

# Etude numérique de la convection de Rayleigh-Bénard dans une cavité cubique

Mémoire présenté par  
**Grégoire DUFRASNE**

en vue de l'obtention du grade de Master  
**Ingénieur Civil Mécanicien**

Promoteur(s)  
**Miltiadis PAPALEXANDRIS**

Lecteur(s)  
**William Andrew HAY, Vincent LEGAT**

Année académique 2017-2018





# Remerciements

J'adresse mes sincères remerciements à toutes les personnes qui m'ont aidé dans l'élaboration de ce mémoire.

Je tiens d'abord à remercier le Professeur Miltiadis Papalexandris, mon promoteur de mémoire, pour sa disponibilité et ses avis éclairés sur la problématique étudiée. Je le remercie pour son écoute et les solutions qu'il m'a apportées pour mener à bien ce projet.

Je tiens ensuite à remercier Monsieur William Hay pour ses encouragements et pour son aide si importante dans la conduite de ce travail. Je tiens particulièrement à le remercier pour le temps qu'il m'a consacré et pour ses mails qui m'ont plus d'une fois permis d'avancer dans le travail. J'ai également été très heureux de pouvoir travailler avec lui mon anglais et lui souhaite bonne chance dans la poursuite de sa thèse.

Je souhaite aussi remercier Monsieur Constantin Sula pour cette fonction capable d'affiner les points d'un maillage près des parois et pour l'installation de l'application `funkySetFields` sur mon ordinateur.

Je remercie Monsieur Thomas Keutgen pour son aide apportée lors du lancement de mes simulations sur le CECI.

Je remercie le Professeur Vincent Legat qui a accepté de faire partie de mon jury.

Je tiens enfin à remercier ma famille pour son soutien si précieux.

# Résumé

Depuis l'accident nucléaire de Fukushima, de nombreuses recherches sont menées pour comprendre les différentes phases de refroidissement du combustible nucléaire usé stocké dans les piscines de désactivation. En particulier, ces études se concentrent sur la compréhension des phénomènes physiques mis en jeu lors d'un accident de perte de refroidissement de ces combustibles, notamment à l'aide de modèles simplifiés.

Dans ce travail de fin d'études, nous avons étudié, à l'aide d'outils numériques, le phénomène de convection naturelle de Rayleigh-Bénard dans une cavité cubique remplie d'eau, chauffée par sa paroi inférieure, et dont les parois latérales sont parfaitement conductrices. L'analyse a été menée pour trois nombres de Rayleigh ( $Ra = 10^4$ ,  $Ra = 5 \cdot 10^4$  et  $Ra = 10^7$ ). L'écoulement est d'abord laminaire et stationnaire, mais l'augmentation du nombre de Rayleigh rend progressivement l'écoulement turbulent.

Les équations de Naviers-Stockes ont été résolues avec deux solveurs du logiciel OpenFOAM basé sur la méthode des volumes finis : `buoyantBoussinesqPimpleFoam` et `buoyantPimpleFoam`. Le premier utilise les hypothèses de Boussinesq dans les équations de conservation, le second prend en compte la variation des propriétés physiques du fluide avec la température. Une comparaison des résultats fournis par ces deux solveurs est présentée. Pour le cas turbulent, nous avons utilisé une simulation LES basée sur le modèle de Smagorinsky-Lilly.

Les résultats obtenus sont également comparés à d'autres résultats numériques trouvés dans la littérature ainsi qu'à des données expérimentales.

La comparaison montre que les résultats sont cohérents pour les configurations à nombre de Rayleigh modérés ( $Ra = 10^4$  et  $Ra = 5 \cdot 10^4$ ). Le calcul des transferts thermiques et des profils de vitesse montrent des résultats satisfaisants. Les résultats à nombre de Rayleigh élevé ( $Ra = 10^7$ ) ne sont pas tout à fait en accord avec les conclusions des études de référence. Les points d'amélioration à apporter pour ce cas sont détaillés dans ce rapport.

# Abstract

Since the Fukushima nuclear accident, much research has been conducted to understand the different cooling phases of spent nuclear fuel stored in the deactivation pools. In particular, these studies focus on the understanding of the physical phenomena involved in an accident of loss of cooling of these fuels, in particular using simplified models.

In this Master thesis, we studied using numerical tools Rayleigh-Bénard's natural convection phenomenon in a cubic cavity filled with water, heated by its lower wall, and whose side walls are perfectly conductive. The analysis was conducted for three Rayleigh numbers ( $Ra = 10^4$ ,  $Ra = 5 \cdot 10^4$  and  $Ra = 10^7$ ). The flow is initially laminar and stationary, but the increase in the number of Rayleigh gradually makes the flow turbulent.

The Naviers-Stockes equations were solved with two solvers of OpenFOAM software based on the finite volume method : `buoyantBoussinesqPimpleFoam` and `buoyantPimpleFoam`. The first uses the Boussinesq hypotheses in the conservation equations, the second takes into account the variation of the physical properties of the fluid with the temperature. A comparison of the results provided by these two solvers is presented. For the turbulent case, we used an LES simulation based on the Smagorinsky-Lilly model.

The results obtained are also compared with other numerical results found in the literature as well as with experimental data.

The comparison shows that the results are consistent for moderate Rayleigh number configurations ( $Ra = 10^4$  and  $Ra = 5 \cdot 10^4$ ). The calculation of thermal transfers and velocity profiles show satisfactory results. The high Rayleigh number results ( $Ra = 10^7$ ) do not quite agree with the findings of the baseline studies. The areas of improvement for this case are detailed in this report.

# Table des matières

<b>Remerciements</b>	<b>ii</b>
<b>Résumé</b>	<b>iii</b>
<b>Abstract</b>	<b>iv</b>
<b>1 Mise en contexte</b>	<b>1</b>
1.1 Les piscines de désactivation en configuration normale . . . . .	1
1.2 Les piscines de désactivation en configuration accidentelle . . . . .	3
1.3 Objectifs et plan du projet . . . . .	4
<b>2 La convection naturelle de Rayleigh-Bénard dans une cavité</b>	<b>6</b>
2.1 Description du problème . . . . .	6
2.2 Equations de conservation . . . . .	7
2.3 Hypothèses et simplifications . . . . .	7
2.4 Conditions frontières . . . . .	9
2.5 Le nombre de Rayleigh . . . . .	10
2.6 Validité de l’hypothèse de Boussinesq . . . . .	11
2.7 Etude expérimentale . . . . .	12
<b>3 Outils numériques</b>	<b>15</b>
3.1 Le logiciel OpenFOAM . . . . .	15
3.2 Equations du solveur buoyantBoussinesqPimpleFoam . . . . .	16
3.3 Equations du solveur buoyantPimpleFoam . . . . .	17
3.4 Modélisation de la turbulence . . . . .	18
3.4.1 Equations résolues par LES . . . . .	19
3.4.2 Modèle SGS de Smagorinsky-Lilly . . . . .	21
3.5 Discrétisation des équations et du domaine . . . . .	22
3.6 Algorithme PISO . . . . .	27
<b>4 Configuration des cas dans OpenFOAM</b>	<b>30</b>
4.1 Propriétés physiques de l’eau . . . . .	31
4.2 Conditions frontières . . . . .	32
4.3 Conditions initiales . . . . .	33
4.4 Modèle de turbulence . . . . .	33

4.5	La résolution du maillage . . . . .	34
4.5.1	Pour les nombres de Rayleigh modérés . . . . .	34
4.5.2	Pour un nombre de Rayleigh élevé . . . . .	35
4.6	Méthode de calcul du nombre de Nusselt . . . . .	37
<b>5</b>	<b>Résultats et discussion</b>	<b>39</b>
5.1	Expérience à faible nombre de Rayleigh . . . . .	39
5.2	Expérience à nombre de Rayleigh moyen . . . . .	45
5.3	Expérience à haut nombre de Rayleigh . . . . .	51
5.4	Conclusions . . . . .	56
	<b>Conclusion</b>	<b>58</b>
<b>A</b>	<b>Exemple d'un cas OpenFoam pour le solveur buoyantPimpleFoam</b>	<b>60</b>
A.1	Dossier 0 . . . . .	60
A.2	Dossier <code>constant</code> . . . . .	64
A.3	Dossier <code>system</code> . . . . .	67

# Liste des abréviations et des symboles

$\mu$	Viscosité dynamique [ $\frac{kg}{ms}$ ]
$\nu$	Viscosité cinématique [ $m^2/s$ ]
$\beta$	Coefficient de dilatation thermique [1/K]
$\rho$	Masse volumique [ $kg/m^3$ ]
$\alpha$	Diffusivité thermique [ $m^2/s$ ]
$\kappa$	Conductivité thermique [ $W/mK$ ]
$c_p$	Chaleur massique [ $J/kgK$ ]
$h$	Coefficient de transfert thermique par convection [ $W/m^2K$ ]
$Q$	Flux thermique [ $W$ ]
$p$	Pression [ $N/m^2$ ]
$t$	Temps [s]
$T$	Température [K]
$L$	Hauteur de la cavité [m]
$d$	Épaisseur des parois latérales [m]
$A$	Surface des parois [ $m^2$ ]
$V$	Volume de la cavité [ $m^3$ ]
$Nu$	Nombre de Nusselt ( $= \frac{hL}{\kappa}$ )
$Ra$	Nombre de Rayleigh ( $= \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha}$ )
$Pr$	Nombre de Prandtl ( $= \nu/\alpha$ )
$\Gamma$	Facteur de forme
$x,y,z$	Coordonnées cartésiennes
$\lambda_2$	Seconde valeur propre du tenseur du gradient de la vitesse

## Indices et exposants

$i$	Valeur initiale
$C$	Surface froide
$H$	Surface chaude
$0$	Valeur de référence évaluée à la température moyenne $T_0$
*	Quantité adimensionnelle

# Chapitre 1

## Mise en contexte

Depuis l'accident de Fukushima, une attention particulière est apportée à l'étude des piscines de désactivation de combustible nucléaire utilisé en condition accidentelle. Situées dans un bâtiment proche du réacteur, ces piscines remplissent deux rôles principaux. Premièrement, elles permettent le stockage et le refroidissement du combustible nucléaire utilisé jusqu'à ce que sa puissance résiduelle soit suffisamment faible pour pouvoir assurer son traitement et son évacuation hors site. Ensuite, les piscines reçoivent les assemblages de combustible lors des phases de rechargement du coeur du réacteur. La figure 1.1 situe la piscine de désactivation par rapport à la place du réacteur dans un bâtiment réacteur d'une centrale nucléaire.

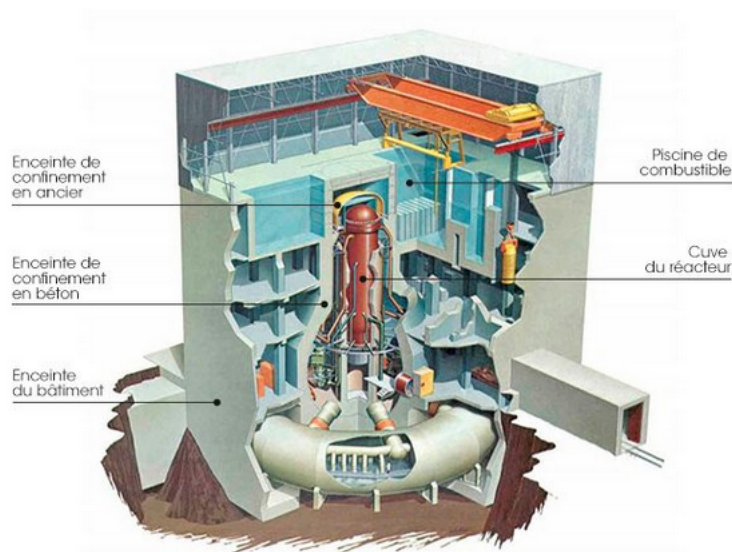


FIGURE 1.1 – Vue générale d'un bâtiment réacteur BWR [2]

### 1.1 Les piscines de désactivation en configuration normale

Le combustible nucléaire est conditionné dans des pastilles cylindriques de 8 mm de diamètre. Ces pastilles de combustible sont empilées dans les barreaux ou crayons de combustible protégés par une gaine en zirconium. Les crayons ont une longueur de 4 m. Les crayons sont réunis pour former un assemblage. Ces assemblages de combustibles sont posés verticalement dans le fond de

la piscine et recouverts d'une hauteur d'eau de 5 à 9 m en fonction de la conception de la piscine. Ils peuvent y rester plusieurs années avant leur retraitement. Pour un réacteur de 900  $MWe$  la profondeur de la piscine est de 12 m pour un volume associé d'environ 1300  $m^3$ . La figure 1.2 représente la configuration classique d'une piscine de désactivation.

Même après l'arrêt du réacteur, l'activité radioactive  $\gamma$  et  $\beta$  des produits de fission cause encore un dégagement de chaleur important (24h après l'arrêt d'un réacteur de 3000  $MW_{th}$  ayant fonctionné un an à sa pleine puissance, le dégagement de chaleur approche les 20  $MW_{th}$ ). Les piscines de désactivation se chargent du refroidissement continu de ce combustible utilisé après son retrait du réacteur.

En conditions normales, l'eau de la piscine ne peut pas dépasser la température limite fixée par les spécifications techniques. Pour une centrale de 900  $MWe$ , l'eau doit être maintenue à une température de  $50^{\circ}C$ . La piscine de désactivation est refroidie par des pompes électriques. Ces pompes font circuler l'eau de la piscine dans un système d'échangeurs de chaleur. Cette eau, une fois refroidie, est réinjectée dans la piscine. Tout le processus se déroule en circuit fermé. Dans la piscine, l'eau proche des assemblages, par augmentation de sa température, voit sa masse volumique diminuer et remonte vers la surface où elle est refroidie. Comme l'eau froide a une masse volumique plus importante, elle redescend vers le fond, une boucle de convection naturelle s'installe. Compte tenu de ce mouvement, l'eau froide est injectée dans le fond de la piscine, à proximité des assemblages, l'eau chaude est pompée près de la surface.

En plus de son rôle de fluide caloporteur, l'eau constitue un blindage efficace contre les radiations. Grâce à un ajout d'acide borique, elle devient également un absorbeur efficace de neutrons et empêche donc l'initiation d'une réaction de fission.

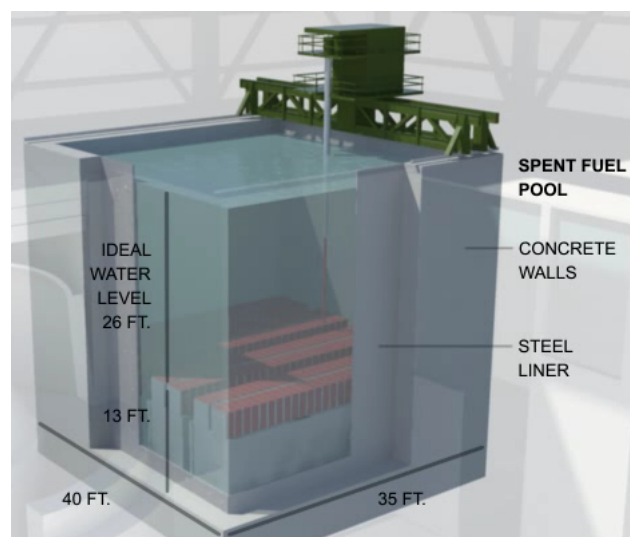


FIGURE 1.2 – Piscine de désactivation de combustible nucléaire utilisé [3]

## 1.2 Les piscines de désactivation en configuration accidentelle

L'endommagement du circuit de refroidissement peut entre autres être produit :

- Par une panne du réseau électrique qui provoque l'arrêt des pompes d'alimentation du système. Cet évènement s'est produit en 2011 lors de l'accident de Fukushima durant lequel les installations électriques de la centrale furent endommagées par un séisme.
- Par l'endommagement des conduites d'alimentation avec pour conséquence une perte d'eau.

L'arrêt du circuit de refroidissement entraîne dans la piscine plusieurs phénomènes identifiés sur la figure 1.3 :

- La puissance résiduelle qui se dégage des combustibles usés situés dans le fond de la piscine cause une augmentation de la température de l'eau dans cette zone par rapport à la zone proche de la surface libre. Cette différence de température provoque l'apparition d'une boucle de convection naturelle dans la piscine.
- Les transferts de chaleur s'effectuent au niveau de la surface libre par contact avec l'atmosphère ou au travers des parois en béton de la piscine. La chaleur est évacuée par évaporation à la surface. L'évaporation cause une baisse du niveau d'eau.
- Une zone d'ébullition apparaît ensuite près de la surface libre car la pression hydrostatique y est moins importante. En condition de saturation, un phénomène d'ébullition nucléée peut aussi apparaître au niveau des assemblages de combustibles. La présence de cette singularité est fonction de la densité du flux de chaleur à la surface des assemblages et du refroidissement par les cellules de convection naturelle.

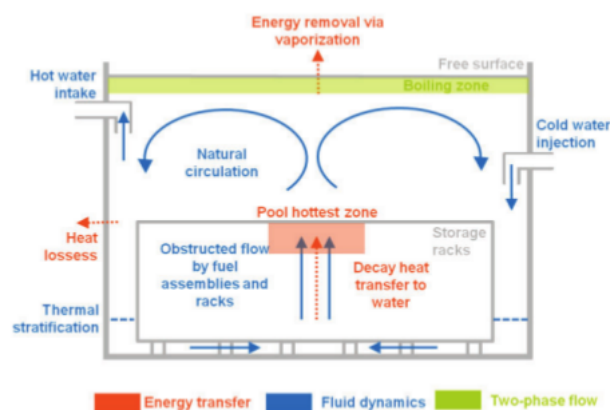


FIGURE 1.3 – Ensemble des phénomènes physiques dans une piscine de désactivation en situation accidentelle [21]

Un problème supplémentaire concerne les pompes d'alimentation du système de refroidissement. Il est possible lors de sa remise en route après un incident que les conditions de température

et de pression à l'entrée de la pompe d'évacuation de l'eau chaude soient proches des conditions à saturation. Une mise à nu de l'entrée ou une aspiration de vapeur dans la pompe peut causer de graves problèmes de cavitation et empêcher la remise en route du système de refroidissement.

La baisse du niveau d'eau est à éviter absolument. Un critère de sécurité est d'empêcher la mise à nu partielle ou complète des assemblages de combustible irradié. Le revêtement des assemblages combustibles s'oxyde au contact de l'air et de la vapeur. Cette réaction hautement exothermique cause une dégradation sévère des assemblages, l'émission de particules radioactives et une production importante d'hydrogène.

En général, 3 à 5 jours sont nécessaires pour que le niveau d'eau atteigne la surface des assemblages si le système de refroidissement est défectueux et en l'absence de toute autre arrivée d'eau pour une puissance résiduelle totale de 10 MW. Malgré ce temps dont on dispose avant la mise à nu des combustibles, l'accident de Fukushima a démontré la difficulté d'assurer un refroidissement optimal de la piscine en cas d'une panne du système de refroidissement ou d'une perte d'eau dans le circuit. L'objectif de nombreuses études est de comprendre et de modéliser les phénomènes se produisant dans ces piscines en conditions accidentelles. Le but est de trouver des mesures plus appropriées en cas d'accident pour minimiser les impacts sur l'environnement.

### 1.3 Objectifs et plan du projet

La modélisation et l'étude des phénomènes physiques décrits à la section 1.2 est complexe. Dans ce travail, nous nous sommes limités à l'étude de la convection naturelle dans une cavité remplie d'eau et chauffée par sa paroi inférieure. Cette configuration peut-être rencontrée dans les premiers instants après l'arrêt du système de refroidissement. Au début du phénomène, l'écoulement reste laminaire mais l'augmentation de la température de l'eau proche de la paroi chaude rend les cellules de convection instables et introduit des phénomènes de turbulence difficiles à modéliser. Ce problème simplifié est plus connu sous le nom de problème de Rayleigh-Bénard. A l'avenir, le modèle utilisé pour ce travail devra être progressivement complexifié pour simuler l'ensemble des phénomènes physiques observés dans une piscine de désactivation en conditions accidentelles.

L'objectif de ce travail était de fournir un outil numérique fiable pour l'étude des cellules de convection dans une cavité cubique chauffée par le bas et remplie d'eau pour des régimes laminaires et turbulents. Un intérêt particulier a été apporté à la reproduction des structures d'écoulement, au calcul des profils de vitesse et des transferts thermiques, à la modélisation de la turbulence.

La fiabilité du code développé a été évaluée par comparaison avec les résultats d'études numériques et expérimentales. Nous nous sommes d'ailleurs particulièrement appuyés sur les articles de Valencia et al. [25] et de Pallares et al. [22].

L'ensemble des simulations ont été menées avec le logiciel de CFD OpenFOAM avec lequel il a fallu avant toute chose se familiariser.

Deux solveurs d'OpenFOAM peuvent être utilisés pour la résolution du problème : `buoyantBoussinesqPimpleFoam` et `buoyantPimpleFoam`. L'objectif de ce travail était également de pouvoir comparer leurs résultats et de pouvoir identifier celui qui est le plus fidèle aux résultats numériques ou expérimentaux. Les hypothèses utilisées par ces deux solveurs seront rappelées dans la suite de ce travail.

Pour parvenir à la réalisation de ces objectifs, le projet s'est articulé en plusieurs étapes : Dans le chapitre 2, nous reviendrons sur la définition précise du problème, sur le choix des simplifications et sur l'étude des équations qui gouvernent les phénomènes de convection naturelle dans des cavités différentiellement chauffées.

Le chapitre 3 reprend la description des solveurs, des méthodes numériques et de l'algorithme utilisé pour la résolution des équations de Navier-Stokes ainsi que l'étude de la modélisation de la turbulence pour des problèmes de convection naturelle.

Le chapitre 4 revient sur la mise en place des simulations et leur lancement dans OpenFOAM ainsi que sur le choix de la résolution des maillages.

Le chapitre 5 présente l'analyse des résultats obtenus pour des cas laminaires et un cas turbulent résolu par une simulation LES.

Les moyens de calcul ont été fournis par le Consortium des Équipements de Calcul Intensif (CÉCI), financé par le Fonds de la Recherche Scientifique de Belgique (F.R.S.-FNRS) sous la convention n°2.5020.11.

## Chapitre 2

# La convection naturelle de Rayleigh-Bénard dans une cavité

Dans ce chapitre, nous revenons sur la description du problème de Rayleigh-Bénard et sur sa formulation mathématique. Nous rappelons aussi les hypothèses et simplifications faites. Nous présentons enfin les résultats d'une étude expérimentale.

### 2.1 Description du problème

Par rapport à la configuration d'une piscine de désactivation, nous considérons une série de simplifications.

Seule la partie supérieure de la piscine de désactivation est modélisée c'est-dire la partie qui est située au dessus des assemblages et qui s'étend jusqu'à la surface libre. Cette simplification permet d'éliminer les phénomènes physiques liés aux assemblages, à leur géométrie et à leur disposition dans la piscine.

La cavité est complètement fermée par des murs. Une seconde simplification du problème consiste donc à modéliser la surface libre par un mur.

La piscine est de forme cubique avec des côtés d'une longueur  $L$ . Elle est remplie d'eau. La paroi horizontale inférieure est maintenue à une température chaude  $T_H$ . La paroi horizontale supérieure est maintenue à une température froide  $T_C$ . Initialement, le fluide dans la cavité est à la température  $T_C$ .

Le problème est monophasique : les changements de phase ne sont pas considérés.

L'ensemble de ces choix est inspiré par la configuration des cavités étudiées dans les articles que nous prenons pour référence et présentés dans la section 2.6. La figure 2.1 représente la configuration de la cavité et le système d'axes choisis pour la suite de ce travail.

