : \mathcal{C}(\mathbb{R}^n) \otimes S_n \rightarrow S_n.$$

Comme ci-dessus, cela induit le morphisme de fibrés

$$\mu : (\text{Spin}(M) \times_{\lambda} \mathcal{C}(\mathbb{R}^n)) \otimes S \rightarrow S.$$

On définit le fibré

$$\mathcal{C}(TM) := \coprod_{x \in M} \mathcal{C}(T_x M, \widehat{g}_x)$$

appelé **fibré de Clifford**. L'isomorphisme (3.1) implique $\mathcal{C}(TM) \simeq \text{Spin}(M) \times_{\lambda} \mathcal{C}_n(\mathbb{R}^n)$ et la multiplication de Clifford s'étend au fibré de Clifford

$$\mu : \mathcal{C}(TM) \otimes S \rightarrow S.$$

Cette construction donne à S une structure de **module de Clifford** sur $\mathcal{C}(TM)$: pour tout $x \in M$, la fibre E_x est un module sur l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}(T_x M, \hat{g}_x)$.

Une propriété utile est que cette opération est compatible avec la connexion ∇^S sur le fibré des spineurs dans le sens de la proposition suivante.

PROPOSITION 3.11. *Soient $X, Y \in \chi^\infty(M)$ et $\eta \in \Gamma^\infty(\text{Spin}(M) \times_{\rho} S)$. On a*

$$\nabla_X^S(Y \bullet \eta) = (\nabla_X^{LC} Y) \bullet \eta + Y \bullet (\nabla_X^S \eta).$$

DÉMONSTRATION. On calcule pour $q \in M$,

$$\widehat{\nabla_X^S(Y \bullet \eta)}(q) = \widehat{Y \bullet \eta}_{*q}(\overline{X}_q)$$

où $\widehat{Y \bullet \eta}(q) = \widehat{Y}_q \bullet \widehat{\eta}(q) = \mu(\widehat{Y}(q))\widehat{\eta}(q)$. Avec $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$, tel que $\gamma(0) = q$ et $\gamma'(0) = \overline{X}_q$, on a

$$\begin{aligned} \widehat{\nabla_X^S(Y \bullet \eta)}(q) &= \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\widehat{Y \bullet \eta}(\gamma(t))) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \mu(\widehat{Y}(\gamma(t)))\widehat{\eta}(\gamma(t)) \\ &= \mu(\widehat{Y}(\gamma(t))) \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \widehat{\eta}(\gamma(t)) + \mu \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_0 (\widehat{Y}(\gamma(t)))\widehat{\eta}(\gamma(t)) \right) \\ &= \mu(\widehat{Y}_q)\widehat{\eta}_{*q}(\overline{X}_q) + \mu \left(\widehat{Y}_{*q}(\overline{X}_q) \right) \widehat{\eta}(q) \\ &= \mu(\widehat{Y}_q)\widehat{\nabla_X^S \eta}(q) + \mu(\widehat{\nabla_X^{LC} Y}_q)\widehat{\eta}(q) \\ &= \widehat{Y \bullet \nabla_X^S \eta}(q) + (\widehat{\nabla_X^{LC} Y}_q) \bullet \widehat{\eta}(q) \end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. □

3.2. Opérateur de Dirac

Dans la section précédente, nous avons construit le cadre suivant. Soit (M, \hat{g}) une variété Spin et $S := \text{Spin}(M) \times_{\rho} S_n$ le fibré des spineurs associé. À partir de la connexion de Levi-Civita ∇^{LC} sur M , on a construit la connexion linéaire associée sur S

$$\nabla^S : \Gamma^\infty(S) \rightarrow \Gamma^\infty(T^*M \otimes S).$$

On a également défini la multiplication de Clifford

$$\mu : TM \otimes S \rightarrow S$$

provenant de $\mu : \mathbb{R}^n \times S_n \rightarrow S_n$ définie par $\mu(x, \psi) = \kappa(x) \psi$. Nous avons tous les ingrédients nécessaires pour définir l'opérateur de Dirac.

DÉFINITION 3.12. *L'opérateur de Dirac est défini par*

$$D := \mu \circ \nabla^S : \Gamma^\infty(S) \rightarrow \Gamma^\infty(S)$$

ou, plus précisément,

$$D : \Gamma^\infty(S) \xrightarrow{\nabla^S} \Gamma^\infty(T^*M \otimes S) \simeq \Gamma^\infty(TM \otimes S) \xrightarrow{\mu} \Gamma^\infty(S)$$

où $T^*M \simeq TM$ est donné par l'isomorphisme musical \flat de l'exemple 2.2.

REMARQUE 3.13. Localement, soit U un ouvert de M et $\phi : \Pi_{\text{Spin}}^{-1}(U) \rightarrow U \times \text{Spin}(n)$ une trivialisatation locale du fibré $\text{Spin}(M)$. Soit

$$\sigma(x) := \phi^{-1}(x, e),$$

$x \in U$, alors $\sigma \in \Gamma^\infty(\text{Spin}(M))|_U$. Posons également

$$\tilde{e}_\alpha(x) := \Lambda(\sigma(x)) e_\alpha$$

où $\{e_1, \dots, e_n\}$ forment une base de \mathbb{R}^n et $\Lambda : \text{Spin}(M) \xrightarrow{2:1} \text{SO}(M)$ est le revêtement double de la définition 3.1. On construit ainsi le repère orthonormé local $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ sur TM . Pour tout $X = X^k \tilde{e}_k \in \chi^\infty(M)$,

$$\nabla_X^S \eta|_U = \sum_{\alpha=1}^n X^\alpha \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^S \eta = \sum_{\alpha=1}^n \hat{g}(\tilde{e}_\alpha, X) \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^S \eta$$

d'où,

$$\nabla^S \eta|_U = \sum_{\alpha=1}^n \hat{g}(\tilde{e}_\alpha, -) \otimes \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^S \eta.$$

Par conséquent, pour tout $\eta \in \Gamma^\infty(S)$,

$$D\eta|_U = \sum_{\alpha=1}^n \mu \left(\tilde{e}_\alpha \otimes \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^S \eta \right) = \sum_{\alpha=1}^n \tilde{e}_\alpha \bullet \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^S \eta.$$

3.3. Formule de Lichnerowicz-Weitzenböck

Avant de nous attaquer à la formule de Lichnerowicz-Weitzenböck, il faut préciser la définition de l'opérateur laplacien sur un fibré vectoriel et, en particulier, sur le fibré des spineurs.

DÉFINITION 3.14. Soit (M, \hat{g}) une variété riemannienne, on définit le gradient $\text{grad}(f)$ d'une fonction $f \in C^\infty(M)$, pour tout $Y \in \chi^\infty(M)$ par

$$\hat{g}(\text{grad}(f), Y) = df(Y) = Y(f).$$

DÉFINITION 3.15. La divergence $\text{div}(X) \in C^\infty(M)$ d'un champ de vecteurs $X \in \chi^\infty(M)$ est définie par

$$\text{div}(X)_x := \text{Tr} \left(Y_x \in T_x M \mapsto \nabla_{Y_x}^{LC} X_x \right)$$

pour $x \in M$.

DÉFINITION 3.16. L'opérateur de Laplace est défini pour tout $f \in C^\infty(M, \mathbb{R})$ par

$$\Delta(f) := \text{div}(\text{grad}(f)).$$

Dans un système de coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) avec $X = X^k \partial x_k$, les définitions 3.14 et 3.15 se lisent

$$\text{grad}(f) = \sum_{i,j} (\widehat{g}^{-1})_{ij} \frac{\partial f}{\partial x_j} \partial x_i \quad (3.3)$$

$$\text{div}(X) = \partial x_j (X^j) + X^k \Gamma_{jk}^j. \quad (3.4)$$

En combinant (3.3) et (3.4), on obtient l'expression locale du Laplacien dans les coordonnées (x_1, \dots, x_n) :

$$\Delta(f) = \sum_j \partial x_j \left(\sum_k (\widehat{g}^{-1})_{jk} \frac{\partial f}{\partial x_k} \right) + \sum_k \Gamma_{jk}^j \left(\sum_\ell (\widehat{g}^{-1})_{k\ell} \frac{\partial f}{\partial x_\ell} \right).$$

REMARQUE 3.17. Pour tout $f \in C^\infty(M)$ et ∇ la connexion de Levi-Civita, on a l'égalité

$$\Delta(f) = \text{Tr}_{\widehat{g}}(\nabla^2 f)$$

où

$$\nabla^2_{X,Y} f := \nabla_X \nabla_Y f - \nabla_{\nabla_X Y} f = X(Y(f)) - (\nabla_X Y)(f)$$

et

$$\text{Tr}_{\widehat{g}}(\nabla^2 f) := \text{Tr}(Y_x \in T_x M \mapsto Z_x)$$

tel que $\widehat{g}(Z_x, Y_x) = \nabla_{Y_x, X_x}^2 f$. En effet, par la condition métrique de la connexion de Levi-Civita, on a pour tout $X_x \in T_x M$,

$$\begin{aligned} \widehat{g}(\nabla_{Y_x} \text{grad}(f)_x, X_x) &= Y_x(\widehat{g}(\text{grad}(f)_x, X_x)) - \widehat{g}(\text{grad}(f)_x, \nabla_{Y_x} X_x) \\ &= Y_x(X_x(f)) - \nabla_{Y_x} X_x(f) = \nabla_{Y_x, X_x}^2 f. \end{aligned}$$

Cette remarque motive la définition suivante.

DÉFINITION 3.18. L'opérateur de Laplace Δ sur le fibré des spineurs S , associé à la connexion ∇^S , est donné pour tout $\eta \in \Gamma^\infty(S)$, par

$$\Delta(\eta) := \text{Tr}_{\widehat{g}}((\nabla^S)^2 \eta)$$

où $(\nabla^S_{X,Y})^2 \eta := \nabla_X^S \nabla_Y^S \eta - \nabla_{\nabla_X^S Y}^S \eta$, $X, Y \in \chi^\infty(M)$.

REMARQUE 3.19. En général si $E \xrightarrow{\pi} M$ est un fibré vectoriel sur une variété riemannienne (M, \widehat{g}) et $\widetilde{\nabla}$ une connexion linéaire quelconque sur E , l'opérateur de Laplace sur E associé à $\widetilde{\nabla}$ est défini, pour tout $\eta \in \Gamma^\infty(E)$, par

$$\Delta(\eta) = \text{Tr}_{\widehat{g}}(\widetilde{\nabla}^2 \eta)$$

où $\widetilde{\nabla}^2_{X,Y} \eta := \widetilde{\nabla}_X \widetilde{\nabla}_Y \eta - \widetilde{\nabla}_{\nabla_X^L Y} \eta$, $X, Y \in \chi^\infty(M)$.

Localement, avec $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ un repère orthonormé local sur un ouvert $U \subset M$,

$$\Delta \eta|_U = \sum_{\alpha=1}^n \widetilde{\nabla}_{\tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_\alpha}^2 \eta = \sum_{\alpha=1}^n \widetilde{\nabla}_{\tilde{e}_\alpha} \widetilde{\nabla}_{\tilde{e}_\alpha} \eta - \widetilde{\nabla}_{\nabla_{\tilde{e}_\alpha}^L \tilde{e}_\alpha} \eta = \sum_{\alpha=1}^n \widetilde{\nabla}_{\tilde{e}_\alpha} \widetilde{\nabla}_{\tilde{e}_\alpha} \eta + \sum_{\alpha=1}^n \text{div}(\tilde{e}_\alpha) \widetilde{\nabla}_{\tilde{e}_\alpha} \eta.$$

DÉFINITION 3.20. Soit (M, \hat{g}) une variété riemannienne, le **tenseur de Ricci** est défini par

$$\text{Ric}_x(X_x, Y_x) := \text{Tr} \left[Z_x \mapsto R_x^{\nabla^{LC}}(X_x, Z_x)Y_x \right],$$

$x \in M$ et $X, Y, Z \in \chi^\infty(M)$. On appelle **courbure scalaire** la trace de l'opérateur de Ricci :

$$s := \text{Tr}_{\hat{g}}(\text{Ric}).$$

Le lemme suivant est un résultat bien connu de géométrie dont nous ne donnons pas de démonstration. Le lecteur peut se référer, par exemple, à [17].

LEMME 3.21 (Première égalité de Bianchi).

$$R^{\nabla^{LC}}(X, Y)Z + R^{\nabla^{LC}}(Z, X)Y + R^{\nabla^{LC}}(Y, Z)X = 0.$$

THÉORÈME 3.22. Soit (M, \hat{g}) une variété riemannienne spin et orientée et soient D et Δ les opérateurs de Dirac et Laplace associés à la connexion ∇^S sur le fibré des spineurs S , alors, pour tout $\eta \in \Gamma^\infty(S)$,

$$D^2 = \Delta\eta - \frac{1}{4}s(\eta).$$

DÉMONSTRATION. Soit $\{\tilde{e}_1, \dots, \tilde{e}_n\}$ un repère orthonormé local sur TM , on a

$$D^2\eta = \sum_{\alpha, \beta=1}^n \tilde{e}_\alpha \bullet \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^S (\tilde{e}_\beta \bullet \nabla_{\tilde{e}_\beta}^S \eta).$$

Par la proposition 3.11,

$$\begin{aligned} D^2\eta &= \sum_{\alpha, \beta=1}^n \tilde{e}_\alpha \bullet \left(\nabla_{\tilde{e}_\alpha}^{LC} \tilde{e}_\beta \bullet \nabla_{\tilde{e}_\beta}^S \eta + \tilde{e}_\beta \bullet \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^S \nabla_{\tilde{e}_\beta}^S \eta \right) \\ &= \sum_{\alpha, \beta, \gamma} \hat{g} \left(\nabla_{\tilde{e}_\alpha}^{LC} \tilde{e}_\beta, \tilde{e}_\gamma \right) (\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\gamma) \bullet \nabla_{\tilde{e}_\beta}^S \eta + \sum_{\alpha, \beta} (\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\beta) \bullet \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^S \nabla_{\tilde{e}_\beta}^S \eta \end{aligned}$$

où on a décomposé

$$\nabla_{\tilde{e}_\alpha}^{LC} \tilde{e}_\beta = \sum_{\gamma} \hat{g} \left(\nabla_{\tilde{e}_\alpha}^{LC} \tilde{e}_\beta, \tilde{e}_\gamma \right) \tilde{e}_\gamma$$

et où

$$\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\gamma = \tilde{e}_\alpha \bullet \tilde{e}_\gamma \in \mathcal{C}(TM).$$

