

École polytechnique de Louvain

Évaluation de la résistance résiduelle des structures en béton armé soumises à la corrosion

Auteurs : Maxime Cruysmans

Promoteurs : Luca Sgambi

Lecteurs : Luca Sgambi, MARTIN STEINMETZ , Denis Zastavni

Année académique 2020–2021

Master [120] : ingénieur civil des constructions

Remerciements

Ce mémoire n'aurait jamais été possible sans l'aide de mon promoteur Luca Sgambi. En effet, Monsieur Sgambi a suivi l'avancée du mémoire pendant toute l'année académique. Les rendez-vous tous les vendredis matin m'ont motivé et m'ont orienté dans la bonne direction. Je le remercie d'avoir consacré autant de temps à me guider et à me conseiller tout au long de la rédaction du mémoire.

Je remercie également ma tante Marie Cruysmans et ma mère Anne Cruysmans pour la relecture et la correction du texte.

Enfin, je remercie mes proches pour le soutien et l'aide qu'ils m'ont apporté. Merci à ma famille pour leur persévérance à m'encourager et me motiver à faire de mon mieux pour l'ensemble de mes études et spécialement lors de la rédaction de ce mémoire.

Table des matières

1	INTRODUCTION	7
2	LA DÉGRADATION DU BÉTON	9
2.1	Etat général des risques de dégradations naturelles	10
2.1.1	Dégradation des selles de Gerber	12
2.1.2	Corrosion des câbles de précontrainte	13
2.1.3	Dégradation des pieux dans l'eau	14
2.1.4	Système de drainage	15
2.2	Phase d'initiation par carbonatation	16
2.2.1	Modélisation	17
2.2.2	Fissures	18
2.2.3	Conséquences du réchauffement climatique	19
2.2.4	Mesure de la profondeur de carbonatation	20
2.3	Phase d'initiation par les chlorures	21
2.3.1	Modélisation du transport des ions	22
2.3.2	Effets de la carbonatation et des chlorures simultanément	23
2.4	Phase de propagation	24
2.4.1	Modèle de corrosion pour des armatures standard	24
2.4.2	Modèle de corrosion pour des armatures précontraintes	25
2.5	Conclusion	26
3	ANALYSE SECTIONNELLE	27
3.1	Définition des conventions des variables statiques et cinématiques	28
3.2	Approche matricielle	28
3.2.1	Création de la matrice de rigidité	31
3.2.2	Lois constitutives	32
3.3	Résolution du système	35
3.4	Structure du programme	36
3.4.1	Fonction DATA INPUT	37
3.4.2	Fonction SOLVE	38
3.4.3	Résultats	39
4	ANALYSE LINÉAIRE D'UNE STRUCTURE 2D	40
4.1	Pré-processing	40

4.2	Discrétisation et attribution des propriétés mécaniques	41
4.2.1	Définition théorique des forces nodales	41
4.3	Transformation du système de référence	42
4.4	Assemblage des éléments finis	43
4.5	Opération pour compléter le système de résolution.....	44
4.6	Résolution du système linéaire	44
4.7	Attribution des forces nodales	44
4.8	Post-processing	44
4.9	FRAME2D.....	45
4.9.1	GEOMET	45
4.9.2	SCODE	45
4.9.3	LOADS	47
4.9.4	MKK(NE)	47
4.9.5	ASSEMB	47
4.9.6	SOLVE.....	47
4.9.7	DISPL.....	48
4.9.8	STRESS	48
4.10	Représentation graphique	48
4.10.1	Poutre isostatique (Frame 1).....	48
4.10.2	Poutre hyperstatique (Frame 2).....	49
4.10.3	Structure hyperstatique (Frame 3).....	50
5	ANALYSE NON-LINÉAIRE	52
5.1	Modèle de pour une charge constante.....	53
5.1.1	Modification de Frame2D	53
5.1.2	Modification de l'analyse sectionnelle.....	54
5.1.3	Convergence.....	55
5.1.4	Schéma récapitulatif.....	56
5.1.5	Résultats	56
5.2	Détermination de la résistance ultime.....	58
5.2.1	Modification du modèle non-linéaire	58
5.2.2	Schéma récapitulatif.....	59
5.2.3	Résultats	59
5.3	Conclusion	65

6	MODÈLE DE CORROSION	66
6.1	Modèle de carbonatation.....	66
6.1.1	Sr, max	66
6.1.2	$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$	67
6.2	Modèle de corrosion	67
6.3	Modèle numérique de corrosion	68
6.3.1	Modèle 1 : Charge fixe	68
6.3.2	Résultats du modèle 1.....	69
6.3.3	Modèle 2 : Charge ultime	73
6.3.4	Résultats modèle 2	73
6.3.5	Facteur limitant la corrosion induite par la carbonatation.....	76
6.4	Conclusion	77
7	Conclusion Générale	78
8	Annexes.....	80
8.1	Annexe 1 : Frame 1.....	80
8.2	Annexe 2 : Frame 2.....	81
8.3	Annexe 3 : Frame 3.....	82
8.4	Annexe 4 : Frame 4.....	83
8.5	Annexe 5 : Section 1	84
9	Bibliographie	85

1 INTRODUCTION

La rupture d'un pont en béton armé n'est pas très fréquente mais a de graves conséquences. Un tel accident remettra inévitablement en cause le travail des ingénieurs afin de déterminer l'origine de la rupture. Or, très fréquemment, c'est la corrosion des armatures qui explique la rupture du pont. En principe, le béton protège les armatures de la corrosion mais cette protection peut être détruite par des phénomènes naturels. Et, lorsque la couche protectrice disparaît, d'une part, la corrosion commence, d'autre part, la résistance structurelle diminue.

Ce mémoire a pour objectif de présenter un modèle numérique permettant d'analyser l'évolution de la résistance structurelle endommagée par la corrosion. Dans le but de prévenir la rupture de structure en béton armé.

Certains prérequis sont nécessaires pour mener à bien notre étude. Nous mènerons d'abord une recherche dans la littérature existante sur la dégradation naturelle du béton. Dans ce chapitre, nous décrirons, d'une part, les différents risques et dangers de la dégradation naturelle du béton ; nous proposerons, d'autre part, plusieurs modèles mathématiques sur l'évolution de la dégradation du béton.

Avant de pouvoir réaliser un modèle qui permet d'évaluer l'évolution de la résistance d'une structure en béton armé dans le temps, il faut une étape préliminaire. En effet, il faut d'abord créer un modèle numérique capable d'évaluer la résistance du béton à l'état initial. Ce modèle doit être capable de différencier le comportement de l'acier et du béton. Dans le cadre de ce mémoire, un modèle non-linéaire d'analyse structurelle a été conçu. Il permet soit de connaître la charge maximale avant la rupture, soit d'obtenir les déplacements et les efforts internes d'une structure subissant des charges constantes.

Ce modèle d'analyse structurelle sera détaillé en trois étapes. La première étape développe l'analyse sectionnelle. Cette analyse utilise les éléments finis et renvoie les déformations que subit une section sous des efforts internes. La deuxième étape permet de comprendre l'analyse linéaire d'une structure 2D. Ce modèle renvoie les efforts internes et les déplacements d'une structure sous certaines charges. Enfin, la troisième étape s'attachera à la description du modèle non-linéaire. Ce modèle est la juxtaposition des deux modèles décrits précédemment. En effet, celui-ci transmet les efforts internes de l'analyse linéaire dans l'analyse sectionnelle. La section avec sa nouvelle inertie est alors réintégrée dans l'analyse linéaire. La boucle entre ces deux modèles forme une analyse structurelle non-linéaire permettant d'obtenir des résultats optimaux et de différencier l'état de contrainte de l'acier et du béton.

Finalement, l'implémentation de la corrosion dans l'analyse non-linéaire complètera le modèle. Différents résultats seront présentés et permettront de comprendre l'importance d'une part, de la maintenance des structures plus anciennes, d'autre part de la prévention dans la conception de nouvelles structures [1].

Le modèle est fonctionnel, utile à l'évaluation de la résistance résiduelle d'un ouvrage et permet de prévenir de graves accidents.

2 LA DÉGRADATION DU BÉTON

La durée de vie des ouvrages en béton armé est souvent remise en question et ce sont essentiellement les dégradations naturelles qui en sont la cause. La dégradation naturelle du béton armé est principalement causée par la corrosion des armatures. En effet, elle provoque une réduction de la section d'acier et entraîne des contraintes résiduelles pouvant amener à la fissuration du béton. Le milieu alcalin (pH élevé) du béton assure normalement une protection passive à la corrosion mais la solution interstitielle contenue dans les pores du béton peut avoir une influence sur le pH du béton. Il y a dans la littérature deux agents qui favorisent la corrosion des armatures, les gaz carboniques et les ions de chlorures. Le premier provoquera une corrosion générale des armatures alors que le deuxième entraînera une corrosion locale. Dans les deux cas, la suppression de la protection passive et la dégradation de l'acier mettent en jeu un mécanisme de piles électrochimiques avec une partie anodique et une partie cathodique sur l'acier et un milieu électrolytique constitué par la solution interstitielle du béton [2].

Tuutti propose en 1982 un modèle conceptuel de la corrosion en 2 phases : la phase d'initiation et la phase de propagation [3]. La première phase correspond à la pénétration des agents agressifs dans l'enrobage. Cette étape se produit par des mécanismes de transfert des dioxydes de carbone ou des ions de chlorures dans la solution interstitielle des pores du béton. Lors de la deuxième phase, la phase de propagation, la protection passive des armatures est brisée et la corrosion commence. [4]

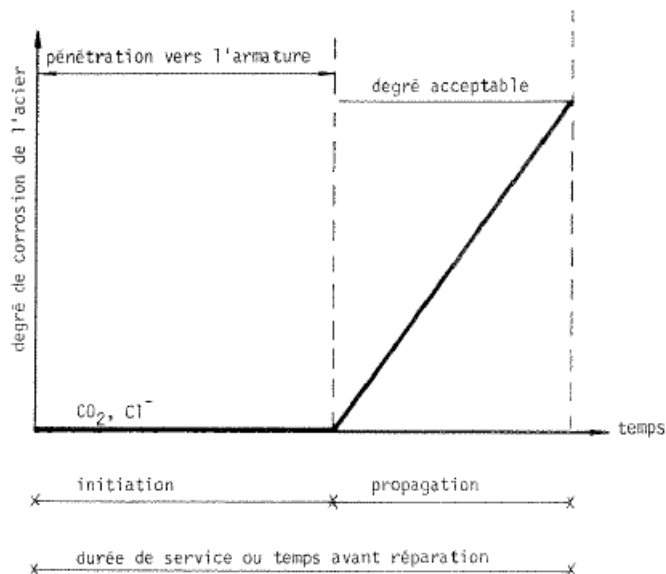


Figure 1: Représentation schématique de la corrosion de l'acier dans le béton [16]

La phase d'initiation et celle de propagation suivent chacune une loi différente. Cette thèse a pour objectif d'étudier les différents modèles de la littérature illustrant ces 2 phases et ainsi compléter le modèle informatique, pour obtenir un comportement du béton le plus proche de la réalité possible. Avec l'implémentation des dégradations naturelles dans le programme, il sera également possible de connaître une approximation de la durée de vie de la structure.

2.1 Etat général des risques de dégradations naturelles

Après la guerre, le béton armé a été choisi pour reconstruire l'Europe. Le matériau était à l'époque considéré comme éternel. La dégradation par les chlorures et la carbonatation n'était pas encore connue.

Aujourd'hui, les normes européennes permettent à un ouvrage en béton de résister dans le temps (50-70 ans). Malheureusement, les normes de l'époque ne tenaient pas compte des effets de dégradation naturelle. Pour que le béton atteigne une durée de vie optimale, il faut que plusieurs critères soient respectés : le schéma structurel, les détails de construction, le choix des matériaux, la conception du mélange, le transport, l'installation et l'entretien de la structure. La corrosion des armatures peut commencer beaucoup plus tôt si un seul de ces critères n'est pas respecté et entraîner un danger structurel non-négligeable.

Une analyse de certains ponts passant au-dessus du Pô en Lombardie a été effectuée par les professeurs Pier Giorgio Malerba et Luca Sgambi [5]. Cette recherche avait pour objectif d'identifier les ponts nécessitant un entretien en 2013. À la suite de ces recherches, la région de Lombardie a effectivement dû effectuer de la maintenance pour certains de leurs ouvrages. En effet, tous les ponts examinés ont été construits entre 1955 et 1976. Ils dataient donc d'avant les premières études de dégradation structurelle du béton armé (Tuutti, 1982). A cette époque, les constructions en béton armé étaient en effet beaucoup plus sensibles à la dégradation naturelle pour plusieurs raisons : le manque de connaissances sur la modélisation des phénomènes de dégradation, l'absence de normes sur le sujet et l'aspect économique.

Les chercheurs ont appliqué le modèle de Tuutti (carbonatation) aux structures pour savoir si la corrosion avait eu lieu et depuis combien de temps. Ils ont considéré un enrobage de 20mm propre à ce qui se faisait à l'époque où n'existaient pas encore les normes pour la protection du béton armé. Le coefficient de carbonatation a été estimé selon la littérature à $K=4$. Les recherches ont montré que la corrosion avait débuté depuis longtemps pour tous les ponts analysés. Le tableau suivant montre les données de corrosion des structures selon le modèle de Tuutti.

Nom	Poutre porte-à-faux	Profondeur de carbonatation [mm]	Début de corrosion	Temps de corrosion
Pieve del Cairo	Non	28,8	1993	28
Spessa	Oui	27,4	1998	23
Pieve Porto Morone	Oui	30,7	1986	35
San Nazzaro	Oui	28,3	1995	26
San Daniele	Oui	25,3	2005	16
Casalmaggiore strad.	Oui	31,5	1983	38
Viadana	Oui	29,1	1992	29
Guastalla	Oui	28,0	1996	25
Borgoforte	Oui	30,7	1986	35

Tableau 1: Caractéristiques des ponts étudiés et évaluation de l'année d'initiation de la corrosion [5]

On peut constater que les armatures des structures sont toutes atteintes de corrosion depuis une longue durée et peuvent compromettre la résistance globale de la structure.

Les ponts ont tous des schémas isostatiques assez semblables avec des appuis dans la rivière soutenant des poutres en porte-à-faux. Une poutre précontrainte fait le lien entre la berge et la poutre en porte-à-faux ou entre 2 poutres en porte-à-faux.



Figure 2: 2 poutres d'encorbellement soutenant un tronçon de travée précontraint (pont Spessa)

Ce schéma statique est économique et constitue la configuration typique des ponts en béton précontraint construits de 1960 à 1980. Il présente malheureusement quelques défauts dus aux manques de connaissances de l'époque.

Le premier problème concerne le positionnement des pylônes. Malgré l'utilisation de béton précontraint, un élément ne couvre que 30-40 mètres, et ce, pour des raisons économiques. Il est donc nécessaire, pour la traversée d'un fleuve tel que le Pô, d'avoir des appuis situés dans le fleuve. L'utilisation de support au milieu du fleuve provoque des phénomènes hydrauliques de sapement. En effet, l'écoulement de l'eau contre les pylônes provoque l'érosion du sol et fragilise ainsi les fondations. Le sapement des fondations doit être contrôlé sinon il peut provoquer l'effondrement du pont. Les pylônes intermédiaires peuvent également retenir des débris et ainsi augmenter la section hydraulique de jeté entraînant une érosion plus forte des fonds. Ce phénomène paraît évident mais il n'existe pas encore de méthodes scientifiques reconnues, ce qui s'explique par les difficultés à traiter les incertitudes liées au phénomène.



Figure 3: "Île de débris" formé contre un pylône du pont de Pieve Porto Morone

La deuxième faiblesse de ce schéma statique est la connexion entre la poutre de travée et soit la structure verticale soit la poutre en porte-à-faux. En effet, dans les deux cas, la connexion avec la poutre de travée se fait avec une console spécifique, nommée la selle de Gerber (Figure 4).



Figure 4: Console du pont de San Nazzaro [6]

Cette console a un rôle structurel important pour assurer un schéma isostatique de la structure. Malgré son apport économique et sa facilité de construction, la selle de Gerber est un élément très sensible à la détérioration. Effectivement, elle constitue également le joint de dilatation des ponts. Et, un drainage mal conçu ou obstrué provoque un surplus d'eau.

Dans un article [6], Emanuele Lizzori et Luca Sgambi résument les différents phénomènes de dégradations observés sur les ponts du Tableau 1. Plusieurs dégradations seront étudiées. Parmi ces phénomènes différents, il y a un élément est commun : la présence d'eau.

2.1.1 Dégradation des selles de Gerber

Le sel contenu dans les solutions de déverglaçage est un élément nocif pour le béton lorsque l'eau est mal évacuée. Effectivement, les chlorures contenus dans le sel de déverglaçage peuvent, s'ils sont en grande quantité, détruire la couche protectrice des armatures et provoquer la corrosion de celles-ci. Ce phénomène se produit lorsque l'évacuation des eaux est obstruée ou mal conçue. Dans ce cas, l'eau trouve un autre moyen de s'évacuer et passe par les joints de dilatation et par les selles de gerber, dans le cas des ponts étudiés. Si l'eau contenant le sel stagne sur la console, une petite quantité sera absorbée par le béton dans son réseau poreux. Lorsque les ions de chlorure atteignent une concentration critique au niveau des armatures, la couche protectrice sera dépassivée localement et, à cet endroit, une piqûre de corrosion débutera. Les produits de corrosion créeront un volume plus grand que le volume initial et provoqueront d'abord des fissures, ensuite l'expulsion de la couche d'enrobage. Ces conséquences provoquent une exposition plus grande des armatures face aux agents corrosifs et augmentent dès lors la vitesse de corrosion.



Figure 5: dégradation de la selle de Gerber (Pont de Pieve Porto Morone) [6]

2.1.2 Corrosion des câbles de précontrainte

Le schéma statique des ponts étudiés convient pour des poutres en béton armé précontraint. Malheureusement, comme évoqué précédemment, les armatures de précontrainte sont particulièrement sensibles à la corrosion. Les câbles peuvent avoir une forme parabolique le long d'une poutre ou rester dans la partie inférieure de la poutre. Dans une structure en béton précontraint, ce sont bien sûr les armatures tendues qui assurent la plus grande résistance de stabilité.

Aujourd'hui, les normes assurent une protection suffisante pour éviter tout danger de rupture soudaine, grâce à des épaisseurs d'enrobage minimales, des compositions de béton optimal, etc. Les ponts étudiés, étant antérieurs à ces normes, sont donc sujets à la dégradation naturelle.



Figure 6: : Corrosion des câbles de précontrainte (pont de Pieve Porto Morone) [5]

La Figure 6 montre bien l'expulsion de l'enrobage, la corrosion des brins d'armature précontrainte et même la rupture de certains fils.

Ensuite, la Figure 7 montre une situation équivalente sur le pont de San Daniele avec un détachement de l'enrobage et des gaines de précontrainte à découvertes.



Figure 7: corrosion des câbles de précontrainte (Pont de San Daniele) [6]

2.1.3 Dégradation des pieux dans l'eau

Pour que les armatures se corrodent, deux composants sont nécessaires : l'eau et l'oxygène. La corrosion peut donc difficilement avoir lieu dans des structures à l'abri de la pluie ou dans des milieux complètement immergés dans l'eau.

Le pont de San Daniele a effectivement connu des dégâts de corrosion au niveau de ses pieux situés dans la rivière. La partie du pieu au niveau de l'eau est fortement sujette à de la corrosion car elle est continuellement humide et en contact avec l'atmosphère. Un pieu mal protégé sera donc assez rapidement dégradé.



Figure 8: Pilier subissant de la corrosion (Pont de San Daniele) [6]

2.1.4 Système de drainage

Le système de drainage est un élément essentiel pour une structure durable. En effet, un système de drainage manquant ou défectueux peut provoquer des dégradations du béton importantes, car l'eau non évacuée de la plate-forme routière sera en contact avec le béton. Avec un drainage classique, l'eau est dirigée par gravité vers des orifices placés sur le bord de la route et est évacuée par des tuyaux de drainage. Le prix de l'installation d'un drainage performant est réduit proportionnellement au prix total de la structure. Cependant son importance est capitale pour éviter de payer des coûts de réparation importants par après.

La Figure 9 représente un système d'évacuation défectueux dû à un probable oubli des tuyaux d'évacuation des eaux. Le trou de drainage est présent mais il manque le tuyau pour éviter le contact avec le béton. L'eau est donc drainée vers la poutre en béton. La structure est fortement dégradée aux deux endroits en contact avec l'eau. L'enrobage a été expulsé et la corrosion a débuté.



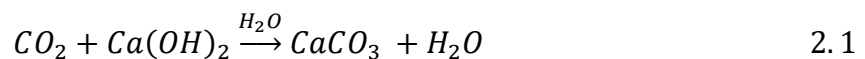
Figure 9: Absence de tuyaux d'évacuation (Pont de Ficarolo) [6]

2.2 Phase d'initiation par carbonatation

L'acier et le béton sont deux matériaux complémentaires. Le béton protège l'acier de la corrosion et l'acier permet la résistance à la traction. Les fissures par dilatation thermique sont également évitées car les deux matériaux ont le même coefficient de dilatation. Malheureusement le béton armé n'est pas à l'abri de toutes dégradations. En effet, des phénomènes naturels peuvent réduire et annihiler la protection de l'acier.

Un béton à l'état initial a, selon la littérature, un pH entre 12 et 13 [7]. L'alcalinité du béton crée une fine couche d'hydroxyde de fer autour des armatures et bloque ainsi le processus de corrosion. Ce phénomène est appelé : « la passivation des armatures ». Tant que les armatures restent dans ce milieu alcalin, l'acier sera protégé. Malheureusement, n'importe quelle structure en béton dans l'atmosphère subit de la carbonatation. Et, la carbonatation, une réaction entre le carbone atmosphérique et des constituants alcalins, diminue l'alcalinité du béton.

La carbonatation est un phénomène de vieillissement naturel de matériaux à base de liant minéral et entraîne la diminution du pH par la consommation des bases alcalines dans la solution interstitielle. Par ce processus, le pH diminue, passant de 12-13 à moins de 9. La réaction chimique entraîne la création de carbonate de calcium ($CaCO_3$) et d'eau [8]:



L'apparition de carbonate de calcium induit à une amélioration de la compacité du béton et à une légère hausse de résistance en compression. Lorsque le front de carbonatation atteint le niveau des armatures, celles-ci se dégraderont par corrosion et diminueront la résistance globale de la structure. En effet, le pH diminue et la couche protectrice d'hydroxyde de fer disparaît. L'eau et l'oxygène renfermés dans le béton provoqueront alors la rouille des armatures. La corrosion sera environ uniforme sur toute la longueur de l'armature.

La vitesse de corrosion dépend principalement de l'humidité relative de l'air, HR. En effet, pour une humidité relative inférieure à 60% ou égale à 100%, la vitesse relative de corrosion sera presque nulle [9]. Notons que l'humidité relative correspond au rapport entre l'humidité actuelle et l'humidité de saturation.

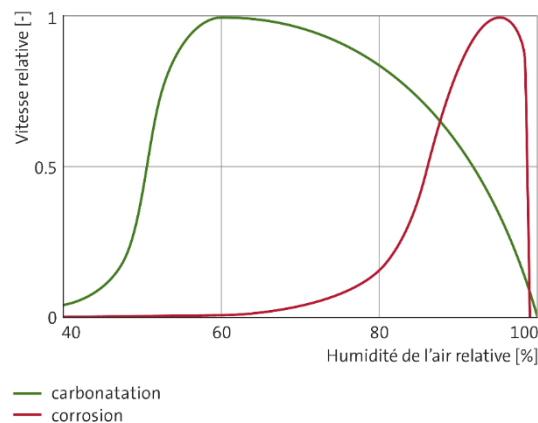


Figure 10: Vitesse relative de la carbonatation et de la corrosion en fonction de l'HR [37]

Outre la diminution de section des armatures, les principales conséquences de la corrosion de l'acier dans le béton dues à la carbonatation sont les fissures et l'effritement de l'enrobage. Ces désordres sont provoqués par les gonflements causés par la formation d'oxydes et d'hydroxyde de fer sur les armatures.

2.2.1 Modélisation

La carbonatation avance progressivement vers l'intérieur de la section. La progression du front de carbonatation correspond, selon le modèle de Tuutti, à la phase d'initiation de la corrosion jusqu'à l'atteinte des armatures. Une section de béton non-fissurée a donc, après un temps, t , une épaisseur x carbonatée. Dans la littérature, une formule est proposée, mettant d et t en relation [10] :

$$x(t) = K * \sqrt{t} \quad 2.2$$

Avec K , le coefficient de carbonatation décrit la vitesse de carbonatation du béton. Le coefficient dépend du béton et de l'environnement. Le béton va être défini selon des critères tels que la teneur en eau, la nature du ciment, la cure etc. Pour le milieu environnant, les deux paramètres principaux sont la teneur en gaz carbonique dans l'atmosphère et la température. Selon les travaux de plusieurs auteurs, ce coefficient varie entre 2 et 10 [mm/an^{0,5}] [11]. Le choix de K est élémentaire pour que le modèle soit fiable. Pour le choisir, deux solutions sont possibles.

La première solution se base sur les différentes études déjà effectuées sur le sujet et consiste à associer les qualités du béton et de l'environnement avec un coefficient correspondant. Il est possible de travailler avec les valeurs affichées sur le Tableau 2 [10]. Ce tableau est facile d'usage mais tient compte uniquement de la densité du béton. Il néglige plusieurs facteurs qui pourraient influencer la vitesse de carbonatation.

La seconde solution est d'effectuer des tests *in situ* pour connaître la profondeur de carbonatation et pour calculer le coefficient avec la distance carbonatée et l'âge de l'ouvrage.

K	Densité du Béton	Densité Ciment
[2 ;5]	Haute	>3,50 kN/m ³
]5 ;8]	Moyenne	>2,50 kN/m ³
>8	Basse	<2,50 kN/m ³

Tableau 2 : Détermination du coefficient de carbonatation

La vitesse de carbonatation sera plus rapide pour un béton fissuré. Cependant, l'équation 2.2 néglige ce facteur qui peut pourtant être déterminant. Vesikari propose dès lors une autre équation comprenant la largeur des fissures dans le béton [12]:

$$x(t) = 50\sqrt{w} \cdot \sqrt[4]{t} \quad 2.3$$

w [mm] est la largeur des fissures. Les fissures dans le béton n'affectent pas la capacité ultime du béton mais, à long terme, elles favorisent la pénétration des agents agressifs.

2.2.2 Fissures

Un article a été publié pour démontrer l'effet des microfissures dans le béton sur la vitesse de carbonatation [13]. Les microfissures, en effet, réduisent le temps que mettent les agents corrosifs à atteindre les armatures. L'étude veut quantifier ce temps de corrosion pour mieux évaluer la durée de vie de l'ouvrage. Comme les microfissures sont difficilement quantifiables, elles sont définies par les contraintes de traction des armatures. Ce travail est basé sur une étude expérimentale menée sur 16 années. L'expérience consiste à maintenir un effort de flexion sur deux poutres de 3 mètres de longueur en couplant les deux poutres en leur centre.

