Institut de Statistique, Biostatistique et Sciences Actuarielles

Année Académique : 2020-2021

Calcul de primes d'assurances de personnes en R.

Membres du jury :
Prof. DENUIT Michel *Promoteur*
Prof. ARS Pierre *Lecteur*

Mémoire présenté en vue de
l'obtention du master
en sciences actuarielles
par :
ALLOU-YA Davy
INAMAHORO Bélise

Remerciements

Nous remercions tous ceux qui, d'une manière ou d'une autre, ont contribué à la réalisation de ce mémoire.

Tout d'abord, nous remercions Dieu pour sa protection et la santé. Nous sommes très reconnaissants à l'Ecole de Statistique, Biostatistique et Sciences Actuarielles (LSBA) et à la Faculté des Sciences de l'Université Catholique de Louvain pour nous avoir permis d'étudier ici.

Nous remercions profondément les Professeurs, enseignants invités et conférenciers de la LSBA et autres travailleurs de la faculté, en particulier Madame Sophie MALALI.

Nos remerciements spéciaux et chaleureux à notre Professeur, le Professeur Michel DENUIT qui nous a encouragé et dirigé. Ses conseils nous ont permis de mener ce travail à terme. Pour toute faute, nous assumons l'entière responsabilité.

Nous sommes aussi profondément reconnaissant à nos informateurs. Leurs noms ne peuvent être divulgués, mais nous tenons à reconnaître et à apprécier leur aide et leur transparence au cours de ce travail. Leurs informations nous ont permis de mener à bien ce mémoire.

Nous remercions également nos familles respectives qui nous ont encouragé et qui ont prié pour nous tout au long de nos recherches.

Ce mémoire est chaleureusement dédié à nos mères respectives qui ont pris le chemin du ciel avant ce travail.

Résumé

Modèle de tarification et de calcul des réserves en assurance de personnes pour le risque dépendance se basant sur des tables existantes d'entrée et de maintien en dépendance.

Abstract

Pricing and reserve calculation model for LTC insurance based on existing LTC entry and retention tables.

Table des matières

1 Introduction

Depuis quelques années, le vieillissement est devenu un sujet préoccupant pour les pays occidentaux comme la France et la Belgique. En effet, l'accroissement de l'espérance de vie est de plus en plus important. Cet allongement de l'espérance de vie fait apparaître un nouveau risque : la dépendance.

La modélisation du risque de dépendance reste un sujet complexe. En effet, il s'agit d'un risque nouveau dont les caractéristiques techniques sont assez difficiles à appréhender d'autant plus que ce risque est à déroulement très long.

Non seulement les évolutions futures des tables de transition entre autonomie, dépendance et décès ne sont pas simples à anticiper, mais de plus les coûts unitaires des soins et aides de longue durée sont susceptibles d'évoluer alors que les primes sont difficilement modifiables au cours de la vie du contrat.

Ce mémoire aura pour objectif de proposer un modèle de tarification et de calcul de réserves pour le risque dépendance se basant sur des tables existantes d'entrée et de maintien en dépendance :

- des lois d'incidence (probabilité d'entrée en dépendance), par âge
- des lois de survie en dépendance, présentées par âge à l'entrée en dépendance et ancienneté dans l'état

La première partie du mémoire débutera par une définition de la dépendance, ensuite, par une présentation de la source de nos données et la méthodologie de la construction des tables en incidence ou en dépendance et enfin par une analyse de la structure des courbes en incidence et en dépendance.

La deuxième partie traitera des principaux outils dans la mise en place et le suivi d'un contrat dépendance qui sont les modèles de tarification et de provisionnement.

2 Généralités

L'accroissement prévu du phénomène de dépendance pour les années à venir dans les pays occidentaux et tout particulièrement la Belgique s'explique par le vieillissement de la population. Ce dernier est dû à deux causes principales : l'allongement de l'espérance de vie et la forte natalité sur la période de « baby-boom » après la deuxième guerre mondiale.

Au 1er Janvier 2020, 2,2 millions de personnes âgées de 65 ans et plus sont recensées en Belgique soit 19% de la population belge dont 15% étaient âgées de 85 ans et plus.

Au même titre, l'on recensait au 1er Janvier 1992, 1.5 millions de personnes âgées de 65 ans et plus soit 15% de la population (Source : Statbel, Direction générale Statistique - Statistics Belgium).

Le nombre de personnes âgées a donc tendance à croitre au cours des années et par conséquent, le nombre de personnes âgées et dépendantes devrait croitre également.

Pour bien comprendre et gérer le risque de dépendance, il est indispensable d'en avoir une définition précise.

2.1 Définition de la dépendance

La dépendance ou perte d'autonomie, se définit par l'impossibilité totale ou partielle d'accomplir seul certains actes de la vie quotidienne (AVQ), comme par exemple se déplacer d'un lit à une chaise, s'habiller et se déshabiller seul, se nourrir seul, etc. Elle se manifeste généralement chez les personnes âgées.

Les origines de la dépendance peuvent être diverses : le vieillissement, la maladie, un accident. Elle peut être de nature physique et fonctionnelle et/ou psychique.

Il existe différents degrés de dépendance : la dépendance légère, la dépendance partielle, la dépendance totale.

Pour évaluer le degré de dépendance, les pouvoirs publics et les assureurs utilisent le plus souvent les grilles AGGIR (Autonomie Gérontologie Groupes Iso-Ressources) et les critères des AVQ (Actes élémentaires de la Vie Quotidienne), avec parfois des tests psychotechniques en complément (Test « Folstein »).

La grille AGGIR est un questionnaire mis en place par les pouvoirs publics en France, dans le cadre de l'attribution de l'Allocation personnalisée d'autonomie (APA). Cet outil sert également aux assureurs. Il permet d'évaluer les capacités de la personne à accomplir 10 activités corporelles et mentales, dites discriminantes, et 7 activités domestiques et sociales, dites illustratives.

Les activités discriminantes permettent de déterminer le « groupe iso-ressources » (Gir) de l'assuré. Il existe 6 « groupes iso-ressources ». En fonction des réponses au questionnaire, un Gir est attribué à l'assuré par un professionnel de santé. Le Gir 1 définit les personnes les plus dépendantes et le Gir 6 celles qui font preuve d'une autonomie totale.

GIR	Degrés de dépendance
GIR 1	Personne confinée au lit ou au fauteuil, dont les fonctions mentales sont gravement altérées et qui nécessite une présence indispensable et continue d'intervenants Ou Personne en fin de vie
GIR 2	Personne confinée au lit ou au fauteuil, dont les fonctions mentales ne sont pas totalement altérées et dont l'état exige une prise en charge pour la plupart des activités de la vie courante Ou Personne dont les fonctions mentales sont altérées, mais qui est capable de se déplacer et qui nécessite une surveillance permanente
GIR 3	Personne ayant conservé son autonomie mentale, partiellement son autonomie locomotrice, mais qui a besoin quotidiennement et plusieurs fois par jour d'une aide pour les soins corporels
GIR 4	Personne n'assumant pas seule ses transferts mais qui, une fois levée, peut se déplacer à l'intérieur de son logement, et qui a besoin d'aides pour la toilette et l'habillage Ou Personne n'ayant pas de problèmes locomoteurs mais qui doit être aidée pour les soins corporels et les repas
GIR 5	Personne ayant seulement besoin d'une aide ponctuelle pour la toilette, la préparation des repas et le ménage
GIR 6	Personne encore autonome pour les actes essentiels de la vie courante

Le niveau de dépendance peut être également mesuré par la capacité des personnes à effectuer seules certains actes de la vie quotidienne (AVQ). 6 AVQ ont été recensés : Toilette, Habillage, Alimentation, Continence, Déplacement à l'intérieur du logement, Transfert. Le degré de dépendance de l'assuré augmente en fonction du nombre d'AVQ qu'il ne parvient pas à effectuer de manière autonome.

Le test « Folstein » ou « Mini Mental Score » (MMS), est un outil d'évaluation cognitive permettant de mesurer l'état de dépendance psychique. Il est souvent utilisé lorsqu'il y a suspicion de démence et de la maladie d'Alzheimer. Le Test « Folstein » est réalisé par un médecin - neurologue ou psychiatre. Il prend en compte l'étude de l'orientation temporaire et spatiale, l'apprentissage, la mémoire, l'attention, le raisonnement et le langage.

En résumé, une personne en état de dépendance légère correspondrait à un Gir 5. L'état de dépendance partielle se situe aux Gir 3 et 4 de la grille AGGIR. Enfin, l'état de dépendance lourde correspond aux Gir 1 et 2.

2.2 Le marché de l'assurance dépendance

Il existe deux principaux types d'assurance dépendance. Le premier couvre le risque de la dépendance en tant que risque principal tandis que le deuxième le prend comme un risque complémentaire. Il existe en ce domaine deux types de contrats : le contrat individuel signé en général sans intermédiaire, entre l'assureur et le souscripteur qui est souvent l'assuré et le contrat collectif souscrit par une entreprise, une mutuelle ou une association. L'assuré n'a pas la qualité de souscripteur, mais de bénéficiaire.

Il est possible de cumuler un contrat individuel et un contrat collectif pour garantir le risque dépendance.

Les contrats individuels sont facultatifs, les primes sont calculées pour chaque individu tandis que les contrats collectifs sont souvent obligatoires et une prime unique est proposée à tout le monde. Une présélection des assurés est éventuellement possible pour les contrats individuels mais non pour les contrats collectifs.

En France, la mise en place de la Prestation Spécifique Dépendance (PSD) puis de l'Allocation Personnalisée d'Autonomie (APA) a permis un financement partiel. En Belgique, une formule d'assurance publique a vu le jour et l'on note un développement parallèle de l'offre privée de produits d'assurance.

En Belgique, les compétences concernant l'aide et les soins aux personnes dépendantes sont réparties entre le pouvoir fédéral et les régions. Ainsi, les compétences liées aux soins sont du ressort du niveau fédéral, tandis que les politiques d'aide aux familles et aux personnes âgées sont de la compétence régionale.

En Belgique, les personnes âgées ayant un degré d'autonomie réduit ont droit à une allocation financière. Cette allocation pour l'aide aux personnes âgées (APA) fait partie des allocations pour personnes handicapées. La garantie de revenus aux personnes âgées (GRAPA) est un revenu minimum que les pouvoirs publics allouent aux pensionnés dont les moyens de subsistance sont insuffisants. Les frais non-médicaux des personnes âgées peuvent représenter des sommes importantes. C'est pourquoi le gouvernement flamand a introduit l'assurance dépendance.
L'assurance "dépendance" flamande octroie aux personnes sévèrement dépendantes une intervention dans les frais de soins non médicaux (montant de 130 € par mois). Toute personne âgée de plus de 25 ans habitant en Flandre est obligée de contracter cette assurance.
L'assurance "dépendance" n'est pas la même chose que l'assurance-maladie qui intervient dans les frais médicaux et est proposée par les mutuelles.

Afin de devenir membre de l'assurance "dépendance", vous devez vous affilier à une des 7 caisses d'assurance soins reconnues en Flandre. Vous avez trois possibilités :

- La caisse d'assurance soins de votre mutualité (dans laquelle vous avez votre assurance-maladie ou un produit complémentaire) :
  - Christelijke Mutualiteiten-Zorgkas Vlaanderen,
  - Neutrale Zorgkas Vlaanderen,

  - Zorgkas van de Socialistische Mutualiteiten,
  - Zorgkas van de Liberale Ziekenfondsen,
  - Zorgkas van de Onafhankelijke Ziekenfondsen,

- La Caisse d'assurance "dépendance" de DKV Belgium s.a.,
- La Vlaamse Zorgkas (Caisse flamande d'assurance soins).

Si vous habitez en Région de Bruxelles-Capitale, vous pouvez choisir de souscrire l'assurance dépendance flamande. (Source Service Public Fédéral Sécurité Sociale ; www.communauteurbaine.be/vivre/les-services/sante)

Notons que l'entreprise d'assurance DKV Belgium SA propose l'assurance individuelle dépendance qui, en cas de perte d'autonomie grave et durable de l'assuré, octroie une indemnité mensuelle, ainsi que des services spécifiques.
Cette assurance s'adresse à toute personne n'ayant pas atteint l'âge de 70 ans à la conclusion du contrat, ayant son domicile et sa résidence fixe et habituelle en Belgique ou dans un autre pays de l'Union européenne moyennant l'accord préalable de l'assureur.

L'option Plan Exo garantit à partir de 65 ans (l'âge limite de souscription) l'exonération du paiement de la prime du plan Exo et DKV Home Care pendant la période du séjour en soins résidentiels.(Source http ://www.dkv.be/)

Le Gouvernement wallon a définitivement adopté le projet de décret visant à mettre en place une assurance autonomie.
À l'horizon 2060, la Wallonie comptera en effet deux fois plus de personnes âgées de 80 ans et plus que maintenant. Cette évolution générant un besoin croissant en matière d'aide aux personnes, cette assurance vise à déployer une véritable couverture sociale pour répondre aux besoins liés à l'allongement de la vie et à la perte d'autonomie.

Les objectifs sont d'une part d'augmenter l'autonomie des personnes. En effet, prévenir la perte d'autonomie et en retarder la progression en accompagnant les personnes à domicile tout au long de la vie, que la perte soit momentanée ou de longue durée. D'autre part, il s'agit de garantir aux personnes pensionnées un choix de lieu de vie. Que ce soit leur domicile, une maison de repos ou une institution pour personnes handicapées, une allocation basée sur les principes actuels de l'APA (l'allocation aux personnes âgées), c'est-à-dire en fonction des revenus du ménage et du taux de perte d'autonomie.

L'assurance autonomie sera organisée en deux branches distinctes. D'une part, des interventions à domicile assurées par les Services d'aide aux familles et aux aînés (SAFA) quel que soit l'âge du bénéficiaire en perte d'autonomie. Cette branche de l'assurance autonomie s'adresse aux personnes en perte d'autonomie au sens large. Elle permet l'intervention au domicile dès les premiers symptômes de la perte d'autonomie momentanée ou définitive. Elle donnera droit à un montant mensuel d'heures utilisables pour des prestations d'aides à domicile : aide-ménagère sociale, aide familiale et garde à domicile. Ce montant mensuel variera en fonction de l'état de dépendance du bénéficiaire. Le degré de la perte d'autonomie sera évalué sur base du BelRAI screener (outil international d'évaluation scientifique) complété d'un module social permettant de prendre en compte des facteurs sociaux comme critères de dépendance.

D'autre part, le droit à une allocation forfaitaire autonomie (AFA) pour les personnes de plus de 65 ans en perte d'autonomie aux revenus les plus faibles, quel que soit le lieu de résidence (maison de repos ou domicile). Cette branche de l'assurance, conditionnée par des critères d'âge (65 ans et plus) et de revenus, accordera au bénéficiaire une intervention financière calculée sur la base de son niveau d'autonomie. Le degré de la perte d'autonomie sera évalué par des travailleurs à orientation paramédicale désignés au sein des organismes assureurs wallons. Ce sont également ces organismes qui assureront le versement de l'APA dont le montant variera de 85 à 571 € par mois en fonction des revenus de la personne.

En ce qui concerne les cotisations, toute personne habitant en Wallonie sera d'office affiliée au service « assurance autonomie » de son organisme assureur. L'assurance autonomie constituera l'une des branches de la future protection sociale wallonne. Le paiement d'une cotisation sera obligatoire à partir de l'année dans laquelle la personne atteint l'âge de 26 ans. Celle-ci sera de 36 € annuels (18 € pour les personnes bénéficiant de l'intervention majorée – BIM ou OMNIO). Par ailleurs, les personnes n'ayant pas atteint l'âge de 26 ans, ne paieront pas la cotisation mais auront droit au bénéfice de l'assurance autonomie (en tant que personne à charge). La perception des cotisations sera effectuée par les organismes assureurs à partir de 2020. La totalité des cotisations seront injectées dans un fonds dédié à la prise en charge des personnes en perte d'autonomie.

Quant aux conditions d'accès, il faut être en état de dépendance. L'irréversibilité ne sera pas une condition d'accès au bénéfice de l'assurance autonomie puisque la volonté est également de permettre aux personnes ayant eu un accident de pouvoir en bénéficier. Ensuite, il faut être en ordre de cotisations auprès du service « assurance autonomie » de son organisme assureur ; Enfin, au moment de la prise en charge, il faut résider depuis au moins 3 ans, de façon ininterrompue en Région wallonne.

Notons que le budget global dédié au fonctionnement de l'assurance autonomie est d'un peu plus de 500 millions € par an, dont plus de 120 millions € consistent en des moyens nouveaux dégagés par le Gouvernement wallon.
(Source :https ://www.wallonie.be/fr/actualites/une-assurance-autonomie-pour-tous)

2.3 Données utilisées

Les données n'ont pas été traités par nos soins, nous présentons les travaux de Schwarzinger M. (2018).

Les données nécessaires à la construction des lois d'expérience proviennent de la base de données issues du Programme de Médicalisation des Systèmes d'Information (PMSI). Le PMSI est un dispositif faisant partie de la réforme du système de santé français. Afin de mesurer l'activité et les ressources des établissements de santé, il est nécessaire de disposer d'informations quantifiées et standardisées.

La collecte d'information concerne les années 2008 à 2013. Ces données reprennent la totalité des informations médicales et administratives enregistrées lors des hospitalisations publiques ou privées en court séjour (MCO), en soins de suite et réadaptation (SSR), à domicile (HAD) ou en psychiatrie (PSY), avec chaînage des hospitalisations par numéro anonyme unique dont certaines caractéristiques d'entrée (âge en entier et code postal de résidence) et de sortie de l'hôpital (décès) (Agence Technique de l'Information sur l'Hospitalisation (2010), Agence Technique de l'Information sur l'Hospitalisation (2014)).

Ces informations ont été recueillies sur la population hospitalisée âgée de plus de 50 ans et résidant en France métropolitaine. Les données de cette base ne sont pas rendues publiques.

Dans cette étude, compte tenu des données disponibles, nous avons considéré deux types de perte d'autonomie (cognitive (démence) ou physique(grabataire)) au caractère mutuellement exclusif. En effet, dans les rares cas (<5%) où une démence et un état grabataire sont enregistrés dans le suivi du patient, l'enregistrement de la démence précède le plus souvent celui de l'état grabataire que nous avons alors identifié comme une « perte d'autonomie cognitive totale ».

La construction des tables de loi d'incidence s'appuie sur les données des bases nationales d'hospitalisation (PMSI) pour la population âgée de plus de 50 ans, résidant en France métropolitaine et en « bonne santé » (i.e., sans pathologie grave ou perte d'autonomie avérée) observée sur la période comprise entre le 01/01/2010 et le 31/12/2012. Compte tenu des volumes de données relativement importants, les estimations sont stratifiées selon le sexe.

Les résultats sont décomposés selon deux types de dépendance : l'incidence en dépendance cognitive (ou « démence ») ou en dépendance physique (ou « état grabataire »).

La construction des tables de survie en dépendance s'appuie sur une exploitation des bases nationales d'hospitalisation (PMSI 2008-2013) permettant d'identifier la population générale âgée de plus de 50 ans et en bonne santé au 1er janvier 2010 puis les effectifs incidents en dépendance et les décès en dépendance sur une période de référence 2010-2012. (cf. Schwarzinger M. (2018)).

La survie en dépendance est estimée selon le sexe et le type de dépendance, i.e. démence ou sinon dépendance physique. La caractérisation de ces deux états de dépendance à l'hôpital peut raisonnablement être rapprochée de la notion de dépendance « lourde » (GIR 1 et 2) retenue généralement par les assureurs.

Nos résultats sont également décomposés selon l'état de dépendance cognitive ou dépendance physique.

Les tables construites sont statiques, ne disposant pas d'une profondeur historique suffisante pour faire un modèle dynamique.

2.4 Méthodologie de construction des tables

Nous n'avons pas traité nous même les données mais nous présentons les travaux de Guibert Q., Planchet F. et Schwarzinger M. (2018a) ; Guibert Q., Planchet F. et Schwarzinger M. (2018b) ; Guibert Q., Planchet F. et Schwarzinger M. (2018c).

Dans cette partie, nous nous appuyons sur la méthodologie développée dans Guibert, Q., Planchet F.(2014), pour construire des lois d'incidence en dépendance totale par âge entier, à partir d'un modèle à risques concurrents à quatre états, distinguant l'incidence en dépendance cognitive ou en dépendance physique. L'article cité propose une méthodologie d'estimation non paramétrique basée sur l'utilisation de modèles multi-états. Cette méthodologie est introduite dans le cadre de modèles multi-états markoviens avec censure, pour construire des lois d'expérience applicables en présence de plusieurs évènements concurrents. Cette situation se présente en pratique en assurance dépendance lorsqu'il est nécessaire de distinguer les lois d'incidence par pathologie. Aussi, plutôt que d'appliquer des techniques utilisées usuellement par les praticiens, consistant à observer marginalement chaque cause d'entrée en dépendance, l'approche décrite permet d'estimer globalement l'ensemble des lois d'entrée par cause et de correctement appréhender l'interdépendance entre chacune d'elle.

En assurance de personnes, il est relativement courant que les praticiens utilisent des techniques basées sur les durées marginales, obtenues à partir de l'estimateur de Kaplan, E. L. Meier, P. (1958), ou par positionnement par rapport à une référence externe, et une hypothèse d'indépendance entre celles-ci pour estimer les taux d'incidence bruts. Or ces choix peuvent apparaître critiquables puisqu'ils ne permettent pas de correctement appréhender la dépendance entre les durées de maintien marginales. Nos résultats sont décomposés selon les deux types de dépendance présentés en amont.

2.4.1 Incidence

La méthodologie d'estimation et de lissage repose successivement sur une définition des taux d'incidence en dépendance totale, une estimation des taux d'incidence bruts, un redressement sur les expositions nationales et enfin une régularisation et extrapolation des lois d'incidence.

- L'estimation des lois d'incidence en dépendance totale est examinée au moyen d'un modèle à risques concurrents. Le modèle comporte 4 états tel que représenté à la Figure 1 :
  - L'état e_0 « autonome » : représente un état sans dépendance totale (ou autonomie),
  - 2 états e_1 et e_2 de dépendance dans lesquels l'assuré est centré suite à des causes différentes : l'état 1 correspond à un état de dépendance physique (ou état grabataire), l'état 2 correspond à un état de dépendance cognitive (ou démence),
  - L'état e_3 « décédé » : correspond au décès qu'elle qu'en soit la cause.

Dans la suite de cette étude, nous nous focalisons plus particulièrement sur les états 2 et 3, ainsi que sur la réunion des deux qualifiée de « dépendance totale ».

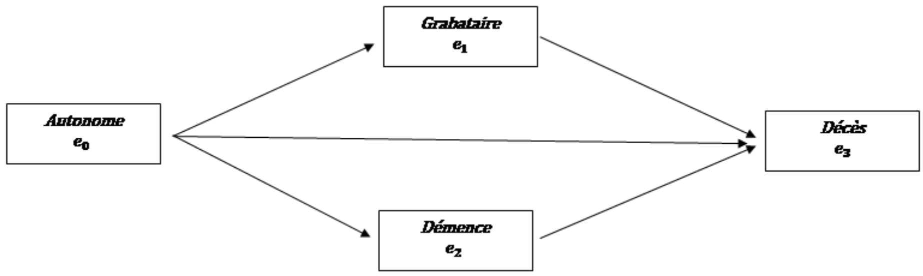

FIGURE 1 – Modèle multi-états utilisé pour mesurer l'incidence en dépendance totale.

En présence de données censurées à droite et tronquées à gauche indépendantes et non informatives, une estimation non paramétrique des taux d'incidence est conduite en utilisant l'estimateur d'Aalen-Johansen pour un modèle à risques concurrents.
(cf. Andersen, P. K., Borgan, Ørnulf, Gill, R. D. Keiding, N. (1993))

Les estimateurs des taux d'incidence sont estimés sur la population en bonne santé observée à l'hôpital. Ils doivent cependant être ajustés pour pouvoir être extrapolés à la population générale en bonne santé. La sélection des observations à l'hôpital conduit en effet à reconsidérer les expositions au risque d'une part, et le nombre d'individus entrés en dépendance totale d'autre part.

Concernant les durées d'exposition au risque, les individus non hospitalisés sont a priori en bonne santé (i.e. sans pathologie grave nécessitant une hospitalisation).

Concernant la survenance de la dépendance totale, il n'existe pas, à notre connaissance, de données françaises informatives sur la couverture du risque à l'hôpital. L'hypothèse est faite que le risque dépendance est observé de manière exhaustive à l'hôpital sur la période considérée.

En conclusion, les deux hypothèses utilisées pour le redressement des estimations conduisent :

- à un réajustement du nombre d'individus exposés au risque à chaque âge entier, en supposant que le ratio nombre d'individus exposés à l'hôpital sur population générale en bonne santé est égal à celui des durées d'exposition par tranche d'âge annuelle ;

- à une possible sous-estimation du nombre d'individus entrés en dépendance totale (notamment physique) en se limitant aux cas les plus graves ayant nécessités une hospitalisation.

Les taux d'incidence bruts sont lissés par une méthode de splines cubiques (Chambers, J. M. Hastie, T.J. [1992] ; Delwarde, A. Denuit, M. (2005)).

Etant donné que nous n'avons pas travaillé sur les données brutes, nous présentons la description générale de cette méthode. Cette méthode consiste à recourir à la minimisation d'une fonction objectif pénalisant les irrégularités de $f(.)$. La fonction à minimiser est :

$$S = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i)]^2 + \lambda \int_a^b [f"(t)]^2 dt$$

Où λ est une constante et $a \leq x_1 \leq ... \leq x_n \leq b$
$x_1, x_2, ..., x_n$ représentent les âges et $y_1, y_2, ..., y_n$ respectivement les taux d'incidences bruts correspondants.

Le premier terme dans l'expression ci-dessus assure que $f(.)$ ajustera au mieux les données tandis que le second pénalise un ajustement trop irrégulier. Lorsque $\lambda \to \infty$, le terme pénalisant l'irrégularité de $f(.)$ domine, forçant la dérivée seconde de $f(.)$ à s'annuler partout, et fournissant la droite de régression comme solution. Lorsque $\lambda \to 0$, la pénalisation disparait et on obtient une interpolation parfaite (par un polynôme de Lagrange). Le recours à cette technique suppose que $f(.)$ est deux fois continument différentiable et que $f"(.)$ est carré intégrable. Avec cette méthode de lissage, le paramètre λ permet d'ajuster le niveau de lissage désiré. Le choix de ce paramètre s'effectue à l'aide du critère de validation croisée.

$$CV(\lambda) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (y_i - \hat{f_\lambda}^{-i}(x_i))^2$$

Avec $\hat{f}_\lambda^{-i}$ l'estimation de $f(x_i)$ obtenue à l'aide de l'échantillon $\{(x_j, y_j), j \neq i\}$, de taille $n-1$.

Le critère de validation croisée privilégie le pouvoir de prédilection du modèle retenu alors que la somme des carrés des résidus privilégie la qualité de l'ajustement d'un ensemble donné d'observations.

Cette méthode permet également d'extrapoler les résultats. Compte tenu des données disponibles, les taux d'incidence bruts sont lissés sur la tranche d'âges 50-95 ans et pondérés par les durées d'exposition au risque, puis ils sont extrapolés entre 96 et 100 ans.

D'autres techniques de lissage peuvent bien entendu être utilisées comme par exemple les modèles Additifs Généralisés(GAM).

Nous validons ici l'utilisation des lois présentées en amont,les différentes approches testées donnent des résultats réguliers, l'incidence en dépendance totale (toutes causes) est obtenue quant à elle par sommation des taux d'incidence en démence et en dépendance physique.

Dans la suite nous définissons les taux d'incidence comme suit :

- le taux instantané d'entrée en dépendance suite à la cause j, j= 1 pour grabataire, j=2 pour démence s'obtient grâce à la limite

$$\mu_{x+t}^{0j} = \lim_{h\to 0} \frac{P(X_{t+h} = e_j / X_t = e_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{{}_h p_{x+t}^{0j}}{h} = \frac{\partial}{\partial h} \; {}_h p_{x+t}^{0j}|_{h=0}$$

- le taux instantané de décès si l'individu est autonome s'obtient grâce à la limite

$$\mu_{x+t}^{03} = \lim_{h\to 0} \frac{P(X_{t+h} = e_3 / X_t = e_0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{{}_h p_{x+t}^{0j}}{h} = \frac{\partial}{\partial h} \; {}_h p_{x+t}^{03}|_{h=0}$$

- le taux instantané d'entrée en dépendance toutes causes confondues s'écrit

$$\mu_{x+t}^{0.} = \sum_{j=1}^{3} \mu_{x+t}^{0j}$$

Le taux instantané de transition est un nombre positif sans dimension, quantifiant le risque d'effectuer instantanément une transition donnée à un instant fixé. L'état autonome demeurant markovien, les taux instantanés de transition depuis cet état ne dépendent pas du temps qui y est passé mais seulement de l'age x+t. Cet âge indique indirectement la durée passée en autonomie.

2.4.2 Survie en dependance

La construction des lois de survie suit les principes proposés dans Dupourque, E., Planchet, F. Sator, N. (ÉD.) (2019).

