

Faculté des sciences

**Market and Actuarially consistent
evaluation of life insurance
contracts**

Auteur : **Rodrigue Fofou (7155-20-00)**

Promoteur : **Jérôme Barbarin**

Lecteur : **Pierre ARS**

Année académique 2023 - 2024

Master [120] en sciences actuarielles



École de statistique, biostatistique
et sciences actuarielles

Institut de Statistique, Biostatistique et Actuariat

Market and Actuarially consistent evaluation of life insurance contracts

Promoteur :

Jérôme Barbarin

UCLouvain

Mémoire présenté en vue de

l'obtention du mastère

en sciences actuarielles

par :

Rodrigue Fofou

Louvain-La-Neuve

Juin 2024

Résumé

Ce travail met en exergue des méthodes de tarifications des produits hybrides combinant risques d'assurance et financier. Tout d'abord, les hypothèses et modèles utilisés pour l'évaluation financière et actuarielle sont présentés. Ensuite, l'évaluation risque-neutre en finance et les principes de prime classique en assurance. Enfin, la cohérence des valorisations avec le marché et les principes actuariels classique sont analysés, avec une introduction des méthodes telles que la juste valorisation, la valorisation basée sur la couverture et la valorisation en deux étapes, avec des contributions clés de Pelsser et Stadje et Dhaene et al. Pour la partie application, une des méthodes étudiées qui est la valorisation à deux étapes est appliquée à des contrats de type "universal life" avec des études de sensibilité approfondies et des résultats numériques pour évaluer l'impact de divers facteurs sur les valorisations. Notre étude présente une approche intégrée qui combine les méthodes de la finance et de l'actuariat, offrant ainsi des valorisations robustes pour les produits hybrides. Cette contribution enrichit le domaine de l'évaluation des produits financiers et d'assurance complexes.

Mots clés : produits hybrides, principes de prime en assurance, valorisation en risque neutre, valorisation basée sur la couverture, juste valorisation, valorisation en deux étapes, contrats "universal life", cohérence de marché, méthodes actuarielle et financière, sensibilité des valorisations

Abstract

This work highlights pricing methods for hybrid products that combine insurance and financial risks. Firstly, the assumptions and models used for financial and actuarial valuation are presented, followed by risk-neutral evaluation in finance and classical premium principles in insurance. Finally, the consistency of valuations with the market and traditional actuarial principles is analyzed, introducing methods such as fair valuation, hedge-based valuation, and two-step valuation, with key contributions from Pelsser, Stajje, and Dhaene et al. In the application section, one of the studied methods, the two-step valuation, is applied to "universal life" contracts with detailed sensitivity studies and numerical results to assess the impact of various factors on valuations. Our study presents an integrated approach that combines the methods of finance and actuarial science, thereby offering robust valuations for hybrid products. This contribution enriches the field of valuation for complex financial and insurance products.

Keys words : hybrid products, insurance premium principles, risk-neutral valuation, hedge-based valuation, fair valuation, two-step valuation, "universal life" contracts, market consistency, actuarial and financial methods, valuation sensitivity..

Dédicace

À ma maman Youda Florence et mon regretté papa Tafomen Philippe, Pour leur amour inconditionnel et sacrificiel, leur encouragement et patience, cette aventure n'aurait certainement pas existé sans vous. Puisse l'éternel te garder maman afin que tu puisses récolter les fruits de ton dévouement. Merci papa de veiller sur moi de là haut.

Remerciements

Je tiens à exprimer ma gratitude particulière au professeur Jérôme Barbarin pour sa patience, ses orientations éclairées et son engagement tout au long de la réalisation de ce mémoire. Les rencontres régulières ont été extrêmement enrichissantes, guidant non seulement ce travail, mais également d'autres aspects de ma formation.

Un sincère remerciement s'adresse également à l'ensemble du corps enseignant et au personnel de la LSBA pour la qualité de la formation dispensée. Leur contribution a grandement enrichi mon parcours académique.

À ma famille, je présente mes remerciements les plus chaleureux pour leurs sacrifices, leur soutien continu et la confiance inébranlable qu'ils ont placée dans mes choix. Leurs attentions et encouragements ont été des piliers tout au long de mes études. Un remerciement particulier à MOTSA Soledad ainsi qu'à MADE Gertrude Mirabelle dont le soutien a été inestimable. Je souhaite exprimer toute ma gratitude à mes camarades de classe et à toutes les personnes qui ont contribué, de près ou de loin, à la réalisation de ce travail, en particulier à Jean-Baptiste ESSEHIN DERRE, Enkack Tientcheu Jacques, Juste, Ngono Jean Francky. Leur collaboration a été précieuse. Je ne saurais terminer sans exprimer toute ma gratitude à mon Dieu qui m'a accordé entre autres la santé et l'intelligence nécessaires pour mener jusqu'au bout ce travail.

Table des matières

Résumé	i
Abstract	ii
Dédicace	iii
Remerciements	iv
Introduction	1
1 Valorisation financière et actuarielle.	3
1.1 Évaluation risque Neutre en finance	4
1.2 Principes de primes actuarielles	6
1.3 Première approche de Brennan et Schwartz	11
2 Valorisation Market consistent et actuarially consistent	13
2.1 Fair valorisation	13
2.2 Hedge-based valuations	16
2.3 Two-step valuation approach	18
3 Applications	25
3.1 Modèles	25
3.1.1 Modélisation du risque de taux d'intérêt	25
3.1.2 Modélisation du risque de taux de Mortalité	28
3.1.3 Modélisation du fonds	30
3.1.4 Portefeuille	32
3.2 Calibration et résultats numériques	36
3.2.1 Étude des sensibilités des différentes valorisations par rapport au portefeuille d'assurés	36

3.2.2 Sensibilité des valorisations par rapport à la maturité des contrats 40

3.2.3 Étude de sensibilité des valorisations par rapport à la volatilité du fond 43

A PROGRAMMATION R I

Introduction.

En finance, certains produits sont tarifés en risque neutre en calculant les prix des options avec l'absence d'opportunité d'arbitrage. Du côté assurance, les principes de calcul des primes n'utilisent pas le risque neutre mais ajoutent la variance ou l'écart type. Ainsi, il existe deux approches pour calculer les primes : en finance, on change de mesure et on utilise la moyenne en risque neutre, tandis qu'en assurance, on reste dans la mesure réelle en calculant l'espérance et en y ajoutant une marge de sécurité. Sur cette base, des produits combinant à la fois des risques d'assurance et de finance ont émergé donnant ainsi naissance à ce qu'on appelle produits hybrides. Ces derniers nécessitent une évaluation intégrant à la fois la cohérence avec les marchés financiers (market-consistency) et les principes actuarielles (actuarial-consistency). Ce mémoire explore les méthodes de valorisation de ces produits hybrides notamment la valorisation à deux étapes :

Dans le chapitre 1, nous examinons les différentes hypothèses et modèles utilisés tant dans l'évaluation financière, fondée sur l'hypothèse d'absence d'opportunités d'arbitrage, que dans l'évaluation actuarielle. On met en exergue les principes de prime en assurance et les méthodes de valorisation en finance, en se concentrant sur l'évaluation en univers risque neutre. Des travaux pionniers comme ceux de Black et Scholes (1973) ont établi les bases de la valorisation des options en utilisant une approche sans arbitrage. En assurance, les principes de prime ont été largement explorés par Gerber (1979) et Bowers et al. (1997).

Le chapitre 2, parle de la cohérence des valorisations avec le marché et les principes actuariels. Nous mettons en lumière des méthodes de juste valorisation (fair valuation), de valorisation basée sur la couverture (hedge-based valuation) et de valorisation en deux étapes (two-step valuation). Plusieurs auteurs notamment PELSSER et STADJE 2014 et DHAENE et al. 2017 présentent quelques méthodes de ces types de valorisation market consistent et actuarially consistent. Cette littérature souligne l'importance d'incorporer à la fois les perspectives financières et actuarielles pour obtenir des valorisations robustes.

Le chapitre 3 présente un cas pratique dans lequel on applique la valorisation à deux étapes dans le cas d'un contrat universal life. Enfin, le mémoire présente en chapitre 3 quelques études de sensibilité

et des résultats numériques pour évaluer l'impact de divers facteurs sur la valorisation du produit universal life, notamment la volatilité des fonds, la maturité des contrats et la taille du portefeuille d'assurés. Ces analyses ont pour but de mieux comprendre les interactions complexes entre les risques financiers et d'assurance, et de proposer des méthodes de valorisation plus robuste.

Chapitre 1

Valorisation financière et actuarielle.

La valorisation financière et actuarielle d'un produit d'assurance requiert de nombreuses hypothèses importantes. Du côté financier, nous parlons d'une évaluation sous un univers risque neutre où la moyenne du rendement des actifs risqués est égale au taux sans risque. Du côté actuariel, les actuaires décident de prendre des hypothèses réalistes (choix de la table de mortalité pour des produits d'assurance vie par exemple) afin d'appliquer des principes de primes actuarielles.

Dans ce chapitre, nous parlons des évaluations actuarielles et financières, mais avant d'aller plus loin, définissons tout d'abord ce qu'on appelle valorisation.

Soit $(\Omega, \mathcal{G}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé où Ω est l'univers des possibles, \mathcal{G} la tribu de tous les événements et \mathbb{P} est la mesure de probabilité. Notons que nous travaillons pour le moment sur un modèle à une période.

Definition 1.0.1 *Notons par \mathcal{C} l'espace de toutes les créances conditionnelles.*

On appelle valorisation toute application $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ qui à toute créance S associe un nombre réel $\rho(S)$, tel que ρ soit normalisé :

$$\rho(0) = 0$$

$$\rho(S + a) = \rho(S) + e^{-r}a \quad \text{pour tout } S \in \mathcal{C} \text{ et } a \in \mathbb{R} \quad (\text{invariance par translation})$$

Une valorisation peut comporter d'autres propriétés notamment :

- 1. Une application invariante pour la loi \mathbb{P} si deux créances ont la même loi de probabilité, c'est-à-dire $\rho(S_1) = \rho(S_2)$ si $S_1 \stackrel{\mathbb{P}}{=} S_2$*
- 2. La sous-additivité si $\rho(S_1 + S_2) \leq \rho(S_1) + \rho(S_2)$*
- 3. l'homogénéité positive si $\rho(aS) = a\rho(S)$ pour tout scalaire positif a et tout $S \in \mathcal{C}$*

1.1 Évaluation risque Neutre en finance

L'évaluation risque neutre en finance utilisent l'hypothèse dite d'Absence d'Opportunités d'Arbitrage (AOA). Ce principe permet de garantir le fait qu'il est impossible de faire un gain certain sans investissement initial.

L'évaluation risque-neutre en finance requiert de nombreuses hypothèses, à savoir la nature du marché (complet ou incomplet), l'absence d'opportunité d'arbitrage, l'existence des portefeuilles de répliques d'actifs. Pour des raisons de simplification, nous considérons un marché complet.

Le marché financier est composé de n actifs risqués (actions, obligations et bien d'autres) ainsi que d'un actif sans risque (bond de trésor, ...).

Definition 1.1.1 Notons par θ_i $i \in 1, 2, \dots, n$ le nombre d'unités investi dans l'actif risqué i et θ_0 le nombre d'unités investi dans un bond de trésor et donc $\theta = (\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n)$ une stratégie d'investissement à $n + 1$ éléments. Soit y_i le prix de l'actif i à l'instant initial et Y_i celui de cet actif à l'instant 1. Nous supposons que les actifs ne distribuent pas de dividendes.

Un marché sans arbitrage est un marché dans lequel il n'existe pas de stratégie d'investissement vérifiant :

$$\theta \cdot y = 0, \quad \mathbb{P}(\theta \cdot Y \geq 0) = 1 \quad \text{et} \quad \mathbb{P}(\theta \cdot Y > 0) > 0$$

La tarification risque-neutre est évaluée dans un monde où la probabilité réelle \mathbb{P} est remplacée par une probabilité risque Neutre \mathbb{Q} qui lui est équivalente. L'existence d'au moins une mesure de probabilité martingale est garantie par la condition de non-arbitrage (Théorème Fondamentale d'évaluation des actifs)

Definition 1.1.2 Une mesure de probabilité \mathbb{Q} est une mesure martingale équivalente ou mesure risque Neutre si

- \mathbb{Q} est une mesure de probabilité définie sur (Ω, \mathcal{G})
- Les mesures \mathbb{Q} et \mathbb{P} sont équivalentes :

$$Q(A) = 0 \quad \text{si et seulement si} \quad P(A) = 0$$

- Le prix d'un actif à l'instant initial peut être exprimé en fonction du prix à l'instant futur. En

effet, le prix $\frac{Y_m}{Y_0}$ est \mathbb{Q} -martingale ce qui permet d'écrire :

$$\mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{Y_m}{Y_0} \right) = \frac{y_m}{y_0}$$

$$y_m = y_0 \times \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} \left(\frac{Y_m}{Y_0} \right) \text{ avec } y_0 = 1 \quad Y_0 = e^r$$

Ainsi on obtient :

$$y^m = e^{-r} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} (Y^m)$$

Valoriser un produit sur le marché financier revient à vérifier si on peut couvrir ce produit, déterminer un portefeuille de replication de ce produit. Ainsi, la valeur d'un actif couvert dans l'univers risque neutre est exactement la même que celle du portefeuille qui le réplique.

Definition 1.1.3 Un actif S^h est hedgeable s'il existe une stratégie de trading $\nu = (\nu^{(0)}, \dots, \nu^{(n)})$ tel que

$$S^h = \nu \cdot Y.$$

Notons par \mathcal{C}^h l'espace des sinistres pouvant être couverts. Il suit la propriété suivante

Propriété 1.1.1 La détermination de la couverture de $S^h \in \mathcal{C}^h$ est unique

Preuve : la preuve est donnée par [DHAENE 2022](#)

Tout d'abord, supposons qu'il n'y a pas redondance c'est à dire une situation où deux actifs ou plus génèrent le même flux de paiement dans toutes les circonstances possibles. De façon mathématique, Pour X et Y on ne peut pas avoir l'existence d'une fonction f telle que $f(X) = Y$ dans toutes les situations de marché. Autrement dit, les actifs ne sont pas linéairement dépendants dans leur capacité à générer les flux de trésoreries futurs.

Par la suite, on suppose qu'il existe deux stratégies de couvertures pour S^h alors

$$S^h = \nu_1 \cdot Y = \nu_2 \cdot Y$$

alors $(\nu_1 - \nu_2) \cdot Y = 0$ ce qui donne $\nu_1 - \nu_2 = 0$ (en supposant qu'il n'y ait pas de redondance c'est à dire qu'il n'existe pas de fonction f telle que $f(Y) = (\nu_1 - \nu_2) \cdot Y = 0$). Donc $\nu_1 = \nu_2$.

Pour plus de détails nous pouvons nous référer à [DHAENE et al. 2017](#).

La propriété suivante permet de calculer le prix aujourd'hui sous l'univers risque neutre d'un actif sachant son prix à l'instant 1

Propriété 1.1.2 *Le prix aujourd'hui ($t = 0$) d'un actif S^h sous l'univers risque neutre \mathbb{Q} est ainsi donné par l'espérance actualisée au taux sans risque du cashflow à l'instant 1*

$$V_0 = E^{\mathbb{Q}}\left(e^{-r} S^h(1)\right)$$

Avec \mathbb{Q} une mesure martingale équivalente (la mesure risque neutre par exemple) à la mesure réelle \mathbb{P} .

Nous avons parlé de la valorisation risque neutre ici sur une période, on peut tout de même l'étendre dans le cadre multi périodique et le principe reste le même. Nous pouvons nous référer à plusieurs auteurs notamment BARIGOU et DHAENE 2019 BARIGOU, CHEN et DHAENE 2019 pour le cadre continu.

Nous constatons que les méthodes financières utilisent l'évaluation sous la mesure risque neutre qui est une mesure martingale équivalente à la mesure réelle, ce qui n'est pas le cas pour les méthodes exclusivement actuarielles qui utilisent directement la probabilité réelle avec généralement ajout d'une marge (volatilité, marge de sécurité).

1.2 Principes de primes actuarielles

La valorisation dans un cadre actuariel pur permet de tenir compte de plusieurs paramètres actuariels, notamment les modèles actuariels, les tables de mortalité et bien d'autres. Cette prise en compte est dans l'optique d'honorer ses engagements vis-à-vis des assurés ainsi que garantir la solvabilité de l'entreprise.

Dans la tradition actuarielle européenne classique, les primes sont déterminées conformément aux principes de prime. En considérant une créance S , caractérisée par sa fonction de répartition cumulative F_S , un principe de prime associe une prime à ce risque. Voici quelques illustrations de ces principes de prime. On peut retrouver ces principes de primes dans le chapitre 5 du livre de KAAS et al. 2008

- a) **Principe de la prime à la valeur attendue** : Ici, on considère la valeur espérée du coût total de créance augmentée d'un pourcentage α de cette même valeur attendue.

$$\pi^{va}(S) = (1 + \alpha)E(S)$$

avec α un taux de chargement de sécurité.

- b) **Principe de prime basée sur la moyenne-variance** : Outre la valeur attendue, on considère

la variance qui tient en compte la dispersion du risque par rapport à sa valeur espérée

$$\pi^v(S) = E(S) + \frac{1}{2}\alpha Var(S)$$

- c) **Principe de la prime d'écart-type** : Pareil que le principe de variance sauf que la variance est remplacée par l'écart type.

$$\pi^{st}(S) = E(S) + \gamma\sqrt{Var(S)}$$

avec γ est un facteur de chargement.

- d) **Principe de la semi-déviatio**n : Ce principe quant à lui se concentre sur la mesure du risque asymétrique et aussi sur la protection contre les risques extrêmes dans un portefeuille.

$$\pi^s(S) = E(S) + \lambda \left| E \left[(S - E(S))_+^q \right] \right|^{\frac{1}{q}}, \quad \lambda > 0, \quad q \in [1, \infty)$$

où x_+ est 0 si $x < 0$ et x ailleurs.

- e) **Principe de la value at Risk** : La value at risk est une mesure statistique utilisée pour évaluer les risques financiers associés à un portefeuille d'assurance. Elle permet donc de quantifier la perte maximale probable d'une compagnie d'assurance en cas de fluctuations défavorables des actifs et passifs de la compagnie, ceci avec un niveau de confiance et sur une période précise.

$$\pi^{VaR}(S) = E(S) + \delta \cdot VaR_\alpha(S - E(S)), \quad \delta \geq 0.$$

où VaR_α est la value at risk de niveau α définie par

$$VaR_\alpha = F^{-1}(\alpha) = \inf\{s : F_S(s) \geq \alpha\} \tag{1.1}$$

- f) **Principe de la value at Risk moyenne** : C'est dans la même idée que le précédent sauf qu'on remplace la value at risk par sa valeur moyenne notée $AVaR$

$$\pi^{AVaR}(S) = E(S) + \delta \cdot AVaR_\alpha(S - E(S)), \quad \delta \geq 0.$$

où

$$AVaR_\alpha(S) = \frac{1}{\alpha} \int_0^\alpha VaR(\gamma) d\gamma$$

- g) **Principe du coût du capital** : Le coût du capital représente le rendement minimum que des investisseurs exigent pour fournir des fonds à une compagnie. Le principe de calcul de prime basée sur le coût du capital est donné par :

$$\pi = E^{\mathbb{P}}(S) + RM(S)$$

avec RM la marge de risque donnée par $RM(S) = i(VaR_p(S) - E(S))$; et i le taux de coût du capital.

- h) **Prime Zéro utilité** : Soit $u(\cdot)$ une fonction réelle à variable réelle. $u(\cdot)$ est une fonction d'utilité qui mesure les préférences individuelles envers le risque et le rendement, utilisée pour comparer différentes alternatives d'investissement et ainsi être rationnel dans la prise de décisions. Ainsi la prime π^{zu} est définie telle que

$$u(0) = E[u(\pi[X] - X)]. \quad (1.2)$$

La fonction $u(x)$ représente l'utilité qu'un décideur attache à son capital actuel plus x . Ainsi, $u(0)$ est l'utilité du capital actuel et $u(\pi[X] - X)$ est l'utilité après avoir assuré un risque X contre une prime $\pi[X]$. La prime π^{zu} qui résout l'équation (1.2) d'équilibre d'utilité est appelée la prime d'utilité nulle.

- i) **Principe de prime exponentielle** :

$$\pi^{exp}(S) = \gamma \log(E[\exp(S/\gamma)]) \quad \gamma > 0$$

Le principe de prime exponentielle est un cas particulier du principe de prime zero utilité.

