Faculté des sciences

Approches catégoriques aux variétés soustractives

Auteure : Marie Hamer

Promoteur : Marino Gran

Lecteurs : Tom Claeys et Tim Van der Linden

Année académique 2022-2023

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
FACULTÉ DES SCIENCES
ÉCOLE DE MATHÉMATIQUES

Approches catégoriques aux variétés soustractives

Marie Hamer
Promoteur : Marino Gran
Lecteurs : Tom Claeys et Tim Van Der Linden

Mémoire de Master
Août 2023

Remerciements

Je tiens sincèrement à remercier Marino Gran pour le temps qu'il m'a consacré tout au long de mes études, la confiance qu'il m'a témoignée ainsi que l'opportunité de réaliser ce mémoire tardivement.

Un grand merci aux lecteurs d'avoir accepté de participer à cette conclusion de mes années universitaires.

Merci aussi à l'ensemble du corps pédagogique et du personnel UCLouvain qui ont permis la poursuite de ces études dans un cadre épanouissant.

Et enfin, je remercie ma maman, mon frère, mes amis, mon compagnon, Zozo et Archie de m'avoir épaulée durant ces 5 années pleines de rebondissements.

Introduction

L'étude de l'algèbre universelle fournit un cadre puissant pour comprendre les lois algébriques communes qui régissent diverses structures mathématiques. En dégagant les propriétés analogues d'objets en apparence différents, cette branche des mathématiques dispose d'un rôle unificateur marqué. Davantage que rassembler des théories, le niveau de généralisation supérieur permet d'aborder des travaux tout à fait novateurs. L'algèbre universelle a ainsi mené à de nombreuses avancées dans divers domaines algébriques, en logique ou encore en informatique. Nous devons à G. Birkhoff en 1933 la définition d'*algèbre généralisée* [4] de laquelle découla naturellement la théorie que nous connaissons aujourd'hui.

Dans ce contexte, la notion de *variété* au sens de l'algèbre universelle se trouve au centre de ce travail. Ce concept unifie en un unique objet une classe d'*algèbres généralisées* de même *type*. Pour exemplifier, nous pouvons notamment mentionner la variété constituée des groupes. Ce mémoire s'étend en particulier sur les variétés dites *soustractives*. Ces dernières émergent comme une classe intéressante de systèmes algébriques, regroupant les structures qui intègrent une certaine idée de l'opération de soustraction. Nous pouvons citer les groupes, les anneaux ou encore les modules qui possèdent tous une opération d'inverse "$-$" telle que $x - x = 0$ et $x - 0 = x$, où 0 désigne le neutre. Cette opération suit donc les règles que nous imposerions intuitivement à une négation. Ces aspects peuvent être formalisés et généralisés à l'aide du vocabulaire de l'algèbre universelle afin de définir précisément le concept de variété soustractive.

Ce concept, bien qu'assez simple, mérite de s'y attarder pour diverses raisons. Alors que de nombreux systèmes algébriques, tels que ceux mentionnés dans le paragraphe précédent, sont bien étudiés et constituent le fondement de l'algèbre moderne, l'étude des structures abstraites impliquant une soustraction présente un intérêt de par son niveau d'abstraction supérieur ainsi que pour le riche cadre de travail qu'elle fournit. Ce cadre de travail permet notamment de développer une théorie des idéaux et des commutateurs [29]. La soustractivité d'une variété est aussi liée à d'autres propriétés très étudiées telles que les variétés unitales ou de Mal'tsev ou bien additives [18]. Nous pouvons encore mentionner que ce concept trouve une utilité dans le lambda-calculus. Par ailleurs, nous verrons qu'il fournit un environnement non-abélien suffisant pour certains lemmes issus de l'algèbre homologique.

Ce travail plonge ainsi dans le domaine des variétés soustractives, explorant leurs propriétés fondamentales, leurs liens avec les structures algébriques classiques et leurs généralisations catégoriques. Le principal objectif de ce mémoire est de rassembler en un endroit différentes définitions équivalentes des catégories et variétés soustractives afin de mieux révéler l'essence de la soustraction du point de vue des structures algébriques et d'un point de vue catégorique. Bien qu'il existe plusieurs caractérisations intéressantes que nous n'aborderons pas ici, nous espérons que l'éventail des contextes mathématiques choisis est suffisamment large pour offrir une exploration en profondeur du sujet.

Le mémoire est structuré en chapitres distincts, chacun abordant des aspects spécifiques du sujet. Le premier chapitre introduit des concepts fondamentaux de l'algèbre universelle. Cela nous fournira le vocabulaire et les outils nécessaires pour étudier les variétés. Nous verrons ainsi comment formaliser les identités satisfaites par un objet algébrique, telle que l'identité "$x \cdot y = y \cdot x$ pour tout $x, y \in G$" renseignant le caractère abélien d'un groupe G. Ensuite, nous généraliserons des concepts de base tels que ceux de quotients et d'objets libres. Ce chapitre est agrémenté d'interprétations des définitions dans le cas des groupes, cet exemple nous suivant tout au long de ce travail.

Une fois la notion de variété introduite, le chapitre 2 démontre que celles-ci définissent des catégories exactes et donc, en particulier, régulières. Ce chapitre établit ainsi un cadre de travail intéressant pour la suite. En outre, nous verrons que les constructions catégoriques telles que les produits, les produits fibrés ou encore les coégalisateurs se basent sur celles des ensembles, auxquelles nous ajoutons de la structure.

Le chapitre 3 présente les définitions de variétés et de catégories soustractives et établit le lien entre la première définition due à A. Ursini [29] et sa généralisation catégorique due à Z. Janelidze [18]. Au sein du troisième chapitre nous retrouvons ainsi nos premières caractérisations. Ces dernières font intervenir la syntaxique, la sémantique ainsi que la notion de revêtement projectif alliée à celle d'algèbre libre.

Finalement, le dernier chapitre aborde deux caractérisations en lien avec des lemmes homologiques : le lemme des cinq court et le lemme des neuf. Nous verrons ainsi comment des propriétés d'exactitudes peuvent être déduites dans le contexte d'une catégorie soustractive. Ce chapitre s'inscrit notamment dans la recherche d'un environnement minimal dans lequel démontrer certaines propriétés.

Ce mémoire est voulu accessible aux étudiants de Master avec une connaissance de base en théorie des catégories.

Table des matières

Chapitre 1

Introduction au langage de l'Algèbre Universelle

Dans ce chapitre nous introduisons d'abord les concepts fondamentaux de langage et d'algèbre qui proviennent de la théorie de l'algèbre universelle. Nous illustrons ensuite ces concepts par une dizaine d'exemples d'objets algébriques connus. Par après, nous étudierons le vocabulaire nécessaire pour parler de ces exemples en tant que classes d'algèbres particulières, et ainsi faciliter l'étude systématique de ces objets algébriques. Dans cette optique, nous énoncerons le célèbre théorème *HSP* dû à G. Birkhoff. Enfin, nous nous attarderons sur la généralisation des notions familières de relations d'équivalence, de quotient et d'objet libre. Ces différentes sections nous permettront alors de travailler dans un cadre suffisamment général pour la suite de ce mémoire. La référence principale de ce chapitre est le livre "*A course in Universal Algebra*" de S. Burris et H.P. Sankkapanavar [26].

Ci-dessous nous énonçons les deux définitions qui se trouvent à la base de la naissance de l'algèbre universelle :

Définition 1.1. *Un* langage d'algèbres $\mathcal{F}$ *est un ensemble de symboles fonctionnels tel qu'à chaque symbole* f *correspond un nombre naturel* n *appelé l'arité de* f*. On dit alors que* f *est un symbole fonctionnel* n*-aire. En particulier, un symbole nullaire (0-aire) sera vu comme une constante.*

Définition 1.2. *Soit* $\mathcal{F}$ *un langage d'algèbres. Une* algèbre $\boldsymbol{A}$ *de type* $\mathcal{F}$ *est une paire ordonnée* $\langle A, F\rangle$ *où* A *est un ensemble appelé l'univers de* $\boldsymbol{A}$ *et* F *est l'ensemble des opérations fondamentales de* $\boldsymbol{A}$*. L'ensemble* F *est tel que, pour chaque symbole fonctionnel* f *d'arité* n *dans le langage* $\mathcal{F}$*, on associe une unique opération* $f^{\boldsymbol{A}} : A^n \to A$ *appartenant à* F*.*

1.1 Exemples d'algèbres

Dans cette section nous développons une dizaine d'exemples et de contre-exemples courants dans la littérature afin de se familiariser avec la notion générale d'algèbre.

Exemple 1.3 (Ensembles)**.** L'exemple le plus immédiat d'une algèbre est celui d'un ensemble. En effet, il est clair qu'une algèbre $\mathbf{X}$ d'univers l'ensemble X et n'admettant pas d'opération fondamentale est simplement l'ensemble X :

$$\mathbf{X} = \langle X, \emptyset \rangle.$$

Exemple 1.4 (Groupes)**.** Un groupe $\mathbf{G}$ est une algèbre $\mathbf{G} = \langle G, \cdot, ^{-1}, 1 \rangle$ où les trois opérations fondamentales sont respectivement binaire, unaire et nullaire. De plus, l'algèbre satisfait les 3 identités suivantes pour tout $x, y, z \in G$:

G1 : $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

G2 : $x \cdot 1 = 1 \cdot x = 1$

G3 : $x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = 1.$

En outre, le groupe $\mathbf{G}$ est dit abélien s'il satisfait l'identité supplémentaire :

G4 : $x \cdot y = y \cdot x.$

Ainsi un groupe quelconque est une algèbre de type $\mathcal{F}$ où $\mathcal{F} = \{\cdot, ^{-1}, 1\}$ est un langage composé de trois symboles fonctionnels (d'arité 2, 1 et 0). Ces symboles fonctionnels prennent un sens concret seulement lorsque nous spécifions la paire ordonnée $\langle G, F \rangle$ qui dépend du groupe $\mathbf{G}$ considéré. Ainsi, si nous regardons le groupe des entiers $\mathbb{Z}$, alors l'opération binaire $\cdot$ est l'addition usuelle sur les entiers et la constante notée 1 est le 0. Si nous prenons le groupe $Aut(\mathbb{Z})$ alors l'opération binaire $\cdot$ correspond à la composition et la constante 1 correspond à l'identité sur $\mathbb{Z}$.

Cet exemple, comme la majorité de ceux qui suivent, fait intervenir des identités pour caractériser notre structure algébrique (G1 - G4). Nous formaliserons cela dans le langage de l'algèbre universelle via les concepts de termes et d'identités d'une algèbre plus loin dans ce chapitre.

Exemple 1.5 (Anneaux)**.** Un anneau $\mathbf{R}$ est une algèbre $\mathbf{R} = \langle R, +, \cdot, -, 0 \rangle$ où les quatre opérations fondamentales sont respectivement binaire, binaire, unaire et nullaire. De plus, l'algèbre $\mathbf{R}$ doit satisfaire les identités ci-dessous pour tout $x, y, z \in R$:

R1 : $\langle R, +, -, 0 \rangle$ est un groupe abélien

R2 : $x \cdot (y \cdot z) = (x \cdot y) \cdot z$

R3 : $x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z)$

R4 : $(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z).$

Exemple 1.6 (Modules)**.** Soit un anneau **R**. Un **R**-module à gauche **M** est une algèbre $\mathbf{M} = \langle M, +, -, (f_r)_{r\in R}, 0\rangle$ où $+$ est d'arité deux, $-$ est d'arité un, chaque f_r est aussi d'arité un et 0 est une constante. L'algèbre **M** est telle que pour tout $x, y \in M$ et $r, s \in R$:

M1 : $\langle M, +, -, 0\rangle$ est un groupe abélien

M2 : $f_r(x + y) = f_r(x) + f_r(y)$

M3 : $f_{r+s}(x) = f_r(x) + f_s(x)$

M4 : $f_r(f_s(x)) = f_{rs}(x)$.

Remarquons que nous n'utilisons pas la structure d'algèbre de l'anneau **R** pour définir l'algèbre **M**. Cette observation se concrétise dans les deux prochains exemples.

Contre-exemple 1.7 (Corps)**.** Un corps **C** est une structure algébrique admettant deux opérations binaires associatives $+$ et $\cdot$ et telles que la multiplication est distributive sur l'addition. En outre, **C** admet deux constantes 0 et 1 où 0 est le neutre pour l'addition et 1 le neutre pour la multiplication. Enfin, on requiert des inverses additives et des inverses multiplicatives sauf pour la constante additive 0. Ainsi l'opération d'inverse multiplicative n'est pas définie sur tout l'ensemble C ce qui implique qu'un corps n'est **pas une algèbre** au sens de la définition 1.2.

Exemple 1.8 (Espaces vectoriels)**.** Bien qu'un corps ne soit pas une algèbre nous pouvons voir un espace vectoriel **V** sur un corps **F** comme l'algèbre $\mathbf{V} = \langle V, +, -, (f_r)_{r\in F}, 0\rangle$ telle que pour tout $x \in V$:

V1 : $\langle V, +, -, (f_r)_{r\in F}, 0\rangle$ est un **F**-module à gauche

V2 : $f_1(x) = x$.

Contre-exemple 1.9 (Espaces topologiques)**.** Il est clair que nous ne pouvons pas formaliser la notion d'une topologie τ sur un ensemble X via le langage de l'algèbre universelle.

Exemple 1.10 (Treillis)**.** Un treillis **L** est une algèbre $\mathbf{L} = \langle L, \vee, \wedge\rangle$ telle que pour tout $x, y, z \in L$:

T1 : $x \vee y = y \vee x$ et $x \wedge y = y \wedge x$

T2 : $x \vee (y \vee z) = (x \vee y) \vee z$ et $x \wedge (y \wedge z) = (x \wedge y) \wedge z$

T3 : $x \vee x = x$ et $x \wedge x = x$

T4 : $x \vee (x \wedge y) = x$ et $x \wedge (x \vee y) = x$.

Exemple 1.11 (Algèbre de Heyting)**.** Une algèbre $\mathbf{H} = \langle H, \vee, \wedge, \to, 0, 1\rangle$ avec trois opérations binaires et deux constantes, est une algèbre de Heyting si, pour tout $x, y, z \in H$, elle satisfait :

H1 : $\langle H, \vee, \wedge, \to\rangle$ est un treillis distributif

H2 : $x \wedge 0 = 0$ et $x \vee 1 = 1$

H3 : $x \to x = 1$

H4 : $(x \to y) \wedge y = y$ et $x \wedge (x \to y) = x \wedge y$

H5 : $x \to (y \wedge z) = (x \to y) \wedge (x \to z)$ et $(x \vee y) \to z = (x \to z) \wedge (y \to z)$.

1.2 Classe équationnelle - Variété

Cette section introduit les notions équivalentes de classe équationnelle et de variété d'algèbres telles que définies dans le livre de S. Burris et H.P. Sankappanavar [26]. Ces concepts nous permettront d'étudier une famille d'algèbres, comme les groupes par exemple, en tant qu'objet particulier.

1.2.1 Classe équationnelle

Nos exemples d'algèbres de la section 1.1 dépendent tous d'identités vérifiées par l'ensemble des éléments de l'algèbre. Nous formalisons ce concept d'identité qui donnera lieu par la suite à la définition d'une classe équationnelle. Nous avons au préalable besoin de la notion de terme telle que définie ci-dessous.

Définition 1.12. *Soit X un ensemble dont les éléments sont appelés variables. Soit $\mathcal{F}$ un langage d'algèbres. On définit l'*ensemble $T(X)$ des termes *de type $\mathcal{F}$ sur X comme le plus petit ensemble tel que :*

1. *$X \cup \{f \in \mathcal{F} \mid f$ est nullaire $\} \subset T(X)$*
2. *Si $p_1, \ldots, p_n \in T(X)$ et $f \in \mathcal{F}$ est un symbole n-aire alors $f(p_1, \ldots, p_n) \in T(X)$.*

On définit la longueur $l(p)$ d'un terme p par le nombre d'occurrences d'un symbole fonctionnel dans l'écriture de p.

Remarque 1.13. On dénotera généralement un terme $p \in T(X)$ par $p(x_1, \ldots, x_n)$ si les variables de X apparaissant explicitement dans p appartiennent à $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Exemple 1.14. Prenons le langage $\mathcal{F} = \{+, -, 0\}$ où le $+$ est d'arité 2, le $-$ d'arité 1 et le 0 est une constante (un groupe abélien est un exemple d'algèbre de type $\mathcal{F}$). Soit $X = \{x, y, z\}$ nos variables. Alors nous savons, par le premier point de la définition 1.12, que :

$$x, y, z, 0 \in T(X).$$

En outre, par le deuxième point de cette même définition, nous pouvons construire d'autres termes. Par exemple nous pouvons obtenir :

$$x + y, (-x) + y, (x + y) + (-z) \in T(X).$$

Nous préférerons l'écriture $x + y$ plutôt que $+(x, y)$ pour un symbole binaire.

Intuitivement, les termes de type $\mathcal{F}$ sur un ensemble de k variables sont des écritures formelles de formules obtenues par la composition des symboles fonctionnels de $\mathcal{F}$ faisant intervenir un maximum de k variables. Ainsi, si nous considérons une algèbre de type $\mathcal{F}$, cela nous fournit une manière d'appliquer les opérations fondamentales aux éléments de l'algèbre. Cette intuition nous mène à la définition ci-dessous.

Définition 1.15. *Soit $p(x_1, \ldots, x_n)$ un terme de type $\mathcal{F}$ sur X. Soit $\boldsymbol{A}$ une algèbre de type $\mathcal{F}$. On définit la* fonction de terme *$p^A : A^n \to A$ comme :*

1. *Si p est une variable, c'est-à-dire que $p(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ pour un certain $1 \leq i \leq n$, alors*
$$p^A(a_1, \ldots, a_n) = a_i$$
pour tout $a_1, \ldots, a_n \in A$.
2. *Si p est de la forme $p(x_1, \ldots, x_n) = f(p_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, p_k(x_1, \ldots, x_n))$ pour un symbole f d'arité k de $\mathcal{F}$ alors*
$$p^A(a_1, \ldots, a_n) = f^A(p_1^A(a_1, \ldots, a_n), \ldots, p_k^A(a_1, \ldots, a_n))$$
pour tout $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Exemple 1.16. Continuons l'exemple 1.14. Soit $\mathbb{Z} = \langle \mathbb{Z}, +, -, 0 \rangle$ un exemple d'algèbre de type $\mathcal{F}$. Prenons le terme $p(x, y) = (-x) + y \in T(X)$ alors
$$p^{\mathbb{Z}}(5, -1) = p_1^{\mathbb{Z}}(5, -1) + p_2^{\mathbb{Z}}(5, -1)$$
où $p_1(x, y) = -x$ et $p_2(x, y) = y$. Dès lors, $p_2^{\mathbb{Z}}(5, -1) = -1$ et une étape supplémentaire est nécessaire pour calculer $p_1^{\mathbb{Z}}(5, -1)$. Finalement nous trouvons bien que $p^{\mathbb{Z}}(5, -1) = -5 + (-1) = -6$.

Nous avons désormais les outils nécessaires pour formaliser le concept d'identité tel que vu dans les exemples de la section 1.1.

Définition 1.17. *Une* identité *de type $\mathcal{F}$ sur un ensemble X est une expression de la forme*
$$p \approx q$$
où $p, q \in T(X)$. Soit $\boldsymbol{A}$ une algèbre de type $\mathcal{F}$, $\boldsymbol{A}$ satisfait l'identité $p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots, x_n)$ si
$$p^A(a_1, \ldots, a_n) = q^A(a_1, \ldots, a_n)$$
pour tout $a_1, \ldots, a_n \in A$. On écrit alors que $\boldsymbol{A} \models p \approx q$. Si Σ est un ensemble d'identités, on écrit $\boldsymbol{A} \models \Sigma$ si $\boldsymbol{A}$ satisfait toutes les identités dans Σ.

La définition qui suit permet de voir les algèbres d'un même type et satisfaisant un même ensemble d'identités comme une seule entité appelée une classe équationnelle.

Définition 1.18. *Soit Σ un ensemble d'identités de type $\mathcal{F}$. On définit*

$$M(\Sigma) := \{\boldsymbol{A} \models \Sigma \mid \boldsymbol{A} \text{ est une algèbre de type } \mathcal{F}\}.$$

Soit K une classe d'algèbres de type $\mathcal{F}$, K est une classe équationnelle *s'il existe Σ tel que $K = M(\Sigma)$.*

Exemple 1.19. Soit $X = \{x, y, z\}$ un ensemble de variables et $\mathcal{F} = \{\cdot, ^{-1}, 1\}$ un langage d'algèbres dont les opérations sont respectivement d'arité 2, 1 et 0.

Définissons les trois identités suivantes :

I1 : $x \cdot (y \cdot z) \approx (x \cdot y) \cdot z$

I2 : $x \cdot 1 \approx 1 \cdot x \approx 1$

I3 : $x \cdot x^{-1} \approx x^{-1} \cdot x \approx 1$

Soit Σ reprenant les identités de I1 à I3 et K la classe des algèbres définissant un groupe. Par l'exemple 1.4 nous déduisons que $K = M(\Sigma)$ et donc que les groupes forment une classe équationnelle. Il est clair que de manière similaire chaque exemple de la section 1.1 forme une classe équationnelle.