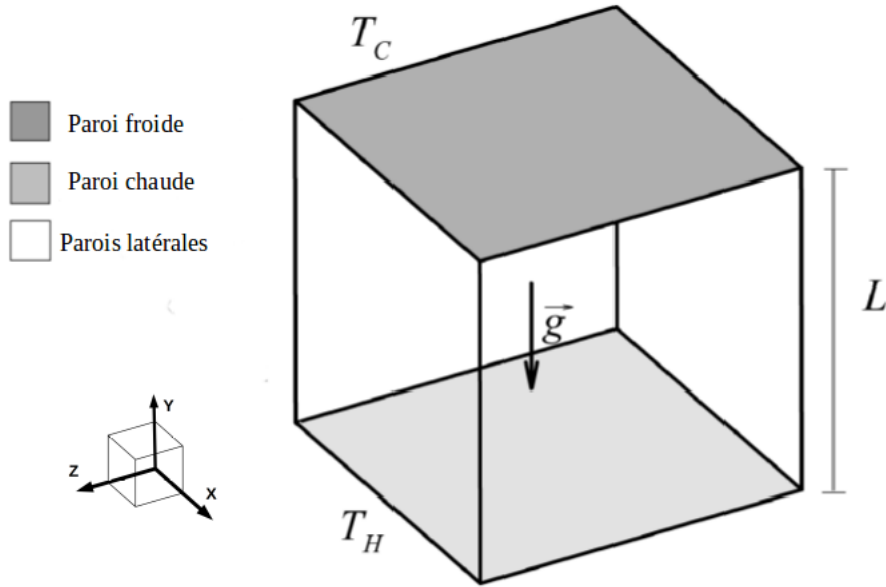


FIGURE 2.1 – Représentation de la cavité étudiée

## 2.2 Equations de conservation

Ce travail consistant en l'étude d'un fluide monophasique et non-réactif, les équations qui gouvernent le comportement du fluide sont les équations de Navier-Stokes. Nous représenterons le vecteur vitesse par  $\mathbf{u} = (u, v, w)$ . Les équations de conservation de la masse, de la quantité de mouvement et de l'énergie s'écrivent respectivement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial(\rho i)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho i \mathbf{u}) = -p \nabla \cdot \mathbf{u} - \nabla \cdot \mathbf{q} + \boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} + S \quad (2.3)$$

Dans équation de conservation de la quantité de mouvement,  $\mathbf{g}$  représente le vecteur de l'accélération gravitationnelle  $\mathbf{g} = (0, -g, 0)$ . Le terme  $\boldsymbol{\tau}$  représente la partie déviatoire du tenseur des taux de déformation.

L'équation de l'énergie est écrite pour l'énergie interne  $i$ . La loi de Fourier est utilisée pour le terme de diffusion :  $\mathbf{q} = -\kappa \nabla T$  où  $\kappa$  représente la conductivité thermique.

## 2.3 Hypothèses et simplifications

Compte tenu de notre problème, nous pouvons considérer une série d'hypothèses pour simplifier les équations 2.1, 2.2 et 2.3 :

- L'hypothèse de fluide visqueux newtonien est utilisée pour l'expression des contraintes agissant sur un élément de fluide. La partie déviatoire du tenseur des taux de déformation s'exprime :

$$\boldsymbol{\tau} = \mu \left( \nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} - \frac{2}{3} (\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{I} \right)$$

avec  $\mu$  la viscosité dynamique et  $\mathbf{I}$  la matrice identité.

Le tenseur des taux de déformation s'écrit quant à lui :  $\mathbf{d} = \frac{1}{2} \left( \nabla^T \mathbf{u} + \nabla \mathbf{u} \right)$

- Les propriétés physiques du fluide  $\mu$ ,  $\kappa$  et  $c_p$  sont dans un premier temps considérées comme indépendantes de la température.
- Nous considérons que la masse volumique  $\rho$  est constante et ne varie pas avec la température ou la pression sauf dans le terme de la poussée d'Archimède de l'équation 2.2 par l'introduction de l'approximation de Boussinesq. Selon cette approximation, les propriétés physiques sont indépendantes de la température et nous ne considérons les variations de la masse volumique que lorsqu'elles multiplient la gravité. La masse volumique  $\rho$  est ensuite représentée comme une fonction linéaire de la température selon l'équation d'état :

$$\rho \approx \rho_0 (1 - \beta(T - T_0)) \quad (2.4)$$

Cette expression est dérivée de la définition du coefficient de dilatation thermique  $\beta$  :

$$\beta \equiv -\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \approx \frac{1}{\rho_0} \frac{\rho - \rho_0}{T - T_0}$$

.

$\rho_0$  est la masse volumique du fluide à la température de référence.  $T_0$  est la température moyenne  $T_0 = (T_H + T_C)/2$ .

- Nous prenons l'hypothèse que l'écoulement est incompressible et l'eau indilatable.
- Nous négligeons le terme source  $S$  de l'équation de conservation de l'énergie . Nous ne prenons pas en compte les effets de radiation ni le travail réalisé par la force gravitationnelle sur le fluide.

Avec ces hypothèses, les équations qui définissent le problème de Rayleigh-Bénard prennent classiquement la forme :

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.5)$$

$$\frac{\partial(\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\frac{1}{\rho_0} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{u} + (1 - \beta(T - T_0)) \mathbf{g} \quad (2.6)$$

$$\rho_0 c_p \frac{\partial T}{\partial t} + \rho_0 c_p \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) + 2\mu \mathbf{d} : \mathbf{d} \quad (2.7)$$

Dans l'équation 2.6,  $\Delta$  est l'opérateur laplacien. La solution de l'équation de conservation de la quantité de mouvement nécessite la connaissance de la température  $T$  et est donc fortement liée à l'équation de conservation de l'énergie. Ces équations nécessitent donc une résolution simultanée.

Le terme  $2\mu \mathbf{d} : \mathbf{d}$  de production d'énergie thermique par les dissipations visqueuses peut être négligée dans l'équation de conservation de l'énergie 2.7 étant donné les faibles vitesses produites en convection naturelle. Cette équation s'écrit alors :

$$\frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla T = \nabla \cdot (\alpha \nabla T) \quad (2.8)$$

avec  $\alpha = \frac{k}{\rho_0 c_p} = \frac{\nu}{Pr}$ , la diffusivité thermique de l'eau.

## 2.4 Conditions frontières

D'un point de vue thermique, les conditions frontières des parois latérales sont dans une cavité fixées par leur épaisseur et leur conductivité thermique. La conductance thermique permet d'exprimer les déperditions thermiques au travers d'une paroi :

$$U = \frac{\kappa}{d}$$

où  $\kappa$  indique la conductivité thermique de la paroi et  $d$  son épaisseur.

Pour une épaisseur importante et une faible conductivité thermique, la paroi est isolante et dite adiabatique. Pour ce type de paroi, il n'y a pas de pertes thermiques vers l'extérieur. Toute la chaleur de la paroi chaude est transmise à la paroi froide.

Nous allons dans ce travail considérer une paroi parfaitement conductrice c'est-à-dire une paroi qui aurait une conductivité thermique importante et une faible épaisseur. Ce type de paroi est modélisé en imposant un profil de température linéaire entre la paroi horizontale chaude et la paroi horizontale froide. Ce choix a été effectué pour pouvoir faciliter la comparaison des résultats de nos simulations avec ceux de l'étude prise pour référence.

La cavité est entièrement fermée par des parois. Nous ne considérons pas la surface libre. Une condition de non-glissement est imposée à chaque paroi. Cette condition est généralement utilisée pour des fluides visqueux. Elle indique qu'à proximité d'un objet solide, le fluide aura une vitesse nulle par rapport à cet objet solide. Lorsque le fluide se déplace dans la cavité, le fluide proche de la paroi reste à une vitesse nulle. Cela crée l'apparition d'une couche limite de vitesse.

Les conditions frontières sont alors définies :

- Pour la paroi horizontale inférieure ( $y = 0$ ) :  $u = v = w = 0$ ,  $T = T_H$
- Pour la paroi horizontale supérieure ( $y = L$ ) :  $u = v = w = 0$ ,  $T = T_C$
- Pour les parois latérale adiabatiques ( $x = z = 0$  et  $x = z = L$ ) :  $u = v = w = 0$ ,  
 $\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial T}{\partial z} = 0$
- Pour les parois latérales parfaitement conductrices ( $x = z = 0$  et  $x = z = 1$ ) :  $u = v = w = 0$ ,  $T = (\frac{T_C - T_H}{L})y + T_H$

## 2.5 Le nombre de Rayleigh

Les équations de conservation 2.5, 2.6 et 2.8 s'écrivent sous forme adimensionnelle :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + \frac{\partial w^*}{\partial z^*} &= 0 \\
\frac{\partial u^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial u^*}{\partial z^*} &= \frac{-\partial p^*}{\partial x^*} + Pr\mu^* \left( \frac{\partial^2 u^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial z^{*2}} \right) \\
\frac{\partial v^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial v^*}{\partial z^*} &= \frac{-\partial p^*}{\partial y^*} + Pr\mu^* \left( \frac{\partial^2 v^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial z^{*2}} \right) + RaPrT^* \\
\frac{\partial w^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial w^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial w^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial w^*}{\partial z^*} &= \frac{-\partial p^*}{\partial z^*} + Pr\mu^* \left( \frac{\partial^2 w^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 w^*}{\partial z^{*2}} \right) \\
\frac{\partial T^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial T^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial T^*}{\partial y^*} + w^* \frac{\partial T^*}{\partial z^*} &= \alpha^* \left( \frac{\partial^2 T^*}{\partial x^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial y^{*2}} + \frac{\partial^2 T^*}{\partial z^{*2}} \right)
\end{aligned}$$

Les échelles de références pour la viscosité, la longueur, la vitesse, le temps et la pression sont respectivement  $\mu_0$ ,  $L$ ,  $\alpha_0/L$ ,  $L^2/\alpha_0$ ,  $\alpha_0^2\rho_0/L^2$ .

La température adimensionnelle est définie comme :

$$T^* = \frac{T - T_0}{\Delta T} \quad (2.9)$$

où  $\Delta T = (T_H - T_C)$ .

Le nombre de Rayleigh  $Ra$  apparaît dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement. Il se définit comme le rapport entre les forces de flottabilité et les effets visqueux :

$$Ra = \frac{g\beta\Delta TL^3}{\nu\alpha} \quad (2.10)$$

Ce nombre caractérise la stabilité du système :

- Pour  $Ra < 1708$  Les forces d'Archimède ne sont pas suffisantes pour dépasser la résistance imposée par les forces visqueuses. Il n'y a dans ce cas aucun phénomène d'advection et le transfert de chaleur depuis la surface inférieure jusqu'à la surface supérieure se produit par conduction.

- Pour  $1708 < Ra < 5 \cdot 10^4$  les conditions sont thermiquement instables et le phénomène d'advection apparaît. Le fluide subit un gradient de température instable qui crée un gradient de masse volumique : les particules du fluide proche de la paroi chaude vont voir leur masse volumique diminuer et sous l'effet de la poussée d'Archimède vont remonter vers la paroi supérieure. Les particules qui ont une masse volumique plus élevée près de la paroi froide vont redescendre dans le fond.

Le déséquilibre créé dans le fluide entraîne l'apparition de rouleaux thermo-convectifs appelés cellules de Rayleigh-Bénard.

Ces instabilités n'apparaissent pas dans le cas où la surface supérieure est plus chaude que la surface inférieure. C'est en effet les effets combinés du gradient de masse volumique  $\partial\rho/\partial y$  négatif et de la force de gravité qui créent les cellules de convection.

- Pour  $Ra > 5 \cdot 10^4$  les cellules de convection se décomposent et le mouvement du fluide devient turbulent. Des expériences et simulations numériques (Kumar et al. [19]) montrent l'apparition de couches limites thermiques près des parois horizontales. La température moyenne est uniforme dans le volume et proche de  $T_0$  sauf pour les couches limites thermiques qui présentent une chute de température d'environ  $\frac{\Delta T}{2}$  chacune.

Dans ce travail, le problème de Rayleigh-Bénard sera étudié pour des régimes laminaires et turbulents. Plus particulièrement, l'écoulement dans la cavité sera analysé pour les nombres de Rayleigh modérés  $Ra = 10^4$  et  $Ra = 5 \cdot 10^4$  (considéré laminaire) et pour un nombre de Rayleigh élevé  $Ra = 10^7$ .

## 2.6 Validité de l'hypothèse de Boussinesq

Avant de continuer, il est important de s'interroger sur la validité de l'hypothèse de Boussinesq (crf 2.3) utilisée dans les équations de conservation.

Ferziger et Peric [9] stipulent que l'usage de l'approximation de Boussinesq dans les équations de Navier-Stokes introduit des erreurs de l'ordre de 1 % si les différences de températures sont inférieures à  $2^\circ C$  pour l'eau. Ces erreurs sont amenées à augmenter pour des différences de température plus importantes et peuvent mener à des solutions qualitativement erronées. De la même manière, Gray et Giorgini [14] considèrent que l'approximation de Boussinesq est valide pour autant que la différence de température dans le fluide ne modifie pas les propriétés physiques de plus de 10 % par rapport à leurs valeurs en  $T_0$ .

Dans leurs travaux, Valencia et al. [25] se sont penchés sur la simulation numérique des cellules de convection de Rayleigh-Bénard dans une cavité chauffée par le bas, remplie d'eau pour des cas laminaires ( $Ra = 10^4$  et  $Ra = 5 \cdot 10^4$ ) et turbulents ( $Ra = 10^7$ ) afin d'évaluer l'impact des hypothèses de Boussinesq. Le domaine étudié est délimité par des parois verticales immobiles et rigides, parfaitement conductrices.

Ils ont dans ce but imposé une différence de température qui rende l'hypothèse de Boussinesq invalide selon le critère de Gray et Giorgini [14] (les variations avec la température de  $\beta$  et  $\mu$

sont de 62.1% et 40% respectivement) et comparé les résultats obtenus avec deux solveurs. Le premier résout les équations avec la masse volumique constante sauf dans le terme d'Archimède pour lequel la variation linéaire de la masse volumique avec la température 2.4 est considérée. Toutes les autres propriétés physiques sont constantes suivant l'hypothèse de Boussinesq. Le second solveur ne fait pas l'usage de cette hypothèse et a été construit en considérant des variations avec la température de  $\beta$ ,  $\mu$  et  $\kappa$ .

Après analyse des résultats, les auteurs montrent que la limite d'une variation de 10 % proposée par Gray et Giorgini [14] pour l'applicabilité de l'approximation de Boussinesq est trop limitatif. En particulier, pour les écoulements turbulents, les effets de la variation des propriétés physiques avec la température reste limités à de fines couches limites thermiques.

Bien que les travaux de Valencia et al.[25] nous encouragent à utilisation de l'approximation de Boussinesq, nous avons trouvé judicieux d'étudier son impact avec les instruments fournis par OpenFOAM notamment en comparant les solveurs `buoyantPimpleFoam` et `buoyantBoussinesqPimpleFoam`. Les résultats seront présentés dans le chapitre 5. Nous rappellerons les hypothèses utilisées par ces deux solveurs dans le chapitre 3.

## 2.7 Etude expérimentale

Pour évaluer la fiabilité d'un code numérique, il est intéressant de pouvoir comparer les résultats obtenus avec des résultats expérimentaux.

Cependant, peu d'études expérimentales ont étudié une configuration de la cavité similaire à celle présentée au début de ce chapitre. L'étude qui s'en rapproche le plus a été rédigé par Pallares et al. [22]. Ces chercheurs ont étudiés expérimentalement le phénomène de convection dans une cavité cubique pour des nombres de Rayleigh modérés ( $5 \cdot 10^3 \leq Ra \leq 8 \cdot 10^4$ ) avec des parois adiabatiques ou conductrices ( $\kappa = 0.18 \text{ W/mK}$ ). Le fluide utilisé pour l'expérience est l'huile de silicone, dont le nombre de Prandtl est important ( $Pr = 130$ ). Dans ces conditions, l'écoulement reste stable et laminaire. Dans le chapitre 5, nous analyserons les résultats obtenus avec OpenFOAM pour les nombres de Rayleigh modérés au regard de cette étude expérimentale.

La figure 2.2 représente le dispositif expérimental utilisé dans le cas où les parois sont conductrices. Le fluide remplit une cavité cubique d'une longueur de 12.5 mm. Le fluide est chauffé par le bas la cavité par l'intermédiaire d'une plaque de cuivre en contact avec de l'eau chaude. La paroi supérieure est maintenue à une température froide selon le même principe. Latéralement, les parois sont entourées d'une épaisseur de plexiglas pour les rendre conductrices. La température des parois horizontales est initialement maintenue à  $25^\circ\text{C}$ . La température de la paroi chauffante est augmentée pour élever le nombre de Rayleigh à intervalles réguliers.

Quand un certain nombre de Rayleigh est atteint, et une fois la différence de température stabilisée, les champs de vitesse sont répertoriés et les structures de l'écoulement sont étudiées par vélocimétrie par image de particules (PIV). Cette technique consiste à incorporer dans le fluide étudié des particules sphériques dont la densité est proche de celle du fluide. Un laser illumine la zone étudiée. Lorsque les particules traversent la zone, elles réfléchissent la lumière du laser. Cela permet leur visualisation et l'enregistrement d'images par une caméra. Deux images consécutives

permettent de déterminer le déplacement des particules situées dans la zone. L'opération permet d'obtenir des cartes de vitesses instantanée donnant les 2 composantes de la vitesse dans le plan éclairé par le laser.

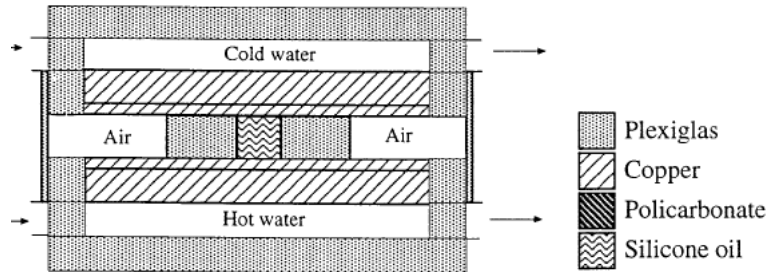


FIGURE 2.2 – Coupe verticale du dispositif expérimental pour l'étude des cellules de convection par Pallares et al. [22]

Sept structures d'écoulement ont été identifiées pour une cavité cubique. Le mouvement du fluide pour chacune de ces structures est rappelé à la figure 2.3. La structure S1 correspond à celui d'un rouleau dont l'axe de rotation est parfaitement parallèle à un côté de la cavité. La structure S5 est une structure à 4 rouleaux dont les axes de rotation sont à chaque fois perpendiculaires à un côté du cube. Nous reprendrons dans ce travail la dénomination utilisée par ces auteurs pour la description de nos structures d'écoulement.

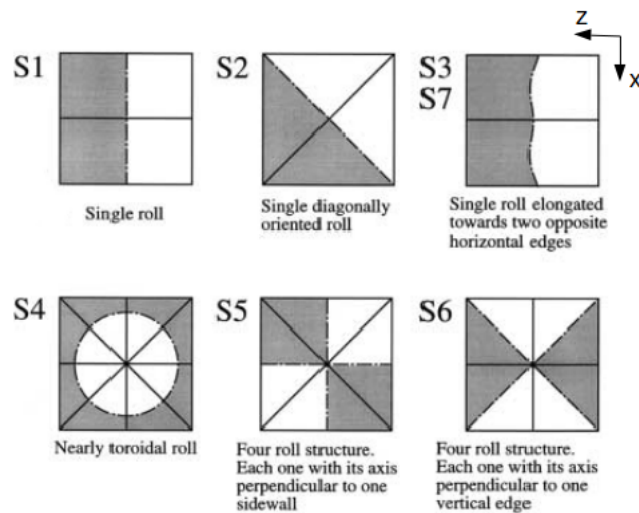


FIGURE 2.3 – Vues du dessus des structures d'écoulement des cellules de Rayleigh-Bénard dans un plan  $(x-z)$  situé en  $y = L/2$ . La partie grisée représente un fluide ascendant, la partie blanche un fluide descendant. Le trait hachuré est l'axe de rotation. Pallares et al. [22]

La figure 2.4 montre l'évolution de la structure de l'écoulement en fonction d'une augmentation du nombre de Rayleigh (division inférieure) ou d'une diminution de ce nombre (division supérieure) dans le cas où les parois latérales sont conductrices. Les zones grisées correspondent aux zones de transition.

Une première transition a lieu dans l'intervalle  $10^4 \leq Ra \leq 2 \cdot 10^4$  où l'écoulement passe d'une structure S2 à une structure S1.

L'écoulement retrouve une structure S2 lors d'une transition dans la gamme  $5 \cdot 10^4 \leq Ra \leq 5.5 \cdot 10^4$ .

A  $Ra = 6.5 \cdot 10^4$ , l'écoulement prend une structure S5, qui reste stable au-delà de  $Ra = 8 \cdot 10^4$ . Quand le nombre de Rayleigh est progressivement diminué (par pas de  $10^4$ ), la structure S5 persiste jusqu'à une transition vers une structure S2 entre  $Ra = 2 \cdot 10^4$  et  $Ra = 10^4$ .

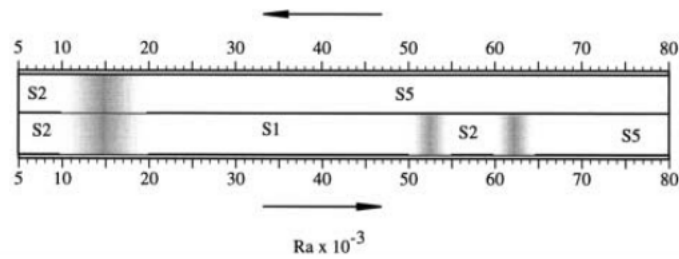


FIGURE 2.4 – Séquence des structures d'écoulements en fonction du nombre de Rayleigh pour un cube à parois latérales conductrices. Pallares et al. [22]

# Chapitre 3

## Outils numériques

Dans ce chapitre, nous apportons quelques précisions sur les outils numériques utilisés. Nous présentons les équations de conservation telles qu'elles sont résolues par le code source d'OpenFOAM. En particulier, nous nous attardons sur la définition des deux solveurs choisis pour résoudre le problème : `buoyantBoussinesqPimpleFoam` et `buoyantPimpleFoam`. Des explications sont également apportées sur la méthode des volumes finis et la discrétisation des équations. Enfin, une section sera consacrée à la description des équations résolues par une simulation LES.

### 3.1 Le logiciel OpenFOAM

Pour les simulations numériques, le logiciel OpenFOAM est utilisé. OpenFOAM est un logiciel libre et gratuit de calcul numérique appliqué à la mécanique des fluides. Il est principalement dédié à la résolution des équations de Navier-Stokes par la méthode des volumes finis. Le logiciel dispose d'un certain nombre de programmes pré-installés capables de résoudre ces équations pour différents problèmes. Ces programmes sont appelés solveurs. Comme l'utilisateur a accès au code source, il peut modifier ces solveurs implémentés par OpenFOAM et les adapter à son problème.

Avant de décrire plus précisément les solveurs, il est opportun d'expliquer la structure d'un cas de simulation décrit schématiquement à la figure 3.1. Un exemple de cas de simulation est donné dans l'annexe A. Celui-ci contient 3 dossiers :

- Dans le dossier `system`, `controlDict` est le fichier de contrôle du pas de temps et du temps de simulation. `fvSchemes` est le fichier utilisé pour choisir les schémas numériques de discrétisation des termes calculés lors de la simulation (gradient, divergence, laplacien, ...). `fvSolution` permet le choix des solveurs, des tolérances et des algorithmes de résolution. Le fichier `blockMeshDict` contient la description du maillage.
- Le dossier `constant` contient une description complète des propriétés physiques du fluide utilisé.

Les fichiers `thermophysicalProperties` et `transportProperties` permettent par exemple de spécifier les propriétés physiques du fluide telles que la conductivité, la viscosité et la masse volumique.

Le fichier `turbulenceProperties` permet de définir le modèle de turbulence. Le dossier `polyMesh` contient entre autres la liste des coordonnées des noeuds du maillage.