Dans $\mathcal{C}(TM, \hat{g})$, $\tilde{e}_\alpha^2 = \hat{g}(\tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_\alpha) = 1$ et l'expression devient

$$\sum_{\alpha, \beta} \hat{g} \left(\nabla_{\tilde{e}_\alpha}^{LC} \tilde{e}_\beta, \tilde{e}_\alpha \right) \nabla_{\tilde{e}_\beta}^S \eta + \sum_{\beta, \alpha \neq \gamma} \hat{g} \left(\nabla_{\tilde{e}_\alpha}^{LC} \tilde{e}_\beta, \tilde{e}_\gamma \right) (\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\beta) \bullet \nabla_{\tilde{e}_\beta}^S \eta + \sum_{\alpha} \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^S \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^S \eta + \sum_{\alpha \neq \beta} (\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\beta) \bullet \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^S \nabla_{\tilde{e}_\beta}^S \eta$$

puis,

$$\sum_{\beta} \text{div}(\tilde{e}_\beta) \nabla_{\tilde{e}_\beta}^S \eta + \sum_{\beta, \alpha \neq \gamma} \hat{g} \left(\nabla_{\tilde{e}_\alpha}^{LC} \tilde{e}_\beta, \tilde{e}_\gamma \right) (\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\beta) \bullet \nabla_{\tilde{e}_\beta}^S \eta + \sum_{\alpha} \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^S \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^S \eta + \sum_{\alpha \neq \beta} (\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\beta) \bullet \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^S \nabla_{\tilde{e}_\beta}^S \eta$$

par définition de la divergence. Le premier et le troisième termes donnent exactement l'expression locale du Laplacien de η . De plus, par la condition métrique de la connexion de Levi-Civita, on a

$$\hat{g} \left(\nabla_{\tilde{e}_\alpha}^{LC} \tilde{e}_\beta, \tilde{e}_\gamma \right) = -\hat{g} \left(\tilde{e}_\beta, \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^{LC} \tilde{e}_\gamma \right) + \tilde{e}_\alpha \left(\hat{g}(\tilde{e}_\beta, \tilde{e}_\gamma) \right)$$

où le dernier terme s'annule puisque $\widehat{g}(\tilde{e}_\beta, \tilde{e}_g) = \delta_{\beta\gamma}$. Par conséquent on peut réécrire notre expression comme

$$\begin{aligned} \Delta\eta - \sum_{\beta, \alpha \neq \gamma} \widehat{g}(\tilde{e}_\beta, \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^{LC} \tilde{e}_\gamma) (\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\gamma) \bullet \nabla_{\tilde{e}_\beta}^S \eta + \sum_{\alpha \neq \beta} (\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\beta) \bullet \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^S \nabla_{\tilde{e}_\beta}^S \eta \\ = \Delta\eta - \sum_{\alpha \neq \gamma} (\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\gamma) \bullet \nabla_{\nabla_{\tilde{e}_\alpha}^{LC} \tilde{e}_\gamma}^S \eta + \sum_{\alpha \neq \beta} (\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\beta) \bullet \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^S \nabla_{\tilde{e}_\beta}^S \eta \end{aligned}$$

où l'égalité suit de la bilinéarité de ∇^S et du fait que

$$\sum_{\beta} \widehat{g}(\tilde{e}_\beta, \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^{LC} \tilde{e}_\gamma) \tilde{e}_\beta = \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^{LC} \tilde{e}_\gamma.$$

Comme $\widehat{g}(\tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_\beta) = \delta_{\alpha, \beta}$ et $\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\beta = -\tilde{e}_\beta \tilde{e}_\alpha$ dans $\mathcal{C}(TM)$, notre expression devient

$$\Delta\eta - \sum_{\alpha < \gamma} (\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\gamma) \bullet \nabla_{\left[\nabla_{\tilde{e}_\alpha}^{LC} \tilde{e}_\gamma - \nabla_{\tilde{e}_\gamma}^{LC} \tilde{e}_\alpha \right]}^S \eta + \sum_{\alpha < \beta} (\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\beta) \bullet \left\{ \nabla_{\tilde{e}_\beta}^S \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^S - \nabla_{\tilde{e}_\alpha}^S \nabla_{\tilde{e}_\beta}^S \right\} \eta.$$

Par la condition de torsion de la condition de Levi-Civita, $\nabla_{\tilde{e}_\alpha}^{LC} \tilde{e}_\gamma - \nabla_{\tilde{e}_\gamma}^{LC} \tilde{e}_\alpha = [\tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_\gamma]$, et par définition du tenseur de courbure, on a

$$\Delta\eta - \sum_{\alpha < \beta} (\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\beta) \bullet R^{\nabla^S}(\tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_\beta) \eta = \Delta\eta - \frac{1}{2} \sum_{\alpha, \beta} (\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\gamma) \bullet R^{\nabla^S}(\tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_\beta) \eta.$$

En utilisant le lien entre les courbures de ∇^S et ∇^{LC} exposé dans la remarque 3.8 et la remarque ci-dessous, on obtient :

$$R^{\nabla^S}(X, Y) \eta = \frac{1}{2} \sum_{\gamma < \delta} R^{\nabla^{LC}}(X, Y)_\gamma^\delta (\tilde{e}_\gamma \tilde{e}_\delta) \bullet \eta.$$

Donc, on obtient

$$D^2\eta = \Delta\eta + \frac{1}{2} \sum_{\alpha < \beta} \sum_{\gamma < \delta} (\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\beta) \bullet R_{\alpha\beta\gamma}^{\nabla^{LC}\delta}(\tilde{e}_\gamma \tilde{e}_\delta) \bullet \eta$$

où

$$R^{\nabla^{LC}}(\tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_\beta) \tilde{e}_\gamma = R_{\alpha\beta\gamma}^{\nabla^{LC}\delta} \tilde{e}_\delta,$$

c'est-à-dire,

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\nabla^{LC}\delta} = R^{\nabla^{LC}}(\tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_\beta)_\gamma^\delta.$$

De plus, on a

$$R_{\alpha\beta\gamma}^{\nabla^{LC}\delta} = \widehat{g}(R^{\nabla^{LC}}(\tilde{e}_\alpha, \tilde{e}_\beta) \tilde{e}_\gamma, \tilde{e}_\delta) =: R_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\nabla^{LC}}$$

et

$$D^2\eta = \Delta\eta + \frac{1}{8} \sum_{\alpha, \beta, \gamma, \delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\nabla^{LC}}(\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\beta \tilde{e}_\gamma \tilde{e}_\delta) \bullet \eta.$$

Par la première identité de Bianchi et le fait que

$$e_\alpha \tilde{e}_\beta \tilde{e}_\gamma = e_\alpha \tilde{e}_\beta \tilde{e}_\gamma = e_\alpha \tilde{e}_\beta \tilde{e}_\gamma,$$

tous les termes tels que α, β, γ sont différents deux à deux s'annulent. De plus, le tenseur de courbure est anti-symétrique en les deux premières et les deux dernières composantes. Par conséquent, les termes tels que $\alpha = \beta$ s'annulent également. On écrit les termes restants

$$\Delta\eta + \frac{1}{8} \sum_{\alpha, \beta, \alpha, \delta} R_{\alpha\beta\gamma\delta}^{\nabla^{LC}}(\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\beta \tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\delta) \bullet \eta + \frac{1}{8} \sum_{\alpha, \beta, \beta, \delta} R_{\alpha\beta\beta\delta}^{\nabla^{LC}}(\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\beta \tilde{e}_\beta \tilde{e}_\delta) \bullet \eta.$$

Les anti-symétries de $R^{\nabla^{LC}}$ et les relations de Clifford $\tilde{e}_\alpha^2 = 1$ et $\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\beta = -\tilde{e}_\beta \tilde{e}_\alpha$, impliquent la simplification supplémentaire

$$\Delta\eta - \frac{1}{8} \sum_{\beta, \delta} \left(\sum_{\alpha} R_{\beta\alpha\delta\alpha}^{\nabla^{LC}} \right) (\tilde{e}_\beta \tilde{e}_\delta) \bullet \eta - \frac{1}{8} \sum_{\alpha, \delta} \left(\sum_{\beta} R_{\alpha\beta\delta\beta}^{\nabla^{LC}} \right) (\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\delta) \bullet \eta.$$

Par définition du tenseur de Ricci, on a

$$\Delta\eta - \frac{1}{4} \sum_{\beta, \delta} \text{Ric}(\tilde{e}_\beta, \tilde{e}_\delta) (\tilde{e}_\beta \tilde{e}_\delta) \bullet \eta.$$

Comme $\text{Ric}(\tilde{e}_\beta, \tilde{e}_\delta) = \text{Ric}(\tilde{e}_\delta, \tilde{e}_\beta)$ et $\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\beta = -\tilde{e}_\beta \tilde{e}_\alpha$ il ne reste que les termes où $\beta = \delta$

$$\Delta\eta - \frac{1}{4} \sum_{\beta} \text{Ric}(\tilde{e}_\beta, \tilde{e}_\beta) (\tilde{e}_\beta \tilde{e}_\beta) \bullet \eta.$$

La somme dans le deuxième terme est exactement la trace du tenseur de Ricci, i.e. la courbure scalaire

$$D^2\eta = \Delta\eta - \frac{1}{4}s(\eta)$$

ce qui conclue la preuve. \square

REMARQUE 3.23. La représentation de l'algèbre de Clifford introduite au premier chapitre est donnée par

$$\kappa : \mathcal{C}_n \rightarrow \text{End}(S_n)$$

et elle se restreint à la représentation de Spin

$$\rho := \kappa|_{\text{Spin}(n)} : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Aut}(S_n).$$

Alors,

$$\rho_* : \text{spin}(n) \rightarrow \text{End}(S_n); \quad x \mapsto \rho_*(x)$$

$$\rho_*(x) : S_n \rightarrow S_n; \quad \psi \mapsto \kappa(x)\psi.$$

Grâce aux calculs de la remarque 3.8, si $\phi(q) = (x, g)$ pour une trivialisatoin locale

$$\phi : \Pi_{\text{Spin}}^{-1}(U) \rightarrow U \times \text{Spin}(n),$$

on a

$$\begin{aligned} R^{\nabla^S}(X, Y)\eta(q) &= \rho_{*e} \left(\text{Ad}(g^{-1})(\lambda_{*e})^{-1} \left(\sum_{\alpha < \beta} R_x^{\nabla^{LC}}(X_x, Y_x)_\alpha^\beta \cdot E_{\alpha\beta} \right) \right) \hat{\eta}(q) \\ &= \kappa \left(\text{Ad}(g^{-1}) \left(\sum_{\alpha < \beta} \frac{1}{2} R_x^{\nabla^{LC}}(X_x, Y_x)_\alpha^\beta e_\alpha e_\beta \right) \right) \hat{\eta}(q) \\ &= \sum_{\alpha < \beta} \frac{1}{2} R_x^{\nabla^{LC}}(X_x, Y_x)_\alpha^\beta \kappa(g^{-1}e_\alpha g g^{-1}e_\beta g) \hat{\eta}(q) \\ &= \sum_{\alpha < \beta} \frac{1}{2} R_x^{\nabla^{LC}}(X_x, Y_x)_\alpha^\beta \kappa(\hat{e}_\alpha(q) \hat{e}_\beta(q)) \hat{\eta}(q) \end{aligned}$$

où la dernière égalité vient de $\hat{e}_\alpha = \lambda(g^{-1})(e_\alpha) = g^{-1}e_\alpha g$. On obtient l'égalité souhaitée en utilisant la notation \bullet pour la multiplication de Clifford

$$R^{\nabla^S}(X, Y)\eta = \frac{1}{2} \sum_{\alpha < \beta} R^{\nabla^{LC}}(X, Y)_\alpha^\beta (\tilde{e}_\alpha \tilde{e}_\beta) \bullet \eta.$$

3.4. Structure hermitienne

En faisant attention aux signes, et en modifiant légèrement la définition de structure spinorielle (voir chapitre 5), tout ce que l'on a écrit jusqu'à présent est transposable dans un cadre pseudo-riemmanien. En particulier, la formule de Lichnerowicz-Weitzenböck reste vraie pour des variétés spin pseudo-riemanniennes. Dans cette section, le caractère riemannien prend toute son importance. En effet, il joue un rôle crucial dans la définition d'un produit scalaire pour lequel l'opérateur de Dirac est symétrique. Nous commençons par définir une telle structure hermitienne sur l'espace des sections L^2 du fibré des spineurs. Le produit scalaire ainsi obtenu définit l'espace de Hilbert \mathcal{H} du triplet spectral de M mentionné dans l'introduction. Ensuite, nous montrons que l'opérateur de Dirac est symétrique pour ce produit scalaire. Dans le cadre pseudo-riemannien, il n'existe pas de structure hermitienne similaire de dimension finie et l'opérateur de Dirac, tel qu'il est défini dans ce chapitre, n'est pas symétrique. Cette section est basée sur le livre de Thomas Friedrich [13] et sur l'article de Joseph A. Wolf [20].

Dans ce qui suit, nous reprenons les notations des sections précédentes, c'est-à-dire, (M, \hat{g}) une variété riemannienne spin de dimension n avec $\text{Spin}(M) \xrightarrow{\Pi_{\text{Spin}}} M$ et S son fibré des spineurs muni de la connexion associée ∇^S .

3.4.1. Définitions préliminaires. Soit L un opérateur différentiel linéaire défini sur un espace de Hilbert \mathcal{H} et tel que le domaine de L est dense dans \mathcal{H} , i.e. $\overline{\text{dom}(L)} = \mathcal{H}$. Le graphe de L , noté $\mathcal{G}(L) \subset \mathcal{H} \times \mathcal{H}$ consiste en l'ensemble des paires (x, Lx) pour $x \in \text{dom}(L)$. L'ensemble $\overline{\mathcal{G}(L)}$ également contenu dans $\mathcal{H} \times \mathcal{H}$ est le graphe d'un autre opérateur \bar{L} appelé la fermeture de L . Alors, \bar{L} est défini par

$$\bar{L}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} L(x_n)$$

et son domaine est l'ensemble des $x \in \mathcal{H}$ tels qu'il existe une suite $(x_n) \subset \text{dom}(L)$ qui converge vers x et tels que (Ax_n) converge dans \mathcal{H} . Pour tout, opérateur L comme celui-ci, il existe un opérateur adjoint L^* tel que

$$\text{dom}(L^*) = \{x \in \mathcal{H} \mid \exists y \in \mathcal{H}, \text{ avec } \langle Lz, x \rangle = \langle z, y \rangle, \forall z \in \text{dom}(L)\}$$

et $L^*(x) = y$.

DÉFINITION 3.24. *L'opérateur L est symétrique si et seulement si*

$$\langle Ax, y \rangle = \langle x, Ay \rangle$$

pour tout $x, y \in \text{dom}(L)$.

REMARQUE 3.25. Si L est symétrique, alors $\text{dom}(L) \subset \text{dom}(L^*)$ et $L^*|_{\text{dom}(L)} = L$.

DÉFINITION 3.26. *L'opérateur L est auto-adjoint si $L = L^*$.*

DÉFINITION 3.27. *L'opérateur L est essentiellement auto-adjoint si $\bar{L} = L^*$.*

DÉFINITION 3.28. *Une représentation*

$$\mu : G \rightarrow \text{End}(V)$$

est dite unitaire si V est un espace de Hilbert et que $\mu(g)$ est un opérateur unitaire pour tout $g \in G$, c'est-à-dire,

$$\mu(g)\mu(g)^* = \mu(g)^*\mu(g) = \text{Id}.$$

3.4.2. Un opérateur symétrique. Comme définie au premier chapitre, et largement exploitée depuis, on a la représentation spinorielle

$$\rho := \kappa|_{\text{Spin}(n)} : \text{Spin}(n) \rightarrow \text{Aut}(S_n)$$

où $S_n = \mathbb{C}^{2r}$ avec $r = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. Il s'agit d'une représentation d'un groupe compact (voir corollaire 1.15) dans un espace vectoriel complexe. Par conséquent, il existe un produit scalaire hermitien $\text{Spin}(n)$ -invariant sur S_n qui induit de manière canonique un produit scalaire sur l'espace $L^2(S) := \overline{\Gamma^\infty(S)}$ des sections L^2 du fibré des spineurs. En effet, soit

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_0 : S_n \times S_n \rightarrow \mathbb{C},$$

un produit scalaire hermitien sur S_n . Puisque $\text{Spin}(n)$ est compact, on a directement un autre produit scalaire $\text{Spin}(n)$ -invariant sur S_n , obtenu par centrage dans le groupe

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle := \int_{\text{Spin}(n)} \langle \rho(g^{-1})\psi_1, \rho(g^{-1})\psi_2 \rangle_0 \, dg \quad (3.5)$$

où dg est une mesure de Haar sur $\text{Spin}(n)$.

