

Faculté des sciences

Dépendance entre les risques financiers et les risques d'assurance

Auteur : Camara Ouahoukpan François

Promoteur : Pierre Devolder

Lecteur : Jérôme Barbarin

Année académique 2021-2022

Master [120] en sciences actuarielles

Remerciements

Je remercie tous ceux qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à la réalisation de ce mémoire. Tout d'abord, je remercie Dieu pour ses grâces.

Je suis très reconnaissant à l'Ecole de Statistique, Biostatistique et Sciences Actuarielles (LSBA) et à la Faculté des Sciences de l'Université Catholique de Louvain de m'avoir permis d'étudier. Je remercie profondément les Professeurs, enseignants invités et conférenciers de la LSBA et autres travailleurs de la faculté.

Mes remerciements spéciaux et chaleureux à mon Professeur, le Professeur Pierre Devolder qui m'a accompagné et dirigé dans la réalisation de ce travail. Ses conseils m'ont permis de mener ce travail à terme. Pour toute faute, j'assume l'entière responsabilité.

Je remercie également ma famille plus particulièrement ma compagne Pole Carine Guiré ainsi que ma grande Sœur Caroline Adingra pour tout leur soutien.

Ce mémoire est chaleureusement dédié à mon oncle Roger Camara ainsi qu'à son Epouse pour leur soutien financier et moral.

Table de matière

REMERCIEMENTS.....	I
TABLE DE MATIERE.....	II
INTRODUCTION.....	1
PARTIE 1 : LIEN ENTRE PANDEMIE ET MARCHÉ FINANCIER	3
1. REVUE DE LITTÉRATURE	3
2. DONNÉES ET ANALYSE STATISTIQUE RELATIVE A LA COVID-19.....	8
2.1 <i>Données</i>	8
2.2 <i>Analyse statistique</i>	9
PARTIE 2 : EVALUATION DE PRODUITS D’ASSURANCE VIE SOUS L’HYPOTHÈSE DE DÉPENDANCE ENTRE LES RISQUES FINANCIERS ET LES RISQUES BIOMÉTRIQUES.	12
1. CADRE D’EVALUATION.....	12
2. MODÈLE DE TAUX D’INTERET.....	13
3. MODÈLE DE TAUX DE MORTALITE.....	14
3.1 <i>Cadre d’intégration de modèles</i>	14
4. MODÈLE AFFINE STOCHASTIQUE DE TAUX D’INTERET ET DE MORTALITE	15
4.1 <i>Modèle du taux d’intérêt de Vasicek</i>	16
4.2 <i>Modèle de taux de mortalité d’Ornstein-Uhlenbeck</i>	17
5. METHODE D’EVALUATION DE PRODUITS D’ASSURANCE VIE.....	18
5.1 <i>Evaluation du capital différé</i>	18
5.2 <i>Dynamique du taux d’intérêt sous la mesure forward neutre Q</i>	20
5.3 <i>Dynamique du taux de mortalité sous la mesure forward neutre</i>	20
5.4 <i>Analyse de l’effet de la dépendance entre mortalité et marché financier sur la pure endowment</i>	24
6. EVALUATION DE LA GARANTIE D’ANNUITE (GAO)	28
6.1 <i>Dynamique du taux d’intérêt et de mortalité sous la mesure risque neutre Q</i>	30
7. ILLUSTRATION NUMÉRIQUE.....	34
7.1 <i>Analyse des résultats de la simulation</i>	35
8. EVALUATION DU CAPITAL DIFFÉRE SOUS L’HYPOTHESE DE DEPENDANCE ENTRE LES RISQUES FINANCIERS ET LES RISQUES BIOMETRIQUES AVEC CHANGEMENT DE REGIME.....	37
8.1 <i>Modélisation des taux d’intérêt et de mortalité</i>	37
8.2 <i>Expression du capital différé avec changement de régime</i>	38
8.3 <i>Analyse de l’effet de dépendance sur le capital différé</i>	45
8.4 <i>Illustration numérique du capital différé</i>	46
CONCLUSION.....	48
BIBLIOGRAPHIE	50
ANNEXES.....	53

Introduction

La valorisation des produits d'assurance vie est basée généralement sur l'approche actuarielle traditionnelle d'indépendance entre les risques financiers et les risques biométriques. Cette propriété d'orthogonalité entre les deux risques est au cœur des modèles actuariels classiques. Le risque de mortalité considéré comme secondaire par rapport à celui du taux d'intérêt est supposé diversifiable lorsque l'assureur détient un portefeuille suffisamment important de contrats homogènes. Celui-ci est donc considéré déterministe dans la plupart des travaux tandis que le taux d'intérêt est quant à lui considéré stochastique. La modélisation déterministe de la mortalité a été remise en cause au cours de ces dernières années. Les tendances récentes montrent une amélioration sans précédente de la mortalité ainsi qu'une grande incertitude exposant les assureurs à un risque de mortalité systématique et non diversifiable important. La minimisation du risque de mortalité peut conduire les assureurs dans des problèmes d'insolvabilité à l'image de « Life Equity » en Angleterre. Cette mésaventure a conduit à des nouvelles réflexions sur la modélisation du risque biométrique. Dès lors, des modélisations stochastiques de la mortalité ont vu le jour tels que le modèle de HULL and WHITE, le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR), le modèle de Vasicek, le processus de Ornstein Uhlenbeck avec ou sans sauts, le modèle de Lee Carter ... etc.

L'évolution stochastique de la mortalité a été démontré empiriquement par différents travaux (par exemple Cairns et al., 2006). Par la suite, Milidonis et al. (2011) ont développé un modèle stochastique à changement de régime de Markov en vue d'incorporer le changement de régime dans les taux de mortalité stochastique. Pour justifier leur étude, ils ont mené une analyse empirique complète à l'aide des données démographiques américaines. Leur résultat empirique montre la prise en compte du changement de régime dans la modélisation stochastique de la mortalité à une importance supérieure à celle des modèles de Lee et Carter (1992), Lin et Cox (2008). Ils montrent aussi que ce modèle peut corriger certains des biais de tarification telles que la surestimation de la valeur du marché du risque de mortalité ou la sous-évaluation des titres liés à la mortalité. Dans la pratique les contrats des produits d'assurance vie peuvent avoir une échéance de plusieurs décennies. Il n'est donc pas déraisonnable de supposer des changements dans la structure de la mortalité et du taux d'intérêt sur une si longue période. Sur une longue période, des changements de conditions macroéconomiques et sociales peuvent entraîner des changements structurels économiques. Ainsi, les modèles de structure par

terme à un facteur pour les taux d'intérêt et de mortalité à volatilité constante ne sont plus adaptés pour saisir ce changement aléatoire.

Par ailleurs, l'usage de taux d'intérêt et de mortalité stochastiques dans la tarification des produits d'assurance vie serait un moyen pour modéliser une potentialité de dépendance entre ces deux risques. En effet, certains phénomènes comme le « baby-boom », la COVID-19, le terrorisme avec les morts qu'il engendre bien qu'étant des risques biométriques ou d'assurance, ont eu un impact considérable sur la finance. Nés entre 1946 et 1947, les « baby-boomers » ont commencé à prendre leur retraite au moment où les marchés ne s'étaient pas encore remis de la crise financière de 2007. Or selon une étude publiée par la Banque Fédérale de San-Francisco rapportée par le magazine en ligne *slate.fr* – 23 août 2011, les « baby-boomers » ont massivement investi sur les marchés boursiers en prévision de leurs vieux jours et commenceront à vendre leurs actions pour financer leur retraite. Selon une étude menée par Zheng Liu et Mark Spiegel cette concomitance est « déconcertante » car depuis une cinquantaine d'années, le cours des actions est profondément lié à la conjoncture démographique rapporte *slate.fr* – 23 août 2011. Toujours selon ce magazine, pendant la période d'activité des « baby-boomers » le ratio cours-bénéfices sur le marché financier Américain a triplé. Pour Jeremy Siegel Enseignant à l'Université de Pennsylvanie à Philadelphie : « il y'a bien un lien entre la démographie et les bourses américaines ». L'étude menée par Zheng Liu et Mark Spiegel et rapporté par *slate.fr* – 23 août 2011 avait prévu une baisse de 13% des cours boursiers entre 2011 et 2021 causée par les « baby-boomers ». Quant à la COVID-19, un risque biométrique (risque d'assurance) selon plusieurs études aurait impacté sans précédent le marché financier. De même, plusieurs études ont montré que les attentats terroristes auraient un impact sur les marchés financiers.

Il serait donc pertinent d'étudier une potentialité de dépendance entre les risques d'assurance et les risques financiers. Ce travail consistera à effectuer cette tâche en partant du cas particulier de la COVID-19 qui est une crise humaine et sanitaire sans précédente en vue d'étudier son impact sur le marché financier. Ensuite ce travail sera achevé par la valorisation des produits d'assurance vie sous l'hypothèse de dépendance entre les risques biométriques et financiers en abordant d'abord le cas d'absence de changement de régime avant de prendre en compte le cas de changement de régime.

Partie 1 : Lien entre pandémie et marché financier

Dans cette partie, il sera question d'étudier les effets de certains risques d'assurance comme les pandémies et les attentats terroristes sur les marchés financiers à l'aide d'éléments de littérature et d'analyse statistique.

1. Revue de littérature

Avant d'évoquer des études relatives aux effets de certaines pandémies en particulier la COVID-19 sur les marchés financiers, le cas des effets des attentats terroristes sera d'abord abordé.

Plusieurs auteurs et institutions financières analysent régulièrement la réaction des marchés financiers relativement aux événements politiques, économiques, démographiques ou environnementaux. Mais depuis le 11 septembre 2001, le monde et ses dirigeants sont de plus en plus préoccupés par le terrorisme et ses effets dévastateurs à la suite des attentats ayant eu lieu aux USA. En plus des attentats terroristes, l'apparition de la COVID-19 comme une crise sanitaire sans précédente ont motivé plusieurs auteurs et institutions à s'intéresser aux effets des deux événements sur les marchés boursiers.

Les éléments catastrophiques comme les attentats terroristes qui sont des événements importants pour l'assurance en particulier l'assurance dommage impactent les marchés financiers. Par exemple, après les attentats terroristes du 11 septembre, le NYSE et le NASDAQ ont été fermés jusqu'au 17 septembre. Dans les premiers jours d'ouverture, le DJIA (Dow Jones Industrial Average) a diminué de 684 points (Aslam et al., 2013).

Konstantinos Drakos (2003) étudie les effets de l'attentat du 11 septembre 2001 aux USA sur un ensemble d'actions de compagnies aériennes cotées sur divers marchés boursiers internationaux. Les résultats montrent une augmentation considérable ainsi qu'une rupture structurelle du risque systématique(beta) depuis l'attentat terroriste. De plus, la volatilité a considérablement augmenté dans la période qui a suivi le 11 septembre, reflétant une incertitude accrue dans cette industrie. Enfin, la décomposition du risque total en ses composantes (systématique et idiosyncratique), montre que le risque systématique a en moyenne plus que doublé, tandis que le pourcentage qu'il représente par rapport au risque total a considérablement augmenté.

De même, Amelie Charles et al (2006) examinent les effets de cet attentat sur les marchés boursiers internationaux à partir de 10 indices boursiers quotidiens en se servant de la méthodologie de détection des valeurs aberrantes. Les résultats montrent que les marchés boursiers internationaux ont subi des chocs importants (permanents et temporaires) en réponse aux attentats terroristes et à leurs conséquences.

Ayman Mnasri et Salem Nechi (2016) utilisent une méthodologie d'étude d'événements parallèlement à un test d'amorçage amélioré pour évaluer l'impact des attaques terroristes sur la volatilité des marchés boursiers dans 12 pays de la région MENA (Moyen Orient et Afrique du Nord). Les résultats montrent que l'impact des attentats terroristes sur la volatilité des marchés financiers dure environ 20 jours de bourse, ce qui est considéré comme long par rapport à l'effet à terme d'événements similaires sur les marchés développés.

Emmanuel Apergis et Nicholas Apergis (2017) étudient l'effet des attentats terroristes de Paris du 11 novembre 2017 sur les rendements boursiers et la volatilité de 22 sociétés les plus importantes de l'industrie mondiale de la défense. À cette fin, il utilise la méthodologie d'hétéroscédasticité conditionnelle autorégressive générale (modèle GARCH). Les résultats indiquent clairement que cet événement terroriste a eu un impact positif sur les rendements et la volatilité de ces actions.

Arin et al (2008) utilisent une série chronologique d'un échantillon de multi pays afin d'analyser les effets du terrorisme sur les rendements et la volatilité des marchés boursiers. Les résultats montrent que le terrorisme a un impact significatif à la fois sur les marchés boursiers et sur la volatilité des marchés boursiers, et l'ampleur de ces effets est plus importante dans les marchés émergents.

Aslam et Kang (2013) étudient comment les attaques terroristes affectent le marché boursier Pakistanais. Ils montrent que les attentats terroristes affectent négativement de courte durée le marché boursier. L'impact de l'attaque dépend des emplacements et des types d'attaque. Plus il y'a de personnes tuées, plus le rendement de l'indice KSE-100 est négatif.

Graham et Ramiah (2012) utilisent l'hypothèse du modèle d'anticipations adaptatives appliqué à la méthodologie de l'étude des événements afin d'étudier l'impact des cinq attaques terroristes (New York World Trade Center, Bali, Madrid, Londres et Mumbai) sur les industries japonaises. Leurs résultats montrent qu'il y a une augmentation du risque systématique de certaines industries japonaises. Ils ont également constaté que les rendements des industries japonaises ont été les plus négativement affectés après l'attaque du 11 septembre.

Arin et al (2008) étudient l'impact des incidents terroristes sur les marchés boursiers d'Israël, d'Indonésie, d'Espagne, du Royaume-Uni et de Thaïlande. L'étude montre que les marchés

boursiers et leur volatilité sont affectés par les actes terroristes. Eldor et Melnick (2004) ont analysé l'association entre les marchés boursiers d'Israël et les événements terroristes. Ils utilisent 639 incidents terroristes pour la période de 1990 à 2003. Les résultats montrent qu'il existe un lien négatif entre les marchés boursiers et les incidents terroristes.

Chesney, Reshtar et Karaman (2011) examinent la relation entre 77 événements terroristes et le comportement des marchés de 25 pays. Ils se servent de la méthodologie d'étude d'événements pour l'analyse en prenant des indices de prix quotidiens du 04 janvier 1994 au 16 septembre 2005. Leurs résultats montrent que les marchés des 25 pays sont négativement affectés par les attaques terroristes.

G.Andrew, karolyi et Rodolfo Martell (2006) dans une étude intitulée terroriste et marché boursier, montrent que le jour d'un attentat terroriste, les marchés boursiers sont affectés négativement de 0,83% entraînant une baisse totale de la capitalisation boursière de 401 millions de US.

Quant aux différentes épidémies et pandémies qu'a connu la planète, celles-ci ont impacté le marché financier.

D'abord, la grippe asiatique apparue en 1956 en Chine s'est répandue dans le monde de 1957 en 1958, entraînant un bilan humain extrêmement lourd. Cette pandémie a plombé les marchés financiers. L'un des principaux indices boursiers des Etats Unies le S&P 500 a connu une chute de 20% à la fin de l'année 1957(<https://www.zonebourse.com/actualite-bourse/L-impact-d-une-pandemie-sur-les-marches-financiers--29872964/>).

Ensuite plus récemment, La propagation du Covid-19 de la chine en novembre 2019 au reste du monde avec des taux de contamination et de mortalité élevés continuent de susciter maintes inquiétudes. Outre les conséquences humaines tragiques de la pandémie, la Covid-19 engendre concomitamment des incertitudes sur les marchés financiers mondiaux. Alors que de nombreux pays optent pour différents types de réponses visant à ralentir la pandémie, les investisseurs sont naturellement inquiets tant les marchés financiers ont subi d'importantes baisses de cours depuis la crise financière de 2008.

À l'image des principales places financières mondiales, la bourse de Paris aura vécu « la pire journée de son histoire » en clôturant sur une baisse de 12,28 % le jeudi 12 mars 2020. Les bourses de Milan (-16,98 %) et Madrid (-14,06 %) ont également enregistré les pires chutes de leur histoire à la clôture, Londres (-9,81 %) et Francfort (-12,24 %) les pires depuis plus de 30 ans. La dégringolade des bourses européennes a provoqué un choc qui s'est propagé à la

bourse de New York où son indice principal, le Dow Jones, a chuté de 9,99 % à la clôture, enregistrant ainsi sa pire séance depuis le krach boursier d'octobre 1987(<https://theconversation.com/covid-19-decryptage-dun-vent-de-panique-sur-les-marches-financiers-mondiaux-133807>).

Cette situation a motivé plusieurs études de l'impact de la COVID-19 sur les marchés financiers à travers plusieurs méthodes.

