

École polytechnique de Louvain

Optimisation de réseaux câblés et leur application aux structures photovoltaïques

Author: **Nicola CAPONE**

Supervisor: **Pierre LATTEUR**

Readers: **Benjamin DARDENNE, João SARAIVA ESTEVES PACHECO
DE ALMEIDA, Basile PAYEN**

Academic year 2024–2025

Master [120] in Civil Engineering

Abstract - What, why and how

L'optimisation des réseaux câblés pour les structures photovoltaïques offre une solution innovante face aux défis énergétiques et climatiques de notre époque. Alors que la demande mondiale en électricité continue de croître, la nécessité de produire de l'énergie de manière durable devient impérative. Les infrastructures photovoltaïques peuvent répondre à cette double exigence en intégrant des usages combinés, tels que les parkings solaires ou l'agrivoltaïsme, contribuant ainsi à une gestion plus efficiente des espaces. Cependant, la conception de telles structures doit être légère, économique et respectueuse de l'environnement.

Les modèles développés dans cette étude s'appuient sur la méthode de la relaxation dynamique pour analyser et optimiser les réseaux câblés. Cette approche permet de minimiser les volumes de matériaux utilisés tout en maximisant les performances mécaniques et la flexibilité des structures. En réduisant l'impact écologique et les coûts tout en favorisant l'intégration des énergies renouvelables, ces avancées structurales participent à répondre aux objectifs de la transition énergétique et au développement de solutions durables et innovantes adaptées aux besoins actuels de notre société.

Remerciements

Je tiens à remercier le Professeur Pierre Latteur pour m'avoir donné l'opportunité de travailler sur ce sujet. Sa disponibilité et ses conseils ont été précieux tout au long de ce mémoire et m'ont aidé à avancer dans la bonne direction.

Un immense merci à Benjamin Dardenne, mon assistant de mémoire, pour sa patience et ses nombreux conseils. Son accompagnement m'a beaucoup aidé à progresser avec sérénité et confiance, même face aux défis les plus complexes.

Je suis infiniment reconnaissant envers Astrid, ma compagne, pour son soutien de tous les jours. Elle a toujours été là pour m'encourager, surtout dans les moments où la motivation venait à manquer.

Un grand merci aussi à Annaëlle, Nicolas, Adrien et Pierre pour leur relecture attentive. Grâce à eux, beaucoup de fautes et de coquilles ont été repérées et corrigées, ce qui a vraiment amélioré le résultat final.

Je remercie également le Professeur Almeida et Basile Payen pour le temps et l'intérêt consacrés à mon mémoire ainsi que pour leur présence dans mon jury.

Je n'oublie pas ma famille, qui a toujours été là pour me soutenir tout au long de mes études. Leur présence et leurs encouragements m'ont permis d'aller jusqu'au bout avec confiance.

Enfin, merci à toutes les personnes, proches ou membres de l'université, qui m'ont soutenu et encouragé ces dernières années. Leur bienveillance a rendu ce parcours encore plus enrichissant et motivant.

Table des matières

Abstract	i
Remerciements	ii
Introduction	1
I Prérequis théoriques	3
1 Les câbles et leur utilisation	4
1.1 Définition du câble	4
1.2 Utilisation des câbles	6
1.3 Comportement dynamique des câbles	10
1.4 Analyse du comportement statique	11
2 Méthode de la relaxation dynamique	13
2.1 Application de la seconde loi de Newton	13
2.2 Calcul des résidus	14
2.3 Schéma itératif	16
2.3.1 Conditions initiales	17
2.3.2 Critères de convergence	17
2.4 Stabilité de la méthode	18
2.4.1 Effet de la masse fictive et de l'intervalle de temps	19
2.4.2 Effet du coefficient d'amortissement	21
3 Description de la situation	22
3.1 Structure étudiée	22
3.2 Dimensions et notations de références	23
3.2.1 Définition des paramètres géométriques	23
3.2.2 Définition des paramètres mécaniques des câbles	23
3.2.3 Définition des paramètres de prétensions	24
3.2.4 Évaluation de la charge ponctuelle P	24
II Méthode	28
4 Développement de l'outil de calcul	29
4.1 Contexte	29

4.2	Description du code de référence	29
4.3	Code solveur de relaxation dynamique : modifications et améliorations apportées	30
4.4	Code "drawer", générateur de structure	31
4.5	Exemple d'utilisation	32
4.6	Conclusion du chapitre	33
5	Validation de l'outil de calcul	34
5.1	Comparaison avec le modèle analytique du câble parabolique	34
5.2	Comparaison avec le modèle analytique du câble précontraint soumis à un effort transversal	37
5.3	Comparaison pour le calcul d'un treillis	39
5.4	Conclusion du chapitre	40
III	Optimisation du réseau de câbles	41
6	Analyse dimensionnelle	42
6.1	Description de la situation	42
6.2	Application du Théorème de Buckingham	44
6.3	Conclusion du chapitre	48
7	Réseau simple de câbles	49
7.1	Schéma d'optimisation	49
7.2	Effet du poids propre	51
7.3	Effet de la flèche initiale et de la précontrainte	54
7.4	Dimensionnement du câble parabolique inférieur	56
7.5	Conclusion du chapitre	59
8	Prise en compte des haubans	60
8.1	Description de la situation	60
8.1.1	Section des câbles paraboliques	61
8.1.2	Section des haubans	63
8.2	Sélection de la prétension dans les haubans	64
8.3	Conclusion du chapitre	67
9	Inclinaison des grumes	68
9.1	Evolution de la distance entre la grume et le point d'ancrage des haubans	69
9.2	Evolution de la compression reprise par les grumes	71
9.3	Conclusion du chapitre	72
	Conclusion	74
	Annexes	79
A	Codes Python	79

B Résultats pour différents cas de charges	80
B.1 $P = 125$	81
B.2 $P = 100$	83
B.3 $P = 75$	85
B.4 $P = 50$	87
B.5 $P = 25$	88
C Calcul de l'angle entre la grume inclinée et le hauban	90
D Dimensionnement de la grume au flambement	92

Introduction

Dans le contexte actuel de transition énergétique et de lutte contre le changement climatique, l'énergie photovoltaïque joue un rôle central en offrant une alternative durable et locale aux énergies fossiles. Cependant, l'accroissement de la population mondiale engendre des régions densément peuplées où les espaces libres sont de plus en plus rares. Afin d'optimiser l'espace, il devient essentiel de développer des structures capables de combiner plusieurs usages sur un même espace. Ce concept est appelé "dual use" et permet par exemple de combiner la production d'électricité solaire avec d'autres activités comme l'agriculture ou l'aménagement de parkings. Cela permet d'offrir des solutions innovantes afin de répondre aux besoins croissants d'énergie tout en maximisant l'utilisation des sols.

Les structures classiques de centrales photovoltaïques, principalement constituées de portiques métalliques, sont peu adaptées à ces nouveaux usages. En effet, elles nécessitent de nombreuses fondations, consomment beaucoup de matière et limitent les possibilités d'espaces libres sous les panneaux. Par contre, d'autres structures, telles que des structures basées sur des câbles et des colonnes en grume de bois offrent une alternative écologique et efficace. Les câbles, en particulier, permettent d'atteindre de grandes portées, permettant de maximiser l'espace libre tout en réduisant la quantité de matériaux nécessaires. D'autre part, l'utilisation de grumes de bois favorise une empreinte carbone réduite et un coût maîtrisé.

Pour concevoir ces structures, des outils de modélisation adaptés sont nécessaires. Les méthodes numériques, et en particulier, la méthode de la relaxation dynamique, s'avèrent pertinentes pour analyser les comportements non-linéaires des réseaux câblés. La méthode de la relaxation dynamique permet à la fois de simuler les efforts dans les câbles, de garantir la stabilité des structures et de dimensionner les différents éléments en fonction des charges et des contraintes.

Afin d'analyser ces structures de câbles, ce mémoire s'articule autour de trois parties principales :

1. La première partie développe les fondements théoriques de la méthode de la relaxation dynamique, ainsi que des câbles et leur utilisation dans les structures.

2. La deuxième partie porte sur le développement d'un code Python permettant d'effectuer des analyses numériques basées sur la méthode de la relaxation dynamique. Ce code permet de modéliser le comportement des réseaux câblés.
3. La troisième partie se consacre à la création d'algorithmes d'optimisation destinés à identifier des géométries de réseaux câblés plus performantes. Cette partie inclut également l'étude des prétensions nécessaires pour stabiliser le système et garantir son efficacité structurale.

Ce travail vise ainsi à proposer des solutions techniques et numériques innovantes, adaptées aux défis actuels en matière de production d'énergie photovoltaïque, tout en répondant aux impératifs environnementaux et économiques.

Première partie
Prérequis théoriques

Chapitre 1

Les câbles et leur utilisation

1.1 Définition du câble

Un câble est généralement constitué d'un assemblage de torons, eux-mêmes formés par un entrelacement de fils métalliques. Les torons peuvent être disposés selon deux configurations principales. Dans la première configuration dite de « torons parallèles », les torons sont alignés parallèlement entre eux. Dans l'autre configuration, les torons sont enroulés autour d'une âme centrale, qui peut être métallique ou textile. Cette dernière disposition est appelée « cordages » (voir Figure 1.1) [1].

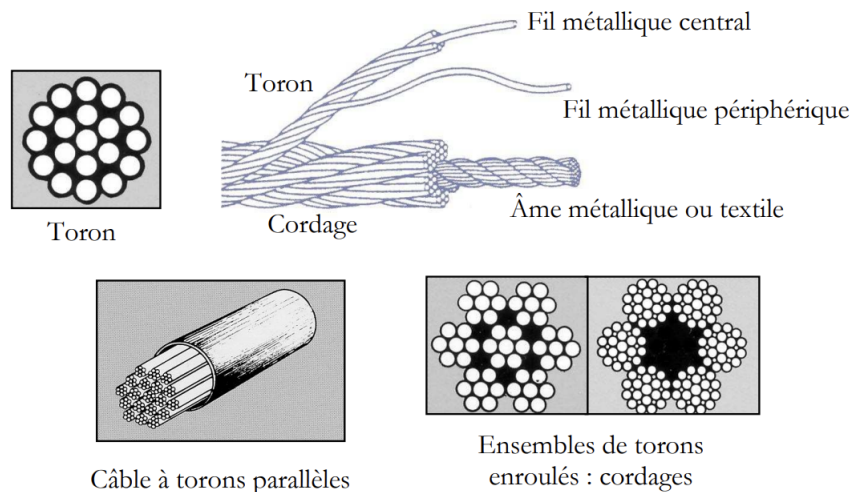


FIGURE 1.1 – Description d'un câble [1].

Les torons eux-mêmes sont fabriqués en disposant de nombreux fils métalliques de manière hélicoïdale autour d'un fil central. Ces fils sont souvent constitués d'acier à très haute limite d'élasticité, ce qui permet aux câbles de supporter des efforts considérables en traction tout en conservant une certaine souplesse. La résistance à l'élasticité de ces câbles peut largement dépasser celle de l'acier traditionnel utilisé pour les charpentes. Cependant, le module d'élasticité intrinsèque du câble peut être réduit par rapport à celui de l'acier plein en raison de l'entrelacement hélicoïdal des fils [1, 2].

Les propriétés mécaniques des câbles vont donc varier selon la configuration de leurs torons. Pour des câbles à torons parallèles (voir Figure 1.1), le module d'élasticité atteint typiquement 170 000 MPa. Par contre, pour les cordages, ce module peut être inférieur, avoisinant les 140 000 MPa. Cette différence s'explique par la géométrie de l'agencement des fils et par l'impact de l'entrelacement des torons sur la déformation globale du câble sous contrainte [1, 2].

Géométriquement, un câble est défini par une forme cylindrique, caractérisée par une longueur très supérieure à son diamètre. Cette géométrie unique confère au câble une grande flexibilité, lui permettant de s'adapter aux contraintes appliquées sans se rompre [3]. En raison de cette flexibilité, la géométrie d'un câble soumis à une charge se déforme considérablement par rapport à sa configuration initiale. Contrairement aux éléments rigides, la déformation d'un câble sous charge est complexe et non-linéaire [3]. Le principe de superposition des forces, souvent utilisé dans les systèmes linéaires, n'est donc plus applicable ici en raison de ces non-linéarités géométriques [1]. La grande flexibilité des câbles implique également qu'ils ne peuvent reprendre ni contrainte de flexion, ni torsion, ni compression, ni effort tranchant de manière significative. En effet, en raison de sa structure et de son faible moment d'inertie transverse, tout effort autre que la traction axiale induirait des déformations importantes. Ainsi, les câbles sont conçus uniquement pour reprendre des efforts de traction, qui se propagent tangentiellement le long de leur axe [4].

Différents types de charges peuvent être appliquées sur un câble simple. Par exemple, un câble peut être soumis à une charge ponctuelle simple. Il formera deux lignes droites qui se rejoignent au point d'application de la charge (voir Figure 1.2a). Il peut également être soumis à plusieurs charges ponctuelles et formera alors un polygone (voir Figure 1.2b). Dans le cas de charges uniformément réparties, le câble s'affaissera en forme de chaînette pour une charge distribuée le long de la longueur du câble (voir Figure 1.2c) ou en forme de parabole pour une charge répartie horizontalement (voir Figure 1.2d) [4].

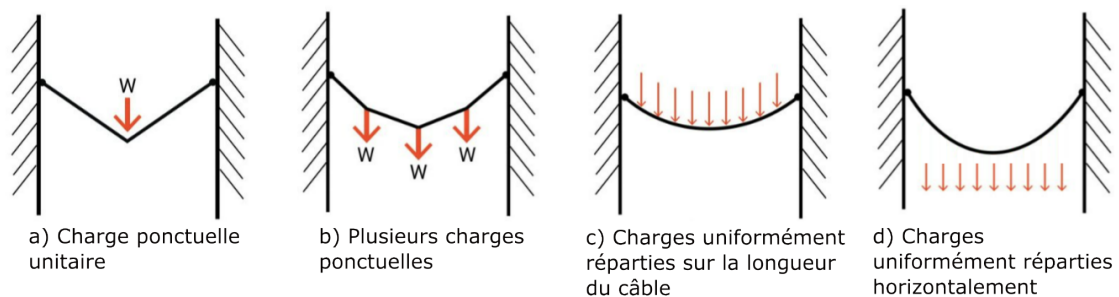


FIGURE 1.2 – Différents types de charges appliquées sur le câble. Adapté de [4].

On appelle chaînette un câble non chargé. Sa forme est déterminée uniquement par le poids propre du câble, qui est uniformément réparti sur sa longueur. Un câble chaînette s'affaisse sous l'effet d'une charge uniformément répartie sur toute sa longueur et transfère la charge à ses deux supports en parts égales. En revanche, on appelle parabole un câble suspendu chargé uniformément sur toute sa longueur horizontale. Toutefois, le poids propre doit être insignifiant par rapport à la charge pour qu'un câble ait une forme de parabole pure. Cependant, lorsque le rapport entre la portée et la flèche est supérieur à 10, les deux formes sont presque identiques comme illustré à la Figure 1.3 et, mathématiquement, il est plus simple d'utiliser une parabole pour l'analyse [1, 4].

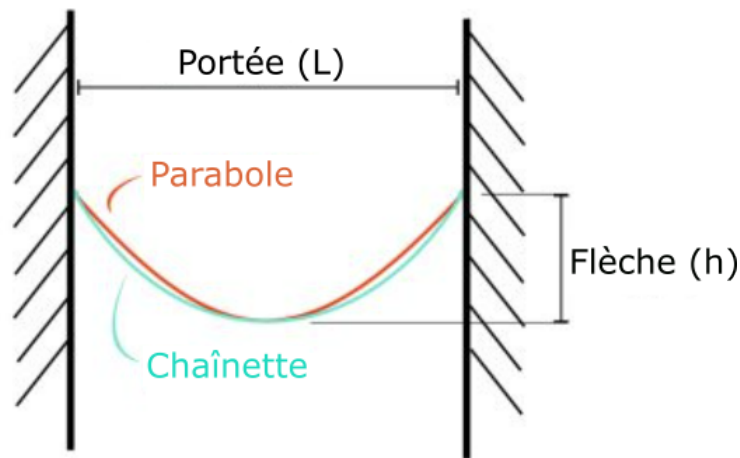


FIGURE 1.3 – Similitude entre la chaînette et la parabole [4].

Pour optimiser leur performance, il est courant de soumettre les câbles à une contrainte préalable, appelée prétension. La prétension consiste à appliquer une force initiale de traction avant l'utilisation du câble, ce qui permet de réduire les déformations et d'améliorer sa capacité à supporter des charges supplémentaires de manière plus stable et prévisible. Grâce à ce préchargement, la raideur du câble est augmentée. De plus, un câble prétendu peut reprendre des charges de compression limitées (à hauteur de sa prétension) [1].

1.2 Utilisation des câbles

Les structures de câbles sont formées par l'assemblage de deux ou plusieurs câbles. Elles jouent un rôle crucial dans les situations où la résistance à la traction est essentielle. Les applications des structures de câbles sont nombreuses et variées, allant de la construction de ponts suspendus et haubanés aux structures tendues telles que les toits de stades (voir Figures 1.4 à 1.7).



FIGURE 1.4 – Viaduc de Millau, Creisels, France¹.



FIGURE 1.5 – Golden Gate, San Francisco, USA².



FIGURE 1.6 – Pont du pays de Liège, Liège, Belgique³.