DÉFINITION 3.29. *Une mesure de Haar sur un groupe de Lie compact G est une mesure dg invariante à gauche. C'est-à-dire telle que pour tout $h \in G$,*

$$\int_G f \, dg = \int_G L_h^* f \, dg.$$

Donc, par définition de la mesure de Haar

$$\begin{aligned} \langle \rho(g_0^{-1})\psi_1, \rho(g_0^{-1})\psi_2 \rangle &= \int_{\text{Spin}(n)} \langle \rho(g^{-1}g_0^{-1})\psi_1, \rho(g^{-1}g_0^{-1})\psi_2 \rangle_0 \, dg \\ &= \int_{\text{Spin}(n)} \langle \rho(g^{-1})\psi_1, \rho(g^{-1})\psi_2 \rangle_0 \, dg \\ &= \langle \psi_1, \psi_2 \rangle. \end{aligned}$$

La structure d'espace hermitien sur S_n induite par (3.5), se transpose naturellement sur chaque fibre de S ; pour tout $[q, \psi_1], [q, \psi_2] \in S$ avec $\Pi_{\text{Spin}}(q) = x \in M$,

$$\langle [q, \psi_1], [q, \psi_2] \rangle_x := \langle \psi_1, \psi_2 \rangle. \quad (3.6)$$

Le produit (3.6) est bien défini puisque (3.5) est $\text{Spin}(n)$ -invariant. Soient $\eta_1, \eta_2 \in L^2(S)$. On définit le produit scalaire sur l'ensemble $L^2(S)$, par intégration sur M

$$\langle \langle \eta_1, \eta_2 \rangle \rangle := \int_M \langle \eta_1(x), \eta_2(x) \rangle_x \, dx \quad (3.7)$$

où $dx := \sqrt{|g_{ij}|} d^n x$ est le volume riemannien associé à la métrique. L'isomorphisme

$$\begin{aligned}\Gamma^\infty(S) &\simeq C_\rho^\infty(\text{Spin}(M), S_n) \\ \eta &\mapsto \hat{\eta}; \quad \eta(\Pi_{\text{Spin}}(p)) = [p, \hat{\eta}(p)]\end{aligned}$$

de la proposition 2.23, implique

$$\langle \eta_1(x), \eta_2(x) \rangle_x = \langle \hat{\eta}_1(q), \hat{\eta}_2(q) \rangle$$

pour $\Pi_{\text{Spin}}(q) = x$ et (3.7) s'écrit

$$\langle \langle \eta_1, \eta_2 \rangle \rangle = \int_M \langle \hat{\eta}_1(q), \hat{\eta}_2(q) \rangle d\Pi_{\text{Spin}}(q).$$

Ainsi, nous obtenons un produit scalaire hermitien $\text{Spin}(n)$ -invariant sur $L^2(S)$. Dans l'optique de démontrer que l'opérateur de Dirac est symétrique, nous avons besoin d'un produit scalaire satisfaisant une propriété d'invariance encore plus forte.

PROPOSITION 3.30. *Dans l'espace vectoriel complexe S_n , il existe un produit scalaire hermitien défini positif $\langle \cdot, \cdot \rangle$ tel que*

$$\langle x \bullet \psi, \varphi \rangle + \langle \psi, x \bullet \varphi \rangle = 0,$$

où $x \in \mathbb{R}^n$, $\psi, \varphi \in S_n$ et \bullet est la multiplication de Clifford. La représentation spinorielle est unitaire par rapport à ce produit scalaire.

DÉMONSTRATION. Soit $\text{spin}(n) = \text{Span}_{\mathbb{R}}\{e_i e_j : i < j\} \subset \mathcal{C}^n$ l'algèbre de Lie de $\text{Spin}(n)$ et soit $\mathfrak{g} = \mathbb{R}^n \oplus \text{spin}(n) \subset \mathcal{C}^n$. Un simple calcul montre que \mathfrak{g} est une algèbre de Lie avec le crochet

$$[z, w] = zw - wz, \quad z, w \in \mathfrak{g}.$$

L'application $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathcal{C}^{n+1}$ définie par

$$\varphi|_{\text{spin}(n)} = \text{Id}, \quad \varphi(e_i) = e_i e_n + 1 \quad \text{for } 1 \leq i \leq n$$

est une restriction d'un isomorphisme d'algèbres $\Phi : \mathcal{C}^n \rightarrow \mathcal{C}^{n+1}$. En effet, soit $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathcal{C}^{n+1}$, $\phi(e_i) = e_i e_{n+1}$. Cette application respecte les relations de Clifford

$$\phi(e_i)^2 = 1 \quad \text{et} \quad \phi(e_i)\phi(e_j) + \phi(e_j)\phi(e_i) = 0 \quad \text{pour } 1 \leq i < j \leq n.$$

Par le théorème 1.4 et le corolaire 1.5, ϕ s'étend en un isomorphisme d'algèbres Φ . Par conséquent, $\varphi : \mathfrak{g} \rightarrow \text{spin}(n+1)$ est un isomorphisme d'algèbres de Lie, où $\text{spin}(n+1)$ est l'algèbre de Lie de $\text{Spin}(n+1)$ et \mathfrak{g} est une algèbre de Lie compacte. Soit G le groupe compact correspondant à \mathfrak{g} . Comme ci-dessus, on définit le produit scalaire

$$\langle v_1, v_2 \rangle := \int_G \langle \kappa(g)v_1, \kappa(g)v_2 \rangle_0 dg$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle_0$ est un produit scalaire hermitien sur S_n et dg est une mesure de Haar sur G . Dès lors,

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \langle \exp(te_i) \bullet v_1, \exp(te_i) \bullet v_2 \rangle = \langle e_i \bullet v_1, v_2 \rangle + \langle v_1, e_i \bullet v_2 \rangle = 0$$

pour tout $i = 1, \dots, n$, ce qui conclut la preuve. \square

DÉFINITION 3.31. *On note*

$$\langle -, - \rangle_{L^2} : L^2(S) \times L^2(S) \rightarrow \mathbb{C}$$

le produit scalaire hermitien sur les sections du fibré des spineurs défini par

$$\langle \eta_1, \eta_2 \rangle_{L^2} := \int_M \langle \eta_1, \eta_2 \rangle_x dx = \int_M \langle \hat{\eta}_1(q), \hat{\eta}_2(q) \rangle d\Pi_{\text{Spin}}(q)$$

où $\langle \cdot, \cdot \rangle$ est le produit scalaire de la propriété 3.30 et $\Pi_{\text{Spin}}(q) = x$.

REMARQUE 3.32. L'espace de Hilbert

$$\mathcal{H} = (L^2(S), \langle \cdot, \cdot \rangle_{L^2})$$

correspond à l'espace de Hilbert \mathcal{H} du triplet spectral associé à M mentionné dans l'introduction.

REMARQUE 3.33. Le raisonnement ci-dessus repose fortement sur la compacité de $\text{Spin}(n)$. Or, le groupe $\text{Spin}(p, q)$ est non-compact et cette construction est impossible dans le cas pseudo-riemannien. En fait, il n'existe pas de structure hermitienne $\text{Spin}(p, q)$ -invariante de dimension finie sur $L^2(S)$.

LEMME 3.34. *Soit $X \in \chi^\infty(M)$ et $\eta_1, \eta_2 \in \Gamma_c^\infty(S)$. Alors, pour tout $q \in \text{Spin}(M)$,*

$$\left\langle \nabla_X^S \eta_1, \eta_2 \right\rangle_x + \left\langle \eta_1, \nabla_X^S \eta_2 \right\rangle_x = X_x(\langle \eta_1, \eta_2 \rangle).$$

DÉMONSTRATION. Par un simple calcul, on obtient pour tout $q \in \text{Spin}(M)$,

$$\begin{aligned} X_{\Pi_{\text{Spin}}(q)}(\langle \eta_1, \eta_2 \rangle) &= (\langle \eta_1, \eta_2 \rangle)_{*\Pi_{\text{Spin}}(q)}(X_{\Pi_{\text{Spin}}(q)}) \\ &= \bar{X}_q(\langle \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2 \rangle) \\ &= \langle \hat{\eta}_1, \hat{\eta}_2 \rangle_{*\bar{X}_q} \\ &= \langle \hat{\eta}_1_{*\bar{X}_q}, \hat{\eta}_2(q) \rangle + \langle \hat{\eta}_1(q), \hat{\eta}_2_{*\bar{X}_q} \rangle \\ &= \langle \widehat{\nabla_X^S \eta_1}(q), \hat{\eta}_2(q) \rangle + \langle \hat{\eta}_1(q), \widehat{\nabla_X^S \eta_2}(q) \rangle \\ &= \left\langle \nabla_X^S \eta_1, \eta_2 \right\rangle_{\Pi_{\text{Spin}}(q)} + \left\langle \eta_1, \nabla_X^S \eta_2 \right\rangle_{\Pi_{\text{Spin}}(q)}. \end{aligned}$$

□

PROPOSITION 3.35. *L'opérateur de Dirac est symétrique sur $\Gamma_c^\infty(S)$, c'est-à-dire*

$$\langle Du, v \rangle_{L^2} = \langle u, Dv \rangle_{L^2}$$

pour tout $u, v \in \Gamma_c^\infty(S)$.

DÉMONSTRATION. Soit (U_α, ϕ_α) un atlas sur M . Puisque u est à support compact, il existe un recouvrement fini

$$\text{supp}(u) \subset \bigcup_{k=1}^n U_k.$$

Considérons la partition de l'unité $(\varphi)_{i=1}^n$ subordonnée au recouvrement ci-dessus et

$$u = u_1 + \dots + u_n \quad \text{avec} \quad u_i = \varphi_i u.$$

Puisque $\text{supp}(u_i) \subset U_i$ et $\langle u, v \rangle_{L^2} = \langle u_1 + \dots + u_n, v \rangle_{L^2}$ on peut supposer, sans perte de généralité, que $\text{supp}(u) \subset U$ pour une carte locale (U, ϕ) de M . On calcule

$$\begin{aligned}
\langle Du, v \rangle_{L^2} &= \sum_{i=1}^n \left\langle e_i \bullet \nabla_{e_i}^S u, v \right\rangle_{L^2} \\
&= \sum_{i=1}^n \int_U \left\langle e_i \bullet \nabla_{e_i}^S u, v \right\rangle_x dx \\
&= - \sum_{i=1}^n \int_U \left\langle \nabla_{e_i}^S u, e_i \bullet v \right\rangle_x dx \\
&= - \sum_{i=1}^n \int_U e_i \langle u, e_i \bullet v \rangle_x dx + \sum_{i=1}^n \int_U \left\langle u, \nabla_{e_i}^S (e_i \bullet v) \right\rangle_x dx \\
&= - \sum_{i=1}^n \int_U e_i \langle u, e_i \bullet v \rangle_x dx + \sum_{i=1}^n \int_U \left\langle u, \nabla_{e_i}^{LC} e_i \bullet v + e_i \bullet \nabla_{e_i}^S v \right\rangle_x dx \\
&= - \sum_{i=1}^n \int_U e_i \langle u, e_i \bullet v \rangle_x dx + \sum_{i=1}^n \int_U \left\langle u, \nabla_{e_i}^{LC} e_i \bullet v \right\rangle_x dx + \langle u, Dv \rangle_{L^2}.
\end{aligned}$$

Les cinq premières égalités viennent respectivement de l'expression locale de l'opérateur de Dirac donné dans la remarque 3.13, de la définition du produit scalaire sur $L^2(S)$, de la proposition 3.30, du lemme 3.34 et de la proposition 3.11. Ensuite, considérons la 1-fome

$$\Xi(X) = (u, X \bullet v).$$

La divergence de Ξ est exactement les deux premiers termes de l'expression ci-dessus. Comme u et v sont à support compact dans U , le résultat découle du théorème de Stokes. \square

Géométrie du trou noir non-rotationnel en dimension 2+1

L'objectif de ce chapitre est de présenter de manière détaillée certains éléments d'une série d'articles [3–5, 9] et d'en éclaircir quelques points. Nous présentons notamment une nouvelle manière de décrire les horizons sous forme matricielle et un nouveau système de coordonnées plus global que dans les articles de références. Certains problèmes de revêtements doubles ont également été corrigés.

Les équations d'Einstein pour un univers vide de dimension 2+1 avec une constante cosmologique négative admettent des solutions de type trou noir [10, 11]. Une propriété remarquable de ces solutions est qu'elles s'obtiennent par identification de l'espace anti-de Sitter de dimension 3 par un sous-groupe discret de son groupe d'isométries. Cela a été découvert par Bañados, Henneaux, Teitelboim et Zanelli [1][2]. D'ailleurs, ce type de trou noir est nommé d'après eux, BTZ ou BHTZ.

Nous donnons ci-dessous une description géométrique du trou noir BHTZ massif non-rotationnel en dimension 2+1, sans nous attarder sur toutes les subtilités physiques de ces objets. L'objectif est d'exhiber la structure de trou noir de la variété BHTZ, c'est-à-dire démontrer la présence d'un horizon. L'horizon est l'ensemble de points \mathcal{H} séparant une variété M en 2 parties : l'ensemble des points K , derrière l'horizon, qui ne peuvent échapper à la singularité et l'ensemble des points P , devant l'horizon, qui y échappent dans une infinité non-dénombrable de directions

$$M = K \sqcup \mathcal{H} \sqcup P ; \quad \mathcal{H} = \partial K = \partial P.$$

La singularité sera définie, en tout bon sens physique, par l'ensemble des points générant des courbes de type temps fermées. Un résultat important est que l'espace AdS_3 admet un feuilletage en espaces AdS_2 . Étudier le trou noir à travers ce feuilletage permet de comprendre son évolution en considérant comment l'horizon se place dans chaque feuille. Avant d'entrer dans le vif du sujet, nous donnerons une brève description des espaces anti-de Sitter.

4.1. Espaces Anti-de Sitter

4.1.1. Considérations générales. L'espace anti-de Sitter de dimension n , noté AdS_n , est une sous-variété de $\mathbb{R}^{(2,n-1)}$ de codimension 1. Plus précisément, dans l'espace $\mathbb{R}^{(2,n-1)}$ avec la métrique

$$ds^2 = dx_0^2 + dx_1^2 - \sum_{i=2}^n dx_i^2$$

l'espace AdS_n est la sous-variété lorentzienne munie de la métrique induite et décrite par l'hyperboloïde

$$x_0^2 + x_1^2 - \sum_{i=2}^n x_i^2 = \alpha^2.$$

Autrement dit, il s'agit de la sphère de rayon $\alpha > 0$ dans $\mathbb{R}^{(2,n-1)}$. Similairement à la sphère riemannienne, $\mathbb{S}^n = \text{SO}(n+1)/\text{SO}(n)$, on a

$$\text{AdS}_n = \text{SO}_0(2, n-1)/\text{SO}_0(1, n-1)$$

ce qui munit les espaces AdS_n d'une structure d'espace homogène.

4.1.2. Petites dimensions. L'espace anti-de Sitter de dimension 3 est défini par

$$\text{AdS}_3 := \left\{ (t, x, y, z) \in \mathbb{R}^{(2,2)} \mid t^2 + x^2 - y^2 - z^2 = 1 \right\}.$$

On peut écrire

$$\text{SL}_2(\mathbb{R}) := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} \mid ad - bc = 1 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} t+y & z+x \\ z-x & t-y \end{pmatrix} \mid t^2 + x^2 - y^2 - z^2 = 1 \right\}$$

d'où l'identification

$$\text{AdS}_3 \simeq \text{SL}_2(\mathbb{R}).$$

Cette expression donne une représentation matricielle de AdS_3 et on écrira parfois

$$p = (t(p), x(p), y(p), z(p)) \in \text{AdS}_3.$$

De plus, la métrique canonique sur AdS_3 ,

$$\hat{g} = (dt^2 + dx^2 - dy^2 - dz^2) \Big|_{\text{AdS}_3},$$

est bi-invariante pour l'action de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ et donc équivalente à la métrique de Killing. Autrement dit, l'espace anti-de Sitter de dimension 3 est isométrique à $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ muni de la métrique de Killing donnée par

$$\beta_g(X_g, Y_g) := \frac{1}{8} B \left(L_{g^{-1}*} X_g, L_{g^{-1}*} Y_g \right) = \frac{1}{2} \text{Tr}(X_e Y_e)$$

pour $X_g, Y_g \in T_g \text{SL}_2(\mathbb{R})$ et B la forme de Killing sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$. On notera parfois $G := \text{SL}_2(\mathbb{R})$ et $\mathfrak{g} := \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \text{Lie}(\text{SL}_2(\mathbb{R}))$. Pour rappel, $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$ est l'ensemble des matrices de traces nulles,

$$\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) = \{ M \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : \text{Tr}(M) = 0 \}$$

et admet la base

$$\mathbf{E} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

THÉORÈME 4.1 (Décomposition d'Iwasawa). *L'application*

$$A \times N \times K \rightarrow \mathrm{SL}_2(\mathbb{R}); \quad (a, n, k) \mapsto ank$$

où

$$A := \exp(\mathbb{R}H) = \left\{ \begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}$$

$$N := \exp(\mathbb{R}E) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & 1 \end{pmatrix} : n \in \mathbb{R} \right\} \simeq \mathbb{R}$$

$$K := \exp(\mathbb{R}T) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} : \theta \in [0, 2\pi] \right\} \simeq \mathbb{S}^1$$

avec $T := E - F$, est un difféomorphisme.

