

**École polytechnique de Louvain**

# **Interaction of Faraday waves with a granular bed**

Auteur: **Michel HENRY**

Promoteurs: **Vincent LEGAT, Jonathan LAMBRECHTS**

Lecteurs: **Mathieu CONSTANT, Evelyne VAN RUYMBEKE**

Année académique 2019–2020

Master [120] : ingénieur civil en mathématiques appliquées



## Abstract

Numerical simulation of Faraday waves in immersed granular flows is performed in two dimensions. The conservation laws described by an arbitrary Lagrangian Eulerian method give the opportunity to deform the mesh in order to follow the oscillations. To do so, we have developed a resolution procedure for immersed granular flow with a free surface. This method allows the software to describe a class of problems previously unavailable by the *MigFlow* code. Some examples are shown in this work such as the die-swell problem and Faraday heaps formation. Moreover, an analysis between Faraday waves and a granular bed is provided. We have been able to show that the particles displacement does not affect the induced waves in the experiments. This result is also confirmed by a stability analysis of the linear problem. Furthermore, numerical simulations also provide explanations about the formation of Faraday heaps and the influence of free surface.



## Abstract

La simulation numérique de vagues de Faraday dans un milieu granulaire immergé est effectuée en deux dimensions. Les équations de conservation décrites par l'approche arbitraire de Lagrange-Euler offrent la possibilité de déformer le maillage afin de suivre les oscillations. Pour ce faire, nous avons développé une procédure de résolution des écoulements granulaires immergés en surface libre. Cette méthode permet de s'intéresser à une classe de problèmes précédemment inaccessible par le code *MigFlow*. Différents exemples d'application sont présentés dans ce travail tels le problème d'extrusion et la formation de cônes de Faraday. De plus, une analyse de l'interaction entre les vagues de Faraday et le milieu granulaire est effectuée. Nous avons pu montrer que le mouvement des particules n'influence pas les ondes induites dans les expériences considérées. Ce résultat est également confirmé par une analyse de stabilité du problème linéarisé. De plus, les expériences numériques permettent d'expliquer la formation des amas de particules et l'influence de la surface libre sur ceux-ci.



## *Travail de fin d'étude réalisé en collaboration partielle avec Maud Schauss*

*Nos deux travaux de fin d'études se basent sur des développements informatiques faits dans le cadre du même projet MigFlow sous la direction de Vincent Legat et Jonathan Lambrechts, même si les deux applications visées sont distinctes. Nos travaux de recherche ont été effectués en parallèle, mais de manière concertée dans leur équipe de recherche et certains développements ont été effectués de manière collaborative.*

*À l'issue de cette année, écrire deux manuscrits distincts de mémoire nous a semblé être à tous deux la meilleure manière d'acquérir une compétence essentielle pour notre formation. Ce choix a été fait de manière concertée avec nos promoteurs. Toutefois, certains aspects de notre démarche étaient inévitablement tellement proches que les deux chapitres consacrés à la méthode numérique pour traiter les surfaces libres sont identiques, même si la langue des deux manuscrits est différente.*

Michel HENRY  
Maud SCHAUSS  
Juin 2020

*Référence du mémoire de Maud Schauss : [Schauss et al., 2020].*



## Remerciements

*Tout d'abord, je tiens à remercier tous les membres du projet MigFlow avec qui j'ai eu la chance de travailler. La découverte du sujet des écoulement granulaires immergés fut d'une grande richesse à mes yeux. Pour cela, je tiens à remercier Vincent Legat, Jonathan Lambrechts, Matthieu Constant et Nathan Coppin pour cette opportunité et leur support, toujours bien-veillant, durant cette année.*

*Enfin, je tiens à remercier les membres de ma famille pour leur soutien tout au long de ce travail. Je souhaite rendre une attention toute particulière à ma soeur, Caroline, et mon frère, Nicolas, pour leurs nombreuses corrections et commentaires. Et un tout grand remerciement à mes parents pour leurs écoutes toujours attentives.*



# Table des matières

|   |           |
|---|-----------|
| <b>Introduction</b>                               | <b>1</b>  |
| <b>1 Surface libre</b>                            | <b>5</b>  |
| 1.1 Condition cinématique . . . . .               | 6         |
| 1.2 Condition dynamique . . . . .                 | 9         |
| 1.3 Conservation du volume . . . . .              | 10        |
| 1.4 Extrusion . . . . .                           | 12        |
| <b>2 Régularisation du maillage</b>               | <b>16</b> |
| 2.1 Régularisation elliptique . . . . .           | 17        |
| 2.2 Régularisation simplifiée . . . . .           | 17        |
| <b>3 Description arbitraire de Lagrange-Euler</b> | <b>23</b> |
| 3.1 Équation fondamentale de l’ALE . . . . .      | 24        |
| 3.2 Lois de conservation . . . . .                | 25        |
| 3.2.1 Équation de continuité . . . . .            | 25        |
| 3.2.2 Quantité de mouvement . . . . .             | 27        |
| 3.3 Procédure de résolution . . . . .             | 28        |
| <b>4 Vagues de Faraday</b>                        | <b>33</b> |
| 4.1 Description . . . . .                         | 33        |
| 4.2 Résultats . . . . .                           | 34        |
| 4.2.1 Accélération critique . . . . .             | 35        |
| 4.2.2 Formation des cônes de Faraday . . . . .    | 42        |
| 4.3 Analyse de stabilité . . . . .                | 45        |
| 4.3.1 Lois de conservation . . . . .              | 45        |
| 4.3.2 Conditions frontières . . . . .             | 46        |
| 4.3.3 Problème linéarisé . . . . .                | 48        |
| 4.4 Discussion . . . . .                          | 50        |
| <b>Conclusion et perspectives</b>                 | <b>53</b> |
| <b>Annexe</b>                                     | <b>55</b> |



# Introduction

Ce mémoire a deux objectifs, le développement et l'implémentation d'une procédure de résolution des écoulements granulaires immergés en surface libre ainsi que l'analyse des interactions entre les vagues de Faraday et un lit granulaire. Lorsqu'un récipient contenant deux fluides non-miscibles est soumis à une oscillation verticale, des ondes induites se forment à l'interface nommées "vagues de Faraday". Celles-ci peuvent s'organiser en différentes structures en fonction des propriétés des fluides et de l'oscillation. Nous nous intéresserons à la formation des vagues de Faraday dans le cas où le fluide le plus dense est composé de grains et le fluide le plus léger est de l'air dont l'influence est négligeable. L'instabilité de Faraday est le premier phénomène macroscopique dans lequel la formation de motifs fut observée, voir figure (1). Son étude est donc d'un grand intérêt afin de comprendre leur formation.

La formation d'oscillations induites fut premièrement observée et documentée par Faraday en 1831. Il observa que la fréquence des vagues à l'interface valait la moitié de la fréquence du mouvement vertical [Faraday, 1831]. Plus d'une centaine d'années plus tard en 1954, une première étude de la stabilité du système permit de comprendre la formation des oscillations dans le cas où les fluides sont parfaits [Benjamin and Ursell, 1954]. Les auteurs dérivèrent un ensemble d'équations de Mathieu et montrèrent de cette façon que la résonance est responsable du développement de l'instabilité.

Au courant des années 1990, l'observation de nouveaux comportements à l'interface mena à un nouvel élan de recherche. Suite aux résultats expérimentaux mettant en évidence la dépendance à la viscosité [Fauve et al., 1992], l'analyse de stabilité du système linéaire soumis à une oscillation unifréquencielle fut étendue aux fluides visqueux [Kumar and Tuckerman, 1994]. Ces résultats permirent de prédire les situations pour lesquelles la réponse du système est harmonique au lieu d'être sub-harmonique. Par la suite, la formation de quasi-pattern fut observée en soumettant le bassin à une oscillation dotée de deux fréquences distinctes [Edwards and Fauve, 1994]. La formation de motifs triangulaires et de super réseaux ("*superlattice*") fut également visible [Müller, 1993], [Kudrolli et al., 1998]. L'analyse de stabilité du problème linéarisé fut étendue à un récipient soumis à une oscillation à deux fréquences [Besson et al., 1996]. Cependant, la méthode développée est incapable de décrire la morphologie des vagues formées. Dès lors, de nombreux efforts ont été menés afin d'en comprendre l'origine. Les approximations non-linéaires des équations de Navier-Stokes ont permis l'étude de la compétition entre différents patterns, [Zhang and Viñals, 1997], [Chen and Vinals, 1999] et [Skeldon and Guidoboni, 2007]. Ces théories s'inspirent de la théorie des systèmes dynamiques afin d'étudier la formation des motifs [Topaz et al., 2004]. Cependant, leur compréhension est encore aujourd'hui au coeur de nombreuses recherches.

Suite aux développements des méthodes numériques, l'étude du problème complet est effectuée par ce biais. Les premières simulations du problème tri-dimensionnel furent proposées par [O'Connor, 2008]. Celles-ci permirent de confirmer les modèles décrivant la stabilité de l'interface ainsi que la formation de structures hexagonales [Perinet et al., 2009] et de motifs carrés [O'Connor, 2008]. L'apparition de pattern est un phénomène purement tri-dimensionnel et notre étude se limitera à la formation de vagues de Faraday dans un domaine à bi-dimensionnel. Cependant, l'approche décrite dans ce mémoire pourrait s'étendre à trois dimensions et permettrait l'observation de motifs.

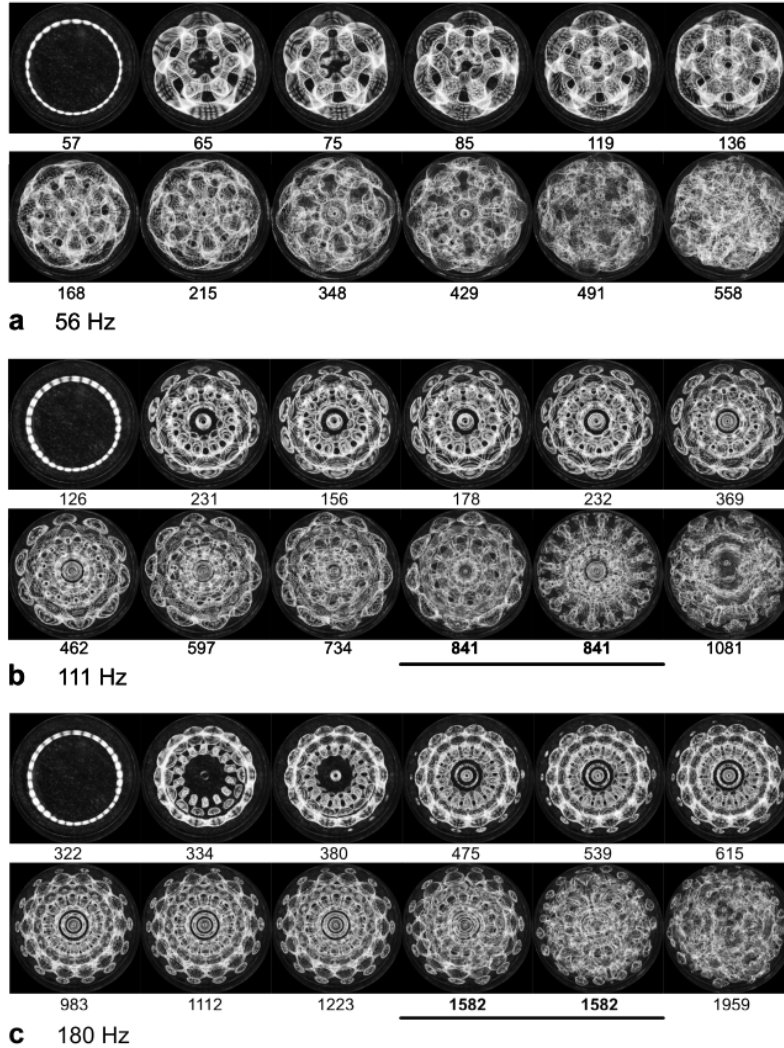


FIGURE 1 – Vague de Faraday, formation de rosettes à respectivement six, dix et quatorze facettes, image issue de [Sheldrake and Sheldrake, 2017].

Le traitement de la surface libre est l'un des facteurs clés de la modélisation du problème. Son étude commença au XVIII<sup>ème</sup> siècle par les travaux préliminaires de Lagrange, celui-ci étudia le mouvement des fluides et introduisit l'*équation cinématique* décrivant la forme de la surface libre [Lagrange, 1781]. Ces premiers résultats menèrent la communauté scientifique à investiguer le sujet. Deux théories se démarquèrent au XIX<sup>ème</sup> siècle, la première *Théorie linéaire des ondes à faible amplitude* [Airy, 1845] et la seconde *Théorie non-linéaire des vagues en eaux peu profondes* [Gerstner, 1804]. Au même moment, la recherche de la solution du problème générale non-linéaire poussa Stokes à étudier le sujet. Par la méthode des perturbations, il fut capable de proposer une solution approchée du mouvement de la vague solitaire [Stokes, 1847]. Cependant, l'utilisation de techniques analytiques est limitée par les non-linéarités du problème. De plus, le domaine de l'écoulement se déformant et étant a priori inconnu rend la résolution des équations difficiles. C'est pourquoi l'étude théorique des écoulements en surface libre repose aujourd'hui sur les simulations numériques [Tsai and Yue, 1996].

Le développement des méthodes numériques commença dans les années 1960. Leur efficacité mena à un regain d'intérêt pour des problèmes précédemment insolubles tels le problème général d'écoulement en surface

libre [Ramaswamy and Kawahara, 1987]. Afin de décrire les interfaces mobiles, de nombreuses méthodes ont été développées. Deux classes se démarquent menant à des méthodologies différentes, les méthodes par capture d'interface et les méthodes par suivi d'interface [Muzaferija, 1998].

Les méthodes par capture d'interface permettent la résolution d'écoulement à deux fluides sur un domaine initialement fixe contenant les deux fluides. Ces méthodes, caractérisées par un maillage fixe, sont pleinement Eulériennes. L'une des premières méthodes utilisant cette approche est la méthode par marqueurs et cellules (MAC) [Daly et al., 1965]. Les marqueurs sont placés sur la surface libre permettant sa description. Une seconde approche consiste à capturer la surface par la concentration volumique de fluide dans chaque élément du maillage. Cette méthode, appelée Volume du fluide (VOF), ne construit jamais la surface libre explicitement, l'autorisant donc à se former et se détruire au cours du temps [Hirt et al., 1997]. La représentation de la surface libre s'effectue alors en post-traitement en construisant l'iso-surface définie par  $c = 0.5$ ,  $c$  étant la fraction volumique du fluide. L'un des principaux avantages des méthodes par capture d'interface est que le domaine de calcul, i.e. le maillage, ne suit pas la déformation. Par conséquent, ces approches permettent de décrire des géométries complexes dans lesquelles le fluide peut subir de larges déformations. Cependant, il est impossible de connaître la position exacte de la surface libre. Afin de construire celle-ci précisément, un raffinement important du maillage est nécessaire [Tezduyar et al., 1992].

Les méthodes par suivi d'interface consistent à adapter le domaine de calcul, i.e. le maillage, afin de décrire la forme et la position de la surface libre. Cette dernière est traitée comme une frontière sur laquelle une condition dynamique et cinématique sont prescrites [Muzaferija and Peri'c, 1997]. Cette approche permet un suivi précis de la topologie de la surface libre mais est limitée par l'amplitude des déformations dont elle est sujette [Donea et al., 2004]. Afin de palier ce problème, différentes méthodes autorisant le maillage à se déformer ont vu le jour. L'une d'elle est la description arbitraire de Lagrange-Euler (ALE) [Hirt et al., 1997]. Celle-ci consiste à décrire le fluide dans un domaine de calcul se déplaçant arbitrairement. Celui-ci n'est ni Lagrangien ni Eulérien mais est appelé le domaine de référence. Il est possible d'imposer le suivi de la surface libre par des noeuds du maillage et de maintenir le maillage conforme en déplaçant les noeuds intérieurs. L'avantage de cette méthode est sa capacité de suivi pour des déformations importantes. Depuis son développement, cette dernière méthode a été fortement utilisée dans de nombreux domaines tels la mécanique des structures et la mécanique des fluides.

La maturité des méthodes numériques par suivi d'interface nous permet de modéliser la formation de vagues de Faraday dans un fluide. Toutefois, nous nous intéressons à la formation de cette instabilité dans le cas d'un fluide granulaire immergé. Ceux-ci se rencontrent dans de nombreux secteurs, du domaine pharmaceutique en passant par le cosmétique pour s'intéresser à la production de denrées alimentaires, mais également dans l'environnement, des coulées de boues, à la formation d'avalanches ou des écoulements de laves. Les écoulements granulaires immergés sont partout autour de nous. L'une de leurs principales applications se situe dans le génie civil. De plus en plus d'infrastructures maritimes voient le jour, les plateformes pétrolières, les éoliennes *offshore* ou encore la construction de pont sont des exemples soumis à des écoulements granulaires. En effet, ceux-ci nécessitent de prendre appui dans le fond marin soumettant la structure à un écoulement granulaire immergé. La recherche s'intéresse donc à prédire les caractéristiques de ces écoulements. C'est dans ce contexte que le projet *MigFlow*<sup>1</sup>, dont ce mémoire découle, a vu le jour.

Les objectifs de ce mémoire sont de développer le traitement de surface libre dans le logiciel *Migflow* ainsi que d'analyser la formation des vagues de Faraday dans un écoulement granulaire immergé. Le premier chapitre s'intéresse à fournir les équations nécessaires afin de modéliser un écoulement en surface libre. Le second chapitre propose une méthode simple de régularisation du domaine de calcul permettant de maintenir le maillage conforme. Le troisième chapitre permet de clôturer le premier objectif du mémoire en utilisant la description arbitraire de Lagrange-Euler afin de prendre en compte la déformation du maillage dans les équations de conservation du fluide granulaire immergé. Le dernier chapitre présente la formation des vagues de Faraday dans un fluide granulaire immergé. La formation de motifs apparaissant uniquement en trois dimensions, nous proposerons la formulation de ce problème en annexe.

---

1. <https://www.migflow.be/>



# Chapitre 1

## Surface libre

Ce chapitre est dédié à la modélisation des surfaces libres. Ces écoulements apparaissent naturellement lorsqu'un fluide n'est pas contenu dans un domaine fixe. Les vagues dans la mer, le ruisseau qui s'écoule ou encore le café au coin d'une table, tous constituent des écoulements en surface libre. Dans ces cas quotidiens, la surface libre est l'interface entre le fluide et l'air, l'influence de ce dernier étant faible, son impact est négligé dans notre modélisation. L'interface ne déroge pas aux lois de conservation. Celles-ci, ainsi que la continuité de certains champs physiques, permettent l'obtention des conditions décrivant la surface libre. Son déplacement est décrit par la condition cinématique issue de la conservation de la masse. Sa résolution numérique par la méthode des éléments finis permettra l'obtention de la nouvelle position de la surface libre. La différence de pression à l'interface entre le fluide et l'air mène à la condition dynamique afin de satisfaire la conservation de la quantité de mouvement. De plus, si aucun flux n'est apporté au système, le volume de celui-ci est constant. Afin de s'en assurer une correction est nécessaire et présentée dans la suite de ce chapitre. Enfin, le problème d'extrusion fortement documenté dans la littérature permettra de valider l'approche développée pour la résolution des écoulements en surface libre.

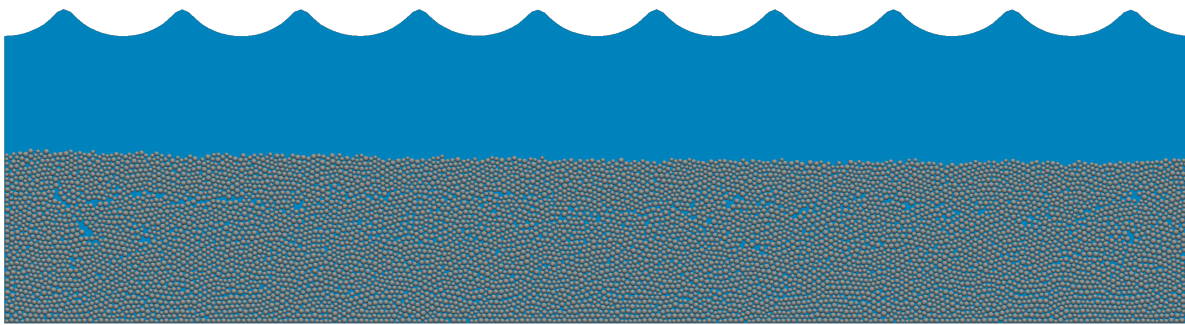


FIGURE 1.1 – Formation des vagues de Faraday dans un fluide granulaire immergé,  $t = 20$  s.

## 1.1 Condition cinématique

La condition cinématique décrit le mouvement de la surface libre au cours du temps. Celle-ci sera introduite dans le cas d'un écoulement stationnaire. Le régime transitoire sera ensuite analysé afin d'obtenir l'expression générale à deux dimensions de la condition cinématique. La formulation faible sera présentée permettant la résolution par la méthode des éléments finis.

### Écoulement stationnaire

Considérons un écoulement stationnaire en trois dimensions. Dans ce cas, la surface libre peut être interprétée comme une ligne de courant. Une ligne de courant est une courbe parallèle en tout point au vecteur vitesse local [Drela, 2005]. Il en découle qu'aucun flux ne traverse la surface libre. Supposons le vecteur vitesse défini par :

$$\mathbf{v} = (u, v, w).$$

Un vecteur de longueur infinitésimal le long de la surface libre peut être défini par

$$d\mathbf{s} = (dx, dy, dz)$$

Par définition de la ligne de courant, ce vecteur  $d\mathbf{s}$  est parallèle au vecteur vitesse local  $\mathbf{v}$ . La condition suivante doit alors être respectée,

$$\begin{aligned} d\mathbf{s} \times \mathbf{v} &= \mathbf{0} \\ (w \, dy - v \, dz, u \, dz - w \, dx, v \, dx - u \, dy) &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

En égalant terme à terme, trois équations différentielles apparaissent décrivant la dynamique de la ligne de courant.

Dans le cas bidimensionnel,  $dz = 0$  et  $w = 0$ , la dynamique de la surface libre est alors obtenue par l'équation différentielle suivante :

$$\begin{aligned} v \, dx - u \, dy &= 0 \\ \frac{dy}{dx} &= \frac{v}{u} \end{aligned}$$

Le cas stationnaire permet de montrer que la surface libre est tangente au vecteur vitesse comme illustré à la figure (1.2).

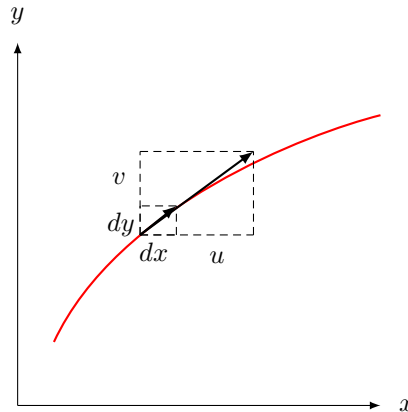


FIGURE 1.2 – Condition cinématique pour un écoulement stationnaire bidimensionnel, la surface libre est représentée en rouge.

## Écoulement transitoire

Dans un écoulement transitoire, la forme et la taille de la surface libre sont connues à un instant initial  $t_0$  et évoluent au cours du temps. Afin de décrire la variation de la surface libre, considérons un écoulement bidimensionnel. Une frontière libre est considérée sur la partie supérieure du domaine [Castro-Orgaz and Hager, 2019] telle qu'illustrée à la figure (1.3). La surface libre est décrite par  $y = h(x, t)$  où  $(x, y)$  sont les coordonnées cartésiennes et  $t$  le temps. La vitesse du fluide dans les directions  $(x, y)$  est donnée par  $\mathbf{v} = (u, v)$ .

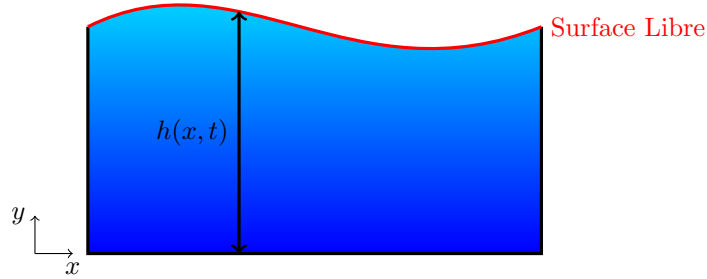


FIGURE 1.3 – Représentation bidimensionnelle d'un écoulement avec surface libre.

