

Faculté des sciences

Modèles binomiaux multivariés et application aux risques financiers et actuariels

Auteur : Jean Francky Landry NGONO

Promoteur : Professeur Pierre DEVOLDER

Lecteur : Professeur Pierre ARS

Année académique 2022-2023

Master en sciences actuarielles, à finalité spécialisée

Table des matières

Table des matières	i
Avertissement	ii
Remerciements	iii
Liste des tableaux	iv
Résumé	1
Introduction générale.....	2
Chapitre 1. La description du contrat	4
1.2. Le passif de la compagnie d'assurance.....	5
Chapitre 2. Discrétisation des modèles continus.....	8
2.1. Le taux d'intérêt.....	8
2.2. L'actif de la compagnie d'assurance.....	9
2.3. Les provisions.....	10
2.4. La mortalité.....	11
Chapitre 3. Valorisation des produits d'assurance.....	13
3.1. Valorisation du bon de capitalisation.....	13
3.2. Valorisation du capital différé sans remboursement du capital	16
3.2.1. Indépendance de la mortalité	16
3.2.2. Dépendance de la mortalité.....	21
3.3. Valorisation du capital différé avec remboursement.....	26
3.3.1. Indépendance de la mortalité	26
3.3.2. Dépendance de la mortalité.....	30
Chapitre 4. Application numérique	36
4.1. Indépendance de la mortalité	36
4.2. Dépendance de la mortalité	39
Conclusion générale	41
Bibliographie.....	42

Avertissement

L'Université Catholique de Louvain n'entend donner ni approbation ni improbation aux opinions émises dans ce mémoire. Celles-ci doivent être considérées comme propres à leur auteur.

Remerciements

Nous remercions le Professeur Pierre DEVOLDER d'avoir accepté d'encadrer la réalisation de ce travail. Nos remerciements vont également au Professeur Emilio RUSSO et au Professeur Alessandro STAINO qui nous ont fournis des éléments de programmations nécessaires aux simulations numériques dans ce travail. Nous remercions le Professeur Pierre ARS d'avoir accepté d'être le Lecteur de ce travail. Merci à monsieur Fritz TOTIN, pour nos échanges sur ce travail. Nous remercions la famille DUBOUIS pour son soutien et ses multiples apports. Enfin, nous remercions tous nos proches, et toutes les personnes qui nous ont aidées à réaliser ce travail.

Liste des tableaux

Tableau 1. Indépendance de la mortalité avec un taux garanti de 4.5%	37
Tableau 2. Indépendance de la mortalité avec un taux garanti de 3.5%	37
Tableau 3. Indépendance de la mortalité avec un taux garanti de 5.5%	38
Tableau 4. Valeur des contrats selon l'âge de l'assuré	39
Tableau 5. Dépendance de la mortalité avec un taux garanti de 4.5%.....	39
Tableau 6. Dépendance de la mortalité avec un taux garanti de 3.5%.....	40
Tableau 7. Dépendance de la mortalité avec un taux garanti de 5.5%.....	40

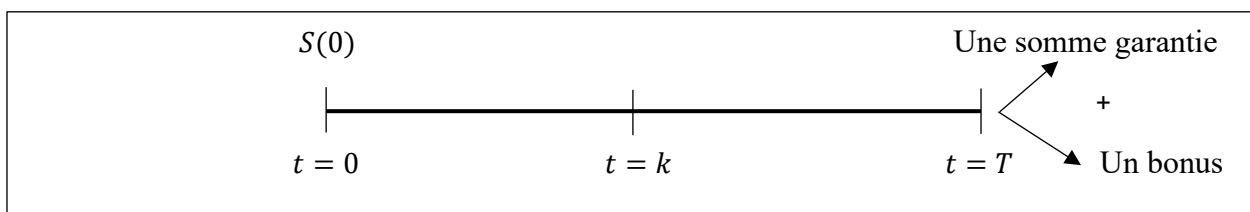
Résumé

Les contrats d'assurances, assurance vie notamment, étant souvent fait sur le long terme. L'une des manière de gérer le surplus de trésorerie dans les compagnies d'assurances, est de placer les fonds sur les marchés financiers. Cela a pour conséquence de faire dépendre le montant de la prestation à l'évolution stochastique des actifs de la compagnie de l'assurance. Plusieurs travaux se sont attardés sur le sujet et progressivement, l'hypothèse de taux d'intérêt déterministe a aussi été remise en question. Aujourd'hui la valeur d'un contrat d'assurance vie dépend au minimum de ces deux stochastiques. Plusieurs méthodes subsistent à cet effet, mais certaines méthodes sont notamment assez complexes et peuvent ralentir les calculs. L'objectif de ce travail est de déterminer la fair value d'un contrat d'assurance vie traditionnel grâce aux modèles binomiaux multivariés. Cette méthode est de plus en plus utilisée dans la littérature pour la valorisation des contrats. Elle semble moins complexe et plus flexible que d'autres méthodes. Cette étude met notamment un accent sur la prise en compte de la mortalité, avec entre autres la remise en cause de l'hypothèse d'une mortalité déterministe.

Introduction générale

Soit un contrat d'assurance vie traditionnel, avec participation bénéficiaire, où un souscripteur d'une police d'assurance individuel (ou sur une cohorte d'assurances identiques) paye, en début de la première période, une prime unique et obtient une police d'assurance de valeur nominale $S(0)$ et de maturité T .

En ce qui concerne l'assureur, il reçoit une prime unique en début de la première période et il devra à la maturité dudit contrat payer une somme garantie à l'assuré avec un éventuel bonus, calculé annuellement.



Lorsque l'assureur reçoit la prime unique, il place la valeur nominale du contrat, $S(0)$, sur un marché financier. Le bonus qu'il offre à l'assuré dépend alors des résultats, annuels, de cet actif sur les marchés financiers. Dans le cas où l'assureur réalise des profits au cours de l'année t , l'assuré aura en bonus ($B(t)$) une part de ce profit. Ce $B(t)$ va être capté sur le taux appliqué aux provisions. Il va ainsi se matérialiser comme un taux supplémentaire qui vient augmenter le taux garanti. Dans le cas où l'assureur réalise des pertes au cours de l'année t , il est le seul à subir ces pertes. Cependant, il n'existe aucune garantie que l'assuré sera en vie à l'échéance du contrat. Ainsi, il ne bénéficie de ce capital que s'il est en vie à la période T . En revanche, s'il décède avant la fin du contrat, trois cas sont envisagés :

- Premier cas : le produit est un bon de capitalisation

Ici le bénéficiaire reçoit la valeur du compte de l'assuré à l'échéance et le contrat prend fin.

- Deuxième cas : le contrat est un capital différé sans remboursement du capital

Dans ce cas, le bénéficiaire ne reçoit rien si l'assuré décède avant l'échéance et le contrat prend fin.

- Troisième cas : le contrat est un capital différé avec remboursement du capital

Dans ce contrat, le bénéficiaire reçoit la réserve à l'instant du décès et le contrat prend fin.

La fair value du contrat dépend alors de la dynamique stochastique de $S(0)$, de la dynamique stochastique du taux d'intérêt et de la mortalité. La durée des contrats d'assurance vie, à savoir le long terme, pousse à supposer que ces différentes dynamiques sont stochastiques. Toujours du fait de l'aspect long terme des contrats d'assurances vie, il est peu probable que la mortalité reste constante tout au long de la durée de vie du contrat. Il peut donc aussi être intéressant, de lui considérer une dynamique stochastique.

La dépendance de la fair value face à toutes ces évolutions stochastiques rend sa détermination moins aisée. Pourtant, la juste valorisation d'un contrat d'assurance est importante tout aussi bien pour l'assureur, le régulateur que l'assuré. En effet cela améliore la solvabilité de l'assureur, affine les primes d'assurances et favorise une meilleure maîtrise de son portefeuille. Ce travail entend justement proposer une valorisation du contrat d'assurance vie qui tienne compte de tous ses aspects. En d'autres termes, l'objectif de ce travail est de : **Déterminer la fair value d'un contrat d'assurance vie traditionnel grâce à un modèle binomial multivarié.**

Pour atteindre cet objectif, ce travail se divise en quatre chapitres. Un premier chapitre qui porte sur la description du contrat, un deuxième qui présente la discrétisation du modèle continu, un troisième sur la valorisation du contrat, et un quatrième chapitre sur l'application numérique.

Chapitre 1. La description du contrat

Le modèle proposé s'inspire des travaux de Russo et Staino (2018a) et des travaux de Costabile et al. (2021). C'est aussi une version simplifiée du modèle proposé dans les travaux de Grosen et Jorgensen (2000). C'est-à-dire que les agents économiques évoluent dans une économie sans friction, donc avec des marchés financiers parfaits, un marché de l'assurance vie compétitif parfait, sans frictions. Cette caractérisation de l'économie permet de se passer de la fiscalité, des coûts de transactions, de la divisibilité, de la liquidité, des contraintes de vente à découvert et ainsi que de toutes autres imperfections qui peuvent être ignorés. En plus, le présent travail ignore les frais et autres éventuels chargements.

A la période 0, le souscripteur d'assureur paye une prime unique et obtient un fond de valeur nominale $S(0)$. A la dite période, $S(0)$ représente l'actif de la compagnie, et $S(0) = L(0) = P(0)$ avec $P(0)$ est la provision à la période 0, et $L(0)$ la dette de l'assureur envers l'assuré. A l'échéance du contrat, à la période T , en cas de survie de l'assuré, la dette de l'assureur est de $L(T)$ et est égale à la valeur du contrat. $L(T)$ est perçu comme une somme de la provision et du bonus annuel. Cependant, le bonus annuel dépend lui-même de la provision. Ainsi, le bonus est capté directement dans l'évolution de la provision. Plutôt que d'être crédité au taux garanti, la provision l'est crédité à un taux rp qui est la somme du taux garanti et d'un éventuel surplus de taux obtenu grâce au bonus. La politique de bonus, annuel, se reflète donc sur le taux rp . Cependant, si l'assuré décède à la période $t < T$, la prestation va dépendre du type de produit dans lequel on se trouve. Dans ce travail, trois produits sont considérés : Le bon de capitalisation, le capital différé sans remboursement du capital, et le capital différé avec remboursement du capital.

Pour être capable de faire face à sa dette, la valeur du fond $S(0)$, la valeur nominale du contrat est investie, par l'assureur, sur les marchés financiers dans des actifs risqués, à savoir des actions. Ces actifs représentent le portefeuille d'actifs de l'assureur, et leurs natures risqués, en rend l'évolution stochastique. Ce chapitre se divise donc en deux sections. La première section porte sur l'actif de la compagnie d'assurance, et la seconde sur son passif.

1.1. L'actif de la compagnie d'assurance

Le souscripteur d'assurance, doit verser une prime unique à l'assureur. Cette prime unique constitue le fond initial de l'assureur, soit $S(0)$ ce fond. En revanche, l'assureur pour fournir $L(T)$ à l'assuré en cas de survie, ou une éventuelle provision $P(t)$ à son bénéficiaire, dans le cas du capital différé avec remboursement du capital notamment, si l'assuré décède en $t < T$, il doit générer des revenu en investissant $S(0)$. Il investit dans des actifs risqués, notamment des actions, négociés librement dans un marché financier complet, sans frictions et sans opportunité d'arbitrage, ayant les mêmes caractéristiques. La valeur de ce fond à la période t est alors $S(t)$ et suit une dynamique stochastique, sous une mesure de probabilité risque neutre Q , soit,

$$dS(t) = r(t)S(t)dt + \sigma_S S(t)dW_t^S \quad (1.1)$$

Avec $r(t)$ le taux d'intérêt sans risque de l'économie, σ_S représente la volatilité des rendements de $S(t)$, W_t^S est un mouvement brownien standard défini sous un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Le taux d'intérêt sans risque $r(t)$ suit également une dynamique stochastique, soit,

$$dr(t) = m_r(r(t))dt + \sigma_r(r(t))dW_t^r \quad (1.2)$$

Avec W_t^r un mouvement brownien standard défini sous un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$.

1.2. Le passif de la compagnie d'assurance

En ce qui concerne le passif de l'assureur $L(t)$, sa dynamique dépend de la dynamique de la provision soit à la période t $P(t)$, et du bonus annuel soit à la période t $B(t)$, mais également de la survie de l'assuré. En effet, si l'assuré décède avant l'échéance, trois cas sont abordés. Soit le passif de l'assureur est nul, c'est le cas du capital différé sans remboursement du capital. Soit le passif de l'assureur se limite à la provision à la date du décès de l'assuré, c'est le cas du capital différé avec remboursement du capital. Soit le passif de l'assureur est égal à la valeur du contrat, dans ce cas la mortalité n'est pas prise en compte, c'est le bon de capitalisation. Cependant, s'il survit au terme du contrat, ce passif est plutôt donné par la valeur du contrat. La dynamique du passif de l'assureur peut aussi dépendre d'une troisième dynamique stochastique, à savoir celle de la mortalité.