Hail Yue Liu et al (2020) étudient l'impact de l'épidémie du coronavirus sur 21 principaux indices boursiers des principaux pays touchés. Ils utilisent d'abord la méthode d'étude des événements ensuite un modèle économétrique de données de panels à effets fixes constitué de 735 observations (35 jours et 21 indices provenant des principaux pays touchés). Les rendements boursiers anormaux quotidiens constituent la variable dépendante tandis que le nombre total de cas quotidiens confirmés de COVID enregistré constitue la variable indépendante. Les rendements boursiers quotidiens de chaque pays et le rendement de l'indice Dow Jones Global Index (DJIA) sont utilisés comme variables de contrôle afin de contrôler les risques systématiques. Les deux méthodes aboutissent à la même conclusion à savoir que l'épidémie a eu un impact négatif et significatif sur les rendements boursiers de tous les pays retenus pour l'étude.

Dayong Zhang et al (2020) quant à eux, utilisent une analyse statistique descriptive simple afin d'analyser l'impact de la pandémie de coronavirus sur le risque boursier des dix premiers pays infectés en nombre de cas quotidiens. Cette étude montre que les risques sur les marchés financiers ont considérablement augmentés en réponse à la pandémie. La réaction individuelle des différents marchés boursiers est liée clairement à la gravité de l'épidémie dans chaque pays. Ces auteurs affirment d'autres part que la grande incertitude et les pertes économique liées à cette pandémie ont rendu les marchés financiers plus volatile et imprévisibles.

Mareto Agus Harjoto et al (2020) à l'aide d'étude d'évènement analysent les différentes réactions des marchés boursiers à deux événements importants : l'annonce de l'OMS du 11 mars 2020 déclarant la covid-19 une pandémie ainsi que celle de la Federal Reserve Bank (Fed) du 09 avril 2020. Ces deux événements sont considérés comme un choc et une relance respectivement. L'étude montre que la covid-19 a provoqué un choc négatif sur tous les marchés boursiers en particulier pour les marchés émergents et les petites entreprises. La relance de la Fed aux USA quant à elle a enregistré des rendements anormaux positifs par rapport à d'autres pays développés et marchés émergents. Mais ces rendements positifs

anormaux ont été engrangés par les grandes entreprises américaines plutôt que les petites entreprises.

Badar Nadeem Ashraf (2020) utilise un modèle économétrique de données de panels afin d'étudier l'impact de l'évolution des cas/décès confirmés quotidiens de covid-19 sur les rendements boursiers. Les rendements boursiers quotidiens sont considérés comme variable dépendante tandis que les croissances des cas / décès confirmés quotidiens sont considérés comme variables indépendantes. Les variables de contrôle retenues sont : la responsabilité démographique, l'évitement de l'incertitude, la liberté d'investissement, le logarithme du produit intérieur brute (PIB). Cette étude s'étend sur 64 pays de 22 janvier au 17 avril 2020. L'auteur montre que les marchés boursiers ont réagi négativement à la croissance du nombre de cas quotidiens confirmés et que la réponse du marché à la croissance du nombre de décès quotidiens est faible. L'étude montre aussi que les marchés boursiers ont réagi de manière plus proactive à la croissance du nombre de cas confirmés par rapport à la croissance du nombre de décès. Dans une analyse plus détaillée, l'auteur montre que les marchés boursiers réagissent plus fortement pendant les premiers jours des cas confirmés. La réponse des marchés boursiers varie en fonction de la gravité de l'épidémie.

Awadhi et al (2020) utilisent une analyse de données de panels afin d'étudier l'effet du coronavirus sur le marché boursier Chinois. Les résultats montrent que la croissance totale du nombre de cas quotidiens et le nombre total de décès quotidiens a des effets négatifs importants sur les rendements des actions de toutes les entreprises.

Raéf Bahrini et Assaf Fillilan (2020) étudient l'impact de la covid-19 sur les rendements quotidiens des principaux indices boursiers des pays CGC (Conseil de Coopération du Golfe) sur la période du 1^{er} avril au 26 juin. Pour y parvenir, ils utilisent un modèle économétrique de données de panels ayant pour variable dépendante le rendement quotidien du marché boursier. La variable indépendante est mesurée par l'une des variables suivantes : total des cas quotidiens confirmés par million d'habitants, total quotidien des décès confirmés par million d'habitants, nombre quotidien de nouveaux cas confirmés par million d'habitants, nombre quotidien de nouveaux décès confirmés par million d'habitants, ainsi que deux variables de contrôle des risques systématiques du marché financier qui sont le rendement quotidien du Dow Jones Global Index, noté DJGIR et la variation en pourcentage de l'indice de volatilité S&P500 (VIX). Une analyse statistique descriptive effectuée au préalable montre une corrélation négative entre les variables explicatives, les variables de contrôle et les rendements quotidiens du marché

boursier. L'analyse économétrique de données de panels montre que seul le coefficient estimé du total décès quotidiens est statistiquement significatif dans toutes les régressions. Cela signifie que pendant la propagation du COVID-19, les marchés boursiers du CCG réagissent négativement et remarquablement à la croissance du nombre de décès confirmés alors qu'ils ne réagissent pas de manière significative au nombre de cas confirmés.

Les résultats de cette étude suggèrent que les rendements boursiers diminuent dans les pays du CCG lorsque la variation des indices de volatilité augmente montrant ainsi que le sentiment de peur de l'investisseur exerce une influence significative sur les marchés boursiers du CCG pendant la période de l'épidémie de COVID-19.

Un moyen de contribuer à cette littérature consistera à étudier l'impact de la COVID-19 sur les principaux indices boursiers de cinq pays Européens (France, Allemagne, Angleterre, Espagne, Italie) et des Etats Unis (USA) du 01 mars 2020 au 31 mai 2020 une période de forte propagation de la pandémie dans ces nations.

2. Données et analyse statistique relative à la COVID-19

2.1 Données

Afin d'étudier l'impact de la pandémie de COVID-19 sur les rendements boursiers dans les pays (France, Allemagne, Angleterre, Espagne, Italie et des Etats Unis), des données relatives au nombre de cas confirmés et de décès quotidiens de Covid-19 collectées sur Worldometer, sur la période du 1er mars 2020 au 31 mai 2020 seront utilisées. Pendant cette période, ces pays étaient les plus touchés par la pandémie. Sur la même période, les données de rendements boursiers quotidiens des principaux indices boursiers suivants seront utilisés :

- **Cac 40**(Cotation Assistée en Continue) est le principal indice boursier de la bourse de Paris (France) déterminée par quarante actions cotées en continues sur Euronext Paris.
- **S&P 500** est l'indice le plus représentatif du marché boursier Américain car composé d'un plus grand nombre de compagnies. Aussi sa valeur tient compte de la capitalisation boursière des compagnies contenues dans l'indice. Sa capitalisation couvre environ 80% du marché boursier Américain.

- **DAX** (Deutscher Aktienindex) est le principal indice boursier de l'Allemagne. Sa valeur est fondée sur le cours des quarante actions des entreprises les plus importantes cotées à la bourse de Francfort.
- **FTSE 100** ou simplement **FTSE** (Financial Times Stock Exchange) est l'indice boursier des cent entreprises Britanniques les mieux capitalisées cotées à la bourse de Londres, leur capitalisation représente 70% du marché Londonien.
- **IBEX 35** est le principal indice boursier de la bourse de Madrid composée de 35 entreprises dont le poids est pondéré avec leur capitalisation boursière.
- **FTSE MIB** (Milano Italia Borsa) est un indice boursier de la bourse Italienne constitué des 40 plus grandes valeurs cotées en bourse.
- **DJGIR** (Dow Jones Global Index) sont des indices mondiaux comprenant plus de 3000 indices distincts, suivant les cours des actions de plus de 2800 sociétés dans 29 pays, 10 régions du monde et 9 secteurs de marché contenant 121 groupe industriels (Bloomberg).

Outre ces rendements, la volatilité quotidienne (**Volatility**) et la variation quotidienne de l'indice de volatilité (**ViV**) des indices ci-dessus seront utilisés dans l'analyse statistique.

Quant à la COVID-19, elle sera représentée par les variables suivantes :

- **TCC** (Total des Cas quotidiens Confirmés par million d'habitants)
- **NCC** (Nouveaux Cas quotidiens Confirmés par million d'habitants)
- **TDC** (Total des Décès quotidiens Confirmés par million d'habitants)
- **NDC** (Nouveaux Décès Confirmés par million d'habitants)

Pendant la période d'observation, les dates pendant lesquelles les marchés financiers étaient fermés pour raison de week-end ou jours fériés sont abandonnées. Par conséquent, l'ensemble des données finales se compose de 366 observations jugées suffisantes pour effectuer des analyses statistiques.

2.2 Analyse statistique

Le tableau 1 présente les statistiques récapitulatives des variables de cette étude. Les résultats montrent un rendement moyen négatif (-14,816%) pendant la période d'observation. Ce qui signifie qu'en moyenne, les marchés boursiers des six pays considérés ont enregistré globalement une chute. Le graphique 1 (voir annexe) présente une forte augmentation du risque

de rendement boursier pendant la période d'observation. De plus, les valeurs moyennes et déviations standard liées aux rendements quotidiens du Dow Jones Global Index (DJGIR), la variation en pourcentage de l'indice de volatilité (ViX) et la volatilité des indices (volatility) montrent qu'il existe une grande fluctuation des risques systématiques du marché mondial et reflètent l'existence de sentiment de peur élevé des investisseurs pendant la période de la pandémie de coronavirus. Une analyse comparative entre les pays de l'étude montre que l'Espagne qui a enregistré en moyenne plus de décès quotidiens confirmés par million d'habitants (181517), présente aussi la plus grande baisse moyenne du rendement quotidien (20,57%) ainsi que la plus forte variation de l'indice de volatilité. Ce qui montre l'impact négatif du nombre élevé de décès sur la rentabilité et la volatilité des indices boursiers. La valeur moyenne du nombre total de cas confirmés quotidiens par million d'habitants est plus de 963122 avec un large écart-type de plus de 1620203 ce qui montre l'étendue de la propagation de la COVID-19 dans ces six pays.

Tableau 1 : Statistiques descriptives

Variables	Return(%)	TCC	NCC	TDC	NDC	DJGIR(%)	Volatility(%)	Viv(%)
Observations	366	366	366	366	366	366	366	366
Moyenne	-14,816	963122,59	8204,0388	118878,312	1097,50053	-17,807	53,94459	0,61614
Ecart type	9,3309	1620203,63	18532,976	202982,455	2927,8700	8,61742	17,926352	10,401493
Minimum	-32,168	0,222	0,000	0,000	0,000	-36,615	22,730	-37,385
Maximum	26,911	5244707,000	105952,000	612426,000	41031,000	14,312	87,990	72,345

Afin de mesurer la liaison linéaire entre les différentes variables, l'estimation des coefficients de corrélation de Pearson est nécessaire. Le tableau 2 ci-dessous présente les résultats en une matrice de corrélation. Les variables (TCC, NCC, TDC, NDC), la volatilité (volatility) et la variation de l'indice de volatilité (ViV) sont négativement corrélées. La corrélation entre les variables (TCC, NCC, NDC) et le rendement boursier n'est pas statistiquement significatif. Tandis que la corrélation entre le total des décès quotidiens confirmés par million d'habitants et la rentabilité des indices boursiers est statistiquement significatif à 5%. Cela montre la relation de dépendance entre mortalité et marché financier. Ceci est cohérent avec les conclusions de l'étude effectuée par Raéf Bahrini et Assaf Fillilan (2020) à savoir que le marché réagit à l'accroissement du nombre de décès et par à l'accroissement du nombre de cas.

Tableau 2 : Matrice de Corrélations :

	TCC	NCC	TDC	NDC	Return	DJGIR	volatility	Viv
TCC	1							
NCC	0,597**	1						
TDC	0,778**	0,498**	1					
NDC	0,458**	0,507**	0,544**	1				
Return	-0,016	-0,054	-0,23**	-0,023	1			
DJGIR	-0,012	-0,027	-0,041	-0,029	0,624**	1		
Volatility	-0,514**	-0,378**	-0,501**	-0,294**	-0,348**	-0,505**	1	
Viv	-0,145**	-0,141**	-0,133*	-0,104*	-0,154**	-0,102	0,064	1

** . La corrélation est significative au niveau 0.01 (bilatéral).

* . La corrélation est significative au niveau 0.05 (bilatéral)

L'étude menée jusque-là confirme l'existence de dépendance entre mortalité et marché financier. La revue de la littérature et la statistique descriptive effectuées, permettent de conclure qu'il y'a en général une corrélation négative entre mortalité et marché financier. Autrement dit, l'augmentation du taux de mortalité entraîne une baisse du rendement boursier/taux d'intérêt et vis-versa. La COVID-19 n'étant pas un évènement ponctuel et ayant été une crise sanitaire sans précédent, la valeur du coefficient de corrélation obtenue entre rendement boursier et le total des décès quotidiens confirmés par million d'habitants ne peut être généralisée comme la valeur du coefficient de corrélation entre mortalité et marché financier. Ce coefficient permet la confirmation de l'existence de dépendance entre mortalité et marché financier. En partant de la revue de littérature, ce coefficient n'excéderait pas -10% à un niveau de significativité de 5%.

La prochaine étape sera consacrée à la valorisation de produits d'assurance vie sur la base de cette dépendance déjà démontrée entre mortalité et marché financier. Quant à l'illustration numérique de ces produits, plusieurs valeurs négatives et positives du coefficient de corrélation seront considérées afin d'évaluer le changement de valeurs des produits en fonction du changement du coefficient de corrélation.

Partie 2 : Evaluation de produits d'assurance vie sous l'hypothèse de dépendance entre les risques financiers et les risques biométriques.

Dans cette partie, il s'agira d'évaluer des produits d'assurance vie en prenant en compte la corrélation entre taux de mortalité et taux d'intérêt à l'aide de mouvement browniens multidimensionnels. D'abord le cas d'absence de changement de régime sera abordé avant de prendre en compte le changement de régime.

1. Cadre d'évaluation

La valorisation de produits d'assurance vie nécessite la prise en compte d'au moins deux risques à savoir le risque financier lié au taux d'intérêt et le risque d'assurance lié au taux de mortalité ou probabilité de survie. Selon Liu et al (2014), l'amélioration sans précédente de la mortalité se traduisant par une amélioration de l'espérance de vie ainsi que l'incertitude liée à la structure de taux d'intérêt nécessitent un cadre de modélisation amélioré, cohérent et intégré pour la tarification des produits d'assurance vie. Ceci permettrait d'apporter un soutien assez solide aux compagnies d'assurance dans le cadre de la tarification des produits. Dans cette section, le modèle de taux d'intérêt stochastique de court terme de Vasicek (1977) avec retour à la moyenne et le taux de mortalité stochastique représenté par le processus d'Ornstein-Uhlenbeck (OU) seront utilisés. La corrélation entre ces deux risques sera modélisée à l'aide de mouvement brownien. La modélisation de ces taux se fera donc de façon combinée. Pour une question de traçabilité analytique, les processus seront considérés affines. Ainsi, ces processus seront utilisés afin d'évaluer les produits d'assurance vie de façon neutre vis-à-vis des risques.

2. Modèle de taux d'intérêt

Afin d'évaluer les produits dérivés et les obligations, l'approche moderne fait appel à la théorie des martingales afin d'obtenir des prix et stratégies de couverture sans arbitrage. Pour se faire, l'utilisation du compte cash (B_t) définie de la façon suivante est nécessaire :

$$\begin{aligned}dB_t = r_t B_t dt &\Leftrightarrow \frac{dB_t}{B_t} = r_t dt \\ &\Leftrightarrow d \log B_t = r_t dt \\ &\Leftrightarrow \log B_t = \int_0^t r_u du + \log B_0 \\ &\Leftrightarrow B_t = E\left(\int_0^t r_u du + \log B_0\right) \\ &\Leftrightarrow B_t = B_0 * \text{Exp}\left(\int_0^t r_u du\right)\end{aligned}$$

r_t est le taux d'intérêt sans risque continue lié à un investissement sans risque.

Soit Q une mesure risque neutre ou une mesure martingale.

Sous Q , le prix d'un actif risqué est une martingale utilisant le compte cash (B_t) comme numéraire.

Par exemple le prix d'une obligation zéro coupon payant une unité monétaire à terme $T > t$ est donné par la formule suivante :

$$B(t, T) = E^Q\left(\text{Exp} - \int_t^T r_u du \mid \mathcal{R}_t\right)$$

\mathcal{R}_t est la filtration générée par le processus r_t

3. Modèle de taux de mortalité

Soit $\tau(x, t)$ une variable aléatoire représentant la durée de vie future d'un individu d'âge x à l'instant initial. Soit $\mu(x, x + t)$ le taux de mortalité à l'âge $x + t$ de cet individu et $s(x, t)$ sa probabilité de survie à l'âge $x + t$ sous l'hypothèse de taux de mortalité déterministe.

$$S(x, t) = \text{Exp}\left(-\int_0^t \mu(s, s + x) ds\right)$$

Sous l'hypothèse de taux ou force de mortalité stochastique, la probabilité de survie devient une variable aléatoire. Ainsi, pour la valorisation de produits vie d'assurance la détermination de l'espérance conditionnelle est nécessaire.

$$P(t, T, x) = E(I_{\{\tau \geq T\}} | M_t) = I_{\{\tau \geq t\}} E\left[\frac{S(T, x)}{S(t, x)} | M_t\right]$$

$$P(t, T, x) = I_{\{\tau \geq t\}} E\left(\text{Exp} - \int_t^T \mu(s, s + x) ds | M_t\right)$$

$$\text{Soit } P(t, T) = E^Q\left(\text{Exp} - \int_t^T \mu(s, s + x) ds | M_t\right)$$

M_t est la filtration générée par le processus μ

Cette expression de $P(t, T)$ représente la fonction de survie ou probabilité de survie ajustée au risque pour tenir compte de la sélection adverse.