Dans un premier temps, les probabilités conditionnelles de décès en dépendance sont estimées annuellement sur une segmentation « âge d'entrée en dépendance x ancienneté ».

Dans un deuxième temps, les estimations sont reprises pour :

- réaliser un ajustement spécifique des taux de première année ;
- positionner les taux au-delà de la première année par rapport aux taux issus de la table TD 88/90 ;
- extrapoler et mensualiser les probabilités conditionnelles de décès ajustées ainsi obtenues.

Cette démarche est notamment justifiée par le fait que les données disponibles sont censurées à 36 mois d'ancienneté en dépendance. La table TD 88/90 est choisie comme référence du fait de son utilisation historique pour la détermination de loi de survie en dépendance, plusieurs assureurs privés l'ayant utilisée comme base de construction, et de son rôle dans la réglementation des assurances pour le provisionnement des rentes de responsabilité civile corporelle. Elle s'avère relativement bien adaptée à ce type de risque. Enfin, nous ne disposons de données fiables que jusque vers 95 ans et il est nécessaire d'extrapoler les taux de décès au-delà.

L'âge de survenance de la dépendance a un impact fort sur le niveau de taux de décès, ce qui explique qu'il soit utilisé ici comme variable de segmentation.

La démarche suivante est utilisée pour la mise en place des 9 tables de mortalité en dépendance qui sont fonction du sexe et du type de dépendance.

Les taux de mortalité bruts mensuels par âge entier à l'entrée en dépendance « toutes causes » x et en fonction de la durée passée en dépendance y sont estimés par la méthode de Hoem en supposant la constance de la fonction de hasard $\tilde{\mu}(x,y) = \frac{D(x,y)}{E(x,y)}$ sur chaque mois à partir de $\tilde{q}(x,y) = 1 - exp(\frac{D(x,y)}{E(x,y)})$,avec $D(x,y)$ le nombre de décès et $E(x,y)$ la durée d'exposition au risque. Les probabilités de décès annuelles, déterminées après annualisation de l'exposition et du nombre de décès, sont lissées par Whittaker-Henderson au second ordre avec les paramètres de régularité α et β.

Le principe de la méthode de Whitakker-Henderson est de combiner un critère de fidélité et un critère de régularité et de rechercher les valeurs ajustées qui minimisent une combinaison linéaire des deux critères (Planchet F., Thérond P.E. (2011)).

Etant donné que nous n'avons pas travaillé directement sur les données brutes, nous expliquons de façon générale la méthode de Whittaker-Henderson dans le cas de la dimension un et ensuite en dimension deux qui est celle appliquée dans notre cas.

- Cas de la dimension un

On se fixe des poids (w_i) et l'on pose pour le critère de fidélité :

$$F = \sum_{i=1}^{p} w_i(q_i - \hat{q}_i)^2$$

et pour le critère de régularité :

$$S = \sum_{i=1}^{p-z} (\Delta^z q_i)^2$$

ou z est un paramètre du modèle. Le critère à minimiser est une combinaison linéaire de la fidélité et de la régularité, le poids de chacun des deux termes étant controlé par un second paramètre h :

$$M = F + h * S$$

La solution du problème d'optimisation satisfait aux conditions $\frac{\partial M}{\partial q_i} = 0; 1 < i < p$; la résolution de ce système d'équations peut etre effectuée au moyen de quelques manipulations matricielles. A cet effet, on pose $q = (q_i)_{1<i<p}$, $\hat{q} = (\hat{q}_i)_{1<i<p}$ et $w = diag(w_i)_{1<i<p}$; nous pouvons alors écrire $F =^t (q - \hat{q})w(q - \hat{q})$; pour ce qui concerne le critère de régularité, si si nous notons $\Delta^z q = (\Delta^z q_i)_{1<i<p-z}$, alors $S =^t (\Delta^z q)\Delta^z q$. Pour détailler cette écriture, nous introduisons la matrice K_z de taille $(p - z, p)$, dont les termes sont les coefficients binomiaux d'ordre z dont le signe alterne et commence positivement pour z pair. Nous obtenons $\Delta^z q = K_z q$, ce qui permet finalement d'écrire le critère M sous la forme :

$$M =^t (q - \hat{q})w(q - \hat{q}) + h^t q^t K_z K_z q$$

En developpant l'expression ci-dessus nous trouvons :

$$M =^t qwq - 2^t qw\hat{q} +^t \hat{q}wq + h^t q^t K_z K_z q$$

ce qui conduit à :

$$\frac{\partial M}{\partial q} = 2wq - 2w\hat{q} + 2h^t K_z K_z q$$

La résolution de $\frac{\partial M}{\partial q} = 0$ conduit alors à l'expression des taux ajustés :

$$q^* = (w + h^t K_z K_z)^{-1} w\hat{q}$$

L'inversion de la matrice $C = w + h^t K_z K_z$ nécessite toutefois certaines précautions, car $hK_z^{'}K_z$ n'est pas inversible, et l'addition du terme w rend C inversible, mais de ce fait l'inversion de C peut etre délicate. Nous pouvons en pratique utiliser la décomposition de Cholesky de la matrice symétrique positive C pour l'inverser.

- Cas de la dimension deux

Nous disposons d'estimations $\hat{q} = (\hat{q}_{i,j})_{1<i<p,1<j<q}$ et l'on a pour le critère de fidélité :

$$F = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} w_{ij}(q_{ij} - \hat{q}_{ij})^2$$

Pour le critère de régularité nous distinguons d'abord la régularité verticale via l'opérateur Δ_v^z (qui agit sur q_{ij} à j fixé vu comme série indicée par i) qui permet de calculer un indice de régularité verticale :

$$S_v = \sum_{j=1}^{q} \sum_{i=1}^{p-z} (\Delta_v^z q_{ij})^2$$

Ensuite nous distinguons la régularité horizontale via l'opérateur Δ_h^y (qui agit sur q_{ij} à i fixé vu comme série indicée par j) qui permet de calculer un indice de régularité horizontale :

$$S_h = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q-y} (\Delta_h^y q_{ij})^2$$

Puis on pose :

$$M = F + \alpha * S_v + \beta * S_h,$$

qui doit être minimisé. La résolution du problème d'optimisation s'effectue en réarrangeant les éléments pour se ramener au cas unidimensionnel. Pour cela nous définissons le vecteur u de taille $p*q$, tel que : $u_{q(i-1)+j} = \hat{q}_{ij}$; cela revient à prendre pour les q premiers éléments du vecteur u la première ligne de la matrice $\hat{q}$, puis ensuite les éléments de la seconde ligne, et ainsi de suite. De même nous fabriquons une matrice de poids en copiant sur la diagonale les lignes de la matrice (w_{ij}). Nous posons donc $w^*_{q(i-1)+j,q(i-1)+j} = w_{ij}$. Nous procédons de la même manière pour définir les matrices K_z^v,K_y^h. les valeurs lissées s'obtiennent alors par :

$$q^* = (w^* + \alpha^t K_z^v K_z^v + \beta^t K_y^h K_y^h)^{-1} w^* u.$$

Cette méthode permet un lissage conjoint dans les deux directions, plus efficace que le lissage séparé selon chaque variable.

Retenons que pour un lissage non paramétrique comme Whittaker-Henderson, nous pouvons aussi fixer une grille de valeurs possibles pour les paramètres α et β puis choisir les meilleurs en analysant la qualité d'ajustement aux données, les résidus standardisés et la MSE.

Dans notre cas les taux de mortalité de première année utilisés sont directement issus du lissage par la méthode de Whittaker-Henderson, le choix de la méthode étant guidé par le fait que le volume de données est suffisant pour utiliser un ajustement non paramétrique dont l'objectif principal est de supprimer les fluctuations d'échantillonnage.

Pour positionner les taux au-delà de la première année par rapport aux taux issus de la table TD 88/90, le rapport entre les taux lissés et les taux de décès issus de la table est déterminé, la représentation logarithmique de ces taux affiche une structure relativement plane. Cette forme plane du logarithme des taux de surmortalité suggère de retenir l'ajustement paramétrique :

$$f(x, y) = exp(a + bx + cy),$$

x, y désignant respectivement l'âge à l'entrée et l'ancienneté en dépendance et étant des paramètres à déterminer. L'ajustement est effectué en prenant en compte l'exposition au risque dans le critère d'optimisation.

En rapprochant les deux ajustements, il est obtenu une estimation annuelle des probabilités conditionnelles de décès en dépendance.

La loi de mortalité construite "supra" fournit des probabilités conditionnelles de décès annuelles par âge entier d'entrée en dépendance et par ancienneté.

La mensualisation est effectuée selon la méthode décrite ci-après, à partir des taux de décès annuels $q_t^{\alpha}, t \geq 1$ issus des ajustements précédents.

La forte convexité de la première année impose de recourir à une méthode d'interpolation souple et nous choisissons de supposer la linéarité des logits des taux mensuels de première année, de sorte que le taux de décès global de première année obtenu soit égal au taux annuel et que la droite se raccorde au logit du taux mensuel du 13ème mois, c'est-à-dire $l_{12} = ln(\frac{q_{12}}{1-q_{12}})$.

Nous postulons donc que le logit du mois $h \in \{0, ..., 11\}$ s'écrit $l(h) = l_{12} + \beta(h - 12)$ avec β un coefficient réel à déterminer.

En notant $p(\beta) = \prod_{h=0}^{11}(1 - q_h)^{-1}$ avec $1 - e^{l(h)} = \frac{1}{1-q_h}$,β est déterminé tel que $p(\beta) = (1 - q_1^{\alpha})^{-1}$ l'exposant α indiquant qu'il s'agit de la probabilité de décès annuelle.

Un traitement spécifique est appliqué pour le premier mois de dépendance ;le modèle ci-dessus ayant tendance à sous-estimer le taux de décès du premier mois, du fait d'une convexité insuffisante de la fonction utilisée. Les taux de décès du premier mois étant très élevés, le volume de données important et le taux de censure faible à cette ancienneté, nous pouvons toutefois considérer que l'estimateur empirique est fiable et utiliser donc à la place de la valeur ajustée le taux empirique mensuel de premier mois, lissé en fonction de l'âge de survenance avec le même modèle (Whittaker-Henderson) que le taux de première année.

A partir de la seconde année, la faible convexité de la surface incite à retenir une méthode simple et nous supposons les taux de décès mensuels constants pour chaque année, le taux mensuel étant obtenu à partir du taux annuel via $q^m_{t+m} = 1 - (1 - q^{\alpha}_t)^{\frac{1}{12}}$, $h = 0, ..., 11$.

Les transitions d'une année à l'autre sont lissées par une moyenne mobile 5 mois afin d'éviter une discontinuité.

Dans la suite nous définissons les taux de mortalité s'appliquant aux individus dépendants comme suit :

- le taux instantané de mortalité pour l'individu en dépendance suite à la cause d'entrée en dépendance $j, j = 1$ pour grabataire , $j = 2$ démence depuis la durée z s'obtient grâce à la limite

$$\mu^{j3}_{x+t;z} = \lim_{h \to 0} \frac{P(X_{t+h} = e_3 / X_t = e_j, Z_t = z)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{{}_hp^{j3}_{x+t;z}}{h} = \frac{\partial}{\partial h}\ {}_hp^{j3}_{x+t;z}|_{h=0}, z < t$$

Les états e_1, e_2 étant rendus semi-markovien, les taux de mortalité pour un individu entré en dépendance suite à la cause j dépendent de l'âge et de la durée écoulée depuis la perte d'autonomie.

Les taux instantanés de transition étant constants par morceaux s'appliquant en fonction de l'âge lors de la perte d'autonomie et indicés par la durée passée en dépendance, nous noterons

$$\mu^{13}_{x+\xi,z} = \tilde{\mu}^1(x + \lfloor \xi - x \rfloor, \lfloor z \rfloor)$$
$$\mu^{23}_{x+\xi,z} = \tilde{\mu}^2(x + \lfloor \xi - x \rfloor, \lfloor z \rfloor)$$

Où les fonctions $\tilde{\mu}^1$ et $\tilde{\mu}^2$ sont définies sur $\mathbb{N}^2$, $\lfloor . \rfloor$ désignant la partie entière de l'argument. Les fonctions $\tilde{\mu}^1$ et $\tilde{\mu}^2$ dépend de l'âge lors de la perte d'autonomie et du temps passé en dépendance.

2.5 Construction des tables de mortalité

2.5.1 Incidence

- Démence

Les femmes sont caractérisées par une incidence de la démence légèrement supérieure à celle des hommes. Ceci se traduit par une probabilité d'être affectée par la démence beaucoup plus importante pour les femmes au cours de leur vie compte tenu de leur plus grande longévité.

Les taux d'incidence annuels sont caractérisés par un net accroissement à partir de 75-85 ans. Un ralentissement de l'incidence en dépendance est observé à partir de 90 ans, comme observé sur la Figure 2.

Le taux d'incidence des hommes en démence converge vers celui des femmes après 95 ans. Cela permet d'expliquer la plus faible prévalence de la démence chez les hommes par une plus faible survie, notamment aux âges avancés.

La probabilité d'être affecté par une démence est comprise entre 4% et 52% jusqu'à 100 ans pour une femme et entre 5% et 31% pour un homme. Cette probabilité est calculée pour chaque âge et chaque genre en utilisant la formule

$$p = \frac{\mu_x^{02}}{\mu_x^{0.}}$$

$$p = \frac{\mu_x^{02}}{\mu_x^{01} + \mu_x^{02} + \mu_x^{03}}$$

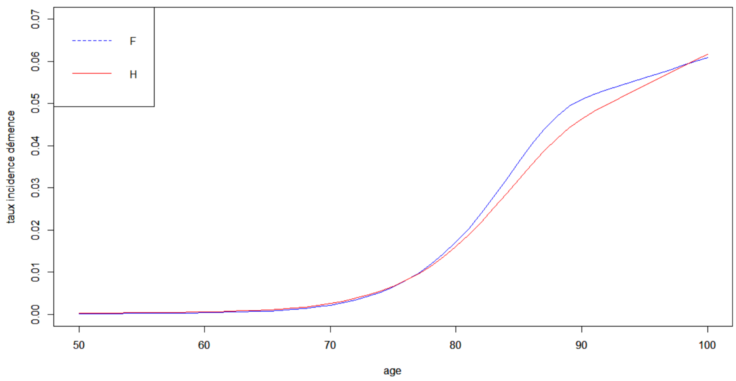

Figure 2 – Taux d'incidence (Démence Femmes / Hommes)

- Dépendance Physique

Les femmes sont également caractérisées par une incidence en dépendance physique très légèrement supérieure à celle des hommes. Ceci se traduit par une probabilité d'être affectée par la dépendance physique beaucoup plus importante pour les femmes au cours de leur vie compte tenu de leur plus grande longévité.

Les taux d'incidence annuels sont caractérisés par un net accroissement à partir de 75-85 ans(Figure 3). Cet accroissement semble croître au même rythme aux grands âges. Le taux d'incidence des hommes en dépendance physique converge vers celui des femmes après 95 ans. Cela permet d'expliquer la plus faible prévalence de la démence chez les hommes par une plus faible survie, notamment aux âges avancés.

La probabilité p d'être affecté par une dépendance physique est comprise entre 4% et 6% jusqu'à 100 ans pour une femme et entre 3% et 5% pour un homme. Les écarts sont faibles comparés à l'incidence en démence. Cette probabilité est calculée pour chaque âge et chaque genre en utilisant la formule

$$p = \frac{\mu_x^{01}}{\mu_x^{0.}}$$

$$p = \frac{\mu_x^{01}}{\mu_x^{01} + \mu_x^{02} + \mu_x^{03}}$$

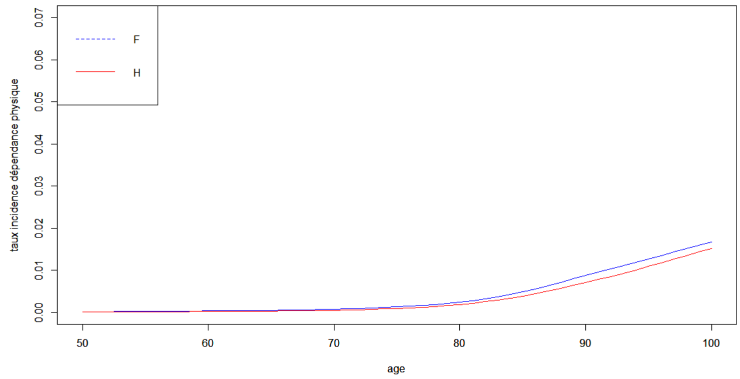

FIGURE 3 – Taux d'incidence (Dépendance physique Femmes / Hommes)

- Dépendance totale

La somme des taux d'incidence en démence et des taux en dépendance physique génère une compensation des taux d'incidence en dépendance relativement proches entre les hommes et les femmes, avec une prédominance de la dépendance physique aux âges jeunes, puis une augmentation de la part de la démence au-delà de 80 ans. La figure 4 affiche les combinaisons des taux d'incidence retenus.

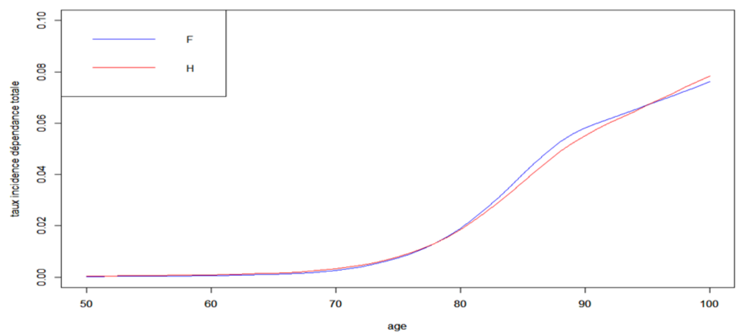

FIGURE 4 – Taux d'incidence (Dépendance totale Femmes / Hommes)

2.5.2 Survie en dépendance

Nous choisissons une représentation graphique des tables de survie en dépendance sur 36 mois et jusqu'à l'âge de 95 ans.

- Démence

La forme des surfaces de probabilité conditionnelle est quasi identique pour les hommes, les femmes et en ne faisant pas de distinction entre les sexes. Néanmoins, pour les hommes, le niveau de mortalité est toujours supérieur. Cela nous a conduit à ajuster la limite des taux de probabilités pour les hommes.

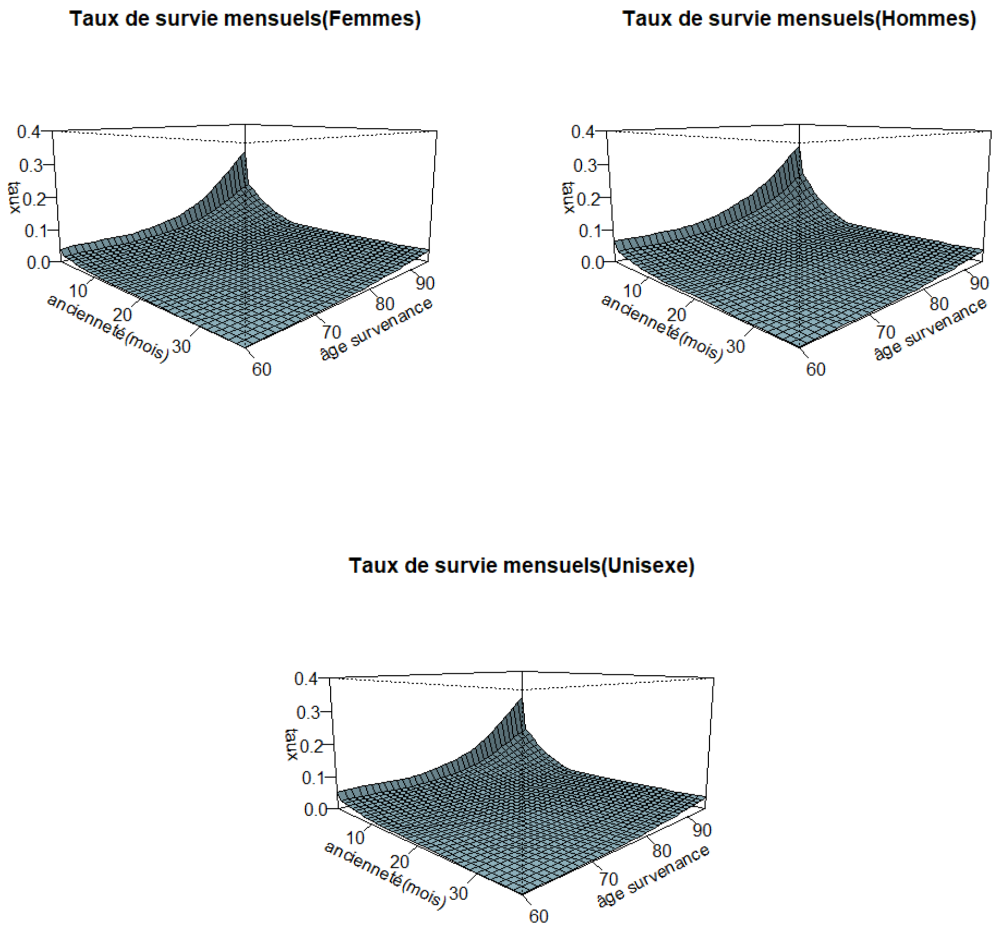

FIGURE 5 – Taux de survie mensuels(Démence)

- Dépendance physique

Contrairement à la démence les taux sont beaucoup plus importants sur les premiers mois en dépendance quel que soit l'âge de la survenance, un peu moins sur les derniers mois (36 et plus). Néanmoins, les taux pour les hommes restent toujours supérieurs.

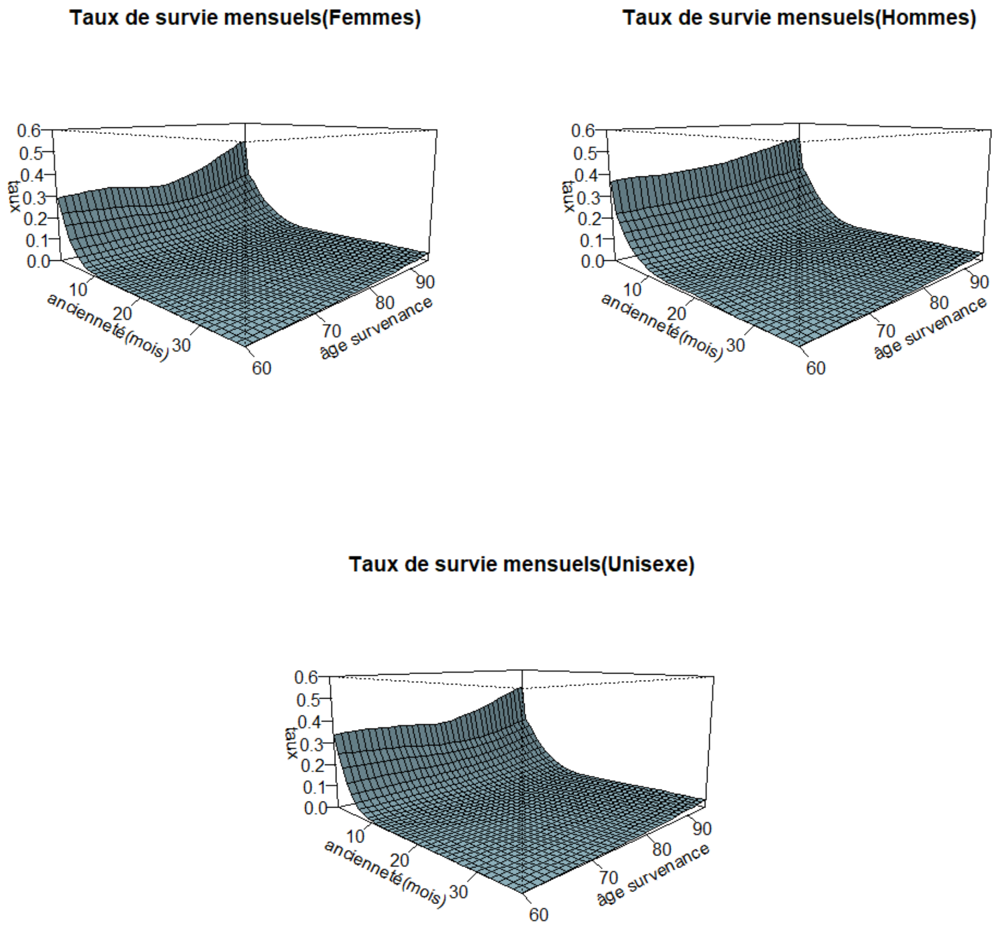

Figure 6 – Taux de survie mensuels(Dépendance physique)

- Dépendance totale

Notons que les taux de survie n'ont pas été calculés en fonction de la cause d'entrée car en découpant par âge et ancienneté, les volumes ne sont pas suffisants pour certains segments pour avoir des statistiques suffisamment robustes. Les taux de mortalité ont donc été calculés pour l'ensemble des dépendants. Pour la dépendance totale (toutes causes), les effets à l'entrée en dépendance et en fin de dépendance, constatés lors de la distinction des différentes causes de dépendance, sont atténués.

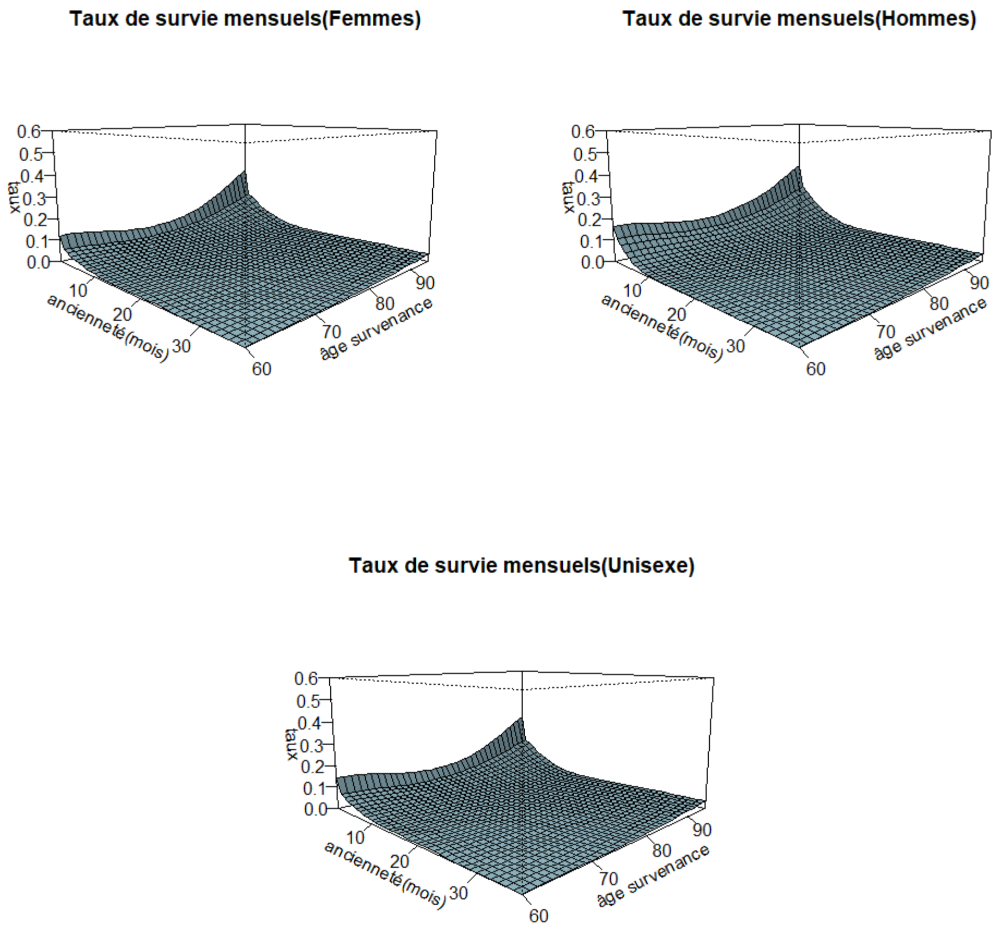

FIGURE 7 – Taux de survie mensuels(Dépendance totale)

3 Primes en assurance dépendance

3.1 Modélisation du problème

Le principe utilisé pour calculer les primes d'assurance-vie s'étend à tous les produits d'assurance maladie. Il précise qu'au moment de l'émission du contrat, la valeur actualisée attendue des prestations versées au preneur d'assurance est égale à la valeur actualisée attendue des primes versées à l'assureur. Le facteur d'actualisation $v(s,t)$ est la valeur actuelle au moment s d'un paiement unitaire effectué au moment t,$s < t$, avec $v(s,s) = 1$. Il est à noter que les primes proposées dans la suite du document sont les primes pures.Il conviendra pour l'assureur d'ajouter les frais s'y afférents.

Dans les illustrations numériques, nous supposons que le taux d'intérêt technique est constant dans le temps, c'est-à-dire

$$v(s,t) = exp(-\delta(t-s))$$

$$\text{avec } \delta > 0$$

Toutes les dépendances couvertes sont lourdes et définitives. Le contrat est modélisé à l'aide d'un processus hiérarchique à 4 états : e_0 = autonome ; e_1 = dépendance physique (grabataire) ; e_2 = dépendance cognitive (démence) ; e_3 = décédé.

Nous considérons un assuré âgé de x années au moment de la souscription du contrat.