1.2.2 Variété

Nous abordons dans cette sous-section une autre approche des classes équationnelles. Les variétés correspondent à la terminologie la plus courante dans la littérature mathématique. En outre, les variétés d'algèbres nous fournissent des outils différents pour mieux cerner cette notion de classe équationnelle. Nous introduisons ainsi de nouveaux concepts de base de l'algèbre universelle en soulignant leur compatibilité avec les termes et les identités de la sous-section précédente.

La première notion qui nous intéresse est celle d'une sous-algèbre. Cette notion fait notamment écho à la définition des sous-groupes et des sous-anneaux dans leur théorie respective.

Définition 1.20. *Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux algèbres de type $\mathcal{F}$. L'algèbre $\boldsymbol{B}$ est une* sous-algèbre *de $\boldsymbol{A}$ si $B \subset A$ et que les opérations fondamentales de $\boldsymbol{B}$ sont les restrictions des opérations fondamentales de $\boldsymbol{A}$.*

Remarque 1.21. Notons que toute identité vérifiée par l'algèbre $\mathbf{A}$ est automatiquement vérifiée par la sous-algèbre $\mathbf{B}$.

Définition 1.22. *Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux algèbres de type $\mathcal{F}$. Une fonction $\alpha : A \to B$ est un* morphisme d'algèbres *entre $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ s'il préserve la structure. C'est-à-dire que pour tout $f \in \mathcal{F}$ n-aire et pour tout $a_1, \ldots, a_n \in A$:*

$$\alpha(f^A(a_1, \ldots, a_n)) = f^B(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)).$$

De plus, si α est surjective, on dit que $\boldsymbol{B}$ est homomorphe à l'image de $\boldsymbol{A}$.

Remarque 1.23. Les morphismes préservent les constantes. En effet, soit c une constante du langage $\mathcal{F}$, alors :

$$\alpha(c_A) = \alpha(f^{\mathbf{A}}(\emptyset)) = f^{\mathbf{B}}(\alpha(\emptyset)) = f^{\mathbf{B}}(\emptyset) = c_B,$$

pour un certain symbole fonctionnel f d'arité nulle.

Remarque 1.24. Si α est un morphisme bijectif nous pouvons définir $\alpha^{-1} : \mathbf{B} \to \mathbf{A}$ tel que $\alpha^{-1}(b) = a$ si et seulement si $\alpha(a) = b$. Il est aisé de vérifier que α^{-1} ainsi défini est bien un morphisme d'algèbres. Ainsi α est un isomorphisme d'algèbres.

Les deux lemmes qui suivent montrent d'une part que les termes définis à la section précédente sont compatibles avec la notion de morphisme d'algèbres et d'autres part que les identités sont préservées par les morphismes surjectifs. La démonstration du premier lemme permet d'illustrer la logique des différentes preuves qui fonctionnent par induction sur la longueur d'un terme.

Lemme 1.25. *Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux algèbres de type $\mathcal{F}$ et $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ un morphisme d'algèbres. Alors pour tout terme $p(x_1, \ldots, x_n)$ de type $\mathcal{F}$:*

$$\alpha(p^{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = p^{\boldsymbol{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n))$$

pour tout $a_1, \ldots, a_n \in A$.

Démonstration. Nous procédons par induction sur la longueur du terme p.

Supposons tout d'abord que $l(p) = 0$.

$\diamond$ Soit $p(x_1, \ldots, x_n) = x_i$ pour un certain $i \in \{1, \ldots, n\}$. Ainsi $p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = a_i$ et $p^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)) = \alpha(a_i)$. Dès lors,

$$\alpha(p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = \alpha(a_i) = p^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)).$$

$\diamond$ Soit $p(x_1, \ldots, x_n) = c$ pour une certaine constante $c \in \mathcal{F}$. Ainsi $p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) = c_A$ et $p^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)) = c_B$. Dès lors,

$$\alpha(p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) = \alpha(c_A) = c_B = p^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)).$$

Supposons désormais que $l(p) > 0$.
Alors il existe $f \in \mathcal{F}$ k-aire et des termes $p_1, \dots, p_k$ tels que :

$$p^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n) = f^{\mathbf{A}}(p_1^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n), \dots, p_k^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)).$$

Il est clair que $l(p_i) < l(p)$ pour tout $1 \leq i \leq k$. Dès lors, par hypothèse inductive :

$$\alpha(p_i^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)) = p_i^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n))$$

pour tout $1 \leq i \leq k$. Par définition de morphisme d'algèbres, nous concluons que :

$$\begin{aligned}
\alpha(p^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)) &= \alpha(f^{\mathbf{A}}(p_1^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n), \dots, p_k^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n))) \\
&= f^{\mathbf{B}}(\alpha(p_1^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)), \dots, \alpha(p_k^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n))) \\
&= f^{\mathbf{B}}(p_1^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)), \dots, p_i^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n))) \\
&= p^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)),
\end{aligned}$$

comme désiré. $\square$

Lemme 1.26. *Soit* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$ *deux algèbres de type* $\mathcal{F}$ *et* $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ *un morphisme d'algèbres surjectif. Toute identité* $p \approx q$ *satisfaite par* $\boldsymbol{A}$ *est également satisfaite par* $\boldsymbol{B}$*.*

Démonstration. Pour tout $b_1, \dots, b_n \in B$ nous savons par la surjectivité de α qu'il existe $a_1, \dots, a_n$ tels que $\alpha(a_i) = b_i$ avec $1 \leq i \leq n$. Dès lors nous avons que :

$$\begin{aligned}
p^{\mathbf{B}}(b_1, \dots, b_n) &= p^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) \\
&= \alpha(p^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)) && \text{par le lemme 1.25.} \\
&= \alpha(q^{\mathbf{A}}(a_1, \dots, a_n)) && \text{car } \mathbf{A} \text{ satisfait } p \approx q \\
&= q^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \dots, \alpha(a_n)) \\
&= q^{\mathbf{B}}(b_1, \dots, b_n),
\end{aligned}$$

Ainsi, $\mathbf{B}$ satisfait l'identité $p \approx q$ comme annoncé. $\square$

La dernière notion dont nous avons besoin pour formuler la définition d'une variété d'algèbres est celle du produit direct de deux algèbres. Tout comme les sous-algèbres et des images homomorphiques, nous pouvons montrer que le produit direct se comporte bien par rapport aux termes et aux identités.

Définition 1.27. *Soit* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$ *deux algèbres de type* $\mathcal{F}$*. On définit le* produit direct $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ *comme l'algèbre de type* $\mathcal{F}$ *dont l'univers est* $A \times B$ *et telle que pour tout symbole n-aire* $f \in \mathcal{F}$ *:*

$$f^{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}}((a_1, b_1), \dots, (a_n, b_n)) = (f^{\boldsymbol{A}}(a_1, \dots, a_n), f^{\boldsymbol{B}}(b_1, \dots, b_n))$$

pour tout $a_1, \ldots, a_n \in A$ et $b_1, \ldots, b_n \in B$.

Remarque 1.28. La définition précédente se généralise aisément pour construire le produit direct d'une famille $\{A_i\}_{i \in I}$ d'algèbres de type $\mathcal{F}$.

Lemme 1.29. *Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux algèbres de type $\mathcal{F}$ et $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ leur produit direct. Alors pour tout terme $p(x_1, \ldots, x_n)$ de type $\mathcal{F}$:*

$$p^{\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}}((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) = (p^{\boldsymbol{A}}(a_1, \ldots, a_n), p^{\boldsymbol{B}}(b_1, \ldots, b_n))$$

pour tout $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in A \times B$.

Démonstration. La preuve de ce lemme suit la même structure que la démonstration du lemme 1.25. □

Lemme 1.30. *Soit $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ deux algèbres de type $\mathcal{F}$ et $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B}$ leur produit direct. Alors toute identité $p(x_1, \ldots, x_n) \approx q(x_1, \ldots x_n)$ de type $\mathcal{F}$ satisfaite par $\boldsymbol{A}$ et $\boldsymbol{B}$ est aussi satisfaite par leur produit direct.*

Démonstration. Pour tout $(a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n) \in A \times B$, nous avons que :

$$\begin{aligned} p^{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) &= (p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n), p^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n)) \\ &= (q^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n), q^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n)) \\ &= q^{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)), \end{aligned}$$

où nous utilisons le lemme 1.29 ainsi que l'hypothèse que $\mathbf{A}, \mathbf{B} \models p \approx q$. □

Nous avons désormais à notre disposition les concepts nécessaires à la définition d'une variété. De plus, les différents lemmes de cette sous-section nous permettent de montrer qu'une classe équationnelle forme une variété.

Définition 1.31. *Soit K une classe d'algèbres de type $\mathcal{F}$. La classe K est une* variété *si elle est stable sous les sous-algèbres, les images homomorphiques et les produits directs.*

Théorème 1.32 (Birkhoff)**.** *Une classe K d'algèbres de type $\mathcal{F}$ est une classe équationnelle si et seulement si elle forme une variété.*

Démonstration. Montrons qu'une classe équationnelle définit une variété. Soit K une classe équationnelle d'algèbres : $K = M(\Sigma)$ pour Σ un certain ensemble d'identités. Considérons $V(K)$ la plus petite variété contenant la classe d'algèbres K. C'est-à-dire que $V(K)$ est l'intersection de toutes la variétés contenant K (nous pouvons montrer que cela définit bien une variété). Grâce au lemme 1.30 généralisé pour les produits infinis, à la remarque 1.21 ainsi qu'au lemme 1.26, nous pouvons conclure que $V(K)$ satisfait les identités dans Σ. Ainsi, la variété $V(K)$ est incluse dans $M(\Sigma)$. Dès lors, sachant que $K \subset V(K)$ et $V(K) \subset M(\Sigma) = K$, nous pouvons conclure que $V(K) = K$ et donc que K définit une variété.

Pour la seconde implication de ce théorème nous renvoyons le lecteur vers [26] pour ne pas alourdir ce texte. □

1.3 Congruences et Algèbres quotients

Les mathématiciens ont naturellement cherché à donner une formulation commune aux quotients d'un groupe par un sous-groupe normal et d'un anneau par un idéal. Pour ce faire, il est d'abord nécessaire de généraliser le concept de "relation d'équivalence sur un ensemble" à un concept applicable sur une structure d'algèbre universelle quelconque. L'idée est simplement que les opérations algébriques appliquées à des éléments équivalents donnent des éléments équivalents. Nous parlerons de congruence sur une algèbre. Nous nous référons à nouveau au livre de S. Burris et H.P. Sankappanavar [26] pour les définitions présentes dans cette section.

Définition 1.33. *Soit $\boldsymbol{A}$ une algèbre de type $\mathcal{F}$, θ est une* congruence *sur $\boldsymbol{A}$ si θ est une relation d'équivalence sur A et qu'elle est "compatible" avec la structure. C'est-à-dire que pour tout symbole fonctionnel n-aire $f \in \mathcal{F}$ et $a_i, b_i \in A$, si $a_i \;\theta\; b_i$ pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ alors :*

$$f^A(a_1, \ldots, a_n) \;\theta\; f^A(b_1, \ldots, b_n).$$

Exemple 1.34 (Ensemble)**.** Une congruence sur un ensemble $\mathbf{X}$ est simplement une relation d'équivalence car nous n'avons pas de structure additionnelle donnée par le langage.

Exemple 1.35 (Groupes)**.** Une congruence sur un groupe $\mathbf{G} = \langle G, \cdot, ^{-1}, 1\rangle$ est une relation d'équivalence θ telle que pour tout $x_1, y_1, x_2, y_2 \in G$:

Si $x_1 \;\theta\; y_1$ et $x_2 \;\theta\; y_2$ alors $x_1 \cdot x_2 \;\theta\; y_1 \cdot y_2$.

Si $x_1 \;\theta\; y_1$ alors $x_1^{-1} \;\theta\; y_1^{-1}$.

Prenons $\mathbf{G}_1 = \langle \mathbb{Z}, +, -, 0\rangle$. On peut définir une congruence $\tilde{\theta}$ telle que $x \;\tilde{\theta}\; y$ si et seulement si $x - y \in 2\mathbb{Z}$ et $x, y \in \mathbb{Z}$. En effet, si $x_1 - y_1 = 2z_1$ et $x_2 - y_2 = 2z_2$ alors on a que $(x_1 + x_2) - (y_1 + y_2) = 2(z_1 + z_2) \in 2\mathbb{Z}$. Il est tout aussi immédiat de vérifier la seconde condition.

Prenons le groupe $\mathbf{G}_2 = \langle \mathrm{Sym}(3), \circ, ^{-1}, 1_{\mathbf{G}}\rangle$ et considérons le sous-groupe $H = \{1_{\mathbf{G}}, (1, 2)\}$. Nous définissons $\hat{\theta}$ comme la relation d'équivalence sur $\mathbf{G}_2$ telle que $g_1 \;\hat{\theta}\; g_2$ si et seulement si $g_2^{-1} \circ g_1 \in H$. En prenant $g_1 = (1, 2, 3)$ et $g_2 = (1, 3)$ on remarque que $g_1 \;\hat{\theta}\; g_2$ mais que $g_1^{-1} = (2, 1, 3)$ n'est pas en relation avec $g_2^{-1} = (1, 3)$. Cette relation d'équivalence n'est dès lors pas une congruence.

L'exemple ci-dessus n'est pas une congruence car H n'est pas un sous-groupe normal de $\mathbf{G}_2$. En effet, nous savons qu'il existe une bijection entre l'ensemble des sous-groupes normaux d'un groupe $\mathbf{G} = \langle G, \cdot, ^{-1}, 1_G \rangle$ et les congruences sur ce groupe. Cette bijection se construit de la manière suivante : à une congruence θ nous pouvons associer le sous-groupe normal $N := \{ \ n \in G \mid n \ \theta \ 1_G \ \}$. Inversement, à un sous-groupe normal N nous pouvons associer la congruence θ définie par $g \ \theta \ h$ si et seulement si $h^{-1} \cdot g \in G$.

Exemple 1.36 (Anneaux)**.** Tout comme pour les groupes, nous pouvons construire une bijection explicite entre les idéaux d'un anneau et les congruences sur cet anneau.

Exemple 1.37 (Congruence noyau)**.** Pour tout morphisme d'algèbre $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ nous pouvons définir la congruence suivante sur $\mathbf{A}$: $a_1 \ \theta \ a_2$ si et seulement si $\alpha(a_1) = \alpha(a_2)$. Cette congruence est appelée "congruence noyau" de α.

A l'instar des relations d'équivalences sur un ensemble E qui correspondent aux sous-ensembles du produit cartésien $E \times E$, les congruences sur une algèbre $\mathbf{A}$ correspondent aux sous-algèbres de $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$:

Lemme 1.38. *Une relation d'équivalence θ sur une algèbre $\boldsymbol{A}$ est une congruence si et seulement si θ est une sous-algèbre de $\boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$.*

Démonstration. Nous savons qu'une relation d'équivalence θ sur un ensemble A correspond à un sous-ensemble de $A \times A$. Montrons que les opérations fondamentales de $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ peuvent se restreindre à θ si et seulement si θ est une congruence. Pour tout $a_i, b_i \in A$ tels que $(a_i, b_i) \in \theta$ avec $1 \leq i \leq n$:

$$\begin{aligned} \theta \text{ est une sous-algèbre de } \mathbf{A} \times \mathbf{A} &\Leftrightarrow f^{\mathbf{A} \times \mathbf{A}}((a_1, b_1), \ldots, (a_n, b_n)) \in \theta \\ &\Leftrightarrow (f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n), f^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n)) \in \theta \\ &\Leftrightarrow \theta \text{ est une congruence sur } \mathbf{A}. \end{aligned}$$

□

Les exemples 1.35 et 1.36 offrent une intuition quant au concept de congruence. En effet, si les sous-groupes normaux (respectivement les idéaux) sont les notions appropriées pour définir les quotients de groupes (respectivement d'anneaux), le concept de congruence semble être la généralisation appropriée pour parler de quotient d'une algèbre.

Définition 1.39. *Soit $\boldsymbol{A}$ une algèbre et θ une congruence sur $\boldsymbol{A}$. On définit l'*algèbre quotient *$\boldsymbol{A}/\theta$ comme l'algèbre dont l'univers est $A/\theta = \{[a] \mid a \in A\}$ et pour tout opération fondamentale n-aire f^A sur A on définit l'opération n-aire $f^{A/\theta}$ sur A/θ par :*

$$f^{A/\theta}([a_1], \ldots, [a_n]) = [f^A(a_1, \ldots, a_n)].$$

Remarque 1.40. L'opération $f^{A/\theta}$ est bien définie car si $a_i \; \theta \; b_i$ pour tout $1 \leq i \leq n$ alors :

$$f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) \; \theta \; f^{\mathbf{A}}(b_1, \ldots, b_n),$$

par définition de congruence.

Remarque 1.41. A l'image des lemmes concernant la compatibilité des termes et identités avec les notions de sous-algèbre, d'image homomorphique et de produit direct, nous pouvons montrer que les notions de congruence et de quotient sont elles aussi compatibles. Ainsi, pour tout algèbre $\mathbf{A}$ de type $\mathcal{F}$ avec θ une congruence sur $\mathbf{A}$ et $p(x_1, \ldots, x_n)$ un terme de type $\mathcal{F}$ nous avons que :

$$p^{\mathbf{A}/\theta}([a_1], \ldots, [a_n]) = [p^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)],$$

pour tout $a_1, \ldots, a_n \in A$. La preuve suit à nouveau la structure de la démonstration du lemme 1.25. Cela est bien défini car nous pouvons montrer que la remarque 1.40 tient aussi pour un terme p à la place du symbole fonctionnel f (par induction sur la longueur du terme p).

En outre, le lemme 1.26 implique que $\mathbf{A}/\theta$ vérifie les mêmes identités que $\mathbf{A}$.

1.4 Algèbres libres

Le concept d'objet libre est une notion transversale en algèbre (monoïde libre, groupe libre, algèbre de Lie libre etc.). Les K-algèbres libres pour une classe d'algèbres K sont une généralisation de ces constructions et l'étude des propriétés de ces objets particuliers permet d'obtenir des informations générales sur la classe K. Ainsi, ces objets servent notamment à montrer que toute variété est une classe équationnelle (théorème 1.32) et à prouver certaines caractérisations pour des familles intéressantes de variétés. Des exemples de telles caractérisations sont présentés dans le chapitre 3 (théorèmes 3.9 et 3.16). Dans cette section, nous définissons les K-algèbres libres uniquement pour des classes équationnelles afin de rester centrés sur notre objet d'étude et de continuer avec le vocabulaire issu des termes et des identités. Une définition générale peut être trouvée dans le livre de S. Burris et H.P. Sankappanavar [26].

Pour définir le concept de K-algèbre libre nous devons d'abord introduire deux notions élémentaires. D'une part, l'algèbre des termes pour un ensemble de variables X sera l'objet de départ dans la construction d'une algèbre libre sur X. D'autre part, nous devrons quotienter cette algèbre par une congruence adéquate pour que les identités de K soient satisfaites dans l'algèbre libre.

Définition 1.42. *Soit un langage $\mathcal{F}$ et un ensemble de variables X. On définit $\boldsymbol{T}(X)$ l'*algèbre des termes *de type $\mathcal{F}$ sur X comme étant l'algèbre d'univers $T(X)$ (l'ensemble* *des termes, voir 1.12) et dont les opérations fondamentales sont telles que :*

$$f^{\boldsymbol{T}(X)}(p_1, \ldots, p_n) = f(p_1, \ldots, p_n),$$

pour f un symbole fonctionnel n-aire dans $\mathcal{F}$ et $p_i \in T(X)$ avec $i = 1, \ldots, n$.

Définition 1.43. *Soient $\boldsymbol{A}$ une algèbre et S un sous-ensemble de $A \times A$. La* congruence générée par S *est la plus petite congruence sur $\boldsymbol{A}$ telle que S soit inclus dedans. Cette congruence est définie par :*

$$\theta = \bigcap_{\substack{\psi \text{ congruence} \\ S \subset \psi}} \psi.$$

Remarque 1.44. Il est aisé de montrer qu'une intersection arbitraire de congruences et encore une congruence. Ainsi, la notion de congruence générée par un sous-ensemble est bien définie.

Nous avons désormais les outils nécessaires pour construire l'algèbre libre d'une classe équationnelle K. Par construction cet objet appartiendra toujours à la classe K. Notons que cette propriété n'est pas vraie pour la définition plus générale donnée dans [26] lorsque K ne forme pas une variété.

Définition 1.45. *Soient $K = M(\Sigma)$ une classe équationnelle de type $\mathcal{F}$ pour un ensemble d'identités Σ et X un ensemble. Considérons les sous-ensembles de $T(X) \times T(X)$:*

$$S_{p \approx q} = \{(t, t') \mid \exists t_1, \ldots, t_n \text{ tels que } t = p(t_1, \ldots, t_n) \text{ et } t' = q(t_1, \ldots, t_n)\},$$

pour chaque identité $p \approx q$ dans Σ. Définissons l'ensemble suivant :

$$S = \bigcup_{\substack{p \approx q \\ \text{identité}}} S_{p \approx q}.$$

*L'*algèbre K-libre sur X *est le quotient :*

$$\boldsymbol{F}_K(X) = \boldsymbol{T}(X)/\theta$$

où θ est la congruence générée par S. Par construction, nous avons que $\boldsymbol{F}_K(X) \in K$.

