

Faculté des sciences

Recursive utility and application in life insurance

Auteur : Ghislaine Nanfack Nanda
Promoteur : Pierre Devolder
Lecteur : Pierre Ars
Année académique 2020-2021
Master [120] en sciences actuarielles

Institut de Statistique, Biostatistique et Actuariat

Recursive utility and application in life insurance

Membres du jury :

Prof. Pierre Devolder *Promoteur*

Prof. Pierre Ars *Lecteur*

Mémoire présenté en vue de
l'obtention du master
en sciences actuarielles
(orientation sciences actuarielles)
par :

Ghislaine NANFACK NANDA

Louvain-La-Neuve

Janvier 2021

Preface.

Ce mémoire de fin d'études est l'aboutissement de mon parcours dans l'enseignement supérieur. Il a été rédigé afin de remplir les exigences d'obtention du Master en Sciences Actuarielles à l'Université Catholique de Louvain.

Le mémoire, « Recursive utility and application in life insurance », vous est présenté en accord avec les connaissances accumulées lors de ma formation universitaire et d'expériences personnelles. Il s'est articulé autour de la comparaison des pensions optimales d'un agent, d'une part dans l'hypothèse de préférences représentées au moyen d'une fonction d'utilité récursive et d'autre part avec des préférences représentées à l'aide d'une fonction d'utilité espérée.

Remerciements.

Je tiens à témoigner toute ma reconnaissance à mon promoteur Pr Pierre Devolder pour l'aide et les conseils qu'il m'a apporté tout au long de la rédaction de ce mémoire.

Je remercie ma mère Victorine, mes frères Patrick et Gabin, mes soeurs Mireille, Diane, Glwadys et Annick pour leur soutien incondtionnel tout au long de mes études.

Je remercie enfin mes amis, et toutes les personnes qui de près ou de loin ont contribué de quelque manière que ce soit à la réalisation de ce mémoire, vous êtes nombreux et je vous en suis reconnaissante.

Résumé.

La modélisation des préférences des agents économiques demeure une problématique majeure de la science économique. Le modèle de l'utilité espérée a longtemps été utilisé pour caractériser ces préférences. L'on s'intéresse ici à un autre type de fonction d'utilité : la fonction d'utilité récursive. Appliquée à l'assurance vie, la fonction d'utilité récursive soulève un problème important, celui de l'intérêt de son usage dans ce domaine. Quels sont les avantages de l'utilité récursive par rapport à l'utilité classique en assurance vie ?

Pour répondre à cette question, les pensions optimales d'un agent représentatif sont simulées avec les deux types de fonctions d'utilité, elles sont ensuite comparées aux données empiriques. Les résultats obtenus montrent que pour des paramètres de préférences cohérents avec la littérature et contenus dans leur domaine de définition, le modèle à utilité récursive explique mieux les données empiriques que le modèle à utilité espérée, il représente assez bien les préférences des agents.

Après comparaison des différentes pensions optimales obtenues, la conclusion tirée est que la fonction récursive sied aux contrats à prestations définies tandis que la fonction d'utilité espérée convient aux contrats en unités de compte ou aux contrats à contributions définies.

Abstract.

Modelling the preferences of economic agents remains a major issue in economics. The expected utility model has long been used to characterise these preferences. We are interested here in another type of utility function : the recursive utility function. Applied to life insurance, the recursive utility function raises a major problem, that of the interest of its use in this field. What are the advantages of the recursive utility function compared to the classical utility function in life insurance ?

To answer this question, the optimal pensions of a representative agent are simulated with the two types of utility functions and then compared with empirical data. The results obtained show that for preference parameters consistent with the literature and contained in their definition domain, the recursive utility model explains the empirical data better than the expected utility model, it represents the agents' preferences fairly well.

After comparing the different optimal pensions obtained, the conclusion drawn is that the recursive function is suitable for defined benefit contracts while the expected utility function is suitable for unit-linked or defined contribution contracts.

Table des matières

1 Introduction.	1
2 Théorie de l'utilité espérée.	3
2.1 Théorie du choix en univers risqué et incertain.	3
2.1.1 L'utilité espérée de Von Neumann et Morgenstern.	3
2.1.1.1 Fondements.	3
2.1.1.2 Axiomatique de Von Neumann et Morgenstern.	4
2.1.2 L'utilité espérée subjective de Savage.	6
2.1.3 Attitudes face au risque	7
2.2 Critiques de l'utilité espérée	8
2.2.1 Le paradoxe d'Allais	8
2.2.2 La <i>Prospect theory</i> de Kahneman et Tversky	9
2.2.3 Vers l'utilité récursive	10
2.2.3.1 Temps et préférence.	11
3 L'utilité récursive dans la littérature.	13
3.1 Point de départ de la notion d'utilité récursive	13
3.1.1 L'axiomatique de Kreps et Porteus	13
3.1.2 Exemple explicatif	14
3.2 Modélisation de l'utilité récursive en temps discret.	15
3.2.1 En l'absence d'incertitude	15
3.2.2 En présence d'incertitude	15
3.3 Modélisation de l'utilité récursive en temps continu.	16
3.3.1 Problème de contrôle optimal	16
3.3.1.1 Programmation dynamique	17
3.3.1.2 Principe du maximum	17
3.3.2 Formalisation de l'utilité récursive.	17
3.3.2.1 Hypothèses	17
3.3.2.2 Modélisation	18
3.3.2.3 Intérêt de l'utilité récursive	19
3.3.3 Analyse et détermination de la consommation optimale.	19
3.3.3.1 Problème du consommateur	19
3.3.3.2 Détermination de la consommation optimale	21

4	Utilité récursive en assurance vie.	23
4.1	Contexte de l'application	23
4.1.1	Le modèle de cycle de vie	23
4.1.2	Les déterminants de l'assurance vie.	24
4.1.2.1	Approche normative.	24
4.1.2.2	Approche empirique.	24
4.2	Modélisation	24
4.2.1	Hypothèses retenues	25
4.2.1.1	Hypothèses sur la mortalité	25
4.2.1.2	Hypothèses sur le marché financier	26
4.2.2	Fonction d'utilité récursive	30
4.2.2.1	Choix des paramètres de préférences de l'agent	31
4.3	Détermination de la pension optimale	31
4.3.1	Intérêt de l'utilité récursive en assurance vie	31
4.3.2	Problème de l'assuré	32
4.3.3	Discrétisation du processus de consommation et détermination de c_t^*	34
4.4	Détermination de la pension optimale : cas de l'utilité espérée	35
5	Application numérique, comparaisons et analyse des résultats.	39
5.1	Analyses des différences entre utilité récursive et utilité espérée	39
5.1.1	Une consommation-pension croissante	39
5.1.2	Faible consommation contre pension élevée	40
5.2	Analyse de sensibilité	42
5.2.1	Impact de la variation de taux d'intérêt r et du taux d'impatience δ	43
5.2.2	Impact de la variation de γ et ρ	44
5.2.2.1	Variation de l'aversion relative pour le risque γ	44
5.2.2.2	Variation de ρ	46
5.2.3	Impact de la variation de la volatilité σ_v	47
5.3	Conclusions	47
5.3.1	Implication pour le domaine des assurances	49
5.3.1.1	Contrats à Prestations définies pour l'utilité récursive	49
5.3.1.2	Contrats en unités de compte ou à contributions définies pour l'utilité espérée	50
A	Arbre de décisions	55
B	Analyses empiriques de l'assurance vie.	57
C	Dynamique de la consommation/pension : optimale	59
D	Taux de Nelson-Siegel	61

E Résultats	63
E.1 Consommation-pension optimale par période	63
E.1.1 Utilité récursive	63
E.1.2 Utilité espérée	63
E.2 Analyse de la sensibilité	64
E.2.1 $r = 0.03$ et $\delta = 0.01$	64
F Consommation-pension optimale	65
G Code R	67

Table des figures

2.2.1 Fonction de valeur de la théorie des perspectives, Source : L'individu face au risque l'apport de Kahneman et Tversky. Frédéric Martinez, idées économiques et sociales, 2010.	10
4.2.1 Evolution du taux d'intérêt de Nelson-Siegel.	27
4.3.1 Une des 10 000 réalisations du processus C_t avec la fonction d'utilité récursive.	35
4.4.1 Une des 10 000 réalisations du processus C_t avec la fonction d'utilité espérée.	38
5.1.1 Evolution de C_t avec la fonction d'utilité récursive	40
5.1.2 Evolution de C_t avec la fonction d'utilité espérée	40
5.1.3 Evolution de la pension à la retraite avec la fonction d'utilité récursive	41
5.1.4 Evolution de la pension à la retraite avec la fonction d'utilité espérée	41
5.1.5 Indicateurs clés des données réelles américaines pour la période 1889-1978, source : Knut.K. Aase, <i>Recursive utility using the stochastic maximum principle</i> , 2016.	42
5.2.1 Evolution de C_t avec la fonction d'utilité récursive pour $r_t = 0.03$.	43
5.2.2 Evolution de C_t avec la fonction d'utilité espérée pour $r_t = 0.03$.	43
5.2.3 Evolution des consommations-pensions avec les 2 fonctions d'utilité ($\gamma = 4$ pour l'utilité récursive (UR) et $\gamma = 2.6$ pour l'utilité espérée (UE)).	45
5.2.4 Evolution de la consommation-pension optimale de l'utilité récursive pour différentes valeurs de ρ .	46
5.2.5 Consommation-pension optimale de l'utilité récursive pour différentes valeurs de σ_v .	47
5.3.1 Evolution de la consommation-pension optimale pour l'utilité récursive (UR) et l'utilité espérée (UE) pour les paramètres de préférences retenus.	48
A.0.1 Arbre de décision, source : Kreps D M. Porteus E L. 1978. Temporal Resolution of Uncertainty and Dynamic Choice Theory. Journal of the Econometric Society. 46(1), pp 188	55
B.0.1 Analyses empiriques de la demande d'assurance vie. source : Ferry (1977)	57

Liste des tableaux

4.2.1 Coefficients réglementaires de la table MR	26
4.2.2 Paramètres de Nelson-Siegel estimés	27
5.1.1 Taux de croissance de la consommation-pension	40
5.1.2 Evolution de la consommation-pension	41
5.1.3 Taux de croissance et volatilité de la consommation-pension	42
5.2.1 Taux de croissance et volatilité de la consommation pour différentes valeurs de δ	43
5.2.2 Taux de croissance et volatilité de la consommation pour différentes valeurs de r	44
5.2.3 Taux de croissance et volatilité de la consommation pour différentes valeurs de γ	45
5.2.4 Croissance et volatilité de la consommation-pension pour différentes valeurs de ρ et pour $\gamma = 2.96$	46
5.2.5 Taux de croissance et volatilité de la consommation-pension pour différentes valeurs de σ_v ($\gamma = 2.96$)	47
5.3.1 Paramètres de préférences de l'agent, croissance et volatilité du modèle, croissance et volatilité cible	48
5.3.2 Récapitulatif des pensions optimales de l'utilité récursive	50
5.3.3 Récapitulatif des pensions optimales de l'utilité espérée	50

Chapitre 1

Introduction.

L'étude des préférences des agents économiques a de tout temps été une problématique majeure de la science économique. L'étude des comportements et choix des agents face à des situations de certitude ou d'incertitude permet de comprendre la consommation des biens et services, d'expliquer la croissance économique et de faire des prévisions. Pendant des décennies, le modèle de l'utilité a été considéré comme le modèle standard de la décision individuelle devant le risque et l'incertitude. Von Neumann et Morgenstern modélisent dès la moitié du 19ème siècle les préférences individuelles des agents au moyen d'une fonction d'utilité espérée, largement utilisée dans la théorie de la décision en présence d'incertitude. L'utilité espérée a fait plus tard l'objet de plusieurs critiques et a donné lieu à des paradoxes parmi lesquels le célèbre *Paradoxe d'Allais* qui remet en cause l'axiome d'indépendance qui, avec l'axiome de continuité constitue les piliers de l'axiomatique de Von Neumann et Morgenstern. Ces axiomes fondent l'existence de la fonction d'utilité espérée. De nombreux amendements ont été proposés à la suite d'Allais (1953), des fonctions d'utilités alternatives ont été développées dans la littérature en vue de remédier à certaines failles de l'utilité espérée. C'est dans cette logique que s'inscrit la fonction d'utilité récursive, au centre de ce mémoire.

Le sujet abordé dans ce travail porte sur l'utilité récursive et son application en assurance-vie. Plusieurs auteurs se sont intéressés à la question de l'utilité récursive. Duffie et Epstein (1992) et Aase (2016) se sont focalisés sur la détermination de la consommation optimale d'un individu ayant une fonction d'utilité récursive. Cette détermination a été effectuée par le premier groupe d'auteur à l'aide de la méthode de la programmation dynamique. Le second auteur a pour sa part utilisé le principe du maximum stochastique. Ce mémoire entend appliquer l'utilité récursive à l'assurance vie en vue de la détermination de la pension optimale d'un individu.

En matière d'assurance, la question de la fonction d'utilité demeure pertinente. En effet, si l'on s'en tient à l'un des objectifs de l'industrie de l'assurance qui est de fournir des produits d'assurances qui conviennent le mieux aux futurs assurés, la question du type de fonction d'utilité reste d'actualité. La fonction d'utilité permet de représenter les préfé-

rences des agents en vue de déterminer les biens et services qui satisfont leurs besoins. Ainsi, quel type de fonction d'utilité représente le mieux les préférences de potentiels demandeurs d'assurance? La principale interrogation à laquelle une réponse devra être apportée au terme de ce travail est celle de l'intérêt de l'usage de la fonction d'utilité récursive en assurance vie. Quels sont les avantages de l'utilité récursive comparée à l'utilité espérée? la pension optimale d'un individu ayant une fonction d'utilité récursive diffère-t-elle de la pension optimale d'un individu ayant une fonction d'utilité espérée?

L'objectif du présent mémoire est d'étudier en univers dynamique le concept d'utilité récursive et ses avantages par rapport au concept classique d'utilité et de l'appliquer à des problèmes de choix optimal en assurance-vie. Pour atteindre notre but, une modélisation se basant sur le modèle Aase (2016) permettra de déterminer la pension optimale d'un individu avec d'une part, l'utilité récursive et d'autre part l'utilité espérée. Nous procéderons ensuite à une simulation des pensions optimales dans les deux cas. Nos résultats seront ensuite comparés à des données réelles pour juger de la pertinence de ceux-ci et tirer des conclusions.

Dans le chapitre 2, nous faisons un bref rappel de la théorie de l'utilité espérée et des critiques dont elle a fait l'objet. Le chapitre 3 est consacré à la présentation de l'utilité récursive telle qu'abordée par différents auteurs dans la littérature existant sur le sujet. Dans le chapitre 4, nous appliquons l'utilité récursive au domaine de l'assurance vie notamment les pensions, en vue de la détermination des pensions optimales d'un agent économique ayant une fonction d'utilité récursive d'une part, et une fonction d'utilité espérée d'autre part. Enfin, dans le chapitre 5 nous procédons à une application numérique, analysons et comparons les résultats obtenus avec les deux fonctions d'utilité et tirons les conclusions.

Chapitre 2

Théorie de l'utilité espérée.

Dans ce chapitre, nous présentons les bases théoriques de l'utilité espérée, les critiques dont elle a fait l'objet, de même que la notion de choix en univers dynamique.

2.1 Théorie du choix en univers risqué et incertain.

Frank H. Knight en 1921 fait une distinction entre risque et incertitude. Cette distinction a été longuement reprise en économie, notamment dans la théorie de la décision. Le risque et l'incertitude peuvent tous deux être définis comme des événements futurs aléatoires. Dans le cas du risque, on peut lui affecter une distribution de probabilité contrairement à l'incertitude. John von Neumann et Oskar Morgenstern se sont intéressés à la comparaison des préférences en présence du risque. D'autres auteurs tels que Ramsey et Savage procèdent quant à eux, à une comparaison des préférences en présence d'incertitude. Les notions de risque et d'incertitude dans la pratique sont employées sans distinction en présence d'aléa.

2.1.1 L'utilité espérée de Von Neumann et Morgenstern.

L'utilité espérée a été considérée pendant plusieurs décennies, comme la théorie-phare pour la modélisation des préférences rationnelles en univers risqué. Elle stipule que face au choix entre deux loteries¹ dont au moins l'une a des résultats incertains, la loterie préférée sera celle avec l'utilité espérée la plus grande. La théorie de l'utilité naît des travaux de plusieurs auteurs parmi lesquels Bernoulli, Von Neumann et Morgenstern qui la formalise à travers différents axiomes.

2.1.1.1 Fondements.

Le paradoxe de Saint-petersbourg constitue le point de départ de la théorie de l'utilité espérée. En effet, ce paradoxe va à l'encontre de l'idée majeure selon laquelle l'évaluation

1. définies en termes de revenu, de richesse ou de toute autre variable

des loteries se faisait par l'espérance mathématique de gain. Pour comprendre ce paradoxe, considérons le jeu suivant :

Une pièce est lancée jusqu'à ce qu'elle tombe sur « face ». Le joueur reçoit 1 euro si la pièce tombe sur « face » au premier lancer, 2 euros si la pièce tombe sur « face » au 2^{ième} lancer, 4 si la pièce tombe sur « face » au troisième lancé,... 2^n si la pièce tombe sur « face » au $n^{\text{ième}}$ lancer.

Si la probabilité d'obtenir « face » au $n^{\text{ième}}$ lancé est $(\frac{1}{2})^n$, le problème est de déterminer le montant initial qu'un individu rationnel serait prêt à payer pour jouer à un tel jeu. En particulier, pour que le jeu soit équitable, le gain moyen du joueur au cours d'une partie doit être égal à sa mise initiale. Le calcul de l'espérance mathématique du gain de ce jeu donne une somme infinie, soit :

$$\frac{1}{2} \times 1 + \frac{1}{4} \times 2 + \dots + \left(\frac{1}{2}\right)^n \times 2^{n-1}$$

Pour Bernoulli, il faudrait investir une somme infinie pour que le jeu soit équitable, ce qui semble irréaliste puisqu'un individu rationnel refusera de participer à ce jeu pour un prix modérément élevé. Bernoulli introduit pour lever le paradoxe, une fonction d'utilité du revenu (fonction logarithmique) permettant d'avoir une espérance d'utilité finie. On passe ainsi du gain à l'utilité du gain. Selon lui, un individu face à des situations risquées choisira celle qui maximise l'espérance de l'utilité.

Von Neumann et Morgenstern formalisent dans leur livre *Theory of games and economic behavior* en 1947, la notion d'utilité. Ils donnent les postulats du comportement d'un individu rationnel en présence de risque.

2.1.1.2 Axiomatique de Von Neumann et Morgenstern.

Von Neumann et Morgenstern se basent pour étayer leur théorie sur ensemble de loteries, et d'une relation de préférence sur celles-ci.

Soit X une loterie au sens de Fortune, elle est définie par le vecteur : $(x_1, \dots, x_n; p_1, \dots, p_n)$ avec

- $x_i, i = 1, \dots, n$ les résultats
- $p_i, i = 1, \dots, n$ les probabilités associées avec $\sum_{i=1}^n p_i = 1$
- n l'ensemble des états du monde

$$X = \sum_{i=1}^n p_i \times x_i$$

La relation de préférence \preceq est définie (\sim pour l'indifférence)

L'utilité espérée de Von Neumann-Morgenstern repose sur 4 axiomes :

-Axiome 1 : Ordre

La relation de préférence est complète, réflexive et transitive.

Soient 2 loteries X et Y , celles-ci peuvent toujours être comparées :

$$X \preceq Y, Y \preceq X \text{ ou } X \sim Y$$

pour toute loterie X ,

$$X \preceq X$$

Soient 3 loteries X , Y et Z ,

$$X \preceq Y, Y \preceq Z \text{ alors } X \preceq Z$$

-Axiome 2 : Continuité

Soient 3 loteries X , Y et Z ,

Si $X \preceq Y \preceq Z$, $\exists \beta \in [0, 1]$ tel que :

$$\beta X + (1 - \beta)Z \sim Y$$

-Axiome 3 : Indépendance

Soient 3 loteries X , Y et Z ,

Si $X \preceq Y$, $\exists \beta \in [0, 1]$ tel que :

$$\beta X + (1 - \beta)Z \preceq \beta Y + (1 - \beta)Z$$

-Axiome 4 : Composition

Le choix entre loteries ne dépend que des conséquences finales et des probabilités.