Tout d'abord, à la date d'anniversaire k , l'assureur a dans son passif le solde du compte du souscripteur de l'assurance $P(k)$ et la réserve de $B(k)$. La distribution de $P(k)$ dépend de la

politique de bonus, annuel, soit plus spécifiquement de $r_p(k)$. Pour rappel, l'assureur reverse au compte de l'assuré les intérêts au taux $r_p(k)$. Cela signifie que,

$$P(k) = (1 + r_p(k))P(k-1), \text{ ou encore } P(k) = P(0) \prod_{i=1}^k (1 + r_p(i)) \quad (1.3)$$

La détermination de $r_p(k)$ est alors un élément primordiale pour apprécier la dynamique du passif. Bien que sa détermination dans la pratique dépende de plusieurs éléments, comme la loi ou encore la stratégie de l'entreprise, une approximation réaliste est toutefois possible. En effet, supposons que la compagnie d'assurance souhaite maintenir constant le ratio des provisions de bonus aux provisions techniques, soit $B(k)/P(k)$ et ainsi distribuer à chaque période, une fraction α des provisions de bonus positives. Cette fraction α de l'excédent de réserve de bonus, vient s'ajouter au minimum que l'assureur garantie déjà à savoir r_G . En supposant γ la cible constante visée par la compagnie, encore appelée le taux tampon cible, c'est-à-dire $\gamma = B(k)/P(k)$, alors le mécanisme décrit ci-dessus peut se formaliser ainsi qu'il suit :

$r_p(k) = \max \left\{ r_G, \alpha \left(\frac{B(k-1)}{P(k-1)} - \gamma \right) \right\}$, le taux tampon cible est exprimé en $k-1$ puisque l'opération en k se fait sur les résultats en $k-1$. Il est possible de réécrire comme suit,

$$r_p(k) = \max \left\{ r_G, \alpha \left(\frac{B(k-1)}{P(k-1)} - \gamma \right) \right\} = r_G + \max \left\{ \alpha \left(\frac{B(k-1)}{P(k-1)} - \gamma \right) - r_G, 0 \right\} = r_G + r_B(k).$$

En appliquant le principe comptable du total passif est égal au total actif, il en ressort que,

$$B(k-1) = S(k-1) - P(k-1) \quad (1.4)$$

Puisque la dette de l'assureur n'est pas la même selon que l'assuré survit ou pas au terme du contrat, l'analyse de l'évolution de la mortalité est alors nécessaire. Cette étude adopte dans un premier temps l'hypothèse d'une mortalité non corrélée aux hypothèses financières comme dans les travaux de Costabile et al. (2021). Cependant, cette hypothèse de non-corrélation conduit à un traitement particulier, voir marginal, de la mortalité. Notamment la dynamique stochastique de la mortalité n'est pas prise en compte. Pourtant, des travaux comme ceux de Zeddouk et Devolder (2020) proposent plusieurs dynamiques possibles pour la mortalité. Une dynamique stochastique justifiée par la durée des contrats d'assurances vies. Pour des contrats qui durent aussi longtemps, dans un environnement où plusieurs facteurs peuvent impacter la mortalité dans une économie, à l'instar des changements climatiques, une dynamique stochastique semble cohérente.

Dans un second temps, cette étude se détache de l'hypothèse retenue dans les travaux de Costabile et al. (2021). Sans s'inscrire dans le débat sur la dynamique la plus adéquate de la mortalité, d'autres travaux comme ceux de Zeddouk et Devolder (2020) l'abordant déjà suffisamment, cette étude mobilise la dynamique proposée dans le modèle de Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Cependant, la même analyse peut être conduit avec un autre modèle. C'est pourquoi nous écrivons d'abord cette dynamique stochastique ici par une forme générique.

$$d\mu_x(t) = m_\mu(\mu_x(t))dt + \sigma_\mu(\mu_x(t))dW_t^\mu \quad (1.5)$$

W_t^μ est un mouvement brownien standard défini sous un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}_t, P)$. Avec W_t^S, W_t^r, W_t^V et W_t^μ des mouvements browniens standards corrélés par paires. Les hypothèses précédentes montrent que la valeur de la police d'assurance dépend des trajectoires, stochastiques, suivies par les différentes sources de risques. La fair value de ce contrat d'assurance est donc elle-même stochastique. Cela rend difficile la détermination d'une formule analytique explicite.

Pour outrepasser cette difficulté, la littérature propose des méthodes d'approximations numériques. A titre d'exemple, la méthode de Monte Carlo, mobilisée par exemple par les travaux de Grosen and Jorgensen (2000). Toutefois, Costabile et al. (2021) reprochent à cette méthode d'être complexe. Les travaux de Bauer et al. (2010) essaient d'ailleurs de fournir une méthode plus digeste. Ils comparent trois méthodes, la méthode de Monte Carlo, une méthode de discrétisation qui se base sur la résolution d'équations aux dérivées partielles, et la méthode des moindres carrés de Monte Carlo. Ils trouvent que la première méthode n'est pas appropriée aux contrats non européens de long terme tandis que si la seconde est plus appropriée pour ce type de contrats, elle peut se révéler complexe et causer un ralentissement dans le calcul. Cependant, ils montrent que la troisième méthode cherche à combiner les avantages des deux méthodes précédentes.

Néanmoins, si la méthode des moindres carrés de Monte Carlo est louable, il existe des alternatives plus intéressantes à exploiter. Les travaux de Russo et Staino (2018a) utilisent par exemple un modèle en treillis pour valoriser les sinistres dans un marché où les facteurs de risques sont multiples. Leurs études s'attardent certes sur les marchés financiers, mais les auteurs expliquent que cette méthode pourrait également servir aux actuaires. Costabile et al. (2021) s'en inspirent d'ailleurs pour proposer un modèle pour l'évaluation des contrats d'assurance vie avec participation bénéficiaire. Le présent travail, va dans la même lignée, en mettant un accent sur la prise en compte de la mortalité.

Chapitre 2. Discrétisation des modèles continus

La résolution d'un modèle composé des équations 1.1, 1.2 et 1.5 n'est pas aisée en continu, notamment parce qu'il dépend des évolutions stochastiques de l'actif, du taux d'intérêt, ou encore de la mortalité. Nous faisons recours dans un premier temps à la discrétisation du modèle via des arbres binomiaux. D'après Costabile et Massabo (2010), procéder à une discrétisation préalable de ces facteurs permet de maintenir la complexité des calculs à un niveau raisonnable. Les auteurs proposent une méthode de discrétisation qui est reprise dans les travaux de Russo et Staino (2018a), de Russo et Staino (2018b), de Costabile et al. (2021) ou encore de De Angelis et al. (2022). Les discrétisations suivantes se basent sur ces différents travaux. Pour la suite du travail, nous divisons l'intervalle $[0, T]$ en n sous intervalles de tailles égales soit $\Delta t = \frac{T}{n}$.

2.1. Le taux d'intérêt

Nous notons le plus petit nœud au temps $i\Delta t$ par $(i, 0)$, le deuxième par $(i, 1)$ et ainsi de suite, avec $i = 1, \dots, n$. Et pour $l = 1, \dots, i$, on a $r(i, l)$ la valeur approximative du taux d'intérêt discrétisé au nœud (i, l) . L'arbre binomial commence à $r(0,0) = r(0)$, et le processus de discret évolue à chaque nœud comme suit :

-Branche supérieure : $r(i, i) = r(i - 1, i - 1) + \sigma_r(r(i - 1, i - 1))\sqrt{\Delta t}$

-Branche inférieure : $r(i, 0) = \max(r(i - 1, 0) - \sigma_r(r(i - 1, 0))\sqrt{\Delta t}, 0)$

-Pour les nœuds intérieurs : $r(i, l) = r(i - 2, l - 1)$ avec $l = 1, \dots, i - 1$ et $i = 2, \dots, n$

Soit respectivement $p_r(i, l)$ et $q_r(i, l)$, les probabilités de transitions vers le haut et vers le bas, en partant d'une valeur initiale $r(i, l)$. Ces probabilités sont calculées en imposant que les deux points successeurs pour la variable d'état sont : $r(i + 1, l + 1)$ et $r(i + 1, l)$. Soit,

$$p_r(i, l) = \frac{r(i, l) + m_r(r(i, l))\Delta t - r(i + 1, l)}{r(i + 1, l + 1) - r(i + 1, l)} \text{ et } q_r(i, l) = 1 - p_r(i, l)$$

Cependant, cette équation n'assure pas que cette probabilité soit comprise entre 0 et 1. Notamment lorsque $r(i, l) + m_r(r(i, l))\Delta t$ n'est pas situé entre $r(i + 1, l + 1)$ et $r(i + 1, l)$. De sorte que plusieurs sauts vers le haut et vers le bas sont nécessaires. Soit, l^m le nombre de sauts avec :

$$l^m = \begin{cases} 0 & \text{if } r(i, l) + m_r(r(i, l))\Delta t < r(i + 1, 0), \\ i & \text{if } r(i, l) + m_r(r(i, l))\Delta t > r(i + 1, i + 1), \\ \text{le plus grand entier } l' \in [0, i]: r(i, l) + m_r(r(i, l))\Delta t \geq r(i + 1, l') & \text{sinon,} \end{cases}$$

Ainsi, les deux points successeurs sont $r(i + 1, l^m + 1)$ et $r(i + 1, l^m)$. D'où,

$$p_r(i, l) = \begin{cases} 0 & \text{if } r(i, l) + m_r(r(i, l))\Delta t < r(i + 1, 0), \\ 1 & \text{if } r(i, l) + m_r(r(i, l))\Delta t > r(i + 1, l + 1), \\ \frac{r(i, l) + m_r(r(i, l))\Delta t - r(i + 1, l^m)}{r(i + 1, l^m + 1) - r(i + 1, l^m)} & \text{sinon} \end{cases}, \quad (2.1)$$

Dans la suite de ce travail, à l'instar des travaux de Costabile et al. (2021), la dynamique stochastique du taux d'intérêt est modélisée selon Cox-Ingersoll-Ross (CIR). Soit $m_r(r(t)) = \delta(\theta - r(t))$ et $\sigma_r(r(t)) = \sigma_r\sqrt{r(t)}$. Cependant, l'analyse peut être conduite avec une autre modélisation.

2.2. L'actif de la compagnie d'assurance

Procéder à la discrétisation de la dynamique de l'actif de la compagnie d'assurance en tenant directement du taux d'intérêt peut conduire à une explosion du nombre de nœuds, et cela complexifie la valorisation. Pour y remédier, le taux d'intérêt est introduit un peu plus loin dans le processus de discrétisation. Soit $S(i, j)$, avec $i = 1, \dots, n$ et $j = 1, \dots, i$, la valeur du prix de l'actif au nœud i, j . Le nœud initial de cet arbre est $S(0, 0) = S(0)$, et en ce qui concerne les nœuds suivants, le processus est le suivant :

$$\text{-Branche supérieure : } S(i, i) = S(i - 1, i - 1) + \sigma_S S(i - 1, i - 1)\sqrt{\Delta t}$$

$$\text{-Branche inférieure : } S(i, 0) = S(i - 1, 0) - \sigma_S S(i - 1, 0)\sqrt{\Delta t}$$

$$\text{-Pour les nœuds intérieurs : } S(i, j) = S(i - 2, j - 1) \text{ avec } j = 1, \dots, i - 1 \text{ et } i = 2, \dots, n$$

Ainsi, pour Δt suffisamment petit, au même pas de temps, deux nœuds consécutifs diffèrent de $2\sigma_S\sqrt{\Delta t}$.

Le taux d'intérêt est introduit au niveau des probabilités de transitions. Pour tenir compte du taux d'intérêt dont la dynamique est stochastique, nous imposons que les deux points successeurs de l'actif de la compagnie d'assurance, soit $S(i + 1, j + 1)$ et $S(i + 1, j)$, encadrent la valeur attendue du processus dans le prochain intervalle de temps. L'actif de la compagnie d'assurance est alors fonction des point i, j, l , avec $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, i$ et $l = 1, \dots, i$. Au triplet (i, j, l) , le taux d'intérêt sans risque a une valeur au nœud (i, l) et l'actif de la compagnie d'assurance au nœud (i, j) .