L'espace $\mathrm{AdS}_2 := \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^{(2,1)} : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$ est simplement l'hyperboloïde à une nappe dans \mathbb{R}^3 (voir figure 1).

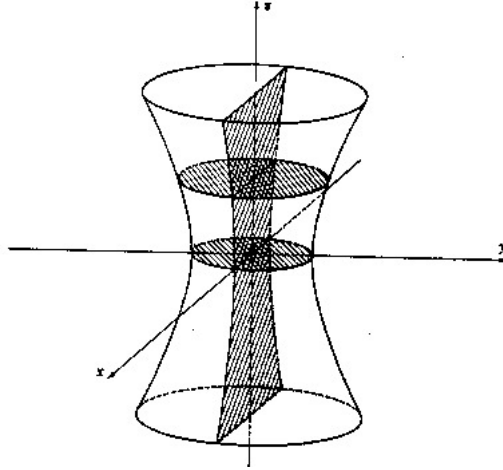


FIGURE 1. Représentation graphique de l'espace AdS_2

Soit

$$L = \pm A = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} : ad = 1 \right\} \simeq \mathrm{GL}(1, \mathbb{R}) = \mathrm{Spin}(1, 1).$$

Si on considère AdS_2 en tant qu'espace homogène, on a

$$\mathrm{AdS}_2 = \mathrm{SO}_0(2, 1)/\mathrm{SO}_0(1, 1) = \mathrm{Spin}(2, 1)/\mathrm{Spin}(1, 1) = G/L.$$

De plus, L est l'ensemble des matrices qui commutent avec H et on a le difféomorphisme évident

$$\begin{cases} G/L \rightarrow \mathrm{Ad}_G H \\ gL \mapsto \mathrm{Ad}_g H. \end{cases}$$

Si $\text{Ad}_G H$ est munie de la métrique de Killing, alors ce difféomorphisme est également une isométrie et

$$\text{AdS}_2 \simeq \text{Ad}_G(H) = \{xH + yS + zT : x^2 + y^2 - z^2 = 1\}$$

où

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

4.2. Feuilletage d' AdS_3 en espaces AdS_2

PROPOSITION 4.2. *Soient*

$$L = \pm A, \quad a := \exp(aH) \quad \text{et} \quad \sigma : G \rightarrow G ; g \mapsto HgH$$

l'application

$$\phi : A \times G/L \rightarrow G : (a, gL) \mapsto ga\sigma(g^{-1})$$

est un difféomorphisme global.

DÉMONSTRATION. On considère

$$\bar{N} = \exp(\mathbb{R}F) \quad \text{et} \quad N = \exp(\mathbb{R}E)$$

et on note

$$m := \exp(mF) \quad \text{et} \quad n := \exp(nE).$$

Les deux cartes ci-dessous constituent un atlas C^∞ sur G/L :

$$N \times \bar{N} : (n, \underline{m}) \mapsto n\underline{m}L$$

$$N \times \bar{N} : (n, \underline{m}) \mapsto Jn\underline{m}L$$

où

$$J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elles induisent les cartes suivantes sur G :

$$\varphi : A \times N \times \bar{N} \rightarrow G : (a, n, \underline{m}) \mapsto \phi(a, n\underline{m}L)$$

$$\psi : A \times N \times \bar{N} \rightarrow G : (a, n, \underline{m}) \mapsto \phi(a, Jn\underline{m}L).$$

Explicitement,

$$\varphi(a, n, \underline{m}) = \begin{pmatrix} mn(\ell + \ell^{-1}) + \ell & (1 + mn)(\ell + \ell^{-1})n \\ m(\ell + \ell^{-1}) & mn(\ell + \ell^{-1}) + \ell^{-1} \end{pmatrix}$$

et

$$\psi(a, n, \underline{m}) = \begin{pmatrix} -mn(\ell + \ell^{-1}) - \ell^{-1} & m(\ell + \ell^{-1}) \\ (1 + mn)(\ell + \ell^{-1})n & -mn(\ell + \ell^{-1}) - \ell \end{pmatrix}$$

où $\ell := e^a$. En résolvant l'équation

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \varphi(a, n, \underline{m})$$

on trouve la solution

$$\begin{aligned} n &= c^{-1} \left(\frac{1}{2}(a+d) - \sqrt{1 + \frac{1}{4}(a-d)^2} \right) \\ m &= \frac{c}{2} \left(1 + \frac{1}{4}(a-d)^2 \right)^{-1/2} \\ \ell &= \frac{1}{2}(a-d) + \sqrt{1 + \frac{1}{4}(a-d)^2} \end{aligned}$$

avec $c \neq 0$. Ce qui donne la quasi-totalité du groupe G . En effet, le complémentaire de l'image de φ est

$$G \setminus \text{Im}(\varphi) = \left\{ \begin{pmatrix} -\ell & b \\ 0 & -\ell^{-1} \end{pmatrix} \mid \ell > 0 \right\}.$$

De la même manière,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \psi(a, n, \underline{m})$$

admet la solution

$$\begin{aligned} n &= b^{-1} \left(-\frac{1}{2}(a+d) - \sqrt{1 + \frac{1}{4}(a-d)^2} \right) \\ m &= \frac{b}{2} \left(1 + \frac{1}{4}(a-d)^2 \right)^{-1/2} \\ \ell &= \frac{1}{2}(a-d) + \sqrt{1 + \frac{1}{4}(a-d)^2} \end{aligned}$$

avec $b \neq 0$. Cette fois, le complémentaire de l'image de ψ est donné par

$$G \setminus \text{Im}(\psi) = \left\{ \begin{pmatrix} \ell & 0 \\ c & \ell^{-1} \end{pmatrix} \mid \ell > 0 \right\}.$$

Par conséquent, $\{\varphi, \psi\}$ recouvre tout G . On vérifie facilement que l'application de changement de cartes est lisse. \square

Le difféomorphisme présenté dans cette proposition feuillette AdS_3 en espaces difféomorphes à AdS_2 . En effet, l'action de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ sur AdS_3 :

$$\tau : G \times \text{AdS}_3 \rightarrow \text{AdS}_3; \quad (g, p) \mapsto \tau_g(p) := gp\sigma(g^{-1})$$

où $\sigma(g) := HgH$, admet les orbites

$$\mathcal{O}_p := \{gp\sigma(g^{-1}) : g \in G\}.$$

En un point $p = (t(p), x(p), y(p), z(p)) \in \text{AdS}_3$, on développe

$$q := \left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t(p) + y(p) & z(p) + x(p) \\ z(p) - x(p) & t(p) - y(p) \end{pmatrix} H \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} H \right) \in \mathcal{O}_p.$$

On remarque que $y(q) = y(p)$. D'où

$$\mathcal{O}_p = \{q \in \text{AdS}_3 : y(q) = y(p)\} = \{(t, x, z) \in \mathbb{R}^3 : t^2 + x^2 - z^2 = 1 + y(p)^2\} \simeq \text{AdS}_2.$$

En particulier, puisque les éléments de L commutent avec H ,

$$\mathcal{O}_a = \{\phi(a, gL) \mid g \in G\} \simeq G/L = \text{AdS}_2$$

pour tout $a \in A$. Ainsi, le difféomorphisme ϕ réalise AdS_3 en un feuilletage dont les fibres sont les orbites \mathcal{O}_a , difféomorphes à AdS_2 . Nous verrons plus loin que ce feuilletage simplifie l'étude de la structure du trou noir. De plus, on établit le difféomorphisme suivant pour chaque feuille

$$\mathcal{O}_a \rightarrow \text{Ad}_G H; \quad ga\sigma(g^{-1}) \mapsto gHg^{-1}.$$

La propriété ci-dessous donne la décomposition la métrique sur AdS_3 à travers ϕ .

PROPOSITION 4.3. *La métrique de Killing β sur G se décompose comme suit à travers le feuilletage*

$$\phi^* \beta = da^2 - \cosh^2(a) \beta^{G/L}$$

où $\beta^{G/L}$ est la restriction de β sur $G/L \simeq \text{AdS}_2$.

DÉMONSTRATION. Pour tout $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R}) := \mathfrak{g}$ et $g \in G$, on écrit le champ fondamental associé à l'action τ

$$X_g^* := \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp(-tX)g\sigma(\exp(tX)).$$

ou, à traver ϕ ,

$$X_{\phi(a, gL)}^* = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \phi(a, \exp(-tX)gL).$$

Pour tout $g_0 \in G$ on a $\tau_g(g_0) := gg_0\sigma(g^{-1})$. On observe $\tau_g \circ \phi = \phi \circ g$ où $g(a, g_0L) := (a, gg_0L)$. Considérons également les champs de vecteurs invariants à droite et à gauche

$$\tilde{X}_g := \left. \frac{d}{dt} \right|_0 g \exp(tX) \quad \underline{X}_g := \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \exp(tX)g.$$

On a

$$\phi_{*(a, gL)} X^* = -\underline{X}_\phi + \widetilde{\sigma X}_\phi.$$

et

$$\phi_{*(a, gL)} \partial_a = \underline{\text{Ad}_g H}_\phi.$$

Par un calcul simple, on obtient

$$\begin{aligned} (\phi^* \beta)_{(a, gL)}(\partial_a, X^*) &= -B(\text{Ad}_g H, X) + B(\text{Ad}_{\phi^{-1}} \text{Ad}_g H, \sigma(X)) \\ &= -B(\text{Ad}_g H, X) + B(\sigma(\text{Ad}_g H), \sigma(X)) = 0. \end{aligned}$$

Par conséquent, la métrique doit être de la forme

$$\phi^* \beta = da^2 + \beta'$$

où β' est une métrique dépendant de a sur G/L . Cependant, la métrique β' doit être invariante sous l'action de G . C'est-à-dire

$$g_0^*(\phi^* \beta)(X^*, Y^*) = \beta'(g_{0*} X^*, g_{0*} Y^*) = \phi^* \tau_{g_0}^* \beta(X^*, Y^*) = \phi^* \beta(X^*, Y^*) = \beta'(X^*, Y^*).$$

Dès lors, la seule possibilité est que β' soit égale à la métrique de Killing à un multiple dépendant de a près :

$$\beta' = \xi \beta^{G/L} \quad \text{où} \quad \xi = \xi(a).$$

Le fait que $\xi(a) = -\cosh^2(a)$ est déterminé en évaluant explicitement

$$\beta'_{\varphi(a,n,m)}(E^*, E^*) = \xi(a) \beta_{nmL}^{G/L}(E^*, E^*).$$

□

REMARQUE 4.4. Cette propriété implique qu'on a une isométrie

$$G/L = \text{AdS}_2 \rightarrow \mathcal{O}_a$$

à condition que AdS_2 soit muni de la métrique $-\cosh^2(a)\beta^{G/L}$.

4.3. Construction du trou noir

DÉFINITION 4.5. *Un champ de vecteurs de Killing sur une variété pseudo-riemannienne (M, \hat{g}) est un champ de vecteurs $X \in \chi^\infty(M)$ tel que le flot de X préserve la métrique. C'est-à-dire, si (φ_t) est le sous-groupe à un paramètre de difféomorphismes associé à X , $\varphi_t^* \hat{g} = \hat{g}$.*

On définit l'action BHTZ par

$$\psi : \mathbb{R} \times G \rightarrow G; \quad (t, p) \mapsto \psi_t(p) := \exp(trH)p \exp(-trH)$$

où r est un paramètre physique lié à la masse du trou noir. Il est clair que ψ_t préserve la métrique de Killing. En effet, ψ_t est simplement la conjugaison par $\exp(trH)$ et la métrique de Killing est bi-invariante. Par conséquent, on a la proposition ci-dessous.

PROPOSITION 4.6. *Le champ de vecteur Ξ associé à ψ_t par*

$$\Xi_g := \frac{d}{dt} \psi_t(g)$$

est de Killing.

Physiquement, la singularité est l'ensemble des régions où l'on observe des courbes de type temps fermées. Ce fait physique motive la définition suivante.

DÉFINITION 4.7. *Les singularités du trou noir sont données par l'ensemble $\mathcal{S}/\psi_{\mathbb{Z}}$ où*

$$\mathcal{S} = \{p \in \text{AdS}_3 : \beta_p(\Xi_p, \Xi_p) \leq 0\}.$$

REMARQUE 4.8. Pour tout $p \in \text{AdS}_3$, on a

$$\Xi_p = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \psi_t(p) = R_{p*_e}(rH - \text{Ad}(p)(rH))$$

De plus, puisque la métrique de Killing est invariante sous l'action adjointe, on calcule

$$\begin{aligned} \beta_p(\Xi_p, \Xi_p) &= \beta_p(R_{p*_e}(rH - \text{Ad}(p)(rH)), R_{p*_e}(rH - \text{Ad}(p)(rH))) \\ &= \frac{1}{8} B(rH - \text{Ad}(p)(rH), rH - \text{Ad}(p)(rH)) \\ &= \frac{r^2}{4} (B(H, H) - B(H, \text{Ad}(p)H)) \end{aligned}$$

d'où,

$$\mathcal{S} = \{p \in \text{AdS}_3 \mid B(H, H) \leq B(H, \text{Ad}(p)H)\}.$$

Soit $\mathcal{U} := \text{AdS}_3 \setminus \mathcal{S}$ et l'action discrète

$$\psi|_{\mathbb{Z}} : \mathbb{Z} \times \text{AdS}_3 \rightarrow \text{AdS}_3.$$

DÉFINITION 4.9. *Le trou noir BHTZ est l'espace des orbites \mathcal{U}/\mathbb{Z} , c'est à dire l'espace quotient $\mathcal{U}/\psi_{\mathbb{Z}}$ défini par la relation d'équivalence*

$$p \sim \exp(mrH)p \exp(-mrH), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

REMARQUE 4.10. On peut considérer sur G ce qu'on appellera ici la décomposition d'Iwasawa twistée, donnée par le difféomorphisme

$$\Phi : A \times N \times K \rightarrow G; \quad (a, n, k) \mapsto anka^{-1}.$$

Elle induit le système de coordonnées global

$$(\mathbb{R} \oplus \mathbb{R}) \times \mathbb{S}^1 \rightarrow G; \quad (a, n, e^{i\theta}) \mapsto \exp(aH)\exp(nE)\exp(\theta T)\exp(-aH).$$

Dans ces coordonnées, l'action BTZ $\psi|_{\mathbb{Z}}$ se lit

$$\psi_m(a, n, e^{i\theta}) = (a + mr, n, e^{i\theta}).$$

Ainsi, le trou noir BTZ, avec ses singularités, est donné par

$$\text{AdS}_3/\mathbb{Z} = G/\mathbb{Z} \simeq \mathbb{S}^1 \times N \times K \simeq \mathbb{S}^1 \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^1 = \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}.$$

REMARQUE 4.11. Le point fort de notre premier difféomorphisme ϕ est de paramétriser un ensemble plus grand que \mathcal{U} . Les calculs de la section suivante sont valables même en dehors de \mathcal{U} , dans tout $\text{Im}\phi$. On verra, dans la section 4.5, un autre système de coordonnées qui ne paramétrise que l'espace \mathcal{U} mais permet une meilleure intuition géométrique.

