

**École polytechnique de Louvain**

# **Modélisation des perturbations thermo-acoustiques à l'intérieur du tube de Rijke par un oscillateur de Van Der Pol**

**EPL21-492**

Auteur: **Martin MOREL**

Promoteur: **Dochain DENIS**

Lecteurs: **Denis DOCHAIN, François WIELANT, Benjamin VINCENT**

Année académique 2022–2023

Master [120] Ingénieur civil mécanicien

## Résumé

Les perturbations thermo-acoustiques dans les chambres de combustions constituent un phénomène complexe qui influence de manière significative la performance et la sécurité des systèmes mécaniques, notamment dans les applications de propulsion et de production d'énergie.

Le tube de Rijke permet de faciliter grandement la complexité de la modélisation de ces perturbations. Dans ce travail de fin d'étude, nous présentons un modèle visant à caractériser, prédire le comportement des oscillations de l'onde acoustique à l'intérieur du tube dans une optique futur de commande.



# Remerciements

Pour commencer, je tiens à remercier mon promoteur de travail de fin d'étude Denis Dochain pour ses conseils avisés et son expérience mais surtout pour son incroyable patience qu'il a pu faire preuve à mon égard et le temps qu'il m'a dédié.

Je souhaite également remercier François Wielant encore pour sa patience mais aussi pour l'aide qu'il a pu me fournir pour la maîtrise du modèle expérimental ainsi que sa présence.

Merci à ma famille qui m'a toujours soutenu dans toutes les étapes de ce travail qui m'a longtemps posé problème.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>7</b>
1.1	Contextualisation et motivations . . . . .	7
1.2	Plan du travail . . . . .	9
1.3	Inspiration de la recherche . . . . .	10
<b>2</b>	<b>Fondement scientifique</b>	<b>11</b>
2.1	Le critère de Rayleigh et les instabilités thermo-acoustiques . . . . .	11
2.2	Mécanisme du tube de Rijke . . . . .	13
2.2.1	Les lois de conservations . . . . .	13
2.2.2	La source de chaleur . . . . .	16
2.2.3	Linéarisation des équations du tube de Rijke . . . . .	17
2.2.4	Fréquence du tube de Rijke . . . . .	20
2.3	L'oscillateur de Van Der Pol et les cycles limites . . . . .	20
2.3.1	Description globale . . . . .	20
2.3.2	L'effet de la variation du coefficient de non-linéarité $\mu$ . . . . .	22
<b>3</b>	<b>Dispositif expérimental</b>	<b>24</b>
<b>4</b>	<b>Modélisation</b>	<b>30</b>
4.1	L'équation d'onde . . . . .	30
4.2	Paramétrisation de l'oscillateur de Van Der Pol . . . . .	31
4.3	Modélisation . . . . .	33
4.4	Choix de la valeur de $\mu$ . . . . .	37
4.5	Plusieurs oscillateurs de Van Der Pol en série . . . . .	38
<b>5</b>	<b>Validation</b>	<b>41</b>
5.1	Objectif du modèle . . . . .	41
5.2	Sélection des données de validation . . . . .	41
5.3	Comparaison et évaluation de la performance du modèle . . . . .	42

5.4	Sensibilité et analyse des incertitudes . . . . .	45
5.5	Amélioration du modèle . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Futurs travaux</b>	<b>48</b>
<b>7</b>	<b>Conclusion</b>	<b>49</b>
	<b>Appendices</b>	<b>50</b>
<b>A</b>	<b>Fiche technique du microphone</b>	<b>51</b>

# Table des figures

1.1	.....	9
2.1	Représentation du critère de Rayleigh $Ra$ , de la fluctuation de vitesse $u'$ et de la fluctuation de pression $p'$ le long du tube .....	12
2.2	Solution de Van Der Pol pour $\mu = 0.1$ .....	22
2.3	Diagramme de phase pour $\mu = 0.1$ .....	22
2.4	Solution de Van Der Pol pour $\mu = 1$ .....	22
2.5	Diagramme de phase pour $\mu = 1$ .....	22
2.6	Solution de Van Der Pol pour $\mu = 10$ .....	23
2.7	Diagramme de phase pour $\mu = 10$ .....	23
3.1	Résistance thermique .....	25
3.2	Montage expérimental UCL .....	25
3.3	Schéma du montage de l'UCL avec ses capteurs .....	26
3.4	Relevé de données sur l'interface LabView .....	28
3.5	Enregistrement de la variation de la pression converti en Pa .....	29
4.1	Solution de Van Der Pol pour $f_0 = 1Hz$ .....	32
4.2	Analyse spectrale pour $f_0 = 1Hz$ .....	32
4.3	Solution de Van Der Pol pour $f_0 = 10Hz$ .....	33
4.4	Analyse spectrale pour $f_0 = 10Hz$ .....	33
4.5	Solution de Van Der Pol pour $f_0 = 114Hz$ .....	33
4.6	Analyse spectrale pour $f_0 = 114Hz$ .....	33
4.7	Variation de la pression à l'emplacement du microphone .....	34
4.8	Chaleur à la source de chaleur $z = z_h$ .....	35
4.9	Diagramme de phase p par rapport à $dp/dt$ .....	36
4.10	Spectre de la pression modélisée .....	36
4.11	Variation de pression selon $\mu = 0.2, 1, 3, 10$ .....	37
4.12	Diagramme de phase selon $\mu = 0.2, 1, 3, 10$ .....	38
4.13	Spectre de la pression modélisée par deux oscillateurs de Van Der Pol .....	39

5.1	Variation de la pression du modèle . . . . .	42
5.2	Variation de la pression au micro . . . . .	42
5.3	Zoom sur une période du modèle . . . . .	43
5.4	Zoom sur une période des données expérimentales . . . . .	43
5.5	Spectre de la pression de l'enregistrement des données expérimentales	44
5.6	Spectre de la pression modélisée avec 4 oscillateurs de Van Der Pol	44
5.7	Test avec échelon de puissance décroissant . . . . .	46
5.8	Test avec échelon de puissance croissant . . . . .	46
A.1	. . . . .	52

# Chapitre 1

## Introduction

En 1859, le professeur de physique hollandais P.L Rijke a mené une expérience à l'aide d'un tube en verre, d'une grille métallique et d'un bec Bunsen. Une fois la grille montée en température, il s'est rendu compte qu'en enlevant la flamme du dessous du tube, un vrombissement se faisait entendre depuis le tube sans une quelconque intervention extérieure supplémentaire en générant ce qu'on sait maintenant être des perturbations thermo-acoustiques.

Aujourd'hui encore, cette expérience dans sa version la plus moderne est au coeur de la recherche dans les applications thermo-acoustiques.

### 1.1 Contextualisation et motivations

Dans l'industrie ainsi que dans de nombreuses applications modernes, le phénomène de perturbation acoustique est couramment observé. Celui-ci survient lorsqu'un transfert de chaleur et un champ de pression sont dynamiquement couplés. Ces deux mécanismes peuvent entrer en rétroaction, menant ainsi à des instabilités qui se traduisent par un cycle limite, associé ici à des oscillations de pression et de température généralement indésirables. On les observe notamment dans des fours, des chambres de combustion, des réacteurs de fusées et dans toutes autres applications où il y a combustion. Ces oscillations peuvent entraîner une perte d'efficacité et, dans certains cas, provoquer des dommages structurels lors de pics de pression ou de chaleur trop intenses. D'où l'importance majeure de limiter ces perturbations.

L'une des principales difficultés réside dans la modélisation de ces phénomènes, compte tenu de leur grande complexité. Les processus impliquent souvent de nombreuses espèces chimiques dues à la dynamique de la combustion, sans mentionner la géométrie parfois complexe des chambres de combustion.

C'est dans ce contexte que le tube de Rijke se révèle précieux pour la modélisation et la commande. Il permet de simplifier considérablement le problème, grâce à l'utilisation d'une résistance électrique qui déclenche la perturbation acoustique, évitant ainsi les complexités associées à la combustion. Néanmoins, nombre des problèmes de commande par rétroaction observés dans les instabilités de combustion se retrouvent également dans le tube de Rijke. De plus, ce tube est à la fois simple à concevoir pour une étude universitaire, peu coûteux et sans risques majeurs.

Dans le paysage industriel actuel, la gestion efficace des systèmes de combustion n'est pas seulement une question d'optimisation technique, mais il y a également une dimension économique cruciale. Les perturbations acoustiques, lorsqu'elles ne sont pas maîtrisées, peuvent entraîner des inefficacités opérationnelles, augmentant ainsi les coûts de production. De plus, les dommages structurels engendrés par ces instabilités peuvent mener à des temps d'arrêt imprévus, nécessitant des réparations onéreuses et la potentielle substitution d'équipements. Les industries dépendent donc d'une modélisation précise et de solutions efficaces pour éviter ces pertes financières et assurer une production rentable.

À ce jour, l'industrie et la communauté scientifique ont développé plusieurs méthodes pour étudier et traiter les perturbations acoustiques dans les systèmes de combustion. L'approche classique s'appuie sur la modélisation mathématique et la simulation numérique pour prévoir et comprendre les phénomènes en jeu. Des dispositifs comme les absorbeurs de pression, les amortisseurs de vibrations, ou encore les systèmes de contrôle actif sont régulièrement utilisés pour atténuer ces perturbations. Malgré ces avancées, ces méthodes ont leurs limites, notamment en termes de coût, d'efficacité ou de mise en œuvre dans des conditions réelles d'exploitation. C'est dans ce contexte qu'émerge la nécessité de rechercher des modèles alternatifs et innovants, comme le tube de Rijke, pour offrir des solutions plus simples, économiques et adaptables à de nombreuses applications.

Au-delà des implications directes sur la performance des systèmes, les perturbations acoustiques peuvent avoir des conséquences environnementales significatives. Une combustion inefficace, souvent liée à ces instabilités, peut entraîner une augmentation des émissions de gaz à effet de serre, ainsi que d'autres polluants atmosphériques. Ceci est préoccupant non seulement du point de vue du respect des normes environnementales et des possibles sanctions associées, mais également pour l'empreinte

écologique de l'entreprise. Dans un contexte mondial de plus en plus orienté vers la durabilité, il est impératif d'aborder ces phénomènes avec rigueur pour minimiser les impacts négatifs sur l'environnement.

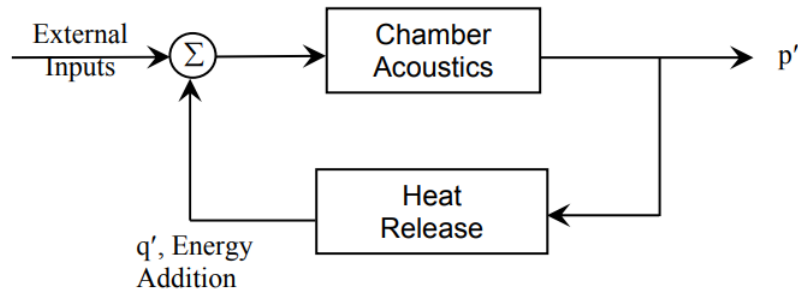


FIGURE 1.1

Le but de ce travail de fin d'étude est d'utiliser le modèle expérimental conçu à l'UCL pour valider une modélisation du tube de Rijke associée à un oscillateur de Van Der Pol, visant à représenter le phénomène de cycle limite lors du déclenchement des perturbations.

## 1.2 Plan du travail

Ce travail est segmenté en plusieurs chapitres couvrant les connaissances existantes sur le tubes de Rijke jusqu'à une modélisation de celui-ci.

- **Chapitre 2 : Fondement scientifique** : Ce chapitre couvre le fonctionnement du tube de Rijke et les équations le régissant. Il décrit aussi l'oscillateur de Van Der Pol sous plusieurs formes, son fonctionnement et son utilité dans le domaine de la dynamique des systèmes.
- **Chapitre 3 : Le dispositif expérimental** : Ce chapitre décrit le dispositif expérimental construit à l'UCL ainsi les données expérimentales qui en sont extraites.
- **Chapitre 4 : Modélisation** Ce chapitre définit le modèle combinant l'équation d'onde de la pression et l'oscillateur de Van Der Pol.
- **Chapitre 5 : Validation** Le modèle est validé dans ce chapitre en utilisant les données extraites à partir du modèle expérimental ainsi qu'un test d'échelonnement.
- **Futurs travaux** Ce chapitre décrit les travaux futurs pouvant être réalisés à partir de ce travail dans le but de pouvoir commander la dynamique du tube de Rijke.

- **Chapitre 7 : Conclusion** Ce chapitre conclut le travail en déterminant les possibilités d'utilisation du modèle dans un contexte de commande ainsi que les pistes d'améliorations.

### 1.3 Inspiration de la recherche

L'idée de ce travail est grandement inspiré de la thèse de doctorat "Modelling and analysis of multi-physics control systems" réalisée par Benjamin Vincent et plus précisément du 8ème chapitre abordant les perturbations thermo-acoustiques[16]. Il y décrit la modélisation du tube de Rijke ainsi que des pistes de commande. L'autre inspiration majeure est celle de la publication "Thermoacoustics and the Rijke Tube : experiments, identification and modeling" de Jonathan P.Epperlein, Bassam Bamieh et Karl J.Aström[7].

# Chapitre 2

## Fondement scientifique

Ce chapitre décrit les différents fondements scientifiques sur lesquels se base la modélisation du tube de Rijke ainsi que sa conception.

### 2.1 Le critère de Rayleigh et les instabilités thermo-acoustiques

Le critère de Rayleigh est un principe fondamental en thermo-acoustique qui donne un critère pour la croissance ou l'atténuation des ondes thermo-acoustiques dans un système. Il joue un rôle clé dans la compréhension de la stabilité de divers systèmes thermiques, notamment dans les moteurs à combustion, où les instabilités thermo-acoustiques peuvent causer de graves problèmes.

Le critère de Rayleigh peut être énoncé comme le fait qu'un processus périodique de compression et de dilatation d'un fluide est instable si, sur un cycle complet, il y a plus de chauffage pendant les phases de compression que de refroidissement pendant les phases de dilatation.

Cela revient à évaluer l'intégrale :

$$R = \int_0^T p'q' dt \quad (2.1)$$

avec  $p'$  [Pa/s] la perturbation de la pression et  $q'$  [J/(m<sup>3</sup>s)] la perturbation de la

fluctuation de la chaleur ajoutée par unité de volume ce qui donne donc que le produit est une énergie par quantité de volume. Si cette intégrale est positive sur un cycle complet, alors la perturbation thermo-acoustique croîtra, et si elle est négative, la perturbation s'atténuera.