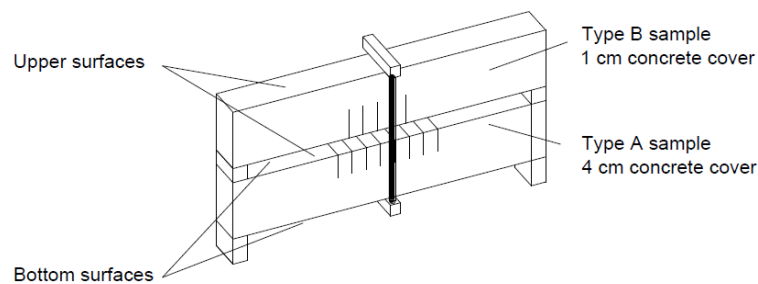


Figure 11: Système de chargement en 3 points [13]

Les profondeurs de carbonatation sont alors mesurées sur les surfaces de tension et sur les fibres neutres. Les résultats prouvent que les zones les plus tendues sont les plus carbonatées. En résulte alors la formule suivante :

$$CD(\sigma_s) = CD_0 \cdot \left(1 + \alpha \cdot \left(\frac{h \cdot \sigma_s}{d} \right)^3 \right) (\alpha = \text{constance}) \quad 2.4$$

- $CD(\sigma_s)$: Profondeur de carbonatation en fonction de l'effort de traction
- CD_0 : Profondeur de carbonatation pour une section non-chargée
- h : Hauteur de la section
- d : Hauteur utile

Ce modèle semble correspondre aux résultats expérimentaux avec $\alpha = 4 \cdot 10^{-8} \text{MPa}$. La figure ci-dessous montre les courbes des deux poutres par rapport aux mesures expérimentales :

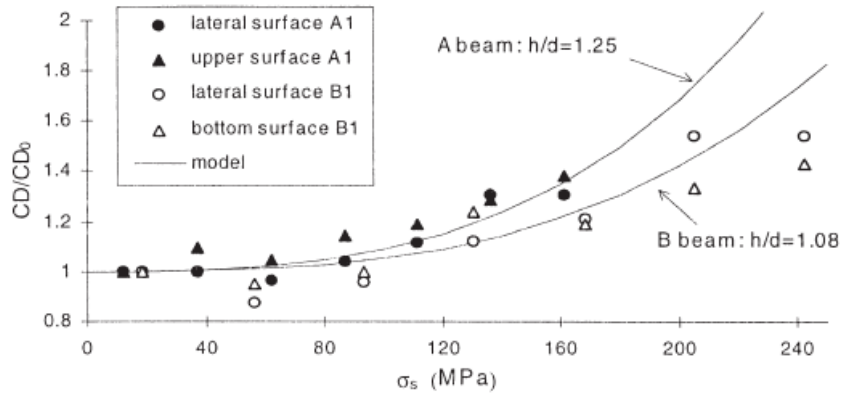


Figure 12: Modèle de l'évolution de la profondeur de carbonatation [13]

2.2.3 Conséquences du réchauffement climatique

Le changement climatique peut, lui aussi, réduire la durabilité des structures en béton armé. En effet, l'air contient de plus en plus de dioxyde de carbone et favorise ainsi la carbonatation. Selon les prédictions, il faut envisager des précipitations de plus en plus fréquentes, facteur qui pourrait influencer la vitesse de corrosion.

Une étude expérimentale a été menée à ce sujet sur des ouvrages finlandais [14]. Cet article donne plusieurs scénarios de prédiction, basés sur les données de « The Finnish Meteorological Institute » (FMI). Trois scénarios sont présentés sur la Figure 13 Figure 13: Prédiction du FMI pour la température moyenne, le taux de CO2 et le changement de précipitation.

Pour déterminer la vitesse de carbonatation par rapport aux scénarios précédents, le modèle de la Fédération International du Béton (fib) a été utilisé [15] :

$$x_C = \sqrt{2 \cdot k_e \cdot k_C \cdot R_{NAC}^e \cdot C_s} \cdot \sqrt{t} \cdot \left(\frac{t_0}{t}\right)^w \quad 2.5$$

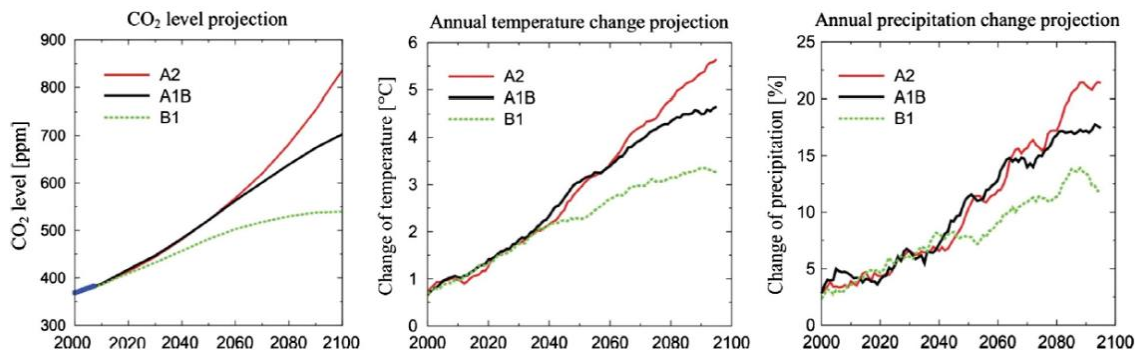


Figure 13: Prédiction du FMI pour la température moyenne, le taux de CO2 et le changement de précipitation [14]

L'application de l'équation a été effectuée sous les conditions de 2030, 2050 et 2100, selon le scénario A2 (le plus critique). L'étude irlandaise conclut que l'apport de CO2 dans l'air est le facteur environnemental qui influence le plus la vitesse de carbonatation. La vitesse de carbonatation augmenterait de 48% en 2100 [14].

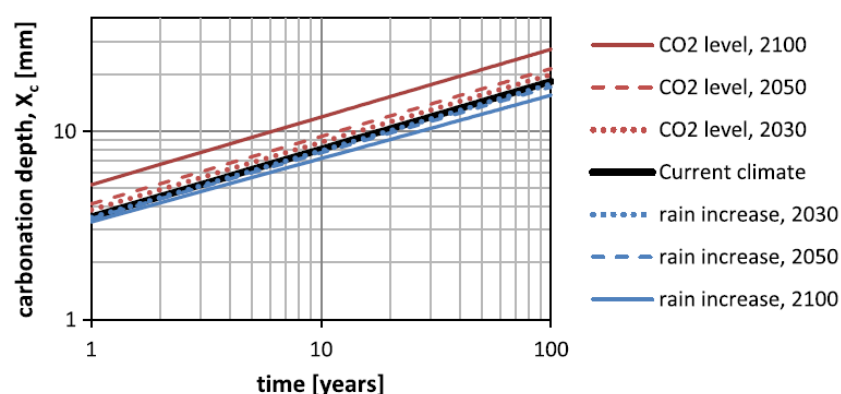


Figure 14: Influence du niveau de CO2 et des précipitations sur la vitesse de carbonatation [14]

L'étude démontre aussi que la phase de propagation est affectée par la pluie et la hausse de température. La corrosion est mesurée avec la règle suivante :

$$x_{corr} = \sum_{i=1}^{t_{prop}} r_i \quad 2.6$$

Où x_{corr} = profondeur de corrosion, r_i = taux de corrosion moyen pendant un an ($1\mu\text{m}/\text{an}$ si les précipitations annuelles $< 480\text{mm}$ et $10\mu\text{m}/\text{an}$ si les précipitations annuelles $\geq 480\text{mm}$). En combinant cette formule aux prédictions de la FMI, l'étude a conclu que le taux de corrosion est accéléré avec le changement climatique, comme le montre le tableau suivant :

	Helsinki-Vantaa airport (coastal area)	Jokioinen observatory (southern Finland)	Jyväskylä-Tikkakoski airport (inland)	Sodankylä observatory (Lapland)
Current climate (1980–2009)	5.7	6.1	8.2	37.5
2030	5.5	5.7	7.8	37.5
2050	5.3	5.5	7.4	37.5
2100	5.3	5.1	6.1	19.7

Tableau 3: Le temps (en année) de corrosion pour atteindre la fissuration [14]

On observe que certaines régions sont beaucoup plus sensibles à la corrosion (surtout celles proches de la côte) mais que ces régions sont moins impactées par le changement climatique. En effet, ce sont les régions les moins impactées initialement par la qui subiront le changement le plus évident (17 ans).

2.2.4 Mesure de la profondeur de carbonatation

Pour mesurer la profondeur du front de carbonatation, il faut, à l'aide d'un burin, enlever des éclats de béton sur une certaine profondeur, éliminer la poussière et ensuite pulvériser avec une solution de phénolphthaléine (indicateur pH). Le béton non carbonaté apparaîtra en rose, alors que le béton carbonaté ne se colorera pas (Figure 15). Pour connaître la profondeur moyenne et extrême de carbonatation d'un ouvrage, il faudra prendre de nombreuses mesures. C'est souvent dans les zones défectueuses que la carbonatation est la plus profonde. En effet, il suffit que les armatures soient corrodées dans une zone limitée pour que toute la structure soit en danger [16].



Figure 15: Fracture de béton aspergé de phénolphtaléine [8]

2.3 Phase d'initiation par les chlorures

Les chlorures sont en tant que tels inoffensifs pour le béton mais la dépassivation des armatures survient lorsqu'une concentration élevée en chlorure atteint le niveau des armatures. Si le seuil critique de chlorure est atteint, des foyers très locaux de corrosion nommés « piqûres de corrosion » peuvent avoir lieu (voir Figure 16). [17]



Figure 16: Piqûres de corrosion dues aux chlorures [17]

Les chlorures peuvent être présents pour diverses raisons : que ce soit, par exemple, le milieu marin ou l'utilisation de sels de déverglaçage sur les chaussées. Mais ils peuvent également être présents dans les composants du béton, par exemple dans les sables et l'eau.

Les ions de chlorures réagissent naturellement avec les composants du ciment. Ces réactions sont saines et ne sont pas liées à la corrosion. En trop grande quantité, les ions libres peuvent atteindre la couche de passivation de l'armature. Dans ce cas, la couche est détruite localement et forme une zone anodique, alors que le reste de l'armature passive est une zone cathodique. De cette manière, une réaction électrochimique apparaît et une piqûre se crée au niveau de la zone anodique [18].

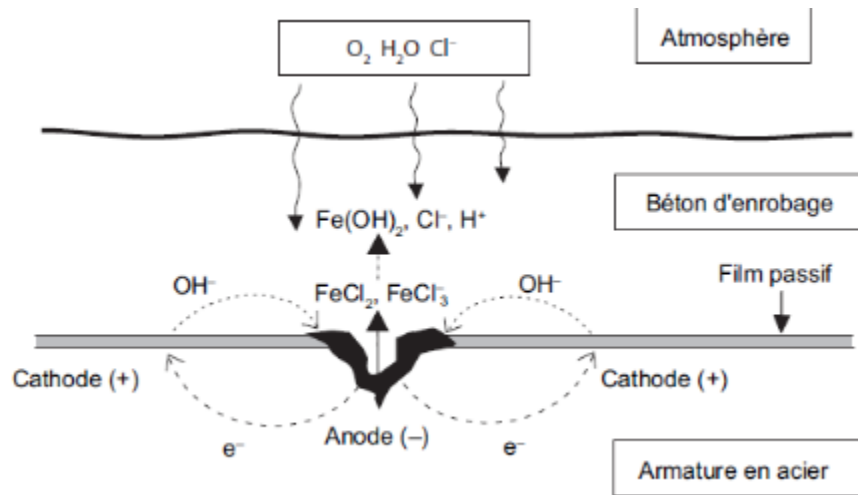


Figure 17: réaction électrochimique de la corrosion par les chlorures [23]

La concentration critique en chlorures, C_{crit} , à la surface des armatures dépend de la concentration à la surface extérieure du béton, de la composition du ciment, de l'enrobage et de l'état de fissuration. Selon la littérature, C_{crit} varie entre 0,4% et 1%.

La corrosion par les chlorures est structurellement dangereuse car une piqûre de corrosion réduit fortement la section d'une armature. Avec la carbonatation, les produits de corrosion s'accumulent sur les armatures et font expulser l'enrobage par gonflement. Pour les chlorures, les produits de corrosion peuvent migrer dans le système poreux du béton et être visibles à la surface (Figure 18).



Figure 18: Piqûres de corrosion

2.3.1 Modélisation du transport des ions

Un modèle propose également des lois pour la diffusion de chlorure dans le béton. Pour un béton non-fissuré, le matériau est considéré comme poreux et avec la propagation des chlorures comme un processus de diffusion, il est possible d'approximer le déplacement des chlorures avec la deuxième loi de Flick [10] :

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left[D(x, t) \cdot \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \right] \quad 2.7$$

- x : Profondeur des chlorures
- t : Temps en année
- $C(x,t)$: Concentration en chlorure en % massique par rapport au ciment
- $D(x,t)$: Coefficient de diffusion (mm^2/sec)

Il est possible de simplifier l'équation 2.7 en considérant C_s , la concentration extérieure temporellement constante, et $D(x,t)$ temporellement et spatialement constant [10].

$$C(x, t) = C_s \left[1 - \operatorname{erf} \left(\frac{x}{2\sqrt{D_{app} \cdot t}} \right) \right] \quad 2.8$$

- erf : Fonction d'erreur de Gauss.
- $D_{app} = \frac{10^{-7}}{10^{-5}} [\text{mm}^2/\text{s}]$: Coefficient de diffusion

Pour une section de béton fissurée, la formule 2.7 est toujours valable pour $w \leq 0,3\text{mm}$ (largeur de fissures), selon l'étude du LMDC Lab de Toulouse. Si le critère n'est pas respecté, il faut remplacer le coefficient de diffusion, D_{app} , par un coefficient moyen tenant compte des fissures, D_{av} . La formule du coefficient de diffusion moyen est la suivante [19] :

$$D_{av} = D_{app} + \frac{w}{s_{m\theta}} D_{crk} \quad 2.9$$

- w : Largeur des fissures
- $s_{m\theta}$: Ecart entre les fissures
- $D_{crk} \cong 5 \cdot 10^{-4} [\text{mm}^2/\text{s}]$ [19]

2.3.2 Effets de la carbonatation et des chlorures simultanément

Précédemment, l'effet séparé de la carbonatation et des chlorures a été analysé. Mais leur effet simultané a été ignoré. Une étude expérimentale de l'impact mutuel de la carbonatation et des chlorures a été effectuée en 2021 [20]. Les expériences ont été établies sur des échantillons de bétons ($100 \times 100 \times 500\text{mm}$) avec des *ratios* ciment-eau (w/c) différents (0,4 ; 0,5 ; 0,6) et des fissures de différentes tailles (0 mm ; 0,05-0,15 mm ; 0,25-0,35mm).

L'étude obtient finalement plusieurs résultats intéressants qui amènent à différentes conclusions. D'abord, la qualité du béton (w/c , porosité, résistance à la compression) affecte la vitesse de carbonatation et la pénétration des chlorures (phase d'initiation). La largeur des fissures influence également la vitesse de la phase d'initiation. Ensuite, il a été prouvé que la pénétration des chlorures est plus rapide lorsque le béton est carbonaté ; c'est dû au fait que la carbonatation libère des ions de chlorures présents dans le ciment. Enfin, il a été conclu que le potentiel de corrosion est plus élevé lorsque les échantillons carbonatés sont exposés à des chlorures (phase de propagation).

2.4 Phase de propagation

Dans le modèle de Tuutti, la corrosion des armatures correspond à la phase de propagation. Durant cette phase, le béton va perdre sa résistance pour trois raisons. La première est la réduction de la section de l'acier diminuant ainsi la capacité portante des armatures. La seconde raison est la perte de l'adhérence entre les deux matériaux. La troisième raison est l'endommagement du béton par les produits de corrosion (fissures, éclatement de l'enrobage).

2.4.1 Modèle de corrosion pour des armatures standard

La dégradation propre des armatures est la réduction de section de celles-ci. Un modèle a été proposé par Sarja and Veskari [21]. Celui-ci établit une relation entre le diamètre d'armature et le temps.

$$d(t) = D_0 - n \cdot d'(t) \quad 2.10$$

Avec D_0 , le diamètre initial et n , le facteur prenant en compte la possibilité d'une attaque venant des deux côtés, ($n=(1,2)$). $d'(t)$ est la profondeur de corrosion suivant la loi de Faraday.

$$d'(t) = 0,0116 \cdot i_{corr} \cdot (t - t_0) \quad 2.11$$

i_{corr} est le courant de corrosion surfacique, t est le temps totale et t_0 est le moment où la phase de propagation commence. 0,0116 est le facteur de conversion de $\mu\text{A}/\text{cm}^2$ à $\mu\text{m}/\text{an}$. Finalement, la section de l'armature réduite par la corrosion est la suivante :

$$A_s = \begin{cases} \frac{N_s \cdot \pi \cdot D_0^2}{4} & \text{if } t \leq t_0 \\ \frac{N_s \cdot \pi \cdot [D_0 - n \cdot d'(t)]^2}{4} & \text{if } t > t_0 \end{cases}$$

Il est possible de déterminer la densité de courant, i_{corr} , grâce à la résistance de polarisation linéaire (LPR). Cette technique interprète les variations de courant sur base d'une augmentation de potentiel. Le graphe mettant en relation i_{corr} et E_{corr} s'avère être une courbe quasi-linéaire dont la pente est la résistance de polarisation, R_p . Stern et Geary définissent l'équation suivante [22] :

$$i_{corr} = B * \frac{1}{R_p} \quad 2.12$$

Pour l'acier dans le béton, B vaut 52mV à l'état passif et 26mV à l'état actif. La valeur varie donc entre les deux le long d'une armature mais en général une valeur de 26 est utilisée [23].

2.4.2 Modèle de corrosion pour des armatures précontraintes

Pour la précontrainte, c'est la corrosion par les chlorures qui comporte le plus de risques car elle peut provoquer une rupture brutale et inattendue des armatures. En effet, les chlorures provoquent des piqûres de corrosion locales qui menacent la résistance globale.

Val et al. définissent, $P(t)$, la profondeur de la piqûre de corrosion [24]:

$$p(t) = d'(t) * R \quad 2.13$$

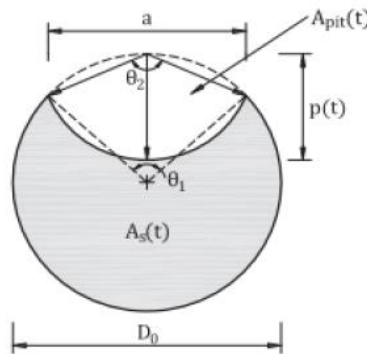


Figure 19: Dimension d'une corrosion locale sur de l'acier de précontrainte [10]

R correspond au rapport entre la profondeur de corrosion moyenne, p_{moy} , pour une corrosion généralisée et la profondeur maximale, p_{max} pour une corrosion par piqûre.

$$R = \frac{p_{max}}{p_{moy}} \quad 2.14$$

Selon les différentes sources, le *ratio* de piqûres de corrosion, R , varie selon des intervalles différents. Selon Gonzalez et al [25], R varie entre 4 et 8. Pour Darmawan et Stewart [26], le *ratio* se situe dans l'intervalle [8 ;11] et pour Tutti [3], $R = [4 ;10]$. Ensuite, la forme creusée par la corrosion peut être très variable mais le modèle de Val et al. permet de simplifier cette géométrie en supposant une section hémisphérique. La section résistante revient alors à calculer :

$$A_s = A_0 - A_{pit} = \frac{\pi \cdot D_0^2}{4} - A_{pit}(t) \quad 2.15$$

- A_0 : Section initiale
- $A_{pit}(t)$: Surface atteinte par la corrosion (voir Figure 19)

2.5 Conclusion

Ce chapitre a pour but tout d'abord de sensibiliser le lecteur aux différents types de dégradation naturelle du béton armé et ensuite de les expliquer, à travers différents modèles présents dans la littérature.

Quelques exemples de dégradations ont donc été résumés pour illustrer au mieux les dégâts et les conséquences qu'une mauvaise conception peut engendrer. Les ponts présentés sont tous situés en Lombardie mais ces problèmes sont généraux pour les ponts de cette époque. L'étude montre qu'il est important d'assurer la maintenance des ponts en béton armé et de respecter les normes afin d'assurer une durée de vie optimale des structures. Il faut anticiper les dégradations lors de la construction afin de prévenir les dégâts, en prenant certaines précautions. Par exemple, la galvanisation des armatures permet d'augmenter la résistance à la corrosion. Ou encore, l'augmentation de la couche d'enrobage permet de retarder l'initiation de la corrosion ou enfin, le choix d'un béton plus dense permet de ralentir le processus d'initiation des agents agressifs.

Le chapitre met également en évidence l'importance des détails techniques pour une évacuation des eaux efficace. Chaque moyen de protection a un prix mais il est toutefois important de mettre un budget dans la prévention pour éviter le coût de réparations ultérieures. La thèse a pour objectif d'obtenir un modèle qui anticipe les dégradations et permet de connaître la durée de vie d'une structure face aux dégradations naturelles. Grâce ce modèle, les constructeurs pourraient être sensibilisés au long terme des structures.

Ensuite, la dégradation par la carbonatation et par les chlorures a été expliqué et des modèles ont été proposés par la suite. Ces modèles pourront être intégrés dans le programme final pour représenter la dégradation dans le modèle recherché.

3 ANALYSE SECTIONNELLE

L'analyse sectionnelle a pour objectif de déterminer le changement d'axe neutre et d'inertie de la section de béton dû aux contraintes subies (N , M_y , M_x). En effet, une section sous contrainte va se déformer et les caractéristiques géométriques vont changer. Pour y arriver, le modèle de Luca Sgambi est utilisé [27]. Ce modèle fonctionne par la transformation paramétrique de la section de béton en bande. La section est subdivisée en plusieurs « bandes » dont les caractéristiques mécaniques seront intégrées par une quadrature 3x3 de Gauss-Legendre. L'avantage de cette méthode est que toutes les sections peuvent être analysées tant que chaque bord peut être discrétisé par des lignes droites. En effet, par cette méthode, les sections asymétriques peuvent être également analysées. Ce modèle permet l'analyse non-linéaire car il modifie la géométrie et les caractéristiques mécaniques de la section. Les nouvelles données seront intégrées dans l'analyse structurelle qui, elle-même, fournira de nouveaux efforts internes dans l'analyse sectionnelle [27].

Les résultats fournis par le code :

- Etat de déformation (ε_0 , χ_x , χ_y) présent dans la section soumise à des actions extérieures (N, M_y, M_x)
- Courbe de moment de courbure selon x et y

L'analyse linéaire travaille dans une structure plane selon deux dimensions, alors que l'analyse sectionnelle est en trois dimensions. Le code d'analyse sectionnelle de Luca Sgambi a donc été modifié pour fonctionner en deux dimensions.

3.1 Définition des conventions des variables statiques et cinématiques

Une poutre de longueur unitaire avec une section générique est considérée. L'origine du système de référence est placée au centre de gravité géométrique de la section et est composée de trois droites dans chaque direction (x, y, z). L'hypothèse de planéité est supposé valable pour l'ensemble du chapitre.

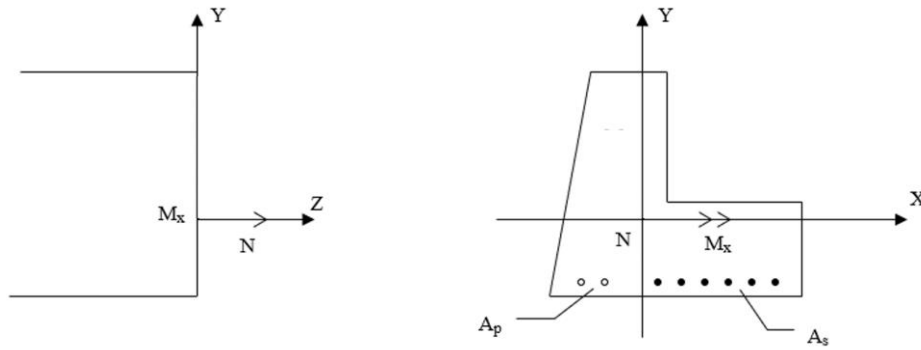


Figure 20: Géométrie pour l'analyse sectionnelle

Un système de force agissant sur l'élément comprend une force axiale N et une action de flexion selon x, M_x . Notre modèle suppose un système de force en deux dimensions supposant les moments de flexion selon l'axe y nul.

- N est positif pour un effort traction
- M_x est positif si l'effort provoque de la traction dans les fibres supérieures

Si l'hypothèse de planéité des sections est valable, la déformée sera décrite par les deux variables (ε_0, χ_x) , supposées positives suivant les mêmes critères que leur contrainte respective. Les variables de déformations et d'efforts internes sont écrits sous forme matricielle à l'aide de deux vecteurs :

$$\bar{F} = \begin{bmatrix} N \\ M_x \end{bmatrix} \quad \bar{q} = \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi_x \end{bmatrix}$$

3.2 Approche matricielle

Pour que le programme soit fonctionnel, il est impératif de poser le problème sous forme de matrice pour que chaque configuration soit intégrable dans le modèle. Il faut donc que l'approche matricielle soit la plus générale possible. L'équation suivante décrit la déformation sectionnelle en fonction de x et y :

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_0 + y \cdot \chi_x \quad 3.1$$

Sous la forme matricielle :

$$\varepsilon(y) = [1 \quad y] \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \chi_x \end{bmatrix} = L(y) \cdot \bar{q} \quad 3.2$$

Grâce au vecteur des déplacements, il est possible de trouver le champ de contraintes par la loi de Hook. Le module d'élasticité sécant, E_s , sera utilisé comme lien pour trouver le champ de contraintes.

$$\sigma = E_s(\varepsilon) \cdot \varepsilon \quad 3.3$$

La fonction, $E_s(\varepsilon)$, liant le module sécant à la déformation doit être différente selon le matériau considéré (armature, câble de précontrainte ou béton). La fonction est donc non-linéaire par sa relation avec les déformations.

