Faculté des sciences

Risque de longévité et coût du capital sous Solvency II.

Auteur : Beaudelaire NOUEMECHI

Promoteur : Pierre DEVOLDER

Lectrice : Cindy COURTOIS

Année académique 2019-2020

Preface.

This dissertation has been prepared in partial fulfillment of the requirements for the master degree in actuarial sciences delivered by the Université Catholique de Louvain.

Abstract.

The life insurance and pension sectors are facing many longevity risk challenges more than in the past. Indeed, the extension of the life span, although representing an indicator of development and progress, generates a risk relating to colossal financial stakes. Insurers offering life annuities are forced to build up more capital to cope with this long-term risk. As a result, it is difficult for them to offer more advantageous annuities to their members while maintaining their solvency. This capital requirement is reinforced by a context of unfavorable economic situation preventing technical and financial pooling, as well as by the implementation of the new European Solvency II Directive. Risk transfer solutions are being developed to address this issue including longevity swaps, a form of reinsurance.

Focusing only on longevity risk, we assess the cost of holding capital under Solvency II via the calculation of the SCR (Solvency Capital Requirement) and the cost of hedging longevity risk via longevity swaps. A longevity swap contract is structured so that the insurer receives a variable leg based on the actual mortality of the insured in exchange for a fixed payment, incorporating a risk premium and agreed at the inception of the contract. Through this mechanism, the insurer transfers the risk of future mortality improvements within its portfolio. However, the pricing of longevity swaps is made difficult because the underlying assets are not traded. Under certain assumptions, including the use of a reasonable market price for longevity risk, longevity swaps covering advanced ages (shown in chapter 6), have a higher cost than holding the capital under Solvency II. The phenomenon is reversed at earlier ages.

Keywords : Longevity, annuities, longevity swap, solvency, securities, reinsurance.

Acknowledgment.

Je voudrais exprimer ma gratitude à tous les professeurs du Master en Sciences Actuarielles de l'UCLouvain et en particulier à l'un de ses piliers, qui est également le promoteur de ce travail en la personne du Professeur Pierre Devolder pour son aide et ses conseils.

Je remercie mes parents M. Tchatchouang Joseph et Mme Tchatchouang Yvonne qui n'ont jamais cessé de me soutenir tout au long de ce cycle de master, tant financièrement que moralement. Je remercie mes frères, ma sœur et ma famille pour leurs encouragements et leur affection.

Je voudrais exprimer ma gratitude à Olive Matuekam pour son soutien indéfectible et son amour pour moi.

Enfin, je tiens à remercier toute ma famille et mes amis qui ont toujours cru en moi. Par vos encouragements, vous me donnez la force d'être une meilleure version de moi-même au quotidien.

Table des matières

Table des figures

Liste des tableaux

Chapitre 1

Introduction

L'augmentation de l'espérance de vie a été remarquable dans les pays développés au cours des dernières décennies. Cette augmentation de l'espérance de vie, associée au vieillissement de la population, s'accompagne de nombreux problèmes de réforme et de financement des systèmes de sécurité sociale et de retraite : en effet, les individus se trouvent dans une situation où ils auraient besoin de plus de revenus pour survivre après la retraite ; les pensions versées par le secteur public n'étant pas assez consistantes pour répondre à leurs besoins. Des solutions sont proposées par le secteur privé des assurances, y compris les régimes complémentaires de retraite, dont la plupart sont des produits de rentes viagères.

Ce type de contrat expose l'assureur à un risque important, celui du fait que les assurés vivent beaucoup plus longtemps que prévu par les tables de mortalité utilisées pour la tarification et/ou le financement. En effet, dans un contrat de rente viagère, l'assureur, en contrepartie d'une cotisation unique ou périodique, s'engage à verser des rentes à l'assuré dès le début de sa retraite jusqu'à son décès. La particularité de ces contrats est qu'ils fixent les cotisations à verser par l'assuré au moment de la souscription du contrat, sans possibilité de révision, et qu'ils versent des rentes qui peuvent faire l'objet de revalorisations, ce qui peut entraîner des pertes techniques importantes pour l'assureur si le risque de décès est mal évalué.

Face à ce risque encouru par l'assureur, une solution pour limiter sa prise de risque ou optimiser l'allocation des fonds propres réglementaires consiste à transférer tout ou partie du risque. Plusieurs outils de transfert du risque de longévité sont cités dans la littérature : il s'agit notamment des solutions traditionnelles telles que le quote-part, et des solutions modernes telles que le swap de longévité, sur lequel nous reviendrons au chapitre 3 du présent mémoire.

Un swap de longévité est un accord entre deux parties visant à échanger des paiements fixes contre des paiements variables, qui varient en fonction de l'expérience de mortalité d'une population de référence sous-jacente. Les swaps de longévité sont pour la plupart structurés comme des opérations de réassurance. Les paiements variables du swap correspondent aux résultats de mortalité de la population assurée. Comme nous le verrons chapitre 1, le risque de longévité fait courir à l'assureur ou au fond de pension trois sous-risques : le risque de base, le risque idiosyncratique et le risque systématique. Bien que le risque de base ne soit pas un problème, l'asymétrie de l'information et l'aléa moral qui en découlent peuvent accroître le risque et le coût associés aux swaps de longévité sur mesure mais pas uniquement car le risque de contrepartie peut également faire accroitre le coût associé aux swaps de longévité.

Contrairement à un IRS [1](Interest Rate Swap), il est plus difficile de tarifer un swap de longévité pour la simple raison que les actifs sous-jacents ne sont pas échangés ; il s'agit des rentes viagères et des polices d'assurance vie par exemple. Aussi, à nos jours aucun modèle standard de tarification d'un swap de longévité n'existe. Toutefois, on compte parmi les alternatives de tarification des titres liés à la longévité : la méthode de transformation de Wang, la méthode du ratio de Sharpe, la tarification risque neutre. Cette dernière alternative répond à notre problématique dans le sens où elle convient aux contrats d'assurance vie souscrits sur plusieurs cohortes et âges. Les modèles risque neutre peuvent saisir de façon constante la dépendance entre les différentes polices du portefeuille d'un assureur (Schrager, 2006 ; Wills et Sherris, 2011).

La directive Solvabilité II incite désormais les assureurs vie à inscrire le risque de longévité dans leur bilan, les contraignant ainsi à détenir suffisamment de capital pour y faire face ; plutôt que de le transférer via la réassurance ou les marchés financiers. Ces deux approches nous amènent au problème qui est le notre dans ce mémoire : Pour un assureur vie commercialisant des produits de rentes viagères, est-il plus rentable de detenir plus de capital pour se couvrir contre le risque de longévité (sachant qu'il y a un coût de rémunération du capital) ou faut-il recourir aux swaps de longévité afin de couvrir ce risque.

Notre travail sera axé sur 5 chapitres : Le premier chapitre porte sur le cadre de notre étude (le risque de longévité et les concepts). Le second chapitre aborde les questions de modélisation du risque de longévité à travers le choix d'un modèle de mortalité stochastique, nous utilisons pour ce faire les données de HMD [2]. Le troisième chapitre décrit les solutions de couverture contre le risque de longévité, en faisant la part belle aux swaps de longévité. Le quatrième chapitre quant à lui traite de la tarification du risque de longévité via la formule standard du SCR (Solvency Capital Requirement) et via d'autres méthodes citées deux paragraphes au-dessus. Enfin,le chapitre 6 est consacré à l'impact de la couverture du risque de longévité et à la comparaison des coûts obtenus, en prenant en compte certaines hypothèses, entre la détention du capital supplémentaire pour faire face au risque de longévité et le recours aux swaps pour couvrir ce risque, étant bien entendu que l'assureur vise une réduction optimale de ses coûts.

1. Le swap de taux est, dans sa forme la plus basique, une opération financière dans laquelle deux contreparties contractent chacune simultanément un prêt et un emprunt dans une même devise, pour un même montant, pendant une même durée mais sur des références de taux différentes. Les capitaux nominaux sur ces deux côtés du contrat, que l'on appelle jambes, ne sont, pour les swaps standard, pas versés puisque cela reviendrait à payer et à recevoir simultanément la même somme d'argent. Uniquement les flux d'intérêts sont échangés.

2. The Human Mortality Database (HMD) was created to provide detailed mortality and population data to researchers, students, journalists, policy analysts, and others interested in the history of human longevity. Source : www.mortality.org

Chapitre 2

Cadre de l'étude

2.1 Risque de longévité

2.1.1 Origine

Le vieillissement de la population n'est pas une évolution récente de l'histoire de l'humanité. S'il est vrai que des phénomènes tels la tertiarisation de l'économie ou encore la participation des femmes à l'emploi font partie des mutations globales auxquelles ont été confrontées les sociétés industrielles, il n'en est pas moins vrai en ce qui concerne le phénomène de veillissement de la population. L'une des causes de ce phénomène dans les pays industrialisés, et sans doute la plus ancienne est le déclin de la natalité et de la fécondité. A son époque, ce déclin répondait au mouvement de baisse de la mortalité infantile.

Toutefois, cette baisse de la natalité a eu des conséquences qui lentement mais avec puissance ont bouleversé les structures de population par âge. Ainsi le vieillissement qui jusque-là n'était qu'un phénomène individuel devint aussi un phénomène collectif, puisque ce terme désigna l'accroissement dans une population de la part des personnes âgées. Cette part augmenta en proportion parce que les jeunes diminuèrent en nombre. Il est fort de rappeler que cette mutation s'est étalée dans les pays occidentaux pendant plus d'un siècle depuis les débuts de leur industrialisation (et quelques fois même plus tôt) jusqu'à nos jours. Cette évolution n'apparaît donc pas comme une surprise.

La baisse de la natalité n'est pas restée la seule cause du vieillissement démographique ; une seconde cause est venue la renforcer, prenant en quelque sorte de vitesse même les experts en démographie qui dûrent revoir leur théorie. Quelques décennies voire tout au plus un demi-siècle en arrière, la mortalité n'avait pas été un facteur de vieillissement, mais plutôt de rajeunissement des structures par âge, parce que sa diminution contribuait surtout à maintenir en vie des enfants qui autrement seraient morts prématurément.

Le 19^e siècle a enregistré une forte progression dans l'espérance de vie à la naissance. D'un âge moyen au décès historiquement stable de l'ordre de 25 à 30 ans, l'âge moyen est passé à 50 ans vers 1900 dans les pays les plus avancés et un peu plus tard en Belgique. Il a fallu attendre le début du 20^e siècle, période à partir de laquelle les progrès significatifs en matière d'amélioration de la durée de vie commencèrent à profiter essentiellement aux personnes âgées. Or, il faut rappeler qu'après le doublement de l'espérance de vie à la naissance, intervenu au cours

du 19^e siècle, le 20^e siècle produisit encore un nouveau bond quantitatif avec une avancée supplémentaire de 30 annnées. La longévité moyenne passa donc de 50 à 80 ans, avec toutefois un différentiel d'environ 5 ans en faveur des femmes. Autrement dit, la proportion de personnes vivant plus longtemps a augmenté, les femmes vivant plus longtemps que les hommes.
Le graphe ci-dessous illustre le l'évolution de l'espérance de vie de la population belge en fonction du genre, mesurée entre 1885 et 2018.

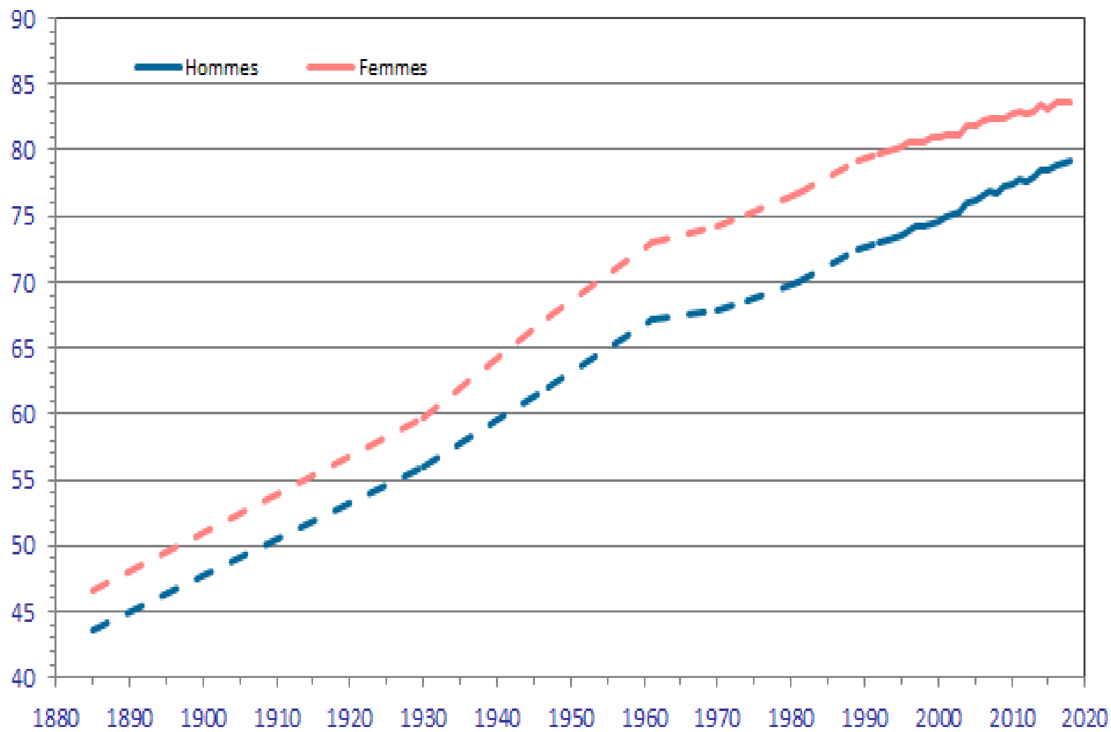

FIGURE 2.1.1 – Evolution de l'espérance de vie à la naissance en Belgique, selon le sexe, 1885 - 2018 (Source : https ://statbel.fgov.be)

Cette diminution marquée de la mortalité n'est pas sans conséquences sur plusieurs autres composantes fondamentales des sociétés occidentales (la transmission patrimoniale, la force du travail, etc.), en plus de la composante démographique. L'impact est toutefois plus marqué dans le domaine de la protection sociale car l'évolution démographique rendra la pression plus forte au fil des décennies, à cause du rapport des générations qui évolue dans le sens d'une aggravation des taux de dépendance. En effet les générations dites «baby flop» qui évoluent connaissent des maux tels que la précarité de l'emploi, le temps partiel, le chômage et la stagnation des salaires et doivent en plus supporter les «baby boomers» (individus nés entre 1945 et 1965) qui accèdent progressivement à la retraite à partir de 2005[1].

2.1.2 Présentation générale

Les compagnies d'assurance vie qui ont de grands portefeuilles de rentes sont exposées au risque de longévité. Ce risque qui s'oppose au risque de mortalité peut être défini comme le risque pour lequel, pour une population définie, la durée de vie moyenne de l'ensemble des individus est plus longue que la durée attendue et donc estimée à l'aide de tables d'expérience de l'assureur. Il s'agit donc d'un risque financier et de long terme.

Pendant des années, aucune priorité n'a été mise sur ce risque, ceci à cause de son aspect long terme qui s'oppose à l'aspect court terme des risques classiques comme le risque de taux ou celui du provisionnement. Cependant, plusieurs enjeux politiques, économiques et financiers mettent l'accent sur ce risque depuis quelques années. En effet, la directive Solvabilité II impose désormais aux compagnies d'assurance de couvrir ce risque. L'estimation correcte de ce risque passe par le développement et le calibrage d'un modèle prospectif de mortalité, dont la référence est le modèle de Lee-Carter (1992) qui a prouvé ses limites. En effet, on procède à l'estimation des paramètres du modèle à partir des données historiques. Puis, on effectue un backtesting sur des données des années plus récentes afin de confirmer le caractère prédictif du modèle. Toutefois, plusieurs autres modèles de mortalité (dont des extensions du modèle de Lee-Carter) ont été développés dans le but de combler aux manquements du modèle de Lee-Carter.
Le risque de longévité intègre trois différentes composantes :

1. Le risque systématique qui consiste en la tendance générale de longévité pour une population large. C'est la part la plus importante du risque de longévité, aussi appelé risque de tendance.
2. Le risque de base représente le décalage entre la mortalité de la population et celle du portefeuille de l'assureur, en raison de l'effet de sélection.
3. Le risque idiosyncratique intègre l'ensemble des évènements non prévisibles par le modèle, et ne peut par conséquent être anticipé.[2]

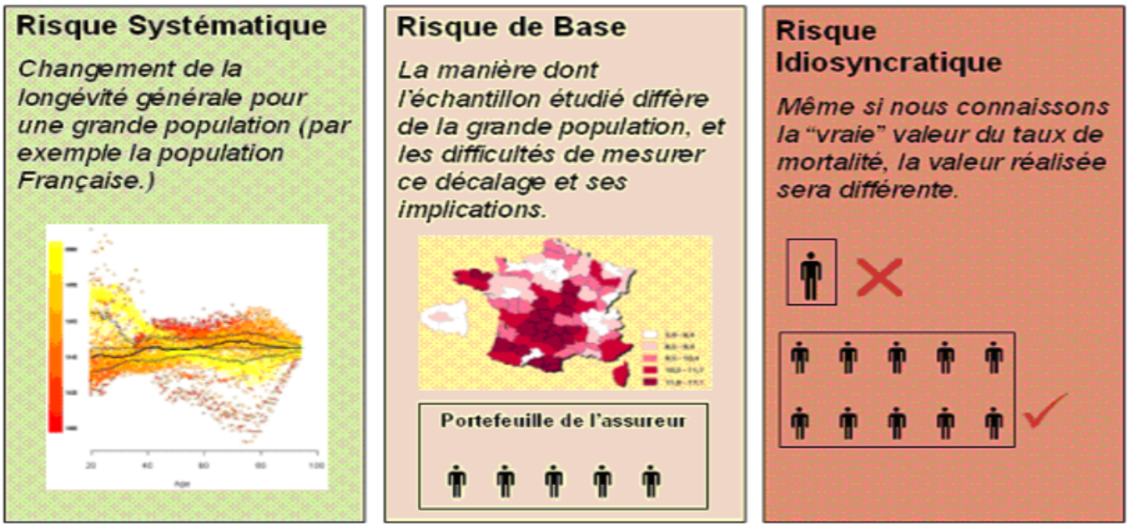

FIGURE 2.1.2 – Les trois composantes du risque de longévité

C'est la composante systématique du risque de longévité qui est abordée via la modélisation de la longévité. Notre étude faisant l'hypothèse que la table utilisée par l'assureur est la même qui est appliquée à la population générale, l'aspect risque de base sera négligeable.

Il est toutefois à noter que l'élimination totale du risque de longévité, et donc de ses trois composantes ne peut être effectif que si elle suppose le transfert intégral du risque aux marchés financiers.

2.2 Concepts

2.2.1 Protection sociale

C'est à cet aspect que nous nous intéressons dans le cadre de ce travail et en particulier à l'impact du vieillissement de la population sur les compagnies d'assurance-vie (nous ferons également quelques allusions aux fonds de pension). En effet, la garantie d'un certain niveau de revenu à ses bénéficiaires entre l'instant de départ à la retraite et celui du décès expose l'assureur à un risque démographique, et plus précisement le risque de longévité. Que le besoin soit la tarification de la prime d'assurance lors de l'émission d'une rente viagère ou l'estimation des montants des cotisations à la caisse de retraite, la santé financière des assureurs et des fonds de pension repose en partie sur leur capacité à pouvoir estimer l'espérance de vie avec exactitude.