4.4. Horizons du trou noir et structure causale

4.4.1. Calcul de l'horizon. Les rayons lumineux passant par Id sont presque tous de la forme

$$\gamma_{n_0}(t) := n_0 \exp(-tF)n_0^{-1}, \quad t > 0; \quad n_0 \in N = \exp(\mathbb{R}E)$$

où

$$n_0 \exp(-tF)n_0^{-1} = \begin{pmatrix} -n_0 & n_0^2 \\ -1 & n_0 \end{pmatrix}.$$

En effet, cette expression donne toutes les directions dans le cône de lumière à l'exception de E . Par conséquent, le cône de lumière futur, moins une direction, d'un point $p = \phi(a, gL)$ est donné par

$$C_p^+ = \{ \mu_p^{n_0}(t) := g\gamma_{n_0}(t)a\sigma(g^{-1}) \}_{n_0 \in N; t > 0}$$

où les rayons lumineux sont de la forme $t \mapsto \mu_p^{n_0}(t)$.

DÉFINITION 4.12. *Considérons l'équation*

$$\beta_{\mu_p^{n_0}(t)}(\Xi_{\mu_p^{n_0}(t)}, \Xi_{\mu_p^{n_0}(t)}) = 0. \quad (4.1)$$

- Un point $p \in \text{AdS}_3$ est derrière l'horizon si il n'existe aucune direction n_0 telle que les rayons lumineux $\mu_p^{n_0}(t)$ échappent à la singularité. Autrement dit, pour tout n_0 , il existe un $t > 0$ qui est solution de (4.1).
- Un point p est devant l'horizon si il existe un intervalle $]a, b[\subset \mathbb{R}$ tel que pour tout $n_0 \in]a, b[$, (4.1) n'a pas de solution.
- L'horizon \mathcal{H} est la frontière de ces deux ensembles, c'est-à-dire l'ensemble des points p pour lesquels il existe un nombre fini ou discret de n_0 tels que (4.1) n'a pas de solution.

Grâce à la remarque 4.8, l'équation (4.1) s'écrit

$$\beta_{\mu_p^{n_0}(t)}(\Xi_{\mu_p^{n_0}(t)}, \Xi_{\mu_p^{n_0}(t)}) = \frac{r^2}{4} (B(H, H) - B(H, \text{Ad}(\mu_p^{n_0}(t))H)) = 0.$$

Il ne reste plus qu'à résoudre et on obtient le résultat ci-dessous.

PROPOSITION 4.13. *L'horizon dans AdS_3 est l'ensemble*

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} : ad = 0 \text{ et } bc = -1 \right\}.$$

DÉMONSTRATION. Le calcul ci-dessous est réalisé dans la carte

$$\varphi : A \times N \times \overline{N} \rightarrow G : (a, n, \underline{m}) \mapsto \phi(a, n\underline{m}L).$$

La partie manquante de G dans l'image de φ n'influence pas le résultat final et les calculs sont similaires dans l'autre carte. Soit $p = \varphi(a, n\underline{m}L)$, on a

$$g = n\underline{m} = \begin{pmatrix} 1 + mn & n \\ m & 1 \end{pmatrix}, \quad \gamma_{n_0}(t) = \begin{pmatrix} 1 - tn_0 & tn_0^2 \\ -t & tn_0 + 1 \end{pmatrix},$$

$$\sigma(g^{-1}) = \begin{pmatrix} 1 & n \\ m & 1 + mn \end{pmatrix}, \quad a = \begin{pmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^{-a} \end{pmatrix}.$$

D'où,

$$\mu_p^{n_0}(t) := g\gamma_{n_0}(t)a\sigma(g^{-1}) = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$$

avec

$$A = e^a(1 + mn)(1 - tn_0) - e^a nt + e^{-a} tn_0^2(m + m^2 n) + e^{-a} mn(tn_0 + 1)$$

$$B = e^a(n + mn^2)(1 - tn_0) - e^a tn^2 + tn_0^2 e^{-a}(1 + mn)^2 + e^{-a}(n + mn^2)(tn_0 + 1)$$

$$C = e^a m(1 - tn_0) - e^a t + e^{-a} m^2 tn_0^2 + e^{-a} mtn_0 + e^{-a} m$$

$$D = e^a mn((1 - tn_0) - e^a nt + e^{-a}(1 + mn)(mtn_0^2 + tn_0 + 1)).$$

On observe

$$\mu_p^{n_0}(t) := g\gamma_{n_0}(t)a\sigma(g^{-1}) \in SL_2(\mathbb{R})$$

d'où

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} D & -B \\ -C & A \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Ad}_{\mu_p^{n_0}(t)} H = \begin{pmatrix} 1+2BC & -2AB \\ 2CD & 1-2AD \end{pmatrix}.$$

On a

$$\begin{aligned} B(H, H) - B(\text{Ad}_{\mu_p^{n_0}(t_0)} H, H) &= \text{Tr}(HH) - \text{Tr}(\text{Ad}_{\mu_p^{n_0}(t_0)} HH) \\ &= 2 - \text{Tr} \begin{pmatrix} 1+2BC & 2AB \\ 2CD & -1+2AD \end{pmatrix} \\ &= 2 - 2 - 4BC = -4BC. \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} B &= [(e^{-a} + e^a)(n + mn^2)] + t [(e^{-a} - e^a)(nn_0 + mn^2 n_0) + e^{-a} n_0^2 (1 + mn)^2 - e^a n^2] \\ C &= [(e^{-a} + e^a)m] + t [(e^{-a} - e^a)mn_0 - e^a + e^{-a} m^2 n_0^2]. \end{aligned}$$

On peut écrire $BC = xt^2 + yt + z$ avec

$$\begin{aligned} x &= [(e^{-a} - e^a)(nn_0 + mn^2 n_0) + e^{-a} n_0^2 (1 + mn)^2 - e^a n^2] [(e^{-a} - e^a)mn_0 - e^a + e^{-a} m^2 n_0^2] \\ y &= 2(e^{-2a} - e^{2a})(mnn_0 + m^2 n^2 n_0) + (1 + e^{-2a})(mn_0^2 + 2m^3 n^2 n_0^2 + 3m^2 n n_0^2) - (1 + e^{2a})(n + 2mn^2) \\ z &= (e^{-a} + e^a)^2 (mn + m^2 n^2). \end{aligned}$$

Si pour un n_0 fixé, l'équation

$$B(H, H) - B(\text{Ad}_{\mu_p^{n_0}(t_0)} H, H) = 0$$

n'a pas de solution en t , cela signifie que le déterminant Δ de l'équation du deuxième degré est strictement inférieur à zéro. Par continuité, il existe alors un voisinage U de n_0 tel que pour tout $n_0 \in U$, les rayons échappent à la singularité et le point p est automatiquement devant l'horizon. Par conséquent, un point ne peut être sur l'horizon que s'il existe un nombre fini de n_0 tels que cette expression n'est pas un polynôme, i.e. tels que $x = 0$ et $y = 0$.

L'équation $x = 0$ implique

$$[(e^{-a} - e^a)(nn_0 + mn^2 n_0) + e^{-a} n_0^2 (1 + mn)^2 - e^a n^2] = 0 \quad (4.2)$$

ou

$$[(e^{-a} - e^a)mn_0 - e^a + e^{-a} m^2 n_0^2] = 0. \quad (4.3)$$

Supposons d'abord que (4.2) est vérifiée. En résolvant l'équation du second degré, on trouve

$$n_0 = \frac{ne^{2a}}{1+mn} \quad \text{ou,} \quad n_0 = \frac{-n}{1+mn}.$$

En injectant cela dans l'équation $y = 0$, on obtient respectivement

$$-e^{2a} = \frac{1+mn}{mn} \quad (4.4)$$

$$-e^{-2a} = \frac{1+mn}{mn}. \quad (4.5)$$

Supposons à présent que (4.3) est vérifiée. De la même manière, on obtient

$$n_0 = \frac{e^{2a}}{m} \quad \text{ou,} \quad n_0 = \frac{-1}{m}.$$

En remplaçant dans $y = 0$, on trouve

$$\frac{-e^a}{e^{-a} + e^a} = mn \quad (4.6)$$

$$\frac{-e^{-a}}{e^{-a} + e^a} = mn \quad (4.7)$$

Il est clair que ces deux systèmes d'équations sont équivalents. Ainsi, les horizons sont décrits par les équations (4.6) et (4.7), c'est à dire qu'ils sont composés de tous les points $p = \varphi(a, mnL)$ tels que (4.6) ou (4.7) est vérifiée, i.e.

$$\mathcal{H} = \left\{ \varphi(a, mnL) \in G : \frac{-e^a}{e^{-a} + e^a} = mn \quad \text{ou} \quad \frac{-e^{-a}}{e^{-a} + e^a} = mn \right\}.$$

On calcule

$$\varphi(a, mnL) = \begin{pmatrix} e^a + nm(e^a + e^{-a}) & n(1+nm)(e^a + e^{-a}) \\ (e^a + e^{-a})m & e^{-a} + mn(e^a + e^{-a}) \end{pmatrix}.$$

Si $\varphi(a, mnL)$ vérifie (4.6), on a

$$\varphi(a, mnL) = \begin{pmatrix} 0 & ne^{-a} \\ (e^a + e^{-a})m & e^{-a} - e^a \end{pmatrix},$$

et si $\varphi(a, mnL)$ vérifie (4.7), on a

$$\varphi(a, mnL) = \begin{pmatrix} e^a - e^{-a} & ne^a \\ (e^a + e^{-a})m & 0 \end{pmatrix}$$

ce qui conclut la preuve. \square

REMARQUE 4.14. Ce résultat implique que l'horizon du trou noir est donné par $\mathcal{U} \cap \mathcal{H}$. Notre système de coordonnées nous permet de considérer l'ensemble \mathcal{H} dans tout AdS_3 .

4.4.2. Trace de l'horizon dans AdS_2 .

DÉFINITION 4.15. L'intersection $\mathcal{H} \cap \mathcal{O}_a$ vue dans l'orbite adjointe $\text{Ad}_G(H) \simeq G/L$ à travers le difféomorphisme

$$\mathcal{O}_a \rightarrow \text{Ad}_G H; \quad g\alpha\sigma(g^{-1}) \mapsto gHg^{-1}$$

est appelée la trace de l'horizon sur l'orbite \mathcal{O}_a . On note \mathcal{T}_a la trace correspondant à \mathcal{O}_a .

REMARQUE 4.16. Par la proposition 4.3, l'isomorphisme ci-dessus est également une isométrie si $G/L \simeq \text{AdS}_2$ est muni de la métrique $-\cosh^2(a)\beta^{G/L}$.

PROPOSITION 4.17. La trace de l'horizon sur une orbite \mathcal{O}_a est donnée par

$$\mathcal{T}_a = \left\{ xH + yS + zT \mid x^2 := \tanh^2(a), y^2 - z^2 = \frac{1}{\cosh^2(a)} \right\}.$$

DÉMONSTRATION. Par la proposition 4.13,

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_a &= \left\{ \text{Ad}_{mn}H \mid mn = \frac{-e^{\pm a}}{e^a + e^{-a}} \right\} \\ &= \left\{ (1 + 2mn)H + (m - n(1 + mn))S + (-m - n(1 + mn))T \mid mn = \frac{-e^{\pm a}}{e^a + e^{-a}} \right\} \\ &= \left\{ xH + yS + zT \mid x^2 := \tanh^2(a), y^2 - z^2 = \frac{1}{\cosh^2(a)} \right\}. \end{aligned}$$

En particulier, en $a = 0$, c'est-à-dire dans l'orbite adjointe $\text{Ad}_G(H) \simeq \text{AdS}_2 = G/L$, la trace de l'horizon est donné par

$$\mathcal{F}_0 = \{xH + yS + zT : x = 0, y^2 - z^2 = 1\}.$$

□

La figure 2 représente l'évolution de l'horizon sur l'orbite adjointe en fonction de a . En $a = 0$, on a simplement l'intersection du plan $x = 0$ avec l'hyperboloïde $x^2 + y^2 - z^2 = 1$, c'est-à-dire l'hyperbole $y^2 - z^2 = 1$. Quand a grandit, ce plan balaie l'hyperboloïde, définissant les hyperboles $y^2 - z^2 = \frac{1}{\cosh^2(a)}$. Le point critique où les branches de l'hyperbole deviennent deux droites, représenté sur les hyperboloïdes de droite dans la figure, n'est jamais atteint puisque $\tanh^2(a)$ tend vers 1 lorsque a tend vers l'infini.

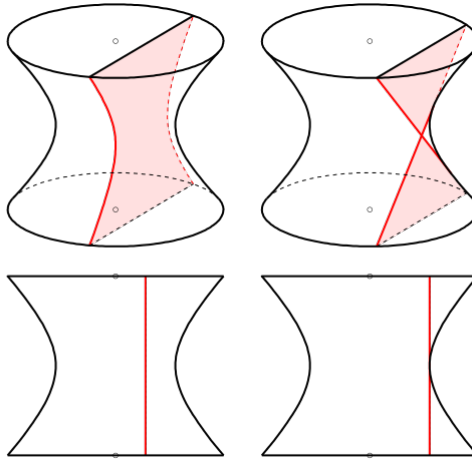


FIGURE 2. Représentation graphique de l'horizon dans l'orbite adjointe

4.5. Un autre système de coordonnées

Le système présenté ci-dessus à l'avantage d'être global dans le sens où une carte du difféomorphisme ϕ décrit presque tout G , y compris une partie en dehors de \mathcal{U} . Cependant, cette approche ne permet pas forcément une vision géométrique claire. C'est pourquoi, même si il est moins global, nous trouvons utile de présenter ici un autre système de coordonnées permettant une meilleure visualisation.