Les équations de résolution sont réalisées selon le principe des travaux virtuels, en considérant le travail interne et externe produit par les grandeurs statiques d'un système (réel) A équilibré par les grandeurs cinématiques respectives d'un système conforme (virtuel) B, et imposant l'équation d'équilibre :

$$\delta W_i = \delta W_e \quad 3.4$$

Avec :

$$\delta W_e = N \cdot \delta \varepsilon_0 + M_x \cdot \delta \chi_x = \delta \underline{q}^T \cdot \underline{F} \quad 3.5$$

$$\delta W_i = \int_A \sigma \cdot \delta \varepsilon_0 \cdot dA = \int_A \delta \underline{q}^T \cdot \underline{L}^T \cdot \sigma \cdot dA = \int_A \underline{L}^T \cdot \sigma \cdot dA \quad 3.6$$

Par l'équation d'équilibre (3.4), l'équation suivante est obtenue :

$$\int_A \underline{L}^T \cdot \sigma \cdot dA = \underline{F} \quad 3.7$$

Par l'équation 3.2 et 3.3 :

$$\sigma = E_s(\varepsilon) \cdot \varepsilon = E_s(\varepsilon(y)) \cdot \underline{L} \cdot \underline{q} \quad 3.8$$

En remplaçant dans 3.7,

$$\int_A \underline{L}^T \cdot E_s(\varepsilon(y)) \cdot \underline{L} \cdot dA \cdot \underline{q} = \underline{F} \quad 3.9$$

La matrice de rigidité sécante de la section, $\underline{\underline{K}}_{sec}(\underline{q})$, correspond à l'intégrale de l'équation précédente,

$$\underline{\underline{K}}_{sec}(\underline{q}) \cdot \underline{q} = \underline{F} \quad 3.10$$

La section étant composée de béton, de barres d'armatures et de câbles de précontrainte, la linéarité de l'intégrale permet d'effectuer la somme suivante pour trouver la rigidité sécante équivalente à la section :

$$\underline{\underline{K}}_{sec}(\underline{q}) = \underline{\underline{K}}_{sec,bet}(\underline{q}) + \underline{\underline{K}}_{sec,bar}(\underline{q}) + \underline{\underline{K}}_{sec,cab}(\underline{q}) \quad 3.11$$

Avec :

$$\underline{\underline{K}}_{sec,bet}(\underline{q}) = \begin{bmatrix} \int_{A_{bet}} E_s(y, \underline{q}) \cdot dA_{bet} & - \int_{A_{bet}} E_s(y, \underline{q}) \cdot y \cdot dA_{bet} \\ \int_{A_{bet}} E_s(y, \underline{q}) \cdot y \cdot dA_{bet} & \int_{A_{bet}} E_s(y, \underline{q}) \cdot y^2 \cdot dA_{bet} \end{bmatrix} \quad 3.12$$

Si le matériau suivait une loi constitutive linéaire, le système perdrait sa non-linéarité et la matrice de rigidité prendrait une forme plus classique :

$$\underline{\underline{K}}_{bet} = \begin{bmatrix} (E \cdot A)_{bet} & (E \cdot S_x)_{bet} \\ (E \cdot S_x)_{bet} & (E \cdot I_x)_{bet} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (E \cdot A)_{bet} & 0 \\ 0 & (E \cdot I_x)_{bet} \end{bmatrix} \quad 3.13$$

Les moments de premier ordre sont en effet nuls car l'origine du système de référence a été placée dans le centre de gravité géométrique de la section de béton.

Pour les matrices $\underline{\underline{K}}_{sec,bar}(\underline{q})$ et $\underline{\underline{K}}_{sec,cab}(\underline{q})$, elles seront similaires à $\underline{\underline{K}}_{sec,bet}(\underline{q})$ mais les intégrales pourront être remplacées par des sommes considérant les armatures comme des points uniques. Il faut tout de même accorder une attention particulière aux câbles de précontrainte qui subissent une déformation initiale lors de la mise en tension. La déformation initiale est donc à prendre en compte dans l'évaluation de la déformée des câbles de précontrainte.

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_0 + y \cdot \chi_x + \varepsilon_{init} \quad 3.14$$

Il faut également ajouter les forces de précontrainte dans le vecteur de forces externes :

$$\underline{F} = \begin{bmatrix} N \\ M_x \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} - \sum_{np} A_{cab} \cdot E_{sec,cab}(\varepsilon_p) \cdot \varepsilon_{init} \\ - \sum_{np} A_{cab} \cdot E_{sec,cab}(\varepsilon_p) \cdot \varepsilon_{init} \cdot y_{cab} \end{bmatrix} \quad 3.15$$

En intégrant, dans les équations 3.7 et 3.8, l'équation 3.10 est transformée :

$$\underline{\underline{K}}_{sec,cab}(\underline{q}, \varepsilon_{init}) \cdot \underline{q} = \underline{F} - \underline{L}^T \cdot E_{sec}(q, \varepsilon_{init}) \cdot \varepsilon_{init} \cdot A_p \quad 3.16$$

L'équation de résolution prenant le déplacement initial des armatures précontraintes devient alors :

$$\left(\underline{\underline{K}}_{sec,bet}(\underline{q}) + \underline{\underline{K}}_{sec,bar}(\underline{q}) + \underline{\underline{K}}_{sec,cab}(\underline{q}, \varepsilon_{init}) \right) \cdot \underline{q} = \underline{F} - \underline{L}^T \cdot E_{sec}(q, \varepsilon_{init}) \cdot \varepsilon_{init} \cdot A_p \quad 3.17$$

3.2.1 Création de la matrice de rigidité

La formation de la matrice de rigidité des armatures et des câbles est triviale car il s'agit de la somme de leurs rigidités concentrées sur des points. L'intégration des caractéristiques mécaniques de la section en béton est plus complexe. Effectivement, le modèle divise d'abord la section en bandes.

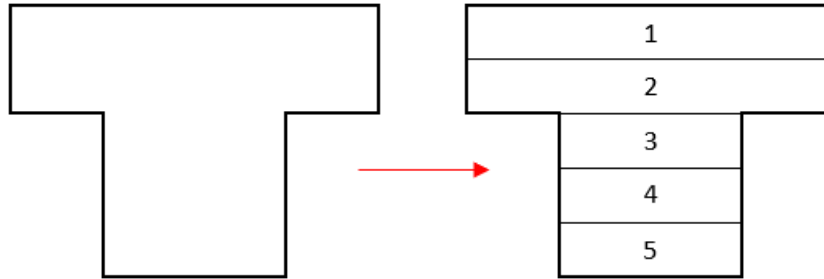


Figure 21: Division de la section en bandes (subsections)

Pour chaque subsection, une quadrature 3x3 Gauss-Legendre est implémentée, insérant 9 points sur une bande. De cette manière, les intégrales de la matrice 3.13 peuvent être remplacées par les sommes des valeurs des composants de l'intégrale aux points de Gauss-Legendre multipliés par des poids correspondants. L'intégration de Gauss-Legendre se réfère à un carré normalisé avec ses 9 points distribués homogènement.

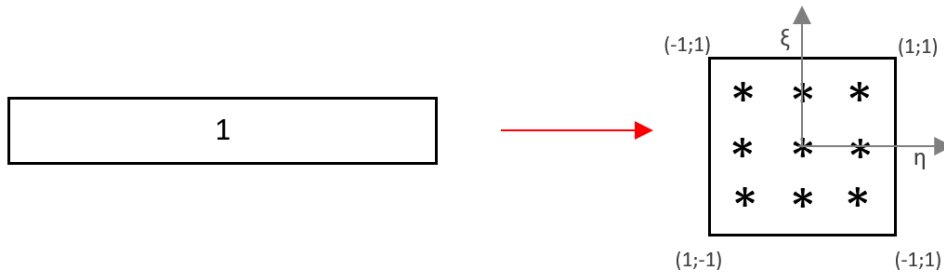


Figure 22: Intégration de Gauss-Legendre

Les coordonnées des points d'intégration sont :

- $\theta^{(j)} = \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \right)$
- $\theta^{(i)} = (0,0)$
- $\theta^{(k)} = \left(\pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}}, 0 \right), \left(0, \pm \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}} \right)$

Dans le système normalisé de Gauss, l'intégration d'une fonction $f(\theta)$ sur la section devient :

$$\int_{c_2} f(\theta) \cdot d\eta \cdot d\xi = \frac{1}{81} \cdot \left[25 \cdot \sum_j f(\theta^{(j)}) + 40 \cdot \sum_k f(\theta^{(k)}) + 64 \cdot \sum_i f(\theta^{(i)}) \right] \quad 3.18$$

$$\underline{\underline{K}}_{bet} = \begin{bmatrix} (E \cdot A)_{bet} & (E \cdot S_x)_{bet} \\ (E \cdot S_x)_{bet} & (E \cdot I_x)_{bet} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (E \cdot A)_{bet} & 0 \\ 0 & (E \cdot I_x)_{bet} \end{bmatrix} \quad 3.13$$

Le point du centre, $\theta^{(i)}$, a logiquement un poids plus important que ceux des bords, $\theta^{(j)}$, et ceux des coins, $\theta^{(k)}$.

Il faut à présent trouver la formule correspondante dans le système initial. Cela est possible grâce à la matrice de transformation Jacobienne. En effet, en multipliant chaque fonction, $f(\theta)$, par son jacobien correspondant, l'équation devient valable dans le système de référence initial :

$$\int_{A_{bet}} f(x) \cdot dA_{bet} = \quad 3.19$$

$$\frac{1}{81} \cdot \left[25 \cdot \sum_j f(\theta^{(j)}) \cdot \det(J(\theta^{(j)})) + 40 \cdot \sum_k f(\theta^{(k)}) \cdot \det(J(\theta^{(k)})) + 64 \cdot \sum_i f(\theta^{(i)}) \cdot \det(J(\theta^{(i)})) \right]$$

Avec :

$$\det(J(\eta, \xi)) = \frac{1}{8} [(x_{13} \cdot y_{24} - x_{24} \cdot y_{13}) + (x_{34} \cdot y_{12} - x_{12} \cdot y_{34}) \cdot \xi + (x_{23} \cdot y_{14} - x_{44} \cdot y_{23}) \cdot \eta]$$

Dans cette équation x_{ij} correspond à $x_j - x_i$ et y_{ij} à $y_j - y_i$. Le Jacobien doit être positif et différent de zéro pour que l'équation ait un sens physique.

A titre d'exemple et pour une meilleure compréhension, voici l'équation discrétisée du terme (2,2) de la matrice de rigidité (3.12) :

$$\begin{aligned} \int_{A_{bet}} f(x) \cdot dA_{bet} &= \int_{A_{bet}} E_{bet}(y, q) \cdot y^2 \cdot dA_{bet} = \\ \frac{1}{81} \cdot 25 \cdot \sum_j E_{bet}(y, q) \cdot y_j^2 \cdot \det(J(\theta^{(j)})) &+ 40 \cdot \sum_k E_{bet}(y, q) \cdot y_k^2 \cdot \det(J(\theta^{(k)})) \quad 3.20 \\ + 64 \cdot \sum_i E_{bet}(y, q) \cdot y_i^2 \cdot \det(J(\theta^{(i)})) \end{aligned}$$

3.2.2 Lois constitutives

Plusieurs lois constitutives sont disponibles pour le béton. En fonction des déplacements subis, un module de Young sera attribué pour chaque point de Gauss. Dans ce travail, deux lois seront présentées, la parabole rectangle et la courbe de Saenz.

Cependant, il faut d'abord appréhender le comportement réel du béton pour pouvoir ensuite le comparer avec les deux lois utilisées.

En compression, le béton a une bonne résistance et se comporte de manière ductile. La première phase est non-linéaire et se produit jusqu'à une contrainte maximale, F_{c0} , pour une déformation, ε_{c0} . Ensuite, il y a un phénomène de striction où les déformations se poursuivent jusqu'à la rupture en ε_{cu} . En traction, la résistance est faible et sa rupture est fragile.

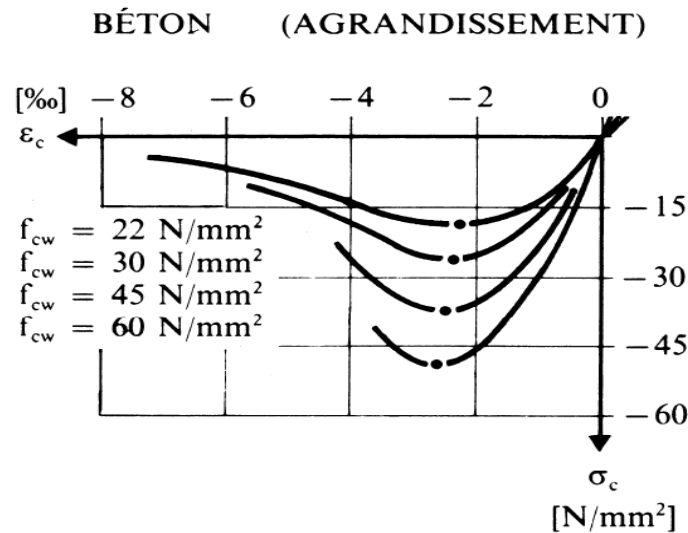
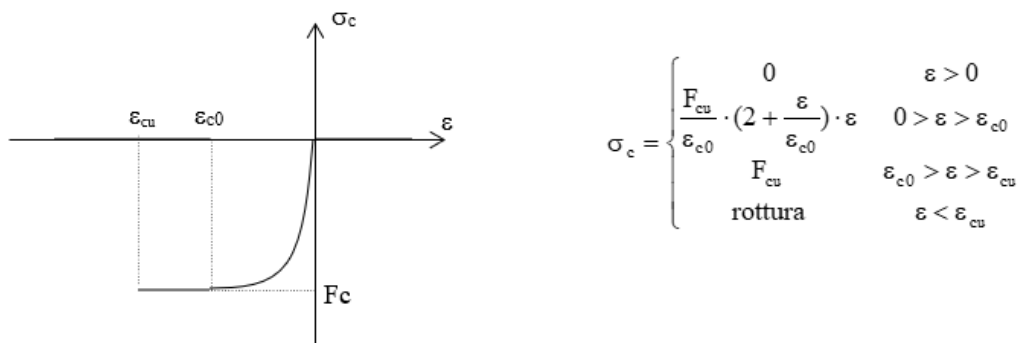


Figure 23: Comportement du béton [29]

1) Parabole rectangle



3.21: Parabole rectangle

Ce modèle respecte la non-linéarité de la première phase jusqu'à la contrainte maximale. Cependant, une fois la résistance ultime obtenue, la contrainte reste constante et s'écarte du comportement réel. Le comportement à la traction est ignoré dans ce modèle.

Les données à introduire dans le modèle sont : ε_{cu} , ε_{c0} , F_c

2) La courbe de Saenz

La courbe de Saenz est plus conforme à la réalité car elle modélise également la traction et la striction. Il faut cependant introduire plus de données pour pouvoir appliquer ce modèle tel que les rapports k_c et k_t .

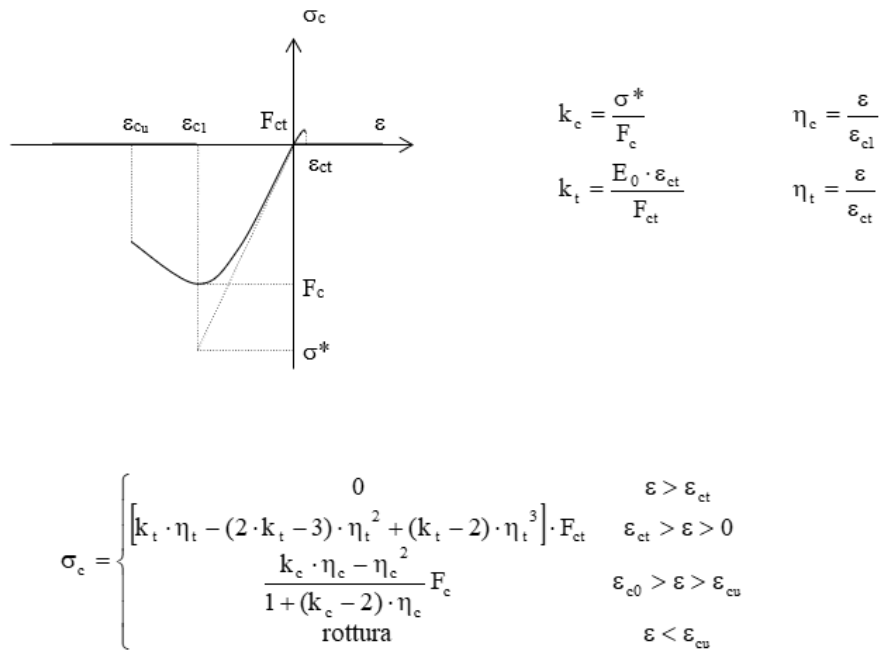


Figure 24: Courbe de Saenz

3) Loi bilinéaire de l'acier

L'acier se déforme, quant à lui, en compression et en traction de la même manière. Le graphique suivant représente le comportement contrainte-déformation obtenu expérimentalement. L'acier a un comportement élasto-plastique et une résistance globale beaucoup plus élevés que le béton.

Pour la modélisation de l'acier, la phase élastique et la phase plastique sont considérées comme linéaire. Une loi bilinéaire est donc adoptée :

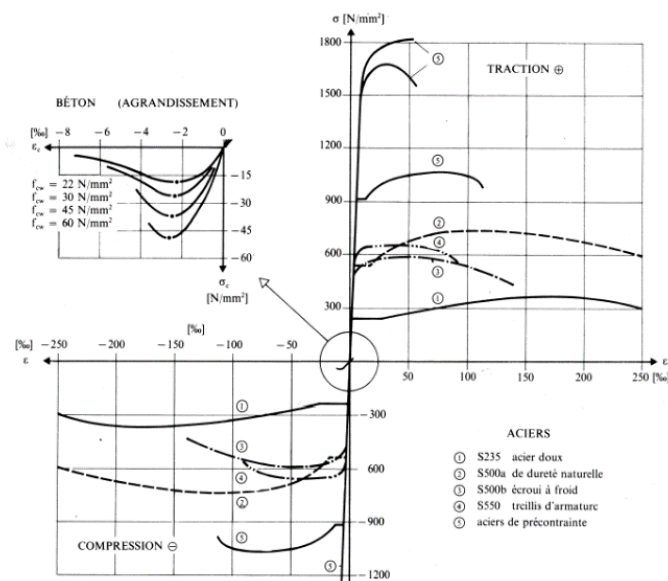


Figure 25 : Comportement de l'acier [29]

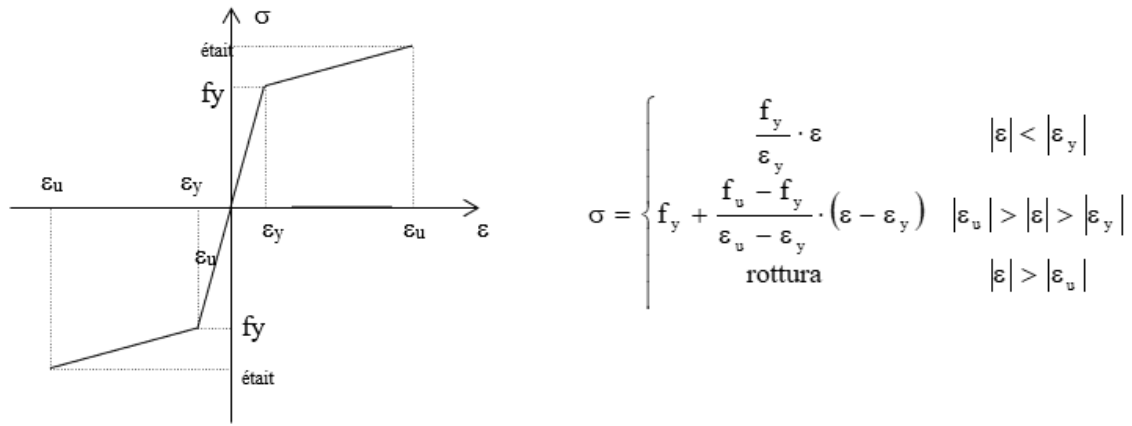


Figure 26: Loi bilinéaire

La limite de ce modèle réside au niveau de la phase plastique car elle est linéaire contrairement à la réalité.

3.3 Résolution du système

La résolution du système de l'analyse sectionnelle est non-linéaire car les éléments de l'équation sont dépendants de la résolution du système. En effet, la matrice de rigidité dépend des déformations, comme vu précédemment. L'équation de résolution a donc la forme suivante :

$$\underline{\underline{K}}_{sec}(\underline{q}) \cdot \underline{q} = \underline{F} \quad 3.22$$

Pour obtenir une solution générale, une procédure itérative est appliquée. Il faut donc discrétiser la résolution en intervalle de temps, $t^{(i)}$. La solution de $\underline{q}$ en $t^{(i+1)}$ est trouvée grâce à la matrice de rigidité calculée en $t^{(i)}$, $\underline{\underline{K}}_{sec}(\underline{q}^{(i)})$. Un nombre d'itération est imposé et la solution est obtenue lorsque ce nombre d'itérations est effectué. L'équation généralisée de la solution itérative de $\underline{q}$ est la suivante :

$$\underline{q}^{(i)} = [\underline{\underline{K}}_{sec}(\underline{q}^{(i-1)})]^{-1} \cdot \underline{F} \quad 3.23$$

Pour la solution initiale, $\underline{q}^{(1)}$, la matrice de rigidité est calculée avec un vecteur $\underline{q}^{(0)}$ nul.

Grâce à cette méthode, il est possible de résoudre un problème non-linéaire avec une succession itérative d'équations linéaires dont la principale variable est la solution du système précédent, $\underline{q}^{(i-1)}$. Les matrices de rigidité obtenues sont appelées matrices de rigidité sécantes car ses valeurs sont obtenues par la méthode de convergence sécante, représentée graphiquement sur la figure suivante :

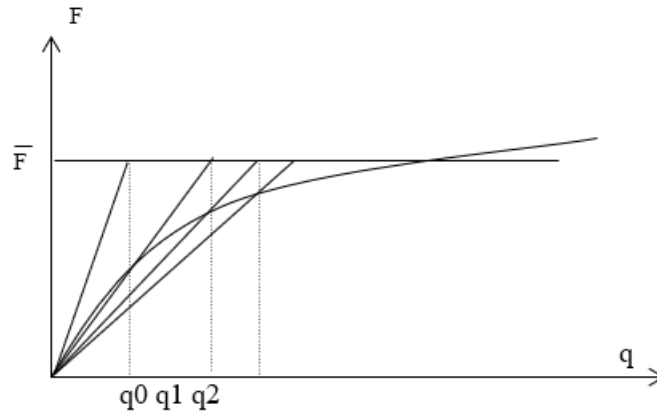


Figure 27: Méthode de convergence sécante

Avec cette méthode, il est possible de trouver une convergence avant le nombre d'itération imposé. En effet, le module d'élasticité, $E(q)$, utilisé dans la matrice de rigidité va être, à chaque itération, modifié selon la nouvelle déformation. Cette méthode est de premier ordre et n'est donc pas la plus rapide pour obtenir la convergence. Sa facilité d'intégration et ses caractéristiques à travailler avec des valeurs seulement positives l'avantage pour le modèle.

Pour obtenir la convergence du système, il faut comparer une valeur adimensionnelle, illustrant la différence entre deux itérations, avec une valeur de convergence choisie sur base de la précision du modèle. Voici les formules utilisées pour vérifier s'il y a convergence après une itération :

$$e_d = \frac{\|\underline{q}^{i+1} - \underline{q}^i\|}{\|\underline{q}^{i+1}\|} \leq \delta \text{ (convergence sur les déformations)} \quad 3.24$$

$$e_F = \frac{\|\underline{F}^{i+1} - \underline{R}^i\|}{\|\underline{F}^{i+1}\|} \leq \delta \text{ (convergence sur les efforts)} \quad 3.25$$

Les deux formules doivent être respectées pour qu'il y ait une convergence. Un delta de 0.01 est posé.

3.4 Structure du programme

Le schéma ci-dessous permet de résumer la structure du programme. La première fonction, « DATA INPUT », intègre les informations de la section dans le programme. Ensuite, la fonction, SOLVE, va faire appel à plusieurs sous-routines pour créer la matrice de rigidité. Une fois la matrice de rigidité obtenue, le vecteur des déformations est calculé et intégré dans la résolution de la matrice de rigidité de l'itération $i+1$. La boucle sera répétée jusqu'à la convergence. A ce moment, les résultats peuvent être affichés.

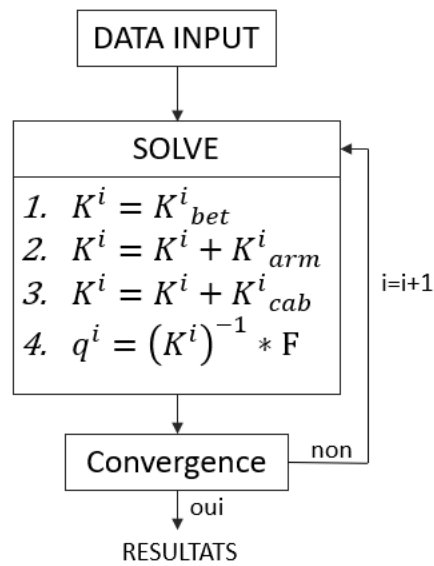


Figure 28: Schéma de l'analyse sectionnelle

3.4.1 Fonction DATA INPUT

Cette fonction est appelée en première et qu'une seule fois car elle enregistre toutes les données nécessaires pour le calcul. Un document texte est nécessaire pour l'intégration des données, voici un exemple :

```

SECTION
2 0 4
ARMATURE
640. 0. 160.
640. 0. -160.
1.0 0.002 0.01 375.0 375.0 0. 0. 0. 0.
BETON
-200. 100.
200. 100.
200. 200.
-200. 200.
-200. 0.
200. 0.
200. 100.
-200. 100.
-200. -100.
200. -100.
200. 0.
-200. 0.
-200. -200.
200. -200.
200. -100.
-200. -100.
2.0 -15.0 -0.002 -0.0035 0. 0. 0. 0. 0.
ACTION EXTERNE (N,MX,NSTEP)
-1680000. 70000000. 3

```

Figure 29: Fichier INPUT d'une section

Le code va lire le fichier de haut en bas. Les trois premières données sont le nombre d'armature (NA), le nombre de câble de précontrainte (NC) et le nombre de subdivisions du béton (NR). Ensuite, ce sont les informations sur les armatures qui sont intégrées dans le programme, respectivement la surface d'armatures, CARAF(NA,1), sa position en x et y, CARAF(NA,2) et CARAF(NA,3). Une fois les NA informations sur les armatures lues, une succession de chiffres sont encodés : le premier (ACCMAT(1)), indique la loi suivie pour le comportement de l'acier (1=loi bilinéaire), ensuite les données nécessaires à la loi sont indiquées : ε_y :ACCMAT(2), ε_u :ACCMAT(3), f_y :ACCMAT(4), f_u : ACCMAT(3). Normalement, les informations sur les câbles précontraints sont intégrées de la même manière que les armatures. Dans l'exemple, il n'y a pas de câbles. Le programme lira donc directement la section suivante concernant le béton.

Les coordonnées des subsections du béton sont ensuite intégrées. Deux colonnes représentant respectivement les coordonnées X et Y sont encodées. Chaque ligne représente ainsi un point. Une subsection est représentée en 4 coordonnées en x et y, CARCLS(NR,2,4). Lorsque toute les subsections sont enregistrées comme pour l'acier, les données sur la loi suivie par le béton sont indiquées. Le premier chiffre indique la loi suivie (1 : Courbe de Saenz, 2 : Parabole rectangle). Ensuite les données sont :

Courbe de Saenz : $\varepsilon_{c1}, \varepsilon_u, \varepsilon_t, F_c, F_t, k_c, k_t$

Parabole rectangle : $F_c, \varepsilon_{c1}, \varepsilon_u$

3.4.2 Fonction SOLVE

La fonction SOLVE crée, à l'aide d'autres sous-routines, la matrice de rigidité et ensuite résout le système pour obtenir les déformations de la section.

La fonction SOLVE commence par une boucle qui se répète jusqu'à la convergence des déformations. La première fonction appelée dans la boucle est STIFFCONCRETE. Comme son nom l'indique, elle construit la matrice de rigidité du béton. Pour y parvenir, la fonction fait elle-même appel pour chaque subsection de béton à plusieurs sous-fonctions : JACOB, GAUSSCOORD et CONCRETE. La fonction JACOB détermine les déterminants (eq 3.18). GAUSSCOORD détermine les coordonnées des points de gauss de chaque subsection et CONCRETE retourne le module d'élasticité sécant conforme à sa loi constitutive et dépendant des déformations subies. Une fois les trois sous-fonctions appelées, on crée la matrice de rigidité (VK(2,2)) par l'équation 3.18, qui suivant la boucle des subsections, se complètera progressivement.