A l'instar des objets libres en théorie des groupes, en algèbre commutative ou encore en algèbre de Lie, l'algèbre libre $\mathbf{F}_K(X)$ possède la propriété universelle pour K sur X telle qu'énoncée ci-dessous. Une preuve de ce résultat se trouve à nouveau dans "*A course in Universal Algebra*" de S. Burris et H.P. Sankappanavar [26].

Théorème 1.46 (Birkhoff)**.** *Soient $\boldsymbol{A}$ une algèbre de type $\mathcal{F}$ appartenant à une classe équationnelle K et X un ensemble. Pour toute fonction $\tilde{f} : X \to \boldsymbol{A}$, il existe un unique morphisme d'algèbres $f : \boldsymbol{F}_K(X) \to \boldsymbol{A}$ tel que $f \circ i = \tilde{f}$ où $i(x) = [x]$ pour tout $x \in X$:*

$$\begin{tikzcd} X \arrow[rr, "\tilde{f}"] \arrow[dr, "i"'] & & \boldsymbol{A} \\ & \boldsymbol{F}_K(X). \arrow[ur, dashed, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Le prochain théorème s'intéresse à la relation des K-algèbres libres avec les identités vérifiées dans K. Ce résultat permet d'extraire des informations sur les identités valables dans K à partir des identités de $\mathbf{F}_K$. Il jouera un rôle central dans les preuves de certaines caractérisations des variétés dites soustractives que nous étudions dans le troisième chapitre.

Théorème 1.47. *Soient K une classe équationnelle de type $\mathcal{F}$ et $p, q \in T(X)$ deux termes de type $\mathcal{F}$ sur l'ensemble des variables X. Nous avons que :*

$$[p] = [q] \text{ in } \boldsymbol{F}_K(X) \;\Leftrightarrow\; K \models p \approx q.$$

Démonstration. Si $K \models p \approx q$, il est clair que, par construction de l'algèbre libre, $[p] = [q]$ in $\mathbf{F}_K(X)$.

Inversement, supposons que $[p(x_1, \ldots, x_n)] = [q(x_1, \ldots, x_n)]$ in $\mathbf{F}_K(X)$. Soient $\mathbf{A}$ une algèbre quelconque de K et $a_1, \ldots, a_n \in A$. Considérons la fonction $\tilde{f} : X \to A$ telle que $\tilde{f}(x_i) = a_i$ pour $i = 1, \ldots, n$. Par le théorème 1.46, cette fonction s'étend en un morphisme d'algèbres $f : \mathbf{F}_K(X) \to \mathbf{A}$ tel que $f \circ i = \tilde{f}$. Remarquons que $f([p(x_1, \ldots, x_n)]) = p(a_1, \ldots, a_n)$ et $f([q(x_1, \ldots, x_n)]) = q(a_1, \ldots, a_n)$. Dès lors, comme $[p] = [q]$ dans $\mathbf{F}_K(X)$, nous avons que :

$$p(a_1, \ldots, a_n) = q(a_1, \ldots, a_n).$$

Ainsi, $\mathbf{A} \models p \approx q$ pour tout algèbre $\mathbf{A}$ de K donc $K \models p \approx q$. comme souhaité. $\square$

Chapitre 2

Variétés d'algèbres et leur exactitude

Soit $\mathcal{V}$ une variété d'algèbres. Nous pouvons regarder cette variété comme une catégorie dont les objets sont les algèbres de $\mathcal{V}$ et les flèches sont les morphismes d'algèbres.

En effet, nous avons d'une part que la fonction identité $1_A : A \to A$ définit un morphisme d'algèbres $1_{\mathbf{A}} : \mathbf{A} \to \mathbf{A}$ pour toute algèbre $\mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} 1_{\mathbf{A}}(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) &= f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n) \\ &= f^{\mathbf{A}}(1_{\mathbf{A}}(a_1), \ldots, 1_{\mathbf{A}}(a_n)). \end{aligned}$$

D'autre part, la composée de deux morphismes d'algèbres est encore un morphisme d'algèbres. Prenons $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ et $\beta : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ deux morphismes d'algèbres, nous vérifions que :

$$\begin{aligned} (\beta \circ \alpha)(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) &= \beta(f^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n)) \\ &= f^{\mathbf{C}}((\beta \circ \alpha)(a_1), \ldots, (\beta \circ \alpha)(a_n)). \end{aligned}$$

Par ailleurs, il est clair que le morphisme identité est l'élément neutre de la composition et que cette dernière est associative car ces deux propriétés sont satisfaites par les fonctions.

L'objectif de ce chapitre est de démontrer la proposition suivante :

Proposition 2.1. *Une variété d'algèbres est exacte au sens de Barr.*

Selon la définition de M. Barr énoncée dans [3], une catégorie est exacte si elle est régulière et que les relations d'équivalences internes sont effectives. Nous nous attelons à montrer ces deux propriétés pour une variété $\mathcal{V}$ dans les sections 2.2 et 2.3. Nous montrons au préalable qu'une variété est finiment complète dans la première section de ce chapitre.

2.1 Existence des limites finies

Dans cette section, nous montrons la proposition 2.2 nous garantissant l'existence des limites finies dans une variété d'algèbres universelles quelconque $\mathcal{V}$.

Proposition 2.2. *Soit $\mathcal{V}$ une variété d'algèbres. La catégorie $\mathcal{V}$ est finiment complète.*

Démonstration. Pour démontrer cette proposition il suffit, par une propriété bien connue (cfr. F. Borceux dans [5]), de montrer que $\mathcal{V}$ admet tous les produits finis ainsi que tous les égalisateurs.

Montrons tout d'abord que les produits binaires existent dans $\mathcal{V}$. Le produit binaire de deux algèbres $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ est donné par le produit direct $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ défini en 1.27 muni des projections $\pi_1 : \mathbf{A}\times\mathbf{B} \to \mathbf{A}$ et $\pi_2 : \mathbf{A}\times\mathbf{B} \to \mathbf{B}$ définies par $\pi_1(a,b) = a$ et $\pi_2(a,b) = b$. Par définition d'une variété, ce produit est dans $\mathcal{V}$. En outre, via l'approche des classes équationnelles, le lemme 1.30 nous assure que le produit direct de $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$ est bien dans la même classe équationnelle que $\mathbf{A}$ et $\mathbf{B}$. Vérifions que les deux projections définissent des morphismes d'algèbres, nous avons que :

$$\begin{aligned}\pi_1(f^{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}((a_1,b_1),\ldots,(a_n,b_n)) &= \pi_1(f^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_n), f^{\mathbf{B}}(b_1,\ldots,b_n))\\ &= f^{\mathbf{A}}(a_1,\ldots,a_n)\\ &= f^{\mathbf{A}}(\pi_1(a_1,b_1)\ldots,\pi_1(a_n,b_n)),\end{aligned}$$

cela valant pour π_2 également, les projections sont bien des morphismes d'algèbres.

Il reste à vérifier que pour toute paire $\alpha : \mathbf{C} \to \mathbf{A}$ et $\beta : \mathbf{C} \to \mathbf{B}$ de morphismes dans $\mathcal{V}$, il existe un unique morphisme d'algèbres $\gamma : \mathbf{C} \to \mathbf{A}\times\mathbf{B}$ tel que $\pi_1 \circ \gamma = \alpha$ et $\pi_2 \circ \gamma = \beta$ dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} & \mathbf{A}\times\mathbf{B} \arrow[l, "\pi_1"'] \arrow[r, "\pi_2"] & \mathbf{B} \\ & \mathbf{C}. \arrow[ul, "\alpha"] \arrow[u, dashed, "\gamma"] \arrow[ur, "\beta"'] & \end{tikzcd}$$

Définissons $\gamma : \mathbf{C} \to \mathbf{A}\times\mathbf{B} : c \mapsto (\alpha(c), \beta(c))$ pour $c \in C$. Nous pouvons montrer aisément que γ est bien un morphisme d'algèbres en utilisant le fait que α et β le sont. Ce morphisme est l'unique faisant commuter le diagramme par construction.

Par induction nous pouvons montrer que tous les produits finis d'indice plus grand ou égal à deux existent dans $\mathcal{V}$. Sachant que $\mathcal{V}$ admet le singleton comme objet terminal, nous pouvons conclure que $\mathcal{V}$ admet bien tous les produits finis, comme annoncé.

Montrons désormais que $\mathcal{V}$ possède tous les égalisateurs. Soit $\alpha, \beta : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ deux morphismes dans $\mathcal{V}$. Montrons que l'égalisateur de α et β est donné par l'inclusion suivante :

$$\mathbf{E} = \{a \in A \mid \alpha(a) = \beta(a)\} \xhookrightarrow{e} \mathbf{A}.$$

Vérifions d'abord que $\mathbf{E}$ est bien une sous-algèbre de $\mathbf{A}$. Soit $\mathcal{F}$ le type des algèbres de $\mathcal{V}$ et $f \in \mathcal{F}$, si $a_1, \ldots, a_n \in E$ on a que :

$$\begin{aligned}\alpha(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)) &= f^{\mathbf{B}}(\alpha(a_1), \ldots, \alpha(a_n))\\ &= f^{\mathbf{B}}(\beta(a_1), \ldots, \beta(a_n))\\ &= \beta(f^{\mathbf{A}}(a_1, \ldots, a_n)).\end{aligned}$$

Dès lors les opérations fondamentales de $\mathbf{E}$ sont bien définies et $\mathbf{E}$ est une sous-algèbre de $\mathbf{A}$. De plus, il est clair que si une identité est satisfaite dans $\mathbf{A}$ elle l'est dans $\mathbf{E}$, ce qui implique que $\mathbf{E} \in \mathcal{V}$.

Vérifions maintenant que pour tout morphisme $\gamma : \mathbf{C} \to \mathbf{A}$ tel que $\alpha \circ \gamma = \beta \circ \gamma$, il existe un unique morphisme d'algèbres $\tilde{\gamma} : \mathbf{C} \to \mathbf{E}$ tel que $e \circ \tilde{\gamma} = \gamma$ dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{E} \arrow[r, hook, "e"] & \mathbf{A} \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \mathbf{B} \\
& \mathbf{C}. \arrow[ul, dashed, "\tilde{\gamma}"] \arrow[u, "\gamma"'] &
\end{tikzcd}$$

Définissons $\tilde{\gamma} : \mathbf{C} \to \mathbf{E} : c \mapsto \gamma(c)$. En effet, il est clair que $\gamma(c) \in E,\ \forall c \in C$ et nous avons que $\tilde{\gamma}$ est un morphisme d'algèbres car γ en est un. L'unicité découle directement du fait que e est un monomorphisme. Ainsi, la catégorie $\mathcal{V}$ possède tous les égalisateurs, comme souhaité.

Dès lors, toute variété au sens de l'algèbre universelle est finiment complète. □

2.2 Relations d'équivalences

Dans cette section nous introduisons les définitions catégoriques liées aux relations d'équivalences pour ensuite démontrer que toute relation interne d'une variété est effective, c'est-à-dire qu'elle est une paire noyau. On remarquera que les relations d'équivalences catégoriques sur une algèbre correspondent aux congruences dans les variétés d'algèbres universelles.

Définition 2.3. *Une* relation interne $(\boldsymbol{R}, r_1, r_2)$ *entre* $\boldsymbol{A}$ *et* $\boldsymbol{B}$ *dans une catégorie* $\mathcal{C}$ *est un graphe :*

$$\begin{tikzcd} & \boldsymbol{R} \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[dr, "r_2"] & \\ \boldsymbol{A} & & \boldsymbol{B}, \end{tikzcd}$$

tel que la paire (r_1, r_2) *est conjointement monomorphe. Si* $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{B}$ *on dit que* $\mathbf{R}$ *est une relation sur* $\boldsymbol{A}$*.*

Définition 2.4. *Une relation interne* $(\boldsymbol{R}, r_1, r_2)$ *sur* $\boldsymbol{A}$ *est* réflexive *s'il existe* $\delta : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{R}$ *tel que* $r_1 \circ \delta = 1_{\boldsymbol{A}} = r_2 \circ \delta$*.*

Définition 2.5. *Une relation interne* $(\boldsymbol{R}, r_1, r_2)$ *sur* $\boldsymbol{A}$ *est* symétrique *s'il existe* $\sigma : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ *tel que* $r_1 \circ \sigma = r_2$ *et* $r_2 \circ \sigma = r_1$*.*

Définition 2.6. *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie avec produits fibrés. Une relation interne* $(\boldsymbol{R}, r_1, r_2)$ *sur* $\boldsymbol{A} \in \mathcal{C}$ *est* transitive *s'il existe* $\tau : \boldsymbol{R} \times_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$ *tel que* $r_1 \circ \tau = r_1 \circ p_1$ *et* $r_2 \circ \tau = r_2 \circ p_2$ *où* $(\boldsymbol{R} \times_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{R}, p_1, p_2)$ *désigne le produit fibré de la paire* (r_1, r_2) *tel que sur le diagramme suivant :*

$$\begin{tikzcd} \boldsymbol{R} \times_{\boldsymbol{A}} \boldsymbol{R} \arrow[r, "p_2"] \arrow[d, "p_1"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \boldsymbol{R} \arrow[d, "r_1"] \\ \boldsymbol{R} \arrow[r, "r_2"] & \boldsymbol{A}. \end{tikzcd}$$

Définition 2.7. *Soit* $\mathcal{C}$ *une catégorie avec produits fibrés. Une relation interne* $(\boldsymbol{R}, r_1, r_2)$ *sur* $\boldsymbol{A} \in \mathcal{C}$ *est une* relation d'équivalence *si elle est réflexive, symétrique et transitive.*

Remarque 2.8. Nous nous plaçons dans le contexte d'une catégorie finiment complète, de sorte que tous les produits fibrés existent. Notons que nous pouvons construire explicitement le produit fibré de deux morphismes quelconques dans la catégorie $\mathcal{V}$. Ceci est illustré dans le lemme 2.9 ci-dessous.

Lemme 2.9. *Soient* $\alpha : \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{C}$ *et* $\beta : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{C}$ *deux morphismes d'algèbres, le produit fibré dans* $\mathcal{V}$ *de* α, β *est donné par* $(\boldsymbol{A} \times_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{B}, p_1, p_2)$ *où :*

$$\boldsymbol{A} \times_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{B} = \{(a, b) \in A \times B \mid \alpha(a) = \beta(b)\},$$

$$p_1 = \boldsymbol{A} \times_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{B} \xhookrightarrow{i} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \xrightarrow{\pi_1} \boldsymbol{A},$$

$$p_2 = \boldsymbol{A} \times_{\boldsymbol{C}} \boldsymbol{B} \xhookrightarrow{i} \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{B} \xrightarrow{\pi_2} \boldsymbol{B},$$

avec $i : \boldsymbol{Eq}(\alpha) \hookrightarrow \boldsymbol{A} \times \boldsymbol{A}$ *l'inclusion et* π_1, π_2 *les projections du produit.*

Démonstration. Il est aisé de voir que $\mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \in \mathcal{V}$. Par ailleurs, montrons que cette construction satisfait la propriété universelle du produit fibré. Soient $g : \mathbf{X} \to \mathbf{A}$ et $h : \mathbf{X} \to \mathbf{B}$ deux morphismes d'algèbres tels que $\alpha \circ g = \beta \circ h$, nous voulons montrer qu'il existe un unique morphisme $\gamma : \mathbf{X} \to \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$ tel que $p_2 \circ \gamma = h$ et $p_1 \circ \gamma = g$ dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\gamma"] \arrow[drr, bend left, "g"] \arrow[ddr, bend right, "h"'] & & \\
& \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & \mathbf{A} \arrow[d, "\alpha"] \\
& \mathbf{B} \arrow[r, "\beta"'] & \mathbf{C}.
\end{tikzcd}$$

La propriété universelle du produit induit une unique flèche $(g, h) : \mathbf{X} \to \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ telle que $\pi_1 \circ (g, h) = g$ et $\pi_2 \circ (g, h) = h$. Or, nous remarquons que, pour tout $x \in X$, $(g, h)(x) = (g(x), h(x)) \in \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}$. Dès lors, la flèche (g, h) se factorise à travers $i : \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B} \to \mathbf{A} \times \mathbf{B}$ et nous posons $\gamma : \mathbf{X} \to \mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B} : x \mapsto (g(x), h(x))$. Il est clair que $p_1 \circ \gamma = g$ et $p_2 \circ \gamma = h$ et que ce morphisme est l'unique ayant ces propriétés car p_1 et p_2 sont conjointement monomorphes. Le triplet $(\mathbf{A} \times_{\mathbf{C}} \mathbf{B}, p_1, p_2)$ est bien le produit fibré de α et β. Notons que cette construction du produit fibré est une construction générale lorsque la catégorie possède les produits binaires et les égalisateurs. $\square$

Nous pouvons désormais prouver que les relations internes dans une variété sont effectives et ainsi avancer dans la preuve d'exactitude d'une variété :

Proposition 2.10. *Toute relation d'équivalence dans une variété d'algèbres universelles est une paire noyau.*

Démonstration. Soit $(\mathbf{R}, r_1, r_2)$ une relation d'équivalence sur l'algèbre $\mathbf{A}$. Nous pouvons considérer la projection sur le quotient $q : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\mathbf{R}$, en effet, $\mathbf{R}$ peut être vu comme une congruence par la remarque 2.11. Soit $(\mathbf{Eq}(q), p_1, p_2)$ la paire noyau de q telle que sur le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{R} \arrow[r, shift left, "r_1"] \arrow[r, shift right, "r_2"'] \arrow[dr, dashed, "i"'] & \mathbf{A} \arrow[r, "q"] & \mathbf{A}/\mathbf{R} \\
& \mathbf{Eq}(q). \arrow[u, shift left, "p_1"] \arrow[u, shift right, "p_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Par la construction explicite du produit fibré 2.9, nous savons que :

$$\mathbf{Eq}(q) = \{(a, a') \in A \times A \mid q(a) = q(a')\}.$$

Or $(a, a') \in \mathbf{R} \subset \mathbf{A} \times \mathbf{A}$ si et seulement si $q(a) = q(a')$ si et seulement si $(a, a') \in \mathbf{Eq}(q)$. Ainsi, nous pouvons conclure que $(\mathbf{R}, r_1, r_2)$ est isomorphe à la paire noyau $(\mathbf{Eq}(q), p_1, p_2)$ et donc que toute relation d'équivalence est effective. □

Remarque 2.11. Les relations d'équivalence au sens catégorique internes à une algèbre correspondent aux congruences sur cette algèbre.

En effet, dans un sens nous pouvons associer à une congruence θ sur $\mathbf{A}$, le triplet $(\theta, \theta_1, \theta_2)$ tel que :

$$\theta = \{\ (a_1, a_2) \in A \times A \mid a_1\ \theta\ a_2\ \},$$

$$\theta_1 = \theta \xhookrightarrow{i} \mathbf{A} \times \mathbf{A} \xrightarrow{\pi_1} \mathbf{A}$$

$$\theta_2 = \theta \xhookrightarrow{i} \mathbf{A} \times \mathbf{A} \xrightarrow{\pi_2} \mathbf{A}.$$

D'une part, la paire (θ_1, θ_2) est conjointement monomorphe car la paire (π_1, π_2) l'est et i est un monomorphisme. D'autre part, nous remarquons que $(\theta, \theta_1, \theta_2)$ est la paire noyau du morphisme $q : \mathbf{A} \to \mathbf{A}/\theta$. Or nous savons que toute paire noyau est une relation d'équivalence au sens catégorique (cfr. [12] : Section 4.2.2, Lemme 2) donc $(\theta, \theta_1, \theta_2)$ est bien une relation d'équivalence.

Dans l'autre sens, une relation d'équivalence au sens catégorique $(\mathbf{R}, r_1, r_2)$ sur une algèbre $\mathbf{A}$ peut être vue comme une sous-algèbre de $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ via le monomorphisme $(r_1, r_2) : \mathbf{R} \to \mathbf{A} \times \mathbf{A}$. Par le lemme 1.38, il nous suffit de montrer que R est une relation d'équivalence sur A au sens usuel pour conclure. Or, il est aisé de voir que R est réflexive, symétrique et transitive au sens usuel en utilisant les définitions catégoriques analogues. Dès lors, R est une congruence sur $\mathbf{A}$.

2.3 Régularité

Dans cette section nous prouvons qu'une variété d'algèbres est une catégorie régulière. Nous nous basons sur la définition de catégorie régulière issue de [3] :

Définition 2.12. *Une catégorie $\mathcal{C}$ admettant toutes les limites finies est* régulière *si :*

1. *toute paire noyau a un coégalisateur dans $\mathcal{C}$,*
2. *les épimorphismes réguliers sont stables par produit fibré dans $\mathcal{C}$.*

Nous avons montré au début de ce chapitre que $\mathcal{V}$ admettait les limites finies. Ainsi, pour prouver la régularité de $\mathcal{V}$, il suffit de démontrer les lemmes 2.13 et 2.14 énoncés ci-après. Notons que le résultat plus général du lemme 2.13 sur l'existence des coégalisateurs quelconques dans $\mathcal{V}$ nous sera utile dans la preuve suivante.