En effet ; on a la fonction d'utilité exponentielle :

$$u(x) = \left(1 - e^{-\frac{x}{\gamma}}\right) \cdot \gamma$$

La prime zero utilité dans le cas de la fonction exponentielle, on a

$$\begin{aligned} (1 - e^{-\frac{0}{\gamma}}) \cdot \gamma &= E \left[\left(1 - e^{-\frac{(\pi[X]-X)}{\gamma}} \right) \cdot \gamma \right] \\ 0 &= E \left[\left(1 - e^{-\frac{(\pi[X]-X)}{\gamma}} \right) \cdot \gamma \right] \\ 0 &= 1 - e^{-\frac{\pi[X]}{\gamma}} \cdot E \left(e^{\frac{X}{\gamma}} \right) \\ e^{\frac{\pi[X]}{\gamma}} &= E \left(e^{\frac{X}{\gamma}} \right) \\ \pi[X] &= \gamma \cdot \log (E [\exp (X/\gamma)]) \end{aligned}$$

j) **Principe du percentile** : Ce principe repose généralement sur l'utilisation des statistiques descriptive, plus précisément les percentiles, afin de fixer les primes en fonction du niveau du risque associé à une police d'assurance.

$$\pi^{pp} = \min\{p; F_S(p) \geq 1 - \varepsilon\} \tag{1.3}$$

Ceci veut dire que la probabilité pour une perte S sur le contrat est au maximum ε , avec $0 \leq \varepsilon \leq 1$

Propriété 1.2.1 (*Différentes propriétés souhaitables de principes de primes*)

Nous présentons ici 5 propriétés souhaitables pour les principes de primes. Ces propriétés souhaitables données par KAAS et al. 2008 sont les suivantes :

1. **Chargement Non-négatif** : $\pi[S] \geq E[S]$. La ruine est inévitable pour une prime sans majoration positive.
2. **Pas d'arnaque** : $\pi[S] \leq \min\{p; F_S(p) = 1\}$. Si S n'est pas bornée, alors la prime de perte maximale est infinie. Cette prime de perte maximale est un cas limite.
3. **Invariance par translation** : $\pi(S + c) = \pi(S) + c$ pour tout c . Littéralement cela signifie que si nous augmentons la demande d'indemnisation d'un montant fixe, alors la prime devra également être augmentée du même montant. De manière générale, un "risque" ne doit pas nécessairement être une variable aléatoire non négative, mais il est parfois commode d'émettre l'hypothèse que celui-ci est limité vers le bas.
4. **Additivité** : Pour deux risques indépendants, la mise en commun des risques n'a pas d'impact sur la prime totale. En d'autres termes :

$$\pi(S_1 + S_2) = \pi(S_1) + \pi(S_2) \tag{1.4}$$

5. **Itérativité** : Le calcul de la prime ici peut s'effectuer en 2 étapes. On applique premièrement la fonction $\pi(\cdot)$ à la distribution conditionnelle de S_1 , étant donné le risque $S_2 = s$ et donc on obtient une fonction qui dépend de s . Il suffit ensuite d'appliquer une deuxième fois la fonction π à la fonction $\pi(S_1|S_2)$. On a ainsi :

$$\pi[S_1] = \pi[\pi[S_1|S_2]]$$

Comme exemple de principe utilisant l'itérative, on peut avoir le principe de prime exponentielle

Exemple 1.2.1 On montre ainsi que la prime exponentielle est itérative. En effet,

$$\begin{aligned} \pi[\pi[S_1|S_2]] &= \gamma \log \left(E \left[\exp \left(\frac{1}{\gamma} \pi[S_1|S_2] \right) \right] \right) \\ &= \gamma \log E \left[\exp \left(\gamma \frac{1}{\gamma} \log E \left[e^{S_1/\gamma} | S_2 \right] \right) \right] \\ &= \gamma \log E \left[E \left[e^{S_1/\gamma} | S_2 \right] \right] \\ &= \gamma \log E \left[e^{S_1/\gamma} \right] \\ &= \pi(S_1) \end{aligned}$$

Remarque 1.2.1 Le principe de l'écart-type, le principe de la valeur à risque moyenne et le principe de la semi-déviations satisfont également à l'homogénéité positive, tandis que le principe de la moyenne-variance est borné en utilisant la probabilité réelle. Le principe de la value at risk moyenne et le principe de la semi-déviations sont monotones si λ ou δ appartient à $[0, 1]$.

Remarque 1.2.2 Ces propriétés sont désirables pour les principes de primes mais tous les principes de primes n'ont pas ces propriétés.

Remarque 1.2.3 On peut aussi avoir ces principes de primes de manière appropriée en conditionnant les informations disponibles et en utilisant l'actualisation. Cela repose sur le même principe fondamental.

Nous pouvons avoir entre autre

1. **Principe de prime de l'écart type** :

$$\pi_{\mathcal{G}}^{st}(S) = e^{-r} \left(E(S|\mathcal{G}) + \beta \sqrt{Var(S|\mathcal{G})} \right) \quad \text{avec } \beta > 0 \text{ est un facteur de chargement.} \quad (1.5)$$

2. Principe de prime exponentielle :

$$\pi_{\mathcal{G}}^{exp}(S) = \gamma \log (E [\exp (S/\gamma)|\mathcal{G}]) \quad \gamma > 0$$

Nous avons jusqu'ici donné quelques différents principes de primes classiques (approche purement financier et approche purement actuariel) séparément. Cependant, combiner ces deux approches est très important au vu de l'évolution du marché et des produits d'assurance, notamment les produits d'assurance vie. Une première approche hybride dans la littérature a été développée par BRENNAN et SCHWARTZ 1976 et BRENNAN et SCHWARTZ 1979 afin de combiner ces deux approches.

1.3 Première approche de Brennan et Schwartz

BRENNAN et SCHWARTZ 1979 et BRENNAN et SCHWARTZ 1976 utilisent une approche hybride de valorisation market consistent et actuarial consistent pour le cas d'un payoff multiplicatif dans laquelle le risque d'assurance est supposé parfaitement diversifiable et la partie financière est évaluée sous la mesure risque neutre.

Définissons quelques concepts.

Definition 1.3.1 (*Créance orthogonale*) Une créance orthogonale S^\perp est une créance qui est indépendante pour la mesure de probabilité \mathbb{P} d'un vecteur de créances négociées :

$$S^\perp \perp (Y^{(1)}, Y^{(2)} \dots Y^{(n)})$$

L'ensemble des créances orthogonales noté \mathcal{C}^\perp

Definition 1.3.2 (*risque parfaitement diversifiable*) Un risque S est parfaitement diversifiable si sa valeur réelle est égale à sa valeur espérée sous la probabilité réelle, c'est-à-dire

$$S = E^{\mathbb{P}}(S)$$

Ce risque parfaitement diversifiable peut être considéré pour des portefeuilles très larges dans laquelle la loi des grands nombres est appliquée.

Definition 1.3.3 (*Hybrid claims*) Une créance S est considérée comme hybride si elle n'est ni parfaitement couvrable, ni orthogonale :

$$S \in \mathcal{C} \setminus (\mathcal{C}^h \cup \mathcal{C}^\perp) \tag{1.6}$$

Les produits d'assurance "unit-linked" ont dans certains cas par construction une partie financière (couvrable) et une partie actuarielle (non couvrable) dans leur règlement. Nous pouvons alors dire que la tarification des créances d'assurance "unit-linked" entraîne l'évaluation de créances hybrides. En outre, l'expansion des marchés de titres adossés à des assurances (tels que les obligations catastrophe, les dérivés météorologiques et les obligations de longévité) permet aux passifs des portefeuilles d'assurance exposés à des risques actuariels spécifiques (tels que ceux résultant de catastrophes naturelles) de devenir au moins partiellement couvrables. Par conséquent, la titrisation d'assurance peut également donner lieu à des réclamations hybrides dans les portefeuilles d'assurance.

Considérons un produit hybride avec un payoff de la forme $S^h \times S^\perp$ où S^h est un sinistre hedgeable sur le marché financier et S^\perp est une créance actuarielle parfaitement diversifiable, tous les deux indépendants.

L'approche de Brennan et Schwartz donne la valorisation cohérente de façon actuarielle et cohérente au marché financier pour un produit hybride de payoff du type $S^h \times S^\perp$ avec la partie actuarielle parfaitement diversifiable. Cette approche est donnée par

$$\rho(S^h \times S^\perp) = e^{-r} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S^h] \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [S^\perp] \quad (1.7)$$

La partie financière est évaluée sous l'univers risque en prenant l'espérance actualisée au taux sans risque neutre et la partie actuarielle est évaluée en prenant l'espérance sous la mesure réelle.

Cette approche de Brennan et Schwartz est une première approche hybride de valorisation combinant ainsi les tarifications actuarielles et financières pour des produits d'assurance ; cependant elle présente plusieurs limites. Elle suppose l'application de la loi des grands nombres, l'indépendance des parties financières et actuarielles. De plus, le fait de supposer que la partie actuarielle soit parfaitement diversifiable n'est pas réaliste car malgré la diversification du risque actuariel il en demeure existant et la volatilité est bel et bien présente. Cette première approche n'étant pas suffisante, nous introduisons par la suite des approches hybrides plus moderne et qui introduisent de manière plus cohérente les parties actuarielles et financières.

Chapitre 2

Valorisation Market consistent et actuarially consistent

Les contrats d'assurance, en particulier les contrats vie, outre les tarifications actuarielles, ont besoin d'être évalués en leurs valeurs de marché. Ceci dans le but de garantir une solvabilité et ainsi respecter les exigences du régulateur.

Valoriser un produit d'assurance vie nécessite une valeur qui combine la cohérence actuarielle (actuarially consistent) et une cohérence au marché (market consistent). La combinaison de ces deux méthodes de tarifications donne naissance à ce que l'on appelle la juste valorisation (fair valuation en anglais). Dans la littérature, nous observons plusieurs auteurs qui ont développé des techniques de juste valorisations. Nous pouvons citer entre autres PELSSER et STADJE [2014](#) et DHAENE et al. [2017](#). Ces auteurs introduisent la méthode de two step valuation qui est une juste valorisation. Définissons et étudions ces méthodes de valorisations.

2.1 Fair valorisation

Dans le papier de DHAENE et al. [2017](#), on examine la fair valorisation des engagements relatifs au police d'assurance dans un cadre d'une période, Dhane et al. introduit la notion de couvertures équitables (Fair Hedgers), la valorisation basée sur la couverture (Hedge-based valuation) est examinée. A la fin de ce papier une version adaptée de la valorisation à deux étapes est fournie, cette valorisation étant introduite par PELSSER et STADJE [2014](#) en 2014.

La fair valorisation nécessite la compréhension des notions de market consistent valuation (MC Valuation) et de valorisation actuarielle.

Definition 2.1.1 (*Market-consistent valuation*)

Une valorisation cohérente au marché (MC Valuation) est une valorisation $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ telle que toute partie de créance pouvant être couverte est marquée au marché (marked-to-Market en anglais), c'est-à-dire :

$$\rho(S + \nu \cdot Y) = \rho(S) + \nu \cdot y \text{ pour tout } S \in \mathcal{C} \text{ et } \nu \cdot Y \in \mathcal{C}^h \quad (2.1)$$

Nous pouvons nous référer dans la littérature chez des auteurs comme PELSSER et STADJE 2014. La condition 2.1 peut être réécrite comme suit

$$\rho(S) = \rho(S - \nu \cdot Y) + \nu \cdot y \text{ pour tout } S \in \mathcal{C} \text{ et } \nu \cdot Y \in \mathcal{C}^h. \quad (2.2)$$

Cette formule 2.2 peut être interprétée comme suit :

Considérons une personne soumise à une perte S , cette personne peut décider de transférer entièrement ce risque S à un assureur. D'une autre façon, elle peut aussi décider de diviser sa demande d'indemnisation S en une créance couverte $\mu \cdot Y$, qu'elle couvre sur le marché financier, tandis qu'elle apporte la partie restante $S - \mu \cdot Y$ à l'assureur. La condition 2.2 stipule que le sinistre S a la même valeur dans les deux cas. En d'autres termes, l'assureur évalue en accord avec le marché financier dans ce sens qu'il ne facture pas de marge de risque pour toute partie pouvant être couverte d'un sinistre. Nous constatons aussi que pour toute partie pouvant être couverte d'un sinistre S^h on a $\rho[\mu \cdot Y] = \mu \cdot y$, qui signifie que la valeur MC de tout sinistre pouvant être couvert est égale au prix de sa couverture sous-Jacente.

Nous définissons par la suite la notion de valorisation actuarielle.

Definition 2.1.2 (*Valorisation actuarielle*)

Une valorisation $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est dite actuarielle lorsque toute créance orthogonale est marquée au modèle (Marked-to-model en anglais) ; c'est à dire

$$\rho(S^\perp) = e^{-r} \mathbb{E}^{\mathbb{P}}(S^\perp) + RM[S^\perp] \text{ pour tout } S^\perp \in \mathcal{C}^\perp \quad (2.3)$$

où $RM : \mathcal{C}^\perp \rightarrow \mathbb{R}$ est une application qui à toute créance orthogonale associe un nombre réel, indépendant des prix actuels des actifs $(y^{(1)}, y^{(2)}, \dots, y^{(n)})$.

La condition 2.3 montre que toute créance orthogonale est évaluée par la somme de sa meilleure estimation et d'une marge de risque. Dans l'optique de garantir qu'une évaluation actuarielle est bel et bien une évaluation alors il faut que $RM(0) = 0$ et $RM[S^\perp + a] = RM[S^\perp]$ pour toute créance orthogonale. Notons que la valorisation actuarielle, en particulier celle de la fonction de la marge

de risque sont utilisés dans une situation spécifique sont choisies par l'actuaire. Dans la vision traditionnelle de l'évaluation dans un contexte d'assurance, l'existence du marché financier est ignorée, à l'exception du compte bancaire sans risque. En utilisant une telle approche, on constate que toute créance S est orthogonal et que celui-ci est évalué par le biais d'une évaluation actuarielle.

Definition 2.1.3 (*Fair valorisation*)

Une fair valorisation est une valorisation qui est à la fois market-consistent et actuarially-consistent.

Nous énumérons quelques exemples (DHAENE et al. 2017)

Exemple 2.1.1 *Nous examinons des exemples de fair valorisation, en considérant deux cas : celui où une créance hybride S est la somme d'une créance orthogonale et d'une créance couvrable, ainsi que le produit de ces dernières ; en d'autres termes, $S = S^\perp + S^h = S^\perp + \nu \cdot Y$ et $S = S^\perp \times S^h$*

1. Cas où $S = S^\perp + S^h$:

En utilisant les définitions de market consistent valuation et de valorisation, on obtient la fair valorisation ρ donnée par

$$\rho(S^\perp + S^h) = \pi[S^\perp] + \nu \cdot y \quad \text{avec } S^\perp \in \mathcal{C}^\perp \quad S^h \in \mathcal{C}^h$$

Dans ce contexte, π représente une évaluation actuarielle. Ainsi, la valeur de MC de la créance $S = S^\perp + S^h$ est donnée par la somme de la valeur actuarielle de S^\perp et du prix du marché financier $\nu \cdot Y$. En d'autres termes, la partie orthogonale de la créance est valorisée selon un modèle (Marked to model), tandis que la partie couvrable est valorisée selon le marché (marked to market). La plupart des créances hybrides observées dans un contexte d'assurance ont une structure plus complexe que la structure additive. On rencontre parfois une structure multiplicative, où la créance $S = S^\perp \times S^h$

2. Cas où $S = S^\perp \times S^h$:

En utilisant le principe de prime de l'écart-type, la fair valorisation dans ce cas est donnée par :

$$\rho(S^h \times S^\perp) = e^{-r} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S^h] \times \left(\mathbb{E}^{\mathbb{P}} [S^\perp] + \alpha \sigma^{\mathbb{P}} [S^\perp] \right)$$

En supposant que S^\perp est parfaitement diversifiable et donc la volatilité tend vers 0, c'est-à-dire $\sigma^{\mathbb{P}} [S^\perp] \simeq 0$; nous obtenons ainsi la formule de Brennan et Schwartz définie à l'équation 1.7 qui est donnée par :

$$\rho(S^h \times S^\perp) = e^{-r} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S^h] \times \mathbb{E}^{\mathbb{P}} [S^\perp] \tag{2.4}$$

Notons que ces exemples ne couvrent pas le cas général des créances hybrides.

Après avoir défini la notion de fair valorisation, nous allons introduire des classes de valorisation telles que la Hedge-based valuation et la two step valuation approach.

2.2 Hedge-based valuations

Dans cette section, nous définissons tout d'abord les différents types de couvertures avant de définir ce qu'est une valorisation basée sur la couverture.

Definition 2.2.1 (*hedger/couverture*)

1. Une stratégie θ est une couverture d'une créance S si la stratégie de trading associée $\theta_S =$

$(\theta_S^{(0)}, \theta_S^{(1)}, \dots, \theta_S^{(n)})$ est telle que :

- θ est normalisé c'est à dire $\theta_0 = (0, 0, \dots, 0)$
- θ est invariant par translation :

$$\theta_{S+a} = \theta_S + (e^{-r}a, 0, \dots, 0) \text{ pour tout } a > 0 \text{ et tout } S \in \mathcal{C}$$

θ_S est appelée couverture de S qui peut être partielle ou totale.

2. Une couverture θ est market-consistent (MC) si toute partie pouvant être couverte $\nu \cdot Y$ de toute créance est couverte par ν

$$\theta_{S+\nu \cdot Y} = \theta_S + \nu \text{ pour tout } S \in \mathcal{C} \text{ et tout } \nu \cdot Y \in \mathcal{C}^h \tag{2.5}$$

3. Une couverture est actuarially-consistent si toute créance orthogonale est couvrable sans risque via une évaluation actuarielle ρ :

$$\theta_{S^\perp} = (\rho[S^\perp], 0, \dots, 0), \text{ pour tout } S^\perp \in \mathcal{C}^\perp \tag{2.6}$$

4. Une couverture est fair si elle est à la fois market-consistent et actuarielle.

Enonçons tout d'abord le lemme et théorème suivants :

Lemme 2.2.1 *Considérons une couverture θ et une évaluation ρ , On définit la couverture μ par*

$$\mu_S = \theta_S + (\rho[S - \theta_S \cdot Y], 0, \dots, 0) \text{ pour tout } S \in \mathcal{C}. \tag{2.7}$$

a) Si θ est une couverture MC, alors μ est une couverture MC.

- b) Si θ est une couverture actuarielle et ρ une évaluation actuarielle, alors μ est une couverture actuarielle avec évaluation actuarielle sous-jacent ρ .
- c) Si θ est une juste couverture et ρ une évaluation actuarielle, alors μ est une juste couverture avec évaluation actuarielle sous-jacente ρ .

Théorème 2.2.1 *Considérons la valorisation $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$*

- a) ρ est une valorisation MC si et seulement si il existe une couverture MC θ^m telle que

$$\rho(S) = \theta^m \cdot y, \quad \text{pour tout } S \in \mathcal{C} \quad (2.8)$$

- b) ρ est une valorisation actuarielle si et seulement si il existe une couverture actuarielle θ^a telle que

$$\rho(S) = \theta^a \cdot y, \quad \text{pour tout } S \in \mathcal{C} \quad (2.9)$$

- c) ρ est une valorisation juste si et seulement si il existe une juste couverture c'est-à-dire à la fois actuarielle et cohérente au marché θ^f telle que

$$\rho(S) = \theta^f \cdot y, \quad \text{pour tout } S \in \mathcal{C}. \quad (2.10)$$

Definition 2.2.2 *(Hedge-based valuation)*

Une évaluation ρ est une évaluation basée sur la couverture (HB valuation) si pour tout sinistre S , la valeur $\rho(S)$ est déterminée par

$$\rho[S] = \theta_S \cdot y + \pi(S - \theta_S \cdot Y) \quad (2.11)$$

où θ est une juste couverture et π une évaluation actuarielle

Il découle de cette définition que :

- * Pour tout sinistre orthogonal S^\perp on peut voir que la valorisation hedge-based est donnée par

$$\rho(S^\perp) = \pi(S^\perp) \quad \text{pour tout } S^\perp \in \mathcal{C}^\perp$$

- * L'évaluation hedge-based pour tout sinistre couvert est simplement égale au prix de la couverture sous-jacente

$$\begin{aligned} \rho(S^h) &= \theta_S \cdot y \\ \rho(S^h) &= e^{-r} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S^h] \end{aligned}$$

Le théorème suivant donne une équivalence entre les classes de fair valuation et celle de hedge-based valuation.

Théorème 2.2.2 *Une application $\rho : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ est une évaluation HB si et seulement si c'est une juste évaluation*

Preuve :

Démontrons la double implication. Pour ce faire, supposons tout d'abord que ρ est une HB valuation ; Ainsi pour tout sinistre S on peut réécrire la formule 2.11 comme suit

$$\rho[S] = \mu_S \cdot y \tag{2.12}$$

avec

$$\mu_S = \theta_S + (\pi [S - \theta_S \cdot Y], 0, \dots, 0) \tag{2.13}$$

En utilisant le lemme 2.2.1, il est évident que μ est une couverture équitable avec pour évaluation actuarielle sous-jacente π . Il suit d'après le théorème 2.2.1 que l'évaluation ρ est fair.

Supposons inversement que ρ est une fair valuation et montrons que c'est une HB valuation.

Le fait que ρ est une fair valuation entraîne via le théorème 2.2.1 qu'il existe une fair hedge θ^f tel que $\rho(S) = \theta^f \cdot y$ pour tout sinistre. Par suite, définissons une valorisation notée ρ' telle que

$$\rho'(S) = \theta_S^f \cdot y + \rho [S - \theta_S^f \cdot y] \tag{2.14}$$

Il est trivial que ρ' est une HB valuation. De plus on a $\rho [S - \theta_S^f \cdot y] = 0$.

Nous avons donc $\rho \cong \rho'$ et par suite ρ une HB valuation.

Outre la valorisation basée sur la couverture (Hedge-based valuation), nous avons la valorisation à deux étapes (two step valuation) qui est une fair valorisation

2.3 Two-step valuation approach

La two step valuation approach est une approche de valorisation dans laquelle on prend en compte à la fois les aspects financiers et actuariels. En effet, dans cette approche, on décompose le payoff en deux parties, une partie actuarielle diversifiable et une autre partie financière hedgeable. Cette approche se fait en deux étapes à savoir :

- La première étape est d'appliquer un principe de prime actuarielle conditionnelle traditionnelle au payoff du produit afin d'obtenir l'évaluation actuarielle sachant des informations disponibles

- La seconde étape est tout simplement d'appliquer une espérance actualisée sous la mesure risque neutre à la valeur actuarielle obtenue à la première étape.

Soit un espace mesurable (Ω, \mathcal{F}^Y) , où $\mathcal{F}^Y \subset \mathcal{G}$ est une sigma-algèbre générée par le vecteur de prix d'actif Y . Notons par \mathcal{C}^Y l'ensemble des créances conditionnelles de Y

Definition 2.3.1 (*Valorisation conditionnelle*).

On définit aussi la valorisation conditionnelle dans la même optique que la valorisation (définition 1.0.1) sauf que $\rho_Y : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}^Y$ et la condition d'invariance par translation devient sous condition donnée par :

$$\rho_Y [S + S^h] = \rho_Y [S] + e^{-r} S^h \quad \forall S \in \mathcal{C} \quad \text{et} \quad S^h \in \mathcal{C}^h \quad (2.15)$$

avec ρ_Y est une valorisation conditionnée à la créance Y .

Definition 2.3.2 (*Valorisation actuarielle conditionnelle*)

On peut également avoir une valorisation actuarielle conditionnelle.