3.1 Cadre d'intégration de modèles

Soit $\{\mathcal{F}_t\}$ la filtration jointe telle que :

$$\mathcal{F}_t = \mathcal{R}_t \vee M_t = \sigma(\mathcal{R}_t \cup M_t)$$

Dans ce cadre généralisé, la prestation de survie (pure endowment) à l'instant t payant une unité monétaire à un individu d'âge x à terme T est :

$$\mathbf{M}(t, T) = E^Q \left(\text{Exp} - \int_t^T r_u du I_{\{\tau \geq T\}} \mid \mathcal{F}_t \right)$$

$$\mathbf{M}(t, T) = I_{\{\tau \geq t\}} E^Q \left(\text{Exp} - \int_t^T r_u du \cdot \text{Exp} - \int_t^T \mu_v dv \mid \mathcal{F}_t \right)$$

Soit C_T le capital payable à maturité (T) en cas de survie en T et V_t la valeur du marché du contrat à l'instant t :

$$V_t = E^Q \left(\text{Exp} - \int_t^T r_u du I_{\{\tau \geq T\}} C_T \mid \mathcal{F}_t \right)$$

$$V_t = I_{\{\tau \geq T\}} \cdot E^Q \left(\text{Exp} - \int_t^T r_u du \text{Exp} - \int_t^T \mu_v dv C_T \mid \mathcal{F}_t \right)$$

L'évaluation des produits se fera conditionnellement à la filtration jointe \mathcal{F}_T après avoir établi les expressions des taux de mortalité et d'intérêt. Il sera supposé par la suite que $C_T = 1$

4. Modèle affine stochastique de taux d'intérêt et de mortalité

Dans l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, Q)$ ou Q est une mesure risque neutre, les expressions des taux d'intérêt et de mortalité sont :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dw_t^1 : \text{Modèle de taux d'intérêt de Vasicek}$$

$$d\mu_t = c\mu_t dt + \theta dz_t : \text{modèle de taux de mortalité de Ornstein-Uhlenbeck}$$

$$z_t = \rho w_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} w_t^2$$

w_t^1, w_t^2 sont des mouvements browniens standard et indépendant.

a, b, c, σ et θ sont des constantes positives.

θ et σ représentent respectivement la volatilité des processus des taux de mortalité et d'intérêt.

ρ : Coefficient de corrélation de Pearson permettant de modéliser la dépendance entre risque financier représenté par le taux d'intérêt et risque d'assurance représenté par le taux de mortalité.

Les modèles du taux d'intérêt et de mortalité sont respectivement le modèle de Vasicek et le modèle de Ornstein-Uhlenbeck (OU). En ce qui concerne le processus du taux de mortalité, la probabilité qu'il génère des valeurs négatives est négligeable selon Luciano et Vigna(2008).

4.1 Modèle du taux d'intérêt de Vasicek

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dw_t^1 \quad \Leftrightarrow \quad dr_t - a(b - r_t)dt = \sigma dw_t^1$$

$$\text{Soit } X_t = \text{Exp}(a.t)(b - r_t) \Leftrightarrow r_t = b - \text{Exp}(-a.t)X_t$$

$$dX_t = a.\text{Exp}(a.t)(b - r_t)dt - \text{Exp}(a.t)dr_t$$

$$dX_t = \text{Exp}(a.t)[a(b - r_t)dt - dr_t] = -\text{Exp}(a.t)[dr_t - a(b - r_t)dt]$$

$$dX_t = -\text{Exp}(a.t)\sigma dw_t^1$$

$$X_t = X_s - \int_s^t \text{Exp}(a.u)\sigma dw_u^1$$

Ainsi, l'expression analytique du processus du taux d'intérêt est la suivante :

$$r_t = b - \text{Exp}(-a.t)X_s + \int_s^t \text{Exp}(-a(t-u))\sigma dw_u^1 \quad (1)$$

$$\text{Sachant que : } X_s = \text{Exp}(a.s)(b - r_s),$$

$$\text{Alors, (1) devient } r_t = b - \text{Exp}(-a.t).\text{Exp}(a.s)(b - r_s) + \int_s^t \text{Exp}(-a(t-u))\sigma dw_u^1 \quad (2)$$

La réorganisation de (2) donne :

$$r_t = b[1 - \text{Exp}(-a(t-s))] + \text{Exp}(-a(t-s))r_s + \int_s^t \text{Exp}(-a(t-u))\sigma dw_u^1 \quad t > s$$

Une nouvelle expression de l'obligation zéro coupon introduit au point 2 peut-être définie en utilisant cette fois le taux d'intérêt à risque de Vasicek et la filtration \mathcal{F}_t :

$$B(t, T) = \mathbf{E}^Q \left(\text{Exp} - \int_t^T r_u du \mid \mathcal{F}_t \right) = \text{Exp}(-A(t, T)r_t + D(t, T))$$

$$A(t, T) = \frac{1 - \text{Exp}(-a(T - t))}{a}$$

$$D(T, T) = \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) [A(t, T) - (T - t)] - \frac{\sigma^2 A(t, T)^2}{4a}$$

Sous la mesure risque neutre Q , ce taux d'intérêt de court terme est Gaussien de moyenne

$E^Q(r_t \mid \mathcal{F}_s)$ et de variance $V^Q(r_t \mid \mathcal{F}_s)$.

$$E^Q(r_t \mid \mathcal{F}_s) = b[1 - \text{Exp}(-a(t - s))] + \text{Exp}(-a(t - s))r_s$$

$$V^Q(r_t \mid \mathcal{F}_s) = \int_s^t \text{Exp}(-2a.(t - u))\sigma^2 du = \frac{\sigma^2}{2a} [1 - \text{Exp}(-2a.(t - s))]$$

4.2 Modèle de taux de mortalité d'Ornstein-Uhlenbeck

L'expression du processus de mortalité est déterminée de la façon suivante :

$$\text{Soit } Y_t = \text{Exp}(-c.t)\mu_t \Leftrightarrow \mu_t = Y_t \text{Exp}(c.t)$$

$$dY_t = -c.\text{Exp}(-c.t)\mu_t dt + \text{Exp}(c.t)d\mu_t = \text{Exp}(-c.t)[-c\mu_t dt + d\mu_t]$$

$$dY_t = \text{Exp}(c.t)\theta dZ_t$$

$$Y_t = Y_s + \int_s^t \text{Exp}(-c.u)\theta dZ_u$$

$$\text{Avec } Y_s = \mu_s \text{Exp}(-c.s) \text{ alors } Y_t = \mu_s \text{Exp}(-c.s) + \int_s^t \text{Exp}(-c.u)\theta dZ_u$$

$$\text{Ainsi, } \mu_t = \mu_s \text{Exp}(c(t - s)) + \int_s^t \text{Exp}(c(t - u))\theta dZ_u \text{ avec } t > s$$

Ou encore,

$$\mu_t = \mu_s \text{Exp}(c(t-s)) + \theta \int_s^t \text{Exp}(c(t-u)) (\rho dw_u^1 + \sqrt{1-\rho^2} dw_u^2)$$

Les expressions de l'espérance et de la variance sous la mesure risque neutre Q sont :

$$E^Q(\mu_t | \mathcal{F}_s) = \mu_s \text{Exp}(c(t-s))$$

$$V^Q(\mu_t | \mathcal{F}_s) = \theta^2 \int_s^t \text{Exp}(2c(t-u)) du = -\frac{\theta^2}{2c} [1 - \text{Exp}(2c(t-s))]$$

A ce stade du travail, la valorisation de produits d'assurance vie pourrait être effectuée sous la mesure risque neutre Q ayant pour numéraire le compte cash (B_t). Mais comme l'a signifié Yixing Zhao (2019) dans sa thèse intitulée « *Valuation and Risk Management of Some Longevity and P&C Insurance Products* » les formules qui seront obtenues nécessiteront une stimulation à deux niveaux. Cela conduirait à un problème de « simulation dans simulation » rendant l'évaluation longue et inefficace. L'introduction d'une mesure forward neutre permettra d'améliorer l'efficacité de la valorisation ainsi que la réduction considérable du temps des calculs est donc nécessaire.

5. Méthode d'évaluation de produits d'assurance vie

Pour l'évaluation, deux produits d'assurance vie seront envisagés :

- Le capital différé (Pure endowment)
- La garantie d'annuité (GAO : Garantie Annuity Option)

5.1 Evaluation du capital différé

Une pure endowment est un produit d'assurance vie donnant l'obligation à l'assureur de verser à l'assuré un capital s'il survit jusqu'à une période déterminée mais rien en cas de décès antérieur. Il sera supposé dans ce travail que ce contrat de pure endowment est sans participation bénéficiaire. Étant donné les modèles de taux d'intérêt et de mortalité définis précédemment ce produit sera évalué dans ce qui suit.

Soit \tilde{Q}_T une mesure forward neutre équivalente à la mesure Q via la dérivée de Radon-Nikodym (Λ_T) selon le théorème de Girsanov ayant pour numéraire l'obligation zéro coupon $B(t, T)$. Cette mesure forward est fonction de la maturité T . Elle n'est donc pas unique. Puisque dans ce travail T est fixé, il sera supposé par la suite que $\tilde{Q}_T = \tilde{Q}$

$$\frac{d\tilde{Q}}{dQ} \Big|_{\mathcal{F}_T} = \Lambda_T = \frac{\text{Exp}(-\int_0^T r_u du) B(T, T)}{B(0, T)} \quad \text{Avec } B(T, T) = 1$$

Sous la mesure risque neutre Q , Λ_T est martingale

$$\Lambda_t = E^Q(\Lambda_T | \mathcal{F}_t) = \frac{\text{Exp}(-\int_0^t r_u du) B(t, T)}{B(0, T)}$$

Selon la règle de Bayes, pour toute variable aléatoire (H) \mathcal{F}_t mesurable :

$$E^{\tilde{Q}}(H | \mathcal{F}_t) = \frac{E^Q(\Lambda_T H | \mathcal{F}_t)}{E^Q(\Lambda_T | \mathcal{F}_t)} = \frac{E^Q(\text{Exp}(-\int_0^t H \cdot r_u du) B(t, T))}{B(t, T)}$$

$$\text{Soit } E^Q(\text{Exp}(-\int_0^t r_u du) H | \mathcal{F}_t) B(t, T) = E^{\tilde{Q}}(H | \mathcal{F}_t) \cdot B(t, T)$$

En remplaçant H par $\text{Exp}(-\int_t^T \mu_v dv)$, l'expression de la prestation de survie peut être réécrite de la façon suivante :

$$M(t, T) = I_{\{\tau \geq t\}} B(t, T) E^{\tilde{Q}}\left(\text{Exp}\left(-\int_t^T \mu_v dv \mid \mathcal{F}_t\right)\right)$$

Avec le changement de numéraire, l'expression de la pure endowment peut être divisée en produit du prix de l'obligation zéro-coupon et de l'espérance de probabilité de survie.

Soit $M(t, T) = B(t, T) E^{\tilde{Q}}\left(\text{Exp}\left(-\int_t^T \mu_v dv \mid \mathcal{F}_t\right)\right)$: l'expression de la pure endowment.

Soit $P(t, T) = E^{\tilde{Q}}\left(\text{Exp}\left(-\int_t^T \mu_v dv \mid \mathcal{F}_t\right)\right)$: l'espérance de la probabilité de survie

Par conséquent, il serait nécessaire de déterminer la dynamique du taux d'intérêt et du processus de mortalité sous \tilde{Q} , ce qui permettra de déterminer les expressions analytiques de la pure endowment et de l'espérance de la probabilité de survie.

5.2 Dynamique du taux d'intérêt sous la mesure forward neutre \tilde{Q}

Selon R. Manon (2004),

$$d\tilde{w}_t^1 = dw_t^1 + A(t, T)\sigma dt \text{ et } d\tilde{w}_t^2 = dw_t^2$$

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma dw_t^1$$

$$dw_t^1 = d\tilde{w}_t^1 - A(t, T)\sigma dt$$

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma(d\tilde{w}_t^1 - A(t, T)\sigma dt)$$

$$dr_t = (a(b - r_t) - \sigma^2 A(t, T))dt + \sigma d\tilde{w}_t^1$$

$$\boxed{dr_t = (a \cdot b - ar_t - \sigma^2 A(t, T)) dt + \sigma d\tilde{w}_t^1}$$

En partant de $dX_t = -Exp(a \cdot t)[dr_t - a(b - r_t)dt]$

$$\text{On a } dr_t - a(b - r_t)dt = -\sigma^2 A(t, T)dt + \sigma d\tilde{w}_t^1$$

$$\text{Alors } dX_t = -Exp(a \cdot t)[- \sigma^2 A(t, T)dt + \sigma d\tilde{w}_t^1]$$

$$X_t = X_s + \sigma^2 \int_s^t Exp(a - u) \cdot A(u, T)du - \sigma \int_s^t Exp(a \cdot u) d\tilde{w}_u^1$$

$$\boxed{r_t = b - Exp(-a(t - s))(b - r_s) - \sigma^2 \int_s^t Exp(-a(t - u)) \cdot A(u, T)du + \sigma \int_s^t Exp(-a(tu)) d\tilde{w}_u^1}$$

5.3 Dynamique du taux de mortalité sous la mesure forward neutre

$$d\mu_t = c\mu_t dt + \theta dz_t$$

$$d\mu_t = c\mu_t dt + \theta(\rho dw_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dw_t^2)$$

$$d\mu_t = c\mu_t dt + \theta[\rho(d\tilde{w}_t^1 - A(t, T)\sigma dt) + \sqrt{1 - \rho^2} d\tilde{w}_t^2]$$

$$d\mu_t = (c\mu_t - \theta \cdot \sigma \cdot \rho A(t, T))dt + \theta \cdot \rho d\tilde{w}_t^1 + \theta \cdot \sqrt{1 - \rho^2} d\tilde{w}_t^2$$

$$d\mu_t = (c\mu_t - \theta \cdot \sigma \cdot \rho A(t, T))dt + \theta(\rho d\tilde{w}_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} d\tilde{w}_t^2)$$

$$d\mu_t = (c\mu_t - \theta \cdot \sigma \cdot \rho A(t, T))dt + \theta d\tilde{z}_t$$

$$\text{Avec } \tilde{z}_t = \rho \tilde{w}_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} \tilde{w}_t^2$$

En cas d'indépendance entre la mortalité et marché financier ($\rho = 0$), la dynamique du processus de mortalité sous la mesure risque neutre \mathbb{Q} , est identique à celle obtenue sous la mesure forward neutre $\tilde{\mathbb{Q}}$. Ce qui n'est pas pareil en cas de dépendance entre mortalité et marché financier.