Il découle de ces axiomes le théorème de l'utilité espérée de Von Neumann et Morgenstern. Il stipule que lorsque les préférences d'un individu sur un ensemble des loteries vérifient des axiomes dont celui de continuité et celui d'indépendance, alors il existe une fonction d'utilité à valeurs réelles définies sur l'ensemble des loteries représentant les préférences, ayant la forme d'une « espérance d'utilité » des loteries.

Formellement, la théorie de l'utilité de Von Neumann et Morgenstern est énoncée par Fishburn en 1970 dans son ouvrage le *Théorème de représentation des préférences dans le modèle d'espérance d'utilité* :

Si une relation de préférence \preceq vérifie les axiomes de Von Neumann et Morgenstern, alors, il existe une fonction continue et croissante $U : C \rightarrow R$ telle que :

Pour tout couple de loteries $(X, Y) \in C^2$, définies par :

$X = (x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$; $Y = (y_1, \dots, y_n, q_1, \dots, q_n)$, on a :

$X \preceq Y \Leftrightarrow \mathbb{E}[U(X)] \preceq \mathbb{E}[U(Y)]$,

$\mathbb{E}[U(X)] = \sum_{i=1}^n p_i \times U(x_i)$ et $\mathbb{E}[U(Y)] = \sum_{i=1}^n q_i \times U(y_i)$

$\mathbb{E}[U(\cdot)]$ est la fonction d'utilité de Von Neumann et Morgenstern.

2.1.2 L'utilité espérée subjective de Savage.

A la suite des travaux de Von Neumann et Morgenstern, Savage développe en 1954 la théorie de l'utilité espérée subjective dans laquelle les mesures de probabilités sont considérées comme subjectives. La probabilité subjective contrairement à la probabilité objective désigne la perception du risque. L'individu accorde une probabilité d'occurrence à un événement en fonction de son intuition personnelle ou de ses expériences passées. Savage pose des axiomes qui conduisent à la construction d'une fonction d'utilité basée sur des préférences individuelles.

Il considère S un ensemble des états de la nature, C un ensemble de conséquences et $F = f : S \rightarrow C$ l'ensemble des actes et \succ une relation de préférence sur les actes. Savage montre que si les préférences sur les actes d'un individu satisfont les postulats² qu'il développe, alors on peut rationaliser ses préférences par le principe de maximisation de l'utilité espérée : il existe une distribution de probabilité et une fonction d'utilité sur les conséquences telles qu'un acte est préféré à un autre si l'espérance d'utilité du premier acte est supérieure à celle du second.

La différence avec l'axiomatisation de Von Neumann et Morgenstern est que ceux-ci considèrent la distribution de probabilité comme donnée, de même que les préférences sur les actes. Ainsi, l'utilité de Von Neumann et Morgenstern est déduit à partir des préférences sur les actes et de la probabilité, tandis que dans le cadre de Savage on déduit l'utilité et la probabilité uniquement à partir des préférences sur les actes.

2. voir les 7 postulats dans : Notes sur l'axiomatisation de Savage (1954) de Mikael Cozic (Paris IV-Sorbonne - IHPST) 14 mai 2004, Page 1-2

2.1.3 Attitudes face au risque

En théorie de la décision, l'équivalent certain, représente le montant qu'un individu est prêt à payer ou accepte de recevoir pour ne pas se retrouver dans une situation d'incertitude donnée. Autrement dit, pour toute loterie aléatoire A , il existe un équivalent certain EC tel que la loterie B , avec gain certain EC est dans tous les cas équivalente à la loterie A . La valeur EC varie d'un individu à l'autre et permet de caractériser l'attitude face au risque d'un individu.

Arrow-Pratt définissent trois attitudes possibles face au risque : aversion pour le risque, l'indifférence face au risque et goût pour le risque.

- **L'aversion pour le risque** caractérise l'attitude d'un individu qui préfère posséder l'espérance de gain d'une loterie avec certitude plutôt que la loterie elle-même. Pour toute loterie X , $X \preceq \mathbb{E}(X)$.

Sa fonction d'utilité est concave.

- **La neutralité face au risque** est le comportement d'un individu indifférent entre une loterie donnant un gain certain et une loterie aléatoire ayant la même espérance de gain. $X \sim \mathbb{E}(X)$

Sa fonction d'utilité est linéaire.

- **Le goût du risque** caractérise l'individu qui préfère une loterie aléatoire à une loterie donnant un gain certain. $\mathbb{E}(X) \preceq X$

Sa fonction d'utilité est convexe.

De l'équivalent certain et des attitudes face au risque, émerge le concept de prime de risque. La prime de risque ρ , associée à une loterie X est le montant qu'un individu est prêt à payer pour échanger X contre son équivalent certain EC .

La prime de risque vérifie l'égalité : $U(\mathbb{E}(X) - \rho(X)) = \mathbb{E}[U(X)]$.

De cette définition de la prime de risque, il est possible de caractériser autrement le comportement d'un individu face au risque.

Un individu averse au risque aura une prime de risque positive. A contrario, un individu « risquophile » (respectivement indifférent au risque) aura une prime de risque négative (respectivement nulle).

On fera dans cette étude comme c'est le cas en finance, l'hypothèse que les agents économiques sont averses au risque et ont de ce fait une prime de risque positive.

2.2 Critiques de l'utilité espérée

La théorie de l'utilité a été critiquée par plusieurs auteurs, notamment Maurice Allais à travers le paradoxe qui porte son nom. Plusieurs changements sur la théorie ont été proposés de sorte que le paradoxe d'Allais puisse être pris en compte. C'est le cas de M. Machina qui a proposé une utilité espérée non linéaire. Nous nous limiterons ici au paradoxe d'Allais.

2.2.1 Le paradoxe d'Allais

Allais (1953) mène une expérience montrant quelques limites empiriques de la théorie de l'utilité de Von Neumann et Morgenstern, notamment l'axiome d'indépendance. Dans son article *Le comportement de l'Homme rationnel devant le risque : critique des postulats de l'École américaine*, paru dans la revue économique *Econometrica* Allais propose à des individus de faire un choix entre 2 différentes loteries, compte tenu des gains et des probabilités associées à chacune d'elle :

-1^{er} choix : A et B

Gains loterie A	Probabilité
5 M €	10%
1 M €	89%
0	1%
Gains loterie B	Probabilité
1 M €	100%

-2^{me} choix : C et D

Gains loterie C	Probabilité
5 M €	10%
0	90%
Gains loterie D	Probabilité
1 M €	11%
0	89%

Un individu fait d'abord le choix de B contre A, puis de C contre D. Cependant, ce double choix va à l'encontre de la théorie de l'utilité espérée parce qu'il viole l'un de ses principaux axiomes : l'axiome d'indépendance. En effet, selon cet axiome, ajouter ou remplacer une conséquence commune aux deux options ne devrait pas changer l'ordre de préférence.

De façon pratique si la loterie B est préférée à la loterie A alors :

$$A \prec B \Leftrightarrow \mathbb{E}[U(A)] \prec \mathbb{E}[U(B)]$$

$$\Leftrightarrow 0.1U(5M) + 0.89U(1M) + 0.01U(0M) \prec U(1M)$$

$$\Leftrightarrow 0.1U(5M) + 0.01U(0M) \prec 0.11U(1M)$$

En ajoutant $0.89 U(0M)$ de part et d'autre conformément à l'axiome d'indépendance de Von Neumann et Morgenstern on obtient :

$$\Leftrightarrow 0.1U(5M) + 0.9U(0M) \prec 0.11U(1M) + 0.89U(0M)$$

$$\Leftrightarrow \mathbb{E}[U(C)] \prec \mathbb{E}[U(D)]$$

$$\Leftrightarrow C \prec D$$

La loterie D est préférée à la loterie C si l'on se fie à l'axiome d'indépendance de la théorie de l'utilité espérée. Cependant, le choix opéré par l'individu dans la pratique réfute la théorie.

2.2.2 La *Prospect theory* de Kahneman et Tversky

Daniel Kahneman et Amos Tversky des psychologues de la décision publient en 1979 le résultat de leurs études et une théorie descriptive des choix des agents face au risque : la théorie des perspectives. Ils défendent l'idée selon laquelle les individus prennent aussi leurs décisions en fonction de la manière dont leur ait présenté un choix à faire. Ce choix n'est pas seulement en fonction des probabilités et des valeurs attendues, considérées comme rationnelles par la théorie de l'utilité espérée.

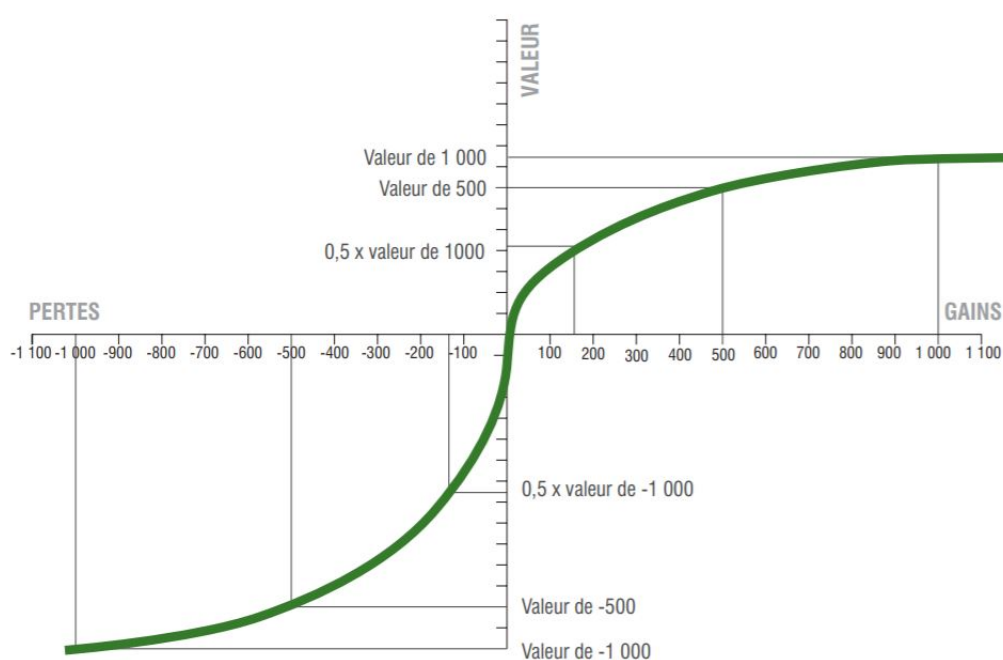
Ils se basent sur un jeu, où il est proposé à des agents de faire un choix entre deux options. La première option consiste en une perte certaine de 500 €. La seconde option consiste soit à une perte certaine de 1000 € avec une probabilité de 0.5 soit à la garantie de ne rien perdre avec une probabilité de 0.5. Kahneman et Tversky observent que 69% des participants ont un goût du risque et préfèrent la seconde option à la première.

La théorie des perspectives suggèrent que la prise de décision se fait selon 2 phases :

- Une phase de représentation : Ici, l'individu est dans une phase préparatoire où il analyse les perspectives qui s'offrent à lui. L'existence de cette phase suppose que le problème de décision n'est pas donné de manière objective. L'individu se représente donc la situation de manière subjective. Ainsi, deux problèmes de décisions dont les valeurs attendues ont des probabilités d'occurrences identiques peuvent ne pas être considérés comme subjectivement équivalents par l'individu.

- **Une phase d'évaluation :** Les perspectives représentées sont évaluées et comme dans la théorie de l'utilité espérée, selon le principe de maximisation, la perspective ayant la plus grande utilité subjective sera choisie. Cependant, la théorie des perspectives se différencie de la théorie de l'utilité attendue car, elle intègre deux fonctions dans le calcul de l'utilité subjective d'une perspective : une fonction de la valeur subjective et une fonction de pondération des probabilités.

La théorie des perspectives introduit en outre la notion de point de référence par rapport à la richesse initiale. L'individu prend des décisions compte tenu des gains et pertes potentielles. Celui-ci regarde un point de référence comme l'indique la figure 2.2.1 qui détermine ces pertes et gains.



Source : Daniel Kahneman et Amos Tversky, « La peur et le goût du risque », *Pour la science*, juillet 1999.

FIGURE 2.2.1 – Fonction de valeur de la théorie des perspectives, Source : L'individu face au risque l'apport de Kahneman et Tversky. Frédéric Martinez, idées économiques et sociales, 2010.

2.2.3 Vers l'utilité récursive

Dans l'optique de toujours représenter les préférences des individus, d'autres auteurs s'intéressent à la question de la représentation des préférences individuelles, notamment en univers dynamique. Il ressort de leurs différentes études que l'aspect temporel a une grande importance.

2.2.3.1 Temps et préférence.

La notion d'utilité récursive vient de la prise en compte de l'aspect temporel dans les choix des individus. Pour Mossin (1969), l'aspect temporel a une importance capitale dans les préférences, d'une part parce qu'il affecte les choix, d'autre part parce qu'il est utile de vérifier que l'on peut représenter ces préférences grâce à une fonction d'utilité. Il montre que la préférence parmi un ensemble de perspectives incertaines dépend fortement du moment où les résultats seront connus.

Dans le même ordre d'idée, Kreps et Porteus (1978) étudient la question du choix en univers dynamique et en présence d'incertitude. Ils considèrent les choix d'un individu à des instants distincts et étudient le lien entre ces choix. Ils montrent qu'à un instant donné, le choix d'un individu dépend non seulement des distributions de probabilité sur les gains immédiats, mais aussi des paires gains-états suivants.

Ils supposent en outre que les axiomes standards de continuité et d'indépendance de Von Neumann et Morgenstern nécessaires pour la représentation des choix au moyen d'une fonction d'utilité sont respectés et développent l'axiome de *cohérence temporelle*. Ils aboutissent au résultat selon lequel le temps joue un grand rôle dans la structure des préférences d'un individu en univers dynamique et en présence d'incertitude.

La question de l'utilité récursive naît donc de la prise en compte de l'aspect temporel dans le choix des agents. L'utilité récursive sera étudiée plus en détail dans le prochain chapitre.

Chapitre 3

L'utilité récursive dans la littérature.

Dans ce chapitre, nous nous intéressons aux différents développements de l'utilité récursive dans la littérature. Les principaux auteurs ont étudié la question principalement en univers discret et en univers continu. Cependant les travaux de deux auteurs en particulier ont donné naissance à cette notion.

3.1 Point de départ de la notion d'utilité récursive

La notion d'utilité récursive découle de la prise en compte de l'aspect temporel dans les choix des individus et des travaux de Kreps et Porteus (1978). Ils définissent l'une des plus importantes propriétés de ce type d'utilité à savoir que l'incertitude est « datée » de son instant de résolution et l'individu considère les incertitudes résolues à des moments différents comme étant différentes.

3.1.1 L'axiomatique de Kreps et Porteus

Kreps et Porteus (1978) développent un ensemble d'axiomes et de lemmes permettant d'expliquer les comportements des agents face à un choix. Parmi ces axiomes, un axiome fort qui justifie selon eux qu'un individu préfère un choix à un autre compte tenu de l'instant où l'incertitude sera résolue : c'est l'axiome de cohérence temporelle. Voici un bref récapitulatif de ces axiomes.

- Soit t un instant donné ($t = 0, 1, \dots, T$)
- Z_t un ensemble de payoffs possibles
- Y_t un ensemble de payoffs historiques jusqu'à l'instant t (t non inclus). $Y_1 = Z_0$ et pour $t = 2, \dots, T + 1$, $Y_t = Y_{t-1} \times Z_{t-1}$
- D_T un ensemble de mesure de probabilité sur Z_T et récursivement,
- X_t un ensemble de sous-ensembles non vides de D_t
- D_{t-1} un ensemble de mesure de probabilité sur $Z_{t-1} \times X_t$

Les auteurs définissent un problème de choix dynamique sur Z_t entre t et T comme tout élément x_t de X_t . Ils définissent également une action à l'instant t comme tout élément d_t de D_t . L'action est considérée ici comme une mesure de probabilité en elle-même.

Ainsi, à chaque instant, un individu choisi une action qui est contraint par l'état où il se trouve. L'action choisie détermine ensuite la distribution de probabilité sur la prochaine paire payoff-état. En somme une action est une distribution de probabilité et un état est un ensemble fermé d'actions. Les auteurs illustrent ceci grâce à un arbre de décisions contenu dans l'annexe A. Les axiomes développés sont les suivants :

Axiome 1 : $\forall t$ et y_t , les choix d'un agent parmi un sous-ensemble fermé de D_t peuvent être représentés par la relation de préférence binaire complète et transitive \succ_{y_t} sur D_t

Axiome 2 : Continuité $\forall t$ et y_t , \succ_{y_t} est continu

Axiome 3 : Substitution $\forall t$ et y_t , si $d_1, d_2 \in D_t$ sont telles que $d_1 \succ_{y_t} d_2$, alors $\forall \alpha \in [0, 1]$ et $\forall d_3 \in D_t$, $(\alpha; d_1, d_2) \succ_{y_t} (\alpha; d_1, d_2)$

Axiome 4 : Cohérence temporelle $\forall t, y \in Y_t, z \in Z_t$ et $x_1, x_2 \in X_{t+1}$, $(z, x_1) \succ_y (z, x_2)$ à l'instant t si et seulement si $x_1 \succ_{(y,z)} x_2$ à l'instant $t+1$. L'axiome assure que l'individu opère des choix qu'il ne « regrette » pas à la période suivante. L'axiome de cohérence est l'axiome fort de l'approche de Kreps et Porteus. Ils démontrent à la suite de leur développement que si cet axiome n'est pas respecté alors l'individu n'est pas cohérent dans ses choix.

3.1.2 Exemple explicatif

Ils considèrent un problème de choix en univers dynamique et en présence d'incertitude comme décrit précédemment. A chaque instant t l'agent doit donc opérer un choix, une action d_t . Cette action est contrainte par un état x_t à l'instant t . Des événements aléatoires surviennent, ceux-ci déterminent un payoff immédiat z_t à l'agent et l'état suivant x_{t+1} . La distribution de probabilité de la paire (z_t, x_{t+1}) est déterminée par l'action d_t . Selon les deux auteurs, l'approche standard de l'utilité espérée consiste à considérer que les choix de l'individu sont représentables au moyen d'une fonction d'utilité U défini sur le vecteur de payoffs (z_0, z_1, \dots, z_T) . Le choix d'une action dans un état donné induit une distribution de probabilité sur le vecteur de payoffs et un choix optimal s'il maximise l'utilité attendue comparé aux autres choix.

L'approche de Kreps et Porteus contrairement à celle de l'utilité espérée réside donc dans la résolution temporelle de l'incertitude. Pour eux, l'agent considère des incertitudes résolues à des instants différents comme différentes. Ils résument leur approche par un exemple illustratif.

Exemple : Soit un lancé de pièce ayant lieu soit à l'instant 0, soit à l'instant 1.

- Si le résultat est **pile**, le vecteur de payoff est $:(z_0, z_1) = (5, 10)$

- Si le résultat est **face**, le vecteur de payoff est $:(z_0, z_1) = (5, 0)$

z_0 étant égal à 5 dans les 2 cas (pile ou face), le lancé peut avoir lieu à l'instant 0 ou 1 pour un agent ayant une fonction d'utilité de Von Neumann et Morgenstern. Kreps et Porteus par l'axiome de cohérence temporelle montre qu'un agent dont les préférences respectent cet axiome pourrait préférer que le lancé ait lieu à l'instant 0 ou à l'instant 1.

Des auteurs autres que Kreps et Porteus ont également grâce à leurs travaux contribué à l'essor de la notion d'utilité récursive. Ils ont étudié la question en temps discret et en temps continu.