Les taux instantanés de transition sont supposés constants par morceaux :

- μ^{01}_{x+z} : taux de transition de $e_0 \rightarrow e_1$ d'un individu âgé de $x + z$ années
- μ^{02}_{x+z} : taux de transition de $e_0 \rightarrow e_2$ d'un individu âgé de $x + z$ années
- μ^{03}_{x+z} : taux de transition de $e_0 \rightarrow e_3$ d'un individu âgé de $x + z$ années
- $\mu^{13}_{x+z;z}$:taux de transition de $e_1 \rightarrow e_3$ d'un individu âgé de x années lors de la perte d'autonomie et qui a passé une durée z en dépendance (démence).
- $\mu^{23}_{x+z;z}$: taux de transition de $e_2 \rightarrow e_3$ d'un individu âgé de x années lors de la perte d'autonomie et qui a passé une durée z en dépendance (grabataire).

Nous noterons :

$$\mu^{13}_{x+z;z} = \tilde{\mu}^1(x,z)$$
$$\mu^{23}_{x+z;z} = \tilde{\mu}^2(x,z)$$

Où les fonctions $\tilde{\mu}^1$ et $\tilde{\mu}^2$ sont définies sur $\mathbb{N}^2$, $\lfloor . \rfloor$ désignant la partie entière de l'argument. Les fonctions $\tilde{\mu}^1$ et $\tilde{\mu}^2$ dépend de l'âge lors de la perte d'autonomie et du temps passé en dépendance.

- ${}_uP^{01}_{x+t}$: probabilité qu'un individu autonome à l'instant t soit dépendant (dans l'état e_1) à l'instant $t+u$;
- ${}_uP^{02}_{x+t}$: probabilité qu'un individu autonome à l'instant t soit dépendant (dans l'état e_2) à l'instant $t+u$;
- ${}_uP^{03}_{x+t}$: probabilité qu'un individu autonome à l'instant t soit décédé à l'instant $t+u$;
- ${}_uP^{13}_{x+t;z}$: probabilité qu'un individu dépendant (dans l'état e_1) à l'instant t depuis l'instant $t-z$ soit décédé à l'instant $t+u$;
- ${}_uP^{23}_{x+t;z}$: probabilité qu'un individu dépendant (dans l'état e_2) à l'instant t depuis l'instant $t-z$ soit décédé à l'instant $t+u$;
- ${}_uP^{00}_{x+t}$: probabilité qu'un individu autonome à l'instant t le soit également à l'instant $t+u$;
- ${}_uP^{11}_{x+t;z}$: probabilité qu'un individu dépendant (dans l'état e_1) à l'instant t depuis l'instant $t-z$ le soit toujours à l'instant $t+u$;
- ${}_uP^{22}_{x+t;z}$: probabilité qu'un individu dépendant (dans l'état e_2) à l'instant t depuis l'instant $t-z$ le soit toujours à l'instant $t+u$.

Les prestations comprises dans la police considérée sont les suivantes :

- b_1 montant de la rente de dépendance dans l'état e_1 (supposée payée continûment) ;
- b_2 montant de la rente de dépendance dans l'état e_2 (supposée payée continûment) ;
- b_0 montant de la rente en faveur d'un individu autonome (supposée payée continûment) ;
- c_{03} capital payable lors du décès d'un individu autonome ;
- c_{13} capital payable lors du décès d'un individu dépendant dans l'état e_1 ;
- c_{23} capital payable lors du décès d'un individu dépendant dans l'état e_2 ;
- c_{01} capital payable lors de la perte d'autonomie pour la dépendance dans l'état e_1 ;
- c_{02} capital payable lors de la perte d'autonomie pour la dépendance dans l'état e_2.

Ces quantités sont posées à zéro si le produit ne comprend pas la garantie correspondante.
En ce qui concerne les primes, nous notons

- π_1 taux de prime en dépendance dans l'état e_1 (supposée payée continûment) ;
- π_2 taux de prime en dépendance dans l'état e_2 (supposée payée continûment) ;
- π_0 taux de prime en autonomie (supposée payée continûment).

Les primes sont supposées être payées continûment aux taux indiqués. La dispense de prime consistera à poser à zéro le taux correspondant.

Ces quantités peuvent être fonction du temps, le cas échéant. Nous aurons par exemple $\pi_0 = \pi_0(t)$ lorsque le taux de prime pour un individu autonome varie au cours du contrat. Les prestations en faveur d'un individu dépendant peuvent être fonction du temps et de la durée passée en dépendance. Ainsi par exemple : $b_1 = b_1(t, z)$ et $b_2 = b_2(t, z)$.

En général, π_1 et π_2 sont nuls mais nous conservons la possibilité de réclamer des primes aux individus dépendants, afin de rester le plus général possible.

Introduisons les notations suivantes pour les prix de rentes qui nous seront utiles dans la suite :

- $\bar{a}^{00}_{x+t}$: Rente pour le maintien en autonomie d'un individu ;
- $\bar{a}^{01}_{x+t}$: Rente pour le passage en dépendance dans l'état e_1 , avec t l'instant auquel se produit la perte d'autonomie ;
- $\bar{a}^{01}_{x+t,w_1}$: Rente pour le passage en dépendance dans l'état e_1 avec un délai de carence w_1, t l'instant auquel se produit la perte d'autonomie ;
- $\bar{a}^{01}_{x+t,f_1}$: Rente pour le passage en dépendance dans l'état e_1 avec une franchise temporelle f_1, t l'instant auquel se produit la perte d'autonomie ;
- $\bar{a}^{01}_{x+t,w_1,f_1}$: Rente pour le passage en dépendance dans l'état e_1 avec un délai de carence w_1 et une franchise temporelle f_1, t l'instant auquel se produit la perte d'autonomie ;
- $\bar{a}^{02}_{x+t}$: Rente pour le passage en dépendance dans l'état e_2 , avec t l'instant auquel se produit la perte d'autonomie ;
- $\bar{a}^{01}_{x+t,w_2}$: Rente pour le passage en dépendance dans l'état e_2 avec un délai de carence w_2, t l'instant auquel se produit la perte d'autonomie ;
- $\bar{a}^{02}_{x+t,f_1}$: Rente pour le passage en dépendance dans l'état e_2 avec une franchise temporelle f_2, t l'instant auquel se produit la perte d'autonomie ;
- $\bar{a}^{02}_{x+t,w_2,f_2}$: Rente pour le passage en dépendance dans l'état e_2 avec un délai de carence w_2 et une franchise temporelle f_2, t l'instant auquel se produit la perte d'autonomie ;
- $\bar{a}^{11}_{x+t}$: Rente pour le maintien en dépendance dans l'état e_1 ,avec t l'instant auquel débute la dépendance ;
- $\bar{a}^{22}_{x+t}$: Rente pour le maintien en dépendance dans l'état e_2 ,avec t l'instant auquel débute la dépendance ;

Introduisons les notations suivantes pour les prix des prestations en capital payable lors d'une transition donnée :

- $\bar{A}^{0;0\to 1}_{x+t}$: capital payable à un individu initialement autonome lors de la transition $e_0 \to e_1$, avec t l'instant auquel se produit la perte d'autonomie.
- $\bar{A}^{0;0\to 2}_{x+t}$: capital payable à un individu initialement autonome lors de la transition $e_0 \to e_2$, avec t l'instant auquel se produit la perte d'autonomie.
- $\bar{A}^{0;0\to 3}_{x+t}$: capital payable à un individu initialement autonome lors de la transition $e_0 \to e_3$, avec t l'instant auquel se produit la perte d'autonomie ;
- $\bar{A}^{0;1\to 3}_{x+t}$: capital payable à un individu initialement autonome lors de la transition $e_1 \to e_3$, avec t l'instant où se produit la transition ;
- $\bar{A}^{0;2\to 3}_{x+t}$: capital payable à un individu initialement autonome lors de la transition $e_2 \to e_3$, avec t l'instant où se produit la transition ;
- $\bar{A}^{1;1\to 3}_{x+t;z}$: capital payable à un individu initialement dans l'état e_1 lors de la transition $e_1 \to e_3$ sachant qu'on a passé z années en dépendance dans l'état e_1 , avec t l'instant où se produit la transition ;
- $\bar{A}^{2;2\to 3}_{x+t;z}$: capital payable à un individu initialement dans l'état e_2 lors de la transition $e_2 \to e_3$ sachant qu'on a passé z années en dépendance dans l'état e_2 , avec t l'instant où se produit la transition.

Si les paiements sont limités dans le temps, à n années disons nous ajouterons alors "$;n\rceil$" après l'âge $x+t$, comme par exemple $\bar{a}^{00}_{x+t;n\rceil}$.
Notons $\omega_x = \omega - x$ la durée de couverture maximale du contrat considéré.
En vertu du principe d'équivalence, la valeur actuelle moyenne des primes payées par l'assuré

$$\Pi = \int_0^{\omega_x} {}_tp^{00}_x \pi_0(t) v(0,t)dt + \int_0^{\omega_x} {}_tp^{00}_x \mu^{01}_{x+t} (\int_0^{\omega_x - t} {}_zp^{11}_{x+t;0} \pi_1(t+z,z) v(0,t+z)dz)dt$$
$$+ \int_0^{\omega_x} {}_tp^{00}_x \mu^{02}_{x+t} (\int_0^{\omega_x - t} {}_zp^{22}_{x+t;0} \pi_2(t+z,z) v(0,t+z)dz)dt$$

est égale à la valeur actuelle moyenne de toutes les prestations prévues dans le contrat

$$B = \int_0^{\omega_x} {}_tp^{00}_x b_0(t) v(0,t)dt + \int_0^{\omega_x} {}_tp^{00}_x \mu^{01}_{x+t} (\int_0^{\omega_x - t} {}_zp^{11}_{x+t;0} b_1(t+z,z) v(0,t+z)dz)dt$$
$$+ \int_0^{\omega_x} {}_tp^{00}_x \mu^{02}_{x+t} (\int_0^{\omega_x - t} {}_zp^{22}_{x+t;0} b_2(t+z,z) v(0,t+z)dz)dt$$
$$+ \int_0^{\omega_x} v(0,t)\ {}_tp^{00}_x \mu^{01}_{x+t} c_{01}(t)dt + \int_0^{\omega_x} v(0,t)\ {}_tp^{00}_x \mu^{02}_{x+t} c_{02}(t)dt + \int_0^{\omega_x} v(0,t)\ {}_tp^{00}_{x;0} \mu^{03}_{x+t} c_{03}(t)dt$$
$$+ \int_0^{\omega_x} {}_tp^{00}_x \mu^{01}_{x+t} (\int_0^{\omega_x - t} {}_zp^{11}_{x+t;0} \mu^{13}_{x+t+z;z} c_{13}(t+z,z) v(0,t+z)dz)dt$$
$$+ \int_0^{\omega_x} {}_tp^{00}_x \mu^{02}_{x+t} (\int_0^{\omega_x - t} {}_zp^{22}_{x+t;0} \mu^{23}_{x+t+z;z} c_{23}(t+z,z) v(0,t+z)dz)dt$$

C'est-à-dire l'égalité $\Pi = B$ doit être satisfaite à la souscription du contrat.

3.2 Quelques Conditions spécifiques

Plusieurs conditions de police peuvent être incluses dans les produits d'assurance dépendance. Dans cette section nous n'abordons que les conditions liées à la durée, c'est-à-dire les conditions de police qui définissent la période de couverture ou la période de versement des prestations suivant la demande, début du besoin de dépendance.

3.2.1 La période assurée

La période assurée (ou période de couverture) est l'intervalle de temps pendant lequel la couverture d'assurance fonctionne, en ce sens qu'une prestation n'est payable que si le moment de la réclamation appartient à cet intervalle. C'est-à-dire seules les pertes d'autonomies survenant au cours de la période de couverture donneront lieu à indemnisation. En principe, la période assurée commence à l'émission du contrat, et prend fin à la résiliation de la police. Dans les polices de dépendance, compte tenu de l'objectif des prestations, le plus souvent, les couvertures sont viagères de sorte qu'il n'y a pas d'échéance fixée au contrat (on pose $n = \omega - x$). En revanche, le début de la période de couverture peut faire l'objet de clauses particulières, afin de limiter l'antisélection.

L'antisélection désigne les dysfonctionnements des marchés d'assurance qui résultent de l'information cachée dont les assurés peuvent disposer sur leurs propres risques et qui n'est pas accessible aux assureurs. Pour un barème d'indemnisation donné, l'assureur n'est alors plus en mesure de différencier les primes en fonction des risques : les primes demandées refléteront donc le coût moyen des sinistres des individus ayant souscrit le contrat en question. Pour des individus « à bas risque », c'est-à-dire dont le coût moyen des sinistres est faible, la prime demandée apparaîtra particulièrement élevée par rapport à la prime actuarielle, tandis qu'elle sera considérée comme relativement faible par les «hauts risques». En présence d'information cachée sur les risques, les hauts risques seront donc particulièrement demandeurs d'assurance (d'où l'expression antisélection), car ils bénéficient de « subventions croisées » avec les bas risques ayant souscrit le même contrat. Ces derniers peuvent être conduits à demander moins d'assurance, voire même à annuler totalement leur demande d'assurance.

3.2.2 Le délai de carence

Le délai de carence aussi appelé délai (ou stage) d'attente désigne la période suivant la souscription du contrat au cours de laquelle certaines pertes d'autonomie ne seront pas couvertes. Les entrées en dépendance consécutives à des accidents sont généralement couvertes dès la signature du contrat, mais pour les autres, les polices prévoient souvent des délais de carence variables, pouvant aller jusqu'à plusieurs années. Il est à noter que l'état correspondant à la dépendance doit alors être subdivisé en deux états, l'un correspondant à la perte d'autonomie consécutive à un accident et l'autre aux autres causes.
En cas de dépendance physique le délai de carence est généralement inférieur ou égal à un an. En cas de démence ce délai de carence est supérieur à un an et est très souvent porté à trois ans. Cette clause vise à lutter contre l'antisélection, afin d'éviter que l'assuré n'utilise l'information dont il dispose à propos de son état de santé futur pour conclure un contrat qui lui serait trop favorable.

Dans le cas ou la perte d'autonomie surviendrait au cours de la période de carence (ici de durée ω), l'assureur se borne généralement à rembourser les primes encaissées jusque-là, versant donc en pareil cas un capital

$$c_{01}(t) = \int_0^t \pi_0(s)ds$$

$$c_{02}(t) = \int_0^t \pi_0(s)ds$$

$$\text{pour } t < \omega$$

Les capitaux $c_{01}(t)$ et $c_{02}(t)$ constituent donc une contre-assurance des primes selon qu'on se trouve dans l'état e_1 ou dans l'état e_2.

3.2.3 La franchise temporelle

Bien souvent, les premiers mois passés en dépendance ne sont pas indemnisés.

L'assureur commence à verser la rente à la fin d'une période dite de franchise temporelle. Cette clause a un double objectif :

- Réduire le coût de la couverture en retardant l'indemnisation et donc réduire aussi la prime du produit d'assurance). Cette réduction peut être particulièrement sensible dans la mesure ou la mortalité est généralement très importante juste après la perte d'autonomie.
- S'assurer du caractère permanent de la dépendance, (à condition que les prestations de soins de longue durée ne soient versées qu'en cas d'invalidité permanente, une des conditions pour obtenir l'indemnisation dans les produits usuels.

3.3 Formules de primes et implémentations de certains produits d'assurance dépendance

3.3.1 Rente de dépendance (Stand-Alone LTC Cover)

- Description

La prestation de l'assureur consiste ici à servir une rente, supposée payable continument à valeur constante b_1 ou b_2, dès que l'assuré perdra son autonomie et aussi longtemps que l'assuré survivra en dépendance. Sans clause limitant l'intervention de l'assureur, la prime unique d'un tel contrat s'écrit simplement

$$\Pi = b_1\bar{a}_x^{01} + b_2\bar{a}_x^{02}$$

Avec $\bar{a}_{x+t}^{01} = \int_0^{\omega_x - t} {}_sp_{x+t}^{01} v(t, t+s)ds$ et $\bar{a}_{x+t}^{02} = \int_0^{\omega_x - t} {}_sp_{x+t}^{02} v(t, t+s)ds$

La prime Π peut encore se réécrire

$$\Pi = b_1 \int_0^{\omega_x} {}_tp_x^{00} \mu_{x+t}^{01} v(0,t) \bar{a}_{x+t;0}^{11} dt + b_2 \int_0^{\omega_x} {}_tp_x^{00} \mu_{x+t}^{02} v(0,t) \bar{a}_{x+t;0}^{22} dt)$$

Avec $\bar{a}^{11}_{x+t;z} = \int_0^{\omega_x - t} {}_sp^{11}_{x+t;z}v(t,t+s)ds$ et $\bar{a}^{22}_{x+t;z} = \int_0^{\omega_x - t} {}_sp^{22}_{x+t;z}v(t,t+s)ds$ et ${}_tp^{00}_x = exp(-\int_0^t \mu^{0.}_{x+s}ds) = exp(-\int_0^t (\mu^{01}_{x+s} + \mu^{02}_{x+s} + \mu^{03}_{x+s})ds)$

Elle présente l'avantage de faire apparaitre l'instant t auquel se produit la perte d'autonomie. Cette seconde formule s'avère utile lorsqu'il s'agit de tenir compte de différentes clauses limitatives, come expliqué ci-dessous.

Une fois que les taux de transition ont été rendus constants par morceaux, on peut écrire

$$\Pi = b_1\bar{a}^{01}_x + b_2\bar{a}^{02}_x$$

$$\bar{a}^{01}_x = \int_0^{\omega_x} exp(-\delta t - \int_0^t \mu^{0.}_{x+s}ds)\mu^{01}_{x+t}\bar{a}^{11}_{x+t}dt$$
$$\bar{a}^{01}_x = \int_0^{1} exp(-\delta t - \int_0^t \mu^{0.}_{x+s}ds)\mu^{01}_{x+t}\bar{a}^{11}_{x+t}dt + \int_1^{\omega_x} exp(-\delta t - \int_0^t \mu^{0.}_{x+s}ds)\mu^{01}_{x+t}\bar{a}^{11}_{x+t}dt$$
$$\bar{a}^{01}_x = \mu^{01}_x\bar{a}^{11}_{x;0}\frac{1-exp(-\delta-\mu^{0.}_x)}{\delta+\mu^{0.}_x} + \sum_{j=1}^{\omega_x-1}\mu^{01}_{x+j}\bar{a}^{11}_{x+j;0}exp(-\sum_{k=0}^{j-1}\mu^{0.}_{x+k} - j\delta)\frac{1-exp(-\delta-\mu^{0.}_{x+j})}{\delta+\mu^{0.}_{x+j}}$$
$$\bar{a}^{01}_x = \mu^{01}_x\bar{a}^{11}_{x;0}\frac{1-exp(-\delta-(\mu^{01}_x+\mu^{02}_x+\mu^{03}_x))}{\delta+(\mu^{01}_x+\mu^{02}_x+\mu^{03}_x)}$$
$$+ \sum_{j=1}^{\omega_x-1}\mu^{01}_{x+j}\bar{a}^{11}_{x+j;0}exp(-\sum_{k=0}^{j-1}(\mu^{01}_{x+k}+\mu^{02}_{x+k}+\mu^{03}_{x+k}) - j\delta)\frac{1-exp(-\delta-(\mu^{01}_{x+j}+\mu^{02}_{x+j}+\mu^{03}_{x+j}))}{\delta+(\mu^{01}_{x+j}+\mu^{02}_{x+j}+\mu^{03}_{x+j})}$$

Avec

$$\bar{a}^{11}_{x;0} = \int_0^{\omega_x} {}_tp^{11}_{x;0}v(0,t)dt$$
$$\bar{a}^{11}_{x;0} = \frac{1-exp(-\delta-\tilde{\mu}^1(x,0))}{\delta+\tilde{\mu}^1(x,0)}$$
$$+ \sum_{j=1}^{\omega_x-1} exp(-\sum_{k=0}^{j-1}\tilde{\mu}^1(x,k) - j\delta)\frac{1-exp(-\delta-\tilde{\mu}^1(x,j))}{\delta+\tilde{\mu}^1(x,j)}$$

De la même manière :

$$\bar{a}_x^{02} = \int_0^{\omega_x} exp(-\delta t - \int_0^t \mu_{x+s}^{0.} ds)\mu_{x+t}^{02}\bar{a}_{x+t}^{22}dt$$

$$\bar{a}_x^{02} = \int_0^1 exp(-\delta t - \int_0^t \mu_{x+s}^{0.} ds)\mu_{x+t}^{02}\bar{a}_{x+t}^{22}dt + \int_1^{\omega_x} exp(-\delta t - \int_0^t \mu_{x+s}^{0.} ds)\mu_{x+t}^{02}\bar{a}_{x+t}^{22}dt$$

$$\bar{a}_x^{02} = \mu_x^{02}\bar{a}_{x;0}^{22}\frac{1-exp(-\delta-\mu_x^{0.})}{\delta+\mu_x^{0.}} + \sum_{j=1}^{\omega_x-1}\mu_{x+j}^{02}\bar{a}_{x+j;0}^{22}exp(-\sum_{k=0}^{j-1}\mu_{x+k}^{0.} - j\delta)\frac{1-exp(-\delta-\mu_{x+j}^{0.})}{\delta+\mu_{x+j}^{0.}}$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_x^{02} = {} & \mu_x^{02}\bar{a}_{x;0}^{22}\frac{1-exp(-\delta-(\mu_x^{01}+\mu_x^{02}+\mu_x^{03}))}{\delta+(\mu_x^{01}+\mu_x^{02}+\mu_x^{03})} \\ & + \sum_{j=1}^{\omega_x-1}\mu_{x+j}^{02}\bar{a}_{x+j;0}^{22}exp(-\sum_{k=0}^{j-1}(\mu_{x+k}^{01}+\mu_{x+k}^{02}+\mu_{x+k}^{03}) - j\delta)\frac{1-exp(-\delta-(\mu_{x+j}^{01}+\mu_{x+j}^{02}+\mu_{x+j}^{03}))}{\delta+(\mu_{x+j}^{01}+\mu_{x+j}^{02}+\mu_{x+j}^{03})}\end{aligned}$$

Avec

$$\begin{aligned}\bar{a}_{x;0}^{22} &= \int_0^{\omega_x} {}_tp_{x;0}^{22}v(0,t)dt \\ \bar{a}_{x;0}^{22} &= \frac{1-exp(-\delta-\tilde{\mu}^2(x,0))}{\delta+\tilde{\mu}^2(x,0)} \\ &\quad + \sum_{j=1}^{\omega_x-1} exp(-\sum_{k=0}^{j-1}\tilde{\mu}^2(x,k) - j\delta)\frac{1-exp(-\delta-\tilde{\mu}^2(x,j))}{\delta+\tilde{\mu}^2(x,j)}\end{aligned}$$

- Cas d'un délai de carence

Si la police prévoit une période d'attente/de carence de durée $w_1 \leq 1$ an en cas d'entrée en dépendance physique (grabataire) et $w_2 > 1$ an en cas d'entrée en dépendance cognitive (démence) la prime unique pure s'écrit

$$\Pi_w = b_1\bar{a}_{x,w_1}^{01} + b_2\bar{a}_{x,w_2}^{02}$$

$$\bar{a}_{x,w_1}^{01} = \int_{w_1}^{\omega_x} exp(-\delta t - \int_0^t \mu_{x+s}^{0.} ds)\mu_{x+t}^{01}\bar{a}_{x+t}^{11}dt$$

$$\bar{a}_{x,w_1}^{01} = \int_{w_1}^1 exp(-\delta t - \int_0^t \mu_{x+s}^{0.} ds)\mu_{x+t}^{01}\bar{a}_{x+t}^{11}dt + \int_1^{\omega_x} exp(-\delta t - \int_0^t \mu_{x+s}^{0.} ds)\mu_{x+t}^{01}\bar{a}_{x+t}^{11}dt$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_{x,w_1}^{01} = {} & \mu_x^{01}\bar{a}_{x;0}^{11}\frac{exp(-w_1(\delta+\mu_x^{0.})) - exp(-\delta-\mu_x^{0.})}{\delta+\mu_x^{0.}} \\ & + \sum_{j=1}^{\omega_x-1}\mu_{x+j}^{01}\bar{a}_{x+j;0}^{11}exp(-\sum_{k=0}^{j-1}\mu_{x+k}^{0.} - j\delta)\frac{1-exp(-\delta-\mu_{x+j}^{0.})}{\delta+\mu_{x+j}^{0.}}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\bar{a}_{x,w_1}^{01} = {} & \mu_x^{01}\bar{a}_{x;0}^{11}\frac{exp(w_1(-\delta-(\mu_x^{01}+\mu_x^{02}+\mu_x^{03}))) - exp(-\delta-(\mu_x^{01}+\mu_x^{02}+\mu_x^{03}))}{\delta+(\mu_x^{01}+\mu_x^{02}+\mu_x^{03})} \\ & + \sum_{j=1}^{\omega_x-1}\mu_{x+j}^{01}\bar{a}_{x+j;0}^{11}exp(-\sum_{k=0}^{j-1}(\mu_{x+k}^{01}+\mu_{x+k}^{02}+\mu_{x+k}^{03}) - j\delta)\frac{1-exp(-\delta-(\mu_{x+j}^{01}+\mu_{x+j}^{02}+\mu_{x+j}^{03}))}{\delta+(\mu_{x+j}^{01}+\mu_{x+j}^{02}+\mu_{x+j}^{03})}\end{aligned}$$

$$\bar{a}^{02}_{x,w_2} = \int_{w_2}^{\omega_x} exp(-\delta t - \int_0^t \mu^{0.}_{x+s} ds)\mu^{02}_{x+t}\bar{a}^{22}_{x+t} dt$$

$$\bar{a}^{02}_{x,w_2} = \sum_{j=w_2}^{\omega_x-1} \mu^{02}_{x+j}\bar{a}^{22}_{x+j;0} exp(-\sum_{k=0}^{j-1}\mu^{0.}_{x+k} - j\delta)\frac{1-exp(-\delta-\mu^{0.}_{x+j})}{\delta+\mu^{0.}_{x+j}}$$

$$\bar{a}^{02}_{x,w_2} = \sum_{j=w_2}^{\omega_x-1} \mu^{02}_{x+j}\bar{a}^{22}_{x+j;0} exp(-\sum_{k=0}^{j-1}(\mu^{01}_{x+k}+\mu^{02}_{x+k}+\mu^{03}_{x+k}) - j\delta)\frac{1-exp(-\delta-(\mu^{01}_{x+j}+\mu^{02}_{x+j}+\mu^{03}_{x+j}))}{\delta+(\mu^{01}_{x+j}+\mu^{02}_{x+j}+\mu^{03}_{x+j})}$$

- Cas d'une franchise temporelle

Si la police prévoit une période une franchise de durée $f_1 < 1$ an en cas d'entrée en dépendance physique (grabataire) et $f_2 < 1$ an en cas d'entrée en dépendance cognitive (déménce),la prime unique pure s'écrit

$$\Pi_f = b_1\bar{a}^{01}_{x,f_1} + b_2\bar{a}^{02}_{x,f_2}$$

$$\bar{a}^{01}_{x,f_1} = \int_0^{\omega_x} exp(-\delta(t+f_1) - \int_0^t \mu^{0.}_{x+s} ds)\mu^{01}_{x+t} exp(-\int_0^{f_1}\mu^{13}_{x+t+z;z}dz)\bar{a}^{11}_{x+t+f_1;f_1} dt$$

$$\bar{a}^{01}_{x,f_1} = \mu^{01}_x\bar{a}^{11}_{x+f_1;f_1} exp(-f_1(\delta+\tilde{\mu}^1(x,0)))\frac{1-exp(-\delta-\mu^{0.}_x)}{\delta+\mu^{0.}_x}$$
$$+\sum_{j=1}^{\omega_x-1}\mu^{01}_{x+j}\bar{a}^{11}_{x+j+f_1;f_1} exp(-f_1(\delta+\tilde{\mu}^1(x+j,0)) - \sum_{k=0}^{j-1}\mu^{0.}_{x+k} - j\delta)\frac{1-exp(-\delta-\mu^{0.}_{x+j})}{\delta+\mu^{0.}_{x+j}}$$

$$\bar{a}^{02}_{x,f_2} = \int_0^{\omega_x} exp(-\delta(t+f_2) - \int_0^t \mu^{0.}_{x+s} ds)\mu^{02}_{x+t} exp(-\int_0^{f_2}\mu^{23}_{x+t+z;z}dz)\bar{a}^{22}_{x+t+f_2;f_1} dt$$

$$\bar{a}^{02}_{x,f_2} = \mu^{02}_x\bar{a}^{22}_{x+f_2;f_2} exp(-f_2(\delta+\tilde{\mu}^2(x,0)))\frac{1-exp(-\delta-\mu^{0.}_x)}{\delta+\mu^{0.}_x}$$
$$+\sum_{j=1}^{\omega_x-1}\mu^{02}_{x+j}\bar{a}^{22}_{x+j+f_2;f_2} exp(-f_2(\delta+\tilde{\mu}^2(x+j,0)) - \sum_{k=0}^{j-1}\mu^{0.}_{x+k} - j\delta)\frac{1-exp(-\delta-\mu^{0.}_{x+j})}{\delta+\mu^{0.}_{x+j}}$$

- Cas d'un délai de carence et d'une franchise temporelle

Si la police prévoit une période d'attente/de carence de durée $w_1 \leq 1$ an , une franchise de durée $f_1 < 1$ an en cas d'entrée en dépendance physique (grabataire) et $w_2 > 1$ an ,$f_2 < 1$ an en cas d'entrée en dépendance cognitive (déménce) la prime unique pure s'écrit

$$
\begin{aligned}
\Pi_{w,f} &= b_1\bar{a}^{01}_{x,w_1,f_1} + b_2\bar{a}^{02}_{x,w_2,f_2}\\
\bar{a}^{01}_{x,w_1,f_1} &= \mu^{01}_x \bar{a}^{11}_{x+f_1;f_1} exp(-f_1(\delta+\tilde{\mu}^1(x,0)))\frac{exp(-\omega_1(\delta+\mu^{0\cdot}_x)) - exp(-\delta-\mu^{0\cdot}_x)}{\delta+\mu^{0\cdot}_x}\\
&\quad + \sum_{j=1}^{\omega_x-1} \mu^{01}_{x+j}\bar{a}^{11}_{x+j+f_1;f_1} exp(-f_1(\delta+\tilde{\mu}^1(x+j,0)) - \sum_{k=0}^{j-1}\mu^{0\cdot}_{x+k} - j\delta)\frac{1-exp(-\delta-\mu^{0\cdot}_{x+j})}{\delta+\mu^{0\cdot}_{x+j}}
\end{aligned}
$$

$$
\bar{a}^{02}_{x,w_2,f_2} = \sum_{j=w_2}^{\omega_x-1} \mu^{02}_{x+j}\bar{a}^{22}_{x+j+f_2;f_2} exp(-f_2(\delta+\tilde{\mu}^2(x+j,0)) - \sum_{k=0}^{j-1}\mu^{0\cdot}_{x+k} - j\delta)\frac{1-exp(-\delta-\mu^{0\cdot}_{x+j})}{\delta+\mu^{0\cdot}_{x+j}}
$$

3.3.2 Pension bonifiée ou rente d'assurance vie (Life care annuity or Enhanced pension)

- Description

Le produit "life care annuity" combine une rente classique avec une rente dépendance : le montant de la rente viagère est donc augmenté lors du passage en dépendance et la rente majorée est alors versée jusqu'au décès de l'assuré ayant perdu son autonomie.