Il serait nécessaire de déterminer l'expression de μ_t car celle-ci sera utile pour la suite du travail.

$$Y_t = \text{Exp}(-c \cdot t)\mu_t \Leftrightarrow \mu_t = Y_t \text{Exp}(c \cdot t)$$

$$dY_t = -c \cdot \text{Exp}(-c \cdot t)\mu_t dt + \text{Exp}(c \cdot t)d\mu_t = \text{Exp}(-c \cdot t)[-c\mu_t dt + d\mu_t]$$

$$\text{Avec } d\mu_t - c\mu_t dt = (-\theta \cdot \sigma \cdot \rho A(t, T))dt + \theta d\tilde{z}_t$$

$$dY_t = ((-\theta \cdot \sigma \cdot \rho A(t, T))dt + \theta d\tilde{z}_t) * \text{Exp}(-c \cdot t)$$

$$Y_t = Y_s - \theta \cdot \sigma \cdot \rho \int_s^t A(u, T) \text{Exp}(-c \cdot u) du + \theta \int_s^t \text{Exp}(-c \cdot u) d\tilde{z}_u$$

$$Y_s = \text{Exp}(-c \cdot s)\mu_s$$

$$Y_t = \text{Exp}(-c \cdot s)\mu_s - \theta \cdot \sigma \cdot \rho \int_s^t A(u, T) \text{Exp}(-c \cdot u) du + \theta \int_s^t \text{Exp}(-c \cdot u) d\tilde{z}_u$$

$$\mu_t = \text{Exp}(c \cdot t) \left[\text{Exp}(-c \cdot s)\mu_s - \theta \cdot \sigma \cdot \rho \int_s^t A(u, T) \text{Exp}(-c \cdot u) du + \theta \int_s^t \text{Exp}(-c \cdot u) d\tilde{z}_u \right]$$

5.3.1 Expression analytique de l'espérance de survie

$(\int_t^T \mu_v dv | \mathcal{F}_t)$ suit une loi normale de moyenne $E^{\tilde{\mathbb{Q}}}(\int_t^T \mu_v dv | \mathcal{F}_t)$ et de variance $V^{\tilde{\mathbb{Q}}}(\int_t^T \mu_v dv | \mathcal{F}_t)$ alors :

$$P(t, T) = E^{\tilde{\mathbb{Q}}}\left(\text{Exp}\left(-\int_t^T \mu_v dv | \mathcal{F}_t\right)\right)$$

$$P(t, T) = \text{Exp}(-E^{\tilde{Q}} \left(\int_t^T \mu_v dv \mid \mathcal{F}_t \right) + \frac{1}{2} V^{\tilde{Q}} \left(\int_t^T \mu_v dv \mid \mathcal{F}_t \right))$$

$$E^{\tilde{Q}} \left(\int_t^T \mu_v dv \mid \mathcal{F}_t \right) = \int_t^T \text{Exp}(c(v-t)) \cdot \mu_t dv - \sigma \cdot \theta \cdot \rho \int_v^t \int_t^T \text{Exp}(c(v-u)) \cdot A(u, T) dv du$$

$$V^{\tilde{Q}} \left(\int_t^T \mu_v dv \mid \mathcal{F}_t \right) = \theta^2 \cdot \int_t^T \text{Exp}(2c \cdot v) dv \left(\int_v^t \text{Exp}(-c \cdot u) du \right)^2$$

$$P(t, T) = \text{Exp} \left[- \int_t^T \text{Exp}(c(v-t)) \cdot \mu_t dv + \sigma \cdot \theta \cdot \rho \int_v^t \int_t^T \text{Exp}(c(v-u)) \cdot A(u, T) dv du \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \theta^2 \cdot \int_t^T \text{Exp}(2c \cdot v) dv \left(\int_v^t \text{Exp}(-c \cdot u) du \right)^2 \right]$$

$$\text{Soit } \tilde{G}(t, T) = \int_t^T \text{Exp}(c(v-t)) dv = \text{Exp}(-c \cdot t) \cdot \int_t^T \text{Exp}(cv) dv = \\ \frac{1}{c} \text{Exp}(-c \cdot t) [\text{Exp}(c \cdot T) - \text{Exp}(c \cdot t)]$$

$$\tilde{G}(t, T) = \frac{\text{Exp}(c(T-t)) - 1}{c}$$

$$\tilde{H}(t, T) = \sigma \cdot \theta \cdot \rho \int_v^t \int_t^T \text{Exp}(c(v-u)) \cdot A(u, T) dv du \\ + \frac{1}{2} \theta^2 \cdot \int_t^T \text{Exp}(2c \cdot v) dv \left(\int_v^t \text{Exp}(-c \cdot u) du \right)^2$$

$$\tilde{H}(t, T) = \frac{\sigma \cdot \theta \cdot \rho}{c} \int_t^T \text{Exp}(-c \cdot v) \cdot A(v, T) \cdot (\text{Exp}(c(T-v)) - 1) dv \\ + \frac{\theta^2}{2} \int_t^T \text{Exp}(-2c \cdot v) (\text{Exp}(c(T-v)) - 1)^2 dv$$

$$\tilde{H}(t, T) = \left(\frac{\rho \cdot \sigma \cdot \theta}{a \cdot c} - \frac{\theta^2}{2c^2} \right) [\tilde{G}(t, T) - (T-t)] + \frac{\rho \cdot \sigma \cdot \theta}{a \cdot c} [A(t, T) \\ - \frac{1 - \text{Exp}(-(a-c)(T-t))}{a-c}] + \frac{\theta^2}{4c} \tilde{G}(t, T)^2$$

$$\text{Soit } \tilde{H}(t, T) = \tilde{H}_1(t, T) + \tilde{H}_2(t, T)$$

$$\text{Avec } \tilde{H}_1(t, T) = \frac{\rho \cdot \sigma \cdot \theta}{a \cdot c} ([\tilde{G}(t, T) - (T - t)] + [A(t, T) - \frac{1 - \text{Exp}(- (a - c)(T - t))}{a - c}])$$

$$\tilde{H}_2(t, T) = \frac{\theta^2}{4c} \tilde{G}(t, T)^2 - \frac{\theta^2}{2c^2} [\tilde{G}(t, T) - (T - t)]$$

$$\text{Alors } P(t, T) = \text{Exp}(-\tilde{G}(t, T) \cdot \mu_t + \tilde{H}(t, T))$$

$$P(t, T) = \text{Exp}(-\tilde{G}(t, T) \cdot \mu_t + \tilde{H}_1(t, T) + \tilde{H}_2(t, T))$$

$$P(t, T) = \text{Exp}(\tilde{H}_1(t, T)) \cdot \text{Exp}(-\tilde{G}(t, T) \cdot \mu_t + \tilde{H}_2(t, T))$$

$\text{Exp}(\tilde{H}_1(t, T))$: Capte l'impact de la corrélation

Sachant que le prix de la pure endowment est : $M(t, T) = B(t, T)E^{\tilde{Q}}\left(\text{Exp}\left(-\int_t^T \mu_v dv \mid \mathcal{F}_t\right)\right)$

Avec $B(t, T) = \text{Exp}(-A(t, T)r_t + D(t, T))$ et

$$P(t, T) = \text{Exp}(-\tilde{G}(t, T) \cdot \mu_t + \tilde{H}(t, T)) = E^{\tilde{Q}}\left(\text{Exp}\left(-\int_t^T \mu_v dv \mid \mathcal{F}_t\right)\right)$$

$$\text{Alors } M(t, T) = \text{Exp}(-\tilde{G}(t, T) \cdot \mu_t + \tilde{H}(t, T) - A(t, T)r_t + D(t, T))$$

Soit :

$$\alpha(t, T) = \text{Exp}(\tilde{H}_1(t, T) + \tilde{H}_2(t, T) + D(t, T)) \text{ Et } R(t, T) = (\tilde{G}(t, T) \cdot \mu_t + A(t, T)r_t)$$

$$M(t, T) = \alpha(t, T) \cdot \text{Exp}(-R(t, T))$$

L'expression de la pure endowment peut-être encore exprimée de la façon suivante :

$$M(t, T) = \text{Exp}(\tilde{H}_1(t, T)) B(t, T) \text{Exp}(-\tilde{G}(t, T) \cdot \mu_t + \tilde{H}_2(t, T))$$

$$f(\rho, t) = \text{Exp}(\tilde{H}_1(t, T))$$

$$f(\rho, t) = \text{Exp}\left(\frac{\rho \cdot \sigma \cdot \theta}{a \cdot c} \left([\tilde{G}(t, T) - (T - t)] + [A(t, T) - \frac{1 - \text{Exp}(- (a - c)(T - t))}{a - c}]\right)\right)$$

Ou encore :

$$f(\rho, t) = \text{Exp}\left(\frac{\rho \cdot \sigma \cdot \theta}{a \cdot c} \left(\left[\frac{\text{Exp}(c(T-t)) - 1}{c} - (T-t) \right] + \left[\frac{1 - \text{Exp}(-a(T-t))}{a} - \frac{1 - \text{Exp}(-(a-c)(T-t))}{a-c} \right] \right)\right)$$

$f(\rho, t)$: Représente l'effet de la dépendance entre mortalité et marché financier sur la pure endowment.

$B(t, T)$: L'obligation zéro-coupon qui représente l'impact du taux d'intérêt

$\text{Exp}\left(-\tilde{G}(t, T) \cdot \mu_t + \tilde{H}_2(t, T)\right)$: Expression fonction de la mortalité

5.4 Analyse de l'effet de la dépendance entre mortalité et marché financier sur la pure endowment.

L'effet de la dépendance entre mortalité et marché financier sur la pure endowment dû à la présence du coefficient de corrélation entre le taux de mortalité et le taux d'intérêt est représenté par la fonction suivante : $f(\rho, t) = \text{Exp}\left(\tilde{H}_1(t, T)\right)$. Il serait intéressant d'analyser cet effet en fonction des variations du coefficient de corrélation et de la maturité.

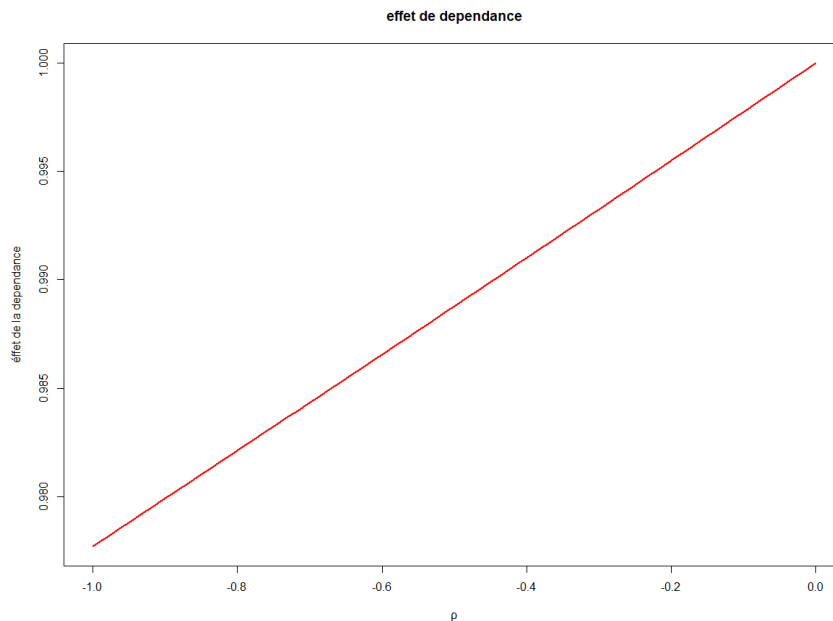
$$\frac{\partial f(\rho, t)}{\partial \rho} = E(t) \cdot f(\rho, t)$$

$$E(t) = \frac{\sigma \cdot \theta}{a \cdot c} \left(\left[\frac{\text{Exp}(c(T-t)) - 1}{c} - (T-t) \right] + \left[\frac{1 - \text{Exp}(-a(T-t))}{a} - \frac{1 - \text{Exp}(-(a-c)(T-t))}{a-c} \right] \right)$$

Pour $t = 0$ et $T = 20$, $E(t) = 0.02254974$ alors ;

$$\frac{\partial f(\rho, t)}{\partial \rho} > 0$$

Pour $t = 0$ et $T = 20$, l'augmentation en valeur absolue du coefficient de corrélation ($\rho \rightarrow -1$) entraîne une baisse de la valeur numérique de l'effet de dépendance sur le capital différé et dont une baisse du prix. En effet, une baisse de l'un des taux (mortalité ou intérêt) est compensée par une augmentation de l'autre et vice-versa. La prise en compte de la dépendance entraîne donc une sorte de « couverture naturelle » de la pure endowment des risques liés au taux de mortalité et au taux d'intérêt. Cette « couverture naturelle » rendant le produit moins risqué entraîne logiquement une baisse de son prix. Cela pourrait entraîner pour l'assureur un portefeuille de grande taille plus homogène car le produit serait accessible à tous les profils (« bon risque » et « mauvais risque »). Ce qui éviterait la sélection adverse et une réduction du risque d'insolvabilité de l'assureur. Le graphique suivant illustre la variation de l'effet de dépendance lorsque le coefficient de corrélation varie selon l'intervalle $[-1, 0]$ et que $t = 0, T = 20$.



Graphique 2 : Evolution de l'effet de dépendance en fonction du coefficient de corrélation négatif

La valeur numérique de l'expression de l'effet de dépendance tend vers l'unité lorsque le coefficient de corrélation tend vers zéro. $f(0, t) = 1$ signifie l'absence d'effet de dépendance sur le prix de du capital différé et dont une disparition de la « couverture naturelle ». Ce qui

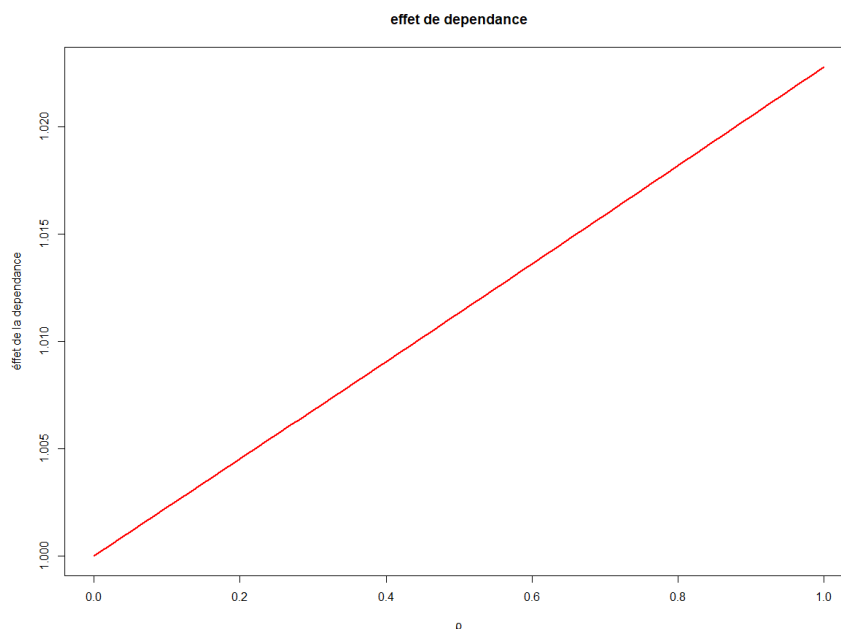
entraînerait logiquement une augmentation du prix. L'illustration numérique du prix du capital différé qui sera effectuée permettra de vérifier cela.

Le cas de l'analyse de l'effet de dépendance lorsque le coefficient de corrélation est positif n'est pas vraiment nécessaire car il a été signifié dans la première partie que le coefficient de corrélation entre mortalité et marché financier est négative. Mais il sera néanmoins abordé en vue d'effectuer une analyse comparative :

$$\frac{\partial f(\rho, t)}{\partial \rho} > 0$$

Pour $t = 0$ et $T = 20$, l'augmentation du coefficient de corrélation ($\rho \rightarrow 1$) entraîne une augmentation de la valeur numérique de l'effet de dépendance sur le capital différé et dont une augmentation du prix. En effet, lorsque le coefficient de corrélation est positif, cela signifie que les deux taux varient dans le même sens. La « couverture naturelle » disparaît rendant le produit plus risqué et dont une augmentation du prix pouvant entraîner une sélection adverse et par la suite un problème de d'insolvabilité chez l'assureur. L'augmentation du prix dans ce cas sera vérifiée lors de l'illustration numérique. Le graphique suivant illustre la variation de l'effet de dépendance lorsque le coefficient de corrélation varie selon l'intervalle $[0, 1]$ et que

$t = 0, T = 20$.

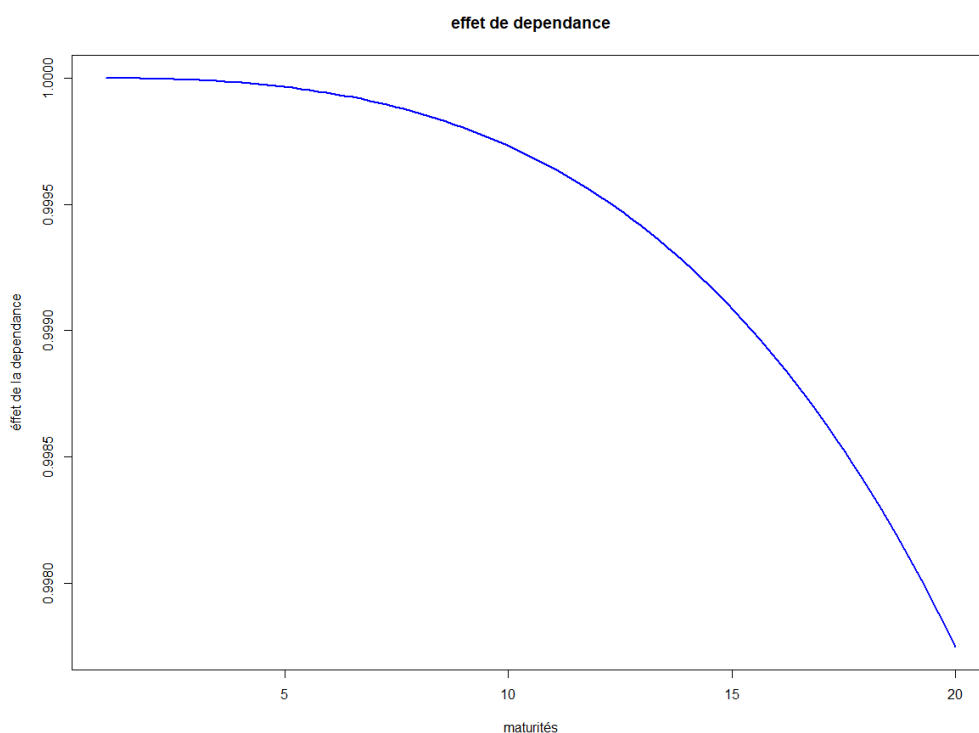


Graphique 3 : Evolution de l'effet de dépendance en fonction du coefficient de corrélation positif

Après avoir analysé l'effet de la dépendance en fonction de la variation du coefficient de corrélation, il serait intéressant d'étudier aussi la variation de la maturité sur l'effet de la dépendance.