- Les dossiers `time directories` contient l'ensemble des résultats à différents temps pour les champs calculés (pression, vitesse, ...). Le fichier `0` permet de définir les conditions initiales.

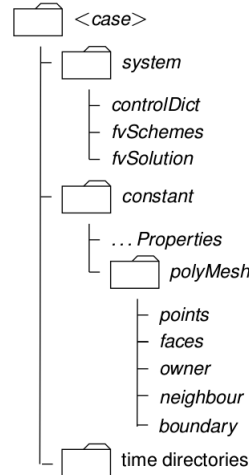


FIGURE 3.1 – Architecture d'un dossier de simulation [11]

OpenFOAM offre aussi de nombreux tutoriels pour chaque solveur. L'utilisateur peut les utiliser comme point de départ et les adapter à la problématique étudiée.

Les tutoriels `hotRoom` et `BernardCells` ont été particulièrement intéressants pour notre étude. Le tutoriel `hotRoom` s'intéresse à la convection naturelle de l'air dans une pièce chauffée par un point chaud situé sur le sol. Le tutoriel `BernardCells` simule les cellules de Rayleigh-Bénard de l'air dans un plan délimité par un côté chaud et un côté froid. Le code développé est donc inspiré de ces deux tutoriels qu'il a fallu adapter pour un autre fluide, une autre géométrie et d'autres conditions frontières.

### 3.2 Equations du solveur buoyantBoussinesqPimpleFoam

Comme son nom l'indique, le solveur `buoyantBoussinesqPimpleFoam` utilise l'approximation de Boussinesq pour les équations de conservation. Les équations de conservation résolues par le solveur sont d'ailleurs identiques aux équations 2.5, 2.6 et 2.8. Les auteurs du code utilisent les mêmes hypothèses que celles développées dans la section 2.3.

Dans le code source d'OpenFOAM, l'équation de conservation de la quantité de mouvement 2.6 présente une forme alternative car les termes du gradient de pression et de la poussée d'Archimède sont réarrangés de la manière suivante :

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{\rho_0}(\nabla p - \rho \mathbf{g}) &= -\nabla \left( \frac{p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}}{\rho_0} + \frac{\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}}{\rho_0} \right) + \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \mathbf{g} \\
 &= -\nabla p_{rgh} - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) \nabla \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) - \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \mathbf{g} + \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right) \mathbf{g} \\
 &= -\nabla p_{rgh} - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) \nabla \left( \frac{\rho}{\rho_0} \right)
 \end{aligned}$$

où la force gravitationnelle a été exprimée sous la forme d'un gradient :  $\rho \mathbf{g} = \nabla(\rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{r})$ .

Une nouvelle variable  $p_{rgh} = \frac{p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}}{\rho_0}$  est également définie. Dans le code, le rapport  $\frac{\rho}{\rho_0}$  est défini par *rhok*. Dans ces expressions, le terme  $\rho$  doit également être remplacé par l'équation d'état 2.4.

### 3.3 Equations du solveur buoyantPimpleFoam

Suite à notre discussion sur la validité de l'approximation de Boussinesq (cfr 2.6), il est intéressant d'étudier son impact sur la résolution du problème de Rayleigh-Bénard. Nous précisons dans cette section les hypothèses utilisées pour la construction de buoyantPimpleFoam. Les résultats fournis par buoyantPimpleFoam et buoyantBoussinesqPimpleFoam seront comparés dans le chapitre 5.

Par rapport aux équations 2.5, 2.6 et 2.8 qui définissent classiquement le problème de Rayleigh-Bénard, le solveur buoyantPimpleFoam utilise d'autres hypothèses :

- Pour compléter les équations de conservation, le solveur utilise une relation polynomiale entre la masse volumique et la température de la forme

$$\rho = \sum_{i=0}^N a_i T^i$$

où les  $a_i$  sont les coefficients du polynôme.

- Ce solveur permet également de considérer les variations des propriétés physiques  $\mu(T)$ ,  $\kappa(T)$  et  $c_p(T)$  avec la température.
- L'hypothèse d'incompressibilité de l'écoulement n'est pas non plus retenue.

#### Conservation de la masse

L'expression de la conservation de la masse est identique à l'expression 2.1 :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0$$

#### Conservation de la quantité de mouvement

Au niveau de l'implémentation de l'équation de conservation de la quantité de mouvement 2.3, le terme  $-\nabla p + \rho \mathbf{g}$  est réécrit :

$$\begin{aligned} -\nabla p + \rho \mathbf{g} &= -\nabla(p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{r} + \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) + \rho \mathbf{g} \\ &= -\nabla p_{rgh} - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) \nabla \rho - \rho \mathbf{g} + \rho \mathbf{g} \\ &= -\nabla p_{rgh} - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r}) \nabla \rho \end{aligned}$$

où une nouvelle variable  $p_{rgh} = p - \rho \mathbf{g} \cdot \mathbf{r}$  est définie.

L'expression de cette équation de conservation est finalement :

$$\frac{\partial(\rho\mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}\mathbf{u}) = -\nabla p_{rgh} - (\mathbf{g} \cdot \mathbf{r})\nabla\rho + \nabla \cdot (2\mu\mathbf{d}) - \nabla\left(\frac{2}{3}(\nabla \cdot \mathbf{u})\right) \quad (3.1)$$

### Conservation de l'énergie

L'équation de conservation utilisée pour l'énergie fait apparaître l'enthalpie spécifique du fluide  $h = i + \frac{p}{\rho}$  :

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}h) + \frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}K) = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{q} + \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{g})$$

Dans cette expression, le terme  $\nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u})$  est négligé car les vitesses en convection naturelle sont faibles.

Dans le code source, cette équation prend la forme suivante :

$$\frac{\partial(\rho h)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}h) + \frac{\partial(\rho K)}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{u}K) = \frac{\partial p}{\partial t} + \nabla \cdot (\alpha\nabla h) + \rho(\mathbf{u} \cdot \mathbf{g}) \quad (3.2)$$

Le programme laisse à l'utilisateur de négliger ou non le terme  $\frac{\partial p}{\partial t}$ . Comme nous travaillons avec un liquide (indilatable) nous négligerons le terme  $\frac{\partial p}{\partial t}$ .

## 3.4 Modélisation de la turbulence

Pour les phénomènes de convection, l'écoulement devient en théorie turbulent pour un nombre de Rayleigh supérieur à  $5 \cdot 10^4$ . Cette limite n'est cependant pas toujours bien définie et peut varier selon les paramètres de l'expérience.

La turbulence est un mode d'écoulement du fluide pour lequel se superpose au mouvement moyen un mouvement d'agitation aléatoire. Les trois composantes de la vitesse sont amenées à varier de façon imprévisible dans le temps et l'espace. Toutes les quantités transportées par le fluide subissent également ces fluctuations (pression, température, ...). Un écoulement turbulent est caractérisé par les tourbillons qui le composent. La taille des tourbillons est variée. Les tourbillons les plus larges tirent leur énergie de l'écoulement moyen. Leur taille et leur vitesse sont du même ordre que l'écoulement moyen. Ces larges tourbillons sont instables et se décomposent en plus petits tourbillons. Les plus petits tourbillons convertissent l'énergie cinétique de l'écoulement moyen en chaleur par dissipations visqueuses. La turbulence doit ainsi être résolue pour plusieurs échelles.

La modélisation de la turbulence est une étape complexe. L'objectif n'est cependant pas de reproduire toute la structure de l'écoulement mais plutôt de développer des équations qui prédisent les vitesses, pressions et température moyennes. Trois méthodes existent :

- La simulation RANS (Reynolds Averaged Navier Stokes) qui consiste à moyenner dans le temps les équations de Navier-Stokes. Cette méthode est la plus économe en ressources de calcul.

- La simulation LES (Large Eddy Simulation) qui consiste à filtrer les petites échelles et à ne résoudre l'écoulement que pour les tourbillons les plus larges. Le coût de calcul reste raisonnable.
- La simulation DNS (Direct Numerical Simulation) qui requiert un maillage très fin pour pouvoir capturer le comportement des tourbillons les plus petits. La simulation directe nécessite de grandes ressources de calcul. Dans de nombreuses publications, l'échelle de Kolmogorov  $\eta = (\frac{\nu^3}{\epsilon})^{\frac{1}{4}}$  est utilisée comme une mesure de la plus petite échelle possible dans un écoulement turbulent,  $\epsilon$  représente le taux de dissipation de l'énergie cinétique turbulente.

Dans ce travail nous utiliserons la méthode LES. Dinh et al. [7] montrent dans leurs travaux que cette méthode est particulièrement adaptée à l'étude des écoulements turbulents de Rayleigh-Bénard dans les cavités.

### 3.4.1 Equations résolues par LES

Dans la construction des équations résolues par une simulation LES, la première étape consiste à choisir une fonction de filtrage  $G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \Delta)$  et une certaine largeur de coupure  $\Delta$ . Les tourbillons résolus sont ceux dont l'échelle de longueur est supérieure à cette largeur de coupure.

La fonction de filtrage  $G$  est définie de la manière suivante :

$$\bar{\phi}(\mathbf{x}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \Delta) \phi(\mathbf{x}', t) dx'_1 dx'_2 dx'_3 \quad (3.3)$$

où  $\bar{\phi}(\mathbf{x}, t)$  est la fonction filtrée et  $\phi(\mathbf{x}, t)$  est la fonction originale.

Cette quantité  $\phi(\mathbf{x}, t)$  peut ensuite être décomposée en :

$$\phi(\mathbf{x}, t) = \bar{\phi}(\mathbf{x}, t) + \phi'(\mathbf{x}, t) \quad (3.4)$$

où  $\bar{\phi}(\mathbf{x}, t)$  représente les variations spatiales plus grandes que la longueur de coupure et donc résolues par la méthode LES.

$\phi'(\mathbf{x}, t)$  représentent les variations spatiales non-résolues qui se produisent à une échelle inférieure à celle de la longueur de coupure.

Dans OpenFOAM, la fonction de filtrage est un filtre top-hat :

$$G(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \Delta) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta^3} & |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \leq \Delta/2 \\ 0 & |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| > \Delta/2 \end{cases} \quad (3.5)$$

La largeur de coupure est définie par  $\Delta = \sqrt[3]{\Delta x \Delta y \Delta z}$  avec  $\Delta x, \Delta y$  et  $\Delta z$  les côtés d'une cellule après discrétisation du domaine.

Reprenons les équations de conservation 2.5 et 2.6 utilisées par le solveur buoyantBoussinesqPimple. En appliquant la fonction de filtrage, ces équations s'écriront :

$$\nabla \cdot (\rho \bar{\mathbf{u}}) = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{u} \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla \cdot (\nabla \bar{u}) \quad (3.7)$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v} \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \nabla \cdot (\nabla \bar{v}) - \rho g \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{w})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{w} \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \nabla \cdot (\nabla \bar{w}) \quad (3.9)$$

où  $\bar{\cdot}$  indique une variable filtrée.

Nous pouvons ensuite montrer que :

$$\nabla \cdot (\rho \overline{\phi \mathbf{u}}) = \nabla \cdot (\bar{\phi} \bar{\mathbf{u}}) + (\nabla \cdot (\rho \overline{\phi \mathbf{u}}) - \nabla \cdot (\bar{\phi} \bar{\mathbf{u}})) \quad (3.10)$$

En utilisant l'expression 3.10 dans les équations 3.7, 3.8 et 3.9 pour évaluer les termes  $\nabla \cdot (\rho \bar{u}_i \bar{\mathbf{u}})$ , nous obtenons :

$$\frac{\partial(\rho \bar{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{u} \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x} + \mu \nabla \cdot (\nabla \bar{u}) - (\nabla \cdot (\rho \overline{u \mathbf{u}}) - \nabla \cdot (\rho \bar{u} \bar{\mathbf{u}})) \quad (3.11)$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{v})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{v} \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial y} + \mu \nabla \cdot (\nabla \bar{v}) - (\nabla \cdot (\rho \overline{v \mathbf{u}}) - \nabla \cdot (\rho \bar{v} \bar{\mathbf{u}})) - \rho g \quad (3.12)$$

$$\frac{\partial(\rho \bar{w})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \bar{w} \bar{\mathbf{u}}) = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial z} + \mu \nabla \cdot (\nabla \bar{w}) - (\nabla \cdot (\rho \overline{w \mathbf{u}}) - \nabla \cdot (\rho \bar{w} \bar{\mathbf{u}})) \quad (3.13)$$

La forme habituelle des équations de Navier-Stokes est retrouvée mais cette fois exprimée en fonction de variables filtrées et avec le terme supplémentaire  $\nabla \cdot (\rho \overline{u_i \mathbf{u}} - \rho \bar{u}_i \bar{\mathbf{u}})$ . Ce terme peut, en utilisant la notation indicielle, être exprimé comme la divergence de contraintes additionnelles  $\tau_{ij}$  :

$$\nabla \cdot (\rho \overline{u_i \mathbf{u}} - \rho \bar{u}_i \bar{\mathbf{u}}) = \frac{\partial(\rho \overline{u_i u} - \rho \bar{u}_i \bar{u})}{\partial x} + \frac{\partial(\rho \overline{u_i v} - \rho \bar{u}_i \bar{v})}{\partial y} + \frac{\partial(\rho \overline{u_i w} - \rho \bar{u}_i \bar{w})}{\partial z} = \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j}$$

$\tau_{ij}$  est appelé tenseur des contraintes d'échelle inférieure à la maille :

$$\tau_{ij} = \rho \overline{u_i \mathbf{u}} - \rho \bar{u}_i \bar{\mathbf{u}} = \rho \overline{u_i u_j} - \rho \bar{u}_i \bar{u}_j \quad (3.14)$$

La décomposition du champ de vitesse selon l'expression 3.4 peut être utilisée dans l'expression 3.14 :

$$\begin{aligned} \rho \overline{u_i u_j} &= \overline{\rho(\bar{u}_i + u'_i)(\bar{u}_j + u'_j)} \\ &= \overline{\rho \bar{u}_i \bar{u}_j} + \overline{\rho \bar{u}_i u'_j} + \overline{\rho u'_i \bar{u}_j} + \overline{\rho u'_i u'_j} \\ &= \rho \bar{u}_i \bar{u}_j + \rho(\overline{\bar{u}_i \bar{u}_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j) + \overline{\rho \bar{u}_i u'_j} + \overline{\rho u'_i \bar{u}_j} + \overline{\rho u'_i u'_j} \end{aligned}$$

Dès lors les contraintes d'échelle inférieure à la maille s'écrivent :

$$\tau_{ij} = \rho \overline{u_i u_j} - \rho \bar{u}_i \bar{u}_j = (\overline{\rho \bar{u}_i \bar{u}_j} - \rho \bar{u}_i \bar{u}_j) + \overline{\rho \bar{u}_i u'_j} + \overline{\rho u'_i \bar{u}_j} + \overline{\rho u'_i u'_j} \quad (3.15)$$

Terme	Définition	Interprétation
Contraintes de Leonard	$L_{ij} = \rho \overline{\overline{u_i u_j}} - \rho \overline{u_i} \overline{u_j}$	Effets du filtre à l'échelle de résolution
Contraintes croisées	$C_{ij} = \rho \overline{\overline{u_i u'_j}} + \rho \overline{u'_i \overline{u_j}}$	Interactions entre les tourbillons d'échelle inférieure à la maille et l'écoulement résolu
Contraintes de Reynolds-LES	$R_{ij} = \rho \overline{u'_i u'_j}$	Interactions entre les tourbillons d'échelle inférieure à la maille

TABLE 3.1 – Contributions aux contraintes d'échelle inférieure à la maille

Dans l'équation 3.15, trois contributions sont identifiées et décrites dans le tableau 3.1.

La décomposition de la vitesse en un champ moyen et un champ fluctuant selon l'expression 3.4 a ajouté des inconnues au problèmes .

La solution du terme  $R_{ij} = \rho \overline{u'_i u'_j}$  sera approchée par un modèle d'échelle inférieure à la résolution de la grille que nous appellerons ici modèle SGS (de l'anglais sub-grid scale).

Dans ce travail, nous utilisons le modèle SGS de Smagorinsky-Lilly.

### 3.4.2 Modèle SGS de Smagorinsky-Lilly

Smagorinsky considère que le tenseur de Reynolds  $R_{ij}$  est proportionnel au tenseur des taux de déformation de l'échelle résolue  $\overline{S_{ij}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right)$  (choix inspiré par Boussinesq). Le tenseur de Reynolds est alors défini par :

$$R_{ij} = -2\mu_{sgs} \overline{S_{ij}} + \frac{1}{3} R_{ii} \delta_{ij} = -\mu_{sgs} \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{3} R_{ii} \delta_{ij} \quad (3.16)$$

où  $\mu_{sgs}$  est la viscosité dynamique d'échelle inférieure à la maille. Le terme  $\frac{1}{3} R_{ii} \delta_{ij}$  est présent pour s'assurer que la somme des contraintes soit égale à l'énergie cinétique des tourbillons d'échelle inférieure.

Dans une méthode de volumes finis, l'ensemble du tenseur des contraintes d'échelle inférieure à la maille  $\tau_{ij}$  est en fait entièrement modélisé par la viscosité  $\mu_{sgs}$  :

$$\tau_{ij} = -2\mu_{sgs} \overline{S_{ij}} + \frac{1}{3} \tau_{ii} \delta_{ij} = -\mu_{sgs} \left( \frac{\partial \overline{u_i}}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{u_j}}{\partial x_i} \right) + \frac{1}{3} \tau_{ii} \delta_{ij} \quad (3.17)$$

Pour évaluer la viscosité dynamique SGS, Smagorinsky a proposé la définition suivante :

$$\mu_{sgs} = \rho (C_{sgs} \Delta)^2 |\overline{S}| = \rho (C_{sgs} \Delta)^2 \sqrt{2 \overline{S_{ij}} \overline{S_{ij}}} \quad (3.18)$$

où  $C_{sgs}$  est une constante dont la valeur est comprise entre 0.1 et 0.24 en fonction du cas étudié.

Avec la modélisation du terme 3.17 les équations peuvent être résolues. Nous verrons dans le chapitre sur la configuration des cas dans OpenFOAM la valeur du coefficient  $C_{sgs}$ .

### 3.5 Discrétisation des équations et du domaine

Malgré certaines hypothèses et simplifications, les équations de Navier-Stokes restent non-linéaires et leur résolution nécessite l'utilisation de méthodes numériques. La première étape est de discrétiser le domaine de calcul et les équations. La méthode qu'utilise OpenFOAM est la méthode des volumes finis.

Dans cette partie deux éléments essentiels de la méthode seront abordés :

- La discrétisation du domaine de calcul ou comment le domaine physique est transformé en un domaine numérique.
- La discrétisation des équations qui gouvernent les phénomènes physiques ou comment les équations non-algébriques sont transformées en expressions algébriques en restant les plus fidèles possible au phénomène physique. Cette discrétisation est basée sur la forme intégrale des équations de conservation.

#### Discrétisation du domaine

Le domaine de calcul est partagé en différents volumes de contrôle ( $V_c$ ). Chaque volume de contrôle possède un centroïde  $P$  pour lequel la solution des équations est obtenue. Le volume de contrôle est délimité par ses faces. On distingue deux types de faces : celles qui délimitent deux volumes de contrôles adjacents et celles qui ne font partie que d'un seul volume de contrôle situées à la frontière du domaine. Ensuite, pour faire le lien entre la définition du maillage qui définit le domaine physique et celle des volumes de contrôle, OpenFOAM utilise un schéma centré qui consiste à considérer que les volumes de contrôle coïncident avec les cellules du maillage. En d'autres termes, les inconnues sont définies au centre de ces cellules, les volumes et faces sont définies par les lignes du maillage.

La figure 3.2 représente une discrétisation d'un domaine de calcul par la méthode des volumes finis. Un volume de contrôle présente différents éléments :

- $P$  est le centroïde du volume de contrôle.
- Le vecteur qui relie les centroïdes de deux volumes de contrôle adjacents est noté  $\mathbf{n}$ .
- Les faces des volumes de contrôle sont notés n,s,w ou e en fonction de leur position par rapport aux points cardinaux. De manière générale, l'indice  $f$  sera adopté pour désigner ces faces.

#### Discrétisation des équations

En intégrant les équations de conservation sur un volume de contrôle  $V_c$  et sur un certain pas de temps  $\Delta t$ , la forme intégrale des équations de conservation est obtenue. Celles-ci peuvent se généraliser de la manière suivante :

$$\int_{V_c} \left( \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} dt \right) dV + \int_t^{t+\Delta t} \left( \int_{V_c} \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \phi) dV \right) dt = \int_t^{t+\Delta t} \left( \int_{V_c} \nabla \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi) dV \right) dt + \int_t^{t+\Delta t} \left( \int_{V_c} S_\phi dV \right) dt \quad (3.19)$$

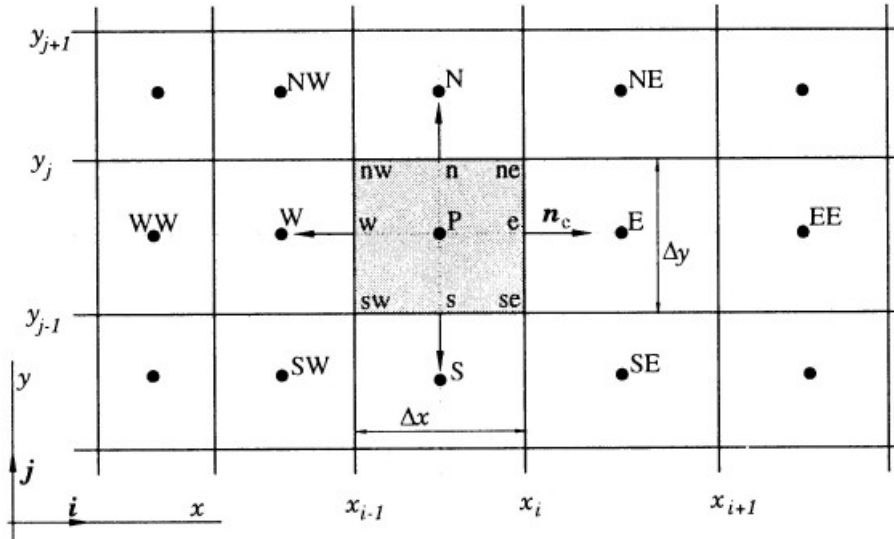


FIGURE 3.2 – Illustration de la définition des volumes de contrôle par schéma centré. Ferziger et Peric [9]

Le premiers terme dans le membre de gauche représente la variation temporelle de la quantité  $\phi$ , le deuxième est le terme de convection. Dans le membre de droite sont présents le terme de diffusion et un terme source  $S_\phi$  qui rassemble par exemple les termes du gradient de pression et de la poussée d'Archimède.  $\phi$  peut être une quantité scalaire ou vectorielle,  $\Gamma_\phi$  représente la diffusivité de la variable  $\phi$ . Le tableau 3.2 reprend la correspondance de ses symboles pour les équations de conservation.

Nous n'aborderons pas ici la discrétisation des équations résolues par une simulation LES.

	$\phi$	$\Gamma_\phi$	$S_\phi$
Masse	1	0	0
Qt. de mouvement	$\mathbf{u}$	$\nu$	$-\nabla p$
Energie	$c_p T$	$\kappa$	0

TABLE 3.2 – Tableau de correspondance pour la forme générale des équations de conservation

Le point nodal P enregistre la valeur moyenne de la propriété  $\phi$  sur le volume de contrôle au temps t. On notera donc que :

$$\phi = \phi_P = \frac{1}{V_c} \int_{V_c} \phi(\mathbf{x}) dV \quad (3.20)$$

L'intégration des termes de convection, diffusion et source sur un volume de contrôle en régime transitoire est similaire à l'intégration de ces termes en régime stationnaire. Les schémas de discrétisation choisis dépendent du terme étudié de l'équation 3.19. Nous passons ici en revue les principaux schémas utilisés.