Une valorisation actuarielle conditionnelle notée ρ_Y est une valorisation conditionnelle qui est une valorisation actuarielle dans laquelle la créance S est conditionnée par une autre Y . Par conséquent, une valorisation actuarielle conditionnelle est réduite à une valorisation actuarielle lorsque la créance S est orthogonale, c'est-à-dire $S \in \mathcal{C}^\perp$. Ainsi :

$$\rho_Y(S^\perp) = \rho(S^\perp), \quad \forall S^\perp \in \mathcal{C}^\perp \quad (2.16)$$

avec ρ la valorisation actuarielle associée

Nous donnons deux exemples de valorisations actuarielles conditionnelles :

1. **conditional standard deviation principle** : La valorisation actuarielle conditionnelle en utilisant le principe de prime avec l'écart-type est donné par

$$\rho_Y(S) = e^{-r} \left(E^{\mathbb{P}}[S|Y] + \gamma \sqrt{\text{Var}^{\mathbb{P}}(S|Y)} \right) \quad \text{pour tout } S \in \mathcal{C} \quad \text{avec } \gamma \text{ nombre reel non négatif} \quad (2.17)$$

2. **conditional cost-of-capital principle** : Dans le cas de l'utilisation du principe du coût du capital on a la valorisation actuarielle conditionnelle suivante :

$$\rho_Y(S) = e^{-r} \left(E^{\mathbb{P}}[S|Y] + i \left(\text{VaR}_p(S|Y) - E^{\mathbb{P}}[S|Y] \right) \right) \quad \text{pour tout } S \in \mathcal{C}, \quad (2.18)$$

en considérant un niveau de probabilité p et un coût du capital i , la value at Risk $\text{VaR}_p(S|Y)$

est définie au niveau de confiance p en tenant compte des informations disponibles sur les prix des actifs au moment.

3. Un autre exemple de valorisation actuarielle conditionnelle est donnée par :

$$\rho_Y(S) = e^{-r} \theta_S^f \cdot Y \quad \text{où } \theta^f \text{ est une juste couverture} \quad (2.19)$$

La notion de two step valuation est introduite par la suite et cette notion utilise la notion de valorisation actuarielle conditionnelle.

Definition 2.3.3 (*Two step valuation*)

Une valorisation ρ est une two-step valuation (TS valuation) s'il existe une valorisation actuarielle conditionnelle π_Y et une mesure martingale \mathbb{Q} telle que pour tout sinistre S , on a :

$$\rho(S) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\pi_Y[S]]$$

Théorème 2.3.1 ρ est une two-step valuation si et seulement si ρ est une fair valuation.

Preuve : Soit ρ une valorisation.

Supposons que ρ est une two-step valuation et montrons que c'est une fair valuation c'est-à-dire market-consistent et actuarially consistent.

Il est évident de voir que ρ est une fair valorisation. En effet, ρ étant une two-step valuation alors il existe une valorisation actuarielle conditionnelle associée (par définition), ce qui justifie de façon triviale le caractère actuarially-consistent de la valorisation ρ . De même, par sa définition de two-step valuation, on constate qu'il existe une mesure martingale qui est utilisé pour calculer l'espérance de la valeur actuarielle obtenue, ce qui permet simplement de dire qu'il s'agit d'une valorisation cohérente au marché.

Inversement, supposons que ρ est une fair valuation et montrons que c'est une bel et bien une two step valuation. ρ étant une fair valuation cela signifie qu'il existe une stratégie de couverture équitable θ^f (d'après le théorème 2.2.1) telle que ρ s'écrit comme une espérance actualisée sous la mesure risque neutre donnée par :

$$\begin{aligned} \rho(S) &= e^{-r} \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [\theta^f \cdot Y] & \forall S \in \mathcal{C} \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [e^{-r} \cdot \theta^f \cdot Y] \end{aligned}$$

Posons $A(Y) = e^{-r} \cdot \theta^f \cdot Y$. En vertu du théorème 2.2.1 il suit que A est une valorisation actua-

rielle conditionnelle avec θ^f qui est une couverture actuarielle car étant une couverture équitable par hypothèse. D'où ρ s'écrit :

$$\rho = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [A(Y)] \quad \text{avec } A \text{ une valorisation actuarielle conditionnelle}$$

Par conséquent ρ est une two-step valuation.

On conclut donc que toute two step valuation est une fair valuation.

Par la suite, étudions des cas particuliers de two-step valuation où les payoffs sont de type multiplicatif (financier \times actuariel).

Soit ρ une TS valuation dont le payoff est de la forme $S = S^h \times S^\perp$ avec $S^h \in \mathcal{C}^h$ et $S^\perp \in \mathcal{C}^\perp$. Ainsi la valorisation actuarielle conditionnelle π_Y associée à ce payoff est

$$\begin{aligned} \pi_Y [S^h \times S^\perp] &= S^h \times \pi_Y [S^\perp] \quad \text{car } S^h \in \mathcal{C}^h \\ &= S^h \times \pi [S^\perp] \quad \text{car } S^\perp \in \mathcal{C}^\perp \text{ et donc } \pi_Y [S^\perp] = \pi [S^\perp] \end{aligned}$$

Étant donné la valorisation obtenue ci-dessus, on applique ensuite l'espérance sous la mesure risque neutre pour obtenir la TS valuation de ce cas particulier. On obtient ainsi la TS value du payoff multiplicatif $S = S^h \times S^\perp$ donnée par

$$\begin{aligned} \rho(S^h \times S^\perp) &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S^h \times \pi [S^\perp]] \\ &= \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S^h] \times \pi [S^\perp] \quad \text{car } \pi [S^\perp] \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\rho(S^h \times S^\perp) = \mathbb{E}^{\mathbb{Q}} [S^h] \times \pi [S^\perp] \tag{2.20}$$

Nous voyons que l'approche de Brennan et Schwartz est un cas particulier de cette expression dans le cas où le principe de prime est un principe de prime de l'écart type.

Donnons un exemple illustratif proposé par DHAENE et al. 2017 pour le calcul d'une TS value.

Exemple 2.3.1 (*Calcul de TS Value*)

Dans un contexte financier-actuariel, considérons un environnement où un zero coupon et une action sont échangés. Le prix actuel du zero coupon est de $y^{(0)} = 1$ tandis que son prix à l'échéance est noté $Y^{(0)} = 1$. L'action se négocie à l'instant 0 par $y^{(1)} = \frac{1}{2}$, avec à l'échéance $t = 1$ une valeur $Y^{(1)}$ qui

est soit 0 ou 1. Outre ces actifs nous observons un indice de survie non négocié, dont la valeur à l'échéance $t = 1$, notée \mathcal{I} , est soit 0 (en cas faible survie au sein d'une population donnée), soit 1 (en cas de survie plus importante).

L'univers Ω est ainsi défini par

$$\Omega = \{(0, 0), (0, 1), (1, 0), (1, 1)\}$$

Dans chaque cas, l'élément présente un scénario potentiel. La première partie de chaque paire indique une valeur potentielle du prix de l'action $Y^{(1)}$ à l'échéance $t = 1$, tandis que la seconde partie représente une valeur possible de l'indice I à ce même instant. Supposons que la mesure de probabilité dans le monde réel, notée P , soit caractérisée par :

$$p_{00} = \frac{1}{6} \quad p_{10} = \frac{2}{6} \quad p_{01} = \frac{1}{6} \quad p_{11} = \frac{2}{6}$$

On vérifie facilement que les valeurs $Y^{(1)}$ à l'instant $t = 1$ de l'action et celles de l'index \mathcal{I} sont indépendantes.

Considérons à présent la valorisation d'une créance hybride non négociée donnée

$$S = (1 - Y^{(1)}) \times (1 - \mathcal{I})$$

Déterminons la fair value de S .

Pour débiter, le vecteur de prix des actifs à l'instant $t = 1$ est donné par $Y = (Y^{(0)}, Y^{(1)})$ et tout produit dérivé de Y , noté $f(Y)$ est hedgeable.

En effet, il est évident de trouver une couverture d'une fonction $f(Y)$ de Y c'est à dire trouver ν tel que $f(Y) = \nu \cdot Y$. On trouve aisement

$$f(Y) = f(1, 0)Y^{(0)} + (f(1, 1) - f(1, 0))Y^{(1)}.$$

En appliquant la valorisation à deux étapes selon le coût du capital est donnée par

$$\rho(S) = e^{-r} E^{\mathbb{Q}} \left(E^{\mathbb{P}}(S/Y) + i(\text{VaR}_p(S)/Y - E^{\mathbb{P}}(S/Y)) \right) \tag{2.21}$$

En prenant $r = 0$, $p = 0.995$ et $i = 0.06$ et étant donné que l'indice $I \in C^{\perp}$. En utilisant l'égalité de

Brenann et Schwartz généralisée 2.20 on obtient

$$\begin{aligned}
 \rho(S) &= E^{\mathbb{Q}} [1 - Y^{(1)}] \times \pi_Y [1 - \mathcal{I}] \\
 &= \frac{1}{2} \pi [1 - \mathcal{I}] \quad \text{le choix de } \mathbb{Q} \text{ n'est pas nécessaire car toute fonction de } Y \text{ est hedgeable} \\
 &= \frac{1}{2} e^0 \left(E^{\mathbb{P}}(1 - I) + 0.06 \left(VaR_{0.995}^{\mathbb{P}}(1 - I) - E^{\mathbb{P}}(1 - I) \right) \right) \\
 &= \frac{53}{200}
 \end{aligned}$$

On a

$$1 - I = \begin{cases} 0 & \text{avec } p_{\cdot 1} = p_{01} + p_{11} = \frac{1}{2} \\ 1 & \text{avec } p_{\cdot 0} = p_{00} + p_{10} = \frac{1}{2} \end{cases} \implies E^{\mathbb{P}}(1 - I) = \frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned}
 VaR_{0.995}^{\mathbb{P}}(1 - I) &= \inf\{x; F_{1-I}(x) \geq 0.995\} \\
 &= F_{1-I}^{-1}(0.995) \\
 &= 1
 \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
 \rho(S) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 0.06 \left(1 - \frac{1}{2} \right) \right) \\
 &= \frac{53}{200}
 \end{aligned}$$

Par suite, on trouve une stratégie de couverture $\theta_S^{TS} = (\theta_S^{(0)}, \theta_S^{(1)})$ de π_Y telle que

$$\begin{aligned}
 \theta^{TS} \cdot Y &= \pi_Y(S) \\
 \theta_S^{(0)} Y^{(0)} + \theta_S^{(1)} Y^{(1)} &= \pi_Y \left((1 - Y^{(1)}) \times (1 - \mathcal{I}) \right)
 \end{aligned}$$

Si $Y^{(1)} = 0$ alors

$$\begin{aligned}
 \pi_Y \left((1 - Y^{(1)}) \times (1 - \mathcal{I}) \right) &= \pi_Y (1 - \mathcal{I}) \\
 &= \pi (1 - \mathcal{I}) \quad \text{car } 1 - I \in \mathcal{C}^{\perp} \text{ et donc } \pi_Y = \pi.
 \end{aligned}$$

Si $Y^{(1)} = 1$ alors

$$\begin{aligned} \pi_Y \left((1 - Y^{(1)}) \times (1 - \mathcal{I}) \right) &= \pi_Y(0) \\ &= 0 \text{ car } \pi_Y \text{ est une valorisation} \end{aligned}$$

On obtient le système suivant

$$\begin{cases} \theta_S^{(0)} + \theta_S^{(1)} \times 0 = \pi(1 - \mathcal{I}) \\ \theta_S^{(0)} + \theta_S^{(1)} = 0 \end{cases}$$

ce qui donne

$$\begin{aligned} \theta^{TS} &= (\pi(1 - \mathcal{I}), -\pi(1 - \mathcal{I})) \\ \theta^{TS} &= (0.53, -0.53) \end{aligned}$$

On obtient donc que la TS couverture θ^{TS} est

$$\theta^{TS} = (0.53, -0.53)$$

par conséquent, on trouve

$$\rho(S) = \theta^{TS} \cdot y = \frac{53}{200} \quad \text{et } \theta^{TS} = (0.53, -0.53) \quad (2.22)$$

L'objectif de ce chapitre était de présenter les méthodes de tarification cohérente au marché et cohérente de façon actuarielle. Nous avons présenté des méthodes de la littérature qui combinent ces méthodes de tarification donnant ainsi naissance au méthode d'hybride. L'une des méthodes est celle de la valorisation basée sur la couverture (Hedge-based valuation) qui est une juste valorisation. L'autre méthode introduite par PELSSER et STADJE 2014 et ensuite par DHAENE et al. 2017 est celle de la valorisation à deux étapes (Two-step valuation). Nous avons montré que cette dernière est une juste valorisation et donné un exemple dans lequel on calcule la Two-step value d'un cas particulier. Le chapitre suivant utilise la méthode de Two- step valuation dans un cas pratique d'un contrat universal life.

Chapitre 3

Applications

Ce chapitre consiste à appliquer la méthode de valorisation à deux étapes dans un cas d'un contrat universal life. On va appliquer ce qu'on a vu précédemment (dans le cadre d'une période) dans un cadre continue. Il est évident que dans le cadre continue l'idée reste la même. Ainsi avec l'explication des concepts de contrat fair valuation et two step valuation, nous allons appliquer cette two step valuation dans le cadre d'un contrat universal life en tenant compte d'un partage de profit. Notons qu'en Belgique les contrats d'assurance ont souvent dans leur clause la notion de partage de profit (profit sharing en anglais). L'originalité de ce cas pratique est le fait de toucher les cashflows à plusieurs reprises et dans un cadre stochastique. Les cashflows intermédiaires sont réinvestis au taux sans risque jusqu'à la maturité. Nous considérons 3 cas de valorisations : celui du Best estimate liabilities (BE) ; ensuite le cas où on applique le two-step valuation avec les cashflows pris de façon séparés (le côté réserve en cas de vie et le côté réserve en cas de décès) ; enfin le troisième cas est celui où les cashflows sont pris simultanément.

3.1 Modèles

Dans cette section, nous faisons une présentation des différents modèles et techniques que nous utilisons dans ce cadre pratique.

3.1.1 Modélisation du risque de taux d'intérêt

Modèle de taux d'intérêt

L'estimation du taux d'intérêt selon un modèle déterministe peut être faite par un modèle de Nelson Siegel (NS). Le modèle NS est basé sur le document "training" de l'entreprise de consultance actuarielle Detralytic HAINAUT [2022](#).

Le taux forward instantané du modèle de NS est donné par

$$f(0, t) = b_0 + (b_{10} + b_{11}t) \exp(-c_1 * t) \tag{3.1}$$

Le taux zéro coupon de Nelson est par la suite donné par

$$y_m(t) = b_0 + \frac{1}{t} \frac{b_{10}}{c_1} (1 - e^{-c_1 t}) + \frac{1}{t} \frac{b_{11}}{c_1^2} (1 - (c_1 t + 1)e^{-c_1 t}) \tag{3.2}$$

L'estimation du taux d'intérêt selon un modèle déterministe peut être faite par un modèle de Hull and White (HW). Le risque de taux d'intérêt selon le modèle HW est modélisé par l'équation différentielle stochastique suivante :

$$dr_t = \kappa(\theta(t) - r_t)dt + \sigma_{hw}dW_t \tag{3.3}$$

où r_t est le taux court terme, θ_t est une fonction du temps choisi pour assurer l'ajustement des taux observés.

$$\theta_t = \frac{1}{k} \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + f(0, t) + \frac{\sigma^2}{2\kappa^2} (1 - e^{-2\kappa t}) \tag{3.4}$$

où $f(0, t)$ est le taux forward instantané.

En utilisant le modèle de Nelson Siegel on a

$$f(0, t) = b_0 + (b_{10} + b_{11}t) \exp(-c_1 * t) \tag{3.5}$$

$$\frac{\partial f(0, t)}{\partial t} = b_{11} \exp(-c_1 t) - c_1(b_{10} + b_{11}t) \exp(-c_1 t) \tag{3.6}$$

Le prix ZC de Hull and white est donné par

$$P(s, T) = E^{\mathbb{Q}} \left(e^{-\int_s^T r_u du} | \mathcal{F}_t \right) \tag{3.7}$$

$$P(s, T) = \exp(A(s, T) - B(s, T)r_s) \tag{3.8}$$

où

$$\begin{cases} B(s, T) &= \frac{1}{\kappa} (1 - e^{-\kappa(T-s)}) \\ A(s, T) &= \ln \left(\frac{P(0, T)}{P(0, s)} \right) + B(s, T)f(0, s) - \frac{\sigma^2}{\kappa} (1 - e^{-2\kappa s}) B(s, T)^2 \end{cases} \tag{3.9}$$

Calibration et représentation graphique

La calibration s'effectue comme suit

1. Nous faisons tout d'abord un bootstrat de nos taux OLO 19 Avril 2024 maturité 30 ans pour avoir des taux ZC observés.

2. Ensuite, on estime les taux zéro coupon Nelson-Siegel à partir des taux zéro coupon observés. On le procède par minimisation quadratique de l'écart entre les taux observés et ceux prédits par le modèle de Nelson Siegel. Les valeurs optimales des paramètres de Nelson Siegel donnent $(b_0, b_{10}, b_{11}, -c_1) = (0.0399, 0.0033, -0.0186, 0.4088)$. Nous obtenons un bon ajustement de nos taux prédits à partir de nos taux observés (voir figure 3.1)
3. Enfin, on estime nos taux zéro coupon Hull and white à partir des taux zéro coupon Nelson Siegel. Nous avons choisi les paramètres HW de façon réaliste en utilisant le document "training" de Detralytics HAINAUT 2022 $(\kappa_{hw}, \sigma_{hw}) = (0.8, 0.005)$. Nous avons une bonne estimation de la courbe HW prédite par rapport à celle NS (voir figure 3.2)

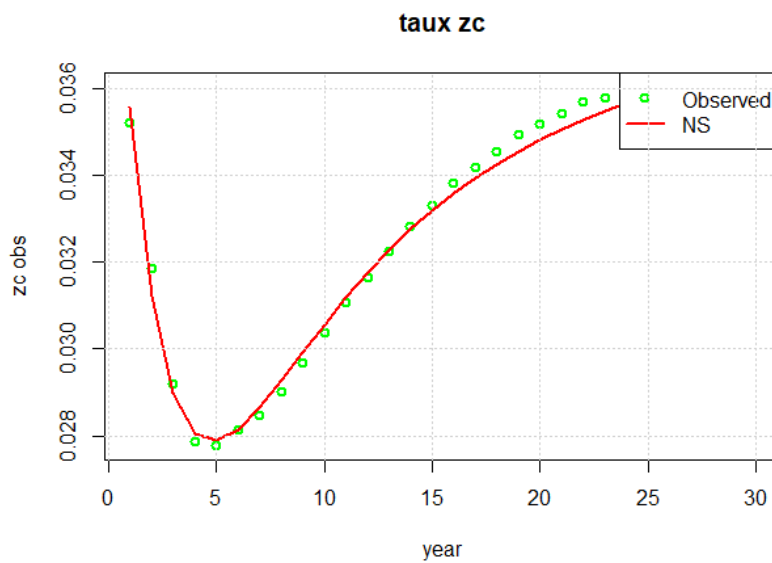


FIGURE 3.1 – Estimation des taux Zéro coupon (ZC) Nelson Siegel sur base des taux ZC observés

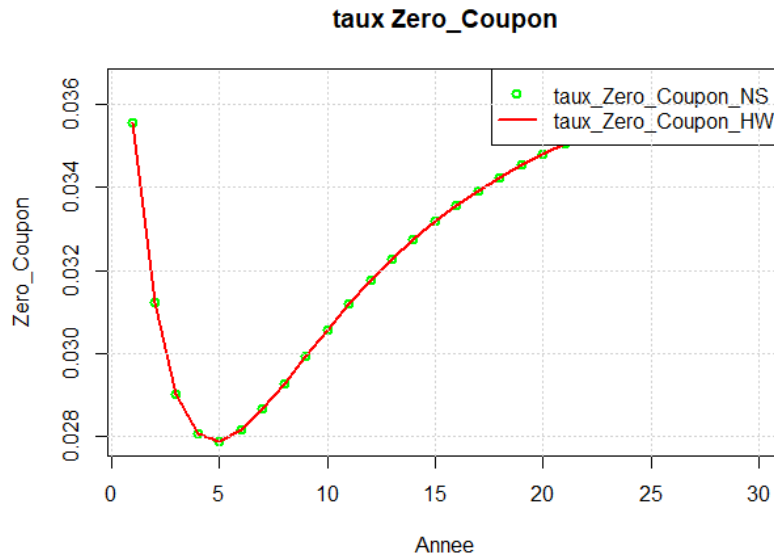


FIGURE 3.2 – Estimation des taux Zero coupon (ZC) Nelson Siegel sur base des taux ZC Nelson Siegel

3.1.2 Modélisation du risque de taux de Mortalité

Modèle

Nous utilisons le modèle de Hull and white à un facteur pour simuler nos taux de mortalité. Ce modèle propose une méthode plus robuste qui prend en compte les aspects déterministe et stochastique. Le modèle Hull-White (HW) est une dérivation du modèle de Vasicek. Les auteurs Hull et White ont introduit une moyenne à long terme comme fonction déterministe $\varepsilon(t)$ du temps afin que la force de mortalité tend à revenir vers la cible mobile $\frac{\varepsilon(t)}{b}$ avec une force de retour b . Dans cette étude, nous adopterons le modèle spécifiquement proposé par FADDOUA et DEVOLDER 2019

$$d\mu_x(t) = (\varepsilon(t) - b\mu_x(t))dt + \sigma_\mu dW_t \tag{3.10}$$

avec $b > 0$, $\sigma_\mu > 0$, W_t un mouvement brownien standard, ε une fonction déterministe.

Dans notre étude, nous choisissons le modèle de Gompertz. Ce dernier propose que le taux de mortalité augmente de façon exponentielle avec l'age en d'autres termes on a :

$$\begin{aligned} \mu_x(t) &= \mu_{x+t} = Ae^{B(x+t)} \\ &= Ae^{Bx} e^{Bt} \\ &= \mu_x(0) e^{Bt} \end{aligned}$$

Nous choisissons ainsi la fonction déterministe $\varepsilon = Ae^{Bt}$ avec $A > 0, B > 0$. L'équation de Hull and white 3.10 devient

$$d\mu_x(t) = b \left(\frac{A}{b} e^{Bt} - \mu_x(t) \right) dt + \sigma_\mu dW_t \tag{3.11}$$

Comme le modèle de Hull-White est gaussien, il est relativement simple de déterminer l'expression de la probabilité de survie en analysant sa distribution. De plus, nous pouvons appliquer le cadre de l'analyse numérique des équations différentielles ordinaires (EDO) pour obtenir le système d'équations suivant pour $\alpha(t, T)$ et $\beta(t, T)$

$$\begin{cases} \frac{d\alpha(t,T)}{dt} = \beta(t, T)\varepsilon(t) - \frac{1}{2}\sigma^2\beta^2 \\ \frac{d\beta(t,T)}{dt} = \beta(t, T)b - 1 \end{cases}$$

Avec les conditions au bord $\alpha(T, T) = 0, \beta(T, T) = 0$.