La position de la surface libre est décrite par une fonctionnelle  $F(x, y, t)$  :

$$F(x, y, t) = y - h(x, t) = 0, \quad \forall y \in \text{Surface Libre.} \quad (1.1)$$

La conservation de la masse impose qu'aucun flux ne traverse la surface libre. Cela permet de considérer la surface libre comme une surface matérielle [Tsai and Yue, 1996]. Dès lors, la dérivée matérielle de  $F$  suivant le déplacement est exprimée par :

$$\begin{aligned} \frac{DF}{Dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \mathbf{v} \cdot \nabla F = 0 \\ &= \frac{\partial F}{\partial t} + u \frac{\partial F}{\partial x} + v \frac{\partial F}{\partial y} \end{aligned} \quad (1.2)$$

Les dérivées partielles de  $F$  sont déterminées à partir de l'équation (1.1).

$$\frac{\partial F}{\partial t} = -\frac{\partial h}{\partial t} \quad \frac{\partial F}{\partial x} = -\frac{\partial h}{\partial x} \quad \frac{\partial F}{\partial y} = 1 \quad (1.3)$$

En injectant les résultats de l'équation (1.3), l'équation (1.2) devient :

$$\frac{DF}{Dt} = -\frac{\partial h}{\partial t} - u \frac{\partial h}{\partial x} + v = 0$$

Enfin, la dynamique de la surface libre en deux dimensions est donnée par l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - v = 0} \quad (1.4)$$

L'équation (1.4) est appelée la *condition cinématique* associée à la surface libre.

## Formulation faible

Nous nous intéressons à la formulation du problème pour lequel des conditions de Neumann sont appliquées. Ces conditions consistent à imposer un angle de contact de  $90^\circ$  entre les parois latérales et la surface libre. La condition cinématique revient à déterminer  $h(x,t)$  telle que :

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - v = 0, & \forall x \in \partial\Omega_f \\ \frac{\partial h}{\partial x} = 0, & \forall x \in \partial\partial\Omega_{f,N} \end{cases}$$

où la surface libre est indiquée par  $\partial\Omega_f$  et  $\partial\partial\Omega_{f,N}$  les points frontières de la surface libre sur lesquels les conditions de Neumann sont appliquées. Le problème est illustré à la figure (1.4).

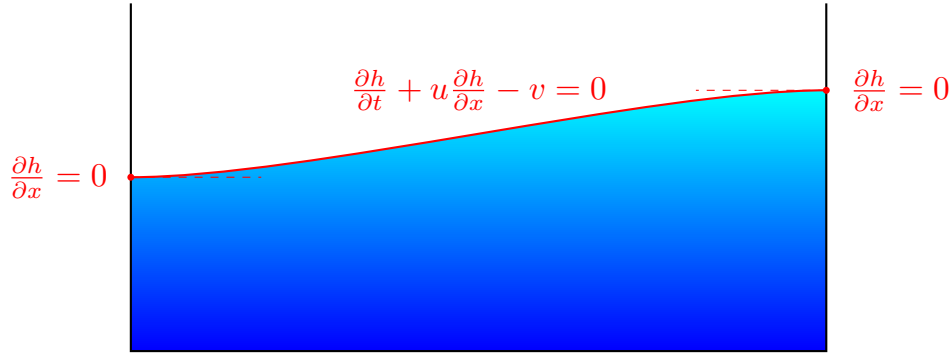


FIGURE 1.4 – Condition cinématique

La formulation faible est obtenue en multipliant l'équation cinématique par les fonctions tests  $\hat{h} \in L_2(\partial\Omega_f)$ , où  $L_2$  est l'espace des fonctions carré-intégrables sur l'espace  $\partial\Omega_f$ , et en intégrant le long de la surface libre. La formulation faible est obtenue par,

Trouver  $h \in L_2(\partial\Omega_f)$  tel que

$$\left\langle \frac{\partial h}{\partial t}, \hat{h} \right\rangle + \left\langle u \frac{\partial h}{\partial x}, \hat{h} \right\rangle - \langle v, \hat{h} \rangle = 0, \quad \forall \hat{h} \in L_2(\partial\Omega_f).$$

En utilisant la notation

$$\langle f, g \rangle = \int_{\partial\Omega_f} fg \, dl.$$

Il est possible de déduire la formulation discrète du problème en exigeant que

Trouver  $h^h \in \mathcal{H}^h$  tel que

$$\left\langle \frac{\partial h^h}{\partial t}, \hat{h}^h \right\rangle + \left\langle u \frac{\partial h^h}{\partial x}, \hat{h}^h \right\rangle - \langle v, \hat{h}^h \rangle = 0, \quad \forall \hat{h}^h \in \mathcal{H}^h. \tag{1.5}$$

Comme les fonctions de forme sont une base du sous-espace d'approximation  $\mathcal{H}^h$ , si les équations (1.5) sont satisfaites pour les fonctions de forme  $\tau_j$ , elles le sont pour tout élément de  $\mathcal{H}^h$ . Le problème (1.5) est équivalent à un système linéaire de  $n$  équations à  $n$  inconnues où  $n$  est le nombre de noeuds. Afin d'obtenir la nouvelle position de la surface libre, deux étapes sont effectuées. Premièrement, la dérivée temporelle  $\frac{\partial h^h}{\partial t}$  est déterminée par la résolution du système (1.5). Deuxièmement, la nouvelle position de la surface libre est déterminée par une méthode d'Euler explicite.

## 1.2 Condition dynamique

Dans un fluide, chaque molécule subit l'attraction de ses voisines. La résultante de cette force d'attraction est nulle à l'intérieur du fluide. Cependant, à l'interface, cette résultante est non-nulle et dirigée vers l'intérieur du fluide. C'est par ce phénomène que la tension superficielle est générée. L'équilibre des forces à l'interface entre les deux fluides, e.g. l'air et l'eau, donne lieu à la condition dynamique de la surface libre [Xuan and Shen, 2019]. En supposant la tension superficielle  $\gamma$  constante sur l'interface, la condition se restreint à un équilibre des forces normales à la surface,

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}} = (\gamma\kappa - p_{ext})\hat{\mathbf{n}}. \quad (1.6)$$

Le symbole  $\kappa$  dénote la courbure de la surface, le tenseur des contraintes est noté  $\boldsymbol{\sigma}$  tandis que  $\hat{\mathbf{n}}$  est le vecteur normal unitaire au domaine dans la direction sortante. La force associée à la tension de surface minimise la surface en contact avec l'air telle qu'illustrée à la figure (1.5). L'expression de la courbure se formule à partir de la trace du gradient du vecteur normal [Legat and Oden, 1995].

$$\kappa = -\text{tr}(\nabla\hat{\mathbf{n}}) \quad (1.7)$$

où l'opérateur  $\nabla$  décrit ici le gradient le long de la surface libre.

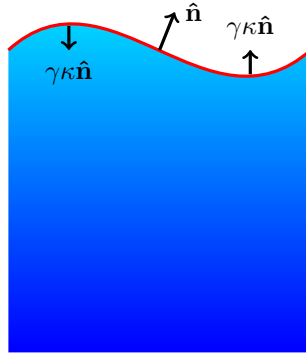


FIGURE 1.5 – Orientation de la tension superficielle le long de la surface libre (trait noir).

En deux dimensions, la normale sortante le long de la surface libre est déterminée par la hauteur de celle-ci  $h(x, t)$  par l'expression suivante (1.8),

$$\hat{\mathbf{n}} = \left[ \left( \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + 1 \right)^{-1/2} \left( -\frac{\partial h}{\partial x}, 1 \right) \right]. \quad (1.8)$$

Comme la normale dépend uniquement de la composante  $x$  du repère cartésien, la courbure est déterminée par la dérivée par rapport à cette composante. À partir des expressions (1.7) et (1.8), nous obtenons :

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{\partial}{\partial x} \left[ \left( \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + 1 \right)^{-1/2} \frac{\partial h}{\partial x} \right] \\ &= \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left( \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + 1 \right)^{-1/2} - \frac{\partial h}{\partial x} \left( \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + 1 \right)^{-3/2} \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right] \\ &= \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + 1 \right]^{-3/2} \end{aligned} \quad (1.9)$$

L'expression de la courbure permet d'exprimer la force produite par la tension superficielle. Enfin, en supposant un fluide Newtonien et en négligeant les effets visqueux à l'interface, le tenseur des contraintes se

réduit à  $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I}$ . En remplaçant ceci dans l'équation (1.6) et en utilisant (1.9) afin d'exprimer la courbure, nous obtenons la condition de pression à imposer pour satisfaire l'équilibre des forces à l'interface,

$$\boxed{\begin{aligned} p - p_{ext} &= -\gamma\kappa \\ p - p_{ext} &= -\gamma\frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left[ \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + 1 \right]^{-3/2} \end{aligned}} \quad (1.10)$$

### Projection sur $L_2$

Le calcul de la condition dynamique consiste à imposer une pression déterminée par la courbure de la surface. La courbure est déterminée par la dérivée seconde de  $h(x, t)$ . Ce terme est calculé à l'aide d'une projection dans l'espace  $L_2(\partial\Omega_f)$ . Cela consiste à multiplier la dérivée seconde par une fonction de forme associée au noeud  $i$   $\tau_i$  et d'intégrer l'expression sur la surface libre. Ensuite, l'intégration par partie est appliquée.

$$\begin{aligned} \langle \tau_i, \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \rangle &= \ll \tau_i, \frac{\partial h}{\partial x} \gg - \langle \frac{\partial \tau_i}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial x} \rangle \\ &= - \langle \frac{\partial \tau_i}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial x} \rangle. \end{aligned} \quad (1.11)$$

À la jonction entre les murs et la surface libre, nous faisons l'hypothèse que  $\frac{\partial h}{\partial x} = 0$  permettant l'annulation de l'intégrale sur la frontière de la surface libre. Cependant, l'un des problèmes de la formulation faible est l'impossibilité d'imposer à la fois une condition de Dirichlet sur la vitesse et un angle de contact. Afin de palier à ce problème, une formulation faible modifiée peut être utilisée afin de déterminer la condition de pression [Legat and Oden, 1995].

L'équation (1.11) est discrétisée en utilisant une interpolation par les fonctions de forme. La solution est déterminée en résolvant le système de  $n$  équations à  $n$  inconnues, où  $n$  est le nombre de noeuds sur la surface libre,

$$\boxed{\sum_{j=0}^{n-1} \langle \tau_i, \tau_j \rangle \left( \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \right)_j = - \sum_{j=0}^{n-1} \langle \frac{d\tau_i}{dx}, \frac{d\tau_j}{dx} \rangle H_j} \quad (1.12)$$

où  $H_j$  est l'ordonnée de la surface libre au noeud  $j$ .

## 1.3 Conservation du volume

Lors de la résolution de la condition cinématique afin de déterminer la nouvelle position de la surface libre, l'incompressibilité doit être respectée. Si une erreur, même infime, est présente, le volume n'est pas maintenu et la solution numérique diverge. Afin de garantir l'incompressibilité une correction des vitesses est effectuée.

La condition cinématique peut se formuler à partir de la normale sortante [Rose et al., 2017],  $\mathbf{n} = \left( -\frac{\partial h}{\partial x}, 1 \right)$ , par :

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \quad (1.13)$$

La correction est appliquée lorsque la surface libre constitue la seule frontière ouverte.

Considérons le repère  $(x, y)$  attaché au bassin de longueur  $L$  et de hauteur  $h(x, t)$ , l'origine étant placée dans le coin gauche du bassin tel que soit le domaine soit décrit par tout  $\mathbf{x} = (x, y) \in \Omega = [0, L] \times [0, h(x, t)]$ . En

intégrant le long de la surface libre, et en notant la normale unitaire  $\hat{\mathbf{n}}$  la condition cinématique devient :

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_f} \frac{\partial h}{\partial t} \frac{1}{\|\mathbf{n}\|} dl &= \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \\ \int_0^L \frac{\partial h}{\partial t} dx &= \int_{\partial\Omega} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl - \int_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega_f} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \\ &= \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{v} d\Omega - \int_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega_f} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \end{aligned}$$

où  $\Omega$  symbolise le domaine délimité par la frontière  $\partial\Omega$  dont la surface libre  $\partial\Omega_f$  fait partie.

Par l'incompressibilité, la divergence de la vitesse est nulle, il en résulte que l'intégrale de  $\frac{\partial h}{\partial t}$  doit également satisfaire le critère suivant,

$$\int_0^L \frac{\partial h}{\partial t} dx = - \int_{\partial\Omega \setminus \partial\Omega_f} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \quad (1.14)$$

garantissant la conservation du volume. Comme le référentiel est supposé attaché au bassin, et comme les parois sont supposées collantes, les critères deviennent,

$$\begin{aligned} \int_0^L \frac{\partial h}{\partial t} dx &= 0 \\ \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl &= 0. \end{aligned}$$

Il est essentiel de remarquer que si l'incompressibilité est parfaitement respectée, la conservation du volume le sera également. Cette observation nous mène à proposer une correction de la vitesse afin de satisfaire exactement l'incompressibilité. Supposons la correction suivante,

$$\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + a \hat{\mathbf{e}}_y$$

En notant  $\mathbf{v} = (u, v)$  et  $\tilde{\mathbf{v}} = (\tilde{u}, \tilde{v})$ , les vitesses du fluide respectivement avant et après la correction, le vecteur  $\hat{\mathbf{e}}_y$  le vecteur unitaire verticale  $(0, 1)^T$ , et  $a$  un paramètre réel que nous allons déterminer afin de satisfaire l'incompressibilité. En remplaçant la vitesse corrigée  $\tilde{\mathbf{v}}$  dans le critère de conservation du volume, nous obtenons,

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega_f} \tilde{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl &= 0 \\ \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl + a \underbrace{\int_{\partial\Omega_f} \frac{1}{\|\mathbf{n}\|} dl}_{=L} &= 0 \\ \Rightarrow a &= -\frac{1}{L} \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \end{aligned}$$

La vitesse verticale est donc corrigée par l'expression suivante,

$$\boxed{\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} - \frac{1}{L} \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \hat{\mathbf{e}}_y.} \quad (1.15)$$

Dans le cas où le repère cartésien n'est pas attaché au domaine mobile, il est nécessaire de prendre en compte la vitesse du bassin. Supposons une vitesse du bassin purement verticale  $\mathbf{v}_b = v_b \hat{\mathbf{e}}_y$ . Les parois du domaine se déplacent à une vitesse  $\mathbf{v}_b$  par rapport au référentiel, afin de prendre en compte cet effet, visible à l'équation (1.14), il suffit d'ajouter la vitesse du bassin à la correction. Celle-ci devient,

$$\boxed{\tilde{\mathbf{v}} = \mathbf{v} + \mathbf{v}_b - \frac{1}{L} \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{n}} dl \hat{\mathbf{e}}_y.} \quad (1.16)$$

## 1.4 Extrusion

Afin de valider le modèle numérique, nous nous intéressons au problème d'extrusion dont de nombreux résultats sont présents dans la littérature [Omodei, 1980]. Cet écoulement est collant-glissant ("stick-slip") c'est-à-dire qu'il est caractérisé par un changement abrupte de la dynamique aux conditions frontières. En effet, à la jonction entre la frontière collante et la frontière glissante, une variation importante de vitesse et de pression apparaît.

### Description

Un écoulement de Poiseuille est imposé à l'entrée du tube. Les parois étant collantes conduisent à une annulation de la vitesse du fluide en ces points. A la sortie du tube, la frontière est libre et se déforme par le mouvement du fluide. La tension de surface est négligée permettant d'imposer la pression  $p$  à la surface libre égale à la pression extérieur  $p_{ext}$ , elle-même supposée nulle, en accord avec la condition dynamique (1.10). La gravité est négligée dans la simulation. Les conditions frontières ainsi que la géométrie du problème sont indiquées à la figure (1.1).

| Géométrie                                     |                                       |                               |
|---|---------------------------------------|-------------------------------|
|   |                                       |                               |
| Conditions frontières                         |                                       |                               |
| $\partial\Omega_{In} : u = 2(1 - y^2), v = 0$ | $\partial\Omega_{Out} : v = 0, p = 0$ |                               |
| $\partial\Omega_{Die} : u = 0, v = 0$         | $\partial\Omega_{Sym} : v = 0$        |                               |
| $\partial\Omega_f : p = p_{ext}$              |                                       |                               |
| Paramètres physiques                          | Paramètres géométriques               | Paramètres numériques         |
| $\rho = 18 \text{ kg m}^{-3}$                 | $H = 1 \text{ m}$                     | $\Delta t = 0.005 \text{ s}$  |
| $\mu = 1 \text{ Pa s}$                        | $L_1 = 3.5 \text{ m}$                 | $t_{End} = 100 \text{ s}$     |
| $Re = 36$                                     | $L_2 = 20 \text{ m}$                  | $\# \text{ éléments} = 10684$ |

TABLE 1.1 – Données du problème d'extrusion.

Le flux émergent du cylindre se déforme menant à une variation de la hauteur du jet. Celle-ci est caractérisée par le taux de gonflement défini comme le rapport entre le rayon de la section cylindrique  $h_0$  et le rayon du jet lorsque l'écoulement s'est établi, noté  $h_f$ . Le taux de gonflement se note  $\chi = h_f/h_0$ . Le gonflement dépend des propriétés rhéologiques du fluide ainsi que des conditions frontières appliquées [André and Clermont, 1987]. L'analyse du gonflement dans le cas des fluides Newtoniens est proposée respectivement par [Goren and Wronski, 1966] et [Omodei, 1980]. Ceux-ci ont mis en évidence la dépendance entre le nombre de Reynolds,  $Re$ , et le taux de gonflement  $\chi$ .

### Résolution numérique

La méthode des différences finies est utilisée afin de résoudre la condition cinématique (1.4). La dérivée temporelle est discrétisée par une méthode d'Euler explicite, tandis que la dérivée spatiale est déterminée par un schéma décentré. En introduisant les notations suivantes,  $h(x_i, t_n) = H_i^n$ ,  $u(x_i, t_n) = U_i^n$  et  $v(x_i, t_n) = V_i^n$  où  $x_i = x_0 + i\Delta x$  et  $t_n = t_0 + n\Delta t$  avec  $\Delta t$  le pas de temps et  $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$  la différence spatiale, le

schéma par différences finies est obtenu :

$$\begin{cases} \frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} + U_{i-1}^n \frac{H_i^n - H_{i-1}^n}{\Delta x_i} - V_{i-1}^n = 0, & \forall i = 1, \dots, n-2 \\ \frac{H_i^{n+1} - H_i^n}{\Delta t} = V_{i-1}^n, & \forall i \in \{0, n-1\} \end{cases}$$

L'ordre de précision de la méthode est  $\mathcal{O}(\Delta t, \Delta x)$ . La condition nécessaire de stabilité de Courant-Friedrichs-Lewy doit être respectée,

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} U_{max} \leq 1.$$

L'analyse de stabilité précise du schéma proposé n'a pas été investiguée.

## Validation

Les résultats numériques sont en accord avec les mesures expérimentales et numériques présentées au tableau (1.2). Lorsque le gonflement  $\chi$  est inférieur à un, le jet se rétracte tel qu'observé à la figure (1.6). Ce phénomène est observé pour des fluides Newtoniens à partir d'un nombre de Reynolds  $Re$  de l'ordre de 15. Les captures à l'initialisation et à la dernière itération, figure (1.7), présentent les résultats de la régularisation du maillage. Le problème d'extrusion converge vers une surface libre stationnaire, dès lors, sur cette dernière, le vecteur vitesse est tangent à la surface telle qu'observé à la figure (1.8).

| $Re$ | $\chi$ | $\chi_o$ | $\chi_P$ |
|------|--------|----------|----------|
| 24   | 0.955  | 0.954    | 0.955    |
| 29   | 0.941  | 0.940    | 0.941    |
| 36   | 0.924  | 0.926    | 0.928    |

TABLE 1.2 – Extrusion : taux de gonflement  $\chi$  :  $\chi$  correspond à nos valeurs numériques,  $\chi_o$  aux valeurs numériques de [Omodei, 1980] et  $\chi_P$  correspond aux valeurs expérimentales tirées de [Goren and Wronski, 1966].

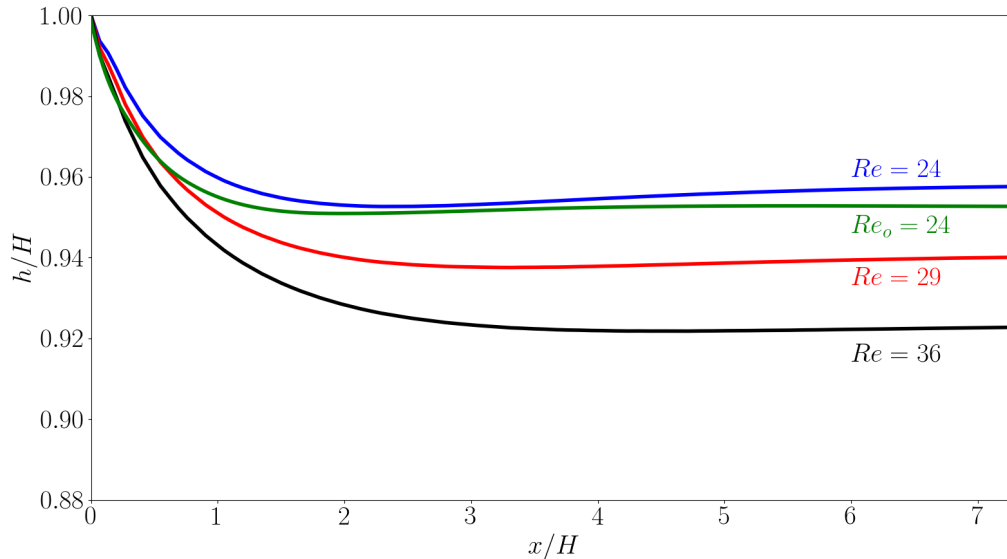


FIGURE 1.6 – Comparaison du profil de la surface libre. Résultats pour  $Re = \{24, 29, 36\}$ . Le profil de référence étant donné par  $Re_0 = 24$  issu de [Omodei, 1980].

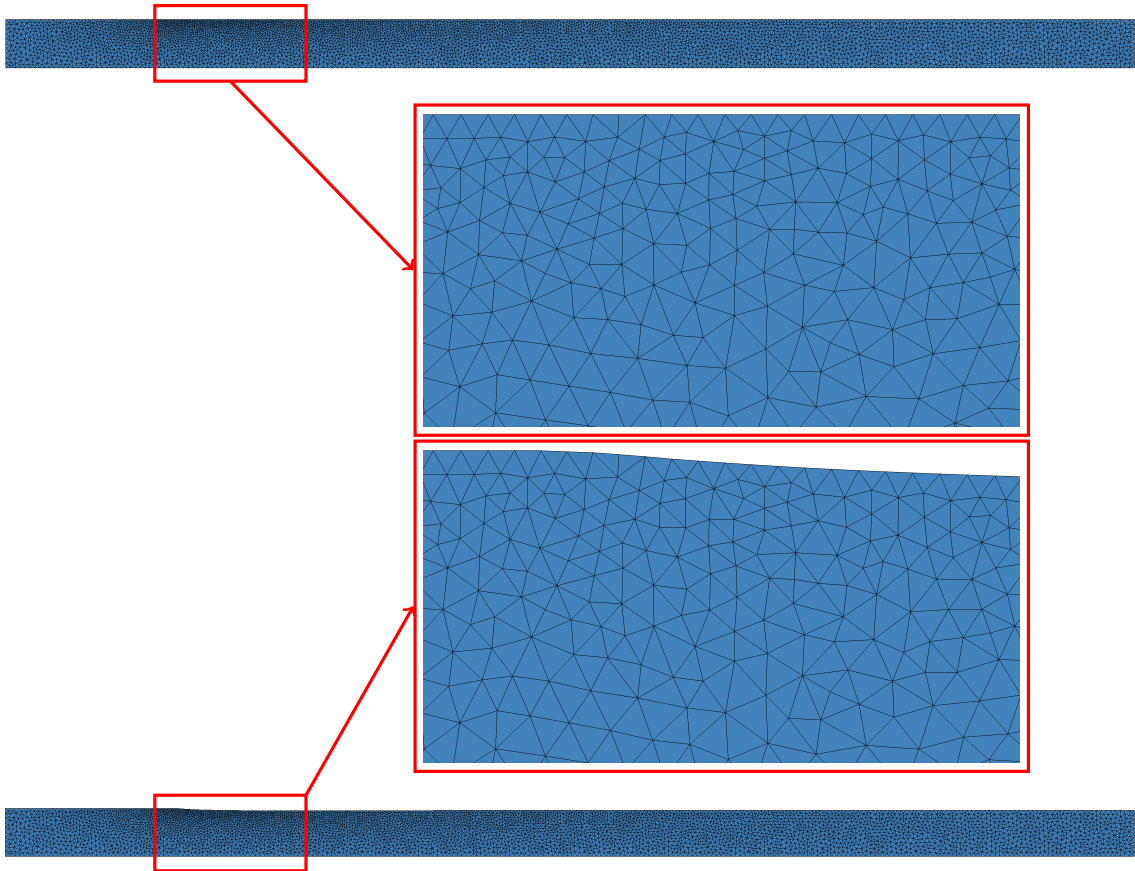


FIGURE 1.7 – Régularisation du maillage en  $t = 0$  et  $t = 100s$ ,  $Re = 24$ . En haut, le maillage initial. En bas, le maillage final.