## Discrétisation du terme temporel

Un schéma de discrétisation du premier ordre est choisi pour les dérivées temporelles connu sous le nom de schéma d'Euler implicite :

$$\left(\frac{\partial \rho \phi}{\partial t}\right)_p = \frac{\rho_p^{n+1} \phi_p^{n+1} - \rho_p^n \phi_p^n}{\Delta t} \quad (3.21)$$

où les indices  $n$  et  $n+1$  représentent deux pas de temps consécutifs.

Les intégrales sur le temps sont réalisées en respectant le schéma suivant :

$$I_\phi = \int_t^{t+\Delta t} \phi(t) dt = [\theta \phi(t + \Delta t) + (1 - \theta) \phi(t)] \Delta t \quad (3.22)$$

où  $\phi(t)$  est la variation temporelle de la variable  $\phi$  et  $\theta$  le paramètre d'intégration. Un schéma implicite est obtenu pour  $\theta = 1$ , un schéma explicite pour un  $\theta = 0$ . Dans ce travail, le schéma hybride de Crank-Nicolson est utilisé avec  $\theta = \frac{1}{2}$  :

$$\int_t^{t+\Delta t} \phi(t) dt = \frac{1}{2} (\phi(t + \Delta t) + \phi(t)) \Delta t \quad (3.23)$$

## Discrétisation du gradient

Le théorème de Gauss permet de remplacer les intégrales volumiques des termes de convection et de diffusion par des intégrales surfaciques.

En utilisant ce théorème et par transformation de l'intégrale obtenue en une somme sur toutes les surfaces du volume de contrôle, nous aboutissons à une forme discrétisée utile pour le calcul d'un gradient :

$$\int_{V_c} \nabla \phi dV = \oint_S \mathbf{n} \phi dS = \sum_f \mathbf{s}_f \phi_f \quad (3.24)$$

Le terme  $\mathbf{s}_f$  est le vecteur  $S\mathbf{n}$  avec  $S$  la surface d'une face.

La valeur de  $\phi$  au centre d'une face  $\phi_f$ , est calculée à partir de la valeur au centre des volumes de contrôle adjacents en considérant une variation linéaire de  $\phi$  entre  $P$  et  $N$ . Le schéma d'interpolation le plus classique est une différence centrée dont la forme générale s'écrit :

$$\phi_f = f_x \phi_P + (1 - f_x) \phi_N \quad (3.25)$$

où  $f_x = \frac{|fN|}{|PN|}$ .

## Discrétisation du terme de convection

Par le théorème de Gauss et discrétisation de l'intégrale :

$$\int_{V_c} \nabla \cdot (\rho \phi \mathbf{u}) dV = \oint_S \rho \phi (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}) dS = \sum_f (\rho \phi \mathbf{u})_f \cdot \mathbf{s}_f = \sum_f F \phi_f \quad (3.26)$$

où  $F = (\rho \mathbf{s} \cdot \mathbf{u})_f$  est le flux à travers la face.

Pour évaluer  $\phi_f$  et clore le système, le schéma d'interpolation le plus simple à appliquer est un schéma de différence centrée pour lequel une précision du second ordre est obtenue mais celui-ci cause des oscillations.

Un autre schéma possible est l'interpolation *upwind* du premier ordre qui prend en compte l'effet de transport de  $\phi$  :

$$\phi_f = \begin{cases} \phi_P & \text{if } F \geq 0 \\ \phi_N & \text{if } F \leq 0 \end{cases} \quad (3.27)$$

### Discretisation du terme de diffusion

Par le théorème de Gauss et discrétisation de l'intégrale :

$$\int_{V_c} \nabla \cdot (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi) dV = \int_S \rho \Gamma_\phi (\mathbf{n} \cdot \nabla \phi) dS = \sum_f (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi)_f \cdot \mathbf{s}_f \quad (3.28)$$

où le terme  $(\rho \Gamma_\phi \nabla \phi)_f$  est le flux de diffusion  $F_D$ .

Le choix d'un maillage orthogonal et uniforme permet un calcul facile de  $(\nabla \phi)_f$  via le schéma :

$$(\nabla \phi)_f = \frac{\phi_N - \phi_P}{|PN|}$$

### Terme source

Une discrétisation du terme source est obtenue en appliquant le théorème de la valeur moyenne :

$$\int_{V_c} S_\phi dV \approx \overline{S_\phi} V_c \quad (3.29)$$

où  $\overline{S_\phi}$  est la valeur moyenne du terme source  $S_\phi$  sur le volume de contrôle.

Avec la méthode des volumes finis, le terme de source est approximé par une expression linéaire de la forme :

$$\overline{S_\phi} V_c = S_u + S_P \phi_P$$

### Expression finale

En rassemblant tous les termes, nous obtenons une forme semi-discrétisée de l'équation 3.19 :

$$\int_t^{t+\Delta t} \left[ \int_{V_c} \left( \frac{\partial \rho \phi}{\partial t} \right)_p dV_c + \sum_f (\rho \phi \mathbf{u})_f \cdot \mathbf{s}_f \right] dt = \int_t^{t+\Delta t} \left[ \sum_f (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi)_f \cdot \mathbf{s}_f + \overline{S_\phi} V_c \right] dt \quad (3.30)$$

En discrétisant les termes temporels :

$$\frac{\rho_p^{n+1} \phi_p^{n+1} - \rho_p^n \phi_p^n}{\Delta t} V_c + \frac{1}{2} \left( \sum_f (\rho \phi \mathbf{u})_f^{n+1} \cdot \mathbf{s}_f + \sum_f (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi)_f^{n+1} \cdot \mathbf{s}_f \right) = \frac{1}{2} \left( \sum_f (\rho \phi \mathbf{u})_f^n \cdot \mathbf{s}_f + \sum_f (\rho \Gamma_\phi \nabla \phi)_f^n \cdot \mathbf{s}_f \right) + \overline{S_\phi} V_c \quad (3.31)$$

Dénomination	Définition	Terme discrétisé
Euler	Schéma Euler implicite	Dérivées temporelles
Gauss Linear	Différence centrée du premier ordre	Gradients et divergences
Gauss Linear Uncorrected	Différence centrée du premier ordre sans correction	Laplaciens
Gauss Upwind	Schéma Upwind du premier ordre	Divergences

TABLE 3.3 – Tableau de correspondance des schémas de discrétisation

L'équation 3.31 permet alors de trouver une valeur de  $\phi_P$  au temps  $t_{n+1}$ . Le système d'équations implicites résolu peut se réduire à la forme suivante :

$$a_P \phi_P^{n+1} + \sum a_v \phi_v^{n+1} = b_\phi$$

où l'indice  $v$  fait référence aux valeurs calculées au centroïde des cellules adjacentes.

Les coefficients  $a$  dépendent des termes de diffusion et de convection dans le volume de contrôle,  $b_\phi$  rassemble toutes les autres contributions et les termes connus, calculés lors d'itérations précédentes. Cette équation est valable pour l'ensemble des centroïdes des volumes de contrôle et les inconnues  $\phi_P^{n+1}$  dépendent de la solution des volumes de contrôle adjacents. La résolution de ces équations peut être écrite sous la forme :

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{3.32}$$

où la matrice  $A$  contient l'ensemble des coefficients  $a$ . Le vecteur  $\mathbf{x}$  reprend les valeurs inconnues  $\phi_P^{n+1}$  pour chaque volume de contrôle.

Dans un dossier de simulation OpenFOAM, les schémas de discrétisation sont repris dans le fichier `fvSchemes`. Le fichier `fvSchemes` que nous utilisons dans ce projet a d'ailleurs été repris du tutoriel `hotRoom`. Nous n'avons pas adapté les schémas de discrétisation pour notre cas. Un travail intéressant serait de modifier ces schémas de discrétisation et d'en mesurer les influences sur les résultats.

Le tableau 3.3 récapitule les principales dénominations des méthodes de discrétisation utilisées dans un fichier `fvSchemes` et leur définition. En particulier, pour la dénomination *Gauss linear*, *Gauss* signifie que la discrétisation du terme se fait par l'intermédiaire d'une intégrale de Gauss, *linear* indique que l'interpolation des valeurs aux faces par les valeurs au centre des cellules est réalisée au moyen d'une différence centrée. Des facteurs de correction peuvent être appliqués dans le cas de maillages non-orthogonaux, le terme *corrected* sera dans ce cas ajouté avec la valeur de la correction.

Dans notre cas, la résolution du système 3.32 se fait au moyen d'une méthode GAMG (Geometric algebraic multi-grid) avec un pré-conditionneur DILU (Diagonal-based Incomplete Lower-Upper) pour aider à la convergence.

Pour aider à la stabilité de la méthode, des facteurs de relaxation sont utilisés. La relaxation consiste à limiter les changements trop brusques de la valeur de  $\phi$  au cours d'un pas de temps. La formule suivante est entre autres appliquée :

$$\phi^{n+1} = \gamma\phi^* + (1 - \gamma)\phi^n$$

où  $\phi^*$  est la valeur de la variable calculée à l'itération  $n+1$  avant la relaxation,  $\phi$  est la valeur de la variable à l'itération  $n$  et  $\phi^{n+1}$  est la valeur de la variable au temps  $n+1$  après la relaxation. Au plus le facteur de relaxation est grand, au plus la solution numérique est stable. Par contre, des valeurs plus faible permettent une convergence plus rapide. Il y a donc un compromis à trouver entre rapidité et stabilité.

Dans le but d'obtenir une solution précise, il est également intéressant de contrôler les résidus. Le résidu est une mesure des erreurs commises lors de la résolution des équations. Le résidu peut être calculé comme la différence entre la valeur du membre de gauche et celle du membre de droite du système 3.32 après avoir calculé une solution. Cette différence ne doit pas être plus grande que la tolérance spécifiée par l'utilisateur. Par défaut, la tolérance est fixée à  $10^{-5}$ .

Le fichier `fvSolution` reprend tous les détails relatifs à la résolution du système 3.32 et permet de choisir les facteurs de relaxation et les tolérances pour le contrôle des résidus. Nous avons aussi fait le choix de ne pas le modifier par rapport aux tutoriels.

## 3.6 Algorithme PISO

L'algorithme utilisé par les solveurs `buoyantBoussinesqPimpleFoam` et `buoyantPimpleFoam` est l'algorithme PISO (Pressure Implicit with Splitting Operator) utilisé pour des problèmes instationnaires. De plus, de nombreux travaux scientifiques utilisent cet algorithme de résolution pour des problèmes de convection naturelle. Les principes de fonctionnement de l'algorithme sont ici rappelés.

Les différentes étapes suivies par l'algorithme, reprises sur la figure 3.3, sont les suivantes :

- Mise à jour des conditions limites
- Etape de prédiction :  
Une première estimation pour la pression  $p^*$  est choisie, basée sur les itérations précédentes. L'équation de conservation de la quantité de mouvement permet le calcul d'un champ intermédiaire de vitesse  $\mathbf{u}^*$ .
- Première étape de correction :  
Le champ de vitesse  $\mathbf{u}^*$  ne vérifie pas l'équation de continuité à moins que le champ de pression supposé  $p^*$  soit correct. L'équation de continuité est transformée en une équation de correction de pression : sa résolution avec le champ de vitesse intermédiaire permet de trouver une première correction de la pression. Un nouveau champ de vitesse est calculé sur base de cette première correction de pression.

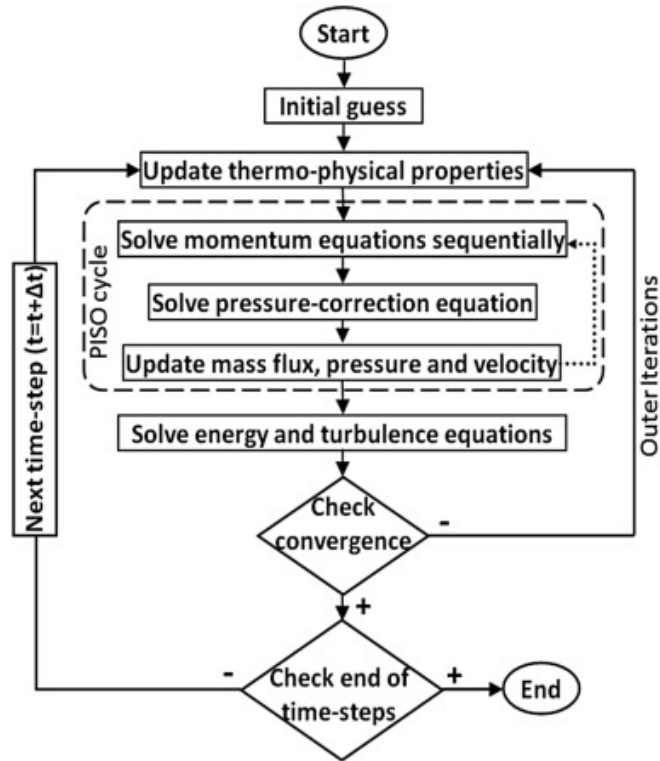


FIGURE 3.3 – Schéma de progression de l’algorithme PISO [16]

- Deuxième étape de correction  
La pression est corrigée une nouvelle fois. Cette deuxième correction de la pression est utilisée pour mettre à jour le champ de vitesse.
- L’équation de conservation de l’énergie est résolue.
- Les étapes précédentes sont ensuite répétées pour le pas de temps suivant.

Bien que le nom du solver fasse référence à l’algorithme PIMPLE, c’est bien l’algorithme PISO qui est utilisé. Dans le fichier `fvSolution`, deux paramètres sont intéressants à être mentionnés pour une meilleure compréhension de l’algorithme. `nOuterCorrectors` définit le nombre maximal d’itérations à effectuer avant de passer au pas de temps suivant même si la solution ne converge pas. Pour utiliser un schéma PISO, `nOuterCorrectors` est fixé à 1. `nCorrectors` correspond au nombre de fois que la pression va être corrigée lors d’une itération. Ce paramètre est fixé à 2. Ces paramètres sont modifiables dans le fichier `fvSolution`.

Un critère de stabilité important consiste à vérifier que le nombre de Courant ne soit pas plus grand que 1. Le nombre de Courant est défini par :

$$Co = \frac{U \Delta t}{\Delta x}$$

Il dépend de la vitesse dans le volume de courant  $U$ , du pas de temps  $\Delta t$  et de la distance entre 2 volumes de contrôle  $\Delta x$ .

Le pas de temps nécessite donc d'être ajusté en fonction de la taille du maillage et de la vitesse. Il vaut  $\Delta t$  vaut 0.01 s pour  $Ra = 10^4$  et  $Ra = 5 \cdot 10^4$ . Le pas de temps est choisi de manière à ce que le nombre de Courant  $Co$  soit inférieur dans chaque cellule du maillage et durant toute la durée de la simulation à 0.5.

Pour les nombres de Rayleigh élevés, le pas de temps doit être suffisamment court pour pouvoir capturer toutes les fluctuations introduites par la turbulence. Pour une première étude, nous avons choisi  $\Delta t = 0.1$  s.

## Chapitre 4

# Configuration des cas dans OpenFOAM

Dans ce chapitre, nous nous attardons sur le choix des propriétés physiques du fluide, la définition des conditions frontières, le choix du maillage, la mise en place du modèle de turbulence choisi et la manière dont tout cela est configuré dans le dossier de simulation. Un exemple de dossier de simulation pour le solveur `buoyantPimpleFoam` est fourni dans l'annexe A.

Le tableau 4.1 rassemble les paramètres utiles à la compréhension de l'analyse pour les 3 nombres de Rayleigh étudiés. Le nombre de Rayleigh est augmenté en augmentant la hauteur de la cavité. La différence de température dans la cavité utilisée pour atteindre ces nombres est trop importante pour respecter le critère de Gray et Giorgini [14] sur la validité de l'approximation de Boussinesq. En effet, la différence de température considérée dans la cavité ( $\Delta T = 17.5^\circ C$ ) crée une variation des propriétés physiques par rapport à leur valeur en  $T_0$  de 62.1% pour  $\beta$  et de 42.6% pour  $\mu$ . D'après le critère de Gray et Giorgini [14], cette différence ne doit pas dépasser 10%.

Les conditions aux frontières choisies sont les mêmes que celles utilisées par l'étude de Valencia et al. [25] sur base de laquelle nous comparons nos résultats dans le chapitre 5. Cette étude a été choisie car elle présente l'avantage d'utiliser un modèle physique similaire, de montrer des structures d'écoulement permettant une comparaison visuelle aisée et d'avoir tracé des profils de vitesse dans la cavité pour une comparaison plus quantitative.

	$Ra = 10^4$	$Ra = 5 \cdot 10^4$	$Ra = 10^7$
$T_C$	290.4 K	290.4 K	290.4 K
$T_H$	307.9 K	307.9 K	307.9 K
$T_0$	299.15 K	299.15 K	299.15 K
L	0.0031 m	0.0055 m	0.0313 m
$\alpha_0/L$	$4.73 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$	$2.67 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}$	$4.73 \cdot 10^{-6} \text{ m/s}$

TABLE 4.1 – Tableau récapitulatif des paramètres caractéristiques du problème

## 4.1 Propriétés physiques de l'eau

### buoyantBoussinesqPimpleFoam

Les propriétés physiques sont spécifiées dans le fichier `transportProperties`. Les variations des propriétés physiques du fluide avec la température ne sont pas prises en compte. L'utilisateur doit donc spécifier une valeur pour le coefficient de dilation thermique, une température de référence, une valeur de viscosité et un nombre de Prandtl. La température de référence est la température moyenne  $T_0 = 299.15 \text{ K}$ . Les valeurs du coefficient de dilation thermique et de la viscosité cinématique sont celles évaluées à cette température soit  $2.64 \cdot 10^{-4} \text{ 1/K}$  et  $8.82 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ . Pour le nombre de Prandtl, il est identique à celui de l'étude de référence et vaut 5.9.

$\nu \text{ [m}^2/\text{s]}$	$\beta \text{ [1/K]}$	$T_{ref} \text{ [K]}$	Pr
$8.82 \cdot 10^{-7}$	$2.64 \cdot 10^{-4}$	299.15	5.9

TABLE 4.2 – Propriétés du fluide utilisées par buoyantBoussinesqPimpleFoam

### buoyantPimpleFoam

Le solveur buoyantPimpleFoam nécessite l'élaboration d'un modèle thermophysique plus complexe. Toutes les propriétés nécessaires sont reprises dans le fichier `thermophysicalProperties`.

Dans le fichier `thermophysicalProperties`, l'onglet `thermoType` permet de caractériser le fluide :

- *pureMixture* indique un fluide à composition fixe et qui ne va pas entrer en réaction.
- *polynomial* pour l'onglet `transport` indique que la viscosité  $\mu$  et la conductivité  $\kappa$  sont calculés selon un polynôme d'ordre N :  $\mu = \sum_{i=0}^{N-1} a_i T^i$  où  $a_i$  représente les coefficients du polynôme.
- *hPolynomial* permet de calculer la chaleur massique selon un polynôme d'ordre N :  $c_p = \sum_{i=0}^{N-1} a_i T^i$ .
- *equationOfState* indique l'équation d'état. Avec *icoPolynomial* une équation d'état de la forme  $\rho = \sum_{i=0}^{N-1} a_i T^i$  est choisie.

Les figures 4.1, 4.2, 4.3 et 4.4 représentent les variations de ces propriétés physiques avec la température. Les coefficients des polynômes évoqués ont été calculés sur base d'interpolations. Ces interpolations ont été construites sur base des propriétés physiques de l'eau données par Incropera et DeWitt [15] pour des températures comprises entre 285 K et 315 K :

$$\rho = -0.005 T^2 + 3.051 T + 583.626 \quad (4.1)$$

$$c_p = 0.022 T^2 - 13.75 T + 6289.61 \quad (4.2)$$

$$\mu = 3.219 \cdot 10^{-7} T^2 - 2.127 \cdot 10^{-4} T + 0.035 \quad (4.3)$$

$$\kappa = -4.761 \cdot 10^{-6} T^2 + 4.328 \cdot 10^{-3} T - 0.2568 \quad (4.4)$$

La prise en compte de ces variations des propriétés physiques avec la température rendent le modèle plus complet. Les changements introduits par ces considérations seront étudiés dans le chapitre 5. A noter qu'une diminution de la masse volumique  $\rho$  traduit une augmentation du coefficient de dilatation thermique  $\beta$  et inversement.

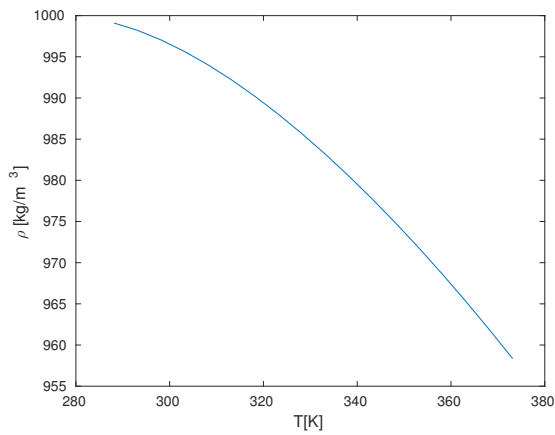


FIGURE 4.1 – Variation de la masse volumique avec la température

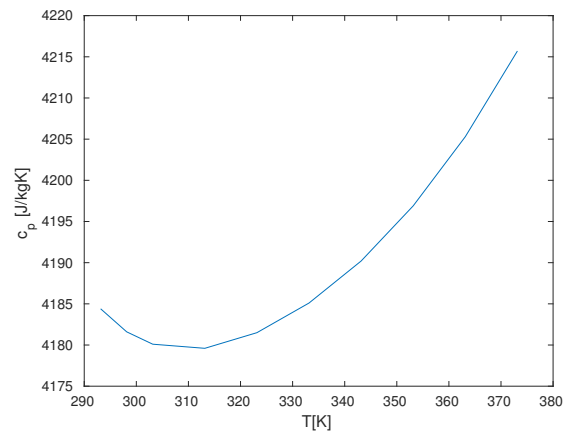


FIGURE 4.2 – Variation de la chaleur massique avec la température

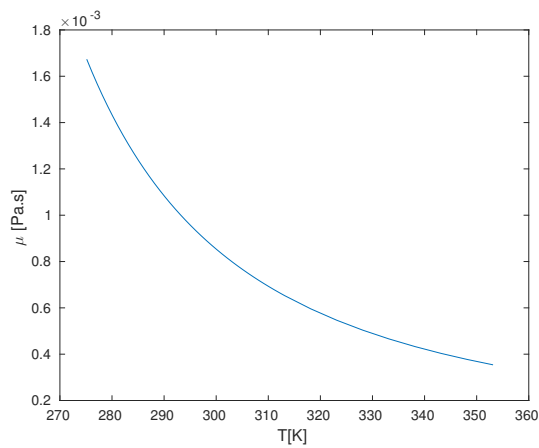


FIGURE 4.3 – Variation de la viscosité dynamique avec la température

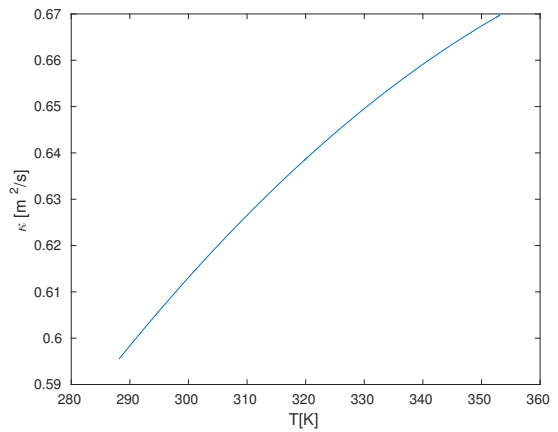


FIGURE 4.4 – Variation de la conductivité thermique avec la température

## 4.2 Conditions frontières

La définition des conditions frontières est identique pour les 2 solveurs. L'utilisateur spécifie les conditions frontières dans le dossier 0.

Nous considérons des parois latérales parfaitement conductrices. Cette condition peut être modélisée en imposant pour les parois latérales un profil de température linéaire constant entre le mur inférieur chaud et le mur inférieur froid. Les parois horizontales sont quant à elle isothermes. La fonction `funkySetFields` permet d'imposer ce type de profil.