Une mauvaise estimation (et en particulier une sous-estimation) de celle-ci a de lourdes conséquences sur le bilan de l'assureur car la prime ou les cotisations ne seront pas suffisantes pour couvrir les flux monétaires non prévus, qui devront être payés durant les dernières années de la vie des rentiers ou des pensionnés. Il faut souligner la nature systématique de ce risque ; pour ces organismes, la loi des grands nombres ne s'applique pas, en d'autres termes la prise en charge d'un grand nombre d'individus ne suffit pas pour l'éliminer par des techniques de mutualisation des risques.

La conjonction des montants considérables qui dépendent de l'évolution future de la mortalité avec la grande incertitude qui lui est propre fait courir un risque aux différents assureurs et fonds de pension. Il est impossible pour une compagnie d'assurance-vie ayant émis une rente viagère, de charger des frais additionnels aux rentiers au cas où surviendrait une dérive de la longévité. Toutes choses restant égales par ailleurs, une compagnie d'assurance-vie qui commet une pareille erreur voit ses marges bénéficiaires s'aménuiser et accroître sa probabilité de faillite. Pour les régimes de retraite, le taux de cotisation sur le salaire peut être majoré pour compenser le manque à gagner. Par contre, une action semblable est faite au détriment des générations futures, car à travers le transfert intergénérationnel appliqué dans les régimes en répartition, ce sont les travailleurs actifs qui doivent payer pour les versements faits aux retraités qui vivent plus longtemps.

Il existe également la possibilité de réduire le montant des prestations, avec les conséquences négatives évidentes que cela entraîne. Pour pallier à celà et dans le but d'assurer une retraite acceptable, des propositions d'assurance, de pensions collectives ou privées ont été formulées sur la base d'un principe de capitalisation, venant ainsi renforcer le premier pilier qui est celui des pensions légales. Ainsi, nous avons une organisation en trois piliers représentée sur la figure 2.2.1.

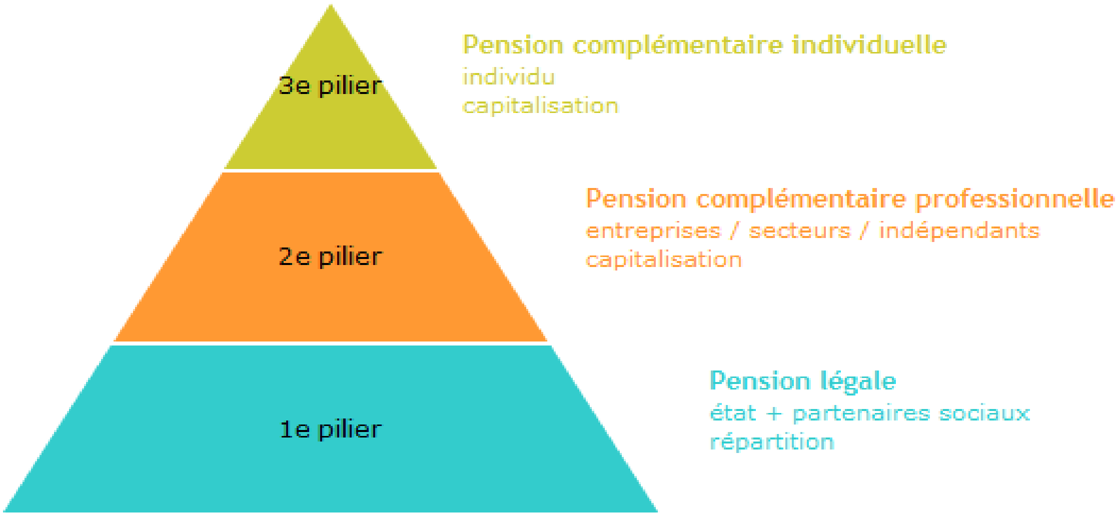

FIGURE 2.2.1 – Les trois piliers de la protection sociale

2.2.2 Rentes viagères

S'il est vrai que particuliers et institutions peuvent se résoudre à épargner davantage pour s'assurer des ressources suffisantes tout au long de leur vie (chose difficilement réalisable au regard de la crise socio-économique actuelle), il n'en pas moins vrai que le risque de longévité est mieux pris en charge par les assureurs. Ces derniers en raison des connaissances techniques des risques, des avantages fiscaux qu'offrent certains produits d'assurance et de la diversification de leurs portefeuilles d'investissement permettent aux individus d'épargner efficacement pendant leurs années d'activité. Les assureurs ont en sus l'avantage d'estimer la durée de vie de leurs assurés sur des périodes relativement courtes, de mutualiser le risque de longévité au sein de leur portefeuille. Ils sont par conséquent capables de proposer des rendements de couvertures adaptés.

Le produit d'assurance proposé par excellence aux individus souhaitant faire face à leurs besoins financiers pendant leurs vieux jours est la rente viagère. Le mécanisme est simple : l'assuré contre paiement d'une prime reçoit de l'assureur des versements réguliers de rentes dès son départ à la retraite et ce jusqu'à son décès. C'est donc à juste titre que les produits d'épargne pension existent, regroupant en leur sein des produits d'épargne individuelle, de retraite individuelle ou collective et d'assurance-vie. Comme l'illustre la figure 2.2.1 ces produits sont souvent des compléments à la pension légale.

Dans le cadre de notre étude, nous ferons une analyse comparative de la couverture du risque de longévité par l'utilisation des swaps de longévité et par la l'approche dite du coût du capital, appliquée à des portefeuilles de rentes viagères. En effet, les versements périodiques que le bénéficiaire de la rente perçoit jusqu'à sa mort constituent pour lui une protection contre le risque longévité qui en revanche est porté par l'assureur. Le risque de longévité incluant une composante systématique, il est possible de mutualiser le risque individuel de longévité. Le risque global à l'inverse ne peut être mutualisé car la tendance globale de l'évolution de la mortalité peut être différente des prévisions de l'assureur.

2.2.3 Antisélection

Les individus souscrivant à un produit de rente viagère seront ceux qui estiment que leur espérance de vie est supérieure à la moyenne, en cas de souscription facultative. L'antisélection représente un risque significatif pour l'assureur. Il est l'un des facteurs mis en avant pour expliquer les difficultés du développement de la titrisation du risque de longévité : la correspondance entre le risque de l'assureur et le risque auquel sont exposés les instruments financiers n'est jamais parfaite. L'antisélection est un risque difficile à quantifier. En effet, l'assureur dispose en général d'observations limitées sur son portefeuille, aussi bien en nombre d'assurés qu'en nombre d'années d'observation alors que les statistiques relatives à la population générale sont plus étoffées.

Des méthodes connues peuvent être envisagées pour la modélisation des conséquences du risque d'antisélection sur un portefeuille de rente viagères. Nous pouvons citer entre autres : L'étude présentée par Buffet-Betis (2007), l'article de Plat (2009), (Delwarde A. et Denuit M. (2006) et Planchet (2006).

2.2.4 Vision prospective de la mortalité

En démographie et en sciences actuarielles, les tables de mortalité sont un outil utilisé dans le but d'étudier des indicateurs tels que les probabilités de décès, l'espérance de vie ou le nombre de décès. On en distingue deux types :

1. Les tables de mortalité du moment : la construction d'une telle table s'appuie sur une population active de 100 000 personnes à laquelle on applique les conditions de mortalité du moment. Des ajustements ainsi que des techniques de lissage des taux de mortalité et des nombres de décès sont mis en place. Ensuite, la fermeture de la table est faite pour les âges les plus avancés en choisissant un âge maximum et une technique de fermeture (qui peut être linéaire ou quadratique).
2. Les tables de mortalité par génération : dans ce type de table on sélectionne un échantillon d'une génération donnée (les personnes nées en 1960 par exemple). On effectue un suivi de l'évolution de cet échantillon. L'avantage de procéder ainsi est que l'échantillon choisi est plus représentatif de la réalite car il ne s'agit aucunement d'une population active. Toutefois, ce type de table ne répond pas au besoin imminent qu'à l'assureur pour la tarification de ses produits.

Les tables de mortalité classiques supposent de manière implicite que la mortalité future n'évoluera pas par rapport à celle que nous observons aujourd'hui. Or, il est évident que l'assureur doit avoir une vision prospective de la mortalité, prenant en compte l'allongement de la vie humaine car nous sommes dans un contexte d'amélioration continue de la mortalité et par conséquent, l'exposition au risque de longévité est plus importante.

Pour chaque âge et pour une année, les tables de mortalité renseignent la probabilité de décès de l'individu. Elles sont construites à l'aide de modèles statistiques estimant les tendances de mortalité et les extrapolant dans le futur. Cependant, ces tables en plus d'être difficiles à construire peuvent être sujettes à des erreurs à long terme dûs à la volatilité croissance autour de la tendance. Un facteur additionnel de risque à prendre en compte dans l'utilisation de ces tables est le risque de modèle, risque qui est lié à l'outil mathématique permettant de les construire. Pour ces raisons, les tables construites doivent faire l'objet d'une reévaluation permanente afin de prendre en compte de nouvelles statistiques de mortalité et/ou de faire évoluer la méthodologie de construction.

2.2.5 Tables de mortalité par âge, par période et par cohorte et données disponibles sur la mortalité

L'analyse de la mortalité d'une population ou d'un portefeuille d'assurés donné peut prendre plusieurs formes, en fonction des objectifs de l'étude, des données disponibles et de sa fiabilité. Pour une telle analyse, les tables de durée de vie par période et par cohorte se sont avérées les plus utiles.

Le diagramme Lexis de la figure 2.2.2 est un diagramme de cohorte âge-période ; l'axe des abscisses représente les années civiles et l'axe des ordonnées correspond à l'âge. Cette représentation permet la compréhension statistique des tables de mortalité des cohortes et des périodes. Les tables de mortalité des cohortes peuvent être obtenues à partir des diagonales du diagramme de Lexis ; les tables de mortalité par période sont données par des bandes verticales. L'analyse en temps continu et en temps discret est réalisable. L'équivalence entre les méthodes discrète et continue est basée sur l'hypothèse que la force de mortalité (c.-à-d. le taux de mortalité instantané) est constante (ou qu'elle ne fluctue trop) à l'intérieur de chaque carré du diagramme.

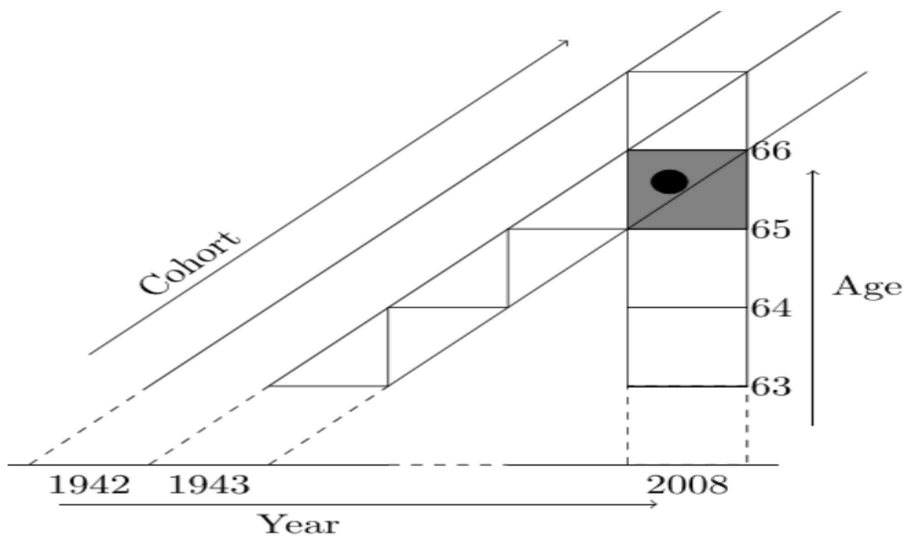

FIGURE 2.2.2 – Diagramme de Lexis

Toutefois, l'hypothèse d'une mortalité annuelle constante doit être évitée lorsque les observations de mortalité sont plus profondes qu'au niveau national. Les assureurs-vie recueillent habituellement des données plus précises sur leurs portefeuilles assurés, qui indiquent l'âge réel atteint par chaque personne assurée. Ainsi, les actuaires calculent la mortalité sous-jacente de ces portefeuilles, en tenant compte des observations censurées, à l'aide de l'estimateur de Kaplan-Meier (voir Klein et Moeschberger (2003)). Il est donc possible de construire des tables de mortalité en continu dans le temps.

L'écart entre les données nationales de mortalité et celles d'un portefeuille assuré n'est pas seulement limité à la continuité des observations. Tout d'abord, l'une des clés entre la mortalité nationale et la mortalité dans certains portefeuilles assurés est l'étendue de la période d'observation. La période pendant laquelle les taux de mortalité observés pour le portefeuille d'assurance sont disponibles est généralement limitée, souvent de l'ordre de 5 à 15 ans seulement. En revanche, les données nationales peuvent varier de 100 à 200 ans (voir les bases de données HMD par exemple). C'est l'une des principales raisons pour lesquelles, afin de déterminer le niveau réel et la tendance future de la mortalité, l'intervention des actuaires est utile pour modéliser la mortalité nationale et ensuite les taux assurés. Un exemple de la façon dont de telles projections sont produites est celui des modèles relationnels : une technique qui vise à lier à la fois les taux de mortalité et leur évolution future, même si les variables socio-économiques causent la différence entre la mortalité spécifique au portefeuille d'assurance et la mortalité nationale.[2]

En outre, au niveau du portefeuille, bien que les mouvements dans le groupe des assurés soient connus et puissent être pris en considération, il s'avère difficile de tenir compte des données censurées et tronquées lors de l'évaluation de la mortalité nationale. On peut penser par exemple à la migration. Il y a deux facteurs différents qui peuvent être négligés lors de l'examen des impacts migratoires. Tout d'abord, les gens qui quittant la cohorte synthétique sont souvent censurées et donc toujours pris en compte lors de l'estimation des tables de mortalité par période. Deuxièmement, les nouveaux immigrants peuvent également modifier les taux de mortalité nationaux du pays de destination.

Il est possible d'obtenir beaucoup plus de détails pertinents sur les décès à partir d'un portefeuille assuré (par exemple cause du décès). Bien qu'il existe des données nationales par cause de décès, elles manquent généralement de cohérence, et sont souvent inutiles, ou d'aucun intérêt pour dériver la mortalité par cause (par exemple : aux USA, 11 % des décès sont causés par plus de quatre maladies).

2.2.6 Hétérogénéité, dépendance inter-âges et risque de base

On s'attend à ce qu'une population donnée présente un certain degré de mortalité hétérogène. L'hétérogénéité est souvent due à un certain nombre de facteurs observables, notamment l'âge, le sexe, la profession, etc. et des facteurs physiologiques. En ce qui concerne le risque de longévité, chez les assurés disposant d'un statut socio-économique élevé (évalué en fonction de la profession, du revenu ou du niveau de scolarité), la mortalité a tendance à connaître des taux plus faibles. Cependant, des différences importantes existent également au sein des mêmes niveaux socio-économiques selon le genre. Les femmes ont tendance à survivre plus longtemps que les hommes et ont des taux de mortalité plus faibles à tous les âges. En outre, l'hétérogénéité est due aux caractéristiques du cadre de vie, telles que : le climat, la pollution, la qualité nutritionnelle, la densité de la population et l'assainissement, etc...
Lorsqu'ils examinent les portefeuilles assurés, les assureurs ont tendance à imposer des critères sélectifs qui limitent l'accès contractuel aux personnes considérées comme ne présentant aucun risque explosif (selon le niveau de santé et les antécédents médicaux). Ceci introduit des différences dans les profils de mortalité au sein des portefeuilles différents. Par exemple, les portefeuilles d'assurance temporaire et de capital différé affichent des taux de mortalité plus élevés que ceux des portefeuilles de rentes et de pensions. De plus, les risques sous-jacents à ces deux types de contrats sont de nature différente. Le risque qui en résulte pour les porte-

feuilles antérieurs est un risque de mortalité, alors que les deux derniers présentent un risque de longévité [3].

En raison de leur nature opposée, la possibilité d'une couverture qui implique les deux types de risque demeure. Cependant, comme le soulignent Cox et Lin (2007), cette couverture naturelle n'est que partielle. La couverture n'est que partiellement réalisable en raison de la nature des deux risques et des fourchettes d'âge impliquées dans les deux contrats spécifiques. En particulier, l'interdépendance entre les âges, et même la corrélation inter-temporelle sont dynamiquement importantes et doivent être comprises.

Dans Loisel et Serant (2007), la question de la dépendance inter-âge selon les données de mortalité et la corrélation intertemporelle sont prises en compte. Dans cette étude, les données démographiques chez les hommes et chez les femmes montrent une nette dépendance à l'égard des taux de mortalité parmi les groupes d'âge.

Cette dépendance inter-âges est cruciale lorsqu'il s'agit, par exemple, de la couverture naturelle entre mortalité et longévité. Plus précisément, elle donne une idée claire de la façon dont certains changements dans la mortalité pour une tranche d'âge spécifique en modifieront une autre en fournissant des mesures du passif associé, modifié par la diversication potentielle en raison de la corrélation inter-âges. Il s'agit donc d'une caractéristique d'un intérêt et d'une importance considérables lors de l'agrégation des bénéfices au sein d'un portefeuille de contrats.

2.3 Modélisation

2.3.1 Historique

Bien que la modélisation de la mortalité a été l'objet de nombreuses recherches au cours du 17^e siècle, il faudra attendre le 18^e siècle pour voir naître les premières lois de mortalité. Ces modèles ont pour objectif d'être pérennes dans le temps et de tenir compte de la tendance générale de la mortalité. Le tableau ci-dessous donne un aperçu des premiers modèles de mortalité.

Nom	Date	Formule
de Moivre	1725	$\mu_x = 1/(w-x-t)$, $0 \leq t \leq w-x$
Gompertz	1825	$\mu_x = b.c^x$
Makeham (1re loi)	1860	$\mu_x = a + b.c^x$
Makeham (2^e loi)	1889	$\mu_x = a + d.x + b.c^x$
Perk's	1931	$\mu_x = (a + b.c^x)/(k.c^{-x} + 1 + d.c^x)$

Table 2.3.1 – Premiers modèles de mortalité

où :
- w représente l'âge limite de la table.
- μ_x représente la force de mortalité à l'âge x.
- a, b, c, d et k sont des constantes.

Les variations importantes de la mortalité en périodes clés comme les Guerres Mondiales ont dévoilé de manière rapide les limites de ces modèles simples.

2.3.2 Modèle de Lee-Carter

Lee et Carter proposent un modèle en 1992 qui se distingue des modèles du tableau 2.3.1 en ce qu'il n'impose pas une structure linéaire de $ln(\mu_{x,t})$. Ce modèle propose pour la première fois un modèle qui soit à la fois solide et flexible tout en restant simple à comprendre. Il définit en outre la relation entre la mortalité, le temps et l'âge de la manière suivante :

$$ln[(\mu_{x,t})] = \alpha_x + \beta_x.\kappa_t + \epsilon_{x,t}$$

avec $\epsilon_{x,t} \sim N(0,\sigma)$, α_x et β_x des composantes qui dépendent de l'âge, κ_t qui dépend du temps et $\mu_{x,t}$ représente la force de mortalité d'un individu d'âge x à l'instant t. Le modèle de Lee-Carter laisse une marge de liberté sur la modélisation de la structure d'évolution du terme temporel κ_t. Bien qu'il a cedé la place à des modèles plus sophistiqués, le modèle de Lee-Carter demeure la référence pour tous les actuaires qui s'intéressent à la modélisation de la mortalité.