Précisément, cette rente prévoit un versement continu au taux b_0 dans l'état e_0. Ce versement passe à b_1 dans l'état e_1 et à b_2 dans l'état e_2, avec

$$b_1 > b_0, b_2 > b_0$$

L'intégration de ces deux produits vise à augmenter la couverture de la population, dans la mesure ou les individus couteux sur une des composantes du package le seront vraisemblablement moins sur l'autre.

La prime unique de la life care annuity s'écrit

$$\Pi = b_0\bar{a}_x^{00} + b_1\bar{a}_x^{01} + b_2\bar{a}_x^{02}$$

avec

$$b_1\bar{a}_x^{01} + b_2\bar{a}_x^{02}$$

calculée dans la section de la rente de dépendance (Stand-Alone LTC Cover) et

$$\begin{aligned}\bar{a}_x^{00} = & \frac{1 - exp(-\delta - \mu_x^{0\cdot})}{\delta + \mu_x^{0\cdot}} \\ & + \sum_{j=1}^{\omega_x - 1} exp(-\sum_{k=0}^{j-1} \mu_{x+k}^{0\cdot} - j\delta)\frac{1 - exp(-\delta - \mu_{x+j}^{0\cdot})}{\delta + \mu_{x+j}^{0\cdot}}\end{aligned}$$

La prime unique s'écrit encore

$$\Pi = b_0\bar{a}_x^{0} + (b_1 - b_0)\bar{a}_x^{01} + (b_2 - b_0)\bar{a}_x^{02}$$

où $b_1 - b_0$ et $b_2 - b_0$ sont les majorations de la rente lors de la perte d'autonomie et $\bar{a}_x^{0} = \bar{a}_x^{00} + \bar{a}_x^{01} + \bar{a}_x^{02}$ est le prix d'une rente classique, vendue à un individu autonome et si $b_1 = b_2 = b_0$, le produit se résume à une rente classique souscrite par un individu autonome.

- Cas d'un délai de carence

Si la police prévoit une période d'attente/de carence de durée $w_1 \leq 1$ an en cas d'entrée en dépendance physique (grabataire) et $w_2 > 1$ an en cas d'entrée en dépendance cognitive (démence) la prime unique pure s'écrit

$$\Pi_w = b_0\bar{a}_x^{00} + b_1\bar{a}_{x,w_1}^{01} + b_2\bar{a}_{x,w_2}^{02}$$

avec $\bar{a}_{x,w_1}^{01} + \bar{a}_{x,w_2}^{02}$ calculée la section 3.3.1(Cas d'un délai de carence) et $\bar{a}_x^{00}$ calculée dans la section 3.3.2(Description).

- Cas d'une franchise temporelle

Si la police prévoit une période une franchise de durée $f_1 < 1$ an en cas d'entrée en dépendance physique (grabataire) et $f_2 < 1$ an en cas d'entrée en dépendance cognitive (déménce), la prime unique pure s'écrit

$$\Pi_f = b_0\bar{a}_x^{00} + b_1\bar{a}_{x,f_1}^{01} + b_2\bar{a}_{x,f_2}^{02}$$

avec $\bar{a}_{x,f_1}^{01} + \bar{a}_{x,f_2}^{02}$ calculée la section 3.3.1(Cas d'une franchise temporelle) et $\bar{a}_x^{00}$ calculée dans la section 3.3.2(Description).

- Cas d'un délai de carence et d'une franchise temporelle

Si la police prévoit une période d'attente/de carence de durée $w_1 \leq 1$ an, une franchise de durée $f_1 < 1$ an en cas d'entrée en dépendance physique (grabataire) et $w_2 > 1$ an, $f_2 < 1$ an en cas d'entrée en dépendance cognitive (démence) la prime unique pure s'écrit

$$\Pi_{w,f} = b_0\bar{a}_x^{00} + b_1\bar{a}_{x,w_1,f_1}^{01} + b_2\bar{a}_{x,w_2,f_2}^{01}$$

avec $\bar{a}_{x,w_1,f_1}^{01} + \bar{a}_{x,w_2,f_2}^{01}$ calculée la section 3.3.1(Cas d'un délai de carence et d'une franchise temporelle) et $\bar{a}_x^{00}$ calculée dans la section 3.3.2(Description).

3.3.3 Package Dépendance avec rente viagère différée (Package of LTC and lifetime-related benefits)

- Description

Ce package se compose d'une rente de dépendance combinée à d'autres couvertures liées à la durée de vie c'est-à-dire les prestations dépendant uniquement de la survie et du décès de l'assuré. Ces garanties annexes visent à protéger la famille de l'assuré en cas de décès de ce dernier. Elles permettent à l'assuré de bénéficier d'une rente complémentaire à sa retraite. Ce package est destiné aux chefs de famille et salariés.

Nous considérons le package dans lequel les prestations suivantes sont incluses :

- Une rente viagère différée payable à taux constant b_0 , versée pendant que l'assuré est dans l'état autonome e_0 (la période d'ajournement est notée n) ;
- Une rente dépendance payable à un taux b_1 ou b_2 payée pendant que l'assuré est dans l'état e_1 ou e_2 ;
- Prestations de décès du montant $c_{03} = c_{13} = c_{23} = c_3$

La prime unique est alors donnée par

$$\Pi = b_0 v(0,n)\ {}_np_x^{00}\bar{a}_{x+n}^{00} + b_1\bar{a}_x^{01} + b_2\bar{a}_x^{02} + c_3\bar{A}_x^0$$

Où $\bar{a}_x^{01} + \bar{a}_x^{02}$ est calculée dans la section 3.3.1(Description) , $\bar{a}_x^{00}$ calculée dans la section 3.3.2(Description) et $\bar{A}_x^0 = \bar{A}_x^{0;0\to3} + \bar{A}_x^{0;1\to3} + \bar{A}_x^{0;2\to3}$ Avec

$$\bar{A}_x^{0;0\to3} = \int_0^{\omega_x} v(0,t)\ {}_tp_x^{00}\mu_{x+t}^{03}dt$$

$$\bar{A}_x^{0;0\to3} = \int_0^{\omega_x} exp(-\int_0^t \mu_{x+s}^{0.}ds)exp(-\delta t)\mu_{x+t}^{03}dt$$

$$\bar{A}_x^{0;0\to3} = \int_0^1 exp(-t(\mu_x^{0.} + \delta)\mu_{x+t}^{03}dt) + \sum_{j=1}^{\omega_x-1}\mu_{x+j}^{03}exp(-\sum_{k=0}^{j-1}\mu_{x+k}^{0.} - j\delta)\frac{1 - exp(-\delta - \mu_{x+j}^{0.})}{\mu_{x+j}^{0.} + \delta}$$

$$\bar{A}_x^{0;0\to3} = \mu_x^{03}\frac{1 - exp(-\delta - \mu_x^{0.})}{\mu_x^{0.} + \delta} + \sum_{j=1}^{\omega_x-1}\mu_{x+j}^{03}exp(-\sum_{k=0}^{j-1}\mu_{x+k}^{0.} - j\delta)\frac{1 - exp(-\delta - \mu_{x+j}^{0.})}{\mu_{x+j}^{0.} + \delta}$$

$$\bar{A}_x^{0;1\to 3} = \int_0^{\omega_x} {}_tp_x{}^{00}\mu_{x+t}^{01}(\int_0^{\omega_x-t} {}_zp_{x+t}{}^{11}\mu_{x+t+z;z}^{13}v(0,t+z)dz)dt$$

$$\bar{A}_x^{0;1\to 3} = \int_0^{1} {}_tp_x{}^{00}\mu_{x+t}^{01}v(0,t)(\int_0^{\omega_x-t} {}_zp_{x+t}{}^{11}\mu_{x+t+z;z}^{13}v(0,z)dz)dt$$
$$+ \int_1^{\omega_x} {}_tp_x{}^{00}\mu_{x+t}^{01}v(0,t)(\int_0^{\omega_x-t} {}_zp_{x+t}{}^{11}\mu_{x+t+z;z}^{13}v(0,z)dz)dt$$

$$\bar{A}_x^{0;1\to 3} = \mu_x^{01}\bar{A}_{x;0}^{1;1\to 3}\frac{1-exp(-\delta-\mu_{x+k}^{0.})}{\delta+\mu_{x+k}^{0.}}$$
$$+ \sum_{j=1}^{\omega_x-1}\mu_{x+j}^{01}\bar{A}_{x+j;0}^{1;1\to 3}exp(-\sum_{k=0}^{j-1}(\mu_{x+k}^{0.})-j\delta)\frac{1-exp(-\delta-\mu_{x+k}^{0.})}{\delta+\mu_{x+k}^{0.}}$$

$$\bar{A}_x^{0;2\to 3} = \int_0^{\omega_x} {}_tp_x{}^{00}\mu_{x+t}^{02}(\int_0^{\omega_x-t} {}_zp_{x+t}{}^{22}\mu_{x+t+z;z}^{23}v(0,t+z)dz)dt$$

$$\bar{A}_x^{0;2\to 3} = \int_0^{1} {}_tp_x{}^{00}\mu_{x+t}^{02}v(0,t)(\int_0^{\omega_x-t} {}_zp_{x+t}{}^{22}\mu_{x+t+z;z}^{23}v(0,z)dz)dt$$
$$+ \int_1^{\omega_x} {}_tp_x{}^{00}\mu_{x+t}^{02}v(0,t)(\int_0^{\omega_x-t} {}_zp_{x+t}{}^{22}\mu_{x+t+z;z}^{23}v(0,z)dz)dt$$

$$\bar{A}_x^{0;2\to 3} = \mu_x^{02}\bar{A}_{x;0}^{2;2\to 3}\frac{1-exp(-\delta-\mu_{x+k}^{0.})}{\delta+\mu_{x+k}^{0.}}$$
$$+ \sum_{j=1}^{\omega_x-1}\mu_{x+j}^{02}\bar{A}_{x+j;0}^{2;2\to 3}exp(-\sum_{k=0}^{j-1}(\mu_{x+k}^{0.})-j\delta)\frac{1-exp(-\delta-\mu_{x+k}^{0.})}{\delta+\mu_{x+k}^{0.}}$$

Avec

$$\bar{A}_{x;0}^{1;1\to 3} = \int_0^{\omega_x} {}_zp_{x;0}^{11}\mu_{x+z;z}^{13}v(0,z)dz$$

$$\bar{A}_{x;0}^{1;1\to 3} = \tilde{\mu}^1(x,0)\frac{1-exp(-\delta-\tilde{\mu}^1(x,0))}{\delta+\tilde{\mu}^1(x,0)}$$
$$+ \sum_{j=1}^{\omega_x-1}\tilde{\mu}^1(x,j)exp(-\sum_{k=0}^{j-1}\tilde{\mu}^1(x,k)-j\delta)\frac{1-exp(-\delta-\tilde{\mu}^1(x,j))}{\delta+\tilde{\mu}^1(x,j)}$$

et

$$\bar{A}_{x;0}^{2;2\to 3} = \int_0^{\omega_x} {}_zp_{x;0}^{22}\mu_{x+z;z}^{23}v(0,z)dz$$

$$\bar{A}_{x;0}^{2;2\to 3} = \tilde{\mu}^2(x,0)\frac{1-exp(-\delta-\tilde{\mu}^2(x,0))}{\delta+\tilde{\mu}^2(x,0)}$$
$$+ \sum_{j=1}^{\omega_x-1}\tilde{\mu}^2(x,j)exp(-\sum_{k=0}^{j-1}\tilde{\mu}^2(x,k)-j\delta)\frac{1-exp(-\delta-\tilde{\mu}^2(x,j))}{\delta+\tilde{\mu}^2(x,j)}$$

Selon une définition alternative, les prestations de décès c_{03} ,c_{13} et c_{23} sont données par la différence (si positive) entre un montant indiqué c et le montant totalement payé comme rente viagère différée et / ou rente de dépendance

- Cas d'un délai de carence

Si la police prévoit une période d'attente/de carence de durée $w_1 \leq 1$ an en cas d'entrée en dépendance physique (grabataire) et $w_2 > 1$ an en cas d'entrée en dépendance cognitive (démence) la prime unique pure s'écrit

$$\Pi_w = b_0 v(0,n)\ {}_np_x^{00}\bar{a}_{x+n}^{00} + b_1\bar{a}_{x,w_1}^{01} + b_2\bar{a}_{x,w_2}^{01} + c_3\bar{A}_x^0$$

avec $b_1\bar{a}_{x,w_1}^{01} + b_2\bar{a}_{x,w_2}^{01}$ la rente dépendance définie en 3.3.1(cas d'un délai de carence).

- Cas d'une franchise temporelle

Si la police prévoit une période une franchise de durée $f_1 < 1$ an en cas d'entrée en dépendance physique (grabataire) et $f_2 < 1$ an en cas d'entrée en dépendance cognitive (déménce),la prime unique pure s'écrit

$$\Pi_f = b_0 v(0,n)\ {}_np_x^{00}\bar{a}_{x+n}^{00} + b_1\bar{a}_{x,f_1}^{01} + b_2\bar{a}_{x,f_2}^{01} + c_3\bar{A}_x^0$$

avec $b_1\bar{a}_{x,f_1}^{01} + b_2\bar{a}_{x,f_2}^{01}$ la rente dépendance définie en 3.3.1(cas d'une franchise temporelle).

- Cas d'un délai de carence et d'une franchise temporelle

Si la police prévoit une période d'attente/de carence de durée $w_1 \leq 1$ an , une franchise de durée $f_1 < 1$ an en cas d'entrée en dépendance physique (grabataire) et $w_2 > 1$ an ,$f_2 < 1$ an en cas d'entrée en dépendance cognitive (démence) la prime unique pure s'écrit

$$\Pi_{w,f} = b_0 v(0,n)\ {}_np_x^{00}\bar{a}_{x+n}^{00} + b_1\bar{a}_{x,w_1,f_1}^{01} + b_2\bar{a}_{x,w_2,f_2}^{02} + c_3\bar{A}_x^0$$

Avec $b_1\bar{a}_{x,w_1,f_1}^{01} + b_2\bar{a}_{x,w_2,f_2}^{01}$ la rente dépendance définie en 3.3.1(cas d'un délai de carence et d'une franchise temporelle).

3.3.4 Couverture décès avec versement anticipé en cas de perte d'autonomie (Whole-life insurance with LTC acceleration benefit)

- Description

Un volet dépendance peut se greffer à une couverture décès vie entière (ce produit est peu répandu chez nous mais populaire dans le monde anglo-saxon). En pareil cas, la prestation lors de la perte d'autonomie réduit celle en cas de décès. Précisément, en notant c_{03} le montant versé en cas de décès en autonomie et b_1, b_2 les taux de la rente de dépendance, supposée payable continûment, le montant du capital décès en faveur d'un individu dépendant depuis une durée z est donnée par

$$c_{13}(t,z) = max\left\{c_{03} - b_1 z, 0\right\} = (c_{03} - b_1 z)_+$$
$$c_{23}(t,z) = max\left\{c_{03} - b_2 z, 0\right\} = (c_{03} - b_2 z)_+$$

Si le montant total de la rente de dépendance est limité par le capital décès, la prime s'écrit

$$\begin{aligned}
\Pi &= c_{03}\bar{A}_x^{0;0\to 3} + b_1 \bar{a}^{01}_{x;c_{03}/b_1\rceil} + b_2 \bar{a}^{02}_{x;c_{03}/b_2\rceil} \\
&+ \int_0^{\omega_x} {}_tp_x^{00}\mu^{01}_{x+t}\left(\int_0^{c_{03}/b_1} (c_{03} - b_1 z)\ {}_zp^{11}_{x+t;0}\mu^{13}_{x+t+z;z} v(0,t+z)dz\right)dt \\
&+ \int_0^{\omega_x} {}_tp_x^{00}\mu^{02}_{x+t}\left(\int_0^{c_{03}/b_2} (c_{03} - b_2 z)\ {}_zp^{22}_{x+t;0}\mu^{23}_{x+t+z;z} v(0,t+z)dz\right)dt \\
\Pi &= c_{03}\bar{A}_x^{0;0\to 3} + b_1 \bar{a}^{01}_{x;c_{03}/b_1\rceil} + b_2 \bar{a}^{02}_{x;c_{03}/b_2\rceil} + c_{13}\bar{A}^{0;1\to 3}_{x:c_{03}/b_1} + c_{23}\bar{A}^{0;2\to 3}_{x:c_{03}/b_2}
\end{aligned}$$

Avec

$$\bar{a}^{01}_{x;c_{03}/b_1\rceil} = \mu_x^{01}\bar{a}^{11}_{x;0}\frac{1 - exp(-\delta - \mu_x^{0\cdot})}{\delta + \mu_x^{0\cdot}} + \sum_{j=1}^{c_{03}/b_1\rceil} \mu^{01}_{x+j}\bar{a}^{11}_{x+j;0} exp(-\sum_{k=0}^{j-1}(\mu^{0\cdot}_{x+k}) - j\delta)\frac{1 - exp(-\delta - \mu^{0\cdot}_{x+j})}{\delta + \mu^{0\cdot}_{x+j}}$$

$$\bar{a}^{02}_{x;c_{03}/b_2\rceil} = \mu_x^{02}\bar{a}^{22}_{x;0}\frac{1 - exp(-\delta - \mu_x^{0\cdot})}{\delta + \mu_x^{0\cdot}} + \sum_{j=1}^{c_{03}/b_2\rceil} \mu^{02}_{x+j}\bar{a}^{22}_{x+j;0} exp(-\sum_{k=0}^{j-1}(\mu^{0\cdot}_{x+k}) - j\delta)\frac{1 - exp(-\delta - \mu^{0\cdot}_{x+j})}{\delta + \mu^{0\cdot}_{x+j}}$$

$$\bar{A}^{0;1\to 3}_{x;c_{03}/b_1} = \mu_x^{01}\bar{A}^{1;1\to 3}_{x;0}\frac{1 - exp(-\delta - \mu_x^{0\cdot})}{\delta + \mu_x^{0\cdot}} + \sum_{j=1}^{c_{03}/b_1} \mu^{01}_{x+j}\bar{A}^{1;1\to 3}_{x+j;0} exp(-\sum_{k=0}^{j-1}(\mu^{0\cdot}_{x+k}) - j\delta)\frac{1 - exp(-\delta - \mu^{0\cdot}_{x+j})}{\delta + \mu^{0\cdot}_{x+j}}$$

$$\bar{A}^{0;2\to 3}_{x;c_{03}/b_2} = \mu_x^{02}\bar{A}^{2;2\to 3}_{x;0}\frac{1 - exp(-\delta - \mu_x^{0\cdot})}{\delta + \mu_x^{0\cdot}} + \sum_{j=1}^{c_{03}/b_2} \mu^{02}_{x+j}\bar{A}^{2;2\to 3}_{x+j;0} exp(-\sum_{k=0}^{j-1}(\mu^{0\cdot}_{x+k}) - j\delta)\frac{1 - exp(-\delta - \mu^{0\cdot}_{x+j})}{\delta + \mu^{0\cdot}_{x+j}}$$

Dans le cas contraire, il vient

$$\begin{aligned}
&\Pi = c_{03}\bar{A}_x^{0;0\to 3} + b_1\bar{a}^{01}_x + b_2\bar{a}^{02}_x + \int_0^{\omega_x} {}_tp_x^{00}\mu^{01}_{x+t}\left(\int_0^{c_{03}/b_1} (c_{03} - b_1 z)\ {}_zp^{11}_{x+t;0}\mu^{13}_{x+t+z;z} v(0,t+z)dz\right)dt \\
&\quad + \int_0^{\omega_x} {}_tp_x^{00}\mu^{02}_{x+t}\left(\int_0^{c_{03}/b_2} (c_{03} - b_2 z)\ {}_zp^{22}_{x+t;0}\mu^{23}_{x+t+z;z} v(0,t+z)dz\right)dt \\
&\Pi = c_{03}\bar{A}_x^{0;0\to 3} + b_1\bar{a}^{01}_x + b_2\bar{a}^{02}_x + c_{13}\bar{A}^{0;1\to 3}_{x:c_{03}/b_1} + c_{23}\bar{A}^{0;2\to 3}_{x:c_{03}/b_2})
\end{aligned}$$

Cette seconde formule s'avère bien entendu plus onéreuse que la première.

- Cas d'un délai de carence

Si la police prévoit une période d'attente/de carence de durée $w_1 \leq 1$ an en cas d'entrée en dépendance physique (grabataire) et $w_2 > 1$ an en cas d'entrée en dépendance cognitive (démence) la prime unique pure s'écrit

$$\Pi_w = c_{03}\bar{A}_x^{0;0\to3} + b_1\bar{a}^{01}_{x;c_{03}/b_1\rceil,w_1} + b_2\bar{a}^{02}_{x;c_{03}/b_2\rceil,w_2} + c_{13}\bar{A}^{0;1\to3}_{x:c_{03}/b_1} + c_{23}\bar{A}^{0;2\to3}_{x:c_{03}/b_2}$$

Avec

$$\begin{aligned}\bar{a}^{01}_{x;c_{03}/b_1\rceil} &= \mu_x^{01}\bar{a}^{11}_{x;0}\frac{exp(-\omega_1(\delta+\mu_x^{0\cdot})) - exp(-\delta-\mu_x^{0\cdot})}{\delta+\mu_x^{0\cdot}} \\ &+ \sum_{j=1}^{c_{03}/b_1}\mu^{01}_{x+j}\bar{a}^{11}_{x+j;0}exp(-\sum_{k=0}^{j-1}(\mu^{0\cdot}_{x+k}) - j\delta)\frac{1-exp(-\delta-\mu^{0\cdot}_{x+j})}{\delta+\mu^{0\cdot}_{x+j}}\end{aligned}$$

$$\bar{a}^{02}_{x;c_{03}/b_2\rceil} = \sum_{j=w_2}^{c_{03}/b_2}\mu^{02}_{x+j}\bar{a}^{22}_{x+j;0}exp(-\sum_{k=0}^{j-1}(\mu^{0\cdot}_{x+k}) - j\delta)\frac{1-exp(-\delta-\mu^{0\cdot}_{x+j})}{\delta+\mu^{0\cdot}_{x+j}}$$

Dans le cas contraire, il vient

$$\Pi_w = c_{03}\bar{A}_x^{0;0\to3} + b_1\bar{a}^{01}_{x,w_1} + b_2\bar{a}^{01}_{x,w_2} + c_{13}\bar{A}^{0;1\to3}_{x:c_{03}/b_1} + c_{23}\bar{A}^{0;2\to3}_{x:c_{03}/b_2}$$

Avec $b_1\bar{a}^{01}_{x,w_1} + b_2\bar{a}^{01}_{x,w_2}$ la rente dépendance calculée en 3.3.1(cas d'un délai de carence).

- Cas d'une franchise temporelle

Si la police prévoit une période une franchise de durée $f_1 < 1$ an en cas d'entrée en dépendance physique (grabataire) et $f_2 < 1$ an en cas d'entrée en dépendance cognitive (déménce), la prime unique pure s'écrit

Si le montant total de la rente de dépendance est limité par le capital décès la prime s'écrit

$$\Pi_f = c_{03}\bar{A}_x^{0;0\to3} + b_1\bar{a}^{01}_{x;c_{03}/b_1\rceil,f_1} + b_2\bar{a}^{02}_{x;c_{03}/b_2\rceil,f_2} + c_{13}\bar{A}^{0;1\to3}_{x:c_{03}/b_1} + c_{23}\bar{A}^{0;2\to3}_{x:c_{23}/b_2}$$

Avec

$$\begin{aligned}\bar{a}^{01}_{x;c_{03}/b_1\rceil,f_1} &= \mu_x^{01}\bar{a}^{11}_{x+f_1;f_1}exp(-f_1(\delta+\tilde{\mu}^1(x,0)))\frac{1-exp(-\delta-\mu_x^{0\cdot})}{\delta+\mu_x^{0\cdot}} \\ &+ \sum_{j=1}^{c_{03}/b_1}\mu^{01}_{x+j}\bar{a}^{11}_{x+j+f_1;f_1}exp(-f_1(\delta+\tilde{\mu}^1(x+j,0)) - \sum_{k=0}^{j-1}(\mu^{0\cdot}_{x+k}) - j\delta)\frac{1-exp(-\delta-\mu^{0\cdot}_{x+j})}{\delta+\mu^{0\cdot}_{x+j}}\end{aligned}$$

$$\bar{a}^{02}_{x;c_{03}/b_2\rceil,f_2} = \sum_{j=1}^{c_{03}/b_2}\mu^{02}_{x+j}\bar{a}^{22}_{x+j+f_2;f_2}exp(-f_2(\delta+\tilde{\mu}^2(x+j,0)) - \sum_{k=0}^{j-1}(\mu^{0\cdot}_{x+k}) - j\delta)\frac{1-exp(-\delta-\mu^{0\cdot}_{x+j})}{\delta+\mu^{0\cdot}_{x+j}}$$

Dans le cas contraire, il vient

$$\Pi_f = c_{03}\bar{A}_x^{0;0\to 3} + b_1\bar{a}_{x,f_1}^{01} + b_2\bar{a}_{x,f_2}^{02} + c_{13}\bar{A}_{x:c_{03}/b_1}^{0;1\to 3} + c_{23}\bar{A}_{x:c_{03}/b_2}^{0;2\to 3}$$

Avec $b_1\bar{a}_{x,f_1}^{01} + b_2\bar{a}_{x,f_2}^{02}$ la rente dépendance calculée dans la section 3.3.1(cas d'une franchise temporelle).