L'application du critère de Rayleigh est utilisé de deux manières dans le cas du tube de Rijke. Premièrement, il décrit simplement la raison de la transition dans un état de perturbation thermo-acoustique lorsque l'on allume la source de chaleur. Mais en plus de ça, il justifie aussi l'emplacement de la résistance thermique. En effet, comme on peut le voir sur la figure 2.1 ci-dessous, représentant un tube de Rijke avec  $L$  la hauteur du tube, on voit que le critère de Rayleigh tracé ici en noir n'est positif que dans la partie inférieure du tube. On en déduit donc que positionner la source de chaleur dans la partie inférieure du tube est essentiel pour pouvoir amplifier l'onde acoustique. La dernière remarque que l'on peut extraire du critère de Rayleigh est qu'afin de pouvoir maximiser les perturbations thermo-acoustiques, il faut que la résistance soit située au maximum positif du critère de Rayleigh c'est à dire à la hauteur  $z = L/4$  ce qui correspond bien au montage expérimental utilisé à l'UCL.

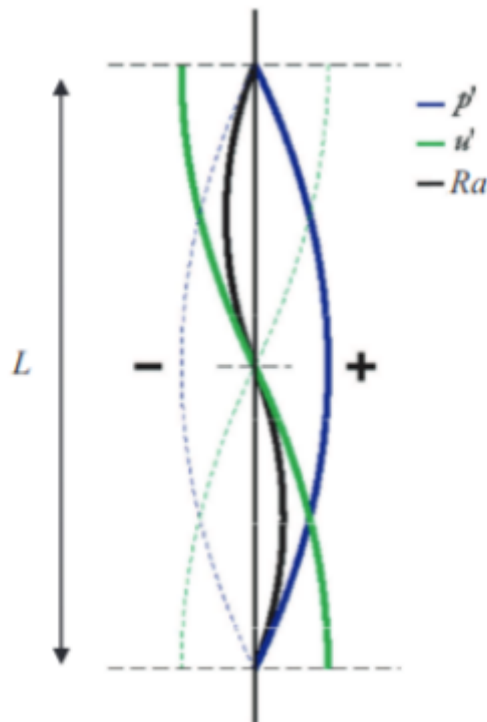


FIGURE 2.1 – Représentation du critère de Rayleigh  $Ra$ , de la fluctuation de vitesse  $u'$  et de la fluctuation de pression  $p'$  le long du tube

Il est important de noter que le critère de Rayleigh est une condition nécessaire mais pas suffisante pour générer une instabilité thermo-acoustique. En effet, afin de contrecarrer les différentes pertes acoustiques et thermiques aux parois du tube ainsi que les dissipations visqueuses, il faut que le gradient de température soit aussi suffisant.

## 2.2 Mécanisme du tube de Rijke

La physique impliquée dans le tube de Rijke est encore assez méconnue. Certaines explications ont été fournies pour expliquer le caractère périodique des pics de pression obtenus à partir d'une source constante de chaleur[7]. Celles-ci expriment que c'est le déplacement d'air dû à la convection naturelle qui crée une variation périodique de la pression amplifiée par l'apport de chaleur mais ces théories n'ont pas été démontrées et il ne reste que des suppositions du à la difficulté d'obtenir des mesures précises afin de quantifier les effets physiques en jeu.

Une autre explication avancée ,et celle qui est considérée ici, est que lors du fonctionnement du tube, la convection naturelle crée un flux d'air en raison de la flottabilité de l'air et donc du changement de densité grâce à la source de chaleur. Lorsque le flux d'air et la dynamique de l'acoustique sont couplés, la couche limite formée autour de la résistance par l'apport de chaleur est déstabilisé par la convection naturelle.[16]

A noter qu'on peut remarquer l'aspect primordial de la convection naturelle pour le déclenchement des perturbations thermo-acoustiques car dans le cas de tubes de Rijke horizontaux nous sommes obligés de forcer ce déplacement d'air comme le montre de nombreuses expériences facilement trouvables sur internet où pour une résistance chauffée, verticalement on entend le bruit de la perturbation tandis que horizontalement, le tube doit être déplacé dans l'air pour y induire le déplacement d'air et finalement que la perturbation thermo-acoustique soit déclenchée.

### 2.2.1 Les lois de conservations

La dynamique du système est décrite par les équations de conservation de la masse, la conservation de la quantité de mouvement et la conservation de l'énergie. Ces lois de conservation sont non-linéaires et négligent la viscosité de l'air. Le système est décrit unidimensionnellement dans la direction du tube selon une variable  $z$

ainsi que par le temps  $t$ .

La conservation de la masse est exprimée en fonction de la densité  $\rho(t, z)$  et la vitesse du fluide dans le sens du tube  $v(t, z)$  :

$$\frac{d\rho}{dt} + \frac{d}{dz}(\rho v) = 0 \quad (2.2)$$

La conservation de la quantité de mouvement est exprimée en fonction de  $\rho(t, z)$  et  $v(t, z)$  ainsi que de la pression isotropique de l'air dans le tube  $p(t, z)$  et finalement de l'accélération gravitationnelle  $g = 9.81m/s^2$  :

$$\frac{d(\rho v)}{dt} + \frac{d}{dz}(\rho v^2 + p) = -\rho g \quad (2.3)$$

- Avec le terme  $\frac{d}{dz}(\rho v^2 + p)$  représentant la convection du fluide
- Et le terme de  $-\rho g$  représentant la force gravitationnelle lié à la convection naturelle

Finalement, l'équation de la conservation de l'énergie est donnée à l'aide de  $\rho(t, z)$ ,  $v(t, z)$  et  $p(t, z)$  ainsi que l'énergie total  $e(t, z)$  ainsi que le flux de chaleur  $j_q$  :

$$\frac{d(\rho e)}{dt} + \frac{d}{dz}(\rho v e + v p + j_q) = -\rho g + \rho q \quad (2.4)$$

- Avec le terme  $\frac{d}{dz}(\rho v e)$  donnant la convection de l'énergie interne dans le fluide
- Avec le terme  $\frac{d}{dz}(v p)$  étant le travail effectué par la pression
- Avec le terme  $\frac{d}{dz}(j_q)$  la variation spatiale du flux convectif de chaleur est donnée par l'expression suivante :  $j_q = \lambda \frac{d}{dz}(\frac{1}{T})$
- Avec le terme  $\rho q$  étant le terme de la source de chaleur externe

L'énergie totale  $e(t, z)$  est définie par la somme de l'énergie interne et l'énergie cinétique  $e = \frac{1}{2}v^2 + u$  ce qui permet d'obtenir la conservation de l'énergie selon u l'énergie interne :

$$\frac{d(\rho u)}{dt} + \frac{d}{dz}(\rho v u + j_q) = -p \frac{dv}{dz} + \rho q \quad (2.5)$$

Et pour terminer la dernière forme de la conservation décrivant le système est celle utilisée à partir de l'entropie et de l'équation de Gibbs avec  $T(t, z)$  et  $s(t, z)$  respectivement la température de l'air dans le tube et l'entropie de l'air dans le tube :

$$\frac{d(\rho s)}{dt} + \frac{d}{dz}\left(\frac{j_q}{T}\right) = j_q \frac{d}{dz}\left(\frac{1}{T} + \frac{\rho}{T} q\right) \quad (2.6)$$

Toutes ces équations peuvent être résolues en choisissant 3 variables d'état entre  $\rho(z, t)$ ,  $v(t, z)$ ,  $T(t, z)$ ,  $s(t, z)$ ,  $u(t, z)$  le tout complété par la loi des gaz parfaits pour connecter la pression et l'énergie interne :

$$\rho u = \frac{c_v}{R} p \quad (2.7)$$

Avec la chaleur spécifique isochore  $c_v$  et la constante des gaz parfaits  $R$ .

Pour terminer la définition de ce système d'équations aux dérivées partielles, il faut encore les conditions initiales et les conditions frontières tel que :

Conditions initiales :

- $\rho(0, z) = \bar{\rho}$
- $T(0, z) = \bar{T}$
- $v(0, z) = 0$

Conditions frontières :

- $\rho(t, 0) = \bar{\rho}$
- $T(t, 0) = \bar{T}$
- $v(t, 0) = 0$
- $p(t, 0) = \bar{p}$
- $p(t, L) = \bar{p}$
- $\frac{dT}{dz}(t, L) = 0$

## 2.2.2 La source de chaleur

L'autre partie importante à considérer est celle de la source de chaleur. Elle se base sur l'analogie de la loi de King exprimant la tension dans un anémomètre à fil chaud par rapport à l'écoulement de l'air ainsi que sur le modèle empirique proposé par Heckl pour adapter cette loi au tube de Rijke afin de décrire le transfert de chaleur entre un fil chaud cylindrique à travers un flux d'air perpendiculaire.[8][9] Ce modèle est évidemment valable uniquement pour un tube de Rijke disposant d'une résistance électrique comme source de chaleur.

L'approximation de Heckl renseigne donc que à l'endroit de la résistance la source de chaleur sera égale à :

$$Q_h = l_w(\kappa + \kappa_v\sqrt{|v|})(T_w - T_a) \quad (2.8)$$

Avec  $Q_h$  la chaleur libérée au flux d'air,  $l_w$  la longueur du fil composant la résistance,  $\kappa$  la conductivité thermique de l'air,  $v$  la vitesse de l'air,  $T_w$  la température du fil et  $T_a$  la température de l'air environnant le fil. La constante  $\kappa_v$  est définie par Heckl de manière empirique comme :

$$\kappa_v = 2\sqrt{\pi\kappa c_v \bar{\rho}(d_w/2)} \quad (2.9)$$

Où  $c_v$  est la chaleur spécifique isochore,  $\bar{\rho}$  la densité moyenne de l'air et  $d_w$  le diamètre du fil ce qui donne finalement l'équation de la chaleur comme :

$$Q_h = l_w(\kappa + 2\sqrt{\pi\kappa c_v \bar{\rho}(d_w/2)}|v|)(T_w - T_a) \quad (2.10)$$

Cette équation décrit donc l'énergie constante à la source de chaleur. Cependant cette formule ne prend pas en compte les variations dynamiques. Or, au vu de la variation de la vitesse de l'air, il y a d'importants effets dynamiques à considérer surtout que le transfert dynamique de la chaleur vont beaucoup influencer les oscillations de la pression acoustique à l'intérieur du tube. Lors de l'apport de chaleur du fil chaud vers le gaz froid, la couche limite se formant autour du fil va agir comme un effet de retard entre la libération de la chaleur et le transfert à l'air.

On va donc avoir un retard du premier ordre induit par cette couche d'air autour du fil. Ce retard va être donné par la constante de temps  $t_{hr}$  tel que :

$$t_{hr} = 0.2 \frac{d_w}{\bar{v}} \quad (2.11)$$

A l'aide de ce retard on peut définir  $\dot{Q}$  tel que :

$$\dot{Q} = \frac{Q_h(t) - Q(t)}{t_{hr}} \quad (2.12)$$

Où  $Q_h$  est dépendant du temps à cause de la variation temporelle de la vitesse.

Pour pouvoir modéliser le terme de source de chaleur, on va considérer que celle-ci est concentrée sur un espace très petit de telle manière qu'on puisse l'approximer par un delta de Dirac centré autour  $z = z_h = L/4$  ce qui donne l'équation :

$$q(t, z) = \frac{1}{A} Q(t) \delta(z - z_h) \quad (2.13)$$

On remarque que ce modèle néglige les pertes d'énergie qui seraient majoritairement dues au transfert de chaleur radiatif des fils chauffés ainsi que des pertes de chaleur considérées à la paroi du tube. De plus, le modèle de King décrit le transfert de chaleur pour un fil linéaire mais notre application expérimentale du tube de Rijke dispose d'un fil en bobine ce qui a une influence sur la géométrie de la couche limite et donc sur le transfert de chaleur.

### 2.2.3 Linéarisation des équations du tube de Rijke

Maintenant que les équations définissant le fonctionnement du tube ont été clairement définies, il faut s'intéresser à comment pouvoir commander l'état du tube. Le modèle étant toujours trop compliqué pour un objectif de commande, on va donc linéariser les équations de conservation obtenues précédemment. La linéarisation de ce système d'équations présente de nombreux avantages :

- La simplification des équations à dérivées partielles

- Cela permet d'analyser la stabilité du système autour du point d'équilibre
- On peut analyser les différents modes d'oscillations dans l'acoustique du tube
- Cela facilite l'analyse fréquentielle par la transformée de Laplace
- Cela permet de se concentrer sur les perturbations du tube et pas sur l'ensemble de l'état du tube

Afin de linéariser les équations de conservation, on va donc s'intéresser aux perturbations autour d'un état d'équilibre en supposant les perturbations uniquement selon l'axe  $z$ . On peut définir l'état d'équilibre par les variables à l'équilibre :

- $\bar{\rho}$  la densité à l'équilibre
- $\bar{p}_0$  la pression à l'équilibre
- $\bar{T}_0$  la température à l'équilibre
- $\bar{v}_0$  la vitesse à l'équilibre

On peut ensuite définir les fluctuations autour de l'équilibre par :

- $\tilde{\rho}$  la fluctuation de la densité
- $\tilde{p}$  la fluctuation de la pression
- $\tilde{T}$  la fluctuation de la température
- $\tilde{v}$  la fluctuation de la vitesse

En combinant les deux on obtient finalement l'état global du système comme :

- $\rho(t, z) = \bar{\rho} + \tilde{\rho}(t, z)$
- $p(t, z) = \bar{p} + \tilde{p}(t, z)$
- $T(t, z) = \bar{T} + \tilde{T}(t, z)$
- $v(t, z) = \bar{v} + \tilde{v}(t, z)$

Ces approximations ne sont valables que parce que l'on considère de faibles oscillations. On peut donc remplacer ces expressions dans les équations de conservation obtenues plus tôt et on obtient les équations linéarisées :

**La conservation de la masse linéarisée :**

$$\frac{d\tilde{\rho}}{dt} = -(\bar{v}\frac{d\tilde{\rho}}{dz} + \bar{\gamma}\bar{p}\frac{d\tilde{v}}{dz}) \quad (2.14)$$

**La conservation de la quantité de mouvement linéarisée :**

$$\frac{d\tilde{v}}{dt} = -\left(\bar{v}\frac{d\tilde{v}}{dz} + \frac{1}{\bar{\rho}}\frac{d\tilde{p}}{dz}\right) \quad (2.15)$$

**La conservation de l'énergie linéarisée :**

$$\frac{d\tilde{p}}{dt} = -\left(\gamma\bar{p}\frac{d\tilde{v}}{dz} + \bar{v}\frac{d\tilde{p}}{dz}\right) + \bar{\gamma}\tilde{q} \quad (2.16)$$

Le système d'équations linéarisées peut être rassemblé sous la forme matricielle suivante :

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{v} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} \bar{v} & \gamma\bar{\rho} & 0 \\ 0 & \bar{v} & 1/\bar{\rho} \\ 0 & \gamma\bar{p} & \bar{v} \end{pmatrix} \frac{d}{dz} \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{v} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{\gamma}\tilde{q} \quad (2.17)$$

Avec  $\bar{\gamma} = \gamma - 1$ .