Ensuite, SOLVE additionnera la rigidité des armatures aux éléments de la matrice de rigidité. Pour ce faire, une boucle est créée se répétant selon le nombre d'armatures présentes dans la section. La fonction STEEL est appelée et retourne le module d'élasticité sécant, E_s , de l'acier, selon la loi constitutive choisie et les déformations subies. On additionne ensuite les termes de la matrice de rigidité avec la rigidité de l'acier correspondante :

- $VK(1,1) = VK(1,1) + E_s \cdot Area$
- $VK(2,1) = VK(2,1) + E_s \cdot Area \cdot y_{armature} = VK(1,2)$
- $VK(2,2) = VK(2,2) + E_s \cdot Area \cdot y_{armature}^2$

Quand la boucle sur les armatures passives est achevée, une boucle semblable sur les armatures de précontrainte est enclenchée. S'il y a des armatures de précontrainte, la fonction PRESTRESS est appelée et renvoie leur module d'élasticité. Le module permet de calculer l'effort normal et le moment équivalent dû à la précontrainte. Ensuite, la matrice de rigidité est modifiée de manière similaire aux armatures passives.

La matrice de rigidité finalement complétée, il est possible de procéder à la résolution finale. S'il y a des armatures de précontrainte, les efforts internes sont modifiés en leur soustrayant les valeurs obtenues dans la boucle précédente. On trouve alors les nouvelles déformations de la section en multipliant la matrice des efforts internes avec l'inverse de la matrice de rigidité :

$$\underline{VA} = \underline{VK}^{-1} \cdot \underline{VL} \quad 3.26$$

Avec VA et VL, les vecteurs de déformations et d'efforts internes. La fonction déterminante, s'il y a convergence, est ensuite appelée. Celle-ci fait la comparaison entre les déformations et les efforts calculés à l'itération précédente et l'itération actuelle. L'équation utilisée a été définie précédemment (équation 3.23 et 3.24). Dans le cas d'une convergence, la fonction SOLVE se termine et affiche les résultats.

3.4.3 Résultats

Voici les résultats affichés par le programme :

```
SECTIONAL INFORMATION

Number of rebar      : 2
Number de cable      : 0
Number de subsection : 4

PASSIVE REBAR INFORMATION

NUM. ARM.   AREA.   X ARM   Y ARM
1           0.640000E-03  0.000000E+00  0.160000E+00
2           0.640000E-03  0.000000E+00 -0.160000E+00

CONCRETE INFORMATION

NUM.   X1   Y1   X2   Y2   X3   Y3   X4   Y4
1  -0.20E+00  0.10E+00  0.20E+00  0.10E+00  0.20E+00  0.20E+00 -0.20E+00  0.20E+00
2  -0.20E+00  0.00E+00  0.20E+00  0.00E+00  0.20E+00  0.10E+00 -0.20E+00  0.10E+00
3  -0.20E+00 -0.10E+00  0.20E+00 -0.10E+00  0.20E+00  0.00E+00 -0.20E+00  0.00E+00
4  -0.20E+00 -0.20E+00  0.20E+00 -0.20E+00  0.20E+00 -0.10E+00 -0.20E+00 -0.10E+00

INTERNAL ACTION

Normal force      : -0.168000E+07
Bending moment X : 0.700000E+05

CONVERGENCE VALUE

ITER.   Deformation value (%)   Internal strain value(%)
1        0.100000E+03           0.100000E+03
2        0.246038E+02           0.160910E+02
3        0.776668E+01           0.409169E+01
4        0.253908E+01           0.121995E+01
5        0.833920E+00           0.386438E+00

RESULTS
Axial deformation      : -0.806594E-03
Flexural deformation   : 0.276462E-02
```

Figure 30: Résultats de l'analyse sectionnelle

Les valeurs de convergence diminuent avec les itérations et lorsque les deux valeurs sont inférieures à 1, la fonction affiche les déformations finales.

4 ANALYSE LINÉAIRE D'UNE STRUCTURE 2D

Avant d'expliquer l'analyse non-linéaire en détail, le code FRAME2D est détaillé. Ce code est l'application de l'analyse linéaire sur une structure. Il a été étudié lors du cours de Luca Sgambi, « Numerical Analysis of Civil Engineering Structures » [28]. Ce code permet de calculer les déplacements et les efforts internes d'une structure hyperstatique plane. Les déplacements et les efforts internes sont calculés pour chaque nœud de la structure. Il est donc intéressant de segmenter les éléments de la structure avec un nombre suffisant de nœuds pour avoir des résultats optimaux.

L'analyse linéaire est réalisée par le code Frame2D. Ce code suit la méthode des déplacements pour la résolution de structures hyperstatiques 2D. Pour réaliser une analyse structurelle rigoureuse, 9 étapes sont à suivre :

1. Pré-processing (modèle graphique)
2. Discrétisation et attribution des propriétés mécaniques
3. Définition théorique des forces nodales
4. Transformation du système de référence
5. Assemblage des éléments finis
6. Opération pour compléter le système de résolution
7. Résolution du système linéaire
8. Attribution des forces nodales
9. Post-processing

4.1 Pré-processing

Cette première étape est capitale pour que les résultats soient le plus proche de la réalité. Elle consiste à schématiser la structure réelle. Certains éléments vont devoir être simplifiés car ils ne sont pas intégrables dans le programme. Par exemple, les éléments courbes seront discrétisés en une succession de lignes droites. Une structure réelle est donc transformée en des points et des lignes.



Figure 31: Bridge "Franciosi and Gailli", Italie (1955)

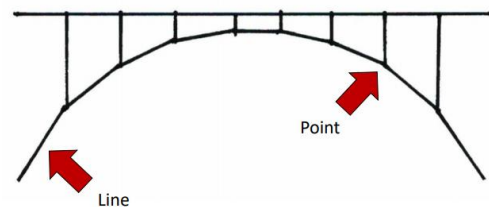


Figure 32: modèle graphique

4.2 Discrétisation et attribution des propriétés mécaniques

Le pré-processing manque d'information mécanique et de discrétisation. Cette étape permet la discrétisation et l'attribution de propriétés mécaniques pour chaque élément (A, E, I, ...). Les éléments sont alors reliés par des nœuds qui ont trois degrés de liberté possible (R_x , R_y et R_θ). Les degrés de liberté peuvent être bloqués par des appuis. Chaque nœud peut se déplacer dans les directions de ses degrés de liberté sauf s'il est bloqué par un appui.

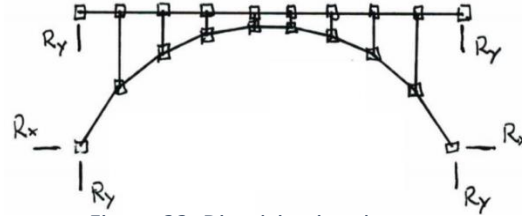
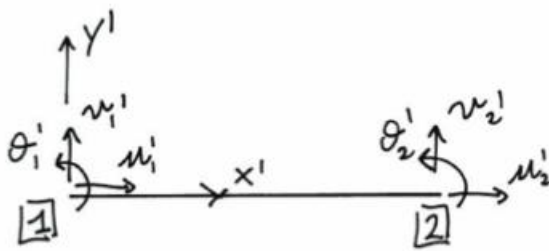


Figure 33: Discrétisation du pont

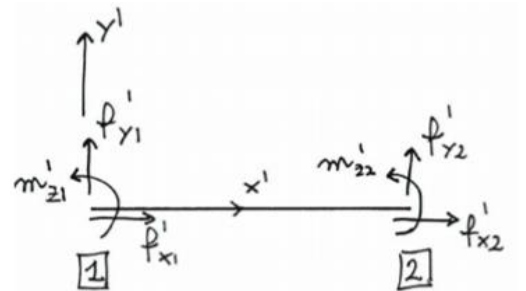
Sur la Figure 33, les nœuds sur les extrémités sont bloqués par des appuis bloquant ainsi leur degré de liberté (d.d.l) selon les directions correspondantes. Au total, il y a 20 nœuds et 23 éléments. Le nombre total de d.d.l. est donc $20 \times 3 - 6 = 54$. Cela veut dire que le programme devra afficher 54 déplacements comme résultat.

Pour un élément, les déplacements nodaux et les forces nodales sont représentés comme suit :



$$\underline{s}' = [u'_1 \ v'_1 \ \theta'_1 \ v'_2 \ u'_2 \ \theta'_2]^T$$

Figure 35: Déplacements nodaux



$$\underline{f}' = [f'_{x1} \ f'_{y1} \ m'_{z1} \ f'_{x2} \ f'_{y2} \ m'_{z2}]^T$$

Figure 34: Forces nodales

« ' » : système de référence local

Avec $\underline{s}'$ le vecteur des déplacements d'un élément dans le repère local. Chaque élément a donc son vecteur de déplacement dans son propre repère.

4.2.1 Définition théorique des forces nodales

Pour un élément générique, la relation entre les forces aux extrémités, $\underline{f}'_i$, les déplacements aux extrémités, $\underline{s}'_i$, et les forces équivalentes aux actions extérieures, $\underline{\bar{f}}'_i$, est défini :

$$\underline{f}'_i = \underline{k}'_i \cdot \underline{s}'_i + \underline{\bar{f}}'_i \quad 4.1$$

La matrice de rigidité est calculée grâce à la théorie de Timoshenko :

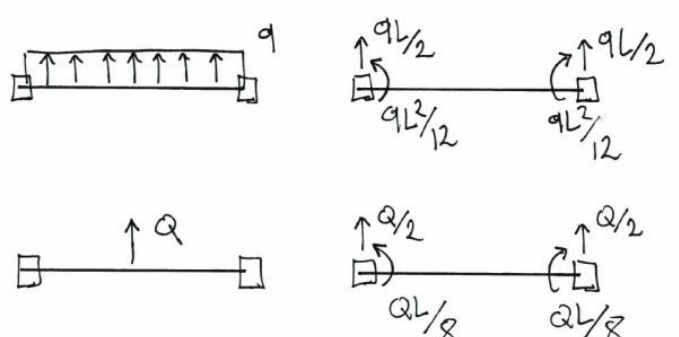
$$\begin{matrix}
 u'_1 & v'_1 & \theta'_{z1} & u'_2 & v'_2 & \theta'_{z2} \\
 \left[\begin{array}{ccc|ccc}
 \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{(1+\phi) \cdot L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{(1+\phi) \cdot L^2} & 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{(1+\phi) \cdot L^3} & \frac{6 \cdot E \cdot I}{(1+\phi) \cdot L^2} \\
 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{(1+\phi) \cdot L^2} & \frac{(4+\phi) \cdot E \cdot I}{(1+\phi) \cdot L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{(1+\phi) \cdot L^2} & \frac{(2-\phi) \cdot E \cdot I}{(1+\phi) \cdot L} \\
 -\frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 & \frac{E \cdot A}{L} & 0 & 0 \\
 0 & -\frac{12 \cdot E \cdot I}{(1+\phi) \cdot L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{(1+\phi) \cdot L^2} & 0 & \frac{12 \cdot E \cdot I}{(1+\phi) \cdot L^3} & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{(1+\phi) \cdot L^2} \\
 0 & \frac{6 \cdot E \cdot I}{(1+\phi) \cdot L^2} & \frac{(2-\phi) \cdot E \cdot I}{(1+\phi) \cdot L} & 0 & -\frac{6 \cdot E \cdot I}{(1+\phi) \cdot L^2} & \frac{(4+\phi) \cdot E \cdot I}{(1+\phi) \cdot L}
 \end{array} \right] & \begin{matrix} u'_1 \\ v'_1 \\ \theta'_{z1} \\ u'_2 \\ v'_2 \\ \theta'_{z2} \end{matrix}
 \end{matrix}$$

Figure 36: La matrice de rigidité selon Timoshenko

Avec Φ , le facteur prenant en compte la déformation au cisaillement :

$$\phi = \frac{12 \cdot E \cdot I}{A \cdot G} \cdot \frac{\chi}{L^2} \quad 4.2$$

Les efforts équivalents dus aux forces extérieures sont calculés par le calcul des efforts internes :



$$\underline{\bar{f}}' = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{q \cdot L}{2} \\ \frac{q \cdot L^2}{12} \\ 0 \\ \frac{q \cdot L}{2} \\ -\frac{q \cdot L^2}{12} \end{bmatrix}$$

Figure 37: Calcul des force nodaes équivalentes

4.3 Transformation du système de référence

A présent, chaque élément a son propre système de référence. Pour pouvoir additionner les efforts ou les déplacements entre chaque élément, il faut transformer chaque système dans le système de référence général.

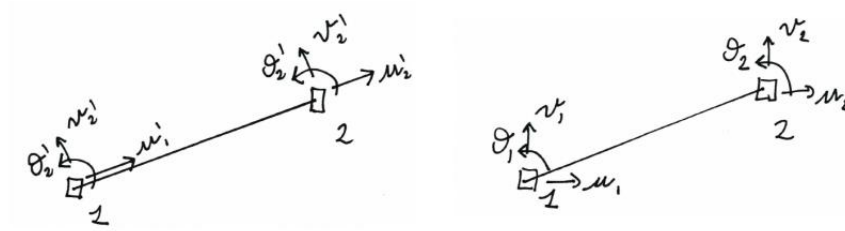


Figure 38: Transformation du système de référence vers le système global

Pour y arriver, l'équation de transformation est appliquée :

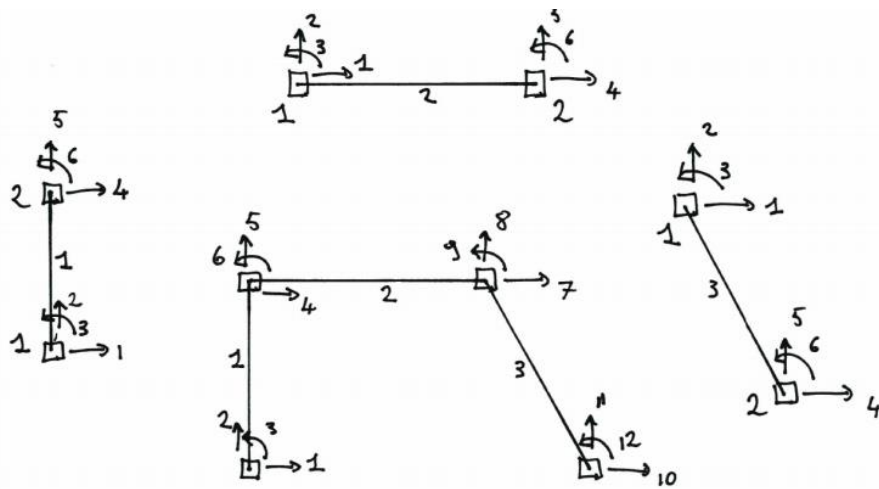
$$\underline{s} = \underline{T} \cdot \underline{s}' \quad ; \quad \underline{f} = \underline{T} \cdot \underline{f}' \quad ; \quad \underline{\bar{f}} = \underline{T} \cdot \underline{\bar{f}}' \quad ; \quad \underline{k} = \underline{T} \cdot \underline{k}' \cdot \underline{T}'$$

Avec T la matrice de transformation :

$$T = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4.4 Assemblage des éléments finis

A ce stade, différentes matrices de rigidité ont été créées pour chaque élément. Cette étape permet d'assembler les différentes matrices de rigidité en une seule matrice générale. Pour créer cette matrice, il faut additionner les valeurs des matrices de rigidité respectives des éléments pour les mêmes DDL de la structure générale. A titre d'exemple, l'image suivante est présentée :



$$\begin{aligned} (k_{12})_1 &\rightarrow (k_{12})_g & (k_{32})_2 &\rightarrow (k_{65})_g & (k_{44})_g &\rightarrow (k_{44})_1 + (k_{11})_2 \\ (k_{44})_1 &\rightarrow (k_{44})_g & (k_{26})_3 &\rightarrow (k_{8-12})_g & (k_{78})_g &\rightarrow (k_{45})_2 + (k_{12})_3 \end{aligned}$$

Figure 39: Assemblage de la matrice de rigidité globale

Pour une résolution plus efficace, la matrice de rigidité a une dimension carrée avec des côtés de taille égale au nombre de degrés de liberté de la structure. Par exemple, une poutre isostatique aura une matrice de rigidité $(3 \cdot N - 3) \times (3 \cdot N - 3)$ avec N , le nombre de nœuds entre les deux appuis.

Un vecteur similaire pour les forces aux nœuds doit être créé. Celui-ci a également une taille équivalente au nombre totale de degrés de liberté.

4.5 Opération pour compléter le système de résolution

Cette étape a comme intérêt de rajouter une opération pour que le système de résolution soit plus complet. Il est par exemple possible d'imposer des déplacements aux nœuds, créant ainsi des contraintes. La matrice de rigidité, le vecteur des déplacements et le vecteur des forces seront alors modifiés. Cette fonction n'étant pas utile à la suite de la thèse, elle ne sera pas détaillée.

4.6 Résolution du système linéaire

La résolution du système permet d'obtenir les déplacements engendrés pour chaque degré de liberté. L'équation linéaire à résoudre est :

$$\underline{S} = -(\underline{K}^{-1} \cdot \underline{F}) \quad 4.3$$

4.7 Attribution des forces nodales

Ensuite, il est possible d'évaluer les efforts internes. Chaque nœud se verra attribuer trois déplacements dans le système local. Les forces nodales sont calculées dans le système local. Il est donc nécessaire de récupérer les matrices de rigidité locale et les vecteurs de forces nodales équivalentes de chaque élément. L'équation suivante est alors appliquée :

$$\underline{f}'_i = \underline{k}'_i \cdot \underline{s}'_i + \underline{\bar{f}}'_i \quad 4.4$$

4.8 Post-processing

Le post-processing présente les résultats graphiques. En effet, les résultats des équations ne sont pas illustratifs. Grâce à un modèle graphique, il est possible de montrer la distribution des efforts ou des déplacements dans la structure. De cette manière, il est facile d'identifier les zones sensibles à la rupture. Le programme permettant l'illustration graphique a été créé dans un langage informatique différent du code d'analyse structurelle. Ce programme est codé en Python et prend l'output de l'analyse structurelle comme input.

4.9 FRAME2D

Cette section décrit le programme Fortran faisant l'analyse linéaire d'une structure plane. Les différentes fonctions sont enclenchées l'une à la suite de l'autre et transmettent des variables nécessaires à l'analyse. Le programme est résumé à la page suivante. Les cases blanches représentent les différentes fonctions et les variables sont décrites dans les cases grises. Les fonctions sont détaillées dans l'ordre d'exécution du programme.

4.9.1 GEOMET

La première fonction appelée par le programme permet l'intégration des données géométriques dans le programme. En effet, la fonction lit le fichier texte comprenant les informations sur la structure et retranscrit les données dans des variables ou des matrices. Voici les variables créées par la fonction :

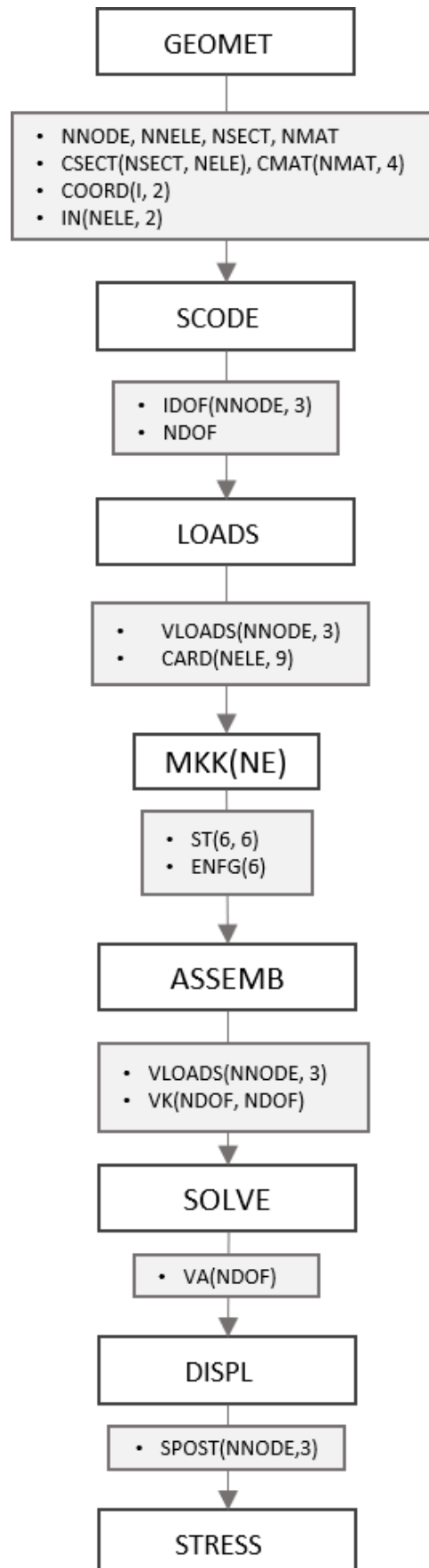
- NNODE : Nombre de nœuds
- NELE : Nombre d'éléments
- NMAT : Nombre de matériaux
- NSECT : Nombre de sections
- COORD(I,2) : Coordonnées du nœud I
- IN(I,2) : Nœuds 1 et 2 de l'élément I
- CMAT(I,4) : Propriétés du matériau I (E, ν , α , ρ)
- CSECT(I,4) : Propriétés de la section I (A, I, ν , profondeur)

4.9.2 SCODE

La fonction SCODE retranscrit les données du fichier d'input sur les appuis de la structure pour créer une matrice de dimensions NNODEx3. Les lignes de la matrice représentent ainsi les nœuds de la structure et les trois colonnes sont les trois directions possibles (x, y, θ). La matrice est appelée IDOF et attribue à chaque degré de liberté un numéro chronologique et, lorsqu'un nœud est bloqué dans une direction, il affichera -1. Par exemple, pour une poutre isostatique avec deux nœuds aux extrémités et un nœud au milieu, la matrice sera la suivante :

$$IDOF = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

La fonction retourne IDOF(NNODE, 3) et NDOF, le nombre de degré de liberté totale de la structure. Pour la poutre isostatique précédente, NDOF=6.



4.9.3 LOADS

LOADS est appelé pour créer les variables intégrant les différents facteurs provoquant des efforts dans les éléments. La fonction lit les données du fichier texte et les retranscrit dans le code. Plusieurs phénomènes sont possibles tels que des forces nodales, des forces réparties, des variations de température ainsi que de la précontrainte. Les variables finales sont :

- VLOADS(NDOF) : Forces nodales pour chaque degré de liberté
- CARD(NELE,9) : Pour chaque élément, force répartie longitudinale, deux valeurs de force perpendiculaire, PY1 et PY2, pour représenter la force répartie (Si PY1=PY2 la force répartie est constante). CARD(I,4) et CARD(I,5) correspondent aux variations de température des deux nœuds. Les quatre dernières valeurs correspondent aux caractéristiques de la précontrainte : F, e1, e2, eM.

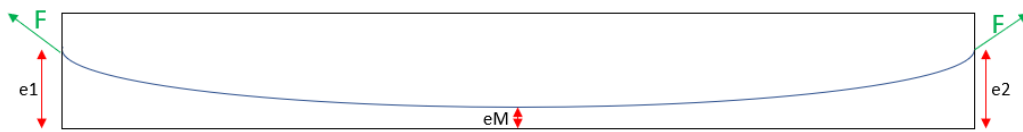


Figure 40: données géométriques d'un câble précontraint

4.9.4 MKK(NE)

MKK crée d'abord la matrice de rigidité locale de l'élément NE qu'il prend en argument. La fonction crée également le vecteur des forces aux nœuds dues aux forces réparties sur l'élément. Ensuite, la matrice et le vecteur seront modifiés par la matrice de transformation pour correspondre au système de référence global. Cette fonction est appelée pour chaque élément par la fonction ASSEMB. Elle retourne la matrice de rigidité et le vecteur des forces nodales dans le système global :

- ENFG(6) : Forces selon trois directions pour les deux nœuds de l'élément NE (Global)
- ST(6,6) : Matrice de rigidité selon les six degrés de liberté des nœuds de l'élément NE

4.9.5 ASSEMB

Cette fonction permet de créer la matrice de rigidité totale de dimension NDOFxNDOF, et également le vecteur des forces nodales de dimension NDOF. La fonction fait une boucle pour chaque élément et appelle la fonction MKK(NE) pour obtenir la matrice de rigidité globale et les efforts nodaux de l'élément. Les forces extérieures nodales sont également rajoutées aux efforts nodaux. Les deux variables retournées sont :

- VLOADS(IDOF) : (Les) Forces pour chaque degré de liberté
- VK(IDOF, IDOF) : (La) Matrice de rigidité générale de la structure

4.9.6 SOLVE

La fonction effectue la résolution du problème. Et, le vecteur des déplacements est alors obtenu :

- VA(IDOF) : Déplacements de chaque degré de liberté

4.9.7 DISPL

La fonction imprime les résultats de déplacements dans le fichier output. Elle crée aussi une matrice comprenant tous les déplacements :

- SPOST(NNODE, 3) : Déplacement de chaque nœud selon chaque direction

4.9.8 STRESS

Les valeurs finales des efforts internes sont calculées dans le système local de chaque élément. La matrice locale de rigidité et les forces nodales locales de la fonction MKK(NE) sont appelés pour chaque élément. Les efforts internes de chaque nœud sont alors calculés grâce à la relation, $\underline{f}'_i = \underline{k}'_i \cdot \underline{s}'_i + \underline{\bar{f}}'_i$. Dans le code, la relation est la suivante :

$$QF(I, NE) = QF(I, NE) + ST(I, K) \cdot QS(K, NE) \quad 4.5$$

Avec QF, une matrice de dimension 6xNELE, reprenant les efforts internes selon les six degrés de liberté de chaque élément. ST est la matrice locale de rigidité et QS le vecteur des déplacements de la même dimension que QF. L'équation est répétée pour chaque élément.

La fonction STRESS imprime finalement les efforts sur le fichier OUTPUT.

4.10 Représentation graphique

Représenter graphiquement les résultats permet une meilleure compréhension des résultats. Pour cette raison, l'usage d'un langage informatique différent de fortran est utile car les fonctionnalités graphiques du langage sont restreintes. A l'inverse de Fortran, Python est un langage avancé dans le graphisme et facile d'utilisation. Le programme dessine la structure selon les coordonnées et indique, pour chaque nœud, les efforts trouvés dans le code FRAME2D. Voici quelques résultats obtenus avec les deux programmes :

4.10.1 Poutre isostatique (Frame 1)

La première structure est une poutre de 6m de long subissant une force répartie de 10kN/m (les fichiers d'INPUT sont disponibles à l'annexe 1). Pour avoir des résultats pertinents, treize nœuds sont repartis sur la poutre. Chaque ligne verticale reliant la courbe et la structure indique le positionnement des nœuds. Pour la représentation des efforts, le vert représente les efforts normaux, le bleu les efforts tranchants et le rouge la flexion.