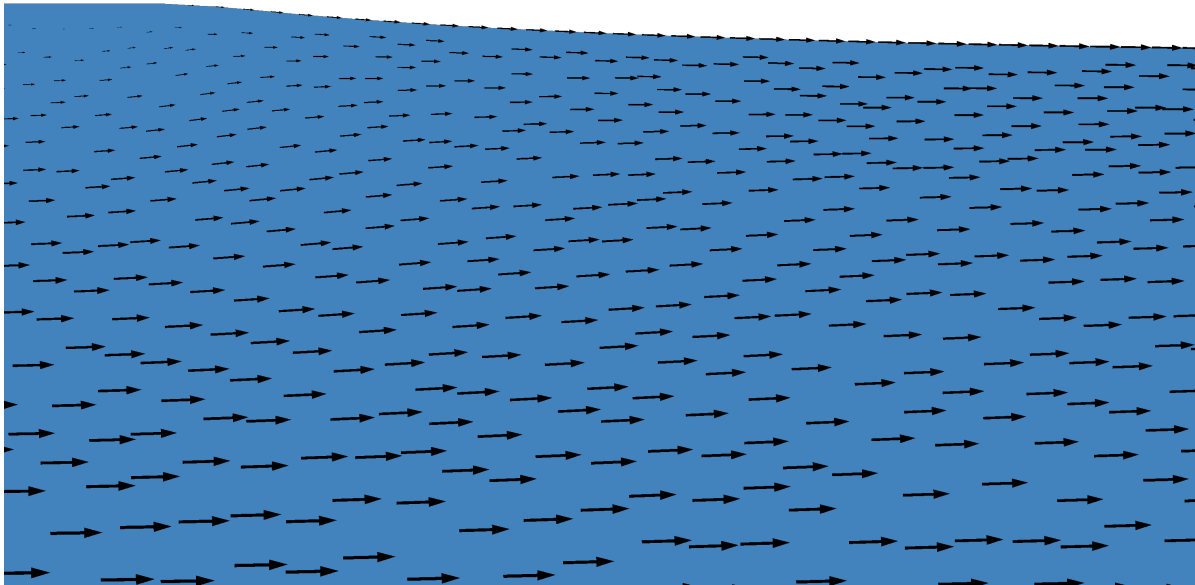


FIGURE 1.8 – Vecteurs vitesses tangents à la surface libre,  $Re = 29$ .



## Chapitre 2

# Régularisation du maillage

Le déplacement des noeuds décrivant la surface libre mène à une déformation du maillage. Afin de maintenir une grille conforme, une régularisation est appliquée. Ce chapitre s'intéresse au développement de celle-ci.

Autoriser le maillage à se déformer permet de décrire des domaines mobiles par un suivi d'interface en utilisant les noeuds du maillages comme marqueurs. De plus, le maillage peut être adapté tout au long de la simulation afin de décrire précisément les régions du domaine où la physique se complexifie. L'importance de la grille est déterminante dans la résolution des équations de conservation. L'enchevêtrement ou la distorsion du réseau mènera à des approximations de piètres qualités et au développement d'une instabilité [Shewchuk, 2002]. Développer une procédure permettant d'améliorer la qualité des éléments du maillage est donc d'une grande importance. Les différentes techniques traitant ce problème peuvent se classer en trois groupes [Park and Shontz, 2011], l'adaptation [Klein, 1999], la régularisation du maillage [Donea et al., 2004] et les méthodes par permutation ("*swapping*") [Freitag and Ollivier-Gooch, 1997] [Joe, 1995].

Les méthodes par permutation consistent à modifier la connectivité du maillage en permutant les faces ou les arêtes afin de former de nouveaux éléments. Le but est alors de déterminer la configuration maximisant la qualité du maillage [Feuillet et al., 2018].

L'adaptation du maillage consiste à raffiner les mailles selon un critère ou à remailler le domaine afin de le maintenir conforme. Afin de déterminer les zones nécessitant un raffinement ou un déraffinement, l'estimation de l'erreur commise par la méthode numérique est souvent nécessaire. A ce jour, la recherche d'un estimateur pour tout type de maillage, de géométrie et d'ordre de méthode est un problème ouvert [Boxho et al., 2019]. Le coût d'une telle méthode peut se révéler important si le remaillage est global et fréquemment utilisé. Une alternative afin de palier ce problème est d'adapter le maillage localement en minimisant le critère d'erreur choisi [Askes and Rodríguez-Ferran, 2001].

La régularisation du maillage a pour but de maintenir le maillage aussi régulier que possible. Pour se faire, les noeuds sont autorisés à se déplacer tout en maintenant la connectivité du réseau. Afin de déterminer la nouvelle position des noeuds, deux approches sont souvent utilisées [Vartziotis and Bohnet, 2017]. La première s'intéresse à formuler le problème sous forme d'un problème d'optimisation. Elle a pu démontrer une grande efficacité mais nécessite un coût de calcul important [Durand et al., 2019]. La seconde approche est géométrique, elle consiste à déplacer les noeuds du maillage selon une règle géométrique bien définie. L'une d'elle est la régularisation elliptique utilisant les propriétés du Laplacien afin de conserver un maillage conforme. Cette approche est efficace si le domaine est convexe. Cependant si tel n'est pas le cas, les noeuds peuvent être éjectés du domaine. La convexité du domaine ne peut être assurée dans le cas d'un écoulement en surface libre même si le domaine initial l'est [Donea et al., 2004]. Une alternative est d'améliorer la forme des éléments quand la topologie est fixée en utilisant un critère mesurant les distortions et les compressions entre mailles [Donea et al., 1982].

Lors d'un écoulement en surface libre, nous nous intéressons à l'évolution de la solution à proximité de l'interface. Un raffinement des mailles est déjà effectué lors de l'initialisation. Dès lors, une adaptation n'est souvent pas nécessaire. L'apparition d'oscillations à l'interface conduit à la nécessité de régulariser le maillage afin de suivre l'interface mobile et de maintenir le maillage conforme.

## 2.1 Régularisation elliptique

Les écoulements en surface libre utilisent souvent une régularisation elliptique afin de déterminer le déplacement des noeuds intérieurs. Lorsque la position de la surface libre est mise à jour, les noeuds intérieurs sont déplacés afin de maintenir le maillage conforme. Pour ce faire, les régularisations elliptiques consistent à résoudre une équation de Poisson homogène pour chaque composante de la position de noeuds. Par conséquent, la nouvelle position d'un noeud dépend de la position de tous ses voisins [Winslow, 1963].

Les coordonnées des noeuds du nouveau maillage, notées  $\mathbf{x} = (x, y)$ , dépendent des coordonnées initiales du maillage  $\boldsymbol{\xi} = (\xi, \eta)$  et des nouvelles coordonnées de la frontière  $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*)$ . Afin de déterminer la position des noeuds du nouveau maillage  $\mathbf{x}$ , le système d'équations elliptiques est proposé [Legat, 1992] :

$$\begin{cases} \Delta_{\boldsymbol{\xi}} \mathbf{x} = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{x} = \mathbf{x}^*, & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.1)$$

A priori, le maillage initial ne satisfait pas les équations (2.1), l'application de la régularisation modifie donc la position des noeuds. Une telle procédure peut mener à la déformation du maillage malgré des frontières statiques [Legat, 1992]. Cet effet indésirable peut être évité en formulant le système (2.1) non pas en terme de position des noeuds mais en terme de déplacement de ceux-ci  $\delta\mathbf{x}$ ,

$$\delta\mathbf{x} = \mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}.$$

La régularisation elliptique devient,

$$\begin{cases} \Delta_{\boldsymbol{\xi}} \delta\mathbf{x} = \mathbf{0}, & \mathbf{x} \in \Omega \\ \mathbf{x} = \mathbf{x}^*, & \mathbf{x} \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.2)$$

Cependant, la nouvelle position des noeuds peut mener à un maillage non conforme [Donea et al., 2004]. L'équation (2.2) peut se résoudre efficacement par la méthode des éléments finis ou par des différences finies. La solution est obtenue en résolvant un système linéaire de taille  $n$  où  $n$  est le nombre de noeuds. La complexité calculatoire de la méthode est donc  $\mathcal{O}(n^3)$ .

## 2.2 Régularisation simplifiée

Dans nos applications, la surface libre est décrite en déformant verticalement ses noeuds frontières. Dès lors, afin de simplifier l'expression (2.2), une régularisation possible est de modifier verticalement le déplacement des noeuds intérieurs. La position d'un noeud est mise à jour afin de maintenir constant le rapport entre la position du noeud et la distance entre la surface libre et la frontière opposée [Muzaferija, 1998]. La méthode est moins robuste, particulièrement face à des oscillations de forte amplitude, mais permet une résolution rapide.

En imposant que le déplacement des noeuds est vertical, l'équation (2.2) se simplifie et devient :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2(\delta y)}{\partial \eta^2} = 0, & y \in \Omega \\ y = y^*, & y \in \partial\Omega. \end{cases} \quad (2.3)$$

La solution générale de l'équation différentielle (2.3) prend la forme suivante :

$$\delta y(\xi, \eta, t) = A(\xi, t)\eta + B(\xi, t), \quad \forall(\xi, \eta) \in \Omega. \quad (2.4)$$

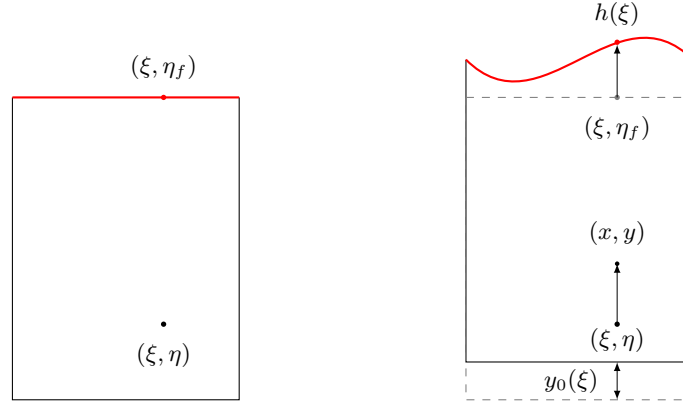


FIGURE 2.1 – Illustration de la régularisation. La surface libre, indiquée en rouge, est résolue par la condition cinématique (1.4). Les noeuds intérieurs sont déplacés verticalement afin de satisfaire l'équation (2.4). Leur nouvelle position est indiquée par  $(x, y)$ .

Les constantes  $A$  et  $B$  sont déterminées par la condition cinématique de la surface libre et la position de la frontière opposée. Celles-ci forment deux conditions de Dirichlet afin de déterminer l'expression du déplacement vertical.

$$\begin{aligned} y(\xi, \eta_f, t) &= h(\xi, t), & \forall (\xi, \eta_f) \in \partial\Omega_f \\ y(\xi, 0, t) &= y_0(\xi, t), \end{aligned}$$

où  $(\xi, \eta_f)$  représente la projection verticale du noeud sur la surface libre notée par  $\partial\Omega_f$ , tandis que  $y_0(\xi, t)$  est l'ordonnée à la frontière opposée à la surface libre.

Sous ces conditions, la solution de l'équation différentielle (2.4) est donnée par :

$$\boxed{y(\xi, \eta, t) = \frac{h(\xi, t) - y_0(\xi, t)}{\eta_f} \eta + y_0(\xi, t).} \quad (2.5)$$

La régularisation consiste à maintenir le rapport

$$\frac{y(\xi, \eta, t) - y_0(\xi, t)}{h(\xi, t) - y_0(\xi, t)} = \frac{\eta}{\eta_f}$$

constant. Cette observation permettra de fournir une implémentation simple. La régularisation est illustrée à la figure (2.1). La complexité calculatoire de la méthode est de  $\mathcal{O}(n)$ , où  $n$  est le nombre de noeuds, si nous disposons d'une structure permettant d'identifier la position de la surface libre et de la frontière opposée en une complexité  $\mathcal{O}(1)$ .

### Application : réponse à une perturbation

À ce stade, nous pouvons modéliser le déplacement de la surface libre au moyen de la condition cinématique (1.4) et maintenir le maillage conforme. Afin d'observer ceci, nous pouvons analyser l'évolution d'une condition initiale soumise à la gravité. Pour ce faire, un domaine rectangulaire est considéré sur lequel le maillage est généré à l'aide de GMSH<sup>1</sup>. La surface libre est déformée afin de décrire la condition initiale choisie, ensuite le maillage est régularisé maintenant les éléments conformes. La simulation peut alors débuter. La géométrie ainsi que les paramètres du problème sont décrits au tableau (2.1). La tension de surface est imposée par la pression à l'interface à l'aide de la condition dynamique (1.10). La condition initiale est définie par

$$h(x, t = 0^+) = a \frac{\sin \tilde{x}}{\tilde{x}}, \quad \tilde{x} = \frac{x - b}{c}$$

1. <https://gmsh.info/>.

où  $a = H/4$ ,  $b = L/2$  et  $c = L/30$ . La notation  $t = 0^+$  est utilisée pour rappeler que la condition initiale est appliquée après la génération du maillage sur le domaine rectangulaire.

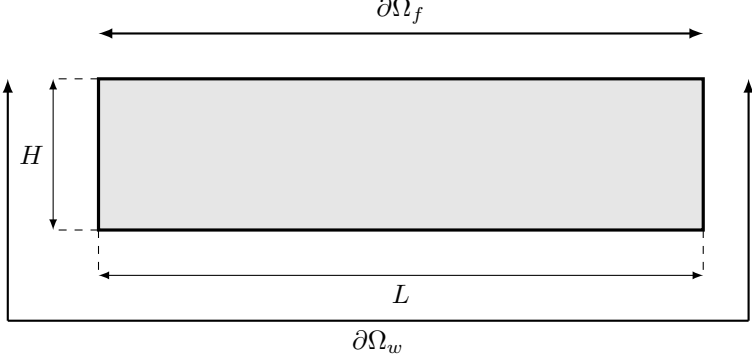
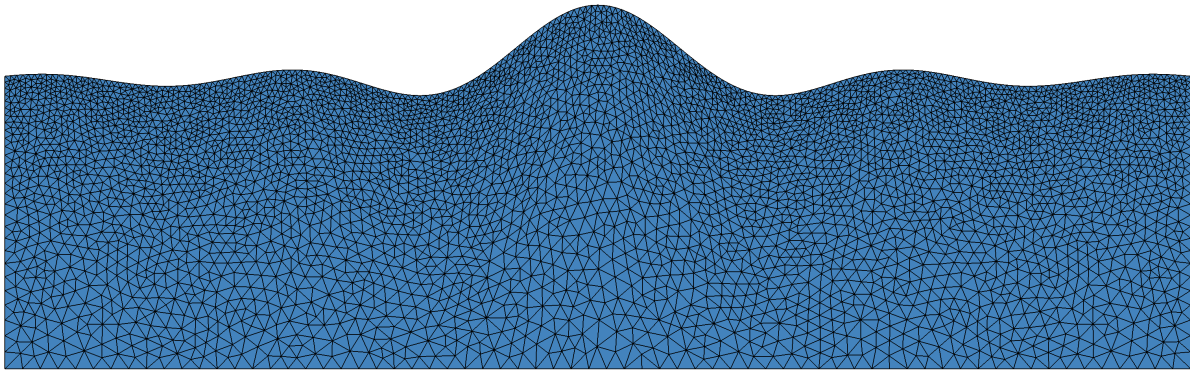
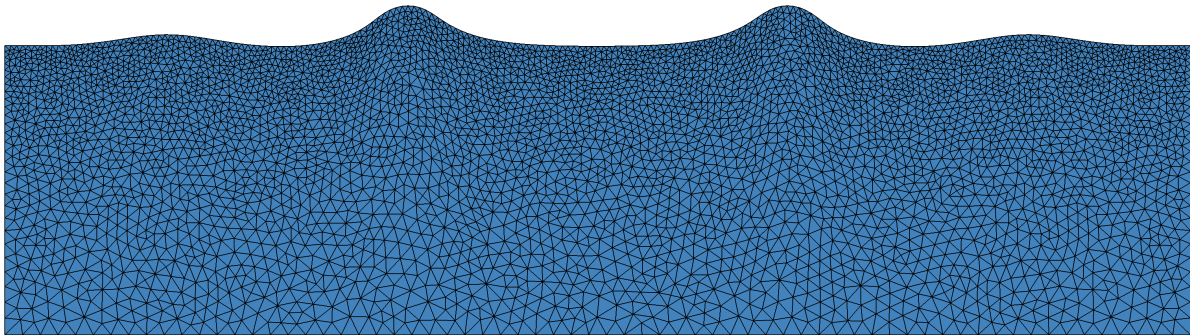
| <b>Géométrie</b>   |   |   |
|--|---|---|
|    |   |   |
| <b>Conditions frontières</b>   |   |   |
| $\partial\Omega_w : \mathbf{u} = \mathbf{0}$<br>$\partial\Omega_f : p = p_{ext}$   |   |   |
| <b>Paramètres physiques</b>  | <b>Paramètres géométriques</b>            | <b>Paramètres numériques</b>  |
| $\rho = 10^3 \text{ kg m}^{-3}$<br>$\nu = 10^{-3} \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$<br>$\gamma = 0.07 \text{ N m}^{-1}$<br>$g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$ | $H = 0.25 \text{ m}$<br>$L = 1 \text{ m}$ | $\Delta t = 10^{-3} \text{ s}$<br>$t_{End} = 1 \text{ s}$<br># éléments = 9216<br># noeuds = 4607 |

TABLE 2.1 – Données de l'application

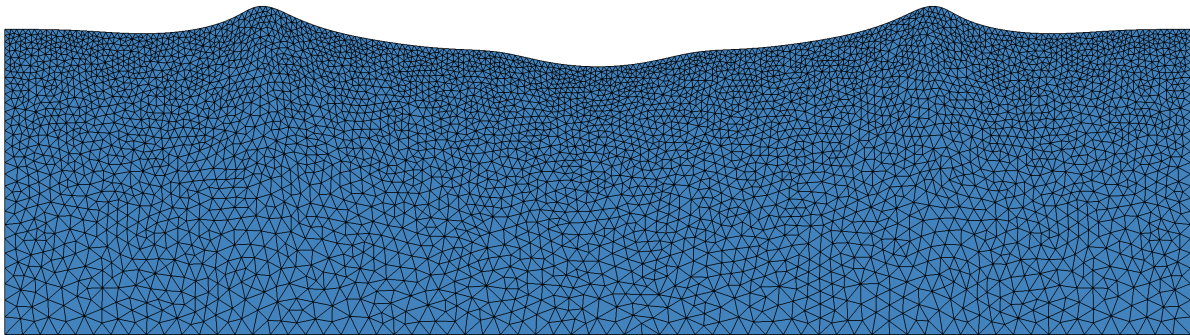
Nous pouvons observer à la figure (2.2) que les noeuds associés à la surface libre permettent un suivi de celle-ci. De plus, la régularisation (2.5) permet de maintenir le maillage conforme tout au long de la simulation.



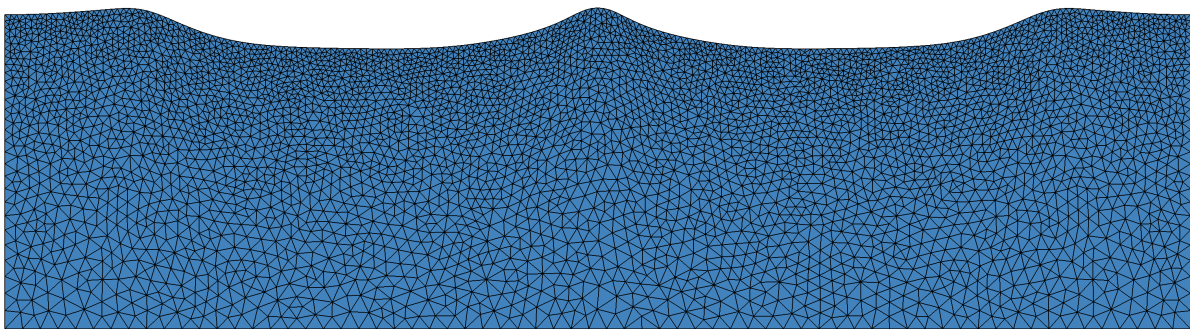
(a)  $t = 0^+s$



(b)  $t = 0.25s$



(c)  $t = 0.50s$



(d)  $t = 0.75s$

FIGURE 2.2 – Réponse à une perturbation initiale, évolution de la surface libre et régularisation du maillage.

## Limitations

Bien que la méthode permette de maintenir un maillage conforme dans de nombreuses situations, elle s'avère inefficace lorsque la surface libre fait face à des oscillations de forte amplitude sur peu d'éléments. Dans ce cas, les éléments du maillage se retrouvent fortement déformés et peuvent mener à des renversements d'éléments dégradant la solution numérique. Cet effet est visible à la figure (2.3). Afin d'éviter ce résultat indésirable, une régularisation plus robuste peut être utilisée. Une seconde solution consiste à utiliser un maillage uniforme. Ces aspects n'ont pas été étudiés en profondeur car la formation des ces effets indésirables a pu être évitée en choisissant les paramètres des problèmes afin de maintenir des oscillations suffisamment lisses.

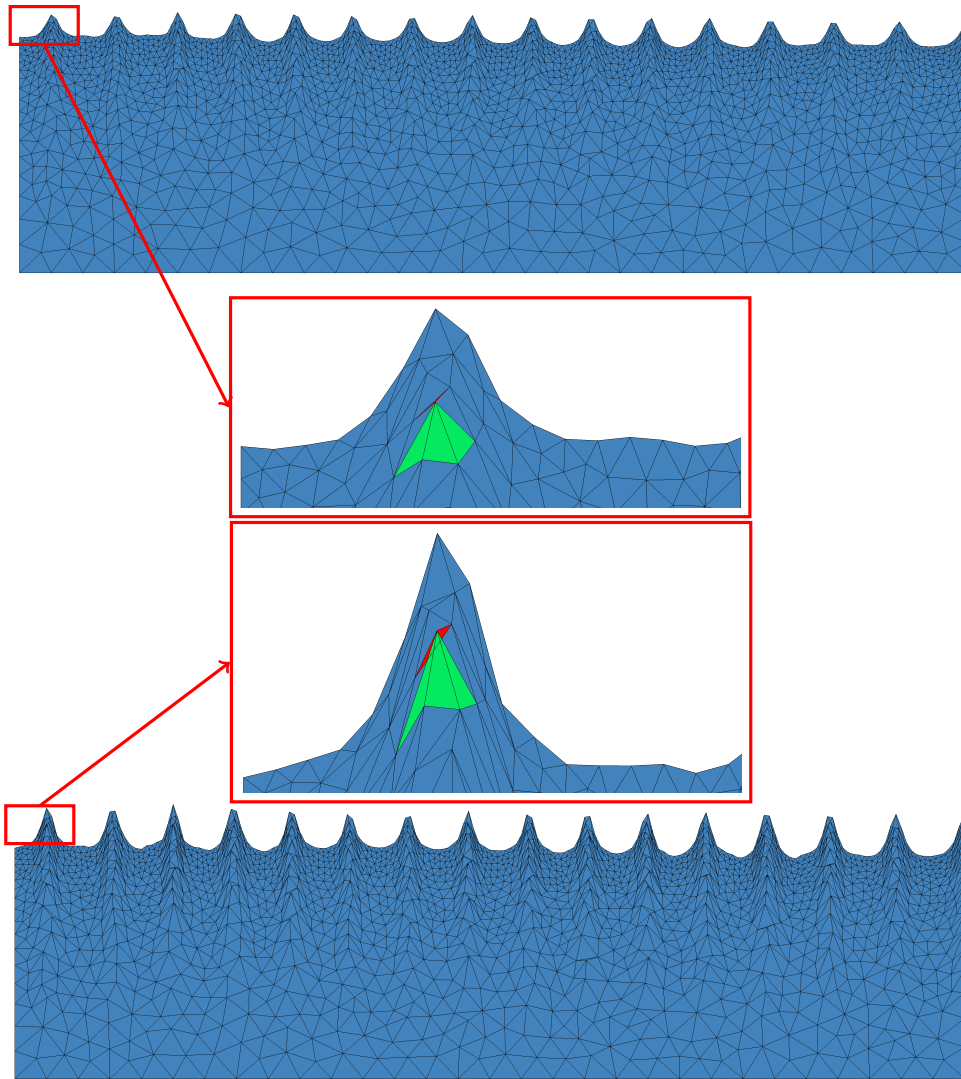


FIGURE 2.3 – Renversement d'éléments du maillage. En haut, le maillage avant renversement. En bas, le maillage avec renversement d'éléments.