Le dernier terme manquant est celui de  $\tilde{q}$ . Pour ce faire, on va utiliser chacune des expressions linéarisées de  $\rho, v, T$  ainsi que la loi des gaz parfaits qui les lie  $T = p/(\rho R)$  et les injecter dans  $Q_h = \bar{Q}_h + \tilde{Q}_h$  ce qui va donner :

$$\tilde{Q}_h = \begin{pmatrix} f(\bar{v}\frac{\bar{T}}{\bar{\rho}}} & f'(\bar{v})(T_w - \bar{T}) & h(\bar{v})\frac{\bar{T}}{\bar{\rho}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{\rho} \\ \tilde{v} \\ \tilde{p} \end{pmatrix} \quad (2.18)$$

Avec  $f(v) = l_w(\kappa + \kappa_v\sqrt{|v|})$ . Les transferts de chaleur étant grandement dominés par le terme de la vitesse on aura donc finalement :

$$\tilde{Q}_h = f'(\bar{v})(T_w - \bar{T})\tilde{v} \quad (2.19)$$

## 2.2.4 Fréquence du tube de Rijke

La fréquence fondamentale  $f_0$  du tube de Rijke est décrite en fonction de la vitesse du son  $c = 343m/s$  ainsi que la longueur du tube qui pour notre étude est de  $L = 1,5m$ , par la formule :

$$f_0 = \frac{c}{2L} \quad (2.20)$$

On a donc une longueur d'onde  $\lambda = 2.L = 3m$

## 2.3 L'oscillateur de Van Der Pol et les cycles limites

La proposition de ce travail est de pouvoir utiliser l'oscillateur de Van Der Pol afin de modéliser le cycle limite apparaissant lorsque le tube de Rijke génère des perturbations thermo-acoustiques.

### 2.3.1 Description globale

Un cycle limite dans un système dynamique continu est une orbite périodique isolée qui est invariante sous l'évolution du système. Cela signifie qu'il s'agit d'une trajectoire fermée et non-triviale dans l'espace de phase, où tout point sur cette trajectoire évolue de manière périodique avec le temps. De plus, cette trajectoire est isolée en ce sens qu'il n'y a pas d'autres orbites périodiques dans un voisinage arbitrairement petit de celle-ci. La nature des trajectoires qui approchent le cycle limite (convergence ou divergence) dépend de la stabilité du cycle, et ces propriétés peuvent être essentielles dans l'analyse des oscillations naturelles et de la résonance.

L'oscillateur de Van Der Pol est un parfait exemple d'un cycle limite. C'est un type d'oscillateur non-linéaire avec une résonance auto-entretenue, décrit par l'équation différentielle du second ordre :

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + x(t) = \frac{dx}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t)\mu(1 - x^2(t)) \quad (2.21)$$

Ceci est la forme libre de l'oscillateur de Van Der Pol avec  $x(t)$  l'état du système et  $\mu \in \Re$  un paramètre définissant la non-linéarité de l'oscillateur. Le résultat de cette

équation est un cycle limite stable où l'amplitude des oscillations est indépendante des conditions initiales dû aux changements de variables effectués afin d'obtenir l'équation adimensionnelle.

On peut aussi obtenir un oscillateur de Van Der Pol forcé à l'aide d'une entrée  $u(t)$  tel que :

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + x(t) = \frac{dx}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t)\mu(1 - x^2(t)) + u(t) \quad (2.22)$$

### 2.3.2 L'effet de la variation du coefficient de non-linéarité

$\mu$

Pour l'oscillateur de Van Der Pol, lorsque l'on fait varier  $\mu$  on voit que lorsque  $\mu < 1$  la trajectoire tend vers un cycle limite elliptique :

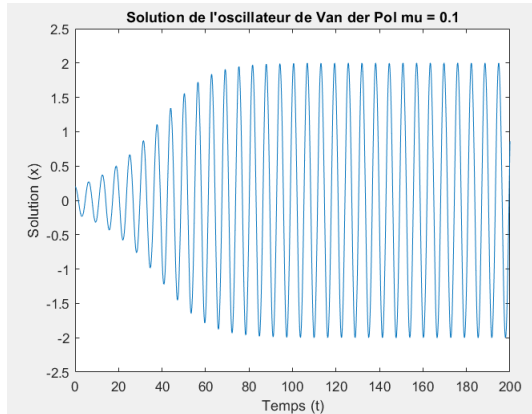


FIGURE 2.2 – Solution de Van Der Pol pour  $\mu = 0.1$

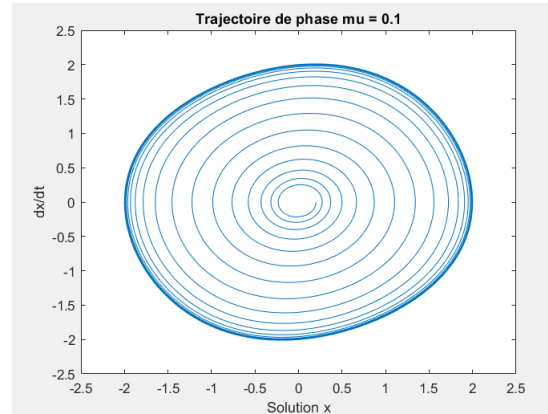


FIGURE 2.3 – Diagramme de phase pour  $\mu = 0.1$

Lorsque  $\mu = 1$ , on peut voir que la trajectoire tend vers

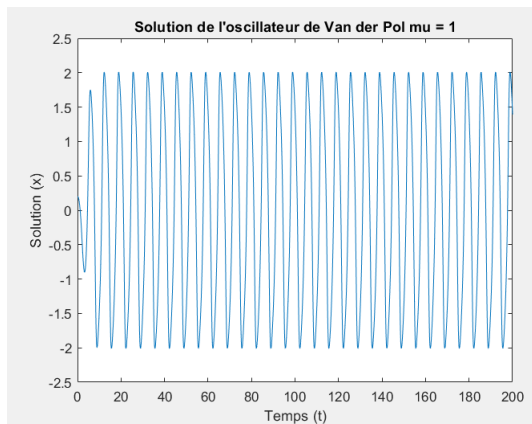


FIGURE 2.4 – Solution de Van Der Pol pour  $\mu = 1$

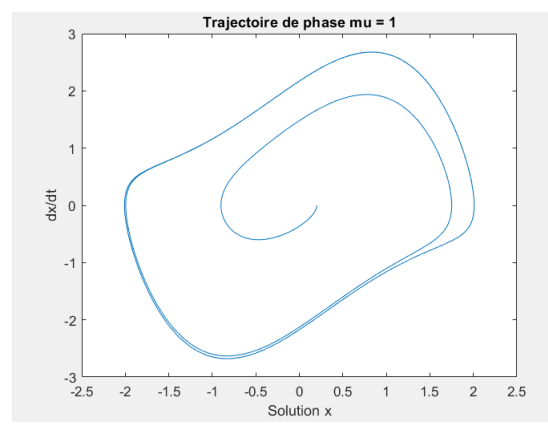


FIGURE 2.5 – Diagramme de phase pour  $\mu = 1$

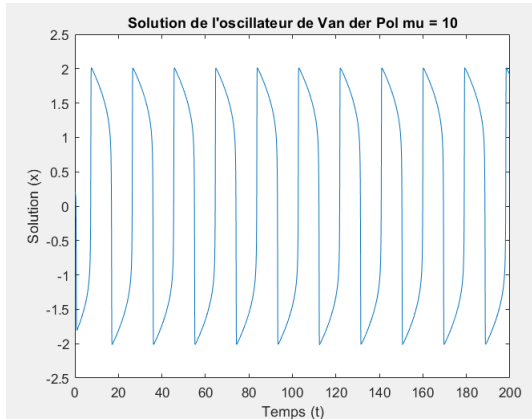


FIGURE 2.6 – Solution de Van Der Pol pour  $\mu = 10$

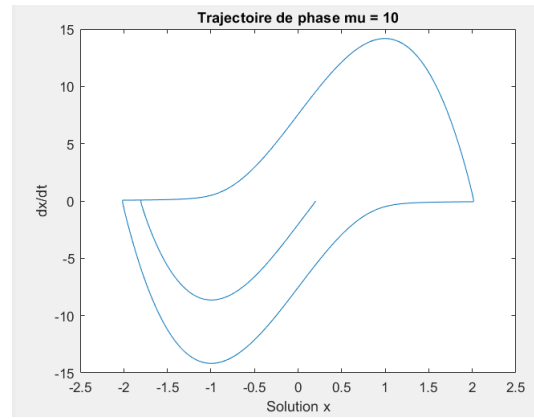


FIGURE 2.7 – Diagramme de phase pour  $\mu = 10$

**La bifurcation de Hopf** est un concept primordial pour la dynamique des systèmes non-linéaires. Elle décrit la transition d'un mécanisme d'un point d'équilibre stable vers un équilibre instable ce que l'on peut traduire par l'apparition d'un cycle limite.

Dans l'oscillateur de Van Der Pol, on observe cette bifurcation selon le terme de non-linéarité  $\mu(1 - x^2)\frac{dx}{dt}$  par l'analyse de valeur de  $\mu$  comme vu précédemment.

- $\mu = 0$ , l'oscillateur se réduit à un oscillateur harmonique traduit par une trajectoire sinusoïdale.
- $\mu$  **positif mais faible**, le point d'équilibre à l'origine est conservé et le système est asymptotiquement stable donc il retournera lentement à l'équilibre malgré une faible perturbation.
- $\mu > 1$ , le point d'équilibre est toujours présent jusqu'à une valeur critique de  $\mu$  à partir de laquelle un cycle limite va apparaître autour de l'origine qui se traduira par une oscillation stable autour de l'origine.
- $\mu$  **devient très grand**, le cycle limite domine la dynamique de l'oscillateur et converge très vite vers ces oscillations.

# Chapitre 3

## Dispositif expérimental

Ce travail se base sur un dispositif expérimental du tube de Rijke conçu à l'UCL dans le département d'ingénierie mathématique de l'EPL dans le cadre de recherche menée par Benjamin Vincent, François Wielant, Nicolas Hudon, Laurent Lefèvre et Denis Dochain.[17] Le montage se compose d'un tube vertical en borosilicate d'une longueur  $L=1.5\text{m}$ , d'un diamètre intérieur et extérieur de respectivement 80mm et 83.5mm, le tout monté sur un cadre en aluminium.

La résistance thermique, quant à elle, est positionnée à une hauteur de  $L/4$  c'est à dire à 37.5cm depuis l'extrémité inférieur du tube. Cette résistance a été le sujet de nombreuses tentatives résultant finalement à 3 bobines de fil de nichrome agencées comme on peut le voir sur les photos 3.1 et 3.2. Les fils métalliques mesurent chacun  $l_w = 1.5\text{m}$  pour un diamètre  $d_w=0.4\text{mm}$  et une impédance linéaire de  $\Omega_w$ . Le diamètre de bobinage de chacune des bobines est  $D_w = 5\text{mm}$ . Ce montage permet d'obtenir un gradient de température suffisant pour pouvoir déclencher des perturbations thermo-acoustiques tout en étant suffisant large pour que les déformations ne provoquent pas de court-circuit lorsque que les fils montent en température. A ce moment-là, la température mesurée autour de 528K. La résistance est alimentée par une alimentation électrique (Elektro–Automatik PSI 5080–20A) fournissant un courant  $I_w = 11.5\text{A}$  pour une tension  $V_w=17.86\text{V}$  ce qui résulte en une puissance de 205W.



FIGURE 3.1 – Résistance thermique

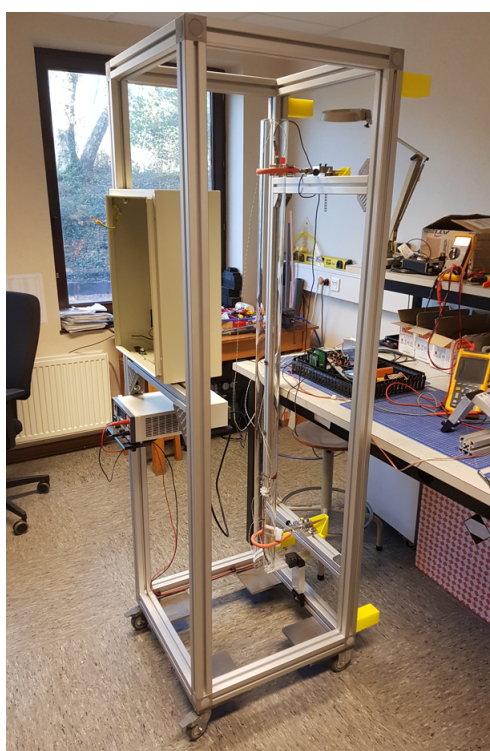


FIGURE 3.2 – Montage expérimental UCL

Le montage dispose de plusieurs capteurs. Tout d'abord, pour les mesures de pression, un microphone ABM-707-RC est positionné à l'extrémité supérieure du tube. Le montage dispose aussi de 4 thermocouples le long du tube. Le premier est situé à l'ouverture inférieure du tube, le second est situé au centre de la résistance thermique, la troisième est située juste au-dessus la résistance tandis que la dernière est située à l'extrémité supérieure du tube. Chacun de ces capteurs servent à mesurer la température de l'air à travers le tube.

En plus de ces différents capteurs, le montage dispose aussi d'un haut-parleur Visaton FR12 4 Ohm situé à l'extrémité inférieure du tube pouvant donner une pression acoustique. Ce haut-parleur est agencé avec un amplificateur Max9737 EVKIT pour convertir le signal d'entrée fourni par un micro-contrôleur NI myRIO 1950.

La commande est donc régie par ce micro-contrôleur connecté à un ordinateur fournissant une interface graphique de commande et de supervision à l'aide de LabView.