La vérification analytique est la suivante :

- $N = 0[kN]$
- $V(0) = \frac{qL}{2} = \frac{-10 \cdot 6}{2} = -30[kN]$
- $M(3) = \frac{qL^2}{8} = \frac{-10 \cdot 6^2}{8} = -45[kN.m]$

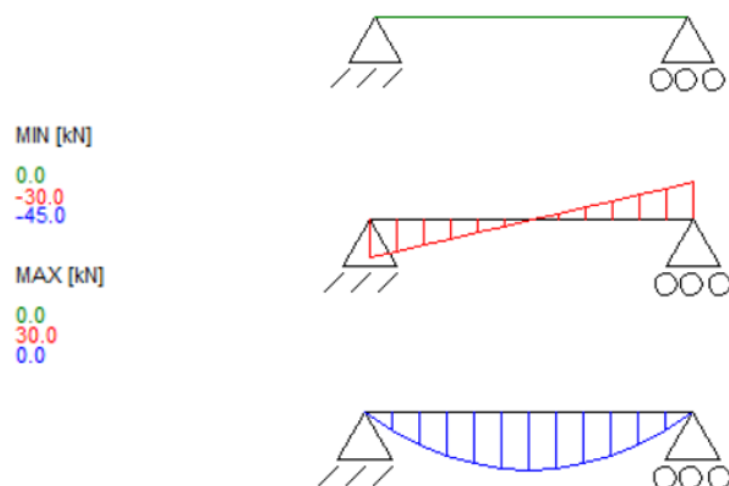


Figure 41: Représentation graphique des efforts internes sur la poutre isostatique

Le programme fonctionne correctement pour cette structure. Mais la structure est très simple et ne peut pas être représentative d'un bon fonctionnement du programme.

4.10.2 Poutre hyperstatique (Frame 2)

La poutre est de même dimension que la précédente mais est encastrée en ses deux extrémités (Annexe 2).

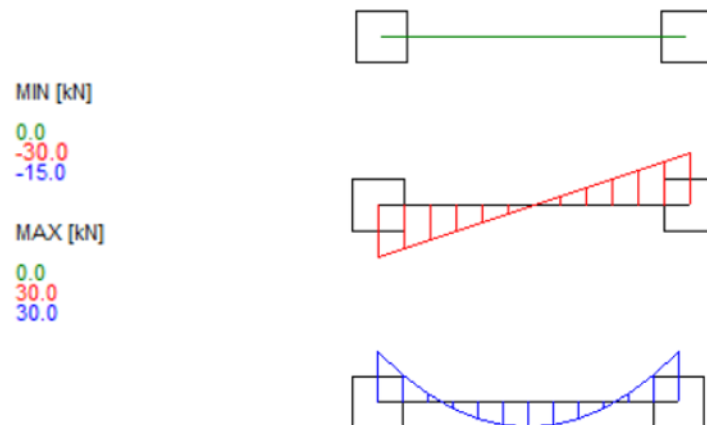


Figure 42: Efforts dans la poutre hyperstatique

La vérification analytique est également nécessaire :

- $N = 0[kN]$
- $V(0) = \frac{-10 \cdot 6}{2} = -30[kN]$
- $M(0) = -\frac{-10 \cdot 6^2}{12} = 30[kN.m]$

- $M(3) = \frac{-10 \cdot 6^2}{24} = 15 [kN.m]$

4.10.3 Structure hyperstatique (Frame 3)

La troisième structure est plus complexe et hautement hyperstatique (Annexe 3). Voici son schéma statique :

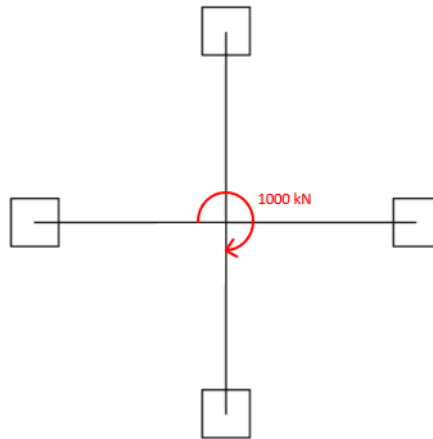


Figure 43: Schéma statique

La structure est encastrée en ses quatre extrémités et subit un moment de force de 1000kN en son centre.

Les résultats de l'analyse linéaire sont les suivants :

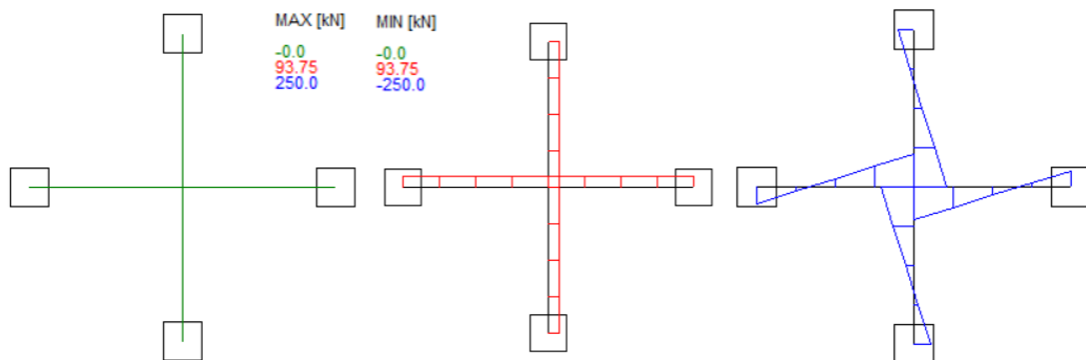


Figure 44: Distribution des efforts internes

Pour la vérification analytique, on applique la méthode des déplacements. En supposant une rigidité axiale infinie, seul le déplacement de rotation du nœud du milieu est possible. Le schéma suivant représente les efforts locaux pour une rotation unitaire.

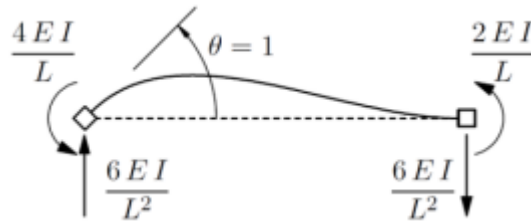


Figure 45: Réaction due à une rotation imposée

La rigidité pour une rotation unitaire est $4 \cdot 4 \cdot EI/L$ car il y a quatre éléments qui subissent la rotation. Le déplacement rotationnel est alors trouvé :

$$u = -\frac{1000 * L}{16EI}$$

Pour chaque élément, nous trouvons alors les efforts internes aux nœuds, grâce à l'équation suivante :

$$\underline{p}^{loc} = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -\frac{1000 * L}{16EI} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -93,75 \\ -250 \\ 0 \\ 93,75 \\ -125 \end{bmatrix}$$

Les résultats correspondent au schéma résultant du programme.

Le programme semble fonctionner correctement et il permettra une analyse non-linéaire en y ajoutant l'analyse sectionnelle.

5 ANALYSE NON-LINÉAIRE

Dans ce chapitre, une méthode d'analyse non-linéaire de structure en béton armé sera présentée. Ce chapitre présentera dans un premier temps le modèle déterminant les efforts internes et les déplacements d'une structure sous charges fixes. Ensuite, un nouveau modèle sera décrit. Celui-ci détermine la charge ultime qu'une structure est capable de supporter. Pour ces deux modèles, les résultats et une analyse critique seront proposés. Pour finir, il y aura une conclusion décrivant les qualités et les limites du modèle créé.

Les structures en béton se comporte de manière non-linéaire progressivement avec le l'augmentation de charges. Dans cette thèse, les non-linéarités considérées sont les changements mécaniques des matériaux et les changements géométriques des sections en béton armé. Le programme d'analyse sectionnelle est utilisé pour prendre en compte ces variations. En effet, l'analyse sectionnelle permet de calculer ces variations grâce aux lois constitutives des matériaux.

Cette analyse non-linéaire permet d'obtenir des résultats de déformation précis mais demande des calculs rigoureux et nécessite un outil numérique.

La première partie du chapitre décrira un modèle permettant de calculer la répartition des efforts et les déplacements d'une structure en prenant en compte les effets de non-linéarité. Ensuite, un second modèle permettant de connaître la résistance maximale d'une structure sera présenté. Ce modèle précisera également l'élément le plus sensible à la rupture et la cause de sa rupture.

5.1 Modèle de pour une charge constante

L'analyse linéaire décrite au chapitre précédent, permet de déterminer les efforts internes et les déplacements grâce à la méthode des déplacements sur une structure 2D. Le programme est modifié pour prendre en compte les variations géométriques données par l'analyse sectionnelle. L'analyse sectionnelle utilise alors les efforts internes résultant de l'analyse linéaire pour déterminer la nouvelle inertie de l'élément. Une boucle est ainsi enclenchée pour arriver à une convergence. Le schéma suivant permet la compréhension du programme :

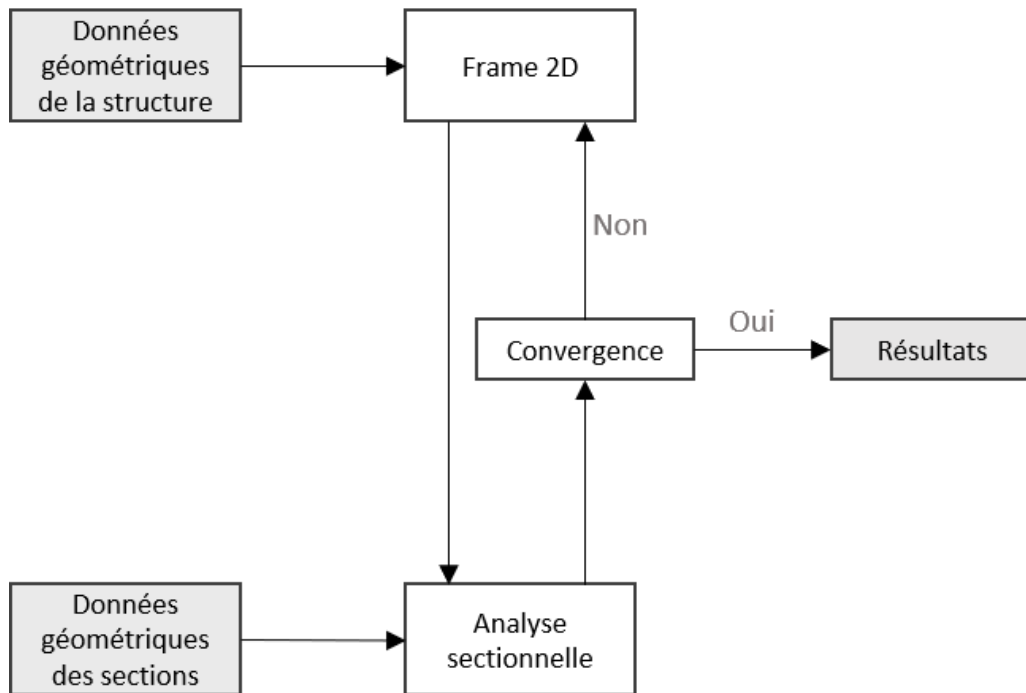


Figure 46: Structure de l'analyse non-linéaire

Deux fichiers textes reprenant les données de la structure et des sections sont intégrés par les deux fonctions. Pour que l'analyse soit possible, plusieurs modifications sont à effectuer dans les programmes respectifs.

5.1.1 Modification de Frame2D

L'analyse sectionnelle doit modifier la section de chaque élément en reprenant les efforts résultant de l'analyse structurale. Frame2D donne initialement les efforts internes des 2 nœuds de chaque élément de la structure, alors que l'analyse sectionnelle ne modifie qu'une seule section par élément. Pour cette raison, une nouvelle fonction est créée pour obtenir les efforts au milieu de chaque élément. La paire d'efforts (N, Mx) sera alors introduite dans l'analyse sectionnelle. Pour obtenir les efforts internes au milieu, il faut faire un calcul des efforts internes :

- $N = N_1 + \frac{PX \cdot L}{2}$
- $M = M_1 + \frac{PY1 \cdot L^2}{8} + \frac{(PY2 - PY1) \cdot L^2}{42} + \frac{V_1 \cdot L}{2}$
- $V = V_1 + \frac{PY1 \cdot L}{2} + \frac{(PY2 - PY1) \cdot L}{8}$

Avec N_1 , M_1 et V_1 les valeurs des efforts internes du premier nœuds d'un élément. PX , $PY1$ et $PY2$ les valeurs des action externes sur l'élément. Les équations sont répétées pour chaque élément et N , V et M sont enregistrés dans la matrice, $QFL(3,NELE)$. L'effort tranchant n'est pas à prendre en compte dans l'analyse sectionnelle mais sera peut-être utile à une étude future.

5.1.2 Modification de l'analyse sectionnelle

La modification de l'analyse sectionnelle est plus conséquente car il faut analyser chaque élément de la structure. Tous les éléments subissent des efforts différents et peuvent avoir une section initiale différente. Le document d'input comprenant toutes les informations sur la section est modifié pour pouvoir comprendre des sections différentes. Dans frame2D, la variable NSECT correspond au nombre de sections différentes. La variable est alors utilisée pour effectuer une boucle lors de la lecture du document. En effet, les sections différentes seront lues les unes après les autres et les variables auront une dimension en plus, correspondant au numéro de la section. Par exemple, la variable correspondant aux informations sur les armatures sera CARAF(NS,NA,3) au lieu de CARAF(NA,3). NS correspond au numéro de la section, NA au numéro de l'armature et les trois informations sont la surface et la position en X et en Y de l'armature. La même méthode est appliquée pour les différentes variables intégrant une information sur la section :

- **Armatures passives** : NA(NSECT), CARAF (NSECT, MAXAF,3), ACCMAT(9,NSECT) : Pour chaque section ; Nombre, géométrie et données sur le matériau
- **Câbles de précontraintes** : NC(NSECT), CARAC(MSECT, MAXAC,5), CAVMAT(9,MSECT) : Pour chaque section ; Nombre, géométrie et données sur le matériau
- **Béton** : NR(NSECT), CARCLS (NSECT, MAXCLS,2,4), CLSMAT(9, NSECT) : Pour chaque section ; Nombre de subdivisions, géométrie et données sur le matériau

Une fois que les données sont enregistrées dans le programme, une nouvelle boucle sur la fonction de résolution de l'analyse sectionnelle s'enclenche. La boucle est répétée NELE fois (le nombre d'éléments) ; Pour chaque élément correspondent les efforts $QFL(3,NE)$ et les données présentées ci-dessus. Pour connaître la section d'un élément, la variable ISECT(NE) venant de Frame2D est utilisée. ISECT(NE) renvoie en effet le numéro de la section correspondant à l'élément en argument.

L'analyse sectionnelle s'effectuant NELE fois, il est important de réinitialiser les variables avant chaque résolution. Par exemple, si la matrice de rigidité n'est pas réinitialisée, elle s'additionnera à chaque élément.

Il faut également créer une variable définissant le changement d'inertie de la section. Pour ce faire, ce sont les éléments de la matrice de rigidité sectionnelle qui seront transféré vers la matrice de rigidité de la structure. Ceci permettra de comptabiliser également le module de Young équivalent calculé par l'analyse sectionnelle. En effet, $K11$ et $K22$ seront réintégrés dans la matrice de rigidité locale de Frame2D.

- $K_{11} = \sum_{i=1}^{NR} E_{i,bet} A_{i,bet} + \sum_{i=1}^{NA} E_{i,arm} A_{i,arm} + \sum_{i=1}^{NC} E_{i,cab} A_{i,cab} = (EA)_{section}$
- $K_{22} = \sum_{i=1}^{NR} E_{i,bet} A_{i,bet} y_{i,bet}^2 + \sum_{i=1}^{NA} E_{i,arm} A_{i,arm} y_{i,arm}^2 + \sum_{i=1}^{NC} E_{i,cab} A_{i,cab} y_{i,cab}^2 = (EI)_{section}$

Lorsque ces deux valeurs sont calculées pour un élément, elles sont enregistrées dans la matrice STIFF(NE,2). Les valeurs sont alors réintégrées dans la matrice locale de rigidité de Frame 2D.

$$\begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} & 0 & \frac{12EI}{L^3} & -\frac{6EI}{L^2} \\ 0 & \frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{4EI}{L} \end{bmatrix}$$

A partir de la seconde itération les valeurs en rouge sont remplacées par STIFF(NE,1) et en vert par STIFF(NE,2).

5.1.3 Convergence

La boucle est répétée jusqu'à la convergence des déplacements. Pour ce faire, une fonction de convergence est créée, celle-ci fait la comparaison entre les déplacements de chaque nœud. Lorsque les déplacements ne varient plus suffisamment, la boucle est arrêtée et les résultats peuvent être affichés. Pour comparer les déplacements de l'itération i, VTOT(NNODE,3), et ceux de l'itération i-1, une variable est créée pour retenir les déplacements de l'itération précédente, VTOT1(NNODE,3). La réponse de l'équation de convergence est adimensionnelle :

$$e_{1,2} = \frac{\sqrt{(VTOT1(NN,1) - VTOT(NN,1))^2 + (VTOT1(NN,2) - VTOT(NN,2))^2}}{\sqrt{VTOT(NN,1)^2 + VTOT(NN,2)^2}} \leq \delta_{1,2} \quad 5.1$$

$$e_3 = \frac{\sqrt{(VTOT1(NN,3) - VTOT(NN,3))^2}}{\sqrt{VTOT(NN,3)^2}} \leq \delta_3 \quad 5.2$$

Si les deux équations sont vraies pour l'ensemble des nœuds alors la fonction converge et on obtient les résultats. La valeur des deltas est posée à 10^{-8} .

5.1.4 Schéma récapitulatif

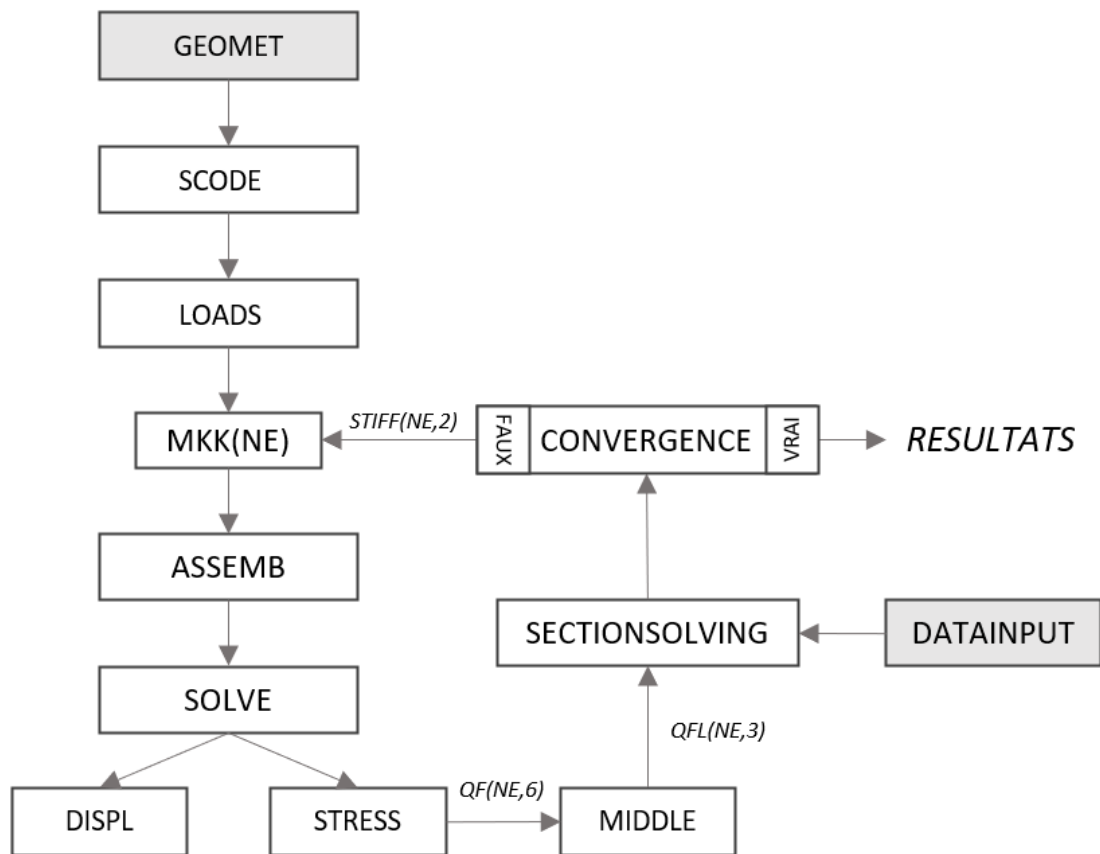


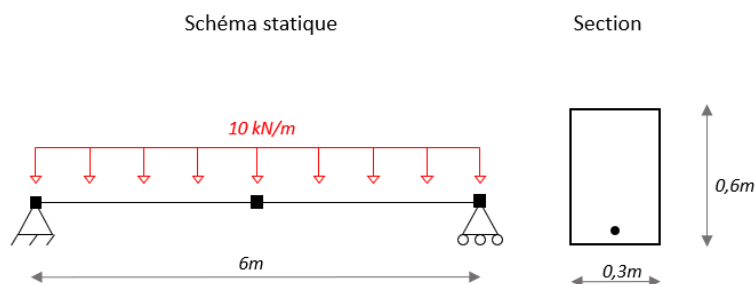
Figure 47: Schéma du programme non-linéaire

Sur ce schéma, les fonctions du programme principal sont représentées. Les nouvelles variables faisant le lien entre Frame2D et l'analyse sectionnelle sont également indiquées à côté des flèches. La non-linéarité de l'analyse est bien représentée avec la boucle qui continue tant que la convergence n'est pas obtenue. Les résultats sont ensuite imprimés sur un fichier texte.

5.1.5 Résultats

Les résultats de cette analyse correspondent aux efforts internes et aux déplacements d'une structure en béton armé subissant des efforts externes constants. Voici les résultats pour une structure type.

Exemple :



Les résultats sont calculés en trois nœuds. Cependant les résultats ne seront pas optimaux car les valeurs inertielles intégrées dans Frame2D sont calculées par rapport aux efforts au milieu de l'élément. Pour ce modèle, il est donc conseillé d'utiliser des structures suffisamment segmentées pour minimiser ces différences. Les résultats sont toutefois intéressants pour comparer l'analyse linéaire et non-linéaire.

NODAL DISPLACEMENTS

NODES	U	V	TETA
1	0.000000E+00	0.000000E+00	- .507558E-03
2	0.000000E+00	- .951670E-03	0.507275E-20
3	0.000000E+00	0.000000E+00	0.507558E-03

INTERNAL ACTIONS

ELEM	N1	T1	M1	N2	T2	M2
1	- .0000E+00	0.3000E+05	0.1421E-10	0.0000E+00	0.4291E-12	0.4500E+05
2	- .0000E+00	0.4992E-11	0.4500E+05	0.0000E+00	- .3000E+05	0.9983E-11

INTERNAL ACTION in the Middle

ELEM	N	T	M
1	- .0000E+00	0.1500E+05	0.3375E+05
2	- .0000E+00	- .1500E+05	0.3375E+05

Figure 50: Résultats de l'analyse linéaire

NODAL DISPLACEMENTS

NODES	U	V	TETA
1	0.000000E+00	0.000000E+00	- .229005E-02
2	0.000000E+00	- .429385E-02	0.365645E-19
3	0.000000E+00	0.000000E+00	0.229005E-02

INTERNAL ACTIONS

ELEM	N1	T1	M1	N2	T2	M2
1	- .0000E+00	0.3000E+05	- .6401E-11	0.0000E+00	- .5117E-11	0.4500E+05
2	- .0000E+00	- .8527E-12	0.4500E+05	0.0000E+00	- .3000E+05	- .1626E-10

INTERNAL ACTION in the Middle

ELEM	N	T	M
1	- .0000E+00	0.1500E+05	0.3375E+05
2	- .0000E+00	- .1500E+05	0.3375E+05

SECTIONAL COVERGENCE

Figure 49: Résultats de l'analyse non-linéaire

Les résultats de l'analyse non-linéaire sont obtenus après 4 itérations. Logiquement, les efforts internes sont les mêmes pour les deux analyses mais les déplacements, eux, sont différents. En effet, la section n'a pas d'effets sur les efforts internes mais les déplacements varient en fonction de sa rigidité. Pour l'analyse linéaire, le module de Young utilisé est le même équivalent entre les deux matériaux ; cela donne un déplacement plus faible que pour l'analyse non-linéaire. Il est évident que le calcul linéaire est plus approprié pour des matériaux isotropes tel que l'acier.

5.2 Détermination de la résistance ultime

L'étape suivante doit permettre à l'utilisateur du modèle de connaître la résistance ultime de la structure. Cette fonctionnalité doit également donner l'endroit et la cause de la rupture. Par exemple, si une poutre isostatique se rompt au milieu le programme renvoie l'élément rompu et la cause (ex : rupture de l'acier par traction dans l'élément 7). Pour réaliser cela, plusieurs choses sont à rajouter dans le modèle.

5.2.1 Modification du modèle non-linéaire

La première étape est de rajouter au modèle une boucle qui, à chaque itération, augmente la charge extérieure. La fonction LOADS qui, initialement crée les charges actives sur la structure, prend alors en compte la valeur maximale de la charge et crée une nouvelle variable entière, NLOAD, qui correspond au nombre d'itérations de charges. Ensuite, une nouvelle fonction, LOADING, est créée et permet l'intégration des charges par itération.

Dans LOADING, le vecteur des charges nodales, VL(NDOF), et la matrice des charges réparties, CARD(3,NE) sont créés. Les variants de températures et les charges de précontrainte sont ignorés pour ce modèle. Pour la création des charges, la charge maximale est divisée par NLOAD et multipliée par l'itération actuelle.

- $VL(NDOF) = \frac{VL1(NDOF)*NL}{NLOAD}$
- $CARD(3,NE) = \frac{CARD1(3,NE)*NL}{NLOAD}$

Avec VL1(NDOF) et CARD1(3,NELE), le vecteur et la matrice des valeurs de charges maximales et NL l'itération correspondante. Par exemple, si une charge nodale maximale de 100kN est encodée et NLOAD=100. A l'itération 1, VL(NDOF)=1kN et à l'itération 10, VL(NDOF)=10kN.

Pour que la boucle s'arrête, il faut que soit la boucle atteinte la charge maximale, soit qu'un des matériaux se rompt. La rupture d'un des matériaux signifie que le déplacement maximal de celui-ci est atteint.

5.2.2 Schéma récapitulatif

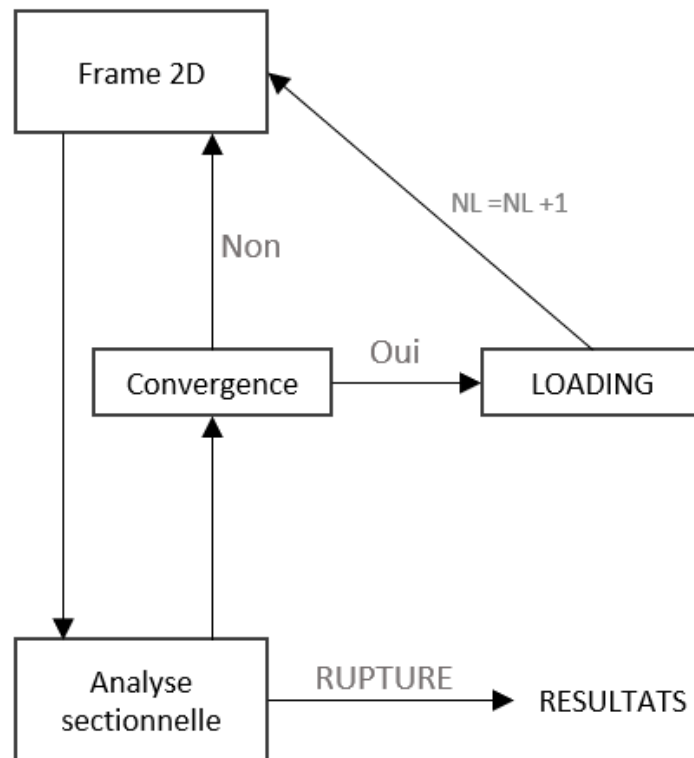


Figure 51: Schéma du programme de résistance ultime

Il est intéressant d'imprimer le déplacement et les forces externes pour chaque itération de force. Ces données permettront de créer un benchmark force-déplacement décrivant le comportement de la structure en béton selon notre modèle.