## Chapitre 3

# Description arbitraire de Lagrange-Euler

La formulation arbitraire de Lagrange-Euler est une approche généralisant les descriptions Lagrangienne et Eulérienne. Elle fut développée dans le contexte des différences finies par [Franck and Lazarus, 1964] et [Trulio, 1966]. Par la suite, son application fut étendue à la méthode des éléments finis par [Donéa et al., 1977] et [Kennedy and Belytschko, 1978]. Afin de saisir l'utilité de la description arbitraire de Lagrange-Euler, rappelons les approches desquelles elle s'inspire. Une illustration de celles-ci se trouve à la figure (3.1).

*L'approche Lagrangienne* consiste à considérer un système de coordonnées attaché aux points matériels. En outre, les variables physiques sont décrites par les particules matérielles. Initialement, les méthodes numériques utilisant cette description considéraient un maillage mobile se déplaçant avec les particules matérielles. Ces méthodes sont principalement utilisées en mécanique des structures [Donea et al., 2004]. L'un des avantages est la facilité afin de suivre une interface entre différents matériaux. Cependant, de grandes distorsions du maillage peuvent avoir lieu nécessitant un remaillage fréquent. Une alternative est basée sur les méthodes sans maillage permettant de considérer des domaines à géométrie complexe [Fraga Filho, 2018]. Ces méthodes partagent l'information localement entre les particules matérielles [Gingold and Monaghan, 1977]. L'inconvénient majeur de cette méthode est le temps de calcul nécessaire afin de simuler précisément un écoulement. Une description plus précise de ces méthodes sans maillage est proposée par [Fraga Filho, 2018] et [Huerta et al., 2018].

*L'approche Eulérienne* est une description fréquemment rencontrée en mécanique des fluides. Les quantités physiques sont décrites par des volumes de référence statiques dans lesquels les lois de conservation sont vérifiées. Une telle méthode utilise un maillage dans lequel les variables physiques évoluent. Ce maillage statique rend la description de problèmes à géométrie complexe ou variable difficile [Tezduyar et al., 1992]. La description Eulérienne est fréquemment utilisée dans les méthodes par volume finies [Eymard et al., 2000] et dans la résolution d'équations aux dérivées partielles [Greer, 2006].

*L'approche arbitraire Lagrange-Euler (ALE)* est une description ayant pour but d'unir les avantages des approches Lagrangienne et Eulérienne. Elle consiste à observer l'évolution des quantités physiques par un volume de référence se déplaçant indépendamment des particules matérielles. Cela permet de prendre en compte le mouvement du domaine directement dans les équations de conservation. En pratique, cela revient à considérer un maillage dans lequel les noeuds sont autorisés à se déplacer arbitrairement. Cela permet de suivre l'interface d'une surface libre ou d'effectuer un suivi d'une perturbation dans le domaine par un raffinement local [Donea et al., 2004]. Le degré de liberté supplémentaire nous offre donc la possibilité d'améliorer les performances des méthodes numériques.

Ce chapitre s'intéressera donc à formuler le modèle des écoulements granulaires dans le domaine de référence. Cela permettra de répondre au premier objectif du mémoire à savoir le développement d'une

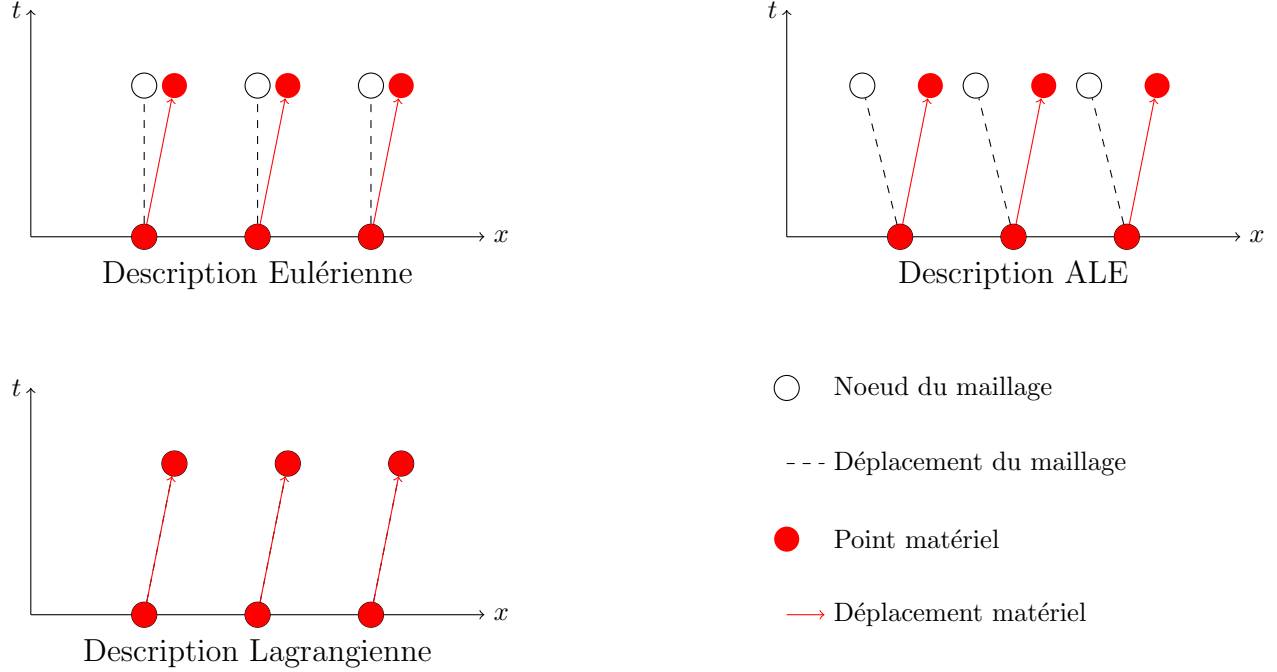


FIGURE 3.1 – Déplacement unidimensionnel des noeuds du maillage et des particules matérielles pour les différentes descriptions.

méthode permettant la modélisation d'écoulement en surface libre, cette procédure sera également décrite dans ce chapitre.

### 3.1 Équation fondamentale de l'ALE

Le système de coordonnées est mobile et indépendant du volume matériel et du volume de contrôle. Les coordonnées sont appelées coordonnées de référence. Les équations de conservations consiste à imposer l'évolution des quantités physiques dans le volume matériel au cours du temps. Pour ce faire, l'expression de la dérivée matérielle dans le domaine de référence est exprimée à l'aide du *théorème fondamentale de l'ALE* dont le développement est effectué dans cette section.

Soient  $\mathbf{x}$  les coordonnées spatiales,  $\boldsymbol{\chi}$  les coordonnées de référence et  $\mathbf{X}$  les coordonnées matérielles. La vitesse matérielle  $\mathbf{v}$  et la vitesse du domaine de référence  $\hat{\mathbf{v}}$  sont alors définies par :

$$\mathbf{v} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}}, \quad \hat{\mathbf{v}} = \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\boldsymbol{\chi}}.$$

Soit la quantité scalaire ou vectorielle  $q(\boldsymbol{\chi}, t)$ , e.g. la densité ou la vitesse, pour laquelle nous cherchons la dérivée matérielle. Par dérivation des fonctions composées, nous obtenons :

$$\frac{Dq(\boldsymbol{\chi}, t)}{Dt} \triangleq \left. \frac{\partial q(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} = \left. \frac{\partial q(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \right|_{\boldsymbol{\chi}} + \underbrace{\left. \frac{\partial \boldsymbol{\chi}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}}}_{\equiv \mathbf{w}} \cdot \frac{\partial q(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial \boldsymbol{\chi}}. \quad (3.1)$$

La vitesse  $\mathbf{w}$  correspond à la vitesse des particules matérielles dans le domaine de référence. Considérons le

cas particulier où  $q(\boldsymbol{\chi}, t) = \mathbf{x}(\boldsymbol{\chi}, t)$ , par l'équation (3.1),

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} &= \left. \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t} \right|_{\boldsymbol{\chi}} + \mathbf{w} \cdot \nabla \mathbf{x} \\ \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}} &= \mathbf{w} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\chi}}. \end{aligned}$$

Afin de soulager les notations, il est utile de noter  $\mathbf{c} = \mathbf{v} - \hat{\mathbf{v}}$  représentant la vitesse relative entre la particule matérielle et le maillage. En pratique, le repère de référence est décrit par les coordonnées spatiales,  $\boldsymbol{\chi} = \boldsymbol{\chi}(\mathbf{x}, t)$ , il est alors possible de formuler l'équation (3.1) par <sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} \frac{Dq(\boldsymbol{\chi}, t)}{Dt} &= \left. \frac{\partial q(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \right|_{\boldsymbol{\chi}} + \mathbf{w} \cdot \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \boldsymbol{\chi}} \frac{\partial q(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial \mathbf{x}} \\ \boxed{\frac{Dq(\boldsymbol{\chi}, t)}{Dt} &= \underbrace{\left. \frac{\partial q(\boldsymbol{\chi}, t)}{\partial t} \right|_{\boldsymbol{\chi}}}_{\text{Variation locale}} + \underbrace{\mathbf{c} \cdot \nabla q(\boldsymbol{\chi}, t)}_{\text{Terme convectif}}} \end{aligned} \quad (3.2)$$

où  $\nabla$  est l'opérateur différentiel suivant  $\frac{\partial}{\partial x_i}$ . Cette dernière égalité est appelée le *Théorème fondamental de l'ALE* [Donea et al., 2004].

Intéressons-nous à la signification physique de ce théorème. La dérivée matérielle se décompose en 2 contributions, la première correspond à la variation locale de la quantité physique sur le domaine de référence, la seconde correspond à la variation de la quantité physique liée au déplacement de la particule matérielle par rapport au domaine de référence.

Par ailleurs, remarquons que les formulations de la dérivée matérielle selon l'approche Lagrangienne ou Eulérienne apparaissent comme des cas particuliers de la formulation dans un domaine arbitrairement mobile. Premièrement, si le domaine de référence est statique alors  $\hat{\mathbf{v}} = 0$ , par conséquent le domaine de référence et le domaine spatiale coïncide. Par ailleurs, l'expression de la dérivée matérielle en coordonnées spatiales est bien retrouvée. Deuxièmement, si le domaine de référence suit le domaine matérielle,  $\hat{\mathbf{v}} = \mathbf{v}$ , la vitesse relative  $\mathbf{c}$  est nulle et nous retrouvons l'expression Lagrangienne de la dérivée matérielle.

## 3.2 Lois de conservation

Cette section présente le développement des lois de conservation pour un fluide granulaire immergé sur le domaine de référence. En premier lieu, l'équation de continuité illustre la méthodologie générale aboutissant à la formulation locale. En deuxième lieu, la conservation de quantité de mouvement est présentée mettant en évidence l'utilisation du *Théorème fondamental de l'ALE*.

### 3.2.1 Équation de continuité

Cette section établit l'équation de continuité pour un écoulement granulaire immergé unidimensionnel. Considérons une tranche d'un matériau suffisamment large pour négliger toutes les fluctuations moléculaires. Afin de quantifier la proportion de fluide dans un volume de contrôle la porosité est utilisée. Celle-ci est définie comme la fraction volumique de fluide dans le volume de contrôle.

Soit un volume de référence se déplaçant à une vitesse  $\hat{v}$ , et le fluide doté d'une vitesse  $v$ . Le flux massique passant à l'interface  $x = a(t)$  est égale à  $\rho_a \phi_a c_a$ , tandis que le flux massique passant à l'interface en  $x = b(t)$  équivaut quant à lui à  $\rho_b \phi_b c_b$ . La variation de masse dans le volume de référence est donnée par <sup>2</sup> :

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_y \int_{a(t)}^{b(t)} \rho \phi dx = \rho_a \phi_a c_a - \rho_b \phi_b c_b$$

---

1. Nous omettons les coordonnées spatiales afin de ne pas alourdir les équations.  
2. Nous notons les variables sans leurs dépendances pour plus de lisibilité.

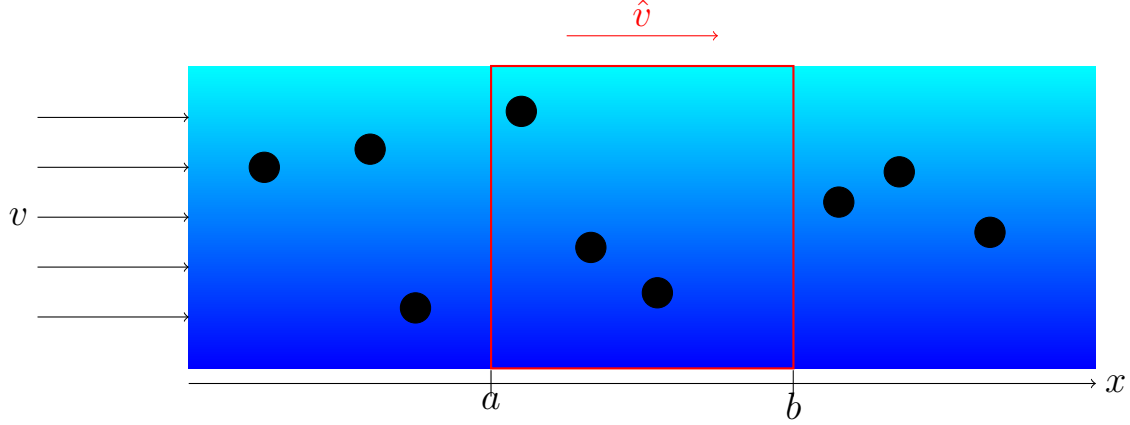


FIGURE 3.2 – Conservation de la masse unidimensionnel sur un volume de référence (rouge) se déplaçant à une vitesse  $\hat{v}$  pour un écoulement granulaire.

Le premier terme de l'équation se reformule à l'aide du *Théorème de Reynolds* [Belytschko et al., 2013] comme :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \Big|_y \int_{a(t)}^{b(t)} \rho \phi dx &= \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial(\rho\phi)}{\partial t} \Big|_y + \rho\phi \frac{\partial\hat{v}}{\partial x} dx \\ &= \int_{a(t)}^{b(t)} \phi \frac{\partial\rho}{\partial t} \Big|_y + \rho \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \Big|_y + \phi \frac{\partial\hat{v}}{\partial x} \right) dx. \end{aligned}$$

Par le théorème fondamental de l'analyse, le second terme devient :

$$\begin{aligned} \rho_a \phi_a c_a - \rho_b \phi_b c_b &= - \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial x} (\rho\phi c) dx \\ &= - \int_{a(t)}^{b(t)} \phi c \frac{\partial\rho}{\partial x} + \rho \frac{\partial}{\partial x} (\phi c) dx. \end{aligned}$$

En rassemblant les différents termes, nous obtenons l'équation de continuité sous forme intégrale dans le domaine de référence :

$$\int_{a(t)}^{b(t)} \phi \left( \frac{\partial\rho}{\partial t} \Big|_y + c \frac{\partial\rho}{\partial x} \right) + \rho \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \Big|_y + \phi \frac{\partial\hat{v}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} (\phi c) \right) dx = 0$$

Par l'hypothèse des milieux continus, et comme la porosité  $\phi$  est supposée continue, l'intégrale d'une fonction continue est nulle partout sur son domaine d'intégration si son intégrand est nul partout sur le domaine d'intégration. Comme le domaine d'intégration est quelconque car  $a(t)$  et  $b(t)$  le sont, ils en résultent que l'intégrand est nul partout. La formulation locale est décrite par :

$$\phi \left( \frac{\partial\rho}{\partial t} \Big|_y + c \frac{\partial\rho}{\partial x} \right) + \rho \left( \frac{\partial\phi}{\partial t} \Big|_y + c \frac{\partial\phi}{\partial x} + \phi \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0$$

En arrangeant les termes, nous obtenons la formulation de l'équation de continuité pour un écoulement granulaire immergé.

$$\phi \frac{D\rho}{Dt} + \rho \left( \frac{D\phi}{Dt} + \phi \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0,$$

le terme bleu correspond à la dérivée matérielle de la densité, le terme rouge est la contribution liée à la présence de la phase solide, tandis que le dernier terme est celui habituellement rencontré dans la formulation

Eulérienne moyenné par la porosité. Remarquons que pour formuler le problème dans le repère mobile, il suffit de décrire la dérivée matérielle à l'aide du *Théorème fondamental de l'ALE*. La conservation de la masse peut s'étendre à plusieurs dimensions. Le cas d'un fluide incompressible étant considéré dans la suite des applications, la formulation de l'équation de continuité devient,

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{c} \cdot \nabla \phi + \phi \nabla \cdot \mathbf{v} = 0$$

En introduisant la vitesse moyennée par la porosité  $\mathbf{u} = \phi \mathbf{v}$ , l'équation prend la forme

$$\boxed{\frac{\partial \phi}{\partial t} - \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla \phi + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0} \quad (3.3)$$

### 3.2.2 Quantité de mouvement

La formulation de l'équation de continuité nous a permis de mettre en évidence l'une des façons classiques pour dériver les formulations locales. En utilisant les équations de Navier-Stokes moyennées par la porosité [Anderson and Jackson, 1968], [Constant et al., 2019], nous pouvons formuler directement la conservation de la quantité de mouvement dans le repère de référence. Rappelons celle-ci dans le domaine spatial,

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}}{\phi} \right) = \nabla \cdot [2\mu\phi \mathbf{d}(\mathbf{u}) - p\mathbf{I}] + \mathbf{f} + \phi\rho\mathbf{g},$$

où  $\rho$  est la densité du fluide,  $\mathbf{u}$  la vitesse matérielle moyennée par la porosité  $\phi$ ,  $\mathbf{f}$  les forces provenant du solide agissant sur le fluide et la gravité  $\mathbf{g}$ . De plus,  $\mu$  est viscosité dynamique du fluide,  $\mathbf{d}(\mathbf{u})$  le tenseur des taux de déformation,  $p$  la pression et  $\mathbf{I}$  le tenseur identité. Pour le cas d'un fluide Newtonien, le tenseur des taux de déformation ne dépend que du gradient de vitesse :

$$\mathbf{d}(\mathbf{u}) = \left( \left( \nabla \frac{\mathbf{u}}{\phi} \right)^T + \nabla \frac{\mathbf{u}}{\phi} \right).$$

Le modèle s'exprime dans le domaine en référence en utilisant la relation suivante, résultat direct du théorème fondamental de l'ALE (3.2) :

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} &= \left. \frac{\partial \phi}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla \phi \\ \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} &= \left. \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \right|_{\mathbf{x}} - \hat{\mathbf{v}} \cdot \nabla \mathbf{u} \end{aligned}$$

En utilisant la vitesse du maillage moyennée,  $\hat{\mathbf{u}} = \phi \hat{\mathbf{v}}$ , le modèle dans le domaine de référence est obtenu à l'équation (3.4).

$$\boxed{\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \frac{\hat{\mathbf{u}}}{\phi} \cdot \nabla \phi + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\hat{\mathbf{u}}}{\phi} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}}{\phi} \right) = \nabla \cdot [2\mu\phi \mathbf{d}(\mathbf{u}) - p\mathbf{I}] + \mathbf{f} + \phi\rho\mathbf{g} \end{cases}} \quad (3.4)$$

Remarquons que si le domaine de référence est statique  $\hat{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ , les équations sont strictement identiques à celles présentées par [Anderson and Jackson, 1968] et [Constant et al., 2019]. Ce modèle permet donc de prendre en compte le déplacement des noeuds du maillage dans les équations de conservation.

### 3.3 Procédure de résolution

À ce stade, nous avons tous les outils en main afin de simuler numériquement un écoulement en surface libre. Cette section présentera la méthodologie employée ainsi qu'un exemple d'application.

#### Calcul de la porosité

La conservation de la masse dans le domaine de référence implique le calcul du gradient de la porosité. Cependant afin d'éviter son calcul, la porosité est calculée après chaque régularisation du domaine. De ce fait, la résolution de la conservation de la masse n'est pas directement modifiée. Par contre, la conservation de la quantité de mouvement est adaptée afin de prendre en compte la déformation du domaine par la formulation arbitraire de Lagrange-Euler (3.4).

#### Formulation du problème complet

Le problème complet d'un écoulement en surface libre dans un bassin soumis à un déplacement vertical caractérisé par une vitesse  $v_b$  est exprimé ci-dessous, équation (3.5).

Déterminer  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t)$  telles que

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\hat{\mathbf{u}}}{\phi} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}}{\phi} \right) = \nabla \cdot [2\mu\phi\mathbf{d}(\mathbf{u}) - p\mathbf{I}] + \mathbf{f} + \phi\rho\mathbf{g} \end{cases}$$

soumis à la condition dynamique,

$$p = -\gamma\kappa + p_{ext}, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_f.$$

Déterminer la hauteur  $h(x, t)$  par la condition cinématique,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\tilde{\mathbf{u}}}{\phi} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{n} = \left( -\frac{\partial h}{\partial x}, 1 \right), \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_f$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}$  la vitesse corrigée par

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + v_b \hat{\mathbf{e}}_y - \frac{1}{L} \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dl \, \hat{\mathbf{e}}_y \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_f.$$

(3.5)

La résolution des lois de conservation se fait par la méthode des éléments finis en imposant la condition dynamique sur le champ de pression à la surface libre. L'implémentation de celles-ci a du être modifiée afin de prendre en compte la déformation du maillage. S'ensuit, le calcul de la position de la surface libre par la condition cinématique également résolue par la méthode des éléments finis. La vitesse verticale étant corrigée afin d'assurer la conservation du volume. Le maillage est ensuite déformé par la régularisation présentée au chapitre précédent. La procédure de résolution est décrite à l'algorithme 1. Son implémentation a pu être effectuée efficacement en Python.

---

**Algorithme 1** : Procédure de calcul de surface libre

---

```
Calcul de  $\alpha$  pour chaque noeud  $\rightarrow \alpha$ ;  
 $n = 0$ ;  
while  $t < t_{fin}$  do  
  Intégration temporelle  $\rightarrow \mathbf{u}^n, p^n$ ;  
  if Mouvement vertical then  
    Obtention de la vitesse du domaine  $\rightarrow v_b$ ;  
    Déplacement des noeuds du fond du bassin  $\rightarrow y_0^n$ ;  
  end  
  Correction des vitesses  $\rightarrow \tilde{\mathbf{u}}$ ;  
  Calcul du déplacement de la surface libre  $\rightarrow h^n$ ;  
  Régularisation du domaine  $\rightarrow \mathbf{x}^n$ ;  
  Calcul de la vitesse du maillage  $\rightarrow \hat{\mathbf{u}}^n$ ;  
  Calcul de la porosité  $\rightarrow \phi$ ;  
   $n = n + 1$ ;  
end
```

---

### Application

Considérons un fluide et un lit granulaire au repos. Deux cylindres mobiles sont placés dans le domaine afin d'entraîner un mouvement. Les cylindres se mettent en mouvement symétriquement entraînant le mouvement du fluide et le soulèvement des grains. Le problème est décrit au tableau (3.1). Afin de décrire la rotation des cylindres, le vecteur unitaire perpendiculaire au rayon  $\hat{\mathbf{e}}_\theta$  est utilisé,  $\hat{\mathbf{e}}_\theta = -\sin(\theta)\hat{\mathbf{e}}_x + \cos(\theta)\hat{\mathbf{e}}_y$ .