PROPOSITION 4.18. *L'application*

$$\Phi : \begin{cases} \mathbb{R} \times]0, 2\pi[\setminus \{\pi\} \times \mathbb{R} \rightarrow \text{AdS}_3 \\ (\theta, \zeta, \rho) \mapsto \tau_{\exp(\frac{\theta}{2}H)\exp(\frac{\zeta}{2}T)} \exp(\rho H) \end{cases} .$$

est une paramétrisation globale de $\mathcal{U} \subset \text{AdS}_3$. A travers Φ , la métrique de Killing β sur AdS_3 devient

$$\beta|_{\mathcal{U}} = d\rho^2 - \cosh^2(\rho)d\zeta^2 + \cosh^2(\rho)\sin^2(\zeta)d\theta^2. \quad (4.8)$$

DÉMONSTRATION. On calcule,

$$\tau_{\exp(\frac{\theta}{2}H)\exp(\frac{\zeta}{2}T)} \exp(\rho H) = \cosh(\rho) \cos(\zeta) \text{Id} + \cosh(\rho) \sin(\zeta) (\sinh(\theta)S + \cosh(\theta)T) + \sinh(\rho)H.$$

Pour rappel,

$$\text{AdS}_3 = \text{SL}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} t+y & z+x \\ z-x & t-y \end{pmatrix} \mid t^2 + x^2 - y^2 - z^2 = 1 \right\}$$

et la métrique induite sur AdS_3 est la métrique de Killing

$$\beta = (dt^2 + dx^2 - dy^2 - dz^2)|_{\text{AdS}_3}.$$

Dans nos coordonnées (θ, ζ, ρ) ,

$$\begin{aligned} t &= \cosh(\rho) \cos(\zeta), & x &= \cosh(\rho) \sin(\zeta) \cosh(\theta), \\ y &= \sinh(\rho), & z &= \cosh(\rho) \sin(\zeta) \sinh(\theta), \end{aligned}$$

ce qui donne l'expression (4.8) pour la métrique. De plus, pour tout $p = t\text{Id} + yH + zS + xT \in \text{AdS}_3$, par la remarque 4.8,

$$\begin{aligned} \beta_p(\Xi_p, \Xi_p) &= \frac{r^2}{4} (B(H, H) - B(H, \text{Ad}(p)H)) \\ &= \frac{r^2}{4} (B(H, H) - B(H, \text{Ad}(t\text{Id} + yH + zS + xT)H)) \\ &= 4r^2(x^2 - z^2). \end{aligned}$$

Par conséquent,

$$\mathcal{U} = \{t\text{Id} + yH + zS + xT \in \text{AdS}_3 \mid x^2 - z^2 > 0\},$$

ce qui implique

$$\text{Im}(\Phi) = \mathcal{U}.$$

□

REMARQUE 4.19. Il s'agit simplement d'une restriction de notre ancien difféomorphisme

$$\Phi(\theta, \zeta, \rho) = \phi \left(\exp(\rho H), \exp\left(\frac{\theta}{2}H\right) \exp\left(\frac{\zeta}{2}T\right) \right).$$

Dans ces coordonnées, l'ation BTZ se lit

$$\psi_m(\theta, \zeta, \rho) = (\theta + mr, \zeta, \rho).$$

Pour tout $p = \Phi(\theta, \zeta, \rho)$ on écrit les rayons lumineux issu de p comme

$$t \mapsto \gamma_p^\kappa(t) := g \exp(\rho H) \exp(t \text{Ad}(\exp(\kappa T))E) \sigma(g^{-1}).$$

Toutes les directions dans le cône de lumière sont atteintes pour $\kappa \in [0, \pi[$ puisque

$$\begin{aligned} \text{Ad}(\exp(\kappa T))E &= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \sin(2\kappa) & \cos^2(\kappa) \\ -\sin^2(\kappa) & -\frac{1}{2} \sin(2\kappa) \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \sin(2\kappa)H + \frac{1}{2} \cos(2\kappa)S + \frac{1}{2}T. \end{aligned}$$

On écrit

$$C_p^+ := \left\{ \gamma_p^\kappa(t) \mid t > 0, \kappa \in [0, \pi[\right\}$$

le cône de lumière futur de p . Pour trouver les points de l'horizon, nous devons à nouveau nous pencher sur l'équation

$$\beta_{\gamma_p^\kappa(t)}(\Xi_{\gamma_p^\kappa(t)}, \Xi_{\gamma_p^\kappa(t)}) = 0.$$

Pour rappel, un point $p \in \mathcal{U}$ est sur l'horizon si il existe un nombre fini de κ telle que cette équation n'admet pas de solution en t . On calcule

$$\beta_{\gamma_p^\kappa(t)}(\Xi_{\gamma_p^\kappa(t)}, \Xi_{\gamma_p^\kappa(t)}) = \frac{r^2}{4} \left(B(H, H) - B(H, \text{Ad}(\gamma_p^\kappa(t))H) \right)$$

avec $\gamma_p^\kappa(t) = \exp\left(\frac{\theta}{2}H\right) \exp\left(\frac{\zeta}{2}T\right) \exp(\rho H) \exp(t \text{Ad}(\exp(\kappa T))E) \exp\left(\frac{\zeta}{2}T\right) \exp\left(\frac{-\theta}{2}H\right)$. De la même manière que dans notre premier système de coordonnées, on obtient un polynôme du second degré et un point p est sur l'horizon si et seulement si les coefficients de ce polynôme s'annulent pour un nombre fini de κ . Après ces étapes calculatoires, on obtient la proposition suivante.

PROPOSITION 4.20. *Les équations des horizons dans les coordonnées (θ, ζ, ρ) sont données par*

$$\sinh(\rho) = -\cos(\zeta) \cosh(\rho) \quad \text{ou} \quad \sinh(\rho) = \cos(\zeta) \cosh(\rho).$$

La proposition suivante montre que l'on obtient les mêmes horizons pour les deux approches, ce qui était évidemment attendu, mais tout de même rassurant.

PROPOSITION 4.21. *L'horizon dans \mathcal{U} est donnée par*

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \left\{ t \text{Id} + xT + yH + zS = \begin{pmatrix} t+y & z+x \\ z-x & t-y \end{pmatrix} \mid t = \pm y, x^2 - z^2 = 1 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid ad = 0 \text{ et } bc = -1 \right\}. \end{aligned}$$

DÉMONSTRATION. On rappelle que

$$\Phi(\theta, \zeta, \rho) = \cosh(\rho) \cos(\zeta) \text{Id} + \cosh(\rho) \sin(\zeta) (\sinh(\theta)S + \cosh(\theta)T) + \sinh(\rho)H.$$

On remarque que les équations de l'horizon au carré donnent

$$\sin(\zeta) = \pm((\cosh(\rho))^{-1}).$$

Donc, pour $\sinh(\rho) = \cos(\zeta) \cosh(\rho)$,

$$\Phi(\theta, \zeta, \rho) = \sinh(\rho) \text{Id} \pm (\sinh(\theta)S + \cosh(\theta)T) + \sinh(\rho H)$$

et

$$\{\Phi(\theta, \zeta, \rho) \mid \sinh(\rho) = \cos(\zeta) \cosh(\rho)\} = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & 0 \end{pmatrix} \mid bc = -1 \right\}.$$

De même, pour $\sinh(\rho) = -\cos(\zeta) \cosh(\rho)$,

$$\Phi(\theta, \zeta, \rho) = -\sinh(\rho) \text{Id} \pm (\sinh(\theta)S + \cosh(\theta)T) + \sinh(\rho H)$$

et

$$\{\Phi(\theta, \zeta, \rho) \mid \sinh(\rho) = -\cos(\zeta) \cosh(\rho)\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid bc = -1 \right\}.$$

□

PROPOSITION 4.22. *Dans ce système de coordonnées, la trace de l'horizon dans une orbite \mathcal{O}_a , vue dans l'orbite adjointe $\text{Ad}_G(H) \simeq G/L$ est donnée par*

$$\mathcal{T}_a = \left\{ xH + yS + zT \mid x^2 = \tanh^2(a), y^2 - z^2 = \frac{1}{\cosh^2(a)} \right\}.$$

DÉMONSTRATION. On calcule,

$$\begin{aligned} \mathcal{T}_a &= \left\{ \text{Ad} \left(\exp \left(\frac{\theta}{2} H \right) \exp \left(\frac{\zeta}{2} T \right) \right) H \mid \sinh(\rho) = \pm \cos(\zeta) \cosh(\rho), \theta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ \pm \tanh(\rho) H + \frac{\pm 1}{\cosh(\rho)} (\cosh(\theta)S + \sinh(\theta)T) \mid \theta \in \mathbb{R} \right\} \\ &= \left\{ xH + yS + zT \mid x^2 = \tanh^2(a), y^2 - z^2 = \frac{1}{\cosh^2(a)} \right\}. \end{aligned}$$

En particulier, en $a = 0$, on obtient la trace de l'horizon sur $\text{Ad}_G H = \text{AdS}_2$,

$$\mathcal{T}_0 = \{xH + yS + zT : x = 0, y^2 - z^2 = 1\}.$$

□

Opérateur de type Dirac sur AdS_2

Comme indiqué dans le chapitre 3, il n'existe pas de structure hermitienne $\text{Spin}(p, q)$ -invariante de dimension finie sur $L^2(S)$ et, de ce fait, l'opérateur de Dirac n'est pas symétrique. Ce chapitre, tente de corriger ce problème en modifiant légèrement la définition de l'opérateur de Dirac. Au lieu de considérer la représentation spinorielle, nous choisissons une représentation unitaire du plus petit sous-groupe possible dans l'algèbre de Clifford dont l'algèbre de Lie contient \mathbb{R}^n . On verra que dans le cas d'une $\text{Spin}(1, 1)$ -structure, ce groupe n'est autre que $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ et par conséquent, la représentation est de dimension infinie. Via cette représentation, on associe au fibré Spin-principal sur M un fibré vectoriel de rang infini et on définit, sur les sections de celui-ci, un opérateur de type Dirac. Grâce à l'unitarité de la représentation, on montre que cet opérateur est symétrique. L'opérateur ainsi associé à l'espace $\text{AdS}_2 = \text{SL}_2(\mathbb{R})/\text{Spin}(1, 1)$ est également $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ -invariant.

5.1. Structure spinorielle pseudo-riemannienne

Avant de nous lancer dans la construction de notre opérateur, il est raisonnable de préciser ce que l'on entend par une structure spinorielle sur une variété pseudo-riemannienne orientée, et en particulier par une structure spinorielle sur AdS_2 . Le principal changement par rapport au cas riemannien est que le groupe $\text{SO}(p, q)$ n'est pas connexe et $\text{Spin}(p, q)$ est un revêtement double de $\text{SO}_0(p, q)$, la composante connexe de $\text{SO}(p, q)$ qui contient l'identité (voir théorème 1.14). Une structure spinorielle sur une variété M est donc la donnée d'un fibré $\text{Spin}(p, q)$ -principal, $\text{Spin}(M) \xrightarrow{\Pi_{\text{Spin}}} M$, qui revêt doublement le fibré $\text{SO}_0(M) \xrightarrow{\Pi_{\text{SO}}} M$ des bases orthonormées orientées connexes à l'identité sur M tel que le diagramme suivant commute

$$\begin{array}{ccc} \text{Spin}(M) \times \text{Spin}(p, q) & \xrightarrow{p_1} & \text{Spin}(M) \\ (\Lambda, \lambda) \downarrow & & \downarrow \Lambda \\ \text{SO}_0(M) \times \text{SO}_0(p, q) & \xrightarrow{p_1} & \text{SO}_0(M) \end{array}$$

où λ et Λ sont des revêtements doubles. Comme dans le cas riemannien, λ est l'homomorphisme introduit au chapitre 1 : pour $x \in \mathbb{R}^{(p, q)}$,

$$\lambda : \text{Spin}(p, q) \rightarrow \text{SO}_0(p, q); \quad \lambda(s)x = sxs^{-1}.$$

En particulier, soient $G := \text{SL}_2(\mathbb{R})$, $L := \pm A$ et $M := G/L$. On reconnaît l'espace homogène $M := G/L = \text{AdS}_2$ du chapitre précédent. La métrique de Killing sur G induit une métrique pseudo-riemannienne de signature $(1, 1)$ sur M , notée \hat{g} . De plus, $L = \text{GL}(1, \mathbb{R}) = \text{Spin}(1, 1)$

et M admet une structure de fibré $\text{Spin}(1,1)$ -principal

$$\Pi_{\text{Spin}} : G \rightarrow M ; \quad g \mapsto \text{Ad}_g(H), \quad \text{où } H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Par conséquent, M admet une structure spinorielle

$$\begin{array}{ccc} G \times \text{Spin}(1,1) & \xrightarrow{p_1} & G \\ (\Lambda, \lambda) \downarrow & & \downarrow \Lambda \\ \text{SO}_0(M) \times \text{SO}_0(1,1) & \xrightarrow{p_1} & \text{SO}_0(M) \end{array}$$

où on note $\text{SO}_0(M) \xrightarrow{\Pi_{\text{SO}}} M$,

$$\lambda(s)(x) := sxs^{-1} = \text{Ad}_s x, \quad \text{pour } s \in \text{Spin}(1,1), x \in \mathbb{R}^2$$

et

$$\Lambda : G \xrightarrow{2:1} \text{SO}_0(M); \quad g \mapsto \left[\text{Ad}_{g^*H} : T_H M \simeq \mathbb{R}^{(1,1)} \rightarrow T_{\text{Ad}_g H} M \right].$$

Pour définir un nouvel opérateur de Dirac associé à cette structure, nous allons construire un nouveau fibré vectoriel et une nouvelle action de fibré qui remplaceront le fibré des spineurs et la multiplication de Clifford du cadre riemannien.

5.2. Construction

Soient $\mathcal{C}^{(1,1)}$ l'algèbre Clifford de $\mathbb{R}^{(1,1)}$, $\overline{G} := \text{SL}_2(\mathbb{R})$ un sous-groupe de $\mathcal{C}^{(1,1)}$ contenant $\text{Spin}(1,1)$ et $\overline{\mathfrak{g}} := \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, son algèbre de Lie. On sait qu'il existe des représentations unitaires de $\text{SL}_2(\mathbb{R})$ mais elles sont de dimension infinie (voir par exemple [16]). Choisissons-en une que nous noterons

$$\rho : \overline{G} \rightarrow \text{End}(\mathcal{H})$$

où \mathcal{H} est un espace de Hilbert de dimension infinie munie du produit scalaire hermitien

$$\langle -, - \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}.$$

REMARQUE 5.1. Il pourrait être tentant de considérer un sous-groupe plus petit que \overline{G} , admettant éventuellement une représentation unitaire de dimension finie. Malheureusement cela est impossible car, comme on le verra dans la suite, la définition de notre opérateur de type Dirac nécessite que l'algèbre de Lie de \overline{G} contienne \mathbb{R}^2 . En considérant les commutateurs dans $\mathcal{C}^{(1,1)}$, on s'aperçoit que l'algèbre de Lie de \overline{G} doit être isomorphe à celle de $\text{SL}_2(\mathbb{R}) \simeq \text{Spin}(2,1)$. Donc, $\overline{G} := \text{SL}_2(\mathbb{R})$ est le plus petit groupe possible. La propriété 3.30 indique qu'en général, l'algèbre de Lie de $\text{Spin}(p+1, q)$ contient l'algèbre de Lie de $\text{Spin}(p, q)$ et \mathbb{R}^n , pour $n = p + q$. En dimension $p + q$, le groupe \overline{G} serait donc simplement $\text{Spin}(p+1, q)$.

Considérons l'action de $\text{Spin}(1,1)$ sur $\mathcal{C}^{(1,1)}$ donnée par

$$\lambda : \text{Spin}(1,1) \times \mathcal{C}^{(1,1)} \rightarrow \mathcal{C}^{(1,1)} ; \quad (s, x) \mapsto sxs^{-1}$$

et l'action à droite évidente

$$G \times \text{Spin}(1,1) \rightarrow G ; \quad (g, s) \mapsto gs.$$

Via celles-ci, on définit le fibré

$$\mathcal{C}^{(1,1)}(M) := G \times_{\lambda} \mathcal{C}^{(1,1)}$$

tel que

$$\mathcal{C}^{(1,1)}(M) = \{[(g, x)] \mid (g, x) \sim (gs, \lambda(s^{-1})x)\}$$

et

$$\Pi : \mathcal{C}^{(1,1)}(M) \rightarrow M; \quad \Pi([(g, x)]) := \Pi_{\text{Spin}}(g).$$

En particulier, on utilisera le sous-fibré

$$\overline{G}(M) := G \times_{\lambda} \overline{G}$$

et le fibré induit sur son algèbre de Lie

$$\overline{\mathfrak{g}}(M) := G \times_{\lambda * e} \overline{\mathfrak{g}}$$

tel que, pour tout $X \in \mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$,

$$\overline{\mathfrak{g}}(M) = \{[(g, X)] \mid (g, X) \sim (gs, \lambda * e(s^{-1})X)\}.$$

Pour alléger les notations et parce qu'il n'y a pas de risque de confusion, nous noterons Π toutes les projections de ces fibrés sur l'espace de base AdS_2

$$\overline{G}(M), \overline{\mathfrak{g}}(M) \xrightarrow{\Pi} M = \text{AdS}_2.$$

PROPOSITION 5.2. *La représentation ρ est $\text{Spin}(1, 1)$ -équivariante.*

DÉMONSTRATION. C'est une évidence puisque pour tout $\overline{g} \in \overline{G}$, $s \in \text{Spin}(1, 1)$ et $\psi \in \mathcal{H}$,

$$\rho(\lambda(s)\overline{g}) (\rho(s)\psi) = \rho(s\overline{g}s^{-1}) (\rho(s)\psi) = \rho(s) (\rho(\overline{g})\psi).$$

□

PROPOSITION 5.3. *La représentation dérivée*

$$d\rho : \overline{\mathfrak{g}} \rightarrow \text{End}(\mathcal{H}); \quad d\rho_X(\psi) := \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \rho(\exp(tX))\psi = \rho * e(X)\psi$$

est également $\text{Spin}(1, 1)$ -équivariante.