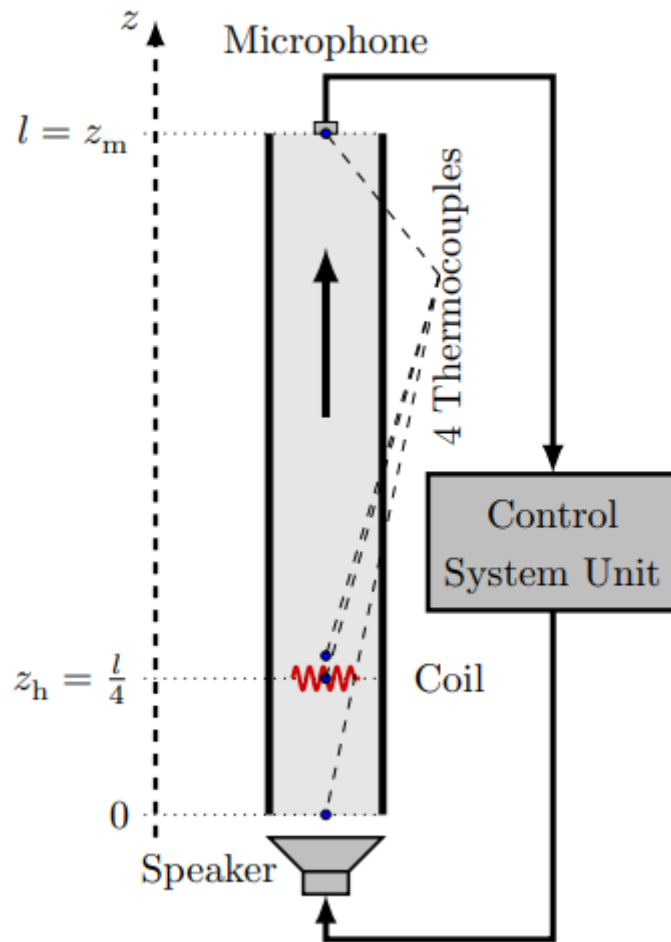


FIGURE 3.3 – Schéma du montage de l'UCL avec ses capteurs [16]

Les paramètres physiques utilisés dans ces expérimentations sont les suivants :

Symboles utilisés	Valeurs	Unités	Description
$\bar{\rho}$	1.204	$Kg.m^{-3}$	Densité moyenne de l'air
$\bar{p}$	$10^5$	$Pa$	Pression moyenne de l'air
$\bar{T}$	298.15	$K$	Température moyenne de l'air
$\chi_s$	$7.04 * 10^{-6}$	$Pa^{-1}$	Compressibilité adiabatique de l'air
$c$	343	$m.s^{-1}$	Vitesse du son
$C_v$	718	$J.Kg^{-1}$	Capacité thermique isochore
$R$	290	$J.Kg^{-1}.K^{-1}$	Constante de gaz parfait
$\gamma$	1.4	/	ratio adiabatique
$\kappa$	0.0257	$W.m^{-1}.K^{-1}$	Conductivité thermique de l'air
$\kappa_v$	0.1181	$W.m^{-3/2}.K^{-1}.s^{1/2}$	Fonction de constante des propriétés fil
$L$	1.5	$m$	Hauteur du tube
$D$	0.073	$m$	Diamètre interne du tube
$l_w$	1	$m$	Longueur du fil
$d_w$	0.0006	$m$	Diamètre du fil
$\Omega_w$	1.73	$\Omega.m^{-1}$	Impédance linéique du fil
$D_w$	0.005	$m$	Diamètre du bobinage du fil
$z_h$	$L/4$	$m$	Hauteur de la résistance thermique
$z_m$	$L$	$m$	Hauteur du microphone
$I_w$	11.5	$A$	Courant fourni
$V_w$	17.83	$V$	Tension fournie

Les données sont extraites du tube sous forme graphique et ce sont donc finalement une série de températures et une variation de pression enregistrées sous forme de tension au haut-parleur.

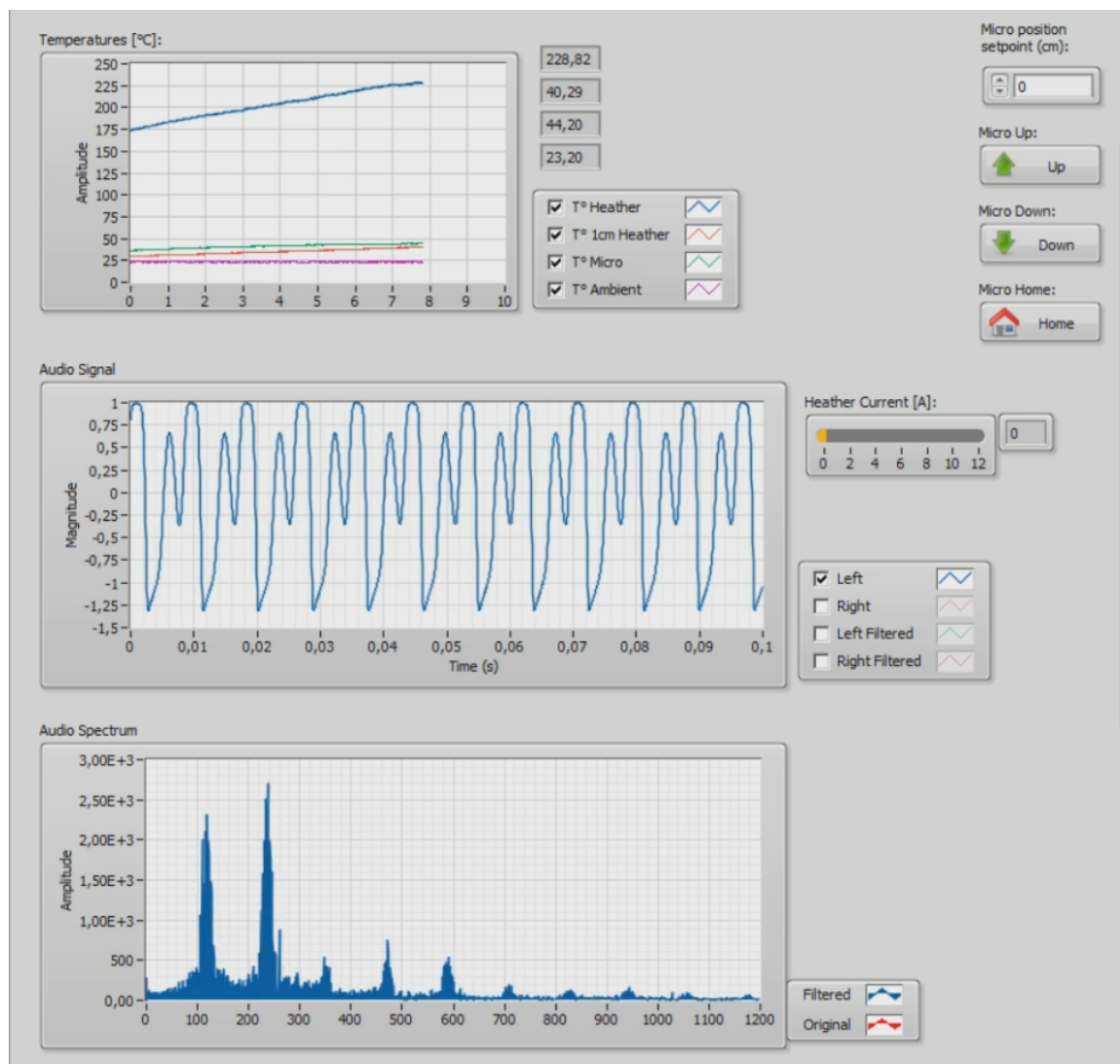


FIGURE 3.4 – Relevé de données sur l’interface LabView

Finalement, un enregistrement de l’utilisation du tube sous forme de fichier .WAV peut être utilisé sur MATLAB afin de pouvoir être analysé et comparé avec une modélisation. A noter que afin de comparer avec notre modèle le relevé de la tension doit être converti de Volt en Pascal, ce que l’on peut réaliser à l’aider de la fiche technique du microphone (voir Appendice ). On trouve finalement une conversion de 9.81mV pour un Pascal.

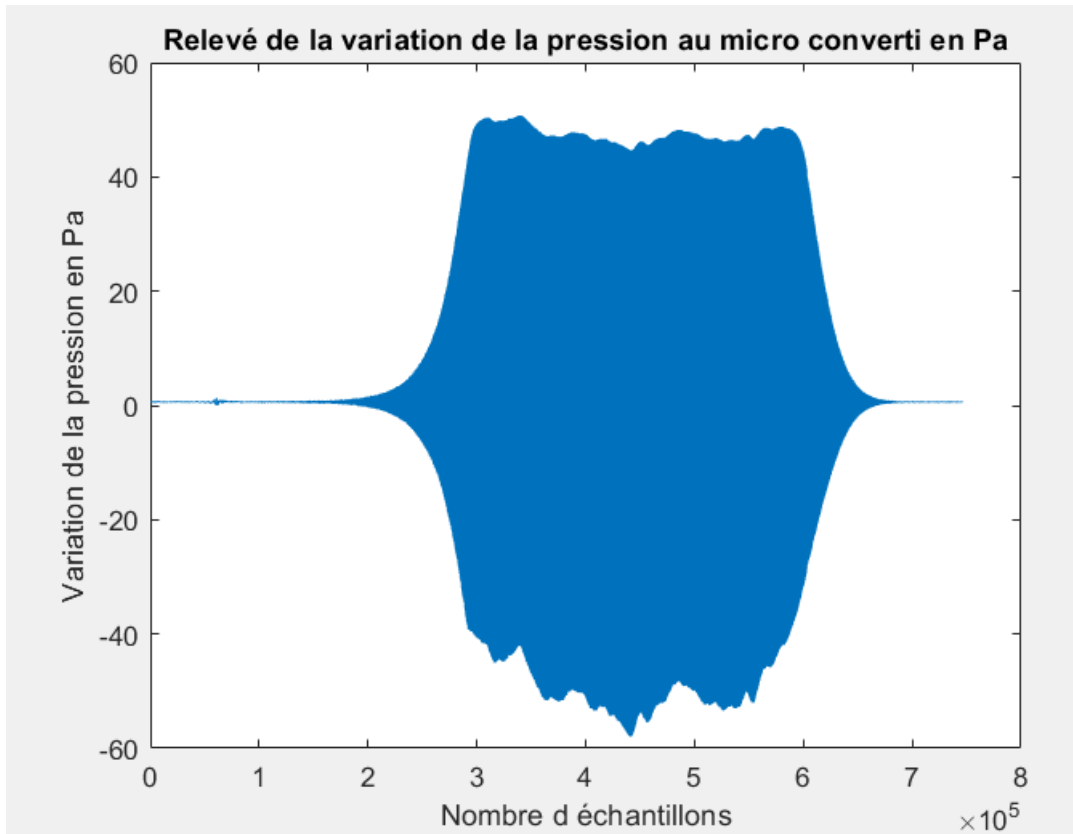


FIGURE 3.5 – Enregistrement de la variation de la pression converti en Pa

# Chapitre 4

## Modélisation

Ce chapitre décrit le modèle utilisé afin d'associer la variation de la pression du tube de Rijke à l'aide d'un oscillateur de Van Der Pol.

La modélisation du tube de Rijke dans une optique de commande est issue de la linéarisation des équations de conservation citées dans les chapitres précédents. Le modèle à partir duquel on va partir est celui d'un modèle d'équation d'onde extrêmement simplifié qui donne la variation de pression le long du tube selon l'axe  $z$  et le temps. A cette équation d'onde, on va ajouter un oscillateur de Van Der Pol paramétré pour correspondre le plus possible à la réalité. Comme on peut s'y attendre avec un modèle aussi simplifié, on s'éloigne beaucoup d'une description physique du problème. En effet, on ne considère plus ici la densité, la vitesse et la température, seul le comportement de la variation de la pression qu'on observe dans le tube est modélisé. Dans ce modèle, la source de chaleur n'est ici qu'une impulsion initiale à un oscillateur de Van Der Pol qui ensuite va être entretenu selon ses caractéristiques intrinsèques.

### 4.1 L'équation d'onde

Toutes les expériences réalisées autour du tube de Rijke ont pu démontrer que les vitesses des perturbations acoustiques sont très faibles par rapport à la vitesse du son impliquant un nombre de Mach faible ( $Ma < 0.3$ ). On peut donc finalement représenter l'équation de la variation de la pression comme :

$$\frac{d^2\tilde{p}}{dt^2} - \tilde{c}^2 \frac{d^2\tilde{p}}{dz^2} = (\gamma - 1) \frac{d\tilde{q}}{dt}(t, z) \quad (4.1)$$

On voit bien que l'équation concerne uniquement la partie fluctuante de la pression et de la chaleur c'est pourquoi on doit adapter les conditions initiales ainsi que les conditions frontières du modèle qui étaient définies pour le modèle général. On a donc maintenant :

- $\tilde{p}(t, L) = 0$
- $\tilde{p}(t, 0) = 0$
- $\tilde{p}(0, z) = 0$

## 4.2 Paramétrisation de l'oscillateur de Van Der Pol

Pour pouvoir bien définir le modèle, il est important de pouvoir bien maîtriser l'oscillateur de Van Der Pol. On va donc utiliser une forme légèrement différente de celle généralisée en ajoutant une pulsation  $\omega_n$  agissant sur l'effet de retour de l'oscillateur afin de pouvoir commander la fréquence de l'oscillateur.