Afin de ne pas déformer les noeuds associés aux cylindres, la régularisation est effectuée uniquement sur les noeuds placés au-dessus de ceux-ci. L'une des forces de la description arbitraire de Lagrange-Euler est de permettre le déplacement tout à fait arbitraire des noeuds et donc d'autoriser ces choix purement arbitraires de régularisation. Le maillage initial, est décrit à la figure (3.3). La rotation des cylindres ainsi que le soulèvement des grains sont observés à la figure (3.4). Par la rotation des cylindres, deux cellules de convection se forment, ce résultat est visible à la figure (3.5).

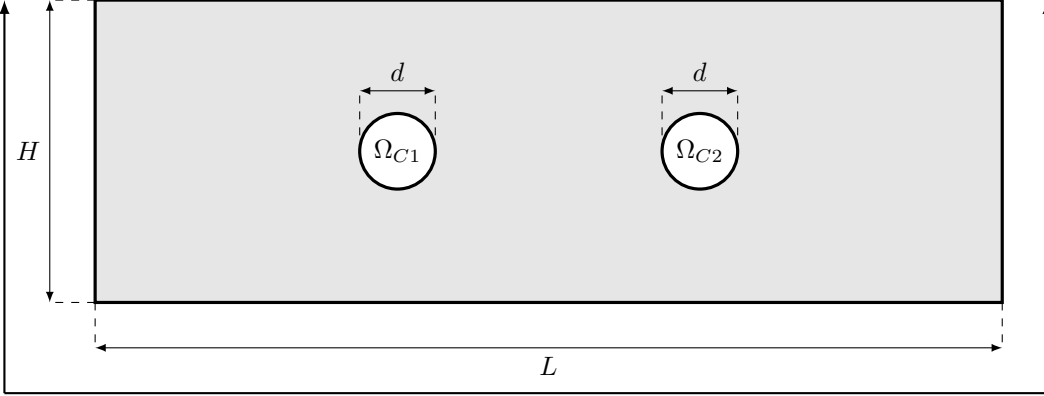
| Géométrie   |   |   |
|---|---|---|
| $\partial\Omega_f$  |   |   |
|   |   |   |
| $\partial\Omega_w$  |   |   |
| Conditions frontières   |   |   |
| $\partial\Omega_f : p = 0$ $\partial\Omega_{C_1} : \mathbf{u} = -A \sin(\omega t) \hat{\mathbf{e}}_\theta$<br>$\partial\Omega_w : \mathbf{u} = \mathbf{0}$ $\partial\Omega_{C_2} : \mathbf{u} = A \sin(\omega t) \hat{\mathbf{e}}_\theta$ |   |   |
| Paramètres physiques  | Paramètres géométriques   | Paramètres numériques   |
| $\rho = 1 \text{ kg m}^{-3}$<br>$\nu = 1 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1}$<br>$\rho_p = 1.5 \text{ kg m}$<br>$\omega = \frac{2\pi}{75} \text{ rad s}^{-1}$<br>$A = 0.35 \text{ m s}^{-1}$<br>$g = 9.81 \text{ m s}^{-2}$                        | $H = 2 \text{ m}$<br>$L = 6 \text{ m}$<br>$d = 0.2 \text{ m}$<br>$H_p = 0.2 \text{ m}$<br>$L_p = 6 \text{ m}$ | $\Delta t = 0.05 \text{ s}$<br>$t_{End} = 500 \text{ s}$<br># éléments = 1734<br># noeuds = 861 |

TABLE 3.1 – Données de l'application.

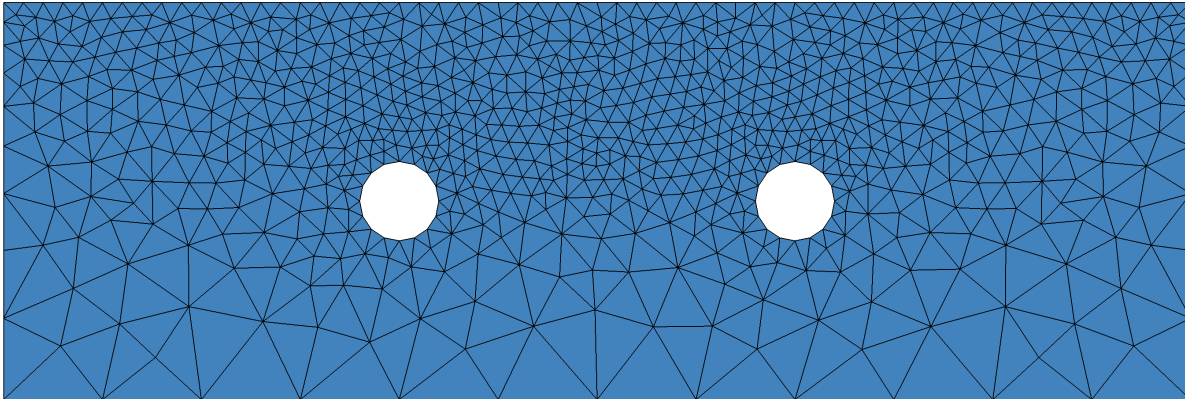
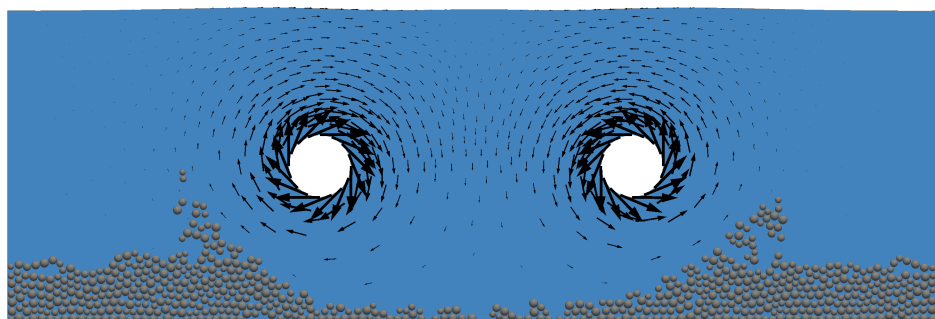
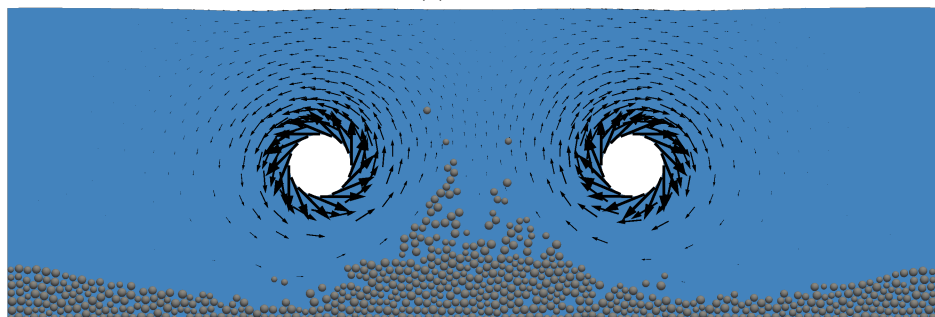


FIGURE 3.3 – Application : maillage généré par GMSH.

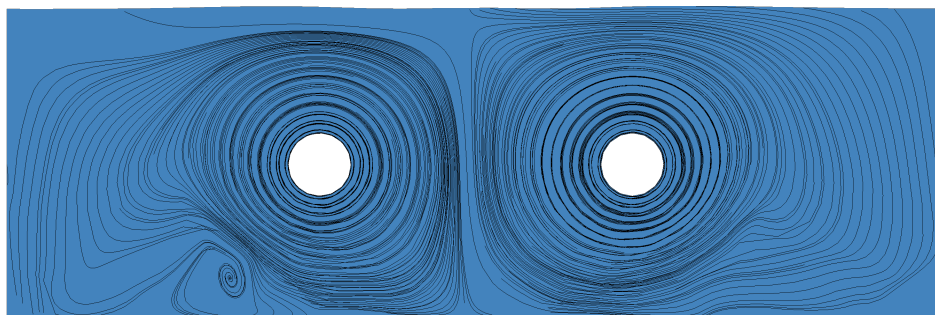


(a)  $t = 25s$

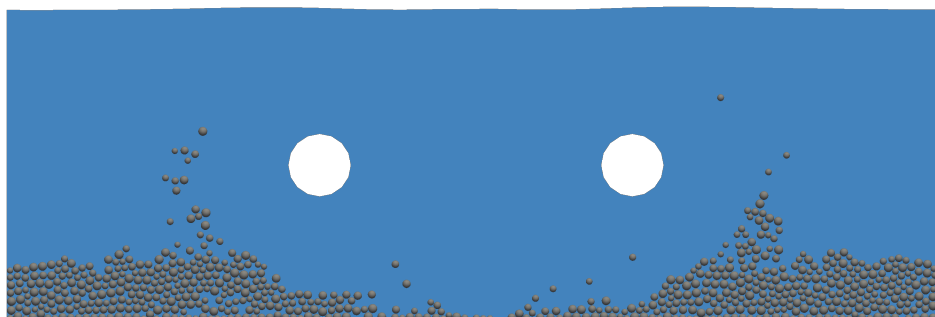


(b)  $t = 62.5s$

FIGURE 3.4 – Application : Soulèvement des grains. Les vecteurs représentent la vitesse, l'absence d'échelle se justifie par l'approche purement qualitative de cette figure.



(a) Lignes matérielles mettant en évidence les deux cellules de convection.



(b) Position des grains.

FIGURE 3.5 – Application : Cellules de convection en  $t = 250s$ .



# Chapitre 4

## Vagues de Faraday

Ce chapitre présente la modélisation des vagues de Faraday dans un fluide granulaire immergé ainsi que les résultats numériques. Par l'oscillation verticale, deux phénomènes peuvent avoir lieu. La surface libre peut devenir instable menant à la formation des vagues de Faraday. Cette instabilité se développe si l'accélération est suffisamment importante pour une certaine profondeur du domaine [Ubal et al., 2003] et pour des fluides donnés [Shats et al., 2012]. Par ailleurs, les particules peuvent s'agencer sous forme de cône si l'accélération est suffisante [Milburn et al., 2005]. Ce phénomène est connu sous le nom de cône de Faraday ("*Faraday heap*") [Clément, 2010]. Les interactions entre la phase solide et la phase fluide complexifient la formation de ces deux phénomènes. En effet, la formation des oscillations à la surface libre peut avoir un impact non négligeable sur le mouvement des particules par la formation de cellules de convection. Ce chapitre s'intéressera premièrement à la formation des vagues de Faraday de faible amplitude, l'influence du milieu granulaire sera alors discutée. Ensuite, nous nous intéresserons à l'apparition d'amas de grains ; leur formation sera mise en évidence par l'analyse des vortex apparaissant dans le fluide. Enfin, une analyse de stabilité permettra d'expliquer la formation des vagues de Faraday malgré la présence d'un lit granulaire.

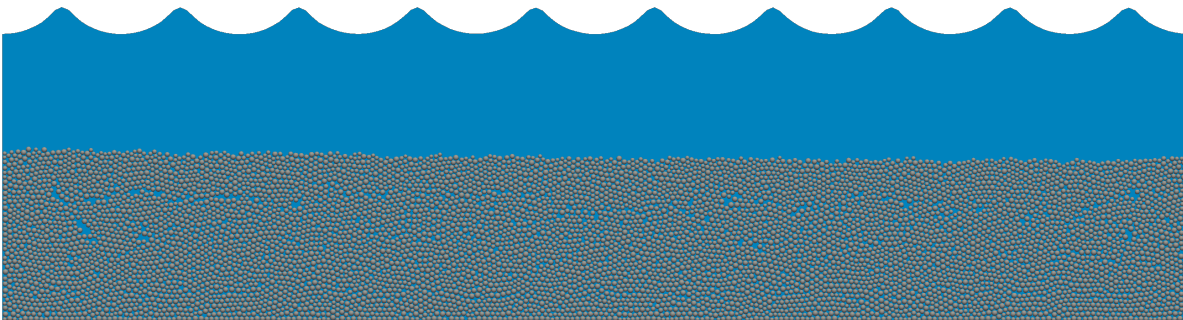


FIGURE 4.1 – Formation des vagues de Faraday dans un milieu granulaire immergé.

### 4.1 Description

#### Formation des vagues de Faraday

Lorsque l'accélération verticale subie par le bassin dépasse une valeur critique  $a_c$ , la formation d'oscillations est observée à la surface libre. Ce phénomène s'explique par le développement d'une résonance entre le fond du bassin et la surface libre [Kumar and Tuckerman, 1994]. Toutefois, bien que l'origine du phénomène soit comprise, il n'y a, à ma connaissance, aucune explication permettant la description des structures se formant par les oscillations. Les structures étant un phénomène purement tri-dimensionnel, nous ne pouvons observer ce résultat dans nos simulations. Il convient de définir une mesure de l'accélération verticale par un nombre

adimensionnel

$$\Gamma = \frac{a \omega^2}{g}$$

où  $a$  est l'amplitude du déplacement vertical et  $\omega$  la pulsation de l'oscillation imposée au bassin. Nous nous intéresserons à déterminer numériquement la valeur critique de ce paramètre afin de développer l'instabilité de Faraday. Notons qu'il n'est pas nécessaire d'imposer une accélération supérieure à la gravité afin de former des vagues de Faraday.

### Formations de cônes de Faraday

Lorsque l'accélération verticale imposée est supérieure à la gravité, le lit granulaire se soulève permettant une fluidification du milieu. Lorsque le lit granulaire, immergé dans un fluide, e.g. de l'eau, est en suspension, le fluide peut alors se glisser au travers des particules afin de remplir les espaces générés. Le fluide aura tendance à s'infiltrer là où le lit granulaire est le moins profond. Cela a pour conséquence que chaque asymétrie présente au niveau du lit granulaire se verra renforcée menant à la formation d'un cône [Clément, 2010]. Une étude détaillée du problème est proposée par [Milburn et al., 2005]. Afin d'imposer l'accélération supérieure à la gravité  $\Gamma > 1$ , il est nécessaire d'adapter la pulsation et l'amplitude de l'oscillation verticale.

## 4.2 Résultats

Nous allons réaliser différentes expériences numériques afin d'analyser la formation des vagues de Faraday dans un fluide granulaire immergé. Nous considérons un bassin rectangulaire de longueur  $L$  et de hauteur  $H$  dans lequel baigne de l'eau et des particules. Les particules sont de rayon  $r_p$  et disposées uniformément sur une longueur  $L_p$  et sur une hauteur  $H_p$ . Le réservoir est agité verticalement à une fréquence  $f$ . La position du fond du bassin est décrite par

$$y_0(x, t) = -a \cos(\omega t)$$

où  $a$  l'amplitude de l'oscillation., et  $\omega$  la pulsation définie par  $\omega = 2\pi f$ .

Premièrement, nous nous intéresserons à déterminer l'amplitude critique pour une géométrie fixée. Cette première expérience permettra de mettre en lumière les différentes étapes de la simulation. De plus, nous vérifierons que la fréquence de l'onde induite est équivalente à la moitié de la fréquence imposée. Ensuite, nous nous intéresserons à la formation des cônes de Faraday en modifiant la géométrie du problème.

### Conditions frontières

Afin de modéliser le déplacement vertical du bassin, les conditions frontières suivantes sont prescrites (4.1). Celles-ci consistent à imposer la vitesse du bassin sur les parois et à déterminer l'évolution de la surface libre par la condition cinématique et dynamique.

$$\begin{cases} u = 0, & v = a\omega \sin(\omega t), & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_w \\ \frac{\partial h}{\partial t} + u \frac{\partial h}{\partial x} - v = 0 & & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_f \\ p = -\gamma\kappa + p_{ext}, & & \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_f \end{cases} \quad (4.1)$$

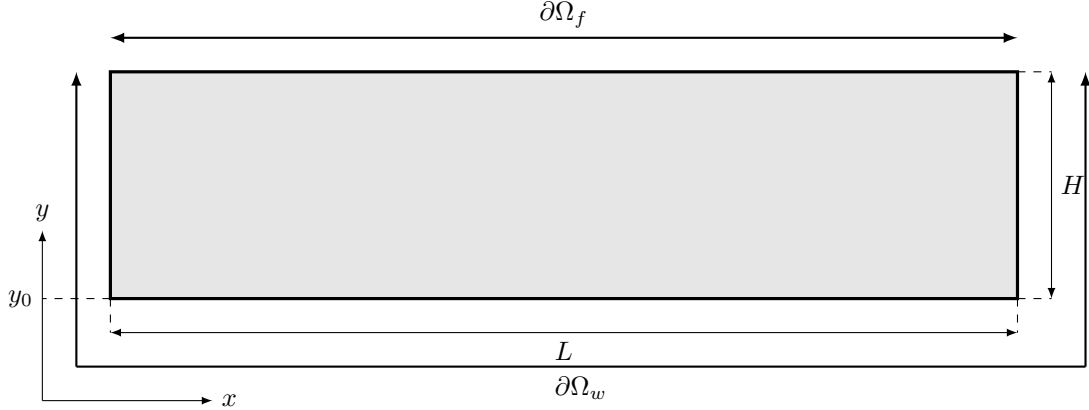


FIGURE 4.2 – Géométrie du bassin.

### 4.2.1 Accélération critique

Afin d’analyser l’accélération critique, nous faisons varier l’accélération verticale en fixant la géométrie et la fréquence ainsi que les propriétés du fluide. Celles-ci sont présentées dans le tableau (4.1). La simulation peut se décomposer en trois phases.

**Formation du dépôt :** les grains disposés uniformément chutent dans le bassin immobile. Un lit granulaire se forme. Après une seconde, le bassin est mis en mouvement. L’instabilité de Faraday n’est pas encore présente.

**Développement de l’instabilité :** le bassin en mouvement mène à la formation d’oscillations à la surface libre dont l’amplitude augmente.

**Oscillations uniformes :** Les vagues de Faraday sont entretenues par le mouvement du bassin, leur amplitude est constante.

Les étapes de la simulation sont décrites en détail pour une oscillation verticale d’amplitude  $a = 5 \cdot 10^{-4}$  m. Afin d’éviter une cristallisation du milieu granulaire, le rayon des particules est décrit par  $r_p = R_p - \epsilon$ , avec  $\epsilon$  un paramètre uniformément distribué entre 0 et 0.8 mm, leur répartition est illustrée à la figure (4.4). Par ailleurs, afin de déstabiliser la surface libre, une perturbation de faible amplitude est appliquée. Son impact sur le comportement global est négligeable. Le maillage initial est décrit à la figure (4.3).

| Paramètres Physiques                | Paramètres géométriques | Paramètres numériques                     |
|-------------------------------------|-------------------------|---|
| $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$     | $L = 1 \text{ m}$       | $\Delta t = 1.25 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ |
| $\nu = 10^{-6} \text{ Pa s}$        | $H = 0.25 \text{ m}$    | $t_{end} = 25$                            |
| $\gamma = 0.07 \text{ N m}^{-1}$    | $L_p = 1 \text{ m}$     | # éléments = 3898                         |
| $\rho_p = 1100 \text{ kg m}^{-3}$   | $H_p = 0.20 \text{ m}$  | # noeuds = 1948                           |
| $R_p = 2.5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$ |                         |   |
| $f = 10 \text{ Hz}$                 |                         |   |

TABLE 4.1 – Mesure de l’amplitude critique. Paramètres physiques, géométriques et numériques

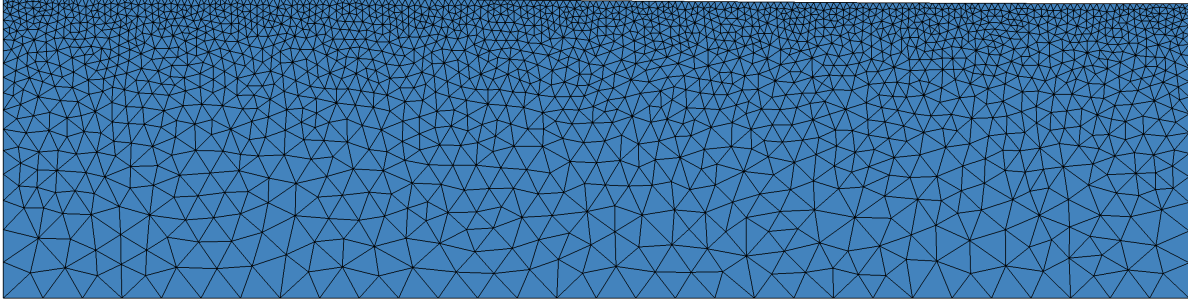


FIGURE 4.3 – Mesure de l’amplitude critique. Maillage initial pour la mesure de l’amplitude critique.

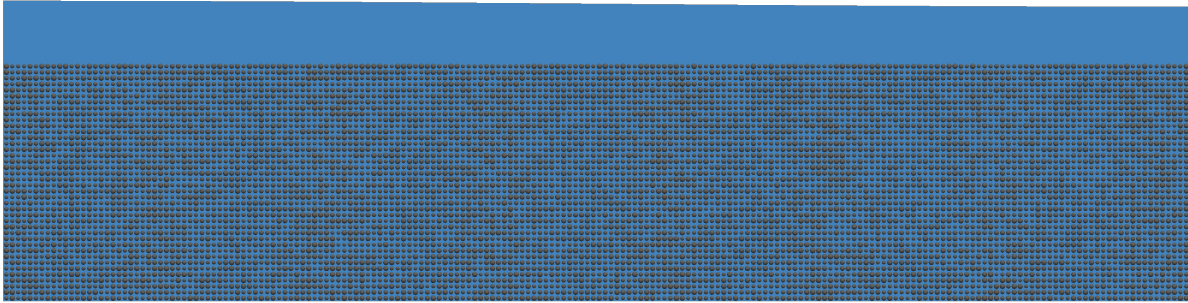


FIGURE 4.4 – Mesure de l’amplitude critique. Disposition initiale des particules.

### Formation du dépôt

Initialement, le bassin est statique. Nous maintenons sa position la première seconde afin de permettre aux grains de former un dépôt. Après une seconde, le bassin est mis en mouvement bien que le dépôt ne soit pas encore compact, voir figure (4.5). Cela n’a pas d’importance pour la suite de la simulation car le développement de l’instabilité n’apparaît qu’après quelques secondes. Le dépôt a donc le temps de se former avant l’apparition des vagues de Faraday. La pression est alors majoritairement hydrostatique, visible à la figure (4.6). Cette phase dure 5 secondes. A partir de ce moment, les oscillations commencent à se former. Il est important de remarquer qu’une onde de pression se développe dans le fond du dépôt. La densité des grains étant proche de celle du fluide, ceux-ci ressentent fortement l’influence du fluide. De plus, lors du mouvement des grains, le fluide peut s’infiltrer entre les grains créant des zones de surpression et de dépression. Cet effet est visible aux figures (4.8), (4.9)<sup>1</sup> et (4.7).

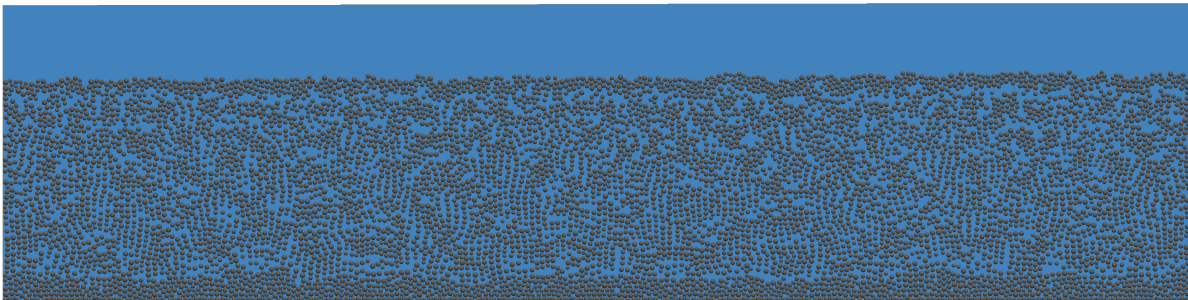


FIGURE 4.5 – Disposition des grains en  $t = 0.97625s$ .