Avec une probabilité de transition vers une valeur plus élevée, pour le triplet (i, j, l) , donnée par

$$p_s(i, j, l) = \frac{1}{2} + \frac{r(i, l)\Delta t}{2\sigma_s\sqrt{\Delta t}} \text{ avec } q_s(i, j, l) = 1 - p_s(i, j, l)$$

Puisque cette probabilité n'est pas nécessairement comprise entre 0 et 1, nous définissons j^m ,

$$j^m = \begin{cases} 0 & \text{if } S(i, j)(1 + r(i, l)\Delta t) < S(i + 1, 0), \\ i & \text{if } S(i, j)(1 + r(i, l)\Delta t) > S(i + 1, i + 1), \\ \text{le plus grand entier } j' \in [0, i]: S(i, j)(1 + r(i, l)\Delta t) \geq S(i + 1, j') & \text{sinon} \end{cases} ,$$

Ainsi, les deux points successeurs sont $S(i + 1, j^m + 1)$ et $S(i + 1, j^m)$. D'où,

$$p_s(i, j, l) = \begin{cases} 0 & \text{if } S(i, j)(1 + r(i, l)\Delta t) < S(i + 1, 0), \\ 1 & \text{if } S(i, j)(1 + r(i, l)\Delta t) > S(i + 1, i + 1), \\ \frac{S(i, j)(1 + r(i, l)\Delta t) - S(i + 1, j^m)}{S(i + 1, j^m + 1) - S(i + 1, j^m)} & \text{sinon} \end{cases} , \quad (2.2)$$

2.3. Les provisions

Soit $\overline{P(i)}$, vecteur d'état contenant des tranches de $P(i\Delta t)$ associées à tous les nœuds (i, j) avec $j = 0, \dots, i$ et $i = 1, \dots, n$. Avec $P(i\Delta t)$ la valeur du compte de l'assuré à chaque $i\Delta t$. Les différentes tranches de $\overline{P(i)}$, s'obtiennent, en considérant un anniversaire de contrat générique, $[i\Delta t]$, comme suit :

Pour la trajectoire la plus élevée de l'actif soit $\tau_{max}(i)$, nous avons $P_{max}(0) = S(0)$ et $B(0) = 0$ (la réserve de bonus), et à chaque anniversaire du contrat, le taux d'intérêt crédité à la police s'obtient par,

$$r_p(k) = \max \left\{ r_G, \alpha \left(\frac{B\left(\left(k-1\right)\frac{n}{T}\right)}{P_{max}\left(\left(k-1\right)\frac{n}{T}\right)} - \gamma \right) \right\} \quad (2.3)$$

Avec $k = 1, \dots, [i\Delta t]$, $P_{max}\left(k\frac{n}{T}\right) = (1 + r_p(k))P_{max}\left(\left(k-1\right)\frac{n}{T}\right)$, $B\left(k\frac{n}{T}\right) = S\left(k\frac{n}{T}, k\frac{n}{T}\right) - P_{max}\left(k\frac{n}{T}\right)$.

Pour la trajectoire la plus basse de l'actif soit $\tau_{min}(i)$, nous avons $P_{min}(0) = S(0)$ et $B(0) = 0$ (la réserve de bonus), et à chaque anniversaire du contrat, le taux d'intérêt crédité à la police s'obtient par,

$$r_p(k) = \max \left\{ r_G, \alpha \left(\frac{B\left(\left(k-1\right)\frac{n}{T}\right)}{P_{min}\left(\left(k-1\right)\frac{n}{T}\right)} - \gamma \right) \right\} \quad (2.4)$$

Avec $k = 1, \dots, \lfloor i\Delta t \rfloor$, $P_{min}\left(k \frac{n}{T}\right) = (1 + r_p(k))P_{min}\left((k-1) \frac{n}{T}\right)$, $B\left(k \frac{n}{T}\right) = S\left(k \frac{n}{T}, k \frac{n}{T}\right) - P_{min}\left(k \frac{n}{T}\right)$.

Pour les nœuds qui ne sont pas situés aux dates d'anniversaires, $P_{max}(i) = P_{max}(\lfloor i\Delta t \rfloor \frac{k}{n})$, et $P_{min}(i) = P_{min}(\lfloor i\Delta t \rfloor \frac{k}{n})$,

Le vecteur $\overline{P(i)}$ se décline alors comme suit : la première composante est $P(i; 0) = P_{max}(i)$, la dernière est $P(i; H(i)) = P_{min}(i)$, et les autres sont obtenus via $P(i; h) = P_{max}(i)e^{-h\alpha\sqrt{\Delta t}}$. La fonction $P_{max}(i)e^{-H(i)\alpha\sqrt{\Delta t}}$ permet de s'assurer que la différence entre deux tranches consécutives est de l'ordre $O(\sqrt{\Delta t})$, ce qui permet d'assurer la convergence de la méthode. Le vecteur $\overline{P(i)}$ est donc composé de $H(i) + 1$ éléments. α Étant un paramètre et $H(i)$ la plus petite valeur entière, $h = 1, \dots, H(i) - 1$.

2.4. La mortalité

Soit $\mu(i, g)$ la valeur du taux de mortalité au nœud (i, g) . Le point initial de l'arbre étant $\mu(0,0) = \mu(0)$. En utilisant la même méthode que précédemment le processus de discret évolue à chaque nœud comme suit :

-Branche supérieure : $\mu(i, i) = \mu(i-1, i-1) + \sigma_\mu(\mu(i-1, i-1))\sqrt{\Delta t}$

-Branche inférieure : $\mu(i, 0) = \max(\mu(i-1, 0) - \sigma_\mu(\mu(i-1, 0))\sqrt{\Delta t}, 0)$

-Pour les nœuds intérieurs : $\mu(i, g) = \mu(i-2, g-1)$ avec $g = 1, \dots, i-1$ et $i = 2, \dots, n$

Soit respectivement $p_\mu(i, g)$ et $q_\mu(i, g)$, les probabilités de transitions vers le haut et vers le bas. Avec

$$p_\mu(i, g) = \frac{\mu(i, g) + m_\mu(\mu(i, g))\Delta t - \mu(i+1, g)}{\mu(i+1, g+1) - \mu(i+1, g)} \text{ et } q_\mu(i, g) = 1 - p_\mu(i, g)$$

Puisque cette probabilité n'est pas nécessairement comprise entre 0 et 1, nous définissons g^m ,

$$g^m = \begin{cases} 0 \text{ if } \mu(i, g) + m_\mu(\mu(i, g))\Delta t < \mu(i+1, 0), \\ i \text{ if } \mu(i, g) + m_\mu(\mu(i, g))\Delta t > \mu(i+1, g+1), \\ \text{le plus grand entier } g' \in [0, i] : \mu(i, g) + m_\mu(\mu(i, g))\Delta t \geq \mu(i+1, g') \text{ sinon} \end{cases} ,$$

Ainsi, les deux points successeurs sont $\mu(i+1, g^m + 1)$ et $\mu(i+1, g^m)$. D'où,

$$p_{\mu}(i, j) = \begin{cases} 0 & \text{if } \mu(i, g) + m_{\mu}(\mu(i, g))\Delta t < \mu(i + 1, 0), \\ i & \text{if } \mu(i, g) + m_{\mu}(\mu(i, g))\Delta t > \mu(i + 1, g + 1), \\ \frac{\mu(i, g) + m_{\mu}(\mu(i, g))\Delta t - \mu(i + 1, g^m)}{\mu(i + 1, g^{m+1}) - \mu(i + 1, g^m)} & \text{sinon} \end{cases}, \quad (2.5)$$

Pour la suite de ce travail, la modélisation CIR est retenue, soit $m_{\mu}(\mu_x(t)) = \delta_u(\theta_u - \mu_x(t))$ et $\sigma_{\mu}(\mu_x(t)) = \sigma_{\mu}\sqrt{\mu_x(t)}$.

Chapitre 3. Valorisation des produits d'assurance

Nous avons expliqué précédemment qu'en ce qui concerne le passif de l'assureur, trois cas sont considérés. Chacun de ces cas donne lieu à un produit d'assurance particulier. Tout d'abord, nous considérons le cas où le contrat ne tient pas compte de la mortalité, c'est-à-dire du bon de capitalisation. Dans ce cas, le bénéficiaire reçoit la valeur du contrat à l'échéance en cas de décès de l'assuré. Puis, nous introduisons le risque de mortalité, en supposant que le bénéficiaire ne reçoit rien s'il décède avant l'échéance du contrat. Il s'agit ici du capital différé sans remboursement du capital. Et enfin, le dernier produit d'assurance est le cas où le bénéficiaire reçoit le solde des provisions à l'instant du décès, s'il décède avant l'échéance. Et s'il est en vie à l'échéance, il reçoit la valeur du contrat.

3.1. Valorisation du bon de capitalisation

Si l'assuré décède avant l'échéance, le bénéficiaire reçoit la fair value du contrat à l'échéance. Si l'assuré est en vie à l'échéance, il reçoit la fair value du contrat. C'est par ce produit que nous commençons. Il s'agit d'un pure produit financier et non plus d'un contrat d'assurance à proprement dit. C'est d'ailleurs pour cela que ce produit est valorisé sans considérer l'hypothèse d'une mortalité corrélée aux hypothèses financières.

Pour valoriser ce contrat, il faut construire un treillis trivarié qui est une recombinaison du r-treillis et du S-treillis. Le treillis est construit en générant 4 scénarios, à partir d'un état générique (i, j, l) . Chaque scénario étant un ensemble de deux éléments, tels que le premier désigne le mouvement du prix des actifs et le deuxième le mouvement du taux d'intérêt.

- **Proposition 3.1.** Soit $c(i, j, l; h)$ la valeur de ce contrat, correspondant au nœud (i, j) du S-treillis, au nœud (i, l) du r-treillis et à la $h^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\overline{P(i)}$. Si $(i + 1)\Delta t$ coïncide avec la date d'anniversaire du contrat, alors :

$$c(i, j, l; h) = e^{-r(i,l)\Delta t} \{p_{uu}c_{uu} + p_{ud}c_{ud} + p_{du}c_{du} + p_{dd}c_{dd}\} \quad (3.1)$$

Si le contrat avec participation bénéficiaire offre une option de rachat, alors à chaque anniversaire, le souscripteur de l'assurance bénéficie de $P(i; h)$ s'il abandonne le contrat. Dans ce cas la valeur du contrat est donnée par :

$$c(i, j, l; h) = \max\{e^{-r(i,l)\Delta t} \{p_{uu}c_{uu} + p_{ud}c_{ud} + p_{du}c_{du} + p_{dd}c_{dd}\}, P(i; h)\} \quad (3.2)$$

Avec c_{uu} , c_{ud} , c_{du} , c_{dd} les valeurs de la police d'assurance selon chaque scénario. Et p_{uu} , p_{ud} , p_{du} , p_{dd} , les probabilités de transitions.

- Dans la suite de cette partie nous expliquons cette valorisation

Pour obtenir cette fair value, précisons d'abord les quatre scénarios possibles :

uu c'est le scénario de la hausse de S et de r ,

ud c'est le scénario de la hausse de S et de la baisse de r

du c'est le scénario de la baisse de S et de l'évolution à la hausse de r

dd la branche qui traduit la baisse à la fois de S et de r .

Chacun de ces scénarios est accompagné des probabilités de transition, soit p_{uu} , p_{ud} , p_{du} , p_{dd} .

p_{uu} probabilité de transition pour le scénario uu

p_{ud} probabilité de transition pour le scénario ud

p_{du} probabilité de transition pour le scénario du

p_{dd} probabilité de transition pour le scénario dd

La détermination de ces probabilités de transitions par la résolution du système d'équations ci-après :

La somme des probabilités égales à 1 :

$$p_{uu} + p_{ud} + p_{du} + p_{dd} = 1$$

Contrainte sur la probabilité marginale du taux d'intérêt :

$$p_{uu} + p_{du} = p_r(i, l)$$

Contrainte sur la probabilité marginale du prix des actifs :

$$p_{uu} + p_{ud} = p_s(i, j, l)$$

Contrainte de la covariance entre le taux d'intérêt et le prix des actifs

$$p_{uu} - p_{ud} - p_{du} + p_{dd} = \rho$$

La résolution de ce système d'équation permet d'obtenir les résultats suivants :

$$p_{uu} = p_s(i, j, l)p_r(i, l) + \frac{\rho}{4}$$

$$p_{du} = q_s(i, j, l)p_r(i, l) - \frac{\rho}{4}$$

$$p_{ud} = p_s(i, j, l)q_r(i, l) - \frac{\rho}{4}$$

$$p_{dd} = q_s(i, j, l)q_r(i, j) + \frac{\rho}{4}$$

Avec ρ , le coefficient de corrélation entre le taux d'intérêt et l'actif de la compagnie d'assurance.

Pour déterminer la valeur de ce contrat avec participation bénéficiaire, notée ici $c(i, j, l; h)$, il est possible de faire recours à un schéma récursif backward. Le schéma récursif backward commence à la maturité, c'est-à-dire où le paiement de la police d'assurance est donné par $c(n, j, l; h) = P(n; h)$, l'état de nature étant $(n, j, l; h)$.

Pour chaque valeur de $P(i; h)$, les points successeurs prennent en compte les règles d'encours du contrat (règles d'attribution des contrats). D'où la nécessité de déterminer la participation bénéficiaire en fonction de chaque état de nature $(i, j, l; h)$.

Soit $\tilde{B} = S(i; h) - P(i; h)$, et le taux d'intérêt crédité par la police d'assurance est donné par $\tilde{r}_p = \max \left\{ r_G, \alpha \left(\frac{\tilde{B}}{P(i; h)} - \gamma \right) \right\}$. D'où le point successeur de $P(i; h)$, soit \tilde{P} , est donné par $\tilde{P} = (1 + \tilde{r}_p)P(i; h)$. Cependant \tilde{P} n'est pas présent dans $\overline{P(i+1)}$, c'est pourquoi l'interpolation linéaire est mobilisée pour obtenir la fair value de chaque scénario.