3.2 Modélisation de l'utilité récursive en temps discret.

L'utilité récursive en temps discret trouve son fondement dans les travaux de plusieurs auteurs. Ils abordent la question d'une part en l'absence d'incertitude et d'autre part en présence d'incertitude.

3.2.1 En l'absence d'incertitude

Tjalling C. Koopmans est l'un des précurseurs de l'utilité récursive. Il s'intéresse à la question de préférence pour la satisfaction à un instant futur et suggère la représentation de cette préférence au moyen de fonction d'utilité, il développe pour cela un ensemble de postulats. Koopmans étudie les fonctions d'utilités satisfaisants la relation récursive :

$$\begin{cases} V_t = W(c_t, V_{t+1}) \\ U(\{c_1, c_2, \dots\}) = V_0 \end{cases} \quad (3.2.1)$$

- V_t l'utilité de la période t
- c_t la consommation de la période t
- V_{t+1} l'utilité future de la période $t + 1$

L'utilité à un instant donné dépend selon lui de la consommation courante et de l'utilité future. Lucas et Stokey à sa suite en 1984 définissent la fonction W comme un agrégateur, étant donné qu'elle génère l'utilité courante V_t en combinant la consommation courante et l'utilité future.

3.2.2 En présence d'incertitude

Epstein (1983) tient compte d'une incertitude séparable par état et aboutit à la fonction d'utilité :

$$U(\{c_t\}) = \mathbb{E} \left[\sum_{t=0}^{\infty} u(c_t) e^{-\sum_{s=0}^{t-1} \beta(c_s)} \right] \quad (3.2.2)$$

Epstein et Zin (1989) montrent que la principale limite de la fonction d'utilité [3.2.2](#) notamment le fait que l'on ne distingue pas l'aversion pour le risque de la substitution intertemporelle [1](#). Ils proposent pour remédier à ce problème la forme d'utilité récursive plus générale suivante :

$$\begin{cases} V_t = W(c_t, m(V_{t+1})) \\ U(\{c_t\}) = V_0 \end{cases} \quad (3.2.3)$$

- A l'instant t , et compte tenu de l'information disponible,
- V_{t+1} est une variable aléatoire, c'est l'utilité intertemporelle pour la période $t + 1$ et au delà.
- m est une fonction qui représente l'équivalent certain de la distribution de V_{t+1} compte tenu de l'information disponible.
- W est l'agrégateur qui génère l'utilité en t

Ici, à l'instant t l'utilité intertemporelle V_{t+1} pour la période $t + 1$ et au-delà est une variable aléatoire. W capture la substitution intertemporelle de la consommation et $m(\cdot)$ l'aversion au risque au sens de Epstein et Zin (1989).

L'utilité récursive a également été abordée en temps continu.

3.3 Modélisation de l'utilité récursive en temps continu.

La formalisation de l'utilité récursive en temps continu est due à Duffie et Epstein (1992). Ils développent la version continue de l'utilité récursive [3.2.3](#) d'Epstein et Zin. Ils définissent l'utilité récursive au moyen d'équations différentielles stochastiques et formulent un ensemble de conditions quant à l'existence, l'unicité, la monotonie, la continuité, l'aversion pour le risque, la concavité de ces fonctions, et bien d'autres. L'approche de Duffie et Epstein est reprise plus tard par Aase (2016).

3.3.1 Problème de contrôle optimal

Les problèmes d'optimisations dynamiques stochastiques naissent lorsque, dans des situations d'incertitude, des décisions doivent être prises instantanément afin d'optimiser un critère donné. Les fonctions d'utilité récursives s'inscrivent dans cette optique. En pratique, un agent cherche à maximiser une fonctionnelle qui dépend d'une variable d'état d'une variable de contrôle (un processus stochastique en l'occurrence la consommation ici). La variable de contrôle optimale trouvée qui réalise ce maximum doit alors donner lieu à une variable d'état optimale. Pour résoudre ces problèmes d'optimisations, l'on peut recourir à la programmation dynamique ou au principe du maximum.

1. les deux notions sont capturées par le paramètre β qui est une constante

3.3.1.1 Programmation dynamique

La programmation dynamique est une méthode de résolution des problèmes d'optimisation au moyen d'équations appelées : équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (HJB) initiées par Richard Bellman. C'est cette méthode qui est retenue par Duffie et Epstein (1992) pour la résolution de leur version de l'utilité notamment pour la détermination de la consommation optimale.

3.3.1.2 Principe du maximum

Le principe du maximum en contrôle optimal de L. Pontryagin est une méthode de résolution des problèmes d'optimisations au moyen d'équations différentielles stochastiques rétrogrades. Aase (2016) utilise le principe du maximum stochastique pour la formulation des conditions de premier ordre de la consommation optimale d'un agent ayant une utilité récursive.

3.3.2 Formalisation de l'utilité récursive.

La formalisation présentée ici est celle de Aase (2016) qui s'inspire lui-même des travaux de Duffie et Epstein (1992). L'on présentera d'une part les hypothèses retenues et d'autre part le modèle d'utilité récursive utilisé.

3.3.2.1 Hypothèses

Soit un marché financier :

- r_t le taux sans risque
- $X(t)$ un processus de prix stochastique
- (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité muni d'une filtration \mathcal{F}_t , générée par un mouvement brownien B
- T un horizon de temps fini de l'économie
- T_x le temps restant à vivre pour un assuré d'âge x
- c un processus de consommation adapté non négatif tel que : $(\int_0^{T_x} c_t dt) < \infty$
- π_t Le facteur d'actualisation stochastique (déflateur) donné par :

$$\pi_t = \varepsilon_t e^{-\int_0^t r_s ds} \quad (3.3.1)$$

où le processus de densité ε_t s'écrit comme suit :

$$\varepsilon_t = \exp\left(-\int_0^t \eta'_s dB_s - \frac{1}{2} \int_0^t \eta'_s \cdot \eta_s ds\right) \quad (3.3.2)$$

- $\eta(t)$ est le prix de marché du risque pour le processus de prix actualisé $X_t e^{-\int_0^t r_s ds}$ défini par $\sigma(\omega, t)\eta(\omega, t) = \nu(\omega, t)$, $(\omega, t) \in \Omega \times [0, T]$ où le n -ième composant de ν_t est égal à $(U_n(t) - r(t))$ le surplus de rendement sur l'actif n , $n = 1, 2, \dots, N$

3.3.2.2 Modélisation

Soit une fonction d'utilité récursive $U : L \rightarrow R$.

Elle est définie par 2 fonctions primitives :

$f : R \times R \rightarrow R$

$A : R \rightarrow R$

- $f(c_t, V_t)$ représente l'index de félicité au temps t
- c_t la consommation courante
- V_t l'utilité future, un processus stochastique de volatilité σ_{V_t}
- A est l'aversion absolu pour le risque de l'individu

En se focalisant sur la consommation optimale, le processus d'utilité V pour un processus de consommation c donné satisfaisant $V_T = 0$ est donné par :

$$V_t = \mathbb{E}_t \left[\left(\int_t^T f(c_s, V_s) - \frac{1}{2} A(V_s) \sigma_{V_s}' \sigma_{V_s} \right) ds \right], t \in [0, T] \quad (3.3.3)$$

Si pour chaque processus de consommation c_t , il y a un processus d'utilité V_t défini, alors, l'équation différentielle stochastique de l'utilité U est définie par $U(c) = 0$, l'utilité initiale.

La paire (f, A) qui génère V_t est appelé agrégateur au sens de Lucas et Stokey.

$W(c_t; V_{t+1})$ est un agrégateur étant donné qu'il combine la consommation c_t de la période t et l'index d'utilité V_{t+1} de la consommation future en vue du calcul de l'utilité V_t de période t

- f est concave et croissante avec la consommation
- U est monotone et risque adverse si $A(\cdot) \geq 0$
- Le terme $\frac{1}{2} A(V_s) \sigma_{V_s}' \sigma_{V_s}$ est l'approximation de l'équivalent certain.
- A est associé à une fonction concave $h : R \rightarrow R$ tel que : $A(v) = -\frac{h''(v)}{h'(v)}$ avec h une fonction deux fois continue et différentiable.

L'équation (3.2.3) est une équation différentielle stochastique backward (BSDE). Les conditions d'existence et d'unicité pour ces BSDEs sont loin d'être garanties. Duffie et Epstein (1992) donnent cependant la justification de l'existence de cette équation.

Pour une fonction d'utilité U on a :

$$f(c, v) = \frac{\delta}{1 - \rho} \frac{c^{(1-\rho)} - ((1-\gamma)v)^{\frac{1-\rho}{1-\gamma}}}{((1-\gamma)v)^{\frac{\gamma-\rho}{1-\gamma}}}, \quad (3.3.4)$$

avec

- δ le **taux d'impatience** de l'agent ($\delta \geq 0$)
- ρ la **préférence pour le temps** ($\rho \geq 0, \rho \neq 1$) est une forme de taux d'impatience
- γ l'**aversion relative pour le risque** ($\gamma \geq 0, \gamma \neq 1$)
- ψ l'**élasticité intertemporelle de substitution**²(EIS) ($\psi = \frac{1}{\rho}$)

3.3.2.3 Intérêt de l'utilité récursive

La littérature sur le modèle micro-économique standard montre qu'il existe une relation directe entre la préférence pour le temps et l'élasticité de substitution intertemporelle. Les deux concepts se confondent cependant lorsque la fonction d'utilité espérée est additive³.

En effet, concernant l'axiome de cohérence temporelle développé par Kreps et Porteus (1978), Epstein et Zin (1989) montrent qu'il existe trois types de fonctions satisfaisant cet axiome parmi lesquels la fonction d'utilité espérée additive. Ils montrent également que pour des fonctions d'utilité à la fois additive et « time-separable », il est impossible de dissocier l'effet d'aversion pour le risque et l'effet de substitution intertemporelle. Nous verrons au chapitre 3 lors de notre modélisation de l'utilité espérée que $\gamma = \rho$ pour ce type de fonction.

La représentation des préférences par d'un modèle récursif comme c'est le cas avec la fonction d'utilité récursive développé par différents auteurs abouti à une dissociation claire des effets de l'aversion pour le risque et de la substitution intertemporelle ($\gamma \neq \rho$). Il est donc possible avec cette fonction d'étudier distinctement quel pourrait être l'impact de l'un ou de l'autre sur l'utilité de l'agent économique.

3.3.3 Analyse et détermination de la consommation optimale.

3.3.3.1 Problème du consommateur

Le consommateur cherche ici à maximiser son utilité sous la contrainte de son budget. Ce problème s'écrit comme suit :

2. elle représente l'élasticité du taux de croissance de la consommation par rapport au taux d'intérêt.
 3. De manière générale, une fonction d'utilité est séparable et additive si elle est de la forme $u(g) = \sum_i^n u_i(g_i)$, $g \in G$ l'ensemble sur lequel est défini $u(g)$

$$\begin{cases} \max_{c \in L} U(c) \\ \text{s.c.} \\ \mathbb{E} \left[\int_0^T (\pi_t c_t) dt \right] \leq \mathbb{E} \left[\int_0^T (\pi_t e_t) dt \right] \end{cases} \quad (3.3.5)$$

- e le processus de revenu du consommateur
- $V_T = 0$ la condition terminale

En posant, $V_t^c := V_t$ et $Z(t) := \sigma_v(t)$ (la volatilité est considéré comme faisant partie des préférences) la paire $(V_t^c, Z(t))$ est solution de la BSDE :

$$\begin{cases} dV(t) = -f(c_t, V_t) + Z(t) dB_t \\ V_T = 0 \end{cases} \quad (3.3.6)$$

Les conditions d'existence et d'unicité de la BDSE [3.3.6](#) pour les processus de diffusions ont été prouvées par Duffie et Lions (1992)

Le Lagrangien du problème d'optimisation s'écrit :

$$L(c; \alpha) = U(c) - \alpha \mathbb{E} \left[\int_0^T \pi_t (c_t - e_t) dt \right] \quad (3.3.7)$$

$\alpha > 0$, le multiplicateur de Lagrange.

- Hamiltonien du problème

Le problème d'optimisation précédent sera résolu à l'aide du principe du maximum stochastique. Il existe une littérature abondante sur ce principe.

L'hamiltonien du problème s'écrit :

$$H(t, c, v, z, y) = y_t f(t, c_t, v_t, z_t) - \alpha \pi_t (c_t - e_t) \quad (3.3.8)$$

avec y_t la variable adjointe.

l'équation adjointe est :

$$\begin{cases} dY(t) = Y_t \frac{\partial f}{\partial v} (c_t, V_t, Z(t)) dt + \frac{\partial f}{\partial z} (c_t, V_t, Z(t)) dB_t \\ Y_0 = 1 \end{cases} \quad (3.3.9)$$

si c_t est optimal, alors :

$$Y(t) = \exp \left(\int_0^t \left(\frac{\partial f}{\partial v}(s, c_s, V_s, Z(s)) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial z}(s, c_s, V_s, Z(s)) \right)^2 \right) ds + \int_0^t \frac{\partial f}{\partial v}(s, c_s, V_s, Z(s)) dB(s) \right) \quad (3.3.10)$$

Aase (2015) donne la condition de premier ordre de la maximisation du Hamiltonien par rapport à c

$$y \frac{\partial f}{\partial c}(t, c, v, z) - \alpha D_t$$

sachant que :

$$\alpha \pi_t = Y(t) \frac{\partial f}{\partial c}(c_t, V_t, Z(t)) \forall t \in [0, T] \quad (3.3.11)$$

3.3.3.2 Détermination de la consommation optimale

Considérons l'équation [3.3.4](#) on trouve :

$$\frac{\partial f(c, v)}{\partial c} = \delta \frac{c^{-\rho}}{(1 - \gamma)V_t^{\frac{\gamma - \rho}{1 - \gamma}}}$$

en remplaçant cette valeur dans l'équation [3.3.11](#) on trouve la valeur c_t

$$c_t = \left(\frac{(\alpha \pi_t (1 - \gamma) V_t^{\frac{\gamma - \rho}{1 - \gamma}})}{\delta Y_t} \right)^{-\frac{1}{\rho}} \quad (3.3.12)$$

la consommation optimale est un processus dont la dynamique est donné par :

$$dc_t = \mu_c(t) c_t dt + \sigma_c(t) c_t dB_t \quad (3.3.13)$$

avec les valeurs de $\mu_c(t)$ et $\sigma_c(t)$ (voir Annexe A) :

$$\mu_c(t) = \frac{1}{\rho}(r_t - \delta) + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{1}{\rho} \right) \lambda'_t \lambda_t - \frac{(\gamma - \rho)}{\rho^2} \lambda'_t \sigma_V(t) + \frac{1}{2} \frac{(\gamma - \rho)\gamma(1 - \rho)}{\rho^2} \sigma_V(t)' \sigma_V(t) \quad (3.3.14)$$

$$\sigma_c(t) = \frac{1}{\rho} (\lambda_t + (\rho_\gamma) \sigma_V(t)) \quad (3.3.15)$$

Par Itô on trouve :

$$c_t^* = c_0 \exp \left(\int_0^t \mu_c(s) - \frac{1}{2} \sigma_c(s)' \sigma_c(s) ds + \int_0^t \sigma_c(s) dW_s \right) \quad (3.3.16)$$

Aase applique plus tard l'utilité récursive au domaine de l'assurance vie et trouve l'expression de la consommation et le contrat d'assurance vie optimal d'un assuré sous forme

de solution fermée. Il étend ses travaux à la stratégie d'investissement optimale.

Pour obtenir sa consommation optimale, Aase (2016) montre que l'individu peut utiliser une stratégie d'investissement optimale. L'individu alloue au début de chaque période une fraction de sa richesse à la consommation et investit le reste dans des actifs pour sa consommation future. Il agit sur ses préférences (γ, ρ, σ_V) compte tenu des différentes opportunités qui s'offrent à lui sur le marché.

Après avoir passé en revue la littérature sur l'utilité récursive, nous appliquerons par la suite cette notion au domaine de l'assurance vie en vue de la détermination de la pension optimale d'un assuré ayant une fonction d'utilité récursive d'une part et une fonction d'utilité espérée d'autre part.

Chapitre 4

Utilité récursive en assurance vie.

Dans ce chapitre, nous appliquons le concept d'utilité récursive à l'assurance vie. Nous nous inspirons ici du modèle développé par Aase (2016). Le but de cette application est la détermination de la pension optimale d'un assuré ayant une fonction d'utilité récursive et la comparaison de celle-ci à la pension obtenue au cas où il aurait une fonction d'utilité classique. Mais avant, nous faisons un bref rappel du contexte dans lequel nous nous situons.

4.1 Contexte de l'application

Pour étendre l'utilité récursive au domaine de l'assurance vie, l'on fera un bref rappel sur le modèle de cycle de vie et les déterminants de l'assurance vie.

4.1.1 Le modèle de cycle de vie

Nous nous situons dans la théorie standard du cycle de vie telle que développée par Ando et Modigliani en 1963. Selon le modèle, l'individu emprunte au début de sa vie active, il rembourse les sommes empruntées tout au long de sa période active tout en épargnant en vue de faire face à la chute de ses revenus une fois qu'il sera à la retraite. L'idée centrale du modèle est que la consommation est supposée constante au cours de la vie du consommateur et, durant la vie active, le revenu ne cesse de croître avant de décroître assez vite au moment de la retraite. De plus l'individu qui désire consommer plus que son revenu a recours à l'emprunt tandis que celui qui consomme moins épargne et a donc plus de revenu disponible à sa retraite.

On suppose que les contrats d'assurance vie optimaux existent dans le modèle tel que démontré par Aase (2015). Nous faisons abstraction de l'emprunt, l'individu alloue à chaque période une partie de son revenu à sa consommation. Il paie ensuite une prime avec la partie restante. Celle-ci est investie sur le marché financier par les assurances en vue du paiement des pensions de retraite. Nous ne nous focaliserons ici que sur les consommations et pensions optimales.

4.1.2 Les déterminants de l'assurance vie.

Les déterminants de l'assurance vie désignent l'ensemble des éléments auxquels l'agent économique se réfère pour opérer un choix d'assurance vie. Les études sur ces déterminants ont été initiées par Yaari en 1965. Ferry (1977) pour sa part distingue l'approche normative de l'approche empirique.

4.1.2.1 Approche normative.

L'approche normative de la demande d'assurance vie repose sur le principe de maximisation de l'utilité espérée.

Fisher étudie en 1973 la demande d'assurance vie et le choix des consommateurs en présence d'incertitude sur la vie. Il se base sur l'hypothèse de maximisation de l'utilité espérée et montre que le désir d'un agent de constituer une épargne pour sa retraite ou un legs pour un proche est étroitement lié à la demande d'assurance vie.

Fortune (1973) étudie les conséquences directes de cette hypothèse sur les déterminants de l'assurance vie optimale d'un individu rationnel. Il développe un modèle théorique qui admet trois variables cycliques clés déterminantes dans l'explication des variations cycliques de la quantité d'assurance vie demandée à savoir : le taux d'actualisation, le montant des revenus non immobiliers attendus sur la période étudiée (à l'exemple des salaires), et le montant de la richesse non humaine détenue au moment où la décision de souscrire une assurance vie est prise. Ses résultats empiriques confirment l'importance de ces variables et restent cohérents avec le comportement d'un individu rationnel sous l'hypothèse de l'utilité espérée.

4.1.2.2 Approche empirique.

Cette approche ne fait pas référence a priori aux normes de comportements dans le choix d'une assurance vie, mais plutôt à l'expérience, aux observations. Ferry (1977) présente les travaux sur les analyses empiriques de la demande d'assurance vie d'une part par les variables susceptibles de l'expliquer, d'autre part à partir de populations diverses. Il définit la demande d'assurance vie en termes de *sommes assurées*. D'autres auteurs notamment Farmer en 1966 retiennent les primes comme variable expliquée. Le tableau de l'annexe B récapitule cette analyse.