2.3.3 Modèles plus récents

A la suite du modèle de Lee-Carter, plusieurs autres modèles ont vu le jour ; qui pour assurer l'hétéroscédasticité des résidus, qui pour prendre en compte l'effet de cohorte... Quelques modèles parmi les plus aboutis sont repris dans le tableau 2.3.2. Ils ont fait l'objet de plusieurs études parmi lesquelles Cairns et al. (2010).

Modèle	Formule mathématique
M1	$\log\,\mu(t,x) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)}.\kappa_t^{(2)}$
M2	$\log\,\mu(t,x) = \beta_x^{(1)} + \beta_x^{(2)}.\kappa_t^{(3)} + \beta_x^{(3)}.\gamma_{t-x}^{(3)}$
M3	$\log\,\mu(t,x) = \beta_x^{(1)} + n_a^{-1}.\kappa_t^{(3)} + n_a^{-1}.\gamma_{t-x}^{(3)}$
M4	$\log\,\mu(t,x) = \sum_{i,j}\theta_{ij}.B_{ij}^{ay}(x,t)$
M5	logit q(t,x) $= \kappa_t^1 + \kappa_t^2(x-\bar{x})$
M6	logit q(t,x) $= \kappa_t^1 + \kappa_t^2(x-\bar{x}) + \gamma_{t-x}^{(3)}$
M7	logit q(t,x) $= \kappa_t^1 + \kappa_t^2(x-\bar{x}) + \kappa_t^3((x-\bar{x})^2 - \hat{\sigma}_x^2 + \gamma_{t-x}^{(4)}$
M8	logit q(t,x) $= \kappa_t^1 + \kappa_t^2(x-\bar{x}) + \gamma_{t-x}^{(3)}(x_c - x)$

TABLE 2.3.2 – Modèles de mortalité

où :
- $\mu(t,x)$ représente la force de mortalité d'un individu d'âge x à l'instant t.
- $q(t,x)$ est la probabilité de décès d'un individu d'âge x à l'instant t.

et

1. M1 : Modèle de Lee-Carter (1992)
2. M2 : Modèle de Renshaw - Haberman (2006)
3. M3 : Cas particulier de M2.
4. M4 : Un modèle où les B_{ij}^{ay} sont des B-Splines.
5. M5 : Modèle CBD : qui doit son nom à ses trois auteurs Cairns (Andrew) - Blake (David) - Dowd (Kevin).

6. M6 : Une variante du modèle CBD qui tient compte de l'effet Cohort à travers la composante en $(t-x)$.
7. M7 et M8 : Des extensions de M6 (ou encore du CBD).

Ces modèles font face à deux types de défi :

Les défis intrinsèques aux modèles : parmi ces défis on compte par exemple la capacité du modèle à assurer l'hétéroscédasticité (variation des résidus selon l'âge d'étude) ou à capter l'effet cohorte mais pas uniquement. C'est aussi le pouvoir explicatif du modèle qui s'appuyerait sur des données qualitatives autres que l'âge ; à savoir le genre, l'éducation, les indicateurs de style de vie, la catégorie socio-professionnelle, l'état de santé, etc. Ces derniers facteurs bien qu'absents des modèles aujourd'hui, doivent être pris en compte dans l'amélioration de la capacité prédictive des modèles, comme le prouvent les chercheurs. Toutefois, il est d'une part difficile de mesurer ces variables et d'autre part, l'assureur fait face au législateur et aux problèmes d'éthique qui sortent du cadre du modèle : c'est par exemple le cas avec le genre (homme/femme).

Les défis exogènes : Un modéle peut être plus ou moins bon en fonction, par exemple des données utilisées. Cet exemple implique que la qualité d'un modèle n'est pas une valeur qui lui est intrinsèque. Donc, un modèle doit ses qualités (pouvoirs explicatif, prédictif, etc.) à des facteurs exogènes comme le pays d'étude. Un modèle peut parfaitement modéliser la longévité en Angleterre et ne pas être approprié pour modéliser la longévité en Belgique. D'autres choix arbitraires interviennent : comme la période considérée pour l'échantillon sur lequel on calibre les modèles.

Chapitre 3

Modélisation du risque de longévité

3.1 Modèle stochastique de mortalité

La difficulté majeure de la tarification des produits dérivés liés à la longévité réside dans la détermination du taux de mortalité future, la mortalité étant stochastique. Les modèles stochastiques de mortalité sont un sujet important de la recherche en sciences actuarielles et en démographie. Cairns et al (2007) ; Macdonald et al. (2003) ; Currie, Durban et Eilers (2004), et JP Morgan (2007), entre autres, élaborent et évaluent un ensemble de modèles stochastiques.

La première contribution à une prédiction de la mortalité dynamique était une proposition de Blaschke (1923) qui a introduit une version basée sur la loi de Makeham. Cependant, ce n'est que plus tard, avec les travaux de Lee & Carter (1992), que des progrès significatifs ont été enregistrés dans la modélisation stochastique de la mortalité.

3.1.1 Modèle de Lee-Carter

En se basant sur les taux centraux de mortalité $\mu_{x,t}$ qui est fonction de l'âge et du sexe, Lee & Carter proposent un modèle de la forme :

$$ln(\mu_{x,t}) = \alpha_x + \beta_x.\kappa_t + \epsilon_{x,t} \tag{3.1.1}$$

avec $\epsilon_{x,t}$ N(0, σ), α_x et β_x des composantes qui dépendent de l'âge et κ_t qui dépend du temps. Le modèle de Lee-Carter laisse une marge de liberté sur la modélisation de la structure d'évolution du terme temporel κ_t.

3.1.2 Modèles de mortalité plus récents

Plusieurs extensions ont été proposées pour améliorer le modèle Lee-Carter. Brouhns, Denuit et Vermunt (2002) calibrent un modèle de Lee-Carter supposant que le nombre de décès suit un processus de Poisson. Renshaw et Haberman (2003) proposent d'ajouter d'autres facteurs variant avec le temps, améliorant ainsi le modèle s'adaptant à un éventail d'âges. Renshaw et Haberman (2006) ont montré qu'un effet de cohorte était nécessaire pour pouvoir utiliser les données du Royaume-Uni basées sur le genre 1961-2003. Hyndman et Ullah (2007) élaborent une approche de modélisation multifactorielle à l'aide de composantes fonctionnelles principales pour adapter les données démographiques.

Le modèle de Lee-Carter est limité dans son application à la tarification des titres liés à la mortalité, puisque l'intégration d'une mesure de probabilité risque neutre n'est pas naturel. Denuit, Devolder et Goderniaux (2007) utilisent la méthode de transformation de Wang (2002) pour ajuster les risques des taux de mortalité basés sur le modèle de Lee-Carter, semblables à ceux de Lin et Cox (2005). Cairns et al (2006a) et Bauer et Russ (2006) discutent des limites de la transformation de Wang lors de l'élaboration d'une mortalité stochastique pour la tarification et la gestion des risques.

Les approches récentes de modélisation de la mortalité utilisent le cadre élaboré à l'origine pour évaluer les dérivés de taux d'intérêt en temps continu, comme dans les premiers modèles de Vasicek (1977) et de Cox et al (1985). Le cadre du modèle peut garantir que les processus de taux de mortalité sont positifs. Les titres liés à la mortalité peuvent également être facilement évalués à l'aide de cette approche. Milevsky et Promislow (2001) ont élaboré des modèles de taux d'intérêt et de mortalité en un cadre conçu pour fixer le prix d'une option de rente. Dahl (2004) a proposé une forme généralisée pour ces modèles, y compris le modèle de Milevsky et Promislow comme cas particulier. Le processus stochastique de diffusion de la force de mortalité au temps t pour un âge initial x, notée $\mu(x,t)$, est :

$$d\mu(t,x) = \alpha^{\mu}(t,x,\mu(t,x))dt + \sigma^{\mu}(t,x,\mu(t,x))dB_t \tag{3.1.2}$$

Ce modèle s'adapte aux données historiques pour les âges et la période considérés, capturant les tendances stochastiques de l'amélioration de la mortalité aux âges différents, à travers le temps, ainsi que la structure de dépendance multivariée selon les âges. Wills et Sherris (2008) calibrent le modèle en fonction des prix du marché liés à l'assurance et analysent la tarification et la structuration des obligations à long terme.

3.1.3 Modèle de mortalité retenu

Le modèle intègre les modèles financier et démographique du risque de longévité dans un cadre adapté à la tarification et à la gestion du risque de longévité. Les tendances démographiques sont modélisées dans les changements prévus de la mortalité et tous les âges sont modélisés simultanément à l'aide de multiples facteurs dépendants pour déterminer les chocs sur les taux de mortalité. Le modèle permet aux changements prévus de la mortalité de varier selon l'âge et le temps. De multiples facteurs aléatoires saisissent la dépendance entre les âges. Étant donné que l'amélioration de la mortalité est similaire pour des individus d'âge similaire et pour des cohortes d'individus similaires, il est important de saisir la dépendance à l'âge dans le modèle.

Le modèle est conçu de manière à pouvoir être facilement utilisé pour établir le prix des titres liés à la longévité en fonction de cash-flows provenant de portefeuilles de rentes pour des durées de vie multiples. Étant donné que l'établissement des prix exige un changement de mesure, passant des probabilités réelles à une mesure de tarification, la structure du modèle doit facilement permettre l'intégration d'un prix du risque.

Inspiré du modèle de Lee-Carter(1992), Dahl(2004) et Schrager(2006), le modèle est basé sur une force de mortalité supposée $\mu(x,t)$ pour chaque âge x à l'instant t de la forme :

$$\mu(x,t) = \mu(x,0).\exp\left[(a(x+t)+b-\frac{1}{\sigma^2(x,t)})t + \sigma(x,t)W(x,t)\right] \tag{3.1.3}$$

$$0 < x < w, \ 0 < t < w - x$$

où a et b sont des constantes, $\sigma(x,t)$ (la volatilité) est une fonction déterministe de l'âge et du temps et $W(x,t)$ pour des valeurs continues de x est un mouvement brownien. Pour tout âge x_k, on a :

$$\ln\left[\frac{\mu(x_k,t)}{\mu(x_k,0)}\right] = (a(x_k+t)+b-\frac{1}{\sigma^2})t + \sigma.W(t) \tag{3.1.4}$$

Le système dimensionnel infini de l'équation 3.1.3 est rendu traçable en considérant un vecteur aléatoire multivarié dimensionnel de taux de mortalité de longueur N, pour les âges x = $\mathrm{x}_1, ..., x_N$:

$$\underline{\mu}(t) = \begin{bmatrix} \mu(x_1,t) \\ \mu(x_2,t) \\ ... \\ \mu(x_N,t) \end{bmatrix} \tag{3.1.5}$$

La dynamique de $d\mu(t) = [d\mu(x_1,t), d\mu(x_2,t), ..., d\mu(x_N,t)]'$ est portée par un processus multivarié de Wiener $\underline{dW}(t)$ de moyenne 0 et de matrice de covariance Σ :

$$\underline{dW}(t) = \begin{bmatrix} dW(x_1,t) \\ dW(x_2,t) \\ ... \\ dW(x_N,t) \end{bmatrix} \tag{3.1.6}$$

Pour assurer au modèle une forme convenable pour les simulations et estimations, le processus de Wiener multivarié $\underline{dW}(x,t)$ est exprimé en fonction des termes d'un vecteur aléatoire de taille N de processus de Wiener indépendants : $\underline{dZ}(t) = [dZ_1(t), dZ_2(t), ..., dZ_N(t)]'$. dW(x,t) peut s'exprimer comme combinaison linéaire de dZ(t) en utilisant une matrice déterministe et constante D tel que $\underline{dW}(x,t) = D.\underline{dZ}(t)$ avec :

$$D = \begin{bmatrix} \delta_{11} & ... & \delta_{1N} \\ ... & ... & ... \\ \delta_{N1} & ... & \delta_{NN} \end{bmatrix} \tag{3.1.7}$$

où chaque élément de la matrice est donné par : $dW(x,t) = \sum_{i=1}^{N} \delta_{xi}.dZ_i(t)$ pour tout x = $\mathrm{x}_1, ..., x_N$.

3.1.3.1 Paramétrage du modèle

Le modèle de l'équation 3.1.8 a un drift qui est fonction de l'âge actuel (x+t). La volatilité en pourcentage est une constante σ, de sorte que la variabilité de $d\mu(x,t)$ augmente avec

$\mu(x,t)$. Comme $\mu(x,t)$ est une fonction croissante de l'âge actuel (x+t), le processus devient plus variable pour les âges initiaux plus élevés x, et les plus grandes valeurs de t.

$$d\mu(x,t) = (a(x+t)+b)\mu(x,t)dt + \sigma\mu(x,t)dW(x,t) \tag{3.1.8}$$ [3]

La réversion moyenne n'est pas incluse dans les variations de la mortalité selon l'hypothèse que les variations de la longévité ne reviennent pas à une moyenne à long terme. L'absence de retour à la moyenne est conforme à l'approche adoptée par Liao, Yang et Huang (2007) dans leur modèle de longévité.

$$d\mu(x,t) = (a(x+t)+b)\mu(x,t)dt + \sigma\mu(x,t)\sum_{i=1}^{N}\delta_{xi}dZ_i(t) \tag{3.1.9}$$

pour tout $x = x_1, ..., x_N < w$, où la dépendance inter-âge est capturée par les termes $\delta_{x,i}$.

3.1.3.2 Mesure de prix ajustée au risque

Comme dans Dahl (2004), Dahl et Moeller (2005) et Cairns et al (2006a), une application importante du modèle est l'évaluation des titres liés à la mortalité. Pour ce faire, la dynamique de la mortalité est dérivée selon une mesure de probabilité équivalente (ajustée en fonction du risque). Le processus de mortalité ne sera pas une martingale dans le cadre de cette mesure. Le processus d'établissement du prix de chaque titre sera plutôt une martingale. Le marché du risque de longévité est intrinsèquement incomplet et, par conséquent, le choix d'une mesure de la mortalité ajustée en fonction du risque n'est pas unique.

Le taux de mortalité pour l'âge initial x, $\mu(x,t)$, suit un processus stochastique définie par l'équation 3.1.8.

$$d\mu(x,t) = (a(x+t)+b)\mu(x,t)dt + \sigma\mu(x,t)dW(x,t) \tag{3.1.10}$$

$$dW(x,t) = \sum_{i=1}^{N}\delta_{xi}dZ_i(t) \tag{3.1.11}$$

sur l'espace de probabilité (Ω,F,P), où P est la mesure de probabilité réelle. D'après le théorème de Cameron-Martin-Girsanov, voir par exemple Cairns (2004) pour plus de détails, le processus dW(x,t) sous une mesure de probabilité équivalente Q est donné par :

$$dW^Q(x,t) = \sum_{i=1}^{N}\delta_{xi}(dZ_i(t) - \lambda_i(t)dt) \tag{3.1.12}$$

$$= dW(x,t) - \sum_{i=1}^{N}\delta_{xi}\lambda_i(t)dt) \tag{3.1.13}$$

qui peut encore être écrit comme :

$$\underline{dW}^Q(x,t) = \underline{dW}(t) - D\underline{\lambda}(t)dt) \tag{3.1.14}$$

3. Modèle tiré de Wills, S., Sherris, M. (2011). Integrating Financial and Demographic Longevity Risk Models : An Australian Model for Financial Applications. Article de recherche, University of New South Wales Australian School of Business, 1-24.

$\underline{\lambda}(t) = [\lambda_1(t), \lambda_2(t), ..., \lambda_N(t)]'$

La dynamique de la mortalité pour un âge spécifique x sous la mesure Q ajustée au risque est donnée par :

$$d\mu^Q(x,t) = (a(x+t)+b)\mu^Q(x,t)dt + \sigma\mu^Q(x,t)dW^Q(x,t) \tag{3.1.15}$$

$$= (a(x+t)+b)\mu^Q(x,t)dt + \sigma\mu^Q(x,t)(dW(x,t) - \sum_{i=1}^{N}\delta_{xi}\lambda_i(t)dt) \tag{3.1.16}$$

$$= ((a(x+t)+b) - \sigma\sum_{i=1}^{N}\delta_{xi}\lambda_i(t)dt)\mu^Q(x,t)dt + \sigma\mu^Q(x,t)dW(x,t) \tag{3.1.17}$$

Cette dernière équation équivaut au processus d'origine sous P, avec un ajustement supplémentaire du drift donnée par $(\sum_{i=1}^{N}\delta_{xi}\lambda_i(t)dt)$.
Le choix de la mesure Q ajustée au risque, et donc λ, n'est pas unique et peut être dérivé des fonctions d'utilité d'équilibre du marché comme dans Cox et al.(1985). Les données de prix des titres liés à l'assurance peuvent être utilisées pour calibrer le prix du risque sur le marché.

3.1.3.3 Estimation des paramètres par maximum de vraisemblance

Le maximum de vraisemblance est utilisé pour estimer les paramètres du processus $d\mu(x,t)$:

$$d\mu(x,t) = (a(x+t)+b)\mu(x,t)dt + \sigma\mu(x,t)dW(x,t) \tag{3.1.18}$$

Puisque $\Delta\mu \sim N((a(x+t)+b)\mu, \sigma\mu)$, la fonction de log-vraisemblance est la suivante :

$$\ell(d\hat{\mu} \mid a,b,\sigma) = -\sum_{x,t} ln\left(\sigma\hat{\mu}\sqrt{2\pi}\right) - \frac{1}{2}\sum_{x,t}\left(\frac{(\Delta\hat{\mu}/\hat{\mu}) - (a(x+t)+b}{\sigma}\right)^2 \tag{3.1.19}$$

en supposant des données d'échantillon indépendantes et identiquement distribuées. Nous différencions ensuite la fonction de vraisemblance, respectivement en fonction des paramètres a, b et σ.

$$\frac{\partial\ell}{\partial a} = \sum_{x,t}\left(\frac{(\Delta\hat{\mu}/\hat{\mu}) - (a(x+t)+b)}{\sigma}\right)\frac{(x+t)}{\sigma} \tag{3.1.20}$$

$$0 = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{x,t}\frac{\Delta\hat{\mu}(x+t)}{\hat{\mu}} - \hat{a}\sum_{x,t}(x+t)^2 - \hat{b}\sum_{x,t}(x+t)\right) \tag{3.1.21}$$

En fonction de b, il vient :

$$\frac{\partial\ell}{\partial b} = \sum_{x,t}\left(\frac{(\Delta\hat{\mu}/\hat{\mu}) - (a(x+t)+b)}{\sigma}\right)\frac{1}{\sigma} \tag{3.1.22}$$

$$0 = \frac{1}{\sigma^2}\left(\sum_{x,t}\frac{\Delta\hat{\mu}}{\hat{\mu}} - \hat{a}\sum_{x,t}(x+t) - \hat{b}(N*T)\right) \tag{3.1.23}$$

Les expressions de $\hat{a}$ et $\hat{b}$ s'obtiennent par la résolution d'un système d'équations. Pour celà, nous posons :

$\alpha_1 = \sum_{x,t}(x+t)^2,$ $\alpha_2 = \sum_{x,t}(x+t),$

$\beta_1 = \alpha_2,$ $\beta_2 = N * T,$

$\gamma_1 = \sum_{x,t} \frac{\Delta\hat{\mu}(x+t)}{\mu_{\hat{x},t}},$ $\gamma_2 = \sum_{x,t} \frac{\Delta\mu_{\hat{x},t}}{\mu_{\hat{x},t}}$

où N représente le nombre d'observations et T le temps. Des équations 3.1.21 et 3.1.23, nous avons le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \hat{a}\alpha_1 & = & \gamma_1 - \hat{b}\beta_1 \\ \hat{a}\beta_1 & = & \gamma_2 - \hat{b}\beta_2 \end{cases} \tag{3.1.24}$$

Après résolution de ce système d'équations, il vient :

$$\hat{a} = \frac{\beta_2\gamma_1 - \beta_1\gamma_2}{\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1} \tag{3.1.25}$$

$$\hat{b} = \frac{\alpha_2\gamma_1 + \alpha_1\gamma_2}{\alpha_2\beta_1 + \alpha_1\beta_2} \tag{3.1.26}$$

Enfin en différenciant par rapport à σ, il vient :

$$\frac{\partial\ell}{\partial\sigma} = -\left(\frac{N * T}{\sigma}\right) + \sigma^{-3}\sum_{x,t}\left(\frac{\Delta\hat{\mu}}{\hat{\mu}} - (a(x+t)+b)\right)^2 \tag{3.1.27}$$

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{x,t}\left(\frac{\Delta\hat{\mu}}{\hat{\mu}} - (\hat{a}(x+t)+\hat{b})\right)^2}{\beta_2}} \tag{3.1.28}$$

où $\hat{a}$ et $\hat{b}$ sont respectivement donnés par les équations 3.1.25 et 3.1.26 et $\beta_2 = N * T$.