Scénario uu : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_1^{uu})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_2^{uu})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{uu} \in [0, 1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{uu})P(i+1, h_1^{uu}) + \omega^{uu}P(i+1, h_2^{uu})$$

$$c_{uu} = (1 - \omega^{uu})c(i+1, j^m+1, l^m+1; h_1^{uu}) + \omega^{uu}P(i+1, j^m+1, l^m+1; h_2^{uu})$$

Scénario ud : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_1^{ud})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_2^{ud})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{ud} \in [0, 1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{ud})P(i+1, h_1^{ud}) + \omega^{ud}P(i+1, h_2^{ud})$$

$$c_{ud} = (1 - \omega^{ud})c(i+1, j^m+1, l^m+1; h_1^{ud}) + \omega^{ud}P(i+1, j^m+1, l^m+1; h_2^{ud})$$

Scénario du : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_1^{du})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_2^{du})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{du} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{du})P(i + 1, h_1^{du}) + \omega^{du}P(i + 1, h_2^{du})$$

$$c_{du} = (1 - \omega^{du})c(i + 1, j^m + 1, l^m; h_1^{du}) + \omega^{du}P(i + 1, j^m + 1, l^m; h_2^{du})$$

Scénario dd : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_1^{dd})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_2^{dd})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{dd} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{dd})P(i + 1, h_1^{dd}) + \omega^{dd}P(i + 1, h_2^{dd})$$

$$c_{dd} = (1 - \omega^{dd})c(i + 1, j^m + 1, l^m; h_1^{dd}) + \omega^{dd}P(i + 1, j^m + 1, l^m; h_2^{dd})$$

Scénario dd : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_1^{dd})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_2^{dd})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{dd} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{dd})P(i + 1, h_1^{dd}) + \omega^{dd}P(i + 1, h_2^{dd})$$

$$c_{dd} = (1 - \omega^{dd})c(i + 1, j^m, l^m; h_1^{dd}) + \omega^{dd}P(i + 1, j^m, l^m; h_2^{dd})$$

La mobilisation des différentes valeurs par scénarios et des probabilités de transitions permet de construire les équations (3.1) et (3.2).

3.2. Valorisation du capital différé sans remboursement du capital

Le deuxième produit d'assurance est un pure endowment, c'est-à-dire une assurance vie avec capital différé sans remboursement du capital. Ici, le bénéficiaire reçoit au terme du contrat la fair value si l'assuré survit. En cas de décès, le bénéficiaire ne reçoit rien. Deux cas sont présentés ici. Tout d'abord, en considérant une indépendance entre la mortalité et les hypothèses financières. Puis en en considérant une corrélation entre ces dernières.

3.2.1. Indépendance de la mortalité

Dans ce cas, les développements sont similaires à ceux du 3.1. La différence étant du niveau de la fair-value. Ainsi, pour valoriser ce contrat, il faut construire un treillis trivarié qui est une recombinaison du r-treillis et du S-treillis. Le treillis est construit en générant 4 scénarios, à partir d'un état générique $(i, j, l; h)$. Chaque scénario étant un ensemble de deux éléments, tels

que le premier désigne le mouvement du prix des actifs, le deuxième le mouvement de la volatilité des rendements, et le troisième le mouvement du taux d'intérêt.

- **Proposition 3.2.** Soit $c(i, j, l; h)$ la valeur de ce contrat, correspondant au nœud (i, j) du S-treillis, au nœud (i, l) du r-treillis et à la $h^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\overline{P(i)}$. Si $(i + 1)\Delta t$ coïncide avec la date d'anniversaire du contrat, alors :

$$c(i, j, l; h) = e^{-\Delta t \bar{\mu}_{z+[i\Delta t]}(t+[i\Delta t])} \left(e^{-r(i,l)\Delta t} \{ p_{uu}c_{uu} + p_{ud}c_{ud} + p_{du}c_{du} + p_{dd}c_{dd} \} \right) \quad (3.3)$$

Si le contrat avec participation bénéficiaire offre une option de rachat, alors à chaque anniversaire, le souscripteur de l'assurance bénéficie de $P(i; h)$ s'il abandonne le contrat. Dans ce cas la valeur du contrat est donnée par :

$$c(i, j, l; h) = e^{-\Delta t \bar{\mu}_{z+[i\Delta t]}(t+[i\Delta t])} \times \max \{ e^{-r(i,j)\Delta t} \{ p_{uu}c_{uu} + p_{ud}c_{ud} + p_{du}c_{du} + p_{dd}c_{dd} \}, P(i; h) \} \quad (3.4)$$

Avec $e^{-\Delta t \bar{\mu}_{z+[i\Delta t]}(t+[i\Delta t])}$, la probabilité de survie de l'assuré. Par la suite de cette partie, nous montrons comment obtenir cette valeur.

Dans ce contrat d'assurance vie, les développements sont assez similaires que précédemment. L'élément nouveau qu'il faut d'abord préciser ici est la mortalité.

- La probabilité de survie

Soit $p_z^t = e^{-\mu_t(z)}$, la probabilité qu'un individu d'âge z à l'année t , survive jusqu'à $z + 1$.

Soit une probabilité de décès correspondante $q_z^t = 1 - p_z^t$.

De manière plus générale ${}_m p_z^t = \prod_{l=0}^{m-1} e^{-\mu_{t+l}(z+j)}$. Soit une probabilité de décès correspondante ${}_m q_z^t = 1 - \prod_{l=0}^{m-1} e^{-\mu_{t+l}(z+j)}$. Cette mortalité est convertie en risque neutre.

Soit, ${}_m \bar{q}_z^t = \phi(\phi^{-1}({}_m q_z^t) - \pi)$, la probabilité de décès en risque neutre.

Avec ϕ et π qui représentent respectivement la fonction de répartition de la loi normale et le prix de marché du risque. Ainsi, la mortalité en risque neutre est donnée par $\bar{\mu}_{z+m}(t+m) = -\ln(1 - {}_m \bar{q}_z^t) - \sum_{l=0}^{m-1} \bar{\mu}_{z+l}(t+j)$. L'assuré a une probabilité de survie de $e^{-\Delta t \bar{\mu}_{z+[i\Delta t]}(t+[i\Delta t])}$, la mortalité étant supposée constante au cours d'une année civile, l'âge de l'assuré est donné par $z + [i\Delta t]$ dans l'année civile $t + [i\Delta t]$.

- Détermination de la fair value avec probabilité de survie

Pour rappel, les quatre scénarios sont :

uu c'est le scénario de la hausse de S et de r ,

ud c'est le scénario de la hausse de S et de la baisse de r

du c'est le scénario de la baisse de S et de l'évolution à la hausse de r

dd la branche qui traduit la baisse à la fois de S et de r .

Et chacun de ces scénarios est accompagné de probabilités de transition, soit p_{uu} , p_{ud} , p_{du} , p_{dd} . Avec,

p_{uu} probabilité de transition pour le scénario uu

p_{ud} probabilité de transition pour le scénario ud

p_{du} probabilité de transition pour le scénario du

p_{dd} probabilité de transition pour le scénario dd

La détermination de ces probabilités de transitions par la résolution du système d'équations présenté plus haut, soit :

La somme des probabilités égales à 1 :

$$p_{uu} + p_{ud} + p_{du} + p_{dd} = 1$$

Contrainte sur la probabilité marginale du taux d'intérêt :

$$p_{uu} + p_{du} = p_r(i, l)$$

Contrainte sur la probabilité marginale du prix des actifs :

$$p_{uu} + p_{ud} = p_s(i, j, l)$$

Contrainte de la covariance entre le taux d'intérêt et le prix des actifs

$$p_{uu} - p_{ud} - p_{du} + p_{dd} = \rho$$

La résolution de ce système d'équation permet d'obtenir les résultats suivants :

$$p_{uu} = p_s(i, j, l)p_r(i, l) + \frac{\rho}{4}$$

$$p_{du} = q_s(i, j, l)p_r(i, l) - \frac{\rho}{4}$$

$$p_{ud} = p_s(i, j, l)q_r(i, l) - \frac{\rho}{4}$$

$$p_{dd} = q_s(i, j, l)q_r(i, j) + \frac{\rho}{4}$$

Avec ρ , le coefficient de corrélation entre le taux d'intérêt et l'actif de la compagnie d'assurance. Pour déterminer la valeur de ce contrat avec participation bénéficiaire, notée ici $c(i, j, l; h)$, il est possible de faire recours à un schéma récursif backward. Le schéma récursif backward commence à la maturité, c'est-à-dire où le paiement de la police d'assurance est donné par $c(n, j, l; h) = P(n; h)$, l'état de nature étant $(n, j, l; h)$.

Pour chaque valeur de $P(i; h)$, les points successeurs prennent en compte les règles d'encours du contrat (règles d'attribution des contrats). D'où la nécessité de déterminer la participation bénéficiaire en fonction de chaque état de nature $(i, j, l; h)$.

Soit $\tilde{B} = S(i; h) - P(i; h)$, et le taux d'intérêt crédité par la police d'assurance est donné par $\tilde{r}_p = \max \left\{ r_G, \alpha \left(\frac{\tilde{B}}{P(i; h)} - \gamma \right) \right\}$. D'où le point successeur de $P(i; h)$, soit \tilde{P} , est donné par $\tilde{P} = (1 + \tilde{r}_p)P(i; h)$. Cependant \tilde{P} n'est pas présent dans $\overline{P(i+1)}$, c'est pourquoi l'interpolation linéaire est mobilisée pour chaque scénario.

Scénario uu : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_1^{uu})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_2^{uu})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{uu} \in [0, 1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{uu})P(i+1, h_1^{uu}) + \omega^{uu}P(i+1, h_2^{uu})$$

$$c_{uu} = (1 - \omega^{uu})c(i+1, j^m+1, l^m+1; h_1^{uu}) + \omega^{uu}c(i+1, j^m+1, l^m+1; h_2^{uu})$$

Scénario ud : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_1^{ud})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_2^{ud})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{ud} \in [0, 1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{ud})P(i+1, h_1^{ud}) + \omega^{ud}P(i+1, h_2^{ud})$$

$$c_{ud} = (1 - \omega^{ud})c(i+1, j^m+1, l^m+1; h_1^{ud}) + \omega^{ud}c(i+1, j^m+1, l^m+1; h_2^{ud})$$

Scénario du : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_1^{du})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_2^{du})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{du} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{du})P(i + 1, h_1^{du}) + \omega^{du}P(i + 1, h_2^{du})$$

$$c_{du} = (1 - \omega^{du})c(i + 1, j^m + 1, l^m; h_1^{du}) + \omega^{du}P(i + 1, j^m + 1, l^m; h_2^{du})$$

Scénario dd : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_1^{dd})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_2^{dd})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{dd} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{dd})P(i + 1, h_1^{dd}) + \omega^{dd}P(i + 1, h_2^{dd})$$

$$c_{dd} = (1 - \omega^{dd})c(i + 1, j^m + 1, l^m; h_1^{dd}) + \omega^{dd}P(i + 1, j^m + 1, l^m; h_2^{dd})$$

Scénario dd : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_1^{dd})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_2^{dd})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{dd} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{dd})P(i + 1, h_1^{dd}) + \omega^{dd}P(i + 1, h_2^{dd})$$

$$c_{dd} = (1 - \omega^{dd})c(i + 1, j^m, l^m; h_1^{dd}) + \omega^{dd}P(i + 1, j^m, l^m; h_2^{dd})$$

Cependant, l'assuré ne bénéficie de la fair value du contrat que s'il est en vie à l'échéance du contrat. En effet, en considérant la probabilité de décès est considérée en risque neutre, ce qui permet d'obtenir la valeur actuelle du contrat comme valeurs attendues des futurs pay-off de la police d'assurance. En introduisant cette mortalité dans le schéma récursif backward, il ressort que si l'assuré reste en vie entre $i\Delta t$ et $i\Delta t + (i + 1)\Delta t$, alors, il reçoit :

$$c^L(i, j, l; h) = e^{-\Delta t \bar{\mu}_{z+[i\Delta t]}(t+[i\Delta t])} \left(e^{-r(i,j)\Delta t} (p_{uu}c_{uu} + p_{ud}c_{ud} + p_{du}c_{du} + p_{dd}c_{dd}) \right)$$

Ou en cas d'option de rachat :

$$c^L(i, j, l; h) = e^{-\Delta t \bar{\mu}_{z+[i\Delta t]}(t+[i\Delta t])} \times \max\{e^{-r(i,j)\Delta t} \{p_{uu}c_{uu} + p_{ud}c_{ud} + p_{du}c_{du} + p_{dd}c_{dd}\}, P(i; h)\}$$

Si l'assuré décède entre $i\Delta t$ et $i\Delta t + (i + 1)\Delta t$, alors, son bénéficiaire ne reçoit rien. Soit,

$$c^D(i, j, l; h) = 0$$

La valeur du contrat est donc limitée à $c^L(i, j, l; h)$, qui correspond aux équations (3.3) et (3.4).

3.2.2. Dépendance de la mortalité

La mortalité n'est plus ici un élément déterminé hors du modèle. La valorisation du contrat va se faire cette fois-ci en recombinaison le S-treillis, le r-treillis, et le treillis de la mortalité. Le treillis qui en ressort est construit en considérant 8 scénarios, à partir d'un état générique $(i, j, l, g; h)$. Chaque scénario étant un ensemble de trois éléments, tels que le premier désigne le mouvement de l'actif de la compagnie, le deuxième le mouvement du taux d'intérêt, et le troisième le mouvement de la mortalité.