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) + \omega_n^2 x(t) = \frac{dx}{dt}(t) = \frac{dx}{dt}(t) \mu \left(1 - \left(\frac{x(t)}{x_c}\right)^2\right) + u(t) \quad (4.2)$$

On peut réarranger l'équation puis la résoudre sous forme d'un système dépendant de la chaleur afin de pouvoir la résoudre sur MATLAB. On va approximer  $q_c$  par  $q_c = \frac{1}{A} l_w \kappa \Delta T$  avec  $A$  la section de la résistance,  $l_w$  la longueur du fil,  $\kappa$  conductivité thermique de l'air et  $\Delta T = (T_{résistance} - T_{air})$ . La température à la résistance est trouvé à partir des relevés expérimentales. L'équation devient donc :

$$\frac{d^2q}{dt^2}(t) = \frac{dq}{dt}(t) \mu \left(1 - \frac{q(t)^2}{q_c}\right) - \omega_n^2 q(t) \quad (4.3)$$

En posant  $y_1 = q(t)$  et  $y_2 = \frac{dq(t)}{dt}$ , on a le système :

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 \quad (4.4)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_2\mu(1 - y_1^2) - \omega_n^2 y_1 \quad (4.5)$$

On se rend compte qu'à l'aide de la forme modifiée de l'oscillateur on peut assez facilement modifier la fréquence de notre oscillateur en convertissant la fréquence désirée en fréquence angulaire par  $\omega_n = 2\pi f_0$  où  $f_0$  est la fréquence fondamentale que l'on désire obtenir. On peut le confirmer sur MATLAB tout en vérifiant que l'on obtient bien la fréquence désirée à l'aide d'une transformée de Fourier et d'une rapide analyse spectrale :

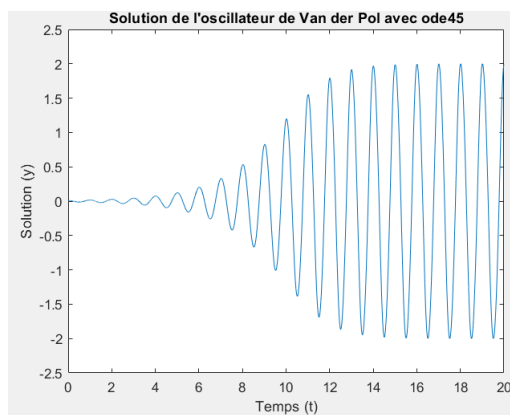


FIGURE 4.1 – Solution de Van Der Pol pour  $f_0 = 1Hz$

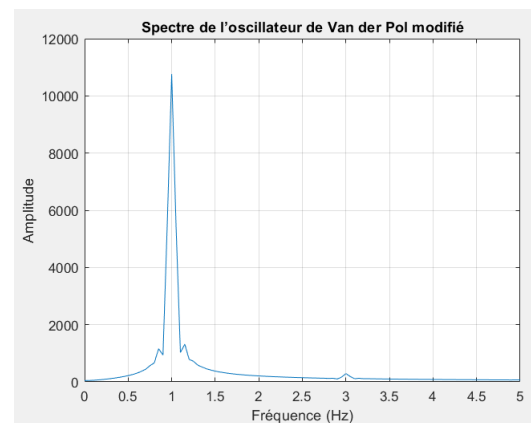


FIGURE 4.2 – Analyse spectrale pour  $f_0 = 1Hz$

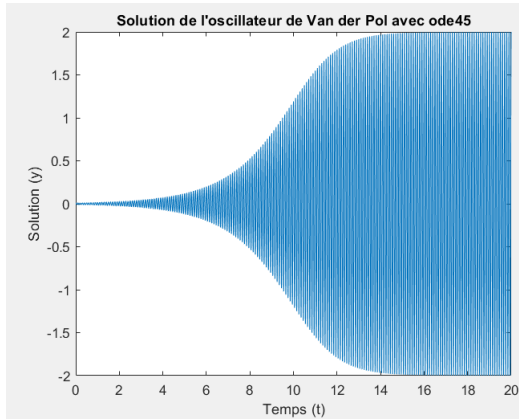


FIGURE 4.3 – Solution de Van Der Pol pour  $f_0 = 10Hz$

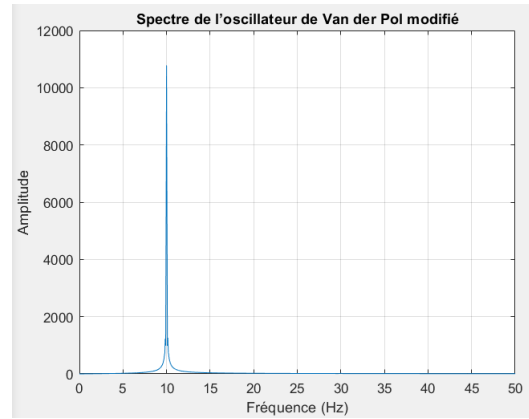


FIGURE 4.4 – Analyse spectrale pour  $f_0 = 10Hz$

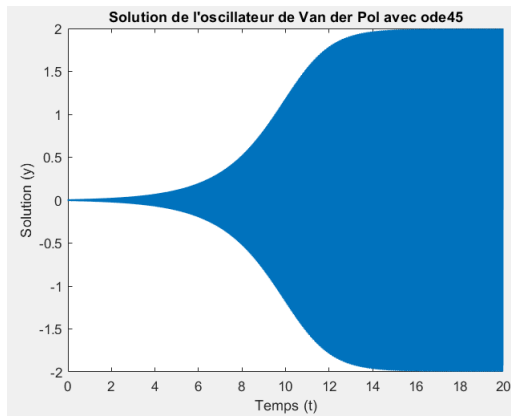


FIGURE 4.5 – Solution de Van Der Pol pour  $f_0 = 114Hz$

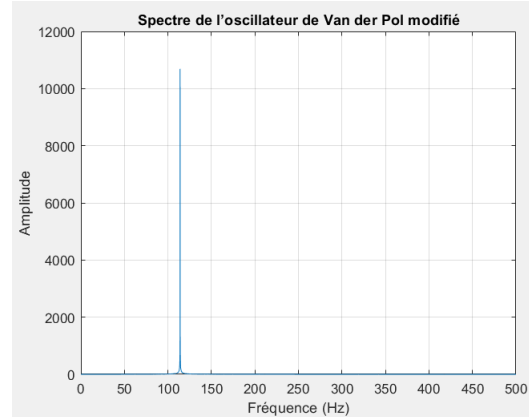


FIGURE 4.6 – Analyse spectrale pour  $f_0 = 114Hz$

### 4.3 Modélisation

En associant, l'équation d'onde et l'oscillateur de Van Der Pol, le modèle se résout comme un système de 4 équations en posant  $y_1 = q(t)$ ,  $y_2 = \frac{dq}{dt}$ ,  $y_3 = p$  et  $y_4 = \frac{dp}{dt}$  :

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 \quad (4.6)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_2\mu(1 - y_1^2) - \omega_n^2 y_1 \quad (4.7)$$

$$\frac{dy_3}{dt} = y_4 \quad (4.8)$$

$$\frac{dy_4}{dt} = \bar{c}^2 \frac{d^2 \bar{p}}{dz^2} - (\gamma - 1)y_2 \quad (4.9)$$

Le terme de dérivée spatiale seconde se résout par différence finie centrée d'ordre 2 tel que :

$$\frac{d^2 p}{dz^2}(t, z) = \frac{p(t, z + 1) - 2p(t, z) + p(t, z - 1)}{\Delta^2} \quad (4.10)$$

Le système d'équations est résolu de manière itérative pour la dimension spatiale et résolu par ODE45 pour la résolution par rapport aux temps afin d'éviter tout problème de stabilité.

Maintenant que les équations sont rassemblées et définies on peut finalement modéliser la fluctuation de la pression autour de l'équilibre pour l'oscillateur de Van Der Pol avec la pression fondamentale  $f_0 = 114$ . On obtient finalement les graphiques suivants :