$\alpha(t; T)$ et $\beta(t; T)$ sont données par :

$$\alpha(t; T) = \frac{A}{b} \left[e^{-bT} \frac{e^{(B+b)T} - e^{(B+b)t}}{B+b} - \frac{e^{BT} - e^{Bt}}{B} \right] - \frac{\sigma^2}{2b^2} \left[\frac{1}{b} (1 - e^{-b(T-t)}) - T + t \right] - \frac{\sigma^2}{4b^3} (1 - e^{-b(T-t)})^2 \tag{3.12}$$

$$\beta(t; T) = \frac{1}{b} (1 - e^{-b(T-t)}) \tag{3.13}$$

La force de mortalité dans le modèle Hull-White est donnée par :

$$\mu_x(t) = \mu_x(s)e^{-b(t-s)} + \frac{A}{b+B} \left(e^{(Bt)-e^{(Bs-b(t-s))}} \right) + \sigma e^{-bt} \int_s^t e^{bu} dw(u)$$

Conditionnellement à $F(s)$, l'espérance et la variance de $\mu_x(t)$ sont :

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mu_x(t)|F(s)] = \mu_x(s)e^{-b(t-s)} + \frac{A}{b+B} \left(e^{(Bt)-e^{(Bs-b(t-s))}} \right)$$

$$\text{Var}[\mu_x(t)|F(s)] = \frac{\sigma^2}{2b} (1 - e^{-2b(t-s)})$$

La probabilité de survie est donnée par

$$S(t, T) = E^{\mathbb{P}} \left(\exp \left(\int_t^T -\mu_x(s) ds \right) | \mathcal{F}_t \right) \tag{3.14}$$

Comme il s'agit d'un modèle affine alors la probabilité de survie donne :

$$S(t, T) = e^{\alpha(t,T) - \beta(t,T)\mu_x(t)} \tag{3.15}$$

avec les expressions de α et β données respectivement par les équations 3.12 et 3.13.

calibration et simulation

Tout d’abord, nous choisissons notre âge initial $x = 40$ ans et nous faisons une étude sur 25 ans. Nous effectuons notre calibration sur la table de mortalité prospective 2015 pour les femmes de l’institut des actuaires en Belgique (IABE). La procédure est la suivante :

Nous visons à estimer le vecteur de paramètres $\delta = (A, B, \sigma, b)$ par la méthode des moindres carrés pour ajuster la fonction $S(t, T)$. La minimisation des erreurs de moindres carrés est réalisée en comparant les probabilités de survies calculées $S(t, T)$, aux probabilités de survies observées, $\tilde{S}(t, T)$, autour desquelles nous souhaitons calibrer notre modèle stochastique. Notre fonction d’erreur quadratique associée à cette minimisation est définie comme suit :

$$R = \sum_{j=0}^n \left(S(t_j, T) - \tilde{S}(t_j, T) \right)^2 \tag{3.16}$$

Nous minimisons cette erreur sur δ ($\min_{\delta} R$) en choisissant naturellement des valeurs initiales adéquates au bon ajustement.

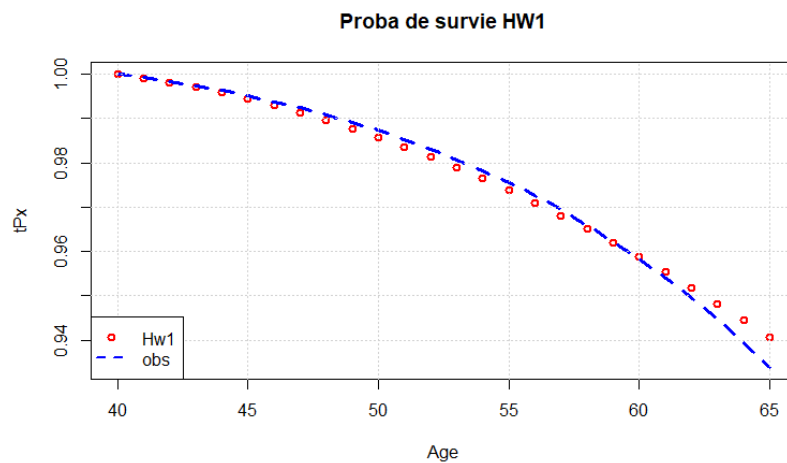


FIGURE 3.3 – Estimation des probabilités de survie HW sur base de celles observées

3.1.3 Modélisation du fonds

Modèle

Le fond ici suit un mouvement brownien géométrique et il est régi par l’équation différentielle stochastique (EDS)

$$dS_t = r_t S_t dt + \sigma S_t dW_t^Q \tag{3.17}$$

avec

- S_t : la valeur de l'action à la date t ;
- $r(t)$: le taux court instantané ;
- σ : la volatilité constante de l'action ;
- $w(t)$: un mouvement brownien standard sous Q .

Le rendement du fond ici est donné par $RetFund = \frac{S_t - S_{t-1}}{S_{t-1}}$

Le taux instantané utilisé est issu des modèles de taux présentés dans les sections précédentes et est donc stochastique. Cette propriété est conçue pour assurer qu'il n'y ait aucune opportunité d'arbitrage dans la tarification modélisée.

Simulation

Nous discrétisons en utilisant Euler notre EDS et nous obtenons :

$$S_t = S_{t-1} + r_{t-1} \cdot S_{t-1} \cdot \Delta_t + \sigma \cdot S_{t-1} \cdot \sqrt{\Delta_t} \cdot Z \quad (3.18)$$

avec $\Delta_t = 1$ an le pas de discrétisation, Z suivant une loi normale standard.

Dans les modèles financiers stochastiques, la simulation des taux d'intérêt et de l'actif risqué (fond) de façon conjointe fait appel à une corrélation. Ici, nous prenons le coefficient de corrélation $\rho_{sr} = 2\%$. Soit W_r and W_s les mouvements browniens associés respectivement au taux sans risque r et au fond S . La relation entre le mouvement brownien du prix de l'actif S et les mouvements browniens du taux d'intérêt r et d'un autre mouvement indépendant w_{S1} est donnée par :

$$W_S = \rho W_r + \sqrt{1 - \rho^2} W_{S1} \quad (3.19)$$

où W_{S1} est independant de W_r . On a aussi $\lambda_S = \frac{\mu_s - \text{mean}(\tau_{ZC})}{\sigma_s}$ qui est la prime de risque par unité de risque pour l'actif risqué S où $\mu_S = 4.5\%$ est le rendement de l'actif S , $\text{mean}(\tau_{ZC})$ taux zéro coupon observé.

Ainsi la simulation conjointe est :

$$r[n, k] = \kappa (\theta_t(k) - r[n, k - 1]) \Delta t + r[n, k - 1] + \sigma \sqrt{\Delta t} W_r[k] \quad (3.20)$$

$$S[n, k] = S[n, k - 1] \left((1 + r[n, k] \Delta t) + \sigma_s \left(\rho \sqrt{\Delta t} W_r[k] + \sqrt{1 - \rho^2} \sqrt{\Delta t} W_{S1}[k] + \lambda_S \Delta t \right) \right) \quad (3.21)$$

où n est le nombre de simulation et k l'instant compris entre 0 et la maturité.

3.1.4 Portefeuille

Présentation

N contrats Universal life UL avec $Res_0 = 1000$ et maturité T . L'âge des assurés est de $x = 40$ ans. Nous faisons 2000 simulations de Monte-Carlo et constate qu'au-delà les valeurs SE rapprochent en moyenne.

La réserve des UL products croît avec le taux garanti g et un taux de PS :

$$Res_t = Res_{t-1} \times (1 + g + \%PS_t) \quad (3.22)$$

Où

$$\%PS_t = a \times \max(RetFunds_{[t-1;t]} - g - d; 0) \quad (3.23)$$

On a

$$H_T(\omega) = Res_T(\omega) \times N_T^a(\omega) + \sum_{t=1}^{T-1} Res_t(\omega) \times N_{[t-1;t]}^d(\omega) \times \frac{B_T(\omega)}{B_t(\omega)} \quad \text{pour} \quad (3.24)$$

Où $N_T^a(\omega)$ est le nombre de personnes survivantes à maturité et $N_{[t-1;t]}^d(\omega)$ est le nombre de décès entre $t - 1$ et t .

Les paiements intermédiaires sont composés jusqu'à la date terminale T .

Les différents modèles que nous allons utiliser pour nos différents facteurs importants sont :

1. Modèle de mortalité stochastique : Modèle de type Hull and White pour les taux instantanés de mortalité .
2. Modèle de marché financier : Taux d'intérêt stochastique de type Hull and White.
3. Un fonds de type mouvement brownien géométrique à volatilité constante.

Étapes à suivre pour les simulations

1. Simulation des taux instantanés de mortalité sur base d'un schema d'Euler
2. Simulation des nombres de déces jusqu'à maturité selon une loi binomiale

$$N_{[t-1;t]}^d(\omega) \text{ suit } Bin\left(N_{t-1}^a; 1 - e^{-\mu_{x+t-1}\Delta}\right) \quad (3.25)$$

3. Simulation du taux sans risque et du fond
4. Simulation des reserves étant donné le profit sharing et le return du fonds.

Par la suite nous présentons 3 cas de valorisation que nous évaluons numériquement dans la prochaine section

Différents cas de valorisations

Nous considérons donc 3 cas de valorisation : le Best Estimate Liabilities, le two step valuation V1 où les cashflows sont pris séparément et le two step valuation V2 où les cashflows sont pris simultanément.

1. Cas 1 : Best Estimate (BE)

$$\begin{aligned} BEL &= E^{Q \times P} \left[\frac{H_T(w)}{B_T} \right] \\ &= E^Q \left[\frac{Res_T(w)}{B_T} \right] E^P [N_T^a(w)] + \sum_{t=1}^T E^Q \left[\frac{Res_t(w)}{B_t} \right] E^P [N_{[t-1,t]}^d(w)] \end{aligned}$$

2. Cas 2 : Two step valuation avec principe de prime standard déviation mais avec des cashflows séparés

$$V1 = E^Q \left[\pi^a \left(\frac{Res_T(w) N_T^a(w)}{B_T} \right) | \mathcal{F}_T \right] + \sum_{t=1}^T E^Q \left[\pi^a \left(\frac{Res_t(w) N_{[t-1,t]}^d(w) \frac{B_T}{B_t}}{B_T} \right) | \mathcal{F}_T \right]$$

En utilisant le principe de prime de l'écart-type ainsi que l'indépendance par rapport à la filtration \mathbb{F}_T on obtient :

$$\begin{aligned} V1 &= E^Q \left[\frac{Res_T(w)}{B_T} \right] E^P [N_T^a(w)] + \sum_{t=1}^T E^Q \left[\frac{Res_t(w)}{B_t} \right] E^P [N_{[t-1,t]}^d(w)] \\ &+ \alpha \times E^Q \left[\frac{Res_T(w)}{B_T} \right] \times \sqrt{Var [N_T^a(w)]} \\ &+ \alpha \times \sum_{t=1}^T E^Q \left[\frac{Res_t(w)}{B_t} \right] \times \sqrt{Var [N_{[t-1,t]}^d(w)]} \end{aligned}$$

3. Cas 3 : Two step valuation avec principe de prime standard déviation, mais avec tous les cashflows pris simultanément.

$$V^2 = E^Q \left[\pi^a \left(\frac{Res_T(w) N_T^a(w)}{B_T} + \sum_{t=1}^T \frac{Res_t(w) N_{[t-1,t]}^d(w) \frac{B_T}{B_t}}{B_t} \right) | \mathcal{F}_T \right]$$

En utilisant le principe de l'écart-type ainsi que l'indépendance par rapport à la filtration \mathbb{F}_T on obtient :

$$\begin{aligned} V^2 &= E^Q \left[\frac{Res_T(w)}{B_T} \right] E^P [N_T^a(w)] + \sum_{t=1}^T E^Q \left[\frac{Res_t(w)}{B_t} \right] E^P [N_{[t-1,t]}^d(w)] \\ &+ \alpha E^Q \left[\sqrt{\left(\frac{Res_T(w)}{B_T} \right)^2 Var [N_T^a(w)] + \sum_{t=1}^T \left(\frac{Res_t(w)}{B_t} \right)^2 Var [N_{[t-1,t]}^d(w)] + cov(w)} \right] \end{aligned}$$

avec

$$cov(w) = \sum_{t=1}^T \frac{Res_T(w)}{B_T} \frac{Res_t(w)}{B_t} covar \left(N_T^a(w); N_{[t-1,t]}^d(w) \right) + \sum_{t,s,s!=t} \frac{Res_s(w)}{B_s} \frac{Res_t(w)}{B_t} covar \left(N_{[s-1,s]}^d(w); N_{[t-1,t]}^d(w); \right)$$

Nous évaluons ces termes par simulation.

Choix du nombre de simulations et confirmation de la convergence des résultats

Pour la convergence de nos résultats nous prenons notre nombre de simulation (Nsim) à 10000. Pour confirmer cela nous faisons une étude de sensibilité des écarts relatifs de V1 par rapport à BE (en % du BE), V2 par rapport à BE (en % du BE) et de V1 par rapport à V2 (en % de V2).

On conclut qu'il y a des écarts très faibles ou alors négligeables. Donc Nsim=10000 est suffisamment grand pour assurer la convergence.

	BE	V1	V2	ecart%_V1BE	ecart%_V2BE	ecart%_V1V2
10000	2091488.99	2091952.59	2091665.76	0.02	0.01	0.01
11000	2091115.60	2091580.42	2091293.39	0.02	0.01	0.01
12000	2093778.65	2094244.45	2093955.74	0.02	0.01	0.01

TABLE 3.1 – Sensibilité par rapport au nombre de simulations et comparaisons des écarts avec Tf=5, $\sigma = 0.1$, pop=2000

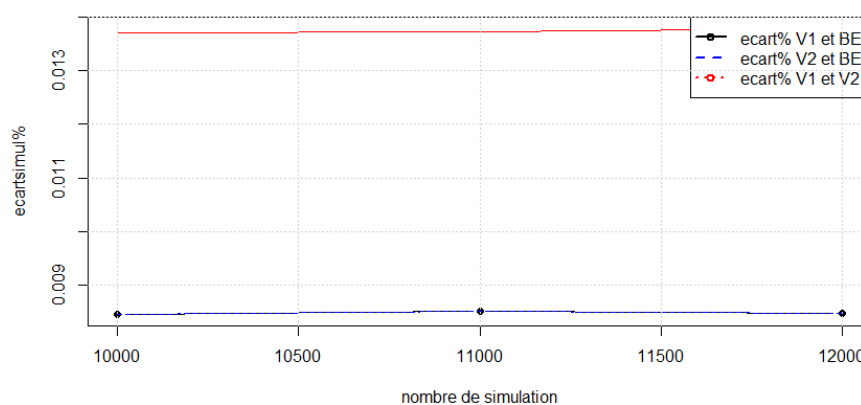


FIGURE 3.4 – Sensibilité par rapport au portefeuille et Comparaison des écarts avec Tf=5, $\sigma = 0.1$, pop=2000

Dans la prochaine section, nous étudions l'impact des différentes approches de valorisations, ceci pour différentes valeurs de certains facteurs pertinents (nombres d'assurés, maturités, volatilité du fonds). Nous faisons ainsi la sensibilité par rapport au portefeuille d'assurés, celle par rapport à la volatilité

ainsi que celle par la maturité des contrats UL. Pour ce faire, nous calculons des écarts relatifs de $V1$ et $V2$ par rapport à BE (en % du BE) ainsi que l'écart entre $V1$ et $V2$ (en % de $V2$)

3.2 Calibration et résultats numériques

3.2.1 Étude des sensibilités des différentes valorisations par rapport au portefeuille d'assurés

	BE	V1	V2	ecart%_V1BE	ecart%_V2BE	ecart%_V1V2
10	9532.06	9636.38	9556.93	1.09	0.26	0.83
100	95521.82	95854.08	95599.27	0.35	0.08	0.27
500	477428.97	478176.90	477619.88	0.16	0.04	0.12
700	667021.97	667900.62	667260.97	0.13	0.04	0.10
900	858661.99	859668.49	858940.50	0.12	0.03	0.08
1100	1048009.80	1049127.56	1048321.74	0.11	0.03	0.08
1300	1239344.36	1240568.79	1239688.98	0.10	0.03	0.07
1500	1429996.24	1431313.14	1430380.39	0.09	0.03	0.07
1700	1619663.53	1621065.82	1620093.86	0.09	0.03	0.06
1900	1812471.56	1813965.48	1812935.79	0.08	0.03	0.06
2100	2003164.78	2004749.27	2003666.92	0.08	0.03	0.05
2300	2194365.81	2196021.12	2194897.04	0.08	0.02	0.05
2500	2381854.64	2383584.22	2382415.32	0.07	0.02	0.05
2700	2574696.70	2576521.47	2575305.60	0.07	0.02	0.05
2900	2762143.09	2764030.27	2762781.79	0.07	0.02	0.05
3100	2949990.77	2951935.00	2950635.86	0.07	0.02	0.04
3300	3148682.01	3150707.95	3149384.73	0.06	0.02	0.04
3500	3335129.13	3337220.80	3335863.36	0.06	0.02	0.04
3700	3524317.10	3526481.61	3525090.62	0.06	0.02	0.04
3900	3715514.26	3717755.08	3716315.26	0.06	0.02	0.04
4100	3911911.72	3914205.17	3912733.82	0.06	0.02	0.04
4300	4101186.58	4103546.35	4102054.51	0.06	0.02	0.04
4500	4290401.49	4292814.74	4291304.91	0.06	0.02	0.04
4700	4479263.99	4481751.93	4480208.22	0.06	0.02	0.03
4900	4670686.72	4673219.59	4671641.23	0.05	0.02	0.03

TABLE 3.2 – Sensibilité des valorisations par rapport au portefeuille avec $T=15$ et $\sigma_S=0.1$

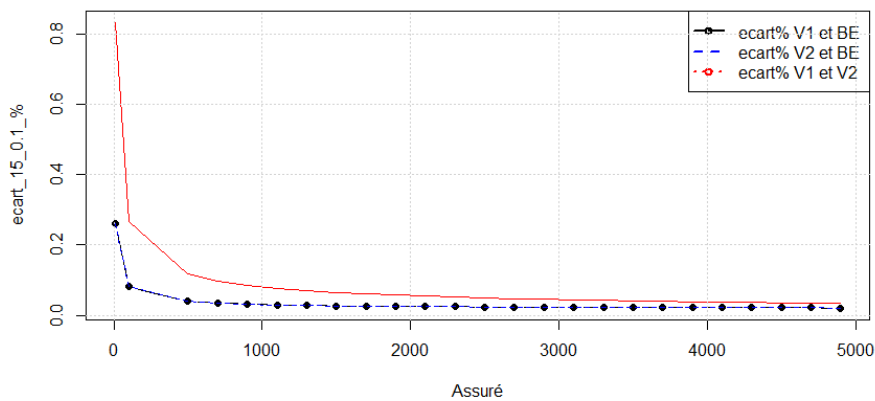


FIGURE 3.5 – Sensibilité par rapport au portefeuille et Comparaison des écarts avec $T=15$ $\sigma = 0.1$

En fixant l'échéance du contrat $T = 15$ et la volatilité du fond $\sigma = 0.1$, il ressort que :

- Le Best estimate, et les deux fair values évoluent positivement avec la taille de la population.
- Les écarts relatifs (en pourcentage du BE) entre ces différentes valorisations décroissent avec la taille du portefeuille comme le montre la figure 3.5.

	BE	V1	V2	ecart%_V1BE	ecart%_V2BE	ecart%_V1V2
10	10451.23	10481.47	10462.66	0.29	0.11	0.18
100	104556.67	104656.69	104593.20	0.10	0.03	0.06
500	523064.09	523292.92	523149.66	0.04	0.02	0.03
700	732342.94	732614.51	732443.72	0.04	0.01	0.02
900	941275.82	941581.04	941392.94	0.03	0.01	0.02
1100	1149983.38	1150325.62	1150110.09	0.03	0.01	0.02
1300	1360419.13	1360790.34	1360558.54	0.03	0.01	0.02
1500	1569890.31	1570290.90	1570042.78	0.03	0.01	0.02
1700	1779133.14	1779555.59	1779292.62	0.02	0.01	0.01
1900	1986503.52	1986954.64	1986672.45	0.02	0.01	0.01
2100	2195893.78	2196373.85	2196076.53	0.02	0.01	0.01
2300	2405286.50	2405794.19	2405484.09	0.02	0.01	0.01
2500	2612970.03	2613490.12	2613168.89	0.02	0.01	0.01
2700	2824055.29	2824599.23	2824263.30	0.02	0.01	0.01
2900	3037078.25	3037634.66	3037292.06	0.02	0.01	0.01
3100	3240019.08	3240601.06	3240241.06	0.02	0.01	0.01
3300	3451916.59	3452528.51	3452153.70	0.02	0.01	0.01
3500	3663658.86	3664281.99	3663900.44	0.02	0.01	0.01
3700	3865234.66	3865871.23	3865482.98	0.02	0.01	0.01
3900	4084925.06	4085585.39	4085183.43	0.02	0.01	0.01
4100	4287589.57	4288281.15	4287862.00	0.02	0.01	0.01
4300	4505406.00	4506107.49	4505679.22	0.02	0.01	0.01
4500	4703316.25	4704029.01	4703595.62	0.02	0.01	0.01
4700	4919613.22	4920355.18	4919904.51	0.02	0.01	0.01
4900	5127689.20	5128436.11	5127986.41	0.01	0.01	0.01

TABLE 3.3 – Sensibilité par rapport au portefeuille et Comparaison des écarts relatifs avec T=5 $\sigma = 0.1$

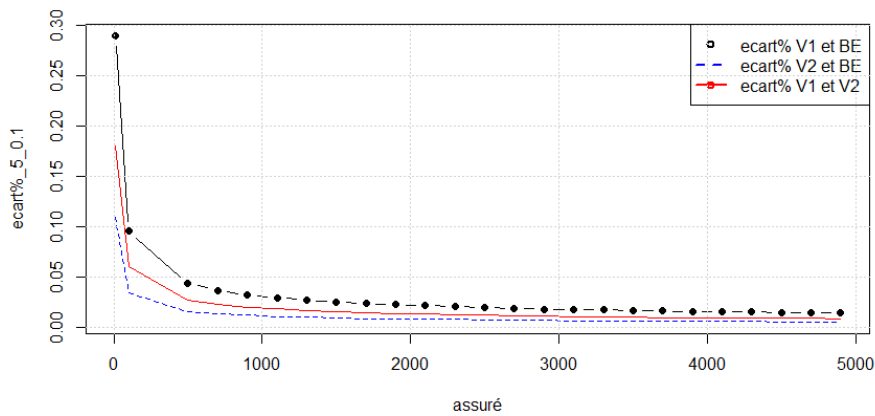


FIGURE 3.6 – Sensibilité par rapport au portefeuille et Comparaison des écarts avec T=5 $\sigma = 0.1$

Dans ce cas, nous observons qu’avec une échéance très courte (T=5), V2 s’écarte moins vite du

Best estimate que de V1. dans le cas où la maturité du contrat passe à $T = 5$, nous avons encore la valorisation V1 toujours au-dessus de V2, mais dans ce cas, nous avons une décroissance de l'écart relatif entre V1 et V2 au fur et à mesure que le portefeuille devient large. On pourrait voir l'importance d'une valorisation précise dans le contexte de grands portefeuilles d'assurances.