Notre approche du choix optimal en assurance vie est une analyse proche de l'approche normative étant donné que l'on s'intéresse aux comportements de l'assuré, notamment la maximisation de sa fonction d'utilité qui est plutôt récursive dans notre cas.

4.2 Modélisation

On considère le modèle du cycle de vie précédent contenant des contrats d'assurance vie optimaux, notamment des contrats de pension. Dans un contexte de risque et d'incertitude, On considère un individu d'âge x ayant accès au marché financier et aux contrats

d'assurance. Nous faisons un ensemble d'hypothèses sur la mortalité, le marché financier, la fonction d'utilité récursive de l'individu et ses paramètres de préférences.

4.2.1 Hypothèses retenues

4.2.1.1 Hypothèses sur la mortalité

On suppose que la mortalité de l'assuré suit le modèle de Makeham^[1]. La probabilité de survivre n années étant à l'âge x en temps continu est donné par :

$${}_n p_x = \exp\left(-\int_0^n \mu_{(x+t)} dt\right) \quad (4.2.1)$$

μ_x le taux instantané de mortalité dans le modèle de Makeham se décompose comme suit :

$$\mu_x = \theta_1 + \theta_2 \theta_3^x$$

avec $\theta_1 \geq 0$, $\theta_2 > 0$, $\theta_3 > 0$

- θ_1 la composante accidentelle indépendante de l'âge
- $\theta_2 \theta_3^x$ la composante de vieillissement qui est une fonction exponentielle de l'âge (modèle de Gompertz).

On obtient la valeur de ${}_n p_x$

$${}_n p_x = \exp\left(-\int_0^n (\theta_1 + \theta_2 \theta_3^{x+t}) dt\right) \quad (4.2.2)$$

$$= \exp\left(-\theta_1 t - \frac{\theta_2 \theta_3^x}{\ln(\theta_3)} (\theta_3^t - 1)\right) \quad (4.2.3)$$

La fonction de survie l_x dans le modèle de Makeham est donné par :

$$l_x = l_{0 \cdot x} p_0 \quad (4.2.4)$$

$$= \exp\left(-\theta_1 x - \frac{\theta_2}{\ln(\theta_3)} (\theta_3^x - 1)\right) \quad (4.2.5)$$

Les tables de mortalité réglementaires MR, FR, MK et FK en Belgique pour l_x sont obtenues de l'équation :

$$l_x = k \cdot s^x \cdot g^{c^x}$$

1. Table MR

avec :

$$\begin{aligned} s &= \exp(-\theta_1) \\ g &= \exp\left(\frac{\theta_2}{\ln(\theta_3)}\right) \\ c &= \theta_3 \\ k &= \frac{10^6}{g} \end{aligned}$$

Les coefficients réglementaires dans la table MR en Belgique sont donnés dans le tableau [4.2.1](#) suivant :

TABLE 4.2.1 – Coefficients réglementaires de la table MR

k	1000266,63
s	0,999441703848
g	0,999733441115
c	1,101077536030

4.2.1.2 Hypothèses sur le marché financier

Notre marché contient un actif sans risque B_t et un actif risqué S_t .

- Taux sans risque

Nous utilisons comme modèle de taux d'intérêt sans risque le modèle de Nelson-Siegel. C'est un modèle paramétrique de la structure à terme des taux zéro coupon en temps continu. Les taux d'intérêts sont donnés par :

$$r_t^{NS}(T) = \beta_0 + \beta_1 \left(1 - \frac{e^{-\left(\frac{T-t}{\tau}\right)}}{\left(\frac{T-t}{\tau}\right)}\right) + \beta_2 \left(1 - \frac{e^{-\left(\frac{T-t}{\tau}\right)}}{\left(\frac{T-t}{\tau}\right)} - e^{-\left(\frac{T-t}{\tau}\right)}\right) \quad (4.2.6)$$

L'estimation des paramètres β_0, β_1 et β_3 du modèle se fait par la méthode des Moindres Carrées Ordinaires (MCO). En effet, en fixant une valeur de départ au paramètre τ , l'équation [4.2.6](#) devient une équation sur laquelle l'on applique la régression linéaire multiple, soit :

$$r_t^{NS}(T) = \beta_0 + \beta_1 W_1(T-t) + \beta_2 W_2(T-t) \quad (4.2.7)$$

avec :

— $r_t^{NS}(T)$ la variable réponse

- $W_1(T - t)$ et $W_2(T - t)$ les variables explicatives
- β_0 , β_1 et β_2 les paramètres à estimer

Il existe une importante littérature sur la régression linéaire multiple en général et sur les MCO en particulier.

Pour notre estimation, l'on se servira des taux zéro coupon au 31 juin 2020 publiés par l'Institut des Actuaire de France.

Après estimation (voir code R en annexe), nous obtenons pour une valeur $\tau = 2$ de départ le vecteur $\hat{\beta} = (\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\beta}_2)$ du tableau 4.2.2 suivant :

TABLE 4.2.2 – Paramètres de Nelson-Siegel estimés

$\hat{\beta}_0$	0.01034417
$\hat{\beta}_1$	-0.009830377
$\hat{\beta}_2$	-0.0416575

Après estimation des paramètres du modèle de Nelson-Siegel, on trouve une valeur des taux sans risque pour différentes maturités (voir annexe D).

La figure 4.2.1 suivante montre suivant les paramètres estimés, l'évolution des taux d'intérêt .

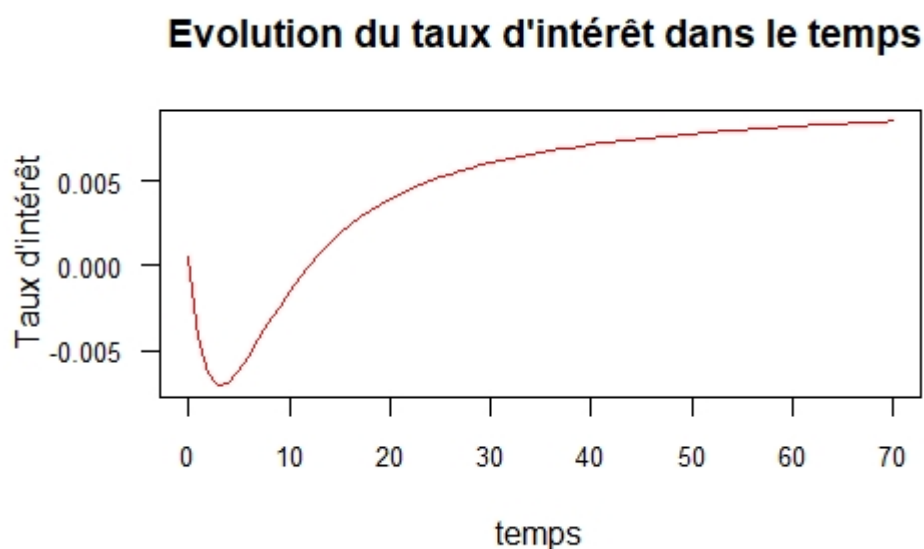


FIGURE 4.2.1 – Evolution du taux d'intérêt de Nelson-Siegel.

Soit (Ω, \mathcal{F}, P) un espace de probabilité muni d'une filtration \mathcal{F}_t générée par un mouvement brownien W . Le marché contient un actif sans risque B_t (un dépôt) et un actif risqué S_t (fonds de placement).

- Actif sans risque $B(t)$

l'actif sans risque B_t vérifie l'équation différentielle suivante :

$$dB(t) = r_t B(t) dt \quad (4.2.8)$$

où $r(t)$ est le taux sans risque constant du modèle de Nelson-Siegel développé précédemment. En intégrant, on obtient :

$$\int_0^t \frac{dB(s)}{B(s)} = \int_0^t r(s) ds$$

$$B(t) = B(0) \exp\left(\int_0^t r(s) ds\right) \quad (4.2.9)$$

- Actif risqué $S(t)$

Le fonds de placement S_t est un brownien géométrique qui vérifie l'équation différentielle suivante sous la mesure historique :

$$dS(t) = \mu S(t) dt + \sigma S(t) dW_t \quad (4.2.10)$$

- μ le rendement du fonds
- σ la volatilité du fonds
- W_t un mouvement brownien.

Sous la mesure risque neutre,

$$dS(t) = (\mu - \lambda_t \sigma) S(t) dt + \sigma S(t) dW_t^Q \quad (4.2.11)$$

- $(\mu - \lambda_t \sigma) = r_t$ le rendement du fonds
- λ_t le prix de marché du risque
- σ la volatilité du fonds
- W_t^Q est également un mouvement brownien la nouvelle mesure Q .

- Prix de marché du risque λ_t

Le prix de marché du risque λ_t n'est pas observable dans la pratique. Cependant, il peut être déterminé grâce à l'analyse de la prime de risque $\lambda_t \sigma$. Caja et Planchet (2010) définissent la prime de risque comme le surplus de rendement par rapport au taux sans risque qu'offre un support risqué ($\lambda_t \sigma = \mu - r_t$).

Ils donnent les typologies de primes de risques et proposent des méthodes d'estimations pour leur utilisation en assurance. Ils donnent le rôle du prix de marché du risque dans les modèles notamment le lien avec les déflateurs et procède à une modélisation directe de ce prix de marché.

Le prix de marché du risque est supposé constant dans notre modèle. Nous retenons une valeur de $\lambda = 28.5\%$. Ce prix de marché du risque λ est calculé sur la base de la prime de risque de l'indice S&P 500 qui était de 7.14% au 30/09/2020. La volatilité à cette même date oscillait entre 27.12% pour la valeur la plus haute et 25.06% pour la valeur la plus basse.

- Déflateur $D(t)$

On utilise le déflateur ou facteur d'actualisation stochastique. Dastarac et Sauveplane (2010) définissent le déflateur comme une fonction d'actualisation stochastique comportant à la fois une composante temporelle (actualisation classique) et une composante risque (changement de probabilité entre l'univers historique et l'univers risque-neutre).

En l'absence d'opportunités d'arbitrage et sous la mesure historique, si $(P(t))_{t>0}$ est un processus de prix d'actif dans le temps, le déflateur $D = (D(t))_{t>0}$ est un processus stochastique tel que :

$$D(t)P(t) = E[D(T)P(T)|Ft] \forall t < T$$

En pratique les déflateurs permettent la valorisation des processus (exemple du prix d'un actif) au rendement aléatoire en utilisant le taux d'actualisation stochastique.

Le déflateur D_t dans notre modèle est donné par l'équation différentielle stochastique :

$$dD(t) = -r_t D_t dt - D_t \lambda dW_t \quad (4.2.12)$$

avec W_t un mouvement brownien. En appliquant la formule d'Itô et en intégrant on obtient :

$$D(t) = e^{-\int_0^t r_s ds} \frac{dQ}{dP} \quad (4.2.13)$$

— $e^{-\int_0^t r_s ds}$ le facteur d'actualisation classique.

— $\frac{dQ}{dP}$ la composante risque qui représente changement de probabilité entre l'univers historique et l'univers risque-neutre.

Le processus de densité $\frac{dQ}{dP}$ s'écrit comme suit :

$$\frac{dQ}{dP} = \exp\left(-\int_0^t \lambda dw(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2 ds\right) \quad (4.2.14)$$

- Notre marché est supposé complet et sans opportunité d'arbitrage².

2. le marché est complet si déflateur associé au marché est unique. Il est sans opportunité d'arbitrage si

4.2.2 Fonction d'utilité récursive

Le modèle d'utilité retenue est celui développé par Aase (2015) et décrit au précédent chapitre. Il étend le modèle aux contrats d'assurances. Les conditions d'existence de ces fonctions d'utilités ont été établies et prouvées par Duffie et Epstein.

Nous faisons donc l'hypothèse supplémentaire que le marché de l'assurance existe et que le consommateur bénéficie à partir de sa retraite d'une pension c_t tant qu'il est en vie. On suppose également que l'assuré a une stratégie d'investissement optimale lui permettant en début de période d'allouer une part de son revenu à sa consommation et le reste est placé dans l'actif risqué pour faire face à ses consommations futures (consommation pendant la période d'activité et pension à la retraite).

Considérons un assuré d'âge x avec une probabilité de survie pour un individu d'âge x , ${}_t p_x$ définie précédemment.

La fonction d'utilité récursive de l'individu d'âge est définie par :

$$V_t = \mathbb{E}_t \left[\left(\int_t^T f(c_s, V_s) - \frac{1}{2} A(V_s) \sigma_{V_s}' \sigma_{V_s} \right) ds \right], t \in [0, T] \quad (4.2.15)$$

- T Un horizon de planification fini de l'économie; $T = \omega - x$ avec $\omega = 100$, l'âge ultime et $x = 30$ l'âge de l'assuré.
- n l'année de départ en retraite de l'assuré ($n < T$)
- $f(c_t, V_t)$ représente l'index de félicité au temps t .
- c_t le processus de consommation pendant la durée de vie tel que :
Pour $c_t \in [0, n]$ on a la consommation et $c_t \in [n, T]$ correspond à la pension
- V_t l'utilité future, un processus stochastique de volatilité σ_{V_t}
- A est l'aversion pour le risque de l'assuré

La paire (f, A) qui génère l'utilité est appelé agrégateur. Elle obéit aux spécifications de Kreps et Porteus (1978) et est de la forme :

$$f(c, v) = \frac{\delta}{1 - \rho} \frac{c^{(1-\rho)} - ((1 - \gamma)v)^{\frac{1-\rho}{1-\gamma}}}{((1 - \gamma)v)^{\frac{\gamma-\rho}{1-\gamma}}} \quad (4.2.16)$$

avec

tout actif ou tout portefeuille garantissant des flux presque sûrement positifs, et strictement positifs avec une probabilité non nulle, a un prix strictement positif (voir Dastarac et Sauveplane (2010))

- δ **le taux d'impatience de l'agent** ($\delta \geq 0$) : c'est un taux d'actualisation subjectif. Dans la théorie économique, l'agent économique s'en sert pour escompter sa satisfaction à venir. Il se définit aussi comme un taux de préférence pour le présent. En général, les agents économiques préfèrent une utilité immédiate à une utilité future d'égal montant.
- ρ **La préférence temporelle** ($\rho \geq 0, \rho \neq 1$) : C'est une hypothèse de comportement, comme nous l'avons vue au chapitre précédent, le temps a une grande place dans le choix des individus. La préférence temporelle est liée au concept d'aversion pour le risque dans notre modèle. C'est l'inverse de l'élasticité de substitution intertemporelle, elle représente l'aversion de l'agent aux fluctuations temporelles de la consommation.
- γ **L'aversion relative pour le risque** ($\gamma \geq 0, \gamma \neq 1$) : Elle représente l'aversion de l'agent pour les fluctuations de la consommation compte tenu des différents états de la nature.

4.2.2.1 Choix des paramètres de préférences de l'agent

- $\delta = 1\%$.Selon Modigliani le δ doit être le plus proche possible de 0 ; De plus, les économistes dans la littérature situent le taux d'impatience des ménages autour de cette valeur .
- $\sigma_{V_t} = 12\%$. La volatilité de la fonction d'utilité récursive est constante, elle est considérée comme faisant partie des préférences de l'assuré.
- $\rho = 0.96$
- $\gamma = 2.6$
Ces deux derniers paramètres ont été choisis dans un premier temps sur la base des recommandations de l'étude d' Aase (2017).

4.3 Détermination de la pension optimale

La pension optimale est le montant de pension pour lequel l'utilité de l'assuré (sa satisfaction) est maximale. Avant sa détermination, nous ferons un bref rappel de l'intérêt de l'utilité récursive pour le domaine de l'assurance vie.

4.3.1 Intérêt de l'utilité récursive en assurance vie

L'intérêt de l'utilité récursive a été donné à la section 2.3.2.3. L'on a mis en avant le fait qu'elle permettait une distinction claire entre l'aversion pour le risque et la substitution

intertemporelle. Appliquée au domaine de l'assurance vie, modéliser les préférences d'un assuré à l'aide d'une fonction d'utilité récursive pourrait à priori permettre de voir l'impact de chacun de ses paramètres sur les montants de pension optimales. A terme, l'industrie de l'assurance pourrait s'en servir pour proposer des contrats de pensions qui reflètent les préférences de ses assurés potentiels.

4.3.2 Problème de l'assuré

Dans la théorie économique, le consommateur de façon générale cherche à maximiser son utilité sous la contrainte de son budget limité afin de déterminer les quantités de biens qu'il allouera à sa consommation. Ces quantités sont optimales. Le problème de l'assuré dans notre modèle est donc la maximisation de son utilité ici matérialisée par la fonction d'utilité récursive : $U : L_+ \times L_+ \rightarrow R$.

L'utilité future est donnée par :

$$V(t) = \mathbb{E} \left(\int_t^T f(c_s, V_s) d_s \right) \quad (4.3.1)$$

Le problème d'optimisation s'écrit :

$$\max_{c \in L} U(c) \quad (4.3.2)$$

sous la contrainte

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T (D_t c_t) {}_t p_x d_t \right) \leq \mathbb{E} \left(\int_0^T (D_t y_t) {}_t p_x d_t \right) \quad (4.3.3)$$

où ${}_t p_x$ est la probabilité de survie, avec les valeurs de y_t ³ :

$$y_t = \begin{cases} y & \text{si } t \leq n \\ 0 & \text{si } t > n \end{cases} \quad (4.3.4)$$

que la valeur présente de sa consommation est au plus égale à celle de son salaire. Nous supposons en outre que le salaire de notre agent ne varie pas au cours de sa période active.

Le Lagrangien du problème est :

$$L(c, \alpha) = U(c) - \alpha \mathbb{E} \left(\int_0^T D_t (c_t - y_t) {}_t p_x d_t \right) \quad (4.3.5)$$

3. l'assuré actif perçoit un salaire entre $t \in [0, n]$ et ne perçoit aucun salaire une fois à la retraite .i.e $t \in [0, T]$

α le multiplicateur de lagrange.

En s'inspirant du modèle d' Aase (2015) notamment des équations [3.3.14](#), [3.3.15](#) que l'on injecte dans l'équation [4.3.6](#). Sous l'hypothèse que D_t et c_t^* sont des browniens géométriques, on obtient la valeur la pension optimale à l'instant t pour $t \in [n, T]$ ⁴ en supposant que l'assuré est en vie :

$$c_t^* = c_0 e^{\int_0^t \mu_c(s) - \frac{1}{2} \sigma_c(s)^2 ds + \int_0^t \sigma_c(s) dW_s} \quad (4.3.6)$$

avec

$$u_c(t) = \frac{1}{\rho}(r_t - \delta) + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \lambda^2 - \frac{(\gamma - \rho)}{\rho^2} \lambda \sigma_V + \frac{1}{2} \frac{(\gamma - \rho) \gamma (1 - \rho)}{\rho^2} \sigma_V^2 \quad (4.3.7)$$

et

$$\sigma_c(t) = \frac{1}{\rho} (\lambda + (\rho - \gamma) \sigma_V) \quad (4.3.8)$$

- Détermination de c_0

Pour déterminer c_0 , nous nous servons de la dérivée directionnelle : $\frac{\partial L(\cdot)}{\partial \alpha} = 0$ on obtient alors l'équation suivante :

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T D_t (y_t - c_t^*) {}_t p_x d_t \right)$$

en intégrant le salaire tel que décrit dans l'équation [4.3.4](#), on a :

$$\int_0^n (y \mathbb{E}(D_t) - \mathbb{E}(D_t c_t^*)) {}_t p_x d_t + \int_n^T -\mathbb{E}(D_t c_t^*) {}_t p_x d_t = 0 \quad (4.3.9)$$

$$y \int_0^n (\mathbb{E}(D_t)) {}_t p_x d_t = \int_n^T \mathbb{E}(D_t c_t^*) {}_t p_x d_t$$

En remplaçant les valeurs de D_t et c_t^* correspondantes, on obtient :

$$c_0 = y \times \frac{\int_0^n \left(\mathbb{E} \left(e^{-\int_0^t r_s ds - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2 ds - \int_0^t \lambda dW_s} \right) \right) {}_t p_x d_t}{\int_0^T \mathbb{E} \left(e^{-\int_0^t r_s ds - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2 ds - \int_0^t \lambda dW_s} e^{\int_0^t u_c(s) - \frac{1}{2} \sigma_c(s)^2 ds + \int_0^t \sigma_c(s) dW_s} \right) p_x d_t}$$

En utilisant les propriétés de l'espérance de la loi log-normale⁵, on obtient :

4. lorsque $t \in [0, n]$, c_t^* correspond à la consommation optimale sur la durée de vie de l'assuré. De plus si l'assuré n'est pas en vie en t , $c_t^* = 0$

5. $\mathbb{E}(e^A) = e^{\mathbb{E}(A) + \frac{1}{2} \text{Var}(A)}$, A ayant une distribution log-normale

$$c_0 = y \times \frac{\int_0^n e^{-\int_0^t r_s ds} {}_t p_x dt}{\int_0^T e^{-\int_0^t r_s ds + \int_0^t u_c(s) ds} {}_t p_x dt}$$

on trouve au final pour la valeur de c_0 :

$$c_0 = y \times \frac{\bar{a}_{x:\bar{n}}^{(r_t)}}{\bar{a}_x^{(\tilde{r}_t)}}$$

avec :

$\bar{a}_{x:\bar{n}}^{(r_t)}$ le prix de rente d'un assuré d'âge x en $(x+n)$ au taux r_t

$\bar{a}_x^{(\tilde{r}_t)}$ le prix de rente d'un assuré d'âge x en $(x+T)$ au taux \tilde{r}_t

avec

$$\tilde{r}_t = r - \frac{1}{\rho}(r_t - \delta) - \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \lambda^2 + \frac{(\gamma - \rho)}{\rho^2} \lambda \sigma_V - \frac{1}{2} \frac{(\gamma - \rho)\gamma(1 - \rho)}{\rho^2} \sigma_V^2 \quad (4.3.10)$$

4.3.3 Discrétisation du processus de consommation et détermination de c_t^*

Pour le calcul de c_t^* nous allons procéder par discrétisation.