Il sera supposé afin de simplifier cette analyse que $t = 0$; $\rho = -0,1$ et $T \in [1, 20]$

Le graphique suivant montre l'évolution de l'effet de dépendance en fonction de la maturité :



Graphique 4 : Evolution de l'effet de dépendance en fonction de la maturité

Selon le graphique ; $f(0, -0,1) \in]0,1]$, pour tout $T \in [1, 20]$

Plus la valeur numérique de l'effet de dépendance tend vers l'unité, moins cela a de l'impact sur le capital différé. Or la croissance de la maturité entraîne selon le graphique, des valeurs numériques de l'effet de dépendance s'éloignant de plus en plus de l'unité donc ayant de plus en plus d'impact sur le capital différé. La croissance de la maturité, entraîne une augmentation de l'effet de la dépendance sur la pure endowment. La valorisation du capital différé par la prise en compte de la corrélation entre taux de mortalité et taux d'intérêt entraîne une décroissance de la valeur lorsque la maturité croît.

Sachant que les effets de la mortalité sur le marché financier sont de court terme et selon les analyses précédentes de l'effet de dépendance il serait plus avantageux pour les assureurs de prendre en compte cette dépendance que pour la valorisation du capital différé n'ayant pas de maturité trop élevée.

6. Evaluation de la garantie d'annuité (GAO)

Selon Liu et al (2014) l'option d'annuité garantie est un produit d'assurance vie donnant le droit à l'assuré de choisir soit un capital unique à l'échéance du contrat, soit convertir sa prestation de survie en annuité garantie avec un taux de conversion prédéfinie. A l'échéance du contrat, si le taux de conversion garantie est supérieur à celui prédéfini alors le produit n'est pas rentable pour l'assuré dans le cas contraire, celui-ci est rentable pour lui. Bien que ce produit apparaisse en 1839, il est devenu populaire au Royaume-Uni entre les années 1980 et 1990. Sa fonctionnalité intégrée en option rend ce produit attrayant donnant lieu à des demandes (Huan et al, 2015). Néanmoins, l'imprévisibilité des taux d'intérêt et de mortalité affecte fortement sa valeur pouvant causer des problèmes d'insolvabilité aux assureurs offrant ce produit. Une bonne modélisation de la structure de ces taux lors de la valorisation du produit, pourrait réduire ce problème d'insolvabilité.

Etant donnée la modélisation de la structure des taux de mortalité et d'intérêt, il s'agira dans cette partie de valoriser directement le GAO.

Soit :

$$C_T = (g \cdot a_x(T) - 1)^+ : \text{gain de l'assuré}$$

$a_x(T)$: La rente viagère payant annuellement une unité monétaire à un individu d'âge x à l'instant initial (0).

g : Taux de conversion garantie déterminé par l'assureur.

Soit P_{GAO} : le prix du GAO

Sous la mesure risque neutre Q ce prix est le suivant :

$$P_{GAO} = E^Q \left(\text{Exp} \left(- \int_0^T r_u du \right) \cdot \text{Exp} \left(- \int_0^T \mu_v dv \right) C_T \mid \mathcal{F}_0 \right)$$

$$P_{GAO} = E^Q \left(\text{Exp} \left(- \int_0^T r_u du \right) \cdot \text{Exp} \left(- \int_0^T \mu_v dv \right) (g \cdot a_x(T) - 1)^+ \mid \mathcal{F}_0 \right)$$

$$P_{GAO} = E^Q \left(\text{Exp} \left(- \int_0^T r_u du \right) \cdot \text{Exp} \left(- \int_0^T \mu_v dv \right) \left(g \cdot \left(a_x(T) - \frac{1}{g} \right) \right)^+ \mid \mathcal{F}_0 \right)$$

$$P_{GAO} = g \cdot E^Q \left(\text{Exp} \left(- \int_0^T r_u du \right) \cdot \text{Exp} \left(- \int_0^T \mu_v dv \right) \left(a_x(T) - K \right)^+ \mid \mathcal{F}_0 \right)$$

$$K = \frac{1}{g}$$

Comme indiqué plus haut, ce prix du GAO sous la mesure Q pose un problème de simulation et d'efficacité.

Afin de surmonter ce problème, une autre mesure ajustée au risque (\hat{Q}) ayant pour numéraire l'expression de la pure endowment sera utiliser pour tarifier le GAO.

Cette mesure est définie via la dérivée de Radon Nikodym :

$$\frac{d\hat{Q}}{dQ} = \eta_T = \frac{\text{Exp} \left(- \int_0^T r_u du \right) M(T, T)}{M(0, T)}$$

En utilisant la même méthode du point (4-2) :

$$P_{GAO} = g \cdot E^Q \left(\text{Exp} \left(- \int_0^T r_u du \right) \cdot \text{Exp} \left(- \int_0^T \mu_v dv \right) \cdot E^{\hat{Q}} \left[\left(a_x(T) - K \right)^+ \mid \mathcal{F}_0 \right] \right)$$

En utilisant la méthode de la règle de Bayes définie plus haut, l'expression précédente devient :

$$P_{GAO} = g \cdot M(0, T) \cdot E^{\hat{Q}} \left[\left(a_x(T) - K \right)^+ \right]$$

$a_x(T)$ Étant la somme des prix de la pure endowment à différentes maturités, son expression est la suivante :

$$a_x(T) = \sum_{n=0}^{\infty} M(T, T+n) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha(T, T+n) \text{Exp}(-R(T, T+n))$$

$$a_x(T) = \sum_{n=0}^{\infty} \text{Exp} \left(\tilde{H}_1(t, T) \right) B(t, T) \text{Exp} \left(-\tilde{G}(t, T) \cdot \mu_t + \tilde{H}_2(t, T) \right)$$

Alors l'expression du GAO devient :

$$P_{GAO} = g \cdot M(0, T) \cdot E^{\hat{Q}} \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \alpha(T, T+n) \text{Exp}(-R(T, T+n)) \right) - K \right)^+ \mid \mathcal{F}_0 \right]$$

$$P_{GAO} = g \cdot M(0, T) \cdot E^{\widehat{Q}} \left[\left(\sum_{n=0}^{\infty} \text{Exp} \left(\widetilde{H}_1(T, T+n) \right) B(T, T+n) \text{Exp} \left(-\widetilde{G}(T, T+n) \cdot \mu_T + \widetilde{H}_2(T, T+n) \right) - K \right)^+ \mid \mathcal{F}_0 \right]$$

L'effet de la dépendance est bien présent dans l'expression du GAO.

Afin de déterminer une valeur numérique de l'expression du GAO par simulation, il serait nécessaire de déterminer la dynamique des processus des taux de mortalité et d'intérêt sous la mesure \widehat{Q}

6.1 Dynamique du taux d'intérêt et de mortalité sous la mesure risque neutre \widehat{Q}

Il s'agira d'appliquer la règle de ITO afin de déterminer les expressions des taux d'intérêt et de mortalité sous la mesure risque neutre \widehat{Q} :

$$\text{Soit : } X_t^1 = \text{Exp} \left(- \int_0^t r_u du \right) B(t, T), \quad X_t^2 = P(t, T) \text{ et } X_t = X_t^1 \cdot X_t^2$$

$$X_t^1 = \text{Exp} \left(- \int_0^t r_u du - A(t, T)r_t + D(t, T) \right)$$

$$\text{Log}(X_t^1) = \left(- \int_0^t r_u du - A(t, T)r_t + D(t, T) \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{dX_t^1}{X_t^1} &= -r_t dt - \frac{\partial A(t, T)}{\partial t} r_t dt - a(b - r_t)A(t, T)dt - \sigma A(t, T)dw_t^1 + \frac{1}{2} \sigma^2 A(t, T)^2 dt \\ &+ \frac{\partial D(t, T)}{\partial t} dt \end{aligned}$$

$$A(t, T) = \frac{1 - \text{Exp}(-a(T-t))}{a} \text{ Alors } \frac{\partial A(t, T)}{\partial t} = (a \cdot A(t, T) - 1)$$

$$D(t, T) = \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) [A(t, T) - (T-t)] - \frac{\sigma^2 A(t, T)^2}{4a}$$

$$\frac{\partial D(t, T)}{\partial t} = \left(b - \frac{\sigma^2}{2a^2} \right) \left[\frac{\partial A(t, T)}{\partial t} + 1 \right] - 2 * \frac{\sigma^2 \frac{\partial A(t, T)}{\partial t}}{4a} A(t, T)$$

$$\frac{\partial D(t, T)}{\partial t} = \left(a \cdot b \cdot A(t, T) - \frac{\sigma^2 A(t, T)^2}{2} \right) dt$$

$$\text{Alors } \frac{dX_t^1}{X_t^1} = -r_t dt - (a \cdot A(t, T) - 1)r_t dt - a(b - r_t)A(t, T)dt - \sigma A(t, T)dw_t^1 + \frac{1}{2}\sigma^2 A(t, T)^2 dt + (a \cdot b \cdot A(t, T) - \frac{\sigma^2 A(t, T)^2}{2})dt$$

$$\frac{dX_t^1}{X_t^1} = -\sigma A(t, T)dw_t^1 \Leftrightarrow dX_t^1 = -X_t^1 \sigma A(t, T)dw_t^1$$

$$X_t^2 = \text{Exp}(-\tilde{G}(t, T) \cdot \mu_t + \tilde{H}(t, T))$$

$$\text{Soit } Y_t = -\tilde{G}(t, T) \cdot \mu_t + \tilde{H}(t, T)$$

$$dY_t = \left(\frac{\partial \tilde{H}(t, T)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{G}(t, T)}{\partial t} \cdot \mu_t \right) dt - \tilde{G}(t, T) d\mu_t$$

$$dY_t = \left(\frac{\partial \tilde{H}(t, T)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{G}(t, T)}{\partial t} \cdot \mu_t - c\mu_t \tilde{G}(t, T) \right) dt - \theta \cdot \tilde{G}(t, T) \cdot dZ_t$$

$$dX_t^2 = \text{Exp}(Y_t) \left[dY_t + \frac{1}{2} (\theta \cdot \tilde{G}(t, T))^2 dt \right]$$

$$dX_t^2 = \text{Exp}(Y_t) \left[\left(\frac{\partial \tilde{H}(t, T)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{G}(t, T)}{\partial t} \cdot \mu_t - c\mu_t \tilde{G}(t, T) \right) dt - \theta \cdot \tilde{G}(t, T) \cdot dZ_t + \frac{1}{2} (\theta \cdot \tilde{G}(t, T))^2 dt \right]$$

$$dX_t^2 = X_t^2 \left(\frac{\partial \tilde{H}(t, T)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{G}(t, T)}{\partial t} \cdot \mu_t - c\mu_t \tilde{G}(t, T) + \frac{1}{2} (\theta \cdot \tilde{G}(t, T))^2 \right) dt - \theta \cdot \tilde{G}(t, T) \cdot dZ_t$$

$$dX_t = X_t^1 \cdot dX_t^2 + X_t^2 \cdot dX_t^1 + X_t^1 \cdot X_t^2 \cdot \sigma \cdot A(t, T) \cdot \rho \cdot \theta \cdot \tilde{G}(t, T) dt$$

$$dX_t = X_t^1 X_t^2 \left[\left(\frac{\partial \tilde{H}(t, T)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{G}(t, T)}{\partial t} \cdot \mu_t - c\mu_t \tilde{G}(t, T) + \frac{1}{2} (\theta \cdot \tilde{G}(t, T))^2 \right) dt - \theta \cdot \tilde{G}(t, T) \cdot dZ_t - \sigma A(t, T) dw_t^1 + \sigma \cdot A(t, T) \cdot \rho \cdot \theta \cdot \tilde{G}(t, T) dt \right]$$

$$\frac{dX_t}{X_t} = \left(\frac{\partial \tilde{H}(t, T)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{G}(t, T)}{\partial t} \cdot \mu_t - c\mu_t \tilde{G}(t, T) + \frac{1}{2} (\theta \cdot \tilde{G}(t, T))^2 + \sigma \cdot A(t, T) \cdot \rho \cdot \theta \cdot \tilde{G}(t, T) \right) dt - \sigma A(t, T) dw_t^1 - \theta \cdot \tilde{G}(t, T) \cdot dZ_t$$

Selon Liu et Mamon (2014) $F(t, T)$ est identiquement nul car X_t est une martingale.

$$F(t, T) = \left(\frac{\partial \tilde{H}(t, T)}{\partial t} - \frac{\partial \tilde{G}(t, T)}{\partial t} \cdot \mu_t - c\mu_t \tilde{G}(t, T) + \frac{1}{2} (\theta \cdot \tilde{G}(t, T))^2 + \sigma \cdot A(t, T) \cdot \rho \cdot \theta \cdot \tilde{G}(t, T) \right)$$

$$\text{Alors } \frac{dX_t}{X_t} = -\sigma A(t, T)dw_t^1 - \theta. \tilde{G}(t, T).dZ_t$$

$$\frac{dX_t}{X_t} = -\sigma A(t, T)dw_t^1 - \theta. \tilde{G}(t, T).(\rho dw_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dw_t^2)$$

$$\frac{dX_t}{X_t} = d\log(X_t)$$

$$d\log(X_t) = \frac{1}{X_t} dX_t - \frac{1}{2} * \frac{1}{(X_t)^2} (dX_t)^2$$

$$d\log(X_t) = -\sigma A(t, T)dw_t^1 - \theta. \tilde{G}(t, T).(\rho dw_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dw_t^2) - \frac{1}{2} [-\sigma A(t, T)dw_t^1 - \theta. \tilde{G}(t, T).(\rho dw_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dw_t^2)]^2$$

$$d\log(X_t) = -(\sigma A(t, T) + \rho. \theta. \tilde{G}(t, T)) dw_t^1 - \theta. \tilde{G}(t, T). \sqrt{1 - \rho^2} dw_t^2 - \frac{1}{2} [-\sigma A(t, T).dw_t^1 - \theta. \tilde{G}(t, T)\rho dw_t^1 - \theta. \tilde{G}(t, T). \sqrt{1 - \rho^2} dw_t^2]^2$$

$$d\log(X_t) = -(\sigma A(t, T) + \rho. \theta. \tilde{G}(t, T)) dw_t^1 - \theta. \tilde{G}(t, T). \sqrt{1 - \rho^2} dw_t^2 - \frac{1}{2} [(\sigma A(t, T))^2 dt +$$

$$2 \sigma A(t, T).dw_t^1 * (\theta. \tilde{G}(t, T)\rho dw_t^1 + \theta. \tilde{G}(t, T). \sqrt{1 - \rho^2} dw_t^2) + (\theta. \tilde{G}(t, T)\rho dw_t^1 - \theta. \tilde{G}(t, T). \sqrt{1 - \rho^2} dw_t^2)^2]$$

$$d\log(X_t) = -(\sigma A(t, T) + \rho. \theta. \tilde{G}(t, T)) dw_t^1 - \theta. \tilde{G}(t, T). \sqrt{1 - \rho^2} dw_t^2 - \frac{1}{2} [(\sigma A(t, T))^2 dt + 2 \sigma A(t, T). \theta. \tilde{G}(t, T)\rho dt + (\theta. \tilde{G}(t, T)\rho)^2 dt + (\theta. \tilde{G}(t, T))^2 (1 - \rho) dt]$$

$$d\log(X_t) = -\frac{1}{2} [(\sigma A(t, T) + \theta. \tilde{G}(t, T)\rho)^2 dt + (\theta. \tilde{G}(t, T))^2 (1 - \rho) dt] - (\sigma A(t, T) + \rho. \theta. \tilde{G}(t, T)) dw_t^1 - \theta. \tilde{G}(t, T). \sqrt{1 - \rho^2} dw_t^2$$

Selon Liu et Mamon (2014) et par identification les relations entre les mouvements browniens sous les mesures \mathbb{Q} et $\hat{\mathbb{Q}}$ à partir des équations précédentes sont :

$$d\widehat{w}_t^1 = dw_t^1 + (\sigma A(t, T) + \rho \cdot \theta \cdot \widetilde{G}(t, T)) dt$$

$$d\widehat{w}_t^2 = dw_t^2 + \theta \cdot \widetilde{G}(t, T) \cdot \sqrt{1 - \rho^2} dt$$