- **Proposition 3.3.** Soit $c(i, j, l; h)$ la valeur de ce contrat, correspondant au nœud (i, j) du S-treillis, au nœud (i, l) du r-treillis, au nœud (i, g) du u-treillis, et à la $h^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\overline{P(i)}$. Si $(i + 1)\Delta t$ coïncide avec la date d'anniversaire du contrat, alors :

$$c(i, j, l, g; h) = e^{-u(i, g)\Delta t} \left(e^{-r(i, l)\Delta t} \{ p_{uuu}c_{uuu} + p_{uud}c_{uud} + p_{udu}c_{udu} + p_{udd}c_{udd} + p_{add}c_{add} + p_{adu}c_{adu} + p_{dud}c_{dud} + p_{duu}c_{duu} \} \right) \quad (3.5)$$

Si le contrat avec participation bénéficiaire offre une option de rachat, alors à chaque anniversaire, le souscripteur de l'assurance bénéficie de $P(i; h)$ s'il abandonne le contrat. Dans ce cas la valeur du contrat est donnée par :

$$c(i, j, l, g; h) = e^{-u(i, g)\Delta t} \times \max \{ e^{-r(i, j)\Delta t} \{ p_{uuu}c_{uuu} + p_{uud}c_{uud} + p_{udu}c_{udu} + p_{udd}c_{udd} + p_{add}c_{add} + p_{adu}c_{adu} + p_{dud}c_{dud} + p_{duu}c_{duu} \}, P(i; h) \} \quad (3.6)$$

Avec $e^{-u(i, g)\Delta t}$ la probabilité de survie de l'assuré.

- Dans la suite de cette partie nous expliquons cette valorisation

Tout d'abord précisons les différents scénarios :

Le triplet uuu traduit la branche qui représente la hausse de tous ces éléments,

Le triplet uud traduit la branche qui représente la hausse de l'actif de la compagnie et du taux d'intérêt, avec une baisse de la mortalité,

Le triplet udu la branche qui traduit la hausse de l'actif de la compagnie, la baisse du taux d'intérêt, et la hausse de la mortalité,

Contrainte du triplé croisé discret

$$(p_{uuu} + p_{udd} + p_{ddu} + p_{dud}) - (p_{uud} + p_{udu} + p_{add} + p_{duu}) = 0$$

La résolution de ce système d'équation permet d'obtenir les résultats suivants :

$$p_{uuu} = p_s(i, j, l; h)p_r(i, l)p_\mu(i, g) + \frac{\rho_{rs} + \rho_{r\mu} + \rho_{\mu s}}{8}$$

$$p_{uud} = q_s(i, j, l; h)p_r(i, l)p_\mu(i, g) + \frac{-\rho_{rs} + \rho_{r\mu} - \rho_{\mu s}}{8}$$

$$p_{udu} = p_s(i, j, l; h)p_r(i, l)q_\mu(i, g) + \frac{\rho_{rs} - \rho_{r\mu} - \rho_{\mu s}}{8}$$

$$p_{duu} = p_s(i, j, l; h)q_r(i, l)p_\mu(i, g) + \frac{-\rho_{rs} - \rho_{r\mu} + \rho_{\mu s}}{8}$$

$$p_{udd} = q_s(i, j, l; h)p_r(i, l)q_\mu(i, g) + \frac{-\rho_{rs} - \rho_{r\mu} + \rho_{\mu s}}{8}$$

$$p_{ddu} = p_s(i, j, l; h)q_r(i, l)q_\mu(i, g) + \frac{-\rho_{rs} + \rho_{r\mu} - \rho_{\mu s}}{8}$$

$$p_{dud} = q_s(i, j, l; h)q_r(i, l)p_\mu(i, g) + \frac{\rho_{rs} - \rho_{r\mu} - \rho_{\mu s}}{8}$$

$$p_{add} = q_s(i, j, l; h)q_r(i, l)q_\mu(i, g) + \frac{\rho_{r\mu} + \rho_{rs} + \rho_{\mu s}}{8}$$

Avec $\rho_{r\mu}$, ρ_{rs} et $\rho_{\mu s}$, respectivement, le coefficient de corrélation entre le taux d'intérêt et la mortalité, le coefficient de corrélation entre le taux d'intérêt et l'actif de la compagnie d'assurance, le coefficient de corrélation entre la mortalité et l'actif de la compagnie d'assurance.

Pour déterminer la valeur de ce contrat avec participation bénéficiaire, notée ici $c(i, j, l, g; h)$, il est possible de faire recours à un schéma récursif backward. Le schéma récursif backward commence à la maturité, c'est-à-dire où le paiement de la police d'assurance est donné par $c(n, j, l, g; h) = P(n; h)$, l'état de nature étant $(n, j, l, g; h)$. Si $(i + 1)\Delta t$ coïncide avec la date d'anniversaire du contrat, alors $i + 1 = \frac{k}{T}n$ avec $T = k, \dots, T$ et la valeur de la police d'assurance est obtenu comme il suit, soit,

$$c(i, j, l, g; h) = e^{-r(i, j)\Delta t} \{p_{uuu}c_{uuu} + p_{uud}c_{uud} + p_{udu}c_{udu} + p_{udd}c_{udd} + p_{add}c_{add} + p_{ddu}c_{ddu} + p_{dud}c_{dud} + p_{duu}c_{duu}\}.$$

Comme précédemment, si le contrat avec participation bénéficiaire offre une option de rachat. Dans ce cas, à chaque anniversaire, le souscripteur de l'assurance bénéficie de $P(i; h)$ s'il abandonne le contrat. La fair value du contrat est alors donné par,

$$c(i, j, l, g; h) = \max\{e^{-r(i,j)\Delta t}\{p_{uuu}c_{uuu} + p_{uud}c_{uud} + p_{udu}c_{udu} + p_{udd}c_{udd} + p_{add}c_{add} + p_{adu}c_{adu} + p_{dud}c_{dud} + p_{duu}c_{duu}\}, P(i; h)\}$$

Avec c_{uuu} , c_{uud} , c_{udu} , c_{udd} , c_{add} , c_{adu} , c_{dud} , et c_{duu} les valeurs de la police d'assurance selon chaque scénario. Pour chaque valeur de $P(i; h)$, les points successeurs prennent en compte les règles d'encours du contrat (règles d'attribution des contrats). D'où la nécessité de déterminer la participation bénéficiaire en fonction de chaque état de nature $(i, j, l, g; h)$. Soit $\tilde{B} = S(i; l) - P(i; h)$, et le taux d'intérêt crédité par la police d'assurance est donné par $\tilde{r}_p = \max\{r_G, \alpha\left(\frac{\tilde{B}}{P(i; h)} - \gamma\right)\}$. D'où le point successeur de $P(i; h)$, soit \tilde{P} , est donné par $\tilde{P} = (1 + \tilde{r}_p)P(i; h)$. Cependant \tilde{P} n'est pas présent dans $\overline{P(i+1)}$, c'est pourquoi l'interpolation linéaire est mobilisée pour chaque scénario.

Scénario uuu : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_1^{uuu})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_2^{uuu})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{uuu} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{uuu})P(i+1, h_1^{uuu}) + \omega^{uuu}P(i+1, h_2^{uuu})$$

$$c_{uuu} = (1 - \omega^{uuu})c(i+1, j^m+1, g^m+1, l^m+1; h_1^{uuu}) + \omega^{uuu}c(i+1, j^m+1, g^m+1, l^m+1; h_2^{uuu})$$

Scénario uud : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_1^{uud})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_2^{uud})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{uud} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{uud})P(i+1, h_1^{uud}) + \omega^{uud}P(i+1, h_2^{uud})$$

$$c_{uud} = (1 - \omega^{uud})c(i+1, j^m+1, g^m+1, l^m; h_1^{uud}) + \omega^{uud}c(i+1, j^m+1, g^m+1, l^m; h_2^{uud})$$

Scénario udu : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_1^{udu})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_2^{udu})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{udu} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{udu})P(i + 1, h_1^{udu}) + \omega^{udu}P(i + 1, h_2^{udu})$$

$$c_{udu} = (1 - \omega^{udu})c(i + 1, j^m + 1, g^m, l^m + 1; h_1^{udu}) + \omega^{udu}P(i + 1, j^m + 1, g^m, l^m + 1; h_2^{udu})$$

Scénario *duu* : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_1^{duu})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_2^{duu})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{duu} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{duu})P(i + 1, h_1^{duu}) + \omega^{duu}P(i + 1, h_2^{duu})$$

$$c_{duu} = (1 - \omega^{duu})c(i + 1, j^m, g^m + 1, l^m + 1; h_1^{duu}) + \omega^{duu}P(i + 1, j^m, g^m + 1, l^m + 1; h_2^{duu})$$

Scénario *udd* : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_1^{udd})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_2^{udd})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{udd} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{udd})P(i + 1, h_1^{udd}) + \omega^{udd}P(i + 1, h_2^{udd})$$

$$c_{udd} = (1 - \omega^{udd})c(i + 1, j^m + 1, g^m, l^m; h_1^{udd}) + \omega^{udd}P(i + 1, j^m + 1, g^m, l^m; h_2^{udd})$$

Scénario *ddu* : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_1^{ddu})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_2^{ddu})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{ddu} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{ddu})P(i + 1, h_1^{ddu}) + \omega^{ddu}P(i + 1, h_2^{ddu})$$

$$c_{ddu} = (1 - \omega^{ddu})c(i + 1, j^m, g^m, l^m + 1; h_1^{ddu}) + \omega^{ddu}P(i + 1, j^m, g^m, l^m + 1; h_2^{ddu})$$

Scénario *dud* : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_1^{dud})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_2^{dud})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{dud} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{dud})P(i + 1, h_1^{dud}) + \omega^{dud}P(i + 1, h_2^{dud})$$

$$c_{dud} = (1 - \omega^{dud})c(i + 1, j^m, g^m + 1, l^m; h_1^{dud}) + \omega^{dud}P(i + 1, j^m, g^m + 1, l^m; h_2^{dud})$$

Scénario *ddd* : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_1^{ddd})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_2^{ddd})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{ddd} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{ddd})P(i + 1, h_1^{ddd}) + \omega^{ddd}P(i + 1, h_2^{ddd})$$

$$c_{ddd} = (1 - \omega^{ddd})c(i + 1, j^m, g^m, l^m; h_1^{ddd}) + \omega^{ddd}c(i + 1, j^m, g^m, l^m; h_2^{ddd}).$$

En prenant en compte la probabilité de survie de l'assuré, il ressort que, si l'assuré reste en vie entre $i\Delta t$ et $i\Delta t + (i + 1)\Delta t$, alors il reçoit,

$$c^L(i, j, l, g; h) = e^{-u(i,g)\Delta t} \times \max\{e^{-r(i,j)\Delta t}\{p_{uuu}c_{uuu} + p_{uud}c_{uud} + p_{udu}c_{udu} + p_{udd}c_{udd} + p_{add}c_{add} + p_{adu}c_{adu} + p_{dud}c_{dud} + p_{duu}c_{duu}\}, P(i; h)\}$$

En revanche, si l'assuré ne survie pas entre $i\Delta t$ et $i\Delta t + (i + 1)\Delta t$, alors, le bénéficiaire ne reçoit rien, et le contrat se termine. Soit,

$$c^D(i, j, l, g; h) = 0$$

La valeur du contrat est dans ce cas égale à $c^L(i, j, l, g; h)$ qui correspond aux équations (3.5) et (3.6).

3.3. Valorisation du capital différé avec remboursement

A l'inverse du produit précédent, ici le bénéficiaire reçoit la provision à l'instant du décès de l'assuré. Deux modèles sont aussi développés ici. Selon l'indépendance ou non de la mortalité aux autres dynamiques.

3.3.1. Indépendance de la mortalité

Dans ce cas, les développements sont similaires à ceux du 3.1 et du 3.2.1. La différence étant du niveau de la fair-value. Ainsi, pour valoriser ce contrat, il faut construire un treillis trivarié qui est une recombinaison du r-treillis et du S-treillis. Le treillis est construit en générant 4 scénarios, à partir d'un état générique $(i, j, l; h)$. Chaque scénario étant un ensemble de deux éléments, tels que le premier désigne le mouvement du prix des actifs, le deuxième le mouvement de la volatilité des rendements, et le troisième le mouvement du taux d'intérêt. Cependant, dans ce contrat, le bénéficiaire reçoit la valeur de la provision à l'instant du décès.