---

1. Il s’agit du champ de vitesse du fluide et non de la vitesse pondérée par la porosité.

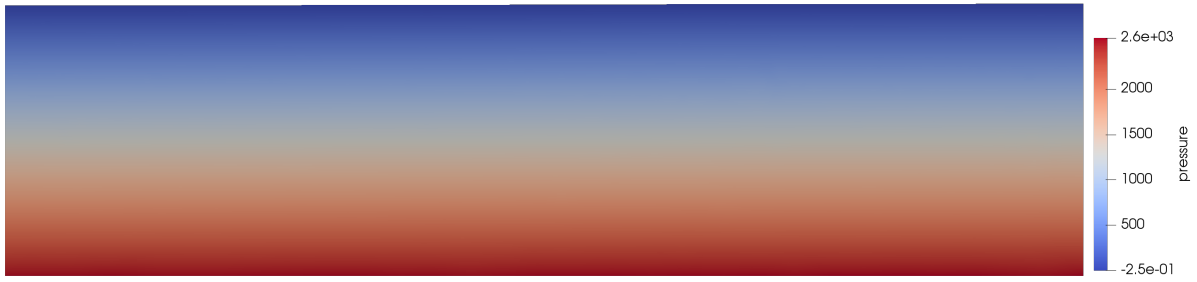


FIGURE 4.6 – Pression du fluide en  $t = 0.97625s$ .

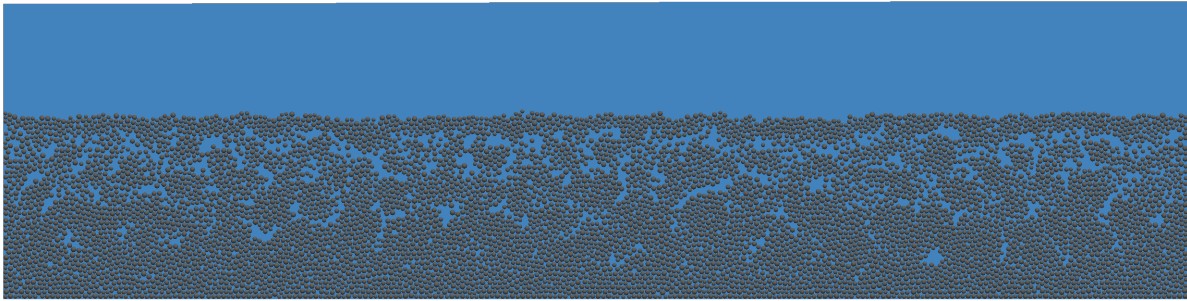


FIGURE 4.7 – Disposition des grains en  $t = 4.97625s$ .

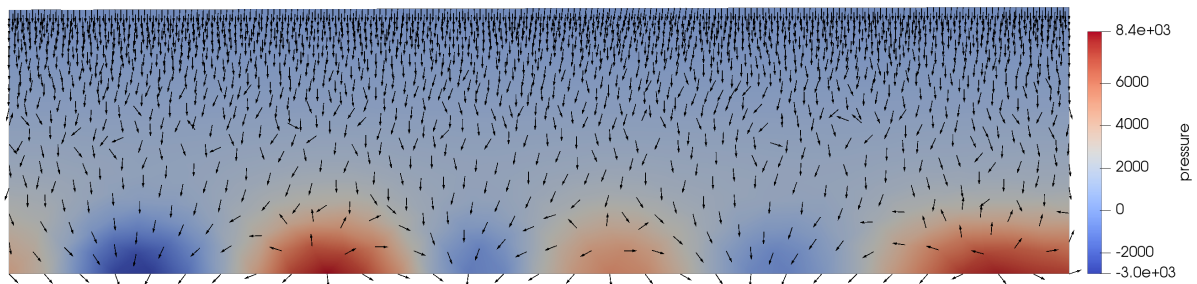


FIGURE 4.8 – Pression du fluide en 4.97625s. La direction du champ de vitesse est indiquée par les flèches.

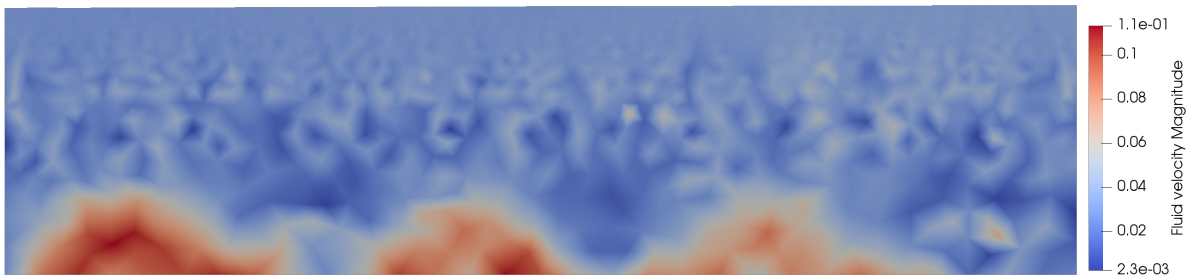


FIGURE 4.9 – Champ de vitesse du fluide en 4.97625s.

### Développement de l'instabilité

Suite à à l'oscillation verticale, l'instabilité à la surface libre se développe par résonance. Des oscillations d'amplitude croissante se forment. La formation de l'instabilité est visible à la figure (4.10). Les grains

maintiennent une structure de dépôt malgré la présence de l'onde de pression (4.12). La vitesse du fluide n'est pas suffisante pour déformer la structure (4.11). Après dix secondes de simulation, l'amplitude des vagues atteint sa valeur maximale et la dernière phase débute.

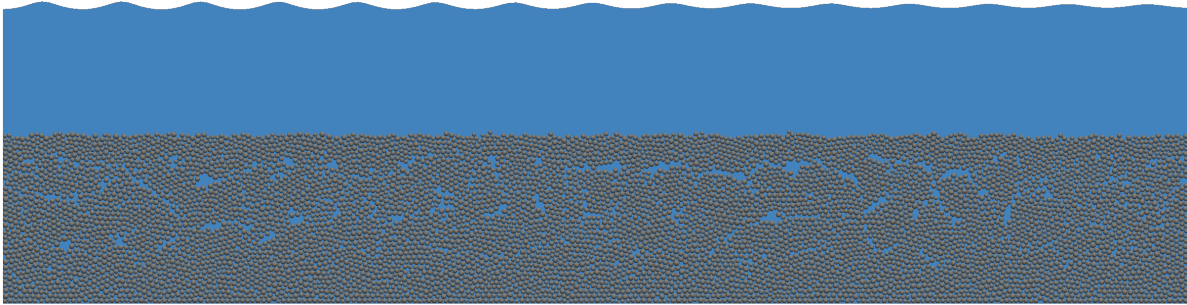


FIGURE 4.10 – Disposition des grains en  $t = 7.97625s$ .

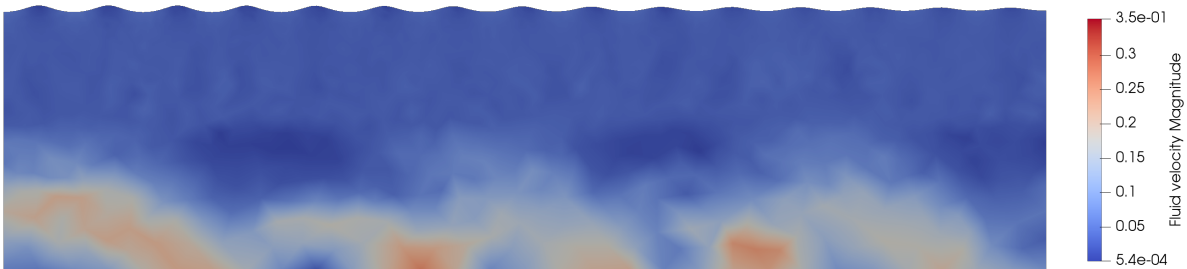


FIGURE 4.11 – Champ de vitesse du fluide en  $t = 7.97625s$ .

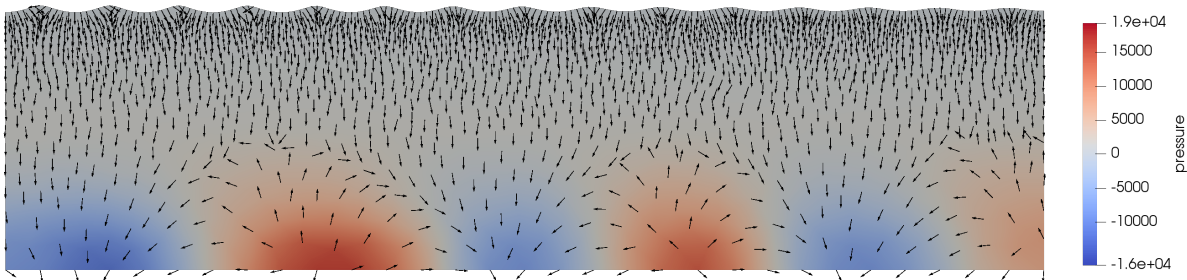


FIGURE 4.12 – Champ de pression du fluide en  $t = 7.97625s$ . Les flèches représentent la direction du vecteur vitesse.

### Oscillations uniformes

Après 8 secondes de simulation, les vagues de Faraday sont uniformes. Dès lors, il est intéressant de vérifier que la fréquence de l'oscillation induite correspond à la moitié de la fréquence de l'oscillation verticale. Pour ce faire, nous calculons la hauteur du point médian. En comparant la position du bassin avec la position de ce point, nous obtenons la figure (4.13) validant le résultat expérimental. Le mouvement de la surface libre ne permet pas le mouvement des particules, celles-ci restent agglomérées dans le fond du bassin, figure (4.14). L'onde de pression semble également s'être stabilisée, figures (4.16) et (4.15).

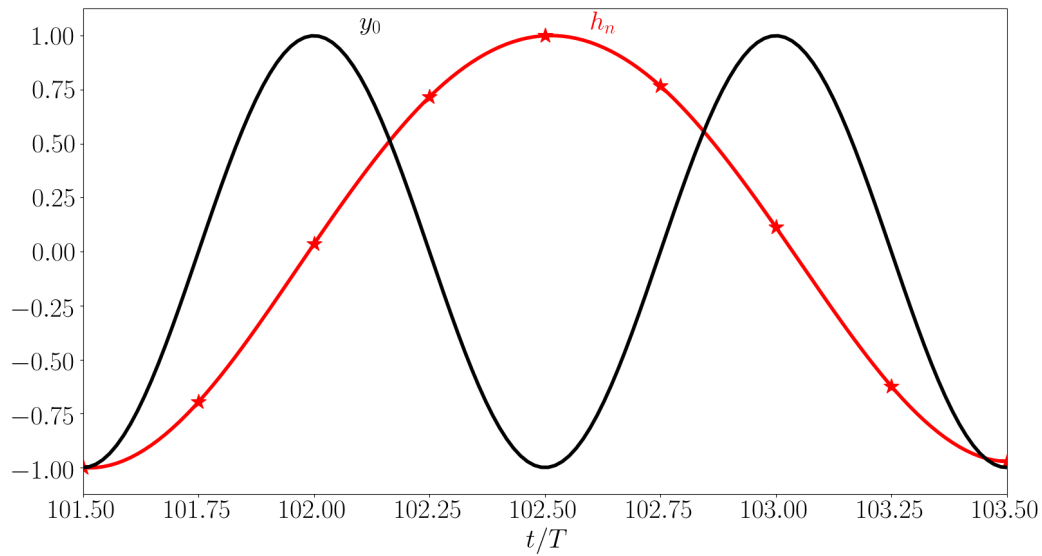


FIGURE 4.13 – Estimation de la fréquence des oscillations induites au noeud médian  $i = 91$ . Les étoiles rouges correspondent à l’amplitude mesurée de la surface libre, normalisée afin que son maximum et son minimum soient respectivement 1 et  $-1$ . La courbe rouge est une interpolation de cette amplitude par des splines cubiques. La courbe noir correspond à l’oscillation imposée au bassin adimensionné par son amplitude.

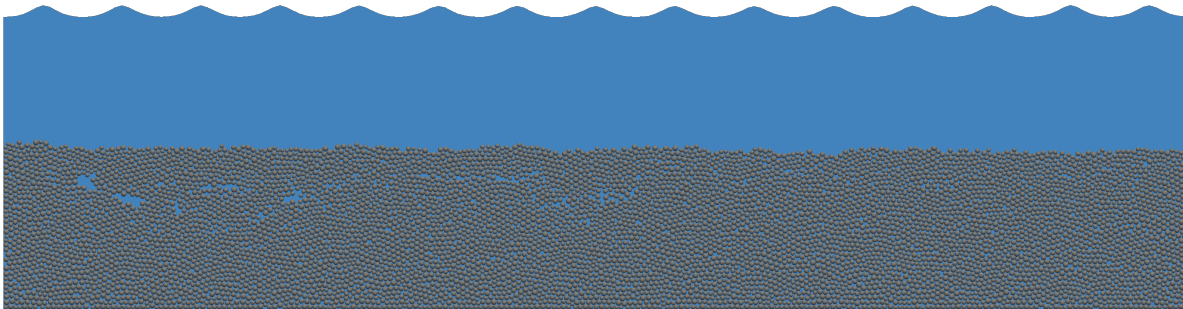


FIGURE 4.14 – Disposition des grains en  $t = 24.9762s$ .

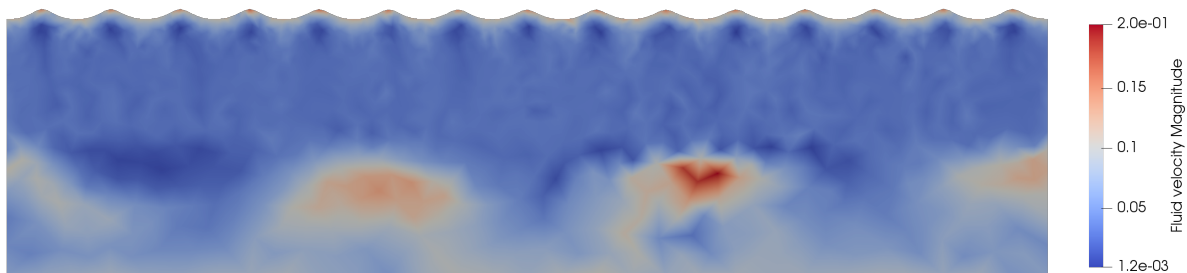


FIGURE 4.15 – Champ de vitesse du fluide en  $t = 24.9762s$ .

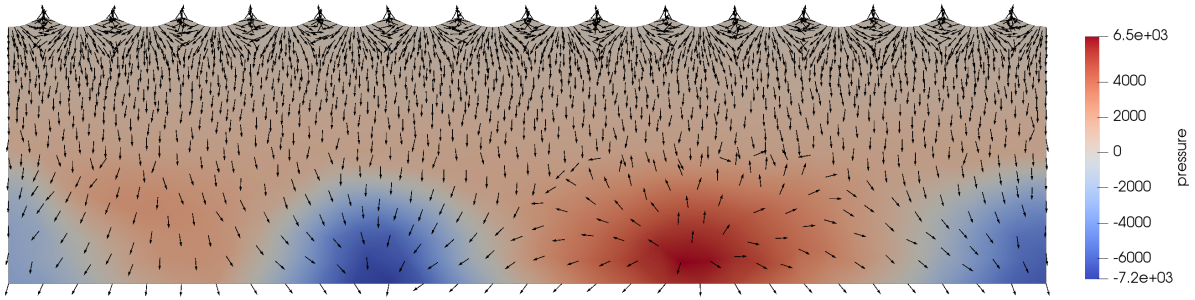


FIGURE 4.16 – Champ de pression du fluide en  $t = 24.9762s$ . Les flèches représentent la direction du vecteur vitesse.

### Onde de pression

La formation de l'onde de pression apparaissant dans le fond du dépôt semble liée au rapport de densité entre le fluide et les grains. Lorsque leurs densités sont proches, le fluide est capable de déplacer plus facilement les grains. Le mouvement de ceux-ci mène à de nombreuses collisions créant les zones de pression, voir figure (4.16). En considérant des grains dont la densité est bien plus importante que le fluide, ceux-ci ne pourront se mettre en mouvement aussi simplement. Dès lors, le dépôt sera bien plus compact et interagira très faiblement avec le fluide. Cette situation ne mène pas au développement d'une onde de pression. En considérant une densité des particules de  $8900 \text{ kg m}^{-3}$ , nous n'observons pas le développement de l'onde de pression dans le fond du bassin, voir figure (4.17).

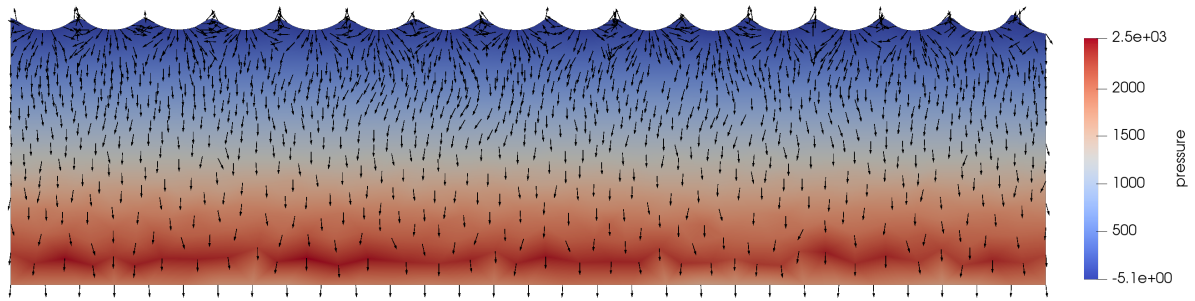
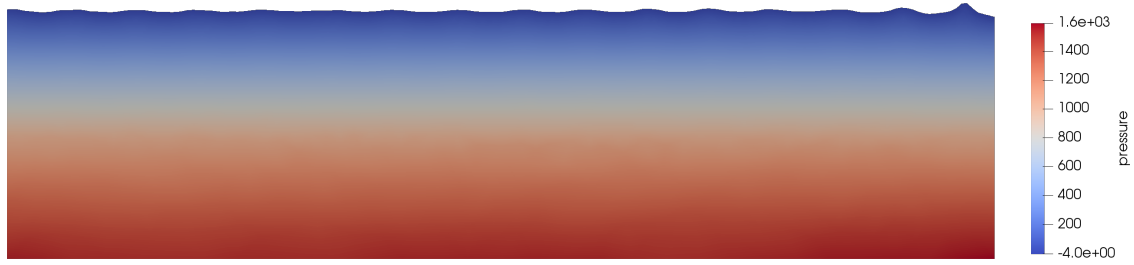


FIGURE 4.17 – Champ de pression en  $t = 24.9762s$ . Les flèches représentent la direction du vecteur vitesse.

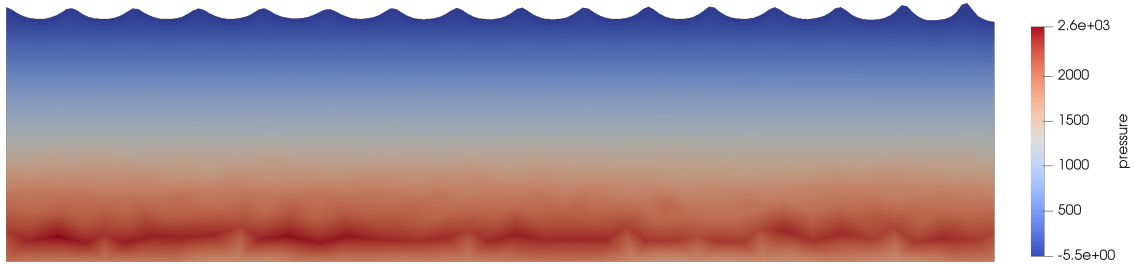
De plus, remarquons que la pression varie verticalement par l'oscillation du bassin. En effet, il est équivalent de considérer un référentiel attaché au bassin et de modifier l'action de la gravité. Dès lors, la pression à l'équilibre est définie par

$$p_{\text{equilibre}} = \rho(g - a\omega^2 \cos(\omega t))(H - y).$$

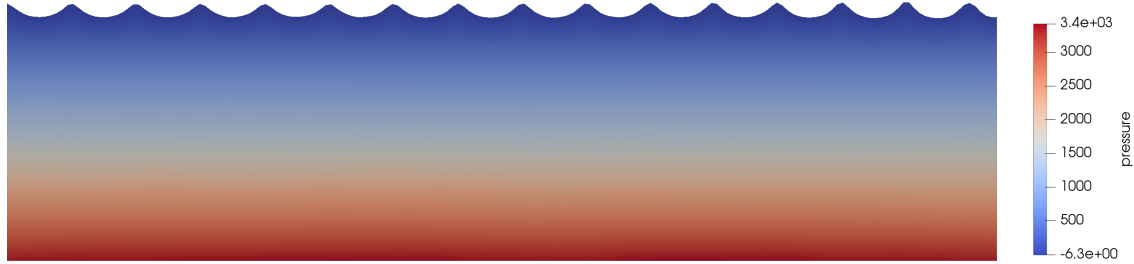
Ce résultat est confirmé en considérant des grains de densité  $8900 \text{ kg m}^{-3}$ , voir figure (4.18).



(a) Champ de pression en  $t = 24.7512s$ .



(b) Champ de pression en  $t = 24.7762s$ .



(c) Champ de pression en  $t = 24.8012s$ .

FIGURE 4.18 – Évolution de la pression pour des particules de densité  $\rho_p = 8900 \text{ kg m}^{-3}$  et un fluide de densité  $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$ .

### Calcul de l'accélération critique

En effectuant la simulation pour différentes amplitudes verticales, nous obtenons le graphe (4.19) permettant d'estimer l'accélération critique. En définissant l'apparition des oscillations pour une amplitude maximale  $A/H$  valant 0.01, nous obtenons une accélération critique de  $\Gamma_c \approx 0.134$ . Pour une fréquence  $f = 10 \text{ Hz}$ , cela correspond à imposer un déplacement d'amplitude  $a = a_c \approx 3.33 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ .

Afin de mesurer l'amplitude des oscillations à la surface libre, nous calculons la hauteur des noeuds s'y trouvant à laquelle nous retirons la hauteur initiale. De légères variations de la hauteur de la surface libre peuvent apparaître ce qui explique pourquoi les amplitudes mesurées ne sont pas strictement nulles lorsque l'accélération est inférieure à l'accélération critique.

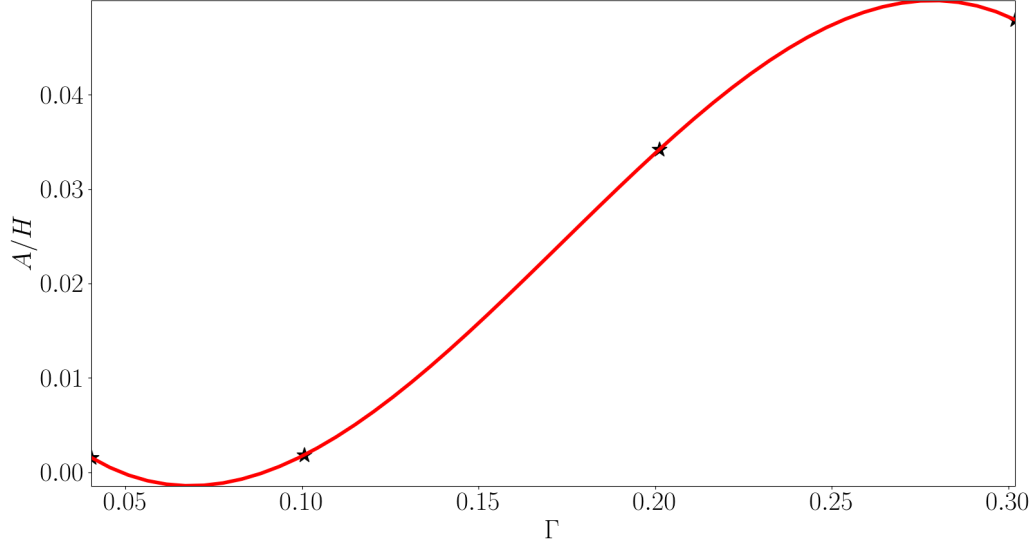


FIGURE 4.19 – Estimation de l’amplitude critique. Les étoiles noires correspondent aux valeurs numériques de l’amplitude maximale mesurée à la surface libre. En rouge, une interpolation par un polynôme de degré trois permettant d’estimer l’accélération critique.