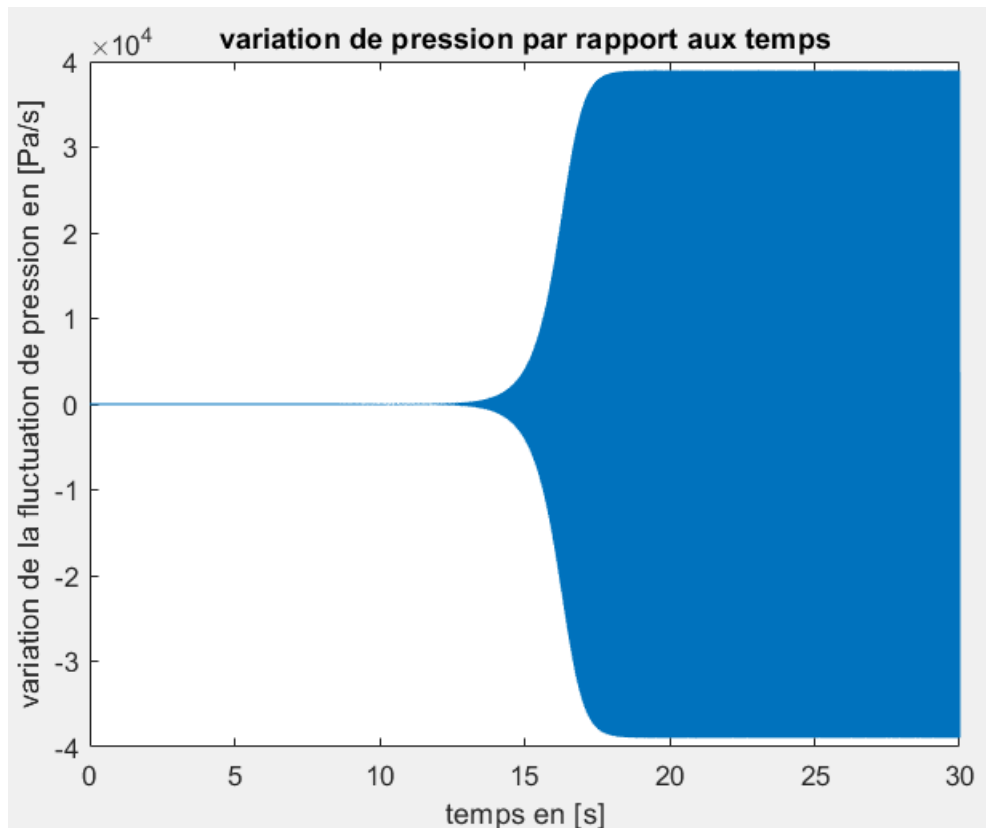


FIGURE 4.7 – Variation de la pression à l'emplacement du microphone

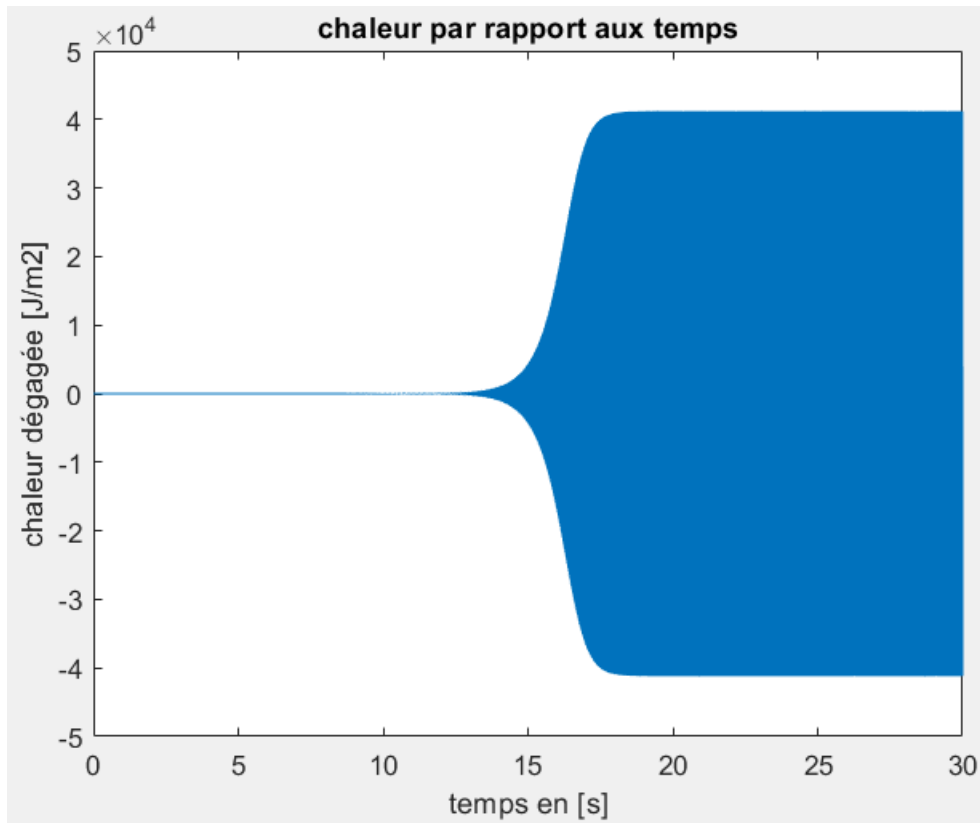


FIGURE 4.8 – Chaleur à la source de chaleur  $z = z_h$

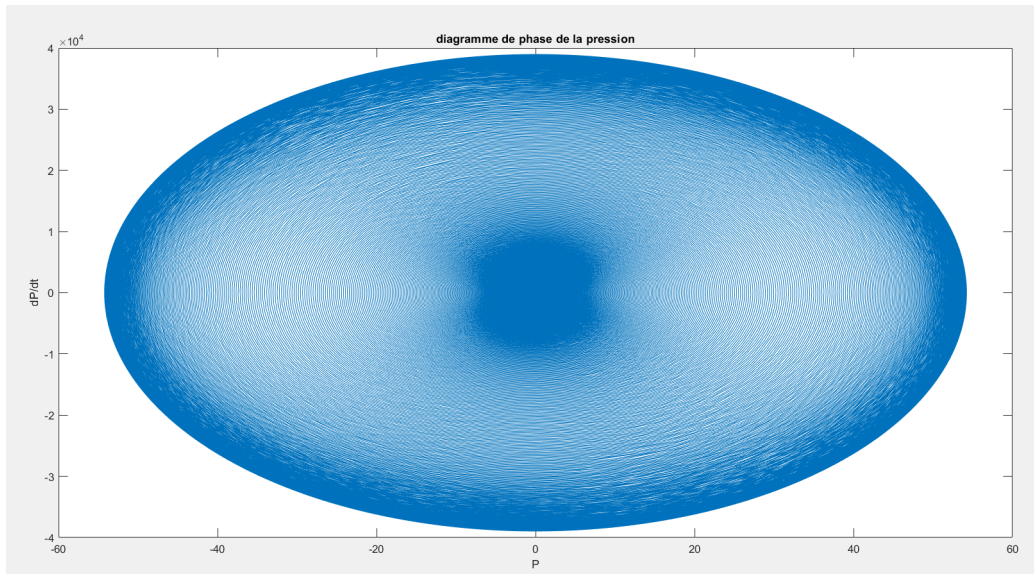


FIGURE 4.9 – Diagramme de phase  $p$  par rapport à  $dp/dt$

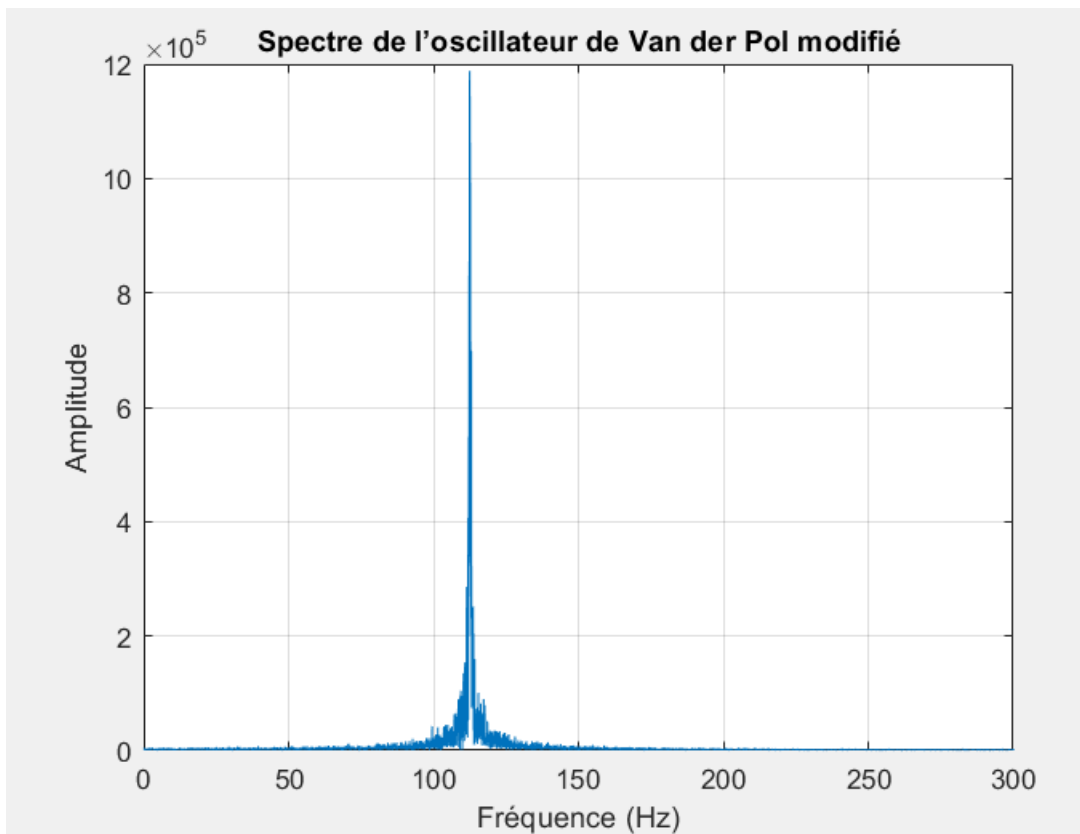


FIGURE 4.10 – Spectre de la pression modélisée

Pour cette modélisation, on a utilisé une valeur de  $\mu = 3$ , cette valeur explique que le système met du temps pour osciller selon le cycle limite. La lisibilité des oscillations est assez limitée dû à l'importante fréquence d'oscillation mais on peut tout de même voir que la courbe adopte tout de même le comportement que l'on désirait. De plus, l'analyse spectrale nous montre qu'on a bien un mode d'oscillation fondamentale en  $f_0 = 114$ . Pour finir, le diagramme de phase nous montre que le système oscille longtemps autour de l'origine avant de s'éloigner rapidement du foyer et d'osciller selon un cycle limite.

## 4.4 Choix de la valeur de $\mu$

L'élément central de cette modélisation est l'oscillateur de Van Der Pol et l'élément central de cet oscillateur est le coefficient de non-linéarité  $\mu$ . Sa variation détermine l'impact du comportement de cycle limite sur le système. On va tracer les graphiques pour différentes valeurs de  $\mu = 0.2, 1, 3, 10$  afin de pouvoir déterminer quelle coefficient choisir :

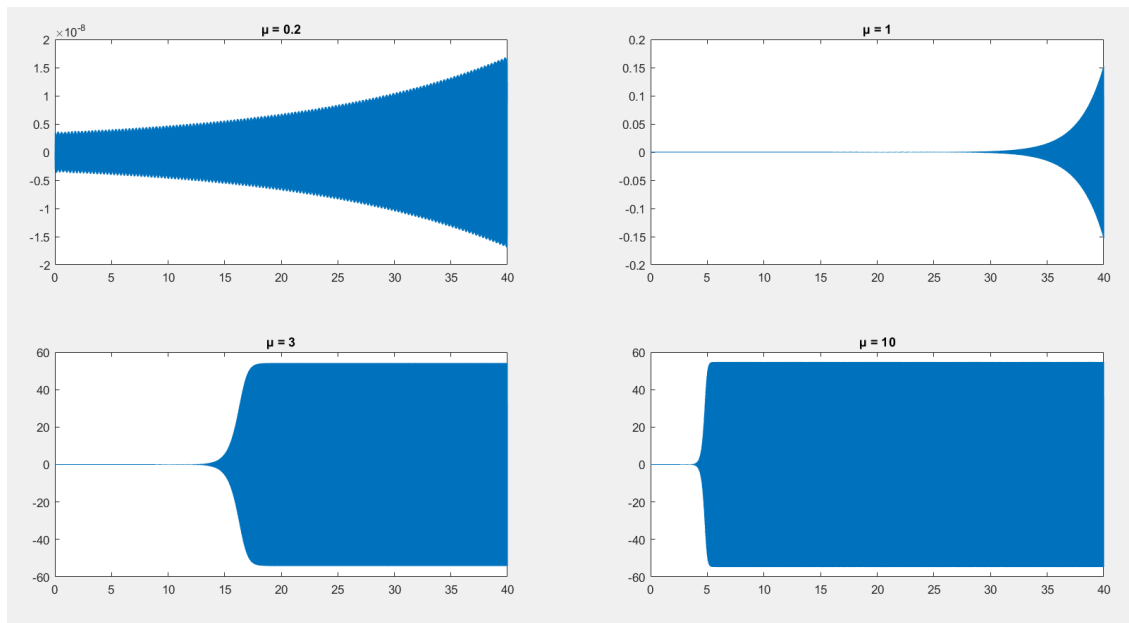


FIGURE 4.11 – Variation de pression selon  $\mu = 0.2, 1, 3, 10$

- **Pour  $\mu = 0.2$**  : On a une valeur de  $\mu$  qui est trop faible et le système prend énormément de temps pour osciller vers la bonne amplitude comme on peut voir sur le graphe la faible oscillation au bout de 40 secondes.

- **Pour**  $\mu = 1$  : On voit que le système tend et un peu plus rapidement vers l'amplitude d'oscillation du cycle limite mais toujours trop lentement
- **Pour**  $\mu = 3$  : Le système met quelques secondes avant d'arriver vers la valeur d'oscillation du cycle limite. C'est le comportement que l'on veut.
- **Pour**  $\mu = 10$  : On arrive très vite à l'oscillation désirée mais l'impact du cycle limite est trop grand et le système va vers son fonctionnement de régime avec trop de raideur ce qui s'éloigne de la réalité avec une résistance qui monte en température.

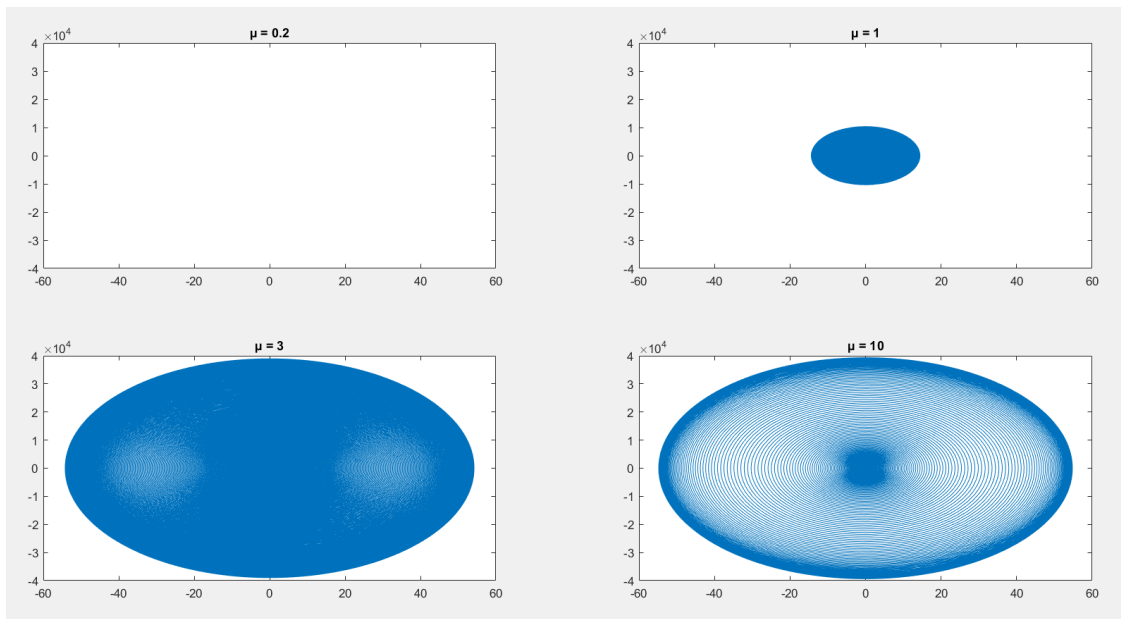


FIGURE 4.12 – Diagramme de phase selon  $\mu = 0.2, 1, 3, 10$

Les diagrammes de phase confirment la tendance qu'on observait avec  $\mu = 0.2$  qui ne s'éloigne pas de son foyer,  $\mu = 1$  qui prend énormément de temps pour s'en éloigner,  $\mu = 3$  qui s'en éloigne de manière assez constante et  $\mu = 10$  qui passe très rapidement en cycle limite.

Au vu des résultats obtenus, on va bien utiliser une valeur de  $\mu = 3$  afin de pouvoir correspondre le mieux possible au comportement à l'intérieur du tube.

## 4.5 Plusieurs oscillateurs de Van Der Pol en série

Expérimentalement, on a pu voir que outre le mode fondamental, le second mode d'oscillation est d'amplitude très importante et ne peut pas être négligé. Afin

d'améliorer la performance du modèle, on va aussi le modéliser en rajoutant plusieurs oscillateur de Van Der Pol l'un à la suite de l'autre mais de fréquence d'oscillation différentes.

Pour inclure le second mode d'oscillation, le système, en définissant en plus  $y_5 = q_2$  et  $y_6 = \frac{dq_2}{dt}$  ainsi que la fréquence du seconde mode d'oscillations  $\omega_2^2 = 2\pi f_2$  avec  $f_2 = 2f_0 = 228Hz$ , va devenir :

$$\frac{dy_1}{dt} = y_2 \quad (4.11)$$

$$\frac{dy_2}{dt} = y_2\mu(1 - y_1^2) - \omega_n^2 y_1 \quad (4.12)$$

$$\frac{dy_3}{dt} = y_4 \quad (4.13)$$

$$\frac{dy_4}{dt} = \bar{c}^2 \frac{d^2 \bar{p}}{dz^2} - (\gamma - 1)y_2 \quad (4.14)$$

$$\frac{dy_5}{dt} = y_6 \quad (4.15)$$

$$\frac{dy_6}{dt} = y_6\mu(1 - y_5^2) - \omega_2^2 y_5 \quad (4.16)$$

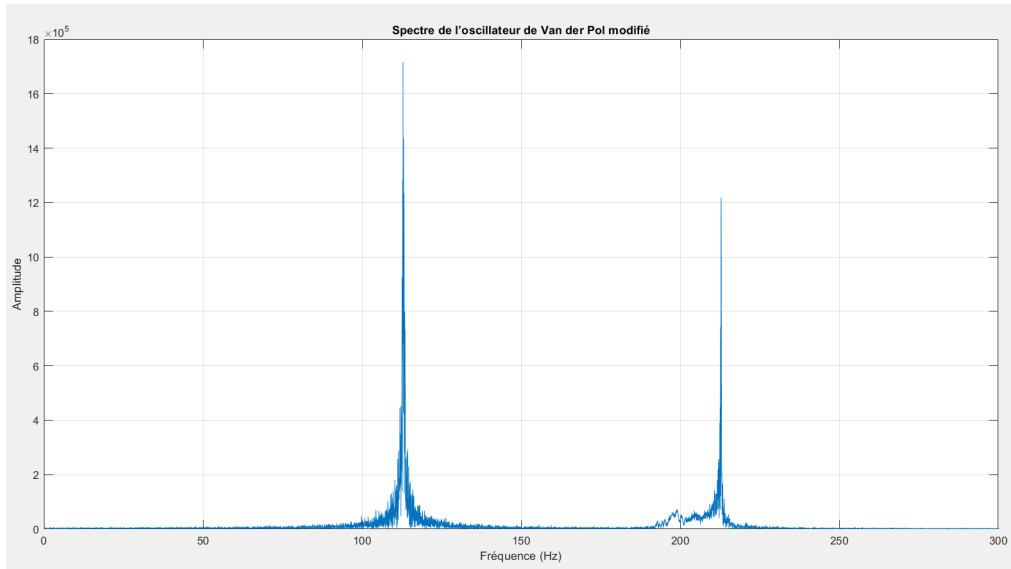


FIGURE 4.13 – Spectre de la pression modélisée par deux oscillateurs de Van Der Pol

La mise en œuvre de cette méthode autorise la modélisation d'un second mode d'oscillation, identifiable principalement à 228Hz. Toutefois, elle complexifie considérablement le processus de modélisation sous MATLAB. Pour résoudre ce problème, nous avons fait appel à la fonction ODE23 afin d'assurer une résolution efficace tout en maintenant une durée de test suffisante. Cependant, le recours à ODE23 limite notre capacité à effectuer un zoom précis sur une période typique du mode d'oscillation, étant donné que la technique de résolution numérique rend la visualisation quelque peu chaotique à faible échelle.

Plusieurs modes secondaires d'oscillation ont été modélisés. Cependant, l'exécution du code MATLAB devient de plus en plus longue, tout en fournissant des résultats qui diffèrent peu de ceux obtenus avec un unique mode secondaire. Compte tenu de l'amplitude négligeable des autres modes, nous choisirons de ne considérer qu'un seul mode pour la suite de nos analyses.

# Chapitre 5

## Validation

Ce chapitre est consacré à la validation du modèle proposé dans le chapitre précédent.