	BE	V1	V2	ecart%_V1BE	ecart%_V2BE	ecart%_V1V2
10	10088.56	10152.22	10106.84	0.63	0.18	0.45
100	101048.83	101264.62	101110.70	0.21	0.06	0.15
500	505011.13	505487.68	505147.23	0.09	0.03	0.07
700	705923.41	706477.71	706091.93	0.08	0.02	0.05
900	908080.45	908723.16	908272.22	0.07	0.02	0.05
1100	1110801.10	1111510.53	1111018.99	0.06	0.02	0.04
1300	1311625.14	1312398.83	1311864.91	0.06	0.02	0.04
1500	1513196.47	1514038.16	1513461.31	0.06	0.02	0.04
1700	1717848.40	1718739.51	1718132.73	0.05	0.02	0.04
1900	1917677.23	1918623.74	1917985.69	0.05	0.02	0.03
2100	2115997.01	2116998.03	2116327.33	0.05	0.02	0.03
2300	2321368.30	2322421.75	2321719.04	0.05	0.02	0.03
2500	2524261.11	2525364.35	2524641.74	0.04	0.02	0.03
2700	2726381.95	2727537.17	2726785.72	0.04	0.01	0.03
2900	2931509.19	2932692.29	2931914.14	0.04	0.01	0.03
3100	3133463.18	3134690.67	3133888.49	0.04	0.01	0.03
3300	3332450.01	3333719.63	3332903.03	0.04	0.01	0.02
3500	3534061.84	3535388.06	3534530.53	0.04	0.01	0.02
3700	3731922.45	3733290.17	3732418.02	0.04	0.01	0.02
3900	3941084.34	3942491.96	3941597.15	0.04	0.01	0.02
4100	4132545.17	4133997.26	4133088.20	0.04	0.01	0.02
4300	4342828.23	4344315.51	4343368.26	0.03	0.01	0.02
4500	4554677.02	4556192.68	4555247.94	0.03	0.01	0.02
4700	4752140.06	4753720.05	4752714.28	0.03	0.01	0.02
4900	4954970.58	4956595.40	4955595.53	0.03	0.01	0.02

TABLE 3.4 – Sensibilité par rapport au portefeuille et Comparaison des écarts avec $T=10$ $\sigma = 0.1$

Ici ($T=10$, $\sigma = 0.1$), L'écart relatif de la valorisation V1 avec le BE illustre une décroissance en fonction du portefeuille d'assurés. Quant à l'écart de V2 avec BE, il décroît, mais pas au même rythme que celui de V1. L'écart relatif de V1 avec BE est plus grand que celui de V2. Ainsi, on voit que la prise en compte des cashflows simultanément semble apporter une réduction de l'incertitude et les variations, conduisant ainsi à une valorisation relativement plus proche du BE.

Dans le cas où on fixe $T=10$ et $\sigma = 0.2$, le résultat est similaire que le cas $T=10$ et $\sigma = 0.1$. En effet, on voit que la courbe des écarts relatifs de V1 avec le Best Estimate BE décroît en fonction du nombre d'assurés mais ces écarts sont moins grands que ceux de V1 avec BE.

Avec une échéance plus longue l'impact de l'augmentation de la population accentue encore plus les différentes valorisations et les différents écarts entre elles. Ainsi, la hausse de la taille de la population

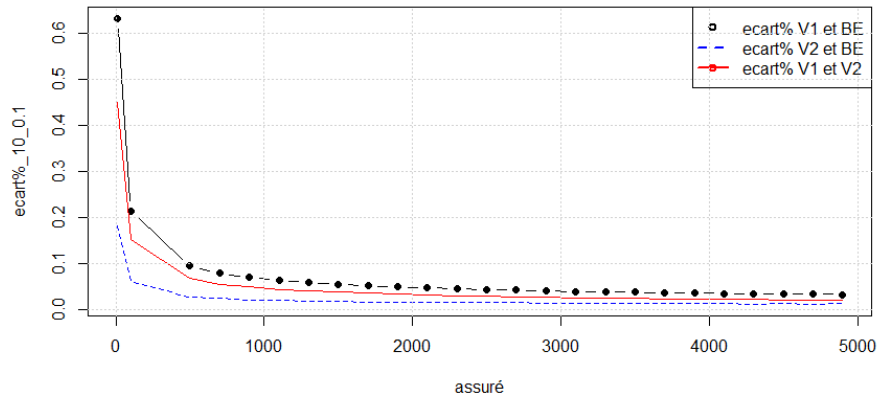


FIGURE 3.7 – Sensibilité par rapport au portefeuille et Comparaison des écarts avec $T=10$ $\sigma = 0.1$

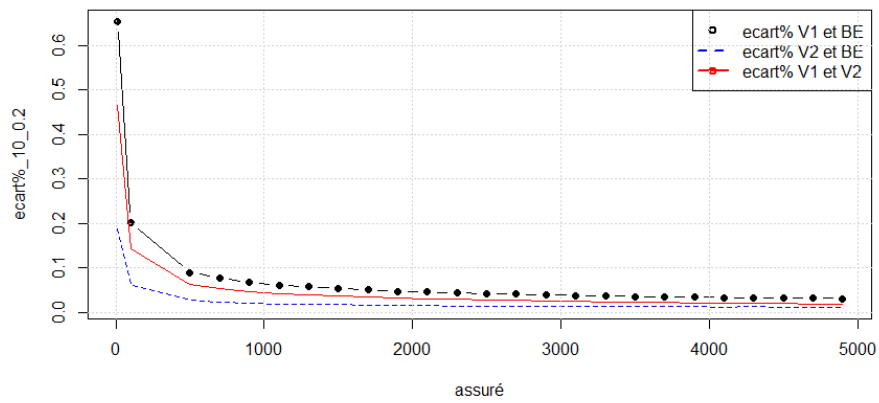


FIGURE 3.8 – Sensibilité par rapport au portefeuille et Comparaison des écarts avec $T=10$ $\sigma = 0.2$

conduit à la hausse des différentes fair values.

	BE	V1	V2	ecart%_V1BE	ecart%_V2BE	ecart%_V1V2
10	11041.75	11113.84	11062.44	0.65	0.19	0.46
100	109971.34	110194.11	110037.04	0.20	0.06	0.14
500	550008.40	550502.44	550155.59	0.09	0.03	0.06
700	770214.17	770807.74	770396.24	0.08	0.02	0.05
900	990864.70	991537.64	991074.20	0.07	0.02	0.05
1100	1208722.02	1209468.29	1208949.66	0.06	0.02	0.04
1300	1430333.56	1431157.67	1430603.10	0.06	0.02	0.04
1500	1652430.24	1653320.64	1652720.76	0.05	0.02	0.04
1700	1873283.90	1874225.68	1873590.52	0.05	0.02	0.03
1900	2082195.86	2083186.26	2082523.87	0.05	0.02	0.03
2100	2315907.34	2316961.88	2316262.66	0.05	0.02	0.03
2300	2530889.14	2531998.15	2531261.66	0.04	0.01	0.03
2500	2748173.65	2749326.16	2748570.13	0.04	0.01	0.03
2700	2965120.04	2966331.72	2965536.09	0.04	0.01	0.03
2900	3195446.10	3196689.39	3195873.88	0.04	0.01	0.03
3100	3410318.74	3411628.12	3410790.77	0.04	0.01	0.02
3300	3639606.51	3640954.74	3640098.68	0.04	0.01	0.02
3500	3849677.84	3851060.95	3850186.81	0.04	0.01	0.02
3700	4069481.60	4070925.95	4070011.51	0.04	0.01	0.02
3900	4296142.32	4297636.45	4296698.77	0.03	0.01	0.02
4100	4509089.94	4510585.63	4509653.99	0.03	0.01	0.02
4300	4721886.36	4723471.06	4722481.68	0.03	0.01	0.02
4500	4955540.24	4957137.70	4956141.34	0.03	0.01	0.02
4700	5164976.11	5166619.25	5165609.25	0.03	0.01	0.02
4900	5384558.07	5386243.40	5385213.66	0.03	0.01	0.02

TABLE 3.5 – Sensibilité par rapport au portefeuille et Comparaison des écarts relatifs avec T=10 $\sigma = 0.2$

3.2.2 Sensibilité des valorisations par rapport à la maturité des contrats

	BE	V1	V2	ecart%_V1BE	ecart%_V2BE	ecart%_V1V2
2	1030767.15	1030907.78	1030832.49	0.01	0.01	0.01
3	1041458.90	1041655.36	1041542.24	0.02	0.01	0.01
5	1046850.85	1047173.96	1046971.59	0.03	0.01	0.02
10	1008897.02	1009566.65	1009107.71	0.07	0.02	0.05
15	952571.74	953630.87	952861.61	0.11	0.03	0.08
20	898508.05	899985.41	898890.85	0.16	0.04	0.12
25	844704.98	846588.50	845172.65	0.22	0.06	0.17
30	794704.63	796990.53	795238.09	0.29	0.07	0.22

TABLE 3.6 – Sensibilité par rapport à la maturité et Comparaison des écarts relatifs avec $\sigma = 0.1$ et pop=1000

Ici ($\sigma = 0.1$ et pop=1000), on observe un comportement différent à celui de la population. Ici Les valorisations et les écarts relatifs évoluent en sens inverses. En effet, les valorisations décroissent lorsque l'échéance augmente tandis que les écarts relatifs augmentent.

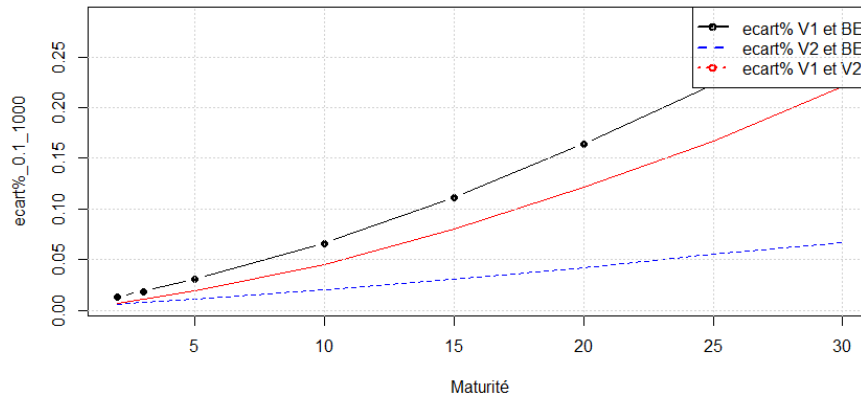


FIGURE 3.9 – Sensibilité par rapport à la maturité et Comparaison des écarts avec $\sigma = 0.1$ et $\text{pop}=1000$

	BE	V1	V2	ecart%_V1BE	ecart%_V2BE	ecart%_V1V2
2	1038337.91	1038478.14	1038403.28	0.01	0.01	0.01
3	1056802.38	1057001.21	1056887.69	0.02	0.01	0.01
5	1067242.66	1067572.82	1067366.91	0.03	0.01	0.02
10	1053626.18	1054310.53	1053832.93	0.06	0.02	0.05
15	1017039.96	1018134.53	1017349.28	0.11	0.03	0.08
20	968319.72	969850.34	968718.17	0.16	0.04	0.12
25	929900.45	931885.55	930392.96	0.21	0.05	0.16
30	895559.87	898021.87	896164.98	0.27	0.07	0.21

TABLE 3.7 – Sensibilité par rapport à la maturité et Comparaison des écarts relatifs avec $\sigma = 0.15$ et $\text{pop}=1000$

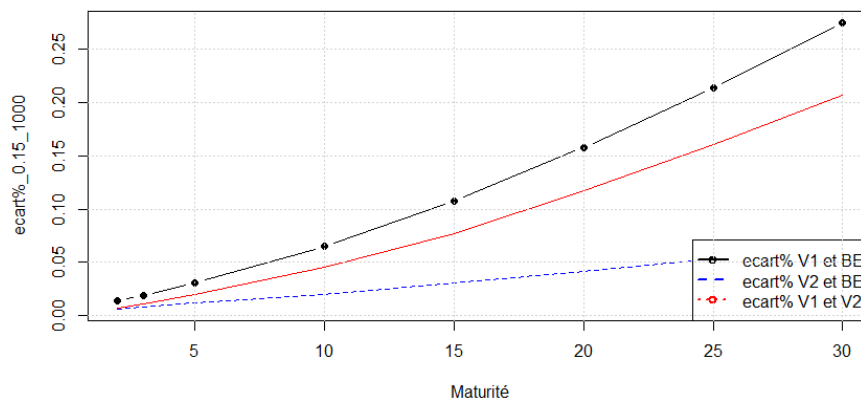


FIGURE 3.10 – Sensibilité par rapport à la maturité et Comparaison des écarts relatifs avec $\sigma = 0.15$ et $\text{pop}=1000$

Nous constatons dans le cas de la sensibilité par rapport à la maturité de ce contrat que pour les cas $\sigma = 0.1$, $\sigma = 0.15$, $\sigma = 0.2$ avec une population de 1000 assurés on constate qu'on a une croissance des écarts entre les deux valorisations V1 et V2. A partir de la maturité $T = 20$ écart relatif de V2 par rapport à BE semble tendre plus ou moins vers 0.05%. Dans ces cas, nous avons toujours

la valorisation V1 relativement au-dessus de celle V2.

	BE	V1	V2	ecart%_V1BE	ecart%_V2BE	ecart%_V1V2
2	104531.17	104578.00	104552.91	0.04	0.02	0.02
3	106839.93	106905.26	106868.35	0.06	0.03	0.03
5	109421.24	109528.21	109460.51	0.10	0.04	0.06
10	109694.44	109914.32	109758.25	0.20	0.06	0.14
15	107737.39	108092.80	107824.59	0.33	0.08	0.25
20	105143.75	105630.28	105250.66	0.46	0.10	0.36
25	102798.82	103450.70	102924.21	0.63	0.12	0.51
30	99735.12	100543.54	99882.71	0.81	0.15	0.66

TABLE 3.8 – Sensibilité par rapport à la maturité et Comparaison des écarts relatifs avec $\sigma = 0.2$ et $\text{pop}=100$

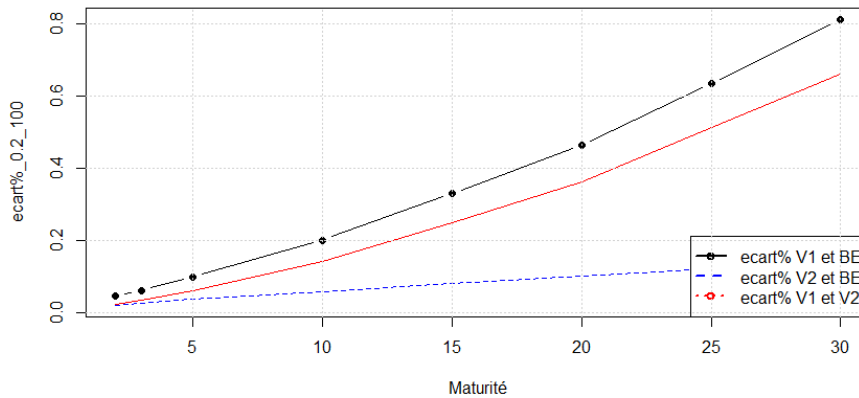


FIGURE 3.11 – Sensibilité par rapport à la maturité et Comparaison des écarts relatifs avec $\sigma = 0.2$ et $\text{pop}=100$

Dans ce cas ($\sigma = 0.2$ et $\text{pop}=100$) on observe une croissance de l'écart relatif entre V2 et BE au fur et à mesure que la maturité du contrat est grande et cet écart relatif semble tendre vers 0.15% lorsque nous sommes à 30 ans de maturité

3.2.3 Étude de sensibilité des valorisations par rapport à la volatilité du fond

	BE	V1	V2	ecart%_V1BE	ecart%_V2BE	ecart%_V1V2
0.01	868244.42	869245.33	868521.04	0.12	0.03	0.08
0.03	878709.73	879726.42	878983.34	0.12	0.03	0.08
0.05	899131.78	900160.72	899415.01	0.11	0.03	0.08
0.07	920274.77	921320.77	920560.97	0.11	0.03	0.08
0.09	942273.05	943322.46	942565.32	0.11	0.03	0.08
0.11	964258.46	965327.88	964556.08	0.11	0.03	0.08
0.13	992079.65	993155.29	992375.13	0.11	0.03	0.08
0.15	1016990.88	1018085.32	1017294.57	0.11	0.03	0.08
0.17	1035961.11	1037074.14	1036270.81	0.11	0.03	0.08
0.19	1065538.90	1066677.56	1065864.74	0.11	0.03	0.08

TABLE 3.9 – Sensibilité par rapport à la volatilité et Comparaison des écarts relatifs avec T=15 et pop=1000

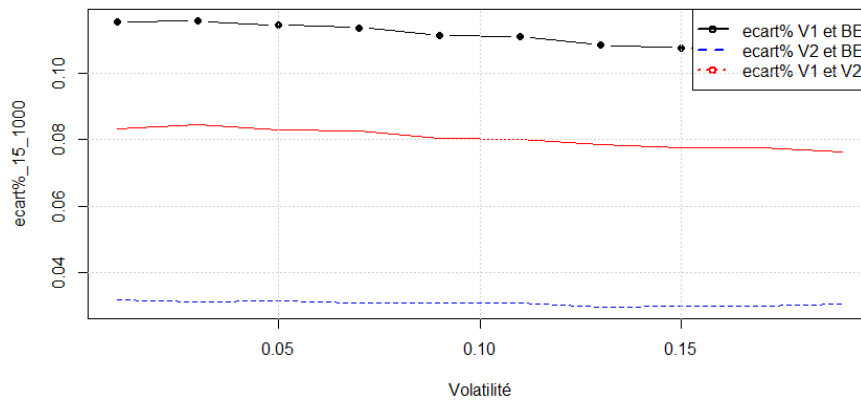


FIGURE 3.12 – Sensibilité par rapport à la volatilité et Comparaison des écarts relatifs avec T=15 et pop=1000

L'écart relatif ici (T=15 et pop=1000) entre V1 et V2 est égale sensiblement à 0.08%. On voit que l'écart relatif entre V1 et BE est supérieur à celui de V2 et BE. L'écart relatif entre V1 et BE est environ de 0.11% tandis que l'écart entre V2 et BE est environ de 0.03%.

	BE	V1	V2	ecart%_V1BE	ecart%_V2BE	ecart%_V1V2
0.01	942320.82	942972.87	942524.62	0.07	0.02	0.05
0.03	953063.46	953715.88	953257.25	0.07	0.02	0.05
0.05	966656.72	967316.03	966855.69	0.07	0.02	0.05
0.07	982772.24	983434.35	982977.95	0.07	0.02	0.05
0.09	999898.85	1000568.09	1000105.44	0.07	0.02	0.05
0.11	1020266.28	1020945.37	1020472.52	0.07	0.02	0.05
0.13	1035184.36	1035875.80	1035405.45	0.07	0.02	0.05
0.15	1052270.39	1052963.84	1052481.74	0.07	0.02	0.05
0.17	1074653.27	1075361.55	1074875.96	0.07	0.02	0.05
0.19	1092008.19	1092709.72	1092224.98	0.06	0.02	0.04

TABLE 3.10 – Sensibilité par rapport à la volatilité et Comparaison des écarts relatifs avec T=10 et pop=1000

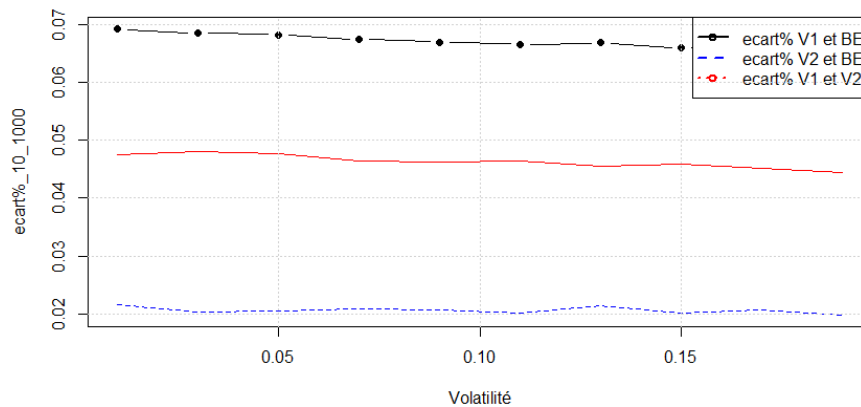


FIGURE 3.13 – Sensibilité par rapport à la volatilité et Comparaison des écarts avec T=10 et pop=1000

On observe dans le cas T=10 et pop=1000 l'écart relatif entre les deux valorisations V1 et V2 qui varie autour de 0.045%. Ici, par rapport au cas T=15 et pop=1000, la population fixé est de 1000, mais la maturité est passée de 15 à 10.