- **Proposition 3.4.** Soit $c(i, j, l; h)$ la valeur de ce contrat, correspondant au nœud (i, j) du S-treillis, au nœud (i, l) du r-treillis, et à la $h^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\overline{P(i)}$. Si $(i + 1)\Delta t$ coïncide avec la date d'anniversaire du contrat, alors :

$$c(i, j, l; h) = e^{-\Delta t \bar{\mu}_{z+|i\Delta t|}(t+|i\Delta t|)} \left(e^{-r(i,l)\Delta t} \{ p_{uu}c_{uu} + p_{ud}c_{ud} + p_{du}c_{du} + p_{dd}c_{dd} \} \right) + e^{-r(i,j)\Delta t} (1 - e^{-\Delta t \bar{\mu}_{z+|i\Delta t|}(t+|i\Delta t|)}) P(i; h) \quad (3.7)$$

Si le contrat avec participation bénéficiaire offre une option de rachat, alors à chaque anniversaire, le souscripteur de l'assurance bénéficie de $P(i; h)$ s'il abandonne le contrat. Dans ce cas la valeur du contrat est donnée par :

$$c(i, j, l; h) = \max \{ e^{-\Delta t \bar{\mu}_{z+|i\Delta t|}(t+|i\Delta t|)} \left(e^{-r(i,l)\Delta t} \{ p_{uu}c_{uu} + p_{ud}c_{ud} + p_{du}c_{du} + p_{dd}c_{dd} \} \right) + e^{-r(i,j)\Delta t} (1 - e^{-\Delta t \bar{\mu}_{z+|i\Delta t|}(t+|i\Delta t|)}) P(i; h), P(i; h) \} \quad (3.8)$$

- Dans la suite de cette partie, nous justifions cette fair-value

Les développements sont assez similaires, à ceux des points précédents. Soit les quatre scénarios :

uu c'est le scénario de la hausse de S et de r,

ud c'est le scénario de la hausse de S et de la baisse de r

du c'est le scénario de la baisse de S et de l'évolution à la hausse de r

dd la branche qui traduit la baisse à la fois de S et de r.

Chacun de ces scénarios est accompagné des probabilités de transition, soit $p_{uu}, p_{ud}, p_{du}, p_{dd}$.

p_{uu} probabilité de transition pour le scénario uu

p_{ud} probabilité de transition pour le scénario ud

p_{du} probabilité de transition pour le scénario du

p_{dd} probabilité de transition pour le scénario dd

La détermination de ces probabilités de transitions par la résolution du système d'équations ci-après :

La somme des probabilités égales à 1 :

$$p_{uu} + p_{ud} + p_{du} + p_{dd} = 1$$

Contrainte sur la probabilité marginale du taux d'intérêt :

$$p_{uu} + p_{du} = p_r(i, l)$$

Contrainte sur la probabilité marginale du prix des actifs :

$$p_{uu} + p_{ud} = p_s(i, j, l)$$

Contrainte de la covariance entre le taux d'intérêt et le prix des actifs

$$p_{uu} - p_{ud} - p_{du} + p_{dd} = \rho$$

La résolution de ce système d'équation permet d'obtenir les résultats suivants :

$$p_{uu} = p_s(i, j, l)p_r(i, l) + \frac{\rho}{4}$$

$$p_{du} = q_s(i, j, l)p_r(i, l) - \frac{\rho}{4}$$

$$p_{ud} = p_s(i, j, l)q_r(i, l) - \frac{\rho}{4}$$

$$p_{dd} = q_s(i, j, l)q_r(i, j) + \frac{\rho}{4}$$

Avec ρ , le coefficient de corrélation entre le taux d'intérêt et l'actif de la compagnie d'assurance. Pour déterminer la valeur de ce contrat avec participation bénéficiaire, notée ici $c(i, j, l; h)$, il est possible de faire recours à un schéma récursif backward. Le schéma récursif backward commence à la maturité, c'est-à-dire où le paiement de la police d'assurance est donné par $c(n, j, l; h) = P(n; h)$, l'état de nature étant $(n, j, l; h)$.

Pour chaque valeur de $P(i; h)$, les points successeurs prennent en compte les règles d'encours du contrat (règles d'attribution des contrats). D'où la nécessité de déterminer la participation bénéficiaire en fonction de chaque état de nature $(i, j, l; h)$.

Soit $\tilde{B} = S(i; h) - P(i; h)$, et le taux d'intérêt crédité par la police d'assurance est donné par $\tilde{r}_p = \max \left\{ r_G, \alpha \left(\frac{\tilde{B}}{P(i; h)} - \gamma \right) \right\}$. D'où le point successeur de $P(i; h)$, soit \tilde{P} , est donné par $\tilde{P} = (1 + \tilde{r}_p)P(i; h)$. Cependant \tilde{P} n'est pas présent dans $\overrightarrow{P(i+1)}$, c'est pourquoi l'interpolation linéaire est mobilisée pour chaque scénario.

Scénario uu : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_1^{uu})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_2^{uu})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{uu} \in [0, 1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{uu})P(i + 1, h_1^{uu}) + \omega^{uu}P(i + 1, h_2^{uu})$$

$$c_{uu} = (1 - \omega^{uu})c(i + 1, j^m + 1, l^m + 1; h_1^{uu}) + \omega^{uu}P(i + 1, j^m + 1, l^m + 1; h_2^{uu})$$

Scénario *ud* : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_1^{ud})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_2^{ud})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{ud} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{ud})P(i + 1, h_1^{ud}) + \omega^{ud}P(i + 1, h_2^{ud})$$

$$c_{ud} = (1 - \omega^{ud})c(i + 1, j^m + 1, l^m + 1; h_1^{ud}) + \omega^{ud}P(i + 1, j^m + 1, l^m + 1; h_2^{ud})$$

Scénario *du* : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_1^{du})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_2^{du})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{du} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{du})P(i + 1, h_1^{du}) + \omega^{du}P(i + 1, h_2^{du})$$

$$c_{du} = (1 - \omega^{du})c(i + 1, j^m + 1, l^m; h_1^{du}) + \omega^{du}P(i + 1, j^m + 1, l^m; h_2^{du})$$

Scénario *dd* : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_1^{dd})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_2^{dd})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{dd} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{dd})P(i + 1, h_1^{dd}) + \omega^{dd}P(i + 1, h_2^{dd})$$

$$c_{dd} = (1 - \omega^{dd})c(i + 1, j^m + 1, l^m; h_1^{dd}) + \omega^{dd}P(i + 1, j^m + 1, l^m; h_2^{dd})$$

Scénario *dd* : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_1^{dd})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_2^{dd})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{dd} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{dd})P(i + 1, h_1^{dd}) + \omega^{dd}P(i + 1, h_2^{dd})$$

$$c_{dd} = (1 - \omega^{dd})c(i + 1, j^m, l^m; h_1^{dd}) + \omega^{dd}P(i + 1, j^m, l^m; h_2^{dd})$$

En introduisant la probabilité de survie, il ressort que si l'assuré reste en vie entre $i\Delta t$ et $i\Delta t + (i + 1)\Delta t$, alors, il reçoit :

$$c^L(i, j, l; h) = e^{-\Delta t \bar{\mu}_{z+|i\Delta t|}(t+|i\Delta t|)} \times \max\{e^{-r(i,j)\Delta t}\{p_{uu}c_{uu} + p_{ud}c_{ud} + p_{du}c_{du} + p_{dd}c_{dd}\}, P(i; h)\}$$

En revanche, si l'assuré ne survie pas entre $i\Delta t$ et $i\Delta t + (i + 1)\Delta t$, alors, le bénéficiaire reçoit le solde de la provision $P(i; h)$, et le contrat se termine.

$$\text{Soit : } c^D(i, j, l; h) = e^{-r(i,j)\Delta t} (1 - e^{-\Delta t \bar{\mu}_{z+|i\Delta t|}(t+|i\Delta t|)}) P(i; h)$$

La somme de $c^L(i, j, l; h)$ et de $c^D(i, j, l; h)$ permet de retrouver la proposition 3.4 ci-dessus.

3.3.2. Dépendance de la mortalité

La valorisation dans ce cas est similaire à celle 3.2.2. La différence intervenant dans les prestations en cas de décès de l'assuré avant l'échéance du contrat. Il est donc question, comme précédemment de considérer la dynamique de la mortalité. Elle n'est plus ici un élément déterminer hors du modèle. La valorisation du contrat va se faire cette fois-ci en recombinaison le S-treillis, le r-treillis, et le treillis de la mortalité. Le treillis qui en ressort est construit en considérant 8 scénarios, à partir d'un état générique (i, j, l, g) . Chaque scénario étant un ensemble de trois éléments, tels que le premier désigne le mouvement de l'actif de la compagnie, le deuxième le mouvement du taux d'intérêt, et le troisième le mouvement de la mortalité.

- **Proposition 3.5.** Soit $c(i, j, l; h)$ la valeur de ce contrat, correspondant au nœud (i, j) du S-treillis, au nœud (i, l) du r-treillis, au nœud (i, g) du u-treillis, et à la $h^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\overline{P(i)}$. Si $(i + 1)\Delta t$ coïncide avec la date d'anniversaire du contrat, alors :

$$c(i, j, l, g; h) = e^{-u(i,g)\Delta t} (e^{-r(i,l)\Delta t} \{p_{uuu}c_{uuu} + p_{uud}c_{uud} + p_{udu}c_{udu} + p_{udd}c_{udd} + p_{add}c_{add} + p_{adu}c_{adu} + p_{dud}c_{dud} + p_{duu}c_{duu}\}) + e^{-r(i,j)\Delta t} (1 - e^{-u(i,g)\Delta t}) P(i; h) \quad (3.9)$$

Si le contrat avec participation bénéficiaire offre une option de rachat, alors à chaque anniversaire, le souscripteur de l'assurance bénéficie de $P(i; h)$ s'il abandonne le contrat. Dans ce cas la valeur du contrat est donnée par :

$$c(i, j, l, g; h) = \max\{e^{-\Delta t \bar{\mu}_{z+|i\Delta t|}(t+|i\Delta t|)} (e^{-r(i,l)\Delta t} \{p_{uu}c_{uu} + p_{ud}c_{ud} + p_{du}c_{du} + p_{dd}c_{dd}\}) + e^{-r(i,j)\Delta t} (1 - e^{-\Delta t \bar{\mu}_{z+|i\Delta t|}(t+|i\Delta t|)}) P(i; h), P(i; h)\} \quad (3.10)$$

Contrainte de la covariance entre l'actif et le taux d'intérêt

$$(p_{uuu} + p_{ddd} + p_{uud} + p_{add}) - (p_{udu} + p_{udd} + p_{dud} + p_{duu}) = \rho_{sr}$$

Contrainte de la covariance entre l'actif et la mortalité

$$(p_{uuu} + p_{ddd} + p_{udu} + p_{dud}) - (p_{uud} + p_{duu} + p_{add} + p_{udd}) = \rho_{s\mu}$$

Contrainte de la covariance entre le taux d'intérêt et la mortalité

$$(p_{uuu} + p_{ddd} + p_{duu} + p_{udd}) - (p_{uud} + p_{udu} + p_{add} + p_{dud}) = \rho_{r\mu}$$

Contrainte du triplé croisé discret

$$(p_{uuu} + p_{udd} + p_{add} + p_{dud}) - (p_{uud} + p_{udu} + p_{add} + p_{duu}) = 0$$

La résolution de ce système d'équation permet d'obtenir les résultats suivants :

$$p_{uuu} = p_s(i, j, l; h)p_r(i, l)p_\mu(i, g) + \frac{\rho_{rs} + \rho_{r\mu} + \rho_{\mu s}}{8}$$

$$p_{uud} = q_s(i, j, l; h)p_r(i, l)p_\mu(i, g) + \frac{-\rho_{rs} + \rho_{r\mu} - \rho_{\mu s}}{8}$$

$$p_{udu} = p_s(i, j, l; h)p_r(i, l)q_\mu(i, g) + \frac{\rho_{rs} - \rho_{r\mu} - \rho_{\mu s}}{8}$$

$$p_{duu} = p_s(i, j, l; h)q_r(i, l)p_\mu(i, g) + \frac{-\rho_{rs} - \rho_{r\mu} + \rho_{\mu s}}{8}$$

$$p_{udd} = q_s(i, j, l; h)p_r(i, l)q_\mu(i, g) + \frac{-\rho_{rs} - \rho_{r\mu} + \rho_{\mu s}}{8}$$

$$p_{add} = p_s(i, j, l; h)q_r(i, l)q_\mu(i, g) + \frac{-\rho_{rs} + \rho_{r\mu} - \rho_{\mu s}}{8}$$

$$p_{dud} = q_s(i, j, l; h)q_r(i, l)p_\mu(i, g) + \frac{\rho_{rs} - \rho_{r\mu} - \rho_{\mu s}}{8}$$

$$p_{ddd} = q_s(i, j, l; h)q_r(i, l)q_\mu(i, g) + \frac{\rho_{r\mu} + \rho_{rs} + \rho_{\mu s}}{8}$$

Avec $\rho_{r\mu}$, ρ_{rs} et $\rho_{\mu s}$, respectivement, le coefficient de corrélation entre le taux d'intérêt et la mortalité, le coefficient de corrélation entre le taux d'intérêt et l'actif de la compagnie d'assurance, le coefficient de corrélation entre la mortalité et l'actif de la compagnie d'assurance.

Pour déterminer la valeur de ce contrat avec participation bénéficiaire, notée ici $c(i, j, l, g; h)$, il est possible de faire recours à un schéma récursif backward. Le schéma récursif backward

commence à la maturité, c'est-à-dire où le paiement de la police d'assurance est donné par $c(n, j, l, g; h) = P(n; h)$, l'état de nature étant $(n, j, l, g; h)$.