FIGURE 1.7 – Stade de France, Paris, France⁴.

Afin de sélectionner la structure la plus appropriée pour l'application visée dans le cadre de ce mémoire, il est nécessaire de se pencher sur les différents types de structures couramment utilisées. Les structures de câbles peuvent être classées en trois catégories principales [4] :

- Les structures à courbure unique (Figure 1.8a) : Une série de câbles chaînettes parallèles s'étendent entre les supports principaux et supportent soit directement un tablier, soit une série de câbles verticaux secondaires qui portent le tablier.
- Les structures à double câbles (Figure 1.8b) : Des câbles stabilisateurs de concavité inversée sont ajoutés sous les câbles de suspension primaires afin de résister aux forces de soulèvements exercées par le vent.
- Les structures à double courbure (Figure 1.8c) : Similaires à une forme de selle, les câbles de suspension principaux pendent entre les supports et couvrent la portée. Les câbles stabilisateurs vont dans une direction perpendiculaire avec une courbure opposée.

1. Source : <https://www.archicontemporaine.org/viaduc-de-millau-construction-hauteur-et-tarifs/>

2. Source : <https://www.cityexperiences.com/fr/blog/golden-gate-viewpoints/>

3. Source : https://www.greisch.com/projet/pont_de_liege/

4. Source : <https://structurae.net/fr/ouvrages/stade-de-france>

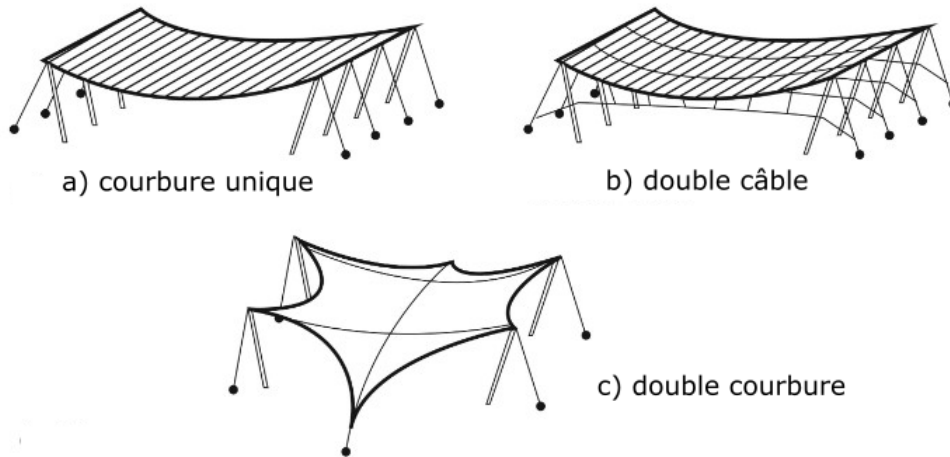


FIGURE 1.8 – Trois principales structures de câbles [4].

Dans le cas envisagé dans ce mémoire, la structure évolue dans un environnement extérieur tel qu'un parking ou un champ et est utilisée comme support à des panneaux photovoltaïques. Dans cette optique, la structure la plus appropriée doit être sélectionnée. La structure à double courbure (Figure 1.8c) ne permet pas un passage aisé sous celle-ci avec des véhicules, qu'ils soient privés ou agricoles, et n'est donc pas à privilégier. D'autre part, vu son usage en extérieur, il est nécessaire que la structure résiste aux forces exercées par le vent. La structure à courbure unique (Figure 1.8a) ne permet pas une stabilité suffisante quant à un potentiel soulèvement du vent. Pour illustrer cela, un cas est envisagé où un câble à courbure unique soutient un panneau photovoltaïque. Comme illustré sur la Figure 1.9, lorsque la composante verticale du vent est considérée et appliquée de haut en bas perpendiculairement à la surface du panneau photovoltaïque, le câble va se déformer légèrement dans le sens de sa concavité.

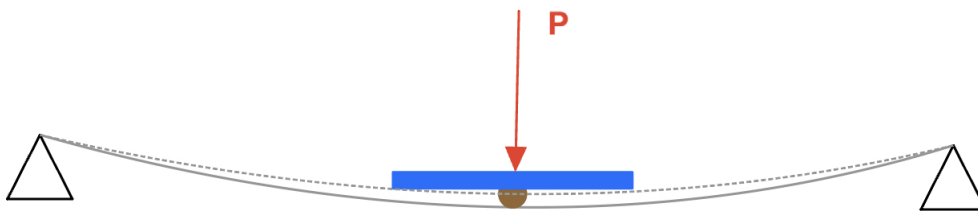


FIGURE 1.9 – Action de la composante verticale du vent du haut vers le bas.

Par contre, si le vent agit du bas vers le haut, à nouveau perpendiculairement à la surface du panneau photovoltaïque comme illustré sur la Figure 1.10 et si le câble n'est pas soutenu, le déplacement sera beaucoup plus important, jusqu'à inverser la concavité du câble. L'installation d'un second câble à concavité opposée permet de limiter ce déplacement en soutenant le câble supérieur à l'aide de suspentes reliant les deux câbles principaux.

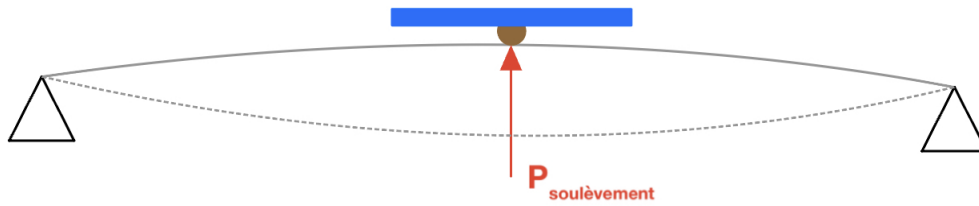


FIGURE 1.10 – Action de la composante verticale du vent du bas vers le haut : soulèvement.

La structure la plus appropriée sera donc une structure à double câble (Figure 1.8b), obtenue par la combinaison de deux câbles prétendus à concavité inversée reliés entre eux par des suspentes. La structure ainsi conçue sera rigide si les câbles sont suffisamment prétendus que pour garantir qu'ils soient en tension quelle que soit la charge appliquée [5].

La Figure 1.11 montre un exemple de structure élancée telle que décrite ci-dessus installée à Amance, en France au-dessus d'un champ permettant de cultiver du soja, du blé, de l'orge d'hiver et du colza [6]. Les câbles sont placés en concavité inversée et supportent des panneaux photovoltaïques au dessus d'un terrain agricole. La structure étudiée dans ce mémoire sera similaire, mais avec des grumes de bois haubanées au lieu des colonnes en acier.



FIGURE 1.11 – Exemple de structure agri-voltaïque [6].

1.3 Comportement dynamique des câbles

La dynamique de ce type de réseaux câblés sous tension est particulièrement importante en raison de leur sensibilité aux charges variables, aux vibrations et aux perturbations environnementales, telles que le vent ou les séismes. Ces structures légères et souples nécessitent une compréhension précise de leur réponse dynamique afin d'assurer leur stabilité et leur efficacité en service. Particulièrement, l'effet du vent sur ces structures provoque des déformations qui donnent lieu à des oscillations de la structure [7, 8]. Il se produit un phénomène appelé instabilité aéroélastique. Les instabilités aéroélastiques résultent des forces aérodynamiques qui sont influencées par le mouvement de la structure [5]. En effet, lorsqu'il y a du vent, l'air circule autour du câble. En fonction de l'angle d'attaque du vent et de la forme du câble, des zones de dépression et de surpression peuvent se former autour du câble [9]. Pour imaginer ce phénomène, on peut comparer un câble soumis au vent à un cylindre exposé à un fluide ayant une certaine vitesse comme suit :

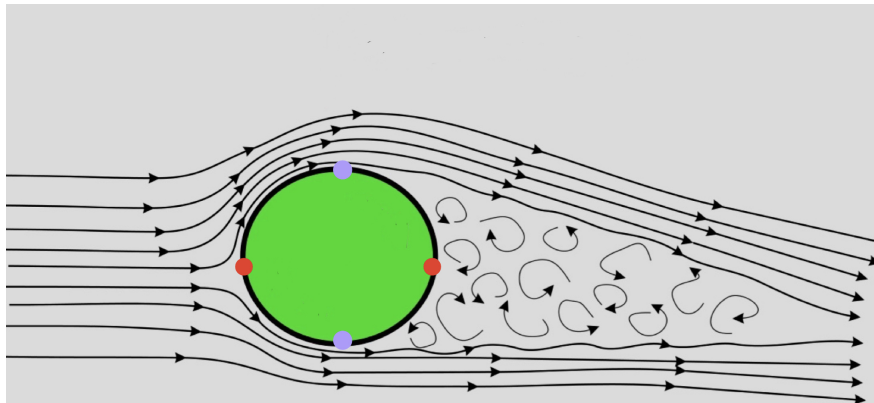


FIGURE 1.12 – Écoulement d'un fluide autour d'un cylindre [10].

- Les points rouges sur la Figure 1.12 représentent les points stationnaires, et les points mauves sont les points de séparation. Ces points de séparation définissent l'endroit où l'écoulement ne reste plus attaché à la surface du cylindre.
- Face au fluide : Lorsque le fluide rencontre la surface avant du cylindre, la vitesse de l'écoulement diminue brusquement jusqu'à zéro au point d'arrêt, entraînant une augmentation de pression selon le principe de Bernoulli¹ [11].
- Autour du cylindre : En s'écoulant le long de la surface, le fluide accélère sous l'effet de la géométrie courbée, ce qui diminue la pression [11]. La pression atteint son minimum autour des points où la vitesse est maximale.

1. Pour rappel, le principe de Bernoulli est basé sur la conservation d'énergie et est formulé comme suit [11] :

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \quad (1.1)$$

- Derrière le cylindre, après les points de séparation une zone de basse pression se développe en raison de la séparation de l'écoulement, créant des tourbillons et une traînée pouvant être importante.

Il est donc nécessaire d'être prudent quant aux effets dynamiques des charges sur des structures flexibles telles que des réseaux de câbles.

Malgré ces considérations dynamiques, il est courant de commencer par une analyse statique. En effet, l'étude de la dynamique requiert des simulations expérimentales complexes. Ce point ne sera pas abordé dans ce mémoire. Par contre, l'analyse statique va être utilisée pour évaluer la capacité portante sous des charges stationnaires, car cela fournit une base pour comprendre les comportements ultérieurs sous des charges dynamiques. En effet, les forces statiques influencent directement la distribution des efforts dans les câbles, la forme de la structure et les niveaux de précontrainte, qui, à leur tour, modulent les fréquences naturelles et les modes de vibration. Une bonne compréhension statique permet d'estimer les vitesses critiques du vent, d'anticiper les instabilités potentielles et d'optimiser la conception avant de procéder à des tests plus complexes, comme les essais en soufflerie [7, 8, 12].

1.4 Analyse du comportement statique

Dans ce mémoire, le comportement statique des réseaux câblés va être analysé. Des calculs analytiques sur un câble suspendu permettent d'obtenir de manière directe les efforts dans le câble ainsi que la flèche maximale. Ces calculs analytiques permettent également de considérer la prétension dans les câbles mais uniquement dans des situations très simples, comme un câble tendu entre deux appuis [1]. Or, dans notre cas spécifique, la situation est plus complexe et la structure est composée de plusieurs câbles pour lesquels la prétension doit être considérée. En effet, l'objectif consiste à rigidifier le système de câbles par l'ajout de prétension afin d'améliorer sa stabilité globale. Pour analyser ce type de comportement, il est donc nécessaire de modéliser le système sous l'effet de cette précontrainte en ayant recours à des analyses numériques.

Dans le cadre des analyses statiques de structures sous tension, et plus particulièrement des réseaux câblés, plusieurs méthodes de calcul sont couramment utilisées pour déterminer l'état d'équilibre. Ces méthodes, qui diffèrent par leurs approches théoriques et leur complexité d'implémentation informatique, visent toutes à modéliser de manière précise la réponse des structures souples aux charges externes. Parmi ces méthodes, deux méthodes souvent employées sont la méthode de Newton-Raphson et la méthode de la relaxation dynamique (MRD). Ces deux méthodes peuvent être brièvement décrites comme suit :

- La méthode de Newton-Raphson repose sur une approche itérative de linéarisation, qui consiste à construire et à mettre à jour une matrice de rigidité pour converger vers une solution d'équilibre [13], particulièrement pour des structures rigides avec des non-linéarités modérées. Cette méthode

est réputée pour sa rapidité de convergence et sa précision, bien qu'elle soit relativement complexe à implémenter.

- La MRD offre une alternative qui simule les mouvements des câbles et nœuds en modifiant progressivement leurs positions jusqu'à atteindre un état d'équilibre. Cette méthode est fréquemment utilisée avec un objectif de "form finding" : trouver la forme d'une structure tendue à l'équilibre [12]. Cette méthode est particulièrement bien adaptée aux grandes déformations et aux structures flexibles. Elle permet de modéliser les effets de la non-linéarité géométrique, sans nécessiter de matrice de rigidité globale [14]. Tout comme la méthode de Newton-Raphson, la MRD fournit des résultats précis bien que sa vitesse de convergence soit plus lente [3].

Dans le cadre de ce mémoire, l'objectif est de développer un outil de calcul sous forme de code Python qui permet de modéliser les structures câblées. Pour cela, il est nécessaire de choisir une méthode qui permettra non seulement d'obtenir des résultats fiables et conformes aux comportements attendus des structures sous tension, mais également de simplifier le développement du code. La méthode retenue devra ainsi trouver un équilibre entre une précision suffisante pour les résultats et une simplicité d'implémentation. Cette démarche est essentielle pour que le code soit facilement ajustable, évolutif et applicable à différents scénarios de charge et de configuration géométrique, tout en respectant les contraintes de non-linéarité et de déformation propres aux réseaux câblés.

En considérant tous ces critères, la méthode de la relaxation dynamique a été retenue pour effectuer l'analyse statique des réseaux câblés. L'un des principaux atouts de la relaxation dynamique est sa simplicité d'implémentation, particulièrement par rapport à la méthode de Newton-Raphson nécessitant des manipulations complexes de matrices. Cette méthode est particulièrement bien adaptée pour les besoins de ce mémoire, alliant facilité d'implémentation et adéquation au type de structure et aux grandes déformations. Elle permet de développer un code optimisé, facile à adapter à différentes situations, tout en assurant une modélisation réaliste et précise des comportements des réseaux câblés.

Chapitre 2

Méthode de la relaxation dynamique

Cette section développe la méthode utilisée pour interpréter le comportement statique du réseau câblé étudié dans le cadre de ce mémoire. Étant donné que la structure analysée est constituée de câbles sous tension, des analyses non-linéaires sont nécessaires pour comprendre la répartition des efforts au sein du réseau. La théorie exposée dans cette partie est inspirée des développements du livre *Computer Aided Design of Cable Membrane Structures*, B.H.V Topping and P. Iványi [15] et des articles *Numerical Analysis of Cable Structures* M. Hüttner, J. Máca and P. Fajman [14], *Form Finding and Analysis of Tension Structure by Dynamic Relaxation* Michael R. Barnes [12], *Form finding and analysis of tensions space structures by dynamic relaxation* Michael R. Barnes [16], *Numerical analysis of cabled-truss structures* Daniel Colmenares [3] et *EARTHY : Computational Design for Earth Architecture, Delft University of Technology* Pr. Pirouz Nourian and Shervin Azadi [17].

2.1 Application de la seconde loi de Newton

La MRD¹ est une technique numérique permettant d'évaluer la réponse dynamique d'une structure soumise à un chargement, jusqu'à atteindre un état d'équilibre grâce à un amortissement des mouvements. Bien qu'inspirée de la dynamique classique, cette approche est utilisée pour l'analyse statique non-linéaire des structures, telles que les membranes, les treillis câblés ou les réseaux de câbles.

L'avantage de cette méthode réside dans son efficacité informatique et la convergence rapide de l'algorithme. L'objectif principal de la méthode est d'atteindre l'état final, c'est-à-dire la géométrie qui satisfait l'équilibre de la structure.

La dérivation des équations de la relaxation dynamique est présentée ici pour un noeud i de coordonnées (x_i, y_i, z_i) . Les équations sont développées dans la direction x mais le développement est similaire pour les autres directions.

1. méthode de la relaxation dynamique

Cette méthode repose sur la seconde loi du mouvement de Newton :

$$P_{ix} = M_{ix} \cdot a_{ix}^t + C_{ix} \cdot v_{ix}^t + K_{ix} \cdot u_{ix}^t \quad (2.1)$$

Où :

- P_{ix} est la force externe qui s'applique sur le nœud i dans la direction x ,
- M_{ix} est la masse fictive au nœud i dans la direction x ,
- a_{ix}^t est l'accélération au nœud i dans la direction x au temps t ,
- C_{ix} est le facteur d'amortissement fictif pour le nœud i dans la direction x ,
- v_{ix}^t est la vitesse au nœud i dans la direction x au temps t ,
- K_{ix} est la rigidité au nœud i dans la direction x ,
- u_{ix}^t est le déplacement total du nœud i dans la direction x au temps t .

Étant donné que le but principal de cette méthode est d'obtenir le point d'équilibre statique et non l'évolution dynamique de la structure, la masse et le coefficient d'amortissement vont être attribués de manière fictive. Ces paramètres doivent être définis de manière à permettre la convergence de la méthode. Le choix de ces paramètres sera développé dans la Section 2.4 traitant de la stabilité de la méthode.