DÉMONSTRATION. De la même manière que pour la proposition 5.2, pour tout $X \in \overline{\mathfrak{g}}$,

$$d\rho((\lambda(s)X)) (\rho(s)\psi) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 \rho(\lambda(s)\exp(tX)) (\rho(s)\psi) = \rho(s) (d\rho(X)\psi).$$

□

Sans surprise, on définit le fibré vectoriel associé au fibré Spin-principal $G \xrightarrow{\Pi_{\text{Spin}}} M$ via la représentation ρ ,

$$E := G \times_{\rho|_L} \mathcal{H},$$

tel que

$$E = \{[(g, \psi)] \mid (g, \psi) \sim (gs, \rho(s^{-1})\psi)\}$$

et

$$\tilde{\Pi}_{\text{Spin}} : E \rightarrow M ; \quad \tilde{\Pi}_{\text{Spin}}([(g, \psi)]) = \Pi_{\text{Spin}}(g).$$

Les propositions 5.2 et 5.3 nous permettent de définir les actions de fibrés

$$\begin{aligned} \overline{G}(M) \times E &\rightarrow E; \\ [(g, \overline{g})].[(g', \psi)] &:= [(gg', \rho(\overline{g})\psi)] \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \overline{g}(M) \times E &\rightarrow E; \\ [(g, X)].[(g', \psi)] &:= [(gg', d\rho(X)\psi)]. \end{aligned}$$

Avec un léger abus de notation, on note ces actions ρ et $d\rho$. En résumé, E est un fibré vectoriel de rang infini sur lequel $\overline{G}(M)$ et $\overline{g}(M)$ agissent via les actions ci-dessus.

DÉFINITION 5.4. *Soit $\sigma : M \rightarrow E$ telle que $\tilde{\Pi}_{\text{Spin}} \circ \sigma = \text{Id}$. On dira que σ appartient à $\Gamma^\infty(E)$ si et seulement si $\sigma(x) = [x, \hat{\sigma}(x)]$ où $\hat{\sigma} \in C^\infty(M, \mathcal{H})$ (voir proposition 2.23).*

En partant de la connexion de Levi-Civita sur TM , le travail effectué aux chapitres deux et trois nous donne des expressions pour la connexion $\text{Spin}(1, 1)$ -principale ω dans G et la connexion associée ∇ dans E . Ainsi, on a le diagramme commutatif suivant

$$\begin{array}{ccc} TG & \xrightarrow{\omega} & \text{spin}(1, 1) \\ \downarrow 2:1 & & \downarrow 2:1 \\ TSO_0(M) & \xrightarrow{\tilde{\omega}} & \mathfrak{so}_0(1, 1) \end{array}$$

où ω est $\text{Spin}(1, 1)$ -équivariante avec $\omega_g(X_g^*) = X$ si $X_g^* = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 g \cdot \exp(tX)$. On a vu à la remarque 2.19 que pour tout $X \in \chi^\infty(M)$ et $Z \in \mathfrak{so}_0(1, 1)$,

$$\tilde{\omega}_{\phi^{-1}(x,s)} \left(\phi_{*(x,s)}^{-1} (X_x + L_{s*\text{Id}} Z) \right) := \text{Ad}_{s^{-1}}(\Gamma(X_x)) + Z \quad (5.1)$$

où

$$\phi : \Pi_{\text{SO}}^{-1}(U) \rightarrow U \times \text{SO}_0(1, 1)$$

est une trivialisatation locale de $\text{SO}_0(M)$ sur un ouvert U de M et Γ la 1-forme associée à la connexion de Levi-Civita (voir remarque 2.9). De plus, pour $\varphi \in \Gamma^\infty(E)$ et $X \in \chi^\infty(M)$,

$$\widehat{\nabla_X \varphi}(g) := \hat{\varphi}_{*g} \left(\overline{X}_g \right)$$

où on rappelle que $\overline{X}_g \in H_g := \ker \omega_g$ est le relevé horizontal de $X_{\Pi_{\text{Spin}}(g)}$, tel que $\Pi_{\text{Spin},*g}(\overline{X}_g) = \text{Ad}_{g^*H} \overline{X}_g = X_{\Pi_{\text{Spin}}(g)}$.

Nous avons tout ce qu'il nous faut pour construire un opérateur de type Dirac sur AdS_2 . En particulier, les fibrés $\overline{G}(M)$ et $\overline{g}(M)$ jouent le rôle du fibré de Clifford et leur action sur E remplace la multiplication de Clifford.

DÉFINITION 5.5. *L'opérateur de type Dirac sur AdS_2 est défini par*

$$D = d\rho \circ \nabla : \Gamma^\infty(E) \xrightarrow{\nabla} \Gamma^\infty(T^*M \otimes E) \simeq \Gamma^\infty(TM \otimes E) \xrightarrow{d\rho} \Gamma^\infty(E).$$

Soit $\{e_1, e_2\}$ un repère local sur TM . Comme dans la remarque 3.13, on a, pour tout $\eta \in \Gamma^\infty(E)$,

$$D\eta|_U = B^{\alpha\beta} d\rho(e_\alpha)(\nabla_{e_\beta}\eta)$$

où B est la métrique lorentzienne sur $\mathbb{R}^{(1,1)}$. Dans la section suivante, nous prouvons que D est G -invariant et symétrique.

5.3. Propriétés

5.3.1. Un opérateur G -invariant. Le groupe $G = \mathrm{SL}_2(\mathbb{R})$ agit sur les sections de E comme suit,

$$G \times \Gamma^\infty(E) \rightarrow \Gamma^\infty(E); \quad (g, \varphi) \mapsto g \cdot \varphi$$

tel que

$$\widehat{g \cdot \varphi}(g') = L_{g^{-1}}^* \widehat{\varphi}(g') = \widehat{\varphi}(g^{-1}g').$$

PROPOSITION 5.6. D est G -invariant, c'est-à-dire

$$D(g \cdot \eta) = g \cdot D(\eta)$$

pour tout $\eta \in \Gamma^\infty(E)$ et $g \in G$.

DÉMONSTRATION. Commençons par prouver que $\widetilde{\mathrm{Ad}}_g^* \tilde{\omega} = \tilde{\omega}$ où

$$\widetilde{\mathrm{Ad}} : G \times \mathrm{SO}_0(M) \rightarrow \mathrm{SO}_0(M)$$

est définie par

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_g : \mathrm{SO}_0(M)_x \rightarrow \mathrm{SO}_0(M)_{\mathrm{Ad}_g x}; \quad b \mapsto \mathrm{Ad}_{g^* x} b.$$

Soit

$$\phi : \Pi_{\mathrm{SO}}^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathrm{SO}_0(1,1)$$

une trivialisatation locale de $\mathrm{SO}_0(M)$ sur un ouvert U de M et $\{e_1, e_2\}$ un repère local orthonormé orienté sur U . On remarque que $\mathrm{Ad} : G \times M \rightarrow M$ est une isométrie et $\{\mathrm{Ad}_{g^*} e_1, \mathrm{Ad}_{g^*} e_2\} = \{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2\}$ définit un repère local orthonormé orienté sur $\mathrm{Ad}_g U$ pour $g \in G$ fixé. Soit également

$$\tilde{\phi} : \Pi_{\mathrm{SO}}^{-1}(\mathrm{Ad}_g U) \rightarrow \mathrm{Ad}_g U \times \mathrm{SO}_0(M)$$

la trivialisatation locale sur $\mathrm{Ad}_g U$ définie par $\tilde{\phi}^{-1}(\mathrm{Ad}_g x, s) := \widetilde{\mathrm{Ad}}_g \phi^{-1}(x, s)$. D'où, on a

$$\widetilde{\mathrm{Ad}}_g \circ \phi^{-1} = \tilde{\phi}^{-1} \circ (\mathrm{Ad}_g, \mathrm{Id}).$$

On note $\mathrm{Ad}_{g^*} X_x = \tilde{X}_{\mathrm{Ad}_g x}$ et

$$\begin{cases} \nabla_{\tilde{e}_j}^{LC} \tilde{e}_k = \tilde{\Gamma}_{jk}^\ell \tilde{e}_\ell \\ \nabla_{e_j}^{LC} e_k = \Gamma_{jk}^\ell e_\ell. \end{cases}$$

On calcule

$$\begin{aligned} \left(\widetilde{\mathrm{Ad}}_g^* \tilde{\omega} \right)_{\phi^{-1}(x,g)} \left(\phi_{*(x,s)}^{-1} (X_x + L_{s^* e} Z) \right) &= \tilde{\omega}_{\widetilde{\mathrm{Ad}}_g \circ \phi^{-1}(x,s)} \left(\left(\widetilde{\mathrm{Ad}}_g \circ \phi^{-1} \right)_{*(x,s)} (X_x + L_{s^* e} Z) \right) \\ &= \tilde{\omega}_{\tilde{\phi}^{-1}(\mathrm{Ad}_g x, s)} \left(\tilde{\phi}_{*(\mathrm{Ad}_g x, s)}^{-1} (\mathrm{Ad}(g)_* X_x + L_{s^* e} Z) \right) \\ &= \mathrm{Ad}_{s^{-1}} \left(\tilde{\Gamma}(X_{\mathrm{Ad}_g x}) \tilde{X}_{\mathrm{Ad}_g x}^j + Z \right) \end{aligned}$$

où la dernière égalité suit directement de (5.1). Or, comme Ad_g est une isométrie, on a

$$\begin{aligned}\nabla_{\text{Ad}_{g^*} e_j}^{LC} \text{Ad}_{g^*} e_k &= \text{Ad}_{g^*} \left(\nabla_{e_j}^{LC} e_k \right) \\ &= \text{Ad}_{g^*} \left(\Gamma_{jk}^\ell e_\ell \right) = \Gamma_{jk}^\ell \text{Ad}_{g^*} e_\ell.\end{aligned}$$

Cela implique $\tilde{\Gamma}_{jk}^\ell(\text{Ad}_g x) = \Gamma_{jk}^\ell(x)$ et $\tilde{X}_{\text{Ad}_g x}^j = X_x^j$ pour tout $x \in U$. On conclut comme souhaité que $\text{Ad}_g^* \tilde{\omega} = \tilde{\omega}$. Ensuite, le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \xrightarrow{L} & G \\ \text{Id}_G \times \Lambda \downarrow & & \downarrow \Lambda \\ G \times \text{SO}_0(M) & \xrightarrow{\tilde{\text{Ad}}} & \text{SO}_0(M) \end{array}$$

où $L(g, g') = L_g(g')$ et $\tilde{\text{Ad}}(g, p) = \text{Ad}_{g^*}(p)$, implique $L_g^* \omega = \omega$. Par conséquent, on a $H_{gg'} = \ker(\omega_{gg'}) = L_{g^* g'}(H_{g'})$, d'où

$$L_{g^{-1} *_{g'}}(\overline{X}_{g'}) = \overline{X}_{g^{-1} g'} \quad (5.2)$$

et on calcule

$$L_{g^{-1} *_{g'}}(\overline{X}_g) = \overline{\text{Ad}_{g^{-1} *_{g'}} X}_{g^{-1} g'}. \quad (5.3)$$

En combinant (5.2) et (5.3) et par définition de la connexion associée, on obtient

$$\begin{aligned}\widehat{\nabla_X(g \cdot \varphi)}(g') &= (\widehat{g \cdot \varphi})_{*_{g'}}(\overline{X}_{g'}) \\ &= \widehat{\varphi}_{*_{g^{-1} g'}}(\overline{X}_{g^{-1} g'}) \\ &= \widehat{\varphi}_{*_{g^{-1} g'}}(\overline{\text{Ad}_{g^{-1} *_{g'}} X}_{g^{-1} g'}) \\ &= \widehat{\nabla_{\text{Ad}_{g^{-1} *_{g'}} X} \varphi}(g^{-1} g'),\end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned}\widehat{D(g \cdot \varphi)}(g') &= B^{jj} d\rho(\widehat{e}_j(g'))(\widehat{\nabla_{e_j} g \cdot \varphi})(g') \\ &= B^{jj} d\rho(\widehat{e}_j(g'))(\widehat{\nabla_{\text{Ad}_{g^{-1} *_{g'}} e_j} \varphi})(g^{-1} g').\end{aligned}$$

D'autre part, par définition de l'action de G sur $\Gamma^\infty(E)$,

$$\begin{aligned}\widehat{g \cdot D\varphi}(g') &= \widehat{D\varphi}(g^{-1} g') \\ &= B^{jj} d\rho(\widehat{e}_j(g^{-1} g'))(\widehat{\nabla_{e_j} \varphi})(g^{-1} g')\end{aligned}$$

et on a l'isomorphisme

$$\chi^\infty(M) \simeq C_\lambda^\infty(G, \mathbb{R}^2); \quad X \mapsto \widehat{X}$$

tel que $X_{\text{II}_{\text{Spin}}(g)} = \text{Ad}_{g^* H}(\widehat{X}_g)$. Dès lors, on déduit

$$\widehat{\text{Ad}_{g^*} X}(g') = \widehat{X}(g^{-1} g').$$

Par tout ce qui précède et le fait que Ad_{g^*} est une isométrie linéaire, on obtient

$$\begin{aligned}
\widehat{g \cdot D\varphi}(g') &= B^{jj} d\rho \left(\widehat{\text{Ad}_{g^*} e_j}(g') \right) \left(\widehat{\nabla_{e_j} \varphi} \right) (g^{-1} g') \\
&= B^{jj} d\rho \left(\widehat{\text{Ad}_{g^*} e_j}(g') \right) \left(\widehat{\nabla_{\text{Ad}_{g^*} e_j} g \cdot \varphi} \right) (g') \\
&= B^{jj} d\rho \left(\widehat{e_j}(g') \right) \left(\widehat{\nabla_{e_j} g \cdot \varphi} \right) (g') \\
&= \widehat{D(g \cdot \varphi)}(g')
\end{aligned}$$

ce qui conclut la preuve. \square

5.3.2. Un opérateur symétrique. Soit

$$\langle -, - \rangle : \mathcal{H} \times \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{C}$$

le produit hermitien sur \mathcal{H} . On définit le produit hermitien sur $L^2(E) := \overline{\Gamma_c^\infty(E)}$ par

$$\langle \langle \varphi_1, \varphi_2 \rangle \rangle := \int_M \langle \widehat{\varphi}_1(g), \widehat{\varphi}_2(g) \rangle dx$$

où dx est une notation compacte pour le volume métrique pseudo-riemannien $\sqrt{|\det B|} dx$. Ce produit scalaire est bien défini car

$$g \in G \mapsto \langle \widehat{\varphi}_1(g), \widehat{\varphi}_2(g) \rangle$$

est $\text{Spin}(1, 1)$ -invariante.

PROPOSITION 5.7. *L'opérateur D est symétrique sur $\Gamma_c^\infty(E)$, c'est-à-dire,*

$$\langle \langle D\varphi_1, \varphi_2 \rangle \rangle = \langle \langle \varphi_1, D\varphi_2 \rangle \rangle$$

pour tout $\varphi_1, \varphi_2 \in \Gamma_c^\infty(E)$.