5.2.3 Résultats

Les données suivantes seront les mêmes pour chaque structure :

Structure :

- NLOAD=1000
- $E_{initial} = 30 [GPa]$
- NSECT=1

Acier :

- $f_y = 355 [MPa]$
- $f_u = 510 [MPa]$
- $\varepsilon_y = 0,002$
- $\varepsilon_u = 0,025$
- Aire=0,0004 [m²]

Béton :

- Courbe : Parabole rectangle
- $F_c = 17 [MPa]$
- $F_{ct} = 0 [MPa]$
- $\varepsilon_{c0} = 0,002$
- $\varepsilon_{cu} = 0,0035$
- Enrobage = 0.04[m]
- Aire = 0.18 [m²]

5.2.3.1 Poutre isostatique (Frame 1)

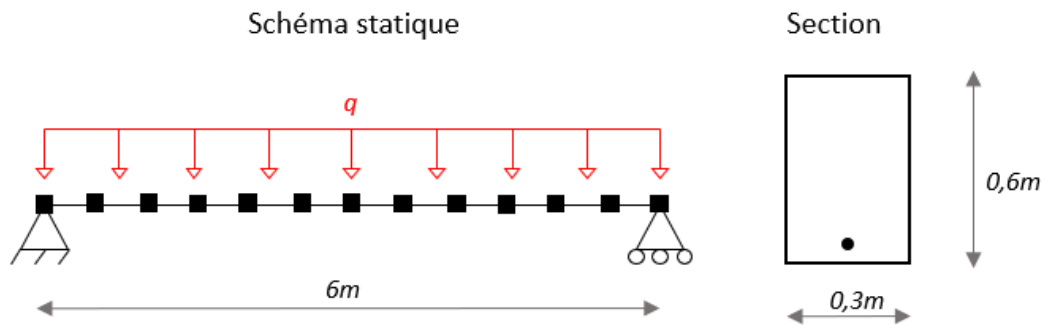


Figure 52: Poutre isostatique subdivisée en 12 éléments

La poutre est cette fois-ci subdivisée en treize nœuds car la rupture est calculée au milieu des éléments alors que le déplacement est calculé au niveau des nœuds. Il est donc important d'avoir des éléments courts pour que les efforts internes soient proches de la réalité. L'armature a une surface de 400mm^2 . Celle-ci peut également correspondre à deux armatures de 16mm de diamètre à la même hauteur. Voici les résultats pour une section de béton comprenant quatre subdivisions en bande (Fichier de la section en Annexe 5).

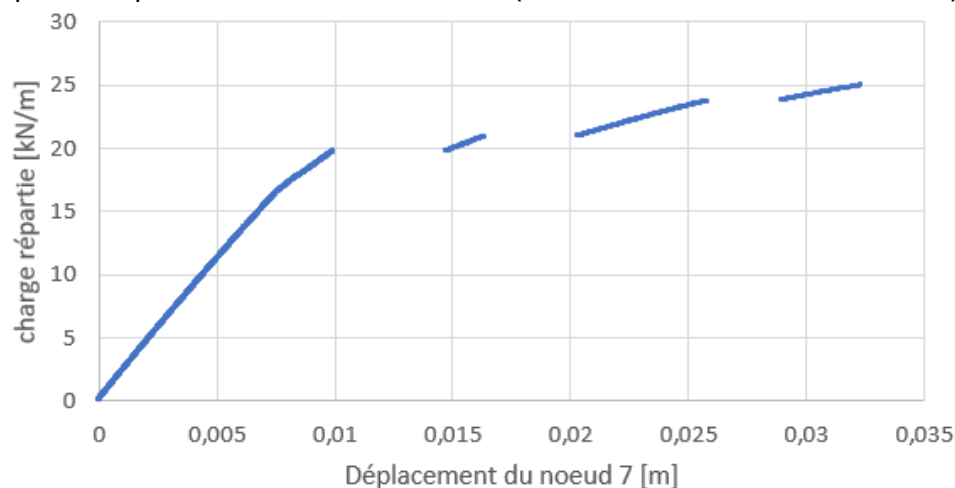


Figure 53: Poutre isostatique ; déplacement force répartie (NR=4)

Les résultats ne sont pas lisses lorsque les armatures se plastifient. Ceci est dû à la subdivision de la section qui est trop faible. En effet, lorsqu'une ligne de points de Gauss subit un déplacement positif (traction), le déplacement de la structure subira une augmentation instantanée car le module de Young de la ligne passera subitement d'une valeur positive à zéro. Diminuer l'espace entre les points de Gauss permettrait de lisser ce graphe, il faut donc augmenter NR le nombre de subdivisions de la section. Voici le résultat pour une section avec 24 subdivisions :

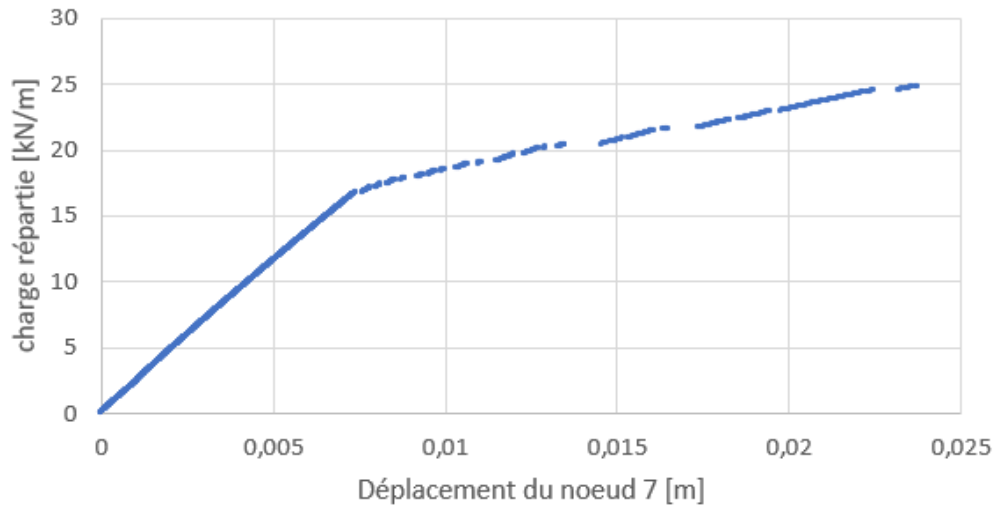


Figure 54: Poutre isostatique, Déplacement-charge répartie

La phase plastique est effectivement plus lisse sur ce graphe. La vérification du modèle est nécessaire pour pouvoir le valider. Le modèle renvoie une rupture par traction de l'armature dans l'élément 7. Pour trouver le moment résistant élastique, la force maximale dans l'armature (avec $f_y = 355 \text{ [MPa]}$) est multiplié avec la longueur du bras de levier :

- $M_{rd,el} = \frac{qL^2}{8} = F_{trac} \cdot (d - hc/2) = (0,0004 * 355 * 10^6) * (0,56 - \frac{0,0004 * 355 * 10^6}{2 * 0,3 * 17 * 10^6}) = 77,543 \text{ [kN.m]}$
- $q_{max,el} = \frac{M_{rd,el} * 8}{L^2} = 17,231 \text{ [kN/m]}$

Et par les mêmes calculs, les valeurs maximales plastiques sont trouvées avec $f_y = 510 \text{ [MPa]}$:

- $M_{rd,pl} = 110,16 \text{ [kN.m]}$
- $q_{max,pl} = 24,480 \text{ [kN/m]}$

Les résultats pour la poutre isostatique sont très proches de notre modèle.

5.2.3.2 Poutre isostatique avec une force nodale

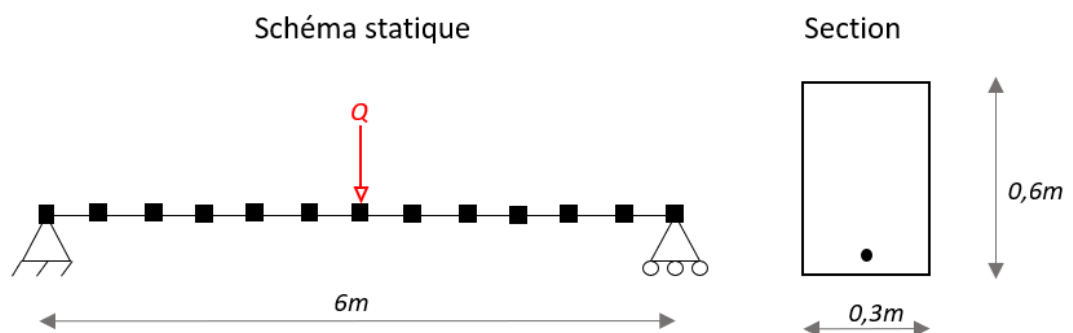


Figure 55: Schéma statique

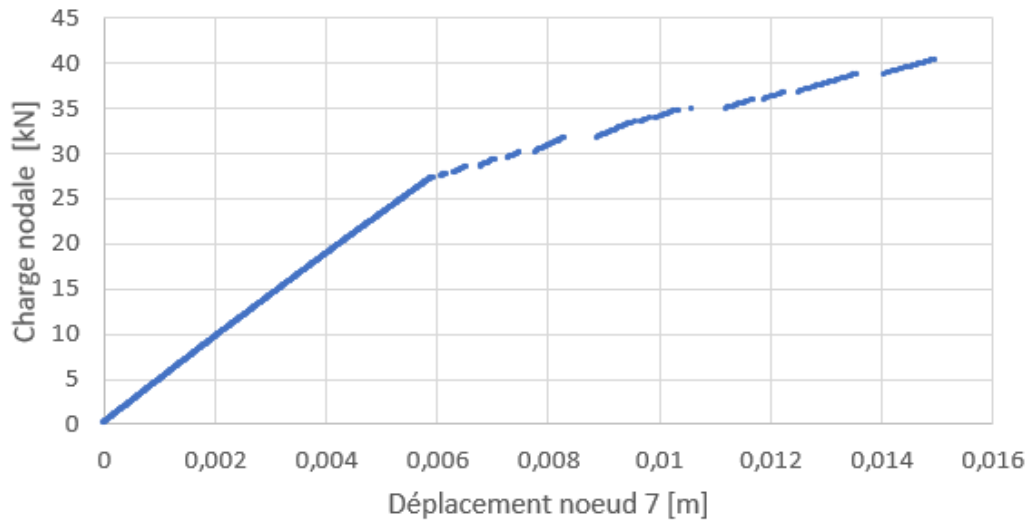


Figure 56 : Déplacement-Charge répartie ; charge nodale

$$M_{rd,el} = \frac{QL}{2} = 77,543 [\text{kN.m}]$$

$$M_{rd,pl} = 110,16 [\text{kN.m}]$$

$$Q_{max,el} = \frac{M_{rd,el} \cdot 2}{L} = 25,85 [\text{kN}]$$

$$Q_{max,u} = 36,72 [\text{kN}]$$

Il y a un écart entre les résultats analytiques et le graphe. Ceci peut s'expliquer car la force nodale au centre engendre un effort de flexion interne linéaire le long de la poutre. Il faudrait sectionner la poutre en plus de 12 éléments pour s'approcher du résultat analytique. Comme les efforts interne de flexion sont linéaire le long de la poutre jusqu'au centre, il est facile de calculer la charge maximale avec les valeurs du graphe. Sur la figure ci-dessous, M1 correspond au moment maximal calculé par le programme alors qu'analytiquement, il est au centre de la poutre. La courbe bleu représente la distribution des moments analytiques et la rouge illustre la distribution des moments intégrés dans l'analyse sectionnelle.

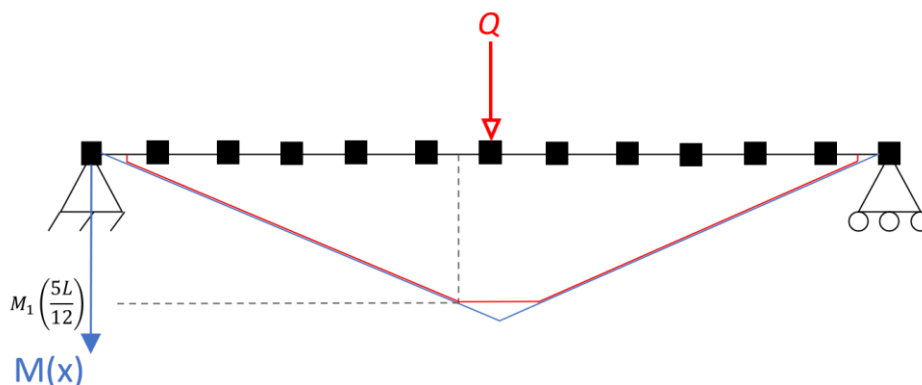


Figure 57: Explication du décalage des efforts internes

La charge maximale est alors égale à 11/12 de sa valeur comme elle est calculé à la moitié du 6^{ème} élément. La charge maximale calculé par le programme étant 40,28 kN, la formule devient :

$$\frac{11}{12} * 40,28 = 36,92[kN]$$

Il est important de toujours prendre en compte ce décalage pour la suite de la thèse.

5.2.3.3 Poutre hyperstatique (Frame 2)

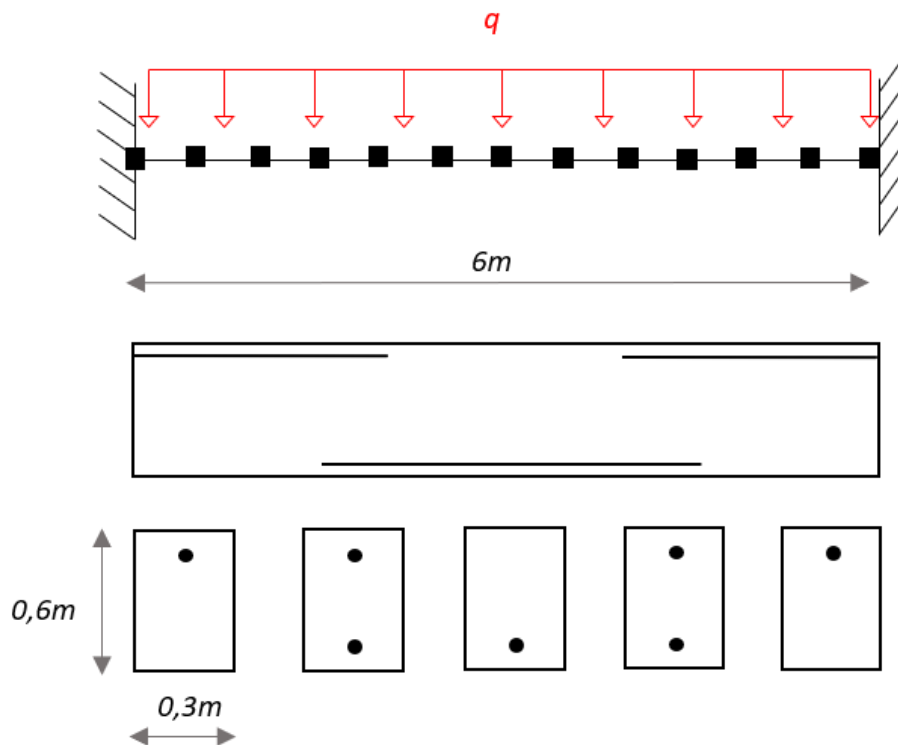


Figure 58: Poutre hyperstatique

Les efforts d'une poutre hyperstatique sont répartis différemment que pour une poutre isostatique (Voir Figure 42). En effet, le moment maximal sera aux extrémités et il sera de signe opposé à l'effort de flexion du centre. Le moment au centre et aux extrémités en fonction de la charge répartie est le suivant :

- $M(0) = -\frac{qL^2}{12} = M(L)$
- $M(\frac{L}{2}) = \frac{qL^2}{24}$

Pour s'adapter aux variations particulières des efforts, des sections différentes sont utilisées. Aux extrémités, il y a une armature supérieure de 400 [mm²] et au milieu une armature inférieure de 250 [mm²]. Il y a donc 3 sections différentes comprenant une section intermédiaire avec l'armature inférieure et supérieure. La poutre a également été sectionnée en 60 éléments pour obtenir des résultats optimaux. Le programme affiche une rupture dans

l'élément 1 avec une rupture par traction de l'armature supérieure. Voici le graphique déplacement-force répartie obtenu :

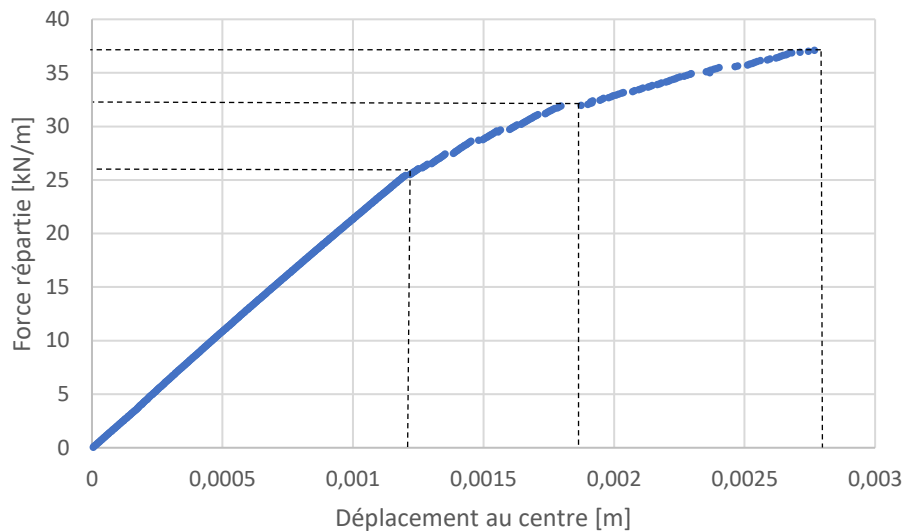


Figure 59: Poutre hyperstatique : Graphique des déplacements

Les déplacements sont nettement réduits par rapport à la poutre isostatique. La réduction des déplacements est l'une des caractéristiques de l'hyperstatique permettant un meilleur comportement ELS. 3 Comportements différents sont visibles sur le graphique. D'abord, les déplacements évoluent linéairement jusqu'à la limite élastique des extrémités. Ensuite, avec la plastification des armatures aux extrémités, les déplacements progressent plus rapidement. Enfin, un dernier changement de la pente se produit à cause de la plastification des armatures centrales jusqu'à la rupture des armatures aux extrémités.

- $M_{rd,el}(0) = \frac{qL^2}{12} = F_{trac} \cdot (z) = (0,0004 * 355 * 10^6) * \left(0,56 - \frac{0,004*355*10^6}{0,3*17*10^6}\right) = 77,543 \text{ [kN.m]}$
- $q_{max,el}(0) = \frac{M_{rd,el}*12}{L^2} = 25,847 \text{ [kN/m]}$

Et par les mêmes calculs, les valeurs de la limite d'élasticité au centre de la poutre et de la résistance ultime aux extrémités sont calculées :

- $M_{el}(L/2) = 48,927 \text{ [kN.m]}$
- $q_{max,el}(L/2) = 32,619 \text{ [kN/m]}$
- $M_{rd}(0) = 110,16 \text{ [kN.m]}$
- $q_{max,pl}(0) = 36,72 \text{ [kN/m]}$

Les trois charges calculées correspondent au graphe obtenu par l'analyse non-linéaire.

5.3 Conclusion

Pour conclure ce chapitre, il est important de résumer les capacités et les limites du modèle. Les résultats obtenus sont proches de la réalité et permettent ainsi de prévoir correctement le comportement d'une structure en béton armé. Le modèle renvoie également le lieu et la cause de rupture, permettant ainsi de bien comprendre les fragilités d'une structure. De plus, le calcul analytique des déformations d'une structure en béton est laborieux, et ce programme permet de les trouver rapidement. Toutefois il faut veiller à être précis dans l'encodage des données input, étant conscient que celles-ci sont nombreuses et que la moindre erreur fausserait les résultats finaux. Pour que les résultats se rapprochent de la réalité, il faut également que les éléments finis soient les plus petits possible. En effet, il a été observé que la section doit être subdivisée en beaucoup de bandes pour que le comportement plastique soit correct. Il est également important de sectionner les membres d'une structure en un maximum d'éléments afin d'obtenir des résultats optimaux. L'écart entre les déplacements aux nœuds et les efforts internes au centre des éléments est un facteur important à prendre en compte dans l'interprétation des résultats.

Le modèle peut être précis et consistant mais pour cela, il faut connaître les limites de celui-ci et les prendre en considération dans l'intégration des données.

6 MODÈLE DE CORROSION

L'analyse structurelle non-linéaire étant réalisée, il est maintenant possible de procéder au modèle de corrosion. Pour évaluer les dégradations d'une structure, les équations vues au premier chapitre seront utilisées. Pour la phase d'initiation, seule la carbonatation sera modélisée. Ensuite, la modélisation de la corrosion des armatures sera décrite. Pour finir, les résultats, seront présentés et commentés.

L'objectif de ce modèle est, dans un premier temps, de prévenir la rupture des structures du siècle précédent et, dans un deuxième temps, de montrer l'importance des mesures contre la dégradation. En effet, les caractéristiques comme l'enrobage et la densité du béton ont un rôle majeur pour prévenir des ruptures précoces par corrosion.

6.1 Modèle de carbonatation

Plusieurs équations ont été présentées lors du premier chapitre, 2 équations seront modélisées. La première est l'équation la plus présente dans la littérature (Tuutti):

$$x(t) = K * \sqrt{T} \quad 6.1$$

Pour le modèle de Tuutti, K sera une constante intégrée dans l'input du programme. T est le temps en année et est, dans le programme, la variable d'une boucle. L'équation est donc linéaire et facile à implanter.

Ensuite, le modèle proposé par Veskari est intégré dans le programme. L'équation est effectivement intéressante car elle prend les fissures en considération.

$$x(t) = 50\sqrt{w} \cdot \sqrt[4]{t} \quad 6.2$$

Cette équation est plus complexe car elle prend en compte les fissures. Les fissures sont elles-mêmes dépendantes de la charge subie par la structure. En effet, l'équation pour les déterminer est la suivante [29] :

$$w = S_{r,max}(\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}) \quad 6.3$$

- $S_{r,max}$: Distance maximale entre les fissures.
- ε_{sm} : Déformation moyenne de l'acier.
- ε_{cm} : Déformation moyenne du béton entre les fissures.

6.1.1 $S_{r,max}$

Pour trouver l'écart maximal entre les fissures la formule suivante est utilisée :

$$S_{r,max} = 3,4C + 0,425k_1k_2 \frac{\phi}{\rho_{s,eff}} \quad 6.4$$

- C : Enrobage
- k_1 : Types d'armatures (Haute adhérence =0,8 ; Surface lisse (câbles)=1,6)

- k_2 : Répartition des efforts (0,5 : Flexion simple, 1 : Fraction pure et $\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_1}$: Traction excentrée)
- ϕ : Diamètre des barres ($\phi_{eq} = \frac{\sum n_i \phi_i^2}{\sum n_i \phi_i}$)
- $\rho_{s,eff}$: Ratio d'armatures dans la section ($\rho_{s,eff} = \frac{A_s}{A_{c,eff}}$ avec $A_{c,eff} = b * h_{c,eff}$)
- $h_{c,eff} : \text{Min} \left(2,5 \cdot (h - d) ; \frac{h-x}{3} ; \frac{h}{2} \right)$

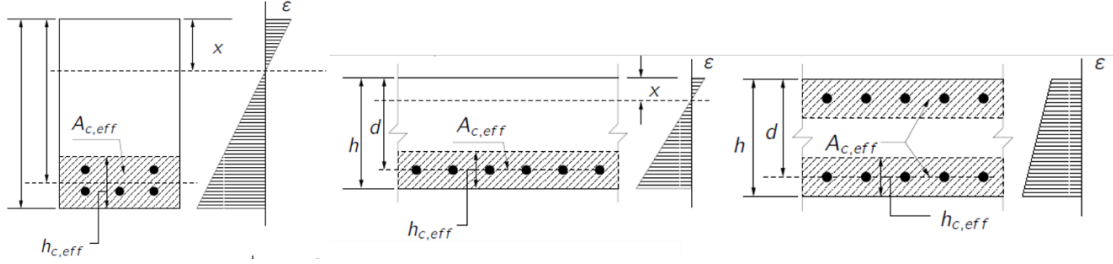


Figure 60: Schématisation de Aceff [29]

6.1.2 ($\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm}$)

La différence entre les déformations est calculée au moyen de l'expression suivante :

$$\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = \frac{\sigma_s}{E_s} - k_t \frac{f_{ct,eff}}{E_s \rho_{s,eff}} (1 + \alpha_e \rho_{s,eff}) \geq 0,6 \frac{\sigma_s}{E_s} \quad 6.5$$

Si l'inégalité n'est pas respectée, alors on égalise $\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} = 0,6 \frac{\sigma_s}{E_s}$ dans l'équation 5.3.

- k_t : Facteur reprenant les conditions de chargement (0,6 ; 0,4)
- $f_{ct,eff}$: Résistance effective à la traction du béton
- α_e : Coefficient d'équivalence effective, $\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cm}}$

Les valeurs E_s et σ_s sont déjà calculées dans l'analyse sectionnelle du programme. Elles seront donc intégrées dans une nouvelle variable pour permettre de les utiliser pour le calcul des fissures.

Toutes les informations sont réunies pour permettre le calcul des fissures. L'intégration des fissures dans le programme est possible.

6.2 Modèle de corrosion

Pour la modélisation de la corrosion l'équation employée dans le modèle numérique est celle de Sarja et Veskari [21] . Rappelons les termes de l'équation :

$$d(t) = D_0 - n \cdot d'(t) \quad 6.6$$

- $n=(1,2)$
- D_0 , le diamètre initial
- $d'(t) = 0,0116 \cdot i_{corr} \cdot (t - t_0)$
- $i_{corr} = B * \frac{1}{R_p}$
- $B \cong 0,26[mV]$

La surface d'armature correspond à :

$$A_s = \begin{cases} \frac{N_s \cdot \pi \cdot D_0^2}{4} & \text{if } t \leq t_0 \\ \frac{N_s \cdot \pi \cdot [D_0 - n \cdot d'(t)]^2}{4} & \text{if } t > t_0 \end{cases}$$

La surface des armatures sera modifiée par ces équations lorsque le front de carbonatation aura atteint les armatures.

6.3 Modèle numérique de corrosion

Pour inclure la corrosion dans l'analyse non-linéaire, 2 modèles ont été créés. Le premier permet, pour une charge fixe, de connaître l'évolution de la surface d'armatures, des déplacements des nœuds ou de la profondeur de carbonatation dans le temps. Le second modèle permet de connaître l'évolution de la résistance maximale d'une structure. Le premier modèle permet donc d'évaluer la durée de vie d'une structure existante alors que le second permet de connaître la charge maximale qu'une structure peut soutenir après un nombre défini d'années.