#### 4.2.2 Formation des cônes de Faraday

Afin de mettre en évidence la formation des cônes de Faraday, nous construisons une expérience numérique différente dont les valeurs sont données au tableau (4.2). Les dimensions du bassin sont réduites, nous permettant d’imposer une oscillation verticale bien plus importante, le but étant d’obtenir une accélération supérieure à la gravité  $\Gamma > 1$ . L’accélération dépendant de la pulsation quadratiquement, il est judicieux de jouer sur ce paramètre. Afin d’éviter la formation de structure cristalline au niveau des grains, le paramètre  $\epsilon$  est réparti uniformément de 0 à 0.07mm. De cette façon, les particules sont polydisperses. La fréquence est fixée à 25 Hertz et l’amplitude de l’oscillation vertical à 0.5 mm, ce choix de paramètres permet d’obtenir une accélération  $\Gamma \approx 1.26$ .

| Paramètres Physiques                | Paramètres géométriques | Paramètres numériques                  |
|-------------------------------------|-------------------------|--|
| $\rho = 1000 \text{ kg m}^{-3}$     | $L = 0.1 \text{ m}$     | $\Delta t = 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ |
| $\nu = 10^{-6} \text{ Pa s}$        | $H = 0.025 \text{ m}$   | $t_{end} = 10$                         |
| $\gamma = 0.07 \text{ N m}^{-1}$    | $L_p = 0.1 \text{ m}$   | # éléments = 3910                      |
| $\rho_p = 1100 \text{ kg m}^{-3}$   | $H_p = 0.002 \text{ m}$ | # noeuds = 1954                        |
| $R_p = 2.5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$ |                         |  |
| $f = 25 \text{ Hz}$                 |                         |  |
| $a = 5 \cdot 10^{-4} \text{ m}$     |                         |  |

TABLE 4.2 – Mesure de l’amplitude critique. Paramètres physiques, géométriques de numériques

De manière tout à fait similaire à l’expérience précédente, le bassin est au repos initialement. L’oscillation du bassin démarre après une seconde permettant de déstabiliser la surface libre. Il est intéressant de remarquer l’efficacité de la procédure de résolution pour une forte accélération et une surface libre instable, figure (4.20).

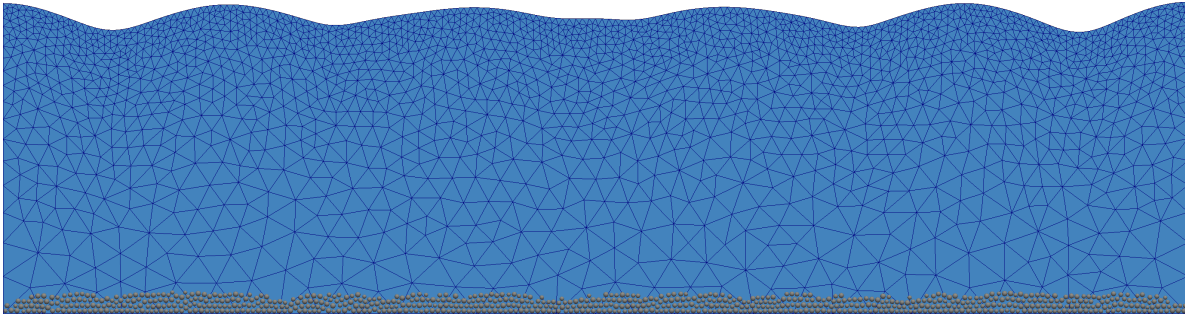


FIGURE 4.20 – Déformation du maillage par le mouvement de la surface libre en  $t = 1.58$ .

Par le déplacement entretenu du bassin, l'instabilité à la surface libre s'uniformise, figure (4.21). De plus, la formation des cônes de Faraday apparaît. Lorsque les grains sont en suspension, le fluide peut aller se faufiler entre ceux-ci, fluidifiant le milieu. Les zones moins densément peuplées par les grains subissent de manière plus forte le fluide. Il en résulte que les grains ont tendance à se rassembler, formant des amas plus compacts. Ce phénomène est illustré aux figures (4.22a) et (4.22b) où l'on peut observer la formation d'un tourbillon au niveau des grains situés dans le coin gauche du bassin. Ce tourbillon mène à agglomérer les particules vers la droite du domaine. Nous pouvons observer que des vortex de sens opposés se forment sous les ventres et sous les pics de la surface libre. Ces tourbillons favorisent la formation des cônes. Par ailleurs, les parois du bassin forcent les particules à proximité à se déplacer dans une seule direction favorisant également la formation des cônes. Les cônes sont particulièrement visibles à la fin de la simulation (4.23). Le mouvement vertical du bassin a permis l'agglomération des particules dans le domaine et a mené à la formation de cônes de Faraday.

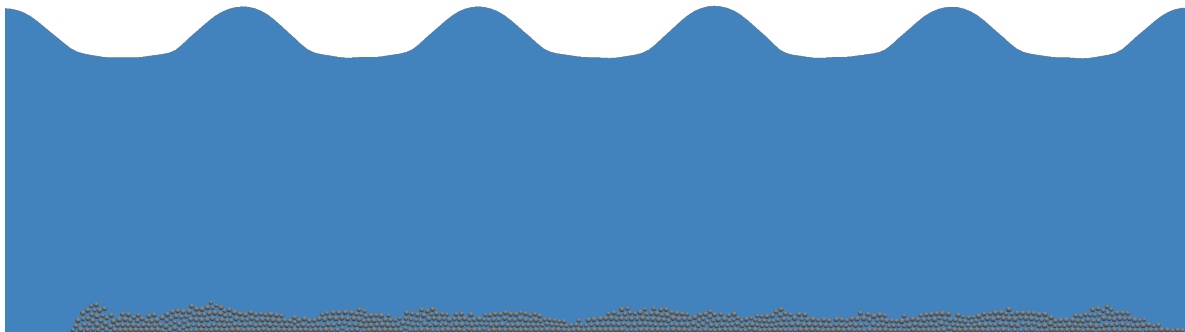
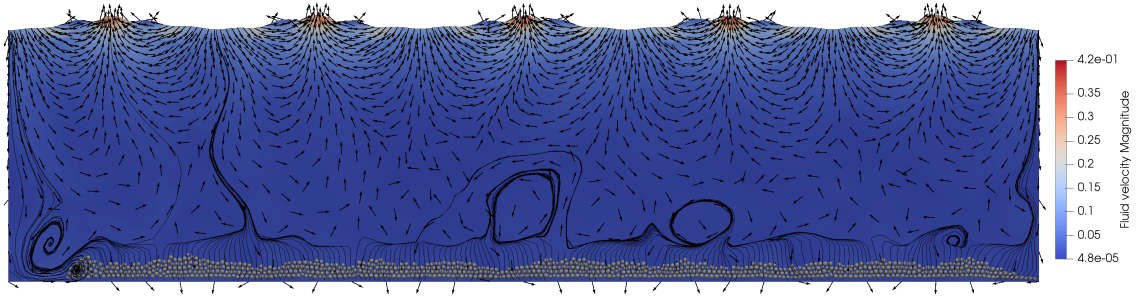
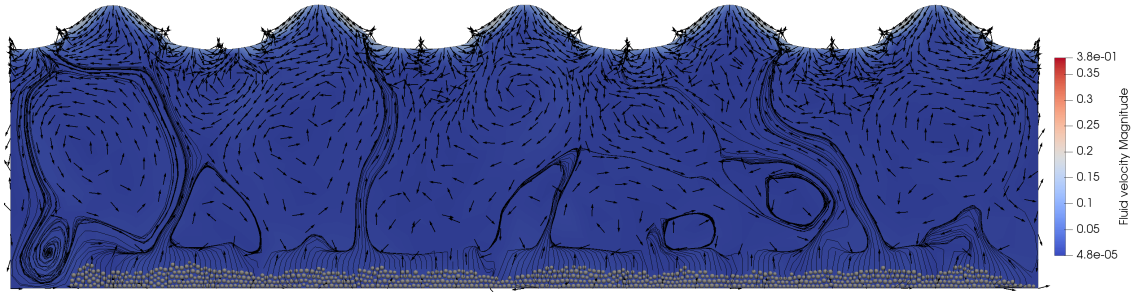


FIGURE 4.21 – Vagues de Faraday uniformes le long de la surface libre en  $t = 5.98$ s.



(a) Formation de tourbillon en  $t = 6s$ . Le champ correspond à la vitesse du fluide. Les flèches noires décrivent la direction du champ de vitesse. Les lignes continues noires décrivent les lignes de courant à proximité des grains.

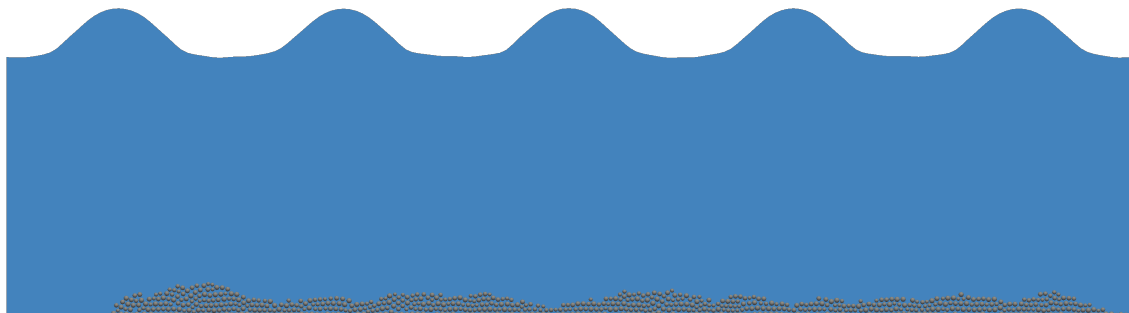


(b) Formation de tourbillon en  $t = 6.02s$ . Le champ correspond à la vitesse du fluide. Les flèches noires décrivent la direction du champ de vitesse. Les lignes continues noires décrivent les lignes de courant à proximité des grains.

FIGURE 4.22 – Formation des cônes de Faraday en  $t = 6s$  et  $t = 6.02s$ .



(a) Lit granulaire initial en  $t = 1s$ .



(b) Formation des cônes de Faraday en  $t = 10.02s$ .

FIGURE 4.23 – Comparaison entre le dépôt initial avant le mouvement vertical et le dépôt final disposant de cônes de Faraday.

## Observations

Nous remarquons que la présence d'un milieu granulaire n'influence pas la formation des vagues de Faraday. Afin de comprendre la raison, une analyse de stabilité du modèle complet est effectuée dans la section suivante. Cependant, l'instabilité à la surface libre permet de faciliter la formation des amas granulaires. Il est nécessaire de disposer d'une accélération suffisamment grande pour fluidifier le milieu granulaire. De plus, la présence de paroi améliore la création des cônes de Faraday. Afin de mesurer leur impact, il est nécessaire d'effectuer des simulations en considérant des conditions frontières périodiques et comparer ces résultats avec des mesures expérimentales.

## 4.3 Analyse de stabilité

Afin d'analyser la stabilité de l'interface entre deux fluides granulaires immergés, nous considérons que les fluides sont parfaits. L'étude suit la méthodologie proposée par [Kumar and Tuckerman, 1994]. L'étude du cas particulier des fluides parfaits permet l'extension des résultats proposés par [Benjamin and Ursell, 1954] aux fluides granulaires immergés. Ce cas simplifié permet d'illustrer la méthodologie afin de mettre en évidence nos observations.

### 4.3.1 Lois de conservation

Deux fluides Newtoniens incompressibles inviscibles, le plus léger possédant une densité  $\rho_2$  est placé au dessus du fluide de densité  $\rho_1$ . Ceux-ci se trouvent dans un récipient fermé par des plaques horizontales et soumis à une oscillation verticale. Le référentiel considéré est attaché au réservoir. L'application de la force est modélisé par une gravité modifiée  $G(t)$ . Les lois de conservations sont données pour chaque fluide par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \Phi_i}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{U}_i & = 0 \\ \rho_i \left( \frac{\partial \mathbf{U}_i}{\partial t} + \nabla \left( \frac{\mathbf{U}_i \mathbf{U}_i}{\Phi_i} \right) \right) & = -\nabla P_i + \mathbf{f} + \Phi_i G(t) \mathbf{e}_z \end{cases} \quad (4.2)$$

où  $i = 1, 2$  est le label représentant la première ou deuxième couche de fluide. La gravité modifiée est définie par :

$$G(t) = g - a \cos(\omega t) \quad (4.3)$$

La situation est illustrée à la figure (4.24).

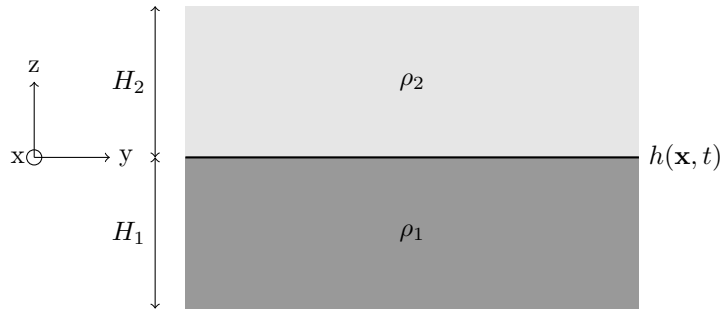


FIGURE 4.24 – Vue schématique de l'analyse de stabilité des vagues de Faraday.

En linéarisant autour de  $\mathbf{U}_i = \mathbf{0}$ ,  $P_i(t) = -\rho_i G(t)z$  et  $\Phi_i = 1$ , les équations pour les champs de perturbation  $\mathbf{u}_i$ ,  $p_i$  et  $\phi_i$  sont données par :

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi_i}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u}_i & = 0 \\ \rho_i \frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} & = -\nabla p_i \end{cases} \quad (4.4)$$

Nous pouvons éliminer les dépendances à la pression et aux vitesses  $u$  et  $v$  en appliquant  $\mathbf{e}_z \cdot \nabla \times \nabla \times$  à la conservation de la quantité de mouvement de l'équation (4.4).

$$\begin{aligned}\mathbf{e}_z \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{u} &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ &= \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial t} \right) - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ &= -\nabla^2 w - \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi}{\partial t} \right)\end{aligned}$$

Ce qui fournit dans la conservation de la quantité de mouvement sous la forme suivante,

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 w_i) = -\frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial^2 \phi_i}{\partial t^2} \right)} \quad (4.5)$$

où  $w_i$  est la vitesse verticale du fluide dans le fluide  $j$ .

### 4.3.2 Conditions frontières

Les conditions frontières se distinguent en deux catégories. Premièrement, les conditions de non-glissement et deuxièmement les conditions de continuité à l'interface.

**Conditions de non-glissement :** la condition de non-glissement est imposée en  $z = -H_1$  et  $z = H_2$ , les hauteurs pouvant être infinies. La condition impose l'annulation des vitesses,

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$$

Cela permet de déduire, l'annulation de la vitesse verticale et de sa dérivée verticale,

$$\begin{cases} w_i = 0, & z = (-1)^i H_i \\ \frac{\partial w_i}{\partial z} = 0, & z = (-1)^i H_i \end{cases}$$

**Interface :** les deux couches de fluide sont séparées par un interface initialement stationnaire et plat défini par  $z = 0$ . Suite à l'oscillation verticale, l'interface se déforme. L'équation cinématique (1.4) permet de décrire la position de l'interface  $h(\mathbf{x}, t)$ , où  $\mathbf{x} = (x, y)$ . Le résultat est étendu à trois dimensions, et fournit :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{u}{\phi} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{v}{\phi} \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{w}{\phi}, \quad z = h(\mathbf{x}, t)$$

Le long de l'interface chaque composante du champ de vitesse doivent être continues menant à

$$\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2 = \mathbf{0}$$

Cette expression permet d'imposer l'annulation de la composante verticale et de sa dérivée selon la verticale à l'interface,

$$\begin{cases} w_2 - w_1 = 0, & z = h(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial(w_2 - w_1)}{\partial z} = 0, & z = h(\mathbf{x}, t) \end{cases}$$

La continuité du champ de porosité permet d'imposer,

$$\begin{cases} \phi_2 - \phi_1 = 0, & z = h(\mathbf{x}, t) \\ \frac{\partial(\phi_2 - \phi_1)}{\partial z} = 0, & z = h(\mathbf{x}, t) \end{cases}$$

La condition dynamique doit également être respectée. Pour un fluide Newtonien inviscible, le tenseur des contraintes pour l'espèce  $j$  est décrit par :

$$\sigma_{j,lm} = -(p_j - \rho_j G(t)z) \delta_{lm} \quad (4.6)$$

où les indices  $l$  et  $m$  font référence aux composantes  $x, y, z$  du tenseur. En supposant une tension de surface constante, et puisque l'interface est continue, la continuité des composantes tangentielles est directement satisfaite pour un fluide non-visqueux. La déformation de l'interface introduit un saut de les composantes normales du tenseurs des contraintes par la tension de surface. Cela mène à,

$$\sigma_{2,zz} - \sigma_{1,zz} = -\gamma \nabla_H^2 h$$

où  $\nabla_H$  est l'opérateur différentiel le long du plan horizontal,  $\gamma$  le coefficient de la tension superficielle. En introduisant la notation  $\Delta\sigma \triangleq \sigma_2 - \sigma_1$ , la condition se formule,

$$\Delta\sigma_{zz} = -\gamma \nabla_H^2 h \quad (4.7)$$

En remplaçant l'expression du tenseur des contraintes (4.6) dans l'expression (4.7), nous obtenons une expression du saut de pression,

$$\Delta p = G(t)h\Delta\rho + \gamma \nabla_H^2 h \quad (4.8)$$

A partir de l'équation (4.4), nous pouvons reformuler l'expression du saut de pression dans le sens normal à l'interface par,

$$\begin{aligned} \Delta(\nabla p) &= -\Delta\left(\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t}\right) \\ \nabla_H \cdot \Delta(\nabla p) &= -\Delta\left(\rho \frac{\partial}{\partial t} (\nabla_H \cdot \mathbf{u})\right) \\ \nabla_H^2 \Delta p &= \Delta\left(\rho \left(\frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial z} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)\right)\right) \end{aligned}$$

Nous obtenons donc le lien suivant,

$$\nabla_H^2 \Delta p = \Delta\left(\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z}\right) + \Delta\left(\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right) \quad (4.9)$$

En utilisant les résultats (4.9) et (4.8), la condition dynamique à l'interface se formule,

$$\Delta\left(\rho \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z}\right) + \Delta\left(\rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2}\right) = G(t)\Delta\rho \nabla_H^2 h + \gamma \nabla_H^4 h \quad (4.10)$$

### 4.3.3 Problème linéarisé

Nous cherchons à résoudre le problème suivant :

|   |                        |
|---|------------------------|
| Déterminer $w_i, \phi_i$ de sorte que   |                        |
| $\frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla^2 w_1 + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi_1}{\partial t} \right) \right) = 0,$  | $z \in [-H_1, 0[$      |
| $\frac{\partial}{\partial t} \left( \nabla^2 w_2 + \frac{\partial}{\partial z} \left( \frac{\partial \phi_2}{\partial t} \right) \right) = 0,$  | $z \in ]0, H_2]$       |
| Avec les conditions frontières :  |                        |
| $w_1 = 0, \quad \frac{\partial w_1}{\partial z} = 0$  | $z = -H_1$             |
| $w_2 = 0, \quad \frac{\partial w_2}{\partial z} = 0$  | $z = H_2$              |
| $\Delta w = 0, \quad \Delta \frac{\partial w}{\partial z} = 0$  | $z = h(\mathbf{x}, t)$ |
| $\Delta \phi = 0, \quad \Delta \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0$  | $z = h(\mathbf{x}, t)$ |
| $\Delta \left( \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} \right) + \Delta \left( \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right) = G(t) \Delta \rho \nabla_H^2 h + \gamma \nabla_H^4 h$ | $z = h(\mathbf{x}, t)$ |
| Avec la condition cinématique,  |                        |
| $\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{w}{\phi} \Big _{z=0}$  |                        |

Sur base de nos résultats numériques, nous observons que la porosité à proximité de l'interface est constante. De plus, aucune particule ne se trouve dans l'air. Ces observations nous permettent alors de reformuler les équations de conservation par :

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 w_1) = 0, & z \in [-H_1, 0[ \\ \frac{\partial}{\partial t} (\nabla^2 w_2) = 0, & z \in ]0, H_2] \end{cases}$$

En considérant un plan horizontal infini pour lequel les modes sont des fonctions trigonométriques de nombre d'onde  $k \in \mathcal{R}$ , nous pouvons découpler les modes car les équations sont telles que chaque mode est découplé des autres [Benjamin and Ursell, 1954]. Cela permet de déduire la séparation des variables telle que :

$$\begin{cases} w(\mathbf{x}, z, t) = \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) w(z, t) \\ h(\mathbf{x}, t) = \sin(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}) h(t) \end{cases}$$

où  $\mathbf{k} = (k_x, k_y)$  est le nombre d'onde. Les relations suivantes se déduisent

$$\begin{cases} \nabla w(\mathbf{x}, z, t) = \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) w(\mathbf{x}, z, t) \\ \nabla_H h(\mathbf{x}, z, t) = -k^2 h(\mathbf{x}, z, t) \end{cases}$$

où  $k^2 = k_x^2 + k_y^2$ .

Par la séparation des variables, les lois de conservations s'expriment par

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) w_1 = 0, & z \in [-H_1, 0[ \\ \frac{\partial}{\partial t} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - k^2 \right) w_2 = 0, & z \in ]0, H_2] \end{cases}$$

stipulant que la vorticité est maintenue constante. En supposant que la vorticité initiale est nulle, et que  $H_1$  et  $H_2$  tendent tout deux vers l'infini,

$$\begin{aligned} w_1(z, t) &= W(t)e^{kz}, & z \in [-\infty, 0[ \\ w_2(z, t) &= W(t)e^{-kz}, & z \in ]0, \infty] \end{aligned}$$

Nous obtenons alors une expression de la condition cinématique en fonction de  $W(t)$ ,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = W(t) \tag{4.12}$$

Intéressons nous maintenant à la condition dynamique (4.10) où le second terme est négligé  $\Delta \left( \rho \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} \right)$ . Chaque terme se reformule par

$$\begin{cases} \left( \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t \partial z} \right) = -k(\rho_1 + \rho_2) \frac{dW(t)}{dt} \\ G(t)\Delta\rho\nabla_H^2 h + \gamma\nabla_H^4 h = k^2(\gamma k^2 - G(t)\Delta\rho) h(t) \end{cases}$$

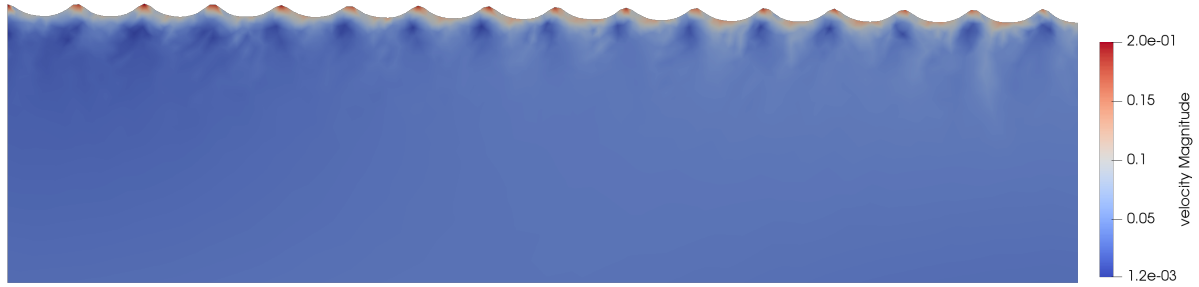
Sur base de l'équation cinématique (4.12), nous obtenons alors

$$\boxed{\frac{d^2 h(t)}{dt^2} + \omega_0^2(1 - \hat{a} \cos(\omega t)) h(t) = 0}$$

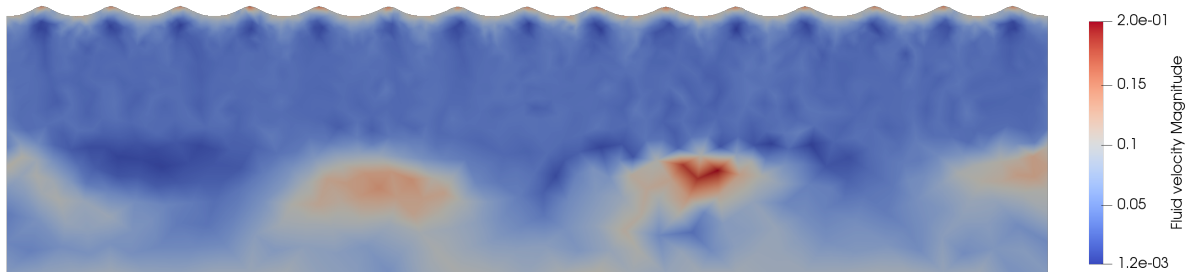
où

$$\begin{cases} \omega_0^2 = \frac{(\rho_1 - \rho_2)gk + \gamma k^3}{\rho_1 + \rho_2} \\ \hat{a} = \frac{(\rho_1 - \rho_2)ak}{(\rho_1 + \rho_2)\omega_0^2} \end{cases}$$

Cette condition est alors identique à celle proposée par [Kumar and Tuckerman, 1994] dans le cas des fluides parfaits et est identifiée comme étant une équation de Mathieu. Ce développement permet d'expliquer pourquoi l'influence des particules est négligeable dans la formation des vagues de Faraday dans les expériences considérées. La résolution du problème linéaire (4.11) permettrait de ne pas devoir faire cette hypothèse. En comparant une simulation avec et sans grains, nous observons bien des oscillations de même amplitude et de même fréquence à la surface libre, voir figure (4.25). Un déphasage est cependant présent.