- Cas d'un délai de carence et d'une franchise temporelle

Si la police prévoit une période d'attente/de carence de durée $w_1 \leq 1$ an , une franchise de durée $f_1 < 1$ an en cas d'entrée en dépendance physique (grabataire) et $w_2 > 1$ an ,$f_2 < 1$ an en cas d'entrée en dépendance cognitive (démence) la prime unique pure s'écrit

Si le montant total de la rente de dépendance est limité par le capital décès la prime s'écrit

$$\Pi_{w,f} = c_{03}\bar{A}_x^{0;0\to 3} + b_1\bar{a}_{x;c_{03}/b_1\rceil,w_1,f_1}^{01} + b_2\bar{a}_{x;c_{03}/b_1\rceil,w_2,f_2}^{02} + c_{13}\bar{A}_{x:c_{03}/b_1}^{0;1\to 3} + c_{23}\bar{A}_{x:c_{03}/b_2}^{0;2\to 3}$$

Avec

$$\begin{aligned}\bar{a}_{x;c_{03}/b_1\rceil,w_1,f_1}^{01} &= \mu_x^{01}\bar{a}_{x+f_1;f_1}^{11} exp(-f_1(\delta+\tilde{\mu}^1(x,0)))\frac{exp(-\omega_1(\delta+\mu_x^{0\cdot})) - exp(-\delta-\mu_x^{0\cdot})}{\delta+\mu_x^{0\cdot}} \\ &+ \sum_{j=1}^{c_{03}/b_1} \mu_{x+j}^{01}\bar{a}_{x+j+f_1;f_1}^{11} exp(-f_1(\delta+\tilde{\mu}^1(x+j,0)) - \sum_{k=0}^{j-1}(\mu_{x+k}^{0\cdot}) - j\delta)\frac{1-exp(-\delta-\mu_{x+j}^{0\cdot})}{\delta+\mu_{x+j}^{0\cdot}}\end{aligned}$$

$$\bar{a}_{x;c_{03}/b_2\rceil,w_2,f_2}^{02} = \sum_{j=w_2}^{c_{03}/b_2} \mu_{x+j}^{02}\bar{a}_{x+j+f_2;f_2}^{22} exp(-f_2(\delta+\tilde{\mu}^2(x+j,0)) - \sum_{k=0}^{j-1}(\mu_{x+k}^{0\cdot}) - j\delta)\frac{1-exp(-\delta-\mu_{x+j}^{0\cdot})}{\delta+\mu_{x+j}^{0\cdot}}$$

Dans le cas contraire, il vient

$$\Pi_{w,f} = c_{03}\bar{A}_x^{0;0\to 3} + b_1\bar{a}_{x,w_1,f_1}^{01} + b_2\bar{a}_{x,w_2,f_2}^{02} + c_{13}\bar{A}_{x:c_{03}/b_1}^{0;1\to 3} + c_{23}\bar{A}_{x:c_{03}/b_2}^{0;2\to 3}$$

Avec $b_1\bar{a}_{x,w_1,f_1}^{01} + b_2\bar{a}_{x,w_2,f_2}^{02}$ la rente dépendance calculée dans la section 3.3.1(cas d'un délai de carence et d'une franchise temporelle).

4 Réserves en assurance dépendance

4.1 Modélisation du problème

Les contrats d'assurance dépendance sont généralement assortis d'une prime uniforme fixée à l'entrée en vigueur du contrat, de sorte que le montant annuel versé ne varie pas au cours du contrat. On parle alors de primes nivelées, c'est-à-dire des primes dépendant de l'âge à la souscription mais ensuite constante durant toute la durée de couverture.

La prime de risque annuelle (défini comme le montant du sinistre annuel attendu pour un individu autonome) est une fonction croissante de l'âge sauf aux âges les plus avancés.

Par conséquent, des excédents sont constitués dans la première partie du contrat car les primes nivelées dépassent les primes de risque annuelles. Cet excédent est appelé réserve et est mis de côté pour compenser l'insuffisance des primes aux âges plus avancés.

Dans le cas où une prime unique est versée à l'émission de la police, une réserve doit être immédiatement constituée puis utilisée pendant toute la durée de la police pour faire face aux coûts précis par l'assureur.

Règlementairement, l'assureur doit disposer d'une réserve à tout moment. En assurance dépendance, la réserve se définit prospectivement. Elle se définit comme la valeur actuelle moyenne des prestations futures prévues au contrat, diminuée de la valeur actuelle moyenne des primes restant à échoir. La réserve dépend de l'état dans lequel se trouve l'assuré à la date du calcul. Il y a donc une réserve V_t^0 pour un assuré autonome à l'instant t de calcul et une réserve $V_{t;z}^1$ ou $V_{t;z}^2$ pour un assuré dépendant à cet instant, depuis une durée z .

Bien entendu, il n'est pas nécessaire de définir une réserve dans l'état décès 3 , puisque le décès de l'assuré met automatiquement fin au contrat.

Le principe d'équivalence prévoit qu'à la souscription la valeur actuelle moyenne des primes Π coïncide avec la valeur actuelle moyenne B des prestations en faveur de l'assuré. Nous avons donc $V_0^0 = 0$.

Cette équivalence ne tient plus en cours de contrat. La réserve est précisément le montant nécessaire pour restaurer cet équilibre à tout instant $t > 0$.

Précisément, en définissant

$$\begin{aligned}
\Pi_0(t) = & \int_0^{\omega_x - t} {}_s p_{x+t}^{00} \pi_0(t+s) v(t, t+s) ds \\
& + \int_0^{\omega_x - t} {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{01} \Big(\int_0^{\omega_x - t - s} {}_z p_{x+t+s;0}^{11} \pi_1(t+s+z; z) v(t, t+s+z) dz \Big) ds \\
& + \int_0^{\omega_x - t} {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{02} \Big(\int_0^{\omega_x - t - s} {}_z p_{x+t+s;0}^{22} \pi_2(t+s+z; z) v(t, t+s+z) dz \Big) ds
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
B_0(t) = & \int_0^{\omega_x - t} \ {}_s p_{x+t}^{00} b_0(t+s) v(t, t+s) ds \\
& + \int_0^{\omega_x - t} \ {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{01} (\int_0^{\omega_x - t - s} \ {}_z p_{x+t+s;0}^{11} b_1(t+s+z; z) v(t, t+s+z) dz) ds \\
& + \int_0^{\omega_x - t} \ {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{02} (\int_0^{\omega_x - t - s} \ {}_z p_{x+t+s;0}^{22} b_2(t+s+z; z) v(t, t+s+z) dz) ds \\
& + \int_0^{\omega_x - t} v(t, t+s) \ {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{01} c_{01}(t+s) ds \\
& + \int_0^{\omega_x - t} v(t, t+s) \ {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{02} c_{02}(t+s) ds \\
& + \int_0^{\omega_x - t} v(t, t+s) \ {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{03} c_{03}(t+s) ds \\
& + \int_0^{\omega_x - t} \ {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{01} (\int_0^{\omega_x - t - s} \ {}_z p_{x+t+s;0}^{11} \mu_{x+t+s+z;z}^{13} c_{13}(t+s+z, z) v(t, t+s+z) dz) ds \\
& + \int_0^{\omega_x - t} \ {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{02} (\int_0^{\omega_x - t - s} \ {}_z p_{x+t+s;0}^{22} \mu_{x+t+s+z;z}^{23} c_{23}(t+s+z, z) v(t, t+s+z) dz) ds
\end{aligned}
$$

Nous retrouvons $\Pi = \Pi_0(0)$ et $B = B_0(0)$

Si la police prévoit une période d'attente/de carence de durée w_1 an en cas d'entrée en dépendance physique (grabataire) et w_2 an en cas d'entrée en dépendance cognitive (démence) on obtient

$$
\begin{aligned}
B_0(t) = & \int_0^{\omega_x - t} \ {}_s p_{x+t}^{00} b_0(t+s) v(t, t+s) ds \\
& + \int_{Max\{w_1 - t; 0\}}^{\omega_x - t} \ {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{01} (\int_0^{\omega_x - t - s} \ {}_z p_{x+t+s;0}^{11} b_1(t+s+z; z) v(t, t+s+z) dz) ds \\
& + \int_{Max\{w_2 - t; 0\}}^{\omega_x - t} \ {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{02} (\int_0^{\omega_x - t - s} \ {}_z p_{x+t+s;0}^{22} b_2(t+s+z; z) v(t, t+s+z) dz) ds \\
& + \int_0^{\omega_x - t} v(t, t+s) \ {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{01} c_{01}(t+s) ds \\
& + \int_0^{\omega_x - t} v(t, t+s) \ {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{02} c_{02}(t+s) ds \\
& + \int_0^{\omega_x - t} v(t, t+s) \ {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{03} c_{03}(t+s) ds \\
& + \int_0^{\omega_x - t} \ {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{01} (\int_0^{\omega_x - t - s} \ {}_z p_{x+t+s;0}^{11} \mu_{x+t+s+z;z}^{13} c_{13}(t+s+z, z) v(t, t+s+z) dz) ds \\
& + \int_0^{\omega_x - t} \ {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{02} (\int_0^{\omega_x - t - s} \ {}_z p_{x+t+s;0}^{22} \mu_{x+t+s+z;z}^{23} c_{23}(t+s+z, z) v(t, t+s+z) dz) ds
\end{aligned}
$$

Si la police prévoit une franchise de durée f_1 en cas d'entrée en dépendance cognitive et

f_2 en cas d'entrée en dépendance physique on obtient :

$$\begin{aligned}
B_0(t) &= \int_0^{\omega_x - t} {}_sp^{00}_{x+t} b_0(t+s) v(t,t+s) ds \\
&+ \int_0^{\omega_x - t} {}_sp^{00}_{x+t}\mu^{01}_{x+t+s}\left(\int_0^{\omega_x - t - s} {}_zp^{11}_{x+t+s;0} b_1(t+s+z;z) 1_{\{z>f_1\}} v(t,t+s+z) dz\right) ds \\
&+ \int_0^{\omega_x - t} {}_sp^{00}_{x+t}\mu^{02}_{x+t+s}\left(\int_0^{\omega_x - t - s} {}_zp^{22}_{x+t+s;0} b_2(t+s+z;z) 1_{\{z>f_2\}} v(t,t+s+z) dz\right) ds \\
&+ \int_0^{\omega_x - t} v(t,t+s)\ {}_sp^{00}_{x+t}\mu^{01}_{x+t+s} c_{01}(t+s) ds \\
&+ \int_0^{\omega_x - t} v(t,t+s)\ {}_sp^{00}_{x+t}\mu^{02}_{x+t+s} c_{02}(t+s) ds \\
&+ \int_0^{\omega_x - t} v(t,t+s)\ {}_sp^{00}_{x+t}\mu^{03}_{x+t+s} c_{03}(t+s) ds \\
&+ \int_0^{\omega_x - t} {}_sp^{00}_{x+t}\mu^{01}_{x+t+s}\left(\int_0^{\omega_x - t - s} {}_zp^{11}_{x+t+s;0}\mu^{13}_{x+t+s+z;z} c_{13}(t+s+z,z) v(t,t+s+z) dz\right) ds \\
&+ \int_0^{\omega_x - t} {}_sp^{00}_{x+t}\mu^{02}_{x+t+s}\left(\int_0^{\omega_x - t - s} {}_zp^{22}_{x+t+s;0}\mu^{23}_{x+t+s+z;z} c_{23}(t+s+z,z) v(t,t+s+z) dz\right) ds
\end{aligned}$$

Si la police prévoit une période d'attente/de carence de durée w_1 , une franchise de durée f_1 en cas d'entrée en dépendance cognitive et w_2, f_2 en cas d'entrée en dépendance physique, on obtient :

$$\begin{aligned}
B_0(t) &= \int_0^{\omega_x - t} {}_sp^{00}_{x+t} b_0(t+s) v(t,t+s) ds \\
&+ \int_{Max\{w_1 - t;0\}}^{\omega_x - t} {}_sp^{00}_{x+t}\mu^{01}_{x+t+s}\left(\int_0^{\omega_x - t - s} {}_zp^{11}_{x+t+s;0} b_1(t+s+z;z) 1_{\{z>f_1\}} v(t,t+s+z) dz\right) ds \\
&+ \int_{Max\{\omega_2 - t;0\}}^{\omega_x - t} {}_sp^{00}_{x+t}\mu^{02}_{x+t+s}\left(\int_0^{\omega_x - t - s} {}_zp^{22}_{x+t+s;0} b_2(t+s+z;z) 1_{\{z>f_2\}} v(t,t+s+z) dz\right) ds \\
&+ \int_0^{\omega_x - t} v(t,t+s)\ {}_sp^{00}_{x+t}\mu^{01}_{x+t+s} c_{01}(t+s) ds \\
&+ \int_0^{\omega_x - t} v(t,t+s)\ {}_sp^{00}_{x+t}\mu^{02}_{x+t+s} c_{02}(t+s) ds \\
&+ \int_0^{\omega_x - t} v(t,t+s)\ {}_sp^{00}_{x+t}\mu^{03}_{x+t+s} c_{03}(t+s) ds \\
&+ \int_0^{\omega_x - t} {}_sp^{00}_{x+t}\mu^{01}_{x+t+s}\left(\int_0^{\omega_x - t - s} {}_zp^{11}_{x+t+s;0}\mu^{13}_{x+t+s+z;z} c_{13}(t+s+z,z) v(t,t+s+z) dz\right) ds \\
&+ \int_0^{\omega_x - t} {}_sp^{00}_{x+t}\mu^{02}_{x+t+s}\left(\int_0^{\omega_x - t - s} {}_zp^{22}_{x+t+s;0}\mu^{23}_{x+t+s+z;z} c_{23}(t+s+z,z) v(t,t+s+z) dz\right) ds
\end{aligned}$$

La réserve dans l'état e_0 est alors donnée par

$$V_t^0 = B_0(t) - \Pi_0(t)$$

Elle représente la partie des prestations futures non couverte par les primes futures (nécessitant donc sa mise en réserve au préalable).

L'équilibre financier est ainsi restauré puisque l'identité

$$\Pi_0(t) + V_t^0 = B_0(t)$$

est valable pour tout $t \geq 0$.

La valeur actuelle moyenne des primes futures $\Pi_0(t)$ augmentée de la réserve V_t^0 du contrat permet donc de couvrir la valeur actuelle moyenne des prestations futures $B_0(t)$ pour un assuré autonome à l'instant t .

Considérons à présent un assuré dans l'état e_1 ou e_2 à l'instant t, entré dans cet état à l'instant $t - z$. Les réserves $V_{t;z}^1$ et $V_{t;z}^2$ sont alors qualifiées de provision pour sinistre à payer, par similitude avec l'assurance dommage.

Si $t - z \leq \; w_1$ ou $t - z \leq \; w_2$, le contrat prend fin en $t - z$ par le remboursement à l'assuré des primes payées jusque-là.

Pour $t - z > w_1$ et $t - z > w_2$, les réserves sont données par :

$$V_{t;z}^1 = B_1(t;z) - \Pi_1(t;z)$$

$$V_{t;z}^2 = B_2(t;z) - \Pi_2(t;z)$$

$$\Pi_1(t;z) = \int_0^{\omega_x - t} {}_sp_{x+t;z}^{11} \pi_1(t+s, z+s) v(t, t+s) ds$$

$$\Pi_2(t;z) = \int_0^{\omega_x - t} {}_sp_{x+t;z}^{22} \pi_2(t+s, z+s) v(t, t+s) ds$$

$$\begin{aligned} B_1(t;z) = & \int_0^{\omega_x - t} {}_sp_{x+t;z}^{11} b_1(t+s, z+s) v(t, t+s) ds \\ & + \int_0^{\omega_x - t} v(t, t+s) \; {}_sp_{x+t;z}^{11} \mu_{x+t+s;z+s}^{13} c_{13}(t+s, z+s) ds \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_2(t;z) = & \int_0^{\omega_x - t} {}_sp_{x+t;z}^{22} b_2(t+s, z+s) v(t, t+s) ds \\ & + \int_0^{\omega_x - t} v(t, t+s) \; {}_sp_{x+t;z}^{22} \mu_{x+t+s;z+s}^{23} c_{23}(t+s, z+s) ds \end{aligned}$$

Si la police prévoit des franchises temporelles f_1,f_2 cette dernière expression de $B_1(t;z)$ reste valide tant que $z > f_1$ et celle de $B_2(t;z)$ reste valide tant que $z > f_2$. Pour $z \leq f_1$ et $z \leq f_2$, l'assuré doit tout d'abord encore rester dépendant pendant une durée $f_1 - z$ dans l'état e_1 ou pendant une durée $f_2 - z$ dans l'état e_2 avant de pouvoir prétendre à une indemnisation. On a alors

$$B_1(t;z) = {}_{f_1-z}p^{11}_{x+t;z} \int_0^{\omega_x - f_1} {}_sp^{11}_{x+t+f_1-z;f_1} b_1(t+s+f_1-z, s+f_1) v(t, t+s+f_1-z) ds$$
$$+ \int_0^{\omega_x - t} v(t,t+s) \; {}_sp^{11}_{x+t;z} \mu^{13}_{x+t+s;z+s} c_{13}(t+s, z+s) ds$$

$$B_2(t;z) = {}_{f_2-z}p^{22}_{x+t;z} \int_0^{\omega_x - f_2} {}_sp^{22}_{x+t+f_2-z;f_2} b_2(t+s+f_2-z, s+f_2) v(t, t+s+f_2-z) ds$$
$$+ \int_0^{\omega_x - t} v(t,t+s) \; {}_sp^{22}_{x+t;z} \mu^{23}_{x+t+s;z+s} c_{23}(t+s, z+s) ds$$

4.2 Formules de réserves et implémentations de certains produits d'assurance dépendance

4.2.1 Rente de dépendance (Stand-Alone LTC Cover)

$$V_t^0 = B_0(t) - \pi_0 \bar{a}_{x+t}^{00}$$

$$\text{Avec } \pi_0 = \frac{\Pi}{\bar{a}_{x+t}^{00}}$$

$$\begin{aligned} B_0(t) = \int_0^{\omega_x - t} {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{01} \Big(\int_0^{\omega_x - t - s} {}_z p_{x+t+s;0}^{11} b_1(t+s+z;z) v(t, t+s+z) dz \Big) ds \\ + \int_0^{\omega_x - t} {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{02} \Big(\int_0^{\omega_x - t - s} {}_z p_{x+t+s;0}^{22} b_2(t+s+z;z) v(t, t+s+z) dz \Big) ds \end{aligned}$$

Car $b_0 = 0 = c_{01} = c_{02} = c_{03} = c_{13} = c_{23}$ dans la formule.

$$\begin{aligned} B_0(t) &= b_1 \bar{a}_{x+t}^{01} + b_2 \bar{a}_{x+t}^{02} \\ V_t^a &= b_1 \bar{a}_{x+t}^{01} + b_2 \bar{a}_{x+t}^{02} - \pi_0 \bar{a}_{x+t}^{00} \end{aligned}$$

Les réserves $V_{t;z}^1$ et $V_{t;z}^2$ pour un individu dépendant à l'instant t, dont la perte d'autonomie s'est produite à l'instant $t - z$ valent

$$V_{t;z}^1 = B_1(t;z)$$

$$V_{t;z}^2 = B_2(t;z)$$

$$\text{car } \Pi_1(t;z) = 0 = \Pi_2(t;z)$$

$$\begin{aligned} B_1(t;z) &= \int_0^{\omega_x - t} {}_s p_{x+t;z}^{11} b_1(t+s, z+s) v(t, t+s) ds \\ & et \\ B_2(t;z) &= \int_0^{\omega_x - t} {}_s p_{x+t;z}^{22} b_2(t+s, z+s) v(t, t+s) ds \end{aligned}$$

$$\text{car } c_{13} = 0 = c_{23}$$

Donc

$$\begin{aligned} V_{t;z}^1 &= b_1 \bar{a}_{x+t;z}^{11} \\ & et \\ V_{t;z}^2 &= b_2 \bar{a}_{x+t;z}^{22} \end{aligned}$$

4.2.2 Pension bonifiée ou rente d'assurance vie (Life care annuity or Enhanced pension)

$$V_t^0 = B_0(t) - \pi_0 \bar{a}_{x+t}^{00}$$
$$\text{Avec } \pi_0 = \frac{\Pi}{\bar{a}_{x+t}^{00}}$$

$$\begin{aligned} B_0(t) = b_0 &\int_0^{\omega_x - t} {}_sp_{x+t}^{00} v(t, t+s) ds \\ + b_1 &\int_0^{\omega_x - t} {}_sp_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{01} \left(\int_0^{\omega_x - t - s} {}_zp_{x+t+s;0}^{11} v(t, t+s+z) dz \right) ds \\ + b_2 &\int_0^{\omega_x - t} {}_sp_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{02} \left(\int_0^{\omega_x - t - s} {}_zp_{x+t+s;0}^{22} v(t, t+s+z) dz \right) ds \end{aligned}$$

Car $c_{01} = c_{02} = c_{03} = c_{13} = c_{23} = 0$ dans la formule.

$$V_t^0 = b_0 \bar{a}_{x+t}^{00} + b_1 \bar{a}_{x+t}^{01} + b_2 \bar{a}_{x+t}^{02} - \pi_0 \bar{a}_{x+t}^{00}$$

Les réserves $V_{t;z}^1$ et $V_{t;z}^2$ pour un individu dépendant à l'instant t, dont la perte d'autonomie s'est produite à l'instant $t - z$ valent

$$V_{t;z}^1 = B_1(t; z)$$

$$V_{t;z}^2 = B_2(t; z)$$

$$\text{car } \Pi_1(t; z) = 0 = \Pi_2(t; z)$$

$$\begin{aligned} B_1(t; z) &= \int_0^{\omega_x - t} {}_sp_{x+t;z}^{11} b_1(t+s, z+s) v(t, t+s) ds \\ &et \\ B_2(t; z) &= \int_0^{\omega_x - t} {}_sp_{x+t;z}^{22} b_2(t+s, z+s) v(t, t+s) ds \end{aligned}$$

$$\text{car } c_{13} = 0 = c_{23}$$

Donc

$$\begin{aligned} V_{t;z}^1 &= b_1 \bar{a}_{x+t;z}^{11} \\ &et \\ V_{t;z}^2 &= b_2 \bar{a}_{x+t;z}^{22} \end{aligned}$$

Ces réserves sont identiques à celles dans l'état de dépendance du produit "Rente de dépendance".

4.2.3 Package Dépendance avec rente viagère différée (Package of LTC and lifetime-related benefits)

$$V_t^0 = B_0(t) - \pi_0 \bar{a}_{x+t}^{00}$$
$$\text{Avec } \pi_0 = \frac{\Pi}{\bar{a}_{x+t}^{00}}$$

$$\begin{aligned}
B_0(t) &= b_0 v(t,n)\ {}_{n-t}p_{x+t}^{00} \int_0^{\omega_x - n} {}_s p_{x+n}^{00} v(n, n+s) ds \\
&+ b_1 \int_0^{\omega_x - t} {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{01} \left(\int_0^{\omega_x - t - s} {}_z p_{x+t+s;0}^{11} v(t, t+s+z) dz \right) ds \\
&+ b_2 \int_0^{\omega_x - t} {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{02} \left(\int_0^{\omega_x - t - s} {}_z p_{x+t+s;0}^{22} v(t, t+s+z) dz \right) ds \\
&+ c_{01} \int_0^{\omega_x - t} v(t, t+s)\ {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{01} ds \\
&+ c_{02} \int_0^{\omega_x - t} v(t, t+s)\ {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{02} ds \\
&+ c_{03} \int_0^{\omega_x - t} v(t, t+s)\ {}_s p_{x+t}^{00} \mu_{x+t+s}^{03} ds
\end{aligned}$$

$$B_0(t) = b_0 v(t,n)\ {}_{n-t}p_{x+t}^{00} \bar{a}_{x+n}^{00} + b_1 \bar{a}_{x+t}^{01} + b_2 \bar{a}_{x+t}^{02} + c_3 (\bar{A}_{x+t}^{0;0\to3} + \bar{A}_{x+t}^{0;1\to3} + \bar{A}_{x+t}^{0;2\to3})$$

$$V_t^0 = b_0 v(t,n)\ {}_{n-t}p_{x+t}^{00} \bar{a}_{x+n}^{00} + b_1 \bar{a}_{x+t}^{01} + b_2 \bar{a}_{x+t}^{02} + c_3 (\bar{A}_{x+t}^{0;0\to3} + \bar{A}_{x+t}^{0;1\to3} + \bar{A}_{x+t}^{0;2\to3}) - \pi_0(t) \bar{a}_{x+t}^{00}; t < n$$

$$V_{t;z}^1 = B_1(t;z)$$
$$V_{t;z}^2 = B_2(t;z)$$
$$\text{car } \Pi_1(t;z) = 0 = \Pi_2(t;z)$$

$$\begin{aligned}
B_1(t;z) &= b_1 \int_0^{\omega_x - t} {}_s p_{x+t;z}^{11} v(t, t+s) ds + c_{13} \int_0^{\omega_x - t} v(t, t+s)\ {}_s p_{x+t;z}^{11} \mu_{x+t+s;z+s}^{13} ds \\
&et \\
B_2(t;z) &= b_2 \int_0^{\omega_x - t} {}_s p_{x+t;z}^{22} v(t, t+s) ds + c_{23} \int_0^{\omega_x - t} v(t, t+s)\ {}_s p_{x+t;z}^{22} \mu_{x+t+s;z+s}^{23} ds
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned} V^1_{t;z} &= b_1\bar{a}^{11}_{x+t;z} + c_{13}\bar{A}^{1;1\to 3}_{x+t} \\ &et \\ V^2_{t;z} &= b_2\bar{a}^{22}_{x+t;z} + c_{23}\bar{A}^{2;2\to 3}_{x+t} \end{aligned}$$

4.2.4 Couverture décès avec versement anticipé en cas de perte d'autonomie (Whole-life insurance with LTC acceleration benefit)

Si le montant total de la rente de dépendance est limité par le capital décès on obtient

$$V^0_t = c_{03}\bar{A}^{0;0\to 3}_{x+t} + b_1\bar{a}^{01}_{x+t;c_3/b_1\rceil} + b_2\bar{a}^{02}_{x+t;c_3/b_2\rceil} + c_{13}\bar{A}^{0;1\to 3}_{x+t;c_3/b_1\rceil} + c_{23}\bar{A}^{0;2\to 3}_{x+t;c_3/b_2\rceil} - \pi_0(t)\bar{a}^{00}_{x+t}$$

$$\begin{aligned} V^1_{t;z} &= b_1\bar{a}^{11}_{x+t;z} + c_{13}\bar{A}^{1;1\to 3}_{x+t;z} \\ &et \\ V^2_{t;z} &= b_2\bar{a}^{22}_{x+t;z} + c_{23}\bar{A}^{2;2\to 3}_{x+t;z} \end{aligned}$$

Dans le cas contraire, il vient

$$V^0_t = c_{03}\bar{A}^{0;0\to 3}_{x+t} + b_1\bar{a}^{01}_{x+t} + b_2\bar{a}_{x+t} + c_{13}\bar{A}^{0;1\to 3}_{x+t;c_3/b_1\rceil} + c_{23}\bar{A}^{0;2\to 3}_{x+t;c_3/b_2\rceil} - \pi_0(t)\bar{a}^{00}_{x+t}$$

Comme dans le calcul pour la prime,nous enleverons la limitation dans la part du Long Term Care (LTC) dans la fonction précédente pour ne pas limiter la rente dépendance au capital décès :

$$\begin{aligned} V^1_{t;z} &= b_1\bar{a}^{11}_{x+t;z} + c_{13}\bar{A}^{1;1\to 3}_{x+t;z} \\ &et \\ V^2_{t;z} &= b_2\bar{a}^{22}_{x+t;z} + c_{23}\bar{A}^{2;2\to 3}_{x+t;z} \end{aligned}$$

5 Résultats et analyse

Dans cette section, nous déterminerons les résultats des primes uniques ainsi que des réserves de l'ensemble des produits décrits précédemment. Ces résultats seront déterminés à partir des tables d'incidence (mu_{ai}) et des tables de survie en dépendance (mu_{id}) des états "démence" et "dépendance physique" pour les femmes. Une table de survie sans dépendance est également prise en compte (mu_{ad}). Une comparaison avec les résultats utilisant les tables avec le genre masculin sera mis en œuvre avec les tables hommes. La durée de couverture si elle n'est pas précisée est de 100 ans (omega=100) et le taux technique est supposé égal à 1.5%.

Le taux technique réglementaire non vie est le taux d'actualisation maximal que les organismes assureurs retiennent pour l'évaluation des engagements et tarification en arrêt de travail et dépendance ; il est calculé comme égal à 75% de la moyenne sur 24 mois du TME (Taux Moyen d'emprunt d'État à taux fixe pour des échéances supérieures à 7 ans).

Depuis 1999, le taux non vie varie entre 0.02% et 3.96%.Les entreprises appliquent en général un taux compris entre 1,5% et 2% pour les produits de dépendance,ce qui justifie notre choix.

5.1 Rente de dépendance

5.1.1 Prime unique

Le montant de la rente de dépendance est dans la plupart des cas un choix fait au moment de la souscription et est souvent compris entre 100 et 3000 euros par mois. En général, ce choix correspond au coût futur de l'aménagement et paiement des aidants dans le cas où la personne désirerait rester chez elle ou au coût de l'installation dans un établissement spécialisé, déduite du montant probable de la pension de retraite et autres aides publiques comme l'APA (Allocation personnalisée d'autonomie).

Il est à noter qu'en général le maintien à domicile s'avère plus onéreux qu'une installation dans un établissement spécialisé puisque cela implique des aménagements du logement qui peuvent valoir très chers. Le financement de la dépendance sera plus une question de besoin futur que du type de dépendance en soit.

Aussi, dans les contrats d'assurance dépendance, les assureurs prévoient un délai de carence en fonction de la cause de la dépendance : un an en cas de maladie classique et 3 ans (voire 5 ans) en cas de maladie psychique. Le délai de franchise quant à lui se compte en termes de mois et est généralement fixé à 3 mois même si il est possible de trouver sur le marché des contrats qui n'en comportent pas.