En partant de ces relations, les expressions des taux de mortalité et d'intérêt sous la mesure risque neutre \widehat{Q} peuvent être déterminé :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma(d\widehat{w}_t^1 - (\sigma A(t, T) + \rho \cdot \theta \cdot \widetilde{G}(t, T))dt$$

$$dr_t = \left(a(b - r_t) - \sigma \left(\sigma A(t, T) + \rho \cdot \theta \cdot \widetilde{G}(t, T) \right) \right) dt + \sigma \cdot d\widehat{w}_t^1$$

$$d\mu_t = c\mu_t dt + \theta(\rho d\widehat{w}_t^1 - (\sigma A(t, T) + \rho \cdot \theta \cdot \widetilde{G}(t, T)) dt \\ + \sqrt{1 - \rho^2} (d\widehat{w}_t^2 - \theta \widetilde{G}(t, T) \sqrt{1 - \rho^2} dt)$$

$$d\mu_t = c\mu_t dt + \theta (\rho d\widehat{w}_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} d\widehat{w}_t^2) - \theta (\rho \sigma A(t, T) + \theta \widetilde{G}(t, T)) dt$$

$$d\mu_t = \left(c\mu_t - \theta \rho \sigma A(t, T) - \theta^2 \widetilde{G}(t, T) \right) dt + \theta d\widehat{Z}_t$$

$$\widehat{Z}_t = \rho \widehat{w}_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} \widehat{w}_t^2$$

L'utilisation des techniques précédentes aboutit aux expressions suivantes des taux d'intérêt et de mortalité sous \widehat{Q} :

$$r_t = \text{Exp}(-a \cdot t) \left[r_0 + \int_0^t \text{Exp}(a \cdot u) (a \cdot b - A(u, T) \sigma^2 - \rho \widetilde{G}(u, T) \sigma \theta) du \right. \\ \left. + \int_0^t \text{Exp}(a \cdot u) \sigma d\widehat{w}_u^1 \right]$$

$$\mu_t = \text{Exp}(c \cdot t) \left[\mu_0 - \int_0^t \text{Exp}(-c \cdot u) (\rho A(u, T) \sigma \theta + \widetilde{G}(u, T)^2 \theta^2) du \right. \\ \left. + \int_0^t \text{Exp}(-c \cdot u) \theta d\widehat{w}_u^2 \right]$$

Sous la mesure \widehat{Q} , (r_t, μ_t) est une variable aléatoire normale bivariée ayant les paramètres suivants :

$$E^{\widehat{Q}}(r_t | \mathcal{F}_0) = \text{Exp}(-a \cdot t) \left[r_0 + \int_0^t \text{Exp}(a \cdot u) (a \cdot b - A(u, T) \sigma^2 - \rho \widetilde{G}(u, T) \sigma \theta) du \right]$$

$$V^{\hat{Q}}(r_t | \mathcal{F}_0) = \text{Exp}(-2a \cdot t) \sigma^2 \int_0^t \text{Exp}(2a \cdot u) dt = \frac{\sigma^2}{2a} [1 - \text{Exp}(-2at)]$$

$$E^{\hat{Q}}(\mu_t | \mathcal{F}_0) = \text{Exp}(c \cdot t) \left[\mu_0 - \int_0^t \text{Exp}(-c \cdot u) (\rho A(u, T) \sigma \theta + \tilde{G}(u, T)^2 \theta^2) du \right]$$

$$V^{\hat{Q}}(\mu_t | \mathcal{F}_0) = \text{Exp}(2c \cdot t) \int_0^t \text{Exp}(-2cu) \theta^2 dt = \frac{\theta^2}{2c} [\text{Exp}(2ct) - 1]$$

7. Illustration numérique

Il s'agira dans cette partie de valoriser la pure endowment et le GAO en fonction de différentes valeurs du coefficient de corrélation.

La méthode de simulation Monte Carlo sera utilisée en générant 50.000 échantillons. Le capital différé sera valorisé sans simulation car ayant une expression explicite tandis que le GAO sera évalué par simulation. Chaque année est discrétisée en période de $N = 252$ sous intervalles ayant une longueur fixe de $\Delta t = \frac{1}{N}$. Ensuite la méthode de discrétisation d'Euler est utilisée pour approximer les évolutions de r_t et μ_t sur la période $[0, T]$ avec T fixé à 20 ans. Les paramètres des deux taux proviennent de Liu et al (2014) :

- Paramètres du taux d'intérêt : $a = 0.15, b = 0.045, \sigma = 0.03, r_0 = 0.045$
- Paramètres du taux de mortalité : $c = 0.1, \theta = 0.0003, \mu_0 = 0.0006$

Le taux de conversion garantie est fixé à $g = 11.1\%$

L'âge initial de l'assuré au moment de la souscription sera supposé égal à 45 ans et l'âge de la retraite à 65 ans d'où une durée de différé de 20 ans. L'âge maximal sera fixé à 100 ans donc l'assuré percevra les annuités pendant 35 ans. D'où $n = 35$.

Pour une représentation graphique des processus de mortalité et d'intérêt, les expressions suivantes seront utilisées :

$$r_{t_i} = r_{t_{i-1}} + (ab - ar_{t_{i-1}}) \Delta t + \sigma \Delta t \varepsilon_{t_i}^1$$

$$\mu_{t_i} = \mu_{t_{i-1}} + c \mu_{t_{i-1}} \Delta t + \theta \Delta t (\rho \varepsilon_{t_i}^1 + \sqrt{1 - \rho^2}) \varepsilon_{t_i}^2$$

$\varepsilon_{t_i}^1$ et $\varepsilon_{t_i}^2$ Sont des variables aléatoires normales standard avec $i = 1, \dots, N$

Les graphes de ces deux processus peuvent être consulté en annexe.

Afin de valoriser la pure endowment, les expressions suivantes des processus de mortalité et d'intérêt seront utilisées :

$$r_{t_i} = r_{t_{i-1}} + (ab - ar_{t_{i-1}} - \sigma^2 A(t, T))\Delta t + \sigma \Delta t \tilde{\varepsilon}_t^1$$

$$\mu_{t_i} = \mu_{t_{i-1}} + (c\mu_{t_{i-1}} - \theta\rho\sigma A(t, T))\Delta t + \theta\Delta t(\rho\tilde{\varepsilon}_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} \tilde{\varepsilon}_t^2)$$

$\tilde{\varepsilon}_t^1$ et $\tilde{\varepsilon}_t^2$ Sont des variables aléatoires normales standard avec $i = 1, \dots, TN$

Enfin, pour valoriser le GAO les expressions suivantes des processus de mortalité et d'intérêt seront utilisées :

$$r_{t_i} = r_{t_{i-1}} + (ab - ar_{t_{i-1}} - \sigma^2 A(t, T) - \theta\rho\sigma\tilde{G}(t, T))\Delta t + \sigma\Delta t\hat{\varepsilon}_t^1$$

$$\mu_{t_i} = \mu_{t_{i-1}} + (c\mu_{t_{i-1}} - \theta\rho\sigma A(t, T) - \theta^2\tilde{G}(t, T))\Delta t + \theta\Delta t(\rho\hat{\varepsilon}_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} \hat{\varepsilon}_t^2)$$

7.1 Analyse des résultats de la simulation

Le tableau suivant présente les prix de la pure endowment et du GAO en unité monétaire et en fonction de différentes valeurs du coefficient de corrélation :

Tableau 3 : prix du capital différé et des annuités garanties

Corrélation	pure_endowment	GAO
-0,9	0.3331797	0.3054206
-0,8	0.3339442	0.3069895
-0,7	0.3347104	0.3085692
-0,6	0.3354784	0.31016
-0,5	0.3362482	0.311762
-0,4	0.3370197	0.3133752
-0,3	0.337793	0.3149997
-0,2	0.3385681	0.3166357
-0,1	0.3393449	0.3182833
0	0.3401235	0.3199426
0,1	0.3409039	0.3216137
0,2	0.3416861	0.3232967
0,3	0.3424701	0.3249917
0,4	0.3432559	0.3266989
0,5	0.3440435	0.3284184
0,6	0.3448329	0.3301503
0,7	0.3456242	0.3318947
0,8	0.3464172	0.3336518
0,9	0.347212	0.3354216

Lorsque le coefficient de corrélation entre les taux de mortalité et d'intérêt varie de la négative au positive, les valeurs de la pure endowment et du GAO augmentent. Ceci est cohérent car lorsque les taux de mortalité et d'intérêt sont négativement corrélés, les facteurs de risque agissent collectivement comme une « couverture naturelle » contre les incertitudes globales liées au GAO et à la pure endowment. Il est donc évident que leurs prix soient réduits. Lorsque le coefficient de corrélation est nul traduisant l'indépendance entre mortalité et marché financier, les valeurs du capital différé et de l'annuité garantie sont supérieures à celles obtenues lorsque le coefficient de corrélation est négatif et inférieures lorsque le coefficient de corrélation est positif. Ceci confirme l'analyse effectuée au point (5-4).

L'analyse effectuée jusque-là a supposé des volatilités constantes tant pour le taux de mortalité que pour le taux d'intérêt. Une telle hypothèse signifierait une absence de changement structurelle macroéconomique et démographique à long terme pouvant affecter respectivement les taux d'intérêt et de mortalité. Sachant que les contrats d'assurance vie peuvent avoir une maturité de plus d'une décennie, il serait nécessaire de prendre en compte une telle possibilité de changement structurelle dans la valorisation de la pure endowment et du GAO. Dans la suite de ce travail, il sera question d'évaluer seulement la Pure endowment en prenant en compte le changement de régime.

8. Evaluation du capital différé sous l'hypothèse de dépendance entre les risques financiers et les risques biométriques avec changement de régime.

Les modèles de mortalité et de taux d'intérêt utilisés précédemment seront encore utilisés mais en permettant cette fois ci à leur volatilité de changer de régime selon une chaîne de Markov à l'état fini en temps continue.

En effet, en raison des structures démographiques historiques et la nature à long terme des produits d'assurance vie dans la pratique, il est nécessaire de passer à des tables de mortalité « déterministes » à des modèles stochastiques qui intègrent à la fois les chocs à court terme et les changements structurels à long terme des structures de mortalité et d'intérêt lors de la valorisation des produits.

8.1 Modélisation des taux d'intérêt et de mortalité

Soit l'espace de probabilité filtré $(\Omega, \mathcal{F}, \{\mathcal{F}_t\}, Q)$ prenant en compte tous les processus stochastiques qui seront utilisés dans la valorisation des produits.

La modification des modèles utilisés précédemment afin de prendre en compte le changement de régime est la façon suivante :

$$dr_t = a(b - r_t)dt + \sigma_t dw_t^1$$

$$d\mu_t = c\mu_t dt + \theta_t dz_t \quad \text{Avec } z_t \text{ définie plus haut}$$

Le changement de régime affecte que les volatilités de façon simultanée. Ce qui pourrait rendre la corrélation plus forte entre mortalité et marché financier.

Dans ce cadre, les volatilités des deux modèles sont pilotées par la même chaîne de Markov (y_t) à l'état fini en temps continue.

$$\sigma_t = \sigma(y_t) = \langle \sigma, y_t \rangle$$

$$\theta_t = \theta(y_t) = \langle \theta, y_t \rangle$$

$\langle ., . \rangle$: produit scalaire dans \mathbb{R}^n

$$\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n) \text{ et } \theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n)$$

Les volatilités ci-dessus décrivent les différents niveaux que les processus pourraient atteindre à la période t . Il sera supposé que y_t est une chaîne de Markov homogène et que son espace d'état prend l'un des vecteurs unitaires suivants :

$$(e_1, e_2, \dots, e_n) \in \mathbb{R}^n$$

$$e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0)^\top, \text{ ou le } i^{\text{ième}} \text{ élément est } 1 \text{ et } 0 \text{ sinon.}$$

Soit p_t la distribution inconditionnelle de y_t :

$$p_t = E^Q(y_t) = (p_t^1, p_t^2, \dots, p_t^n) \text{ Avec } p_t^i = E^Q(\langle e_i, y_t \rangle)$$

Selon Elliot et al (1995), y_t est une demi-martingale qui satisfait le processus suivant :

$$dy_t = \Gamma_t y_t dt + dn_t$$

$\{n_t\}$ Est un incrément de martingale sous Q et $\Gamma_t = \Gamma$ est la matrice d'intensité de transition d'un régime à l'autre.

D'après l'équation de Kolmogorov :

$$dp_t = \Gamma p_t dt, \text{ Avec } p_0 \text{ comme valeur initial.}$$

8.2 Expression du capital différé avec changement de régime

L'expression de la pure endowment sous Q déjà établie plus haut est :

$$M(t, T) = E^Q \left(\text{Exp} - \int_t^T r_u du \cdot \text{Exp} - \int_t^T \mu_v dv \mid \mathcal{F}_t \right)$$

L'obligation zéro-coupon devient :

$$B(t, T) = E^Q \left(\text{Exp} - \int_t^T r_u(y_t) du \mid \mathcal{F}_t \right)$$

Partant des travaux d'Elliot et Mamon (2022) donnant une connaissance de la trajectoire de y_t l'expression de l'obligation-zéro devient :

$$B(t, T) = B(t, T, y_t) = \text{Exp}(-A(t, T)r_t + D(t, T, y_t))$$

$$A(t, T) = \frac{1 - \text{Exp}(-a(T - t))}{a}$$

$$D(t, T, y_t) = \int_t^T (-abA(t, T) + \frac{1}{2}A^2(u, T)\sigma_u^2) du$$

$$D(t, T, y_t) = b[A(t, T) - (T - t)] + \int_t^T \langle \Phi_u, y_u \rangle du$$

$$\Phi_u = \frac{1}{2}A^2(u, T)\sigma^2 = \left(\frac{1}{2}A^2(u, T)\sigma_1^2, \dots, \frac{1}{2}A^2(u, T)\sigma_n^2\right)$$

$$B(t, T, y_t) = \text{Exp}(-A(t, T)r_t + b[A(t, T) - (T - t)]) + \int_t^T \langle \Phi_u, y_u \rangle du$$

$$B(t, T, y_t) = \text{Exp}(-A(t, T)r_t + b[A(t, T) - (T - t)]) \cdot \text{Exp}\left(\int_t^T \langle \Phi_u, y_u \rangle du\right)$$

Afin de mieux évaluer l'obligation zéro-coupon, l'expression $\text{Exp}\left(\int_t^T \langle \Phi_u, y_u \rangle du\right)$ selon la filtration \mathcal{F}_t doit être déterminée. Elliot et Mamon (2022) montrent que celle-ci est égale à $\langle \pi_{t, Ty_t}, \mathbf{1} \rangle$

$$B(t, T, y_t) = \text{Exp}(-A(t, T)r_t + b[A(t, T) - (T - t)]) \cdot \langle \pi_{t, Ty_t}, \mathbf{1} \rangle$$

$$\langle \pi_{t, Ty_t}, \mathbf{1} \rangle = \text{Exp}\left(\int_t^T \langle \Phi_u, y_u \rangle du\right)$$

$$B(t, T, y_t) = \langle \text{Exp}(-A(t, T)r_t + b[A(t, T) - (T - t)]) \cdot \pi_{t, Ty_t}, \mathbf{1} \rangle$$

$\mathbf{1}$ est un vecteur unitaire appartenant à \mathbb{R}^n

$\pi_{t, T}$ est la solution matricielle fondamentale de l'équation différentielle matricielle linéaire suivante :

$$d\pi_{t, s} = H(t, s)\pi_{t, s} ds$$

$$\pi_{t, t} = I$$

$$\frac{d\pi_{t, s}}{\pi_{t, s}} = H(t, s) ds$$

$$d\text{Log}(\pi_{t, s}) = H(t, s) ds$$

$$\text{Log}(\pi_{t,s}) = \int_t^s H(t,u) du$$

$$\pi_{t,s} = \text{Exp}\left(\int_t^s H(t,u) du\right)$$

I est la matrice identité et $H(t,s)$ est une matrice carrée de dimension $(n * n)$ de la forme suivante : $H(t,s) = J(t,s) + \Gamma^\top$, Γ^\top est la transposée de la matrice de transition

$J(t,s)$ Est une matrice diagonale variant dans le temps avec les éléments Φ_u :

$$J(t,s) = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} A^2(t,s) \sigma_1^2 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \frac{1}{2} A^2(t,s) \sigma_n^2 \end{bmatrix}$$

Sous la mesure risque neutre \tilde{Q} il a été démontré au point 3-6-1 que :

$$M(t,T) = B(t,T) E^{\tilde{Q}} \left(\text{Exp} \left(- \int_t^T \mu_v dv \mid \mathcal{F}_t \right) \right)$$

Afin d'expliciter l'expression précédente de la pure endowment il faudrait trouver la dynamique du taux de mortalité (μ_t) et de la chaîne de Markov (y_t).