	BE	V1	V2	ecart%_V1BE	ecart%_V2BE	ecart%_V1V2
0.01	100615.49	100714.85	100651.32	0.10	0.04	0.06
0.03	101363.74	101466.44	101400.88	0.10	0.04	0.06
0.05	102313.96	102413.33	102350.90	0.10	0.04	0.06
0.07	103163.57	103261.76	103199.00	0.10	0.03	0.06
0.09	104262.55	104364.15	104300.30	0.10	0.04	0.06
0.11	105074.05	105178.01	105112.63	0.10	0.04	0.06
0.13	105950.63	106051.67	105988.06	0.10	0.04	0.06
0.15	106981.92	107083.12	107020.05	0.09	0.04	0.06
0.17	107983.43	108085.67	108020.69	0.09	0.03	0.06
0.19	109078.27	109184.57	109117.97	0.10	0.04	0.06

TABLE 3.11 – Sensibilité par rapport à la volatilité et Comparaison des écarts relatifs avec T=5 et pop=100

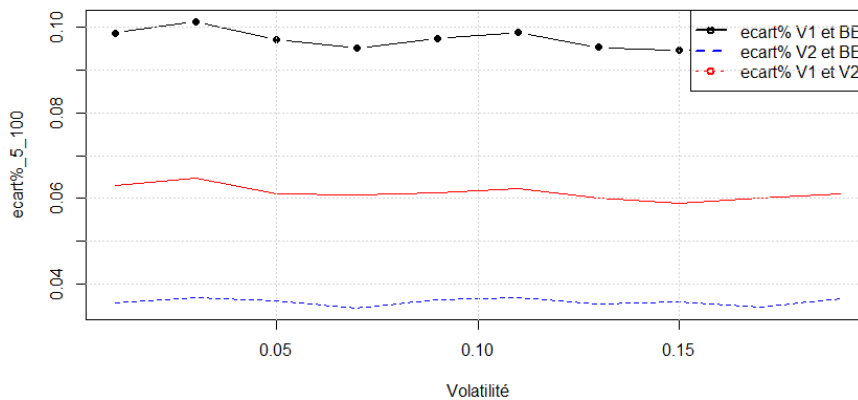


FIGURE 3.14 – Sensibilité par rapport à la volatilité et Comparaison des écarts avec T=5 et pop=100

On observe qu'en faisant varier la volatilité, les écarts relatifs de valorisations sont davantage linéaires. Il ressort en outre un grand écart relatif de la valorisation de V1 par rapport aux autres valorisations tandis que V2 ne s'éloigne pas trop du Best estimate BE relativement. Bien que ce résultat soit quelque peu nuancé quand la taille de la population est grande notamment $pop = 1000$. De façon générale, les valorisations augmentent avec la population et la volatilité et diminuent avec la maturité. En ce concerne les écarts relatifs, on observe qu'ils diminuent avec la taille de la population même lorsqu'on fait varier d'autres paramètres. Un résultat qui est différent (croissant) lorsqu'on observe l'évolution de la maturité, ici les écarts relatifs tendent plutôt à augmenter avec la maturité. Tandis qu'en ce qui concerne la volatilité elle expose les différences entre les écarts relatifs. Ici, il semble que la population joue un effet de diversification qui réduit le risque pour les différents produits de tel sorte qu'il ne reste que le risque non diversifiable.

Conclusion.

L'objectif de ce mémoire était d'explorer en profondeur certaines méthodes de valorisation des produits hybrides, qui met en exergue une combinaison des risques financiers et assurantiels. Notre étude a explicité les différences entre les approches de tarification en finance et en assurance, tout en intégrant ces deux visions pour une valorisation plus robuste et cohérente des produits hybrides.

Ce mémoire a présenté plusieurs méthodes de tarification des produits hybrides, notamment celles qui utilisent le modèle de Hull and White pour les taux d'intérêt et les taux de mortalité. Plusieurs simulations et certaines analyses ont permis de démontrer que la méthode de valorisation choisie peut significativement affecter les résultats, mettant en évidence l'importance de sélectionner l'approche adéquate en fonction du type de risque et des caractéristiques du produit. Nous avons fait une étude de sensibilité pour nos différentes valorisations, il ressort que les valorisations augmentent avec la population et la volatilité et diminuent avec la maturité. En ce concerne les écarts relatifs, on observe qu'ils diminuent avec la taille de la population même lorsqu'on fait varier d'autres paramètres. Un résultat qui est différent (croissant) lorsqu'on observe l'évolution de la maturité, ici les écarts relatifs tendent plutôt à augmenter avec la maturité. Tandis qu'en ce qui concerne la volatilité elle expose les différences entre les écarts relatifs. Ici, il semble que la population joue un effet de diversification qui réduit le risque pour les différents produits de tel sorte qu'il ne reste que le risque non diversifiable. Nos résultats obtenus dans la partie application mettent en évidence que la valorisation prenant en compte les cashflows de façon séparés (V1) montre une plus grande volatilité comparée à celle qui considère les cashflows simultanément (V2). Ainsi, par rapport à une variation du portefeuille d'assuré, la valorisation V2 est plus robuste et stable, fournissant une meilleure estimation des risques financiers. Elle pourrait donc être préférable pour une gestion efficace des risques dans des portefeuilles d'assurés de différentes tailles. Cette remarque nous permet de se rendre compte de l'importance de la méthodologie adoptée pour la valorisation.

Au niveau de la marge de sécurité, l'ajout de celle-ci, représentée par l'écart-type, est capital pour couvrir l'incertitude des créances. Les valorisations mettant en exergue cette marge sont plus ou moins stables face aux variations des paramètres de marché, illustrant ainsi l'importance de cette pratique

dans la gestion des risques assurantiels.

La conclusion que nous pouvons donner est que pour valoriser efficacement les produits hybrides, une approche intégrée combinant les principes financiers et assurantiels est essentielle. Cette prise en compte de l'intégration permet non seulement de gérer les risques de façon plus complète mais aussi de fournir des évaluations plus précises et robustes. Nos différents résultats obtenus montrent que les produits hybrides présentent des défis uniques, mais qu'avec une approche adéquate, il est possible de mettre sur pieds des méthodes de valorisation reflétant étroitement les risques associés. Des perspectives pour de nouvelles recherches et des applications pratiques sont donc ouvertes dans la gestion des portefeuilles de produits financiers et assurantiels.

Bibliographie

- BARIGOU, Karim, Ze CHEN et Jan DHAENE (2019). « Fair dynamic valuation of insurance liabilities : Merging actuarial judgement with market- and time-consistency ». In : *Insurance : Mathematics and Economics* 88, p. 19-29. ISSN : 01676687. DOI : [10.1016/j.insmatheco.2019.05.003](https://doi.org/10.1016/j.insmatheco.2019.05.003). URL : <https://linkinghub.elsevier.com/retrieve/pii/S0167668718305122> (visité le 13/10/2023).
- BARIGOU, Karim et Jan DHAENE (2019). « Fair valuation of insurance liabilities via mean-variance hedging in a multi-period setting ». In : *Scandinavian Actuarial Journal* 2019.2, p. 163-187. ISSN : 0346-1238, 1651-2030. DOI : [10.1080/03461238.2018.1528477](https://doi.org/10.1080/03461238.2018.1528477). URL : <https://www.tandfonline.com/doi/full/10.1080/03461238.2018.1528477> (visité le 13/10/2023).
- BRENNAN, Michael J. et Eduardo SCHWARTZ (1976). « The pricing of Equity-Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Guarantee ». en. In.
- (1979). « Alternative Investment Strategies for the Issuers of Equity Linked Life Insurance Policies with an Asset Value Garantie ». en. In.
- DHAENE, Jan (2022). « Fair valuation of insurance liabilities : Combining 'financial market'-consistency and 'actuarial model'-consistency in a single-period framework ». en.
- DHAENE, Jan et al. (2017). « Fair valuation of insurance liabilities : merging actuarial judgement and market-consistency ». en. In.
- FADDOUA, Zeddouk. et Pierre DEVOLDER (2019). « Mean Reversion in Stochastic Mortality Mortality : Why and How ? » en. In.
- HAINAUT, Donatien (2022). « Interest rate and inflation modelling ». en.
- KAAS, Rob et al. (2008). *Modern Actuarial Risk Theory, Using R, Second Edition*.
- PELSSER, Antoon et Mitja STADJE (2014). « TIME-CONSISTENT AND MARKET-CONSISTENT EVALUATIONS ». In : *Mathematical Finance* 2014.

Annexe A

PROGRAMMATION R

```
1 #####
2 #                               Nelson-Siegel and Svensson
3 #####
4 rm(list=ls())
5 #####
6 #                               Nelson-Siegel : instantaneous forward
7 Nelson.forward<-function(tv, b0, b10, b11, c1){
8
9     f<-b0+(b10+b11*tv)*exp(-c1*tv)
10    return(f)
11 }
12 #####
13 #                               Nelson-Siegel : forward rates
14 Nelson.dif.forward<-function(tv, b10, b11, c1){
15
16     df<-b11*exp(-c1*tv)-c1*(b10+b11*tv)*exp(-c1*tv)
17     return(df)
18 }
19
20 #####
21 #                               Nelson-Siegel : integrate forward rates
22 Nelson.int.forward<-function(tv, b0, b10, b11, c1){
23
24     intf<-b0+(1/tv)*(b10/c1)*(1-exp(-c1*tv))+(1/tv)*(b11/(c1^2))*(1-(c1*tv+1)
25                                                    *exp(-c1*tv))
26     return(intf)
27 }
28 #####
29 #                               Nelson-Siegel : Phi HW1
```

```

30 varphi.NS<-function(tv,b0,b10,b11,c1,a,sg){
31   phi<- (b0+(1/tv)*(b10/c1)*(1-exp(-c1*tv))
32         +(1/tv)*(b11/(c1^2))*(1-(c1*tv+1)*exp(-c1*tv))
33         +((sg^2)/(2*a^2))*(1-exp(-2*a*tv)))
34 }
35
36 #####
37 #                               Nelson-Siegel : Variance
38 #varphi.NS<-function(tv,a,sg){
39 # VtT<- ((sg/a)^2)*( tv-(2/a)*(1-exp(-a*tv))+1/(2*a))*(1-exp(-2*a*tv)) )
40 #}
41
42 ### Calibration du taux d'int\er\et   l'aide de Hull and white   1 facteur ###
43
44 library(readxl)
45 dir <- dirname(rstudioapi::getActiveDocumentContext())$path)
46 setwd(dir)
47 obs_rate <- read_excel("Rate_OLO_19042024.xlsx", sheet = "Feuil1")
48 obs_rate=data.frame(obs_rate)
49 View(obs_rate)
50 P_rate=obs_rate[,8]
51 tm=obs_rate[,1]
52 tauZC=obs_rate$Taux_ZC
53 mat <- c(1:30)
54 mat0=c(0,mat)
55 #P_rate0=P_rate
56
57 ### taux ZC extrait   partir des taux OLO maturit 30 ans ###
58 plot(mat,tauZC, type="l",xlab="maturit ", ylab="taux ZC obs",
59       main="volution taux int r t",col="green",lwd=2)
60
61 ### Calibration du taux de mortalit   l'aide de Hull and white avec theta ###
62
63 ## fonction   utiliser pour le MSE ##
64 #NS_Calibration<-function(param,mat,Courbe_ZC){ #####old
65
66 # b0 = param[1]
67 # b1= param[2]
68 # b2= param[3]
69 # c1 = param[4]
70 # Zero_Coupon = NS_ZC(mat,param)

```

```

71 #fct_objective= sum((Zero_Coupon-Courbe_ZC)^2)*1e6
72 #return(fct_objective)
73 ##### old
74
75 ## fonction pour le continue yield dans NS ##
76 NS_ZC<-function(t,param){
77   b0 = param[1]
78   b1= param[2]
79   b2= param[3]
80   c1 = param[4]
81   Zero_Coupon <- b0+ b1/(c1*t)*(1-exp(-c1*t))+
82     b2/(t*c1^2)*(1-(c1*t+1)*exp(-c1*t))
83   return(Zero_Coupon)
84 }
85
86
87 NS_Calibration<-function(param,mat,tauZC){
88
89   b0 = param[1]
90   b1= param[2]
91   b2= param[3]
92   c1 = param[4]
93   Zero_Coupon = NS_ZC(mat,param)
94   fct_objective= sum((Zero_Coupon-tauZC)^2)*1e6
95   return(fct_objective)
96 }
97
98 ## parametres initiaux NS ##
99 #param0 <- c( 0.005049046,-0.00892662,-0.003506234,0.2942863)
100 param0 <- c( 0.006289046,-0.00898662,-0.004816234,0.2982863)
101 Optimisation_NS<-nlm(f = NS_Calibration,p = param0, mat, tauZC ,gradtol = 1e-15,
102   steptol=1e-15,iterlim=500)
103
104 ## parametres optimaux NS ##
105 b0NS = Optimisation_NS$estimate[1]
106 b1NS= Optimisation_NS$estimate[2]
107 b2NS= Optimisation_NS$estimate[3]
108 c1NS = Optimisation_NS$estimate[4]
109
110 print(round(Optimisation_NS$estimate,4))
111

```

```

112 ## Stockage des parametres optimaux NS ##
113 param.rNS = c(b0NS, b1NS, b2NS, c1NS) #0.039944564 0.003333267 -0.018591225
114 #0.408764609
115
116 ## graphe Zero coupon obs vs Zero coupon NS ##
117 #r.NS <- function(t,T){
118 # if(T==t){
119 #   return(b0NS+b1ns)
120 #}else{
121 #   tmp<-(T-t)/tau
122 #   ex<-exp(-tmp)
123 #   r.NS<-b0NS+b1NS*(1-ex)/tmp+b2NS*( (1-ex)/tmp-ex)
124 #   return(r.NS)
125 # }
126 #}
127 #NSZero_Coupon =exp(-2*mat*NS_ZC(mat, param.rNS))
128
129 #NS_ZCoup=(1/(-2*mat))*ln(NSZero_Coupon)
130 plot(mat, tauZC, xlab='year', ylab='zc obs', col='green', main='taux zc', lwd=2)
131
132 lines(mat, NS_ZC(mat, param.rNS), lwd=2., col='red', lty=1)
133
134 legend("topright", legend = c('Observed', 'NS'), pch = c(1, NA), col=c('green', 'red')
135       , lty=c(0, 1), lwd=2)
136 grid()
137
138 print(tauZC)
139 print(NS_ZC(mat, param.rNS))
140
141
142 ## parametres initiaux HW ##
143 paramhw <- c(0.8, 0.005)
144
145 ZC_HW=function(t, param=paramhw, p.NS=param.rNS){
146   a_hw=paramhw[1]
147   sigma_hw=(paramhw[2])^2
148   Zero_Coupon=NS_ZC(t, p.NS)
149
150   HW_Nelson= exp(-(t*Zero_Coupon+
151                 (sigma_hw^2/(2*a_hw^2))*(t-(1/(2*a_hw))*(1-exp(-2*a_hw*t))))))
152

```

```

153         +0.5*((sigma_hw/a_hw)^2)*( t-(2/a_hw)*(1-exp(-a_hw*t))
154                 +(1/(2*a_hw))*(1-exp(-2*a_hw*t)) ) )
155     }
156
157
158     ## graphe Zero coupon obs vs Zero coupon HW ##
159     Zero_Coupon_fit=ZC_HW(mat,paramhw,param.rNS)
160
161     risk_free_rate=-1/(mat)*log(Zero_Coupon_fit)
162     print(risk_free_rate)
163     plot(mat,NS_ZC(mat,param.rNS) ,xlab='Annee',ylab='Zero_Coupon',col='green',
164           main='taux Zero_Coupon',
165           lwd=2)
166
167     lines(mat, risk_free_rate,lwd=2.,col='red',lty=1)
168     legend("bottomright",legend = c('taux_Zero_Coupon_NS','taux_Zero_Coupon_HW')
169           ,pch = c(1,NA),
170           col=c('green','red'),lty=c(0,1),lwd=2)
171     grid()
172
173     #####
174     #                               Nelson-Siegel : instantaneous forward
175     Nelson.forward<-function(tv,p.NS=param.rNS){
176         b0=p.NS[1]
177         b10=p.NS[2]
178         b11=p.NS[3]
179         c1=p.NS[4]
180
181         f<-b0+(b10+b11*tv)*exp(-c1*tv)
182         return(f)
183     }
184     #####
185     #                               Nelson-Siegel : forward rates
186     Nelson.dif.forward<-function(tv,p.NS=param.rNS){
187
188         b0=p.NS[1]
189         b10=p.NS[2]
190         b11=p.NS[3]
191         c1=p.NS[4]
192
193         df<-b11*exp(-c1*tv)-c1*(b10+b11*tv)*exp(-c1*tv)

```

```

194   return(df)
195 }
196
197
198 ##### THETA(T) POUR HW1 #####
199
200 Theta_t=function(tv,p.NS=param.rNS,p.HW=paramhw){
201   a_HW=p.HW[1]
202   sg_HW=p.HW[2]
203
204   Th= (1/a_HW)*Nelson.dif.forward(tv)+Nelson.forward(tv)+sg_HW^2/(2*a_HW^2)
205                                             *(1-exp(-2*a_HW*tv))
206 }
207 matboot=seq(1:25)
208 (sapply(mat,Theta_t))
209
210 ##### SIMULATION DU TAUX INTERET HW1 #####
211
212 #va_tr<-function(Tf,Nsim=10000,parHW=paramhw){
213
214   va_tr<-function(Tf,Nsim=10000,parHW=paramhw){
215     a <- parHW[1]
216     sg <- parHW[2]
217
218     dt<-1
219
220     rt=matrix(0,Nsim,Tf)
221
222     n=1
223     while(n<=Nsim){
224
225       wr=(rnorm(Tf))
226
227       rt[n,1]=NS_ZC(mat,param.rNS)[1]
228
229       for(k in 2:Tf){
230         rt[n,k]=a*(Theta_t(k)-rt[n,(k-1)])*dt+rt[n,(k-1)]+sg*sqrt(dt)*wr[k]
231
232       }
233       n=n+1
234     }

```

```

235  rt.HW=as.numeric(apply(rt,2,mean))
236
237  return(rt.HW)
238 }
239
240
241
242
243
244 ##### Stockage de Rt
245 set.seed(12345)
246 #r_sim=va_tr(25)
247 r_sim=va_tr(30)
248 print(r_sim)
249
250 par(mfrow=c(1,1))
251 plot(tm,NS_ZC(mat,param.rNS),xlab='maturity',ylab='rate'
252       ,ylim=c(min(r_sim,NS_ZC(mat,param.rNS))
253              ,max(r_sim,NS_ZC(mat,param.rNS)))
254       ,col='red',main="interest rates",lwd=2)
255 lines(mat,r_sim,lwd=2.,col='blue',lty=2)
256 #lines(xabs,HW2_P0t,lwd=2.,col='black',lty=1)
257 grid()
258 legend("bottomright",legend = c('NS_ZC','HW'),pch = c(1,NA),
259       col=c('red','blue'),lty=c(0,2),lwd=2)
260
261
262
263
264
265
266
267
268
269 #####
270 #####
271 ##### CALIBRATION TAUX MORTALITE HW1 #####
272 #####
273 #####
274
275

```

```

276 #####Calibration du taux de mortalit     l'aide de Hull and white     1 facteur###
277 #####
278 #rm(list=ls())
279 library(readxl)
280 dir <- dirname(rstudioapi::getActiveDocumentContext())$path)
281 setwd(dir)
282 observe <- read_excel("best_estimate_mortality_tables_iabe_2015.xls",
283                       sheet = "HW1")
284 observe=data.frame(observe)
285 life=subset(observe ,x<66)
286 #View(life)
287
288 tf=length(life$tf)
289 P_life=life[,5]
290 tm=life[,1]
291 Pxt=life[,4]
292 #View(P_life)
293
294 #####Bootstrap des Taux de mortalit #####
295 #####
296 mux=function(tpx){
297   mu=c()
298   #mu[1]=0
299   for (k in 1:length(tpx)) {
300     mu[k]=-log(tpx[k])
301   }
302   return(mu)
303 }
304
305 muxt=mux(Pxt)
306
307 ###Calibration du taux de mortalite     l'aide de Hull and white avec theta comp##
308 #####
309
310 Prob= function(Par){
311   A=Par[1]
312   B=Par[2]
313   sigma=Par[3]
314   b=Par[4]
315
316   return(sum(log(P_life)-(A/b)*(exp(-b*tm)*(exp((b+B)*tm)-1)/(B+b)-

```

```

317         (exp(B*tm)-1)/B)
318     +(sigma^2/(2*b^2))*((1/b)*(1-exp(-b*tm))-tm)+
319     (sigma^2/(4*b^3))*(1-exp(-b*tm))^2-log(life$tPx[2])
320                                     *(1-exp(-b*tm))/b^2)
321 }
322 }
323 z_HW1=constrOptim(theta=c(0.000000001,0.00001,0.00001,0.000001),
324                 f=Prob, ui=rbind(c(1,0,0,0),c(0,1,0,0), c(0,0,1,0),
325                                 c(0,0,0,1)), ci=c(0,0,0,0), grad = NULL)
326 z_HW1
327 par.xHW=c(z_HW1$par[1], z_HW1$par[2], z_HW1$par[3], z_HW1$par[4])
328 #0.0001375391 2.138832e-06 1.0786e-06 0.0001178056
329
330 tPx_HW= function(t, parx=par.xHW){
331     A=parx[1]
332     B=parx[2]
333     b=parx[3]
334     sigma=parx[4]
335
336     return(exp((A/b)*(exp(-b*t)*(exp((b+B)*t)-1)/(B+b)-(exp(B*t)-1)/B)-
337              (sigma^2/(2*b^2))*((1/b)*(1-exp(-b*t))-t)-
338              (sigma^2/(4*b^3))*(1-exp(-b*tm))^2+log(life$tPx[2])
339                                     *(1-exp(-b*t))/b))
340 }
341
342 #proba_survie=function(t){tPx_HW(t, par.xHW)}
343 proba_xHW=sapply(tm, tPx_HW)
344
345 par(mfrow=c(1,1))
346 plot(x = seq(from = 40, to = 65, by = 1), proba_xHW, xlab = "Age", ylab = "tPx",
347      ylim=c(min(proba_xHW,P_life),max(proba_xHW,P_life))
348      , col="red", main = "Proba de survie HW1", lwd=2)
349 lines(x = seq(from = 40, to = 65, by = 1), y = P_life, lwd=3, col= 'blue', lty=2)
350 grid()
351 legend("bottomleft", legend = c('Hw1', 'obs'), pch = c(1,NA),
352       col=c('red', 'blue'), lty=c(0,2), lwd=2)
353
354
355 ##### Bootstrap des Taux de mortalite HW1 #####
356 #####
357