La condition de non-glissement aux parois est spécifiée dans le dossier des conditions initiales par le terme `noSlip`.

Un gradient de pression nul est imposé aux parois. D'un point de vue mathématique, cette condition s'écrit  $\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial z} = 0$ . Cette condition est spécifiée par le terme `zeroGradient`.

### 4.3 Conditions initiales

La température de l'eau est initialement imposée à  $T_C$  à l'intérieur de la cavité. Les simulations ont cependant montré que le champ de température tend vers une configuration où la température de l'eau à l'intérieur de la cavité augmente linéairement entre une température chaude près de la paroi inférieure et une température froide près de la surface froide. Dans le but d'accélérer la simulation, nous avons directement imposé cette distribution linéaire de température dans les conditions initiales en utilisant la fonction `funkySetFields`.

La pression statique  $p$  est fixée à  $10^5 Pa$ . Cela correspond à la pression atmosphérique.

Une vitesse initiale de  $0.0001 m/s$  dans une direction horizontale doit être imposée à l'intérieur de la cavité pour obtenir des résultats des simulations soient proches de ceux obtenus par Valencia et al [25].

### 4.4 Modèle de turbulence

Le choix du modèle de turbulence est spécifié dans le fichier `turbulenceProperties`.

#### Pour les nombres de Rayleigh modérés

Pour les simulations à faible et moyen nombre de Rayleigh ( $Ra = 10^4$  et  $Ra = 5 \cdot 10^4$ ), aucun modèle de turbulence n'est appliqué car l'écoulement reste laminaire.

#### Pour un nombre de Rayleigh élevé

Pour les simulations à haut nombre de Rayleigh ( $Ra = 10^7$ ), nous appliquons la méthode LES pour la résolution de la turbulence telle que décrite dans la section 3.4 avec le modèle de Smagorinsky pour la viscosité d'échelle inférieure à la maille  $\mu_{sgs}$ . La valeur du coefficient  $C_s$  de l'équation 3.18 est donnée par :

$$C_s^2 = C_k \sqrt{\frac{C_k}{C_\epsilon}}$$

Les valeurs par défaut données par OpenFOAM sont  $C_k = 0.094$  et  $C_\epsilon = 1.048$ .  $C_s$  a une valeur de 0.16.

Avec une simulation LES, le terme  $\alpha_{eff} = \frac{\nu}{Pr} + \frac{\nu_{sgs}}{Pr_t}$  apparaît dans l'équation de conservation de l'énergie du solveur `buoyantBoussinesqPimpleFoam`.  $Pr_t$  est le nombre de Prandtl turbulent d'échelle inférieure à la maille. Pour les problèmes de Rayleigh-Bénard, il est suggéré par de nombreuses études (notamment par celle de Eidson [8]) d'utiliser une valeur comprise entre  $\frac{1}{3}$  et  $\frac{1}{2}$ . Pour ce projet, une valeur  $Pr_t = 0.4$  a été choisie.

## 4.5 La résolution du maillage

Un maillage constitué d'un grand nombre d'éléments permet d'améliorer la précision des résultats mais il augmente les besoins en ressources de calcul et mémoire. Il accroît aussi le temps de simulation. Le choix du maillage est donc une étape importante. Il faut en effet trouver un compromis entre la précision et le temps de calcul.

### 4.5.1 Pour les nombres de Rayleigh modérés

A nombre de Rayleigh modéré, Valencia et al. [25] utilisent un maillage uniforme de  $40 \times 40 \times 40$  cellules.

Dans le but d'étudier l'effet de la résolution du maillage, les simulations ont été testées avec trois distributions de cellules :  $20 \times 20 \times 20$  (résolution grossière),  $40 \times 40 \times 40$  (résolution moyenne) et  $80 \times 80 \times 80$  (résolution fine).

Les figures 4.5(a) et 4.5(b) montrent l'évolution de la température le long d'une droite située en  $x = z = L/2$  obtenue pour  $Ra = 10^4$  et  $Ra = 5 \cdot 10^4$ . Nous pouvons observer que les résultats sont très proches pour une résolution moyenne et une résolution fine. Les différences sont négligeables (moins de 0.1% à  $Ra = 10^4$ , moins de 0.15% à  $Ra = 5 \cdot 10^4$ ). Entre la résolution grossière et la résolution fine les différences de calcul sont plus importantes mais tout aussi négligeables (inférieure à 0.5% dans les deux cas).

Les figures 4.6(a) 4.6(b) montrent l'évolution de la vitesse verticale le long d'une droite horizontale située en  $y = z = L/2$ . Les différences sont plus marquées que pour le profil de température : de l'ordre de 15% entre la résolution grossière et la résolution fine à  $Ra = 10^4$  (10% à  $Ra = 5 \cdot 10^4$ ), de l'ordre de 4% entre la résolution moyenne et la résolution fine (3% à  $Ra = 5 \cdot 10^4$ ). Ces différences peuvent nous donner une idée de l'ordre des erreurs de discrétisation. Le maillage grossier est logiquement écarté.

Pour les nombres de Rayleigh modérés ( $Ra = 10^4$  et  $Ra = 5 \cdot 10^4$ ), un maillage uniforme de  $40 \times 40 \times 40$  cellules a donc finalement été choisi. Cette résolution offre un niveau de précision suffisant pour une première étude et nous épargne du temps de calcul par rapport à une résolution plus fine.

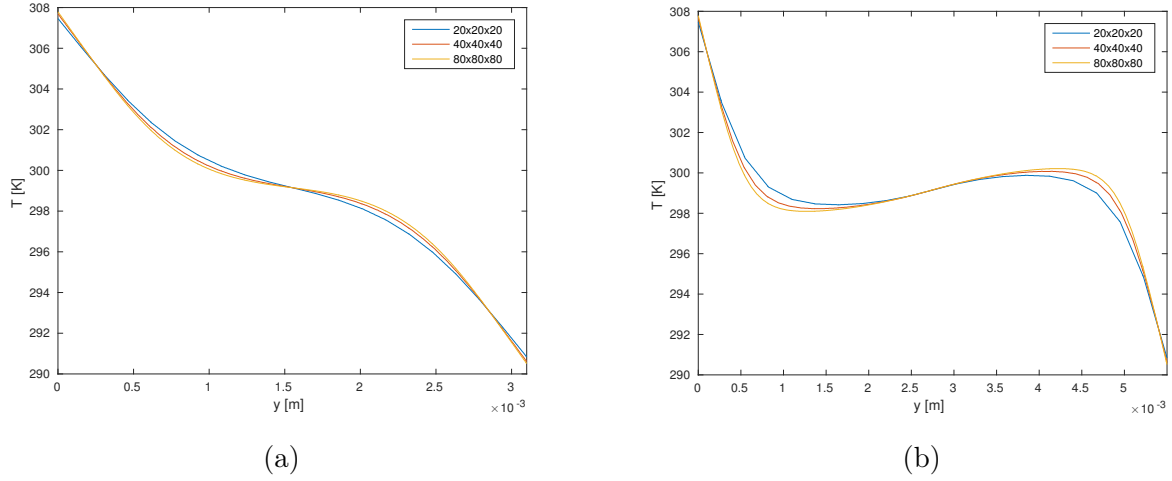


FIGURE 4.5 – Effet de la résolution du maillage sur le profil de température le long d’une droite verticale située en  $x = z = L/2$  pour (a)  $Ra = 10^4$  et (b)  $Ra = 5 \cdot 10^4$  avec `buoyantBoussinesqPimpleFoam`

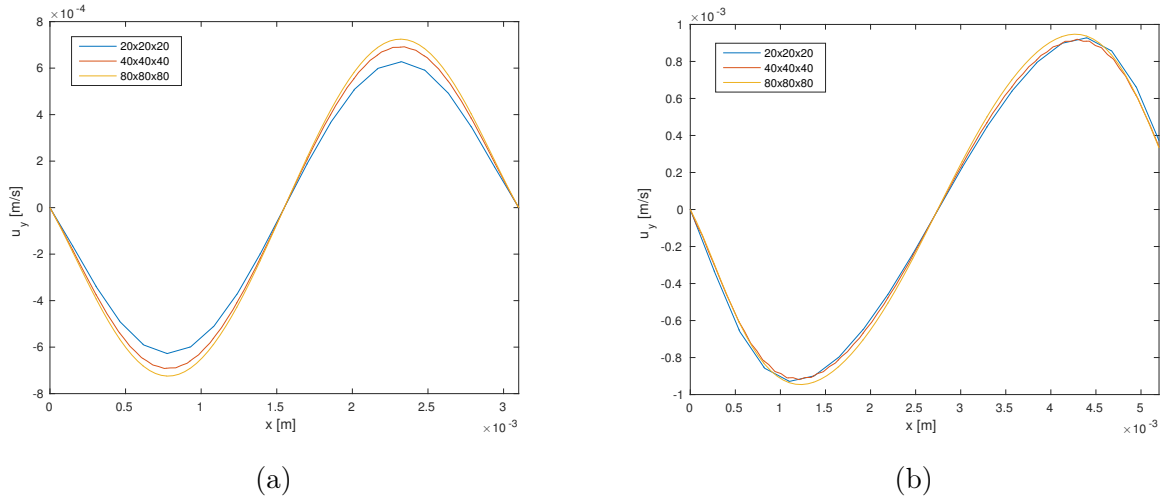


FIGURE 4.6 – Effet de la résolution du maillage sur le profil de vitesse verticale le long d’une droite horizontale située en  $y = z = L/2$  pour (a)  $Ra = 10^4$  et (b)  $Ra = 5 \cdot 10^4$  avec `buoyantBoussinesqPimpleFoam`

D’après Verzicco et al. [28], le nombre de Nusselt est la donnée la plus sensible à la résolution spatiale. L’analyse peut donc être complétée en prenant le nombre de Nusselt comme point de comparaison.

#### 4.5.2 Pour un nombre de Rayleigh élevé

Pour un nombre de Rayleigh élevé, la simulation requiert un maillage plus fin. Le choix du maillage est d’ailleurs d’une importance particulière quand une méthode LES est utilisée car il définit la longueur de filtre  $\Delta$  et donc les échelles qui seront résolues par la méthode et les autres.

Pour le nombre de Rayleigh de  $10^7$ , il a finalement été choisi de discrétiser le domaine en  $64 \times 64 \times 64$  cellules. La résolution de la grille est affinée près des parois, dans toute les directions,

grâce à une fonction de tangente hyperbolique. Ce choix de résolution est inspiré des travaux de Foroozani et al. [10] qui ont étudié par la méthode LES la convection de Rayleigh-Bénard turbulente ( $10^6 \leq Ra \leq 10^8$ ) pour de l'air ( $Pr = 0.7$ ) dans une cavité cubique.

Nous devons cependant vérifier que ce maillage est adapté pour notre cas et s'il permet la résolution complète des couches limites thermique et dynamique près des parois horizontales. Une résolution fine de la couche limite thermique est indispensable pour un calcul précis des transferts thermiques. En particulier, nous suivons le critère de Vezicco et al. [28] selon lequel il doit y avoir au minimum 6 cellules dans l'épaisseur de la couche limite thermique  $\delta_\theta$  des parois horizontales. Le premier point de maillage doit également se trouver proche de  $\delta_\theta/8$  pour donner des résultats précis. L'épaisseur de la couche limite peut être approchée, sous forme adimensionnelle, par :

$$\delta_\theta^* = \frac{1}{2Nu} \quad (4.5)$$

En utilisant l'expression 4.5, nous faisons l'hypothèse que le saut de température  $\Delta T$  a exclusivement lieu dans les deux couches limites thermiques et que dans le reste de la cavité la température est uniforme et proche de  $T_0$ . Cette hypothèse sera par la suite vérifiée. Le nombre de Nusselt peut être approché par la corrélation 4.6 développée par Golstein et al. [13] dans leur étude des transferts de chaleur par convection dans l'eau ( $4 \leq Pr \leq 8$ ) pour des nombres de Rayleigh élevés. Il peut également être approché par la corrélation 4.7 donnée par Incropera et Dewitt [15] pour des cavités rectangulaires.

$$Nu = 0.0556Ra^{\frac{1}{3}} \quad (4.6)$$

$$Nu = 0.069Ra^{\frac{1}{3}}Pr^{0.074} \quad (4.7)$$

En prenant la moyenne des résultats donnés par ces deux expressions, nous obtenons  $Nu = 14.67$  et  $\delta_\theta^* = 0.034$ .

L'application d'une fonction tangente hyperbolique permet de resserrer les points de maille près des parois. Si nous considérons la moitié d'une cavité, elle permet par exemple de modifier les coordonnées  $X_i$  des noeuds d'un maillage uniforme en :

$$X_{new,i} = c \tanh\left(\frac{b \cdot i}{m}\right) \quad (4.8)$$

où  $i = 0, \dots, (N_x - 1)/2$  avec  $N_x$  le nombre de noeuds choisis dans la direction x ( $X_0$  est dans ce cas-ci le noeud situé au centre de la cavité),  $c = L/(2 \tanh(2))$ ,  $m = (N_x - 1)/2$ . L'expression 4.8 s'applique aussi aux autres coordonnées et dans toutes les directions. La figure 4.7 représente le maillage après l'application de la tangente hyperbolique sur tous les noeuds.

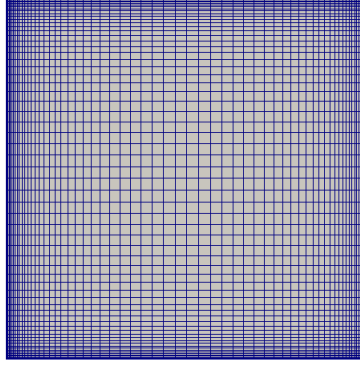


FIGURE 4.7 – Maillage 64x64x64 après l’application d’une fonction d’affinement près des parois dans le plan x-y

Après affinement, 8 cellules sont comprises dans l’épaisseur de la couche limite. Le premier point de maille se trouve à une distance  $y^* = 0.0024$  inférieure à  $\delta_\theta^*/8$ . Le maillage choisi permet une bonne résolution de la couche limite thermique.

Pour nous épargner des ressources de calcul, un maillage de 32x64x32 aurait pu être choisi.

Le tableau 4.3 reprend enfin les caractéristiques principales des mailles utilisées. N représente le nombre de noeuds,  $\Delta x_{min}^*$  et  $\Delta x_{max}^*$  l’espace minimal et maximal entre 2 noeuds dans la direction x.

Ra	Nx	Ny	Nz	$\Delta x_{min}^* = \Delta y_{min}^* = \Delta z_{min}^*$	$\Delta x_{max}^* = \Delta y_{max}^* = \Delta z_{max}^*$
$10^4$	41	41	41	0.025	0.025
$5 \cdot 10^4$	41	41	41	0.025	0.025
$10^7$	65	65	65	0.0024	0.032

TABLE 4.3 – Récapitulatif des résolutions de maille choisies

## 4.6 Méthode de calcul du nombre de Nusselt

Pour les problèmes de convection, les échanges de chaleur entre un fluide et une paroi sont caractérisés par le nombre de Nusselt :

$$Nu = \frac{hL}{k} \quad (4.9)$$

Ce nombre est le rapport entre la chaleur transférée par convection et celle transférée par conduction. Plus le nombre de Nusselt augmente, plus la contribution de l’écoulement sur l’échange de chaleur avec la paroi est important.

La recherche d’une méthode satisfaisante pour son calcul avec OpenFOAM n’a pas été une tâche aisée. Nous avons finalement repris l’expression développée par Shishkina et al. [23] pour un problème de convection de Rayleigh-Bénard turbulente dans une cavité cylindrique :

$$Nu_{av} = \Gamma^{\frac{1}{2}} Ra^{\frac{1}{2}} Pr^{\frac{1}{2}} \langle u_y^* T^* \rangle_{t,V} + 1 \quad (4.10)$$

L'expression 4.10 permet le calcul du nombre de Nusselt moyen  $Nu_{av}$  dans la cavité. Dans cette expression, la vitesse doit être adimensionnalisée par la vitesse caractéristique  $U_f = \sqrt{g\beta L\Delta T}$ .  $\langle . \rangle_{t,V}$  indique l'intégration par rapport au temps et au volume de la cavité.  $\Gamma$  est le facteur de forme, unitaire pour une cavité cubique.

OpenFOAM offre les outils nécessaires pour les intégrations temporelles, surfaciques et volumiques requises par ces expressions.

# Chapitre 5

## Résultats et discussion

Dans ce chapitre, les résultats au problème décrit dans la section 2.1 sont présentés pour trois nombres de Rayleigh :  $Ra = 10^4$ ,  $Ra = 5 \cdot 10^4$  et  $Ra = 10^7$ . Nous comparons les résultats obtenus par les deux solveurs d'OpenFOAM avec les résultats numériques ou expérimentaux trouvés dans la littérature. La configuration du cas est rappelée au chapitre 4.

Tout au long de ce chapitre, nous comparons nos données sur base des résultats que Valencia et al. [25] obtiennent avec leurs simulations BFS (Boussinesq Fluid Simulation) pour lesquelles l'approximation de Boussinesq est considérée. Les auteurs ont résolu les équations de conservation en utilisant 3Dinamics, un code de calcul semi-implicite basé sur la méthode des volumes finis pour des simulations DNS.

Pour les nombres de Rayleigh modérés ( $Ra = 10^4$  et  $Ra = 5 \cdot 10^4$ ), le temps simulé est de 360 *s*. Les structures de l'écoulement ont alors rejoint un état stable qui ne varie plus avec le temps.

Par simplicité, nous utiliserons dorénavant les notations `bbpf` et `bpf` pour indiquer les solveurs `buoyantBoussinesqPimpleFoam` et `buoyantPimpleFoam`.

### 5.1 Expérience à faible nombre de Rayleigh

L'écoulement peut tout d'abord être caractérisé par l'isosurface  $\lambda_2$  représentée sur la figure 5.1.  $\lambda_2$  est la deuxième plus grande valeur propre du tenseur du gradient de la vitesse  $\nabla \mathbf{u}$ . Cette méthode est utilisée pour représenter les structures tourbillonnaires présentes dans l'écoulement. Cette technique de visualisation des tourbillons est très répandue en mécanique des fluides. Une fonctionnalité d'OpenFOAM permet d'obtenir facilement  $\lambda_2$ . L'isosurface obtenue avec `bpf` est représentée pour une valeur  $\lambda_2/|\lambda_{2,max}| = 0.12$ . La forme prise par l'isosurface est similaire à celle décrite par Valencia et al. [25].

La structure peut aussi être décrite par les isosurfaces de masse volumique  $\rho$  représentées à la figure 5.2. Nous observons que la masse volumique est plus faible dans le fond de la cavité que près de la surface. Nous pouvons aussi clairement identifier les zones de montées et de descente de l'eau. La forme et la disposition des isosurfaces sont symétriques.

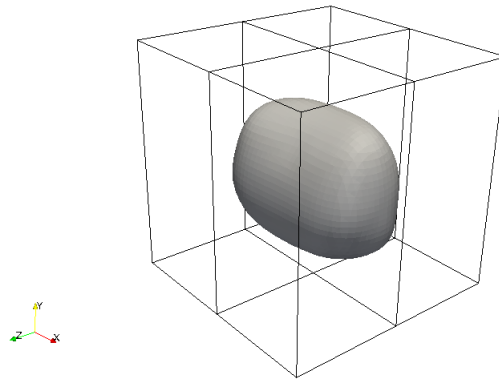


FIGURE 5.1 – Surface de valeur constante  $\lambda_2/|\lambda_{2,max}| = 0.12$  pour un écoulement à  $Ra = 10^4$  obtnue avec bpf

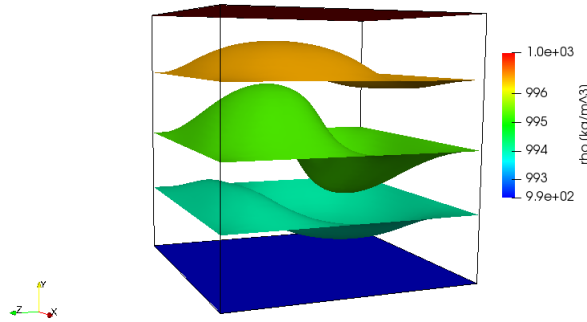


FIGURE 5.2 – Isosurfaces de masse volumique  $\rho$  à  $Ra = 10^4$  obtenu avec bpf

La figure 5.4 représentent les vecteurs vitesses de écoulement obtenus par simulation en deux plans orthogonaux. La cavité cubique et les deux plans orthogonaux sont représentés à la figure 5.1.

L'observation de la figure 5.4 (a) montre que l'écoulement prend une forme circulaire. Le fluide froid descend parallèlement à un côté de la cavité, et le fluide chaud remonte par le côté opposé. Une seconde structure est observée à la figure 5.4 (b). Nous distinguons 4 rouleaux de circulation dont les axes de rotation sont parallèles aux parois latérales.

Ces observations sont similaires à celles décrites par Valencia et al. [25] dans leurs travaux. Les figures 5.3(a) et (b) permettent de s'en rendre compte.

Les figures 5.6 et 5.7 représentent les contours des vitesses verticales dans un plan horizontal situé au milieu de la cavité pour bpf et bbpf. Deux zones se distinguent : la première délimite une zone de remontée du fluide, la seconde une zone de descente. Dans le plan considéré, la surface occupée par ces deux zones est la même. La vitesse est plus élevée avec bpf qu'avec bbpf. La figure 5.8 montre que l'ordre de grandeur des vitesses est identique à celui calculé par Valencia et al.[25].

La structure générale de l'écoulement présente ainsi les caractéristiques de la structure S1 décrite par Pallares [22].