Pour chaque valeur de $P(i; h)$, les points successeurs prennent en compte les règles d'encours du contrat (règles d'attribution des contrats). D'où la nécessité de déterminer la participation bénéficiaire en fonction de chaque état de nature $(i, j, l, g; h)$. Soit $\tilde{B} = S(i; l) - P(i; h)$, et le taux d'intérêt crédité par la police d'assurance est donné par $\tilde{r}_p = \max \left\{ r_G, \alpha \left(\frac{\tilde{B}}{P(i; h)} - \gamma \right) \right\}$. D'où le point successeur de $P(i; h)$, soit \tilde{P} , est donné par $\tilde{P} = (1 + \tilde{r}_p)P(i; h)$. Cependant \tilde{P} n'est pas présent dans $\overrightarrow{P(i+1)}$, c'est pourquoi l'interpolation linéaire est mobilisée pour chaque scénario.

Scénario *uuu* : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_1^{uuu})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_2^{uuu})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{uuu} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{uuu})P(i+1, h_1^{uuu}) + \omega^{uuu}P(i+1, h_2^{uuu})$$

$$c_{uuu} = (1 - \omega^{uuu})c(i+1, j^m+1, g^m+1, l^m+1; h_1^{uuu}) + \omega^{uuu}c(i+1, j^m+1, g^m+1, l^m+1; h_2^{uuu})$$

Scénario *uud* : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_1^{uud})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_2^{uud})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{uud} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{uud})P(i+1, h_1^{uud}) + \omega^{uud}P(i+1, h_2^{uud})$$

$$c_{uud} = (1 - \omega^{uud})c(i+1, j^m+1, g^m+1, l^m; h_1^{uud}) + \omega^{uud}c(i+1, j^m+1, g^m+1, l^m; h_2^{uud})$$

Scénario *udu* : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_1^{udu})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i+1, h_2^{udu})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{udu} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{udu})P(i+1, h_1^{udu}) + \omega^{udu}P(i+1, h_2^{udu})$$

$$c_{udu} = (1 - \omega^{udu})c(i+1, j^m+1, g^m, l^m+1; h_1^{udu}) + \omega^{udu}c(i+1, j^m+1, g^m, l^m+1; h_2^{udu})$$

Scénario *duu* : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_1^{duu})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_2^{duu})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{duu} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{duu})P(i + 1, h_1^{duu}) + \omega^{duu}P(i + 1, h_2^{duu})$$

$$c_{duu} = (1 - \omega^{duu})c(i + 1, j^m, g^m + 1, l^m + 1; h_1^{duu}) + \omega^{duu}c(i + 1, j^m, g^m + 1, l^m + 1; h_2^{duu})$$

Scénario *udd* : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_1^{udd})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_2^{udd})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{udd} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{udd})P(i + 1, h_1^{udd}) + \omega^{udd}P(i + 1, h_2^{udd})$$

$$c_{udd} = (1 - \omega^{udd})c(i + 1, j^m + 1, g^m, l^m; h_1^{udd}) + \omega^{udd}c(i + 1, j^m + 1, g^m, l^m; h_2^{udd})$$

Scénario *ddu* : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_1^{ddu})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_2^{ddu})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{ddu} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{ddu})P(i + 1, h_1^{ddu}) + \omega^{ddu}P(i + 1, h_2^{ddu})$$

$$c_{ddu} = (1 - \omega^{ddu})c(i + 1, j^m, g^m, l^m + 1; h_1^{ddu}) + \omega^{ddu}c(i + 1, j^m, g^m, l^m + 1; h_2^{ddu})$$

Scénario *dud* : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_1^{dud})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_2^{dud})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{dud} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{dud})P(i + 1, h_1^{dud}) + \omega^{dud}P(i + 1, h_2^{dud})$$

$$c_{dud} = (1 - \omega^{dud})c(i + 1, j^m, g^m + 1, l^m; h_1^{dud}) + \omega^{dud}c(i + 1, j^m, g^m + 1, l^m; h_2^{dud})$$

Scénario *ddd* : le plus grand saut inférieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_1^{ddd})$ et le plus petit saut supérieur à \tilde{P} est donné par $P(i + 1, h_2^{ddd})$. D'où en usant de l'interpolation linéaire sur ces deux sauts adjacents, il en ressort, avec $\omega^{ddd} \in [0,1]$,

$$\tilde{P} = (1 - \omega^{ddd})P(i + 1, h_1^{ddd}) + \omega^{ddd}P(i + 1, h_2^{ddd})$$

$$c_{ddd} = (1 - \omega^{ddd})c(i + 1, j^m, g^m, l^m; h_1^{ddd}) + \omega^{ddd}P(i + 1, j^m, g^m, l^m; h_2^{ddd}).$$

En prenant en compte la probabilité de survie de l'assuré, il ressort que, si l'assuré reste en vie entre $i\Delta t$ et $i\Delta t + (i + 1)\Delta t$, alors, il reçoit,

$$c^L(i, j, l, g; h) = e^{-u(i, g)\Delta t} \times \max\{e^{-r(i, j)\Delta t}\{p_{uuu}c_{uuu} + p_{uud}c_{uud} + p_{udu}c_{udu} + p_{udd}c_{udd} + p_{add}c_{add} + p_{adu}c_{adu} + p_{dud}c_{dud} + p_{duu}c_{duu}\}, P(i; h)\}$$

En revanche, si l'assuré ne survie pas entre $i\Delta t$ et $i\Delta t + (i + 1)\Delta t$, alors, le bénéficiaire reçoit le solde de la provision $P(i; h)$, et le contrat se termine.

$$\text{Soit : } c^D(i, j, l, g; h) = e^{-r(i, j)\Delta t}(1 - e^{-u(i, g)\Delta t})P(i; h)$$

La somme $c^L(i, j, l, g; h) + c^D(i, j, l, g; h)$ permet ainsi de retrouver les équations (3.9) et (3.10) de la proposition 3.5 ci-dessus.

Chapitre 4. Application numérique

Ce chapitre présente quelques simulations numériques des modèles précédents. Les simulations sont faites à partir des éléments de codages des travaux de Costabile et al. (2021). Cependant, le langage de programmation utilisé dans ce travail est le langage R, tandis que Costabile et al. (2021) ont utilisé le langage C. Par ailleurs, les auteurs expliquent que plusieurs éléments influencent le temps de calcul, notamment le choix du langage de programmation, la puissance de la machine et le choix de n . Les simulations de ce travail sont effectuées avec un ordinateur dont le processeur a les caractéristiques suivantes : Intel(R) Core(TM) i7-8650U CPU @ 1.90GHz 2.11 GHz. Une mémoire RAM de 8 Go, un système d'exploitation 64 bits, sous Windows 11. Les modèles de la première section donnent des résultats, en moyenne, en moins de 30 secondes avec $n = 20$. Plus n est élevé, plus le temps de calcul est élevé. Et au de-là de $n = 100$, certaines matrices deviennent trop lourdes pour le système et ne donne pas de résultats. Pour de la fluidité dans les résultats, le travail est effectué avec $n = 20$. Cependant, même avec $n = 20$, les modèles de la deuxième section mettent un peu plus de temps à tourner. Soit en moyenne plus de 30 secondes. La première section présente les résultats des modèles avec une indépendance entre la mortalité et les hypothèses financières, et la seconde section, les résultats avec l'hypothèse d'une dépendance entre ces dernières.

4.1. Indépendance de la mortalité

Les simulations sont effectuées avec les hypothèses suivantes : $S(0) = 100$, $B(0) = 0$, $r(0) = 0.08$, $n = 20$, $T = 5$, $r_G = 4.5\%$, $\sigma_s = 0.15$, $a = 0.01$, $\delta = 0.3$, $\theta = 0.08$, $\sigma_r = 0.15$, $\rho = -0.3$, et $z = 70$. Les résultats dans le tableau représentent la valeur du contrat avec participation bénéficiaire sans option de rachat, et la valeur du contrat avec participation bénéficiaire et option de rachat.

La valeur du haut est ainsi la valeur du contrat sans option de rachat, et celle du bas est la valeur du contrat avec option de rachat. Les hypothèses de mortalités retenues sont celles de Costabile et al. (2021). Les résultats sont présentés selon différentes valeurs du taux tampon cible γ et de la fraction α du surplus, par rapport à γ , qui s'ajoute au taux garantie r_G . Chaque tableau de résultats présente successivement les résultats pour les trois produits.

Tableau 1. Indépendance de la mortalité avec un taux garanti de 4.5%

$S(0) = 100$ $B(0) = 0$ $n = 20$ $T = 5$ $r_G = 4.5\%$ $\sigma_s = 0.15$ $a = 0.01$ $\delta = 0.3$ $\theta = 0.08$ $\sigma_r = 0.15$ $\rho = -0.3$ $z = 70$						
	$\gamma = 0$	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.25$
Bon de capitalisation						
$\alpha = 0$	82.81 120.45	82.81 120.45	82.81 120.45	82.81 120.45	82.81 120.45	82.81 120.45
$\alpha = 0.5$	92.03 179.95	90.39 174.52	88.46 169.37	87.47 164.93	86.5 160.63	85.77 156.46
$\alpha = 1$	97.03 220.46	94.68 212.5	92.46 205.08	90.34 198.14	88.92 191.79	87.54 185.98
Capital différé sans remboursement						
$\alpha = 0$	79.1 120.45	79.1 120.45	79.1 120.45	79.1 120.45	79.1 120.45	79.1 120.45
$\alpha = 0.5$	87.9 179.95	86.34 174.52	84.49 169.37	83.55 164.93	82.62 160.63	81.92 156.46
$\alpha = 1$	92.68 220.46	90.44 212.	88.31 205.08	86.29 198.14	84.93 191.79	83.62 185.98
Capital différé avec remboursement						
$\alpha = 0$	83.17 120.45	83.17 120.45	83.17 120.45	83.17 120.45	83.17 120.45	83.17 120.45
$\alpha = 0.5$	92.28 179.95	90.67 174.52	88.75 169.37	87.78 164.93	86.83 160.63	86.11 156.46
$\alpha = 1$	97.28 220.46	94.96 212.5	92.76 205.08	90.64 198.14	89.25 191.79	87.9 185.98

Les tableaux 1 à 3 montrent que l'option de rachat permet d'augmenter significativement la valeur du contrat.

Tableau 2. Indépendance de la mortalité avec un taux garanti de 3.5%

$S(0) = 100$ $B(0) = 0$ $n = 20$ $T = 5$ $r_G = 3.5\%$ $\sigma_s = 0.15$ $a = 0.01$ $\delta = 0.3$ $\theta = 0.08$ $\sigma_r = 0.15$ $\rho = -0.3$ $z = 70$						
$r(0) = 0.08$	$\gamma = 0$	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.25$
Bon de capitalisation						
$\alpha = 0$	79.69 115.91	79.69 115.91	79.69 115.91	79.69 115.91	79.69 115.91	79.69 115.91
$\alpha = 0.5$	90.37 179.82	88.46 174.42	86.93 169.27	85.27 164.56	84.31 160.3	83.38 156.17
$\alpha = 1$	94.97 220.46	92.65 212.5	90.45 205.08	88.37 198.13	86.73 191.7	85.38 185.85
Capital différé sans remboursement						
$\alpha = 0$	76.11 115.91	76.11 115.91	76.11 115.91	76.11 115.91	76.11 115.91	76.11 115.91
$\alpha = 0.5$	86.32 179.82	84.49 174.42	83.03 169.27	81.44 164.56	80.53 160.3	79.64 156.17
$\alpha = 1$	90.71 220.46	88.49 212.5	86.39 205.08	84.4 198.13	82.84 191.7	81.55 185.85
Capital différé avec remboursement						
$\alpha = 0$	80.1 115.91	80.1 115.91	80.1 115.91	80.1 115.91	80.1 115.91	80.1 115.91
$\alpha = 0.5$	90.64 179.82	88.76 174.42	87.24 169.27	85.6 164.56	84.67 160.3	83.75 156.17
$\alpha = 1$	95.25 220.46	92.96 212.5	90.79 205.08	88.71 198.13	87.09 191.7	85.76 185.85

Cette valeur est d'autant plus grande que la compagnie d'assurance est disposée à partager une fraction plus élevée de son surplus de bonus. Les résultats montrent aussi que si $\alpha = 0$, c'est-à-dire que la compagnie d'assurance ne partage pas le surplus de bonus, alors la valeur du contrat reste stable, peu importe les valeurs de γ . Dans ce cas, le taux garanti n'est jamais augmenté. Plus ce α augmente, plus la valeur du contrat augmente aussi. Cependant, la valeur du contrat, pour $\alpha > 0$, va diminuer avec le taux cible de la compagnie d'assurance. Ainsi, plus la compagnie d'assurance vise un ratio $\frac{B(k-1)}{P(k-1)}$ élevé, plus la valeur du contrat est faible. Dans ce cas, en effet, la fraction du bonus partagée est beaucoup plus faible, le taux $r_p(k)$ n'est donc que peu augmenté.