On part de l'équation [4.3.6](#) dans laquelle le mouvement brownien sera simulé. Ces simulations nous permettront de calculer la pension optimale à un instant t donné (voir code R).

Nous faisons les hypothèses supplémentaires suivantes :

- On suppose que notre assuré a 30 ans à l'instant initial. On veut calculer sa pension optimale sachant qu'il a un salaire fixe de 36 000 € /an.
- On suppose une retraite à 65 ans, l'horizon fini de l'économie est fixé à ($T = w - x = 70$).
- Les pensions optimales interviennent à partir de la retraite ($t = 35$). Avant cette date, il s'agit de consommations optimales.

- Simulation du processus C_t

La simulation de notre processus C_t se fera de manière exacte i.e. sans erreur de discrétisation.

Théron (2005) définit la discrétisation exacte : *Un processus X admet une discrétisation exacte dès lors que l'on peut résoudre explicitement l'équation différentielle stochastique qui lui est associée.* C'est le cas notamment du mouvement brownien géométrique et notre processus C_t en est un (voir équation [4.3.6](#)).

De façon formelle, le processus $(\bar{S}_{t\delta})_{t \in [1; \frac{T}{\delta}]}$ est une **discrétisation exacte** du processus S_t si $\forall \delta > 0, \forall t \in [1; \frac{T}{\delta}], \bar{S}_{t\delta} =_{loi} S_{t\delta}$

Dans notre cas :

$$C^*(t + \Delta_t) = C_t^* \exp\left(\left(\mu_c - \frac{\sigma_c^2}{2}\right)\Delta_t + \sigma_c\sqrt{\Delta_t} \times \epsilon\right)$$

avec $\epsilon \sim N(0, 1)$

La figure 4.3.1 nous montre une réalisation des 10 000 simulations de notre processus de consommation C_t

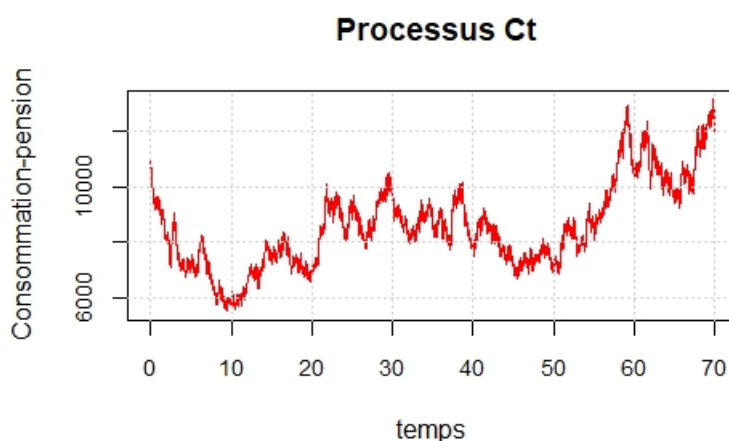


FIGURE 4.3.1 – Une des 10 000 réalisations du processus C_t avec la fonction d'utilité récursive.

La méthode de détermination de C_t^* est détaillée dans le code R en annexe F. Les valeurs de C_t sont contenues dans l'annexe E.

4.4 Détermination de la pension optimale : cas de l'utilité espérée

Dans le cas de l'utilité classique, le problème de l'assuré est le même que dans le cas précédent. Aase (2015) suppose que les préférences sont représentées par la fonction d'utilité espérée : $U : L \rightarrow R$

$$U(c) = \mathbb{E} \left(\int_0^T e^{-\delta t} u(c_t) dt \right) \quad (4.4.1)$$

δ représente le taux d'actualisation subjectif de l'utilité, interprété précédemment comme le taux d'impatience.

La grande différence est le type de fonction d'utilité qui est de la forme CRRA (Constant Relative Risk Aversion) : $u(c) = \frac{c^{1-\gamma}}{1-\gamma}$, avec γ l'aversion relative pour le risque. Comme nous

l'avons mentionné plus haut, dans le cas de l'utilité espérée, il est impossible de dissocier l'aversion pour le risque de l'élasticité de substitution intertemporelle, les deux notions sont confondues ($\gamma = \rho$ dans ce cas).

Le programme d'optimisation est le même que précédemment à savoir la maximisation de l'utilité sous contrainte budgétaire. Le Lagrangien s'écrit :

$$L(c, \alpha) = U(c) - \alpha \mathbb{E} \left(\int_0^T D_t (c_t - y_t) {}_t p_x d_t \right) \quad (4.4.2)$$

La condition de premier ordre est :

$$\mathbb{E} \left(\int_0^T \left((e^{-\delta t} u'(c_t^*) - \alpha D_t) c(t) \right) {}_t p_x dt \right) = 0 \quad (4.4.3)$$

$$\begin{aligned} u'(c_t^*) e^{-\delta t} - \alpha D_t &= 0 \\ u'(c_t^*) &= \alpha e^{\delta t} D_t \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

L'on se sert du Lemme de Itô pour la différentiation de l'équation différentielle stochastique [4.4.4](#) et l'on obtient l'équation suivante :

$$u''(c_t^*) . d(c_t^*) + \frac{1}{2} u'''(c_t^*) d(c_t^*)^2 = \delta \alpha e^{\delta t} D_t d_t + \alpha e^{\delta t} dD_t \quad (4.4.5)$$

Après développement, se servant de l'équation [4.4.4](#) on obtient l'EDS suivante pour c_t^* :

$$dc_t^* = \left((r_t - \delta) \left(-\frac{u'(c_t^*)}{u''(c_t^*)} \right) + \frac{1}{2} \left(-\frac{u'(c_t^*)}{u''(c_t^*)} \right)^3 \frac{u'''(c_t^*)}{u'(c_t^*)} \lambda^2 \right) d_t + \left(-\frac{u'(c_t^*)}{u''(c_t^*)} \right) \lambda dW(t) \quad (4.4.6)$$

on calcule $u'(c_t^*)$, $u''(c_t^*)$ et $u'''(c_t^*)$ de la fonction d'utilité de l'assuré $u(c_t^*) = \frac{c_t^{*1-\gamma}}{1-\gamma}$.

$$\begin{cases} u'(c_t^*) &= (c_t^*)^{-\gamma} \\ u''(c_t^*) &= (-\gamma - 1)(c_t^*)^{-\gamma-1} \\ u'''(c_t^*) &= -\gamma(-\gamma - 1)(c_t^*)^{-\gamma-2} \end{cases} \quad (4.4.7)$$

En remplaçant les valeurs des dérivées de l'équation [4.4.7](#) dans l'EDS [4.4.6](#) on obtient l'EDS suivante :

$$\frac{dc_t^*}{c_t^*} = \left(\frac{1}{\gamma} (r_t - \delta) + \frac{1}{2\gamma} \lambda^2 + \frac{1}{2\gamma^2} \lambda^2 \right) d_t + \frac{1}{\gamma} \lambda dW(t) \quad (4.4.8)$$

qui caractérise également ici le taux de croissance de la consommation.

avec

$$\mu_c(t) = \frac{1}{\gamma}(r_t - \delta) + \frac{1}{2\gamma}\lambda^2 + \frac{1}{2\gamma^2}\lambda^2 \quad (4.4.9)$$

$$\sigma_c(t) = \frac{\lambda}{\gamma} \quad (4.4.10)$$

L'on cherche ensuite la dynamique de $\ln(c_t^*)$ qui nous permet d'obtenir le processus c_t^* :

$$c_t^* = c_0 \cdot \exp\left(\frac{1}{\gamma} \int_0^t (r_s - \delta) ds + \frac{1}{2} \lambda^2 d_s + \lambda dW(s)\right) \quad (4.4.11)$$

$$c_t^* = c_0 \varepsilon_t^{-\frac{1}{\gamma}} e^{\int_0^t \frac{1}{\gamma}(r_s - \delta) ds} = c_0 D_t^{-\frac{1}{\gamma}} e^{-\frac{\delta}{\gamma} t} \quad (4.4.12)$$

La valeur de c_0 est obtenue de la même façon que dans le cas de l'utilité récursive à partir de la contrainte budgétaire de l'assuré qui reste inchangée.

On part de la contrainte [4.3.3](#) :

$$\int_0^n (y \mathbb{E}(D_t) - \mathbb{E}(D_t c_t^*)) {}_t p_x d_t + \int_n^T -\mathbb{E}(D_t c_t^*) {}_t p_x d_t = 0$$

$$y \int_0^n \mathbb{E}(D_t) {}_t p_x d_t = \int_0^T \mathbb{E}(D_t c_t^*) {}_t p_x d_t$$

$$c_0 = \frac{y \int_0^n e^{-\int_0^t r_s ds} {}_t p_x d_t}{\int_0^T \mathbb{E} \left(\exp\left(\frac{1}{\gamma} \left(\int_0^t (r_s - \delta) ds + \frac{1}{2} \lambda^2 d_s + \lambda dW(s)\right) - \int_0^t r_s ds - \int_0^t \lambda dW(s) - \frac{1}{2} \int_0^t \lambda^2 ds\right) {}_t p_x d_t \right)}$$

$$c_0 = y \frac{\bar{a}_{x:\bar{n}|}^{(r_t)}}{\bar{a}_x^{(\tilde{r}_t)}}$$

où

$$\tilde{r}_t = r_t - \frac{1}{\gamma}(r_t - \delta) + \frac{1}{2} \frac{1}{\gamma} \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \lambda^2 \quad (4.4.13)$$

Nous discrétisons le processus C_t^* comme précédemment :

$$C^*(t + \Delta_t) = C_t^* + C_{\Delta_t}^* \times \left(\frac{1}{\gamma}(r_t - \delta) + \frac{1}{2\gamma}\lambda^2 + \frac{1}{2\gamma^2}\lambda^2\right) \Delta_t + C_{\Delta_t}^* \times \frac{1}{\gamma} \lambda \sqrt{\Delta_t} \epsilon(t) \quad (4.4.14)$$

La figure [4.4.1](#) nous montre une réalisation des 10 000 simulations de notre processus de consommation C_t

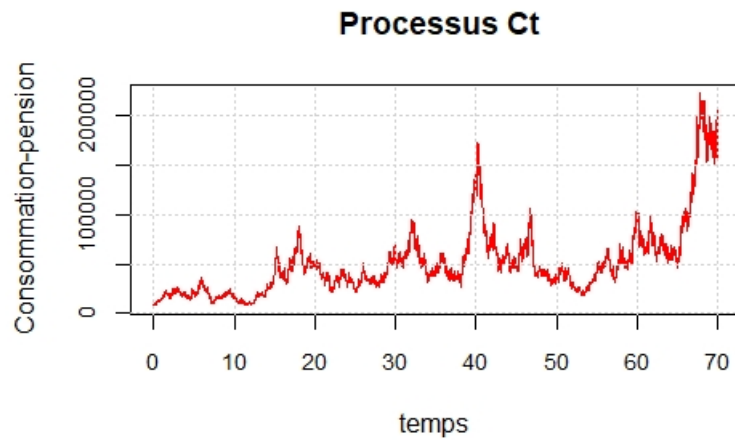


FIGURE 4.4.1 – Une des 10 000 réalisations du processus C_t avec la fonction d'utilité espérée.

Au terme de ce chapitre et sur base des hypothèses de notre modèle, nous sommes parvenus à la détermination de la pension optimale d'un assuré compte tenu de son type de fonction d'utilité (utilité réursive ou utilité classique). Dans le chapitre qui va suivre nous nous attèlerons à faire une application numérique, les résultats obtenus seront ensuite analysés.

Chapitre 5

Application numérique, comparaisons et analyse des résultats.

Dans le chapitre précédent, le modèle élaboré a permis de déterminer la pension optimale d'un individu ayant une fonction d'utilité récursive. Il a également permis de déterminer cette pension optimale dans le cas où sa fonction d'utilité correspond au modèle de l'utilité espérée.

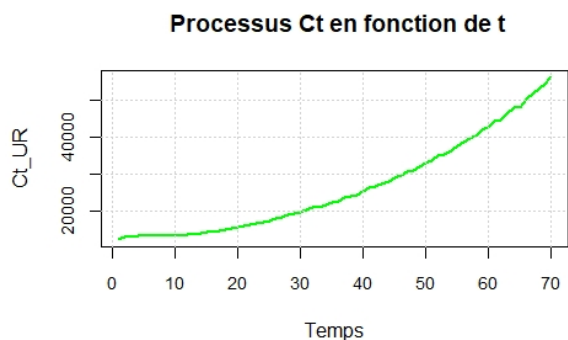
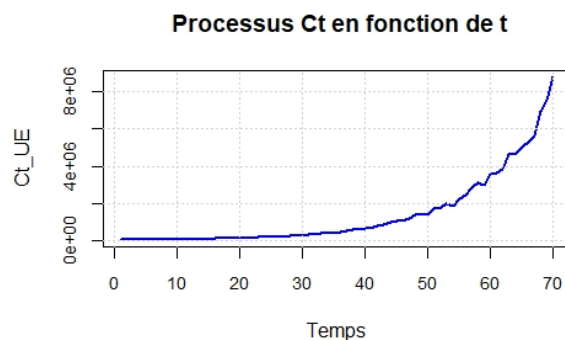
Le but du présent chapitre est de procéder à une application numérique du modèle afin de comparer et expliquer les pensions obtenues avec les différentes fonctions d'utilités. Nous procéderons ensuite à une analyse de sensibilité en faisant varier différents paramètres de préférences de l'individu dans les deux cas, en vue d'analyser les résultats obtenus.

5.1 Analyses des différences entre utilité récursive et utilité espérée

L'application numérique, compte tenu des hypothèses énoncées au chapitre précédent, a permis d'obtenir les consommations-pensions optimales avec les deux types d'utilités pour chaque période. Les résultats sont consignés dans l'annexe *E1*.

5.1.1 Une consommation-pension croissante

En observant les résultats, on constate que la consommation dans les 2 cas croît tout au long de la vie de l'individu comme le montre les figures [5.1.1](#) et [5.1.2](#). Cependant, elle est beaucoup plus élevée dans le cas de l'utilité espérée que dans le cas de l'utilité récursive.

FIGURE 5.1.1 – Evolution de C_t avec la fonction d'utilité récursiveFIGURE 5.1.2 – Evolution de C_t avec la fonction d'utilité espérée

Le tableau [5.1.1](#) donne le taux de croissance moyen de la consommation et de la pension de notre agent sur sa durée de vie.

TABLE 5.1.1 – Taux de croissance de la consommation-pension

	Consommation	Pension	croissance moyenne
Utilité récursive	2.2 %	2.45 %	2.33 %
Utilité espérée	8.16 %	9.08 %	8.29 %

Durant sa période active, la consommation augmente en moyenne de 2.2% pour l'utilité récursive contre 8.16% pour l'utilité espérée, soit presque 4 fois plus dans le second cas. A partir de la retraite, la croissance moyenne de la pension est de 2.45% pour l'utilité récursive contre 9.08% pour l'utilité espérée, soit une fois de plus presque 4 fois plus élevé dans le second cas.

5.1.2 Faible consommation contre pension élevée

Les figures [5.1.3](#) et [5.1.4](#) montrent l'évolution de la pension pour les 2 types d'utilités. La pension augmente beaucoup plus vite à partir de la retraite ($t = 35$) avec une valeur maximum de 8 178 006.82 € dans le cas de l'utilité espérée contre 56 048.19 € dans le cas de l'utilité récursive comme le montre le tableau [5.1.2](#).

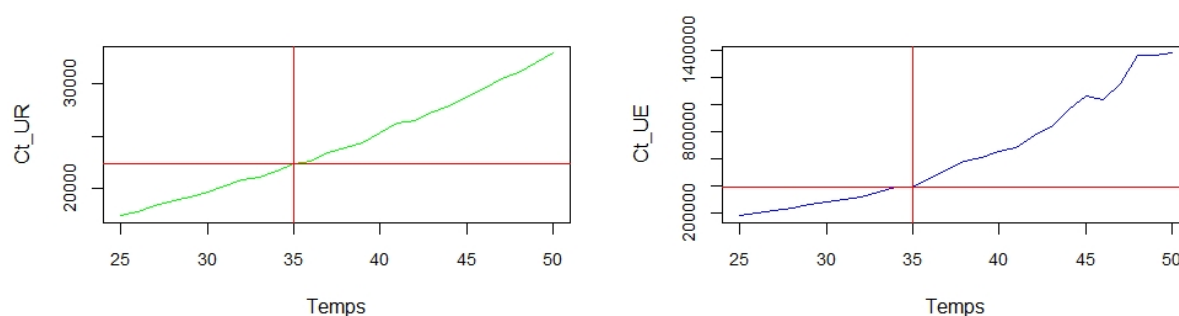


FIGURE 5.1.3 – Evolution de la pension à la retraite avec la fonction d'utilité récursive

FIGURE 5.1.4 – Evolution de la pension à la retraite avec la fonction d'utilité espérée

TABLE 5.1.2 – Evolution de la consommation-pension

Utilité	Consommation(Ct)			Pension(Pt)		
	Ct min	Ct max	moyenne	Pt min	Pt max	moyenne
Régressive	9 844, 71	20 735, 89	15 211, 67	21 213, 68	56 048, 19	35 770, 55
Espérée	23 012, 35	331 720, 59	117 789, 5	367 091, 01	8 178 006, 82	2 545 901, 45

La consommation de l'agent augmente au fur et à mesure. Il consomme moins durant sa période active en prévision de sa retraite.

Les différences observées entre les différentes utilités à ce stade de notre analyse, peuvent être expliquées dans un premier temps par les paramètres pris en compte dans les deux types de fonctions d'utilités.

Nos résultats ont été comparés aux données réelles américaines sur une période de près de 100 ans. Ces données sont celles utilisées par Mehra et Prescott en 1985 dans leurs travaux qui ont abouti à l'« énigme de la prime de risque ». Les indicateurs clés sont contenus dans le tableau 5.1.5 suivant. Notre objectif est un calibrage des paramètres de l'agent de sorte que l'on se rapproche des valeurs du taux de croissance de la consommation et de sa volatilité σ_c du tableau 5.1.5 suivant.