```

```

358
359 mux_HW1=function (tpx){
360   mu=c ()
361   mu[1]=0
362   for (k in 2:(length(tpx)-1)) {
363     mu[k]=-log (tpx [k]-tpx [k+1])
364   }
365   return(mu)
366 }
367
368 muxt_HW1=mux(proba_xHW)
369
370 #par(mfrow=c(1,1))
371 #plot(x = seq(from = 40, to = 65, by = 1), muxt_HW1, xlab = "Age", ylab ="muxt",
372 #      ylim=c(min(muxt_HW1,muxt),max(muxt_HW1,muxt))
373 #      , col="red",main = "taux de mortalit HW1",lwd=2)
374 #lines(x = seq(from = 40, to = 65, by = 1), y = muxt,lwd=3, col= 'blue ',lty=2)
375 #grid()
376 #legend("topleft",legend = c('Hw1','obs'),pch = c(1,NA),
377 #       col=c('red','blue'),lty=c(0,2),lwd=2)
378
379
380
381 ##### SIMULATION DU TAUX MORTALITE HW1 sous P #####
382
383 va_tx<-function (Tf,Nsim=10000,parxHW=par.xHW){
384
385   ##### les parametres
386   A <- parxHW[1]
387   B <- parxHW[2]
388   b <- parxHW[3]
389   sgx <- parxHW[4]
390   dt<-1
391   muxt=mux(Pxt)
392   mux_sim=matrix(0,Nsim,Tf)
393
394   n=1
395   while(n<=Nsim){
396
397     wx=(rnorm(Tf))
398

```

```

399     mux_sim[n,1]=muxt[2]
400
401     for (k in 2:Tf) {
402         mux_sim[n,k]=(A*exp(B*(k-1))-b*mux_sim[n,(k-1)])*dt+mux_sim[n,(k-1)]+
403             sgx*sqrt(dt)*wx[k]
404
405     }
406     n=n+1
407 }
408 muxt.HW=as.numeric(apply(mux_sim,2,mean))
409
410 return(muxt.HW)
411 }
412
413
414
415 ##### Stockage de Rt
416 set.seed(123456)
417 mux_sim=c(0,va_tx(25))
418
419 par(mfrow=c(1,1))
420 plot(x = seq(from = 40, to = 65, by = 1), mux_sim, xlab = "Age", ylab = "muxt",
421     ylim=c(min(mux_sim, muxt), max(mux_sim, muxt))
422     , col="red", main = "taux de mortalit HW1", lwd=2)
423 lines(x = seq(from = 40, to = 65, by = 1), y = muxt, lwd=3, col= 'blue', lty=2)
424 grid()
425 legend("topleft", legend = c('Hw1', 'obs'), pch = c(1, NA),
426     col=c('red', 'blue'), lty=c(0, 2), lwd=2)
427
428
429 #####
430 ##### TARIFICATION #####
431 #####
432 ##### donnees: actif risque et mortalite: voir doc source Devolder #####
433
434 mu_s=4.5/100      #rendement actif
435 #sg_s=10/100     #volatilit actif
436 #beta_pb=20/100  #taux de participation beneficiaire
437 rho_sr=2/100     #correlation actif et taux du marche
438 Npol=5000        #portefeuille de mille police
439 #txg=3/100       #taux garanti

```

```

440 #txc=2/100          #taux de croissance de rente
441
442 alpha=0.3
443
444
445 va_Q<-function(Tf,sg_s, Npol=5000,Nsim=2000,parxHW=par.xHW,parHW=paramhw ){
446
447   ##### les parametres de mortalite
448   A <- parxHW[1]
449   B <- parxHW[2]
450   b <- parxHW[3]
451   sgx <- parxHW[4]
452
453   ##### les parametres de taux interet
454   a <- paramhw[1]
455   sg <- paramhw[2]
456
457
458
459   muxt=mux(Pxt)
460   #lamdax=0.001*(mean(muxt[-1])-mean(rate_H))/sgx #prime de risque de la mortalit
      sous Q
461   lamdaS=(mu_s-mean(tauZC))/sg_s #prime de risque pour le fond
462
463   dt<-1
464   S0<-1000
465
466   ##### MONTE CARLO SIMULATION #####
467   mux_sim=matrix(0,Nsim,Tf)
468   rt=matrix(0,Nsim,Tf)
469   St=matrix(0,Nsim,Tf)
470   Bt=matrix(0,Nsim,Tf)
471   Bt[,1]<-1
472   retS=matrix(0,Nsim,Tf)
473   retS[,1]<-0
474   N_d <- matrix(0,Nsim,Tf)
475   pop <- matrix(0,Nsim,Tf)
476   pop[,1] <- Npol
477   Ps <-matrix(0,Nsim,Tf)
478   Res=matrix(0,Nsim,Tf)
479   Res.Bt=matrix(0,Nsim,Tf)

```

```

480 Res[,1]=1000
481 Covar <- matrix(0,Nsim,Tf)
482
483 n=1
484 while(n<=Nsim){
485
486   w1=rnorm(Tf)
487   w2=rnorm(Tf)
488   wx=rnorm(Tf)
489
490   rho1=cor(wx,w1)
491   rho2=cor(wx,w2)
492   wr=rho1*wx+sqrt(1-rho1^2)*w1 ##Independence mux et rt
493   wS1=rho2*wx+sqrt(1-rho2^2)*w2 ##Independence mux et St
494   rho3=cor(wS1, wr)
495   wS=rho3*wr+sqrt(1-rho3)*wS1
496   mux_sim[n,1]=muxt[2]
497   #rt[n,1]=tauZC[1]
498   St[n,1]=S0
499
500   for(k in 2:Tf){
501
502     rt[n,k]=a*(Theta_t(k)-rt[n,(k-1)])*dt+rt[n,(k-1)]+sg*sqrt(dt)*wr[k]
503     mux_sim[n,k]=(A*exp(B*(k-1))-b*mux_sim[n,(k-1)])*dt+mux_sim[n,(k-1)]+
504                                     sgx*sqrt(dt)*wx[k]
505     St[n,k]=St[n,(k-1)]*(1+rt[n,k]*dt) + sg_s*(rho_sr*sqrt(dt)*wr[k]+
506                                     sqrt(1-rho_sr^2)*sqrt(dt)*wS[k]+lamdaS*dt) )
507
508     #####Compte cash
509     #####
510     Bt[n,k] <- Bt[n,k-1]*(1+rt[n,k-1]*dt)
511   }
512
513   for(i in 1:Tf){
514     ##### POPULATION DE SURVIE #####
515     N_d[n,i] <- rbinom(1, pop[n,i], prob = 1 - exp(-mux_sim[n,i]))
516     if(i<=(Tf-1)){
517       pop[n,i+1] <- pop[n,i] - N_d[n,i]
518     }
519     ##### RENDEMENT DU FONDS #####
520     retS[n,i+1]<-(St[n,i+1]-St[n,i])/St[n,i]

```

```

520     }
521
522
523   }
524
525   for (i in 1:Tf) {
526     ##### Profit sharing
527     #####
528     Ps[n, i] <- 0.2*max(retS[n, i]-0.015-0.005,0)
529
530     ##### Simulation de la reserve etant donn le profit sharing
531     #####
532     if (i>=2){
533       Res[n, i]=Res[n, i-1]*(1+0.015+Ps[n, i])
534     }
535     Res.Bt[n, i]=Res[n, i]/(Bt[n, i])
536   }
537
538   n=n+1
539 }
540
541 mean.Res=as.numeric(apply(Res.Bt,2,mean))
542 mean.N_d=as.numeric(apply(N_d,2,mean))
543 mean.pop=as.numeric(apply(pop,2,mean))
544
545
546 std.N_d=as.numeric(apply(N_d,2,sd))
547 std.pop=as.numeric(apply(pop,2,sd))
548 ##### Best Estimate Liabilities
549 #####
550 BE=mean.Res[Tf]*mean.pop[Tf]
551 for (i in 1:(Tf)){
552   BE=BE+ mean.Res[i]*mean.N_d[i]
553 }
554
555 #####Two step valuation avec principe de prime standard deviation mais avec
556 #valeurs des cash-flows s par s#####
557 V1= BE+ 0.05*mean.Res[Tf]*std.N_d[Tf]
558 for (i in 1:(Tf)){
559   V1=V1+0.05*mean.Res[i]*std.N_d[i]
560 }
561
562 #####Two step valuation avec principe de prime standard deviation mais
563 #avec des cash-flows pris simultan ment#####

```

```

558
559 Z=rep(0, Nsim)
560 Z2=rep(0, Nsim)
561 Z3=rep(0, Nsim)
562 Z4=rep(0, Nsim)
563 j=1
564 while (j<=Nsim){
565   for (i in 1:Tf){
566     Z[j]=Z[j]+Res.Bt[j,Tf]*Res.Bt[j, i]*cov(pop[,Tf], N_d[, i])
567     Z3[j]=(Res.Bt[j,Tf]*sd(pop[,Tf]))^2
568     Z4[j]=Z4[j]+(Res.Bt[j, i]*sd(N_d[, i]))^2
569     for (s in 1:Tf){
570       if (s!=i)
571         Z2[j]=Z2[j]+Res.Bt[j,s]*Res.Bt[j, i]*cov(N_d[,s], N_d[, i])
572     }
573   }
574   j=j+1
575 }
576
577
578 Z5=Z+Z2+Z3+Z4
579 V2=0.05*mean(sqrt(Z5))+BE
580 ecart_V1BE=100*(V1-BE)/BE
581 ecart_V2BE=100*(V2-BE)/BE
582 ecart_V1V2=100*(V1-V2)/V2
583 return(list(BE=BE, V1=V1, V2=V2, ecart_V1BE=ecart_V1BE,
584            ecart_V2BE=ecart_V2BE, ecart_V1V2=ecart_V1V2))
585
586
587 }
588
589 #(va_Q(15, 0.2))
590 ###choix du nombre de simulation avec Tf=5 sg=0.1 npol=200#####
591 simul=seq(10000,12000,1000)
592 sensisimul=sapply(simul, function(n) va_Q(Tf=5,sg_s=0.1, Npol=2000, Nsim=n))
593
594 sensisimul<- matrix(unlist(sensisimul), nrow = 6, byrow = FALSE)
595 rownames(sensisimul) <- c("BE", "V1", "V2", "ecart%_V1BE", "ecart%_V2BE",
596                           "ecart%_V1V2")
597 colnames(sensisimul) <-simul
598 BE_simul=sensisimul["BE",]

```

```

599 V1BE_simul=sensisimul["ecart%_V2BE" ,]
600 V2BE_simul=sensisimul["ecart%_V2BE" ,]
601 V1V2__simul=sensisimul["ecart%_V1V2" ,]
602 V1_simul=sensisimul["V1" ,]
603 V2_simul=sensisimul["V2" ,]
604
605 plot(simul, V1BE_simul, type = 'b', xlab = 'nombre de simulation',
606       ylab = 'ecartsimul%', ylim = c(min(V1BE_simul,V2BE_simul, V1V2__simul),
607       max(V1BE_simul, V2BE_simul, V1V2__simul)), col = 'black', pch = 16)
608 lines(simul, V2BE_simul, , lty = 2, col = "blue", pch=17)
609 lines(simul, V1V2__simul, lty=1, col="red", pch=18)
610 legend("topright", legend = c('ecart% V1 et BE', 'ecart% V2 et BE',
611                               'ecart% V1 et V2 '), pch = c(1,NA),
612       col=c('black', 'blue', 'red'), lty = c(1, 2, 3), lwd = 2)
613 grid()
614
615 require(xtable)
616 print(xtable(t(sensisimul), digits=c(0,2,2,2,2,2, 2)), type="latex",
617       include.rownames=TRUE)
618
619
620 #Sensibilit par rapport la population avec Tf=15 sg_s=0.1###
621 xpop1=seq(500,5000,200)
622 xpop=c(10,100,xxpop1)
623 sensipop_15_0.1=sapply(xpop, function(n) va_Q(Tf=15,sg_s=0.1, Npol=n))
624
625 sensipop_15_0.1 <- matrix(unlist(sensipop_15_0.1), nrow = 6, byrow = FALSE)
626 rownames(sensipop_15_0.1) <- c("BE", "V1", "V2", "ecart%_V1BE", "ecart%_V2BE"
627                               , "ecart%_V1V2")
628 colnames( sensipop_15_0.1) <-xxpop
629 BE_pop=sensipop_15_0.1["BE" ,]
630 V1BE_pop=sensipop_15_0.1["ecart%_V2BE" ,]
631 V2BE_pop=sensipop_15_0.1["ecart%_V2BE" ,]
632 V1V2__pop=sensipop_15_0.1["ecart%_V1V2" ,]
633 V1_pop=sensipop_15_0.1["V1" ,]
634 V2_pop=sensipop_15_0.1["V2" ,]
635 #ecartV1V2=V1_pop-V2_pop
636
637 plot(xpop, V1BE_pop, type = 'b', xlab = 'Assur ', ylab = 'ecart_15_0.1%'
638 , ylim = c(min(V1BE_pop,V2BE_pop, V1V2__pop),
639       max(V1BE_pop, V2BE_pop, V1V2__pop)), col = 'black', pch = 16)

```

```

640 lines(xpop, V2BE_pop, , lty = 2, col = "blue", pch=17)
641 lines(xpop, V1V2__pop, lty=1, col="red", pch=18)
642 legend("topright", legend = c('ecart% V1 et BE', 'ecart% V2 et BE',
643                               'ecart% V1 et V2 '), pch = c(1,NA),
644         col=c('black', 'blue', 'red'), lty = c(1, 2, 3), lwd = 2)
645 grid()
646
647
648 require(xtable)
649 print(xtable(t(sensipop_15_0.1), digits=c(0,2,2,2,2, 2, 2)),
650        type="latex", include.rownames=TRUE)
651
652 ###Sensibilit population avec Tf=5 sg_s=0.1#####
653 xpop1=seq(500,5000,200)
654 xpop=c(10,100,xxpop1)
655 sensipop_5_0.1=sapply(xpop, function(n) va_Q(Tf=5,sg_s=0.1, Npol=n))
656 sensipop_5_0.1 <- matrix(unlist(sensipop_5_0.1), nrow = 6, byrow = FALSE)
657 rownames(sensipop_5_0.1) <- c("BE", "V1", "V2", "ecart%_V1BE", "ecart%_V2BE"
658                               , "ecart%_V1V2")
659 colnames(sensipop_5_0.1) <-xxpop
660 BE_pop=sensipop_5_0.1["BE",]
661 V1BE_pop=sensipop_5_0.1["ecart%_V1BE",]
662 V2BE_pop=sensipop_5_0.1["ecart%_V2BE",]
663 V1V2__pop=sensipop_5_0.1["ecart%_V1V2",]
664 V1_pop=sensipop_5_0.1["V1",]
665 V2_pop=sensipop_5_0.1["V2",]
666 #ecartV1V2=V1_pop-V2_pop
667 min_y=min(V1BE_pop, V2BE_pop, V1V2__pop)
668 max_y=max(V1BE_pop, V2BE_pop, V1V2__pop)
669 plot(xpop, V1BE_pop, type = 'b', xlab='assur ', ylab='ecart%_5_0.1 '
670       , ylim=c(min_y,max_y), col='black', pch=16)
671 lines(xpop, V2BE_pop, lty=2, col = 'blue', pch=17)
672 lines(xpop, V1V2__pop, lty=1, col="red", pch=18)
673 legend("topright", legend = c('ecart% V1 et BE', 'ecart% V2 et BE'
674                               , 'ecart% V1 et V2'), pch = c(1,NA),
675         col=c('black', 'blue', 'red'), lty=c(0,2,1), lwd=2)
676 grid()
677 require(xtable)
678 print(xtable(t(sensipop_5_0.1), digits=c(0,2,2,2,2, 2, 2)),
679        type="latex", include.rownames=TRUE)
680

```

```

681
682 ###Sensibilit population avec Tf=10 sg_s=0.1#####
683 xpop1=seq(500,5000,200)
684 xpop=c(10,100, xpop1)
685 sensipop_10_0.1=sapply(xpop, function(n) va_Q(Tf=10,sg_s=0.1, Npol=n))
686 sensipop_10_0.1 <- matrix(unlist(sensipop_10_0.1), nrow = 6, byrow = FALSE)
687 rownames(sensipop_10_0.1) <- c("BE", "V1", "V2", "ecart%_V1BE", "ecart%_V2BE",
688                               "ecart%_V1V2")
689 colnames(sensipop_10_0.1) <- xpop
690 BE_pop=sensipop_10_0.1["BE",]
691 V1BE_pop=sensipop_10_0.1["ecart%_V1BE",]
692 V2BE_pop=sensipop_10_0.1["ecart%_V2BE",]
693 V1V2_pop=sensipop_10_0.1["ecart%_V1V2",]
694 V1_pop=sensipop_10_0.1["V1",]
695 V2_pop=sensipop_10_0.1["V2",]
696 #ecartV1V2=V1_pop-V2_pop
697 min_y=min(V1BE_pop,V2BE_pop,V1V2_pop)
698 max_y=max(V1BE_pop,V2BE_pop,V1V2_pop)
699 plot(xpop, V1BE_pop, type = 'b', xlab='assur ',ylab='ecart%_10_0.1 '
700       , ylim=c(min_y,max_y), col='black', pch=16)
701 lines(xpop, V2BE_pop, lty=2, col = 'blue', pch=17)
702 lines(xpop, V1V2_pop, lty=1, col="red", pch=18)
703 legend("topright", legend = c('ecart% V1 et BE', 'ecart% V2 et BE',
704                               'ecart% V1 et V2'), pch = c(1,NA),
705       col=c('black', 'blue', 'red'), lty=c(0,2,1), lwd=2)
706 grid()
707 require(xtable)
708 print(xtable(t(sensipop_10_0.1), digits=c(0,2,2,2,2, 2, 2)),
709       type="latex", include.rownames=TRUE)
710
711 ###Sensibilite population avec Tf=10 sg_s=0.2#####
712 xpop1=seq(500,5000,200)
713 xpop=c(10,100, xpop1)
714 sensipop_10_0.2=sapply(xpop, function(n) va_Q(Tf=10,sg_s=0.2, Npol=n))
715 sensipop_10_0.2 <- matrix(unlist(sensipop_10_0.2), nrow = 6, byrow = FALSE)
716 rownames(sensipop_10_0.2) <- c("BE", "V1", "V2", "ecart%_V1BE", "ecart%_V2BE"
717                               , "ecart%_V1V2")
718 colnames(sensipop_10_0.2) <- xpop
719 BE_pop=sensipop_10_0.2["BE",]
720 V1BE_pop=sensipop_10_0.2["ecart%_V1BE",]
721 V2BE_pop=sensipop_10_0.2["ecart%_V2BE",]

```

```

722 V1V2_pop=sensipop_10_0.2["ecart%_V1V2",]
723 V1_pop=sensipop_10_0.2["V1",]
724 V2_pop=sensipop_10_0.2["V2",]
725 #ecartV1V2=V1_pop-V2_pop
726 min_y=min(V1BE_pop,V2BE_pop,V1V2_pop)
727 max_y=max(V1BE_pop,V2BE_pop,V1V2_pop)
728 plot(xpop, V1BE_pop, type = 'b', xlab='assur ',ylab='ecart%_10_0.2'
729           , ylim=c(min_y,max_y), col='black',pch=16)
730 lines(xpop, V2BE_pop, lty=2, col = 'blue', pch=17)
731 lines(xpop, V1V2_pop, lty=1, col="red", pch=18)
732 legend("topright",legend = c('ecart% V1 et BE','ecart% V2 et BE',
733           'ecart% V1 et V2'),pch = c(1,NA),
734           col=c('black','blue','red'),lty=c(0,2,1),lwd=2)
735 grid()
736
737 require(xtable)
738 print(xtable(t(sensipop_10_0.2), digits=c(0,2,2,2,2, 2, 2)), type="latex"
739           ,include.rownames=TRUE)
740
741 ###Sensibilite population avec Tf=10 sg_s=0.15#####
742 xpop1=seq(500,5000,200)
743 xpop=c(10,100,xxpop1)
744 sensipop_10_0.15=sapply(xpop,function(n) va_Q(Tf=10,sg_s=0.15, Npol=n))
745 sensipop_10_0.15 <- matrix(unlist(sensipop_10_0.15), nrow = 6, byrow = FALSE)
746 rownames(sensipop_10_0.15) <- c("BE", "V1", "V2", "ecart%_V1BE", "ecart%_V2BE"
747           , "ecart%_V1V2")
748 colnames(sensipop_10_0.15) <-xxpop
749 BE_pop=sensipop_10_0.15["BE",]
750 V1BE_pop=sensipop_10_0.15["ecart%_V1BE",]
751 V2BE_pop=sensipop_10_0.15["ecart%_V2BE",]
752 V1V2_pop=sensipop_10_0.15["ecart%_V1V2",]
753 V1_pop=sensipop_10_0.15["V1",]
754 V2_pop=sensipop_10_0.15["V2",]
755 #ecartV1V2=V1_pop-V2_pop
756 min_y=min(V1BE_pop, V2BE_pop, V1V2_pop)
757 max_y=max(V1BE_pop, V2BE_pop, V1V2_pop)
758 plot(xpop, V1BE_pop, type = 'b', xlab='assur ',ylab='ecart%_10_0.15'
759           , ylim=c(min_y,max_y), col='black',pch=16)
760 lines(xpop, V2BE_pop, lty=2, col = 'blue', pch=17)
761 lines(xpop, V1V2_pop, lty=1, col="red", pch=18)
762 legend("topright",legend = c('ecart% V1 et BE','ecart% V2 et BE',

```

```

763         'ecart% V1 et V2'), pch = c(1,NA),
764         col=c('black','blue','red'), lty=c(0,2,1), lwd=2)
765 grid()
766 require(xtable)
767 print(xtable(t(sensipop_10_0.15), digits=c(0,2,2,2,2,2, 2)),
768         type="latex", include.rownames=TRUE)
769
770 ###Sensibilite par rapport la maturit sg_s=0.1 pop=1000#####
771 xmat1=seq(5,30,5)
772 xmat=c(2, 3 ,xmat1)
773 sensimat_0.1_1000=sapply(xmat,function(n) va_Q(Tf=n, sg_s=0.1, Npol=1000))
774
775 sensimat_0.1_1000 <- matrix(unlist(sensimat_0.1_1000), nrow = 6, byrow = FALSE)
776 rownames(sensimat_0.1_1000) <- c("BE", "V1", "V2", "ecart%_V1BE",
777         "ecart%_V2BE", "ecart%_V1V2")
778 #colnames(sensimat)<-c("2", "3", "5", "10", "15", "20", "25", "30")
779 colnames(sensimat_0.1_1000)<-xmat
780 BE_mat=sensimat_0.1_1000["BE",]
781 V1BE_mat=sensimat_0.1_1000["ecart%_V1BE",]
782 V2BE_mat=sensimat_0.1_1000["ecart%_V2BE",]
783 V1V2_mat=sensimat_0.1_1000["ecart%_V1V2",]
784 V1_mat=sensimat_0.1_1000["V1",]
785 V2_mat=sensimat_0.1_1000["V2",]
786 #ecartV1V2=V1_mat-V2_mat
787 #plot
788 plot(xmat, V1BE_mat, type = 'b', xlab = 'Maturit ', ylab = 'ecart%_0.1_1000'
789 , ylim = c(min(V1BE_mat,V2BE_mat, V1V2_mat), max(V1BE_mat,V2BE_mat, V1V2_mat))
790 , col = 'black', pch = 16)
791 lines(xmat, V2BE_mat, , lty = 2, col = "blue", pch=17)
792 lines(xmat, V1V2_mat, lty=1, col="red", pch=18)
793 legend("topright", legend = c('ecart% V1 et BE', 'ecart% V2 et BE'
794         , 'ecart% V1 et V2'), pch = c(1,NA),
795         col=c('black','blue','red'), lty = c(1, 2, 3), lwd = 2)
796 grid()
797 require(xtable)
798 print(xtable(t(sensimat_0.1_1000), digits=c(0,2,2,2,2,2, 2)),
799         type="latex", include.rownames=TRUE)
800
801 ###Sensibilite par rapport la maturit sg_s=0.15 pop=1000#####
802 xmat1=seq(5,30,5)
803 xmat=c(2, 3 ,xmat1)