$$\text{Soit : } X_t^1 = \text{Exp} \left(- \int_0^t r_u du \right) B(t,T, y_t)$$

$$X_t^1 = (X_t^1(1), X_t^1(2), \dots, X_t^1(n))$$

L'application la règle de Ito à X_t^1 donne :

$$dX_t^1 = \left(\frac{\partial X_t^1}{\partial t} + \frac{\partial X_t^1}{\partial r_t} a(b - r_t) + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial X_t^1}{\partial r_t^2} \right) dt + \frac{\partial X_t^1}{\partial r_t} \sigma_t dw_t^1 + \langle X_t^1, dy_t \rangle$$

$$dX_t^1 = \left(\frac{\partial X_t^1}{\partial t} + \frac{\partial X_t^1}{\partial r_t} a(b - r_t) + \frac{1}{2} \sigma_t^2 \frac{\partial X_t^1}{\partial r_t^2} \right) dt + \frac{\partial X_t^1}{\partial r_t} \sigma_t dw_t^1 + \langle X_t^1, \Gamma_t y_t \rangle dt + \langle X_t^1, dn_t \rangle$$

$$\frac{\partial X_t^1}{\partial t} = X_t^1 \left(-r_t - \frac{\partial A(t,T)}{\partial t} r_t + b \cdot \frac{\partial A(t,T)}{\partial t} + b + \frac{\langle H(t,T) \pi_{t,Ty_t}, 1 \rangle}{\langle \pi_{t,Ty_t}, 1 \rangle} \right) dt$$

Sachant que $\frac{\partial A(t,T)}{\partial t} = (a \cdot A(t,T) - 1)$ alors :

$$\frac{\partial X_t^1}{\partial t} = X_t^1 \left(-a \cdot A(t,T)r_t + a \cdot bA(t,T) + \frac{\langle H(t,T)\boldsymbol{\pi}_{t,T}y_t, 1 \rangle}{\langle \boldsymbol{\pi}_{t,T}y_t, 1 \rangle} \right) dt$$

$$\frac{\partial X_t^1}{\partial r_t} = -A(t,T)X_t^1 dt \Rightarrow \frac{\partial X_t^1}{\partial r_t} a(b - r_t) = (a \cdot A(t,T)r_t - a \cdot bA(t,T))X_t^1 dt$$

$$\frac{\partial X_t^1}{\partial r_t^2} = A(t,T)^2 X_t^1 dt$$

$$\langle X_t^1, \Gamma_t y_t \rangle = \frac{\langle \boldsymbol{\pi}_{t,T} \Gamma_t y_t \rangle}{\langle \boldsymbol{\pi}_{t,T} y_t, 1 \rangle} X_t^1 dt$$

$$\langle X_t^1, dn_t \rangle = \frac{\langle \boldsymbol{\pi}_{t,T} dn_t, 1 \rangle}{\langle \boldsymbol{\pi}_{t,T} y_t, 1 \rangle} X_t^1$$

$$\text{Ainsi, } d\mathbf{X}_t^1 = \mathbf{X}_t^1 (-A(t,T)\boldsymbol{\sigma}_t d\mathbf{w}_t^1 + \frac{\langle \boldsymbol{\pi}_{t,T} d\mathbf{n}_t, 1 \rangle}{\langle \boldsymbol{\pi}_{t,T} y_t, 1 \rangle})$$

En partant de l'équation précédente et selon le théorème de Girsanov les relations entre les mouvements browniens sous les mesures Q et \tilde{Q} sont :

$$d\tilde{w}_t^1 = dw_t^1 + A(t,T)\boldsymbol{\sigma}_t dt \text{ et } d\tilde{w}_t^2 = dw_t^2$$

La dynamique du taux d'intérêt et du taux de mortalité est donnée par :

$$dr_t = (a(b - r_t) - \boldsymbol{\sigma}_t^2 A(t,T)) dt + \boldsymbol{\sigma}_t d\tilde{w}_t^1$$

$$d\mu_t = (c\mu_t - \theta_t \cdot \boldsymbol{\sigma}_t \cdot \rho A(t,T)) dt + \theta_t (\rho d\tilde{w}_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} d\tilde{w}_t^2)$$

$$d\boldsymbol{\mu}_t = (c\boldsymbol{\mu}_t - \boldsymbol{\theta}_t \cdot \boldsymbol{\sigma}_t \cdot \rho A(t,T)) dt + \boldsymbol{\theta}_t d\tilde{z}_t$$

$$\tilde{z}_t = \rho \tilde{w}_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} \tilde{w}_t^2$$

La dynamique de y_t change aussi sous la mesure \tilde{Q} :

Partant de la règle de Bayes déjà définie plus haut,

$$E^{\tilde{Q}}(y_T | \mathcal{F}_t) = \frac{E^Q(\text{Exp}(\int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t))}{B(t, T, y_T)}$$

L'expression du zéro-coupon peut être réécrite de la façon suivante :

$$B(t, T, y_t) = \langle E^Q(\text{Exp}(-\int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t)), \mathbf{1} \rangle$$

Sachant aussi que :

$$B(t, T, y_t) = \langle \text{Exp}(-A(t, T)r_t + b[A(t, T) - (T - t)]). \boldsymbol{\pi}_{t, Ty_t}, \mathbf{1} \rangle$$

$$\text{Alors : } \langle E^Q(\text{Exp}(-\int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t)), \mathbf{1} \rangle = \langle \text{Exp}(-A(t, T)r_t + b[A(t, T) - (T - t)]). \boldsymbol{\pi}_{t, Ty_t}, \mathbf{1} \rangle$$

$$\text{Ainsi : } E^Q(\text{Exp}(-\int_t^T r_u du | \mathcal{F}_t)) = \text{Exp}(-A(t, T)r_t + b[A(t, T) - (T - t)]). \boldsymbol{\pi}_{t, Ty_t}$$

$$E^{\tilde{Q}}(y_T | \mathcal{F}_t) = \frac{\text{Exp}(-A(t, T)r_t + b[A(t, T) - (T - t)]). \boldsymbol{\pi}_{t, Ty_t}}{\langle \text{Exp}(-A(t, T)r_t + b[A(t, T) - (T - t)]). \boldsymbol{\pi}_{t, Ty_t}, \mathbf{1} \rangle}$$

$$E^{\tilde{Q}}(y_T | \mathcal{F}_t) = \frac{\boldsymbol{\pi}_{t, Ty_t}}{\langle \boldsymbol{\pi}_{t, Ty_t}, \mathbf{1} \rangle}$$

Sous le changement de régime et sous la mesure risque neutre \tilde{Q} la dynamique de la mortalité est toujours affine. Les résultats établis plus haut relatifs à la probabilité de suivi peut-être encore utilisés en prenant en compte la chaîne de Markov. Cette probabilité de suivi sera notée cette fois par $P(t, T, \tilde{y}_t)$. La difficulté réside dans la résolution de la matrice d'intensité de la chaîne de Markov (\tilde{y}_t).

L'équation de Kolmogorov définie plus haut reste valable :

$$\frac{\partial \tilde{p}_{v,t}}{\partial t} = \tilde{p}_{v,t} \tilde{\Gamma}_t$$

$\tilde{p}_{v,t}$ est le vecteur de probabilités conditionnelles de \tilde{y}_t :

$$\tilde{p}_{v,t} = E^{\tilde{Q}}(\tilde{y}_t | \mathcal{F}_v)$$

Sachant que :

$$E^{\tilde{Q}}(y_T | \mathcal{F}_t) = \frac{\boldsymbol{\pi}_{t,T} y_t}{\langle \boldsymbol{\pi}_{t,T}, \mathbf{1} \rangle}$$

Alors :

$$\tilde{p}_{v,t}^i = E^{\tilde{Q}}(\langle e_i, y_t \rangle | \mathcal{F}_v) = \left\langle \frac{\boldsymbol{\pi}_{t,T} y_t}{\langle \boldsymbol{\pi}_{t,T}, \mathbf{1} \rangle}, e_i \right\rangle$$

En outre, la chaîne de Markov (\tilde{y}_t) sous la mesure risque neutre \tilde{Q} est :

$$d\tilde{y}_t = \tilde{\Gamma}_t \tilde{y}_t dt + d\tilde{n}_t$$

$\{\tilde{n}_t\}$: est une martingale sous \tilde{Q}

La probabilité de suivi est :

$$P(t, T, \tilde{y}_t) = \text{Exp}(-\tilde{G}(t, T) \cdot \mu_t + \tilde{H}(t, T, \tilde{y}_t))$$

$$P(t, T, \tilde{y}_t) = \text{Exp}(-\tilde{G}(t, T) \cdot \mu_t) \cdot \text{Exp}(\tilde{H}(t, T, \tilde{y}_t))$$

Avec $\text{Exp}(\tilde{H}(t, T, \tilde{y}_t)) = \langle \tilde{\pi}_{t,T} \tilde{y}_t, \mathbf{1} \rangle$

L'expression $\tilde{G}(t, T)$ est identique à celle définie plus haut.

$$d\tilde{\pi}_{t,s} = \tilde{H}(t, s) \tilde{\pi}_{t,s} ds$$

$$\tilde{\pi}_{t,s} = \text{Exp}\left(\int_t^s \tilde{H}(t, u) du\right)$$

$$\tilde{H}(t, s) = \tilde{J}(t, s) + \tilde{\Gamma}_s^\top$$

$\tilde{J}(t, s)$ Est encore une matrice diagonale et selon les démonstrations effectuées au point (3-6-1-1) et les travaux de Huan Gao et al (2015) :

Soit $s = T$ alors,

$$\tilde{J}(t, T) = \begin{bmatrix} \rho A(t, T) \tilde{G}(t, T) \sigma_1 \theta_1 + \frac{1}{2} \tilde{G}(t, T)^2 \theta_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \rho A(s, T) \tilde{G}(t, T) \sigma_n \theta_n + \frac{1}{2} \tilde{G}(t, T)^2 \theta_n^2 \end{bmatrix}$$

L'expression de la pure endowment sous la mesure risque neutre \tilde{Q} est :

$$M(t, T, y_t, \tilde{y}_t) = B(t, T, y_t) \cdot P(t, T, \tilde{y}_t)$$

$$M(t, T, y_t, \tilde{y}_t) =$$

$$\text{Exp}(-A(t, T)r_t + b[A(t, T) - (T - t)]) \cdot \langle \boldsymbol{\pi}_{t, T y_t}, \mathbf{1} \rangle \cdot \text{Exp}(-\tilde{G}(t, T) \cdot \boldsymbol{\mu}_t) \cdot \text{Exp}(\tilde{H}(t, T, \tilde{y}_t))$$

$$M(t, T, y_t, \tilde{y}_t) =$$

$$\text{Exp}(-A(t, T)r_t + b[A(t, T) - (T - t)]) \cdot \langle \boldsymbol{\pi}_{t, T y_t}, \mathbf{1} \rangle \cdot \text{Exp}(-\tilde{G}(t, T) \cdot \boldsymbol{\mu}_t) \cdot \langle \tilde{\boldsymbol{\pi}}_{t, T \tilde{y}_t}, \mathbf{1} \rangle$$

$$\mathbf{M}(t, T, y_t, \tilde{y}_t) = \text{Exp}(-A(t, T)r_t + b[A(t, T) - (T - t)] - \tilde{G}(t, T) \cdot \boldsymbol{\mu}_t) \langle \boldsymbol{\pi}_{t, T y_t} + \tilde{\boldsymbol{\pi}}_{t, T \tilde{y}_t}, \mathbf{1} \rangle$$

L'expression de la pure endowment peut-être réécrit de la façon suivante :

$$\mathbf{M}(t, T, y_t, \tilde{y}_t) = \mathbf{B}(t, T, y_t) \cdot \text{Exp}(-\tilde{G}(t, T) \cdot \boldsymbol{\mu}_t) \cdot \text{Exp}(\tilde{H}(t, T, \tilde{y}_t))$$

Cette expression est toujours fonction de l'obligation zéro-coupon dépendant cette fois-ci de la chaîne de Markov $(\mathbf{B}(t, T, y_t))$, d'un terme fonction de la mortalité $(\text{Exp}(-\tilde{G}(t, T) \cdot \boldsymbol{\mu}_t))$ et d'un autre terme captant l'effet de la dépendance entre mortalité et marché financier

$$(\text{Exp}(\tilde{H}(t, T, \tilde{y}_t))).$$

Soit $\mathbf{g}(\boldsymbol{\rho}, t) = \text{Exp}(\tilde{H}(t, T, \tilde{y}_t))$

$$\tilde{H}(t, T, \tilde{y}_t) = \begin{bmatrix} \rho A(t, T) \tilde{G}(t, T) \sigma_1 \theta_1 + \frac{1}{2} \tilde{G}(t, T)^2 \theta_1^2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \rho A(t, T) \tilde{G}(t, T) \sigma_n \theta_n + \frac{1}{2} \tilde{G}(s, T)^2 \theta_n^2 \end{bmatrix} + \tilde{\Gamma}_S^\top$$

Afin de simplifier l'analyse, il sera supposé une chaîne de Markov à deux états :

$$\tilde{H}(t, T, \tilde{y}_t) = \begin{bmatrix} \rho A(t, T) \tilde{G}(t, T) \sigma_1 \theta_1 + \frac{1}{2} \tilde{G}(t, T)^2 \theta_1^2 & 0 \\ 0 & \rho A(t, T) \tilde{G}(t, T) \sigma_2 \theta_2 + \frac{1}{2} \tilde{G}(t, T)^2 \theta_2^2 \end{bmatrix} + \tilde{\Gamma}_S^\top$$

L'expression de l'effet de dépendance est bien différente de celle obtenue sous l'hypothèse d'absence de changement de régime.

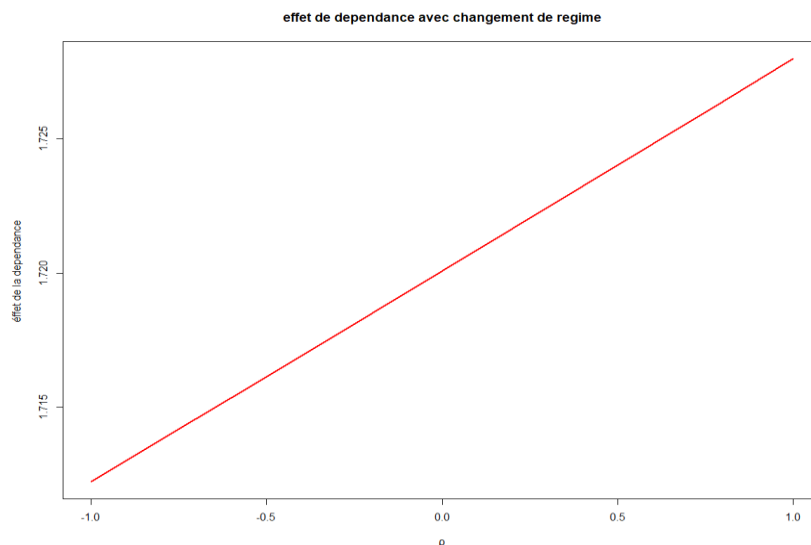
8.3 Analyse de l'effet de dépendance sur le capital différé

Il sera supposé que :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & \theta_1 \\ \sigma_2 & \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,03 & 0,0003 \\ 0,05 & 0,0005 \end{pmatrix}$$

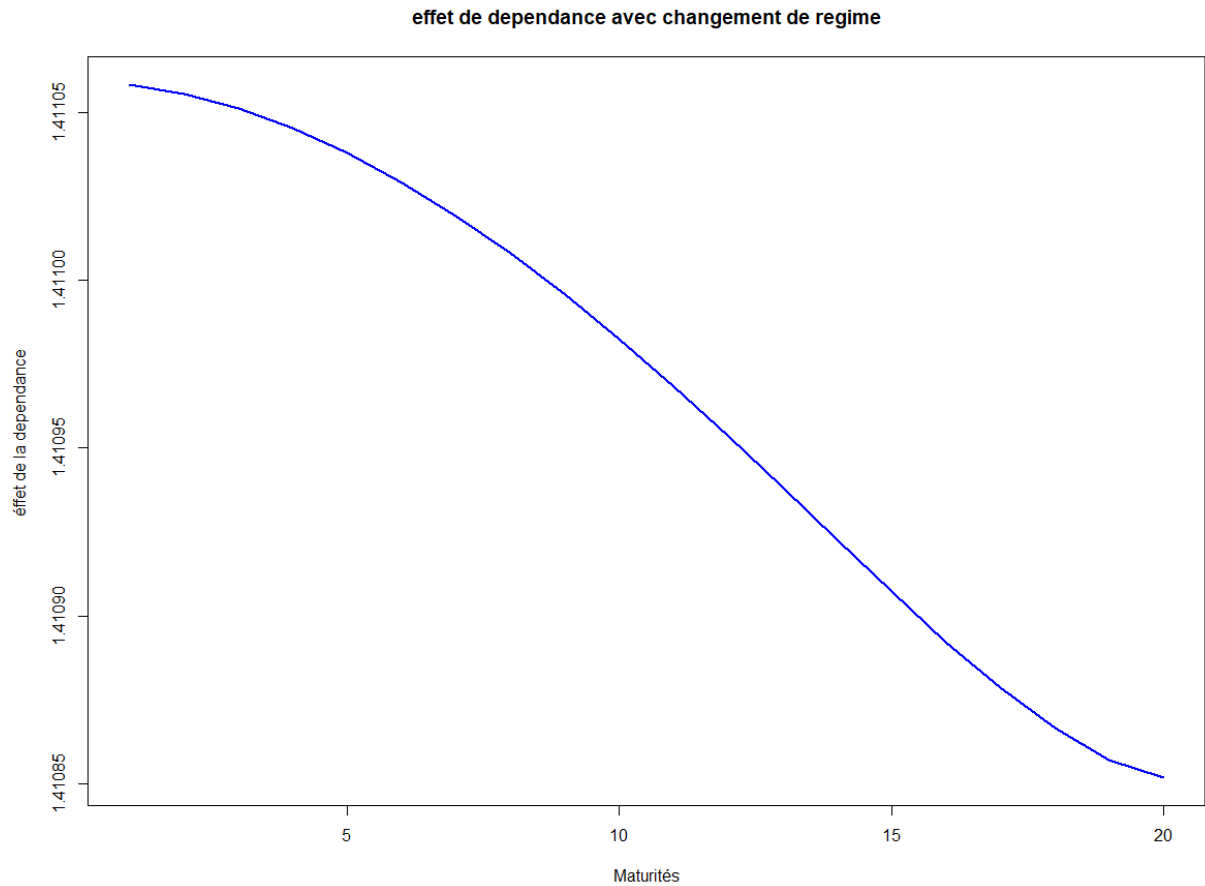
- Soit $t = 0 ; T = 20$ et $\rho \in [-1, 1]$ cela permet d'obtenir le graphique 7 suivant.