Sur base de la deuxième loi du mouvement (Equation 2.1), la force résiduelle à un instant donné t dans un nœud libre i (R_{ix}) peut être exprimée. La force résiduelle représente l'équilibre entre la composante de l'effort externe qui s'applique au nœud i dans la direction x (P_{ix}) et l'effort interne mobilisé à ce même nœud i dans la direction x ($K_{ix} \cdot u_{ix}^t$). Elle est exprimée comme suit :

$$R_{ix}^t = P_{ix} - K_{ix} \cdot u_{ix}^t = M_{ix} \cdot a_{ix}^t + C_{ix} \cdot v_{ix}^t \quad (2.2)$$

2.2 Calcul des résidus

La résolution de l'équation 2.2 nécessite d'exprimer la vitesse et l'accélération au temps t . Pour ce faire, la ligne du temps peut être divisée en points temporels individuels avec un pas de temps Δt . La conformité avec les équations est requise uniquement aux instants t , $t + \Delta t$, $t + 2\Delta t$, $t + 3\Delta t$, etc. Durant l'intervalle de temps Δt , une variation linéaire de la vitesse est supposée :

$$v_{ix}^t = \frac{v_{ix}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + v_{ix}^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{2} \quad (2.3)$$

L'accélération pendant cet intervalle est donc considérée comme constante.

$$\dot{v}_{ix}^t = \frac{v_{ix}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - v_{ix}^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta t} \quad (2.4)$$

En remplaçant les expressions 2.3 et 2.4 de vitesse et d'accélération dans l'équation 2.2, la relation suivante est obtenue :

$$R_{ix}^t = \frac{M_{ix}}{\Delta t} (v_{ix}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - v_{ix}^{t-\frac{\Delta t}{2}}) + \frac{C_{ix}}{2} (v_{ix}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + v_{ix}^{t-\frac{\Delta t}{2}}) \quad (2.5)$$

L'équation 2.5 montre que le schéma d'itération se superpose sur plusieurs intervalles de temps différents. En effet, R_{ix}^t est calculé sur un pas de temps Δt entre les temps t et $t + \Delta t$, tandis que les vitesses sont calculées sur base du même pas de temps Δt mais entre les temps $t - \frac{\Delta t}{2}$ et $t + \frac{\Delta t}{2}$.

En réarrangeant l'équation 2.5, la vitesse à un nouveau pas de temps $t + \frac{\Delta t}{2}$ peut être exprimée par rapport à la vitesse au pas temporel précédent $t - \frac{\Delta t}{2}$:

$$v_{ix}^{(t+\frac{\Delta t}{2})} = v_{ix}^{(t-\frac{\Delta t}{2})} \frac{(M_{ix}/\Delta t) - (C_{ix}/2)}{(M_{ix}/\Delta t) + (C_{ix}/2)} + \frac{R_{ix}^t}{M_{ix}/\Delta t + C_{ix}/2} \quad (2.6)$$

D'autre part, les coordonnées du nœud i au moment $t + \Delta t$ peuvent être exprimées comme suit :

$$x_i^{(t+\Delta t)} = x_i^t + \Delta t \cdot v_{ix}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \quad (2.7)$$

Si les positions des nœuds libres sont connues, il est possible, pour chaque élément associé, de déterminer les résidus au temps $t + \Delta t$. Pour rappel, les résidus représentent le balancement entre les forces externes qui s'appliquent sur la structure (P_{ix}) et les efforts internes mobilisés par la structure (T_{ix}). Lorsqu'ils tendent vers 0, les efforts internes sont assez bien estimés que pour balancer complètement le chargement externe. Les résidus peuvent donc être exprimés comme suit, pour chaque élément m connecté au nœud i dans la direction x :

$$R_{ix}^{(t+\Delta t)} = P_{ix} - K_{ix} \cdot u_{ix}^t = P_{ix} - \sum_m T_{ixm}^{(t+\Delta t)} \quad (2.8)$$

Pour tout élément m , les efforts internes peuvent être exprimés comme suit :

$$T_m^{(t+\Delta t)} = \frac{EA_m}{l_m^0} (l_m^{(t+\Delta t)} - l_m^0) + T_m^0 \quad (2.9)$$

Dans cette équation,

- l_m^0 est la longueur initiale de l'élément m ,
- $l_m^{(t+\Delta t)}$ est la longueur actuelle de l'élément m ,
- EA_m est le module de Young multiplié par la section transversale de l'élément m ,
- T_m^0 est la précontrainte initiale dans l'élément m .

Dans l'équation 2.8, l'équivalence entre $K_{ix} \cdot u_{ix}^t$ et $\sum_m T_{ixm}^{(t+\Delta t)}$ est obtenue par la loi de Hooke. Cette loi stipule que la déformation d'un matériau élastique est proportionnelle à la contrainte [18]. La relation est donnée par :

$$\sigma = E \cdot \epsilon \quad (2.10)$$

Cette relation est en lien direct avec l'expression $K_{ix} \cdot u_{ix}^t$ ou K_{ix} représente le coefficient de raideur et u_{ix}^t le déplacement. En effet, la contrainte pour l'élément m peut être exprimée comme suit :

$$\sigma_m = \frac{F_m}{A_m} = \frac{T_m}{A_m},$$

où la force F_m représente la tension dans le câble T_m . D'autre part, la déformation relative ϵ peut être exprimée en termes de la variation de longueur $\Delta l_m = l_m - l_m^0$ par rapport à la longueur initiale l_m^0 :

$$\epsilon = \frac{\Delta l_m}{l_m^0} = \frac{l_m - l_m^0}{l_m^0}$$

En substituant σ et ϵ dans l'équation 2.10 :

$$\frac{T_m}{A_m} = E \cdot \frac{l_m - l_m^0}{l_m^0} \quad (2.11)$$

et en isolant T_m ,

$$T_m = \frac{EA_m}{l_m^0} (l_m - l_m^0) = K \cdot u \quad (2.12)$$

on obtient l'expression des efforts internes. On ajoute alors le terme T_m^0 à l'équation 2.12 car le câble est déjà tendu avant d'y appliquer une force supplémentaire. On retombe alors sur l'équation 2.9.

Dans le cas particulier des câbles, comme expliqué dans le Chapitre 1, l'effort ne peut être négatif car le câble reprendrait de la compression. Or, par définition, un câble ne reprend que de la traction. Pour modéliser correctement le comportement d'un câble, si $T_m^{(t+\Delta t)}$ est plus petit que 0, l'effort $T_m^{(t+\Delta t)}$ est mis à 0.

2.3 Schéma itératif

Sur base des équations obtenues, un processus itératif va être réalisé avec deux buts principaux. Premièrement, les résidus à chaque nœud vont être calculés. Deuxièmement, les vitesses nodales vont aussi être calculées et servir à mettre à jour les coordonnées des nœuds. Le schéma général de ce processus est représenté sur la Figure 2.1.

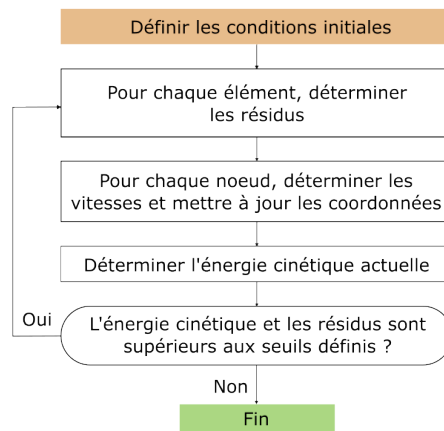


FIGURE 2.1 – Schéma itératif global. Adapté de [15].

2.3.1 Conditions initiales

Pour démarrer ce processus itératif, des conditions initiales sur les résidus et sur les vitesses vont être posées :

$$R_{ix}^0 = P_{ix} \quad v_{ix}^0 = 0$$

La vitesse au pas de temps $\frac{\Delta t}{2}$ est donnée par $v_{ix}^{\frac{\Delta t}{2}} = -v_{ix}^{\frac{-\Delta t}{2}}$. Cette formule peut être confirmée en définissant une vitesse imaginaire au pas de temps $-\frac{\Delta t}{2}$ qui est égale en valeur absolue, mais opposée en signe, à $v_{ix}^{\frac{\Delta t}{2}}$. De cette manière, l'évolution de la vitesse sur le pas de temps Δt est linéaire et la vitesse initiale au temps $t = 0$ est égale à 0 comme illustré sur la Figure 2.2.

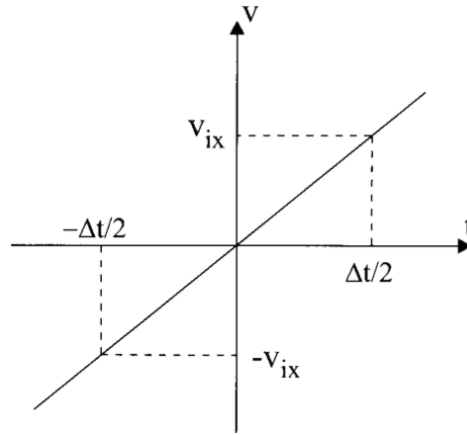


FIGURE 2.2 – Conditions initiale v_{ix} autour de $t=0$ [15].

Ensuite, en exprimant l'équation 2.6 pour $t = 0$, il est possible d'obtenir :

$$v_{ix}^{\frac{\Delta t}{2}} (M_{ix}/\Delta t + C_{ix}/2) = v_{ix}^{\frac{-\Delta t}{2}} (M_{ix}/\Delta t - C_{ix}/2) + R_{ix}^t \quad (2.13)$$

Si l'on remplace maintenant $v_{ix}^{\frac{-\Delta t}{2}}$ par $-v_{ix}^{\frac{\Delta t}{2}}$, on obtient la première valeur de la vitesse, au pas de temps $t = \frac{\Delta t}{2}$:

$$v_{ix}^{\left(\frac{\Delta t}{2}\right)} = \frac{\Delta t}{2M_{ix}} P_{ix}$$

2.3.2 Critères de convergence

Le processus itératif prendra fin sur base de deux critères de convergence. Le premier critère concerne les forces résiduelles R_{ix} . Ce critère implique que l'effort interne calculé est suffisamment proche de l'effort externe qui s'applique sur la structure afin de l'équilibrer. La convergence prendra donc fin uniquement si les résidus sont inférieurs à un seuil proche de 0 défini au préalable.

Le second critère concerne l'énergie cinétique. Il permet de valider le fait que la structure n'est plus en mouvement. Pour ce critère, c'est donc la somme des énergies cinétiques de tous les nœuds qui doit être sous un seuil proche de 0. Il est exprimé comme suit :

$$U_k = \sum_i^n \sum_{j=(x,y,z)}^m M_{ij} \cdot v_{ij}^2 \quad (2.14)$$

Les deux critères permettent de stopper le schéma d'itération et de confirmer que la solution à l'équilibre a été atteinte.

Afin de se représenter physiquement ces critères d'arrêt, la structure étudiée peut être comparée à un pendule oscillant.

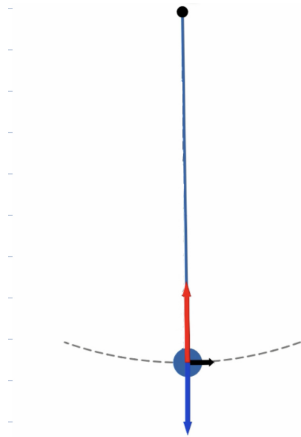


FIGURE 2.3 – Résultante des forces nulle¹.

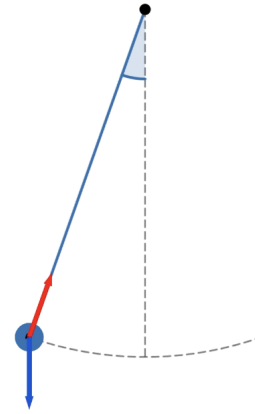


FIGURE 2.4 – Énergie cinétique nulle¹.

La Figure 2.3 représente le moment où la force de gravité est parfaitement équilibrée par la tension mobilisée dans le câble. Le résidu vaut donc 0. Dans cette situation, le pendule est en mouvement. Ensuite, dans la Figure 2.4, le pendule arrive au bout de sa trajectoire et s'apprête à repartir dans l'autre direction. Dans cette configuration, l'énergie cinétique est nulle mais la somme des forces de gravité et de tension dans le câble n'est pas nulle. Après amortissement, le point d'équilibre du pendule sera situé dans la verticale de son point d'accroche, où la somme des forces de gravité et de tension dans le câble est nulle et où vitesse cinétique après amortissement est également nulle. Cette analogie permet de comprendre l'importance de respecter ces deux critères en même temps afin d'attester que la solution qui est renvoyée est bien la solution à l'équilibre.

2.4 Stabilité de la méthode

Lors de l'utilisation de méthodes numériques, certains paramètres doivent être sélectionnés au départ. Ces paramètres doivent être choisis de manière réfléchie

1. Source : <https://www.desmos.com/calculator/x0nfv9hyvg?lang=fr>

afin de permettre la convergence de la méthode et d'en ajuster la rapidité. Dans le cas de la relaxation dynamique, trois paramètres sont contrôlés pour la stabilité de la méthode :

- la masse nodale fictive,
- le facteur d'amortissement fictif,
- l'intervalle de temps Δt .

2.4.1 Effet de la masse fictive et de l'intervalle de temps

Commençons par analyser l'effet de la masse fictive et de l'intervalle de temps. Il a été montré par Barnes [12] qu'il est possible de définir un Δt associé à une masse fictive pour lequel la convergence sera assurée. En prenant la première partie de l'équation 2.5, tirée de la seconde loi de Newton définissant le mouvement de n'importe quel noeud, la vitesse est exprimée comme suit :

$$v_i^{t+\frac{\Delta t}{2}} = v_i^{t-\frac{\Delta t}{2}} + \frac{\Delta t}{M} R_i^t \quad (2.15)$$

L'intervalle de temps suivant est alors :

$$v_i^{t+\frac{3\Delta t}{2}} = v_i^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \frac{\Delta t}{M} [R_i^t - S_{ij}\Delta t(v_i - v_j)^{t+\frac{\Delta t}{2}}] \quad (2.16)$$

où le terme entre crochets représente $R_i^{t+\Delta t}$ si S_{ij} est la rigidité d'expression $\frac{E \cdot A_{ij}}{l_{ij}^0}$. En combinant les équations 2.15 et 2.16 pour éliminer R_i^t , l'équation suivante est obtenue pour le noeud i :

$$-v_i^{t+\frac{3\Delta t}{2}} + 2v_i^{t+\frac{\Delta t}{2}} - v_i^{t-\frac{\Delta t}{2}} = \frac{\Delta t^2}{M} S_{ij}(v_i - v_j)^{t+\frac{\Delta t}{2}} \quad (2.17)$$

De manière similaire pour le noeud j ,

$$-v_j^{t+\frac{3\Delta t}{2}} + 2v_j^{t+\frac{\Delta t}{2}} - v_j^{t-\frac{\Delta t}{2}} = \frac{\Delta t^2}{M} S_{ij}(v_j - v_i)^{t+\frac{\Delta t}{2}} \quad (2.18)$$

En soustrayant les équations 2.17 et 2.18, on obtient :

$$-v_{ij}^{t+\frac{3\Delta t}{2}} + 2v_{ij}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - v_{ij}^{t-\frac{\Delta t}{2}} = 2\frac{\Delta t^2}{M} S_{ij}(v_{ij})^{t+\frac{\Delta t}{2}}, \quad (2.19)$$

où v_{ij} est la vitesse au noeud i par rapport aux noeuds j adjacents. Le cas limite de stabilité est celui où la vitesse des noeuds i par rapport aux noeuds j dans un intervalle de temps est égale et opposée à la vitesse relative dans l'intervalle de temps précédent. Si la vitesse est inférieure à celle du pas de temps précédent, la structure subit une diminution de vitesse avec le temps et converge vers le point d'équilibre. Si elle est supérieure, des inversions et des accumulations successives de ces vitesses relatives peuvent se produire, entraînant une divergence du processus. Par conséquent, pour le cas limite, il convient de fixer :

$$v_{ij}^{t+\frac{3\Delta t}{2}} = -v_{ij}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = v_{ij}^{t-\frac{\Delta t}{2}} \quad (2.20)$$

En utilisant cette expression, l'équation 2.19 devient :

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2M_i}{S_{ij}}} \quad \text{ou} \quad M_i = \frac{\Delta t^2}{2} S_{ij} \quad (2.21)$$

Si l'intention de l'analyse était de retracer le comportement dynamique en utilisant des masses nodales « réelles », l'équation 2.21 donnerait la plus grande valeur de Δt qui pourrait être utilisée pour assurer la stabilité numérique. La condition de stabilité décrite par cette équation est la plus critique si l'on considère les nœuds ayant le plus faible rapport masse/rigidité et que le mouvement s'aligne avec la direction principale de rigidité du système. Pour tout autre nœud (qui n'a pas le plus faible rapport masse/rigidité), ou pour des directions de mouvement non alignées avec la direction de la rigidité principale, la contrainte de stabilité est moins stricte. En d'autres termes, il serait possible de choisir un pas de temps Δt un peu plus grand sans compromettre la stabilité numérique.