Lemme 2.13. *La catégorie $\mathcal{V}$ possède tous les coégalisateurs.*

Lemme 2.14. *Les épimorphismes réguliers sont stables par produit fibré dans $\mathcal{V}$.*

Démonstration du lemme 2.13. Soit $\alpha, \beta : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ deux morphismes dans $\mathcal{V}$. Montrons que le coégalisateur de α et β est donné par le quotient $\mathbf{B} \xrightarrow{q} \mathbf{B}/\theta$, où θ est la plus petite congruence sur $\mathbf{B}$ telle que :

$$b_1 \ \theta \ b_2 \text{ s'il existe } a \in A \text{ avec } \begin{cases} \alpha(a) = b_1, \\ \beta(a) = b_2. \end{cases} \tag{2.1}$$

Notons que cette congruence existe, voir section 1.4. Soit $\gamma : \mathbf{B} \to \mathbf{C}$ un morphisme d'algèbres tel que $\gamma \circ \alpha = \gamma \circ \beta$. Vérifions qu'il existe un unique morphisme $\tilde{\gamma} : \mathbf{B}/\theta \to \mathbf{C}$ tel que $\tilde{\gamma} \circ q = \gamma$ dans le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, shift left, "\alpha"] \arrow[r, shift right, "\beta"'] & \mathbf{B} \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\gamma"'] & \mathbf{B}/\theta \arrow[d, dashed, "\tilde{\gamma}"] \\ & & \mathbf{C}. \end{tikzcd}$$

Nous remarquons que si $b_1 \ \theta \ b_2$ alors $\gamma(b_1) = \gamma(b_2)$. En effet, pour tout $b_1, b_2 \in B$ tels qu'il existe $a \in A$ tel que $b_1 = \alpha(a)$ et $b_2 = \beta(a)$, on a que :

$$\gamma(b_1) = \gamma(\alpha(a)) = \gamma(\beta(a)) = \gamma(b_2) \Rightarrow b_1 \ \psi \ b_2,$$

où ψ est la congruence noyau de γ. Dès lors, ψ satisfait la condition (2.1) et donc $\psi \subseteq \theta$. Par définition de congruence noyau, nous avons bien que $\gamma(b_1) = \gamma(b_2)$. Ainsi nous pouvons définir $\tilde{\gamma} : \mathbf{B}/\theta \to \mathbf{C} : [b] \mapsto \gamma(b)$. Cela définit bien un morphisme d'algèbres. En effet, soit f dans le langage $\mathcal{F}$ et $[b_1], \ldots, [b_n] \in \mathbf{B}/\theta$ nous avons que :

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}(f^{\mathbf{B}/\theta}([b_1], \ldots, [b_n])) &= \tilde{\gamma}([f^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n)]) \\ &= \gamma(f^{\mathbf{B}}(b_1, \ldots, b_n)) \\ &= f^{\mathbf{C}}(\gamma(b_1), \ldots, \gamma(b_n)) \\ &= f^{\mathbf{C}}(\tilde{\gamma}([b_1]), \ldots, \tilde{\gamma}([b_n])). \end{aligned}$$

En outre, la surjectivité de q garantit l'unicité de $\tilde{\gamma}$. Ce qui achève la preuve de l'existence de tous les coégalisateurs dans $\mathcal{V}$. $\square$

Démonstration du lemme 2.14. Pour démontrer que les épimorphismes réguliers sont stables par produit fibré, nous montrons que ceux-ci correspondent aux morphismes surjectifs. En effet, nous savons que les surjections sont stables par produit fibré (voir section 4.1.3 dans [12]).

Par définition, un épimorphisme régulier est un coégalisateur. Or, nous venons de construire explicitement les coégalisateurs comme des quotients, et donc des surjections.

Inversement, nous montrons qu'un morphisme surjectif $\alpha : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ est le coégalisateur de sa paire noyau $(\mathbf{Eq}(\alpha), p_1, p_2)$. Considérons $\mathbf{A} \xrightarrow{q} \mathbf{A}/\theta$ le coégalisateur de p_1 et p_2 (voir preuve du lemme 2.13) et montrons que $\theta = \mathbf{Eq}(\alpha)$. D'une part, $\theta \subseteq \mathbf{Eq}(\alpha)$ car $\mathbf{Eq}(\alpha)$ satisfait la condition (2.1). D'autre part, si $(a_1, a_2) \in \mathbf{Eq}(\alpha)$ alors $p_1(a_1, a_2) = a_1$ et $p_2(a_1, a_2) = a_2$ et donc $(a_1, a_2) \in \theta$. Or, nous pouvons vérifier que $\mathbf{B}$ est isomorphe à $\mathbf{A}/\mathbf{Eq}(\alpha)$ par surjectivité de α :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{A} \arrow[r, "q"] \arrow[dr, "\alpha"'] & \mathbf{A}/\mathbf{Eq}(\alpha) \arrow[d, dashed, "\cong"] \\ & \mathbf{B}. \end{tikzcd}$$

Ainsi, nous avons que α est isomorphe au coégalisateur q et donc que tout morphisme surjectif est un épimorphisme régulier, comme désiré. $\square$

Cette démonstration conclut la preuve qu'une variété d'algèbres forme une catégorie régulière. Ainsi, comme les relations d'équivalence sont effectives (cfr. proposition 2.10), nous pouvons conclure que les variétés sont des catégories exactes, comme mentionné dans le théorème 2.1 au début de ce chapitre.

Chapitre 3

Variétés et catégories soustractives

Dans ce chapitre, nous introduisons via différentes caractérisations le concept de soustractivité pour une variété et, plus généralement, pour une catégorie.

Un intérêt de l'étude des catégories soustractives réside dans leur lien étroit avec d'autres propriétés importantes des catégories, comme montré par Zurab Janelidze dans [18]. En effet, nous pouvons notamment mentionner l'équation catégorique suivante :

$$\text{fortement unitale} \;=\; \text{unitale} \;+\; \text{soustractive},$$

voir D. Bourn dans [7] pour les définitions de catégorie (fortement) unitale. En outre, la soustractivité apparait aussi dans la caractérisation des catégories de Mal'tsev au sens de [8] ainsi que des catégories additives au sens de [11].

Par ailleurs, les variétés soustractives fournissent un cadre de travail adéquat pour l'étude des commutateurs, telle que réalisée par Aldo Ursini dans [29]. Ainsi, l'analyse de la théorie des idéaux se révèle intéressante dans ce contexte. Cependant, dans ce mémoire nous ne développons pas cet aspect des variétés soustractives mais nous le mentionnons à titre d'ouverture de ces structures algébriques.

Dans un premier temps, nous étudions la soustractivité d'un point de vue syntaxique, c'est-à-dire en termes des opérations du langage. Ainsi, dans la première section nous définissons la soustractivité via l'existence d'un terme binaire s en accord avec notre vision intuitive de la soustraction. En effet, nous formalisons les deux propriétés suivantes :

$$x \text{ "moins" } x = 0 \quad \text{et} \quad x \text{ "moins" } 0 = x.$$

Dans cette première section nous retrouvons aussi la notion de catégorie soustractive que nous montrons équivalente à celle d'une variété soustractive dans le cas pointé. Enfin, nous fournissons plusieurs exemples permettant de se familiariser avec ce concept.

Par après, nous détaillons une approche sémantique de la soustractivité (via l'étude de la permutabilité des congruences). Finalement, nous travaillerons sur une caractérisation qui se base sur la notion de revêtement projectif ainsi que des propriétés catégoriques des algèbres libres.

3.1 Notions et exemples

Nous introduisons la notion de variété soustractive telle que définie par A. Ursini dans [29] et nous fournissons quelques exemples de variétés ayant cette propriété. Cela nous donne une première caractérisation, de nature syntaxique, de la soustractivité. Ensuite, nous rappelons des définitions sur les graphes afin d'introduire le concept plus général de catégorie soustractive telle que définie par Z. Janelidze dans [18]. Enfin, nous démontrerons l'équivalence entre ces deux notions pour le cas des variétés pointées.

Définition 3.1. *Une variété $\mathcal{V}$ est dite* soustractive *lorsque son langage contient une constante* 0 *et un terme binaire s tel que*

$$s(x,x) = 0 \text{ et } s(x,0) = x.$$

Si le langage de $\mathcal{V}$ contient une unique constante, nous parlerons de variété soustractive pointée*.*

Exemple 3.2. Les groupes forment une variété soustractive pointée dont la soustraction est donnée par $s(x,y) = xy^{-1}$. De la même manière, les structures telles que les anneaux et les modules sont aussi des variétés soustractives pointées.

Exemple 3.3. Les algèbres de Heyting (voir exemple 1.11) sont une variété soustractive avec deux constantes 0 et 1. Nous pouvons définir s tel que $s(x,y) = (y \to 0) \wedge x$. On vérifie aisément que $s(x,x) = (x \to 0) \wedge x = \neg x \wedge x = 0$ et $s(x,0) = (0 \to 0) \wedge x = x$.

Exemple 3.4. Les algèbres d'implication sont elles aussi soustractives. Pour une définition ainsi que certaines propriétés importantes, nous renvoyons vers [1]. Le terme binaire est donné par $s(x,y) = y \to x$. La constante, représentée par 1, est telle que $x \to x = 1$ et $1 \to x = x$.

Exemple 3.5. Une variété est dite *de Mal'tsev* lorsque son langage contient un terme ternaire $p(x,y,z)$ satisfaisant $p(x,x,y) = y$ et $p(x,y,y) = x$ (voir le livre de J.D.H. Smith pour une étude approfondie [27]). Toute variété de Mal'tsev avec une constante 0 est soustractive. En effet, il suffit de poser $s(x,y) = p(x,y,0)$. Les groupes ainsi que les algèbres de Heyting sont des exemples de variétés de Mal'tsev.

Pour étendre le concept de soustractivité d'une variété à un concept catégorique, nous aurons besoin des notions de span et de ponctualité telles que décrites ci-dessous.

Définition 3.6. *Soit une catégorie $\mathbb{C}$, un* span *entre un objet Y et en objet Z dans $\mathbb{C}$ est un diagramme $X \xleftarrow{f} Z \xrightarrow{g} Y$. Un span est dit* ponctuel à gauche *(resp. à droite) s'il existe $u : X \to Z$ (resp. $t : Y \to Z$) tel que $f \circ u = 1_X$ et $g \circ u = 0$ (resp. $f \circ t = 0$ et $g \circ t = 1_Y$).*

Remarque 3.7. Rappelons qu'un graphe réflexif est un span $X \xleftarrow{r_1} Y \xrightarrow{r_2} X$ tel qu'il existe $\delta : X \to Y$ avec $r_1 \circ \delta = 1_X = r_2 \circ \delta$. Une relation réflexive est un graphe réflexif où r_1, r_2 sont conjointement monomorphes (voir définition 2.4).

Définition 3.8. *Une catégorie pointée $\mathbb{C}$ avec les limites finies est dite* soustractive *si toute relation réflexive ponctuelle à gauche dans $\mathbb{C}$ est aussi ponctuelle à droite.*

Théorème 3.9 ([18] : Théorème 2)**.** *Une variété $\mathcal{V}$ est une catégorie soustractive si et seulement $\mathcal{V}$ est une variété soustractive pointée.*

Démonstration. (si) : Supposons que $\mathcal{V}$ est une variété soustractive pointée et prenons $\mathbf{R}$ une relation réflexive ponctuelle à gauche sur $\mathbf{A} \in \mathcal{V}$:

$$A \xleftarrow{r_1} R \xrightarrow{r_2} A$$

avec $r_i(a_1, a_2) = a_i$ pour $a_i \in A$ et $i = 1, 2$.

La relation étant réflexive, nous savons que $a\ R\ a$ pour tout $a \in A$. Par ailleurs, $\mathbf{R}$ est ponctuelle à gauche donc $a\ R\ 0$ pour tout $a \in A$ (avec $u : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ tel que $u(a) = (a, 0)$). En outre, remarquons que $\mathbf{R}$ est une sous-algèbre de $\mathbf{A} \times \mathbf{A}$ et donc que la relation est compatible avec les opérations du langage. Dès lors, nous avons que :

$$\frac{\begin{array}{c} a\ R\ a \\ a\ R\ 0 \end{array}}{s^{\mathbf{A}}(a, a)\ R\ s^{\mathbf{A}}(a, 0),}$$

où $s^{\mathbf{A}}(a, a) = 0$ et $s^{\mathbf{A}}(a, 0) = a$. Ainsi, 0 est en relation avec a : $(0, a) \in \mathbf{R}$. Nous pouvons alors définir $t : \mathbf{A} \to \mathbf{R}$ tel que $t(a) = (0, a)$. Il est clair que le morphisme t rend cette relation ponctuelle à droite.

Par ailleurs, $\mathbf{\{0\}}$ est l'objet nul de cette catégorie et le lemme 2.2 nous garantit que tout variété d'algèbres universelles a les limites finies. Nous concluons que $\mathcal{V}$ définit bien une catégorie soustractive.

(seulement si) : Supposons que $\mathcal{V}$ soit une catégorie soustractive. Notons que cette variété ne peut posséder qu'une unique constante 0 telle que $\mathbf{\{0\}}$ est l'objet nul. En effet, si nous avons au moins deux constantes, 0 et 1, qui appartiennent au langage alors l'objet final est le singleton (où 0=1) et, les constantes étant préservées, l'objet initial sera $\mathbf{\{0,1\}}$. Un raisonnement similaire montre que la catégorie ne peut pas être pointée s'il n'existe pas de constante dans le langage, car $\emptyset$ n'est pas isomorphe à $\{0\}$.

Considérons l'algèbre libre $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}([x])$ et R la relation générée par l'ensemble $\{(x, x), (x, 0)\}$ sur $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}([x])$:

$$\mathbf{F}_{\mathcal{V}}([x]) \xleftarrow{r_1} R \xrightarrow{r_2} \mathbf{F}_{\mathcal{V}}([x]).$$

Cette relation est réflexive via le morphisme d'algèbres $\delta : \mathbf{F}_{\mathcal{V}}([x]) \to \mathbf{R}$ induit par la fonction $\tilde{\delta} : \{x\} \to R : x \mapsto (x, x)$ (voir théorème 1.46). De la même manière, la fonction $\tilde{t} : \{x\} \to R : x \mapsto (x, 0)$ s'étend en un morphisme $t : \mathbf{F}_{\mathcal{V}}([x]) \to \mathbf{R}$ de sorte que cette relation est ponctuelle à gauche. Par hypothèse, la relation est ponctuelle à droite, ce qui implique que $(0, x) \in R$. Nous avons donc que :

$$\begin{array}{c} x \; R \; x \\ x \; R \; 0 \\ \hline 0 \; R \; x. \end{array}$$

Ainsi, il existe un terme $s \in T(x)$ tel que $s(x, x) = 0$ et $s(x, 0) = x$ dans $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}([x])$. Par le théorème 1.47, nous pouvons conclure que :

$$\mathcal{V} \models s(x, x) \approx 0$$
$$\mathcal{V} \models s(x, 0) \approx x.$$

Ainsi, la variété $\mathcal{V}$ est soustractive via le terme s. Ce qui achève la preuve de l'équivalence entre une catégorie dite soustractive et une variété dite soustractive dans le contexte d'une variété pointée. $\square$

Exemple 3.10. Ce théorème nous permet de conclure que toute variété de Mal'tsev pointée est une catégorie soustractive. Les groupes forment donc une catégorie soustractive à l'inverse des algèbres de Heyting qui admettent deux constantes.

Exemple 3.11. Les algèbres d'implication étant pointées, elles forment une catégorie soustractive.

Exemple 3.12. Il existe de nombreuses catégories soustractives qui ne sont pas des variétés (et donc ne peuvent pas être caractérisées de variétés soustractives). Nous pouvons notamment citer les groupes compacts ou, plus généralement, les groupes topologiques. Comme mentionné dans le contre-exemple 1.9, les conditions de continuité ne peuvent pas être formalisées dans le langage de l'algèbre universelle. Cependant, les opérations des groupes topologiques étant les mêmes que celles des groupes, il est clair que Grp(Top) est une catégorie soustractive.

3.2 Caractérisation sémantique

Nous nous inspirons du travail fait dans le livre "*A course in Universal Algebra*" [26] pour les variétés de Mal'tsev afin de montrer une caractérisation des variétés soustractives en rapport avec la permutabilité de leurs congruences.

Pour prouver cette caractérisation nous aurons besoin du lemme 3.14 qui nous autorise à "agréger" des variables d'une même classe d'équivalence. La preuve de ce lemme repose de manière cruciale sur le théorème 1.47 nous permettant de travailler uniquement sur les $\mathcal{V}$-algèbres libres.

Nous introduisons tout d'abord une définition qui simplifiera l'énonciation de ce lemme ainsi que l'écriture de nos preuves :

Définition 3.13. *Soit une algèbre $\boldsymbol{A}$ et $a_1, \ldots, a_n \in A$ on définit $\Theta(a_1, \ldots, a_n)$ comme étant la congruence générée par $\{(a_i, a_j) \mid 1 \leq i, j \leq n\}$ (c'est-à-dire que $\Theta(a_1, \ldots, a_n)$ est l'intersection de toutes les congruences contenant cet ensemble).*

Lemme 3.14 ([26] : Lemme 12.1)**.** *Soient $\mathcal{V}$ une variété de type $\mathcal{F}$ et deux termes appartenant au langage, $p(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, $q(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$, tels que :*

$$(p^{\boldsymbol{F}}([x_1], \ldots, [x_m], [y_1], \ldots, [y_n]), q^{\boldsymbol{F}}([x_1], \ldots, [x_m], [y_1], \ldots, [y_n])) \in \Theta([y_1], \ldots, [y_n])$$

dans $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}_{\mathcal{V}}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n)$. Nous avons alors que :

$$\mathcal{V} \models p(x_1, \ldots, x_m, y, \ldots, y) \approx q(x_1, \ldots, x_m, y, \ldots, y).$$

Démonstration. Définissons un morphisme d'algèbres

$$\alpha : \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n) \to \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(x_1, \ldots, x_m, y, \ldots, y)$$

tel que $\alpha([x_i]) = [x_i]$ pour tout $1 \leq i \leq m$ et $\alpha([y_j]) = [y]$ pour tout $1 \leq j \leq n$.

Par construction, nous avons que $\Theta([y_1], \ldots, [y_n])$ est inclus dans la congruence noyau de α. Dès lors, par l'hypothèse sur les termes p et q :

$$\begin{gathered} \alpha(p^{\mathbf{F}}([x_1], \ldots, [x_m], [y_1], \ldots, [y_n])) = \alpha(q^{\mathbf{F}}([x_1], \ldots, [x_m], [y_1], \ldots, [y_n])) \\ \Downarrow \\ p([x_1], \ldots, [x_m], [y], \ldots, [y]) = q([x_1], \ldots, [x_m], [y], \ldots, [y]) \end{gathered}$$

dans $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(x_1, \ldots, x_m, y, \ldots, y)$. Par la proposition 1.47, nous pouvons conclure que :

$$\mathcal{V} \models p(x_1, \ldots, x_m, y, \ldots, y) \approx q(x_1, \ldots, x_m, y, \ldots, y),$$

comme souhaité. □

Définition 3.15. *Une variété $\mathcal{V}$ a des* congruences 0-permutables *si, pour tout congruence R, S sur $\mathcal{V}$ et pour tout élément $x \in \mathcal{V}$, nous avons que :*

$$0 \ (R \circ S) \ x \Rightarrow 0 \ (S \circ R) \ x.$$

Théorème 3.16. *Soit $\mathcal{V}$ une variété de type $\mathcal{F}$. La variété $\mathcal{V}$ a des congruences 0-permutables si et seulement si elle est soustractive.*

Démonstration. Supposons tout d'abord que $\mathcal{V}$ est une variété soustractive. Soit $x \in \mathcal{V}$ et R, S deux congruences sur $\mathcal{V}$ tels que $0\ (R \circ S)\ x$. Dès lors, il existe $y \in \mathcal{V}$ tel que $0\ S\ y$ et $y\ R\ x$. Par définition de congruence et par la remarque 1.41 nous avons que :

$$\frac{\begin{array}{c} y\ R\ x \\ y\ R\ y \end{array}}{s(y,y)\ R\ s(x,y)} \qquad\qquad \frac{\begin{array}{c} x\ S\ x \\ y\ S\ 0 \end{array}}{s(x,y)\ S\ s(x,0).}$$

Sachant que $s(y,y) = 0$ et que $s(x,0) = x$, nous avons bien que $0\ (S \circ R)\ x$. Ce qui prouve que nos congruences sont 0-permutables.

Supposons maintenant que la variété à des congruences 0-permutables. Considérons $\mathbf{F}_{\mathcal{V}}(x,y)$ l'algèbre libre à deux éléments. Remarquons que $([0],[x]) \in \Theta([y],[x]) \circ \Theta([0],[y])$. Ainsi, par la 0-permutabilité, nous avons que :

$$([0],[x]) \in \Theta([0],[y]) \circ \Theta([y],[x]).$$

Dès lors, il existe un terme s dans le langage $\mathcal{F}$ avec $s([x],[y]) \in \mathbf{F}_{\mathcal{V}}(x,y)$ tel que :

$$0\ \Theta([y],[x])\ s([x],[y])\ \Theta([0],[y])\ [x].$$

Par le lemme 3.14, nous obtenons que :

$$\mathcal{V} \models s(x,x) \approx 0$$
$$\mathcal{V} \models s(x,0) \approx x.$$

Ainsi, $\mathcal{V}$ est bien une variété soustractive et cela conclut la preuve de la caractérisation.

□

3.3 Revêtement projectif et algèbres libres

Nous investiguons le lien entre la soustractivité d'une catégorie et une forme de soustractivité faible d'un revêtement projectif de cette catégorie. Le travail réalisé dans cette section se base essentiellement sur un article M. Gran et D. Rodelo [15]. Notons que l'étude des caractérisations en terme de revêtement projectif a déjà été réalisée pour de nombreuses autres propriétés catégoriques (unitale et fortement unitale dans ce même article [15], Mal'tsev [25], protomodulaire etc.). Par ailleurs, ces analyses s'inscrivent plus généralement dans l'étude des complétions exactes de catégories, notamment telle que réalisée dans [9].