Nous considérons les paramètres suivants pour l'étude de différents cas de primes du produit rente de dépendance :

		Prime 1	Prime 2	Prime 3	Prime 4	Prime 5*
Carence état 1	C_1	1	1	0	1	1
Carence état 2	C_2	3	3	0	3	3
Franchise état 1	F_1	0.25	0.25	0.25	0	0.5
Franchise état 2	F_2	0.25	0.25	0.25	0	0.5
Durée de couverture état 1	N_1	-	-	-	-	10
Durée de couverture état 2	N_2	-	-	-	-	-
Rente annuelle état 1	R_1	12 000	18 000	12 000	12 000	24 000
Rente annuelle état 2	R_2	12 000	12 000	12 000	12 000	12 000

Les différentes simulations sont réalisées grâce à la fonction suivante détaillée en Annexes :

```
#--------- Long Term Care (LTC) 2
LTC_CFN_R_2=function(mu_a1,mu_a2,mu_ad,mu_1d,mu_2d,omega,delta,age_min,C
    1,F1,N1,R1,C2,F2,N2,R2,Ca_Prime,Na_Prime)
```

Celle-ci est paramétrable avec les choix suivants :

- $mu_{a1}(mu_{a2})$: Choix de la table d'entrée en dépendance pour l'état $e_1(e_2)$.
- $mu_{1d}(mu_{2d})$: Choix de la table de survie et de maintien en dépendance pour l'état $e_1(e_2)$.
- *omega* : Choix de la période de couverture
- *delta* : Choix du taux d'actualisation.
- age_{min} : Âge minimum de la table.
- $C1(C2)$: Choix du délai de carence pour l'état $e_1(e_2)$.
- $F1(F2)$: Choix de la franchise temporelle pour l'état $e_1(e_2)$.
- $N1(N2)$: Choix de la durée de couverture pour l'état $e_1(e_2)$.
- $R1(R2)$: Choix de la rente annuelle souhaitée pour l'état $e_1(e_2)$.
- Ca_{Prime} : Choix du délai de carence pour le paiement de la prime.
- Na_{Prime} : Choix de la période de paiement de la prime.

Dans le premier cas de figure (Prime 1), l'individu souhaite souscrire à une rente de dépendance prévoyant un délai de carence de 1 an en cas de dépendance physique et de 3 ans en cas de dépendance psychique. La franchise est de 3 mois. De plus, en cas de dépendance physique, il souhaiterait équiper sa maison et bénéficier des soins et aides à domicile et dans le cas d'une dépendance psychique, se rendre dans un établissement spécialisé pour ses derniers jours. La prime est considérée payable dès la souscription du contrat et ce jusqu'à l'entrée en dépendance. La rente souhaitée est de 1 000 euros par mois quel que soit l'état de dépendance.

Il peut être envisagé une rente un peu plus conséquente en cas de dépendance physique pour faire face à d'éventuelles dépenses supplémentaires impliquant un financement plus important et à cet effet l'individu souhaiterait toucher une rente mensuelle de 1 500 euros en cas de dépendance physique (Prime 2).

Quel tarif un assureur pourrait proposer si la rente mensuelle de 1 000 euros est due dès la souscription avec une franchise de 3 mois et quelle que soit la cause de dépendance (Prime 3) ? Qu'en serait il s'il n'applique aucune franchise mais avec des délais de carence de 1 an en cas de dépendance physique et de 3 ans en cas de démence (Prime 4) ?

Les primes uniques annuelles 1 à 4 sont représentées dans la figure suivante en fonction de l'âge à la souscription.

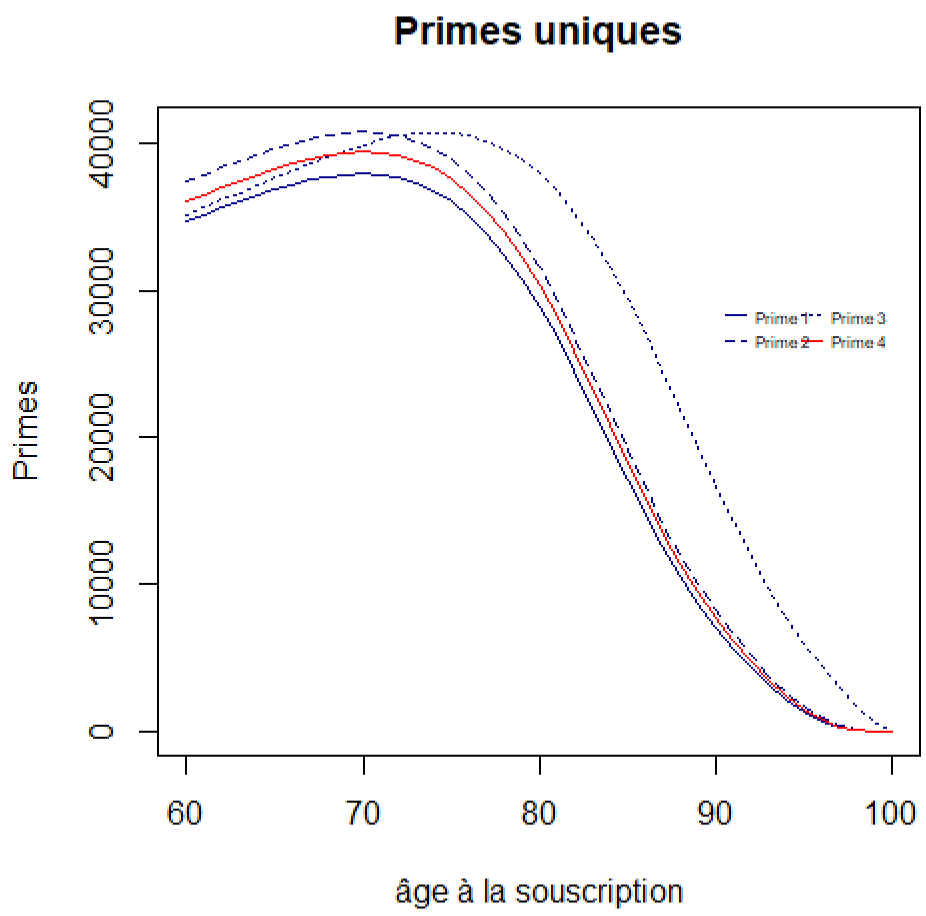

FIGURE 8 – Prime unique en fonction de l'âge à la souscription

L'allure de la courbe

Le montant de la prime unique croît légèrement en fonction de l'âge à la souscription et ce jusqu'aux alentours des 80-85 ans et commence une forte décroissance à partir de cette tranche d'âge compte tenu de l'augmentation de la mortalité aux âges élevés, le produit ne couvrant pas de capital décès, le capital décès n'est pas pris en compte dans la tarification, la prime tend vers 0 à ces âges.

La carence

L'effet de la carence est beaucoup plus visible aux âges élevés. En effet, l'écart constaté entre la prime annuelle avec carence (Prime 1) et celle sans carence (Prime 3) est beaucoup plus important pour les âges élevés (à partir de 75 ans). Il est à noter que c'est à peu près à cet âge que les taux d'incidence (en dépendance physique ou en démence) commencent à croitre (Figure 2 et 3), impliquant ainsi une augmentation du nombre de dépendants. De ce fait, l'assureur, en appliquant un délai de carence, se prémunit de probables fausses déclarations. L'écart constaté entre ces 2 courbes est donc l'effet de l'augmentation du risque de souscription.

De plus, la variation de la durée de carence pour une dépendance physique a très peu d'impact sur le coût de la prime unique annuelle comparée à celle pour la démence (Figures 9 et 10). Les personnes dépendantes survivent plus longtemps en cas de dépendance physique qu'en cas de démence impliquant ainsi une prise en compte du risque par l'assureur beaucoup plus importante qu'en cas de dépendance psychique.

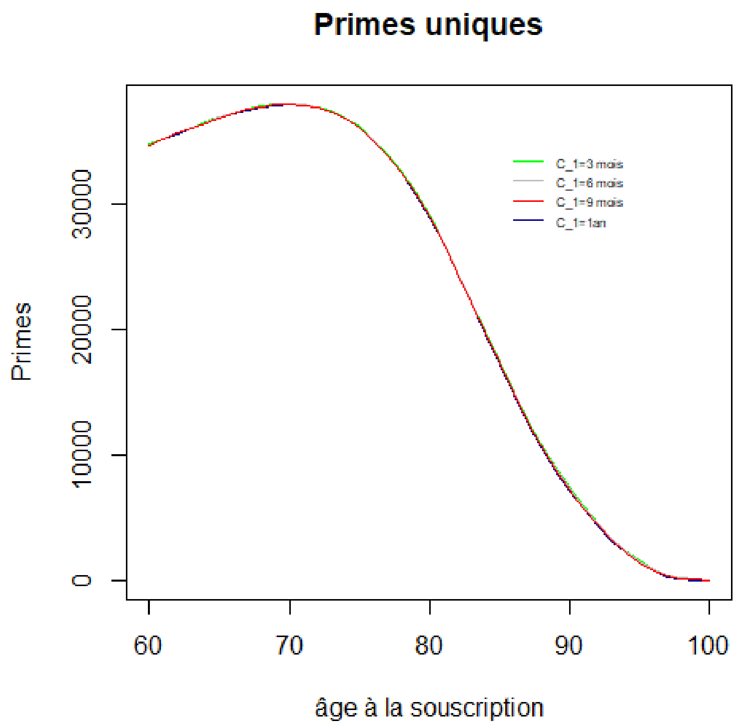

FIGURE 9 – L'effet de la carence sur la cause de dépendance physique

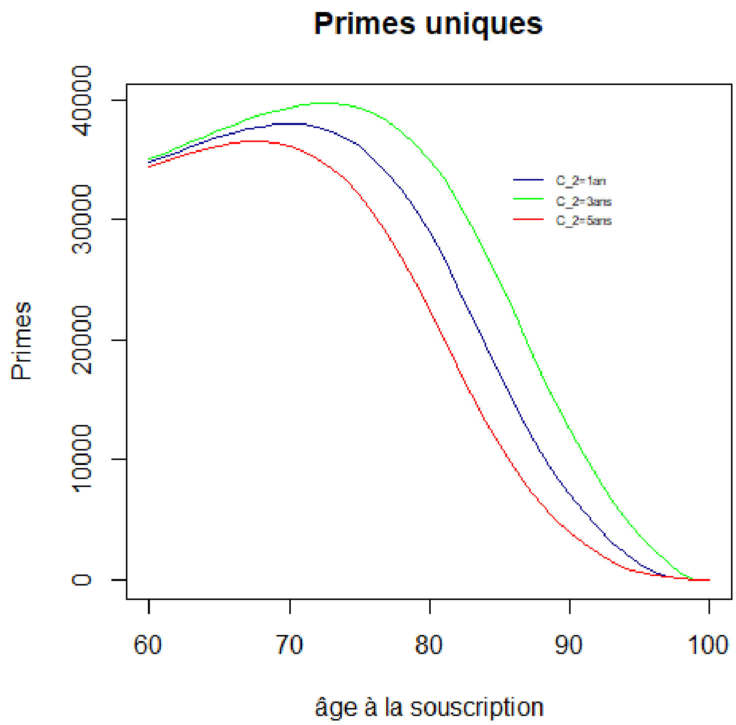

FIGURE 10 – L'effet de la carence sur la cause de démence

La franchise temporelle

La franchise temporelle a pour effet de limiter les responsabilités de l'assureur car elle permet à l'assureur d'éviter le paiement de prestations dépendance aux personnes en fin de vie et de s'assurer de la nature irréversible de l'état de dépendance. Ainsi au plus la franchise temporelle sera élevée, moins sera la prime unique demandée (Figure 11).

Même si rares sont les assureurs qui appliquent une franchise temporelle différente en fonction de la cause de dépendance, cela peut également être envisagé. L'effet observé est identique à celui constaté sur le délai de carence à savoir un plus fort impact de l'accroissement de la franchise temporelle en cas de démence qu'en cas de dépendance physique (Figures 12 et 13).

De plus, la prime avec carence mais sans franchise (Prime 4) est inférieure à la prime avec franchise temporelle mais sans délai de carence (Prime 3) à partir de 75 ans avec des carences de 1 an en cas de dépendance physique et de 3 ans en cas de démence et une franchise de 3 mois. La forte incidence à partir de cet âge a en effet un fort impact sur la tarification. Bien évidemment, la combinaison de la carence et de la franchise temporelle diminue considérablement le montant de la prime unique.

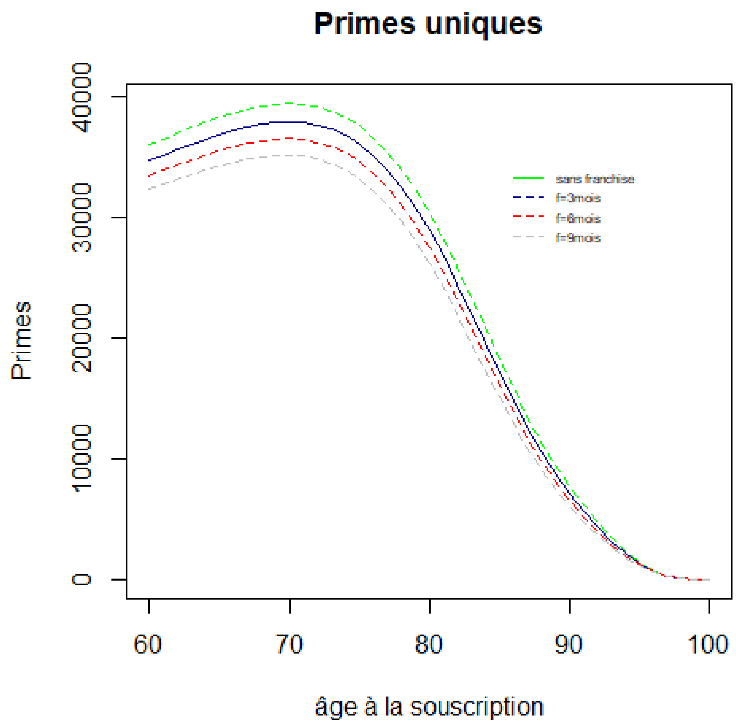

FIGURE 11 – L'effet de la variation de la franchise temporelle sur la prime unique

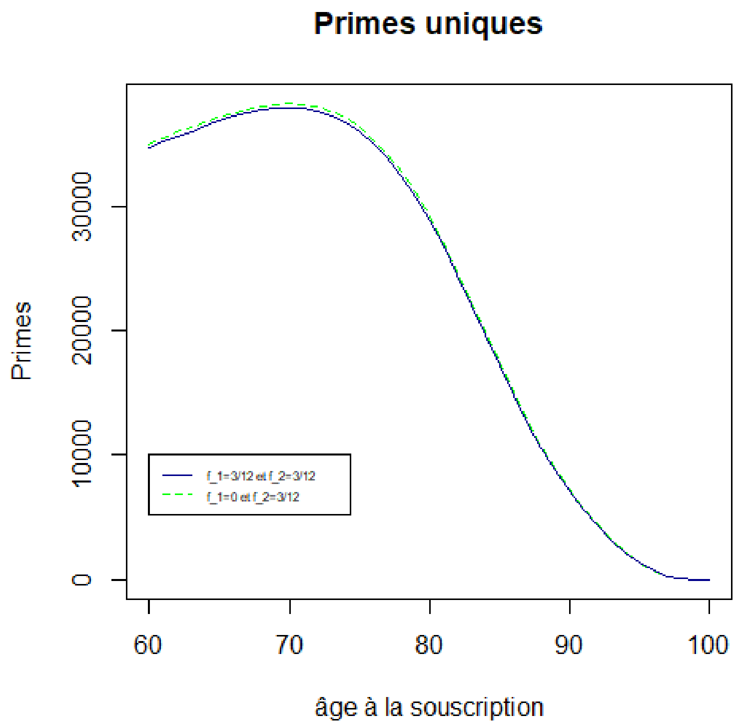

FIGURE 12 – L'effet de la variation de la franchise en cas de dépendance physique

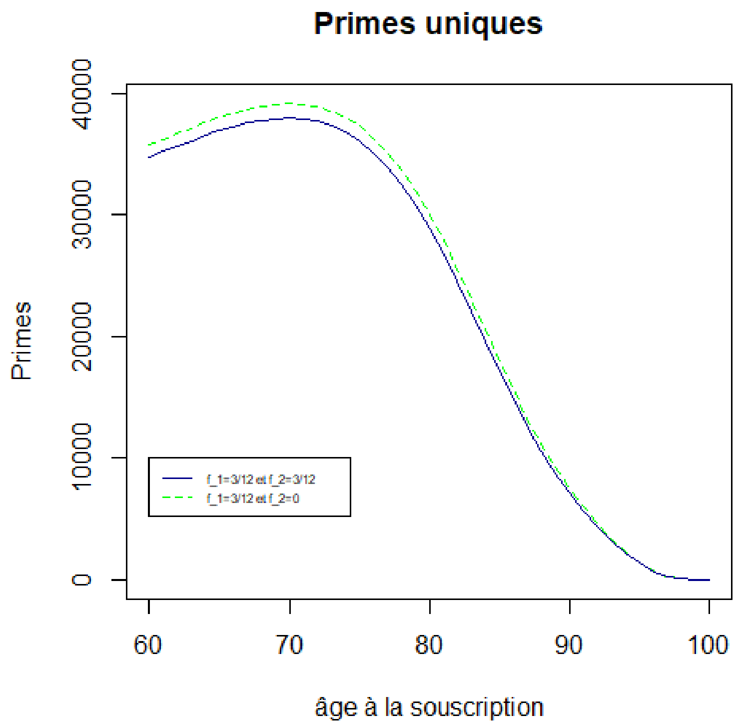

FIGURE 13 – L'effet de la variation de la franchise en cas de démence

Le coût de la garantie

En souhaitant une rente plus conséquente (quelle que soit la cause de dépendance), l'individu est exposé à un tarif beaucoup plus élevé. On peut le voir dans la Figure 8, le montant de la prime unique est bien plus important en cas d'augmentation de la rente mensuelle désirée (Prime 4) mais l'effet est réduit aux âges élevés compte tenu de la forte mortalité.

La table de tarification

Depuis le 21 décembre 2012, il est interdit aux assureurs de différencier les tarifs selon le sexe de l'individu. Un arrêt de la Cour de justice de l'Union européenne du 1er mars 2011 a bouleversé cet état de fait pour lutter contre la discrimination entre les femmes et les hommes. Ainsi, l'application du principe de parité a un impact sur toutes les activités d'assurance : santé, dépendance, assurance vie ou décès... mais cela ne concerne que les contrats souscrits à compter de cette date.

En assurance vie, la table la plus prudente (celle des femmes) est donc utilisée en France et la table de mortalité XR, neutre sur le plan du sexe est appliquée en Belgique. Dans le cas de la dépendance, on constate que les femmes payeraient des primes plus élevées que les hommes (Figure 8) car elles sont aujourd'hui plus à risque d'être en dépendance puisqu'elles vivent plus longtemps. Il pourrait être considéré de payer en cas d'utilisation d'une table unique des cotisations moins importantes.
Pour les contrats de dépendance, les assureurs appliquent actuellement une tarification unique en fonction de l'âge et tout en y ajoutant une marge de sécurité (rappelons que

ces tables doivent être certifiées).
Pour la suite des interprétations, nous présenterons les résultats se basant sur les tables « femmes ».

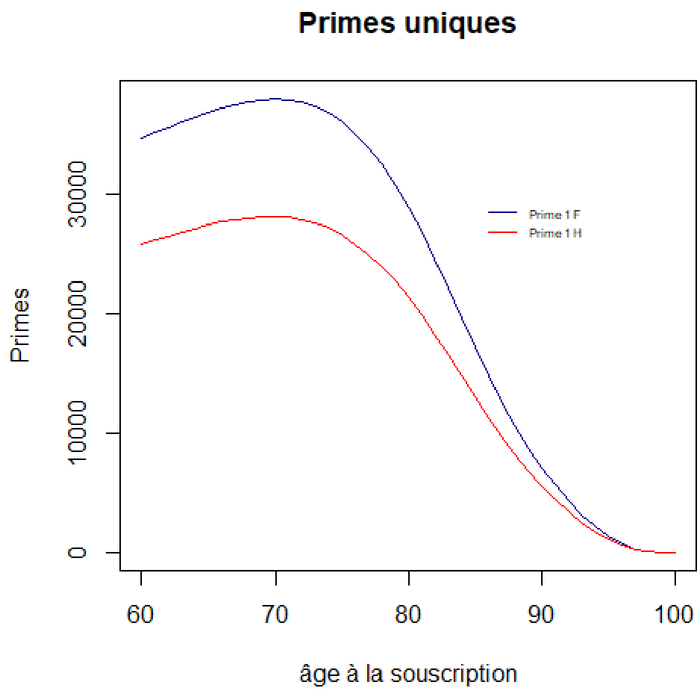

FIGURE 14 – Représentation de la prime unique par âge à la souscription calculée avec les tables "femmes" et "hommes"

La durée de couverture

Une rente dépendance peut être proposée couvrant 2 types de dépendance (la démence et la dépendance physique) et prévoyant une carence de 3 ans et une franchise de 6 mois en cas de démence et une carence de 1 an et franchise de 6 mois en cas de dépendance physique. Par ailleurs, il est proposé un avec un doublement de rente en cas de dépendance physique, la courveture en cas de dépendance physique est limitée à 10 ans (Prime 5*).

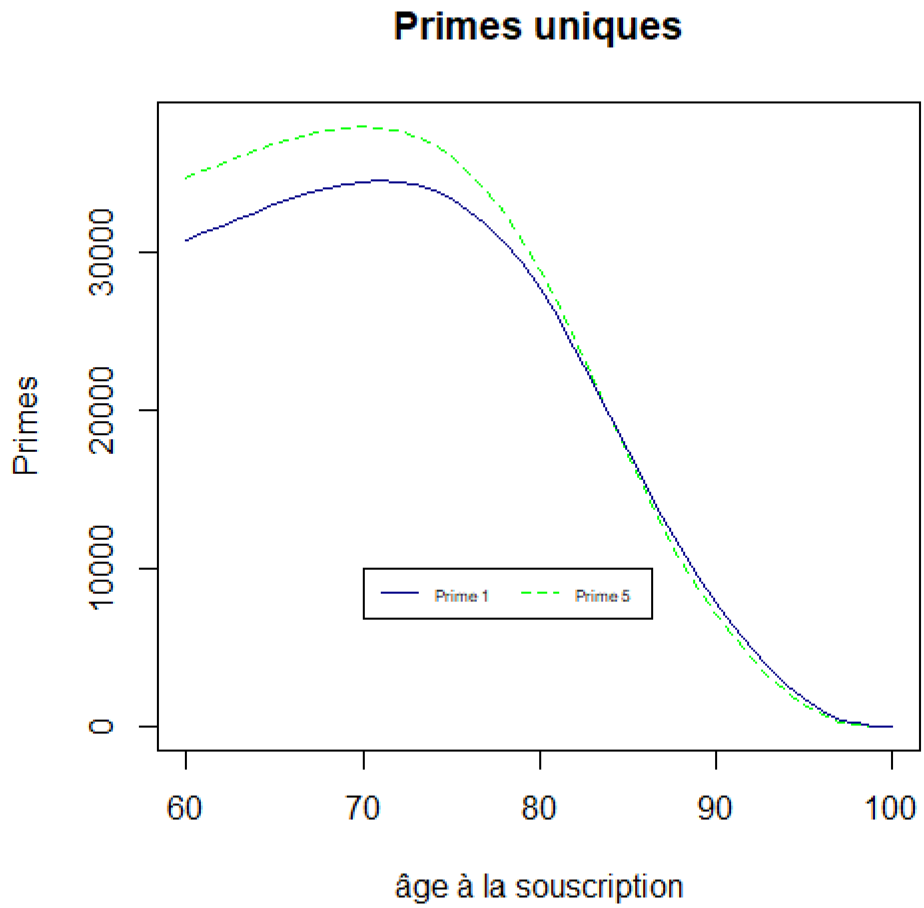

FIGURE 15 – Exemple d'une rente de dépendance avec limitation de la durée de couverture

On constate des primes uniques fortement réduites aux jeunes âges par rapport aux précédents résultats liées à la limitation de la couverture à 10 ans. En effet, le montant demandé à un individu de 60 ans pour une durée de couverture de 10 ans est beaucoup plus faible que celui qu'il paierait sans limitation de la couverture. De plus, la probabilité d'entrée en dépendance à cet âge est très faible. Cet effet de couverture joue également sur les âges élevés mais à moindres mesures car d'une part les probabilités d'entrée en dépendance à ces âges sont plus importantes et d'autres part la prise en compte d'un doublement de capital réduit cet effet. Mais l'effet du dédoublement de capital tend à se stabiliser comme on peut le remarquer pour les âges de souscription compris entre 80 et 90 ans liée à la limitation de la couverture.

Versement d'une prime différée et temporaire

En complément de ces modèles principaux qui jouent sur les paramètres de prestation, nous proposons également un paramétrage sur le versement des primes constantes. Une prime constante est payable chaque année sur toute la durée de couverture. Deux paramètres sont mis en exergue : Ca_{Prime} et Na_{Prime}. Le premier permet de différer le paiement de la prime à la souscription et le second de limiter dans le temps le versement de ces primes et ainsi introduire un produit avec primes temporaires.

Nous reprenons le modèle "Prime 1" en primes constantes avec lequel nous comparons avec les primes constantes d'un modèle avec les paramètres suivants : Ca_{Prime} fixé à 3 et Na_{Prime} à 15.

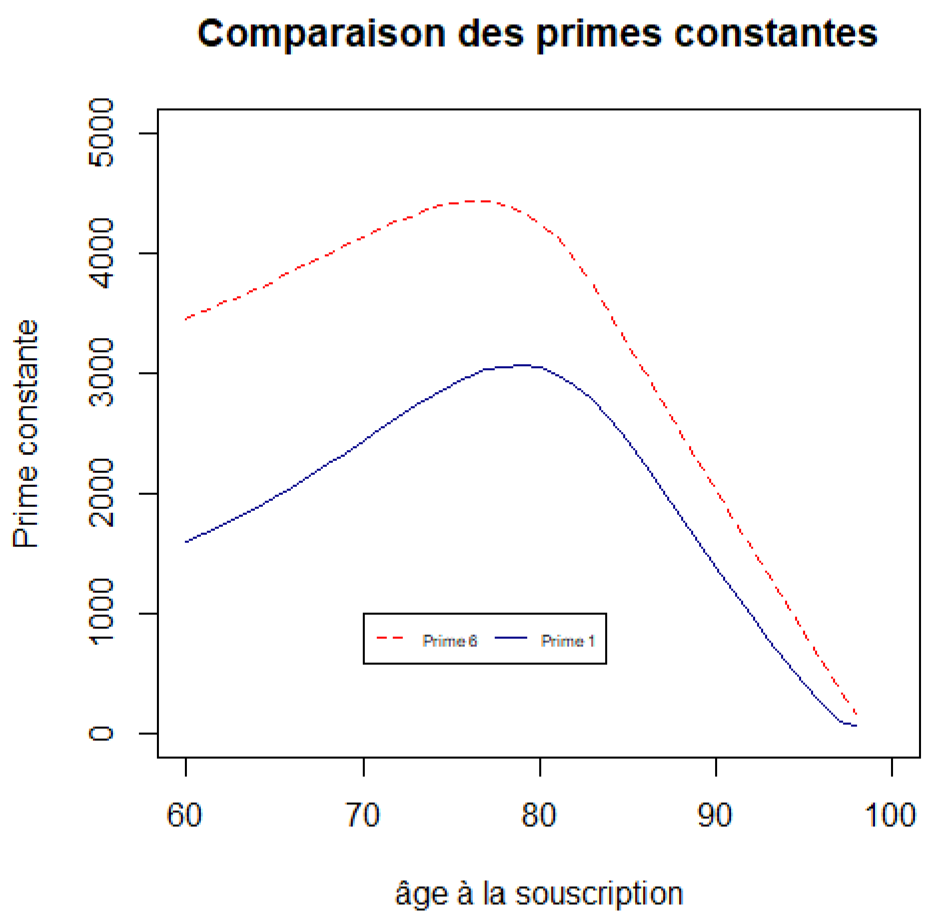

FIGURE 16 – Prime unique avec paiement différé de 3 ans et limité à 15 ans de la prime constante

Notons que pour le modèle Prime 1, le montant de la prime constante qui sera demandé annuellement à l'assuré est moins important que dans un modèle avec paiements différés et temporaires puisque la prime constante s'étale sur toute la durée de la couverture. Aussi, on constate que pour une prime constante différée de 3 ans, à des âges avancés l'étalement de la prime n'est plus adaptée.

Les résultats pour les autres types de produit ne présenteront pas de variation avec les primes constantes. Bien entendu, ces modèles peuvent être ajustés pour tenir compte de primes constantes différées et temporaires.

5.1.2 Réserves

De la même manière, nous pouvons déterminer les réserves à chaque instant t pour un individu autonome ayant souscrit une rente de dépendance grâce à la fonction suivante présentée en Annexes :

```
#--------- Long Term Care (LTC) 2
V_LTC_CFN_R_2=function(mu_a1,mu_a2,mu_ad,mu_1d,mu_2d,omega,delta,age_min,
   C1,F1,N1,R1,C2,F2,N2,R2,Ca_Prime,Na_Prime)
```

Nous supposons le même cas de figure qu'illustré dans la partie prime (Prime 1). L'individu est considéré âgé de 65 ans souscrivant une rente de dépendance avec une rente annuelle de 12 000 euros quelle que soit la cause de dépendance, avec un délai de carence de 1 an en cas de dépendance physique et de 3 ans en cas de démence et une franchise temporelle de 3 mois.