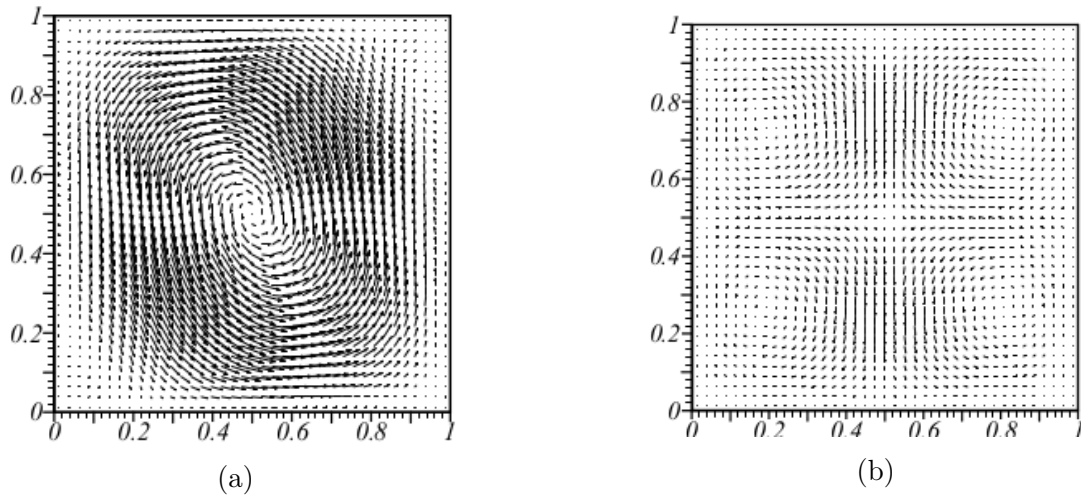


FIGURE 5.3 – Vecteurs vitesses de l'écoulement à  $Ra = 10^4$  dans les plans verticaux  $x^* = 0.5$  (a) et  $z^* = 0.5$  (b) par Valencia et al. [25] (2005)

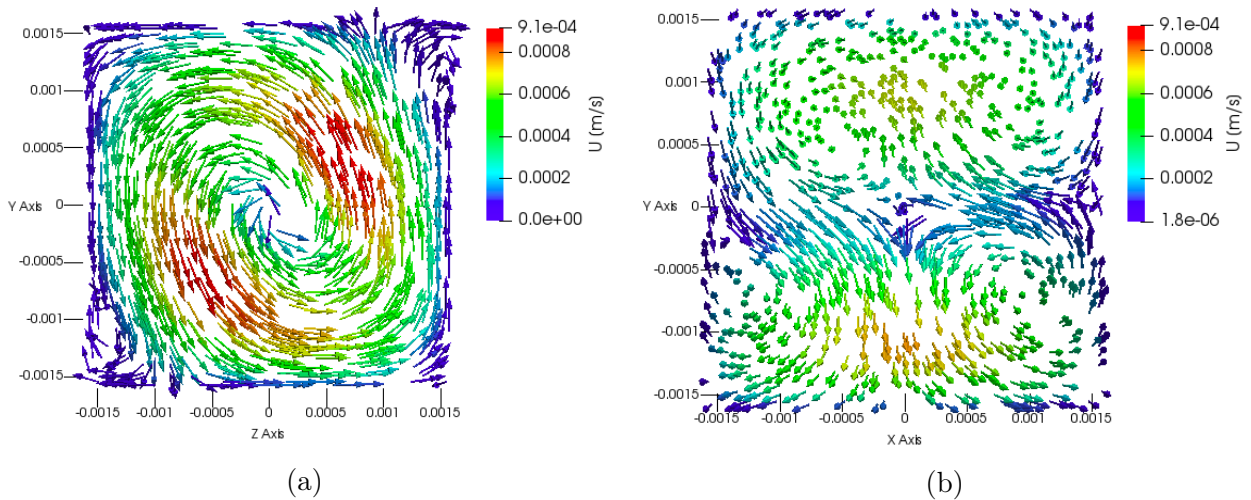
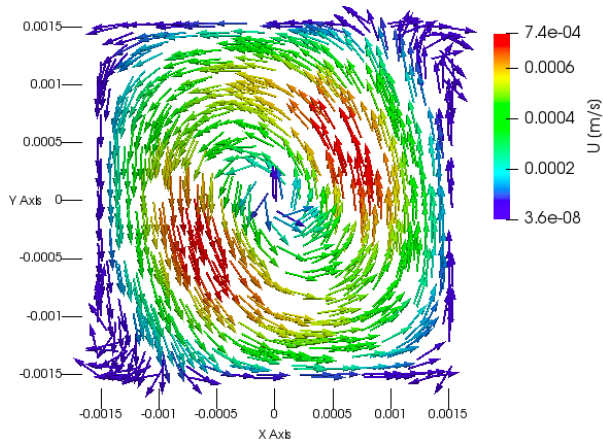
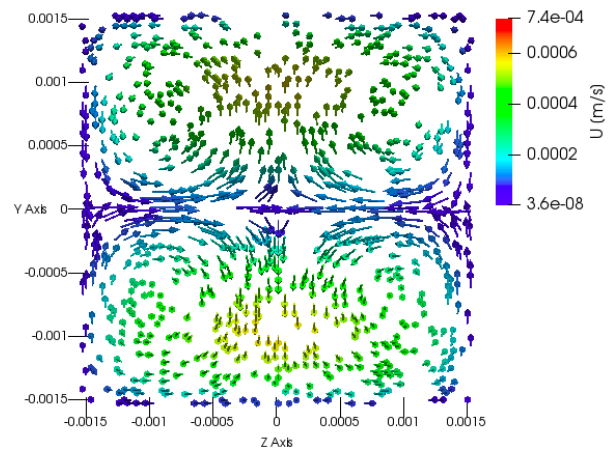


FIGURE 5.4 – Vecteurs vitesses de l'écoulement à  $Ra = 10^4$  pour les simulations bpf et pour les plans verticaux  $x^* = 0.5$  (a) et  $z^* = 0.5$  (b)



(a)



(b)

FIGURE 5.5 – Vecteurs vitesses de l'écoulement à  $Ra = 10^4$  pour les simulations bbpf et pour les plans verticaux  $x^* = 0.5$  (a) et  $z^* = 0.5$  (b)

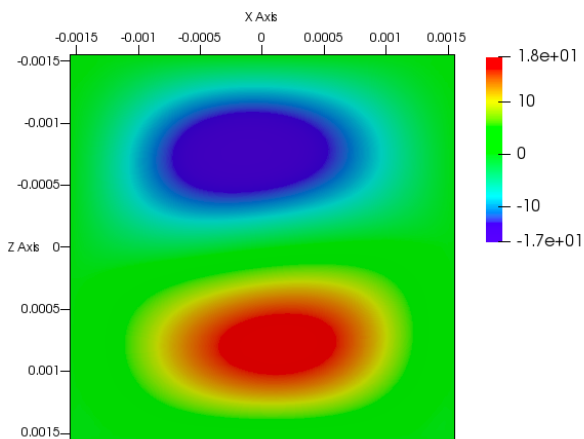


FIGURE 5.6 – Contours des vitesses verticales  $u_y^*$  dans le plan horizontal  $y^* = 0.5$  pour les simulations bpf à  $Ra = 10^4$

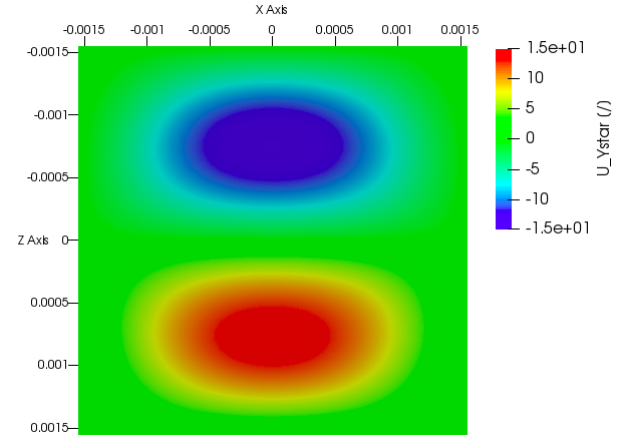


FIGURE 5.7 – Contours des vitesses verticales  $u_y^*$  dans le plan horizontal  $y^* = 0.5$  pour les simulations bbpf à  $Ra = 10^4$

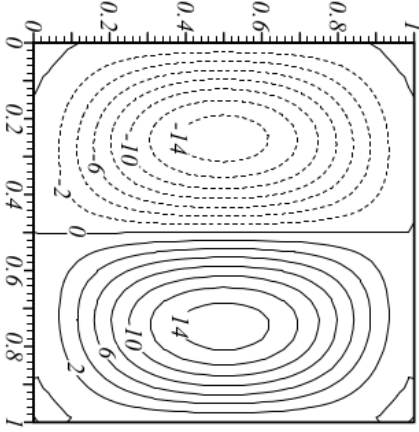


FIGURE 5.8 – Contours des vitesses verticales  $u_y^*$  dans le plan horizontal  $y^* = 0.5$  à  $Ra = 10^4$  par Valencia et al. [25] (2005)

Les figures 5.9 et 5.10 montrent respectivement les profils des vitesses selon la direction  $z$  ( $u_z^*$ ) le long d'une droite proche de la paroi chaude et le long d'une droite proche de la paroi froide. Ces deux droites du plan  $(x,y)$  sont situées en  $y^* = 0.064$  et  $y^* = 0.94$ . Pour la comparaison, ces graphes reprennent les profils des vitesses obtenus par bbpf, bpf et Valencia et al. [25] avec leur solveur utilisant l'hypothèse de Boussinesq (BFS). Les profils sont adimensionnalisés. Les échelles de références pour la viscosité, la longueur, la vitesse, le temps et la pression sont respectivement  $\mu_0$ ,  $L$ ,  $\alpha_0/L$ ,  $L^2/\alpha_0$ ,  $\alpha_0^2\rho_0/L^2$ . Nous observons déjà que l'allure des courbes est globalement similaire.

Pour la paroi chaude, la courbe des vitesses obtenue avec bbpf sont très proche de celle obtenue par Valencia et al. [25].

La vitesse proche de la paroi chaude avec bpf est supérieure à celle calculée avec bbpf. Notamment, la vitesse maximale  $|u_{z,max}^*|$  calculée avec bpf est supérieure de 45.87 % par rapport à celle calculée par bbpf. Cette différence s'explique par la diminution de la viscosité avec la température qui n'est pas prise en compte par le solveur bbpf. Une diminution de la viscosité permet une augmentation de la vitesse.

A proximité de la paroi froide, les vitesses obtenues avec bbpf s'éloignent de la courbe de Valencia et al. [25] de manière plus significative.

Les vitesses obtenues avec bpf sont légèrement plus élevées que celles obtenues avec bbpf. La situation inverse aurait cependant dû être observée. En raison d'une plus faible température dans cette zone, la dilatation thermique du fluide est moins importante. Une diminution de la dilatation thermique diminue le terme de poussée d'Archimède dans l'équation de conservation de la quantité de mouvement avec pour conséquence donc une diminution de la vitesse. Malgré la prise en compte des variations de la dilatation thermique avec la température par l'introduction de la fonction quadratique  $\rho(T)$  (4.1), l'effet de la diminution de la dilatation thermique n'est pas observé.

De plus, l'augmentation de la viscosité avec une chute de température aurait également dû agir

dans le sens d'une diminution de la vitesse car le fluide s'écoule moins facilement. Cet effet n'est pas non plus observé.

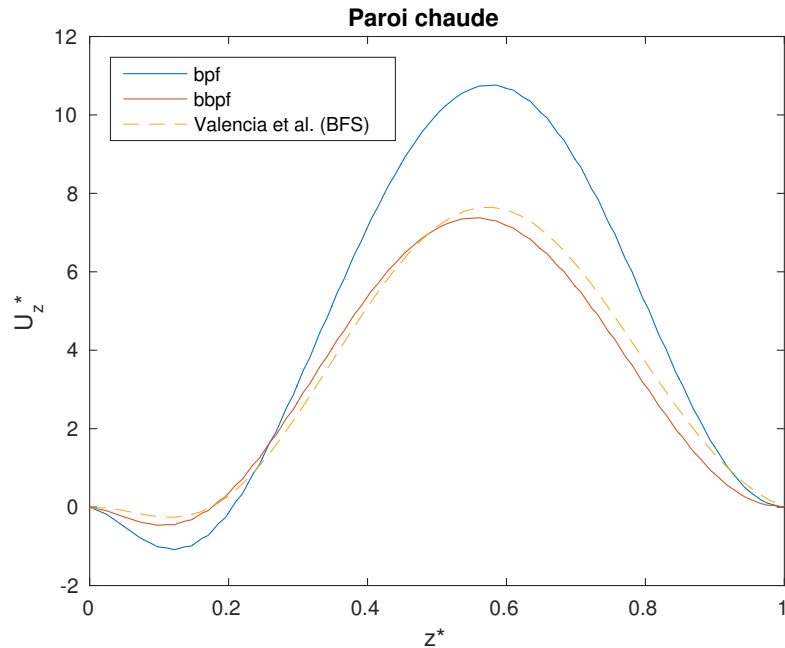


FIGURE 5.9 – Evolution de la vitesse horizontale  $u_z^*$  près de la paroi chaude selon la droite  $y^* = 0.064$ ,  $x^* = 0.5$  à  $Ra = 10^4$  obtenue par bpf, bbpf et Valencia et al. [25] (2005)

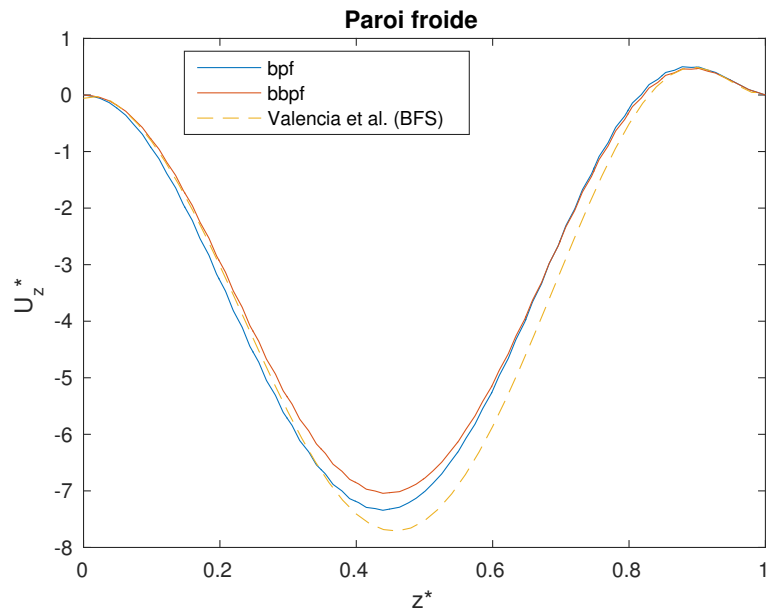


FIGURE 5.10 – Evolution de la vitesse horizontale  $u_z^*$  près de la paroi froide selon la droite  $y^* = 0.94$ ,  $x^* = 0.5$  à  $Ra = 10^4$  obtenue par bpf, bbpf et Valencia et al. [25](2005)

Un autre paramètre de comparaison intéressant est le nombre de Nusselt moyen. Le tableau 5.1 reprend le nombre de Nusselt moyen calculés par Valencia et al. [25] et celui obtenu pour nos solveurs avec l'expression 4.10.

Nous pouvons observer que le nombre de Nusselt moyen de bbpf est supérieur de 0.4 % à celui de Valencia et al. [25]. Le nombre de Nusselt moyen de bpf est quant à lui supérieur de 7.1 % à celui de bbpf. Cette augmentation peut s'expliquer par l'augmentation des vitesses du fluide près de la paroi chaude par la diminution de la viscosité. Le transfert thermique convectif est alors plus important.

	$Nu_{av}$
Valencia et al. [25] (BFS)	1.246
bbpf	1.251
bpf	1.348

TABLE 5.1 – Tableau récapitulatif des nombres de Nusselt moyen à  $Ra = 10^4$

## 5.2 Expérience à nombre de Rayleigh moyen

L'isosurface  $\lambda_2$  à  $Ra = 5 \cdot 10^4$  est représentée sur la figure 5.11. La forme que prend cette isosurface pour une valeur  $\lambda_2/|\lambda_{2,max}| = 0.47$  est similaire à celle présentée dans les travaux de Valencia et al. [25].

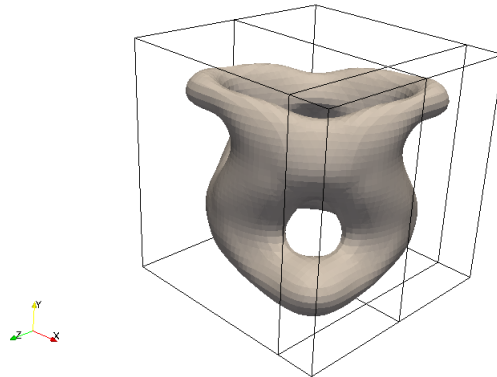


FIGURE 5.11 – Surface de valeur constante  $\lambda_2/|\lambda_{2,max}| = 0.47$  pour écoulement à  $Ra = 5 \cdot 10^4$  avec bpf

La figure 5.12 représente les isosurfaces de masse volumique  $\rho$  obtenue avec bpf. La forme prise par l'isosurface située au centre de la cavité permet d'identifier deux zones où le fluide remonte et deux zones où il redescend.

La figure 5.14 représente les vecteurs vitesses de l'écoulement dans deux plans orthogonaux situés en  $x^* = 0.83$  et  $z^* = 0.5$ . Ces 2 plans sont visibles sur la figure 5.11.

Sur la figure 5.14 (a), nous observons l'apparition d'une boucle de convection principale et de 2 boucles de recirculation dans 2 coins opposés du plan. En comparaison avec un cas à faible nombre de Rayleigh, ces boucles de recirculation sont plus développées. Les mouvements ascendants sont créés par les particules plus chaudes ayant une masse volumique moindre. Les particules plus

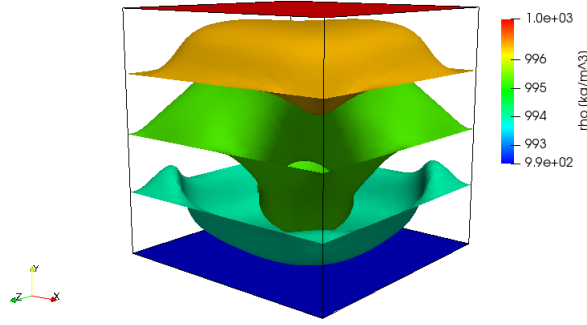


FIGURE 5.12 – Isosurfaces de masse volumique  $\rho$  à  $Ra = 5 \cdot 10^4$  avec bpf

froides et proches de la paroi supérieure sont entraînées vers le fond en raison de leur masse volumique plus importante. La création des zones de recirculation est due à la présence des coins supérieur gauche et inférieur droit qui vont ralentir brutalement un écoulement qui accélère sous l'effet du gradient de masse volumique. Ensuite, lorsque l'écoulement rentre en contact avec les parois horizontales, la force de traînée causée par le mur cause son ralentissement. Il n'est alors plus suffisamment intense pour créer un point de séparation à l'approche des coins supérieur droit et inférieur gauche.

Sur la figure 5.11 (b), 4 rouleaux de circulations sont observés, plus facilement détectables que dans un cas à faible nombre de Rayleigh. Les axes de rotation de ces rouleaux sont un peu décalés par rapport au centre des quadrants. Ces observations qualitatives sont identiques à celles réalisées par Valencia et al. [25] à ce même nombre de Rayleigh (cfr figure 5.13).

Pour les contours des vitesses verticales  $u_y^*$  dans le plan  $y^* = 0.5$ , les résultats obtenus avec les solveurs bpf et bbpf sont représentés aux figures 5.16 et 5.17 respectivement.

Pour bpf, nous observons l'apparition de 4 zones : 2 quadrants permettent au fluide plus chaud de remonter, les 2 autres permettent au fluide plus froide de descendre. L'aire utilisée par ces courants ascendants et descendants est la même. Une observation équivalente est faite par Valencia et al. [25] à la figure 5.18. De plus, l'ordre de grandeur de ces vitesses est respecté. Cette structure d'écoulement présente les caractéristiques d'une structure S5 selon la dénomination de Pallares et al. [22]. D'après les travaux de Pallares et al. [22], la transition vers une structure S5 ne se fait que pour un nombre de Rayleigh proche de  $6,5 \cdot 10^4$ . A  $Ra = 5 \cdot 10^4$ , l'écoulement aurait dû présenter une structure S1 ou S2. Il y donc manifestement un écart entre les résultats expérimentaux et les résultats des simulations. Cette différence peut s'expliquer par l'influence du nombre de Prandtl sur les structures d'écoulement car les expériences de Pallares [22] ont été effectuées à un nombre de Prandtl de 130, bien plus élevé que dans notre étude. Elle peut également s'expliquer par le fait que nous ne reproduisons pas l'augmentation progressive du nombre de Rayleigh dans la cavité comme celle réalisée par l'expérience. L'hypothèse des parois parfaitement conductrices peut aussi jouer un rôle.

Pour bpdf, les vitesses verticales  $u_y^*$  dans le plan  $y^* = 0.5$  ne présentent pas les mêmes caractéristiques. Deux zones se distinguent : une zone de remontée du fluide et une zone de descente. Ces observations ne sont pas en adéquation avec les résultats de Valencia et al. [25]. Une structure similaire à celle obtenue à la figure 5.18 était attendue. Les résultats de bpdf pour un nombre de Rayleigh moyen sont donc à manier avec prudence.

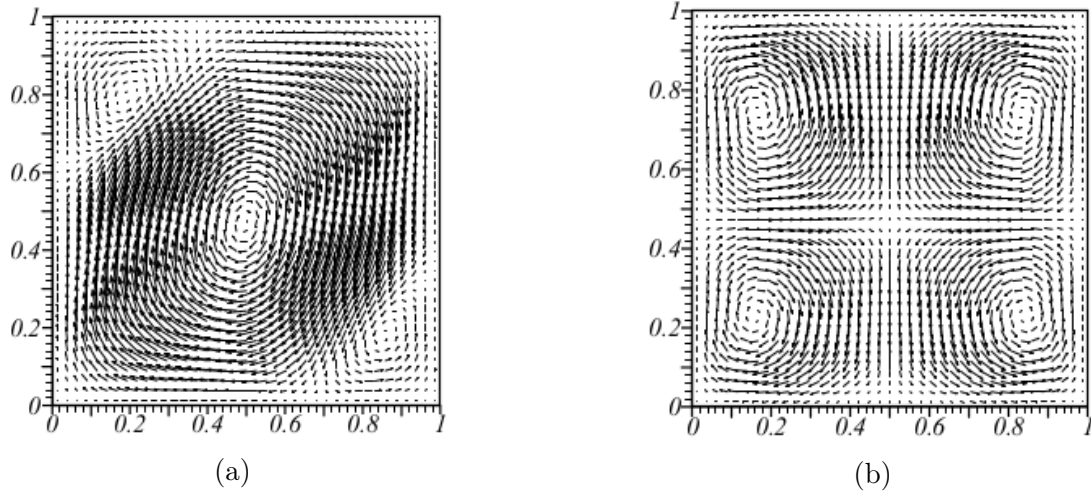


FIGURE 5.13 – Vecteurs vitesses de l'écoulement à nombre de Rayleigh moyen dans les plans verticaux  $x^* = 0.5$  (a) et  $z^* = 0.5$  (b) par Valencia et al. [25] (2005)

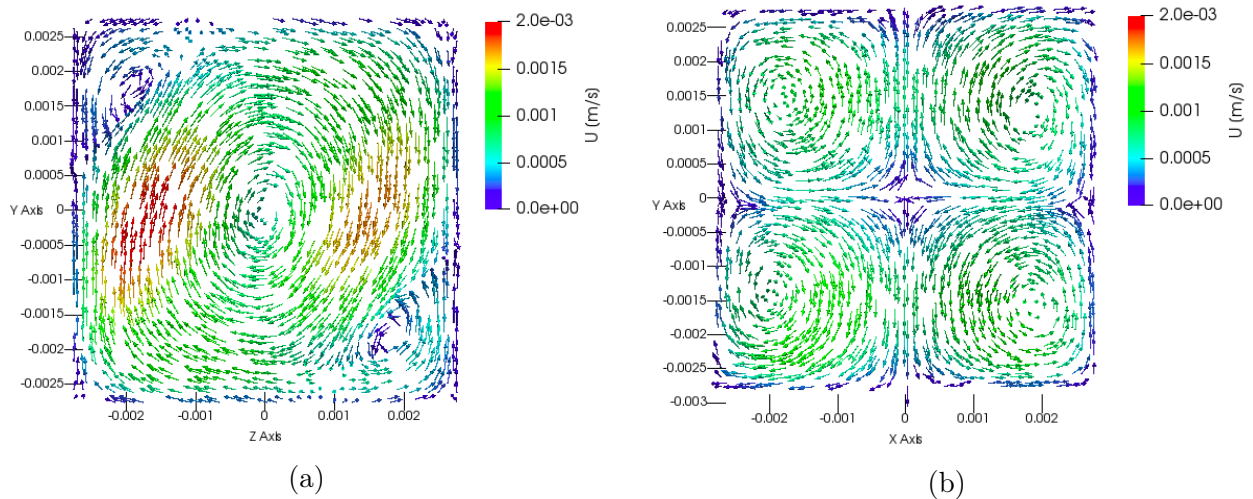
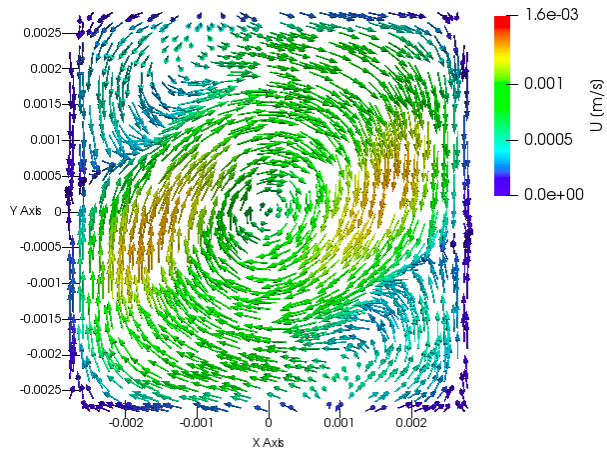
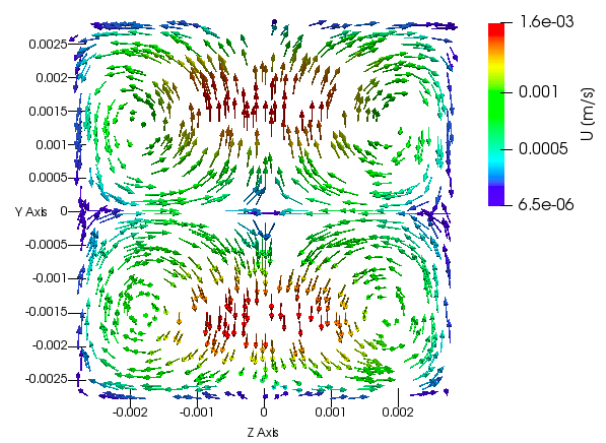