KEY US-DATA FOR THE TIME PERIOD 1889–1978. CONTINUOUS-TIME COMPOUNDING. $\hat{\kappa}_{M,c} = 0.4033$.

	Expectation	Standard dev.	Covariances
Consumption Growth	1.81%	3.55%	$\hat{\sigma}_{cM} = 0.002268$
Return S&P-500	6.78%	15.84%	$\hat{\sigma}_{Mb} = 0.001477$
Government Bills	0.80%	5.74%	$\hat{\sigma}_{cb} = -0.000149$
Equity Premium	5.98%	15.95%	

FIGURE 5.1.5 – Indicateurs clés des données réelles américaines pour la période 1889-1978, source : Knut.K. Aase, *Recursive utility using the stochastic maximum principle*, 2016.

Le taux de croissance de la consommation des ménages pour la période 1889 – 1978 est de 1.81% et sa volatilité de 3.55%, telles sont nos valeurs cibles. Si l'on considère que notre individu est représentatif, le résultat obtenu avec l'utilité récursive après simulation en ce qui concerne le taux de croissance moyen de la consommation est de 2.33% et l'écart type de 9.18%. A contrario, le taux de croissance moyen obtenu avec l'utilité espérée est 8.29% avec un écart type de 29.69% comme le montre le tableau [5.2.5](#).

TABLE 5.1.3 – Taux de croissance et volatilité de la consommation-pension

	Taux de croissance	volatilité (σ_c)
Utilité récursive	2.33%	9.18%
Utilité espérée	8.29%	29.69%

Nous pouvons conclure à ce stade que les résultats obtenus avec l'utilité récursive *fittent* mieux les données empiriques que ceux obtenus avec l'utilité standard.

Il a été mentionné dans une section précédente qu'avec l'utilité récursive, il était possible de distinguer dans les préférences de notre individu son aversion pour le risque capturée ici par le paramètre γ , de la substitution intertemporelle capturée par le paramètre ρ . Cependant, la fonction d'utilité espérée ne permet pas de distinguer ces deux paramètres qui se confondent. Pour vérifier cela nous allons procéder dans ce qui suit à une analyse de sensibilité.

5.2 Analyse de sensibilité

On fait varier ici certains paramètres importants du modèle, le taux sans risque r , le taux de préférence pour le présent δ , mais aussi les autres paramètres de préférences afin d'étudier l'impact sur les différents types d'utilités de l'agent.

5.2.1 Impact de la variation de taux d'intérêt r et du taux d'impatience δ

Le taux sans risque r est porté cette fois à 1%, 2% et 3%. Son impact sur les valeurs optimales est le même, soit une augmentation du processus de consommation-pension C_t (Voir annexe E2). Les figures 5.2.1 et 5.2.2 donne l'allure de l'évolution de la fonction C_t pour un taux $r = 3\%$.

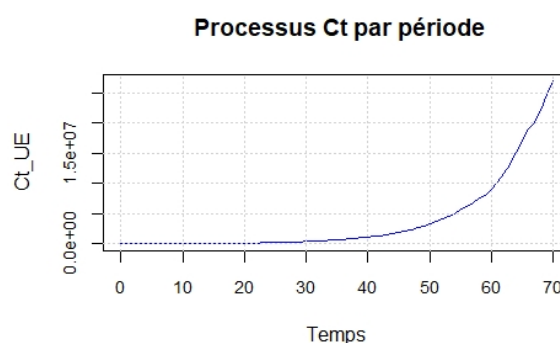
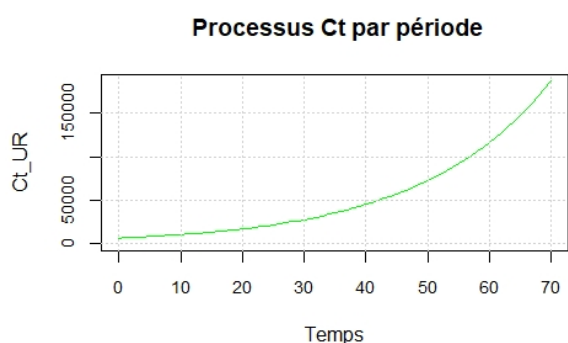


FIGURE 5.2.1 – Evolution de C_t avec la fonction d'utilité récursive pour $r_t = 0.03$.

FIGURE 5.2.2 – Evolution de C_t avec la fonction d'utilité espérée pour $r_t = 0.03$.

Une augmentation du taux sans risque entraîne une augmentation considérable des consommations-pensions optimales. La valeur maximum de C_t est portée à 22 732 873.36 € pour l'utilité espérée contre 186 799.8 € pour l'utilité récursive. La pension à 65 ans dans le premier cas est de 650 408.3 €, contre 35 485.7 € dans le second cas.

Le taux de préférence pour le présent δ de l'agent est porté également à 0.1% puis 1.5%. Son impact sur les valeurs optimales est donné dans le tableau 5.2.1 le taux de croissance de la consommation pour $\delta = 0.1\%$, 1% et 1.5%.

TABLE 5.2.1 – Taux de croissance et volatilité de la consommation pour différentes valeurs de δ

Utilité	$\delta = 0.001$		$\delta = 0.01$		$\delta = 0.015$	
	croissance	σ_c	croissance	σ_c	croissance	σ_c
Réursive	3.3%	9.18%	2.33%	9.18%	1.81%	9.18%
Espérée	9.25%	29.69%	8.29%	29.69%	7.76%	29.69%

Le tableau 5.2.2 suivant montre quant à lui l'effet de la variation du taux d'intérêt sur la consommation.

TABLE 5.2.2 – Taux de croissance et volatilité de la consommation pour différentes valeurs de r

	$r = 0.0047$		$r = 0.0066$		$r = 0.03$	
Utilité	croissance	σ_c	croissance	σ_c	croissance	σ_c
Réursive	2.13%	9.18%	2.33%	9.18%	4.77%	9.18%
Espérée	8.08%	29.69%	8.29%	29.69%	10.72%	29.69%

L'explication de la croissance de la consommation de notre agent se trouve dans son taux d'impatience (taux de préférence pour le présent) δ et le taux d'intérêt r . Une variation de δ et de r affecte la croissance de la consommation comme le montre les tableaux [5.2.1](#) et [5.2.2](#).

- Plus δ est faible, plus l'agent renonce à sa consommation présente en vue d'augmenter sa consommation future.
- A contrario, plus le taux d'intérêt augmente, plus le consommateur réduit sa consommation courante, épargne en vue d'augmenter sa consommation future.

Les variations de r et δ n'ont pas d'effet sur la volatilité du taux de croissance de la consommation.

5.2.2 Impact de la variation de γ et ρ

L'étude de l'impact de la variation de γ et ρ se fera séparément compte tenu du fait que ces paramètres dans le cas de l'utilité espérée se confondent et que ρ est spécifique à l'utilité réursive.

5.2.2.1 Variation de l'aversion relative pour le risque γ

Dans le modèle standard de cycle de vie [1](#), tous les comportements risqués sont capturés par le seul paramètre γ à savoir : l'aversion relative pour le risque, l'élasticité intertemporelle de substitution et la préférence temporelle ($\gamma = \rho = \frac{1}{\psi}$). Arrondel, Masson et Verger (2005) dans leur étude sur les préférences des individus pour le risque et l'avenir distinguent quatre types d'épargnants : les *bons pères de familles*, les *entreprenants*, les *têtes brulées* et les *cigales prudentes*.

En effet, ils appliquent leur étude à l'enquête Insee-Delta *Patrimoine 1998* en constituant un questionnaire basé sur cette enquête et dont les réponses permettent de mesurer les préférences des individus face au risque et au temps. Ils déterminent ainsi les valeurs des paramètres γ et δ pour chacune des catégories d'épargnants. La catégorie *bons pères de familles* est considéré comme étant la plus rationnelle avec un paramètre $\gamma \in [2, 4]$ et

1. le modèle suppose une utilité espérée, une actualisation exponentielle des utilités futures et la maximisation de l'espérance de l'utilité en univers incertain.

$\delta \in [1\%, 3\%]$. Nous portons la valeur γ à 4 dans le cas de l'utilité espérée et procédons une nouvelle fois à la détermination des consommations-pensions optimales. L'on compare ensuite aux consommations-pensions obtenues avec l'utilité récursive ($\gamma = 2.6$), le paramètre δ toujours égal à 1%.

La figure 5.2.3 qui suit donne l'évolution des consommations-pensions optimales de notre individu pour les deux types d'utilités et les deux valeurs de γ .

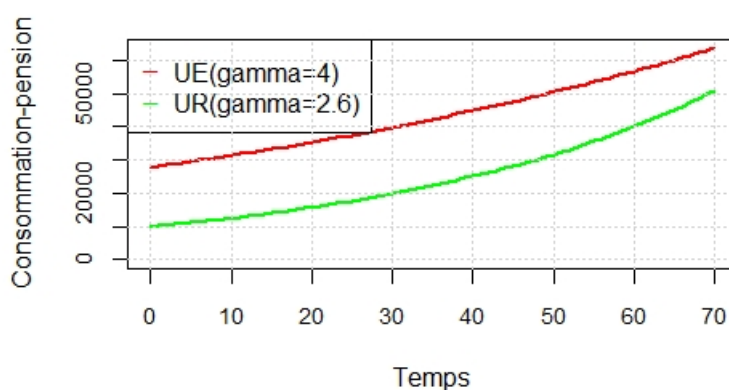


FIGURE 5.2.3 – Evolution des consommations-pensions avec les 2 fonctions d'utilité ($\gamma = 4$ pour l'utilité récursive (UR) et $\gamma = 2.6$ pour l'utilité espérée (UE)).

Contrairement au premier cas où γ était égal à 2.6 dans les deux cas d'utilités, lorsque γ passe à 4 pour l'utilité espérée, les consommations-pensions optimales sont toujours plus élevées dans le cas de l'utilité espérée mais beaucoup moins que pour $\gamma = 2.6$.

Le tableau 5.2.3 montre le taux de croissance et la volatilité dans les deux cas d'utilités pour de nouvelles valeurs de γ . Ces valeurs sont choisies dans l'intervalle recommandé par la littérature abondante à ce sujet.

TABLE 5.2.3 – Taux de croissance et volatilité de la consommation pour différentes valeurs de γ

Utilité	$\gamma = 2.6$		$\gamma = 2.96$		$\gamma = 4$	
	croissance	σ_c	croissance	σ_c	croissance	σ_c
Récursive	2.33%	9.18%	1.05%	4.18%	-2.61%	-8.31%
Espérée ($\gamma = \rho$)	2.03%	10.96%	1.72%	9.63%	1.8%	7.1%

Si l'on donne une valeur raisonnable au paramètre γ de l'utilité espérée, il est possible de se rapprocher des valeurs de la table de la page 42

5.2.2.2 Variation de ρ

La figure 5.2.4 qui suit donne l'évolution des consommations-pensions optimales de notre individu pour une utilité récursive et pour différentes valeurs de ρ . Le tableau 5.2.4 en donne le taux de croissance et la volatilité.

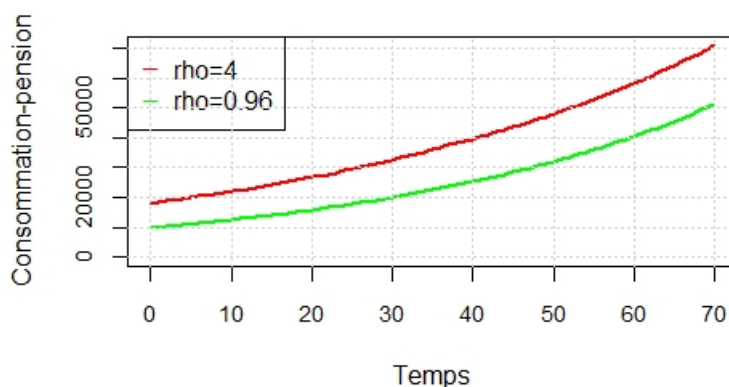


FIGURE 5.2.4 – Evolution de la consommation-pension optimale de l'utilité récursive pour différentes valeurs de ρ .

TABLE 5.2.4 – Croissance et volatilité de la consommation-pension pour différentes valeurs de ρ et pour $\gamma = 2.96$

ρ	Taux de croissance	volatilité (σ_c)
0.96	1.04 %	4.18%
2	1.54 %	8.49 %
4	1.82 %	10.25 %

Dans la théorie du cycle développée par Modigliani et Ando, une hypothèse importante est que l'individu choisi son niveau de consommation et d'épargne de sorte que sa consommation soit stable de temps, c'est-à-dire qu'elle ne varie pas beaucoup.

La conséquence au niveau macroéconomique est que l'on observe un lissage de la consommation tout au long de la vie. Elle fournit également une explication théorique à la stabilité de la propension moyenne à consommer.² Aase (2015) précise cependant qu'intégrer les contrats de pensions au modèle ne change pas cette hypothèse.

Le lissage de la consommation peut être apprécié dans cette étude par l'observation du taux de croissance et de la volatilité de la consommation-pension. Pour la fonction d'utilité récursive, les valeurs attendues sont déterminées par les équations 4.3.7 et 4.3.8 et par les équations 4.4.9 et 4.4.10 pour l'utilité espérée qui ont servi pour nos calculs.

2. La propension moyenne à consommer est la part du revenu des ménages allouer à la consommation.

5.2.3 Impact de la variation de la volatilité σ_v

La volatilité σ_v de la fonction d'utilité récursive est considérée comme faisant partie des préférences du consommateur et a été fixée à 0.12 lors de notre modélisation. Un passage à 0.13 puis à 0.11 nous donne l'évolution des consommations-pensions optimales de notre individu à la figure 5.2.5 suivante.

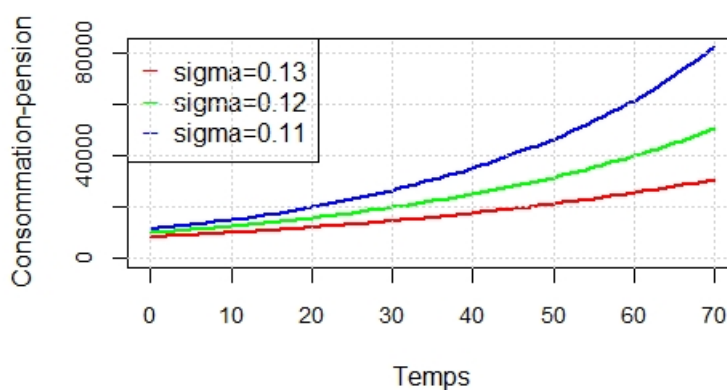


FIGURE 5.2.5 – Consommation-pension optimale de l'utilité récursive pour différentes valeurs de σ_v .

Les consommations-pensions optimales augmentent grandement. la volatilité faisant partie des préférences de l'agent, il serait intéressant de le calibrer à 0.12, valeur pour laquelle nos résultats semblent se rapprocher des données empiriques de la table à la page 42

TABLE 5.2.5 – Taux de croissance et volatilité de la consommation-pension pour différentes valeurs de σ_v ($\gamma = 2.96$)

sigma(σ_v)	Taux de croissance	Volatilité (σ_c)
0.11	1.63 %	6.7%
0.12	1.05 %	4.18 %
0.13	0.46 %	2.6 %

5.3 Conclusions

Après modélisation et application de l'utilité récursive au domaine de l'assurance vie, il ressort un ensemble de conclusions et recommandations que nous présenterons dans cette section.

Les résultats obtenus et présentés à l'annexe E montrent les montants de consommations-pensions optimales de notre individu compte tenu de ses deux fonctions d'utilités. Après l'analyse de sensibilité et confrontation de nos résultats avec les valeurs estimées du taux de croissance de la consommation et de sa volatilité obtenues par Merha et Prescott avec les données réelles américaines entre 1889-1978, nous retenons les paramètres de préférences du tableau 5.3.1 pour notre agent. Les *valeurs obtenues* résultent de notre modèle, avec les paramètres de préférences retenus ; les *valeurs cibles* sont celles du tableau de la page 42.

TABLE 5.3.1 – Paramètres de préférences de l'agent, croissance et volatilité du modèle, croissance et volatilité cible

Utilité	Paramètre de préférences				Valeurs obtenues		Valeurs cibles	
	δ	γ	ρ	σ_v	croissance	σ_c	croissance	σ_c
Réursive	0.01	2.96	0.96	0.12	1.62%	4.18%	1.81%	3.55%
Espérée	0.01	4	—	—	1.19%	7.13%	1.81%	3.55%

L'évolution des consommations-pensions optimales obtenues compte tenu des paramètres est donnée à la figure 5.3.1

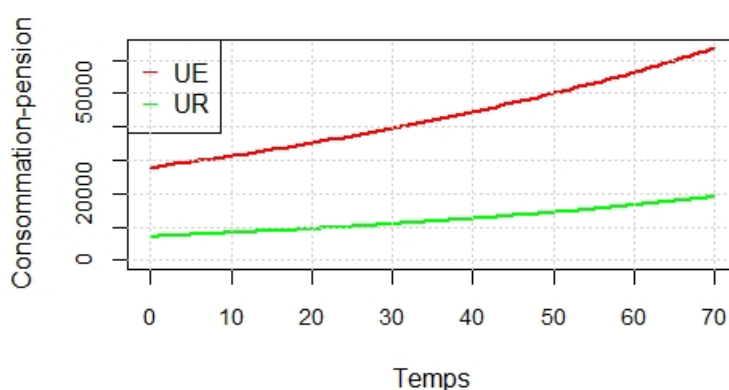


FIGURE 5.3.1 – Evolution de la consommation-pension optimale pour l'utilité réursive (UR) et l'utilité espérée (UE) pour les paramètres de préférences retenus.

Les consommations-pensions optimales de l'agent sont plus stables lorsque celui-ci a une fonction d'utilité réursive (taux de croissance de 1.05% , volatilité de 4.18%). Contrairement, elles varient beaucoup lorsque sa fonction d'utilité est standard (taux de croissance de 1.38% , volatilité de 7.13%). En effet, il est beaucoup plus facile de se rapprocher des valeurs cibles en paramétrant les préférences de l'agent de sorte de rester cohérent avec la littérature.

Dans le cas de l'utilité espérée, il est difficile de se rapprocher des valeurs cibles sans dévier fortement de la logique. Le taux de croissance de la consommation et sa volatilité

lorsque l'agent à une utilité espérée dépend de deux paramètres essentiellement : le taux de préférence pour le présent δ et l'aversion pour le risque γ . Pour retrouver les valeurs cibles du tableau page 42 il faudrait que δ soit négatif (environ -0.092) et $\gamma \simeq 10.89$. Ces valeurs de δ et γ ne sont pas plausibles car très éloignées de celles recommandées dans la littérature. L'on peut conclure que les préférences de l'agent sont mieux représentées au moyen de l'utilité récursive que l'utilité espérée.

Si l'on considère que notre individu est un agent représentatif des demandeurs d'assurances, il serait intéressant que l'industrie de l'assurance propose des contrats de pensions qui satisfont notre agent.

Les consommations et pensions optimales de l'agent pour les paramètres de préférences retenus et les différentes utilités se trouvent en annexe F.

5.3.1 Implication pour le domaine des assurances

Le risque de longévité, particulièrement le risque qu'un individu survive au-delà de la période d'activité a conduit à la mise en place de régimes de retraite tant au niveau des Etats qu'au niveau des entreprises privées, le but étant de garantir aux salariés un revenu de remplacement à la retraite.

Devolder (2005) organise les régimes de retraite en trois piliers :

- le **pilier 1** qui relève de la Sécurité Sociale et est du domaine de compétence de l'Etat.
- le **pilier 2** qui relève de l'activité professionnelle et est du domaine de compétence des entreprises.
- le **pilier 3** qui relève de l'initiative personnelle et est du domaine de compétence d'une part, des compagnies d'assurances à travers les contrats d'assurance vie et d'autre part des différents canaux d'investissements existants (immobilier, ...).