Nous constatons un effet "cloche" de la courbe des réserves en fonction du temps. Au tout début du contrat, l'engagement de l'assureur est égal à l'engagement de l'assuré, ce qui donne une réserve nulle à $t = 0$, le montant de la réserve croît ensuite jusqu'aux alentours des 80 ans pour redescendre progressivement vers une réserve nulle. Ce qui traduit un effet accumulation de la réserve et une consommation de cette dernière sur les dernières années, liée à la forte mortalité sur les dernières années de vie (Figure 17).

Il est intéressant de signaler l'effet de la carence et de la franchise sur le montant des réserves au cours de la vie du contrat. En effet, on remarque qu'en cas de prise en compte d'un délai de carence, les engagements différenciés de l'assureur vis à vis de l'assuré en pour conséquence d'avoir une courbe "bleu" et donc des réserves plus élevées qu'en cas de non application de la carence (courbe "verte"). Cet effet est ensuite accentué avec le temps et les 2 courbes finissent par se confondre (Figure 18). En revanche, l'effet de la franchise temporelle est tout autre puisque qu'il s'agit d'un retardement de paiement, le décalage persiste comme remarqué également pour les primes annuelles (Courbe "rouge").

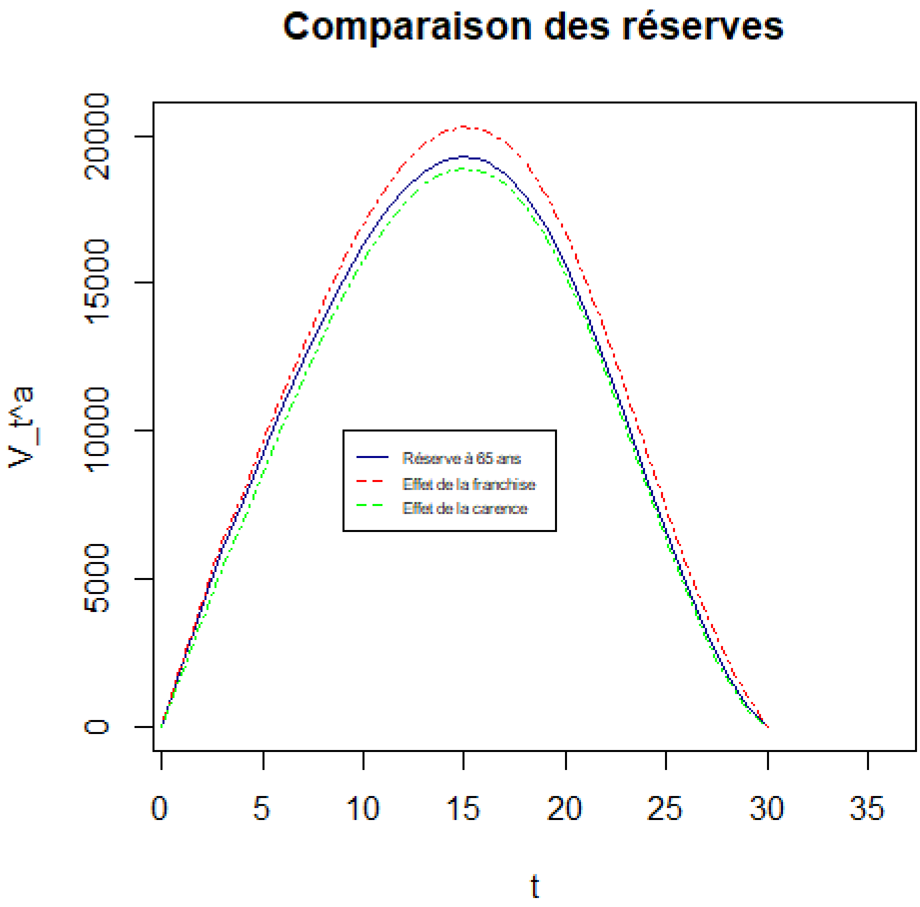

FIGURE 17 – Evolution de la réserve V_t^a pour une rente dépendance

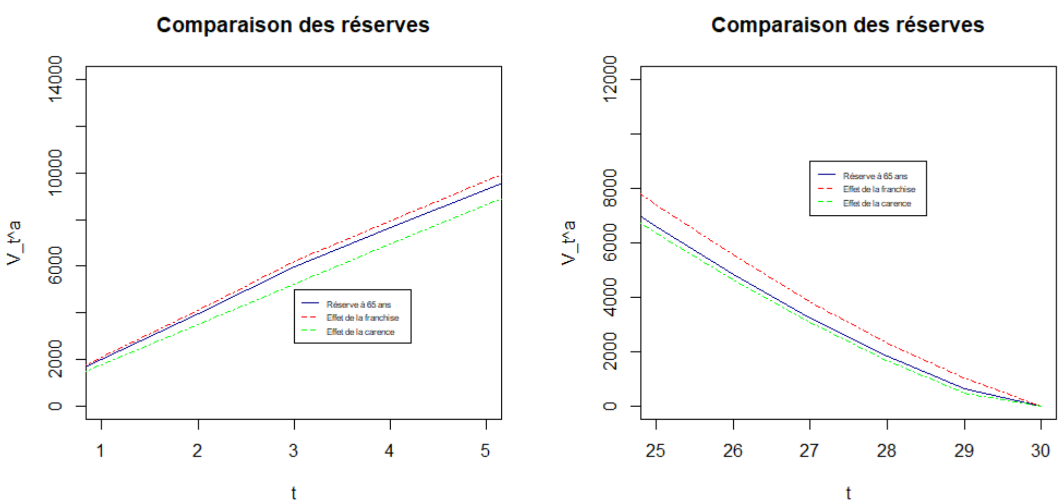

FIGURE 18 – Zoom sur les réserves d'individu âgé de 65 ans à la souscription sur $t = [1, 5]$ et $t = [25, 30]$

Nous mettons également en comparaison les réserves en fonction de l'âge de souscription à avoir un individu âgé de 65 ans à la souscription et un autre de 75 ans avec les mêmes options que précédemment.

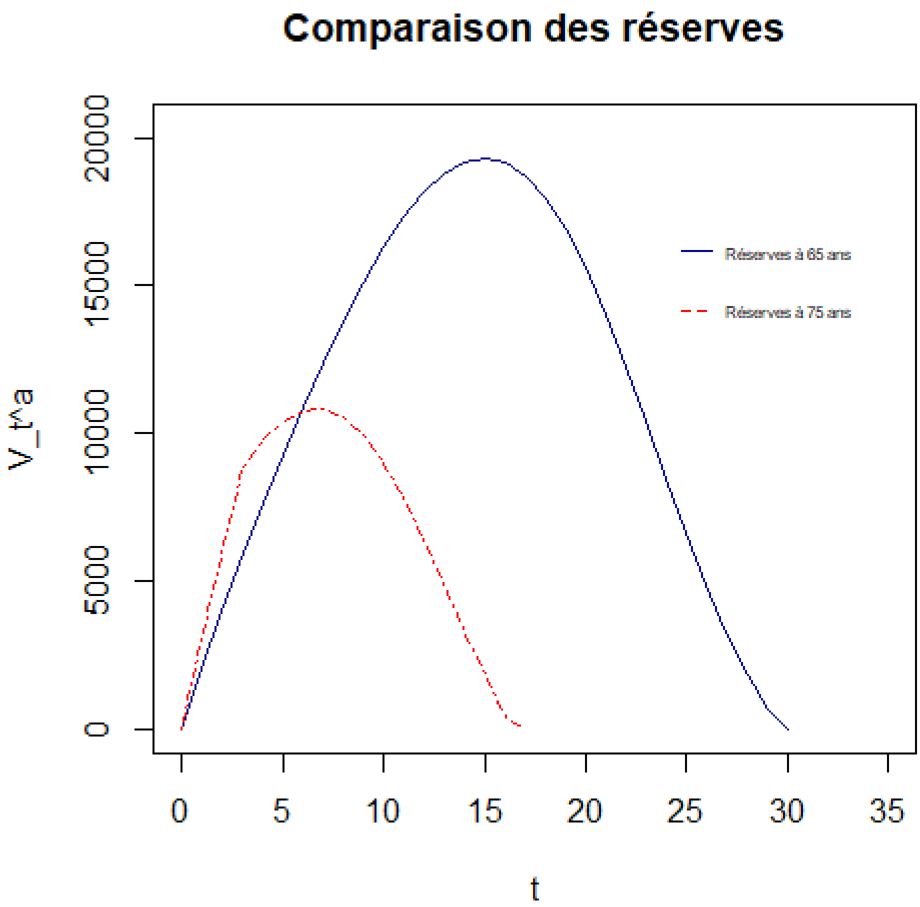

FIGURE 19 – Comparaison des réserves V_a^t pour un individu âgé de 65 ans et un individu âgé de 75 ans

Les engagements de l'assureur étant plus importants en début de période pour un individu âgé de 75 ans par rapport à celui âgé de 65 ans, liés à la forte probabilité pour les personnes âgées d'être dépendantes, on constate un léger surplus de la réserve aux premières années pour l'individu âgé de 75 ans. En revanche compte tenu de la durée d'engagement plus faible, les réserves sont dans leur globalité plus faibles que celles d'un individu âgé de 65 ans.

La réserve d'un individu dépendant, âgé de 65 ans à la souscription est calculée après 15 années ($V^1_{15;z}$ d'une part et $V^2_{15;z}$ d'autre part).Elle est fonction du temps en années passé en dependance z (Figure 20). De ce fait, nous utiliserons la fonction R suivante (présente en Annexes) :

```
V_PU_aii_FN_R_z=function(mu_id,omega,delta,age_min,Fi,Ni,Ri)
```

Avec respectivement Fi, Ni, Ri, la franchise temporelle, la durée de couverture et la rente annuelle dans l'état i.

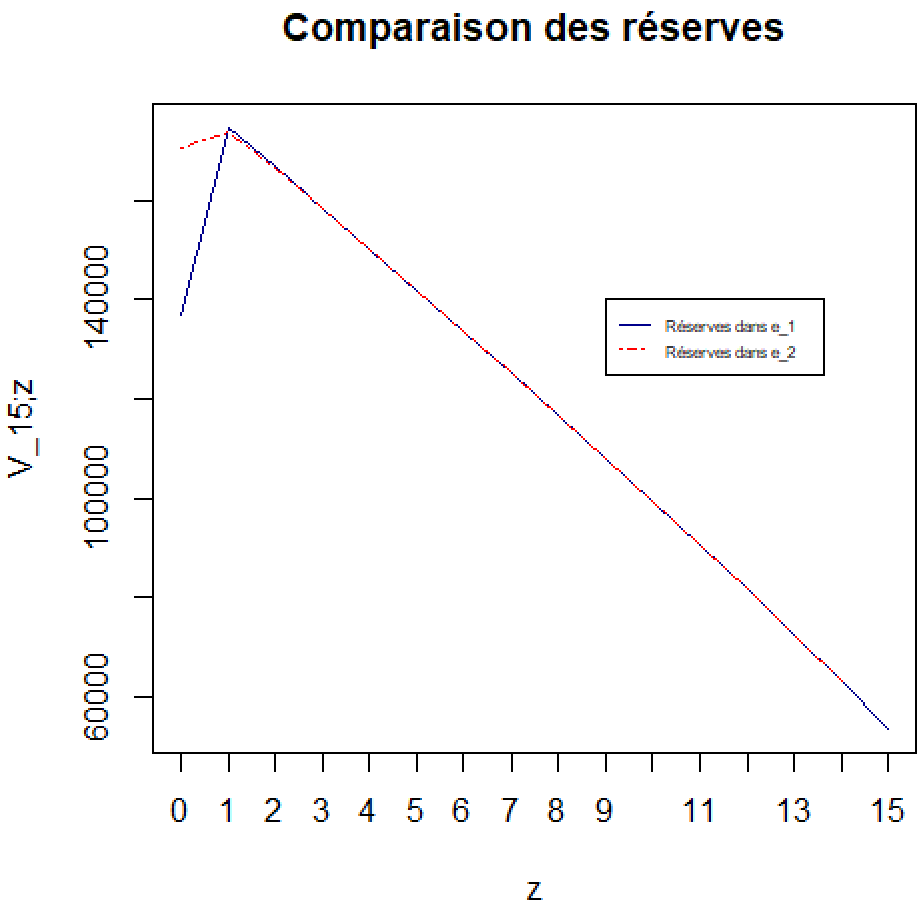

FIGURE 20 – Réserve $V^i_{15;z}$ pour une rente de dépendance en fonction du temps passé en dépendance pour un individu âgé de 65 ans à la souscription

Nous constatons que compte tenu de la mortalité particulièrement élevée la première année après la perte d'autonomie la réserve croît, le niveau de l'engagement de l'assureur étant pour ce lapse de temps supérieur à l'engagement de l'assuré. Elle vient à décroître alors progressivement. Une comparaison est faite si la dépendance concerne une dépendance physique ou si elle résulte d'une démence ; les taux de survie en dépendance physique sont plus importants que ceux en démence.

5.2 Autres modèles

5.2.1 Pension bonifiée ou rente d'assurance vie

Prime unique

Ce produit couple une rente viagère à une rente dépendance. Il s'agit d'un type de contrat mis en place par les assureurs pour d'accumuler les avantages d'un contrat d'assurance dépendance avec ceux d'une rente.

Il a pour avantage d'apporter une sécurité financière à l'assuré tout au long de sa vie. Du côté de l'assureur, l'avantage étant la mutualisation car les personnes à risque sur une partie de la composante du contrat le sont moins sur l'autre. Ce genre d'options est très récente et très rare sur le marché.

Pour ne pas considérer que c'est une rente classique , nous considérons une rente viagère d'un montant annuel de $b_a = 6000$ versée tant que l'assuré est autonome et, si l'assuré devient dépendant, passe à une rente majorée équivalent au double de la rente classique, soit $b_{1,2} = 12000$, justifié par des besoins plus conséquents en cas de dépendance. Nous considérons un délai de carence égal à 0, et l'assuré est couvert tout au long de sa vie. Le paramétrage défini pour une rente dépendance est repris :

```
#--------- Life Care Annuity (LCA) 2
LCA_CFN_R_2=function(mu_a1,mu_a2,mu_ad,mu_1d,mu_2d,omega,delta,age_min,Ca
   ,Na,Ra,C1,F1,N1,R1,C2,F2,N2,R2,Ca_Prime,Na_Prime)
```

Auxquels se rajoutent les éléments suivants :

- C_a : Choix du délai de carence pour la rente viagère en autonomie.
- N_a : Choix de la durée de couverture pour la rente viagère en autonomie.
- R_a : Choix du montant de la rente viagère en autonomie souhaitée.

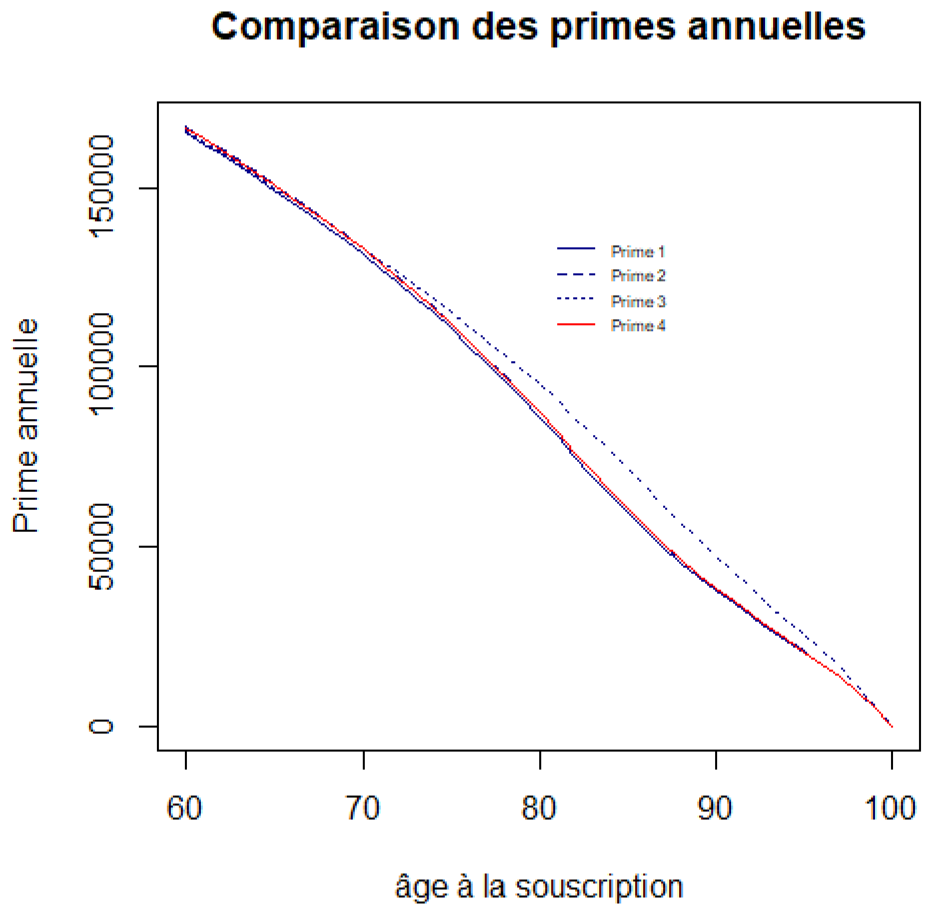

FIGURE 21 – Prime unique en fonction de l'âge de souscription avec $b_{1,2} = 2b_a = 12000$

Nous reprenons les mêmes paramètres pour les primes 1 à 4 que pour le produit LTC.

Nous constatons une décroissance en fonction de l'âge de souscription liée princialement à :

- la décroissance de la rente autonomie en fonction de l'âge. En effet, plus un individu souscrit tardivement plus ses chances de rester autonome sont réduits ;
- l'état de dépendance, si l'individu vient à passer en état de dépendance,la durée de survie dans cet état décroît avec l'âge.

Les effets des clauses sur garantie observés sur ce produit sont identiques à ceux du produit de rente de dépendance à savoir un fort impact sur le montant de la prime annuelle lié à la non prise en compte de la carence (Prime 3).
Les autres effets semblent se confondrent avec la courbe principale (Prime 1). Cependant un zoom (Figure 22) sur les âges de souscription entre 60 et 70 ans et entre 75 et 85 ans permet d'observer que la prime avec une rente mensuelle majorée en cas de dépendance physique est légèrement plus élevée ainsi que celle sans prise en compte de la franchise temporelle. On constate également qu'aux âges antérieurs à 75 ans l'effet de la franchise est bien plus importante que l'effet de la carence. La non prise en compte simultanée de l'application de la carence et la franchise augmente d'autant la prime unique.

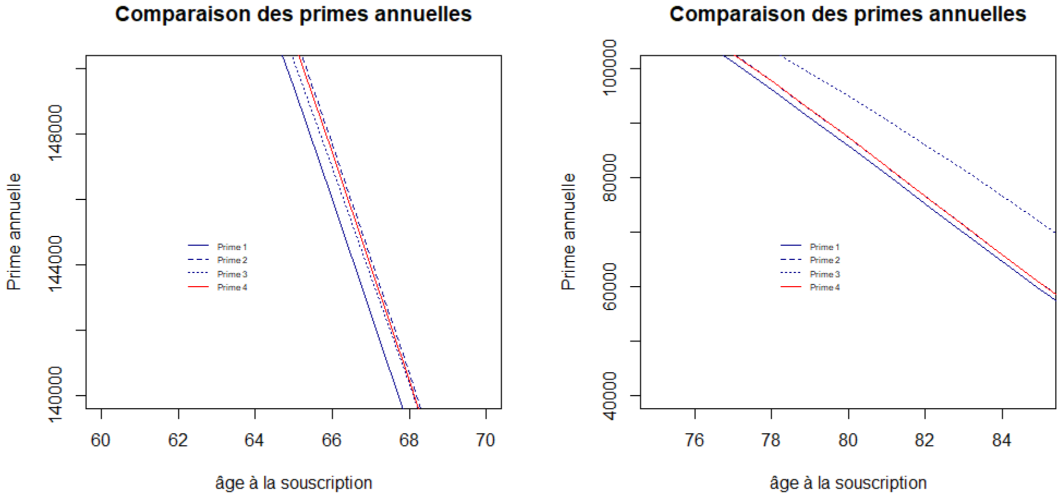

FIGURE 22 – Zoom sur les primes uniques du produit life care annuity sur les âges de souscription $t = [60, 70]$ et $t = [75, 85]$

5.2.2 Package dépendance avec rente viagère différée

Prime unique

Ce produit étant composé d'une rente de dépendance combinée à une rente viagère différée tant que l'assuré est autonome et d'un capital en cas de décès. Ce produit est plutôt destiné à des personnes averses au risque qui préfèrent se couvrir à chaque étape de leur vie : en tant qu'autonome avec une rente viagère différée, au moment de la perte d'autonomie avec une rente dépendance et au moment du décès en mettant à l'abri la famille endeuillée avec un capital décès.

Pour la détermination de la prime unique , nous utilisons la fonction R suivante (présente en Annexes) :

```
 #---------------------------------------------------
#--------- LTC and Lifetime-Related Benefits 2
LTCLRB_CFN_RK_2=function(mu_a1,mu_a2,mu_ad,mu_1d,mu_2d,omega,delta,age_
   min,C_LAA,N_LAA,R_LAA,C1_LTC,F1_LTC,N1_LTC,R1_LTC,C2_LTC,F2_LTC,N2_LTC
   ,R2_LTC,Ca_DC,Na_DC,Ka_DC,C1_DC,F1_DC,N1_DC,K1_DC,C2_DC,F2_DC,N2_DC,K2
   _DC,n,Ca_Prime,Na_Prime)
```

En dehors des éléments déjà précisés en amont,le paramétrage de nouvelles données peut être distingué de la manière suivante :

- Ca_{DC} : Délai de carence à la suite du décès dans l'état e_0.
- Fa_{DC} : Franchise temporelle à la suite du décès dans l'état e_0.
- Na_{DC} : Durée de couverture en cas de décès dans l'état e_0.
- Ka_{DC} : Capital décès versé à la suite de l'état e_0.

- $C1_{DC}$ ($C2_{DC}$) : Délai de carence à la suite du décès dans l'état e_1 (e_2).
- $F1_{DC}$ ($F2_{DC}$) : Franchise temporelle à la suite du décès dans l'état e_1 (e_2).
- $N1_{DC}$ ($N2_{DC}$) : Durée de couverture en cas de décès dans l'état e_1 (e_2).
- $K1_{DC}$ ($K2_{DC}$) : Capital décès versé à la suite de l'état e_1 (e_2).
- n : Durée de la période différée de la rente viagère.

Bien évidemment, nous considérons les différents délais de carence et franchises suite aux décès dans les l'états e_0, e_1, e_2 comme étant nuls et la période de couverture correspondante à toute la durée de la vie du contrat.

Nous retenons également l'hypothèse d'un capital unique $c_{0d} = c_{1d} = c_{2d} = c_d = 60000$ payable en cas de décès quel que soit l'état dans lequel nous sommes et une rente viagère différée de 3 ans. Le capital choisi permet permet de couvrir 5 ans de dépendance selon les critères définis précédemment.

Les autres hypothèses prises dans les produits précédents restent identiques .

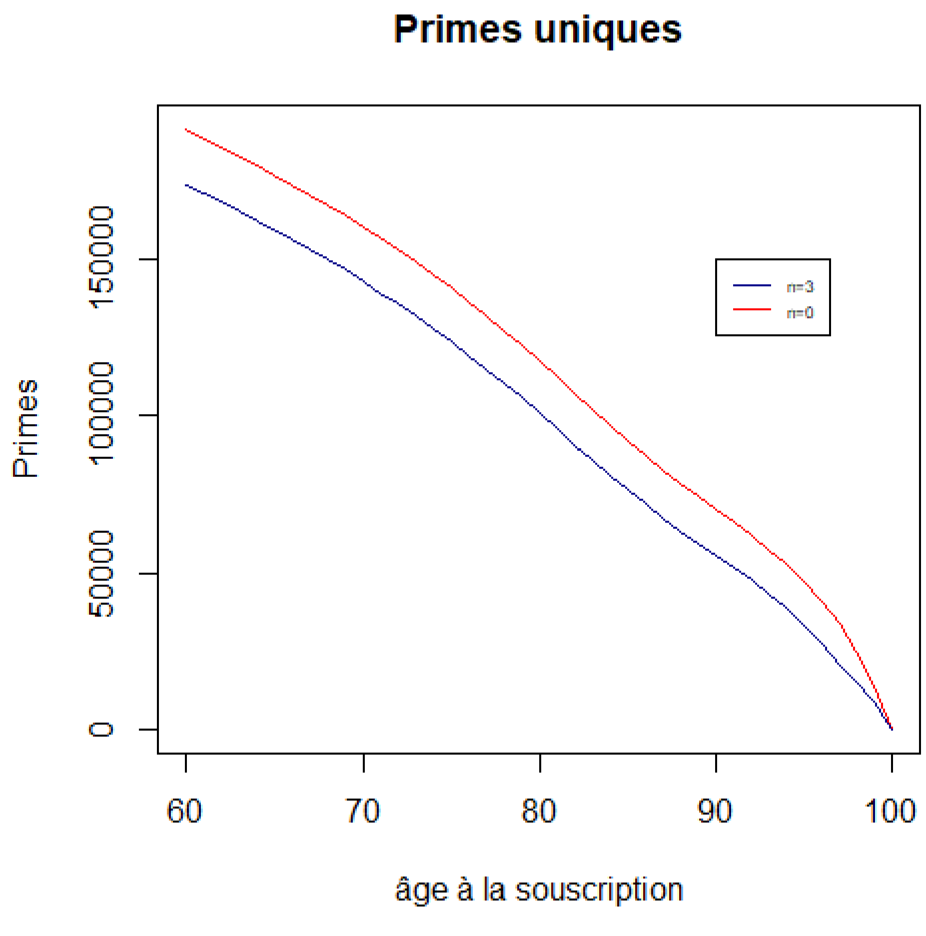

FIGURE 23 – Evolution de la prime unique d'un package dépendance avec rente viagère différée de 3 ans et prestations décès.

L'évolution de la prime unique pour ce genre de produit, si le paiement de la rente viagère n'est pas différé, se rapproche beaucoup d'un life care annuity en dehors de l'introduction d'une couverture décès qui a pour effet d'augmenter le montant de la prime aux âges élevés compte tenu de la mortalité (Figure 23).

5.2.3 Couverture décès avec versement anticipé en cas de perte d'autonomie

Dans ce produit, une couverture dépendance vient se rajouter à une garantie décès vie entière. Nous conservons les mêmes hypothèses que précédemment.

```
#--------- Long Term Care Death Covered (LTCDC) 2
LTCDC_CFN_RK_2=function(mu_a1,mu_a2,mu_ad,mu_1d,mu_2d,omega,delta,age_min
    ,C1,F1,N1,R1,C2,F2,N2,R2,Cd,Nd,Kd,Ca_Prime,Na_Prime)
```

A la différence du produit précédent, il existe un seul capital décès qui se voit réduit du montant de la rente de dépendance en cas de perte d'autonomie.

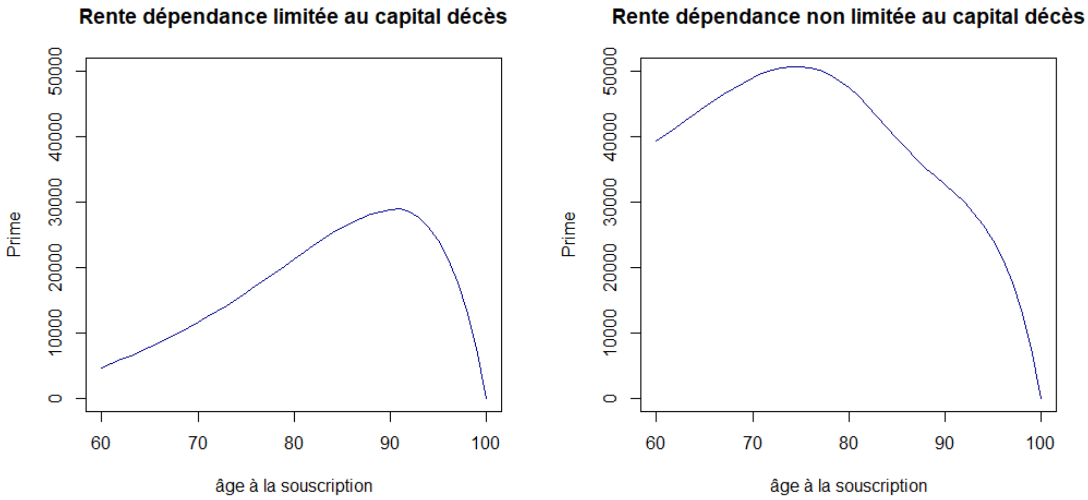

FIGURE 24 – Evolution de la prime unique d'une couverture décès vie entière en fonction de l'âge à la souscription.

- Rente dépendance limitée au capital décès

Le faible montant de la prime unique aux jeunes âges est très fortement lié à la faible mortalité à ces âges et aux taux d'incidence d'entrée en dépendance très bas. Une remontée progressive à partir de 75 ans est observée, la mortalité et le taux d'entrée en dépendance augmentant mais avec un coût assez limité car la rente de dépendance est limitée au capital. Nous pouvons également remarquer que contrairement au produit LTC la descente aux âges élevés est lente compte tenu de la prise en compte du capital décès.