6.3.1 Modèle 1 : Charge fixe

Ce modèle doit permettre d'évaluer les dommages d'une structure par la corrosion des armatures induite par la carbonatation. Pour le réaliser, une boucle générale est insérée au modèle non-linéaire où chaque itération représente une année. La boucle effectue un nombre d'itération imposé. A chaque itération, la fonction CARBONATATION et CORROSION sont appelées. CARBONATATION détermine la profondeur de carbonatation de chaque élément selon le modèle demandé (Tutti ou Veskari). Si la profondeur de carbonatation est supérieure à l'enrobage, la fonction CORROSION va diminuer le diamètre de l'armature selon l'équation 6.2.

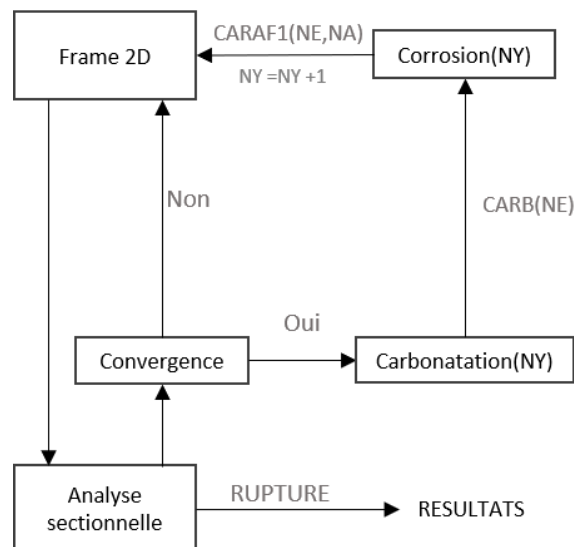


Figure 61: Schéma du modèle 1

La variable CARB(NELE) est créée, elle retourne la profondeur de carbonatation de chaque élément. CARAF1(NELE,NA) est également imaginée, correspondant à la surface des armatures de chaque élément. La variable varie donc lorsque la profondeur de carbonatation est supérieure à l'enrobage.

6.3.2 Résultats du modèle 1

Les résultats ont été obtenus avec la poutre isostatique de référence (Figure 52, Annexe 1), avec une charge constante de 15kN/m.

6.3.2.1 Carbonatation

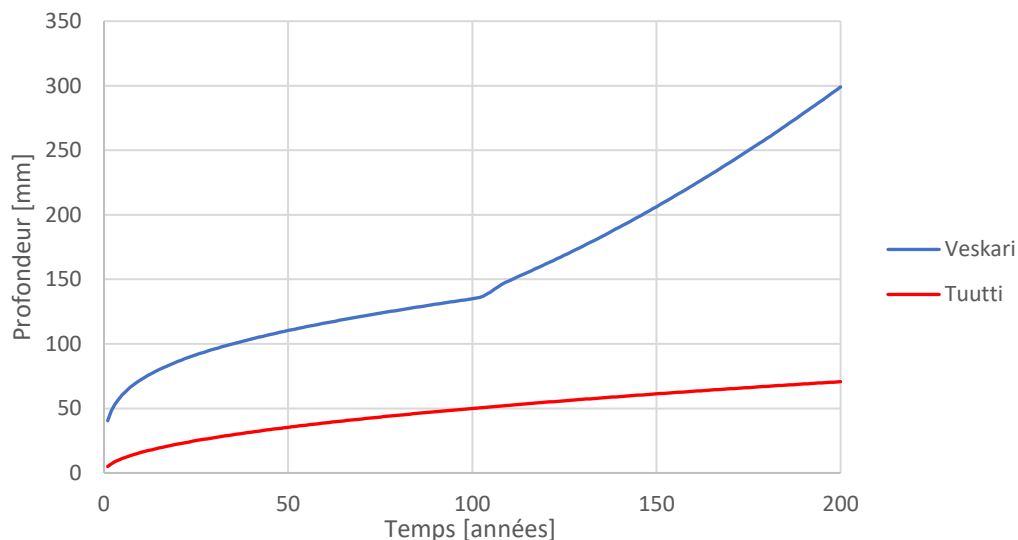


Figure 62: Profondeur de carbonatation

La courbe de carbonatation selon Tuutti suit bien une loi parabolique. Le coefficient de carbonatation, K , choisit pour cet exemple est de 5 [$mm/an^{0,5}$]. Pour le modèle de Veskari, la courbe subit une croissance instantanée après environ 120 ans. Ce pic correspond au moment où les fissures se développent. Lorsque $\varepsilon_{sm} - \varepsilon_{cm} \geq 0,6 \frac{\sigma_s}{E_s}$, la formule 6.5 peut être utilisée et intégrée dans la formule de Veskari. Avant ça, la largeur des fissures, w , étaient égale à $0,6 \frac{\sigma_s}{E_s}$. Ces modèles sont considérés dans le cas idéal avec une section infinie. Le graphe nous montre que la carbonatation selon Veskari est plus rapide que celle de Tutti pour un $K=5$. Le graphique, Figure 63, permet de comparer la vitesse de carbonatation pour des valeurs de K différentes.

Le graphique nous montre l'importance d'avoir un béton avec une haute densité. Le modèle de Tuutti néglige l'apparition de fissures dans le béton. Une poutre en flexion présente pourtant des fissures dont la taille peut varier. La profondeur de carbonatation est calculée au centre de la poutre. L'élément sélectionné pour la mesure de carbonatation n'influence pas la courbe de Tuutti mais a une influence non-négligeable sur le modèle de Veskari. Le schéma de la poutre indique le numéro de chaque élément et le graphique, Figure 65, montre l'influence du positionnement sur la carbonatation selon Veskari.

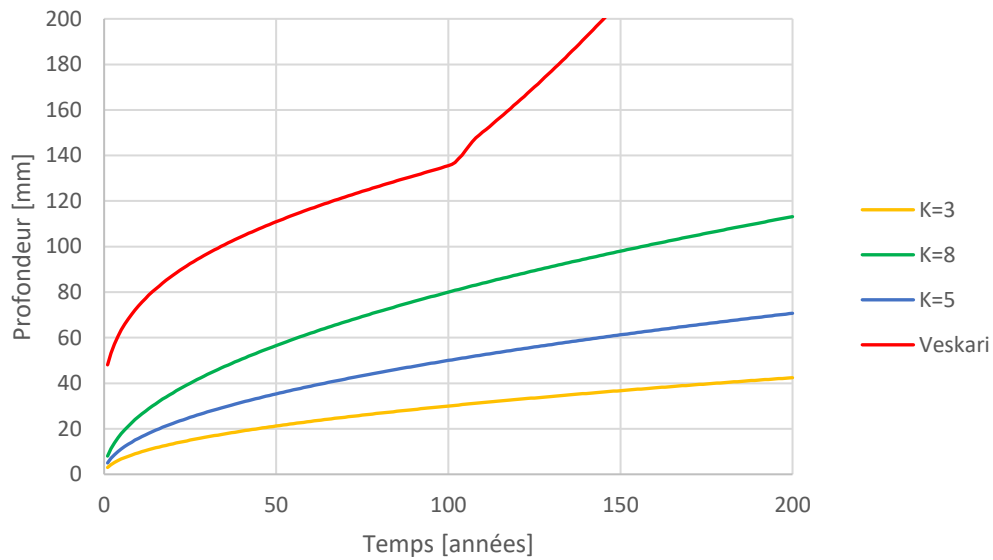


Figure 63: Profondeur de la carbonatation, effet du coefficient de carbonatation

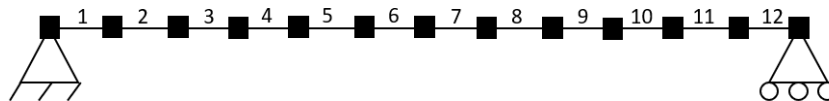


Figure 64: Numérotation des éléments

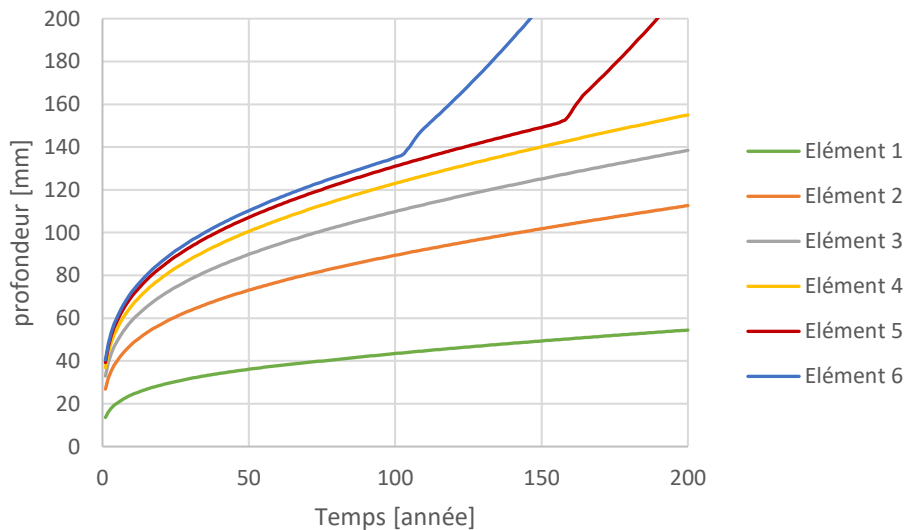


Figure 65: Modèle de Veskari

L'influence des contraintes sur la carbonatation est très claire sur ce graphe. Les éléments subissant le plus de traction seront le plus carbonatés. La carbonatation atteint les armatures aux extrémités après environ 75 ans. Cependant, elle atteint rapidement l'armature au centre de la poutre.

6.3.2.2 Corrosion

L'analyse des résultats pour la corrosion des armatures se fait via l'évolution de la surface d'armature dans le temps. Pour ce modèle, la charge est constante et inférieure à la résistance initiale de la poutre. Avec la carbonatation et ensuite la corrosion, la résistance va baisser et, après un certain nombre d'années, va devenir inférieure aux efforts sollicitant. Le graphique suivant montre l'évolution de la surface d'armature obtenu grâce au modèle de Sarja et Veskari [21].

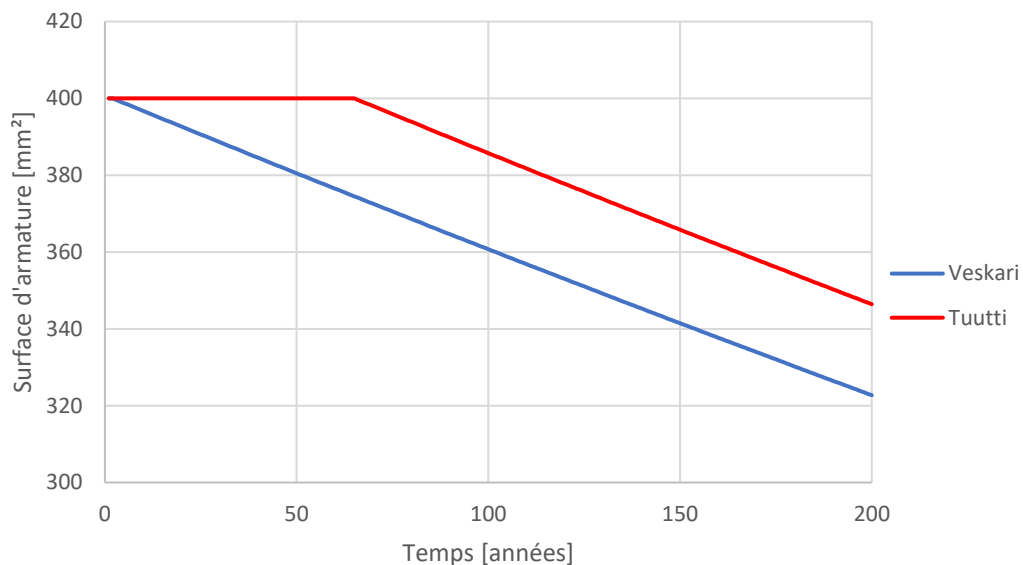


Figure 66: Evolution de la section d'armature

La corrosion commence au moment où la carbonatation atteint 40[mm] (Figure 63). Le modèle de carbonatation de Veskari induit une corrosion plus précoce que celui de Tuutti mais, lorsque la corrosion est introduite, le comportement est identique pour les deux.

Sur ce graphe, la corrosion est instantanée pour le modèle de Veskari. C'est la conséquence de l'apparition de fissures en flexion. Une structure isostatique subit beaucoup de fissures car les déplacements sont élevés. Pour cette raison, il est intéressant d'analyser la vitesse de corrosion d'une structure qui subit moins de déplacement. La structure choisie est la poutre hyperstatique qui, par ses deux encastresments, limite ses déplacements.

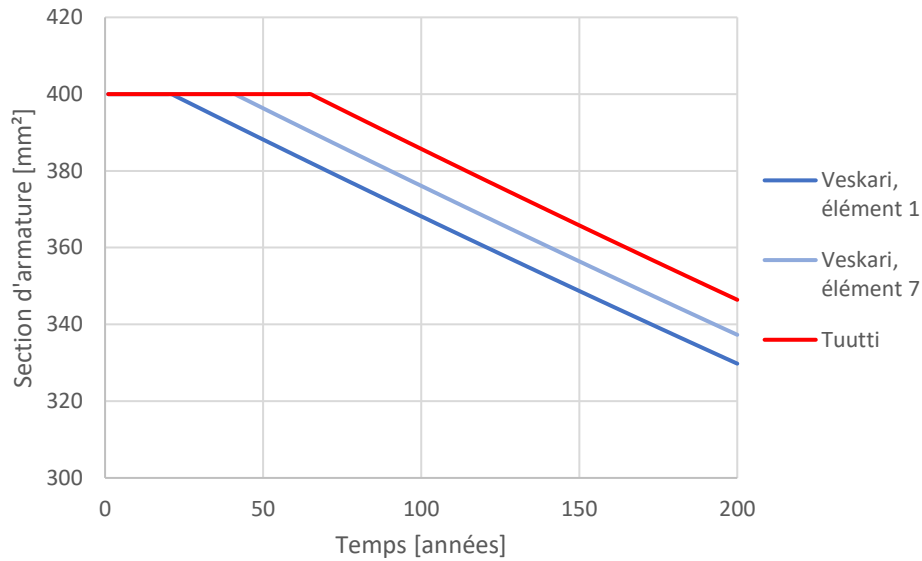


Figure 67: Evolution de la section d'armature pour une poutre hyperstatique (Veskari)

La phase d'initiation est alors également visible pour le modèle de Veskari. Un décalage est remarqué entre la section d'armature à l'extrémité et au milieu de la poutre ; il est causé par l'effet des contraintes de traction dans la poutre.

6.3.2.3 Déplacement de la poutre

Les effets de la corrosion n'ont pas beaucoup d'influence sur le déplacement de la poutre lors des premières années. Avec le modèle de Veskari, la corrosion commence directement, influençant ainsi les déplacements à progresser. Pour Veskari, une progression assez faible du déplacement est à observer entre 15 et 60 ans. Après cela, les déplacements progressent plus vite. Le même processus est à observer avec le modèle de Tuutti mais avec 70 ans de décalage.

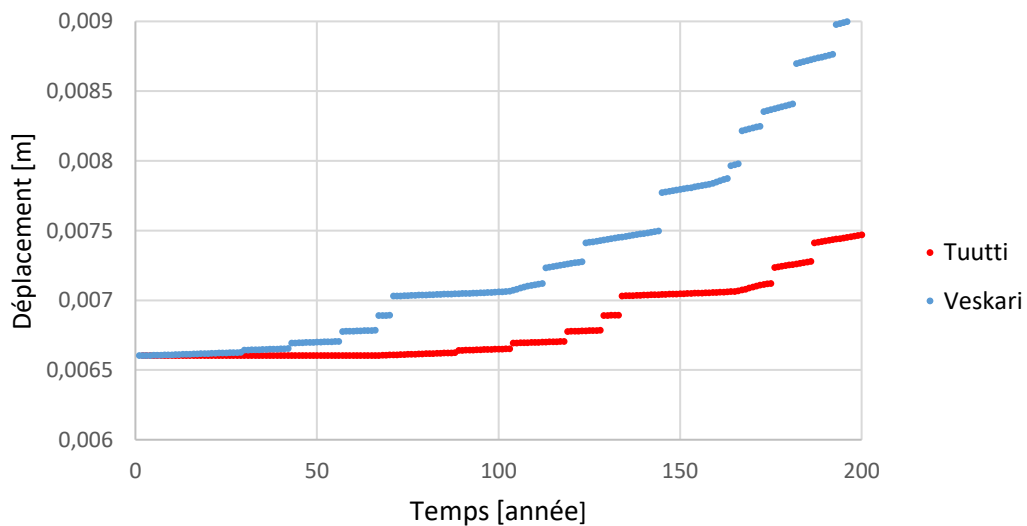
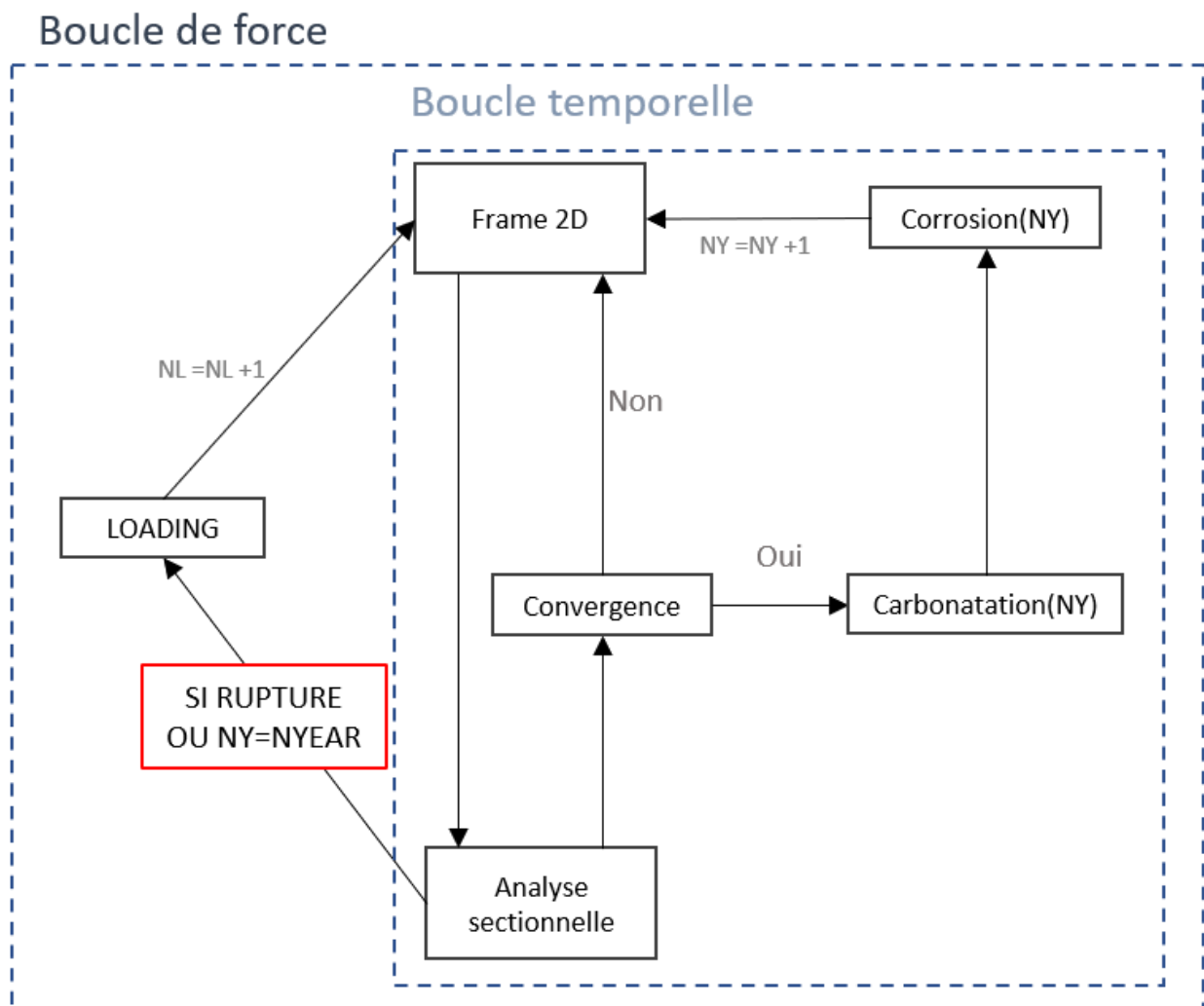


Figure 68: Déplacement vertical du centre de la poutre

5.3.3 Modèle 2 : Charge ultime

Ce modèle permet d'obtenir l'évolution de la résistance d'une structure. La résistance baissera une fois que les armatures se corrodent. Le modèle non-linéaire déterminant la résistance ultime a été utilisé et modifié. La boucle temporelle a été incorporée dans la boucle des forces. Cela veut dire que, pour chaque force, une boucle temporelle est enclenchée, déterminant le nombre d'années après lesquelles la rupture apparaît.



La boucle temporelle se reproduit tant qu'il n'y a pas de rupture ou que le nombre d'années maximal n'est pas atteint. Une fois que la boucle temporelle est achevée, la boucle de force réitère l'opération avec une force extérieure plus élevée.

6.3.4 Résultats modèle 2

Les résultats du modèle sont obtenus avec la poutre isostatique (Figure 52) et la poutre hyperstatique (Figure 58). Un graphe présentant l'évolution des ruptures élastiques et les ruptures ultimes est présenté.

6.3.4.1 Poutre isostatique

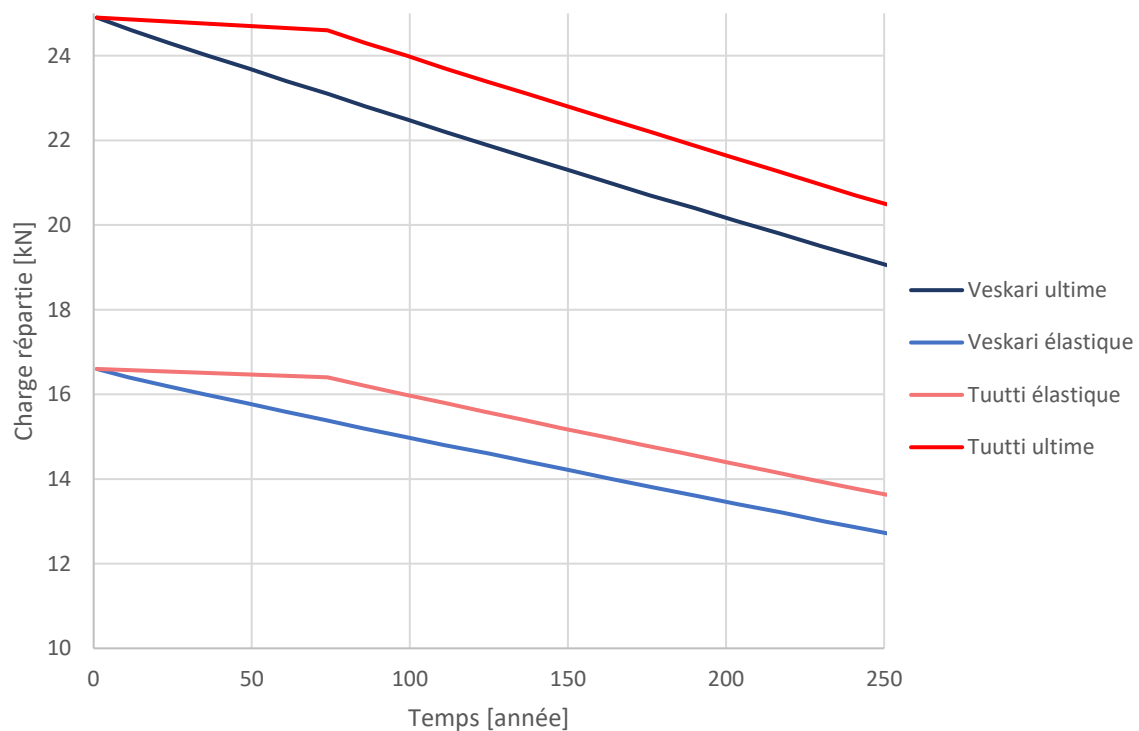


Figure 69 Evolution de la résistance de la poutre isostatique

La résistance ultime et la limite d'élasticité au temps 0 correspondent au graphe obtenu par l'analyse structurelle (Figure 54). La phase d'initiation est visible sur le modèle avec la carbonatation selon Tuutti. Celle-ci correspond à un plateau de 74 années de carbonatation jusqu'à atteindre les armatures. La corrosion des armatures provoque selon le modèle une baisse de résistance linéaire après la phase d'initiation. Cette baisse de résistance représente environ une perte de 1% tous les 10 ans.

Avec la carbonatation de Veskari, la résistance diminue instantanément. C'est une conséquence des déplacements élevés de la poutre isostatique. Effectivement, le déplacement élevé provoque des fissures et la carbonatation est instantanée.

6.3.4.2 Poutre hyperstatique

Voici le graphe de l'évolution de la résistance plastique et élastique de la poutre hyperstatique de même dimension que décrit à la Figure 58. Le graphe de la résistance plastique est non-linéaire car il y a la plastification du centre de la poutre qui redistribue les efforts et permet une plus grande résistance aux extrémités. Le plateau au centre représente donc la force répartie où se produit la plasticité du centre de la poutre.

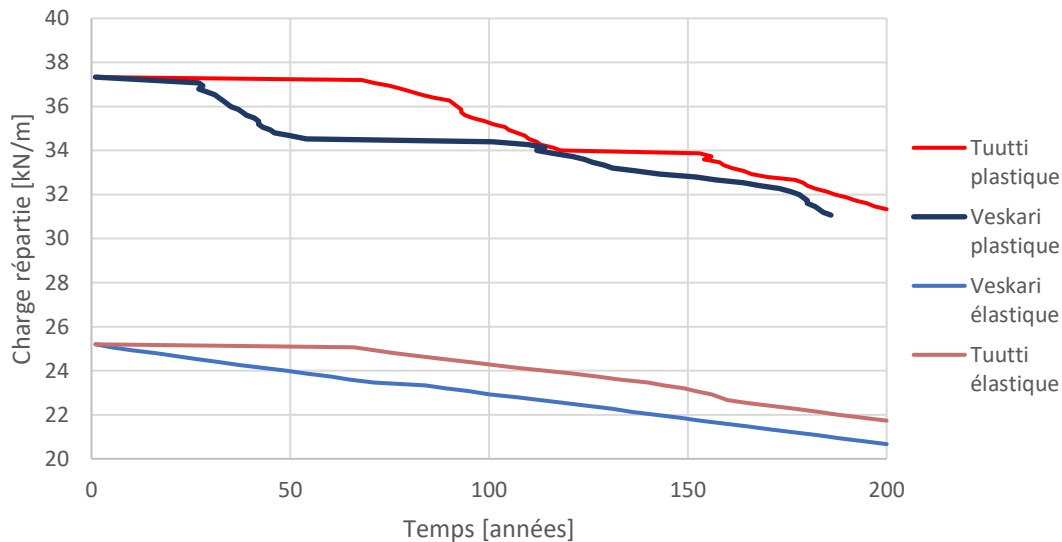


Figure 70 : Evolution de la résistance dans la poutre hyperstatique

Un autre exemple vous est présenté lorsque la section de béton est la même sur toute la longueur de la poutre. Deux armatures de 400 mm² sont placées sur la partie inférieure et supérieure de la section. Avec cette géométrie, le milieu de la poutre ne se plastifiera pas avant la rupture et la courbe est pour cette raison linéaire.