FIGURE 5.14 – Vecteurs vitesses de l'écoulement à  $Ra = 5 \cdot 10^4$  pour les simulations bpf et pour les plans verticaux  $x^* = 0.83$  (a) et  $z^* = 0.5$  (b)



(a)



(b)

FIGURE 5.15 – Vecteurs vitesses de l'écoulement à  $Ra = 5 \cdot 10^4$  pour les simulations bbpf et pour les plans verticaux  $x^* = 0.83$  (a) et  $z^* = 0.5$  (b)

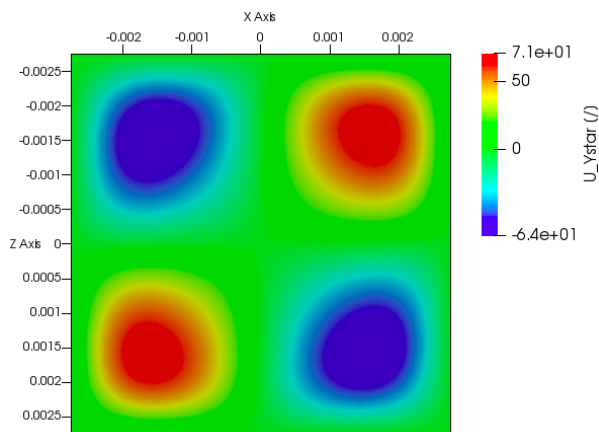


FIGURE 5.16 – Contours des vitesses verticales  $u_y$  dans le plan horizontal  $y^* = 0.5$  pour les simulations bpf à  $Ra = 5 \cdot 10^4$

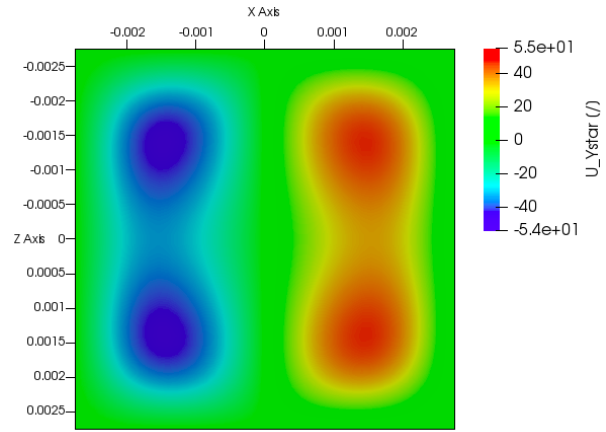


FIGURE 5.17 – Contours des vitesses verticales  $u_y$  dans le plan horizontal  $y^* = 0.5$  pour les simulations bbpf à  $Ra = 5 \cdot 10^4$

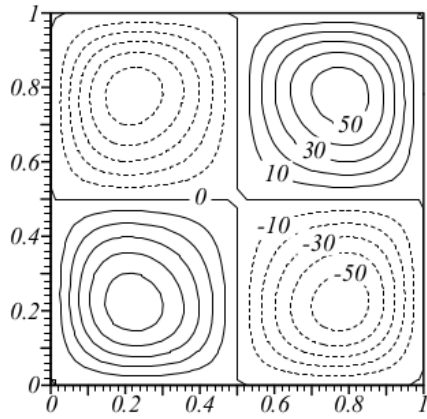


FIGURE 5.18 – Contours des vitesses verticales  $u_y^*$  dans le plan horizontal  $y^* = 0.5$  à  $Ra = 5 \cdot 10^4$  par Valencia et al. [25] (2005)

Les profils des vitesses horizontales le long de deux droites du plan  $(y,z)$  sont représentées aux figures 5.19 et 5.20.

La figure 5.19 montre l'évolution des vitesses près de la paroi chaude. Les vitesses sont plus importantes pour bpf car la réduction de la viscosité avec une augmentation de la température est prise en compte.

Pour les profils dans la zone proche de la paroi froide montrés à la figure 5.20, l'allure des courbes obtenues reste identique au profil calculé par Valencia et al. [25]. Cependant, de part la diminution de l'effet d'Archimède avec la température, les vitesses calculées par bpf aurait du être inférieure en tous points aux vitesses calculées avec bbpf. Or nous observons que ce n'est pas le cas entre  $z^* = 0$  et  $z^* = 0.5$ . Cette incohérence peut être liée au fait que la structure de l'écoulement obtenue avec bbpf n'est pas identique à celle obtenue avec bpf.

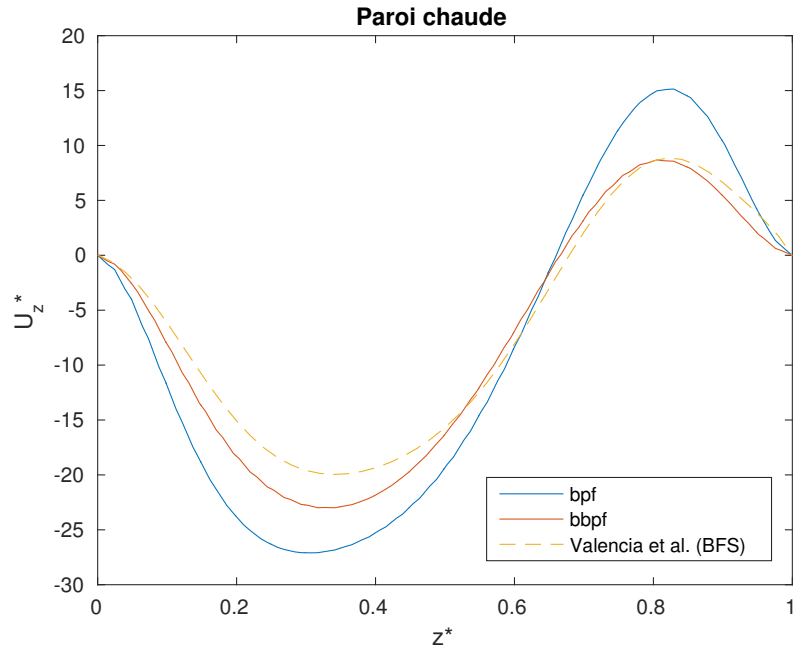


FIGURE 5.19 – Evolution de la vitesse horizontale près de la paroi chaude selon la droite  $y^* = 0.064$ ,  $x^* = 0.83$  à  $Ra = 5 \cdot 10^4$  obtenue par bpf, bbpf et Valencia et al. [25] (2005)

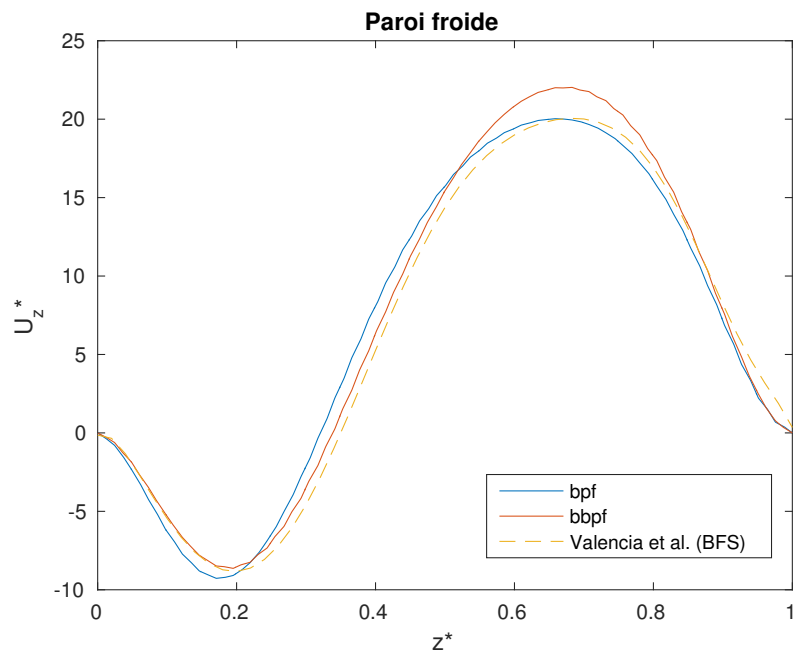


FIGURE 5.20 – Evolution de la vitesse horizontale près de la paroi froide selon la droite  $y^* = 0.94$ ,  $x^* = 0.83$  à  $Ra = 5 \cdot 10^4$  obtenue par bpf, bbpf et Valencia et al. [25] (2005)

Le tableau 5.2 reprend le nombre de Nusselt moyen calculés par Valencia et al. [25] et celui obtenu pour nos solveurs avec l'expression 4.10. Le nombre de Nusselt moyen de bbpf est supérieur de 2.2 % à celui de Valencia et al. [25]. La différence est plus marquée entre bpf et bbpf car le nombre de Nusselt moyen de bpf est supérieur de 9.9 % à celui de bbpf. Ces résultats restent

néanmoins cohérents. Les différences peuvent s'expliquer par une augmentation de la vitesse liée au transfert convectif.

	$Nu_{av}$
Valencia et al. [25] (BFS)	2.676
bbpf	2.738
bpf	3.042

TABLE 5.2 – Tableau récapitulatif des nombres de Nusselt moyen à nombre de Rayleigh moyen

### 5.3 Expérience à haut nombre de Rayleigh

A nombre de Rayleigh élevé, l'écoulement devient turbulent et ne se stabilise pas dans le temps. Pour pouvoir interpréter les données des simulations, il faut que l'écoulement soit complètement développé et soit devenu statistiquement stable. Il est difficile de savoir quand l'écoulement atteint un tel régime. Selon les travaux de Foroozani et al. [10], un régime stable est atteint au bout de 500 unités de temps  $t_f$  ( $t_f = L/U_f$  où  $U_f = \sqrt{g\beta L\Delta T}$ ) mais ce chiffre n'est pas unanimement utilisé dans la littérature. Dans ce projet, nous avons lancé les simulations pour 1000  $t_f$ , soit 830 s. Les grandeurs présentées dans cette section ont été moyennées sur une période supplémentaire de 200  $t_f$ .

Nous avons fait le choix de garder l'approximation de Boussinesq pour la résolution de ce problème. Les résultats présentés dans cette section ont uniquement été obtenu par le solveur bbpf. Le solveur bpf, pour ce nombre de Rayleigh, doit encore être adapté, car il ne donne pas de résultats satisfaisants.

Les résultats de Valencia et al. [25] présentés dans cette section ont été obtenus par une simulation DNS.

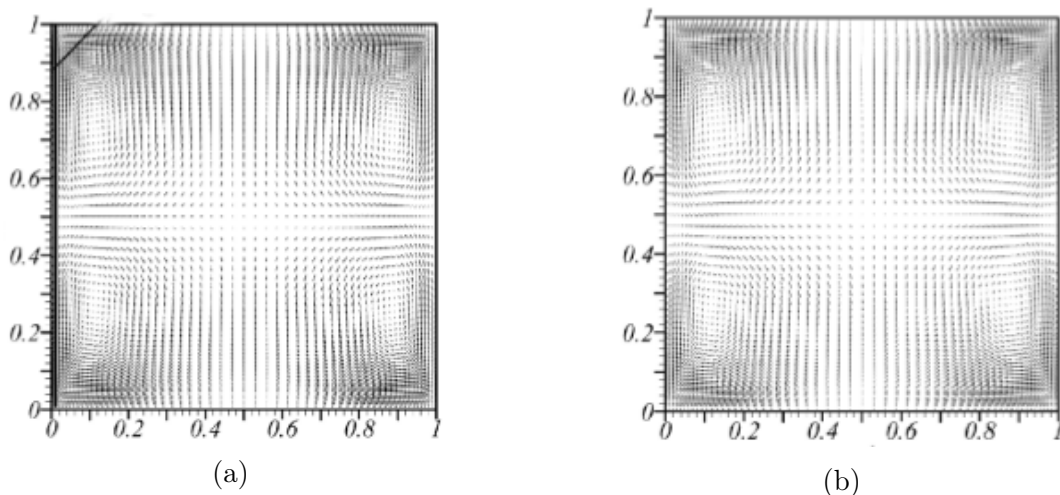


FIGURE 5.21 – Vecteurs des vitesses moyennées dans le temps de l'écoulement à  $Ra = 10^7$  dans les plans verticaux  $x^* = 0.5$  (a) et  $z^* = 0.5$  (b) par Valencia et al. [25] (2005)

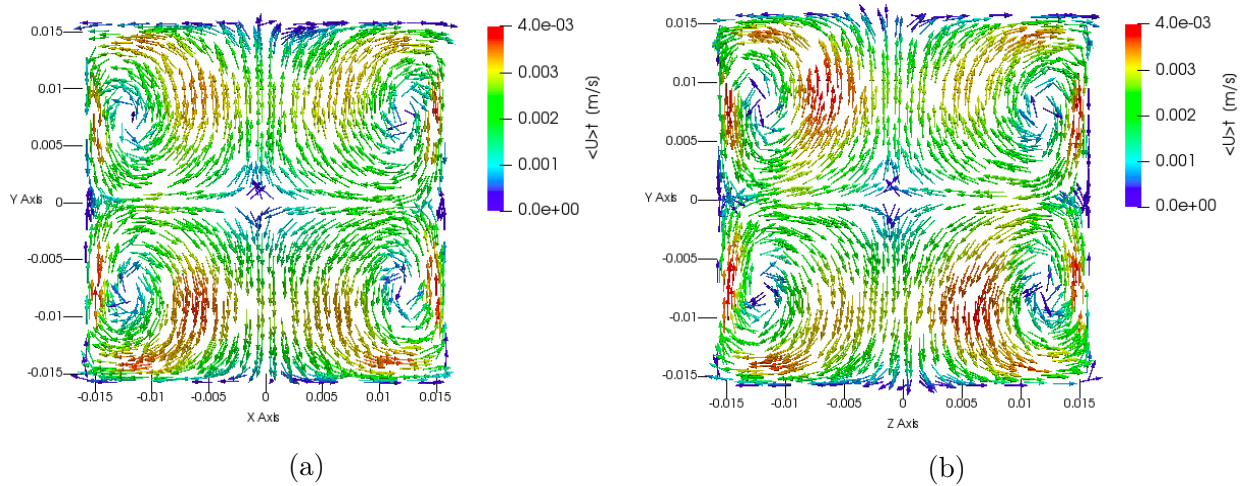


FIGURE 5.22 – Vecteurs des vitesses moyennes de l'écoulement à  $Ra = 10^7$  pour une simulation bbpf et pour les plans verticaux  $x^* = 0.5$  (a) et  $z^* = 0.5$  (b)

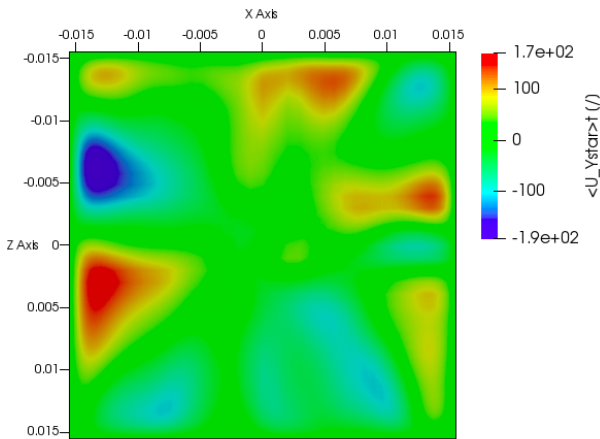


FIGURE 5.23 – Contours des vitesses verticales  $\langle u_y^* \rangle_t$  moyennes dans le plan horizontal  $y^* = 0.5$  pour les simulations bbpf à  $Ra = 10^7$

La figure 5.22 représente le champ d'écoulement moyen dans des plans verticaux situés au centre de la cavité. Nous pouvons voir que la structure de l'écoulement moyen consiste en une combinaison de 4 rouleaux de circulation avec un axe de rotation dans la direction  $x$  et de 4 rouleaux de circulation avec un axe de rotation dans la direction  $z$ . Les mouvements horloges et antihorloges de ces rouleaux de circulation s'accordent pour permettre l'apparition d'un canal de fluide ascendant dans la moitié supérieure de la cavité et d'un canal de fluide descendant dans la partie inférieure. Lorsque le fluide est dans le bas de la cavité, il remonte vers le haut par les parois latérales. Nous n'observons cette fois aucune boucle de recirculation.

Des isosurfaces instantanées de masse volumique  $\rho$  sont représentées à la figure 5.24. Celles-ci mettent en évidence le fait que la structure de l'écoulement est cette fois moins identifiable, surtout au milieu de la cavité.

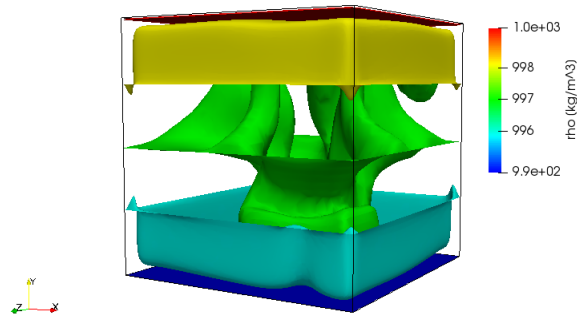


FIGURE 5.24 – Isosurfaces de masse volumique  $\rho$  à  $Ra = 10^7$  au temps  $t = 1000 s$

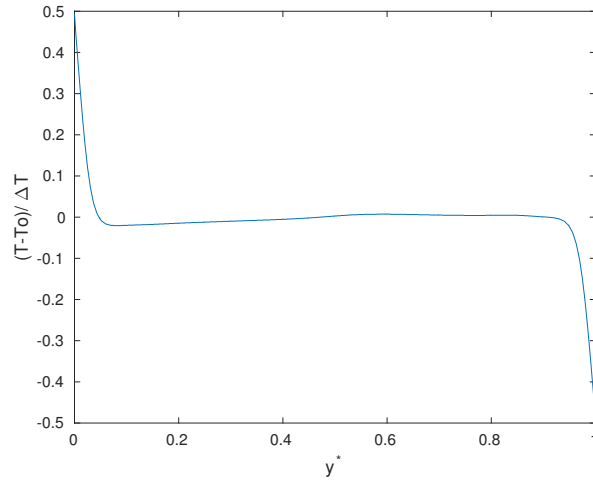


FIGURE 5.25 – Profil des températures moyennées dans le temps dans un plan vertical situé en  $z^* = 0.5$

La figure 5.25 représente le profil des températures moyennes sur un plan situé au centre de la cavité. La température décroît fortement au voisinage de la paroi chaude. Près de la paroi froide, le profil de température est presque antisymétrique. Les chutes de températures sont proche de  $\frac{\Delta T}{2}$  et mettent en évidence la présence des couches limite thermiques. En s'éloignant des parois, la température de l'écoulement est quasiment constante et proche de la température moyenne  $T_0$ . Nous pouvons en déduire que les particules de fluide dans cette région sont dans un état statistiquement stationnaire. Les effets de la poussée d'Archimède se concentrent dans les couches limites. Ces observations sont similaires à celles faites par Valencia et al. [25] ou Kumar et al. [19]

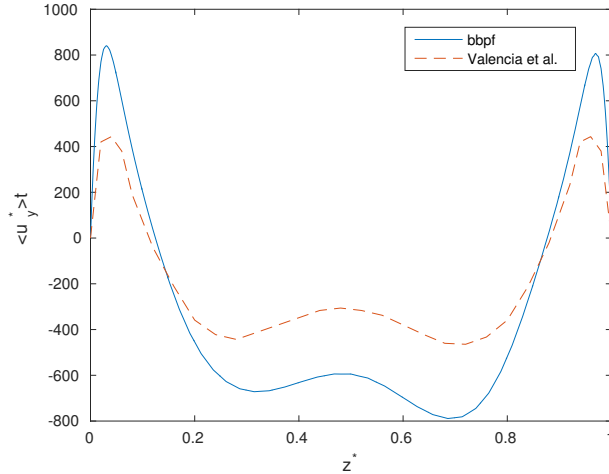


FIGURE 5.26 – Profil de la vitesse verticale  $u_y^*$  moyennée dans le temps le long d'une droite située en  $x^* = 0.5$  et  $y^* = 0.22$  obtenue par bbpf et Valencia et al. [26] (2007) pour  $Ra = 10^7$

La figure 5.26 représente l'évolution de la vitesse verticale  $u_y^*$  le long d'une ligne située en  $x^* = 0.5$  et  $y^* = 0.22$  pour  $Ra = 10^7$  obtenu avec bbpf. Le profil obtenu par Valencia et al. [26] est également représenté. Nous constatons que l'allure de la courbe est identique. Les vitesses maximales sont atteintes près des parois latérales dans la zone empruntée par le fluide lorsqu'il remonte vers le haut de la cavité. La vitesse calculée avec bbpf est par contre 2 fois supérieure à celle calculée par Valencia et al. [26]. Nous n'avons pas réussi à identifier les causes d'une telle différence.

Nous pouvons enfin constater, par rapport aux cas  $Ra = 10^4$  et  $Ra = 5 \cdot 10^4$ , qu'une augmentation du nombre de Rayleigh dans l'écoulement entraîne une augmentation des vitesses mesurées.

Le nombre de Nusselt calculé avec l'expression 4.10 est  $Nu_{av} = 20.12$ . Valencia et al. [26] ne donne pas le nombre de Nusselt moyen dans la cavité mais l'on calculé localement près de la paroi froide où il vaut 16.6. Les corrélations 4.6 et 4.7 donnent une valeur proche de 14 pour le nombre de Nusselt moyen. Notre valeur serait donc un peu surestimée.

## Analyse de la turbulence

Pour mettre en évidence les plus petites fluctuations de vitesse dans l'écoulement, nous étudions la distribution de l'énergie cinétique de turbulence  $k$  dans le plan vertical représenté à la figure 5.27. Cette grandeur s'exprime par :

$$k = \frac{1}{2}(u'^2 + v'^2 + w'^2) \quad (5.1)$$

où  $u', v'$  et  $w'$  représentent les variations spatiales des vitesses non-résolues par la simulation.

Nous observons d'abord que les valeurs prise par cette grandeur sont très faibles. Cela indique la faible intensité des effets de turbulence. Cette observation est confirmée par le profil de la contrainte de Reynolds  $\langle u'_y u'_z \rangle_t$  représenté sur la figure 5.28 le long d'une droite du plan  $x^* = 0.5$  et qui présente également des valeurs assez faibles.

Ces deux figures montrent aussi que les effets de turbulence sont un peu plus marqués sur les parois latérales dans les zones où les rouleaux convectifs représentés à la figure 5.22 viennent s'écraser.