Il distingue pour les régimes de retraite issus des piliers 1 et 2 deux grands systèmes, les régimes à prestations définies et les régimes à contributions définies. Les compagnies d'assurances proposent également deux types de contrats de pension : les contrats à contributions définies et les contrats à prestations définies. Notre application de l'utilité récursive à l'assurance vie nous mène aux conclusions qui suivent.

5.3.1.1 Contrats à Prestations définies pour l'utilité récursive

L'annexe F nous donne les valeurs des consommations optimales (avant l'âge de la retraite de l'agent) et la valeur des pensions optimales (à partir de la retraite) tant que l'agent est en vie. Le tableau 5.3.2 donne pour l'utilité récursive la pension initiale, finale et moyenne de l'agent.

TABLE 5.3.2 – Récapitulatif des pensions optimales de l'utilité récursive

Utilité récursive			
Pension initiale	Pension finale	Pension moyenne	croissance moyenne
13 612.91€	23 892.98€	18 311.81€	1,63%

Le montant moyen de pension qui satisfait l'agent tant qu'il est en vie après sa retraite représente environ la moitié de son salaire pendant sa période d'activité. Un tel type de pension peut être implémenté dans un régime à prestations définies. Le problème ici se résumerait à calculer la cotisation à payer pour prétendre à une telle pension.

Aase (2015) propose une prime variable pour chaque période : $p_t = y - c_t$

— p_t la prime à payer pendant la période active

— y le salaire durant la période d'activité

— c_t le montant de la consommation de la période

On pourrait aussi imaginer un mode de calcul de primes uniques successives par la méthode *Unit Credit Cost* (voir Devolder (2005)).

5.3.1.2 Contrats en unités de compte ou à contributions définies pour l'utilité espérée

Le tableau 5.3.3 suivant décrit les pensions optimales de notre agent avec une fonction d'utilité récursive.

TABLE 5.3.3 – Récapitulatif des pensions optimales de l'utilité espérée

Utilité espérée			
Pension initiale	Pension finale	Pension moyenne	croissance moyenne
42 068.52€	63 875.47€	52 381.25€	1,2%

La pension optimale ici est au-delà du salaire gagné par l'individu pendant sa période active. Le montant jugé optimal par l'agent est en moyenne 1.5 fois son salaire. Il serait difficile pour une entreprise d'assurance de garantir une telle retraite à un assuré à moins que celui-ci cotise le montant lui garantissant une telle pension, ou que les montants des cotisations soient placés dans des actifs garantissant un rendement élevé.

L'idée serait donc un régime de retraite à contributions définies ou des contrats en unités de compte. Les cotisations faisant l'objet de placements sur les marchés financiers, il apparaît judicieux dans ce contexte de lier la fonction d'utilité espérée à des contrats en unités de compte où le risque financier est supporté par l'assuré lui-même.

Conclusion.

L'objectif de ce mémoire était d'étudier en univers dynamique le concept d'utilité récursive et ses avantages par rapport au concept d'utilité espérée, de l'appliquer ensuite au problème de choix optimal en assurance vie. En effet, la question centrale ayant guidé l'étude était celle de l'intérêt de l'usage de la fonction d'utilité récursive en assurance vie.

Après un rappel sur la théorie de l'utilité espérée et ses fondements, nous avons passé en revue quelques-unes de ses critiques notamment le paradoxe d'Allais. A la suite nous avons mis en exergue l'utilité récursive comme alternative à la fonction d'utilité espérée. L'on a trouvé comme principal avantage de l'utilité récursive par rapport à l'utilité classique le fait qu'elle permettait de scinder deux paramètres de préférences importants de l'agent à savoir : son aversion pour le risque et son élasticité de substitution intertemporelle. Après application au domaine de l'assurance vie, il ressort de l'étude que la fonction d'utilité récursive est celle qui représente le mieux les préférences d'un agent économique considéré comme représentatif.

Confrontée aux données empiriques américaines sur 100 ans, on observe que la fonction d'utilité récursive explique mieux les données que la fonction d'utilité espérée lorsque les paramètres sont choisis dans leur domaine de définition et en accord avec les recommandations de la littérature sur le sujet. A contrario, la fonction d'utilité classique ne permet pas d'expliquer les données empiriques. L'application numérique de l'utilité récursive et de l'utilité espérée en assurance vie nous amène à conclure que l'utilité récursive sied aux contrats à prestations définies tandis que l'utilité espérée convient plutôt aux contrats à contributions définies ou en unités de compte, étant donné que le risque financier est supporté dans ces cas par l'assuré.

Depuis la crise financière de 2007, les entreprises d'assurances tendent de plus en plus à transférer les risques financiers à leurs assurés en proposant en grande partie des contrats de pensions à contributions définies ou en unités de compte. Cependant, les résultats de notre travail montrent que l'individu ayant une fonction d'utilité récursive lisse sa consommation conformément aux données américaines. Ainsi, même si les contrats à contributions définies et en unités de compte existent, les personnes qui les préfèrent ne sont pas des agents représentatifs selon les résultats obtenus. Il serait intéressant que les assureurs offrent aux assurés en priorité les contrats de pension qu'ils préfèrent : les contrats à pres-

tations définies. Ce type de contrat en pratique, dans le cadre du **pilier 2** est celui qui est largement offert aux salariés. Dans le cadre du **pilier 3** l'industrie de l'assurance notamment les fonds de pension pourrait voir dans quelle mesure vulgariser les contrats à prestations définies à un plus grand monde. La question qu'on pourrait alors se poser est celle de savoir comment déterminer la cotisation à payer pour de tels contrats, compte tenu du fait que la pension optimale est différente d'une période à l'autre.

Aase (2016) suggère pour ceux-ci le paiement d'une prime variable à chaque période, payable pendant que l'assuré est en activité et égale à la différence entre le salaire et la consommation de la période. Le pricing de tels contrats pourrait faire l'objet de travaux ultérieurs.

Bibliographie

- [1] Aase K K. 2015. Life insurance and pension contracts I : The time additive life cycle model. *Astin Bulletin*. 45(1), 5-38.
- [2] Aase K K. 2016. Life insurance and pension contracts II : The life cycle model with recursive utility. *Astin Bulletin*. 46(1), 71-102.
- [3] Aase K K. 2016. Recursive utility using the stochastic maximum principle. *Quantitative Economics. Journal of the Econometric Society*. 7(3), 859-887.
- [4] Aase K K. 2017. The life cycle model with recursive utility : Defined benefit vs defined contribution. *International Actuarial Association (IAA)*. <http://www.actuaries.org/cancun2017/Papers/20KnutAasePaper.pdf>
- [5] Allais M. 1953. Le comportement de l'Homme rationnel devant le risque : critique des postulats de l'École américaine. *Econometrica*. 21, 503-546.
- [6] Arrondel L. Masson A. Verger D. 2005. Préférences face au risque et à l'avenir : Types d'épargnants. *Presses de Sciences Po*. 56(2), 393-416.
- [7] Caja A. Planchet F. 2010. La mesure du prix de marché du risque : quels outils pour une utilisation dans les modèles en assurance ?. *Assurances et gestion des risques*. 78(3-4), 251-281.
- [8] Dastarac H. Sauveplane P. Les déflateurs stochastiques : quelle utilisation en assurance ?. *ENSAE Paris-Mémoire d'actuariat*. 35-43.
- [9] Devolder P. 2005. Le financement des régimes de retraites. Paris : Éd. Economica
- [10] Devolder P. 2019. Cours de finance stochastique II.
- [11] Duffie D. Epstein L G. 1992. Stochastic differential utility. *Journal of the Econometric Society*. 60(2), 353-394.
- [12] Epstein L G. Zin S E. 1989. Substitution, risk aversion and the temporal behavior of consumption and assets returns : A theoretical framework. *Journal of the Econometric Society*. 57(4), 937-969.
- [13] Fauvel S. Le Pévédic M. 2007. Analyse des rachats d'un portefeuille vie individuelle : Approche théorique et Application pratique. *ENSAE Paris-Mémoire d'actuariat*. 25-30.
- [14] Ferry C. 1977. L'approche empirique de la demande d'assurance-vie. *The Geneva papers on risk and insurance - Issues and practice*. 2, 22-34.

-
- [15] Fortune P. 1973. A Theory of optimal life insurance : development and test. *The journal of finance*. 28(3), 587-600.
- [16] Fishburn P C. 1988. *Nonlinear preference and utility theory*. Baltimore : The Johns Hopkins University Press.
- [17] Gollier C. 2002. Quel taux d'actualisation pour le long terme ?. *Association d'économie financière*. 66, 253-267.
- [18] Hainaut D. 2018. *Cours de finance stochastique I*.
- [19] Kreps D M. Porteus E L. 1978. Temporal Resolution of Uncertainty and Dynamic Choice Theory. *Journal of the Econometric Society*. 46(1), 185-200.
- [20] Martinez F. 2010. L'individu face au risque : l'apport de Kahneman et Tversky. *Réseau Canopé : Idées économiques et sociales*. 161(3), 15-23. <https://www.cairn.info/revue-idees-economiques-et-sociales-2010-3-page-15.htm>
- [21] Mossin J. 1969. A note on uncertainty and preferences in a temporal context. *The American Economic Review*. 59(1), 172-174.
- [22] Théron P. 2005. *Techniques de simulation : discrétisation d'équations différentielles stochastiques*. ISFA Lyon - Mémoire d'actuariat.
- [23] Trufin J. 2018. *Cours d'assurance vie 2*.

Annexe A

Arbre de décisions

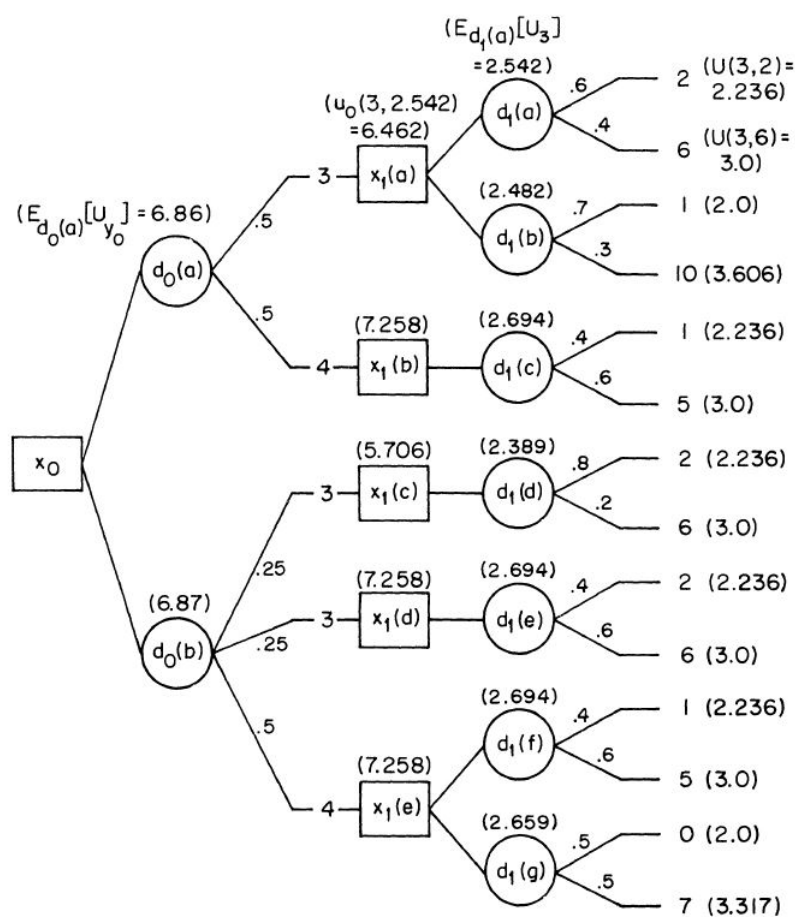


FIGURE A.0.1 – Arbre de décision, source : Kreps D M. Porteus E L. 1978. Temporal Resolution of Uncertainty and Dynamic Choice Theory. Journal of the Econometric Society. 46(1), pp 188

Annexe B

Analyses empiriques de l'assurance vie.

24

Tableau 1 :
LES VARIABLES EXPLIQUÉES
PAR LES ANALYSES EMPIRIQUES DE LA DEMANDE D'ASSURANCE-VIE
PAR TYPE DE POPULATION

LES CONTRATS LES ASSURÉS	PRIMES (P _i)				SOMMES ASSURÉES (A _i)					
	Tout contrat		Par type de contrat		Tout contrat			Par type de contrat		
	Totales	Nouvelles	Totales	Nouvelles	Totales	Nouvel- les ¹	Variat. ¹	Totales	Nouvel- les ¹	Variat. ¹
POPULATION NATIONALE	FAR MER (1966) ⁶				FOR- TUNE 1973 ²	LEE ET WHITAKER (1971) MANTIS ET FARMER (1968)	ROTT- MAN (1968) ³		HEA- DEN et LEE (1974) ⁴	
ECHANTILLON DE MENAGES		H.H.M. (1967)				ANDERSON ET NEVIN (1975)			ANDERSON ET NEVIN 1975 (5)	
MENAGES DE L'ECHANTILLON PAR CLASSE DE REVENU (etc.)		H.H.M. (1967)								

¹ Les sommes assurées totales mesurent la quantité d'assurance demandée sous forme de capital (et de rente); elles sont les montants des capitaux et des rentes en cours à une date donnée.

Les sommes assurées nouvelles correspondent aux souscriptions de la période. Les variations sont les mouvements nets de capitaux et de rentes sur la période (égales à la différence entre les montants des capitaux et des rentes en cours au début et à la fin de la période (voir par exemple, RPR, 1973, p. 126 à 129)).

² FORTUNE (1973) est cité dans ce tableau au titre du test de son modèle explicatif; ce qui permet de situer ses résultats par rapport aux autres analyses empiriques; précisons que FORTUNE (1973, p. 596) analyse les montants des capitaux en cours nets des réserves (i. e. des provisions mathématiques) constituées par les sociétés d'assurance.

³ Variable préconisée par ROTTMAN (1968, p. 150) pour évaluer l'élasticité revenu de la demande d'assurance-vie.

⁴ HEADEN et LEE (1974, p. 689) analysent la demande de contrats d'assurance-vie ordinaire (" Ordinary Life Insurance Contract ") qui correspond à un contrat d'assurance-décès, de type vie entière (GREEN, 1973, p. 491, et ENA, 1970, p. 19-20).

⁵ ANDERSON et NEVIN (1975) étudient l'ensemble des contrats d'assurance-vie puis distinguent les assurances-décès temporaires (" terme Insurance ") et les autres contrats (" cash-value Insurance ") (GREEN, 1973, p. 486, et ENA, p. 18 à 22).

⁶ Cité par HAMMOND et MELANDER (1968, p. 147), ROTTMAN (1968, p. 150), LEE et WHITAKER (1971, p. 76).

FIGURE B.0.1 – Analyses empiriques de la demande d'assurance vie.
source : Ferry (1977)

Annexe C

Dynamique de la consommation/pension : optimale

La dynamique de la consommation tel que définie par Aase(2015) est un brownien géométrique donné par l'équation différentielle stochastique :

$$dc_t = u_c(t)c_t d_t + \sigma_c(t)c_t dW_t \quad (\text{C.0.1})$$

l'on détermine ensuite $u_c(t)$ et $\sigma_c(t)$ de l'équation [C.0.1](#). On part de l'expression de c_t découlant des conditions de premier ordre :

$$c_t = \left(\frac{\alpha D_t ((1-\gamma)V_t)^{\frac{\gamma-\rho}{1-\gamma}}}{\delta Y_t} \right)^{-\frac{1}{\rho}} \quad (\text{C.0.2})$$

On calcule ensuite les dérivées partielles suivantes :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \frac{\partial c(D_t, V_t, Y_t)}{\partial D} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{c_t}{D_t} \right) & \frac{\partial c(D_t, V_t, Y_t)}{\partial v} = -\frac{1}{\rho} \left(\frac{\gamma-\rho}{1-\gamma} \right) \left(\frac{c_t}{D_t} \right) \\ \frac{\partial c(D_t, V_t, Y_t)}{\partial y} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{c_t}{Y_t} \right) & \frac{\partial^2 c(D_t, V_t, Y_t)}{\partial D^2} = \frac{1}{\rho} \left(\frac{1}{\rho} + 1 \right) \left(\frac{c_t}{D_t^2} \right) \\ \frac{\partial^2 c(D_t, V_t, Y_t)}{\partial D \partial v} = \frac{\gamma-\rho}{\rho^2(1-\gamma)} \left(\frac{c_t}{D_t V_t} \right) & \frac{\partial^2 c(D_t, V_t, Y_t)}{\partial v^2} = \frac{(\rho-\gamma)\gamma(\rho-1)}{\rho^2(1-\gamma)^2} \left(\frac{c_t}{V_t^2} \right) \end{array} \right. \quad (\text{C.0.3})$$

Se basant sur le Lemme d'Itô multidimensionnel, l'on réécrit le processus dc_t

$$dc_t = \frac{\partial c}{\partial D} dD_t + \frac{\partial c}{\partial v} dV_t + \frac{\partial c}{\partial y} dY_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial D^2} dD_t^2 + \frac{\partial^2 c}{\partial D \partial v} dD_t dV_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 c}{\partial v^2} dV_t^2 \quad (\text{C.0.4})$$

L'on remplace les valeurs des dérivées partielles obtenues à l'équation [C.0.3](#) dans l'équation [C.0.4](#) de même que les dynamiques dV_t , dD_t , dY_t

on obtient bien la représentation de l'équation [C.0.1](#) avec :

$$u_c(t) = \frac{1}{\rho}(r_t - \delta) + \frac{1}{2} \frac{1}{\rho} \left(1 + \frac{1}{\rho}\right) \lambda'_t \lambda_t - \frac{(\gamma - \rho)}{\rho^2} \lambda'_t \sigma_V(t) + \frac{1}{2} \frac{(\gamma - \rho)\gamma(1 - \rho)}{\rho^2} \sigma_V(t)' \sigma_V(t) \quad (\text{C.0.5})$$

$$\sigma_c(t) = \frac{1}{\rho} (\lambda_t + (\rho - \gamma)\sigma_V(t)) \quad (\text{C.0.6})$$

Annexe D

Taux de Nelson-Siegel

Les valeurs obtenues des taux de Nelson-Siegel sont les suivantes :

```
> Taux_Nelson_Siegel
```

```
[0] 0.0005137884 -0.0041682799 -0.0063790170 -0.0070921927 -0.0069282398 -0.0062779811
[6] -0.0053838364 -0.0043929601 -0.0033918830 -0.0024289963 -0.0015290623 -0.0007025151
[12] 0.0000486321 0.0007270788 0.0013379441 0.0018873817 0.0023817677 0.0028272411
[18] 0.0032295108 0.0035936824 0.0039243140 0.0042254016 0.0045004311 0.0047524311
[24] 0.0049840292 0.0051975024 0.0053948261 0.0055777161 0.0057476657 0.0059059711
[30] 0.0060537910 0.0061921057 0.0063218009 0.0064436527 0.0065583482 0.0066664911
[36] 0.0067686434 0.0068652714 0.0069568161 0.0070436678 0.0071261779 0.0072046611
[42] 0.0072794129 0.0073506855 0.0074187187 0.0074837283 0.0075459115 0.0076054411
[48] 0.0076625051 0.0077172328 0.0077697714 0.0078202497 0.0078687866 0.0079154911
[54] 0.0079604672 0.0080038072 0.0080455993 0.0080859250 0.0081248602 0.0081624711
[60] 0.0081988370 0.0082340063 0.0082680412 0.0083009955 0.0083329200 0.0083638611
[66] 0.0083938669 0.0084229758 0.0084512286 0.0084786624 0.0085053125
```