### 5.1 Objectif du modèle

L'objectif du modèle était de pouvoir modéliser le comportement de la variation de pression à l'intérieur du tube de Rijke expérimental de l'UCL. Il se base sur de nombreuses approximations. Le but n'était pas de pouvoir offrir une restitution fidèle de la réalité physique derrière le fonctionnement du tube mais bien de pouvoir modéliser le comportement de cycle limite observé. Ce modèle est extrêmement simplifié avec une attention particulière accordée à la paramétrisation de l'oscillateur de Van Der Pol utilisé.

### 5.2 Sélection des données de validation

Ce modèle étant implémenté pour le tube de Rijke construit dans le bâtiment Euler à l'EPL, l'ensemble des données utilisées pour valider le modèle seront celles relevées sur ce montage expérimental. Ces données ont été obtenues comme cité précédemment à l'aide des capteurs cités dans le chapitre 3. Les expérimentations ont été réalisées avec les conditions standards avec une température  $T = 298.15K$  et une pression  $p = 101325Pa$ . Ces données ont été relevées lors de différentes utilisations et pour différentes valeurs de puissance de la résistance électrique.

### 5.3 Comparaison et évaluation de la performance du modèle

Pour comparer le modèle, on doit se reposer sur les données mesurables du tube c'est à dire la pression et la température. Le modèle ne se basant pas sur la réalité physique du problème, on doit exclure la comparaison des données de température qui ont été utilisées au contraire comme données expérimentales pour construire le modèle. La comparaison s'effectue donc uniquement sur les relevés de pression acoustique enregistrés. Pour se faire, on va d'abord faire une superposition des courbes afin de pouvoir comparer les amplitudes de pression ainsi que le comportement des variations de pressions. Ensuite, on peut effectuer une analyse fréquentielle des relevés de pression. On rappelle que les données expérimentales ont été enregistrées sous forme de tension dans le microphone de l'assemblage et convertie selon la fiche de donnée du modèle du microphone (voir Appendice A) avec la conversion suivante :

$$0.00891V = 1Pa \quad (5.1)$$

Grâce à la fréquence d'échantillonnage, on peut finalement mettre un échelle temporelle pour offrir faciliter la comparaison avec notre modèle.

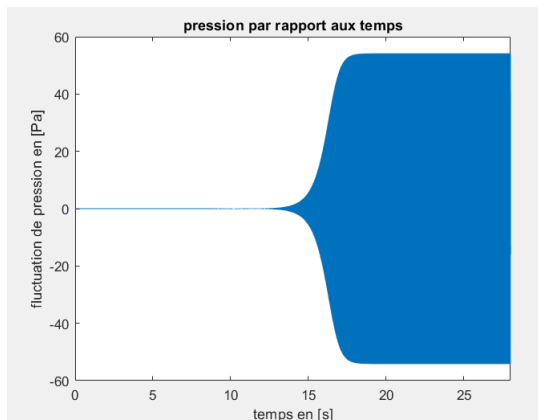


FIGURE 5.1 – Variation de la pression du modèle

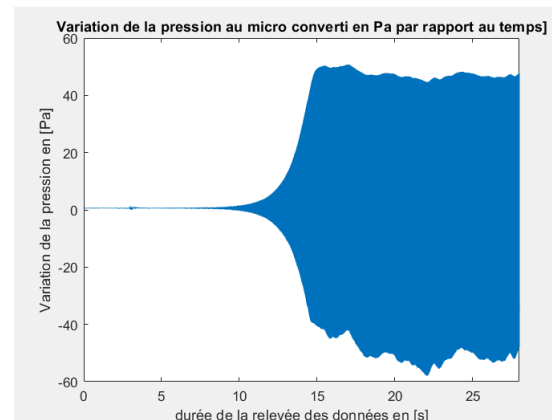


FIGURE 5.2 – Variation de la pression au micro

On peut d'abord observer simplement qualitativement l'allure des courbes obtenues, On peut voir de bonnes similitudes dans les courbes sans pouvoir réellement confirmer la validité. Il est évident que le modèle décrit un fonctionnement idéal

avec de nombreuses approximations c'est pourquoi il n'y a aucune légère variation de l'amplitude de l'oscillation tandis que sur les données expérimentales, il y aura de nombreux facteurs influençant l'amplitude de l'oscillation tel que les dissipations dues à la viscosité ou bien celle à la paroi par exemple. On voit que l'amplitude des oscillations est similaire lors de l'arrivée en cycle limite.

On va donc effectuer un zoom pour obtenir l'allure de la courbe sur une seule période et avoir une meilleure visibilité de du modèle et des données expérimentales. Pour avoir une vue rapprochée de la période du modèle, on a considéré le cas d'un seul oscillateur de Van Der Pol ce qui rend sa courbe très lisse en comparaison avec celle des données expérimentales.

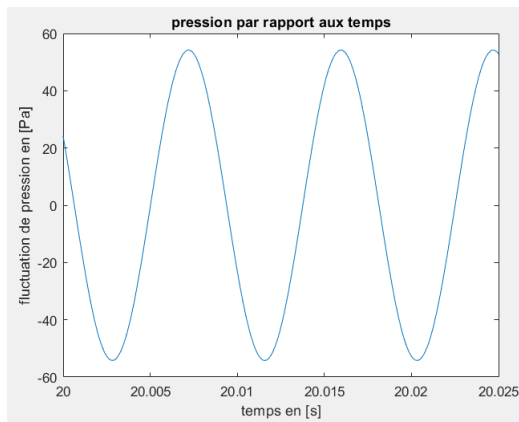


FIGURE 5.3 – Zoom sur une période du modèle

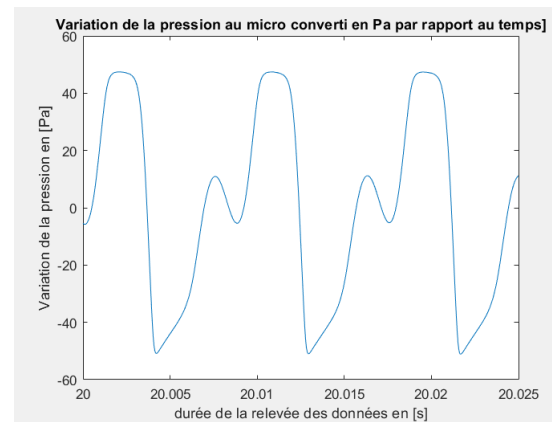


FIGURE 5.4 – Zoom sur une période des données expérimentales

Pour finir, le dernier élément de comparaison dont on dispose est celui de l'analyse fréquentielle :

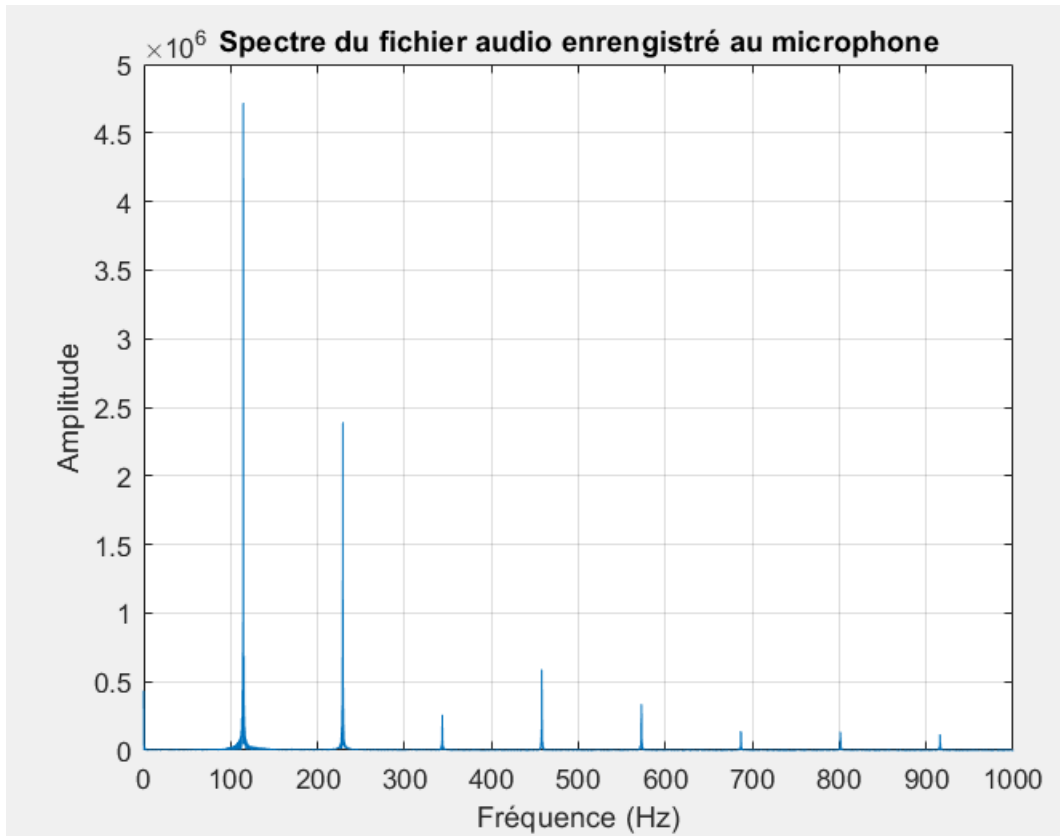


FIGURE 5.5 – Spectre de la pression de l'enregistrement des données expérimentales

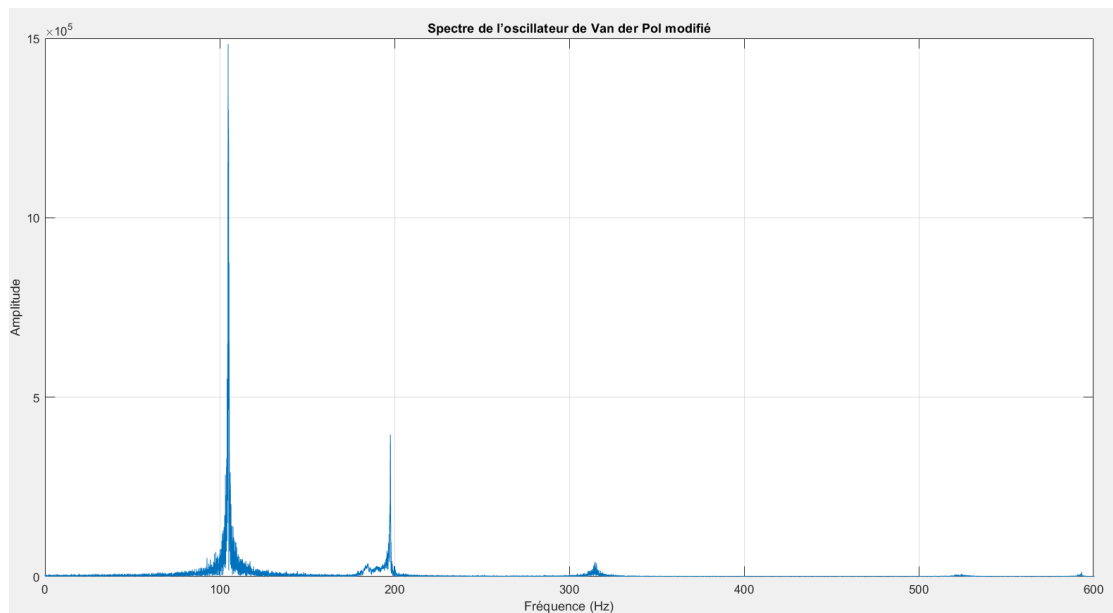


FIGURE 5.6 – Spectre de la pression modélisée avec 4 oscillateurs de Van Der Pol

L'ensemble des modes n'étant pas modélisé, on voit que certains modes relevés expérimentalement aussi ne sont pas du modélisés mais ceux-ci étant faible en terme d'amplitude on peut donc assumer que leur impact dans la dynamique du système sont relativement faible. Pour ce qui est des modes ayant été modélisés, le fréquence coïncide ainsi que l'amplitude même si celle-ci est influencé par le temps d'entrée en cycle limite.

L'ensemble des modes d'oscillations n'a pas été réalisé dans le modèle mais on peut voir en comparant avec les données expérimentales que leur amplitude devient vite très faible pour ceux de plus haute fréquence et donc pratiquement négligeable dans la dynamique du système.

## 5.4 Sensibilité et analyse des incertitudes

Afin de pouvoir tester la sensibilité du modèle face aux changements, on va effectuer un test supplémentaire. On va appliquer une fonction échelon en faisant varier la puissance injecter dans la résistance thermique. On va donc faire fonctionner le modèle en régime puis diminuer la puissance de la résistance thermique plusieurs fois et finalement la remettre à la puissance du fonctionnement en régime. En appliquant ceci à notre modèle pour un coefficient de non-linéarité  $\mu = 3$  on obtient le graphe suivant :