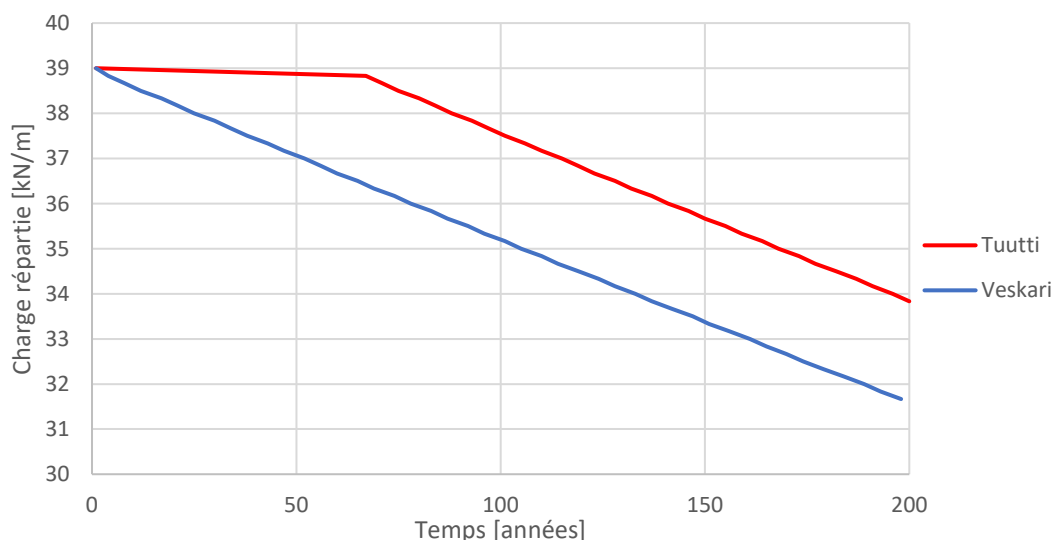


Figure 71: Evolution de la résistance d'une poutre isostatique à section constante

Sur ces graphes, aucune phase d'initiation n'est à observer sur le modèle de Veskari. Les charges sont par conséquent trop élevées pour qu'une phase de propagation soit visible.

6.3.5 Facteur limitant la corrosion induite par la carbonatation

Il existe plusieurs moyens pour ralentir la corrosion : la densité du béton permet de freiner la vitesse de carbonatation, l'enrobage permet d'allonger la distance entre l'aire et l'acier, enfin, il faut éviter un rapport eau-ciment (w/c) trop élevé afin de protéger de la corrosion. L'influence de l'enrobage sur l'évolution de la résistance d'une structure peut, grâce aux modèles conçus, être analysée.

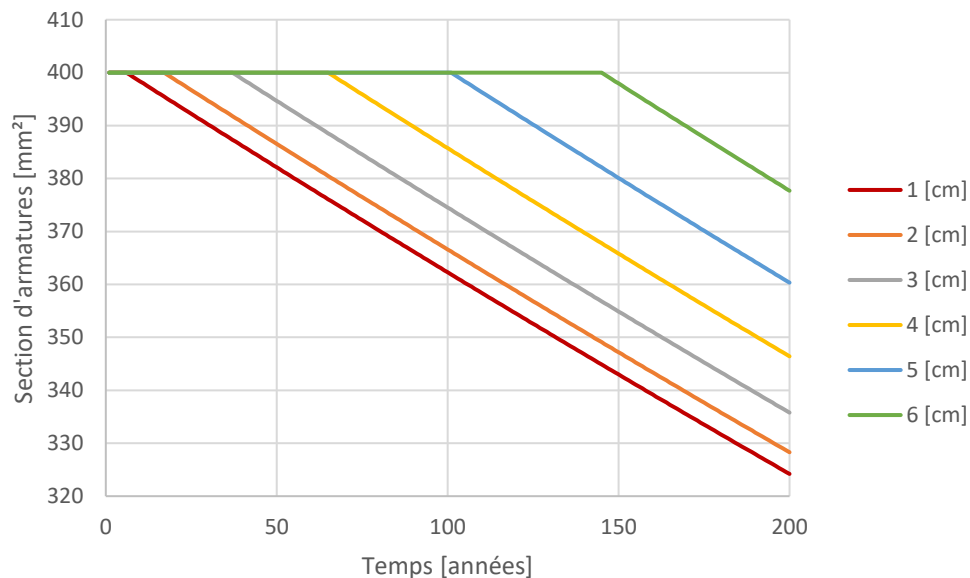


Figure 72 : Influence de l'enrobage sur la résistance (Tuutti)

Le premier graphe représente l'évolution de la section d'armature dans le temps pour le modèle de Tuutti, pour différentes tailles d'enrobage. Le coefficient de carbonatation utilisé est de $5 \text{ [mm/an}^{0,5}]$.

Ce graphe permet de comprendre l'importance d'un enrobage suffisant pour protéger l'armature contre les dégradations naturelles. En effet, l'augmentation de l'enrobage augmente exponentiellement le temps d'initiation. Le même graphe a été construit avec le modèle de Veskari sur une poutre hyperstatique subissant une charge de 10 kN/m. Les résultats sont calculés à l'extrémité de la poutre au niveau de l'armature supérieure.

Les mêmes conclusions peuvent être établies pour le modèle de Veskari. Cependant, les charges subies par la structure hyperstatique sont nettement inférieures à la capacité réelle de la structure. Lorsque les charges sont élevées il a été observé que la carbonatation peut atteindre les armatures beaucoup plus rapidement. De plus, un élément isostatique sensible au déplacement est également plus rapidement carbonaté à cause de la formation de fissures.

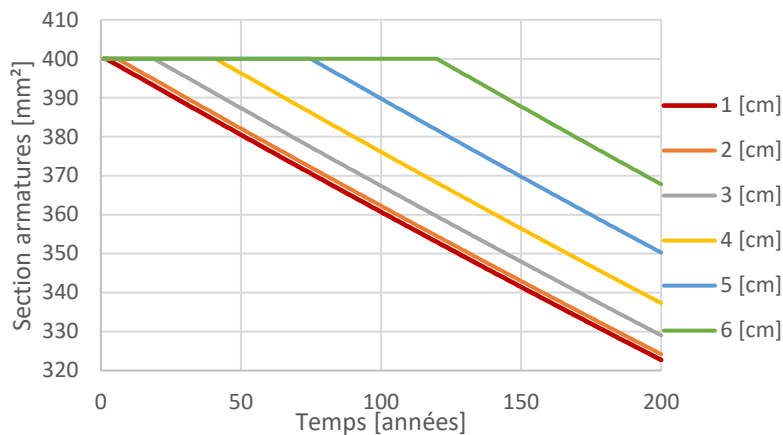


Figure 73: Influence de l'enrobage sur la résistance (Veskari)

6.4 Conclusion

Les résultats obtenus par le modèle sont pertinents et montrent l'importance de retarder l'initiation de la corrosion. En effet, une fois la corrosion initiée, la résistance peut baisser significativement (1% tous les 10 ans). Pour retenir la carbonatation, plusieurs moyens sont possibles. La sélection d'un béton plus dense permet de réduire le coefficient de carbonatation et de freiner la vitesse de carbonatation. Il est également important d'optimiser la structure pour réduire les déplacements et ainsi minimiser les fissures. Finalement, l'enrobage est déterminant pour protéger les armatures plus longtemps.

Les deux modèles de carbonatation donnent des résultats assez différents. Tuutti est fiable pour un béton homogène sans fissures, alors que le modèle de Veskari ne prend en compte que les fissures et ignore les caractéristiques du béton et de l'environnement.

Le modèle final présente cependant des désavantages. D'abord, l'intégration de la structure en fichier texte n'est pas évidente et peut contenir des erreurs. Ensuite, les deux modèles de carbonatation sont simples et incomplets : Tuutti ne tient pas compte des fissures et Veskari se limite à ce facteur. Il est également difficile de savoir si le modèle de la vitesse de corrosion (Veskari et Sarja) est proche de la réalité. Une étude expérimentale serait utile pour vérifier le modèle. Malheureusement, le temps d'expérience est trop long pour l'intégrer dans la thèse.

7 Conclusion Générale

Durant le Moyen-Âge, des cathédrales ont été construites un peu partout en Europe. La construction de tels ouvrages ne connaissait pas les technologies d'aujourd'hui et recourait à des matériaux basiques. Elle durait des centaines d'années et se faisait au prix de nombreux sacrifices humains.

Aujourd'hui, les constructions immobilières sont de plus en plus rapides et rentables vu les nouvelles technologies. Cependant, les cathédrales sont toujours présentes dans nos pays après un millénaire alors que les ouvrages d'aujourd'hui sont détruits 50 à 100 ans plus tard.

Le retour au système médiéval n'est évidemment pas la solution pour obtenir des ouvrages durables mais il nous confronte à une certaine déficience qualitative de la construction moderne entièrement tournée vers le profit. Cette thèse n'a pas pour but de changer la société. Elle permet cependant de montrer aux constructeurs une vision à plus long terme. Grâce au modèle présenté, on peut prévoir la dégradation et par conséquent la prévenir.

La dégradation du béton est effectivement un problème actuel qui concerne tous les ouvrages. En effet, comme les agents agressifs font partie intégrante de l'air (H_2O et CO_2), il est impossible d'arrêter le processus. La carbonatation et la pénétration des chlorures sont les phénomènes qui détruisent la couche protectrice de l'armature et introduisent alors la corrosion. Ces phénomènes sont prévisibles grâce à des modèles mathématiques étudiés dans la littérature. Les modèles ont été sélectionnés, présentés et intégrés dans une modélisation numérique.

L'analyse structurelle du modèle a été effectuée avec une résolution numérique non-linéaire entre les changements géométriques sectionnels et l'analyse des déplacements structuraux. Effectivement, la section d'une structure en béton armé subit des déformations changeant sa géométrie et ses caractéristiques mécaniques. Ces changements sont intégrés dans l'analyse structurelle modifiant ainsi les déplacements. La boucle continue alors jusqu'à l'obtention d'une convergence des déplacements. Les résultats obtenus pour le modèle non-linéaire sont réalistes et vérifiés pour des structures simples présentant des caractéristiques différentes. Un programme permet également une visualisation graphique des efforts et des déplacements. Cette représentation graphique favorise une meilleure compréhension du comportement structurel. Un modèle supplémentaire a été conçu pour connaître la charge maximale qu'une structure peut subir avant la rupture de l'acier ou du béton.

L'analyse numérique non-linéaire permet alors l'introduction de la carbonatation et de la corrosion. Le phénomène de corrosion par les chlorures n'a pas été modélisé mais pourrait être rajouté au modèle pour une potentielle suite du modèle numérique.

Deux modèles de dégradation ont alors été créés. Le premier permet de connaître l'évolution d'une structure subissant une charge constante. Ce modèle retourne la progression des déplacements dans le temps. Le deuxième modèle permet de connaître l'évolution de la résistance ultime et élastique d'un ouvrage en béton. Ces deux modèles réunis permettent alors à l'utilisateur d'évaluer la longévité d'une structure ou de connaître le niveau des dégradations d'un ouvrage plus ancien.

Grâce aux résultats obtenus, l'importance de l'enrobage et des caractéristiques du béton ainsi que l'effet néfaste des fissures sur la corrosion ont été démontrés. L'enrobage est l'un des critères les plus importants pour retarder la corrosion. Il a été montré que l'épaisseur d'enrobage a une influence exponentielle sur le temps de carbonatation.

Les différents critères sont aujourd'hui pris en considération dans l'Eurocode. En effet, un enrobage minimal est demandé et des caractéristiques spécifiques de béton sont requises. L'Eurocode propose un enrobage minimal de 40[mm] pour des structures extérieures. Selon notre modèle, une poutre hyperstatique avec un enrobage de 40 mm serait atteinte de corrosion après seulement 45 ans. Ce critère est, par conséquent, trop faible pour assurer une protection à la dégradation naturelle. Par contre, les coefficients de sécurité et les contraintes ELS permettent de réduire les fissures dans le béton. En générale, les structures modernes dans les normes de l'Eurocode assurent une durée de vie suffisante. Malheureusement, les ouvrages utilitaires d'aujourd'hui datent pour la plupart du 20^{ème} siècle et les normes étaient à l'époque moins respectées. Ces structures peuvent dès lors aujourd'hui représenter un réel danger si elles ne sont pas vérifiées.

Le modèle numérique présenté dans cette thèse permet de prévenir de tels accidents.

8 Annexes

8.1 Annexe 1 : Frame 1

FRAME 1	: NODES, ELEMENTS, MATERIALS, SECTIONS
13 12 1 1	
COORDINATE DEI NODI	: ABSCISSA (X), ORDINATE (Y)
0.0 0.0	
0.5 0.0	
1.0 0.0	
1.5 0.0	
2.0 0.0	
2.5 0.0	
3.0 0.0	
3.5 0.0	
4.0 0.0	
4.5 0.0	
5.0 0.0	
5.5 0.0	
6.0 0.0	
CONNECTIVITY DATA	: NODE1, NODE2, NUM. MAT., NUM. SEZ.
1 2 1 1	
2 3 1 1	
3 4 1 1	
4 5 1 1	
5 6 1 1	
6 7 1 1	
7 8 1 1	
8 9 1 1	
9 10 1 1	
10 11 1 1	
11 12 1 1	
12 13 1 1	
MATERIALS CHARACTERISTICS	: MODULUS E, POISSON, ALFA, DENSITY
30000000000.0 0.0 0.0 0.0	
CHARACTERISTICS OF THE SECTIONS	: AREA, INERTIA, SHEAR FACTOR, DEEP
0.18 0.0054 0.0 0.60	
RIGID LINKS	: (NUMBER), A, B, C, D
0	
RESTRAINTS	: (NUMBER), NODE, DIRECTION
3	
1 1	
1 2	
13 2	
DIVISION LOAD	: NUMBER OF LOAD iteration
300	
CONCENTRATED LOADS	: (NUMBER), NODE, DIRECTION, VALUE
0	
DISTRIBUTED LOADS	: (NUMBER), ELEM, PX, PY1, PY2
12	
1 0.0 -10000.0 -10000.0	
2 0.0 -10000.0 -10000.0	
3 0.0 -10000.0 -10000.0	
4 0.0 -10000.0 -10000.0	
5 0.0 -10000.0 -10000.0	
6 0.0 -10000.0 -10000.0	
7 0.0 -10000.0 -10000.0	
8 0.0 -10000.0 -10000.0	
9 0.0 -10000.0 -10000.0	
10 0.0 -10000.0 -10000.0	
11 0.0 -10000.0 -10000.0	
12 0.0 -10000.0 -10000.0	

8.2 Annexe 2 : Frame 2

FRAME 2	: NODES, ELEMENTS, MATERIALS, SECTIONS
13 12 1 1	
COORDINATE DEI NODI	: ABSCISSA (X), ORDINATE (Y)
0.0 0.0	
0.5 0.0	
1.0 0.0	
1.5 0.0	
2.0 0.0	
2.5 0.0	
3.0 0.0	
3.5 0.0	
4.0 0.0	
4.5 0.0	
5.0 0.0	
5.5 0.0	
6.0 0.0	
CONNECTIVITY DATA	: NODE1, NODE2, NUM. MAT., NUM. SEZ.
1 2 1 1	
2 3 1 1	
3 4 1 1	
4 5 1 1	
5 6 1 1	
6 7 1 1	
7 8 1 1	
8 9 1 1	
9 10 1 1	
10 11 1 1	
11 12 1 1	
12 13 1 1	
MATERIALS CHARACTERISTICS	: MODULUS E, POISSON, ALFA, DENSITY
3000000000.0 0.0 0.0 0.0	
CHARACTERISTICS OF THE SECTIONS	: AREA, INERTIA, SHEAR FACTOR, DEEP
0.18 0.0054 0.0 0.60	
RIGID LINKS	: (NUMBER), A, B, C, D
0	
RESTRAINTS	: (NUMBER), NODE, DIRECTION
6	
1 1	
1 2	
1 3	
13 1	
13 2	
13 3	
CONCENTRATED LOADS	: (NUMBER), NODE, DIRECTION, VALUE
0	
DISTRIBUTED LOADS	: (NUMBER), ELEM, PX, PY1, PY2
12	
1 0.0 -10000.0 -10000.0	
2 0.0 -10000.0 -10000.0	
3 0.0 -10000.0 -10000.0	
4 0.0 -10000.0 -10000.0	
5 0.0 -10000.0 -10000.0	
6 0.0 -10000.0 -10000.0	
7 0.0 -10000.0 -10000.0	
8 0.0 -10000.0 -10000.0	
9 0.0 -10000.0 -10000.0	
10 0.0 -10000.0 -10000.0	
11 0.0 -10000.0 -10000.0	
12 0.0 -10000.0 -10000.0	

8.3 Annexe 3 : Frame 3

FRAME 3	: NODES, ELEMENTS, MATERIALS, SECTIONS
17-16-1-1	
NODAL COORDINATES	: ABSCISSA (X), ORDINATE (Y)
4.0 - 0.0	
4.0 - 1.0	
4.0 - 2.0	
4.0 - 3.0	
0.0 - 4.0	
1.0 - 4.0	
2.0 - 4.0	
3.0 - 4.0	
4.0 - 4.0	
5.0 - 4.0	
6.0 - 4.0	
7.0 - 4.0	
8.0 - 4.0	
4.0 - 5.0	
4.0 - 6.0	
4.0 - 7.0	
4.0 - 8.0	
CONNECTIVITY DATA	: NODE1, NODE2, NUM. MAT., NUM. SEZ.
1-2-1-1	
2-3-1-1	
3-4-1-1	
4-9-1-1	
5-6-1-1	
6-7-1-1	
7-8-1-1	
8-9-1-1	
9-10-1-1	
10-11-1-1	
11-12-1-1	
12-13-1-1	
9-14-1-1	
14-15-1-1	
15-16-1-1	
16-17-1-1	
RESTRAINTS	: (NUMBER), NODE, DIRECTION
12	
1-1	
1-2	
1-3	
5-1	
5-2	
5-3	
13-1	
13-2	
13-3	
17-1	
17-2	
17-3	
DISPLACEMENTS	: (NUMBER), NODE, DIRECTION, VALUE
0	
SPRING	: (NUMBER), NODE, DIRECTION, STIFFNESS
0	
CONCENTRATED LOADS	: (NUMBER), NODE, DIRECTION, VALUE
1	
9 3 1000	
DISTRIBUTED LOADS	: (NUMBER), ELEM, PX, PY1, PY2
0	

8.4 Annexe 4 : Frame 4

FRAME 4	: NODES, ELEMENTS, MATERIALS, SECTIONS
13-12-1-1	
NODAL COORDINATES	: ABSCISSA (X), ORDINATE (Y)
0.0 - 0.0	
0.0 - 1.0	
0.0 - 2.0	
0.0 - 3.0	
0.0 - 4.0	
0.0 - 5.0	
0.0 - 6.0	
1.0 - 5.0	
2.0 - 4.0	
3.0 - 3.0	
4.0 - 2.0	
5.0 - 1.0	
6.0 - 0.0	
CONNECTIVITY DATA	: NODE1, NODE2, NUM. MAT., NUM. SEZ.
1-2-1-1	
2-3-1-1	
3-4-1-1	
4-5-1-1	
5-6-1-1	
6-7-1-1	
7-8-1-1	
8-9-1-1	
9-10-1-1	
10-11-1-1	
11-12-1-1	
12-13-1-1	
RESTRAINTS	: (NUMBER), NODE, DIRECTION
4	
1-1	
1-2	
1-3	
13-2	
CONCENTRATED LOADS	: (NUMBER), NODE, DIRECTION, VALUE
0	
DISTRIBUTED LOADS	: (NUMBER), ELEM, PX, PY1, PY2
6	
1 0.0 10000.0 10000.0	
2 0.0 10000.0 10000.0	
3 0.0 10000.0 10000.0	
4 0.0 10000.0 10000.0	
5 0.0 10000.0 10000.0	
6 0.0 10000.0 10000.0	

8.5 Annexe 5 : Section 1

SECTION 1

1 0 4

ARMATURE PASSIVE

0.0004 0.1 -0.260

1.0 0.002 0.01 375000000. 375000000. 0. 0. 0. 0.

BETON

-0.150 0.150

0.150 0.150

0.150 0.300

-0.150 0.3

-0.150 0.

0.150 0.

0.150 0.150

-0.150 0.150

-0.150 -0.150

0.150 -0.150

0.150 0.

-0.150 0.

-0.150 -0.300

0.150 -0.300

0.150 -0.150

-0.150 -0.150

2.0 -15000000. -0.002 -0.0035 0. 0. 0. 0. 0.

9 Bibliographie

- [1] L. Sgambi, P. Malerba et G. Gotti, «The influence of degradation phenomena on collapse modes in prestressed concrete beams,» *International Journal of Lifecycle Performance Engineering*, 1(1), pp. 41-63, 2012.
- [2] Carde, «La corrosion des armatures,» *Béton*, 61-63 Juillet/Aout 2006.
- [3] T. k, *Corrosion of steel in concrete*, 1982: Swedish Cement and Concrete Research institute.
- [4] O. Loukil, *Etude expérimentale et numérique de la dégradation d'éléments structurels en béton armé par corrosion sous courant imposé*, Paris, 2018.
- [5] P. Malerba et al., «Valutazione del ciclo di vita delle infrastrutture sensibili,» *Eupolis Lombardia*, 2013.
- [6] L. S. Emanuele Lizzori, «Analisi di alcuni casi classici di degrado presenti nelle infrastrutture in calcestruzzo armato,» *ISAL-Numero speciale calcestruzzo armato*, 06 janvier 2020.
- [7] CSTC, «Corrosion des armatures induite par la carbonatation du béton : comment s'en prémunir ?,» *Les Dossiers du CSTC – N° 3/2007 – Cahier n° 2*, 2007.
- [8] C. Carde, «La carbonatation,» *Béton[s]*, pp. 53-54, Janv/Fev 2006.
- [9] B. Huet, *Comportement à la corrosion des armatures dans un béton carbonaté. Influence de la chimie de la solution interstitielle et d'une barrière de transport*, Lyon, 2005.
- [10] P. G. Malerba et al, «Influence of corrosive phenomena on bearing capacity of RC and PC beams,» chez *Advances in Concrete Construction Vol. 5, No. 2*, Milano, 2017, pp. 117-43.
- [11] T. Chaussadent, «Etat des lieux et réflexions sur la carbonatation du béton armé,» 1999.
- [12] E. Vesikari, «Service life prediction of concrete structures with regard to corrosion of reinforcement,» chez *Research Report NA 553*, Finland, Technical Research Center of Finland (VTT), 1988.
- [13] R. F. G. A. A. Castel, «Effect of loading on carbonation penetration in reinforced concrete elements,» *Cement and Concrete Research* 29, p. 561–565, 1999.
- [14] A. Köliö et al., «Durability demands related to carbonation induced corrosion for Finnish,» *Engineering Structures* 62-63, pp. 42-52, 2014.
- [15] Fédération internationale du béton, «Model code for service life design,» *fib Bulletin*

No.34, p. 116, 2006.

- [16] Y. Houst, «Carbonatation du béton et corrosion des armatures,» *Chronique des matériaux de construction*, pp. 569-574, 1984.
- [17] Cstc, «Prévenir la corrosion des armatures induite par la présence de chlorures dans le béton,» chez *Les Dossiers du CSTC – N° 4*, Bruxelles, 2008.
- [18] H. BenMansour, *Etude du comportement à la corrosion des armatures tendues dans le béton contaminé par des ions chlorure: Effet anticorrosif d'uninhibiteur à base de phosphates*, Lyon, 2018.
- [19] M. Boulfiza , K. Sakai, N. Banthia et H. Yoshida, «Prediction of chloride ions ingress in uncracked and cracked concrete,» *ACI Materials J.*,100, pp. 38-48, 2003.
- [20] Abbas. AL-Ameer, M. Imran Rafiq et Ourania Tsioulou, «Combined impact of carbonation and crack width on the Chloride Penetration and Corrosion Resistance of concrete Structures,» *Cement and Concrete Composites* 115, 2021.
- [21] A. Sarja et A. Vesikari, «Durability design of concrete structures,» *report of RILEM Technical Committee 130-CSL*, 1996.
- [22] «Electrochemical polarization I. A theoretical analysis of the shape of polarization curves,» *Journal of the electrochemical society*, vol. 104, no. 1, pp. 56-63, 1957.
- [23] J. P. FARÍAS, «Corrosion of steel in cracked concrete: Chloride microanalysis and service life predictions,» Deelft, 2015.
- [24] D. S. M. e. M. Val, «Effect of reinforced corrosion on reliability of highway bridges,» *ENg. Struct.* , n° 120(11), pp. 1010-1019, 1998.
- [25] J. A. Gonzalez, C. Andrade, C. Alonso et S. Feliu, «Comparison of rates of general corrosion and maximum pitting penetration on concrete embedded steel reinforcement,» *Cement Concrete*, pp. 257-264, 1995.
- [26] M. S. Darmawan et M. G. Stewart, «Effect of pitting corrosion on capacity of prestressing wires,» *Mag. Concrete Res.*, 59, pp. 131-19, 2007.
- [27] P. M. S. M. Quagliaroli, «A parametric subdomain discretization for the analysis of the multiaxial response of reinforced concrete sections,» *Advances in Engineering Software*, n° 182, pp. 87-104, 2015.
- [28] L. Sgambi, *Numerical Analysis of Civil Engineering Structures*, Louvain-LA-Neuve: Université Catholique de Louvain-la-Neuve, 2021.
- [29] J.-F. Cap, «Le béton - matériau de construction,» Université Catholique de Louvain-la-Neuve.

- [30] Bureau de normalisation, *NBN 206-1 Béton.*, Bruxelles, 2001.
- [31] Bureau de normalisation, *NBN B 15-001*, Bruxelles, 2004.
- [32] Bureau de normalisation, *NBN EN 1504-2*, Bruxelles, 2005.
- [33] Bureau de normalisation, *prEN 13670*, Bruxelles: CEN, 2007.
- [34] Bureau de normalisation, *NBN EN 13369*, Bruxelles, 2004.
- [35] D. V. Val, M. G. Stewart et R. E. Melchers, «Effect of reinforce corrosion on reliability of,» *Engineering Structures*, Vol. 20, No. 11, pp. 1010-1019, 1998.
- [36] K. W. Wong, «Non-Linear Behaviour of reinforced concrete frames,» University of Adelaide, Civil Engineering, 1989.
- [37] Holcim Partner, «Protection contre la corrosion de l'armature,» chez *Guide pratique du béton*, Suisse, 2020.
- [38] L. Sgambi, «Relazione sul codice di calcolo "SEZIONI",» POLITECNICO DI MILANO, Milan, 1998-999.

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
École polytechnique de Louvain

Rue Archimède, 1 bte L6.11.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/epl