- Rente dépendance non limitée au capital décès

Dans le cas où la rente dépendance ne se limite pas au capital, la prime unique aux jeunes âges est assez proche de celle constatée pour le produit LTC au détail près que nous observons une légère variation liée au capital décès mais la faible mortalité à ces âges fait que le différentiel est négligeable. En revanche, pour les âges élevés, le montant de la prime unique qui tendait rapidement vers 0 suite à la forte mortalité aux âges élevés est plus important compte tenu de la prise en compte du capital décès.

5.2.4 Réserves

Les réserves pour ces différents produits sont déterminées à chaque instant t pour un individu autonome ayant souscrit une rente de dépendance (les différentes fonctions R sont détaillées en Annexes).

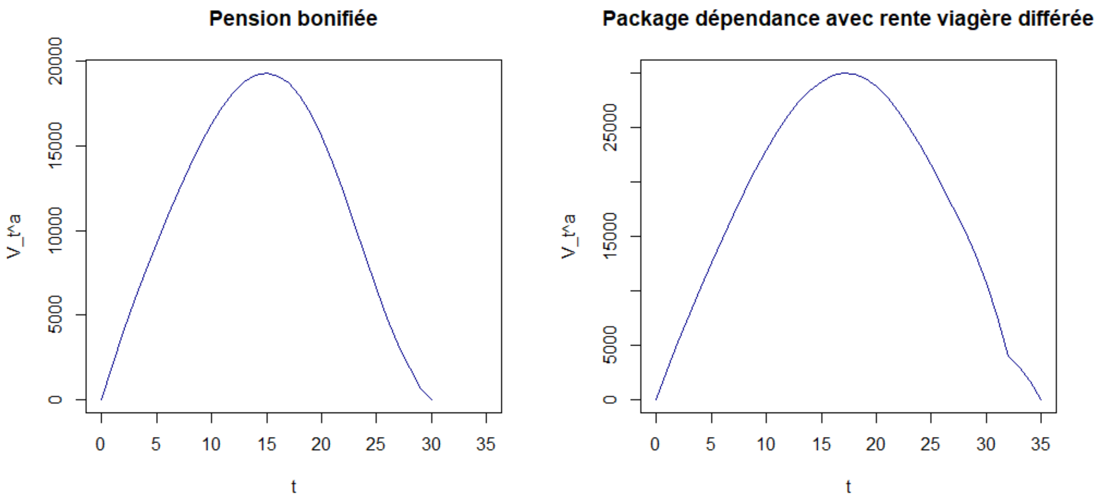

FIGURE 25 – Réserves des produits 2 et 3 en fonction de t pour un individu âgé de 65 ans à la souscription

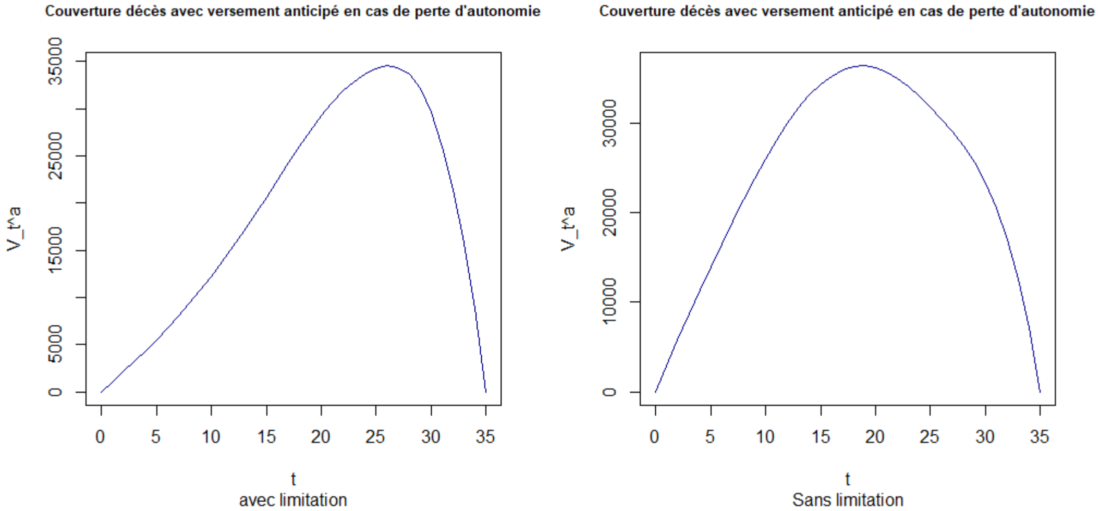

FIGURE 26 – Réserves du produit couverture décès avec versement anticipé en cas de perte d'autonomie (avec ou sans limitation du capital) en fonction de t pour un individu âgé de 65 ans à la souscription

Nous retrouvons la même allure des réserves que le produit LTC. L'allure des réserves garde une forme de cloche car l'évolution des engagements de l'assureur d'un côté, de l'autre côté, les engagements de l'assuré évoluent généralement de la même manière pour un produit donné. Pour le produit "Couverture décès avec versement anticipé en cas de perte d'autonomie", le risque n'étant pas le même en fonction de l'âge à la souscription quand il y a une limitation de capital, les réserves seront bien plus importantes quand l'âge à la souscription est plus élevé car la mortalité y est bien plus importante.

6 Extensions

6.1 Prime anticipée et rente différée

La gestion des primes temporaires différées permet de définir un modèle destiné aux actifs à savoir la mise en oeuvre d'un produit à paiements jusqu'à une date définie par exemple le départ en retraite et le déclenchement d'une garantie à partir de cette date.

Nous proposons alors un modèle intégrant une date choisie par l'assuré à partir de laquelle la garantie s'activera. Ce modèle combine à la fois la gestion des primes différées temporaires et des garanties différées grâce à la carence. L'ensemble des modèles presentés pourront être repris avec ce même principe .

Prenons l'exemple du modèle simple de rente de dépendance classique (LTC). Le produit se décompose selon la formule suivante :

$$\Pi = b_1\bar{a}_x^{01} + b_2\bar{a}_x^{02}$$

Avec

$$\begin{aligned} a_x^{01} &= \int_{AgeMaxS-x}^{\omega_x} exp(-\delta t - \int_0^t \mu_{x+s}^{0.} ds)\mu_{x+t}^{01}\bar{a}_{x+t}^{11} dt \\ &= \int_0^{\omega_x} exp(-\delta t - \int_0^t \mu_{x+s}^{0.} ds)\mu_{x+t}^{01}\bar{a}_{x+t}^{11} dt - \int_0^{AgeMaxS-x} exp(-\delta t - \int_0^t \mu_{x+s}^{0.} ds)\mu_{x+t}^{01}\bar{a}_{x+t}^{11} dt \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} a_x^{02} &= \int_{AgeMaxS-x}^{\omega_x} exp(-\delta t - \int_0^t \mu_{x+s}^{0.} ds)\mu_{x+t}^{02}\bar{a}_{x+t}^{22} dt \\ &= \int_0^{\omega_x} exp(-\delta t - \int_0^t \mu_{x+s}^{0.} ds)\mu_{x+t}^{02}\bar{a}_{x+t}^{22} dt - \int_0^{AgeMaxS-x} exp(-\delta t - \int_0^t \mu_{x+s}^{0.} ds)\mu_{x+t}^{02}\bar{a}_{x+t}^{22} dt \end{aligned}$$

et

$$\Pi = \pi_a \bar{a}_{x:\overline{AgeMaxS-x}|}^{00}$$

$AgeMaxS$= Âge de fin de souscription

Au vu des données à disposition, nous proposons de fixer un âge de fin de souscription à 70 ans, entrainant un début de couverture à partir de cet âge. Tout sinistre intervenant avant les 70 ans de l'assuré ne saurait être indemnisé. Les primes afférentes à ce modèle sont les suivantes :

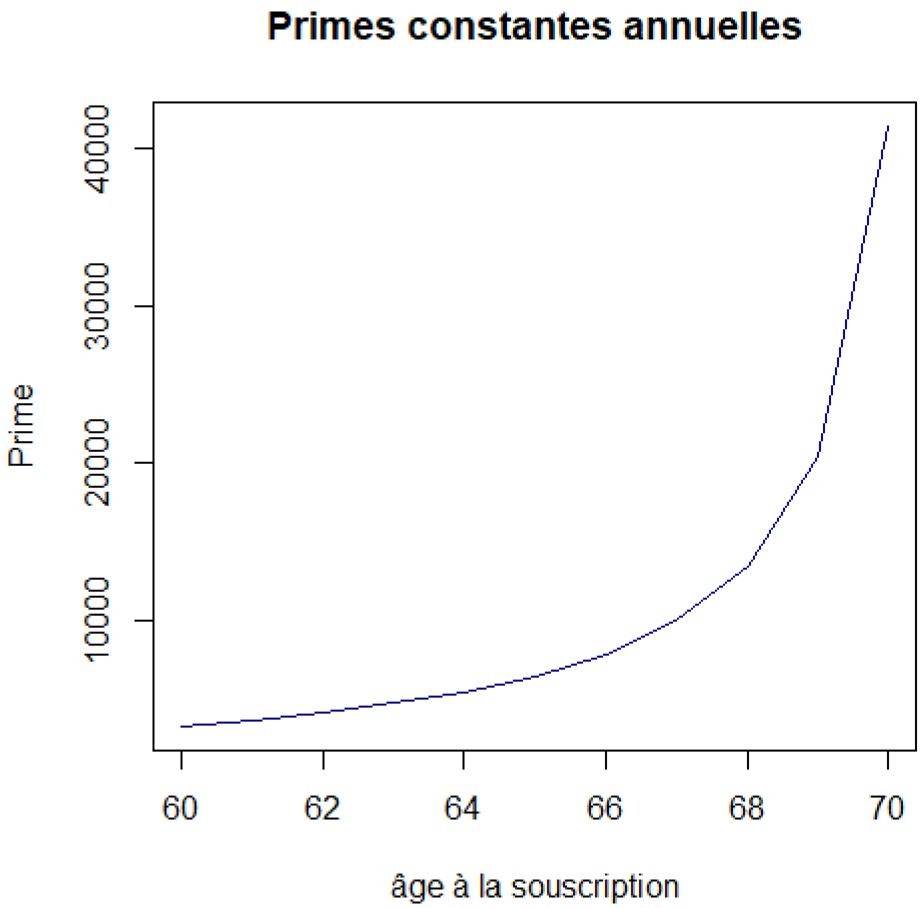

FIGURE 27 – Rente différée pour un individu qui cesse de payer ses primes à 70 ans

Logiquement, nous constatons une croissance du montant de la prime constante annuelle en fonction de l'âge de la souscription. Il est entendu que le prix soit plus élevé en souscrivant à l'âge maximum prévu au contrat.

Ce modèle peut se décomposer en fonction des produits décrits en amont mais peut également tenir compte des différentes clauses (carence et/ou franchise) sur les prestations.

6.2 Contrats deux têtes (décès/maladie indépendants)

L'objet du produit est de garantir une rente dépendance dès la constatation d'une dépendance physique ou mentale chez l'un des deux membres du couple tout en proposant un accompagnement financier (paiement des aménagements du domicile, remplacement éventuel du temps de travail non effectué en considérant par exemple que le second membre ait du diminué ses activités professionnelles à 80%, etc.) sous forme de rente pour le membre autonome, qui pourra éventuellement également tomber en dépendance et percevoir une rente spécifique.

Il est considéré ici en première partie un passage en dépendance pour le couple. Le paiement de la rente dépendance se fait au premier état de dépendance observé chez l'un des deux membres (équivalence avec le principe d'une annuité au premier décès).

Les deux parties suivantes concernent le maintien en autonomie du membre non encore dépendant conditionné au fait que l'autre membre soit bien passé en dépendance (donnant lieu à l'ouverture des droits à la garantie comme indiqué dans la première partie de cette équation), puis la possibilité d'une rente dépendance pour le second membre, toujours conditionné au fait que le premier membre soit passé en dépendance.

Le paiement des différentes rentes est conditionné à la survie des individus en cause :

- 1er passage en dépendance conditionné à la survie des deux membres
- Autonomie du second membre conditionné à la survie du second membre
- 2ème passage en dépendance conditionné à la survie du second membre

Nous allons décliner ce genre de contrat pour une rente de dépendance classique. Il en ressort les formules suivantes :

$$\Pi = b_1\bar{a}_{xy}^{01} + b_2\bar{a}_{xy}^{02} \ \mathbf{(1)}$$
$$+ (\mu_x^{01} + \mu_x^{02}) \times b_0 \times \frac{1 - exp(-\delta - \mu_x^{0\cdot})}{\delta + \mu_x^{0\cdot}}$$
$$+ \sum_{j=1}^{min(\omega_x,\omega_y)-1} \sum_{i=0}^{j} (\mu_{x+i}^{01} + \mu_{x+i}^{02}) \times b_0 \times exp(-\sum_{k=0}^{j-1} \mu_{y+k}^{0\cdot} - j\delta) \frac{1 - exp(-\delta - \mu_{y+j}^{0\cdot})}{\delta + \mu_{y+j}^{0\cdot}} \ \mathbf{(2)}$$
$$+ (\mu_x^{01} + \mu_x^{02}) \times b_1 \times \mu_y^{01} \times \bar{a}_{y;0}^{11} \times \frac{1 - exp(-\delta - \mu_x^{0\cdot})}{\delta + \mu_x^{0\cdot}}$$
$$+ \sum_{j=1}^{min(\omega_x,\omega_y)-1} \sum_{i=0}^{j} (\mu_{x+i}^{01} + \mu_{x+i}^{02}) \times b_1 \times \mu_{y+j}^{01} \times \bar{a}_{y+j;0}^{11} \times exp(-\sum_{k=0}^{j-1} \mu_{y+k}^{0\cdot} - j\delta) \frac{1 - exp(-\delta - \mu_{y+j}^{0\cdot})}{\delta + \mu_{y+j}^{0\cdot}} \ \mathbf{(3)}$$
$$+ (\mu_x^{01} + \mu_x^{02}) \times b_2 \times \mu_y^{02} \times \bar{a}_{y;0}^{22} \times \frac{1 - exp(-\delta - \mu_x^{0\cdot})}{\delta + \mu_x^{0\cdot}}$$
$$+ \sum_{j=1}^{min(\omega_x,\omega_y)-1} \sum_{i=0}^{j} (\mu_{x+i}^{01} + \mu_{x+i}^{02}) \times b_2 \times \mu_{y+j}^{02} \times \bar{a}_{y+j;0}^{22} \times exp(-\sum_{k=0}^{j-1} \mu_{y+k}^{0\cdot} - j\delta) \frac{1 - exp(-\delta - \mu_{y+j}^{0\cdot})}{\delta + \mu_{y+j}^{0\cdot}} \ \mathbf{(4)}$$
$$+ (\mu_y^{01} + \mu_y^{02}) \times b_0 \times \frac{1 - exp(-\delta - \mu_y^{0\cdot})}{\delta + \mu_y^{0\cdot}}$$
$$+ \sum_{j=1}^{min(\omega_x,\omega_y)-1} \sum_{i=0}^{j} (\mu_{y+i}^{01} + \mu_{y+i}^{02}) \times b_0 \times exp(-\sum_{k=0}^{j-1} \mu_{x+k}^{0\cdot} - j\delta) \frac{1 - exp(-\delta - \mu_{x+j}^{0\cdot})}{\delta + \mu_{x+j}^{0\cdot}} \ \mathbf{(5)}$$
$$+ (\mu_y^{01} + \mu_y^{02}) \times b_1 \times \mu_x^{01} \times \bar{a}_{x;0}^{11} \times \frac{1 - exp(-\delta - \mu_y^{0\cdot})}{\delta + \mu_y^{0\cdot}}$$
$$+ \sum_{j=1}^{min(\omega_x,\omega_y)-1} \sum_{i=0}^{j} (\mu_{y+i}^{01} + \mu_{y+i}^{02}) \times b_1 \times \mu_{x+j}^{01} \times \bar{a}_{x+j;0}^{11} \times exp(-\sum_{k=0}^{j-1} \mu_{x+k}^{0\cdot} - j\delta) \frac{1 - exp(-\delta - \mu_{x+j}^{0\cdot})}{\delta + \mu_{x+j}^{0\cdot}} \ \mathbf{(6)}$$

$$+ (\mu_y^{01} + \mu_y^{02}) \times b_2 \times \mu_x^{02} \times \bar{a}_{x;0}^{22} \times \frac{1 - exp(-\delta - \mu_y^{0\cdot})}{\delta + \mu_y^{0\cdot}}$$

$$+ \sum_{j=1}^{min(\omega_x,\omega_y)-1} \sum_{i=0}^{j} (\mu_{y+i}^{01} + \mu_{y+i}^{02}) \times b_2 \times \mu_{x+j}^{02} \times \bar{a}_{x+j;0}^{22} \times exp(-\sum_{k=0}^{j-1} \mu_{x+k}^{0.} - j\delta) \frac{1 - exp(-\delta - \mu_{x+j}^{0.})}{\delta + \mu_{x+j}^{0.}} \quad \textbf{(7)}$$

Soit :

- **(1)** Passage en dépendance d'un des 2 membres.
- **(2)** La rente autonomie pour Y si X passe en dépendance.
- **(3)** La rente dépendance physique pour Y si X passe en dépendance.
- **(4)** La rente dépendance mentale pour Y si X passe en dépendance.
- **(5)** La rente autonomie pour X si Y passe en dépendance.
- **(6)** La rente dépendance physique pour X si Y passe en dépendance.
- **(7)** La rente dépendance mentale pour X si Y passe en dépendance.

Avec

$$\bar{a}_{xy}^{01} = \mu_{xy}^{01} \bar{a}_{xy;0}^{11} \frac{1 - exp(-\delta - \mu_{xy}^{0.})}{\delta + \mu_{xy}^{0.}} + \sum_{j=1}^{min(\omega_x,\omega_y)-1} \mu_{xy+j}^{01} \bar{a}_{xy+j;0}^{11} exp(-\sum_{k=0}^{j-1} \mu_{xy+k}^{0.} - j\delta) \frac{1 - exp(-\delta - \mu_{xy+j}^{0.})}{\delta + \mu_{xy+j}^{0.}}$$

et

$$\bar{a}_{xy}^{02} = \mu_{xy}^{02} \bar{a}_{xy;0}^{22} \frac{1 - exp(-\delta - \mu_{xy}^{0.})}{\delta + \mu_{xy}^{0.}} + \sum_{j=1}^{min(\omega_x,\omega_y)-1} \mu_{xy+j}^{02} \bar{a}_{xy+j;0}^{22} exp(-\sum_{k=0}^{j-1} \mu_{xy+k}^{0.} - j\delta) \frac{1 - exp(-\delta - \mu_{xy+j}^{0.})}{\delta + \mu_{xy+j}^{0.}}$$

Avec

$$\begin{gathered} \mu_{xy+k}^{0.} = \mu_{x+k}^{0.} + \mu_{y+k}^{0.} \\ et \\ \mu_{xy}^{01} = \mu_x^{01} + \mu_y^{01} \\ \mu_{xy}^{02} = \mu_x^{02} + \mu_y^{02} \end{gathered}$$

$$\begin{aligned} a^{\bar{11}}{}_{xy;0} = & \frac{1 - exp(-\delta - \tilde{\mu}^1(xy, 0))}{\delta + \tilde{\mu}^1(xy, 0)} \\ & + \sum_{j=1}^{min(\omega_x,\omega_y)-1} exp(-\sum_{k=0}^{j-1} \tilde{\mu}^1(xy, k) - j\delta) \frac{1 - exp(-\delta - \tilde{\mu}^1(xy, j))}{\delta + \tilde{\mu}^1(xy, j)} \end{aligned}$$

et

$$\bar{a}^{22}{}_{xy;0} = \frac{1 - exp(-\delta - \tilde{\mu}^2(xy,0))}{\delta + \tilde{\mu}^2(xy,0)}$$
$$+ \sum_{j=1}^{min(\omega_x,\omega_y)-1} exp(-\sum_{k=0}^{j-1} \tilde{\mu}^2(xy,k) - j\delta) \frac{1 - exp(-\delta - \tilde{\mu}^2(xy,j))}{\delta + \tilde{\mu}^2(xy,j)}$$

Afin d'illustrer les possibilités de ce type de produit,nous proposons une tarification avec les paramètres du LCA. Les représentations suivantes affichent d'une part la tarification globale avec les âges combinés des 2 membres du couple, d'autre part une comparaisondétaillée des évolutions des tarifs sous condition de fixer l'âge du premier membre à 60, 65 ou 75 ans.

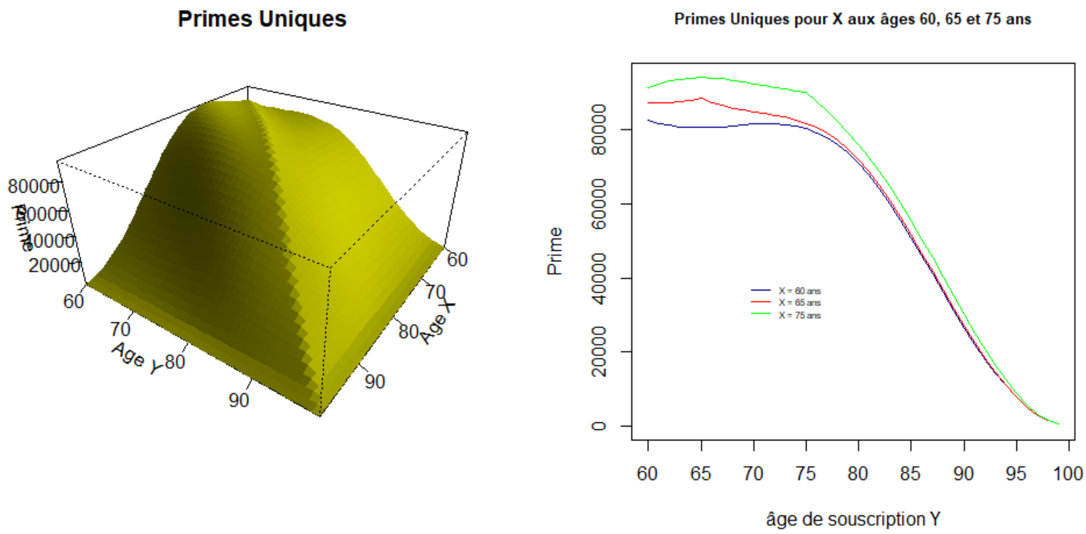

FIGURE 28 – Evolution des primes uniques annuelles pour un contrat couple, souscription de "X" à 60, 65 et 75 ans et fonction de l'âge de souscription de "Y".

Nous constatons une prime annuelle au plus haut pour les âges compris entre 60 et 80 ans, la tendance aux âges élevés reste toujours observable, principalement liée à la mortalité. La prime unique annuelle est légèrement plus basse pour un individu jeune (Figure 28).

De plus, comme nous utilisons la table femme quel que soit le genre de l'individu, la prime pour un individu "Y" croît légèrement pour atteindre l'âge du conjoint "X" avant de décroitre progressivement.

Le produit reste avantageux car il est bien moins cher qu'un LCA classique souscrit séparément par les 2 membres du couple et il s'établit à la hausse par rapport à 2 LTC individuels (majoration estimée entre 20% et 30%,largement compensée par la présence d'une prime autonomie). A titre d'exemple, une prime unique annuelle pour 1 LTC à 60 ans s'élève à 34 737 € soit 69 474 € pour les 2 contre le produit couple (X=60 ans) et (Y=60 ans) qui propose 82 692 €.

7 Conclusion

L'assurance dépendance se développe de plus en plus car le besoin de se couvrir contre une perte d'autonomie future s'avère de nos jours une préoccupation assez importante, d'autant que la croissance démographique s'opère dans de nombreux pays et que l'espérance de vie augmente dans les pays développés, l'espérance de vie sans incapacité reste quant à elle à optimiser. A cela s'ajoute un fort déficit des systèmes d'aides actuels.

Pour y remédier, les assureurs proposent à la souscription des contrats de dépendance. Ces contrats sont à l'origine de simples rentes dépendances, néanmoins les assureurs commencent à s'adapter aux besoins de leurs assurés et proposent des combinaisons de produits, notamment évoluant selon la vie de l'assuré et son environnement. Il existe des disparités entre les marchés internationaux sur le domaine de la dépendance, le développement en fonction des pays n'étant pas le même comme nous avons pu le constater entre la France et la Belgique par exemple.

Partant de modèles de dépendance à un état ainsi que des différentes tables d'incidence disponibles sur le marché, nous avons pu mettre en place dans ce mémoire un modèle à deux états, ciblant la dépendance physique et la démence. La prise en compte et l'identification de chacun des états de dépendance s'est avéré très utile au vu des disparités observées sur le marché au niveau des conditions de souscription selon l'état, bien que les assurés, majoritairement averses au risque de dépendance, aient une préférence pour un couverture indépendante de la cause du sinistre. Nous avons tout d'abord proposé un modèle de tarification et provisionnement pour une rente classique de dépendance que nous avons ensuite déployé sur l'ensemble des packages des produits existants.

Une analyse approfondie sur les différentes clauses de garantie a également été réalisée. Le choix des paramètres du contrat est essentiel pour un assureur qui se doit d'appréhender au mieux le risque qu'il s'engage à couvrir. Nos analyses d'écarts ont révélé que certains paramètres comme la carence ont un impact fort sur la tarification, réduisant considérablement non seulement les engagements de l'assuré, mais aussi ceux de l'assureur. Le calibrage du modèle, et la compréhension des divers paramètres tant par les utilisateurs (assureurs) que par les bénéficiaires (assurés), sont donc des étapes primordiales dans la proposition de produits d'assurance dépendance.

Dans le cadre de ce mémoire, nous avons donc vu que les modèles classiques et leurs combinaisons permettent de proposer une large gamme de produits sur-mesure. Cependant face au besoin de couverture grandissant, il est nécessaire de proposer des offres compréhensibles pour le plus grand nombre. A cet effet, nous avons développé deux produits pouvant s'adapter au quotidien des assurés. Le premier vient ajuster les moyens de financement du dispositif en proposant une garantie différée du versement des primes et s'adresse particulièrement aux actifs souhaitant se couvrir pour leur retraite. Le second affiche une tarification couple et permet un accompagnement financier durable du membre aidant autonome.

Le monde de l'assurance dépendance est encore jeune, et il est de notre intérêt futur de le promouvoir. Le coût actuel des offres de couverture du risque dépendance reste élevé. Des offres collectives, proposées à des branches professionnelles d'activité, permettraient de protéger l'ensemble du secteur concerné tout en limitant la contribution individuelle, grâce au principe de mutualisation ; et l'adaptation des produits définis dans ce mémoire permettrait à l'assureur de facilement optimiser le pilotage de ses risques et ses engagements. A la plus grande échelle, il s'agirait de proposer ces garanties au sein même des couvertures obligatoires de la Sécurité sociale.

8 Annexes

Code R

Voir *Code_INAMAHORO_ALLOU_Aout2021_Annexes.zip*

9 Bibliographies

Andersen, P. K., Borgan, Ørnulf, Gill, R. D. Keiding, N., (1993), Statistical Models Based on Counting Processes, Springer-Verlag New York Inc., 767 p.

Chambers, J. M. Hastie, T. J., (1992), Statistical Models in S, Wadsworth Brooks/-Cole, 600 p.

Delwarde, A. Denuit, M., (2005), Construction de tables de mortalité périodiques et prospectives, Economica, Paris, 428 p.

Denuit M. et Robert C. (2007). Actuariat des assurances de Personnes - Modélisation, tarification et provisionnement. Paris Economica.

Dupourque , E., Planchet, F. Sator, N. (ÉD.), (2019), Actuarial Aspects of Long-Term Care, Springer Actuarial Series, Springer

Guibert Q., Planchet F. et Schwarzinger M. (2018a). "Mesure de l'espérance de vie en perte d'autonomie totale en France métropolitaine." Bulletin Français d'Actuariat, Vol. 18, n°35.

Guibert Q., Planchet F. et Schwarzinger M. (2018b). "Mesure de l'espérance de vie sans perte d'autonomie totale en France métropolitaine." Bulletin Français d'Actuariat, Vol. 18, n°35.

Guibert Q., Planchet F. et Schwarzinger M. (2018c). "Mesure du risque de perte d'autonomie totale en France métropolitaine." Bulletin Français d'Actuariat, Vol. 18, n°35.

Guibert Q., Planchet, F., (2014), Construction de lois d'expérience en présence d'évènements concurrents – Application à l'estimation des lois d'incidence d'un contrat dépendance, Bulletin Français d'Actuariat, vol. 13, n°27, p. 5-28.

Kaplan, E. L. Meier, P., (1958), Nonparametric Estimation from Incomplete Observations, Journal of the American Statistical Association, vol. 53, n°282, p. 457-481.

Planchet F., Thérond P.E. (2011) Modélisation statistique des phénomènes de durée – applications actuarielles, Paris : Economica.

Schwarzinger M. (2018) « Étude QalyDays : données source et retraitements », Bulletin Français d'Actuariat, Vol. 18, n°35.