Nous introduisons donc les concepts d'objet projectif et de revêtement projectif ainsi que deux lemmes liant certaines propriétés de ses revêtements avec celles de la catégorie initiale. Ce travail préalable nous permettra de prouver une nouvelle caractérisation des catégories soustractives. Nous raffinerons ensuite cette caractérisation pour les variétés soustractives à l'aide des propriétés catégoriques des algèbres libres.

Définition 3.17. *Soit* $\mathbb{C}$ *une catégorie. Un objet* P *de* $\mathbb{C}$ *est* projectif (régulier) *si, pour tout épimorphisme régulier* $e : X \to Y$ *et pour tout morphisme* $f : P \to Y$*, il existe un morphisme* $g : P \to X$ *avec* $e \circ g = f$ *tels que sur le diagramme ci-contre :*

$$\begin{tikzcd} & X \arrow[d, two heads, "e"] \\ P \arrow[ru, dashed, bend left, "g"] \arrow[r, "f"'] & Y. \end{tikzcd}$$

Définition 3.18. *Soit* $\mathbb{F}$ *une sous-catégorie pleine d'une catégorie* $\mathbb{C}$*. La sous-catégorie* $\mathbb{F}$ *est un* revêtement projectif *de* $\mathbb{C}$ *si :*

1. *Tout objet dans* $\mathbb{F}$ *est projectif dans* $\mathbb{C}$ *;*
2. *Pour tout objet* $A \in \mathbb{C}$*, il existe un* $\mathbb{F}$*-revêtement de* A*, c'est-à-dire un objet* $\tilde{A} \in \mathbb{F}$ *tel qu'il existe un épimorphisme régulier* $e : \tilde{A} \twoheadrightarrow A$*.*

Lemme 3.19 ([9] : Proposition 4)**.** *Soit* $\mathbb{F}$ *un revêtement projectif d'une catégorie* $\mathbb{C}$*. Si la catégorie* $\mathbb{C}$ *possède les limites faibles finies alors le revêtement* $\mathbb{F}$ *possède les limites faibles finies.*

Démonstration. Soit $D : I \to \mathbb{F}$ un diagramme dont nous voulons construire la limite dans $\mathbb{F}$. Considérons $(L, \{p_i : L \to D_i\}_{i \in I})$, la limite faible dans $\mathbb{C}$ avec $D_i \in \mathbb{F}$ pour tout $i \in I$. Prenons $\tilde{L} \in \mathbb{F}$ un $\mathbb{F}$-revêtement de L et $\tilde{L} \xrightarrow{e} L$ l'épimorphisme régulier de ce $\mathbb{F}$-revêtement tels que représentés sur le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} D_i & L \arrow[l, "p_i"'] \arrow[r, "p_j"] & D_j \\ & \tilde{L}. \arrow[u, two heads, "e"] \arrow[lu, "p_i \circ e"] \arrow[ru, "p_j \circ e"'] & \end{tikzcd}$$

Nous allons montrer que $(\tilde{L}, \{p_i \circ e : \tilde{L} \to D_i\}_{i \in I})$ est une limite faible dans $\mathbb{F}$. Prenons $(X, \{\pi_i : X \to D_i\}_{i \in I})$, un cône quelconque dans $\mathbb{F}$. Par la propriété universelle de la limite faible L, il existe un morphisme $f : X \to L$ tel que $p_i \circ f = \pi_i$ pour tout $i \in I$ tel que sur le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} D_i & L \arrow[l, "p_i"'] \arrow[r, "p_j"] & D_j \\ & \tilde{L} \arrow[u, two heads, "e"] \arrow[lu, "p_i \circ e"] \arrow[ru, "p_j \circ e"'] & \\ & X. \arrow[luu, bend left, "\pi_i"] \arrow[ruu, bend right, "\pi_j"'] \arrow[uu, bend right, "f"'] & \end{tikzcd}$$

Par définition, X étant régulier-projectif dans $\mathbb{C}$, il existe un morphisme $g : X \to \tilde{L}$ tel que $e \circ g = f$. On vérifie aisément que g fait commuter les deux triangles inférieurs du diagramme et donc que $(\tilde{L}, \{p_i \circ e : L \to D_i\}_{i \in I})$ est bien une limite faible dans $\mathbb{F}$. $\square$

Lemme 3.20. *Soit $\mathbb{F}$ un revêtement projectif d'une catégorie $\mathbb{C}$. Si $\mathbb{F}$ est pointée et que $\mathbb{C}$ a les paires noyaux alors $\mathbb{C}$ est pointée.*

Démonstration. Soit 0 l'objet nul dans $\mathbb{F}$. Dans un premier temps, nous voulons montrer que 0 est l'objet initial dans $\mathbb{C}$. Pour ce faire, considérons $A \in \mathbb{C}$ et montrons qu'il existe un unique morphisme de 0 vers A. Par définition de revêtement projectif, il existe un épimorphisme régulier $a : \tilde{A} \to A$ où $\tilde{A} \in \mathbb{F}$ et, par hypothèse, il existe un unique morphisme $i : 0 \to \tilde{A}$ dans $\mathbb{F}$. Ainsi, $a \circ i : 0 \to A$. Il reste à voir que ce morphisme est l'unique allant de 0 à A. Supposons qu'il existe un autre morphisme $f : 0 \to A$. L'objet nul étant dans $\mathbb{F}$, il est régulier-projectif. Dès lors, il existe un morphisme $j : 0 \to \tilde{A}$ tel que $f = a \circ j$:

$$\begin{tikzcd} & \tilde{A} \arrow[d, "a"] \\ 0 \arrow[ur, bend left, "j"] \arrow[r, "f"'] & A. \end{tikzcd}$$

Or, nous savons que $i = j$ par la propriété de l'objet initial. Ainsi, $f = a \circ j = a \circ i$ et nous avons l'unicité.

Montrons désormais que 0 est l'objet final dans $\mathbb{C}$. Considérons $A \in \mathbb{C}$ et montrons qu'il existe un unique morphisme de A vers 0. Par définition de revêtement projectif, il existe un épimorphisme régulier $a : \tilde{A} \to A$ où $\tilde{A} \in \mathbb{F}$ et, par hypothèse, il existe un unique morphisme $t : \tilde{A} \to 0$ dans $\mathbb{F}$. Considérons désormais $(R[a], a_1, a_2)$, la paire noyau de a. A nouveau, nous savons qu'il existe un épimorphisme régulier $r : \widetilde{R[a]} \to R[a]$ avec $\widetilde{R[a]} \in \mathbb{F}$ tel que sur le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd} \widetilde{R[a]} \arrow[r, "r"] & R[a] \arrow[r, shift left, "a_1"] \arrow[r, shift right, "a_2"'] & \tilde{A} \arrow[r, two heads, "a"] \arrow[dr, "t"'] & A \\ & & & 0. \end{tikzcd}$$

On remarque que $t \circ a_1 \circ r = t \circ a_2 \circ r$ par la propriété universelle de l'objet final. Cela implique que $t \circ a_1 = t \circ a_2$ car r est un épimorphisme. Or, a est le coégalisateur de sa paire noyau car a est un épimorphisme régulier (voir [5] pour une preuve). Dès lors, il existe un unique $\pi : A \to 0$ tel que $\pi \circ a = t$. Supposons qu'il existe un autre morphisme $\pi' : A \to 0$, alors $\pi \circ a = t = \pi' \circ a$ et donc $\pi = \pi'$ car a est un épimorphisme. Ainsi, 0 est aussi l'objet final dans $\mathbb{C}$.

La catégorie $\mathbb{C}$ est donc pointée, comme désiré. $\square$

Afin d'énoncer notre première caractérisation, nous définissons une version "faible" ("w" pour "weak" en anglais) de la soustractivité.

Définition 3.21. *Une catégorie $\mathbb{F}$ est* w-soustractive *si elle est pointée, si elle admet les limites faibles finies et que tout graphe réflexif et ponctuel à droite est aussi ponctuel à gauche.*

Proposition 3.22. *Soit $\mathbb{F}$ un revêtement projectif pointé d'une catégorie régulière $\mathbb{C}$. Nous avons que $\mathbb{C}$ est soustractive si et seulement si $\mathbb{F}$ est w-soustractif.*

Démonstration. (seulement si) : Supposons que $\mathbb{C}$ est soustractive. Dès lors, $\mathbb{C}$ est finement complète par définition et ainsi, par le lemme 3.19, $\mathbb{F}$ admet les limites faibles finies. De plus, $\mathbb{F}$ est pointé par hypothèse. Il reste donc à montrer que tout graphe réflexif et ponctuel à droite est aussi ponctuel à gauche :

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} \arrow[r, shift right, "\tilde{\delta}"'] & \tilde{G} \arrow[l, shift right, "\tilde{d}"'] \arrow[r, shift left=2, "\tilde{c}"] & \tilde{X}, \arrow[l, "\tilde{t}" description] \arrow[l, shift left=2, "\tilde{\delta}"] \end{tikzcd} \tag{3.1}$$

avec

$$\begin{cases} \tilde{c} \circ \tilde{t} = 1_{\tilde{X}} \text{ et } \tilde{d} \circ \tilde{t} = 0, \\ \tilde{c} \circ \tilde{\delta} = 1_{\tilde{X}} \text{ et } \tilde{d} \circ \tilde{\delta} = 1_{\tilde{X}}. \end{cases}$$

Comme $\mathbb{C}$ est une catégorie régulière (section 2.3), nous savons qu'il existe une factorisation épimorphisme régulier-monomorphisme de $(\tilde{d}, \tilde{c})$ (Théorème 1.11 dans [12]) :

$$(\tilde{d}, \tilde{c}) \;=\; \tilde{G} \xrightarrow{p} R \xrightarrow{(r_1, r_2)} \tilde{X} \times \tilde{X}.$$

La paire $(r_1, r_2) : R \to \tilde{X} \times \tilde{X}$ définit une relation réflexive et ponctuelle à droite dans $\mathbb{C}$. En effet, on vérifie aisément qu'elle réflexive via le morphisme $p \circ \tilde{\delta}$ et ponctuelle à droite via le morphisme $p \circ \tilde{t}$. Par hypothèse $\mathbb{C}$ est soustractive donc cette relation est aussi ponctuelle à gauche. Ainsi, il existe $u : \tilde{X} \to R$ tel que $r_1 \circ u = 1_{\tilde{X}}$ et $r_2 \circ u = 0$. Nous savons que $\tilde{X}$ est projectif donc il existe $\tilde{u} : \tilde{X} \to \tilde{G}$ tel que le diagramme

$$\begin{tikzcd} & \tilde{G} \arrow[d, two heads, "p"] \\ \tilde{X} \arrow[ur, dashed, bend left, "\tilde{u}"] \arrow[r, "u"] & R \end{tikzcd}$$

commute. Dès lors, le graphe initial (3.1) était ponctuel à gauche via le morphisme $\tilde{u}$:

$$\begin{aligned} \tilde{c} \circ \tilde{u} &= r_2 \circ p \circ \tilde{u} \\ &= r_2 \circ u \\ &= 0 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} \tilde{d} \circ \tilde{u} &= r_1 \circ p \circ \tilde{u} \\ &= r_1 \circ u \\ &= 1_{\tilde{X}}. \end{aligned}$$

Nous avons donc montré que $\mathbb{F}$ est w-soustractif lorsque $\mathbb{C}$ est soustractive.

(si) : Faisons désormais l'hypothèse que $\mathbb{F}$ est w-soustractif. Le lemme 3.20 nous garantit déjà que $\mathbb{C}$ est pointée. Considérons une relation réflexive et ponctuelle à droite dans $\mathbb{C}$:

$$\begin{tikzcd} X & R \arrow[l, shift right, "r_1"'] \arrow[r, shift left=2, "r_2"] & X. \arrow[l, "t" description] \arrow[l, shift left=2, "\delta"] \arrow[from=1-1, to=1-2, shift right, "\delta"'] \end{tikzcd} \tag{3.2}$$

Soit $x : \tilde{X} \to X$ un épimorphisme régulier tel que $\tilde{X}$ est un $\mathbb{F}$-revêtement de X. Considérons P le produit fibré de $x \times x$ avec (r_1, r_2) :

$$\begin{tikzcd} P \arrow[r, two heads, "p"] \arrow[d, tail, "(r_1', r_2')"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & R \arrow[d, tail, "(r_1, r_2)"] \\ \tilde{X} \times \tilde{X} \arrow[r, two heads, "x \times x"] & X \times X. \end{tikzcd}$$

Nous savons que les produits fibrés préservent les monomorphismes, dès lors, (r_1', r_2') est un monomorphisme. Nous pouvons vérifier que la relation :

$$\tilde{X} \xleftarrow{r_1'} P \xrightarrow{r_2'} \tilde{X}$$

est réflexive pour $\delta' = (\langle 1_P, 1_P \rangle, \delta \circ x)$ et ponctuelle à droite pour $t' = (\langle 0, 1_P \rangle, t \circ x)$.

Considérons $\alpha : \tilde{P} \to P$ un épimorphisme régulier tel que $\tilde{P}$ est un $\mathbb{F}$-revêtement de P. Par la projectivité de $\tilde{X}$, nous pouvons factoriser t' et δ' à travers α :

$$\begin{tikzcd} & \tilde{P} \arrow[d, two heads, "\alpha"] \\ \tilde{X} \arrow[ur, dashed, bend left, "\tilde{t}"] \arrow[r, "t'"] & P \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} & \tilde{P} \arrow[d, two heads, "\alpha"] \\ \tilde{X} \arrow[ur, dashed, bend left, "\tilde{\delta}"] \arrow[r, "\delta'"] & P. \end{tikzcd}$$

Nous avons alors le diagramme dans $\mathbb{F}$

$$\begin{tikzcd} \tilde{X} & \tilde{P} \arrow[l, "r_1' \circ \alpha"'] \arrow[r, shift left, "r_2' \circ \alpha"] & \tilde{X} \arrow[l, shift left, "\tilde{t}"] \end{tikzcd}$$

qui est réflexif via le morphisme $\tilde{\delta}$ et ponctuel à droite via le morphisme $\tilde{t}$.

Par la w-soustractivité de $\mathbb{F}$, nous savons que ce diagramme est aussi ponctuel à gauche. Ainsi, il existe un morphisme $\tilde{u} : \tilde{X} \to \tilde{P}$ tel que :

$$\begin{cases} (r_1' \circ \alpha) \circ \tilde{u} = 1_{\tilde{X}}, \\ (r_2' \circ \alpha) \circ \tilde{u} = 0. \end{cases}$$

Or, $x : \tilde{X} \to X$ est un épimorphisme fort car c'est un épimorphisme régulier et que ces notions coïncident dans une catégorie régulière (cfr. [12] : Proposition 1.13). Ainsi, il existe un morphisme $u : X \to R$ tel que le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd}
\tilde{X} \arrow[r, two heads, "x"] \arrow[d, "\tilde{u} \circ \alpha \circ \tilde{\delta}"'] & X \arrow[d, "\langle 1{,}0 \rangle"] \arrow[dl, dashed, "u"'] \\
R \arrow[r, tail, "(r_1{,}r_2)"'] & X \times X.
\end{tikzcd}$$

Ce morphisme u rend notre relation initiale 3.2 ponctuelle à gauche. En effet, $r_1 \circ u = 1_X$ et $r_2 \circ u = 0$. Cela prouve que $\mathbb{C}$ est soustractive lorsque $\mathbb{F}$ est w-soustractif. Ce qui conclut la preuve. $\square$

Nous voulons préciser la propriété 3.22 lorsque $\mathbb{C}$ définit une variété au sens de l'algèbre universelle. Dans ce cas, la propriété 3.24 nous permet de considérer plus spécifiquement le revêtement projectif donné par les algèbres libres. Ainsi, le théorème énoncé ci-dessous est une conséquence directe de ces deux propositions.

Théorème 3.23. *Soit $\mathbb{C}$ une variété d'algèbres universelles et $\mathbb{F}$ la sous-catégorie pleine des $\mathbb{C}$-algèbres libres. Nous avons que $\mathbb{C}$ est une catégorie soustractive si et seulement si $\mathbb{F}$ est une catégorie w-soustractive.*

Proposition 3.24. *Soit $\mathbb{C}$ une variété d'algèbres universelles. La sous-catégorie pleine des $\mathbb{C}$-algèbres libres est un revêtement projectif de $\mathbb{C}$. De plus, si $\mathbb{C}$ est pointée alors la sous-catégorie des $\mathbb{C}$-algèbres libres est pointée.*

Démonstration. Soit $\mathbf{F}_{\mathbb{C}}[\emptyset]$ l'algèbre libre sur l'ensemble vide. Si la variété est pointée alors $\mathbf{F}_{\mathbb{C}}[\emptyset]$ a pour univers $\{[c]\}$ avec c l'unique constante du langage. Ainsi, l'objet nul est bien une $\mathbb{C}$-algèbre libre et la sous-catégorie des $\mathbb{C}$-algèbres libres est pointée.

Nous devons maintenant vérifier les conditions 1 et 2 de la définition de revêtement projectif (définition 3.18).

Pour le second point, il est clair que tout algèbre $\mathbf{A}$ admet un revêtement par une $\mathbb{C}$-algèbre libre. En effet, il suffit de considérer $\mathbf{F}_{\mathbb{C}}[A]$, l'algèbre libre sur l'univers de $\mathbf{A}$, avec le morphisme induit par la fonction identité sur A via la propriété universelle 1.46. Par construction ce morphisme est surjectif et donc un épimorphisme régulier dans notre variété (voir démonstration du lemme 2.14).

Pour prouver la première condition, prenons $\mathbf{F}_{\mathbb{C}}[X]$ une algèbre libre sur l'ensemble X et montrons que cet objet est régulier-projectif dans $\mathbb{C}$. Pour ce faire, considérons un morphisme $f : \mathbf{F}_{\mathbb{C}}[X] \to \mathbf{B}$ et un épimorphisme régulier $e : \mathbf{A} \to \mathbf{B}$ (notons à nouveau que e est une surjection). Nous cherchons un morphisme $g : \mathbf{F}_{\mathbb{C}}[X] \to \mathbf{A}$ tel que $e \circ g = f$. Considérons le produit fibré de f et e tel que sur le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{F}_{\mathbb{C}}[X] \times_{\mathbf{B}} \mathbf{A} \arrow[r, "\pi_2"] \arrow[d, two heads, shift left, "\pi_1"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & \mathbf{A} \arrow[d, two heads, "e"] \\
\mathbf{F}_{\mathbb{C}}[X] \arrow[r, "f"] \arrow[u, dashed, shift left, "s"] & \mathbf{B}.
\end{tikzcd}$$

Nous savons que les produits fibrés préservent les surjections et donc nous avons que $\pi_1 : \mathbf{F}_{\mathbb{C}}[X] \times_{\mathbf{B}} \mathbf{A} \to \mathbf{F}_{\mathbb{C}}[X]$ est une surjection. Si nous démontrons l'affirmation *"toute surjection dont le codomaine est une algèbre libre admet une section"*, alors nous pourrons conclure. En effet, soit $s : \mathbf{F}_{\mathbb{C}}[X] \to \mathbf{F}_{\mathbb{C}}[X] \times_{\mathbf{B}} \mathbf{A}$, une section de π_1, nous obtenons que :

$$e \circ \pi_2 \circ s = f \circ \pi_1 \circ s = f,$$

et donc $g = \pi_2 \circ s$ serait le morphisme recherché.

Prouvons l'affirmation énoncée ci-dessus. Soit $\gamma : \mathbf{C} \to \mathbf{F}[X]$ une surjection avec $\mathbf{F}[X]$ une algèbre libre sur X. Considérons la restriction de γ à une fonction dont le domaine est la pré-image de X. Cette fonction est surjective et, par l'axiome du choix, elle admet une section $\xi : X \to C$ telle que représentée ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\xi"] \arrow[dr, "i"'] & & \mathbf{C} \arrow[dl, shift left, "\gamma"] \\
& \mathbf{F}[X], \arrow[ur, dashed, shift left, "s"] &
\end{tikzcd}$$

où i est l'injection canonique. Par la propriété universelle des algèbres libres 1.46, il existe un morphisme $s : \mathbf{F}[X] \to \mathbf{C}$ tel que $s \circ i = \xi$. Nous avons alors que $\gamma \circ s \circ i = \gamma \circ \xi$. Or, par construction, nous avons aussi que $\gamma \circ \xi = Id_{\mathbf{F}[X]} \circ i$. Ainsi, par unicité du morphisme faisant commuter le diagramme

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rr, "\gamma\circ\xi"] \arrow[dr, "i"'] & & \mathbf{F}[X] \\
& \mathbf{F}[X], \arrow[ur, dashed, "!"'] &
\end{tikzcd}$$

nous concluons que $\gamma \circ s = Id_{\mathbf{F}[X]}$. L'affirmation a ainsi été prouvée et cela implique que tout algèbre libre est bien projective.

Nous avons donc montré que la sous-catégorie des $\mathbb{C}$-algèbres libres est bien un revêtement projectif de la variété $\mathbb{C}$. $\square$

Chapitre 4

Catégories soustractives et lemmes homologiques

Au sein de ce chapitre nous étudions le lien entre les catégories soustractives et le lemme des cinq court ainsi que le lemme des neuf. Nous obtiendrons ainsi de nouvelles caractérisations de la soustractivité au travers de propriétés d'exactitude.