Cependant, pour les analyses cinétiquement amorties, afin de fournir une solution statique, il n'est pas nécessaire d'utiliser les masses réelles car le comportement dynamique ne doit pas être reproduit. Des masses fictives sont donc utilisées. Afin d'atteindre la convergence plus rapidement, les valeurs de masse fictive M_i et de pas de temps Δt sont ajustées. Adapter ces valeurs modifiera le nombre d'itérations avant convergence, mais ne modifiera pas l'état d'équilibre vers lequel converge le système.

L'idée est que la stabilité dynamique du système peut être atteinte en diminuant l'intervalle de temps et en augmentant la masse fictive. Si l'intervalle de temps Δt est trop grand ou que la masse fictive est trop petite, alors des instabilités peuvent apparaître et le processus d'itération ne convergera pas vers un état d'équilibre. De manière intuitive, augmenter la masse fictive a pour effet principal d'augmenter l'inertie dans le système. Cela signifie qu'il réagira plus lentement aux forces appliquées, ce qui tend à amortir les oscillations rapides et à éviter les instabilités qui pourraient survenir dans les itérations du calcul. Cela permet de stabiliser un système trop sensible, notamment si l'intervalle de temps est relativement grand. Cependant, en augmentant de trop la masse fictive, cela pourrait ralentir excessivement la convergence et le temps nécessaire à atteindre l'état d'équilibre sera plus long.

D'autre part, réduire l'intervalle de temps permet d'effectuer des mises à jour plus fréquentes, ce qui a pour effet de mieux suivre l'évolution dynamique du système. Cela améliore la précision de la simulation et peut empêcher des oscillations trop importantes ou des instabilités. La convergence vers l'état d'équilibre est plus précise et peut être accélérée, car les erreurs dues aux approximations temporelles sont réduites. Par contre, un intervalle de temps trop petit peut entraîner un nombre d'itérations plus élevé, ce qui alourdit le calcul et le rend plus coûteux en temps de simulation, sans nécessairement améliorer la stabilité si la masse fictive est mal ajustée.

2.4.2 Effet du coefficient d'amortissement

Le facteur d'amortissement critique C_{ic} , utilisé dans l'équation 2.6, peut être exprimé comme suit :

$$C_{ic} = 2\sqrt{S_i M_i} \quad (2.22)$$

Ce facteur correspond à la quantité d'amortissement nécessaire pour éviter des oscillations après une perturbation. C'est l'amortissement minimal qui permet de revenir à l'équilibre sans oscillations.

Afin de simplifier l'équation 2.6, les différents paramètres peuvent être rassemblés et la constante d'amortissement k du système est définie par la relation suivante :

$$k = \Delta t \left(\frac{C_{ic}}{M_i} \right) \quad (2.23)$$

Cette formule relie k (la constante d'amortissement) à l'intervalle de temps Δt utilisé dans la simulation numérique, au facteur d'amortissement critique C_{ic} et à la masse M_i . Cela indique que la constante d'amortissement dépend de la façon dont la simulation progresse dans le temps (à travers Δt) et des propriétés du système. Le choix de k influence la vitesse de convergence sans affecter l'état d'équilibre. Une faible valeur de k permet des oscillations prolongées autour de l'équilibre, ralentissant la convergence. À l'inverse, une valeur trop élevée entraîne un amortissement excessif qui freine fortement la progression vers la solution. La valeur du coefficient d'amortissement sera donc ajustée afin de converger vers l'équilibre en un temps raisonnable.

On peut dès lors réécrire l'équation 2.6 comme suit :

$$v_i^{t+\frac{\Delta t}{2}} = v_i^{t-\frac{\Delta t}{2}} \left(\frac{1 - k/2}{1 + k/2} \right) + R_{ix}^t \left(\frac{\Delta t}{M_{ix}} \right) \left(\frac{1}{1 + k/2} \right) \quad (2.24)$$

ou encore :

$$v_i^{t+\frac{\Delta t}{2}} = v_i^{t-\frac{\Delta t}{2}} A + R_{ix}^t B_{ix} \quad (2.25)$$

où

$$A = \left(\frac{1 - k/2}{1 + k/2} \right) \quad (2.26)$$

et

$$B_{ix} = \left(\frac{\Delta t}{M_{ix}} \right) \left(\frac{1}{1 + k/2} \right) \quad (2.27)$$

Ces expressions de A et B indiquent que A est une constante pour toute la structure tandis que B diffère pour chaque nœud.

Les vitesses et positions dans le réseau de câbles sont donc calculées itérativement en utilisant les relations 2.25 et 2.7 jusqu'à respecter les critères de convergence.

Chapitre 3

Description de la situation

Le but de ce mémoire est d'utiliser la méthode de la relaxation dynamique afin d'optimiser la géométrie et les prétensions nécessaires à la stabilisation de structures câblées servant de supports à des panneaux photovoltaïques. La structure étudiée ainsi que les différents paramètres entrant en jeu sont développés dans ce chapitre.

3.1 Structure étudiée

La structure photovoltaïque étudiée sera à double câble de concavité inverse comme présenté dans le Chapitre 1 à la Figure 1.8b. Les deux câbles seront reliés par des suspentes verticales. Le réseau de câbles ainsi formé permet une meilleure stabilité en cas d'exposition au vent. Le câble inférieur permet de stabiliser la structure en cas de soulèvement.

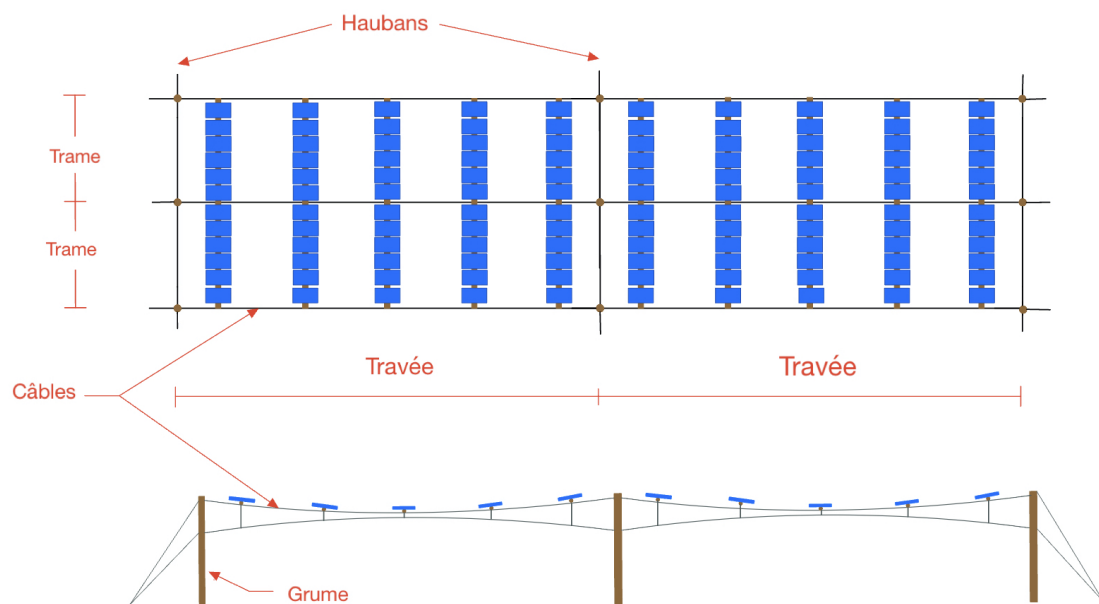


FIGURE 3.1 – Vue générale de la structure. Adapté de [19].

Sur la vue du haut de la Figure 3.1, les câbles de travée sont reliés entre eux par les poutres de support des panneaux photovoltaïques. Les colonnes sont en grume de bois et sont stabilisées à l'aide de haubans. Comme mentionné dans le Chapitre 1, cette configuration permet d'atteindre de grandes portées pour un encombrement minime au sol, permettant un libre passage éventuellement pour des voitures ou des engins agricoles en fonction de l'application visée.

3.2 Dimensions et notations de références

Les analyses développées dans ce mémoire vont se baser sur une géométrie sélectionnée qui pourra être généralisée à des situations comparables. Cette section a pour but d'introduire les différents paramètres qui entrent en jeu lors de l'optimisation de la structure.

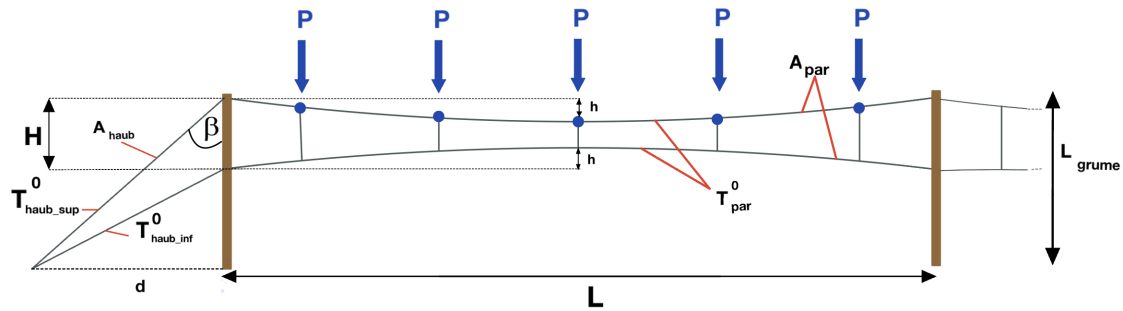


FIGURE 3.2 – Vue générale de la structure. Inspiré de [19].

3.2.1 Définition des paramètres géométriques

Les paramètres géométriques sont illustrés sur la figure 3.2 et sont les suivants :

- L : la portée du réseau de câbles,
- H : la distance entre les câbles paraboliques supérieurs et inférieurs perpendiculairement au niveau de la grume de bois,
- h : la flèche géométrique initiale,
- A_{par} : la section utilisée dans les câbles paraboliques supérieurs et inférieurs,
- A_{haub} : la section utilisée dans les haubans,
- L_{grume} : la longueur des colonnes en grume de bois,
- d la distance entre le point d'ancrage des haubans et le pied de la colonne en grume de bois,
- β l'angle entre la colonne en grume de bois et le hauban.

3.2.2 Définition des paramètres mécaniques des câbles

- Module de Young $E = 170$ [GPa],
- Limite d'élasticité $f_y = 1,96$ [GPa].

3.2.3 Définition des paramètres de prétensions

Les paramètres de prétension sont les suivants :

- T_{par}^0 : la prétension appliquée dans les câbles paraboliques inférieurs et supérieurs,
- $T_{haub,sup}^0$: la prétension appliquée dans le hauban supérieur,
- $T_{haub,inf}^0$: la prétension appliquée dans le hauban inférieur.

3.2.4 Évaluation de la charge ponctuelle P

Quatre types de charges sollicitantes vont être considérés : le poids propre des panneaux photovoltaïques présents sur la poutre de support, le vent agissant sur les panneaux, la neige et le poids propre des câbles de travée.

Le poids propre des panneaux

Afin d'évaluer le poids propre des panneaux, la charge induite par les poutres de support reposant sur les câbles supérieurs du réseau doit être évaluée. Les panneaux, mesurant 2 mètres de long sur 1 mètre de large, et ayant un poids surfacique de $20 \left[\frac{kg}{m^2} \right]$ [20], sont disposés sur des poutres de support d'une longueur de 6 mètres. Chaque poutre de support peut ainsi accueillir 6 panneaux sur sa longueur.

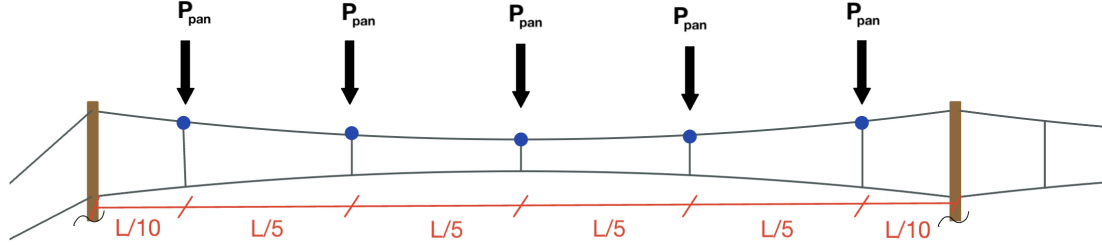


FIGURE 3.3 – Action du poids propre des panneaux sur le câble supérieur. Inspiré de [19].

La charge totale induite par le poids propre des panneaux, qui correspond à la réaction d'appui exercée par la poutre de support sur les câbles supérieurs, est calculée comme suit :

$$P_{pan} = \rho_{pan} \cdot g \cdot S_{pan} \cdot CS = 3,178 \text{ [kN]} \quad (3.1)$$

Avec :

- $\rho_{pan} = 20 \left[\frac{kg}{m^2} \right]$, la masse par unité d'aire d'un panneau,
- $g = 9,81 \left[\frac{m}{s^2} \right]$, l'accélération de la gravité,
- $S_{pan} = 12 \text{ [m}^2\text{]}$, la surface totale de panneaux supportée en un point du câble,
- $CS = 1,35 \text{ [/]}$, le coefficient de sécurité relatif aux charges permanentes fournies par l'Eurocode 1 [21].

Ce résultat correspond à la charge totale exercée par une seule poutre de support des panneaux photovoltaïques. Toutefois, cette charge étant répartie sur deux appuis, uniquement la moitié du poids propre des panneaux incombe à chacun des appuis. De plus, comme deux poutres de support de 6 mètres reposent au même endroit sur les câbles supérieurs, leur contribution est doublée. Ainsi, la charge équivalente à considérer est de 3,178 [kN].

Le vent

Le vent peut souffler dans toutes les directions par rapport à la structure. Cependant, par souci de simplification, seuls deux cas extrêmes sont considérés :

- le vent souffle verticalement de haut en bas,
- le vent souffle verticalement de bas en haut entraînant un phénomène de soulèvement.

En théorie, les charges dues au vent s'appliquent perpendiculairement aux panneaux photovoltaïques, ce qui implique qu'elles ne sont pas nécessairement alignées avec la verticale, leur orientation dépendant de l'inclinaison des panneaux. Cependant, pour simplifier l'analyse dans ce mémoire, les charges dues au vent sont considérées comme s'exerçant dans la même direction que celles dues au poids propre, c'est-à-dire, verticalement. Cette simplification permet de rendre les simulations numériques plus accessibles et de définir un unique vecteur de forces orienté dans la même direction.

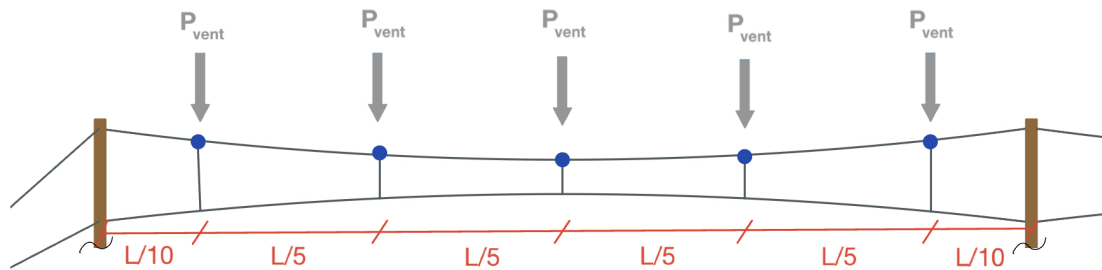


FIGURE 3.4 – Action du vent sur le câble supérieur. Inspiré de [19].

Cette charge de vent est assimilée à une charge surfacique de $1 \left[\frac{kN}{m^2} \right]$ agissant sur la surface des 6 panneaux présents sur la poutre de support. De cette manière, on calcule donc :

$$P_{vent} = q_{vent} \cdot S_{pan} \cdot CS = 18 \text{ [kN]} \quad (3.2)$$

Avec :

- $q_{vent} = 1 \left[\frac{kN}{m^2} \right]$, charge surfacique due au vent,
- $CS = 1,5 \text{ []}$, le coefficient de sécurité relatif aux charges variables fournie par l'Eurocode 1 [21].

De manière similaire au calcul du poids propre, la charge de vent est évaluée sur la surface totale des panneaux photovoltaïques présents sur la poutre de support. Cette charge est répartie en deux réactions d'appui, car chaque poutre repose sur deux câbles supérieurs de travée. Par ailleurs, comme deux poutres de support de 6 mètres sont positionnées au même endroit sur les câbles, leur contribution est combinée pour obtenir la charge totale due au vent à cet emplacement.

La neige

De manière analogue à la charge due au vent, la neige est considérée comme une charge surfacique s'appliquant sur la surface des panneaux photovoltaïques mais de valeur égale à $0,5 \left[\frac{kN}{m^2} \right]$.

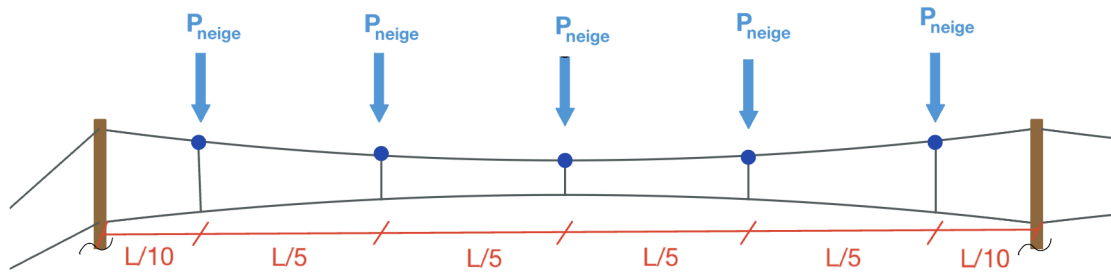


FIGURE 3.5 – Action de la neige sur le câble supérieur. Inspiré de [19].