(a) Champ de vitesse du fluide sans particules en  $t = 24.9762s$ .



(b) Champ de vitesse du fluide granulaire immergé en  $t = 24.9762s$ .

FIGURE 4.25 – Comparaison de la surface libre entre un écoulement granulaire immergé et un fluide sans particules.

## 4.4 Discussion

Ce chapitre a permis la description des interactions entre les vagues de Faraday et un milieu granulaire immergé. Les résultats mettent en évidence l'absence d'interactions à la surface libre entre les particules et le fluide, confirmés par une analyse de stabilité simplifiée. Toutefois, la surface libre joue un rôle important dans la formation des cônes de Faraday. Afin d'analyser ce phénomène, la méthodologie de résolution doit être étendue à un modèle tri-dimensionnel. Ce modèle est présenté en annexe mais n'a pas encore été implémenté. De plus, la dépendance aux différents paramètres devrait être éclairée. Le rayon des particules, la profondeur du bassin, la viscosité du fluide, les densités des grains et du fluide sont des paramètres ayant une grande importance dans la formation des vagues et cônes de Faraday. Il sera nécessaire d'analyser les interactions entre le lit granulaire et le fluide pour de nombreux choix des ces paramètres.



# Conclusion et perspectives

Ce mémoire a répondu à ses deux objectifs. Premièrement, le développement et l'implémentation d'une procédure de résolution d'écoulement en surface libre dans le code *MigFlow*. Deuxièmement, la simulation et l'analyse des interactions entre les vagues de Faraday et un lit granulaire.

Le premier chapitre s'est intéressé à formuler le problème d'écoulement en surface libre. Il a mis en évidence les deux conditions décrivant celle-ci, la condition cinématique et la condition dynamique. Nous avons décidé de décrire la surface libre par un suivi d'interface. Cela consiste à utiliser les noeuds du maillage comme marqueurs de la surface. Ceux-ci sont alors libres de se déplacer. De plus, lors d'écoulements pour lesquels la conservation du volume est nécessaire, nous avons pu proposer une méthode assurant cette conservation par le biais d'une correction de la vitesse du fluide. Les équations de la surface libre ont pu être résolues par la méthode des éléments finis et par la méthode des différences finies. L'implémentation de celles-ci dans le code fut alors nécessaire et permit d'améliorer nos connaissances en Python.

Le second chapitre s'est focalisé sur le déplacement des noeuds du maillage. Lors de la déformation de l'interface, le maillage peut être fortement déformé et non-conforme. Il est alors nécessaire de le maintenir conforme. En s'inspirant des régularisations elliptiques, il nous a été possible de proposer une régularisation simplifiée. Celle-ci maintenant le maillage conforme dans les applications considérées. Cette approche faisant défaut de robustesse nécessite des améliorations si l'on souhaite considérer des géométries et mouvements de surface libre complexes. L'implémentation de cette régularisation a permis de développer des structures de données permettant une résolution efficace du problème. L'efficacité de la méthode a pu être observée par les nombreux résultats développés et présentés dans ce travail.

Le troisième chapitre s'est consacré à la prise en compte du déplacement du maillage directement dans la résolution des équations de conservation. Pour ce faire, la description arbitraire de Lagrange-Euler a pu être employée. Ce chapitre présente les résultats fondamentaux de cette approche tels le *Théorème fondamental de l'ALE*. Nous avons également voulu présenter un exemple simple afin de mettre en évidence la méthode générale permettant l'obtention des équations de conservation sous formes locales dans cette approche. Ensuite, le modèle d'écoulement granulaire immergé utilisé dans le code *MigFlow* a pu être étendu à des maillages mobiles par cette description. Il a alors été nécessaire de modifier des éléments du code source. À ce stade, nous avons tous les outils afin de résoudre un écoulement en surface libre. La procédure utilisée est alors décrite et une application est proposée.

Le quatrième chapitre se tourne vers l'application désirée, les vagues de Faraday. L'analyse du problème a permis de mettre en évidence deux phénomènes physiques pouvant avoir lieu lors de l'oscillation verticale du bassin ; la formation de l'instabilité de Faraday à la surface libre et l'empilement des grains formant des cônes de Faraday. Premièrement, nous nous sommes intéressés à un problème dans lequel l'amplitude des oscillations était limitée. Nous avons pu constater que le lit granulaire n'avait alors aucun impact sur la formation des oscillations. De plus, le dépôt ne semblait pas affecté par le mouvement de la surface libre. Cette application a permis de montrer l'efficacité de la procédure de résolution développée et implémentée. Une seconde expérience numérique a ensuite été proposée. Celle-ci tentant de mettre en évidence le second phénomène physique, apparaissant dans le milieu granulaire. La formation des cônes de Faraday a pu être observée dans notre expérience. Nous avons pu comprendre leur formation par un phénomène de convection entre le fluide et les grains. L'impact de la surface libre devenant alors non-négligeable. Cependant, une

analyse des paramètres du fluide, des grains et de la géométrie permettrait de déterminer les conditions expérimentales menant à la formation des amas de particules. Enfin, nous nous sommes intéressés à analyser le problème de stabilité par une approche retrouvée dans la littérature scientifique. Celle-ci a permis de formuler le problème de stabilité de la surface libre dans le cas d'un fluide granulaire immergé pour lequel le fluide est parfait. Sur base de nos résultats numériques, une simplification a été proposée permettant l'obtention d'une équation de Mathieu décrivant le mouvement de la surface libre pour chaque mode. Ce résultat comparé à ceux présents dans la littérature permet d'expliquer pourquoi l'interface se comporte de manière identique à un fluide sans dépôt granulaire.

Ce mémoire m'a permis de développer de nombreuses compétences. Ce travail de longue haleine a nécessité une organisation et une rigueur importante. Chaque semaine, une réunion de projet était organisée permettant de présenter nos résultats, poser nos questions et avancer dans ce travail. Ces réunions m'ont permis d'améliorer ma communication. La rédaction de notes décrivant un problème a été essentielle dans le climat pandémique que nous avons connu. Par ailleurs, ce mémoire a été l'occasion de développer de nombreuses compétences techniques. La résolution des équations de la surface libre m'a permis d'approfondir mes connaissances en éléments finis ainsi qu'en différences finies. J'ai également découvert la richesse des méthodes de régularisation et d'adaptation du maillage. La formulation arbitraire de Lagrange-Euler m'a mené à redécouvrir certains concepts étudiés durant mes études. De plus, l'implémentation de ces méthodes m'a offert la possibilité de travailler mes compétences informatiques par les différents codes écrits en Python ou en C.

Ce travail propose donc une méthode de résolution des écoulements en surface libre au projet *Migflow*. L'efficacité de l'approche est mise en évidence lors de l'analyse des interactions entre les vagues de Faraday et le dépôt granulaire.



# Annexe

## Formulation du problème à trois dimensions

Le problème complet d'un écoulement en surface libre dans un bassin soumis à un déplacement vertical caractérisé par une vitesse  $v_b$  est exprimé ci-dessous, équation (4.13). Afin d'être cohérent avec les conventions utilisées dans le code *MigFlow*, l'axe vertical est décrit par  $y$ .

Déterminer  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), p(\mathbf{x}, t)$  telles que

$$\begin{cases} \frac{\partial \phi}{\partial t} + \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \\ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \frac{\hat{\mathbf{u}}}{\phi} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla \cdot \frac{\mathbf{u}\mathbf{u}}{\phi} \right) = \nabla \cdot [2\mu\phi\mathbf{d}(\mathbf{u}) - p\mathbf{I}] + \mathbf{f} + \phi\rho\mathbf{g} \end{cases}$$

soumis à la condition dynamique,

$$p = -\gamma\kappa + p_{ext}, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_f.$$

Déterminer la hauteur  $h(x, z, t)$  par la condition cinématique,

$$\frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\tilde{\mathbf{u}}}{\phi} \cdot \mathbf{n}, \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_f$$

où  $\tilde{\mathbf{u}}$  la vitesse corrigée par

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + v_b\hat{\mathbf{e}}_y - \frac{1}{L} \int_{\partial\Omega_f} \mathbf{u} \cdot \hat{\mathbf{n}} \, dl \, \hat{\mathbf{e}}_y \quad \forall \mathbf{x} \in \partial\Omega_f.$$

(4.13)

Le problème ci-dessus (4.13) se calcule en déterminant les expressions de  $\mathbf{n}$  et de  $\kappa$ .

### Vecteur normal

Le vecteur normal est donné par

$$\mathbf{n} = \left( -\frac{\partial h}{\partial x}, 1, -\frac{\partial h}{\partial z} \right)$$

La condition cinématique de la surface libre, obtenue en advectant la hauteur par la vitesse du fluide, se formule donc par

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{u}{\phi} \frac{\partial h}{\partial x} + \frac{w}{\phi} \frac{\partial h}{\partial z} - \frac{v}{\phi} = 0.$$

### Courbure

En se basant sur le développement de la condition dynamique par [Xuan and Shen, 2019], la courbure est déterminée par

$$\kappa = \left[ 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right]^{-3/2} \left[ \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} \left( 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial x} \right)^2 \right) - 2 \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left( 1 + \left( \frac{\partial h}{\partial z} \right)^2 \right) \right].$$

L'implémentation du problème à trois dimensions n'a pas été effectuée. Cependant, la démarche permettant de résoudre les équations ci-dessus est identique.



# Bibliographie

- [Airy, 1845] Airy, G. B. (1845). *Tides and waves*. B. Fellowes.
- [Anderson and Jackson, 1968] Anderson, T. and Jackson, R. (1968). Fluid mechanical description of fluidized beds. stability of state of uniform fluidization. *Industrial & Engineering Chemistry Fundamentals*, 7(1) :12–21.
- [André and Clermont, 1987] André, P. and Clermont, J.-R. (1987). Numerical simulation of the die swell problem of a newtonian fluid by using the concept of stream function and a local analysis of the singularity at the corner. *Journal of Non-Newtonian Fluid Mechanics*, 23 :335 – 354.
- [Askes and Rodríguez-Ferran, 2001] Askes, H. and Rodríguez-Ferran, A. (2001). A combined rh-adaptive scheme based on domain subdivision. formulation and linear examples. *International Journal for numerical methods in engineering*, 51(3) :253–273.
- [Belytschko et al., 2013] Belytschko, T., Liu, W. K., Moran, B., and Elkhodary, K. (2013). *Nonlinear finite elements for continua and structures*. John wiley & sons.
- [Benjamin and Ursell, 1954] Benjamin, T. B. and Ursell, F. J. (1954). The stability of the plane free surface of a liquid in vertical periodic motion. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 225(1163) :505–515.
- [Besson et al., 1996] Besson, T., Edwards, W. S., and Tuckerman, L. S. (1996). Two-frequency parametric excitation of surface waves. *Physical Review E*, 54(1) :507.
- [Boxho et al., 2019] Boxho, M., Legat, V., and Lambrechts, J. (2019). Estimateur d’erreur efficace a posteriori pour la résolution d’écoulements granulaires immergés.
- [Castro-Orgaz and Hager, 2019] Castro-Orgaz, O. and Hager, W. H. (2019). *Shallow water hydraulics*. Springer.
- [Chen and Vinals, 1999] Chen, P. and Vinals, J. (1999). Amplitude equation and pattern selection in faraday waves. *Physical Review E*, 60(1) :559.
- [Clément, 2010] Clément, C. P. A. R. (2010). *Multiscale modelling of fluid-immersed granular media*. PhD thesis, University of Nottingham.
- [Constant et al., 2019] Constant, M., Dubois, F., Lambrechts, J., and Legat, V. (2019). Implementation of an unresolved stabilised fem–dem model to solve immersed granular flows. *Computational Particle Mechanics*, 6(2) :213–226.
- [Daly et al., 1965] Daly, B., Harlow, F., Shannon, J., and Welch, J. (1965). The mac method. *Los Alamos Scientific*.
- [Donéa et al., 1977] Donéa, J., Fasoli-Stella, P., and Giuliani, S. (1977). Lagrangian and eulerian finite element techniques for transient fluid-structure interaction problems.
- [Donea et al., 1982] Donea, J., Giuliani, S., and Halleux, J.-P. (1982). An arbitrary lagrangian-eulerian finite element method for transient dynamic fluid-structure interactions. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 33(1-3) :689–723.
- [Donea et al., 2004] Donea, J., Huerta, A., Ponthot, J.-P., and Rodríguez-Ferran, A. (2004). *Arbitrary Lagrangian–Eulerian Methods*, chapter 14. American Cancer Society.
- [Drela, 2005] Drela, M. (2005). Streamlines, pathlines, streaklines. In *Lecture notes in Fluid mechanics*.
- [Durand et al., 2019] Durand, R., Pantoja-Rosero, B., and Oliveira, V. (2019). A general mesh smoothing method for finite elements. *Finite Elements in Analysis and Design*, 158 :17–30.

- [Edwards and Fauve, 1994] Edwards, W. S. and Fauve, S. (1994). Patterns and quasi-patterns in the faraday experiment. *Journal of Fluid Mechanics*, 278 :123–148.
- [Eymard et al., 2000] Eymard, R., Gallouët, T., and Herbin, R. (2000). Finite volume methods. *Handbook of numerical analysis*, 7 :713–1018.
- [Faraday, 1831] Faraday, M. (1831). On a peculiar class of acoustical figures; and on certain forms assumed by groups of particles upon vibrating elastic surfaces. *Philosophical transactions of the Royal Society of London*, (121) :299–340.
- [Fauve et al., 1992] Fauve, S., Kumar, K., Laroche, C., Beysens, D., and Garrabos, Y. (1992). Parametric instability of a liquid-vapor interface close to the critical point. *Physical review letters*, 68(21) :3160.
- [Feuillet et al., 2018] Feuillet, R., Loseille, A., Marcum, D., and Alauzet, F. (2018). Connectivity-change moving mesh methods for high-order meshes : Toward closed advancing-layer high-order boundary layer mesh generation. In *2018 Fluid Dynamics Conference*, page 4167.
- [Fraga Filho, 2018] Fraga Filho, C. A. D. (2018). Smoothed particle hydrodynamics.
- [Franck and Lazarus, 1964] Franck, R. M. and Lazarus, R. B. (1964). Mixed eulerian-lagrangian method. *Methods in Computational Physics*, 3 :47–67.
- [Freitag and Ollivier-Gooch, 1997] Freitag, L. A. and Ollivier-Gooch, C. (1997). Tetrahedral mesh improvement using swapping and smoothing. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 40(21) :3979–4002.
- [Gerstner, 1804] Gerstner, F. (1804). *Theorie der Wellen samt einer daraus abgeleiteten Theorie der Deich-profile*, volume 1. Haase.
- [Gingold and Monaghan, 1977] Gingold, R. A. and Monaghan, J. J. (1977). Smoothed particle hydrodynamics : theory and application to non-spherical stars. *Monthly notices of the royal astronomical society*, 181(3) :375–389.
- [Goren and Wronski, 1966] Goren, S. L. and Wronski, S. (1966). The shape of low-speed capillary jets of newtonian liquids. *Journal of Fluid Mechanics*, 25(1) :185–198.
- [Greer, 2006] Greer, J. B. (2006). An improvement of a recent eulerian method for solving pdes on general geometries. *Journal of Scientific Computing*, 29(3) :321–352.
- [Hirt et al., 1997] Hirt, C., Amsden, A., and Cook, J. (1997). An arbitrary lagrangian-eulerian computing method for all flow speeds. *J. Comput. Phys.*, 135(2) :203–216.
- [Huerta et al., 2018] Huerta, A., Belytschko, T., Fernández-Méndez, S., Rabczuk, T., Zhuang, X., and Arroyo, M. (2018). Meshfree methods. *Encyclopedia of Computational Mechanics Second Edition*, pages 1–38.
- [Joe, 1995] Joe, B. (1995). Construction of three-dimensional improved-quality triangulations using local transformations. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 16(6) :1292–1307.
- [Kennedy and Belytschko, 1978] Kennedy, J. M. and Belytschko, T. B. (1978). Theory and application of a quasi-eulerian fluid element for the straw code.[lmfbr]. Technical report, Argonne National Lab., IL (USA).
- [Klein, 1999] Klein, R. I. (1999). Star formation with 3-d adaptive mesh refinement : the collapse and fragmentation of molecular clouds. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 109(1-2) :123–152.
- [Kudrolli et al., 1998] Kudrolli, A., Pier, B., and Gollub, J. P. (1998). Superlattice patterns in surface waves. *Physica D : nonlinear phenomena*, 123(1-4) :99–111.
- [Kumar and Tuckerman, 1994] Kumar, K. and Tuckerman, L. S. (1994). Parametric instability of the interface between two fluids. *Journal of Fluid Mechanics*, 279 :49–68.
- [Lagrange, 1781] Lagrange, J. L. (1781). Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides. *Oeuvres complètes*, 695.
- [Legat, 1992] Legat, V. (1992). *Méthodes d’éléments finis pour le calcul d’écoulements tridimensionnels à surfaces libres*. PhD thesis, UCL-Université Catholique de Louvain.
- [Legat and Oden, 1995] Legat, V. and Oden, J. T. (1995). *An adaptive hp-finite element method for incompressible free surface flows of Generalized Newtonian fluids*, pages 643–678. Birkhäuser Basel, Basel.

- [Milburn et al., 2005] Milburn, R., Naylor, M., Smith, A., Leaper, M. C., Good, K., Swift, M. R., and King, P. (2005). Faraday tilting of water-immersed granular beds. *Physical Review E*, 71(1) :011308.
- [Müller, 1993] Müller, H. W. (1993). Periodic triangular patterns in the faraday experiment. *Physical review letters*, 71(20) :3287.
- [Muzaferija, 1998] Muzaferija, S. (1998). Computation of free surface flows using interface-tracking and interface-capturing methods. *Nonlinear water-wave interaction. Computational Mechanics, Southampton*.
- [Muzaferija and Peri'c, 1997] Muzaferija, S. and Peri'c, M. (1997). Computation of free-surface flows using the finite-volume method and moving grids. *Numerical Heat Transfer, Part B : Fundamentals*, 32(4) :369–384.
- [O'Connor, 2008] O'Connor, N. L. (2008). *The complex spatiotemporal dynamics of a shallow fluid layer*. PhD thesis, Virginia Tech.
- [Omodei, 1980] Omodei, B. J. (1980). On the die-swell of an axisymmetric newtonian jet. *Computers & Fluids*, 8(3) :275 – 289.
- [Park and Shontz, 2011] Park, J. and Shontz, S. M. (2011). An alternating mesh quality metric scheme for efficient mesh quality improvement. *Procedia Computer Science*, 4 :292–301.
- [Perinet et al., 2009] Perinet, N., Juric, D., and Tuckerman, L. S. (2009). Numerical simulation of faraday waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 635 :1–26.
- [Ramaswamy and Kawahara, 1987] Ramaswamy, B. and Kawahara, M. (1987). Arbitrary lagrangian–eulerian finite element method for unsteady, convective, incompressible viscous free surface fluid flow. *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 7(10) :1053–1075.
- [Rose et al., 2017] Rose, I., Buffett, B., and Heister, T. (2017). Stability and accuracy of free surface time integration in viscous flows. *Physics of the Earth and Planetary Interiors*, 262 :90 – 100.
- [Schauss et al., 2020] Schauss, M., Legat, V., and Lambrechts, J. (2020). Numerical simulation to compute pile driving into the ocean floor.
- [Shats et al., 2012] Shats, M., Xia, H., and Punzmann, H. (2012). Parametrically excited water surface ripples as ensembles of oscillons. *Physical review letters*, 108(3) :034502.
- [Sheldrake and Sheldrake, 2017] Sheldrake, M. and Sheldrake, R. (2017). Determinants of faraday wave-patterns in water samples oscillated vertically at a range of frequencies from 50-200 hz. *Water*, 9 :1–27.
- [Shewchuk, 2002] Shewchuk, J. R. (2002). What is a good linear finite element ? interpolation, conditioning, anisotropy, and quality measures (preprint). *University of California at Berkeley*, 73 :137.
- [Skeldon and Guidoboni, 2007] Skeldon, A. and Guidoboni, G. (2007). Pattern selection for faraday waves in an incompressible viscous fluid. *SIAM Journal on Applied Mathematics*, 67(4) :1064–1100.
- [Stokes, 1847] Stokes, G. G. (1847). On the theory of oscillatory waves, volume 1 of cambridge library collection-mathematics.
- [Tezduyar et al., 1992] Tezduyar, T., Behr, M., Mittal, S., and Liou, J. (1992). A new strategy for finite element computations involving moving boundaries and interfaces—the deforming-spatial-domain/space-time procedure : Ii. computation of free-surface flows, two-liquid flows, and flows with drifting cylinders. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 94(3) :353 – 371.
- [Topaz et al., 2004] Topaz, C. M., Porter, J., and Silber, M. (2004). Multifrequency control of faraday wave patterns. *Physical Review E*, 70(6) :066206.
- [Trulio, 1966] Trulio, J. G. (1966). Theory and structure of the afton codes. Technical report, NORTRONICS NEWBURY PARK CA.
- [Tsai and Yue, 1996] Tsai, W. and Yue, D. K. P. (1996). Computation of nonlinear free-surface flows. *Annual Review of Fluid Mechanics*, 28(1) :249–278.
- [Ubal et al., 2003] Ubal, S., Giavedoni, M. D., and Saita, F. A. (2003). A numerical analysis of the influence of the liquid depth on two-dimensional faraday waves. *Physics of Fluids*, 15(10) :3099–3113.
- [Vartziotis and Bohnet, 2017] Vartziotis, D. and Bohnet, D. (2017). A geometric mesh smoothing algorithm related to damped oscillations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 326 :102–121.

- [Winslow, 1963] Winslow, A. M. (1963). "equipotential" zoning of two-dimensional meshes. Technical report, California Univ., Livermore (USA). Lawrence Livermore Lab.
- [Xuan and Shen, 2019] Xuan, A. and Shen, L. (2019). A conservative scheme for simulation of free-surface turbulent and wave flows. *Journal of Computational Physics*, 378 :18–43.
- [Zhang and Viñals, 1997] Zhang, W. and Viñals, J. (1997). Pattern formation in weakly damped parametric surface waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 336 :301–330.



**UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN**  
École polytechnique de Louvain

Rue Archimède, 1 bte L6.11.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | [www.uclouvain.be/epl](http://www.uclouvain.be/epl)