Annexe E

Résultats

E.1 Consommation-pension optimale par période

E.1.1 Utilité récursive

> V_UR

[1]	12165.36	12792.88	13083.33	13116.71	13143.86	13108.30	13128.49	13108.71	13161.24
[10]	13251.05	13408.95	13564.83	13675.54	13910.41	14186.98	14422.31	14609.48	14962.15
[19]	15178.17	15666.35	16084.49	16277.89	16881.62	17072.32	17393.82	17847.95	18258.31
[28]	18855.81	19214.87	19689.27	20182.97	20735.89	21213.68	21736.17	22280.00	22947.70
[37]	23383.45	23938.75	24694.55	25293.08	25786.43	26703.02	27302.44	28067.22	28799.26
[46]	29812.53	30470.89	31469.65	32016.49	33240.29	33687.52	35048.44	35808.71	36641.25
[55]	37597.32	38309.39	39648.20	40633.60	41851.04	42892.59	44418.52	45286.24	46037.04
[64]	47522.46	48869.38	49965.20	51848.41	52703.02	55308.60	56048.19		

E.1.2 Utilité espérée

> V_UE

[1]	29935.82	33369.06	36153.37	39082.20	41470.57	43632.38	46571.94		
[8]	50078.94	53135.63	57098.73	60079.53	64958.43	68938.02	74195.13		
[15]	79833.73	85569.11	92276.77	103916.82	109886.99	120143.97	131381.62		
[22]	139978.02	154184.61	161870.19	176976.31	196420.39	203989.64	233257.97		
[29]	261245.26	277016.28	305673.02	331720.59	367091.01	397688.63	409851.60		
[36]	427154.94	474991.65	535761.76	608284.63	634442.85	724437.66	707197.26		
[43]	793763.09	844244.29	1014617.59	1091782.27	1133111.97	1216403.29	1425686.70		
[50]	1386354.68	1528969.12	1997870.09	1920189.94	2089786.98	1851844.41	2507669.55		
[57]	2788337.19	2684228.74	3589538.81	3056331.09	3797398.29	3866969.71	4724175.19		
[64]	4904427.35	5017823.60	6533553.73	6658544.17	6876450.61	8178006.82	7979273.31		

E.2 Analyse de la sensibilité

E.2.1 $r = 0.03$ et $\delta = 0.01$

```

> consommation-pension_UR
[1] 6986.425 7322.305 7669.091 8044.815 8430.129 8843.708 9289.074
[8] 9739.892 10199.503 10699.937 11222.708 11779.775 12371.284 12970.957
[15] 13629.621 14269.556 14966.678 15715.419 16493.602 17269.113 18108.586
[22] 19000.961 19916.252 20882.698 21926.078 22996.760 24103.549 25291.164
[29] 26592.889 27927.700 29303.178 30734.351 32172.124 33799.317 35485.732
[36] 37097.307 38846.641 40725.497 42593.000 44618.891 46822.366 49131.092
[43] 51619.106 54172.931 56859.091 59686.670 62678.207 65680.877 68996.369
[50] 72274.886 75984.663 79711.016 83635.485 87622.770 91891.013 96385.755
[57] 101205.945 106301.160 111647.473 116869.953 122375.451 128522.484 134554.214
[64] 141090.631 147956.248 155234.627 162460.992 170211.265 178536.944 186799.856

> Consommation-pension_UE
[1] 17470.89 19447.83 21514.11 23988.57 26637.97 29816.34 32813.17
[8] 36228.51 40281.88 44752.09 49924.66 55398.33 61823.68 68545.18
[15] 76864.30 85188.62 94764.99 105658.72 117283.08 130076.06 144723.17
[22] 161353.58 178029.17 198936.49 220190.48 247652.42 276605.94 304037.23
[29] 335453.18 369479.68 409142.31 450884.71 494595.32 552041.00 650408.30
[36] 690938.60 768784.11 856603.12 958327.78 1069453.62 1170849.80 1282654.29
[43] 1400491.03 1569481.71 1730401.14 1947228.27 2169984.01 2363987.45 2694974.16
[50] 2976169.13 3269312.49 3633610.23 4047761.49 4386446.35 4897834.45 5484231.14
[57] 6128397.74 6992934.96 7690212.49 8539578.63 9367420.32 10779840.98 11573919.41
[64] 12597984.65 13796559.33 15135325.97 16644135.71 18260965.89 20300522.85
22732873.36

```

Annexe F

Consommation-pension optimale

> Consommation-pension_Utilité récursive

[1]	7841.507	7970.333	8105.304	8234.673	8369.497	8509.599	8655.607	8790.487
[9]	8932.790	9083.002	9232.608	9389.490	9542.913	9702.739	9862.378	10024.730
[17]	10200.110	10374.614	10540.163	10708.843	10882.607	11055.435	11242.713	11422.742
[25]	11594.133	11788.816	11979.270	12167.392	12358.507	12565.651	12764.930	12966.509
[33]	13167.423	13380.539	13612.913	13842.023	14053.981	14282.735	14519.968	14751.810
[41]	14982.206	15236.996	15484.892	15755.583	16003.788	16276.124	16531.086	16809.440
[49]	17099.622	17366.600	17643.828	17922.004	18202.677	18505.885	18816.899	19110.251
[57]	19425.937	19765.763	20092.884	20397.728	20749.794	21041.579	21368.869	21716.324
[65]	22049.464	22423.066	22785.980	23172.029	23513.484	23892.980		

> Consommation-pension_Utilité espérée

[1]	28128.18	28447.84	28797.94	29125.86	29477.69	29846.53	30226.65	30609.65	30924.16
[10]	31291.17	31646.76	31998.81	32354.53	32757.26	33096.25	33501.92	33906.69	34338.07
[19]	34687.36	35069.91	35515.59	35880.71	36346.86	36854.00	37281.81	37757.36	38169.98
[28]	38660.37	39083.65	39563.70	40061.79	40547.65	41044.87	41571.85	42068.52	42561.44
[37]	43079.14	43643.74	44183.74	44757.84	45322.53	45858.42	46418.47	47024.09	47538.24
[46]	48139.06	48741.18	49390.60	49945.64	50512.23	51138.49	51795.25	52372.70	53010.04
[55]	53725.04	54323.56	55007.04	55616.02	56239.32	56961.28	57574.65	58245.96	58865.85
[64]	59477.77	60147.69	60949.16	61638.99	62399.57	63176.25	63875.47		

Annexe G

Code R

Le code R qui suit est la base de tous les calculs et simulations faites dans le mémoire. Pour ce qui est de l'analyse de sensibilité et des graphiques qui en découlent, les paramètres cibles ont simplement été modifiés à leur emplacement au fur et à mesure pour éviter de dupliquer le code.

```
#####Code_R_mémoireFinal #####
####paramètres

V_UR=rep(1,70) # vecteur pension optimale utilité récursive
V_UE=rep(1,70) # vecteur pension optimale utilité espérée
CO_UR=rep(1,70)
CO_UE=rep(1,70)

for (j in 1:70)
{
  #paramètres#
  x=30
  n=35
  T=70
  lambda=0.285
  sigma=0.12
  delta = 0.01
  rho=0.96
  gamma=2.6
  salaire=36000
  #####FORCE DE MORTALITE_Makeham#####
  k = 1000266.63
  s = 0.999441703848
  g = 0.999733441115
```

```
c = 1.101077536030
thet1=(-log(s))
thet2=(-log(c))*(log(g))
thet3=c

mu_x=thet1+thet2*(thet3)^(x+n)

n_p_x=exp(-thet1*n)*(exp((-thet2*(thet3)^x)/log(thet3)*((thet3^n)-1)))

x_3=((thet2*(thet3)^x)/log(thet3))

#base <- read.table("C:/Users/nanfa/Desktop/Memoire/données/
#courbe_zero_coupon_31_aout_2020.xls", sep=";")
#importation courbe de taux
base<- courbe_zero_coupon_31_aout_2020
summary(base)
dim(base)
w_1=rep(0,70)
w_2=rep(0,70)
tau=2.5
R_NS=cbind(base,w_1,w_2)
names(R_NS)
for (i in 1: 70)
{
  R_NS$w_1[i]= (1-exp(-(R_NS$Maturité[i]/tau)))/(R_NS$Maturité[i]/tau)
  R_NS$w_2[i]=((1-exp(-(R_NS$Maturité[i]/tau)))/(R_NS$Maturité[i]/tau))-
  exp(-(R_NS$Maturité[i]/tau))
}
R_NS

reg<-lm(R_NS$Taux_IA~R_NS$w_1+R_NS$w_2)
summary(reg)
reg$coefficients
fitted(reg)
res<-residuals(reg)
res<-resid(reg)
plot(res,main="Résidus")
abline(h=0,col="red")

#####coefficients beta issu de la regression#####

beta_0=reg$coefficients[1]
beta_1=reg$coefficients[2]
```

```

beta_2=reg$coefficients[3]
beta_0
beta_1
beta_2
#####Taux de Nelson-Siegel#####
taux_NS=rep(0,70)
for(i in 0:70)
{
  taux_NS[i]= beta_0 + beta_1*R_NS$w_1[i]+ beta_2*R_NS$w_2[i]
}

taux_NS
taux_NS0=beta_0 + beta_1
#plot
temps=seq(0,70)
taux_NS0
matplot(temps,c(taux_NS0,taux_NS),las=1,cex.axis=0.8, ylab="Taux d'intérêt",
        type = "l", main = " Evolution du taux d'intérêt dans le temps",
        col = "red")

#####Calcul pension initiale: Utilité récursive#####
#####détermination du taux r_tilde#####

r1=(1/rho)*(taux_NS[j]-delta)
r2=((1/(2*rho))*(1-(1/rho))* (lambda^2))
r3=(1/rho)*((1/rho)-1)*(rho-gamma)*(lambda*sigma)
r4= (1/rho)*(gamma-rho)*((1/rho)*(gamma-rho)+(1-gamma)*(1/2))*(sigma^2)
r_tilde_UR= taux_NS[j]-r1+r2+r3-r4
#####détermination prix de rente et pension initiale Utilité_récursive#####

prix_rente0_n_UR= exp(x_3)*((1/(taux_NS[j]+thet1+thet3*x_3))*
                          (1-(exp(-n*(taux_NS[j]+thet1+thet3*x_3)))))
prix_rente0_n_UR
prix_rente0_T_UR= exp(x_3)*((1/(r_tilde_UR+thet1+thet3*x_3))*
                          (1-(exp(-T*(r_tilde_UR+thet1+thet3*x_3)))))
prix_rente0_T_UR
pension_initiale_UR=salaire*(prix_rente0_n_UR/prix_rente0_T_UR)
pension_initiale_UR

#####discrétiation pension optimale UR#####
Nsim=14000 #Nombre de scenario
deltat=1/48 #pas

```

```

mu1=(1/rho)*(taux_NS[j]-delta)
mu2=(1/(rho*2))*(1+(1/rho))*(lambda^2)
mu3=((gamma-rho)/(rho^2))*(lambda*sigma)
mu4=((gamma-rho)*gamma*(1-rho))/(2*rho^2)*(sigma^2)

mu_UR =mu1+mu2-mu3+mu4 #taux de croissance espérée
sigma_UR = (1/rho)*(lambda+(rho-gamma)*sigma) #volatilité du taux de croissance

CO_UR= pension_initiale_UR
C_init_UR=rep(CO_UR,Nsim)
C_sim_UR=matrix(data=rep(0,Nsim*T/deltat),ncol=Nsim)
dW=rnorm(n=Nsim,sd=sqrt(deltat))
C_sim_UR[1,]=C_init_UR + mu_UR* C_init_UR*deltat + sigma_UR*C_init_UR*dW

for(i in c(2:(T/deltat)))
{
  dW=rnorm(n=Nsim,sd=sqrt(deltat))
  C_sim_UR[i,]=C_sim_UR[(i-1),]+mu_UR* C_sim_UR[(i-1),]*deltat +
    sigma_UR*C_sim_UR[(i-1),]*dW
}

Ct_UR=matrix(data=rep(0,Nsim*T),ncol=Nsim)
for(i in c(1:T)){
  Ct_UR[i,]= C_sim_UR[1/deltat*i,]
}

pension_UR=rowMeans(Ct_UR)

V_UR[j]=pension_UR[j]

#####Utilité esperée#####
####pension initiale####

gamma_UE=rho
r5=(1/gamma_UE)*(taux_NS[j]-delta)
r6=(1/(2*gamma_UE))*(1-(1/gamma_UE))*(lambda^2)
r_tilde_UE= taux_NS[j]-r5+r6

prix_rente0_n_UE= exp(x_3)*((1/(taux_NS[j]+thet1+thet3*x_3))*
  (1-(exp(-n*(taux_NS[j]+thet1+thet3*x_3)))))
prix_rente0_n_UE
prix_rente0_T_UE= exp(x_3)*((1/(r_tilde_UE+thet1+thet3*x_3))*
  (1-(exp(-T*(r_tilde_UE+thet1+thet3*x_3)))))

```

```

prix_rente0_T_UE
pension_initiale_UE=salaire*(prix_rente0_n_UE/prix_rente0_T_UE)
pension_initiale_UE

#####discrétiation pension optimale UE#####

mu5=(1/gamma_UE)*(taux_NS[j]-delta)
mu6=(1/(gamma_UE*2))*(1+(1/gamma_UE))*(lambda^2)
mu_UE =mu5+mu6
sigma_UE = (1/gamma_UE)*(lambda) #taux de croissance espérée
C0_UE= pension_initiale_UE      #volatilité du taux de croissance
C_init_UE=rep(C0_UE,Nsim)
C_sim_UE=matrix(data=rep(0,Nsim*T/deltat),ncol=Nsim)
dW=rnorm(n=Nsim,sd=sqrt(deltat))
C_sim_UE[1,]=C_init_UE + mu_UE* C_init_UE*deltat + sigma_UE*C_init_UE*dW

for(i in c(2:(T/deltat)))
{
  dW=rnorm(n=Nsim,sd=sqrt(deltat))
  C_sim_UE[i,]=C_sim_UE[(i-1),]+mu_UE* C_sim_UE[(i-1),]*deltat +
    sigma_UE*C_sim_UE[(i-1),]*dW
}
Ct_UE=matrix(data=rep(0,Nsim*T),ncol=Nsim)
for(i in c(1:T))
{
  Ct_UE[i,]= C_sim_UE[1/deltat*i,]
}

pension_UE=rowMeans(Ct_UE)
V_UE[j]= pension_UE[j]
}
V_UR
V_UE
#plot
Temps <- seq(1,T)
matplot(Temps,V_UR,las=0,cex.axis=0.9, ylab="Ct_UR",lwd=2, type = "l",
        main = " Processus Ct en fonction de t", col = "black")
grid()
#plot
Temps <- seq(1,T)
matplot(Temps,V_UE,las=0,cex.axis=0.9, ylab="Ct_UE",lwd=2, type = "l",
        main = " Processus Ct en fonction de t", col = "black")
grid()

```

```

#####plot des 2 courbes à la même échelle#####
Temps <- seq(1,T)
ma=max(V_UE)
matplot(Temps,V_UE,las=0,cex.axis=0.9, ylab="Ct_UE",lwd=2, type = "l",
        main = " Processus Ct en fonction de t", col = "blue")
grid()
matplot(Temps,V_UR,las=0,cex.axis=0.9, ylab="Ct_UR",lwd=2, type = "l",
        main = " Processus Ct en fonction de t", col = "green")
grid()
#####plot des 2 courbes au voisinage de la retraite(si retraite 35#####
Temps=seq(25,50)
matplot(Temps,c(V_UR[25:50]),ylim = c(V_UR[25], V_UR[50]),las=0,cex.axis=0.9,
        ylab="Ct_UR", type = "l", main = "", col = "green")
abline(v=35,h=V_UR[35] ,col="red")
matplot(Temps,c(V_UE[25:50]),ylim = c(V_UE[25], V_UE[50]),las=0,cex.axis=0.9,
        ylab="Ct_UE", type = "l", main = "", col = "blue")
abline(v=35,h=V_UE[35] ,col="red")

#####variation rho de UR#####
stat1=pension_UR
maxi=pension_UR2
stat2=pension_UR2
stat3=pension_UR3
Temps <- seq(0,T)
matplot(Temps,c(pension_initiale_UR, stat1),ylim=c(0,maxi),las=0,cex.axis=0.9,
        ylab="Consommation-pension",lwd=2, type = "l", col = "green")
lines(Temps,c( pension_initiale_UR2,stat2),las=0,cex.axis=0.9,ylim=c(0,maxi),
        ylab="Ct_UR",lwd=2, type = "l", main = " Processus Ct par période",
        col = "red")
lines(Temps,c( pension_initiale_UR3,stat3),las=0,cex.axis=0.9,ylim=c(0,maxi),
        ylab="Ct_UR",lwd=2, type = "l", main = " Processus Ct par période",
        col = "blue")
legend("topleft", c("sigma=0.13", "sigma=0.12"), pch = "_", col = rainbow("3"))
grid()
#####taux de croissance final#####

taux_UR=seq(1,69)
taux_UE=seq(1,69)
for (i in 1:69) {

    taux_UR[i] =(recur1[i+1] -recur1[i])/recur1[i]

```

```
    taux_UE[i] =(esp1[i+1] -esp1[i])/esp1[i]
}
moy1=(taux_UR[35]+taux_UR[36]+taux_UR[37]+taux_UR[38]+taux_UR[39]+taux_UR[40]+
    taux_UR[41]+taux_UR[42]+taux_UR[43]+taux_UR[44]+taux_UR[45]+taux_UR[46]+
    taux_UR[47]+taux_UR[48]+taux_UR[49]+taux_UR[50]+taux_UR[51]+taux_UR[52]+
    taux_UR[53]+taux_UR[54]+taux_UR[55]+taux_UR[56]+taux_UR[57]+taux_UR[58]+
    taux_UR[59]+taux_UR[60]+taux_UR[61]+taux_UR[62]+taux_UR[63]+taux_UR[64]+
    taux_UR[65]+taux_UR[66]+taux_UR[67]+taux_UR[68]+taux_UR[69])/35
moy2=(taux_UE[35]+taux_UE[36]+taux_UE[37]+taux_UE[38]+taux_UE[39]+taux_UE[40]+
    taux_UE[41]+taux_UE[42]+taux_UE[43]+taux_UE[44]+taux_UE[45]+taux_UE[46]+
    taux_UE[47]+taux_UE[48]+taux_UE[49]+taux_UE[50]+taux_UE[51]+taux_UE[52]+
    taux_UE[53]+taux_UE[54]+taux_UE[55]+taux_UE[56]+taux_UE[57]+taux_UE[58]+
    taux_UE[59]+taux_UE[60]+taux_UE[61]+taux_UE[62]+taux_UE[63]+taux_UE[64]+
    taux_UE[65]+taux_UE[66]+taux_UE[67]+taux_UE[68]+taux_UE[69])/35

mean(taux_UR)
mean(taux_UE)
mean(recur1[35]:recur1[70])
mean(esp1[35]:esp1[70])
moyenne1=(recur1[35]+recur1[36]+recur1[37]+recur1[38]+recur1[39]+recur1[40]+
    recur1[41]+recur1[42]+recur1[43]+recur1[44]+recur1[45]+recur1[46]+
    recur1[47]+recur1[48]+recur1[49]+recur1[50]+recur1[51]+recur1[52]+
    recur1[53]+recur1[54]+recur1[55]+recur1[56]+recur1[57]+recur1[58]+
    recur1[59]+recur1[60]+recur1[61]+recur1[62]+recur1[63]+recur1[64]+
    recur1[65]+recur1[66]+recur1[67]+recur1[68]+recur1[69]+recur1[70])/36
moyenne1
moyenne2=(esp1[35]+esp1[36]+esp1[37]+esp1[38]+esp1[39]+esp1[40]+esp1[41]+
    esp1[42]+esp1[43]+esp1[44]+esp1[45]+esp1[46]+esp1[47]+esp1[48]+
    esp1[49]+esp1[50]+esp1[51]+esp1[52]+esp1[53]+esp1[54]+esp1[55]+
    esp1[56]+esp1[57]+esp1[58]+esp1[59]+esp1[60]+esp1[61]+esp1[62]+
    esp1[63]+esp1[64]+esp1[65]+esp1[66]+esp1[67]+esp1[68]+esp1[69]+
    esp1[70])/36
moyenne2
#####fin#####
```

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
Faculté des sciences

Place des sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/sc