L'action de la neige se calcule comme suit pour une longueur de poutre de support de 6 mètres :

$$P_{neige} = q_{neige} \cdot S_{pan} \cdot CS = 9 \text{ [kN]} \quad (3.3)$$

Avec :

- $q_{neige} = 0,5 \frac{kN}{m^2}$, la charge surfacique due à la neige,
- $CS = 1,5$ [/], le coefficient de sécurité relatif aux charges variables fournies par l'Eurocode 1 [21].

De manière similaire aux calculs des charges précédentes, cette valeur représente la charge totale due à la neige.

Le poids propre des câbles de travée

Négliger le poids propre du câble est une hypothèse envisageable mais à poser avec prudence [1]. Cette hypothèse sera discutée et validée à la section 7.2 à l'aide du solveur de la relaxation dynamique qui est développé dans le cadre de ce mémoire. Le poids propre des câbles n'est donc pas repris dans la charge totale.

Charge totale ponctuelle P

La charge totale ponctuelle P est la somme des charges ponctuelles de poids propre des panneaux, de vent et de neige s'appliquant en un point du câble. Il est important de noter que dans le cas d'un soulèvement du vent, l'effet du poids propre et de la neige sont négligés de manière sécuritaire afin de ne garder que l'action du vent.

La Table 3.1 permet de relier directement la charge ponctuelle P totale s'appliquant en un point du câble à la longueur de la poutre de support. Dans la suite du mémoire, toute la démarche visant à l'optimisation de la structure sera développée pour une charge ponctuelle de 30 [kN] correspondant à une longueur de poutre de support de 6 [m] et 6 panneaux photovoltaïques. Les résultats pour les autres longueurs de poutre de support sont exposés en annexe. Ainsi, la personne en charge de l'installation d'une telle structure dispose de différentes longueurs de trames sur lesquelles s'appuyer pour planifier l'installation de manière optimale.

Longueur des poutres de supports	P_{pan}	P_{vent}	P_{neige}	P
6 [m]	3,178 [kN]	18 [kN]	9 [kN]	30,178 [kN]
5 [m]	2,648 [kN]	15 [kN]	7,5 [kN]	25,15 [kN]
4 [m]	2,118 [kN]	12 [kN]	6 [kN]	20,118 [kN]
3 [m]	1,589 [kN]	9 [kN]	4,5 [kN]	15,089 [kN]
2 [m]	1,059 [kN]	6 [kN]	3 [kN]	10,059 [kN]
1 [m]	0,529 [kN]	3[kN]	1,5 [kN]	5,029 [kN]

TABLE 3.1 – Correspondance de la charge totale ponctuelle P en fonction de la longueur des poutres de support.

Sur base de la structure en double câble développée dans ce chapitre, l'outil de calcul basé sur la relaxation dynamique ainsi qu'un code "drawer" générateur de structures sont implémentés et validés dans la Partie II du mémoire.

Deuxième partie

Méthode

Chapitre 4

Développement de l’outil de calcul

4.1 Contexte

Comme abordé aux Chapitres 1 et 2, la simulation de réseaux de câbles sous tension nécessite une approche prenant en compte la non-linéarité géométrique, qui joue un rôle fondamental dans les comportements de déformation de ces structures. Dans cette optique, le modèle de relaxation dynamique est particulièrement adapté, car il permet d’intégrer les interactions entre les forces de tension et la déformation. Le code Python développé dans ce chapitre s’appuie sur la relaxation dynamique et est inspiré des travaux de Shervin Azadi et Pirouz Nourian [22].

4.2 Description du code de référence

Le code de Shervin Azadi et Pirouz Nourian [22] commence par définir les paramètres initiaux tels que les nœuds fixes qui seront immobiles tout le long de la simulation, ainsi que les longueurs de repos des câbles. Ensuite, dans chaque câble, la loi de Hooke est appliquée, comme expliqué dans la Section 2.2 de ce mémoire. Les contraintes de tension sont donc proportionnelles aux allongements par rapport aux longueurs de repos. La position des nœuds évolue ainsi itérativement sous l’effet des forces qui leur sont appliquées jusqu’à atteindre une configuration d’équilibre.

Ce code de référence présente certaines limitations pour les simulations de câbles. Par exemple, il n’intègre pas la possibilité d’empêcher certains éléments de reprendre de la compression (et donc de se comporter comme des câbles). De plus, il n’est pas possible de définir une prétension initiale à attribuer aux câbles. Certaines modifications ont donc été apportées au code afin de lever ces limitations et ajouter des fonctionnalités permettant de s’adapter au mieux à la structure étudiée dans ce mémoire.

4.3 Code solveur de relaxation dynamique : modifications et améliorations apportées

Le lien pour accéder à tous les codes développés dans ce mémoire est disponible à l'Annexe A. Le code dénommé "Solveur" dans le OneDrive partagé est celui présenté dans cette section. Les différentes modifications apportées au code de référence sont développées ci-dessous :

Ajout d'une force de prétension initiale T^0

Comme expliqué dans le Chapitre 1, il est courant de soumettre les câbles à une précontrainte, appelée prétension. Une force de tension initiale T^0 a donc été ajoutée dans le modèle en suivant le calcul des efforts internes présenté dans le Chapitre 2 (Equation 2.9). Cette composante simule la tension préexistante dans les câbles avant l'application de charges supplémentaires, ce qui représente un aspect essentiel pour les structures en tension dans lesquelles les câbles sont souvent tendus en amont. Cela permet notamment de pouvoir reprendre en partie de la compression si cela s'avère nécessaire.

Rigidité spécifique aux éléments

Afin de pouvoir attribuer des modules de Young différents à différents éléments (liaison entre deux nœuds), ainsi qu'une aire différente, le coefficient de rigidité K (voir équation 2.12) est remplacé par $\frac{E_m \cdot A_m}{l_m}$. Les variables E et A peuvent donc être définies par des vecteurs pour lesquels chaque entrée correspond au module de Young ou à l'aire d'un élément de la structure.

Masque de compression

Afin de déterminer si l'élément considéré doit se comporter comme une barre rigide ou un câble, une variable `compressionmask` a été introduite dans le code. Cette variable permet d'éliminer les forces de compression pour certains câbles, simulant ainsi un comportement de traction pure, propre aux câbles. Cette option est particulièrement utile pour modéliser des câbles qui ne peuvent pas se comprimer, garantissant que seules les forces de traction sont prises en compte pour ces éléments.

Critères d'arrêt

Afin de garantir la stabilité et la convergence de l'algorithme, comme expliqué dans la Section 2.3.2, des critères d'arrêt basés sur le résidu maximal et l'énergie cinétique ont été intégrés. Lorsque le résidu et l'énergie cinétique tombe en dessous de valeurs seuils prédéfinies, le processus itératif s'arrête, permettant d'optimiser le temps de calcul tout en assurant que la solution atteinte est proche de l'équilibre.

Poids propre des câbles

Afin d'inclure la charge due au poids propre des câbles le plus précisément possible, pour chaque élément, la charge de poids propre appliquée à chacun des nœuds situés à ses extrémités correspond à la moitié de la charge de poids propre totale

de l'élément. La Figure 4.1 présente deux éléments compris entre 3 nœuds.

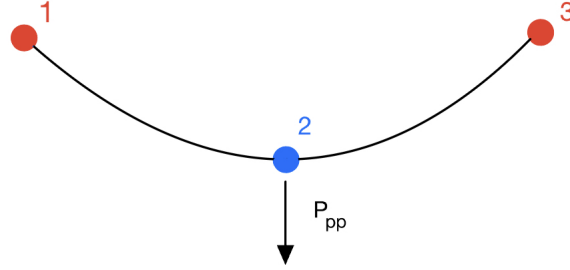


FIGURE 4.1 – Schéma montrant l'application du poids propre d'un câble discrétisé en 3 nœuds.

Le nœud 2, situé au centre de deux éléments reprendra la moitié de la charge de chacun de ces deux éléments. La charge peut être calculée comme suit :

$$P_{pp} = \frac{\rho \cdot g \cdot A \cdot L_{1-2}}{2} + \frac{\rho \cdot g \cdot A \cdot L_{2-3}}{2} \quad (4.1)$$

Avec :

- L_{1-2} : la longueur de câble entre le nœud 1 et le nœud 2 en [m],
- L_{2-3} : la longueur de câble entre le nœud 2 et le nœud 3 en [m],
- A : la section du câble en [mm^2],
- g : l'accélération de la gravité en [$\frac{m}{s^2}$],
- $\rho = 7850$ [$\frac{kg}{m^3}$] : le poids volumique de l'acier [23].

4.4 Code "drawer", générateur de structure

Comme expliqué précédemment, la structure sélectionnée est une structure à double concavité inversée. Un code permettant de générer de telles structures a donc été développé. Il est disponible via le lien de l'Annexe A sous le nom `Drawer.py`. Comme expliqué dans le Chapitre 1, lorsque le rapport entre la longueur du câble et la flèche est supérieur à 10, une chaînette et une parabole sont de forme presque identique. La géométrie initiale de la structure sera donc deux paraboles en concavité inversée. Le code permet de tracer ces paraboles démarrant à une coordonnée donnée et sur base d'une flèche initiale. Cela permet de définir les deux paraboles pour les deux câbles de la structure. La position des suspentes à différents endroits dans la direction x peut ensuite être définie. Le code permet également de varier le nombre de points utilisés pour discrétiser la structure. Afin de générer la structure complète, le drawer permet l'ajout de colonnes en grume de bois (via des éléments avec des modules de Young relatif à l'essence utilisée) et des haubans. Il permet également de modifier leur inclinaison de ces haubans et des colonnes en grume de bois. La Figure 4.2 montre une structure générée par le drawer avec un hauban du côté gauche. Les points représentés en rouge sont maintenus fixe lors de l'utilisation du solveur de relaxation dynamique tandis que les points bleus sont mobiles.

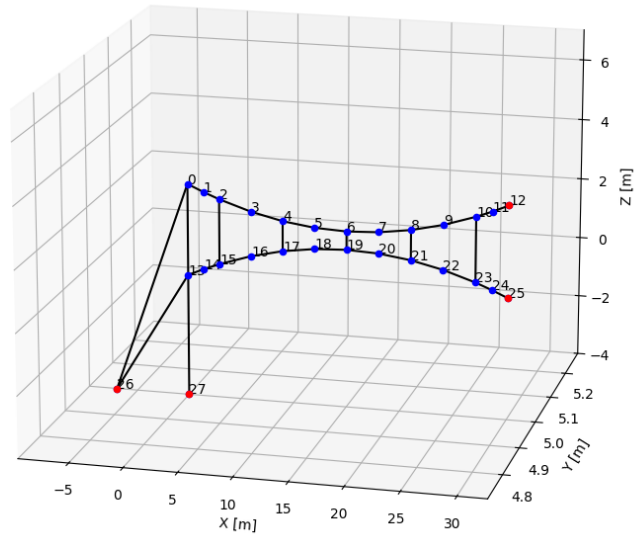


FIGURE 4.2 – Exemple de structure haubanée renvoyée par le drawer.

4.5 Exemple d'utilisation

La Figure 4.3 montre un réseau de câbles tendu entre 4 nœuds fixes renvoyé par le solveur après convergence. Pour s'assurer que le code renvoie bien la géométrie à l'équilibre correctement après convergence, l'évolution des deux critères de convergence va être suivie au long des itérations. Le seuil de convergence pour chacun des critères est fixé à 10^{-2} , seuil similaire à celui utilisé dans [24].

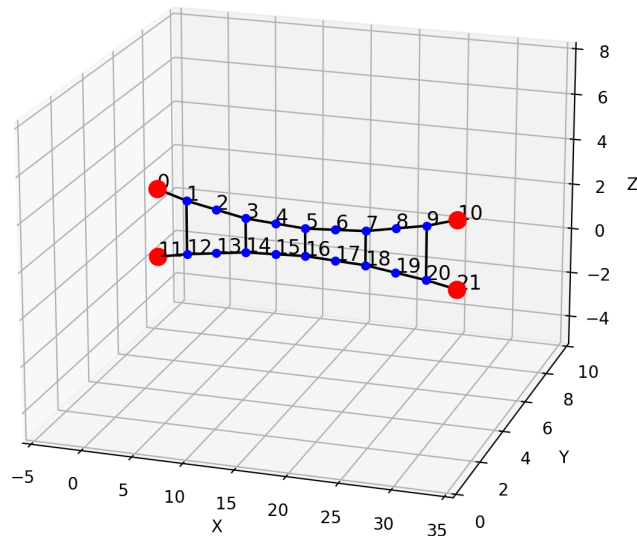


FIGURE 4.3 – Déformée renvoyée par le solveur après convergence.

La Figure 4.4 montre l'évolution des résidus et de la somme des énergies cinétiques de tous les points discrétisant la structure à chacune des itérations du code. Ces figures montrent que les deux critères sont remplis après environ 1750 itérations. Ceci prouve que la déformée présentée à la Figure 4.3 est bien la géométrie à l'équilibre qui doit être renvoyée par la méthode de la relaxation dynamique implémentée par ce code.

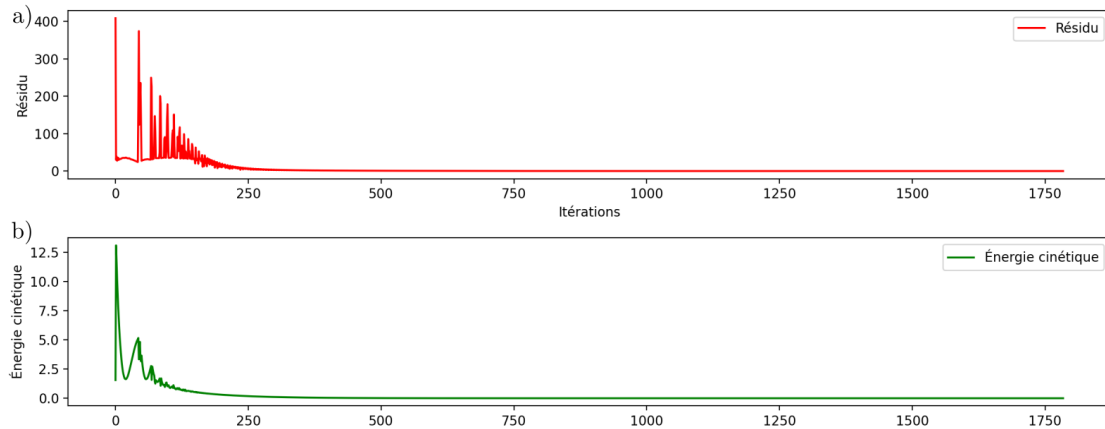


FIGURE 4.4 – Suivi des critères : a) Evolution des résidus, b) évolution de la somme des énergies cinétiques.

4.6 Conclusion du chapitre

Grâce aux modifications et aux améliorations apportées, la combinaison du solveur et du drawer développés dans ce chapitre offre un outil de calcul plus flexible et plus précis pour modéliser des réseaux de câbles en tension. L'intégration de prétensions, de rigidités et sections spécifiques, d'éléments se comportant comme des câbles, de critères d'arrêt et du poids propre des câbles permet de représenter des conditions complexes de chargement et de géométrie. Malgré certaines simplifications, cet outil constitue une solution performante et adaptée pour des études de stabilité et de résistance des structures en câbles.

Chapitre 5

Validation de l’outil de calcul

Le développement d’un outil de calcul basé sur la méthode de la relaxation dynamique constitue une étape importante de ce mémoire. Afin d’évaluer les performances de cet outil de calcul, il est utile d’effectuer une série de tests comparatifs. Ces tests visent à vérifier que le code fournit des ordres de grandeur cohérents en termes d’efforts internes et de déplacements des nœuds constituant des structures.

Pour ce faire, plusieurs cas ont été étudiés, allant de configurations simples pour lesquelles des résultats de référence sont disponibles, à des scénarios plus complexes proches des applications envisagées. Ces comparaisons permettent d’identifier si le comportement global du code est en accord avec les principes fondamentaux de la mécanique des structures et s’il répond aux exigences pratiques dans le cadre des réseaux de câbles en tension.

Pour vérifier de manière précise les résultats du code, il aurait été nécessaire de comparer les prédictions numériques avec des mesures obtenues sur des structures réelles. Cela aurait permis d’évaluer la fidélité du modèle face aux comportements observés dans des conditions physiques concrètes, incluant les effets de paramètres souvent difficiles à modéliser, tels que les imperfections géométriques, les différents détails d’assemblages, les variations des propriétés des matériaux. Cependant, ce type de validation expérimentale exige des ressources significatives, tant en termes de moyens techniques que de temps, et dépasse le cadre de ce mémoire. Les tests réalisés ici visent donc principalement à établir une cohérence générale des résultats, en s’appuyant sur des cas analytiques et numériques théoriques.

5.1 Comparaison avec le modèle analytique du câble parabolique

Pour commencer, les résultats fournis par le solveur de relaxation dynamique sont comparés avec les résultats analytiques obtenus sur un câble parabolique. Dans la référence [1], diverses formules sont expliquées afin de calculer analytiquement la situation présentée à la Figure 5.1. Dans cette situation, un câble parabolique

répondant à l'hypothèse d'inextensibilité et subissant une charge de type 2¹ telle que définie dans [1] est étudié.