La prise en compte du changement de régime entraîne des valeurs numériques de l'effet de dépendance plus élevés. Les conclusions effectuées plus haut relatives aux effets de la variation du coefficient de corrélation sur l'effet de dépendance et dont sur le capital différé sont identique. Mais la variation du coefficient de corrélation entraîne des variations plus faibles du prix du capital différé lorsque le changement de régime est pris en compte.



Graphique 7 : Evolution de l'effet de dépendance en fonction du coefficient de corrélation avec changement de régime

- Soit $\rho = -0.1 ; T \in [1, 20]$ et $t = 0$ le graphique 8 suivant est obtenu :



Graphique 8 : Evolution de l'effet de dépendance en fonction de la maturité avec changement de régime

Le graphique montre que la croissance de la maturité entraîne de faible baisse des valeurs numériques de l'effet de dépendance et dont une faible baisse du prix. Pour les contrats à maturités longue, les assureurs doivent donc prendre en compte le changement de régime dans la valorisation de leur produit car cela rend le prix plus stable.

8.4 Illustration numérique du capital différé

Afin de valoriser le capital différé, les expressions suivantes des processus de mortalité et d'intérêt seront utilisées :

$$r_{t_i} = r_{t_{i-1}} + (ab - ar_{t_{i-1}} - \sigma_t^1 A(t, T))\Delta t + \sigma_t \Delta t \tilde{\varepsilon}_t^1$$

$$\mu_{t_i} = \mu_{t_{i-1}} + (c\mu_{t_{i-1}} - \theta_t \rho \sigma_t A(t, T))\Delta t + \theta_t \Delta t (\rho \tilde{\varepsilon}_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} \tilde{\varepsilon}_t^2)$$

Les paramètres utilisés dans le cas de la non prise en compte du changement de régime seront encore appliquée mais à cause du changement de régime, les volatilités suivantes seront utilisées :

$$\begin{pmatrix} \sigma_1 & \theta_1 \\ \sigma_2 & \theta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0,03 & 0,0003 \\ 0,05 & 0,0005 \end{pmatrix}$$

Le calcul explicite (sans simulation) donne des valeurs du capital différé en fonction de différentes valeurs du coefficient de corrélation pour $t = 0$ et $T = 20$:

Tableau 4 : prix du capital différé avec changement de régime

Corrélation	capital_diféré
-0,9	0.3475111
-0,8	0.3476139
-0,7	0.3477168
-0,6	0.3478197
-0,5	0.3479228
-0,4	0.3480259
-0,3	0.3481291
-0,2	0.3482323
-0,1	0.3483357
0	0.3484391
0,1	0.3485426
0,2	0.3486462
0,3	0.3487498
0,4	0.3488536
0,5	0.3489574
0,6	0.3490613
0,7	0.3491653
0,8	0.3492693
0,9	0.3493734

Les prix obtenus sont un peu plus élevés que dans le cas de l'absence de changement de régime. Ceci est logique car en supposant les volatilités non constantes, les produits deviennent plus risqués. Mais la prise en compte du changement de régime fournit des prix plus stables. Ce qui est avantageux pour l'assureur dans la gestion de sa trésorerie.

Conclusion

Dans cette étude, il a été question d'étudier d'abord des potentialités de dépendance entre mortalité et marché financier. Ensuite valoriser des produits d'assurance vie sous l'hypothèse de dépendance entre mortalité et marché financier. La revue de littérature et la statistique descriptive ont été utilisées afin d'évaluer une potentialité de dépendance entre mortalité et marché financier. Ensuite le processus de taux d'intérêt de Vasicek et le processus de taux de mortalité d'Ornstein-Uhlenbeck (OU) ainsi que des changements de numéraire ont été utilisés pour valoriser et illustrer numériquement la Pure endowment et le GAO. Enfin une autre valorisation de la pure endowment a été effectuée en prenant en compte le changement de régime à l'aide d'une chaîne de Markov à l'état fini en temps continu.

Les résultats de cette étude révèlent l'existence d'une corrélation négative entre mortalité et marché financier n'excédant pas 10% à un niveau de significativité de 5%. La valorisation de la Pure endowment sous l'hypothèse de dépendance entre mortalité et marché financier aboutit à une expression plus complexe que celle qui aurait dû être obtenue sous l'hypothèse d'indépendance. L'effet de dépendance sur le capital différé est décroissant avec la maturité et croissant avec le coefficient de corrélation. Quant à l'option d'annuité garantie (GAO), l'utilisation de la pure endowment comme numéraire a facilité l'obtention de son expression. La complexité de cette expression ne permet pas d'étudier de façon isolée l'effet de la dépendance comme dans le cas de la pure endowment. Néanmoins sachant que cette expression est aussi fonction du terme captant l'effet de dépendance sur la pure endowment, les conclusions relatives de cet effet sur la pure endowment peuvent-être aussi attribuées aux annuités garanties.

La maturité des contrats d'assurance vie oscillant entre une et trois décennies, peut entraîner un changement dans la structure des taux de mortalité et d'intérêt. Il était donc nécessaire de prendre en compte ce changement de régime dans la valorisation de la pure endowment. Ce qui aboutit à une valorisation différente de celle obtenue dans le cas de la prise en compte du changement de régime rendant les prix plus stables.

Vue l'impact du coefficient de corrélation entre mortalité et marché financier, les compagnies d'assurance devraient en tenir compte dans la valorisation des produits d'assurance vie afin d'éviter des problèmes de trésorerie pouvant conduire à leur faillite comme cela a été constaté

par le passé avec « Life Equity » en Angleterre. Pour des contrats de longue durée, en plus de la modélisation de la dépendance entre mortalité et marché financier, le changement de régime devra être aussi considéré.

Une autre approche pour l'évaluation de produits d'assurance vie sous l'hypothèse de dépendance entre mortalité et marché financier serait d'utiliser le processus de taux d'intérêt de Cox-Ingersoll-Ross et le processus de taux de mortalité de Lee-Carter bien connue pour sa capacité à s'adapter aux données empiriques. Dans ce cas, il faudra faire face à de nouveaux défis de programmation et un ensemble de différents calculs associés à la mesure ajustée au risque du capital différé.

Sachant que la directive européenne Solvabilité 2 recommande fortement de tester les exigences en matière d'adéquation des fonds propres sur la base de l'hypothèse explicite d'une dépendance mutuelle entre les marchés financiers et les marchés de l'assurance vie/santé, y compris la dépendance entre les risques de mortalité et d'intérêt, le cadre généralisé utilisé et les formules du capital différé et des annuités garanties obtenus dans ce travail fournissent une aide aux assureurs dans le cadre de la valorisation des produits d'assurance vie et un point de départ plausible pour de nouvelles recherches dans cette direction.

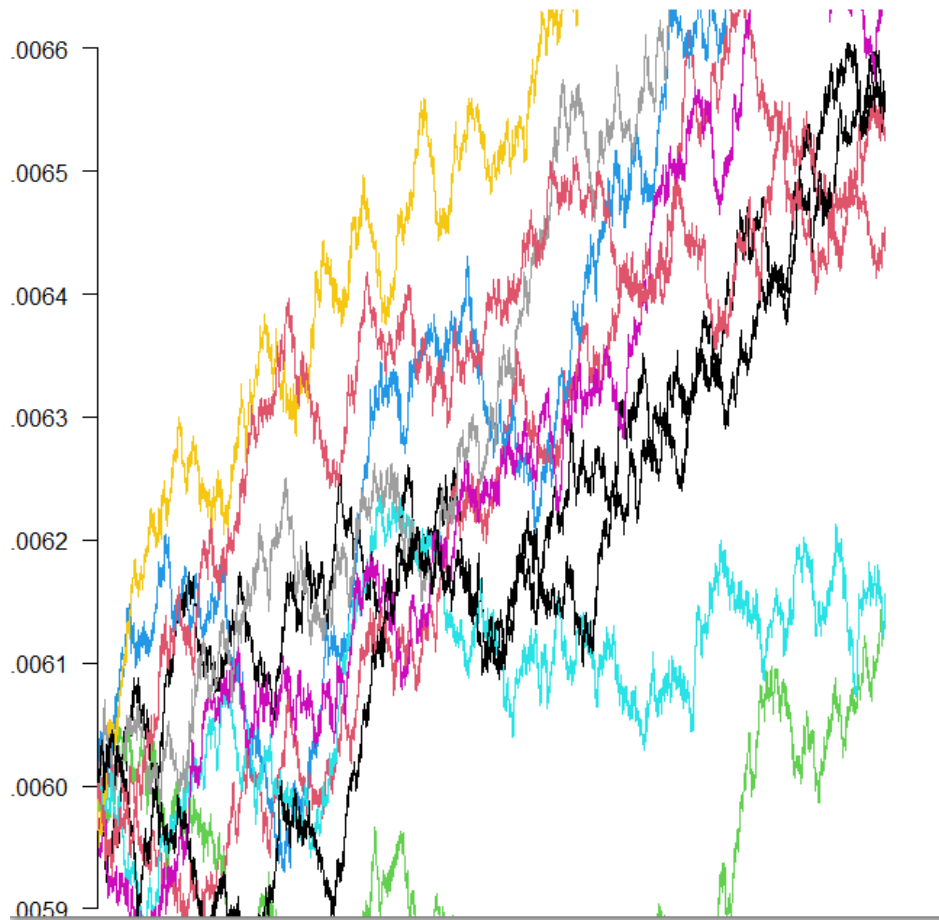
Bibliographie

- Al-Awadhi, A. M., Alsaifi, K., Al-Awadhi, A., & Alhammadi, S. (2020). *Death and contagious infectious diseases : Impact of the COVID-19 virus on stock market returns. Journal of Behavioral and Experimental Finance*, 27, 100326.
<https://doi.org/10.1016/j.jbef.2020.100326>
- Apergis, E., & Apergis, N. (2017). *The impact of 11/13 Paris terrorist attacks on stock prices : Evidence from the international defence industry. Applied Economics Letters*, 24(1), 45-48. <https://doi.org/10.1080/13504851.2016.1158914>
- Arin, K. P., Ciferri, D., & Spagnolo, N. (2008). *The price of terror : The effects of terrorism on stock market returns and volatility. Economics Letters*, 101(3), 164-167.
<https://doi.org/10.1016/j.econlet.2008.07.007>
- Ashraf, B. N. (2020). *Stock markets' reaction to COVID-19 : Cases or fatalities? Research in International Business and Finance*, 54, 101249.
<https://doi.org/10.1016/j.ribaf.2020.101249>
- Aslam, F., & Kang, H.-G. (2015). *How Different Terrorist Attacks Affect Stock Markets. Defence and Peace Economics*, 26(6), 634-648.
<https://doi.org/10.1080/10242694.2013.832555>
- Bahrini, R., Filfilan, A., & Department of Accounting, College of Business, University of Jeddah, Jeddah, Saudi Arabia. (2020). *Impact of the novel coronavirus on stock market returns : Evidence from GCC countries. Quantitative Finance and Economics*, 4(4), 640-652. <https://doi.org/10.3934/QFE.2020029>
- Cepoi, C.-O. (2020). *Asymmetric dependence between stock market returns and news during COVID-19 financial turmoil. Finance Research Letters*, 36, 101658.
<https://doi.org/10.1016/j.frl.2020.101658>
- Charles, A., & Darné, O. (2006). *Large shocks and the September 11th terrorist attacks on*

- international stock markets. Economic Modelling, 23(4), 683-698.*
<https://doi.org/10.1016/j.econmod.2006.03.008>
- Cutcu, I., & Kılıç, Y. (2020). *Stock Market Response to Coronavirus (COVID-19) Pandemic. 10, 207-220.*
- Drakos, K. (2004). *Terrorism-induced structural shifts in financial risk : Airline stocks in the aftermath of the September 11th terror attacks. European Journal of Political Economy, 20(2), 435-446.* <https://doi.org/10.1016/j.ejpoleco.2003.12.010>
- Gao, H., Mamon, R., & Liu, X. (2015). *Pricing a guaranteed annuity option under correlated and regime-switching risk factors. European Actuarial Journal, 5(2), 309-326.*
<https://doi.org/10.1007/s13385-015-0118-3>
- Graham, M. A., & Ramiah, V. B. (2012). *Global terrorism and adaptive expectations in financial markets : Evidence from Japanese equity market. Research in International Business and Finance, 26(1), 97-119.* <https://doi.org/10.1016/j.ribaf.2011.07.002>
- Harjoto, M. A., Rossi, F., & Paglia, J. K. (2021). *COVID-19 : Stock market reactions to the shock and the stimulus. Applied Economics Letters, 28(10), 795-801.*
<https://doi.org/10.1080/13504851.2020.1781767>
- He, Q., Liu, J., Wang, S., & Yu, J. (2020). *The impact of COVID-19 on stock markets. Economic and Political Studies, 8(3), 275-288.*
<https://doi.org/10.1080/20954816.2020.1757570>
- Jalen, L., & Mamon, R. (2009). *Valuation of contingent claims with mortality and interest rate risks. Mathematical and Computer Modelling, 49(9), 1893-1904.*
<https://doi.org/10.1016/j.mcm.2008.10.014>
- Kalyvis, V., & Lyroudi, K. (2006). *THE EFFECT OF THE SEPTEMBER 11TH, 2001 ON THE N.Y.S.E. 3rd International Conference "Advances in Applied Financial Economics", AFE Samos 2006.*

- Kollias, C., Papadamou, S., & Stagiannis, A. (2011). *Terrorism and capital markets : The effects of the Madrid and London bomb attacks. International Review of Economics & Finance, 20(4), 532-541.* <https://doi.org/10.1016/j.iref.2010.09.004>
- Liu, H., Manzoor, A., Wang, C., Zhang, L., & Manzoor, Z. (2020). *The COVID-19 Outbreak and Affected Countries Stock Markets Response. International Journal of Environmental Research and Public Health, 17(8), 2800.* <https://doi.org/10.3390/ijerph17082800>
- Liu, X., Mamon, R., & Gao, H. (2014). *A generalized pricing framework addressing correlated mortality and interest risks : A change of probability measure approach. Stochastics, 86(4), 594-608.* <https://doi.org/10.1080/17442508.2013.859388>
- Mnasri, A., & Nechi, S. (2016). *Impact of terrorist attacks on stock market volatility in emerging markets. Emerging Markets Review, 28, 184-202.* <https://doi.org/10.1016/j.ememar.2016.08.002>
- Park, S. (2017). *Annuity Product Valuation and Risk Measurement under Correlated Financial and Longevity Risks. Electronic Thesis and Dissertation Repository.* <https://ir.lib.uwo.ca/etd/4860>
- Shen, Y., & Siu, T. K. (2013). *Longevity bond pricing under stochastic interest rate and mortality with regime-switching. Insurance: Mathematics and Economics, 52(1), 114-123.* <https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2012.11.006>
- Tahir, S. H., Tahir, F., Syed, N., Ahmad, G., & Ullah, M. R. (2020). *Stock Market Response to Terrorist Attacks : An Event Study Approach. The Journal of Asian Finance, Economics and Business, 7(9), 31-37.* <https://doi.org/10.13106/jafeb.2020.vol7.no9.031>
- Zhang, D., Hu, M., & Ji, Q. (2020). *Financial markets under the global pandemic of COVID-19. Finance Research Letters, 36, 101528.* <https://doi.org/10.1016/j.frl.2020.101528>

graphique 6 : Processus de taux de mortalité



UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
Faculté des sciences

Place des sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/sc