Chapitre 4

Couverture du risque de longévité

Jusqu'à tout récemment, il n'existait pas de moyens de couverture efficaces contre le risque de longévité. Les marchés financiers peuvent cependant jouer un rôle central dans la gestion des risques liés au vieillissement de la population (Groome et al., 2006). Pour permettre aux compagnies d'assurance-vie de gérer ce risque, Blake et Burrows (2001) ont suggéré la création des obligations de longévité. La seule transaction à ce jour a été l'émission d'une obligation de longévité en novembre 2004 par BNP Paribas et la Banque Européenne d'Investissement avec un montant de 1,5 milliard d'euros, Partner Re étant le réassureur du risque de longévité. Bien qu'il s'agisse d'un moyen novateur de gérer le risque de longévité des organismes offrant des prestations de rentes viagères, elle a été retirée pour être remaniée en 2005 en raison d'une demande insuffisante. En dépit de leur utilisation peu répandue pour le moment, les produits financiers dérivés de la mortalité sont appelés à croître en importance dans les années à venir. Et bien qu'il n'existe que peu ou pas d'outils permettant aux compagnies d'assurance-vie de se protéger contre des erreurs semblables, la littérature propose plusieurs approches. La majorité de ces produits proposés ont recours aux produits financiers dérivés dont les paiements dépendent de l'évolution de la mortalité agrégée. Nous proposons ainsi une approche pour quantifier l'importance du risque de longévité, qui tient compte aussi bien du risque de dérive que du risque de volatilité.

4.1 Instruments financiers de couverture du risque de longévité

La définition que donne EIOPA, l'Autorité Européenne des Assurances et des Pensions Professionnelles du risque de longévité est la suivante : "Longevity risk is associated with the risk of loss, or of adverse change in the value of insurance liabilities, resulting from changes in the level, trend, or volatility of mortality rates, where a decrease in the mortality rate leads to an increase in the value of insurance liabilities". Nous en déduisons que le risque de longévité intègre deux composantes majeurs :

1. Une composante individuelle liée à la structure démographique du portefeuille : cette composante est mutualisable au moyen des fonds de pension ou des produits de rente proposés par les compagnies d'assurance-vie. Elle se fonde sur la loi des grands nombres afin de réduire la variabilité du risque au sein d'un portefeuille d'assurés. Elle reflète l'incertitude par rapport à l'âge de décès de l'assuré, plus précisément, l'incertitude quant à la possibilité que l'assuré vive plus longtemps qu'on ne l'avait espéré.

2. Une composante globale ou systémique : cette composante comme nous l'avons précisé au chapitre 2 est très difficile à couvrir, car elle reflète l'incertitude sur la vie d'une cohorte à l'échelle nationale.

Le risque de longévité fait partie des risques de modèle : il trouve son origine dans l'inadéquation possible entre la table de mortalité utilisée et la survie réelle des rentiers. Ce type de risque se retrouve bien entendu dans tous les produits d'assurance : si les bases techniques utilisées par l'assureur ne reflètent pas la sinistralité réelle qu'il s'est engagé à couvrir, l'assureur est confronté à des pertes techniques qui peuvent être conséquentes.

La difficulté pour les compagnies d'assurance de profiter de la longévité traditionnelle constitue un défi de taille pour les produits d'assurance en raison des risques de longévité et de taux d'intérêt. Suite à ces incapacités, les produits dérivés deviennent l'élément clé de la couverture du risque de longévité. Ci-dessous, nous décrivons comment la longévité pourrait être couverte par des produits traditionnels et des produits dérivés au moyen d'une brève analyse documentaire.

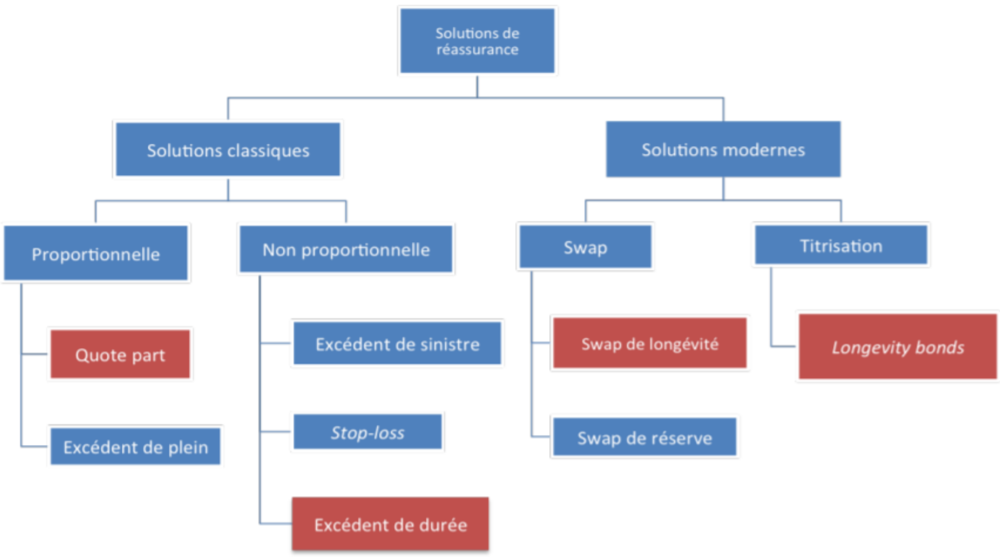

FIGURE 4.1.1 – Solutions de transfert du risque de longévité

4.1.1 Les produits de longévité traditionnels

Jusqu'au 21^{e} siècle, le risque de longévité était couvert par les compagnies d'assurance à travers des solutions conventionnelles et conservatrices. Les solutions traditionnelles de couverture de ce type de risque ont elles-mêmes évolué, allant des solutions de base aux formes plus "avancées". Blake, Cairns et Dowd (2006) affirment que les compagnies d'assurance ont commencé à réagir au risque de longévité en acceptant simplement le risque comme faisant partie de leurs activités principales, qu'elles comprennent bien et qu'elles sont habituées à gérer. Par la suite, elles ont commencé à partager le risque de longévité entre différents types de produits, groupes socio-économiques et pays, ce qui leur a permis d'équilibrer leurs portefeuilles en cherchant à exploiter les couvertures naturelles imaginables qu'implique l'exploitation d'une activité mixte d'assurance temporaire et de rentes.

Toutefois, l'exposition importante du risque de longévité l'a rendu difficile à couvrir, poussant les compagnies d'assurance à recourir à un autre type de garantie dans le but de rendre ce risque gérable et de manière durable. C'est alors que les formes de réassurance sont devenues la réponse à la couverture de la longévité, puisque ces contrats permettaient de partager tout ou partie des inconvénients du risque de longévité avec le réassureur.

Les régimes de retraite permettaient, en sus de la réassurance, d'organiser un rachat en bloc de leurs rentes en cours de paiement, de transférer la responsabilité du paiement à une compagnie d'assurance, de partager les risques sous forme de contrats de réassurance. De même, les petits régimes de retraite sont habitués à acheter des rentes au moment de la retraite pour chaque participant au régime. Cette opération permet de couvrir entièrement le risque au sein du groupe de pensionnés. Blake, Cairns et Dowd (2006) affirment qu'à moins que le régime n'achète des rentes différées sur une base régulière, il supporte toujours le risque de longévité pour les participants actifs actuels et les retraités ayant droit à une rente différée entre l'instant présent et leurs dates de retraite.

Les compagnies d'assurance peuvent opérer le choix de remplacer les rentes traditionnelles et donc sans participation, par des contrats avec participation. Le but de ces contrats étant de permettre le transfert d'une partie de l'exposition au risque de longévité aux preneurs d'assurance avec participation survivants. De cette manière, les compagnies d'assurance peuvent plus aisément couvrir le risque puisque ces produits versent des primes ou des crédits de survie aux rentiers et peuvent tenir compte des taux de mortalité expérimentés au sein du groupe de rentiers. Toutefois, le coût de la réassurance étant conséquent, la titrisation sur la mortalité commence à apparaître vu la priorité que représente la nécessité de négocier le risque de longévité à faible coût (Cowley Cummins, 2005).

La difficulté de couverture d'un grand nombre de personnes vivant plus longtemps que prévu, à faible coût a causé la décadence des solutions traditionnelles abordées dans les paragraphes ci-dessus. Les compagnies d'assurance et les régimes de retraite ont opté pour l'utilisation des titres liés (obligations de longévité, contrats à terme standardisés, contrats à terme de rente, instruments fondés sur des indices et, enfin, swaps et options) à la mortalité sur des contrats négociés afin de gérer leur risque de longévité. Ces institutions ont commencé à transférer le risque à la seule entité qui peut gérer ces expositions à savoir le marché des capitaux (Dowd et al., 2006). Le marché des capitaux a été et demeure le seul marché capable de répondre à un nombre significatif de besoins collectifs des utilisateurs, supprimant ainsi le petit nombre et la capacité des institutions qui négocient et gèrent le risque de mortalité.

4.1.2 Produits dérivés de longévité

Les produits dérivés de longévité sont apparus comme une solution évidente pour l'échange et le traitement d'expositions très élevées, occultant les avantages qu'offraient les solutions traditionnelles pour gérer le risque de longévité ou de mortalité. Les produits dérivés de longévité ont été lancés en différentes générations. Les solutions des marchés financiers pour le risque de longévité ont été classifiées par Fung et al. (2005). Ceux-ci ont identifié trois générations différentes :

1. La première génération est celle fondée sur des obligations de longévité/survie ;
2. La seconde génération est composée de q-forwards, de contrats à terme de survie/mortalité et de swaps de survie/mortalité ;
3. La troisième génération est fondée sur les options de longévité/survie.

Blake, Cairns et Dowd (2006) fait une distinction importante d'une part entre les titres qui sont négociés sur des marchés organisés (ex : des futures ou contrats à terme) et ceux qui sont négociés sur des marchés de gré à gré (OTC) tels que le swap ; d'autre part entre ceux des titres qui ont un payoff linéaire et ceux dont le payoff est non-linéaire.

Un titre négocié sur un marché de gré à gré a comme avantage la possibilité de répondre aux besoins spécifiques d'un utilisateur (réduisant donc le risque de base). Cependant, l'inconvénient d'un tel titre est la "rareté" des marchés secondaires sur lequel il peut être échangé (ce qui rend les positions plus difficiles à dénouer). A l'inverse, un titre négocié sur un marché organisé présente l'avantage de l'attrait d'une plus grande liquidité du marché (ce qui facilite le dénouement), mais le risque de base y est accru.

4.1.2.1 Solutions de marché dites de première génération

Les solutions de marché des capitaux de première génération étaient basées sur les obligations de longévité, les instruments les plus basiques de couverture des risques [Blake et Burrows (2001) ; Blake et al (2006a) ; Bauer et al (2010) ; Fung et al (2015)]. Différents types d'obligations se négocient sur la longévité. Blake, Cairns et Dowd (2006) en recense deux grandes catégories :

1. Les obligations de longévité dites **«principal à risque»** font partie de la première catégorie d'obligations. Dans une telle obligation, l'investisseur risque de perdre tout ou partie de son capital si l'événement de mortalité pertinent se produit.
2. La seconde catégorie est composée d'obligations **«à coupon»**, il s'agit d'obligations dont le paiement du coupon dépend de la mortalité. La nature de cette dépendance peut également varier : le paiement peut être fonction d'un index de mortalité, ou il peut être spécifié en termes de «risque», c'est-à-dire que l'investisseur perd tout ou partie du coupon si l'index de mortalité dépasse un certain seuil. Ces obligations «à coupon» se déclinent elles-mêmes en plusieurs types :
   — les obligations classiques de longévité ;
   — les obligations à zéro coupon ;
   — les obligations à long terme etc...

Outre ces deux catégories, nous pouvons également citer une gamme d'obligations hybrides de longévité plus complexes.

4.1.2.2 Solutions de marché dites de seconde génération

La première obligation de mortalité émise par Swiss Re en 2003 et baptisée Vita 1 a rendu populaire l'obligation de longévité du type «principal à risque». Cette obligation a contribué à réduire l'exposition de Swiss Re à une détérioration catastrophique de la mortalité. Blake et al (2006) explique en détail la nature simple de la structure de cette obligation. L'obligation est émise par un seul fournisseur de régimes de retraite ou de rentes (A) au moyen d'une entité ad hoc (SPV). Au départ, la SPV est financée par des contributions de (A) et d'investisseurs externes (B). Le total de la SPV imiterait soit une obligation à taux variable, soit une obligation à taux fixe payant des coupons annuels, avec un remboursement final du principal à l'échéance. Dans des circonstances normales les coupons et le capital seraient payables en totalité à B. Toutefois, si un indice de survie désigné, S(t), dépasse un seuil déterminé, alors une réduction du remboursement du principal à (B) (et éventuellement aussi les coupons) sera déclenchée, le reste étant payable à (A) Blake, Cairns Dowd, 2006.[5]

D'autre part, l'obligation de longévité «à coupon» devient populaire par l'intermédiaire de la transation BEI/BNP Paribas. La valeur nominale de l'émission était de 540 millions de livres sterling et l'obligation était souscrite pour une durée de 25 ans. Il s'agissait d'une obligation de rente (ou d'amortissement) assortie de paiements de coupons variables, dont l'innovation consistait à lier les paiements de coupons à un indice de survie de cohorte fondé sur les taux de mortalité réalisés chez les hommes anglais et gallois de 65 ans en 2002. Cette obligation opérait comme une obligation classique de longévité (Blake et al., 2006).

Bien qu'il s'agissait d'une innovation, cette génération d'obligations a connu un succès mitigé, n'a pas été bien accueillie par les investisseurs et n'a pas pu générer une demande suffisante pour être lancée en raison de ses lacunes. Toutefois, elle a été cruciale pour présenter les produits de longévité sur les marchés financiers grâce à l'attention publique reçue.

Les obligations de première et seconde génération ont tous deux faits appel à des instruments dont les payoff étaient linéaires, mais à cette époque, des contrats plus complexes était utilisés : forwards, futures, swaps. Les contrats q-forwards ont lancé cette génération, la couverture de mortalité était fournie par J.P. Morgan, et était nouvelle non pas parce qu'elle impliquait un indice de longévité et un nouveau type de produit, mais aussi parce qu'elle était une couverture de valeur plutôt qu'une couverture des paiements en espèces. L'importance des q-forwards repose sur le fait qu'ils forment des blocs de base à partir desquels d'autres produits dérivés complexes, liés à la vie, peuvent être construits. Lorsqu'il est bien conçu, un portefeuille de contrats à terme de type q-forward peut être utilisé pour reproduire et couvrir le risque de longévité d'une rente ou d'un engagement de retraite ou pour couvrir le risque de mortalité d'un portefeuille d'assurance vie.

Un contrat q-forward se distingue d'un contrat forward par le fait qu'il est basé sur les taux de mortalité (Black et al., 2003). En effet, un contrat q-forward est un instrument visant à créer des flux dépendants de la différence entre le taux de mortalité observé et le taux de mortalité prévu au moment de l'achat de l'instrument, c'est à dire échanger des taux de mortalité réalisés (sur une population ou une sous-population) contre des taux de mortalité prévus. Il s'agit d'instrument financier dont le payoff dépend du niveau atteint par un indice de longévité ou de mortalité. Les q-forwards peuvent être intégrés dans les produits dérivés complexes, à l'instar des swaps et des forwards de taux d'intérêt.

Un q-forward prémunit donc un portefeuille contre un risque de mortalité ou de longévité. Ainsi, les compagnies d'assurance peuvent se couvrir du risque de pertes dues à une longévité de leurs rentiers sur une période donnée, ou dues à la révision des prévisions de longévité de leurs rentiers à la fin de la période donnée suite à la matérialisation de ce risque. En achetant ce type de produit, les investisseurs reçoivent en échange une rémunération correspondant à une certaine prime de risque et peuvent ainsi diversifier leur portefeuille.

En raison du succès qu'à connu le q-forward, un autre type de contrat a été envisagé : les futures et les swaps. Les futures sont très similaires aux contrats q-forward, des instruments de couverture du risque de longévité. Les futures sont toutefois plus rigides que les contrats q-forward, ces derniers étant personnalisés (Barrieu, Veraart, 2014 ; LIMA, 2010a). En somme, la forme de base d'un contrat futures implique la définition d'un processus sous-jacent (généralement le prix) S(t) qui définira le gain à venir et la date de livraison T du futures ; les futures de mortalité suivent cette logique (Blake, Cairns et Dowd, 2006). De nombreuses études ont montré les potentialités des marchés de futures (Gray, 1978 ; Ederington, 1979 ; Carlton, 1984 ; Black, 1986 ; Pierog Stein, 1989 ; Corkish, Holland Vila, 1997 et Brorsen Fofana, 2001). Toutefois, les contrats à terme sur la mortalité ont eu et ont encore quelques difficultés à établir un marché de longévité. Si un marché liquide d'obligations de longévité se développe à temps, alors il pourrait être possible pour un marché à terme de se développer en se basant sur le ou les prix des obligations de longévité comme sous-jacent (Blake, Cairns Dowd, 2006).

i Les swaps de longévité

Les swaps de longévité contrairement aux contrats futures ont connu un succès rétentissant. La première transaction impliquant un swap de longévité a été enregistrée par J.P. Morgan en juillet 2008, avec la Canada Life au Royaume-Uni (Blake et al., 2013). Il s'agissait d'un swap de longévité d'une durée de 40 ans, de 500 millions de livres sterling qui était lié non pas à un indice, mais à l'expérience réelle de mortalité de plus de 125 000 rentiers du portefeuille de rente de Canada Life. Elle différait également en ce sens qu'elle couvrait le risque de longévité en couvrant la variabilité des flux monétaires des prestations de retraite plutôt que seulement la variabilité de la valeur de l'élément de passif. Et il est important de souligner que cette opération a permis aux investisseurs des marchés financiers d'accéder au marché de la longévité pour la toute première fois, puisque le risque de longévité a été transféré de Canada Life à JP Morgan et ensuite directement aux investisseurs. Le swap de longévité Canada Life-JP Morgan est devenu un instrument standard de transfert du risque de longévité. Un tel swap de longévité implique l'échange régulier des paiements de la rente effectivement réalisée, ou de la prestation de retraite, contre un ensemble fixe de paiements fondés sur une espérance de vie fixe. (Blake et al., 2013 ; S. Mitchell, Raimond Maurer et P. Brett Hammond, 2014).