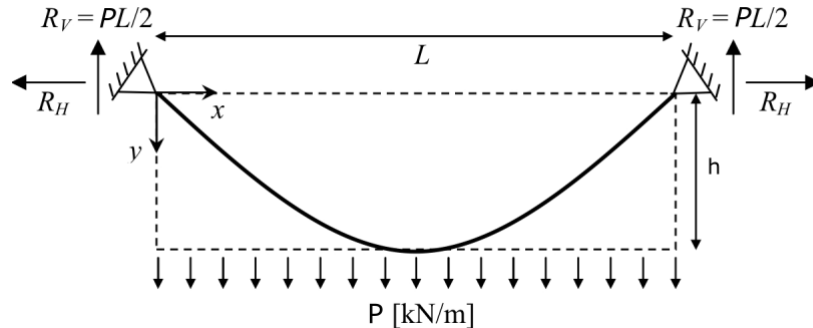


FIGURE 5.1 – Situation étudiée : câble parabolique inextensible et subissant une charge de type 2, adapté de [1].

Pour une telle situation, il a été démontré [1] que l'effort maximal développé dans le câble peut être calculé via :

$$N_{max} = \frac{P \cdot L^2}{8 \cdot h} \sqrt{1 + \left(\frac{4 \cdot h}{L}\right)^2} \quad (5.1)$$

Où :

- h est la flèche géométrique du câble en [m],
- L est la longueur de la corde² du câble en [m],
- N_{max} est l'effort interne de traction maximal mobilisé dans le câble en [kN],
- P est la charge répartie en [kN/m].

La situation présentée ci-dessus ne prend pas en compte l'extensibilité des câbles. Or, en pratique, les câbles se détendent sous l'influence des charges qu'ils subissent. Cela doit également être considéré dans les calculs. En effet, dû à ce phénomène, la flèche géométrique du câble va être augmentée. Afin d'être plus précis sur le calcul des efforts internes, cette flèche augmentée doit être prise en compte dans l'Equation 5.1.

La Figure 5.2 permet de calculer la flèche d'un câble ayant un module de Young de 170 [GPa] en fonction de son élancement $\frac{L}{h}$ en prenant en compte l'extensibilité du câble. À titre d'exemple, pour un câble d'élancement $\frac{L}{h} = 10$ et travaillant à une contrainte de 1000 [MPa], un facteur multiplicatif de l'ordre $\alpha = 1,11$ est obtenu. La flèche initiale doit donc être multipliée par ce facteur afin d'obtenir la flèche augmentée. De la même manière, un câble d'élancement $\frac{L}{h} = 10$ travaillant à une contrainte de 1500 [MPa] aura un facteur multiplicatif de l'ordre de $\alpha = 1,16$.

1. Une charge répartie de type 2 correspond à une charge linéairement répartie le long du câble

2. La corde d'un câble est définie comme la droite joignant les appuis du câble

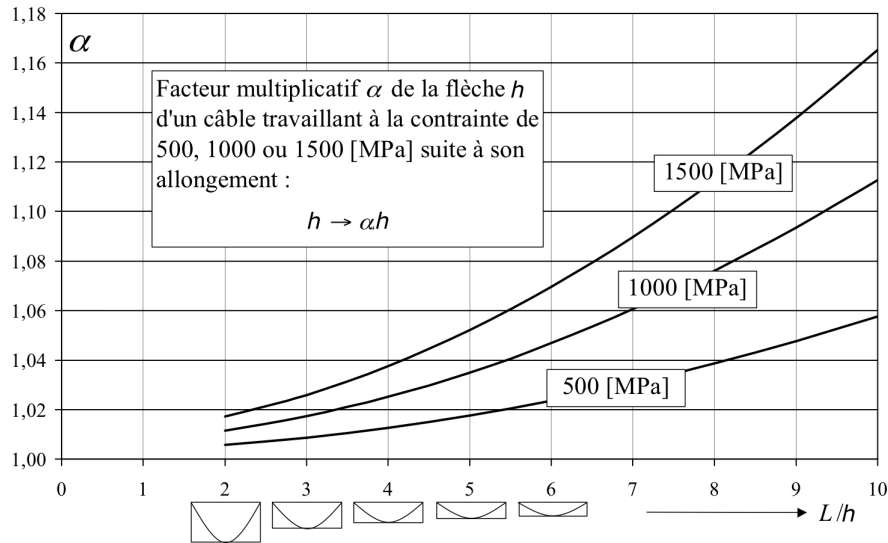


FIGURE 5.2 – Évolution du facteur multiplicatif de flèche α en fonction de l'élan-
cement $\frac{L}{h}$. Adapté de [1].

Concrètement, la Figure 5.2 peut être utilisée afin de déterminer le facteur multipli-
catif de la flèche h d'un câble parabolique en fonction de son élan-
cement. Ensuite, l'Equation 5.1 est utilisée pour déterminer l'effort interne maximal aux appuis sur
base de ce nouveau h . Diverses situations ont été testées sur base de différents
câbles. Tous les résultats ont été comparés aux résultats fournis par le solveur de
relaxation dynamique afin de statuer sur son bon fonctionnement et sont repris à
la Table 5.1.

	Câble 1	Câble 2	Câble 3	Câble 4
L [m]	10	10	10	10
h [m]	1	1	2	2
A [mm ²]	485	300	200	600
E [GPa]	170	170	170	170
P [$\frac{kN}{m}$]	40	40	40	40
$N_{max}(\alpha \cdot h)$ [kN]	496,6	473,83	310	316
N_{max} [kN] via le solveur	485	464	298	304
$\alpha \cdot h$ [m]	1,11	1,164	2,1	2,038
h [m] via le solveur	1,108	1,163	2,091	2,031
Contrainte dans le câble [MPa]	≈ 1000	≈ 1500	≈ 1500	≈ 500

TABLE 5.1 – Comparaison des valeurs obtenues via les méthodes analytiques et via
le solveur

Ces comparaisons montrent que la valeur de la flèche calculée avec le solveur est quasiment identique à celle donnée par la Figure 5.2. En revanche, l'effort interne calculé analytiquement sur base de l'équation 5.1 présente une légère différence. Par exemple, pour le câble 1, une différence de 2,33% est observée entre la solution analytique et celle obtenue avec le solveur. Cette différence, bien que minime, s'explique par le fait que le calcul analytique repose sur une hypothèse de configuration du câble figée et fournit donc une valeur légèrement supérieure à celle obtenue par la méthode numérique, qui procède de manière itérative en tenant compte des ajustements successifs de la géométrie. Par conséquent, la méthode numérique offre un résultat plus précis et plus représentatif du comportement réel du câble.

5.2 Comparaison avec le modèle analytique du câble précontraint soumis à un effort transversal

Cette partie s'intéresse au cas du câble de poids propre négligeable, tendu selon sa corde avec un effort de précontrainte noté T^0 et soumis à un effort ponctuel latéral P s'appliquant à mi-longueur du câble.

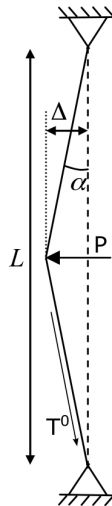


FIGURE 5.3 – Situation étudiée : Câble de poids propre négligeable, subissant un effort latéral P , et précontraint de T^0 . Adapté de [1].

L'impact de la précontrainte T^0 sur Δ , la déformation du câble sous l'application de la charge latérale P est étudiée. La Figure 5.4, tirée de [1], permet de calculer Δ pour un câble de module de Young $E = 170$ [GPa] subissant un effort ponctuel P et ayant une précontrainte T^0 . Ce graphe va être utilisé afin de comparer les valeurs analytiques avec les valeurs renvoyées par le solveur de relaxation dynamique pour une situation équivalente.

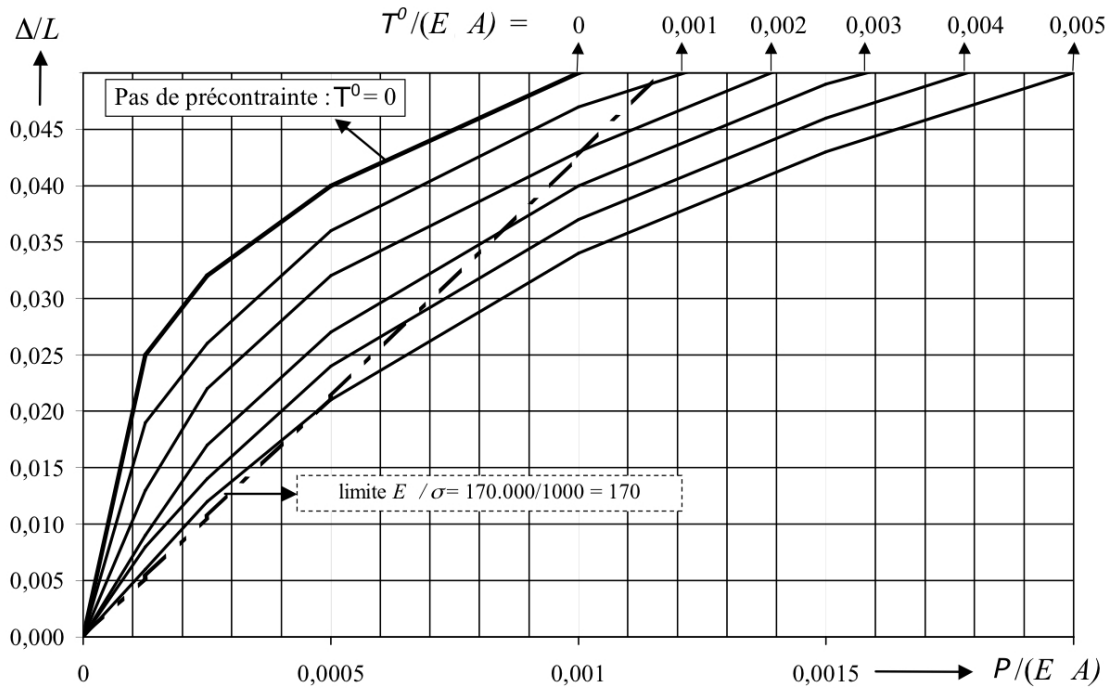


FIGURE 5.4 – Évolution de Δ en fonction de la précontrainte T^0 et de la force latérale P . Adapté de [1].

La Table 5.2 reprend les résultats renvoyés par le solveur et ceux représentés sur la Figure 5.4.

TABLE 5.2 – Résultats comparatifs pour le câble précontraint via les graphes et via le solveur

	Câble 1	Câble 2	Câble 3	Câble 4	Câble 5
L [m]	10	10	10	10	10
E [GPa]	170	170	170	170	170
A [mm^2]	200	300	400	500	600
T^0 [kN]	0	51	136	255	400
P [kN]	34	51	68	85	102
$\Delta_{graphes}$ [cm]	50	47	43	40	37
$\Delta_{solveur}$ [cm]	50,1	46,78	43,47	40,23	37,36

Le solveur de relaxation dynamique renvoie des résultats tout à fait cohérents lorsque le câble est soumis à de la prétension. L'écart le plus grand observé est de seulement 1,11% pour le câble 3. Les légers écarts observés entre les deux méthodes peuvent être dus à des erreurs de précision lors de la lecture des valeurs sur la Figure 5.4.

5.3 Comparaison pour le calcul d'un treillis

Pour le dernier test de validation, le comportement du solveur va être analysé lorsque des éléments reprennent de la compression. Étant donné que la structure présentée dans ce mémoire est un réseau câblé prenant en compte les colonnes en grume de bois (qui reprennent de la compression, contrairement aux câbles), il est utile de vérifier si le comportement en compression des éléments est réaliste ou non.

La structure représentée sur la Figure 5.5 a été modélisée sur le logiciel ISSD avec les paramètres suivants :

- Diamètre des barres = 30 [mm]
- Module de Young $E = 210$ [GPa]
- Charges ponctuelles $P = 5$ [kN]

La même situation a été calculée avec le solveur de relaxation dynamique. La comparaison des résultats en termes d'efforts internes est reprise dans la Table 5.3.

Les valeurs négatives correspondent à un effort de compression dans les barres. Le comportement en compression est parfaitement bien calculé par le solveur.

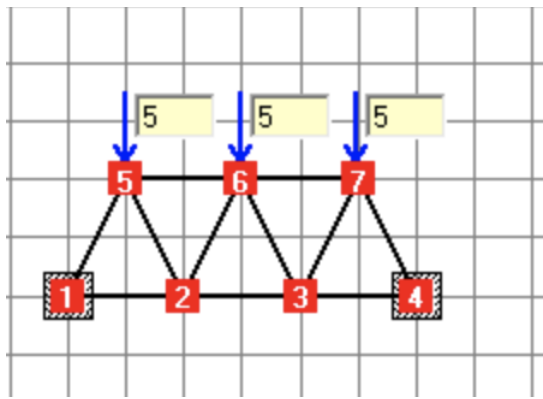


FIGURE 5.5 – Modélisation du treillis sur le logiciel ISSD [25].

Barre	N [kN] via ISSD	N [kN] via le solveur
1-2	-0,83	-0,83
2-3	1,66	1,66
3-4	-0,83	-0,83
5-6	-4,99	-4,99
6-7	-4,99	-4,99
1-5	-8,37	-8,38
2-5	2,78	2,79
2-6	-2,79	-2,79
3-6	-2,79	-2,79
3-7	2,78	2,79
4-7	-8,37	-8,38

TABLE 5.3 – Résultats comparatifs pour le treillis.

5.4 Conclusion du chapitre

Ce chapitre a permis de vérifier les résultats du solveur de relaxation dynamique dans différentes conditions. Cela permet de montrer que le solveur renvoie des valeurs cohérentes pour des câbles paraboliques, des câbles précontraints et des éléments reprenant de la compression. Ces différents éléments seront combinés dans la suite du mémoire afin d'obtenir la structure complète finale. Les tests réalisés ci-dessus ne sont pas exhaustifs mais permettent de valider le comportement du solveur avant de commencer les analyses. Enfin, l'entièreté des résultats fournis dans ce chapitre peuvent être obtenus en utilisant les codes suivants disponible via le lien présent dans l'Annexe [A](#) :

Pour obtenir les résultats de la table [5.1](#) et [5.2](#) les codes suivants sont utilisés :

- `Solveur.py`
- `Validation5.1and5.2.py`
- `DrawerForValidation.py`

Pour obtenir les résultats de la table [5.3](#) :

- `Solveur.py`
- `Validation_treillis.py`

Troisième partie

Optimisation du réseau de câbles

Chapitre 6

Analyse dimensionnelle

L'outil de calcul ayant été testé et validé, il va à présent être utilisé afin de répondre aux questions objectives de ce mémoire. La géométrie du réseau de câbles, et plus précisément, la section des câbles utilisés, fera l'objet d'une optimisation. L'impact de la prétension dans les câbles paraboliques ainsi que celui des haubans sera ensuite étudié. Enfin, les effets de l'inclinaison des grumes de bois sera évalué. Avant d'entamer l'étude de ces paramètres, une analyse dimensionnelle est réalisée afin de simplifier la formulation de la situation et d'obtenir des paramètres adimensionnels facilitant l'interprétation des résultats.

6.1 Description de la situation

La complexité globale de la situation conduit à la décomposer en sous-problèmes pour en faciliter l'analyse. Dans un premier temps, seule la partie centrale constituée des câbles paraboliques sera étudiée, sans prendre en compte les haubans. L'analyse structurale débute en supposant la structure parfaitement équilibrée et stable. Les Figures 6.1 et 6.2 illustrent cette configuration schématique. Les points d'ancrage des câbles sur les colonnes sont considérés sans déplacement transversal ni vertical. Ce sont les nœuds fixes et ils sont représentés en rouge. Les nœuds bleus, soumis à des charges pendant la simulation, correspondent aux emplacements prévus pour les poutres de support des panneaux photovoltaïques.

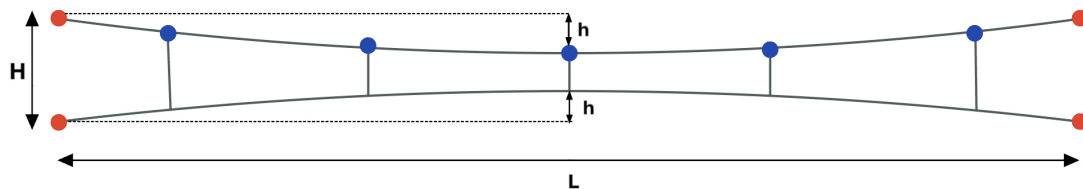


FIGURE 6.1 – Schéma mettant en œuvre les différents paramètres géométriques : la longueur L , la hauteur entre deux points fixes H et la flèche initiale h .

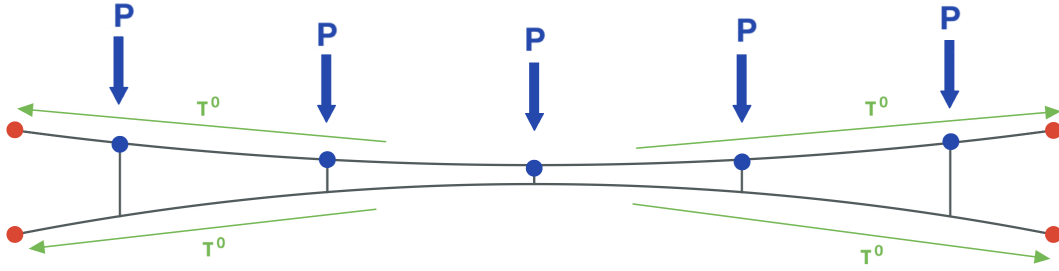


FIGURE 6.2 – Schéma mettant en œuvre les différents paramètres de force : la charge P et la prétension T^0 .