L'étude des propriétés d'exactitude permet d'acquérir certaines informations sur les objets impliqués dans la suite. Par exemple, une suite exacte courte de la forme

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \longrightarrow 0$$

dans la catégorie des groupes nous donne que A est un sous-groupe distingué de B et que C est le quotient correspondant. Dans la catégorie des espaces vectoriels, nous aurions directement que B est isomorphe au produit de A et C. Cela mène naturellement au *problème de l'extension* qui s'intéresse aux différentes possibilités que nous avons pour l'objet du milieu.

Ce travail s'inscrit aussi dans la recherche d'un cadre minimal dans lequel démontrer certaines propriétés homologiques. Dans cette optique, le contexte donné par les catégories abéliennes est fort restrictif pour aborder de nombreux lemmes homologiques. Nous avons notamment le concept de catégorie homologique au sens de [6] qui offre un premier environnement non-abélien pour prouver des lemmes tels que le lemme des cinq court et le lemme des neuf. Dans la section 4.3 nous élargissons davantage ce contexte pour le lemme des neuf grâce aux catégories soustractives *normales*. Au sein de la section 4.4 nous réalisons le même travail pour une version affaiblie pour les *idéaux* du lemme des cinq court.

Afin de démontrer ces caractérisations, nous présentons au préalable une méthode de résolution des preuves diagrammatiques dans une catégorie régulière pointée (section 4.1). Dans la section 4.2 nous introduisons ensuite les concepts de relations et spans soustractifs qui offriront un nouvel éclairage aux catégories soustractives. Ces deux sections de préliminaires se basent sur la première partie de l'article *"The pointed subobject functor, 3 × 3 lemmas, and subtractivity of spans"* de Z. Janelidze [20].

4.1 Diagram-chasing

La première sous-section se concentre sur les différentes notions d'exactitude utilisées dans la littérature. Ensuite, dans la seconde sous-section, nous construisons un foncteur nous autorisant à travailler par *diagram-chasing* dans la catégorie des ensembles. Cette technique est dérivée de la méthode de *diagram-chasing* via les "membres" développée par S. MacLane dans [23].

4.1.1 Exactitude

Ci-dessous nous définissons et rappelons quelques notions et notations utiles pour la suite du chapitre.

Soit $\mathcal{C}$ une catégorie régulière et $f : A \to B$ un morphisme dans $\mathcal{C}$, nous notons m_f et e_f le monomorphisme et l'épimorphisme régulier apparaissant dans la décomposition image de f :

$$\begin{tikzcd} A \arrow[rr, "f"] \arrow[dr, "e_f"'] & & B \\ & Im(f). \arrow[ur, "m_f"'] & \end{tikzcd}$$

Tout d'abord nous donnons une définition de suite exacte alternative à celle énoncée dans [6] par F. Borceux et D. Bourn :

Définition 4.1. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie régulière pointée. On dit qu'une suite de morphismes*

$$A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C,$$

est exacte en B *lorsque m_f est un noyau de g : $m_f = k_g$.*

Dans [6], une suite est dite exacte en B si elle respecte la condition énoncée dans la définition 4.1 ainsi que la condition supplémentaire demandant que e_g soit un conoyau de f. Nous justifions l'utilisation de la définition plus faible d'exactitude énoncée ci-dessus par la possibilité d'en déduire une caractérisation de la soustractivité via des lemmes homologiques dans le cadre général d'une catégorie régulière pointée (Théorème 4.23). Notons que, dans la section 4.3, nous nous plaçons généralement dans le contexte d'une catégorie dite normale. Dans ce cas, les deux définitions de suite exacte sont équivalentes :

Définition 4.2. *Une catégorie régulière pointée est dite* normale *si tout épimorphisme régulier est un conoyau.*

Exemple 4.3. Un groupe préordonné $(G, \leq)$ est un groupe $(G, +, 0)$ muni d'une relation de préordre $\leq$ compatible avec l'opération $+$:

$$\frac{\begin{array}{c} x \leq y \\ u \leq v \end{array}}{x + u \leq y + v}$$

pour tout $x, y, u, v \in G$. Un exemple est donné par le groupe des entiers muni de la relation d'ordre usuelle.

La catégorie PreOrdGrp a pour objets les groupes préordonnés et pour flèches les morphismes de groupes qui préservent le préordre. Cette catégorie forme une catégorie normale [10]. En outre, il a été prouvé dans [13] qu'elle n'est pas soustractive.

4.1.2 Le foncteur pointé des sous-objets

Cette sous-section est dédiée à la construction et l'étude du foncteur pointé des sous-objets d'une catégorie régulière pointée $\mathcal{C}$:

$$\begin{aligned} S : \mathcal{C} &\longrightarrow Set_* \\ A &\mapsto Sub(A), \end{aligned}$$

où l'ensemble $Sub(A)$ est l'ensemble des classes d'équivalence de monomorphismes de codomaine A, avec $u \sim v$ si et seulement si $u \leq v$ (u se factorise à travers v) et $v \leq u$ (v se factorise à travers u). De plus, pour tout morphisme $f : A \to B$ dans $\mathcal{C}$, nous définissons :

$$\begin{array}{rccc} S(f): & S(A) & \longrightarrow & S(B) \\ & u & \mapsto & m_{f \circ u}. \end{array}$$

Ce foncteur nous permettra de travailler via l'approche de *diagram-chasing* dans la catégorie des ensembles. En effet, grâces aux propriétés de réflexion et de préservation de S, nous pourrons transporter nos diagrammes 3×3 et nos diagrammes des cinq court dans la catégorie Set_*, réaliser notre *diagram-chasing* et enfin déduire des conclusions dans $\mathcal{C}$.

Les lemmes qui suivent nous permettent notamment de montrer que S préserve et reflète les suites exactes (Proposition 4.7).

Lemme 4.4. *Le foncteur S préserve et reflète le morphisme et l'objet nul.*

Lemme 4.5. *Le foncteur S préserve les monomorphismes.*

Démonstration. Soit $f : A \to B$ un monomorphisme dans $\mathcal{C}$. Il suffit de montrer que $S(f) : S(A) \to S(B)$ est injective. Soit deux monomorphismes $v : V \to A$ et $w : W \to A$ dans $S(A)$ tels que $S(f)(v) = S(f)(w)$. Dès lors, par définition, $m_{f \circ v} = m_{f \circ w}$. Or, f, v et w étant des monomorphismes, nous obtenons que $f \circ v = f \circ w$. Ainsi, nous avons bien que $v = w$ car f est un monomorphisme. □

Lemme 4.6. *Le foncteur S préserve et reflète les épimorphismes réguliers.*

Démonstration. Montrons que S reflète les épimorphismes réguliers. Soit $S(f) : S(A) \to S(B)$ une surjection. Prenons $1_B \in S(B)$, par surjectivité, il existe un morphisme $u : B \to A$ dans $S(A)$ tel que $m_{f \circ u} = 1_B$. Ainsi, $f \circ u$ est un épimorphisme régulier, ce qui implique que f est un épimorphisme régulier car nous sommes dans le contexte d'une catégorie régulière.

Pour démontrer que S préserve les épimorphismes réguliers il suffit de voir que $S(f) : S(A) \to S(B)$ est surjectif lorsque $f : A \to B$ est un épimorphisme régulier. Soit $w \in S(B)$, la surjectivité de $S(f)$ se déduit de l'existence du produit fibré

$$\begin{tikzcd}
A \times_B W \arrow[r, two heads] \arrow[d, tail] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & W \arrow[d, tail, "w"] \\
A \arrow[r, two heads, "f"] & B.
\end{tikzcd}$$

□

Proposition 4.7. *Le foncteur S préserve et reflète les suites exactes.*

Démonstration. Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ une suite exacte dans $\mathcal{C}$. Par les lemmes 4.5 et 4.6, nous avons que :

$$\begin{tikzcd}
S(A) \arrow[rr, "S(f)"] \arrow[dr, two heads, "S(e_f)"'] & & S(B) \\
& S(Im(f)) \arrow[ur, tail, "S(m_f)"'] &
\end{tikzcd}$$

est une décomposition image de $S(f)$. Prouvons que $S(m_f)$ est bien le noyau de $S(g)$. Tout d'abord, il est clair que $S(g) \circ S(m_f) = 0$ car S préserve le morphisme nul. Ensuite, considérons une fonction $h : X \to S(B)$ telle que $S(g) \circ h = 0$ et montrons qu'il existe un unique $\lambda : X \to S(Im(f))$ faisant commuter le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[r, "h"] \arrow[d, dashed, "\lambda"] & S(B) \arrow[r, "S(g)"] & S(C) \\
S(Im(f)). \arrow[ur, tail, "S(m_f)"'] & &
\end{tikzcd}$$

Pour tout $x \in X$, nous avons que $S(g)(h(x)) = m_{g \circ h(x)} = 0$. Ainsi, nous obtenons que $g \circ h(x) = 0$. Or, $m_f : Im(f) \to B$ est le noyau de g, ainsi, pour chaque $x \in X$, il existe un unique $\lambda_x : W \to Im(f)$ tel que $m_f \circ \lambda_x = h(x)$. Nous définissons alors :

$$\lambda : X \longrightarrow S(Im(f)) : x \mapsto \lambda_x.$$

Cette fonction est bien définie car $h(x)$ est un monomorphisme et donc λ_x aussi. De plus, nous pouvons vérifier que $(S(m_f) \circ \lambda)(x) = h(x)$ pour tout $x \in X$. L'unicité découle des unicités respectives des λ_x. Nous avons ainsi montré que le foncteur S préserve l'exactitude.

Soit $A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C$ une suite de morphismes composables dans $\mathcal{C}$. Supposons désormais que $S(A) \xrightarrow{S(f)} S(B) \xrightarrow{S(g)} S(C)$ forme une suite exacte et montrons que m_f est le noyau de g. Nous savons que, pour tout $u \in S(B)$:

$$S(g)(u) = 0 \text{ ssi } \exists v \in S(Im(f)) \text{ tel que } S(m_f)(v) = u, \tag{4.1}$$

par la propriété d'exactitude dans les ensembles pointés. Nous vérifions que $g \circ m_f = 0$ en utilisant la condition (4.1) ci-dessus avec $u = m_f$ et $v = 1_{Im(f)}$.

Il reste à montrer que la propriété universelle du noyau est satisfaite. Considérons un morphisme $h : D \to B$ tel que $g \circ h = 0$ et montrons qu'il existe un unique morphisme $\lambda : D \to Im_f$ tel que $m_f \circ \lambda = h$. Nous avons immédiatement que $S(g) \circ S(h) = 0$. Dès lors, nous avons en particulier que

$$0 = S(g)(S(h)(1_D)) = S(g)(m_h).$$

Par la condition (4.1), nous obtenons un $v \in S(Im(f))$ tel que $m_f \circ v = m_h$. Nous posons alors $\lambda = v \circ e_h$. D'une part, nous vérifions que

$$m_f \circ \lambda = m_f \circ v \circ e_h = m_h \circ e_h = h.$$

D'autre part, l'unicité de cette construction découle du fait que m_f est un monomorphisme. Nous avons donc bien que m_f est le noyau de g et, ainsi, S reflète l'exactitude, comme annoncé. $\square$

4.2 Relations et spans soustractifs

Dans cette section nous introduisons une nouvelle approche de la soustractivité via les notions de relations et de spans soustractifs. Ces concepts seront ensuite utilisés dans les preuves diagrammatiques des deux prochaines sections.

Nous rappelons que, étant donné deux spans $[r_1, r_2]$ et $[s_1, s_2]$, nous écrivons $[s_1, s_2] \leq [r_1, r_2]$ s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[dr, "r_2"] & \\
A & & B \\
& S. \arrow[ul, "s_1"] \arrow[ur, "s_2"'] \arrow[uu, "t"] &
\end{tikzcd}$$

Avec cette notation, une catégorie pointée finiment complète est soustractive lorsque, pour tout relation $[r_1, r_2]$ sur A, si $[1_A, 1_A] \leq [r_1, r_2]$ et $[1_A, 0] \leq [r_1, r_2]$ alors $[0, 1_A] \leq [r_1, r_2]$ (cfr. définition 3.8).

Définition 4.8. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie pointée. Une relation*

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[dr, "r_2"] & \\
A & & B
\end{tikzcd}$$

dans $\mathcal{C}$ est dite soustractive *si, pour tout objet $C \in \mathcal{C}$ et pour toute paire de morphisme $a : C \to A$ et $b : C \to B$, nous avons l'implication suivante :*

$$[a, b] \leq [r_1, r_2] \quad et \quad [a, 0] \leq [r_1, r_2] \;\Rightarrow\; [0, b] \leq [r_1, r_2].$$

Exemple 4.9. Dans la catégorie des ensembles pointés, une relation R sur $X \times Y$ est soustractive si et seulement si, pour tout $x \in X$ et $y \in Y$, nous avons l'implication suivante :

$$(x, y) \in R \;\text{ et }\; (x, 0) \in R \;\Rightarrow\; (0, y) \in R.$$

Cela se déduit facilement du fait que $[a, b] \leq [r_1, r_2]$ si et seulement si $(a(c), b(c)) \in R$ pour tout $c \in C$.

Le théorème ci-dessous nous donne une caractérisation de la soustractivité en termes de relations soustractives. Il est issu d'un article de Z. Janelidze sur les relations internes fermées [19]. Dans cet article l'auteur étudie les propriétés des relations des catégories soustractives, unitales, fortement unitales ainsi que de Mal'tsev.

Théorème 4.10. *Une catégorie pointée et finiment complète $\mathcal{C}$ est soustractive si et seulement si toutes les relations dans $\mathcal{C}$ sont soustractives.*

Définition 4.11. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie régulière pointée. Un span $(S, s_1 : S \to A, s_2 : S \to B)$ dans $\mathcal{C}$ est dit* soustractif *si la relation qu'il induit*

$$\begin{tikzcd} & Im(s_1,s_2) \arrow[dl, "p_1 \circ m_{(s_1,s_2)}"'] \arrow[dr, "p_2 \circ m_{(s_1,s_2)}"] & \\ \boldsymbol{A} & & \boldsymbol{B} \end{tikzcd}$$

est soustractive (où $p_1 : A \times B \to A$ et $p_2 : A \times B \to B$ sont les projections du produit).

Exemple 4.12. Dans la catégorie Set_*, nous pouvons déduire de l'exemple 4.9 qu'un span $[s_1, s_2]$ est soustractif si la condition ci-dessous est respectée :

$$\text{si} \quad (x, y) \in Im(s_1, s_2) \quad \text{et} \quad (x, 0) \in Im(s_1, s_2) \quad \text{alors} \quad (0, y) \in Im(s_1, s_2).$$

En d'autres termes, s'il existe deux éléments $a, b \in S$ tel que $s_1(a) = s_1(b)$ et $s_2(b) = 0$ alors il existe un élément c tel que $s_1(c) = 0$ et $s_2(c) = s_2(a)$. Nous écrirons c comme une différence formelle $c = a - b$ car nous avons alors les égalités formelles suivantes :

$$\begin{aligned} s_1(a-b) &= s_1(a) - s_1(b) = 0 \\ s_2(a-b) &= s_2(a) - s_2(b) = s_2(a). \end{aligned}$$

La proposition qui suit nous permet elle aussi de transporter de l'information entre la catégorie des ensembles pointés et notre catégorie $\mathcal{C}$. L'utilisation des spans soustractifs et de cette proposition soulignera les endroits où l'hypothèse de soustractivité est cruciale dans les preuves de la prochaine section.

Proposition 4.13 ([20])**.** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie régulière pointée. Le foncteur $S : \mathcal{C} \to Set_*$ préserve et reflète les spans soustractifs.*

Remarque 4.14. La preuve de la proposition précédente nécessite d'étendre le foncteur $S : \mathcal{C} \to Set_*$ en un foncteur :

$$\bar{S} : Rel(\mathcal{C}) \to Rel(Set_*),$$

qui envoie une relation $[r_1, r_2]$ sur la relation induite par le span $[S(r_1), S(r_2)]$. Nous pouvons montrer que le foncteur S préserve les produits fibrés faibles. Cette dernière propriété alliée à la préservation des épimorphismes réguliers implique que le foncteur $\bar{S}$ est bien défini.

4.3 Lemme des neuf

Dans cette section nous donnerons deux caractérisations de la soustractivité en lien avec le lemme des neuf issues d'un article de Z. Janelidze [20]. D'une part, dans le contexte d'une catégorie normale, la soustractivité est équivalente au lemme des neuf supérieur ainsi qu'au lemme des neuf inférieur (Théorème 4.22). D'autre part, dans le contexte plus général d'une catégorie régulière pointée, une catégorie est soustractive si et seulement si le lemme des neuf inférieur tient (Théorème 4.23). Notons que la notion d'exactitude utilisée est moins forte dans le cas régulier pointé.

En outre, les preuves des différentes propositions de cette section nous permettront de cerner précisément les endroits où l'hypothèse de soustractivité est nécessaire pour conclure. L'exploration de ce que nous arrivons à prouver à l'aide de la soustractivité peut ainsi nous aider à mieux comprendre le concept en lui-même.

Dans un premier temps, rappelons l'énoncé des lemmes des neuf supérieur et inférieur. Un diagramme 3×3 dans une catégorie régulière pointée est un diagramme de la forme

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "u_1"] \arrow[d, "f_1"] & B_1 \arrow[r, "v_1"] \arrow[d, "g_1"] & C_1 \arrow[r] \arrow[d, "h_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_2 \arrow[r, "u_2"] \arrow[d, "f_2"] & B_2 \arrow[r, "v_2"] \arrow[d, "g_2"] & C_2 \arrow[r] \arrow[d, "h_2"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A_3 \arrow[r, "u_3"] \arrow[d] & B_3 \arrow[r, "v_3"] \arrow[d] & C_3 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd} \tag{4.2}$$

où les colonnes sont toutes exactes.

Définition 4.15 (lemme des neuf supérieur). *Soit un diagramme 3×3 tel que représenté ci-dessus. Si la seconde et la dernière lignes sont exactes alors la première est aussi exacte.*

Définition 4.16 (lemme des neuf inférieur). *Soit un diagramme 3×3 tel que représenté ci-dessus. Si la première et la seconde lignes sont exactes alors la dernière est aussi exacte.*

Dans un second temps, nous aurons besoin des deux lemmes ci-dessous :

Lemme 4.17. *Soit C une catégorie normale. Tout morphisme de noyau trivial est un monomorphisme.*

Démonstration. Soit $f : X \to Y$ un morphisme de noyau trivial. Considérons (P, p_1, p_2) le produit fibré de f avec lui-même. Nous savons qu'il existe un unique morphisme $\lambda : X \to P$ tel que le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[dr, dashed, "\lambda"] \arrow[drr, bend left, "1_X"] \arrow[ddr, bend right, "1_X"'] & & \\
& P \arrow[r, "p_1"] \arrow[d, "p_2"] & X \arrow[d, "f"] \\
& X \arrow[r, "f"'] & Y.
\end{tikzcd}$$

Dès lors, nous avons que p_1 et p_2 sont des épimorphismes scindés. De plus, p_1 et p_2 ont un noyau nul car f a un noyau nul. En effet, pour tout morphisme v de codomaine P, nous avons que :

$$\begin{aligned}
p_1 \circ v = 0 &\Rightarrow f \circ p_1 \circ v = 0 \\
&\Rightarrow f \circ p_2 \circ v = 0 \\
&\Rightarrow p_2 \circ v = 0.
\end{aligned}$$

Cela nous permet bien de conclure que $v = 0$ car p_1 et p_2 sont conjointement monomorphes. Dès lors, p_1 et p_2 sont des épimorphismes réguliers de noyau trivial. La catégorie étant normale, p_1 et p_2 sont des conoyaux de noyau trivial et sont donc des isomorphismes. Cela implique que f est un monomorphisme, comme annoncé. □

Remarque 4.18. Tout monomorphisme dans une catégorie pointée ayant un noyau trivial, nous avons que f est un monomorphisme *si et seulement si* $Ker(f) = 0$.

Lemme 4.19. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie régulière pointée. Une relation*

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[dr, "r_2"] & \\
A & & A
\end{tikzcd}$$

est telle que $(1_A, 0) \leq (r_1, r_2)$ si et seulement si $r_1 \circ k_{r_2}$ est un isomorphisme et, de manière symétrique, $(0, 1_A) \leq (r_1, r_2)$ si et seulement si $r_2 \circ k_{r_1}$ est un isomorphisme.

Démonstration. Premièrement, supposons que $r_1 \circ k_{r_2}$ soit un isomorphisme. Dès lors, il existe $s : A \to Ker(r_2)$ tel que $r_1 \circ k_{r_2} \circ s = 1_A$. Nous avons alors que le diagramme ci-dessous commute :

$$\begin{tikzcd}
& R \arrow[d, "(r_1,r_2)"] \\
A \arrow[ur, bend left, "k_{r_2} \circ s"] \arrow[r, "(1_A,0)"'] & A \times A.
\end{tikzcd}$$

Ce qui prouve que $(1_A, 0) \leq (r_1, r_2)$.