Un swap de longévité implique que les contreparties échangent les paiements fixes contre des paiements liés au nombre de survivants dans une population de référence au cours d'une période donnée, et peut être considéré comme un portefeuille de S-forwards, voir Dowd (2003). Les S-forwards, S signifiant "survivant" ont été développés par LLMA (2010b). Les swaps de longévité peuvent être considérés comme un flux de S-forwards dont les dates d'échéance sont différentes. L'un des avantages de l'utilisation de S-forwards est qu'il n'y a pas d'exigence de capital initial au début du contrat et que les liquidités ne sont disponibles qu'à l'échéance. Après cette transaction Canada Life - JP Morgan, les swaps de longévité (ou swaps de survie) ont retenu en raison de leurs multiples avantages, une grande attention en tant que solution de couverture du risque de longévité sur les marchés financiers. Cette seconde génération a beaucoup plus retenu l'attention des investisseurs que la première et les raisons en sont : leur capacité à gérer de façon appropriée le risque de mortalité systématique, en particulier les swaps de longévité basés sur des indices qui peuvent être négociés sous forme de contrats standardisés, et en raison de leurs coûts de couverture plus faibles.

4.1.2.3 Solutions de marché dites de troisième génération

La troisième génération d'instruments des marchés de capitaux est basée sur des options, des instruments à payoff non linéaires. Plusieurs produits de cette génération sont cités par Blake, Cairns Dowd (2006). Il s'agit notamment de : survival caps, survival floors, options sur contrats à terme de rentes, options négociées sur un marché de gré à gré et options intégrées ; ainsi que des produits plus structurés tels que les swaptions sur la mortalité. Les produits dérivés non-linéaires du risque de longévité sont une solution peu explorée et peu acceptée par les investisseurs, en raison des risques inhérents qu'ils comportent (Fung et al, 2015 ; Bayer et al. 2010).

Dans le cadre de notre étude, nous focalisons notre attention sur le swap de longévité en raison de l'attention croissante porté aux produits de seconde génération tel que décrit plus haut, mais précisement parce que le swap de longévité représente la stratégie de couverture contre le risque de longévité la plus répandue [Dahl et al., 2008]. Cette popularité est due au fait qu'il n'intègre aucun risque de base. Dans le sous-titre suivant, nous faisons une présentation détaillée du swap de longévité comme l'instrument de marché financier retenu pour couvrir l'exposition de l'assureur au risque de longévité. [5]

4.1.2.4 Fonctionnement d'un swap de longévité

Comme mentionné dans la section précédente, les swaps de longévité connaissent un succès considérable dans les solutions de deuxième génération des marchés de capitaux, en raison de leurs caractéristiques intrinsèques attrayantes. Un swap de longévité présente certains avantages par rapport à d'autres solutions sur les marchés financiers. Comme Blake et al. l'ont mentionné (2006, p. 19), les swaps peuvent être conclus à un coût de transaction inférieur à celui d'une obligation et sont plus faciles à annuler. Ils sont plus flexibles que d'autres solutions et peuvent être faits sur mesure pour s'adapter à diverses circonstances. Ils n'exigent pas l'existence d'un marché liquide, mais seulement la volonté des contreparties d'exploiter leurs avantages comparatifs ou d'échanger leurs points de vue sur l'évolution de la mortalité dans le temps. Un swap présente également des avantages par rapport aux accords d'assurance traditionnels : il implique des coûts de transaction plus faibles et est plus flexible que les traités de réassurance, du fait que les instruments ne sont pas des contrats d'assurance au sens juridique du terme et ne sont donc pas affectés par des caractéristiques juridiques telles que l'indemnité, les intérêts assurables, etc. Il s'agit plutôt d'instruments subjectifs, du point de vue des exigences de la loi sur les valeurs mobilières, de sorte qu'il est permis de spéculer sur une variable aléatoire et n'exige pas que le détenteur de la police d'assurance ait un intérêt assurable.

En raison de ces avantages, on sait d'après les contrats de l'industrie, que certaines compagnies d'assurance ont déjà conclu des swaps de mortalité ou de longévité de gré à gré (OTC). Les contreparties sont généralement des compagnies d'assurance-vie, certaines banques d'investissement y sont toutefois également intéressées. Les avantages de ces accords sont évidents : atténuation des risques et libération de capital pour la partie qui désire se débarrasser du risque de longévité, et exposition à faible risque pour la partie qui l'accepte (Blake, Cairns et Dowd, 2006, p.20). Comme l'expliquent Cox et Lin (2004), un swap de longévité peut également être utilisé pour aider les entreprises qui gèrent à la fois des annuités et des portefeuilles d'assurance-vie à gérer les couvertures naturelles implicites dans leurs positions. Le type de swap, dans ce cas, pourrait être un swap flottant contre flottant, avec une jambe flottante liée aux versements de rente du fournisseur de rente et l'autre aux versements d'assurance de l'assureur-vie (Blake et al., 2006). Les swaps peuvent également servir de véhicules pour spéculer sur le risque de longévité, donc c'est un type de contrat où toutes les parties du marché financier y trouvent leurs comptes.

Malgré ses avantages, un swap est un outil de gestion des risques et est par conséquent sujet à certains types de risques. Le principal risque qu'un swap de longévité peut présenter est le risque de contrepartie. Il s'agit là d'un problème majeur pour la plupart des swaps, car ceux-ci peuvent entraîner des expositions importantes au risque de contrepartie. Une façon simple de venir à bout de ces risques de contreparties respectifs est de préciser que les paiements doivent être effectués sur une base nette plutôt que brute, raison pour laquelle les swaps existants précisent systématiquement le paiement net (Dowd et al., 2006).

Il est plus difficile de réduire davantage le risque de contrepartie, mais de tels problèmes sont fréquents dans les produits dérivés négociés de gré à gré et les méthodes standard utilisées pour les dérivés dans les marchés de gré à gré pourraient également être utilisées pour répondre aux questions de crédit des contreparties dans le cadre de swaps de survie ou de longévité, comme mentionné par Dowd et al. (2006), les SPV, l'assurance-crédit, les dérivés de crédit etc...

Un swap peut être de différents types :

— une couverture standardisée
— une couverture personnalisée

Comme Blake et al. (2013) l'ont décrit, une couverture standardisée de swap de longévité basée sur un indice présente certains avantages par rapport à une couverture personnalisée en termes de simplicité, de coût et de liquidité. Mais ils présentent aussi des inconvénients évidents, principalement le fait qu'ils ne sont pas des couvertures parfaites et qu'ils laissent un risque de base résiduel qui nécessite un calibrage attentif de la couverture indicielle.

A l'inverse, les couvertures personnalisées sont faites sur mesure, de sorte qu'elles ont une couverture exacte (donc aucun risque de base résiduel), mais elles sont peu liquides, coûteuses et ont des échéances plus longues que les couvertures standardisées (et donc plus de risque de contrepartie), de sorte qu'elles sont moins attrayantes pour les investisseurs.[9]

Divers auteurs ont discuté et développé les swaps liés à la durée de vie (mortalité, longévité). Comme exemple, nous pouvons citer Dawson (2002), Blake (2003), Dowd (2003), Dowd et al (2006), Blake et al (2006), Cox et Lin (2004) et Lin et Cox (2005). Outre les contributions notables en termes de définition et de structure des swaps de longévité et de mortalité de Blake et al (2006 ; 2013 ; 2003) et Dowd et al. (2006 ;2003) dans leur vaste portefeuille d'articles, Lin et Cox (2004 ;2005) ont eu l'un des plus grands succès de l'histoire d'importantes contributions à ce sujet. Ces deux auteurs présentent des swaps de longévité en tant qu'instruments idéaux de gestion, de couverture et d'échange des risques liés à la mortalité et ils offrent de nombreux avantages aux compagnies d'assurance qui ont besoin de gérer de tels risques, en plus de cela, ils abordent la tarification des swaps et fournissent une analyse approfondie de la façon dont les compagnies d'assurance pourraient les utiliser pour exploiter les possibilités de couverture naturelle dans leurs activités de rentes et d'assurance-vie.

L'élément de base d'un swap de longévité «vanille» [4] est le paiement aléatoire à un instant t, d'un montant qui est fonction de l'indice de mortalité. Cet indice peut être constitué des taux de mortalité aussi bien au sein d'un groupe de la population que de la population entière. En début de contrat, les parties du swap (dans le cas d'espèce assureur et réassureur/Banque) conviennent d'échanger à une date t un montant fixe $\hat{S}(t)$ contre un montant variable S(t). Le montant $\hat{S}(t)$ est lié à l'indice de mortalité future attendue, vue de l'instant 0 tandis que S(t) est lié à l'indice de mortalité future réelle, et donc l'indice observé en t. Le paiement effectué à l'instant t est donc la différence entre $\hat{S}(t)$ et S(t), payée par la partie dont le montant est le plus élevé à cet instant. Le swap consiste en une série de ces éléments de base.

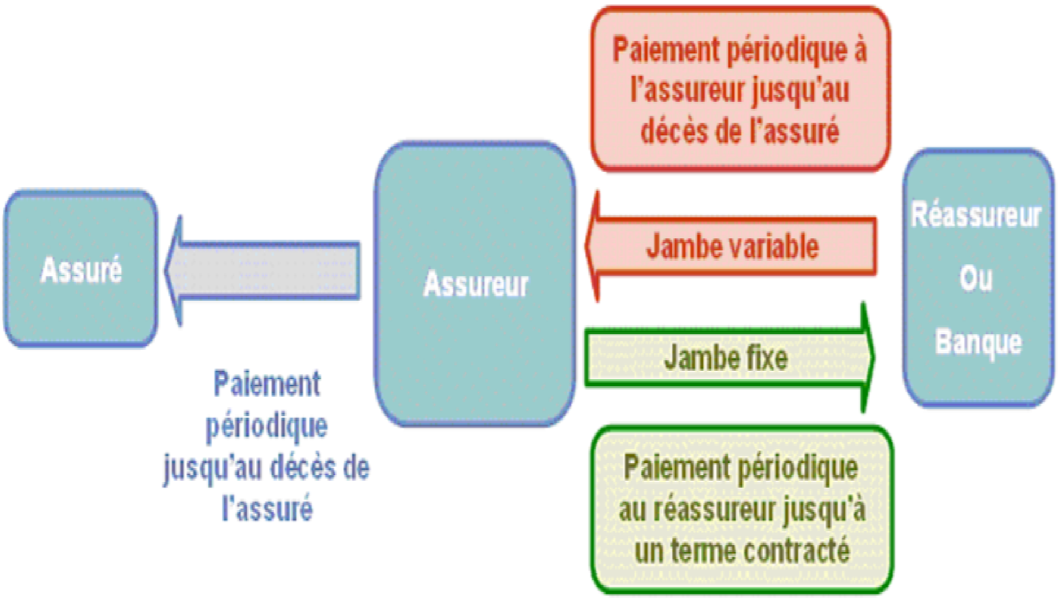

FIGURE 4.1.2 – Fonctionnement d'un swap de longévité

Exemple illustratif : Considérons une compagnie d'assurance ABC d'un portefeuille de 10 000 rentiers, tous issus d'un groupe homogéne de personnes âgées de 65 ans. La rente consiste en un versement annuel de 1EUR à chaque assuré en vie. S(0) est donc de 10 000 et S(t) décroit progressivement au fil du temps. L'assureur pourrait se positionner comme jambe fixe du swap de longévité. A chaque date de paiement, $\hat{S}(t)$ est payé, correspondant à un montant égal au nombre d'individus estimé (au début de contrat) en vie à l'instant du paiement. La jambe flottante (le réassureur) quant à elle compense la différence lorsque le taux de mortalité réel est plus bas que le taux de mortalité attendu, et inversément l'assureur compense la différence auprès du réassureur lorsque les taux de mortalité attendu sont plus élevés que les taux réels. En procédant ainsi l'assureur se débarasse du risque que ses assurés vivent plus longtemps que les prédictions, mais en revanche il ne réalisera pas non plus de

4. Ce type de swap fait penser à un swap de taux d'intérêt vanille (IRS), qui implique une jambe fixe et une jambe flottante généralement liées à un taux de marché tel que LIBOR/EURIBOR.

bénéfices lorsque les taux de mortalité seront plus élevés.

L'avantage du swap pour la cédante est qu'elle n'a plus des flux variables à payer mais uniquement des flux fixes. Ce traité lui permet donc de lisser ses résultats dans le temps mais aussi de conserver l'intégralité de ses provisions et d'augmenter la marge de solvabilité. Si l'assureur souhaite également transférer le risque financier, il devra payer une prime unique au preneur du risque financier (banque ou institution financière) en plus des flux monétaires fixes prédéterminés au réassureur. La cédante recevra en contrepartie du réassureur les paiements des rentes réelles.

4.1.2.5 Comparaison swap de longévité et swaps classiques

Le fonctionnement d'un swap de longévité a des points similaires avec ceux d'un swap de taux d'intérêt (IRS) et d'un swap de crédit (CDS) [5] . En effet, tous les trois fournissent à leurs acheteurs une assurance contre les mouvements du marché, en fixant les flux de trésorerie effectifs (nets). En outre, ils impliquent tous des paiements périodiques et ajoutent tous une prime aux paiements de la contrepartie à jambe fixe, afin que la valeur actuelle du contrat soit nulle à son ouverture.

Il existe aussi des points de dissimilitude entre swaps :
(a) un swap de taux a une jambe fixe à flux égaux (taux d'intérêt fixe sur un nominal), tandis que le swap de longévité se caractérise par une jambe fixe à flux variables tel qu'illustré ci-dessous par les figures (4.1.3) et (4.1.4).

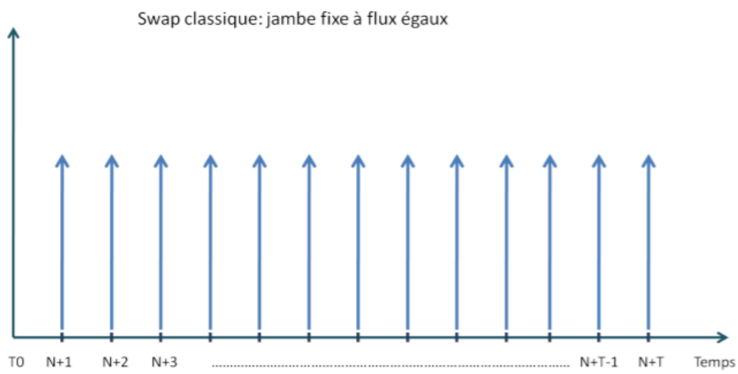

FIGURE 4.1.3 – Jambe fixe à flux égaux d'un swap classique

La jambe fixe d'un swap de longévité permet à l'assureur de figer les flux futurs qui correspondent aux engagements de rentes viagères. Par conséquent, ces flux ne peuvent être égaux

5. Dans un swap de taux d'intérêt, deux contreparties se paient mutuellement la différence entre un taux d'intérêt spécifique qui était attendu au début du contrat (un taux d'intérêt fixe) et sa valeur réalisée. Les swaps de taux d'intérêt sont négociés sur des marchés organisés. Un swap de défaut est lié à une obligation. Son acheteur reçoit la différence entre le marché et la valeur nominale de l'obligation lorsque l'émetteur de l'obligation est en défaut avant l'échéance du contrat. En échange de celà, il paie un montant périodique, soit jusqu'à l'échéance du contrat, soit jusqu'au défaut. Les swaps de défaut sont négociés uniquement sur des marchés de gré à gré (OTC). Hull [2006] fournit d'amples informations sur les swaps de taux d'intérêt et les swaps de défaut.

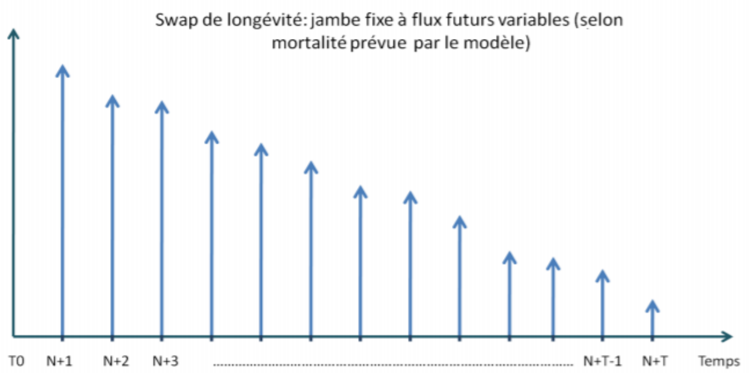

Figure 4.1.4 – Jambe fixe à flux variables d'un swap de longévité

d'une période à l'autre car ils sont fonction de la projection de la mortalité (mortalité qui baisse avec le temps) : comme le montre la figure 4.1.4 ci-dessus, les flux de jambe fixe sont décroissants au fil des années. Ils dépendent des hypothèses de mortalité futures du groupe d'assurés à la signature du contrat.

En effet, à une date t =0 , les deux parties prenantes (assureur, réassureur ou banque) decident de rentrer dans un swap : La partie variable représente le facteur risque car étant inconnue. Alors, il est admis qu'à cet instant t=0, les jambes et variables sont égales. Ceci étant, la valeur du swap (chargements exclus) est initialement nulle comme c'est le cas pour le swap classique.

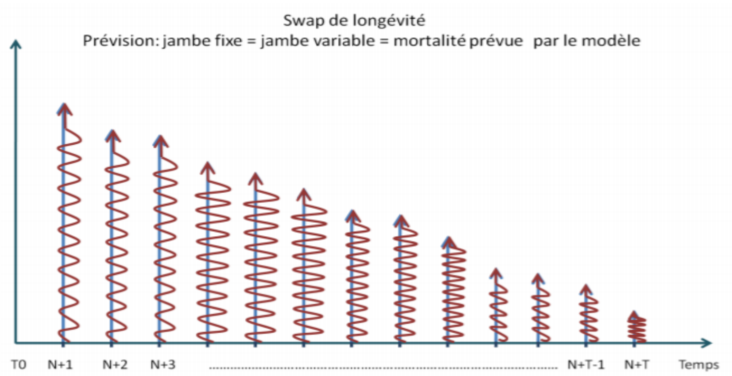

Figure 4.1.5 – Swap de longévité : prévision jambe fixe - jambe variable- mortablité prévue par le modèle

Au fil du temps, le niveau de la mortalité réelle sera plus ou moins différent de celui anticipé. Ainsi, à la fin de chaque année, assureur et réassureur/banquier s'échangent la différence entre les jambes ; différence illustrée par la flèche verte de la figure 4.1.6.