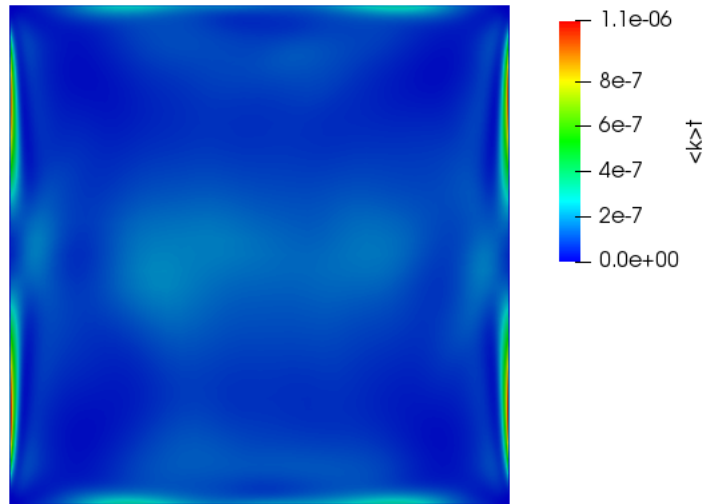


FIGURE 5.27 – Energie cinétique de turbulence  $k$  (en  $m^2/s^2$  moyennée dans le temps dans le plan vertical  $z^* = 0.5$ )

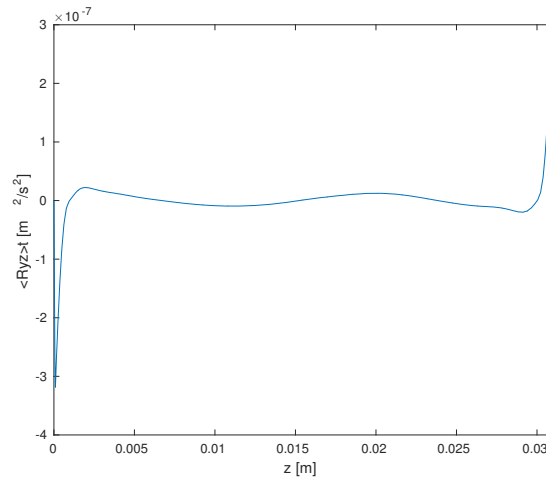


FIGURE 5.28 – Contrainte de Reynolds moyenne  $\langle u'_y u'_z \rangle_t$  en le long de la droite  $y^* = 0.22$  dans le plan  $x^* = 0.5$

Dans une simulation LES, toutes les échelles des structures tourbillonnaires présentes dans l'écoulement ne sont pas représentées. La longueur moyenne de filtre  $\Delta = 4.8 \cdot 10^{-4}m$  détermine l'ordre de grandeur des échelles résolues. Les structures tourbillonnaires plus petites sont modélisées par l'introduction de la viscosité d'échelle inférieure à la maille  $\nu_{sgs}$ . La figure 5.29

représente cette viscosité moyennée dans le temps dans un plan situé en  $x^* = 0.5$ . Les zones où cette viscosité prend une valeur plus importante mettent en évidence les zones où des structures tourbillonnaires plus petites auraient été observées si le maillage avait été plus fin. La résolution du maillage n'a pas non plus permis de visualiser correctement les isosurfaces  $\lambda_2$  qui nous auraient donné l'opportunité d'identifier avec plus de précision les structures tourbillonnaires.

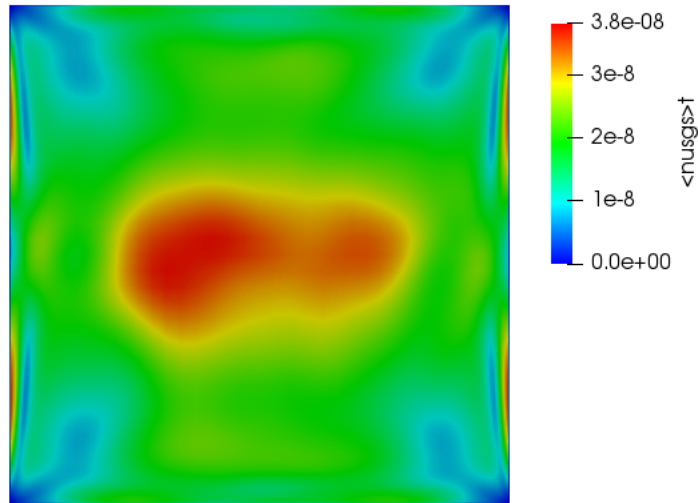


FIGURE 5.29 – Viscosité d'échelle inférieure à la maille  $\nu_{sgs}$  (en  $m^2/s$ ) moyennée dans le temps pour le plan  $x^* = 0.5$

L'analyse de la turbulence mériterait une analyse plus approfondie au regard d'articles écrits sur le même sujet. Les études utilisées n'ont pas développé cette analyse de la turbulence, nous n'avons pas à notre disposition de bons outils de comparaison pour vérifier la qualité du modèle de Smagorinsky utilisé.

## 5.4 Conclusions

A  $Ra = 10^4$ , malgré quelques différences entre les résultats trouvés dans la littérature et les résultats de simulation, ceux-ci sont globalement cohérents pour les deux solveurs.

La structure d'écoulement obtenue est une structure qui a été observée expérimentalement par Pallares et al [22]. Les profils de vitesse et la représentation de l'isosurface  $\lambda_2$  est similaire à Valencia et al. [25]. L'expression 4.10 pour le calcul du nombre de Nusselt fournit de bons résultats. Le solveur bpf ne semble par contre pas prendre en compte les variations de la viscosité et de la masse volumique avec une chute de température près de la paroi froide.

A  $Ra = 5 \cdot 10^4$ , le solveur bbpf ne reproduit pas exactement la structure S5 décrite par Pallares et al. [22] et observée par Valencia et al. dans leur travaux. Les résultats de ce cas sont

à manipuler avec plus de prudence. Le solveur bpf fournit les résultats attendus.

Pour le reste, les profils de vitesses obtenus avec les deux solveurs sont proches des résultats numériques obtenus par Valencia et al. [25]. Ces auteurs fournissent d'ailleurs peu de détails sur le fonctionnement de leur code de calcul. Il est possible dès lors que ces écarts proviennent d'un choix de schémas de discrétisation ou d'algorithme de résolution différent.

Le nombre de Nusselt est plus élevé avec le solveur bpf. Cette différence peut s'expliquer par l'augmentation de la vitesse de l'écoulement près de la paroi chaude.

Le solveur bpf reproduit correctement les effets des variations de température dans la zone proche de la paroi chaude. Pour la zone de baisse de température, l'effet de la diminution de la poussée d'Archimède est visible également. L'isosurfaces  $\lambda_2$  est enfin correctement représentée. Les transferts thermiques sont aussi du même ordre de grandeur.

A  $Ra = 10^7$ , le profil de vitesse de la vitesse verticale moyenne est cohérent quoique deux fois supérieur à celui calculé par Valencia et al. [25]. La position des vecteurs vitesses moyennées dans le temps est similaire. L'évolution de la température moyenne met correctement en évidence l'apparition des couches limites thermiques près des parois horizontales.

Le nombre de Nusselt calculé est par contre un peu surestimé.

Il ressort également de notre étude que les effets de la turbulence sont très faibles et concentrées dans des zones spécifiques des parois latérales.

Nous ne pouvons encore conclure la validité du modèle de Smagorinsky pour notre cas d'étude car il nous manque des outils de comparaison. Une analyse plus complète doit aussi être menée. Notamment, il serait intéressant d'utiliser un maillage plus fin et d'étudier son effet sur les résultats. De plus, il existe d'autres modèles de représentation de la viscosité  $\nu_{sgs}$  que celui de Smagorinsky comme le modèle dynamique de Smagorinsky ou le modèle de Vreman. Une étude comparative de ces différents modèles peut être conseillée pour compléter l'analyse.

# Conclusion

L'objectif de ce travail était une étude simplifiée par simulations numériques de la convection naturelle de l'eau apparaissant dans une piscine de désactivation de combustible nucléaire usé en conditions accidentelles. Cette étude s'est réalisée par la résolution du problème de Rayleigh-Bénard en cavité différentiellement chauffée depuis une situation où l'écoulement est laminaire jusqu'à un cas où le comportement du fluide est turbulent.

A nombres de Rayleigh modérés nous avons étudié deux solveurs, l'un faisant appel à l'approximation de Boussinesq, l'autre considérant la variation des propriétés physiques de l'eau avec la température. Nous avons analysé et comparé les résultats de ces deux solveurs au regard de résultats trouvés dans la littérature. Les deux solveurs nous permettent d'obtenir des résultats cohérents et peuvent servir de premiers cas de base pour une étude future en prenant en compte les remarques faites dans la conclusion de l'analyse des résultats. Malgré la faible différence de température considérée dans ce projet ( $\Delta T = 17.5^\circ C$ ), les deux solveurs montrent des différences dans le calcul des champs de vitesse et du nombre de Nusselt. Ce travail met en évidence la nécessité d'utiliser l'approximation de Boussinesq à bon escient. Pour des différence de température plus importante, la variation des propriétés physiques avec la température ne sera pas négligeable. Il serait alors plutôt conseillé d'utiliser le solveur `buoyantPimpleFoam` d'`OpenFOAM`.

En augmentant encore le nombre de Rayleigh, nous avons dû nous pencher sur la modélisation de la turbulence pour le problème de Rayleigh-Bénard en cavité. Une méthode LES a été appliquée en utilisant le modèle de Smagorinsky-Lilly pour la viscosité d'échelle inférieure à la maille  $\nu_{sgs}$ . Les résultats de ce cas doivent encore être améliorés pour pouvoir s'y fier. Les niveaux de turbulence observés semblent très faible et il serait opportun de pouvoir comparer les résultats avec une autre étude LES ou d'étudier d'autres modèles pour la modélisation des fluctuations spatiales. Le travail réalisé n'est qu'une première approche de la modélisation de la turbulence pour le problème de Rayleigh-Bénard et demande des améliorations.

## Pistes d'amélioration

Le modèle construit dans ce travail pourrait être réutilisé pour élaborer un modèle plus complexe d'une piscine de désactivation. En particulier plusieurs points d'intérêt pour un travail futur sont à souligner :

- La modélisation de l'interface entre l'eau et l'air.
- La prise en compte d'une source de chaleur plus importante et de la variation de son intensité avec le temps. Cette étape nécessitera d'introduire un modèle d'ébullition de

l'eau car les conditions à saturation seront atteintes.

- L'augmentation progressive du nombre de Rayleigh ( $Ra > 10^7$ ) dans la cavité, la reproduction des structures d'écoulement et le calcul des transferts thermiques.
- L'étude de l'influence du nombre de Prandtl sur les structures d'écoulement.
- L'étude plus spécifique d'un système de refroidissement passif de la piscine en conditions accidentelles sur base des transferts thermiques calculés.
- La mise en place de conditions frontières plus complexes qui permettraient la prise en compte des déperditions thermiques réalistes à travers les parois latérales de la piscines.
- Une optimisation du temps de calcul des simulations notamment en utilisant un méthode de calcul en parallèle.
- Etudier l'influence du facteur de forme sur les transferts thermiques.
- Pour l'analyse de la turbulence par la méthode LES et au vu des résultats obtenus avec le modèle de Smagorinsky, il serait particulièrement intéressant d'utiliser et de comparer d'autres modèles pour  $\nu_{sgs}$ .

## Annexe A

# Exemple d'un cas OpenFoam pour le solveur buoyantPimpleFoam

Dans cette annexe, nous reprenons les différents fichiers nécessaires au solveur buoyantPimpleFoam pour résoudre le cas  $Ra = 10^4$ . Les explications nécessaires à la compréhension de cette partie sont reprises dans le chapitre 4.

Pour le lecteur intéressé, les codes des autres cas étudiés ont été transmis dans un dossier zip lors de la soumission de ce mémoire

### A.1 Dossier 0

U

```
/*-----*- C++ -*-----*\
| ===== |
| \\ / F i e l d | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox |
| \\ / O p e r a t i o n | Version: 5 |
| \\ / A n d | Web: www.OpenFOAM.org |
| \\ / M a n i p u l a t i o n | |
\*-----*/
FoamFile
{
    version 2.0;
    format ascii;
    class volVectorField;
    object U;
}
// * * * * * //

dimensions [0 1 -1 0 0 0 0];

internalField uniform (1e-4 0 0);
```

```

boundaryField
{
    floor
    {
        type            noSlip;
    }

    ceiling
    {
        type            noSlip;
    }

    fixedWalls
    {
        type            noSlip;
    }
}

```

```
// ***** //
```

## T

A partir du fichier donné ci-dessous, les parois parfaitement conductrices sont créées en tapant dans un terminal Linux la fonction funkySetFields suivante :

```
funkySetFields -case . -time 0 -field T -keepPatches -valuePatches "floor ceiling fixedWalls"
-expression "-5645.16129*pos().y + 299.15"
```

La fonction linéaire utilisée doit être adaptée pour chaque cas, pos(y) indique la coordonnée en y.

```

/*-----* C++ *-----*\
| ===== | |
| \\ / F ield | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox |
| \\ / O peration | Version: 5 |
| \\ / A nd | Web: www.OpenFOAM.org |
| \\ / M anipulation | |
\*-----*/

FoamFile
{
    version 2.0;
    format ascii;

```







```

FoamFile
{
    version      2.0;
    format        ascii;
    class         uniformDimensionedVectorField;
    location      "constant";
    object        g;
}
// * * * * *

dimensions      [0 1 -2 0 0 0 0];
value           (0 -9.81 0);

```

```
// ***** //
```

### thermophysicalProperties

```

/*-----* C++ *-----*\
| ===== | |
| \\ / F ield | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox |
| \\ / O peration | Version: 5 |
| \\ / A nd | Web: www.OpenFOAM.org |
| \\ / M anipulation | |
\*-----*/

```

```

FoamFile
{
    version      2.0;
    format        ascii;
    class         dictionary;
    location      "constant";
    object        thermophysicalProperties;
}
// * * * * *

```

```

thermoType
{
    type          heRhoThermo;
    mixture       pureMixture;
    transport     polynomial;
    thermo        hPolynomial;
    equationOfState icoPolynomial;
    specie        specie;
    energy        sensibleEnthalpy;
}

```

```

}

mixture
{
  specie
  {
    nMoles      1;
    molWeight 18; // [g/mol]
  }

  equationOfState
  {
    rhoCoeffs<8> (583.62 3.0514 -0.0056 0 0 0 0 0);

    // T [K]
    // Coef a + bT+cT^2+ ... [kg/m^3] - Voir incropera.m
  }

  thermodynamics
  {
    Hf 0; // [J/kg]
    Sf 0; // [J/kgK]

    CpCoeffs<8> (6289.61 -13.75 0.0223 0 0 0 0 0); // [J/kgK]
  }

  transport
  {
    muCoeffs<8> (0.0357 -2.127e-4 3.219e-7 0 0 0 0 0); // [Pa.s]
    kappaCoeffs<8> (-0.2568 4.328e-3 -4.761e-6 0 0 0 0 0); // [W/mK]
  }
}

```

```

//***** //

```

## turbulenceProperties

```

/*-----* C++ *-----*\
| ===== | |
| \ \ / F ield | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox |
| \ \ / O peration | Version: 5 |

```

```

|  \ \ /   A nd           | Web:      www.OpenFOAM.org           |
|  \ \ /   M anipulation |                                     |
\*-----*
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
    location     "constant";
    object       turbulenceProperties;
}
// * * * * * //

```

```
simulationType laminar;
```

```

RAS
{
    RASModel     laminar;

    turbulence   off;

    printCoeffs  off;
}

```

```
// ***** //
```

### A.3 Dossier system

#### blockMeshDict

```

/*-----* C++ *-----*\
| ===== |
| \ \ /   F ield           | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox |
| \ \ /   O peration      | Version: 5 |
|  \ \ /   A nd           | Web:      www.OpenFOAM.org           |
|  \ \ /   M anipulation |                                     |
\*-----*
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;

```



```

        (3 7 6 2)
    );
}
fixedWalls
{
    type wall;
    faces
    (
        (0 4 7 3)
        (2 6 5 1)
        (0 3 2 1)
        (4 5 6 7)
    );
}

);

mergePatchPairs
(
);

// ***** //

controlDict

/*----- C++ -----*\
| ===== | |
| \\ / F i e l d | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox |
| \\ / O p e r a t i o n | Version: 5 |
| \\ / A n d | Web: www.OpenFOAM.org |
| \\ / M a n i p u l a t i o n | |
\*-----*/
FoamFile
{
    version 2.0;
    format ascii;
    class dictionary;
    location "system";
    object controlDict;
}
// ***** //

application buoyantPimpleFoam;

```

```

startFrom      latestTime;

startTime      0;

stopAt         endTime;

endTime        360;

deltaT         0.01;

writeControl   adjustableRunTime;

writeInterval  10;

purgeWrite     0;

writeFormat    ascii;

writePrecision 6;

writeCompression off;

timeFormat     general;

timePrecision  6;

runTimeModifiable true;

adjustTimeStep no;

maxCo          0.5;

// ***** //

```

## fvSchemes

```

/*-----* C++ *-----*\
| ===== |
| \\ / F i e l d | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox |
| \\ / O p e r a t i o n | Version: 5 |
| \\ / A n d | Web: www.OpenFOAM.org |
| \\ / M a n i p u l a t i o n | |
\*-----*/
FoamFile

```



```

snGradSchemes
{
    default          corrected;
}

// ***** //

fvSolution

/*----- C++ -----*\
| ===== |
| \\ / F i e l d | OpenFOAM: The Open Source CFD Toolbox |
| \\ / O p e r a t i o n | Version: 5 |
| \\ / A n d | Web: www.OpenFOAM.org |
| \\ / M a n i p u l a t i o n | |
\*-----*/
FoamFile
{
    version      2.0;
    format       ascii;
    class        dictionary;
    location     "system";
    object       fvSolution;
}
// ***** //

solvers
{
    "rho.*"
    {
        solver          PCG;
        preconditioner  DIC;
        tolerance       0;
        relTol          0;
    }

    p_rgh
    {
        solver          PCG;
        preconditioner  DIC;
        tolerance       1e-8;
        relTol          0.01;
    }
}

```

```

}

p_rghFinal
{
    $p_rgh;
    relTol      0;
}

"(U|h|e|k|epsilon|R)"
{
    solver      PBiCGStab;
    preconditioner DILU;
    tolerance    1e-6;
    relTol      0.1;
}

"(U|h|e|k|epsilon|R)Final"
{
    $U;
    relTol      0;
}
}

PIMPLE
{
    pRefCell 0;
    pRefValue 0;
    momentumPredictor yes;
    nOuterCorrectors 1;
    nCorrectors 2;
    nNonOrthogonalCorrectors 0;
}

// ***** //

```

# Bibliographie

- [1] Denopi project. <http://www.irsn.fr/EN/Research/Research-organisation/Research-programmes/DENOPI-project/Pages/DENOPI-project.aspx>. Consulté le : 05/07/2018.
- [2] Fukushima : Les faits. <https://www.forumnucleaire.be/theme/la-surete/fukushima-les-faits>. Consulté le : 05/07/2018.
- [3] Hazards of storing spent fuel. <https://archive.nytimes.com/www.nytimes.com/interactive/2011/03/12/world/asia/the-explosion-at-the-japanese-reactor.html>. Consulté le : 05/07/2018.
- [4] Piscine de stockage de combustible nucléaire. <https://fr.wikipedia.org/wiki/Piscinedestockagedecombustiblenucleaire>. Consulté le : 05/07/2018.
- [5] Fumiya Nozaki's CFD Blog. buoyantpimplefoam and buoyantsimplefoam in openfoam. <http://caefn.com/openfoam/solvers-buoyantpimplefoam>. Consulté le : 05/06/2018.
- [6] Fumiya Nozaki's CFD Blog. Solvers for heat transfer problems in openfoam – buoyantboussinesqpimplefoam. <http://caefn.com/openfoam/solvers-buoyantboussinesqpimplefoam>. Consulté le : 05/06/2018.
- [7] Nam Dinh, Y Z. Yang, Jiangping Tu, R R. Nourgaliev, and Theo Theofanous. Rayleigh-benard natural convection heat transfer : Pattern formation, complexity and predictability. 01 2004.
- [8] Thomas M. Eidson. Numerical simulation of the turbulent rayleigh-bénard problem using subgrid modelling. *J. Fluid Mech.*, 158 :245 – 268, 1984.
- [9] J.H. Ferziger and M. Peric. *Computational Methods for Fluid Dynamics*. Springer, 2002.
- [10] N. Foroozani, J.J. Niemela, V. Armenio, and Sreenivasan K.R. Large eddy simulation of turbulent rayleigh-bénard convection in a cubic cell. *Direct and Large-Eddy Simulation X*, pages 559–565, 2018.
- [11] The OpenFOAM Foundation. Openfoam v6 user guide. <https://cfd.direct/openfoam/user-guide>.
- [12] Simon E. Gant. Reliability issues of les-related approaches in an industrial context. *Flow Turbulence Combust*, pages 325–335, Octobre 2009.
- [13] R.J. Goldstkin and S. Tokuda. Heat transfer by thermal convection at high rayleigh numbers. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 23(5) :738 – 740, 1980.
- [14] D.D. Gray and A. Giorgini. The validity of the boussinesq approximation for liquids and gases. *Int. J. Heat Mass Transfer*, vol.19, pages 545–551, Septembre 1976.

- [15] F.P. Incropera and D. P. DeWitt. *Fundamentals of Heat and Mass Transfer, 6th ed.* Wiley, 2007.
- [16] R.I Issa. Solution of the implicitly discretised fluid flow equations by operator-splitting. *Journal of Computational Physics*, 62(1) :40 – 65, 1986.
- [17] Hrvoje Jasak. Finite volume discretisation in openfoam best practice guidelines. Slides de cours, Mai 2016.
- [18] Hrvoje Jasak. Finite volume discretisation with polyhedral cell support. Slides de cours, Mai 2016.
- [19] Rajesh Kumar and Anupam Dewan. A study of les–sgs closure models applied to a square buoyant cavity. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 98 :164 – 175, 2016.
- [20] Vincent Legat and Grégoire Winckelmans. Mécanique des fluides et transferts 1. Note de cours, Septembre 2014.
- [21] Hervé Mutelle, Isabelle Tamburini, Christian Duriez, Sylvie Tillard, and Nicolas Trégourès. A new research program on accidents in spent fuel pools : the denopi project. *WRFP*, Septembre 2014.
- [22] J. Pallares, M. P. Arroyo, Grau F.X., and Giralt F. Experimental laminar rayleigh-bénard convection in a cubical cavity at moderate rayleigh and prandtl numbers. *Experiments in fluids* 31, pages 208–218, Août 1998.
- [23] Olga Shishkina and Claus Wagner. Local heat fluxes in turbulent rayleigh-bénard convection. *Physics of Fluids*, 19(8) :085107, 2007.
- [24] J-p. Simonau, B. Gaudron, Jérôme Laviéville, and Julien Dumazet. Numerical investigations of a spent fuel storage pool in abnormal conditions. *Proceedings of NURETH-16*, Septembre 2015.
- [25] L Valencia, J. Pallares, Cuesta I., and Grau X. Rayleigh-bénard convection of water in a perfectly conducting cubical cavity : effects of temperature-dependent physical properties in laminar and turbulent regimes. *Numerical Heat Transfer A, vol. 47*, pages 333–352, Septembre 2005.
- [26] Leonardo Valencia, Jordi Pallares, Ildefonso Cuesta, and Francesc Xavier Grau. Turbulent rayleigh-bénard convection of water in cubical cavities : A numerical and experimental study. *International Journal of Heat and Mass Transfer*, 50(15) :3203 – 3215, 2007.
- [27] H.K. Versteeg and W. Malalasekera. *An introduction to computational fluid dynamics. The Finite Volume Method.* Pearson, 2007.
- [28] Roberto Verzicco and Roberto Camussi. Numerical experiments on strongly turbulent thermal convection in a slender cylindrical cell. *J. Fluid Mech. vol.477*, pages 19–49, Janvier 2003.
- [29] OpenFOAM Wiki. 3 weeks series. <https://wiki.openfoam.com/3weeksseries>. Consulté le : 05/06/2018.