Tableau 3. Indépendance de la mortalité avec un taux garanti de 5.5%

$S(0) = 100$ $B(0) = 0$ $n = 20$ $T = 5$ $r_G = 5.5\%$ $\sigma_s = 0.15$ $a = 0.01$ $\delta = 0.3$ $\theta = 0.08$ $\sigma_r = 0.15$ $\rho = -0.3$ $z = 70$						
$r(0) = 0.08$	$\gamma = 0$	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.25$
Bon de capitalisation						
$\alpha = 0$	86.03 125.13	86.03 125.13	86.03 125.13	86.03 125.13	86.03 125.13	86.03 125.13
$\alpha = 0.5$	93.99 180.07	92.84 174.63	90.74 169.8	89.74 165.31	88.9 160.96	88.17 156.75
$\alpha = 1$	99.15 220.46	96.77 212.5	94.51 205.08	92.61 198.19	91.17 191.87	90.15 186.11
Capital différé sans remboursement						
$\alpha = 0$	82.17 125.13	82.17 125.13	82.17 125.13	82.17 125.13	82.17 125.13	82.17 125.13
$\alpha = 0.5$	89.78 180.07	87.94 174.63	86.67 169.8	85.71 165.31	84.91 160.96	84.22 156.75
$\alpha = 1$	94.7 220.46	92.42 212.5	90.27 205.08	88.46 198.19	87.08 191.87	86.11 186.11
Capital différé avec remboursement						
$\alpha = 0$	86.34 125.13	86.34 125.13	86.34 125.13	86.34 125.13	86.34 125.13	86.34 125.13
$\alpha = 0.5$	94.21 180.07	93.01 174.63	91 169.8	90.01 165.31	89.19 160.96	88.49 156.75
$\alpha = 1$	99.36 220.46	97.01 212.5	94.77 205.08	92.88 198.19	91.46 191.87	90.46 186.11

En ce qui concerne les trois produits, les résultats varient selon le produit. Tout d'abord, le produit 1 qui est un pure produit financier a une valeur plus élevée que le deuxième produit. Il faut dire que le deuxième produit présente quand même le risque pour le bénéficiaire de tout perdre, si l'assuré décédait avant l'échéance. Cependant, le troisième produit, qui offre la possibilité d'obtenir la provision en cas de décès avant l'échéance a une valeur plus élevée. La valeur des différents produits sont aussi évaluées selon différentes valeurs du taux garanti. Ainsi le tableau 1 présente les calculs avec un taux garanti de 4.5%, le tableau 2 les résultats avec un taux garanti de 3.5% et le tableau 3 avec un taux garanti de 5.5%.

Tableau 4. Valeur des contrats selon l'âge de l'assuré

$S(0) = 100 B(0) = 0 n = 100 T = 5 r_G = 4.5\% \sigma_s = 0.15 a = 0.01 \delta = 0.3 \theta = 0.08 \sigma_r = 0.15 \rho = -0.3$ $z = 70 \gamma = 0.1 r(0) = 0.08$			
	$z = 70$	$z = 75$	$z = 80$
$\alpha = 0.5$	84.49 169.37	81.42 169.37	75.4 169.37

Il en ressort que la valeur du contrat évolue dans le même sens que le taux garanti. Plus ce taux est élevé, plus la valeur du contrat est également élevée. Néanmoins, la prise en compte de l'option de rachat, rend le contrat peu sensible à la variation de ce taux. Le tableau 4 permet d'analyser la manière dont la valeur du contrat varie avec l'âge de l'assuré, pour le produit 2, par exemple. Il en ressort que plus l'âge de l'assuré est élevé, plus le contrat a une faible valeur. Ce qui s'explique par le fait que le risque de mortalité augmente avec l'âge.

4.2. Dépendance de la mortalité

Les simulations sont effectuées avec les hypothèses suivantes : $S(0) = 100 B(0) = 0 r(0) = 0.08 u(0) = 0.014535 n = 100 T = 10 r_G = 4.5\% \sigma_s = 0.15 a = 0.01 \delta_r = 0.3 \delta_u = 0.3 \theta_r = 0.08 \theta_u = 0.08 \sigma_r = 0.15 \sigma_u = 0.15 \rho_{rs} = -0.3 \rho_{us} = -0.3 \rho_{ur} = 0.3, \rho = -0.3$. Tout comme précédemment, dans les tableaux suivants la valeur du haut représente la valeur du contrat sans option de rachat, et celle du bas la valeur du contrat avec option de rachat. Les résultats sont présentés selon différentes valeurs de la taux tampon cible γ et de la fraction α du surplus, par rapport à γ , qui s'ajoute au taux garantie r_G . Chaque tableau de résultats présente successivement les résultats pour les trois produits.

Tableau 5. Dépendance de la mortalité avec un taux garanti de 4.5%

$S(0) = 100 B(0) = 0 r(0) = 0.08 u(0) = 0.014535 n = 100 T = 10 r_G = 4.5\% \sigma_s = 0.15 a = 0.01 \delta_r = 0.3 \delta_u = 0.3 \theta_r = 0.08 \theta_u = 0.08 \sigma_r = 0.15 \sigma_u = 0.15 \rho_{rs} = -0.3 \rho_{us} = -0.3 \rho_{ur} = 0.3$						
	$\gamma = 0$	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.25$
Produit 2						
$\alpha = 0$	77.27 120.45	77.27 120.45	77.27 120.45	77.27 120.45	77.27 120.45	77.27 120.45
$\alpha = 0.5$	86.51 179.95	84.77 174.52	82.81 169.37	81.66 164.93	80.72 160.63	80.04 156.46
$\alpha = 1$	93.96 220.46	90.93 212.5	88.34 205.08	86.09 198.14	84.21 191.79	82.82 185.98
Produit 3						
$\alpha = 0$	83.58 120.45	83.58 120.45	83.58 120.45	83.58 120.45	83.58 120.45	83.58 120.45
$\alpha = 0.5$	93.19 179.95	91.38 174.52	89.33 169.37	88.15 164.93	87.18 160.63	86.47 156.46
$\alpha = 1$	100.97 220.46	97.82 212.5	95.13 205.08	92.75 198.14	90.81 191.79	89.38 185.98

Tableau 6. Dépendance de la mortalité avec un taux garanti de 3.5%

$S(0) = 100$ $B(0) = 0$ $r(0) = 0.08$ $u(0) = 0.014535$ $n = 100$ $T = 10$ $r_G = 3.5\%$ $\sigma_s = 0.15$ $a = 0.01$ $\delta_r = 0.3$ $\delta_u = 0.3$ $\theta_r = 0.08$ $\theta_u = 0.08$ $\sigma_r = 0.15$ $\sigma_u = 0.15$ $\rho_{rs} = -0.3$ $\rho_{us} = -0.3$ $\rho_{ur} = 0.3$						
	$\gamma = 0$	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.25$
Produit 2						
$\alpha = 0$	74.36 115.91	74.36 115.91	74.36 115.91	74.36 115.91	74.36 115.91	74.36 115.91
$\alpha = 0.5$	85.29 179.82	83.23 174.42	81.59 169.27	79.85 164.56	78.73 160.3	77.81 156.17
$\alpha = 1$	92.85 220.46	89.76 212.5	86.98 205.08	84.65 198.13	82.72 191.7	80.95 185.85
Produit 3						
$\alpha = 0$	80.53 115.91	80.53 115.91	80.53 115.91	80.53 115.91	80.53 115.91	80.53 115.91
$\alpha = 0.5$	91.89 179.82	89.76 174.42	88.04 169.27	86.24 164.56	85.09 160.3	84.14 156.17
$\alpha = 1$	99.79 220.46	96.58 212.5	93.69 205.08	91.23 198.13	89.23 191.7	87.41 185.85

Les résultats évoluent de la même manière que dans le cas de l'indépendance de la mortalités aux hypothèses financières.

Tableau 7. Dépendance de la mortalité avec un taux garanti de 5.5%

$S(0) = 100$ $B(0) = 0$ $r(0) = 0.08$ $u(0) = 0.014535$ $n = 100$ $T = 10$ $r_G = 5.5\%$ $\sigma_s = 0.15$ $a = 0.01$ $\delta_r = 0.3$ $\delta_u = 0.3$ $\theta_r = 0.08$ $\theta_u = 0.08$ $\sigma_r = 0.15$ $\sigma_u = 0.15$ $\rho_{rs} = -0.3$ $\rho_{us} = -0.3$ $\rho_{ur} = 0.3$						
	$\gamma = 0$	$\gamma = 0.05$	$\gamma = 0.1$	$\gamma = 0.15$	$\gamma = 0.2$	$\gamma = 0.25$
Produit 2						
$\alpha = 0$	80.27 125.13	80.27 125.13	80.27 125.13	80.27 125.13	80.27 125.13	80.27 125.13
$\alpha = 0.5$	88.08 180.07	86.42 174.63	84.69 169.8	83.74 165.31	83.01 160.96	82.44 156.75
$\alpha = 1$	95.14 220.46	92.27 212.5	89.8 205.08	87.64 198.19	86.13 191.87	84.91 186.11
Produit 3						
$\alpha = 0$	86.71 125.13	86.71 125.13	86.71 125.13	86.71 125.13	86.71 125.13	86.71 125.13
$\alpha = 0.5$	94.84 180.07	93.1 174.63	91.31 169.8	90.34 165.31	89.58 160.96	89 156.75
$\alpha = 1$	102.22 220.46	99.24 212.5	96.66 205.08	94.39 198.19	92.84 191.87	91.58 186.11

La valeur des contrats suit la même évolution que le taux garanti. Bien que dans l'ensemble, la prise en compte de la dynamique de la mortalité donne des valeurs plus faibles. Le bon de capitalisation n'est pas considéré ici, car il ne dépend pas de la mortalité.

Conclusion générale

L'objectif de ce travail était de déterminer la fair value d'un contrat d'assurance vie traditionnel grâce aux modèles binomiaux multivariés. Pour y parvenir, le travail s'est structuré en quatre chapitres. Le chapitre 1 a permis de décrire le contrat. Notamment, présenter trois produits. Un bon de capitalisation où la mortalité n'intervient pas. Ici, le décès de l'assuré n'impacte pas son capital à l'échéance qui est remis au bénéficiaire. Un deuxième produit où le bénéficiaire ne reçoit rien en cas de décès de l'assuré avant l'échéance, c'est-à-dire un capital différé sans remboursement du capital. Et un troisième produit où le bénéficiaire reçoit la provision si l'assuré décède avant l'échéance, soit un capital différé avec remboursement du capital. Le deuxième chapitre a permis de discrétiser les différentes dynamiques en présence dans le modèle. Autrement, le modèle continu obtenu n'était pas aisé à résoudre. Le troisième chapitre porte sur la valorisation du contrat, grâce à une recombinaison des différents arbres binomiaux discrétisés au chapitre 2. La valorisation tient compte de chaque type de produit présenté. Le quatrième chapitre est celui des simulations numériques. Celui-ci a permis de constater que la valeur du contrat avec la prise en compte de la dynamique stochastique de la mortalité est plus faible. Ce chapitre a également permis de constater que plus une compagnie d'assurance est à même de partager son surplus de bonus, plus la valeur du contrat est élevée. De même, plus une compagnie a un taux tampon cible élevé, moins la valeur du contrat est élevée. La présente étude ne traite néanmoins pas de l'hypothèse de la dynamique stochastique de la volatilité des rendements. S'intéresser à cette hypothèse supplémentaire, pourrait permettre d'affiner les résultats fournis par cette méthode.

Bibliographie

- Bauer, D., Bergmann, D., & Kiesel, R. (2010). On the risk-neutral valuation of life insurance contracts with numerical methods in view. *ASTIN Bulletin: The Journal of the IAA*, 40(1), 65-95.
- Costabile, M., & Massabó, I. (2010). A simplified approach to approximate diffusion processes widely used in finance. *The Journal of Derivatives*, 17(3), 65-85.
- Costabile, M., Massabó, I., Russo, E., & Staino, A. (2021). A lattice approach to evaluate participating policies in a stochastic interest rate framework. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 385, 1-18.
- De Angelis, P., De Marchis, R., Martire, A. L., & Russo, E. (2022). A flexible lattice framework for valuing options on assets paying discrete dividends and variable annuities embedding GMWB riders. *Decisions in Economics and Finance*, 45(1), 415-446.
- Grosen, A., & Jorgensen, P. L. (2000). Fair valuation of life insurance liabilities: the impact of interest rate guarantees, surrender options, and bonus policies. *Insurance: Mathematics and Economics*, 26(1), 37-57.
- Russo, E., & Staino, A. (2018a). A Flexible Lattice Model for Pricing Contingent Claims under Multiple Risk Factors. *The Journal of Derivatives*, 26(1), 27-44.
- Russo, E., & Staino, A. (2018b). A Lattice-Based Model for Evaluating Bonds and Interest-Sensitive Claims Under Stochastic Volatility. *International Journal of Theoretical and Applied Finance*, 21(04), 1-19.
- Zeddouk, F., & Devolder, P. (2020). Mean reversion in stochastic mortality: why and how?. *European Actuarial Journal*, 10(2), 499-525.

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
Faculté des sciences

Place des sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/sc