Une fois le spread échangé, les deux parties repartent sur la position initiale selon les clauses

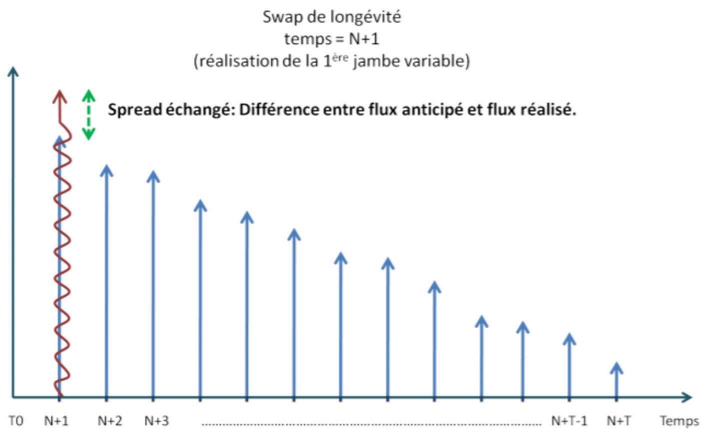

FIGURE 4.1.6 – Swap de longévité à l'instant N+1 - réalisation de la 1^e jambe variable

contractuelles. L'inconnue au sein du contrat (la mortalité future) n'est pas remise en cause. Le processus se poursuit en fin de seconde année et ainsi de suite : Les différents échanges peuvent être avantageux ou non pour l'assureur, dépendamment du niveau de mortalité réel. Les deux cas des figures 4.1.7 et 4.1.8 s'offrent à l'assureur.

(b) La jambe variable d'un swap de taux d'intérêt est basée sur un indice de taux d'intérêt disponible sur le marché des taux d'intérêt, le LIBOR par exemple, alors que la jambe variable d'un swap de longévité dépend du taux de survie réelle des assurés. Enfin, le marché des taux d'intérêt est un marché complet. De ce fait, les techniques standard de tarification se basant sur l'absence d'opportunité d'arbitrage peuvent être utilisées. Le marché des swaps de longévité est aujourd'hui incomplet. Une méthode de valorisation différente doit être utilisée dans la mesure où il n'existe pas une unique mesure de probabilité risque neutre.

A la fin de chaque année, il y aura encore un échange de spread entre les deux parties, échange qui peut être ou non favorable pour puisque dépendant du niveau de mortalité réel. La maturité d'un contrat de swap de longévité fait distinguer deux cas :

— Le swap à maturité fixée T : l'engagement du réassureur s'achève au même moment que celui de la cédante (à l'année n + T).
— Le swap sur un portefeuille en « Run – off » : l'engagement du réassureur s'achève avec le paiement de la dernière rente, autrement dit le processus se poursuivra une année après l'autre jusqu'à la mort du dernier assuré et l'extinction complète du portefeuille. Il pourrait donc arriver que la cédante continue à recevoir des prestations du réassureur, sans en payer la contrepartie.

4.1.2.6 Swap sur indice ou swap sur mesure

Les swaps de longévité ont en commun d'avoir l'une des deux formes (voir [Barrieu et al (2010)]) :

— Swap sur index : le niveau de la jambe variable dépend d'un indice publié par un organisme, comme c'est le cas avec l'index LIBOR qui est pris comme référence pour

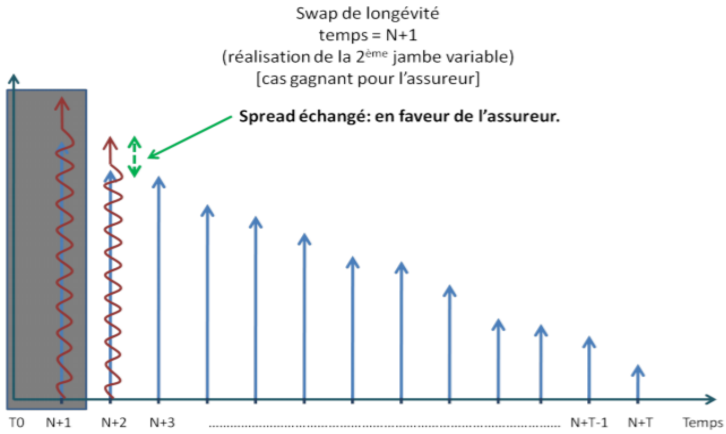

FIGURE 4.1.7 – Swap de longévité à l'instant N+1 - réalisation de la 2^{e} jambe variable : cas favorable à l'assureur

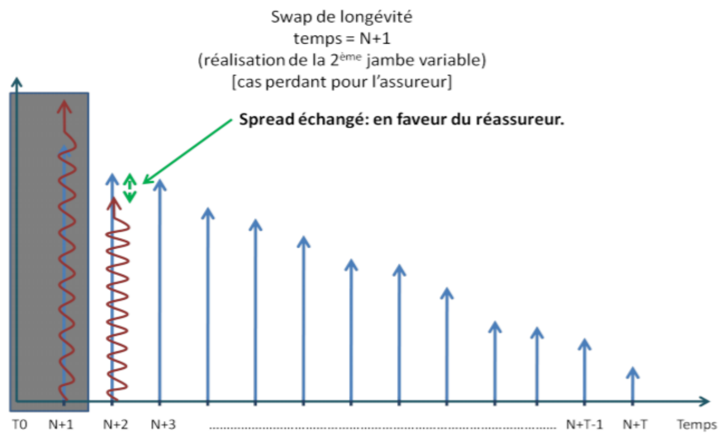

FIGURE 4.1.8 – Swap de longévité à l'instant N+1 - réalisation de la 2^{e} jambe variable : cas favorable au réassureur

les swaps de taux d'intérêt, auquel se rajoute une base (appelée aussi spread). Pour ce qui est de la mortalité, les index restent peu reconnus à l'échelle internationale. Quelques exemples d'index de mortalité qui existent sur le marché :

Index de longévité de Crédit Suisse : lancé en décembre 2005, basé sur les données nationales de la population des USA et contenant des sous-index en fonction de l'âge et le genre.

Indice de longévité de JP Morgan (rattaché à l'outil LifeMetrics) : lancé en mars 2007. Cet index couvre les USA, l'Angleterre et les Pays-Bas. Sa modélisation est transparente et disponible en open-source sur l'outil LifeMetrics.

Xpect Data : lancé en mars 2008 par "Deutsche Borse". Cet indice qui à son origine n'était focalisée que sur la mortalité allemande, inclue désormais la mortalité des Pays-Bas.

— Swap sur mesure : (indemnitaire) ici l'index dépend uniquement des caractéristiques du portefeuille de l'assuré. Notre étude est basée sur ce second type de swap.

Chapitre 5

La tarification du risque de longévité

5.1 L'approche Solvabilité II

5.1.1 La réforme Solvabilité II

Solvabilité II est un projet européen entré en vigueur le 1^{er} Janvier 2016, dont le but est l'amélioration de l'évaluation et du contrôle des risques au sein du secteur de l'assurance. Cette réforme repose sur 3 piliers :

1. Les exigences quantitatives : qui dénissent les normes quantitatives de calcul des provisions techniques et des fonds propres. Deux niveaux de capitaux y sont définis :
   — **Le MCR (Minimum Capital Requirement ou Capital Minimum Requis)** qui représente le niveau de fonds propres en dessous duquel l'intervention de l'autorité de contrôle (La BNB en Belgique) sera automatique.
   — **Le SCR (Solvency Capital Requirement ou Capital Réglementaire)** qui représente le capital nécéssaire pour absorber un choc provoqué par un risque majeur.
2. Les exigences qualitatives et contrôle prudentiel : fixe les normes qualitatives de suivi des risques internes aux compagnies d'assurance et explique comment l'autorité de contrôle doit exercer ses pouvoirs dans ce contexte.
3. Information du superviseur et du public : dénit les éléments d'information qui doivent être publiés par les compagnies d'assurance.

5.1.2 Pilier I : les exigences quantitatives

La notion de solvabilité s'explique grâce au bilan économique qui se trouve sous la forme suivante :

A_t en valeur de marché	NAV_t $BE_t + RM_t$

TABLE 5.1.1 – Bilan économique sous Solvabilité II

Avec :
— A_t : la valeur marché de l'actif de l'assureur

- NAV_t (Net Asset Value) : les fonds propres économiques qui s'obtiennent grâce à l'équation d'équilibre bilanciel suivante :

$$NAV_t = A_t - BE_t - RM_t$$

- BE_t : le Best Estimate qui signifie « meilleure estimation possible » correspond dans la directive Solvabilité II à l'actualisation de tous les flux probables futurs (cotisations, prestations, frais, fiscalité,...) actualisés avec une courbe des taux sans risque
- RM_t : La marge pour risque est défini selon référentiel Solvabilité 2, comme étant la valeur qu'il faut rajouter aux provisions Best Estimate de manière à garantir que la valeur des provisions techniques est équivalente au montant que les organismes d'assurance demanderaient pour reprendre et honorer les engagements. Elle est calculé suivant la méthode du coût du capital (CoC).

Le Best Estimate doit permettre de payer les prestations et les frais, tandis que la marge pour risque pourra être consommée de manière à garantir à ceux qui financent l'activité (par apport de fonds nécéssaires à la couverture du SCR année par année), un rendement de 6%, en plus du taux sans risque. Le calcul de la marge pour risque est cependant rendu difficile parce qu'il dépend des SCR futurs.

5.1.2.1 Le Best Estimate

Dans le cadre réglementaire Solvabilité II, le capital requis est calculé selon la notion de Best Estimate qui se définit comme : *«la moyenne pondérée par leur probabilité des flux de trésorerie futurs, compte tenu de la valeur temporelle de l'argent (valeur actuelle probable des flux de trésorerie futurs), déterminée à partir de la courbe des taux sans risque pertinente. Le calcul de la meilleure estimation est fondé sur des informations actuelles crédibles et des hypothèses réalistes et il fait appel à des méthodes actuarielles et des techniques statistiques adéquates».*

Autrement dit, les provisions techniques sont l'espérance des flux futurs de règlements actualisés. La méthode utilisée pour ce calcul peut être :

- **déterministe**, avec l'évaluation de la sinistralité ultime «moyenne» permettant, après application de cadences et de la courbe des taux, de déduire la valeur actualisée des flux futurs.
- **stochastique**, impliquant l'évaluation de la distribution des flux futurs, dont la moyenne actualisée conduit à la définition du Best Estimate.

5.1.2.2 Le SCR

Notre étude est basée sur le SCR. Pour chaque risque, le SCR se calcule en réévaluant les BEL (Best Estimate Liabilities) selon un scénario de stress spécifique. Par la suite, les SCR par risque sont agrégés afin de former le SCR global. Notre sujet abordant le risque de longévité, nous focaliserons notre attention sur le calcul du SCR longévité. La directive Solvabilité II définit le SCR comme étant le montant de fonds propre nécessaire que doit disposer un assureur pour couvrir toutes les pertes qui peuvent survenir sur un horizon d'un an avec une probabilité au moins égale à 99,5% (et d'éviter ainsi la faillite). La faillite est définie au bilan économique et correspond au cas où la valeur de marché de l'actif est inférieure à la valeur économique du passif, ou à celui où la valeur de l'actif net est négative. Plusieurs possibilités s'offrent à l'assureur pour le calcul du SCR :

— **La formule standard** : Dans cette approche, les chocs sont calibrés uniformément sur le marché de l'assurance et prennent en compte un niveau de choc bien déni. C'est cette approche que nous retenons dans le cadre de ce travail.
— **Le modèle interne** : Dans cette autre approche, l'assureur définit son SCR selon un profil de risque qui lui est propre.

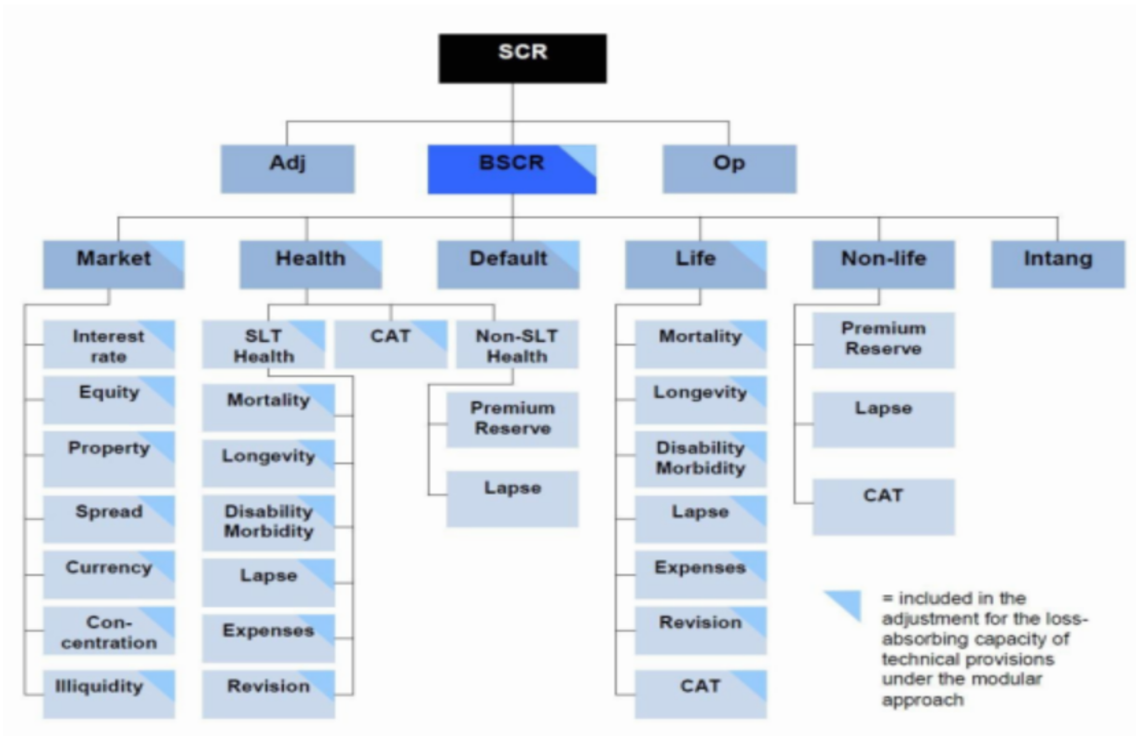

FIGURE 5.1.1 – Les modules du calcul du SCR, extrait de QIS5 [6]

Le SCR est le plus petit montant pour lequel

$$Pr(NAV_{t+1} > 0 \mid NAV_t = x) \geq 99.5\% \ (i)$$

Rappelons que NAV_t est la valeur de l'actif net au temps. Il représente la différence entre la valeur des actifs à l'instant t de laquelle est soustraite la valeur du «best estimate » des passifs (BEL) à l'instant t :

$$NAV_t = A_t - BEL_t{}^{7}$$

L'équation (ii) suivante, équivalente à l'équation (i) est la plus utilisée en pratique (Borger, 2010) :

$$SCR^{VAR}(t) := Argmin_x Pr(NAV_t - \frac{NAV_{t+1}}{1+i_{t+1}} > x) \leq 0.005 \ (ii)$$

Dans la formule standard de calcul du SCR sous Solvabilité II, le risque global d'un assureur intègre le risque de marché et le risque opérationnel pour lesquels des SCR sont calculés différemment. Le SCR longévité peut être calculé en se servant de l'une des deux équations

6. Quantitative Impact Studies initiées par EIOPA

(i) ou (ii) où A_t et BEL_t correspondement respectivement aux actifs et passifs associés à tous les contrats exposés au risque de longévité. La formule standard établit le SCR en fonction de la variation de la valeur de l'actif net résultant d'un choc permanent unique sur les taux de mortalité équivalent à un événement unique en 200 ans (ou VaR à 99.5%).

$$\text{SCR}^{Choc}(t) := NAV(t) - (NAV(t) \mid \text{Choc de longévité}) \; (iii)$$

Le choc de longévité dans la formule standard est une réduction permanente à la meilleure estimation de la mortalité de 20% pour tous les âges (EIOPA, 2011). La directive solvabilité II exige que l'assureur valorise son passif selon une vision best estimate. Les engagements ne pouvant être valorisés en valeur de marché, la directive exige que le best estimate des engagements soit augmenté d'un montant appelé marge pour risque (Risk Margin). La marge pour risque permet donc d'obtenir une approximation de la valeur de marché du passif, valeur que reclamerait un autre assureur pour reprendre le passif de la compagnie d'assurance à sa juste valeur à la sortie. La marge pour risque se calcule selon l'approche du coût du capital (En faisant l'hypothèse d'un coût de capital de 6%) et est fonction du SCR. Son expression est de la forme suivante :

$$RM = 6\%. \sum_t Z(0,t).SCR_t$$

où *Z(0, t)* est le prix d'une obligation zéro-coupon qui paie 1$ à la fin de l'année t(EIOPA, 2011).

5.2 Tarification du swap de longévité

Le marché des dérivés de longévité contient plus d'investisseurs à court terme qu'à long terme : le montant du risque de longévité fourni est supérieur au montant du risque de longévité exigé (Loeys et al, 2007). Les investisseurs prêts à accepter le risque de longévité exigent donc une compensation pour celui-ci. Dans le cadre de la détermination des termes du swap, une prime est donc ajoutée à la jambe fixe. Cette prime encore appelée «prix » du swap, est proportionnellement liée à la valeur des paiements fixes. Au début du swap, la prime (π) est fixée de telle sorte que les deux côtés du swap soient égaux (la valeur initiale du contrat est nulle).

$$\begin{aligned} PV(S(t)) &= PV[(1+\pi)\hat{\text{S}}(t)] \tag{5.2.1} \\ &= (1+\pi)PV[\hat{\text{S}}(t)] \tag{5.2.2} \\ \iff \pi &= \frac{PV[S(t)]}{PV[\hat{S}(t)]} - 1 \tag{5.2.3} \end{aligned}$$

Le montant $\hat{S}(t)$ est lié à l'indice de mortalité future attendue (montant associé à la jambe fixe), vue de l'instant 0 tandis que S(t) est lié à l'indice de mortalité future réelle ; autrement dit à l'indice observé en t (montant associé à la jambe flottante).

La valeur de la prime peut être déterminée à l'aide de plusieurs méthodes :

7. Les décisions originales Autorité européenne des assurances et des pensions professionnelles (EIOPA) définissent le SCR en terme de "capital disponible". La variation du capital disponible peut être approchée par la variation de la Net Asset Value (Borger, 2010).

1. **La méthode de transformation de Wang** utilise le marché de l'assurance comme point de départ. Cette méthode convertit les paiements variables attendus en leurs équivalents risque neutre à l'aide d'un prix de risque du marché spécifique (du marché de l'assurance), et détermine la prime en résolvant l'équation 5.2.3. Cette procédure a été présentée par Dowd et al (2005) comme une méthode d'évaluation utilisée dans la pratique pour l'évaluation de plusieurs swaps de longévité. Elle consiste en une fonction à un seul paramètre (qui dépend de l'âge et de l'année) λ_x qui est appliquée à la probabilité historique de mortalité :

$$\tilde{q}_x(t) = \phi(\phi^{-1}(q_x^{ref}(t)) + \lambda_x)$$

où :
— $\tilde{q}_x(t)$ représente la probabilité risque neutre
— ϕ : la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite N(0, 1).
— ϕ^{-1} : la fonction inverse de ϕ
— $q_x^{ref}(t)$: la probabilité historique.
— λ_x : la prime de risque.
Cette fonction est également utilisée par Denuit et al.(2007).

2. **La méthode du ratio de Sharpe** est basée sur des parallèles avec le marché des capitaux. Elle attribue un ratio de Sharpe et détermine la prime de longévité à terme en supposant que le total de (1+π)PV[Ŝ(t)] est égal à la valeur actuelle de la jambe flottante. Cette méthode est expliquée par Loeys et al (2007) comme la procédure que JP Morgan a l'intention d'utiliser dans la tarification de ses q-forwards.

   C'est via ce ratio de Sharpe que l'on peut calculer la performance d'un investissement comparé à celle d'un placement sans risque en utilisant la formule suivante :

$$S_p = \frac{R_p - R_F}{\sigma_p}$$

où :
— S_p : Ratio de Sharpe du portefeuille P risqué
— R_p : Rendement du portefeuille risqué P
— R_F : Rendement sans risque
— σ_p : Volatilité du portefeuille risqué P

3. **La tarification risque neutre** : Boyer et Stentoft (2013) ont montré comment les distributions risque neutre et la simulation risque neutre pouvaient être utilisées pour évaluer les produits dérivés, comme les contrats à terme, les swaps et les options.