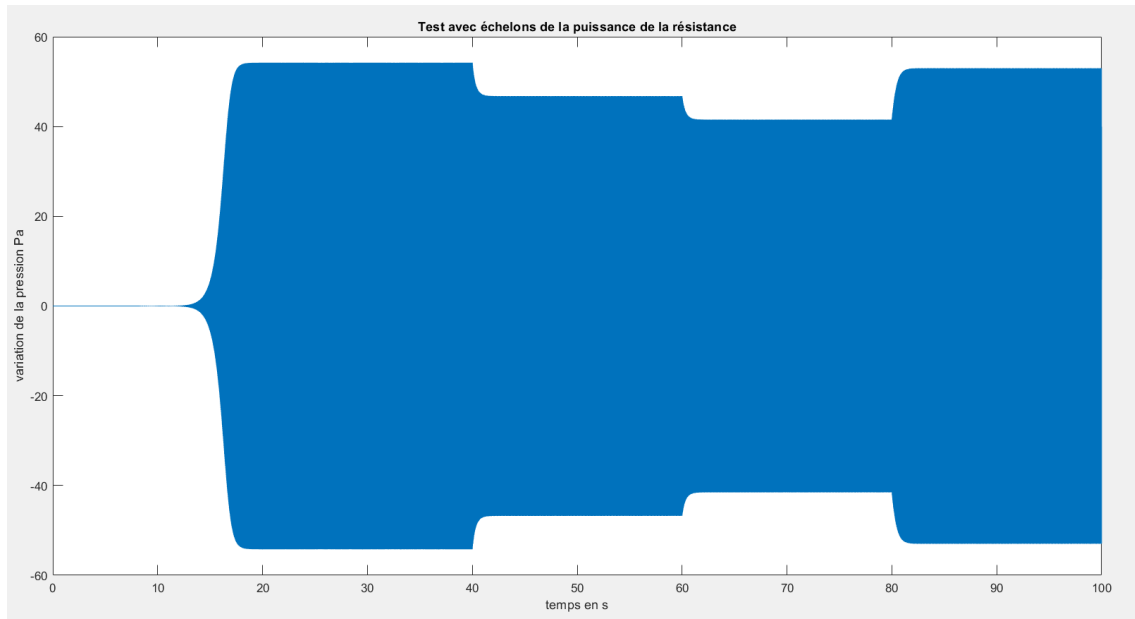


FIGURE 5.7 – Test avec échelon de puissance décroissant

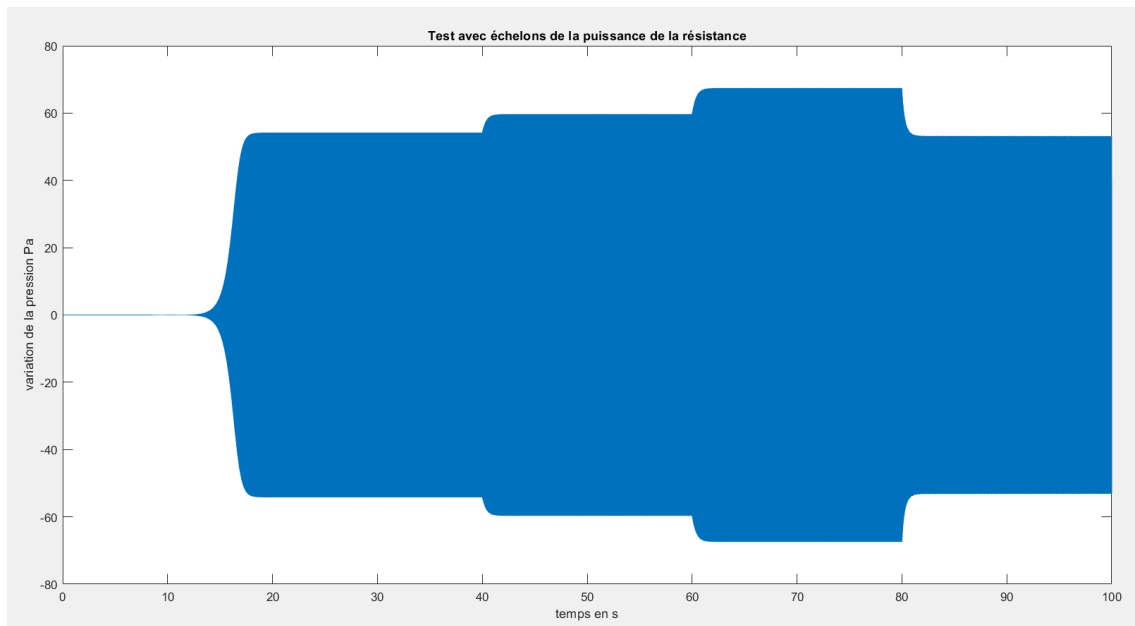


FIGURE 5.8 – Test avec échelon de puissance croissant

Avec ces derniers tests, on voit que le comportement du modèle reste stable malgré les variations d'intensité de puissance de la source de chaleur. Pour ces différents

tests, on voit qu'on conserve bien la fréquence des oscillations malgré la variation de leur amplitude.

## 5.5 Amélioration du modèle

Ce modèle comporte de très nombreuses simplifications et ne décrit que partiellement la réalité. A cause de cela, on peut voir de nombreuses différences entre le modèle et la réalité. Le modèle réagit de manière très rigoureuse sans aucune variations parasites ce qui évidemment nous éloigne des données réelles qui, elles varient beaucoup selon une énorme quantité de paramètres.

Il est évident qu'utiliser un modèle issu d'une équation d'onde est une grosse approximation pour décrire le fonctionnement du tube de Rijke. Cette approximation ne permet pas d'étudier les propriétés physiques dans le tube en dehors de la pression.

La source de chaleur exprimée par le facteur  $q_c$  est approximée comme si le transfert de chaleur était constant et non dépendant de la vitesse ce qui n'est pas le cas mais ce n'est pas réalisable avec ce modèle.

Le système dispose d'une certaine inertie thermique dans la réalité alors que le modèle ne peut pas les modéliser. On peut notamment remarquer cela quand on regarde le test échelon. Lorsque qu'on diminue la puissance de la source de chaleur, la pression tombe extrêmement vite sans presque aucune latence.

Le choix du coefficient de non-linéarité reste subjectif pour décrire la réalité même si n'importe quelle valeur ne peut pas être choisie pour conserver l'effet de cycle limite obtenu.

Les différents modes d'oscillation rajoutés par le modèle ne suffisent pas pour décrire le système. En effet, même si leur effet sur la dynamique du système est faible pour les modes plus élevés, le modèle n'est pas précis pour donner l'effet des modes secondaires d'oscillation.

Un grand nombre de ces approximations est inhérente au choix du modèle suivi.

# Chapitre 6

## Futurs travaux

La commande du tube de Rijke demeure l'ultime objectif de ce modèle élaboré au cours de notre étude. L'interaction entre l'entrée et la sortie du système, modifiée respectivement via le haut-parleur et captée par le microphone, est centrale à cette démarche. Il est donc impératif que les recherches ultérieures s'orientent vers cette dimension pour une exploration plus approfondie du modèle.

Dans la continuité de ce travail, plusieurs avenues d'approfondissement peuvent être envisagées. Une première direction serait l'élaboration et la mise en œuvre de correcteurs de différentes natures : proportionnel, intégral, et dérivé. L'objectif serait de caractériser et d'optimiser les propriétés de stabilité du système. Cette étape serait une préparation essentielle avant une éventuelle application au modèle expérimental développé à l'UCL.

En outre, une considération essentielle pour la précision du modèle serait d'intégrer un élément de retard au sein de l'oscillateur de Van Der Pol. Cette modification pourrait être caractérisée par la relation :  $\Theta_m = l_m/c$ , où  $l_m$  dénote la distance séparant la résistance thermique du microphone. Une analyse similaire pourrait également être menée pour la distance entre la résistance et le haut-parleur. Une telle incorporation enrichirait le modèle, offrant une représentation plus fidèle des dynamiques réelles en jeu.

En concluant, il est à noter que si notre travail jette les bases d'une modélisation rigoureuse, il n'est que le point de départ. Les pistes évoquées précédemment représentent autant d'opportunités pour les futurs chercheurs de poursuivre et de perfectionner cette exploration.

# Chapitre 7

## Conclusion

Au terme de cette étude approfondie, nous avons exploré les mécanismes complexes des perturbations thermo-acoustiques à l'intérieur du tube de Rijke, un phénomène d'une grande pertinence dans la dynamique des fluides et la propagation acoustique.

L'utilisation de l'oscillateur de Van der Pol comme outil de modélisation a démontré son efficacité. Ce choix n'a pas été fortuit. Historiquement utilisé pour décrire des phénomènes non-linéaires et des oscillations auto-entretenues, l'oscillateur de Van der Pol s'est avéré être un allié précieux pour appréhender le phénomène de perturbations thermo-acoustiques.

Nos principaux résultats indiquent que la dynamique de cycle limite retrouvée dans le tube de Rijke est facilement atteignable à partir de l'oscillateur de Van Der Pol et que celui-ci peut s'adapter aux différentes entrées du système mais aussi aux variations de puissance de la source de chaleurs. Ces résultats indiquent que ce modèle peut être un allié solide dans la commande futur des perturbations thermo-acoustiques dans le tube de Rijke à l'aide d'une commande en boucle fermée et d'un effet de rétroaction.

Toutefois, tout modèle possède ses limitations. Bien que l'oscillateur de Van der Pol nous ait permis d'obtenir des informations précieuses, il est essentiel de noter que les modes secondaires sont assez mal modélisés et que ce modèle ne décrit en aucun cas la réalité physique du problème qui peut parfois se montrer très limitant.

Pour les travaux futurs, nous suggérons d'essayer le contrôle en bouclant fermée à l'aide de différents types de commande mais aussi l'implémentation d'un retard

dans l'oscillateur pour représenter la distance entre la bobine ,le microphone et le haut-parleur.

En conclusion, cette étude marque un pas supplémentaire dans notre quête pour comprendre les perturbations thermo-acoustiques dans le tube de Rijke. La complexité intrinsèque de la physique sous-jacente aux perturbations acoustiques signifie qu'il reste encore beaucoup à découvrir. Cela souligne non seulement l'ampleur du défi scientifique devant nous, mais aussi le rôle central que les méthodes d'ingénierie joueront dans les prochaines étapes de cette exploration.

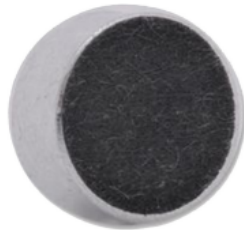


# Annexe A

## Fiche technique du microphone

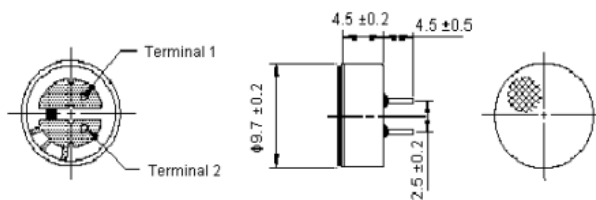
### Microphone - Omni PCB Mount

pro-SIGNAL



#### Specifications:

Directivity	: Omni directional
Standard operating voltage	: 1.5V
Maximum operating voltage	: 10V
Maximum current consumption	: 0.5mA
Output impedance (F = 1KHz 1Pa)	: < 2.2KΩ
Frequency	: 50 to 16,000Hz
Sensitivity (at F = 1KHz, 0dB = 1V/Pa)	: -41 ± 3dB
Signal to noise ratio (F = 1KHz 1Pa) weighted	: > 60dB



Dimensions : Millimetres

#### Part Number Table

Description	Part Number
Microphone, Omni, PCB Mount	ABM-707-RC

**Important Notice:** This data sheet and its contents (the "Information") belong to the members of the Premier Farnell group of companies (the "Group") or are licensed to it. No licence is granted for the use of it other than for information purposes in connection with the products to which it relates. No licence of any intellectual property rights is granted. The Information is subject to change without notice and replaces all data sheets previously supplied. The Information supplied is believed to be accurate but the Group assumes no responsibility for its accuracy or completeness, any error in or omission from it or for any use made of it. Users of this data sheet should check for themselves the information and the suitability of the products for their purpose and not make any assumptions based on information included or omitted. Liability for loss or damage resulting from reliance on the Information or use of it (including liability resulting from negligence or where the Group was aware of the possibility of such loss or damage arising) is excluded. This will not be limited or restricted by any law which purports to limit or restrict the Group's liability for death or personal injury resulting from its negligence. pro-SIGNAL is the registered trademark of the Group. © Premier Farnell plc 2012.

www.element14.com  
www.farnell.com  
www.newark.com  
www.cpc.co.uk

pro-SIGNAL

FIGURE A.1

# Bibliographie

- [1] Gustavo Artur de ANDRADE, Rafael VAZQUEZ et Daniel Juan PAGANO. *Backstepping stabilization of a linearized ODE–PDE Rijke tube model*. Elsevier, 2018.
- [2] Anuradha M. ANNASWAMY et al. *Thermoacoustic Instability : Model-Based Optimal Control Designs and Experimental Validation*. IEEE TRANSACTIONS ON CONTROL SYSTEMS TECHNOLOGY, 2000.
- [3] Giacomo BONCIOLINI et Edouard BOUJO. *Output-only parameter identification of a colored-noise-driven Van-der-Pol oscillator : Thermoacoustic instabilities as an example*. PHYSICAL REVIEW E 95, 062217, 2017.
- [4] F. BOUZIANI et al. *Analysis of a tractable model for combustion instability : the effect of delay and low pass filtering*. 45th IEEE Conference on Decision Control, 2006.
- [5] Paul Adrien Maurice DIRAC. *The Principles of Quantum Mechanics*. International series of monographs on physics. Clarendon Press, 1981. ISBN : 9780198520115.
- [6] Albert EINSTEIN. “Zur Elektrodynamik bewegter Körper. (German) [On the electrodynamics of moving bodies]”. In : *Annalen der Physik* 322.10 (1905), p. 891-921. DOI : <http://dx.doi.org/10.1002/andp.19053221004>.
- [7] Jonathan P. EPPERLEIN, Bassam BAMIEH et Karl J. ÅSTRÖM. *Thermoacoustics and the Rijke Tube : Experiment, identification and modeling*. IEEE CONTROL SYSTEMS MAGAZINE, 2018.
- [8] Maria A. HECKL. *Active control of the noise from a Rijke tube*. Journal of Sound et Vibration 124, 1988.
- [9] Maria A. HECKL et M.S. HOWE. *Stability analysis of the Rijke tube with a Green’s function approach*. Journal of Sound et Vibration 305, 2007.
- [10] Donald KNUTH. *Knuth : Computers and Typesetting*. URL : <http://www-cs-faculty.stanford.edu/~uno/abcde.html>. (accessed : 01.09.2016).

- [11] Luca MAGRI, Matthew P.JUNIPER et Jonas P.MOECK. *Sensitivity of the Rayleigh criterion in thermoacoustics*. Cambridge University Press, 2019.
- [12] Konstantin MATVEEV. *Thermoacoustic Instabilities in the Rijke Tube : Experiments and Modeling*. California Institute of Technology Pasadena, California, 2003.
- [13] Matthew P.JUNIPER. *Triggering in the horizontal Rijke tube : non-normality, transient growth and bypass transition*. Cambridge University Press, 2010.
- [14] R.L. RAUN et al. *A review of Rijke tubes, Rijke burners and related devices*. Pergamon Press Ltd, 1993.
- [15] Shekhar M SARPOTDAR, N. ANANTHKRISHNAN et S. D. SHARMA. *The Rijke Tube - A Thermo-acoustic Device*. Chicago University Press, 2003.
- [16] Benjamin VINCENT. *Modelling and analysis of multi-physics control systems*. Université catholique de Louvain et Université Grenoble Alpes, 2019.
- [17] Benjamin VINCENT et al. *Modelling of thermo-acoustics instability*. Université catholique de Louvain, 2019.
- [18] Xiaoyu Wang XIAOFENG SUN. “Fundamentals of Aeroacoustics with Applications to Aeropropulsion Systems”. In : Shanghai Jiao Tong University Press, 2021. Chap. 7, Thermoacoustic instability.

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN  
École polytechnique de Louvain

Rue Archimède, 1 bte L6.11.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | [www.uclouvain.be/epl](http://www.uclouvain.be/epl)