Deuxièmement, supposons que $(1_A, 0) \leq (r_1, r_2)$. Dès lors, il existe $s : A \to R$ tel que $r_1 \circ s = 1_A$ et $r_2 \circ s = 0$. Par la propriété universelle du noyau, il existe un unique $\lambda : A \to Ker(r_2)$ tel que $k_{r_2} \circ \lambda = s$. Nous avons alors que $(r_1 \circ k_{r_2}) \circ \lambda = 1_A$. Ainsi, $r_1 \circ k_{r_2}$ est un épimorphisme scindé.

En outre, nous avons directement que $r_2 \circ k_{r_2} \circ u = r_2 \circ k_{r_2} \circ v$ pour tout morphisme u, v de même domaine. Dès lors, si $r_1 \circ k_{r_2} \circ u = r_1 \circ k_{r_2} \circ v$, nous pouvons conclure que $u = v$ car r_1 et r_2 sont conjointement monomorphes et k_{r_2} est un monomorphisme. Cela prouve que $r_1 \circ k_{r_2}$ est aussi un monomorphisme et donc un isomorphisme. □

Nous avons désormais les outils nécessaires pour prouver nos deux caractérisations.

Proposition 4.20. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie soustractive normale. Le lemme des neuf supérieur est valable dans $\mathcal{C}$.*

Démonstration. Nous avons un diagramme 3×3 dans $\mathcal{C}$ où h_1 et g_1 sont des monomorphismes par le lemme 4.17 et le span $[g_2, v_2]$ est soustractif car $\mathcal{C}$ est une catégorie soustractive. Sachant que S préserve les monomorphismes, les spans soustractifs et l'exactitude des suites, nous obtenons un diagramme 3×3 dans Set_* où :

— les fonctions g_1 et h_1 sont injectives,

— le span $[g_2, v_2]$ est soustractif,

— la seconde et la dernière lignes sont exactes.

Dès lors, si nous montrons que, sous ces hypothèses, la première ligne est exacte dans Set_* alors elle sera exacte dans $\mathcal{C}$ par la propriété de réflexion du foncteur S.

(Exacte en A_1) : Nous devons montrer que le noyau de u_1 est trivial. Soit $a \in A_1$ tel que $u_1(a) = 0$. Nous avons que :

$$u_2(f_1(a)) = g_1(u_1(a)) = g_1(0) = 0,$$

par commutativité. Or, les fonctions u_2 et f_1 ont un noyau trivial, nous obtenons donc que $a = 0$, comme désiré. Cet argument est repris sur le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
& 0 \arrow[d, mapsto, "5"] & {} \arrow[d, dashed] & \\
0 \arrow[r, mapsto, "6"] & a \arrow[r, mapsto, "1"] \arrow[d, mapsto, "2"] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, mapsto, "3"] & {} \\
0 \arrow[r, mapsto, "4"] & \bullet \arrow[r, mapsto, "3"] \arrow[d, dashed] & 0. \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & {} \\
& {} & {} &
\end{tikzcd}$$

(Exacte en C_1) : Nous voulons que v_1 soit surjectif. Considérons $c \in C_1$. La deuxième ligne étant exacte, nous savons que v_2 est surjectif. Dès lors, il existe $b \in B_2$ tel que $v_2(b) = h_1(c)$. Nous calculons ensuite que :

$$\begin{aligned} v_3(g_2(b)) &= h_2(v_2(b)) \\ &= h_2(h_1(c)) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Ainsi, il existe $\bar{a} \in A_3$ tel que $u_3(\bar{a}) = g_2(b)$ car la dernière ligne est exacte. La surjectivité de f_2 nous garantit alors l'existence de $a \in A_2$ tel que $f_2(a) = \bar{a}$:

$$\begin{tikzcd}
 & & & {} \arrow[d, dashed] & \\
 & {} \arrow[d, dashed] & {} \arrow[d, dashed] \arrow[r, dashed] & c \arrow[r, dashed] \arrow[d, mapsto, "1"] & {} \\
{} \arrow[r, dashed] & a \arrow[r, dashed] \arrow[d, mapsto, "7"] & b \arrow[r, mapsto, "2"] \arrow[d, mapsto, "3"] & \bullet \arrow[r, dashed] \arrow[d, mapsto, "4"] & {} \\
{} \arrow[r, dashed] & \bar{a} \arrow[r, mapsto, "5"] \arrow[d, mapsto, "6"] & \bullet \arrow[r, mapsto, "3"] \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & {} \\
 & 0. & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

Nous vérifions que $g_2(u_2(a)) = g_2(b)$ et que $v_2(u_2(a)) = 0$, nous permettant d'utiliser la soustractivité de $[g_2, v_2]$. Cette hypothèse nous donne un élément $b - u_2(a) \in B_2$ tel que $v_2(b - u_2(a)) = v_2(b)$ et $g_2(b - u_2(a)) = 0$. Cette dernière égalité couplée à l'exactitude de la seconde colonne, nous garantit l'existence d'un $\bar{b} \in B_1$ tel que $g_1(\bar{b}) = b - u_2(a)$. Nous vérifions que :

$$\begin{aligned} h_1(v_1(\bar{b})) &= v_2(g_1(\bar{b})) \\ &= v_2(b) \\ &= h_1(c). \end{aligned}$$

L'injectivité de h_1 nous permet de conclure que $v_1(\bar{b}) = c$ et donc que v_1 est bien surjectif.

(Exacte en B_1) : Nous devons montrer que le noyau de v_1 correspond à m_{u_1}. Pour ce faire, nous montrons successivement que $k_{v_1} \leq m_{u_1}$ et $k_{v_1} \geq m_{u_1}$. D'une part, supposons que $v_1(b) = 0$ pour un certain $b \in B_1$ et montrons qu'il existe $\bar{a} \in A_1$ tel que $u_1(\bar{a}) = b$.

Le raisonnement à appliquer est illustré sur le diagramme ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, dashed] & {} \arrow[d, dashed] & {} \arrow[d, dashed] & \\
{} \arrow[r, dashed] & \bar{a} \arrow[r, mapsto, "8"] \arrow[d, mapsto, "7"] & b \arrow[r, mapsto, "1"] \arrow[d, mapsto, "2"] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, mapsto, "3"] & {} \\
{} \arrow[r, dashed] & a \arrow[r, mapsto, "4"] \arrow[d, mapsto, "4"] & \bullet \arrow[r, mapsto, "3"] \arrow[d, mapsto, "5"] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & {} \\
0 \arrow[r, mapsto, "6"] & \bullet \arrow[r, mapsto, "5"] \arrow[d, dashed] & 0. \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & {} & \\
 & {} & {} & &
\end{tikzcd}$$

D'autre part, nous pouvons montrer que $v_1(u_1(a)) = 0$ pour tout $a \in A_1$ (c'est-à-dire que $m_{u_1} \leq k_{v_1}$). Le raisonnement qui a été utilisé pour cela est représenté sur le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, dashed] & {} \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d, mapsto, "6"] & \\
{} \arrow[r, dashed] & a \arrow[r, mapsto, "1"] \arrow[d, mapsto, "1"] & \bullet \arrow[r, mapsto, "4"] \arrow[d, mapsto, "2"] & \bullet \arrow[r, dashed] \arrow[d, mapsto, "5"] & {} \\
{} \arrow[r, dashed] & \bullet \arrow[r, mapsto, "2"] \arrow[d, dashed] & \bullet \arrow[r, mapsto, "3"] \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & {} \\
 & {} & {} & {} &
\end{tikzcd}$$

Ainsi, la première ligne forme une suite exacte, comme désiré $\square$

Une preuve analogue permet de démontrer aisément la proposition ci-dessous :

Proposition 4.21. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie soustractive normale. Le lemme des neuf inférieur est vrai dans $\mathcal{C}$.*

Théorème 4.22. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie normale. Les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *La catégorie $\mathcal{C}$ est soustractive ;*
2. *Le lemme des neuf supérieur est vrai dans $\mathcal{C}$;*
3. *Le lemme des neuf inférieur est vrai dans $\mathcal{C}$.*

Démonstration. Les lemmes 4.20 et 4.21 garantissent les implications $(1 \Rightarrow 3)$ et $(1 \Rightarrow 2)$.

$(3 \Rightarrow 1)$: Soit une relation

$$\begin{tikzcd}
 & R \arrow[dl, "r_1"'] \arrow[dr, "r_2"] & \\
A & & A
\end{tikzcd}$$

telle que $(1_A, 1_A) \leq (r_1, r_2)$ et $(1_A, 0) \leq (r_1, r_2)$. Montrons que $(0, 1_A) \leq (r_1, r_2)$. Par le lemme 4.19, nous savons que $r_1 \circ k_{r_2}$ est un isomorphisme. Ainsi, le diagramme suivant est un diagramme 3×3 tel que la première et la seconde lignes sont exactes :

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & Ker(r_2) \arrow[r, "r_1 \circ k_{r_2}"] \arrow[d, "k_{r_2}"] & A \arrow[r] \arrow[d, "1_A"] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ker(r_1) \arrow[r, "k_{r_1}"] \arrow[d, "1_{Ker(r_1)}"] & R \arrow[r, "r_1"] \arrow[d, "r_2"] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & Ker(r_1) \arrow[r, "r_2 \circ k_{r_1}"] \arrow[d] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0. &
\end{tikzcd}$$

Dès lors, par hypothèse, la dernière ligne est aussi exacte et donc $r_2 \circ k_{r_1}$ est un isomorphisme. Le lemme 4.19 nous permet alors de conclure.

$(2 \Rightarrow 1)$: La preuve suit le raisonnement précédent en inversant les rôles de r_1 et r_2. □

Nous pouvons maintenant analyser ce qu'il se passe lorsque nous laissons tomber l'hypothèse de normalité :

Théorème 4.23. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie régulière pointée. La catégorie $\mathcal{C}$ est soustractive si et seulement si le lemme des neuf inférieur est vrai dans $\mathcal{C}$.*

Démonstration. La preuve que la condition est suffisante est identique à l'implication $(3 \Rightarrow 1)$ du théorème 4.22.

Pour démontrer que la condition est nécessaire, nous suivons la même idée que dans la proposition 4.20 où nous transposons notre problème dans Set_*. Ainsi, il nous suffit de montrer que pour tout diagramme 3×3 dans Set_* tel que :

a) le span $[u_2, f_2]$ est soustractif,

b) le span $[g_2, v_2]$ est soustractif,

c) le span $[v_2, g_2]$ est soustractif,

si la première et la seconde lignes sont exactes alors la dernière l'est aussi.

(Exacte en A_3) : Montrons que u_3 est injective. Soit $a \in A_3$ tel que $u_3(a) = 0$. Nous savons qu'il existe $a' \in A_2$ tel que $f_2(a') = a$ par surjectivité de f_2. Nous avons alors que :

$$g_2(u_2(a')) = u_3(f_2(a')) = u_3(a) = 0,$$

par commutativité. Par exactitude de la seconde colonne, il existe $b \in B_1$ tel que $g_1(b) = u_2(a')$. Nous remarquons alors que :

$$\begin{aligned} h_1(v_1(b)) &= v_2(g_1(b)) \\ &= v_2(u_2(a')) \\ &= 0. \end{aligned}$$

L'injectivité de h_1 nous donne que $v_1(b) = 0$. Dès lors, l'exactitude de la première ligne nous garantit l'existence de $a'' \in A_1$ tel que $u_1(a'') = b$. Cette première partie du développement est illustrée par le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd}
 & {} \arrow[d, dashed] & {} \arrow[d, dashed] & 0 \arrow[d, mapsto, "9"] & \\
{} \arrow[r, dashed] & a'' \arrow[r, mapsto, "10"] \arrow[d, dashed] & b \arrow[r, mapsto, "7"] \arrow[d, mapsto, "6"] & \bullet \arrow[r, dashed] \arrow[d, mapsto, "8"] & {} \\
{} \arrow[r, dashed] & a' \arrow[r, mapsto, "4"] \arrow[d, mapsto, "3"] & \bullet \arrow[r, mapsto, "8"] \arrow[d, mapsto, "5"] & 0 \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & {} \\
{} \arrow[r, dashed] & a \arrow[r, mapsto, "1"] \arrow[d, mapsto, "2"] & 0. \arrow[r, dashed] \arrow[d, dashed] & {} & \\
 & 0 & {} & &
\end{tikzcd}$$

Nous cherchons désormais à appliquer la soustractivité du span $[u_2, f_2]$. Pour cela nous vérifions que :

$$\begin{cases} u_2(a') = g_1(b), \\ u_2(f_1(a'')) = g_1(b), \end{cases}$$

et

$$\begin{cases} f_2(a') = a, \\ f_2(f_1(a'')) = 0. \end{cases}$$

Dès lors, nous avons qu'il existe $a' - f_1(a'') \in A_2$ tel que $u_2(a' - f_1(a'')) = 0$ et $f_2(a' - f_1(a'')) = a$. L'injectivité de u_2 nous donne $a' - f_1(a'') = 0$. Nous pouvons conclure en observant alors que $a = f_2(0) = 0$ et donc que u_3 est, elle aussi, injective.

(Exacte en B_3) : Une preuve consiste à montrer que $m_{u_3} \leq k_{v_3}$ et $k_{v_3} \leq m_{u_3}$ en utilisant respectivement la soustractivité du span $[g_2, v_2]$ (b) et celle de $[v_2, g_2]$ (c).

(Exacte en C_3) : Les morphismes h_2 et v_2 étant des épimorphismes réguliers, nous avons directement que v_3 est un épimorphisme régulier et l'exactitude en C_3 en découle. $\square$

Remarque 4.24. Nous avons aussi l'équivalence entre la soustractivité d'une catégorie régulière pointée et une version modifiée du lemme des neuf supérieur où g_1 et h_1 sont supposés être des monomorphismes. En effet, l'hypothèse de normalité dans la démonstration du théorème 4.22 n'est utilisée que pour conclure que g_1 et h_1 sont bien des monomorphismes (pour l'implication $(1 \Rightarrow 2)$).

4.4 Lemme des cinq court

Cette section est consacrée à l'étude du lien entre le lemme des cinq court et la soustractivité. Nous montrons qu'une catégorie soustractive est équivalente à une catégorie satisfaisant une variante du lemme des cinq court pour les *idéaux*. La démonstration de cette équivalence s'étale sur deux sous-sections décrivant chacune une implication de la preuve. Dans un premier temps, nous introduisons la notion d'idéal et nous restons dans l'approche des preuves diagrammatiques de la section précédente. Dans un second temps, nous développons une approche basée sur l'étude de la fermeture des relations internes d'une catégorie.

4.4.1 Idéaux, clots et version affaiblie du lemme des cinq court

Au sein de cette sous-section nous commençons par donner les définitions catégoriques de *clot* et d'*idéal*. Ensuite, nous énonçons une version alternative du lemme des cinq court pour les idéaux - $SFL_{\mathcal{I}}$. Enfin, nous montrons la première implication de notre caractérisation : la soustractivité implique $SFL_{\mathcal{I}}$ dans le contexte d'une catégorie régulière pointée.

Les notions de clot et d'idéal viennent initialement de l'algèbre universelle. Le second concept fut introduit par P.J. Higgins pour les groupes avec des opérateurs multiples [16] avant d'être généralisé par R. Magari en 1967 [24]. Finalement les idéaux sont l'objet d'étude de l'article [28] et de ses suites par A. Ursini. Les clots, une notion intermédiaire entre les noyaux et les idéaux, furent définis par après dans un article de P. Aglianó et de A. Ursini en 1992 [2].

D'une part, une sous-algèbre K d'une algèbre A est un *clot* sur A lorsque, pour tout $a_1, \ldots, a_m \in A$ et t un terme d'arité $m+n$, nous avons l'implication suivante :

$$\begin{cases} t(a_1, \ldots, a_m, 0, \ldots, 0) = 0 \\ k_1, \ldots, k_n \in K \end{cases} \quad \Rightarrow \quad t(a_1, \ldots, a_m, k_1, \ldots, k_n) \in K.$$

Dans [2], il a été observé qu'un clot K correspond à la classe de 0 d'une relation réflexive, en particulier de la relation réflexive générée par $K \times 0$. Cette observation inspire ainsi la définition catégorique de clot ci-dessous :

Définition 4.25. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie pointée et finiment complète. Un* clot sur A *dans $\mathcal{C}$ est un morphisme $m : K \to A$ tel qu'il existe une relation réflexive (R, r_1, r_2) sur A pour laquelle m et (r_1, r_2) font partie d'un produit fibré*

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] \arrow[d, tail, "m"] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & R \arrow[d, tail, "(r_1,r_2)"] \\ A \arrow[r, "(1_A,0)"] & A \times A. \end{tikzcd}$$

Avec cette définition, nous remarquons bien que, si $\mathcal{C}$ est une variété, alors

$$Im(m) = \{a \in A \mid (a, 0) \in R\}.$$

C'est-à-dire que m est la 0-classe d'une relation réflexive R.

Notons que cette définition n'est pas la seule possible. Un exemple est donné par l'article [17] dans lequel les auteurs partent de l'observation qu'un clot au sens de l'algèbre universelle est stable par conjugaison pour fournir une autre définition catégorique de clot. Cependant, dans les catégories avec coproduits finis, ces deux définitions coïncident.

D'autre part, la définition algébrique d'*idéal* est la même que celle de clot à ceci près que nous demandons à t d'être un *terme idéal*, c'est-à-dire un terme vérifiant l'identité $t(a_1, \ldots, a_m, 0, \ldots, 0) \approx 0$ dans la variété. Il a été montré que les idéaux tels que définis par R. Magari [24] correspondent aux images des clots par des morphismes surjectifs dans une variété [17]. La contrepartie catégorique que nous avons donc choisie d'utiliser dans ce travail est la suivante :

Définition 4.26. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie pointée et finiment complète. Un* idéal sur A *est un monomorphisme $i : I \to A$ qui est l'image régulière d'un clot, c'est-à-dire tel que i fait partie d'un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} \bullet \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, tail, "m"] & I \arrow[d, tail, "i"] \\ \bullet \arrow[r, two heads, "f"] & A, \end{tikzcd}$$

où e et f sont des épimorphismes réguliers et m est un clot.

Pour la preuve de la proposition 4.30 nous aurons néanmoins besoin d'une définition alternative d'idéal en termes de noyau :

Proposition 4.27. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie régulière pointée. Un morphisme $i : I \to A$ est l'image régulière d'un clot si et seulement si i est aussi l'image régulière d'un noyau.*

Démonstration. Supposons que le morphisme i est l'image régulière d'un clot m tels que décrits dans les définitions 4.25 et 4.26. Nous remarquons alors que le morphisme $k : K \to R$ est le noyau de r_2 et, dès lors, que $m = r_1 \circ k$. De plus, r_1 est un épimorphisme scindé (en particulier un épimorphisme régulier) par la réflexivité de la relation R. Nous obtenons alors que i est l'image régulière du noyau k :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, two heads, "e"] \arrow[d, tail, "k"] & I \arrow[d, tail, "i"] \\ R \arrow[r, two heads, "f \circ r_1"] & A. \end{tikzcd}$$

En effet, $f \circ r_1$ est un épimorphisme régulier car ceux-ci se composent dans une catégorie régulière.

Supposons désormais que le morphisme i est l'image régulière d'un noyau $m : K \to A$. Il suffit de montrer que m est un clot pour conclure. Considérons $p : A \to B$ un morphisme dont m est le noyau. Nous pouvons prendre (R, r_1, r_2) comme étant le produit fibré $(A \times_B A, p_1, p_2)$ de p. En outre, le morphisme $k : K \to R$ se construit avec $m : K \to A$ et $0 : K \to A$. $\square$

Énonçons désormais la version "affaiblie" du lemme des cinq court que nous utiliserons dans cette section ainsi que la suivante :

Lemme 4.28 (lemme des cinq court pour les idéaux)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie régulière pointée. Pour tout diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & A_1 \arrow[r, "f_1"] \arrow[d, "u_1"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, "u_2"] & A_3 \arrow[r] \arrow[d, "u_3"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & B_1 \arrow[r, "g_1"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3 \arrow[r] & 0 \end{tikzcd} \tag{4.3}$$

où les lignes sont exactes et u_2 est un idéal, si u_1 et u_3 sont des isomorphismes alors u_2 est aussi un isomorphisme.

Remarque 4.29. Par *exacte*, nous entendons *exacte* au sens de la définition 4.1. Ce choix de définition ne change pas le résultat de la proposition qui suit mais il entre en compte dans la preuve de la proposition 4.41.