   Dans les produits dérivés de longévité, la mortalité ou la longévité sont négociées comme un tout autre type d'actif sous-jacent. Toutefois, la mortalité ou la longévité ne sont pas des actifs négociés en continu et, en tant que tels, ce marché doit être considéré comme incomplet et une prime de risque existe pour l'exposition à ce type d'actifs risqués (Boyer et Stentoft, 2013).

   Toutefois, selon (Schrager, 2006 ; Wills et Sherris, 2011) la tarification risque neutre convient aux contrats d'assurance vie souscrits sur plusieurs cohortes et âges puisque les modèles risque neutre peuvent saisir de façon constante la dépendance entre les différentes polices du portefeuille d'un assureur.

5.2.1 La tarification risque neutre

Une caractéristique commune des méthodes d'évaluation proposées est que le prix du marché du risque de longévité est déterminé en grande partie par la volatilité prévue des taux de survie sous-jacents.

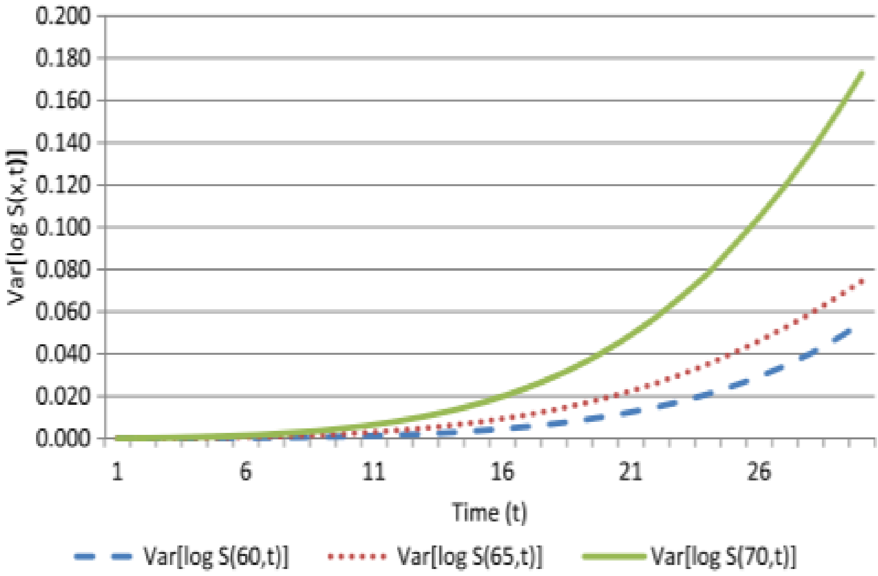

FIGURE 5.2.1 – Variance des taux de survie par cohorte d'hommes britannique âgés de 60, 65 et 70 ans. Basé sur les tables de mortalité d'hommes de 1970 à 2000.

La figure 5.2.1 montre la volatilité des taux de survie des hommes au Royaume-Uni pour différents âges. Le risque de longévité sur des horizons relativement courts est très faible, mais à des horizons supérieurs à 10 ans, il augmente très rapidement en raison de la volatilité des taux de survie sous-jacents (Cairns et al., 2006).

En outre le principal problème de toutes ces méthodes est qu'il existe peu de données sur le prix du marché du risque de mortalité par rapport auquel les modèles peuvent être calibrés. Au délà de cet inconvénient commun, les approches autres que la tarification risque neutre présentent des inconvénients supplémentaires ; les méthodes de transformation développées dans la littérature actuarielle, y compris la transformation de Wang (2000), sont largement critiquées pour les raisons suivantes : elles ne sont pas des fonctions linéaires et offrent donc des possibilités d'arbitrage (Kijima et Muromachi, 2008). De plus, la relation entre les transformations pour différentes cohortes et les durées jusqu'à la maturité n'est pas claire (Cairns et al., 2006). La méthode du ratio de Sharpe quant à elle ne tient pas compte de la dépendance entre les différents âges. Nous faisons le choix de la tarification risque neutre car cette méthode colle mieux à notre étude, en capturant la dépendance entre les cohortes.[4]

5.2.1.1 Modèle de mortalité

Le modèle de mortalité utilisé est celui retenu à la section 3.1.3 du présent mémoire. L'une des principales raisons de l'utilisation de ce modèle est qu'il tient compte des changements prévus de la mortalité par cohorte ainsi que de la dépendance entre les cohortes, ce qui est important pour la modélisation des portefeuilles d'assurance-vie qui couvrent plusieurs cohortes.

5.2.1.2 Formule de tarification

Nous évaluons le swap de longévité sur différentes durées jusqu'à son échéance et sous différentes hypothèses pour λ. λ représente le prix du risque et est calibré en fonction des données disponibles sur les prix du marché (nous y revenons dans le chapitre 6 consacré à l'impact de la couverture du risque de longévité).

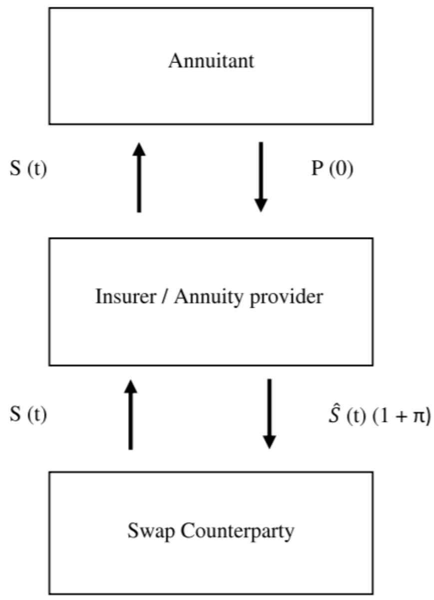

FIGURE 5.2.2 – Flux de trésorerie (Cash-flow) d'un swap de longévité

Pour un swap de T années d'un montant nominal F, à l'année $t < T$, le flux de trésorerie vers la jambe fixe est F.S(x, t) et le flux de trésorerie vers la jambe flottante est F.$\hat{S}$(x, t)$(1+\pi_T)$ (tel que l'illustre la figure 5.2.2).
En utilisant la tarification risque neutre, la valeur d'un swap pour le payeur fixe, à l'instant 0 est la somme de la valeur actualisée de tous les flux de trésorerie prévus sous la mesure de probabilité risque neutre Q. Sous l'hypothèse standard que l'évolution des taux de mortalité au fil du temps est indépendante de la dynamique de la structure à terme des taux d'intérêt, la valeur d'un swap pour la jambe fixe à l'instant 0 est la suivante :

$$V(0) = F.\sum_{t=1}^{T} Z(0,t).E_{Q(\lambda)}.S(x,t) \tag{5.2.4}$$

où T est le nombre d'années restant jusqu'à l'échéance. Autrement dit, la valeur du swap est la somme des indices de survie prévus selon la mesure de probabilité risque neutre Q tel que $E_{Q(}\lambda)$.S(x,t) = exp(-$\int_0^t \mu^Q(x,t))ds$ actualisés au taux sans risque.

Le prix du swap est fixé de sorte qu'aucun paiement ne change de mains au début de la transaction. Cela signifie que la valeur actuelle des segments fixe et flottant du swap à l'instant 0 doit être égale, de sorte que :

$$\sum_{t=1}^{T} Z(0,t)E_{Q(\lambda)}S(x,t) = \sum_{t=1}^{T} Z(0,k)\hat{\text{S}}(x,t)(1+\pi) \tag{5.2.5}$$

Le prix d'un swap de longévité équivaut donc à la recherche d'une prime π_t qui satisfait (5.2.5). Nous nous ramènons à la forme générale vu en tout début de sous-section 5.2. La résolution de l'équation (5.2.5) en fonction de π_t donne :

$$\pi_t = \frac{\sum_{t=1}^{T} Z(0,t)E_{Q(\lambda)}S(x,t)}{\sum_{t=1}^{T} Z(0,t)\hat{S}(x,t)} - 1 \tag{5.2.6}$$

5.2.1.3 Simulation de Monte Carlo

Le calcul de la prime de risque π_t implique qu'on sache déterminer la valeur de $E_{Q(}\lambda)$S(x,t) où S(x,t), rappelons-le, représente la survie réelle c'est à dire la proportion de survivants d'âge x à la date de début de contrat (t= 0) et encore vivants au moment t. Pour ce faire, nous utilisons les simulations de Monte Carlo de l'équation 3.1.17, en nous servant des estimateurs par maximum de vraisemblance de a, b, σ, δ_{xy}. Les étapes de simulation sont les suivantes :

- obtenir 10 000 trajets d'échantillonnage de $\Delta W^Q(x,t)$ sous la probabilité risque neutre en simulant 10 000 variables aléatoires de loi Normale Z_y(t) pour chaque âge et en évaluant l'équation 3.1.13 ;
- Etant donné le chemin d'échantillonnage $\Delta W^Q(x,t)$, calculer les probabilités de décès futures en pas de temps annuels comme suit : $\mu^Q(x,t) = \mu^Q(x,0) + \sum_{y=1}^{t} \Delta\mu^Q(x,y)$;
- Faire la moyenne de l'ensemble des 10 000 réalisations de $\mu(x,t)$ par âge pour obtenir $E_{Q(}\lambda).\mu(x,t)$, la moyenne des probabilités de décès futures sous Q ;
- Poser : $E_{Q(}\lambda)$.S(x,t)=$\Pi_{s=0}^{t}(1 - E_{Q(\lambda)}).\mu(x,s))$.

Le paiement de la jambe fixe est basé sur la survie prévue $\hat{S}(x,t)$, qui est fondée sur les hypothèses actuarielles de best estimate de la mortalité des hommes en Belgique en 2017, projetées à l'aide de taux d'amélioration annuels moyens par âge sur 25 ans. Une fois que π_T a été estimé, le coût du swap est calculé comme étant la valeur actualisée des paiements de prime sur la jambe fixe, donnée par :

$$\hat{\pi}_t \sum_{t=1}^{T} Z(0,t).\hat{S}(x,t). \tag{5.2.7}$$

Chapitre 6

Impact de la couverture du risque de longévité

6.1 Présentation

L'importance pour un assureur de se couvrir contre le risque de longévité n'est pas à démontrer. En effet, cette couverture a un impact multiforme sur la compagnie (Comptable, financier, opérationnel, etc...). L'impact financier et donc celui sur le capital retiendra grandement notre attention.

6.1.1 Impact Comptable

Le secteur de l'assurance est sujet à l'inversion de cycle de production, donnant ainsi une grande importance au passif des compagnies d'assurance. L'engagement de l'assureur dans le cas du risque de longévité, est porté sur le long terme et le résultat et le résultat n'est connu qu'à l'extinction de tous les assurés. Un résultat négatif au bout des premières années ne révèle rien quant au résultat final de l'assureur. Cela n'empêche toutefois pas l'assureur de comptabiliser une perte importante en début de contrat ; ceci dans l'espoir que la tendance s'inverse et s'équilibre pour le reste des années. Par une couverture d'un swap de longévité ou contrat de réassurance, l'assureur pourra lisser son résultat sur toute la période de son engagement.

6.1.2 Impact opérationnel

Le risque opérationnel est dans toutes les activités d'une entreprise. L'objectif de l'assureur qui met en place une couverture est de céder une partie de son risque. Pour ce faire, l'assureur est obligé de bien définir son portefeuille d'assurés. Ce portefeuille doit être fermé et transparent pour le réassureur. Cette transparence exigée forcera l'assureur à plus de vigilence dans la souscription de ses contrats, d'où un gain en terme de vigilance opérationnelle. Le risque opérationnel de l'assureur sera réduit.

6.1.3 Impact financier

Un avantage palpable de la couverture du risque de longévité est le coût qu'elle génère. Notre défi est de montrer par la valorisation d'un swap que le prix payé par l'assureur à la contrepartie sera inférieur au coût des fonds propres qu'il devra immobiliser en cas d'absence de couverture. le capital réglementaire mis à disposition de la compagnie dans le cadre de Solvabilité II obligera celle-ci à rémunérer les investisseurs du marché ou ses actionnaires, selon la source de financement. Ce coût de rémunération du capital étant assez élevé, le swap reste une alternative intéressante au coût du capital. En effet, si un risque est parfaitement couvert, alors sous la directive Solvabilité II, l'assureur ne se verra pas obligé de detenir le capital reglémentaire pour cette année là.

	Pas de couverture	Achat d'un obligation de longévité de T années
Paiement	S(x,t) tous les ans	(1+π). $\hat{S}$(x,t) d'un à T années S(x,t) à partir de T+1 années
Capital requis	SCR(t) tous les ans	0 d'un à T années SCR(t) à partir de T+1 années

Table 6.1.1 – Flux de trésorerie et exigence en capital sous différents scénarios de couverture.

L'achat d'un swap de longévité de maturité T modifie les flux de trésorerie et les besoins en capital, comme le montre le tableau 6.1.1. Lorsqu'un swap de longévité de maturité T est en place, l'assureur ne paiera que la longévité prévue à chaque date de paiement, puisqu'il recevra la différence entre les paiements de longévité réels et prévus de la contrepartie au swap et qu'il paiera les paiements contractuels réels aux rentiers. Pour ajouter de la valeur, le coût de la couverture doit être inférieur à la réduction connexe du coût du capital de l'assureur. Une réduction du SCR à l'instant t = 0 est une mesure de l'avantage de la couverture, tout comme l'économie du coût du capital pour les T années au cours desquelles le risque de longévité est couvert.

Autrement dit, la détention d'une couverture de T années génère une économie théorique de $k\% \sum_{t=1}^{T} .Z(0,t)\Delta SCR(t)$ à l'instant t=0 avec $k\%$ le coût annuel du capital et $\Delta SCR(t)$ est la réduction de capital de l'année t résultant de la détention de la couverture. Dans le cadre de Solvabilité II, le coût du capital est fixé à 6% et la marge de risque intégrale $6\% \sum_{t=1}^{T} .Z(0,t)SCR(t)$ en année 0. Le coût de l'économie de capital résultant de la couverture pour T années est déterminé par la variation de la marge de risque après la mise en place de la couverture.

6.2 Résultats

6.2.1 Hypothèses

Plusieurs hypothèses doivent être formulées pour la détermination du coût du swap et le calcul du SCR sous Solvabilité II :

— Le taux d'actualisation est fixé à 4% pour toutes les maturités, conformément à Cairns et al. (2006). Ce taux est utilisé à titre illustratif, car il ne reflète pas la réalité actuelle des taux d'intérêt bas.

— Le coût du capital est fixé à 6%, conformément à la directive Solvabilité II.

— Les prix sont calculés pour des hommes belges avec un prix d'achat pour de rente viagère de 100 000 €.

— L'hypothèse du «Best Estimate» est utilisée par l'assureur pour la tarification ; de même qu'elle est utilisée pour les paiements de la jambe fixe du swap. Nous supposons que le swap est fondé sur l'indemnisation de la population assurée.
— Les bénéfices, impôts, coûts de friction sont exclus des calculs, de même que les exigences de Solvabilité II autres que celles liées au risque de longévité.

6.2.2 Modèle de mortalité

6.2.2.1 Données et méthodologie

Le modèle de mortalité a été ajusté aux données observées sur la population masculine belge pour la tranche d'âge x = 50, . . . 99 et la période de temps t = 1976, . . . , 2017. Les taux de mortalité centraux ont été obtenus à partir de Human Mortality Database (HMD). Ci-dessous la mortalité brute observée sur une population d'hommes belges sur la période 1976 - 2017 :

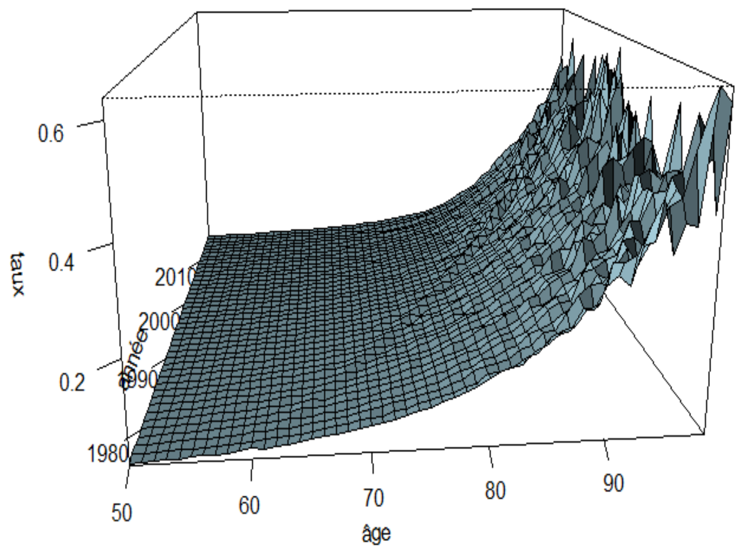

FIGURE 6.2.1 – Taux de mortalité observés sur une population d'hommes belges sur la période 1976 - 2017

L'utilisation des taux de mortalité centraux est justifiée car en supposant que la force de mortalité est constante pour chaque âge entier et chaque année civile, de sorte que $\mu(x+u, t+s) = \mu(x, t)$ pour les entiers x et t et tous les $0 \leq$ (s,u) ≤ 1, si la taille de la population à tous les âges reste constante au cours de l'année civile, il s'ensuit que : $\hat{\mu}$(x,t) = m(x,t) avec m(x,t) le taux central de mortalité entre l'âge x+t et l'âge x+t+1.

Les estimateurs par maximum de vraisemblance, fournis par les équations 3.1.25, 3.1.26 et

3.1.28 pour les paramètres $\hat{a}$, $\hat{b}$ et $\hat{\sigma}$ (voir p. 10 Wills et Sherris, 2011) sont présentés dans le tableau ci-après :

Paramètre	Estimateur du MV
$\hat{a}$	-9.84*10^{-4}
$\hat{b}$	0.13658
$\hat{\sigma}$	0.09544

Table 6.2.1 – Paramètres estimés pour le modèle de mortalité par Maximum de Vraisemblance.