```

```

804 sensimat_0.15_1000=sapply(xmat,function(n) va_Q(Tf=n, sg_s=0.15, Npol=1000))
805
806 sensimat_0.15_1000 <- matrix(unlist(sensimat_0.15_1000), nrow = 6, byrow = FALSE)
807 rownames(sensimat_0.15_1000) <- c("BE", "V1", "V2", "ecart%_V1BE",
808                                "ecart%_V2BE", "ecart%_V1V2")
809 #colnames(sensimat)<-c("2", "3", "5", "10", "15", "20", "25", "30")
810 colnames(sensimat_0.15_1000)<-xmat
811 BE_mat=sensimat_0.15_1000["BE",]
812 V1BE_mat=sensimat_0.15_1000["ecart%_V1BE",]
813 V2BE_mat=sensimat_0.15_1000["ecart%_V2BE",]
814 V1V2_mat=sensimat_0.15_1000["ecart%_V1V2",]
815 V1_mat=sensimat_0.15_1000["V1",]
816 V2_mat=sensimat_0.15_1000["V2",]
817 #ecartV1V2=V1_mat-V2_mat
818 #plot
819 plot(xmat, V1BE_mat, type = 'b', xlab = 'Maturit ', ylab = 'ecart%_0.15_1000 '
820 , ylim = c(min(V1BE_mat,V2BE_mat, V1V2_mat), max(V1BE_mat,V2BE_mat, V1V2_mat))
821 , col = 'black', pch = 16)
822 lines(xmat, V2BE_mat, , lty = 2, col = "blue", pch=17)
823 lines(xmat, V1V2_mat, lty=1, col="red", pch=18)
824 legend("bottomright",legend = c('ecart% V1 et BE','ecart% V2 et BE'
825                                , 'ecart% V1 et V2'),pch = c(1,NA),
826        col=c('black','blue', 'red'), lty = c(1, 2, 3), lwd = 2)
827 grid()
828 require(xtable)
829 print(xtable(t(sensimat_0.15_1000), digits=c(0,2,2,2,2,2, 2)),
830        type="latex",include.rownames=TRUE)
831
832
833 ###Sensibilite par rapport la maturit sg_s=0.2 pop=1000#####
834 xmat1=seq(5,30,5)
835 xmat=c(2, 3 ,xmat1)
836 sensimat_0.2_1000=sapply(xmat,function(n) va_Q(Tf=n, sg_s=0.2, Npol=1000))
837
838 sensimat_0.2_1000 <- matrix(unlist(sensimat_0.2_1000), nrow = 6, byrow = FALSE)
839 rownames(sensimat_0.2_1000) <- c("BE", "V1", "V2", "ecart%_V1BE",
840                                "ecart%_V2BE", "ecart%_V1V2")
841 #colnames(sensimat)<-c("2", "3", "5", "10", "15", "20", "25", "30")
842 colnames(sensimat_0.2_1000)<-xmat
843 BE_mat=sensimat_0.2_1000["BE",]
844 V1BE_mat=sensimat_0.2_1000["ecart%_V1BE",]

```

```

845 V2BE_mat=sensimat_0.2_1000["ecart%_V2BE" ,]
846 V1V2_mat=sensimat_0.2_1000["ecart%_V1V2" ,]
847 V1_mat=sensimat_0.2_1000["V1" ,]
848 V2_mat=sensimat_0.2_1000["V2" ,]
849 #ecartV1V2=V1_mat-V2_mat
850 #plot
851 plot(xmat, V1BE_mat, type = 'b', xlab = 'Maturit ', ylab = 'ecart%_0.2_1000 '
852 , ylim = c(min(V1BE_mat,V2BE_mat, V1V2_mat), max(V1BE_mat,V2BE_mat, V1V2_mat))
853 , col = 'black', pch = 16)
854 lines(xmat, V2BE_mat, , lty = 2, col = "blue", pch=17)
855 lines(xmat, V1V2_mat, lty=1, col="red", pch=18)
856 legend("topright", legend = c('ecart V1% et BE', 'ecart% V2 et BE'
857 , 'ecart% V1 et V2'), pch = c(1,NA),
858 col=c('black', 'blue', 'red'), lty = c(1, 2, 3), lwd = 2)
859 grid()
860 require(xtable)
861 print(xtable(t(sensimat_0.2_1000), digits=c(0,2,2,2,2,2, 2)), type="latex"
862 , include.rownames=TRUE)
863
864
865 ###Sensibilite par rapport la maturit sg_s=0.2 pop=100#####
866 xmat1=seq(5,30,5)
867 xmat=c(2, 3 ,xmat1)
868 sensimat_0.2_100=sapply(xmat, function(n) va_Q(Tf=n, sg_s=0.2, Npol=100))
869
870 sensimat_0.2_100 <- matrix(unlist(sensimat_0.2_100), nrow = 6, byrow = FALSE)
871 rownames(sensimat_0.2_100) <- c("BE", "V1", "V2", "ecart%_V1BE", "ecart%_V2BE"
872 , "ecart%_V1V2")
873 #colnames(sensimat)<-c("2", "3", "5", "10", "15", "20", "25", "30")
874 colnames(sensimat_0.2_100)<-xmat
875 BE_mat=sensimat_0.2_100["BE" ,]
876 V1BE_mat=sensimat_0.2_100["ecart%_V1BE" ,]
877 V2BE_mat=sensimat_0.2_100["ecart%_V2BE" ,]
878 V1V2_mat=sensimat_0.2_100["ecart%_V1V2" ,]
879 V1_mat=sensimat_0.2_100["V1" ,]
880 V2_mat=sensimat_0.2_100["V2" ,]
881 #ecartV1V2=V1_mat-V2_mat
882 #plot
883 plot(xmat, V1BE_mat, type = 'b', xlab = 'Maturit ', ylab = 'ecart%_0.2_100 '
884 , ylim = c(min(V1BE_mat,V2BE_mat, V1V2_mat), max(V1BE_mat,V2BE_mat, V1V2_mat))
885 , col = 'black', pch = 16)

```

```

886 lines(xmat, V2BE_mat, , lty = 2, col = "blue", pch=17)
887 lines(xmat, V1V2_mat, lty=1, col="red", pch=18)
888 legend("bottomright", legend = c('ecart% V1 et BE', 'ecart% V2 et BE',
889                                'ecart% V1 et V2'), pch = c(1, NA),
890                                col=c('black', 'blue', 'red'), lty = c(1, 2, 3), lwd = 2)
891 grid()
892 require(xtable)
893 print(xtable(t(sensimat_0.2_100), digits=c(0,2,2,2,2,2, 2)), type="latex",
894        include.rownames=TRUE)
895
896 ###Sensibilit par rapport la maturit sg_s=0.2 pop=10#####
897 xmat1=seq(5,30,5)
898 xmat=c(2, 3 ,xmat1)
899 sensimat_0.2_10=sapply(xmat, function(n) va_Q(Tf=n, sg_s=0.2, Npol=10))
900
901 sensimat_0.2_10 <- matrix(unlist(sensimat_0.2_10), nrow = 6, byrow = FALSE)
902 rownames(sensimat_0.2_10) <- c("BE", "V1", "V2", "ecart%_V1BE", "ecart%_V2BE",
903                               "ecart%_V1V2")
904 #colnames(sensimat)<-c("2", "3", "5", "10", "15", "20", "25", "30")
905 colnames(sensimat_0.2_10)<-xmat
906 BE_mat=sensimat_0.2_10["BE",]
907 V1BE_mat=sensimat_0.2_10["ecart%_V1BE",]
908 V2BE_mat=sensimat_0.2_10["ecart%_V2BE",]
909 V1V2_mat=sensimat_0.2_10["ecart%_V1V2",]
910 V1_mat=sensimat_0.2_10["V1",]
911 V2_mat=sensimat_0.2_10["V2",]
912 #ecartV1V2=V1_mat-V2_mat
913 #plot
914 plot(xmat, V1BE_mat, type = 'b', xlab = 'Maturit ', ylab = 'ecart%_0.2_10',
915       ylim = c(min(V1BE_mat, V2BE_mat, V1V2_mat), max(V1BE_mat, V2BE_mat, V1V2_mat)),
916       col = 'black', pch = 16)
917 lines(xmat, V2BE_mat, , lty = 2, col = "blue", pch=17)
918 lines(xmat, V1V2_mat, lty=1, col="red", pch=18)
919 legend("topright", legend = c('ecart% V1 et BE', 'ecart% V2 et BE',
920                               'ecart% V1 et V2'), pch = c(1, NA),
921                               col=c('black', 'blue', 'red'), lty = c(1, 2, 3), lwd = 2)
922 grid()
923 require(xtable)
924 print(xtable(t(sensimat_0.2_10), digits=c(0,2,2,2,2,2, 2)), type="latex",
925        include.rownames=TRUE)
926

```

```

927 ###Sensibilite par rapport la volatilit avec Tf=15 pop=1000#####
928 xvol1=seq(0.05,0.2, 0.02)
929 xvol=c(0.01, 0.03 ,xvol1)
930 sensivol_15_1000=sapply(xvol,function(n) va_Q(Tf=15, sg_s=n, Npol=1000))
931
932 sensivol_15_1000 <- matrix(unlist(sensivol_15_1000), nrow = 6, byrow = FALSE)
933 rownames(sensivol_15_1000) <- c("BE", "V1", "V2", "ecart%_V1BE", "ecart%_V2BE"
934 , "ecart%_V1V2" )
935 colnames(sensivol_15_1000)<-xvol
936 BE_vol=sensivol_15_1000["BE" ,]
937 V1BE_vol=sensivol_15_1000["ecart%_V1BE" ,]
938 V2BE_vol=sensivol_15_1000["ecart%_V2BE" ,]
939 V1V2_vol=sensivol_15_1000["ecart%_V1V2" ,]
940 V1_vol=sensivol_15_1000["V1" ,]
941 V2_vol=sensivol_15_1000["V2" ,]
942
943
944 #plot
945 plot(xvol, V1BE_vol, type = 'b', xlab = 'Volatilit ', ylab = 'ecart%_15_1000',
946 ylim = c(min(V1BE_vol, V2BE_vol, V1V2_vol), max(V1BE_vol, V2BE_vol, V1V2_vol)),
947 col = 'black', pch = 16)
948 lines(xvol, V2BE_vol, , lty = 2, col = "blue", pch=17)
949 lines(xvol, V1V2_vol, lty=1, col="red", pch=18)
950 legend("topright", legend = c('ecart% V1 et BE', 'ecart% V2 et BE',
951 'ecart% V1 et V2'), pch = c(1, NA),
952 col=c('black', 'blue', 'red'), lty = c(1, 2, 3), lwd = 2)
953 grid()
954
955
956 require(xtable)
957 print(xtable(t(sensivol_15_1000), digits=c(0,2,2,2,2,2, 2)), type="latex"
958 ,include.rownames=TRUE)
959
960
961 ###Sensibilit par rapport la volatilit avec Tf=10 pop=1000#####
962 xvol1=seq(0.05,0.2, 0.02)
963 xvol=c(0.01, 0.03 ,xvol1)
964 sensivol_10_1000=sapply(xvol,function(n) va_Q(Tf=10, sg_s=n, Npol=1000))
965
966 sensivol_10_1000<- matrix(unlist(sensivol_10_1000), nrow = 6, byrow = FALSE)
967 rownames(sensivol_10_1000) <- c("BE", "V1", "V2", "ecart%_V1BE", "ecart%_V2BE"

```

```

968         , "ecart%_V1V2" )
969 colnames(sensivol_10_1000)<-xvol
970 BE_vol=sensivol_10_1000["BE" ,]
971 V1BE_vol=sensivol_10_1000["ecart%_V1BE" ,]
972 V2BE_vol=sensivol_10_1000["ecart%_V2BE" ,]
973 V1V2_vol=sensivol_10_1000["ecart%_V1V2" ,]
974 V1_vol=sensivol_10_1000["V1" ,]
975 V2_vol=sensivol_10_1000["V2" ,]
976
977
978 #plot
979 plot(xvol, V1BE_vol, type = 'b', xlab = 'Volatilit ', ylab = 'ecart%_10_1000 '
980 , ylim = c(min(V1BE_vol ,V2BE_vol ,V1V2_vol), max(V1BE_vol ,V2BE_vol , V1V2_vol))
981 , col = 'black', pch = 16)
982 lines(xvol, V2BE_vol, , lty = 2, col = "blue", pch=17)
983 lines(xvol, V1V2_vol, lty=1, col="red", pch=18)
984 legend("topright", legend = c('ecart% V1 et BE', 'ecart% V2 et BE',
985                               'ecart% V1 et V2'), pch = c(1,NA),
986        col=c('black', 'blue', 'red'), lty = c(1, 2, 3), lwd = 2)
987 grid()
988
989 require(xtable)
990 print(xtable(t(sensivol_10_1000), digits=c(0,2,2,2,2,2, 2)),
991       type="latex", include.rownames=TRUE)
992
993
994
995
996 ###Sensibilite par rapport la volatilit avec Tf=10 pop=100#####
997 xvoll=seq(0.05,0.2, 0.02)
998 xvol=c(0.01, 0.03 ,xvoll)
999 sensivol_10_100=sapply(xvol, function(n) va_Q(Tf=10, sg_s=n, Npol=100))
1000
1001 sensivol_10_100<- matrix(unlist(sensivol_10_100), nrow = 6, byrow = FALSE)
1002 rownames(sensivol_10_100) <- c("BE", "V1", "V2", "ecart%_V1BE", "ecart%_V2BE"
1003                               , "ecart%_V1V2" )
1004 colnames(sensivol_10_100)<-xvol
1005 BE_vol=sensivol_10_100["BE" ,]
1006 V1BE_vol=sensivol_10_100["ecart%_V1BE" ,]
1007 V2BE_vol=sensivol_10_100["ecart%_V2BE" ,]
1008 V1V2_vol=sensivol_10_100["ecart%_V1V2" ,]

```

```

1009 V1_vol=sensivol_10_100["V1" ,]
1010 V2_vol=sensivol_10_100["V2" ,]
1011
1012
1013 #plot
1014 plot(xvol, V1BE_vol, type = 'b', xlab = 'Volatilit ', ylab = 'ecart%_10_100'
1015 , ylim = c(min(V1BE_vol,V2BE_vol,V1V2_vol), max(V1BE_vol,V2BE_vol, V1V2_vol))
1016 , col = 'black', pch = 16)
1017 lines(xvol, V2BE_vol, , lty = 2, col = "blue", pch=17)
1018 lines(xvol, V1V2_vol, lty=1, col="red", pch=18)
1019 legend("topright", legend = c('ecart% V1 et BE', 'ecart% V2 et BE',
1020 'ecart% V1 et V2'), pch = c(1,NA),
1021 col=c('black', 'blue', 'red'), lty = c(1, 2, 3), lwd = 2)
1022 grid()
1023
1024
1025
1026 require(xtable)
1027 print(xtable(t(sensivol_10_100), digits=c(0,2,2,2,2,2, 2)), type="latex",
1028 include.rownames=TRUE)
1029
1030
1031 ###Sensibilite par rapport la volatilit avec Tf=10 pop=10#####
1032 xvol1=seq(0.05,0.2, 0.02)
1033 xvol=c(0.01, 0.03 ,xvol1)
1034 sensivol_10_10=sapply(xvol, function(n) va_Q(Tf=10, sg_s=n, Npol=10))
1035
1036 sensivol_10_10<- matrix(unlist(sensivol_10_10), nrow = 6, byrow = FALSE)
1037 rownames(sensivol_10_10) <- c("BE", "V1", "V2", "ecart%_V1BE", "ecart%_V2BE",
1038 "ecart%_V1V2" )
1039 colnames(sensivol_10_10)<-xvol
1040 BE_vol=sensivol_10_10["BE" ,]
1041 V1BE_vol=sensivol_10_10["ecart%_V1BE" ,]
1042 V2BE_vol=sensivol_10_10["ecart%_V2BE" ,]
1043 V1V2_vol=sensivol_10_10["ecart%_V1V2" ,]
1044 V1_vol=sensivol_10_10["V1" ,]
1045 V2_vol=sensivol_10_10["V2" ,]
1046
1047
1048 #plot
1049 plot(xvol, V1BE_vol, type = 'b', xlab = 'Volatilit ', ylab = 'ecart%_10_10',

```

```

1050 ylim = c(min(V1BE_vol ,V2BE_vol ,V1V2_vol) , max(V1BE_vol ,V2BE_vol , V1V2_vol)) ,
1051 col = 'black' , pch = 16)
1052 lines(xvol , V2BE_vol , , lty = 2, col = "blue" , pch=17)
1053 lines(xvol , V1V2_vol , lty=1, col="red" , pch=18)
1054 legend("topright", legend = c('ecart% V1 et BE' , 'ecart% V2 et BE' ,
1055                               'ecart% V1 et V2') , pch = c(1,NA) ,
1056       col=c('black' , 'blue' , 'red') , lty = c(1, 2, 3) , lwd = 2)
1057 grid()
1058
1059
1060
1061 require(xtable)
1062 print(xtable(t(sensivol_10_10) , digits=c(0,2,2,2,2,2, 2)) , type="latex" ,
1063       include.rownames=TRUE)
1064
1065
1066 ###Sensibilite par rapport la volatilit avec Tf=5 pop=10#####
1067 xvol1=seq(0.05,0.2 , 0.02)
1068 xvol=c(0.01 , 0.03 ,xvol1)
1069 sensivol_5_10=sapply(xvol , function(n) va_Q(Tf=5, sg_s=n, Npol=10))
1070
1071 sensivol_5_10<- matrix(unlist(sensivol_5_10) , nrow = 6, byrow = FALSE)
1072 rownames(sensivol_5_10) <- c("BE" , "V1" , "V2" , "ecart%_V1BE" , "ecart%_V2BE" ,
1073                               "ecart%_V1V2" )
1074 colnames(sensivol_5_10)<-xvol
1075 BE_vol=sensivol_5_10["BE" ,]
1076 V1BE_vol=sensivol_5_10["ecart%_V1BE" ,]
1077 V2BE_vol=sensivol_5_10["ecart%_V2BE" ,]
1078 V1V2_vol=sensivol_5_10["ecart%_V1V2" ,]
1079 V1_vol=sensivol_5_10["V1" ,]
1080 V2_vol=sensivol_5_10["V2" ,]
1081
1082
1083 #plot
1084 plot(xvol , V1BE_vol , type = 'b' , xlab = 'Volatilit ' , ylab = 'ecart%_5_10' ,
1085 ylim = c(min(V1BE_vol ,V2BE_vol ,V1V2_vol) , max(V1BE_vol ,V2BE_vol , V1V2_vol)) ,
1086 col = 'black' , pch = 16)
1087 lines(xvol , V2BE_vol , , lty = 2, col = "blue" , pch=17)
1088 lines(xvol , V1V2_vol , lty=1, col="red" , pch=18)
1089 legend("topright", legend = c('ecart% V1 et BE' , 'ecart% V2 et BE' ,
1090                               'ecart% V1 et V2') , pch = c(1,NA) ,

```

```

1091     col=c('black','blue','red'), lty = c(1, 2, 3), lwd = 2)
1092 grid()
1093
1094
1095
1096 require(xtable)
1097 print(xtable(t(sensivol_5_10), digits=c(0,2,2,2,2,2, 2)), type="latex",
1098       include.rownames=TRUE)
1099
1100
1101 ###Sensibilite par rapport la volatilit avec Tf=5 pop=100#####
1102 xvol1=seq(0.05,0.2, 0.02)
1103 xvol=c(0.01, 0.03 ,xvol1)
1104 sensivol_5_100=sapply(xvol,function(n) va_Q(Tf=5, sg_s=n, Npol=100))
1105
1106 sensivol_5_100<- matrix(unlist(sensivol_5_100), nrow = 6, byrow = FALSE)
1107 rownames(sensivol_5_100) <- c("BE", "V1", "V2", "ecart%_V1BE", "ecart%_V2BE",
1108                               "ecart%_V1V2" )
1109 colnames(sensivol_5_100)<-xvol
1110 BE_vol=sensivol_5_100["BE",]
1111 V1BE_vol=sensivol_5_100["ecart%_V1BE",]
1112 V2BE_vol=sensivol_5_100["ecart%_V2BE",]
1113 V1V2_vol=sensivol_5_100["ecart%_V1V2",]
1114 V1_vol=sensivol_5_100["V1",]
1115 V2_vol=sensivol_5_100["V2",]
1116
1117
1118 #plot
1119 plot(xvol, V1BE_vol, type = 'b', xlab = 'Volatilit ', ylab = 'ecart%_5_100',
1120      ylim = c(min(V1BE_vol,V2BE_vol,V1V2_vol), max(V1BE_vol,V2BE_vol,V1V2_vol)),
1121      col = 'black', pch = 16)
1122 lines(xvol, V2BE_vol, , lty = 2, col = "blue", pch=17)
1123 lines(xvol, V1V2_vol, lty=1, col="red", pch=18)
1124 legend("topright",legend = c('ecart% V1 et BE','ecart% V2 et BE',
1125                              'ecart% V1 et V2'),pch = c(1,NA),
1126       col=c('black','blue','red'), lty = c(1, 2, 3), lwd = 2)
1127 grid()
1128
1129 require(xtable)
1130 print(xtable(t(sensivol_5_100), digits=c(0,2,2,2,2,2, 2)), type="latex",
1131       include.rownames=TRUE)

```

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
Faculté des sciences

Place des Sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/sc