L'une des questions adressée dans ce mémoire est la minimisation de la section des câbles afin de réduire la quantité de matière utilisée. En d'autres termes, pour certains paramètres fixés (cas de charge P , prétension T^0 , flèche géométrique h , inter-distance H entre les 2 câbles, portée L du réseau de câbles), quelle est la section minimale qui peut être utilisée ?

Cette section minimale devra permettre de respecter deux critères : premièrement, un critère de flèche ($\Delta = \frac{L}{100}$ [m]) et deuxièmement, un critère sur la limite d'élasticité du câble utilisé (f_y). La validité du critère d'élasticité est établie sur base de la traction maximale qui est mobilisée dans le réseau suite à l'application des charges externes et de la prétension. Ainsi $\frac{N_{max}}{A} < f_y$ avec $f_y = 1,96$ [GPa]. Cette valeur de limite élastique a été choisie sur base du catalogue de [26]. Cependant, un critère plus strict de 0,852 [GPa] sera utilisé dans les simulations pour prescrire la traction maximale admissible au sein des câbles, ce qui correspond à un facteur de sécurité de 2,2 comme utilisé également par [26]. Le critère de flèche sera vérifié par rapport à la position du nœud central du câble supérieur. Si la position de ce nœud excède un déplacement de plus de $\frac{L}{100}$ [m] alors le critère n'est pas validé.

Les câbles utilisés sont des "6x36" et viennent du catalogue de [26]. Ils sont fait d'une âme en acier, et sont galvanisés. La disposition des torons est parallèle, comme expliqué dans le Chapitre 1. Une telle disposition permet de supposer un module de Young $E = 170$ [GPa]. L'impact de la variation du module de Young ne sera pas étudiée dans le cadre de ce mémoire et pour cette raison, ce paramètre ne fait pas partie des paramètres considérés directement dans l'analyse dimensionnelle.

Pour résumer, les paramètres entrant en jeu lors de l'optimisation sont repris ci-dessous. Pour la géométrie :

- L : la portée du réseau de câbles,
- H : la hauteur entre deux points fixes,
- h : la flèche géométrique des câbles supérieur et inférieur,
- A : la section des câbles en acier que l'on souhaite minimiser.

Pour les efforts :

- T^0 : la prétension initiale,
- P : les charges ponctuelles.

Pour les caractéristiques mécaniques des câbles :

- f_y : la limite d'élasticité,
- P_{pp} : le poids volumique du matériau du câble par unité de longueur.

6.2 Application du Théorème de Buckingham

L'analyse dimensionnelle est une méthode qui s'intéresse à l'obtention d'équations décrivant des phénomènes à partir de la simple supposition que ceux-ci peuvent être caractérisés par un nombre de variables réduit. Elle cherche à établir des relations mathématiques entre différentes variables physiques [27]. Les objectifs d'une telle démarche sont multiples :

1. Réduire les variables dimensionnelles sous la forme de groupes sans dimension pourvus d'un sens physique,
2. Simplifier l'échange d'information entre des modèles à des échelles différentes,
3. Réduire le coût des expériences et des calculs (car on manipule moins de variables).

Le théorème de Buckingham est à l'origine de la théorie de la similitude et établit donc le comportement des nombres adimensionnels [28].

Dans [9], il s'énonce comme suit :

Soit K le nombre de dimensions fondamentales nécessaires pour décrire les variables physiques. Dans le domaine de la mécanique, toutes les variables physiques peuvent être exprimées en termes des dimensions de la masse, de la longueur et du temps ; ainsi, $K = 3$. Soit P_1, P_2, \dots, P_N les N variables physiques impliquées dans la relation physique.

$$f_1(P_1, P_2, \dots, P_N) = 0 \quad (6.1)$$

Ainsi, la relation physique (Équation 6.1) peut être réécrite sous la forme d'une relation entre $(N - K)$ produits adimensionnels (appelés produits Π)

$$f_2 = (\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_{N-K}) = 0 \quad (6.2)$$

où chaque produit Π est un produit adimensionnel constitué d'un ensemble de K variables physiques et d'une autre variable physique. Soient P_1, P_2, \dots, P_K l'ensemble sélectionné des K variables physiques. Alors :

$$\Pi_1 = f_3(P_1, P_2, \dots, P_K, P_{K+1})$$

$$\Pi_2 = f_4(P_1, P_2, \dots, P_K, P_{K+2})$$

⋮

$$\Pi_{N-K} = f_5(P_1, P_2, \dots, P_K, P_N)$$

Le choix des variables répétitives, P_1, P_2, \dots, P_K , doit être tel qu'elles incluent toutes les K dimensions utilisées dans le problème. De plus, la variable dépendante doit apparaître dans un seul des produits Π . Dans le cadre de la situation de la section 6.1, le but est d'optimiser la section de câbles ce qui revient à exprimer la relation suivante :

$$A = f(L, H, h, T_0, P, f_y, P_{pp}) \quad (6.3)$$

Dans ce cas-ci, la variable dépendante sera donc la variable A et on souhaite minimiser cette fonction afin d'obtenir une section optimale de câble en fonction des autres paramètres de la situation.

Le théorème de Buckingham peut maintenant être appliqué à ce problème. Il exprime que toute loi physique peut se réduire à un nombre minimal d'inconnues en introduisant des variables sans dimension, notées Π . Dans ce cas, il y a $N = 8$ variables physiques et $K = 3$ dimensions fondamentales (m, l, t). Ainsi, le nombre de groupes adimensionnels Π est donné par :

$$\text{Nombre de groupes } \Pi = N - K = 8 - 3 = 5.$$

Dans la situation étudiée, les variables physiques et leurs dimensions sont les suivantes :

$$\text{— } [T_0] = m \cdot l \cdot t^{-2},$$

- $[P] = m \cdot l \cdot t^{-2}$,
- $[f_y] = m \cdot l^{-1} \cdot t^{-2}$,
- $[h] = l$,
- $[H] = l$,
- $[L] = l$,
- $[A] = l^2$,
- $[P_{pp}] = m \cdot l \cdot t^{-2}$.

Où P_{pp} est le poids propre exprimé en $[kN]$. Ce poids propre est calculé sur base du produit du poids volumique du câble γ_c en $[\frac{kN}{m^3}]$, de la section du câble et de la longueur du câble. Le poids volumique γ_c est quant à lui obtenu sur base de la masse volumique $\rho_c = 7850 [\frac{kg}{m^3}]$ correspondant à celle de l'acier multiplié par la constante de gravité $g = 9,81 [\frac{m}{s^2}]$.

Afin de former les produits adimensionnels, trois variables de référence sont sélectionnées : H , f_y et P . Un exposant est attribué à chacune de ces variables afin de permettre d'exprimer les bilans sur les unités fondamentales et d'obtenir les systèmes d'équations à résoudre afin de former les produits adimensionnels Π .

1. Formation de $\Pi_1 = A \cdot H^{x_1} \cdot P^{x_2} \cdot f_y^{x_3}$

Les dimensions de chaque terme sont :

- A (section des câbles) : $[A] = l^2$,
- f_y (limite d'élasticité) : $[f_y] = m \cdot l^{-1} \cdot t^{-2}$,
- P (charge totale) : $[P] = m \cdot l \cdot t^{-2}$.
- H (distance entre les 2 câbles) : $[H] = l$

Un bilan est effectué sur chacune des unités fondamentales.

$$[l^0 \cdot m^0 \cdot t^0] = l^2 \cdot l^{x_1} \cdot m^{x_2} \cdot l^{x_2} \cdot t^{-2x_2} \cdot m^{x_3} \cdot l^{-x_3} \cdot t^{-2x_3}$$

Le système suivant est obtenu :

$$\begin{cases} l : 0 = 2 + x_1 + x_2 - x_3 \\ m : 0 = x_2 + x_3 \\ t : 0 = -2x_2 - 2x_3 \end{cases}$$

Les équations concernant m et t donnent $x_2 = -x_3$. L'équation concernant l devient :

$$0 = 2 + x_1 + 2x_2$$

Le système comporte un degré de liberté. L'exposant x_1 est donc fixé à 0 afin de simplifier le produit et d'enlever la dépendance en H . Il en découle alors $x_2 = -1$ et $x_3 = 1$.

Le produit $\frac{A \cdot f_y}{P}$ peut maintenant être calculé :

$$\left[\frac{A \cdot f_y}{P} \right] = \frac{(l^2) \cdot (m \cdot l^{-1} \cdot t^{-2})}{m \cdot l \cdot t^{-2}} = \frac{m \cdot l}{m \cdot l} = 1.$$

Ainsi, $\Pi_1 = \frac{A \cdot f_y}{P}$ est adimensionnel.

2. Formation de $\Pi_2 = h \cdot H^{x_1}$

Les dimensions de chaque terme sont :

- h (flèche géométrique) : $[h] = l$,
- H (distance entre les câbles) : $[H] = l$.

Le bilan sur les unités fondamentales donne :

$$[l^0 \cdot m^0 \cdot t^0] = l \cdot l^{x_1}$$

Et donc :

$$l : 0 = 1 + x_1$$

Il en découle alors $x_1 = -1$.

Le produit $\frac{h}{H}$ peut être calculé :

$$\left[\frac{h}{H} \right] = \frac{l}{l} = 1.$$

Ainsi, $\Pi_2 = \frac{h}{H}$ est également adimensionnel.

3. Formation de $\Pi_3 = L \cdot H^{x_1}$

Les dimensions de chaque terme sont :

- L (portée entre les supports) : $[L] = l$,
- H (distance entre les câbles) : $[H] = l$.

De manière similaire au produit Π_2 , une seule grandeur physique entre en jeu et la valeur de l'exposant est donc $x_1 = -1$. Le produit $\frac{L}{H}$ donne :

$$\left[\frac{L}{H} \right] = \frac{l}{l} = 1.$$

Ainsi, $\Pi_3 = \frac{L}{H}$ est adimensionnel.

4. Formation de $\Pi_4 = T_0 \cdot P^{x_1}$

Les dimensions de chaque terme sont :

- T_0 (précontrainte initiale) : $[T_0] = m \cdot l \cdot t^{-2}$,
- P (charge totale) : $[P] = m \cdot l \cdot t^{-2}$.

Le bilan sur les unités fondamentales donne :

$$[l^0 \cdot m^0 \cdot t^0] = l \cdot m \cdot t^{-2} \cdot l^{x_1} \cdot m^{x_1} \cdot t^{-2x_1}$$

Le système suivant est alors obtenu :

$$\begin{cases} l : 0 = 1 + x_1 \\ m : 0 = 1 + x_1 \\ t : 0 = -2 - 2x_1 \end{cases}$$

Il en découle à nouveau que $x_1 = -1$.

Le produit $\frac{T_0}{P}$ est calculé :

$$\left[\frac{T_0}{P} \right] = \frac{m \cdot l \cdot t^{-2}}{m \cdot l \cdot t^{-2}} = 1.$$

Ainsi, $\Pi_4 = \frac{T_0}{P}$ est également adimensionnel.

5. Formation de $\Pi_5 = P_p \cdot P^{x_1}$

Les dimensions de chaque terme sont :

- P_{pp} (poids propre) : $[P_{pp}] = m \cdot l \cdot t^{-2}$,
- P (charge totale) : $[P] = m \cdot l \cdot t^{-2}$.

Comme pour le produit Π_4 , étant donné que les unités des deux grandeurs sont similaires, cela donne $x_1 = -1$.

$$\left[\frac{P_{pp}}{P} \right] = \frac{m \cdot l \cdot t^{-2}}{m \cdot l \cdot t^{-2}} = 1.$$

Ainsi, $\Pi_5 = \frac{P_{pp}}{P}$ est également adimensionnel.

Relation

Les nombres adimensionnels formés sont :

$$\Pi_1 = \frac{A \cdot f_y}{P}, \quad \Pi_2 = \frac{h}{H}, \quad \Pi_3 = \frac{L}{H}, \quad \Pi_4 = \frac{T_0}{P}, \quad \Pi_5 = \frac{P_{pp}}{P}.$$

La relation suivante est alors établie :

$$f_1 \left(\frac{A \cdot f_y}{P}, \frac{h}{H}, \frac{L}{H}, \frac{T_0}{P}, \frac{P_{pp}}{P} \right) = 0 \tag{6.4}$$

Ou bien encore :

$$\frac{A \cdot f_y}{P} = f_2 \left(\frac{h}{H}, \frac{L}{H}, \frac{T_0}{P}, \frac{P_{pp}}{P} \right) \tag{6.5}$$

6.3 Conclusion du chapitre

Le théorème de Buckingham a permis de former des nombres adimensionnels à partir des paramètres du problème d'optimisation de départ. La relation 6.5 ainsi obtenue, permet une analyse plus aisée de la situation ainsi que de mieux mesurer l'impact de chacun des nombres adimensionnels dans les analyses. Dans le Chapitre 7, l'objectif sera de créer un algorithme intégrant le solveur et le drawer, et permettant de tracer l'évolution de la section en fonction des autres nombres adimensionnels de l'Equation 6.5.

Chapitre 7

Réseau simple de câbles

Dans ce chapitre, l'impact du poids propre des câbles sur l'optimisation de la section des câbles paraboliques est étudié. De plus, une présentation complète des raisonnements permettant de déduire la géométrie qui permet une utilisation minimale de section ainsi que l'influence de la prétension mise dans le réseau de câbles est présentée.

7.1 Schéma d'optimisation

L'optimisation de la section des câbles afin de réduire la quantité de matière utilisée est un des objectifs principaux de ce mémoire. Comme montré dans l'Équation 6.5 rappelée en Equation 7.1, la section dépend de la géométrie de la structure (via le nombre adimensionnel $\frac{h}{H}$), des efforts de prétension dans les câbles (via $\frac{T^0}{P}$) et des caractéristiques mécaniques des câbles utilisés :

$$\frac{A \cdot f_y}{P} = f \left(\frac{h}{H}, \frac{L}{H}, \frac{T^0}{P}, \frac{P_{pp}}{P} \right) \quad (7.1)$$

Afin d'analyser les effets de ces différents paramètres sur la section, plusieurs situations sont développées ci-dessous. Pour chacune de ces situations, la section optimale va être calculée. Un schéma général d'optimisation utilisant la méthode de la bisection¹ a été développé afin de trouver la valeur optimale de la section par rapport aux différents paramètres. Ce schéma est illustré sur la Figure 7.1. Un code Python a été implémenté sur base de ce schéma d'optimisation ainsi que du drawer et du solveur développés dans le Chapitre 4. Ce code peut être retrouvé sous le lien de l'Annexe A et s'intitule `OptimisationSection.py`.

Pour ce schéma général d'optimisation, il est envisagé de tester itérativement différentes flèches initiales de la structure et différentes prétensions dans le réseau de câbles. Pour chacune de ces itérations, les paramètres H , L , E et f_y sont fixés. Une itération du schéma général est parcourue ici à titre d'exemple pour une prétension T_j^0 et une flèche h_i fixées.

1. Méthode d'optimisation développée dans [29]

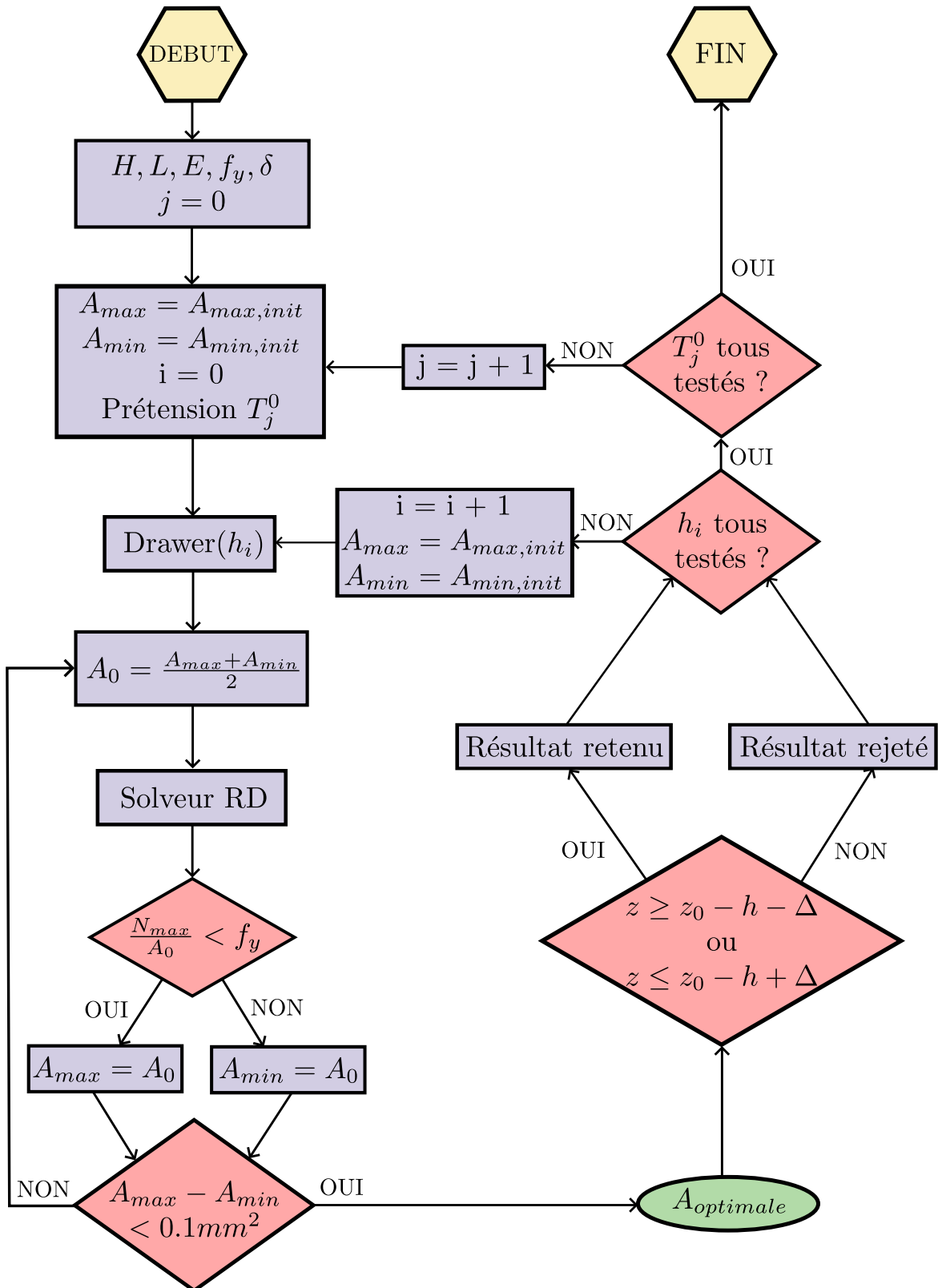


FIGURE 7.1 – Schéma d'optimisation général de la section des câbles.