La dépendance entre les taux de mortalité est modélisée sur la base de la dépendance dans le processus de mortalité multivarié de Wiener $d\underline{W}(t)$ dont l'expression est donnée par l'équation 3.1.6. Afin d'estimer la dépendance entre les âges, les résidus sont pris du model avec $\hat{a}$, $\hat{b}$ et $\hat{\sigma}$ basés sur leurs estimateurs par maximum de vraisemblance afin d'obtenir des résidus standardisés donnés par l'équation suivante

$$r(x,t) = \frac{(\Delta\mu(\hat{x,t})/\mu(\hat{x,t})) - (\hat{a}(x+t)+\hat{b})}{\hat{\sigma}} \tag{6.2.1}$$

Ces résidus sont représentés sur le graphique suivant :

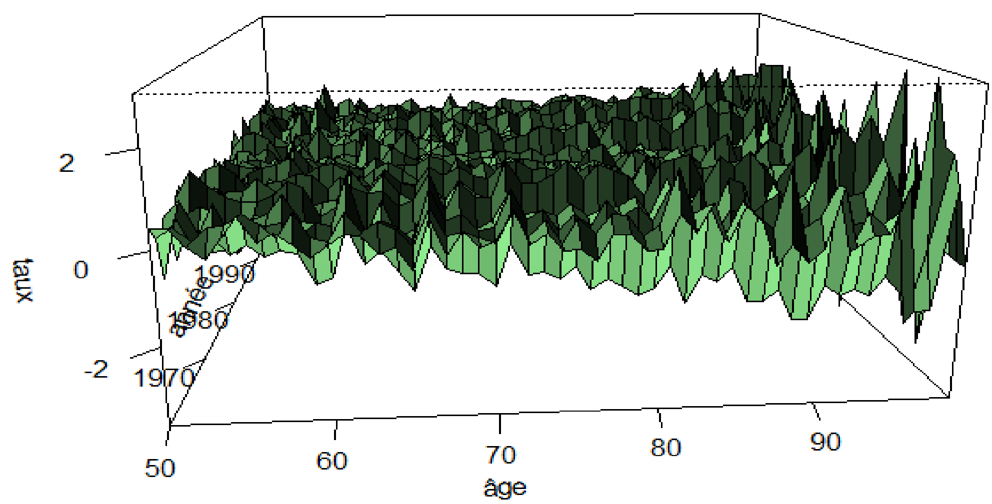

Figure 6.2.2 – Résidus ajustés pour des hommes 1971 à 2017

Le graphique indique que l'hypothèse selon laquelle les résidus sont normalement distribués avec une moyenne de 0 et une variance de 1 est raisonnable. Il n'y a pas de tendances dans la dimension de l'âge ou du temps, et les résidus sont distribués de façon aléatoire autour de 0. L'ajustement du modèle est confirmé par les données descriptives résiduelles qui montrent que l'erreur-type de l'estimation moyenne est faible et que l'écart-type des résidus est très proche de 1.

	Valeur
Moyenne	-3.89*10^{-3}
Erreur Standard	0.029
Ecart-type	0.961
Minimum	-3.013
Maximum	3.157
Intervalle de confiance	0.040

TABLE 6.2.2 – Statistiques descriptives des résidus

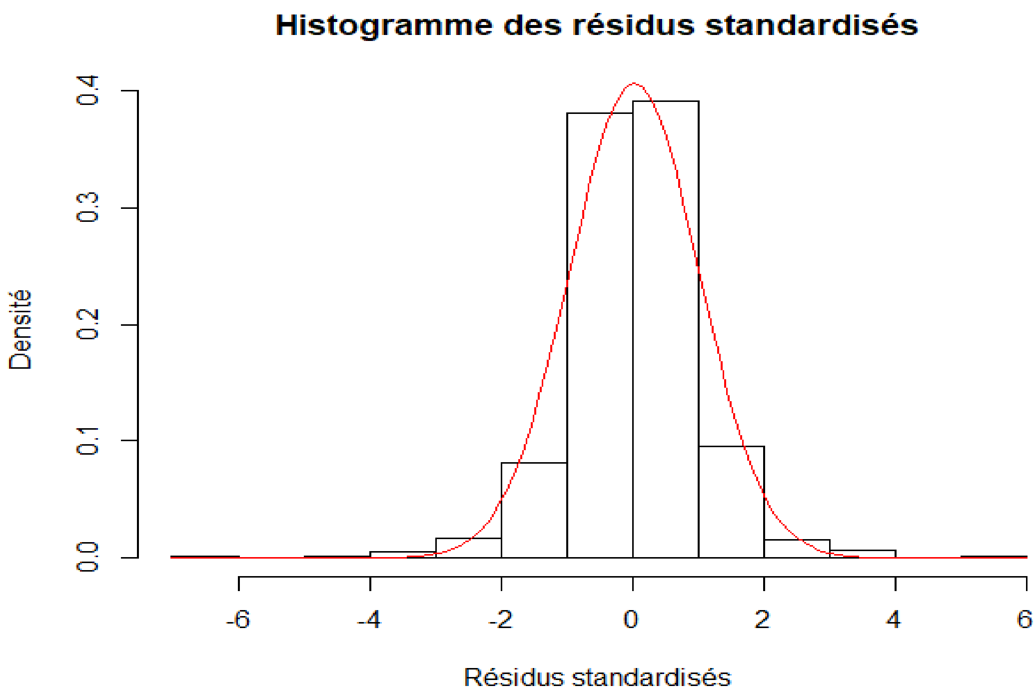

FIGURE 6.2.3 – Histogramme des résidus standardisés

6.2.3 Prix de marché du risque de longévité

Les valeurs de λ sont déterminées en fonction en fonction des prix du marché disponibles. Comme nous l'avons dit dans la littérature, on observe une pénurie des prix du marché en ce qui concerne les produits dérivés de longévité . Les auteurs précédents ont estimé les valeurs de λ sur la base de l'obligation de longévité annoncée par BNP Paribas et la Banque Européenne d'Investissement en 2004, voir par exemple Cairns et al. (2006). Nous calibrons λ au prix du risque impliqué dans l'émission d'obligations à long terme de la Banque européenne d'investissement (BEI)/BNP Paribas annoncée en novembre 2004. Toutefois, l'obligation ne s'est pas vendue, ce qui suggère que les modèles calibrés sur ces données peuvent inclure un prix du risque conservateur. Pour cette raison, nous testons la robustesse de nos résultats en utilisant une fourchette autour de la valeur calibrée pour le prix du risque : 0.25, 0.5 et 0.75.

6.2.4 Primes de risque de longévité

Le calcul de la prime s'effectue via la calibration de la jambe fixe du swap, pour trois cohortes commençant à 60, 65 et 70 ans et pour des maturités allant de 0 à 30 ans. Nous observons que la prime augmente en fonction de l'âge initial de la cohorte et de la maturité ; ceci s'explique par la grande volatilité des taux de mortalité aux âges plus avancés. Cette prime augmente en fonction d'un autre facteur qui est le prix de marché de la longévité (λ) et son accroissement est non-linéaire aux âges avancés.

La marge facturée pour la réassurance de la longévité est une proportion fixe des paiements de rentes pendant la durée du contrat. La marge est fondée sur le Best Estimate du passif, compte tenu de l'amélioration de la mortalité et des résultats techniques de l'assureur en matière de mortalité. La marge dépend de nombreux facteurs mais se situe généralement autour de 50bp (basis point) du taux d'intérêt utilisé pour évaluer les paiements attendus. Sur la base des paiements de prestations prévus, cela équivaut approximativement à un chargement de prime de réassurance de 5% sur chaque paiement prévu pour une obligation émise sur une cohorte de 65 ans pour la vie (Blackburn et al., 2012).

L'équation 5.2.5 permet de calculer la prime du swap par l'équivalence entre la jambe fixe et la jambe flottante à l'instant t=0. La prime est calculée pour différents âges initiaux, différents prix de marché du risque et différentes échéances, pour les cohortes et les temps mentionnés au premier paragraphe de cette sous-section (confère tableau en annexe)

6.2.5 Minimisation du coût du capital

La couverture contre le risque de longévité à travers un swap permet à l'assureur de réduire le capital de solvabilité qu'il doit détenir selon les exigences de la directive Solvabilité II.

Pour que le swap génère un flux de trésorerie positif, la diminution du SCR à $t = 0$, ou la réduction du coût du capital telle que mesurée par la marge de risque de Solvabilité II, doit être supérieure aux coûts de couverture. Les figures 6.2.4, 6.2.5 et 6.2.6 de la page 54 montrent la diminution du SCR, la diminution de la marge de risque et les coûts de couverture en fonction des maturités pour les âges initiaux $x = 60, 65, 70$ et les prix de marché du risque de longévité $\lambda = 0.25, 0.50, 0.75$.

Interprétation

Nous observons que la couverture de la longévité est rentable pour des âges moins avancés (inférieurs à 85 ou 90 ans de manière générale) quelque soit la valeur du prix du risque de longévité. Il est préférable pour l'assureur d'opter pour la détention du capital pour une bonne gestion de son risque de longévité au delà de 85 ans. Le coût de couverture diminue parce qu'après 85 ans, le nombre de survivants est moins conséquent qu'avant. Le prix du swap augmente avec l'augmentation de la valeur du prix du risque de longévité car le prix du risque de longévité a une incidence proportionnellement plus grande sur la probabilité de survie à des âges plus élevés.

Le SCR augmente en fonction de la variation du Best Estimate du passif dans un scénario de choc défavorable. Aux âges les plus avancés et au fur et à mesure de l'accroissement de la maturité, l'augmentation marginale du SCR est plus faible que l'augmentation marginale du coût de la couverture parce que les engagements les mieux estimés augmentent proportionnellement moins que la volatilité des taux de survie sous-jacents.

Le tableau 6.2.3 résume la maturité optimale pour la couverture du risque de longévité. Cette maturité optimale étant le point de croisement entre le coût de la couverture et l'économie du SCR. Les résultats des 6.2.4, 6.2.5 et 6.2.6 montrent que l'âge initial de la cohorte de référence et le marché de la longévité ont un impact significatif sur la maturité à laquelle il est rentable pour l'assureur de couvrir le risque de longévité.

λ (bp)	λ=25	λ=25	λ=25	λ=50	λ=50	λ=50	λ=75	λ=75	λ=75
Age initial	60	65	70	60	65	70	60	65	70
Maturité optimale	>25	21	16	25	20	15	25	20	15
Age Croisement	>85	86	86	85	85	85	85	85	85

Table 6.2.3 – Durée optimale pour la couverture du risque de longévité

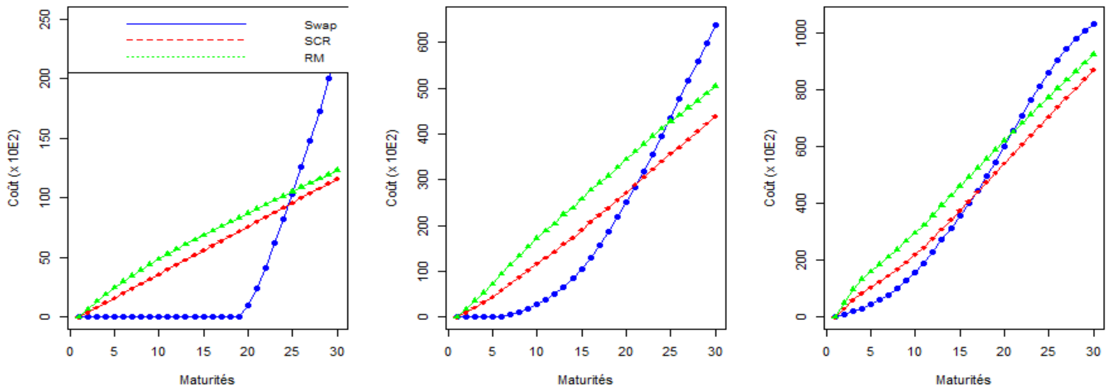

FIGURE 6.2.4 – Comparaison coût du swap, SCR et RM pour $\lambda = 25$bp à 60, 65 et 70 ans.

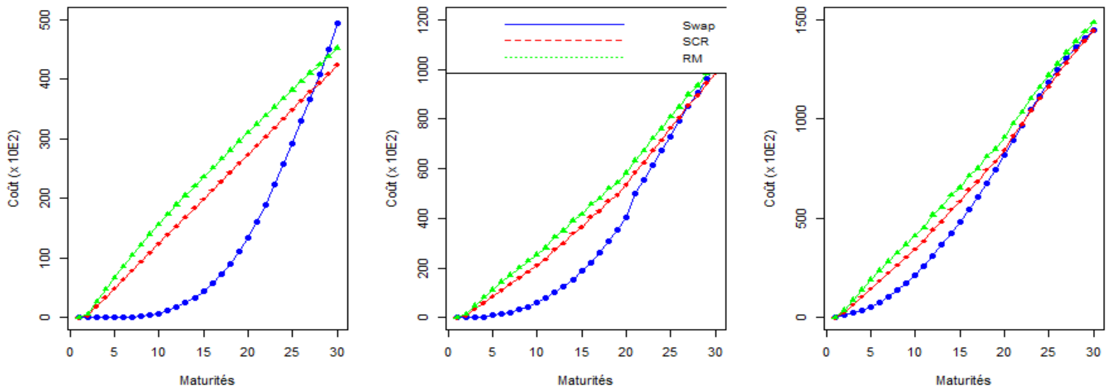

FIGURE 6.2.5 – Comparaison coût du swap, SCR et RM pour $\lambda = 50$bp à 60, 65 et 70 ans.

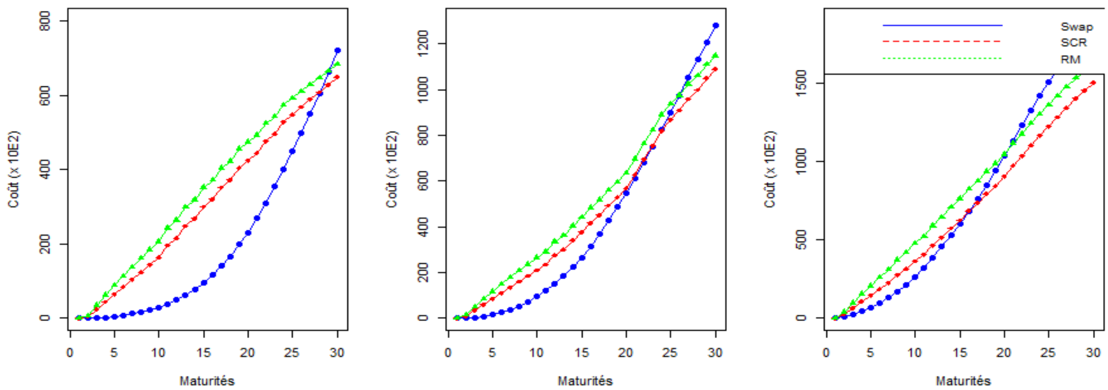

FIGURE 6.2.6 – Comparaison coût du swap, SCR et RM pour $\lambda = 75$bp à 60, 65 et 70 ans.

Chapitre 7

Conclusion

Avec l'augmentation de l'espérance de vie enregistrée au fil des années, due à plusieurs facteurs tels que l'évolution de la médécine, il devient important pour les compagnies d'assurance vie et les fonds de pension de mieux appréhender le risque de longévité. La régulation et l'importance du risque inhérent poussent le marché à mieux gérer ce risque. Ainsi, les compagnies d'assurance vie peuvent transférer leur risque de longévité aux réassureurs et aux marchés financiers grâce à plusieurs produits dont le swap de longévité. Il est toutefois difficile d'éffectuer ce transfert de par l'aspect long terme du risque de longévité. En outre, les compagnies d'assurance vie font face à la variation des taux de mortalité des portefeuilles d'assurés, qui sont bien différents des taux de mortalité de la population générale par l'effet de sélection. Plusieurs méthodes ont pour but la calibration de cette longévité spécifique sur une longévité de référence.

Nous avons comparé le coût du capital requis sous Solvabilité II à celui d'un swap de longévité pour des cohortes d'âges différents et en fonction de plusieurs maturités. Ensuite, nous avons déterminé la durée optimale sur laquelle le risque de longévité doit être couvert par des swaps de différentes échéances dans le cadre des exigences de capital de Solvabilité II. Il a été démontré que la couverture du risque de longévité pour les âges supérieurs à 85-90 ans est onéreuse par rapport au coût du capital. En pratique, cela signifie qu'il est plus rentable pour les assureurs-vie de maintenir le risque de longévité sur leur propre bilan, plutôt que de le transférer à la réassurance ou aux marchés de capitaux. Les résultats sont robustes aux coûts de friction, à la variation du prix du marché de risque de longévité et ne sont pas spécifiques à l'utilisation de la formule standard de Solvabilité II.

La volotalité des taux de survie sous-jacents font accroitre le prix du swap de longévité. D'autre part, les besoins en capitaux augmentent en fonction de l'évolution du Best Estimate des passifs sous un scénario de stress. Comme la volatilité des taux de survie augmente proportionnellement plus que le Best Estimate des passifs à des âges plus élevés, le coût de la couverture dépasse la réduction des exigences en capital qu'elle génère autour de 85 à 90 ans. En d'autres termes ce resultat est en partie d*û* à la régulation Solvabilité II, qui fixe l'exigence du capital à une différence des meilleures estimations des passifs sous un choc de «1 sur 200 ans». Les titres liés à la longévité à long terme ne constituent pas un moyen rentable de couvrir le risque de longévité à des âges plus élevés par rapport aux coûts du capital en vertu de Solvabilité II. La réassurance peut coûter moins cher que les titres liés à la longévité sur le marché, car les réassureurs bénéficient de la diversification en ajoutant le risque de longévité à un portefeuille contenant le risque de mortalité. Il serait cependant intéressant de se pencher sur la gestion du risque de longévité via la conception des contrats individuels en faisant en sorte que les paiements dépendent du rendement de l'ensemble du portefeuille (Norberg, 2013).

Bibliographie

[1] Loriaux, F.,Loriaux, M. (2010). Financement des pensions : leçons de l'histoire et réflexions pour l'avenir. UCL, 1-5.

[2] Saber, T. (2011). Risque de Longévité : Modélisation et Couverture. Mémoire d'actuariat, Ecole Nationale de la Statistique et de l'Administration Economique, 9-80.

[3] Obersteadt, A. (2016). Managing longevity risk. 14-19. https ://slidex.tips/download/by-anne-obersteadt-cipr-senior-researcher.

[4] Wills, S., Sherris, M. (2011). Integrating Financial and Demographic Longevity Risk Models : An Australian Model for Financial Applications. Article de recherche, University of New South Wales Australian School of Business, 1-24.

[5] Dos Santos, S.A (2017). Pricing Longevity Swaps : An empirical investigation using the risk-neutral simulation method. Mémoire de statistique et management, NOVA information Management School, 7-24.

[6] Wills, S., Sherris, M. (2010). Securitization, Structuring and Pricing of Longevity Risk. Insurance : Mathematics and Economics 46, 173-185.

[7] Barrieu, P., Bensusan, H., El Karoui N., Hillairet, C., Loisel, S., Ravanelli, C., Salhi, Y. (2012). Understanding, Modelling and Managing Longevity Risk : Key Issues and Main Challenges. Scandinavian Actuarial Journal 2012, 203-231.

[8] Planchet, F. (2009). Risque de longévité et détermination du besoin en capital. Article de colloque, 10-96.

[9] Kandji, M. (2016). Le swap de longévité : modélisation et mesure d'impact d'une solution de réassurance innovante sous Solvabilité II. Mémoire d'actuaire, Institut de Statistique de l'Université de Paris, 86 pages.

[10] Zeddouk, F., Devolder, P. (2019). Pricing of Longevity Derivatives and Cost of Capital. Risks 7, 1-29.

[11] Wills, S., Sherris, M. (2008). Financial Innovation and the Hedging of Longevity Risk. Asia-Pacific Journal of Risk and Insurance 3, 1-14.

[12] Chung Fung, M., Ignatieva, K., Sherris, M. (2019). Managing Systematic Mortality Risk in Life Annuities : An Application of Longevity Derivatives. Risks 7, 1-25.

[13] Westland, H. (2009). Hedging longevity risk with longevity swaps. Mémoire de mastère en finance quantitative, 1-73

[14] Brouhns, N., Denuit, M. (2002). Risque de longévité et rentes viagères. Article de revue, 26-48.

[15] Blake, D., Cairns, A., Dowd, K., Kessler, A. (2018). Still living with mortality : the longevity risk transfer market after one decade. Article de revue, 1-86.

[16] Bensusan, H. (2010). Risques de taux et de longévité : Modélisation dynamique et applications aux produits dérivés et à l'assurance vie. Thèse de doctorat de l'école polytechnique, 131-160

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
Faculté des sciences
Place des sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | **www.uclouvain.be/sc**