DÉMONSTRATION. Par définition,

$$\begin{aligned}
\langle \langle D\varphi_1, \varphi_2 \rangle \rangle &= \int_M \langle \widehat{D\varphi}_1(g), \widehat{\varphi}_2(g) \rangle dx \\
&= \int_M \langle B^{jj} d\rho \left(\widehat{e_j}(g) \right) \left(\widehat{\nabla_{e_j} \varphi_1}(g) \right), \widehat{\varphi}_2(g) \rangle dx
\end{aligned}$$

où $\{e_1, e_2\}$ est un repère sur U tel que $\text{supp}(\varphi_1) \subset U$ obtenu par partition de l'unité, comme dans le cas riemannien (voir la preuve de la proposition 3.35). Comme ρ est une représentation unitaire,

$$\langle \rho(g)\psi_1, \rho(g)\psi_2 \rangle = \langle \psi_1, \psi_2 \rangle$$

pour tout $g \in G$ et tout $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{H}$. et on a

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_0 \langle \rho(\exp(tZ))\psi_1, \rho(\exp(tZ))\psi_2 \rangle = \langle d\rho(Z)\psi_1, \psi_2 \rangle + \langle \psi_1, d\rho(Z)\psi_2 \rangle = 0.$$

Par conséquent, on peut écrire

$$\langle \langle D\varphi_1, \varphi_2 \rangle \rangle = \int_M -B^{jj} \langle \widehat{\nabla_{e_j} \varphi_1}(g), d\rho \left(\widehat{e_j}(g) \right) \widehat{\varphi}_2(g) \rangle dx. \quad (5.4)$$

De plus, si on considère le relevé horizontal $\bar{e}_j|_g$ de $e_j|_{\pi(g)}$ et une courbe $\gamma : [-1, 1] \rightarrow G$ telle que $\gamma(0) = g$ et $\dot{\gamma}(0) = \bar{e}_j|_g$, on obtient

$$\begin{aligned}\bar{e}_j|_g(\langle \widehat{\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2 \rangle) &= \frac{d}{dt} \Big|_0 \langle \widehat{\varphi}_1(\gamma(t)), \widehat{\varphi}_2(\gamma(t)) \rangle \\ &= \langle \widehat{\varphi}_{1*g}(\bar{e}_j|_g), \widehat{\varphi}_2(g) \rangle + \langle \widehat{\varphi}_1(g), \widehat{\varphi}_{2*g}(\bar{e}_j|_g) \rangle \\ &= \langle \widehat{\nabla_{e_j} \varphi_1}(g), \widehat{\varphi}_2(g) \rangle + \langle \widehat{\varphi}_1(g), \widehat{\nabla_{e_j} \varphi_2}(g) \rangle\end{aligned}$$

et (5.4) devient

$$-B^{jj} \int_M \left\{ \bar{e}_j|_g(\langle \widehat{\varphi}_1, d\rho(\widehat{e}_j)\widehat{\varphi}_2 \rangle) \right\} - \langle \widehat{\varphi}_1(g), (\widehat{\nabla_{e_j} d\rho(e_j)\varphi_2})(g) \rangle dx \quad (5.5)$$

où $\widehat{d\rho(e_j)\varphi_2} = d\rho(\widehat{e}_j)\widehat{\varphi}_2$. Finalement, puisque

$$\begin{aligned}(\widehat{\nabla_{e_j} d\rho(e_j)\varphi_2})(g) &= (d\rho(\widehat{e}_j)\widehat{\varphi}_2)_{*g}(\bar{e}_j|_g) \\ &= (d\rho(\widehat{e}_j)_{*g}(\bar{e}_j|_g))\widehat{\varphi}_2(g) + d\rho(\widehat{e}_j)(g)\widehat{\varphi}_{2*g}(\bar{e}_j|_g) \\ &= d\rho(\widehat{\nabla_{e_j}^{LC} e_j}(g))\widehat{\varphi}_2(g) + d\rho(\widehat{e}_j)(g)(\widehat{\nabla_{e_j} \varphi_2}(g))\end{aligned}$$

on peut réécrire (5.5) comme

$$\begin{aligned}&-B^{jj} \int_M \left\{ \bar{e}_j|_g(\langle \widehat{\varphi}_1, d\rho(\widehat{e}_j)\widehat{\varphi}_2 \rangle) \right\} dx + B^{jj} \int_M \langle \widehat{\varphi}_1(g), d\rho(\widehat{\nabla_{e_j}^{LC} e_j}(g))\widehat{\varphi}_2(g) \rangle dx \\ &+ B^{jj} \int_M \langle \widehat{\varphi}_1(g), d\rho(\widehat{e}_j)(g)(\widehat{\nabla_{e_j} \varphi_2}(g)) \rangle dx.\end{aligned}$$

On remarque que le dernier terme est exactement $\langle \widehat{\varphi}_1, \widehat{D\varphi}_2 \rangle$. Comme dans le cas riemannien, notre stratégie va consister à exprimer les deux premiers termes comme la divergence d'un certain champ de vecteurs. Par le théorème de Stokes, comme φ_1 et φ_2 sont à support compact, les deux premiers termes disparaîtront et le résultat sera prouvé. Soit $\Xi \in \Gamma^\infty(TM \otimes \mathbb{C})$ un champ de vecteurs défini pour tout $X \in \Gamma^\infty(TM \otimes \mathbb{C})$, par

$$\widehat{g}_\mathbb{C}(\Xi, X) = \langle \widehat{\varphi}_1, d\rho(\widehat{X})\widehat{\varphi}_2 \rangle$$

où

$$\begin{cases} \widehat{g}_\mathbb{C} : (TM \otimes \mathbb{C}) \times (TM \otimes \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C} \\ (X_1 + iX_2, Y_1 + iY_2) \mapsto \widehat{g}(X_1, Y_1) - \widehat{g}(X_2, Y_2) + i\widehat{g}(X_2, Y_1) + i\widehat{g}(X_1, Y_2). \end{cases}$$

Par définition de la divergence et la condition métrique de la connexion de Levi-Civita, on obtient

$$\begin{aligned}\operatorname{div}(\Xi) &= \operatorname{Tr}_{\widehat{g}_\mathbb{C}} \left(Y \rightarrow \nabla_Y^{LC} \Xi \right) \\ &= B^{jj} \widehat{g}_\mathbb{C} \left(\nabla_{e_j}^{LC} \Xi, e_j \right) \\ &= B^{jj} \left\{ e_j(\widehat{g}_\mathbb{C}(\Xi, e_j)) - \widehat{g}_\mathbb{C}(\Xi, \nabla_{e_j}^{LC} e_j) \right\}.\end{aligned}$$

Cela implique,

$$\langle \widehat{D\varphi}_1, \widehat{\varphi}_2 \rangle = - \int_M \operatorname{div}(\Xi) dx + \langle \widehat{\varphi}_1, \widehat{D\varphi}_2 \rangle$$

et par le théorème de Stokes, comme φ_1 et φ_2 sont à support compact,

$$\langle\langle \widehat{D}\varphi_1, \widehat{\varphi}_2 \rangle\rangle = \langle\langle \widehat{\varphi}_1, \widehat{D}\varphi_2 \rangle\rangle.$$

□

Cette propriété est importante car elle permet d'envisager une analyse spectrale de notre opérateur de type Dirac. En résumé, nous avons construit un opérateur de type Dirac G -invariant et symétrique sur AdS_2 .

Conclusion

Un des objectifs de ce travail était d'imaginer une nouvelle version de l'opérateur de Dirac sur des variétés homogènes pseudo-riemanniennes. Cela a conduit à la définition d'un opérateur de type Dirac, invariant et symétrique, sur l'espace anti-de Sitter de dimension 2. Cette construction paraît prometteuse. En effet, l'invariance de cet opérateur donne accès à l'outillage de la théorie de Lie et son caractère symétrique permet d'envisager une analyse spectrale. La similitude entre notre construction et celle de K.Habermann [15] permettra peut-être de transposer certains résultats et outils de sa théorie à notre contexte des espaces homogènes.

Une étude géométrique approfondie du trou noir BHTZ non-rotationnel a également été réalisée. Elle a mené à corriger des problèmes de revêtements doubles dans la littérature existante et présente une manière plus lisible d'écrire l'horizon du trou noir, ainsi qu'un nouveau système de coordonnées plus global.

La perspective d'obtenir des informations sur le trou noir BHTZ par le biais d'une analyse spectrale de notre opérateur de type Dirac est enthousiasmante. Nous espérons que nous serons capables de réunir les deux parties de ce mémoire dans le futur.

Notations

\mathcal{C}	Algèbre de Clifford, p.5
$\mathcal{C}^+, \mathcal{C}^-$	Décomposition en somme directe de \mathcal{C} , $\mathcal{C} = \mathcal{C}^+ \oplus \mathcal{C}^-$, p.5
\mathcal{C}_*	Groupe des inversibles de \mathcal{C} , p.6
Γ	Groupe de Clifford, p.6
Γ^+	Groupe de Clifford spécial, p.6
Γ_0^+	Groupe de Clifford spécial réduit ou groupe Spin, p.7
$SO_0(p, q)$	Composante connexe de l'identité de $SO(p, q)$, p.7
$\text{End}(V)$	Ensemble des endomorphismes de V
$\text{Aut}(V)$	Ensemble des automorphismes de V
$\mathcal{C}^{(p, q)}$	Algèbre de Clifford de $\mathbb{R}^{(p, q)}$, p.8
\mathcal{C}_c	Complexifié de l'algèbre de Clifford $\mathcal{C}_c = \mathcal{C} \otimes_{\mathbb{R}} \mathbb{C}$, p.8
S_n	Espace vectoriel des n -spineurs complexes, p.9
$\text{Lie}(G) = \mathfrak{g}$	Algèbre de Lie du groupe de Lie G ,
\exp	Application exponentielle d'une algèbre de Lie vers son groupe de Lie,
Ad	Action adjointe d'un groupe $G : \text{Ad} : G \times G \rightarrow G$ telle que $\text{Ad}_g(g') = gg'g^{-1}$, p.13
B	Forme de Killing, sur $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{R})$, $B(X, Y) = 4\text{Tr}(XY)$, p.13
TM, T^*M	Fibré tangent et cotangent d'une variété M , p.16
T_xM	Espace tangent au point $x \in M$, p.16
$\Gamma^\infty(E)$	Espaces des sections lisses du fibré E , p.17
∇	Connexion linéaire, p.17
∇^{LC}	Connexion de Levi-Civita, p.17
θ, Γ	1-formes associées à ∇ et ∇^{LC} , p.18
∂x_i	Champs de vecteurs de base dans les coordonnées locales (x_1, \dots, x_n) , p.18
$\Omega^n(M, E)$	Espace des n -formes différentielles à valeur dans E , p.17
R^∇	Tenseur de courbure associé à une connexion linéaire ∇ , p.18
L, R	Multiplication à gauche et à droite dans un groupe, p.18
$F(E)$	Fibré des bases associé au fibré vectoriel E , p.20
$SO(M)$	Fibré des bases orthonormées orientées associé à TM , p.20
ω	Connexion principale, p.20
H_p, V_p	Espace horizontal et espace vertical au point p , p.20
\bar{X}	Relevé horizontal d'un champ de vecteurs X , p.21
Ω	2-forme de courbure associée à une connexion principale ω , p.21

$\hat{\eta}$	Fonction C^∞ associée à un section lisse η (voir proposition 2.23), p.23
$\text{Spin}(M)$	Fibré donnant une structure spinorielle sur M , p.32
S	Fibré des spineurs, p.33
∇^S	Connexion linéaire associée à S , p.33
$\text{Span}_{\mathbb{R}}\{e_1, e_2\}$	Espace vectoriel réel engendré par e_1 et e_2 , p.33
•	Multiplication de Clifford, p.36
$\mathcal{C}(TM)$	Fibré de Clifford, p.36
D	Opérateur de Dirac, p.37
$\text{grad}(f)$	Gradient d'une fonction lisse f , p.38
$\text{div}(X)$	Divergence d'un champ de vecteurs C^∞ , p.38
Δ	Opérateur de Laplace, (voir définition 3.16 et 3.18), p.38,39
$L^2(S)$	Espace des sections de carré sommable du fibré des spineurs, p.44
AdS_n	Espace anti-de Sitter de dimension n
ϕ^*	Tiré en arrière par ϕ , p.54
C_p^+	Cône de lumière futur d'un point p , p.56

Bibliographie

- [1] M. Bañados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, *Black hole in three-dimensional spacetime*, Physical Review Letters **69** (1992), no. 13, 1849–1851, available at <https://arxiv.org/abs/hep-th/9204099>. ↑2, 49
- [2] M. Bañados, C. Teitelboim, J. Zanelli, and M. Henneaux, *Geometry of the 2+1 black hole*, Physical Review D **48** (1993), no. 4, 1506–1525, available at <https://arxiv.org/abs/gr-qc/9302012>. ↑2, 49
- [3] P. Bieliavsky, S. Detournay, M. Herquet, M. Rooman, and Ph. Spindel, *Global geometry of the 2+1 rotating black hole*, Physics Letters B **570** (2003), no. 3-4, 231–236, available at <https://arxiv.org/pdf/hep-th/0306293.pdf>. ↑49
- [4] P. Bieliavsky, S. Detournay, M. Rooman, and Ph. Spindel, *Noncommutative locally anti-de Sitter black holes*, 2005, pp. 17–33, available at <https://arxiv.org/pdf/math/0507157.pdf>. ↑49
- [5] P. Bieliavsky, S. Detournay, M. Rooman, and P. Spindel, *BTZ black holes, WZW models and noncommutative geometry*, 2005, available at <https://arxiv.org/pdf/hep-th/0511080.pdf>. ↑49
- [6] C. Chevalley, *The algebraic theory of spinors*, Columbia university press, 1954. ↑5, 6
- [7] E. Combet, *Introduction élémentaire à l'analyse spinorielle*, Publications du Département de mathématiques (Lyon) **4B** (1986), 1-33. ↑5, 8
- [8] A. Connes, *On the spectral characterization of manifolds*, Journal of Noncommutative Geometry **7** (2008). ↑1
- [9] S. Detournay, *Deformations of anti-de Sitter black holes*, PhD, 2006, <https://arxiv.org/pdf/hep-th/0611031.pdf>. ↑49
- [10] S. Deser and R. Jackiw, *Three-Dimensional Cosmological Gravity : Dynamics of Constant Curvature*, Annals Phys. **153** (1984), 405–416. ↑49
- [11] S. Deser, R. Jackiw, and G. 't Hooft, *Three-Dimensional Einstein Gravity : Dynamics of Flat Space*, Annals Phys. **152** (1984), 220. ↑49
- [12] S. D. Freed, *The Geometry of Dirac operators*, Preliminary Version, 1987, <https://web.ma.utexas.edu/users/dafr/DiracNotes.pdf>. ↑16
- [13] T. Friedrich, *Dirac Operators in Riemannian Geometry*, Graduate Studies in Mathematics, American Mathematical Society, 2000. ↑5, 16, 32, 43
- [14] S. Gutt, *Symplectic geometry*, Course at Université libre de Bruxelles. ↑16
- [15] K. Habermann, *The Dirac Operator on Symplectic Spinors*, Ann. Global Anal. Geom. **13** (1995), 155-168. ↑2, 75
- [16] A. W. Knap, *Representation Theory of Semisimple Groups : An Overview Based on Examples*, Princeton University Press, 1986. ↑66
- [17] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of Differential Geometry, Volume 1*, Wiley, 1963. ↑17, 20, 40
- [18] A. Mathew, *The Dirac operator*, Unpublished Notes, 2012, <http://math.uchicago.edu/~amathew/dirac.pdf>. ↑16
- [19] A. Strohmaier, *On Noncommutative and semi-Riemannian Geometry*, J.Geom.Phys. **56** (2006), 175-195, available at <https://arxiv.org/abs/math-ph/0110001>. ↑1

- [20] J. Wolf, *Essential self-adjointness for the Dirac operator and its square*, Indiana University Mathematics Journal **22** (1973). 143

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
Faculté des sciences

Place des sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/sc