Proposition 4.30 ([20] : Théorème 6.2)**.** *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie régulière pointée. Si $\mathcal{C}$ est soustractive alors le lemme des cinq court pour les idéaux est vrai dans $\mathcal{C}$.*

Démonstration. Considérons un diagramme tel que (4.3). Par la proposition 4.27, u_2 fait partie d'un diagramme commutatif de la forme

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, tail, "v_1"] & A_2 \arrow[r] \arrow[d, tail, "u_2"] & 0 \\
C_2 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "v_2"] & B_2 \arrow[r] & 0 \\
C_3 & &
\end{tikzcd}$$

où les lignes et les colonnes sont exactes. Il nous suffit de montrer que le monomorphisme u_2 est aussi un épimorphisme régulier pour conclure. Cela peut être fait par un *diagram-chasing* sur le diagramme suivant

$$\begin{tikzcd}
C_1 \arrow[r, "e_1"] \arrow[d, tail, "v_1"] & A_2 \arrow[r, "f_2"] \arrow[d, tail, "u_2"] & A_3 \arrow[d, "u_3"] \\
C_2 \arrow[r, "h_1"] \arrow[d, "v_2"] & B_2 \arrow[r, "g_2"] & B_3 \\
C_3. & &
\end{tikzcd}$$

En effet, nous pouvons appliquer le même raisonnement que dans les démonstrations de la section précédente pour transporter cette preuve dans Set_* et ainsi montrer que u_2 est surjectif. La "chasse" à réaliser est résumée ci-dessous :

$$\begin{tikzcd}
a \arrow[r, mapsto, "6"] \arrow[d, dashed] & \bullet \arrow[r, mapsto, "5"] \arrow[d, dashed] & \bullet \arrow[d, mapsto, "4"] \\
c \arrow[r, mapsto, "2"] \arrow[d, mapsto, "3"] & b \arrow[r, mapsto, "1"] & \bullet \\
c' & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
a' \arrow[r, mapsto, "11"] \arrow[d, dashed] & \bullet \arrow[r, dashed] \arrow[d, mapsto, "10"] & {} \arrow[d, dashed] \\
c - h_1(a) \arrow[r, mapsto, "8"] \arrow[d, mapsto, "7"] \arrow[rr, mapsto, bend right, "7"] & \bullet \arrow[r, mapsto, "9"] & 0 \\
c' & &
\end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[d, dashed] & {} \arrow[d, dashed] & \\
(c - h_1(a)) - h_1(a') \arrow[r, mapsto, "12"] \arrow[d, mapsto, "12"] & 0 \arrow[r, dashed] & {} \\
c' & &
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\bullet \arrow[r, mapsto, "14"] \arrow[d, mapsto, "15"] & \bullet \arrow[r, dashed] \arrow[d, mapsto, "16"] & {} \\
c - (c - h_1(a)) - h_1(a') \arrow[r, mapsto, "13"] \arrow[d, mapsto, "13"] & \bullet \arrow[r, dashed] & {} \\
c' & &
\end{tikzcd}$$

$\square$

4.4.2 Propriété de fermeture des relations et soustractivité

Dans cette sous-section, nous introduisons tout d'abord une approche provenant d'une série d'articles de Z. Janelidze ([19] et ses suites) sur la fermeture des relations d'une catégorie. Nous étudions ensuite une propriété de fermeture particulière et son lien avec les catégories soustractives ainsi qu'avec le lemme des cinq. Ce travail, allié à celui de la sous-section précédente, nous permettra de déduire qu'une catégorie régulière pointée est soustractive si et seulement si le lemme des cinq court pour les idéaux est vrai dans la dite catégorie (Corollaire 4.42). Cette sous-section se base principalement sur l'article *"Split Short Five Lemma for Clots and Subtractive Categories"* de Z. Janelidze et A. Ursini [21].

Afin d'arriver aux définitions 4.31 et 4.34 qui nous intéressent pour la suite, nous devons amener ces définitions de manière formelle. Considérons une matrice augmentée

$$M = \left(\begin{array}{ccc|ccc} t_{11} & \cdots & t_{1m} & u_{11} & \cdots & u_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1} & \cdots & t_{nm} & u_{n1} & \cdots & u_{nl} \end{array}\right) \tag{4.4}$$

de termes d'arité k issus de la théorie des ensembles pointés vus comme une variété. Une relation $r : R \to X^n$ sur un ensemble pointé X est dite *fermée* par rapport à M si, pour tout $\vec{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k) \in X^k$, la condition suivante est satisfaite :

$$\begin{gathered} \text{Si pour tout } 1 \le i \le m, (t_{1i}\vec{x}, \ldots, t_{ni}\vec{x}) \in R, \\ \text{alors } (u_{1j}\vec{x}, \ldots, u_{nj}\vec{x}) \in R, \text{ pour tout } 1 \le j \le l. \end{gathered}$$

Une relation $r : R \to A^n$ dans une catégorie pointée $\mathcal{C}$ est *fermée* par rapport à M si, pour tout objet $C \in \mathcal{C}$, le foncteur $hom(C, -)$ envoie R sur une relation fermée par rapport à M.

Nous pouvons décomposer cette notion en deux définitions plus explicites :

Définition 4.31. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie pointée avec les limites finies et $r : R \to A^n$ une relation dans $\mathcal{C}$. La relation r est dite* compatible *avec une matrice d'éléments généralisés, c'est-à-dire d'éléments de $hom(C, A)$, telle que*

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} x_{11} & \cdots & x_{1m} & y_{11} & \cdots & y_{1l} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & \cdots & x_{nm} & y_{n1} & \cdots & y_{nl} \end{array}\right)$$

lorsque la condition suivante est vérifiée : si les morphismes $(x_{1i}, \ldots, x_{ni}) : C \to A^n$ se factorisent par r alors les morphismes $(y_{1i}, \ldots, y_{ni}) : C \to A^n$ se factorisent aussi par r.

Remarque 4.32. Dans la suite, nous écrirons qu'un élément généralisé x appartient à R lorsque qu'il se factorise par la relation.

Exemple 4.33. Une catégorie pointée avec les limites finies est soustractive si et seulement chaque relation $r : R \to A \times A$ est compatible avec la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1_A & 1_A & 0 \\ 1_A & 0 & 1_A \end{array}\right) \tag{4.5}$$

où la première colonne indique la réflexivité, la seconde la ponctualité à droite et la dernière la ponctualité à gauche (voir définition 3.8 et section 4.2).

Définition 4.34. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie pointée avec les limites finies et $r : R \to A^n$ une relation dans $\mathcal{C}$. La relation r est dite* fermée *par une matrice (4.4) si r est compatible avec chaque interprétation de la matrice. C'est-à-dire que r est compatible avec chaque matrice*

$$I = \left(\begin{array}{ccc|ccc} t_{11}\vec{x} & \cdots & t_{1m}\vec{x} & u_{11}\vec{x} & \cdots & u_{1l}\vec{x} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n1}\vec{x} & \cdots & t_{nm}\vec{x} & u_{n1}\vec{x} & \cdots & u_{nl}\vec{x} \end{array}\right) \tag{4.6}$$

où $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ est un vecteur de k morphismes de codomaine A et de même domaine, c'est-à-dire que $x_i \in hom(C, A)$ pour un certain $C \in \mathcal{C}$, pour tout $1 \leq i \leq k$.

Exemple 4.35. Soit Grp la catégorie des groupes et $r : R \to \mathbb{Z}$ une relation binaire sur le groupe des entiers. Une interprétation d'une matrice de la forme

$$\left(\begin{array}{cc|c} x & y & x \\ y & z & z \end{array}\right)$$

est donnée par la matrice d'éléments de $hom(\mathbb{Z}, \mathbb{Z})$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1_{\mathbb{Z}} & 0 & 1_{\mathbb{Z}} \\ 0 & z & z \end{array}\right)$$

où $z : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} : a \mapsto a + 2$ et 0 est le morphisme nul. Dans cette interprétation nous avons que $C = \mathbb{Z}$ (cfr. définition 4.34).

Exemple 4.36. Une relation binaire dans une catégorie régulière pointée est réflexive et symétrique si et seulement si elle est fermée par rapport aux matrices

$$R = \left(\begin{array}{c|c} & x \\ & x \end{array}\right) \quad \text{et} \quad S = \left(\begin{array}{c|c} x & y \\ y & x \end{array}\right) \tag{4.7}$$

où R est une matrice dégénérée.

Exemple 4.37. Selon le théorème 4.10, une catégorie pointée avec les limites finies est soustractives si et seulement si chaque relation $r : R \to A \times A$ est fermée par rapport à la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & a & 0 \\ b & 0 & b \end{array}\right)$$

où 0 représente le terme unaire $0(x) = c$ avec c l'unique constante de la théorie des ensembles pointés.

Définition 4.38. *Soient $\mathcal{C}$ une catégorie pointée avec les limites finies, $r : R \to A^n$ une relation dans $\mathcal{C}$ ainsi que M et M' deux matrices de la forme (4.4). Nous disons que r à la* propriété de fermeture

$$M \Rightarrow M'$$

si lorsque r est fermée par rapport à M alors r est fermée par rapport à M'.

Exemple 4.39. La compatibilité avec la matrice (4.5) dans l'exemple 4.33 peut être réexprimée par la propriété de fermeture suivante :

$$\left(\begin{array}{|cc} x & x \\ x & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{|c} 0 \\ x \end{array}\right)$$

où les matrices sont dégénérées.

Nous avons désormais les outils et le vocabulaire nécessaire pour démontrer les deux propositions qui suivent. Ces propositions mèneront naturellement à la caractérisation des catégories soustractives énoncée dans l'introduction de cette sous-section.

Proposition 4.40. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie pointée avec les limites finies. Si chaque relation dans $\mathcal{C}$ d'arité 4 à la propriété de fermeture*

$$\left(\begin{array}{c|c} 0 & x \\ 0 & 0 \\ x & 0 \\ 0 & 0 \end{array}\right) \Rightarrow \left(\begin{array}{ccccc|c} x & y & y & 0 & 0 & x \\ x & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 0 \\ 0 & 0 & 0 & y & y & 0 \end{array}\right), \tag{4.8}$$

alors $\mathcal{C}$ est une catégorie soustractive.

Démonstration. Nous allons montrer qu'une relation quelconque $r : R \to A \times A$ dans $\mathcal{C}$ est fermée par rapport à la matrice

$$\left(\begin{array}{cc|c} a & a & 0 \\ a & 0 & a \end{array}\right),$$

ce qui implique qu'elle est compatible avec la matrice (4.5). Pour ce faire, nous définissons une relation S d'arité 4 sur $A \times A$ via le langage des éléments généralisés :

$$S = \{((a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2), (d_1, d_2)) \in (A^2)^4 \mid (b_2, a_2) \in R \text{ et } (d_1, c_2) \in R\}.$$

La relation S étant d'arité 4 elle a la propriété de fermeture (4.8). Montrons qu'elle est fermée par rapport à

$$\left(\begin{array}{c|c} (0,0) & (x_1,x_2) \\ (0,0) & (0,0) \\ (x_1,x_2) & (0,0) \\ (0,0) & (0,0) \end{array}\right).$$

Si la première colonne appartient à S cela signifie que $(0,0) \in R$ et $(0,x_2) \in R$, par définition de S. A nouveau, par construction, nous avons alors que la seconde colonne est dans S. Dès lors, S est fermée par rapport à la matrice de droite de (4.8). En particulier, elle est compatible avec

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} (a,a) & (a,0) & (a,0) & 0 & 0 & (a,a) \\ (a,a) & (a,0) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a,a) & (a,0) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (a,0) & (a,0) & 0 \end{array}\right),$$

pour a un élément généralisé de A. Une vérification rapide nous permet de conclure que si (a,a) et $(a,0)$ sont dans R alors chacune des colonnes de gauche de la matrice ci-dessus sont dans S. Cela implique que $((a,a),(0,0),(0,0),(0,0)) \in S$ et donc que $(0,a) \in R$. Ainsi, toutes les relations de $\mathcal{C}$ sont compatibles avec la matrice (4.5) et donc la catégorie est soustractive, comme annoncé. $\square$

Proposition 4.41. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie pointée avec les limites finies. Si le lemme des cinq court pour les idéaux est vrai dans $\mathcal{C}$ alors $\mathcal{C}$ a la propriété de fermeture (4.8).*

Démonstration. Soit $r : R \to A^4$ une relation d'arité 4 sur A dans $\mathcal{C}$. Supposons que cette relation est fermée par rapport à la matrice de gauche de (4.8) et montrons qu'elle est fermée par rapport à la matrice du coté droit de cette implication. Dans ce but, nous construisons les relations et le morphisme ci-dessous avec le langage des éléments généralisés :

$$\begin{aligned} Y &= \{(a,b) \in A^2 \mid (a,a,0,0),(b,b,0,0),(b,0,0,0),(0,0,a,b),(0,0,b,b) \in R\} \\ K &= \{(a,b) \in Y \mid (a,0,0,0) \in R\} \end{aligned}$$

ainsi que le monomorphisme

$$m : K \to Y : (a,b) \mapsto (a,b).$$

Il est clair que si m est un isomorphisme alors $\mathcal{C}$ à la propriété de fermeture (4.8). Pour ce faire, nous montrons que m est un clot, en particulier un idéal, et qu'il fait partie d'un diagramme de cinq court tel que (4.3).

Soit (S, s_1, s_2) le relation réflexive définie par :

$$\begin{aligned} S &= \{((a_1,b_1),(a_2,b_2)) \in Y^2 \mid (a_1,a_2,0,0) \in R\} \\ (s_1,s_2) &: S \to Y^2 : ((a_1,b_1),(a_2,b_2)) \mapsto ((a_1,b_1),(a_2,b_2)). \end{aligned}$$

Cette relation est effectivement réflexive car $(a,a,0,0) \in R$ pour tout élément $(a,b) \in Y$. Nous avons alors le produit fibré suivant :

$$\begin{tikzcd} K \arrow[r, "k"] \arrow[d, tail, "m"'] \arrow[dr, phantom, "\lrcorner", very near start] & S \arrow[d, tail, "(s_1,s_2)"] \\ Y \arrow[r, "(1_Y,0)"] & Y \times Y, \end{tikzcd}$$

où $k : K \to S : (a,b) \mapsto ((a,b),(0,0))$. Le morphisme k est bien défini car $(a,0,0,0) \in R$ pour tout $(a,b) \in K$. Ainsi, m est un idéal. Nous pouvons alors construire un diagramme commutatif

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "f"] \arrow[d, "1_X"] & K \arrow[r, "g\circ m"] \arrow[d, "m"] & Z \arrow[r] \arrow[d, "1_Z"] & 0 \\ 0 \arrow[r] & X \arrow[r, "m\circ f"] & Y \arrow[r, "g"] & Z \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

avec

$$\begin{aligned} X &= \{a \in A \mid (a,a,0,0),(0,0,a,0) \in R\} \\ Z &= \{b \in A \mid (b,b,0,0),(b,0,0,0),(0,0,b,b) \in R\} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} f &: X \to K : a \mapsto (a,0) \\ g &: Y \to Z : (a,b) \mapsto b. \end{aligned}$$

Notons que f est bien définie car R est fermée par rapport à la matrice de gauche de (4.8). Nous pouvons aisément vérifier que $m \circ f = k_g$ et que g est une surjection. Ainsi, les lignes sont exactes. Le lemme des cinq court pour les idéaux nous permet de conclure que m est un isomorphisme. Dès lors, $\mathcal{C}$ admet la propriété de fermeture 4.8, comme souhaité. $\square$

La caractérisation des catégories soustractives énoncée ci-après se déduit directement des propositions 4.30, 4.40 et 4.41 :

Corollaire 4.42. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie régulière pointée. La catégorie $\mathcal{C}$ est soustractive si et seulement si le lemme des cinq court pour les idéaux est vrai dans $\mathcal{C}$.*

Conclusion

L'objectif principal de ce mémoire était de se familiariser avec les variétés et les catégories soustractives dans différents contextes mathématiques. Dans cette optique, nous avons d'abord introduit des concepts issus de l'algèbre universelle, soulignant que leur portée va bien au-delà du cadre restreint dans lequel nous les avons utilisés. Après avoir démontré l'exactitude des variétés dans le second chapitre, nous avons ensuite examiné diverses caractérisations de la soustractivité.

Nous avons alors défini la notion de variété soustractive ainsi que sa contrepartie catégorique impliquant la ponctualité des relations. Nous avons également établi l'équivalence entre la soustractivité et la 0-permutabilité des congruences. La dernière formulation du chapitre 3 mettait en avant le revêtement projectif d'une catégorie, les algèbres libres d'une variété et une version affaiblie de la soustractivité. Finalement, dans le dernier chapitre, nous avons démontré que la soustractivité était équivalente au lemme des neuf inférieur ainsi qu'au lemme des cinq court pour les idéaux.

Ce travail ouvre la voie à de nombreuses extensions. Une première perspective d'exploration serait de rechercher d'autres caractérisations des catégories soustractives afin d'affiner davantage notre compréhension de cette propriété. Par ailleurs, nous pourrions étudier les applications de la soustractivité, notamment dans le lambda-calculus. Enfin, une autre piste intéressante serait de mener une étude similaire pour d'autres propriétés remarquables telles que les catégories unitales ou les catégories de Goursat. Ces dernières sont des catégories régulières caractérisées par la 3-permutabilité des congruences :

$$R \circ S \circ R = S \circ R \circ S$$

pour toute paire de congruences R et S sur un même objet de la catégorie. Dans [22] et [14] on a pu établir, pour les catégories de Goursat, des résultats analogues à ceux présentés dans ce mémoire pour les catégories soustractives. Dans ces travaux on utilise de manière essentielle le calcul des relations dans une catégorie régulière. Nous pouvons notamment étudier le lemme des neuf dans ce contexte non-pointé. Pour cela, le concept de suite exacte courte cède la place à la notion de "fourche exacte". Une "fourche exacte" est un diagramme

$$R \underset{r_2}{\overset{r_1}{\rightrightarrows}} X \xrightarrow{f} Y$$

où (R, r_1, r_2) est la paire noyau de f et f est le coégalisateur de r_1 et r_2.

Bibliographie

[1] J.C. Abbott. Algebras of implication and semi-lattices. *Algèbre et théorie des nombres*, 20(2) :1–8, 1966-1967.

[2] Paolo Aglianó and Aldo Ursini. Ideals and other generalizations of congruence classes. *J. Aust. Math. Soc.*, 53(1) :103–115, 1992.

[3] Michael Barr, Pierre A Grillet, and Donovan H Van Osdol. *Exact categories*. Springer, 1971.

[4] Garrett Birkhoff. On the combination of subalgebras. In *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, volume 29, pages 441–464. Cambridge University Press, 1933.

[5] Francis Borceux. *Handbook of categorical algebra : volume 1, Basic category theory*, volume 1. Cambridge University Press, 1994.

[6] Francis Borceux and Dominique Bourn. *Mal'cev, protomodular, homological and semi-abelian categories*, volume 566. Springer Science & Business Media, 2004.

[7] Dominique Bourn. Mal'cev categories and fibration of pointed objects. *Appl. categor. struct.*, 4 :307–327, 1996.

[8] Aurelio Carboni, Joachim Lambek, and MC Pedicchio. Diagram chasing in Mal'cev categories. *J. Pure Appl. Algebra*, 69(3) :271–284, 1991.

[9] Aurelio Carboni and Enrico M Vitale. Regular and exact completions. *J. Pure Appl. Algebra*, 125(1-3) :79–116, 1998.

[10] Maria Manuel Clementino, Nelson Martins-Ferreira, and Andrea Montoli. On the categorical behaviour of preordered groups. *J. Pure Appl. Algebra*, 223(10) :4226–4245, 2019.

[11] Peter J Freyd and Andre Scedrov. *Categories, allegories*. Elsevier, 1990.

[12] Marino Gran. An introduction to regular categories. *New Perspectives in Algebra, Topology and Categories : Summer School, Louvain-la-Neuve, Belgium, September 12-15, 2018 and September 11-14, 2019*, pages 113–145, 2021.

[13] Marino Gran and Aline Michel. Central extensions of preordered groups, 2023.

[14] Marino Gran and Diana Rodelo. A new characterisation of Goursat categories. *Appl. Categor. Struct.*, 20 :229–238, 2012.

[15] Marino Gran and Diana Rodelo. On the characterization of Jonsson-Tarski and of subtractive varieties. *Diagrammes*, 67 :101–115, 2012.

[16] Philip J Higgins. Groups with multiple operators. *Proc. London Math. Soc.*, 3(3) :366–416, 1956.

[17] George Janelidze, László Márki, and Aldo Ursini. Ideals and clots in pointed regular categories. *Appl. Categor. Struct.*, 17 :345–350, 2009.

[18] Zurab Janelidze. Subtractive categories. *Appl. Categor. Struct.*, 13 :343–350, 2005.

[19] Zurab Janelidze. Closedness properties of internal relations I : A unified approach to Mal'tsev, unital and subtractive categories. *Theory Appl. Categ.*, 16(12) :236–261, 2006.

[20] Zurab Janelidze. The pointed subobject functor, 3×3 lemmas, and subtractivity of spans. *Theory Appl. Categ.*, 23(11) :221–242, 2010.

[21] Zurab Janelidze and Aldo Ursini. Split short five lemma for clots and subtractive categories. *Appl. Categor. Struct.*, 19 :233–255, 2011.

[22] Stephen Lack. The 3-by-3 lemma for regular Goursat categories. *Homol. Homotopy Appl.*, 6(1) :1–3, 2004.

[23] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician*, volume 5. Springer Science & Business Media, 2013.

[24] Roberto Magari. Su una classe equazionale di algebre. *Ann. Mat. Pura Appl.*, 75 :277–311, 1967.

[25] Jiří Rosickỳ, EM Vitale, et al. Exact completion and representations in abelian categories. *Homol. Homotopy Appl.*, 3(3) :453–466, 2001.

[26] Hanamantagouda P. Sankappanavar and Stanley Burris. A course in universal algebra. *Graduate Texts Math*, 78 :56, 1981.

[27] Jonathan D.H. Smith. *Mal'cev varieties*, volume 554. Springer, 2006.

[28] Aldo Ursini. Sulle varieta'di algebre con una buona teoria degli ideali. *Boll. Unione Mat. Ital.*, 4(6) :90–95, 1972.

[29] Aldo Ursini. On subtractive varieties, I. *Algebra Universalis*, 31 :204–222, 1994.

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
Faculté des sciences
Place des sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | **www.uclouvain.be/sc**