Tout d’abord, les valeurs initiales des sections minimales et maximales utilisées pour la bisection sont définies. La structure étudiée est ensuite générée par le drawer sur base de la valeur de flèche h_i . La section A_0 utilisée pour cette itération est ensuite définie sur base des valeurs de sections minimale et maximale. Le solveur de relaxation dynamique est lancé afin d’obtenir les efforts dans les câbles. Sur base des efforts obtenus, le critère d’élasticité est vérifié. Si les valeurs actuelles d’effort maximal et de section permettent de respecter le critère, cela signifie que la section peut encore être diminuée. La valeur actuelle de section est alors attribuée à la borne supérieure, pour diminuer la section pour la prochaine utilisation du solveur. Par contre, si le critère d’élasticité n’est pas vérifié, cela signifie que la section doit être augmentée pour pouvoir reprendre l’effort maximal présent dans le câble. La section minimale doit être remplacée par la section actuelle afin d’augmenter la section pour le prochain appel du solveur de relaxation dynamique. Ce processus prendra fin lorsque les deux bornes sur la section seront suffisamment proches, c’est-à-dire, quand leur différence sera inférieure à 0.1 mm^2 . La section actuelle sera alors la section optimale.

En fonction des déplacements de chaque point renvoyés par le solveur de relaxation dynamique, le critère de flèche va être vérifié pour le point situé à mi-portée du câble supérieur. Deux situations de charge différentes peuvent être étudiées en fonction de la direction de la charge. Si la charge vient du haut, la coordonnée verticale du point à mi-portée doit être supérieure à la coordonnée initiale en z du point fixe de la parabole supérieure (nœud 0) z_0 auquel on soustrait la flèche initiale (h) et la flèche admissible (Δ). Par contre, si la charge vient du bas, la coordonnée verticale du point à mi-portée doit être inférieure à la coordonnée z_0 à laquelle on soustrait la flèche initiale h et on additionne la flèche admissible (Δ). Si le critère de flèche est respecté, la section obtenue respecte les deux critères fixés et est conservée. D’autres géométries et d’autres prétensions peuvent ensuite éventuellement être testées.

7.2 Effet du poids propre

L’objectif est maintenant d’évaluer l’influence relative des produits adimensionnels sur les analyses d’optimisation qui vont être étudiées. Dans [1], il est mis en évidence que lorsque les câbles travaillent à une contrainte proche de la limite d’élasticité, le poids propre de ceux-ci peut être négligé lors des calculs dû au faible impact du poids propre en termes d’efforts internes et de flèche. Dans ce mémoire, les câbles sont dimensionnés de manière à travailler à des contraintes proches de leur limite élastique dans un objectif d’optimisation de la section. Ainsi, les conditions considérées permettent d’appliquer l’hypothèse de négligence du poids propre des câbles.

Cependant, avant de réaliser ce genre d’hypothèse simplificatrice, il est important d’évaluer et quantifier l’impact du poids propre des câbles dans les analyses d’optimisation afin de prendre la décision la plus judicieuse. Cette vérification va être

effectuée sur base de la situation suivante :

- $L = 30$ [m],
- $H = 3$ [m],
- h est évalué d'un intervalle de $h=0,15$ [m] à $h= 1,35$ [m],
- $T^0 = 600$ [kN],
- $P = 150$ [kN] (ceci correspond à l'application de 5 charges ponctuelles de 30 [kN]),
- $f_y = 0,852$ [GPa] ,
- $P_{pp} = \gamma_c \cdot A \cdot L$, avec $\gamma_c = \rho_c \cdot g$.

La flèche géométrique $h=0$ [m] n'est pas testée car elle n'a pas de sens physique dans la réalité. En effet, pour avoir un câble parfaitement droit, selon l'Equation 5.1, il faudrait qu'un effort interne infini soit présent dans le câble. Il est important de noter également que la valeur maximale de la flèche géométrique h est 1,35 [m]. Cette flèche permet d'avoir une distance entre les points à mi-portée des paraboles supérieure et inférieure de 30 [cm] pour la situation exposée ci-dessus. La flèche maximale admissible (Δ) étant de 30 [cm] ($\frac{L}{100}$) après chargement, limiter la valeur maximale de h à 1,35 [m] permet de ne pas avoir de croisement entre les câbles, même pour la situation limite du critère de flèche. Une flèche initiale h supérieure à 1,35 [m] a été testée et cela provoque des instabilités numériques.

Sur base des données fixées ci-dessus, l'évolution du facteur adimensionnel $\frac{P_{pp}}{P}$ est analysée par rapport au rapport $\frac{h}{H}$. Différentes géométries sont également considérées. Afin de simplifier l'analyse, un facteur d'homothétie λ est défini et est appliqué sur les variables géométriques L , H et h ainsi que sur les variables d'efforts P et T^0 .

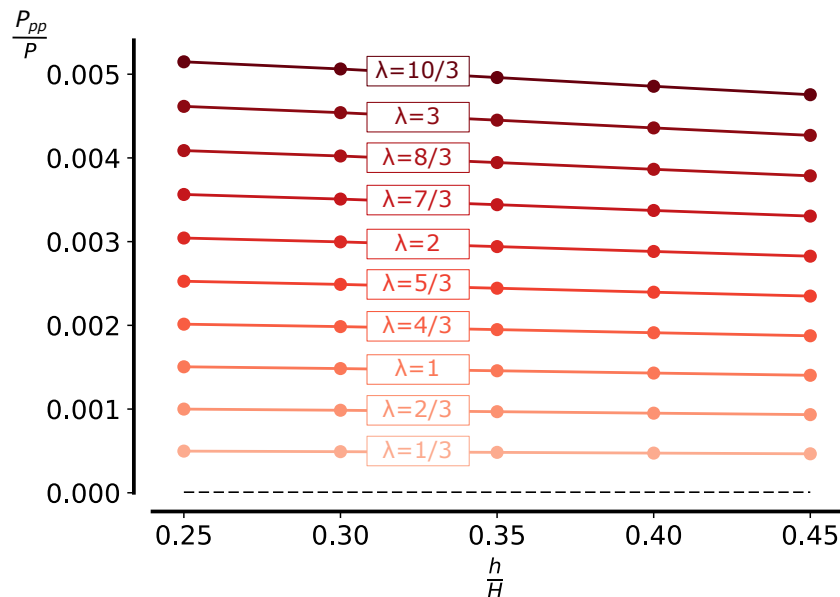


FIGURE 7.2 – Influence du poids propre pour différents facteurs d'homothétie λ .

La Figure 7.2 représente l'évolution du facteur adimensionnel $\frac{P_{pp}}{P}$ par rapport au rapport $\frac{h}{H}$ pour différentes valeurs du facteur d'homothétie. Il est à noter que pour chaque valeur obtenue sur ce graphe, la variable déterminante est la section A . En effet, pour rappel, $P_{pp} = \rho_c \cdot g \cdot A \cdot L$. Le facteur ρ_c est constant car le même matériau est utilisé dans toutes les situations et le rapport $\frac{L}{H}$ est également constant entre les différentes situations car les deux variables sont multipliées par le même facteur d'homothétie. La valeur pour la section A est obtenue sur base du processus d'optimisation développé dans la section 7.1. Bien que le facteur $\frac{h}{H}$ ait été évaluée sur un intervalle allant de $\frac{h}{H} = 0,05$ à $\frac{h}{H} = 0,45$, les valeurs pour des $\frac{h}{H} < 0,25$ ne sont pas représentées sur ce graphe car la section trouvée dans ces situations ne permettait pas de respecter le critère de flèche et le critère d'élasticité.

Cette Figure 7.2 montre que, au plus la portée de la structure est grande (facteur d'homotétie λ élevé), au plus la valeur du facteur $\frac{P_{pp}}{P}$ est importante. Par contre, cette valeur diminue légèrement avec l'augmentation de la flèche géométrique initiale.

L'influence de ce facteur adimensionnel $\frac{P_{pp}}{P}$ sur le calcul global de la section peut maintenant être évaluée. Sur la Figure 7.3, les courbes colorées représentant le facteur adimensionnel $\frac{A \cdot f_y}{P}$ sont représentées pour les différentes valeurs du facteur d'homothétie λ tandis que la courbe noire considère le cas où le poids propre est négligé (le facteur $\frac{P_{pp}}{P}$ n'entre donc pas en compte).

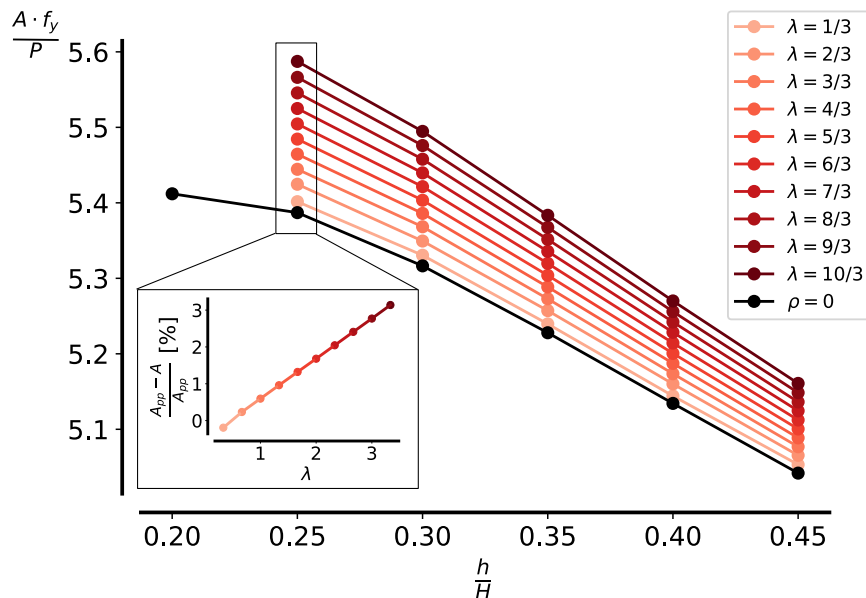


FIGURE 7.3 – Influence du poids propre sur la section optimisée.

Plusieurs observations intéressantes peuvent être faites sur base de ce graphe. Tout d'abord, l'influence du poids propre n'est que très limitée. En effet, le sous-graphique

de la Figure 7.3 représente l'évolution de la section par rapport au facteur d'homothétie dans le cas le plus critique ($\frac{h}{H} = 0.25$). L'augmentation de section est de $\approx 3\%$ au maximum. Les valeurs de section renvoyées dans cette analyse sont les sections optimales à la limite d'élasticité. En pratique, une sécurité sera prise par rapport aux sections obtenues et les 3% observés lors de cette analyse seront négligeables par rapport à la sécurité prise. De plus, la déviation maximale par rapport à la section où le poids propre est négligé correspond à une structure pour laquelle $\lambda = \frac{10}{3}$ et donc, $L = 100$ [m] et $H = 10$ [m]. En pratique, ce genre de structure ne sera pas utilisé car cela correspond à des dimensions irréalistes pour les applications visées dans ce mémoire.

Ensuite, il est intéressant de noter que, lorsque $\rho = 0$, les courbes correspondant aux différents facteurs d'homothétie λ sont confondues. Les graphes ainsi obtenus deviennent donc universels pour des rapports adimensionnels constants.

Sur base des observations faites ci-dessus, le poids propre sera négligé pour la suite des analyses.

7.3 Effet de la flèche initiale et de la précontrainte

Dans le cadre de ce mémoire, l'attention est portée particulièrement sur l'évolution de la section des câbles par rapport à la flèche géométrique h . C'est pourquoi différentes structures avec un rapport $\frac{L}{H}$ fixé vont être étudiées. Différents rapports $\frac{T^0}{P}$ vont également être utilisés afin d'analyser l'effet de la précontrainte.

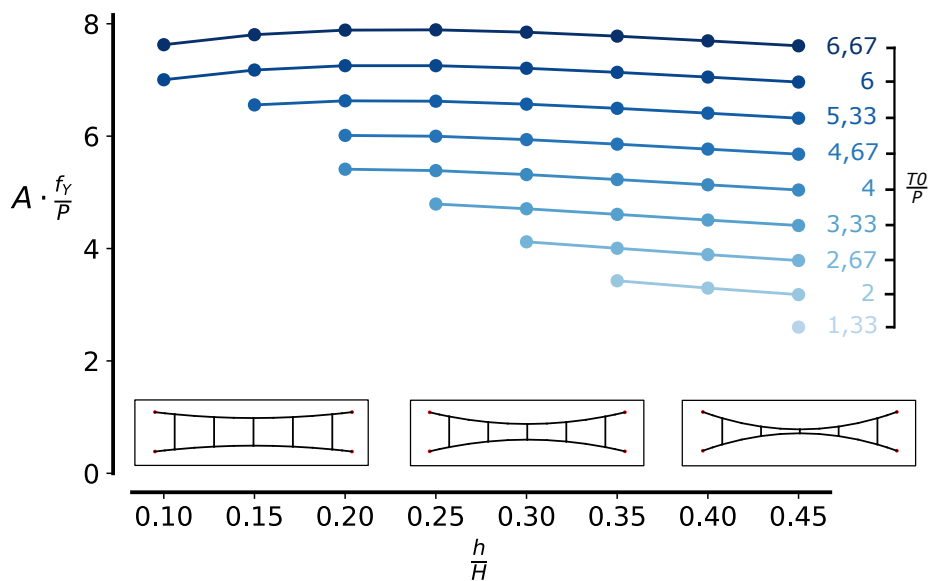


FIGURE 7.4 – Evolution du rapport $\frac{A \cdot f_y}{P}$ par rapport à la flèche géométrique initiale h pour différents niveaux de précontrainte T^0 .

La Figure 7.4 représente l'évolution de la section par rapport à la flèche géométrique initiale h pour différents niveaux de précontrainte T^0 . Il peut être observé que plus le rapport $\frac{T^0}{P}$ augmente, plus la section des câbles augmente. Cela s'explique par le fait que plus la précontrainte augmente et plus l'effort à reprendre par le câble est grand, nécessitant une plus grande section pour reprendre les efforts.

Cette figure montre également que pour minimiser la section, il est préférable de sélectionner une valeur de $\frac{h}{H}$ de 0,45. Pour la suite des analyses, un rapport $\frac{h}{H}$ de 0,45 est donc sélectionné, ce qui correspond ici à une flèche géométrique initiale de $h = 1,35$ [m]. Cette observation tend à être différente pour les hautes valeurs de prétension avec de plus petites charges ponctuelles testées. De manière générale, l'augmentation de la prétension va lisser le gain qui peut être obtenu en termes de section via l'augmentation de la flèche géométrique comme le montrent les résultats présentés en Annexe B pour les autres cas de charges envisagés. Pour le cas de charge présenté ici, le gain en section est déjà plus grand pour des petites valeurs de prétension. A titre d'exemple, dans la Figure 7.4, pour une prétension de $\frac{T^0}{P} = 2$, un gain de 7% en terme de section optimisée est observé entre les $\frac{h}{H}$ de valeurs 0,35 et 0,45. Ce gain tombe sous les 1% entre les $\frac{h}{H}$ de valeur 0,1 et 0,45 de la courbe apparentée à la prétension de $\frac{T^0}{P} = 6,67$.

Pour la valeur de h sélectionnée dans cette section, l'évolution de la flèche en fonction de la précontrainte dans les câbles est analysée. La Figure 7.5 montre l'évolution de la flèche en proportion de la flèche géométrique initiale. Elle montre qu'au plus la prétension augmente et au plus la flèche diminue. Si un constructeur souhaite limiter la flèche, il devra augmenter la prétension dans le réseau de câbles.

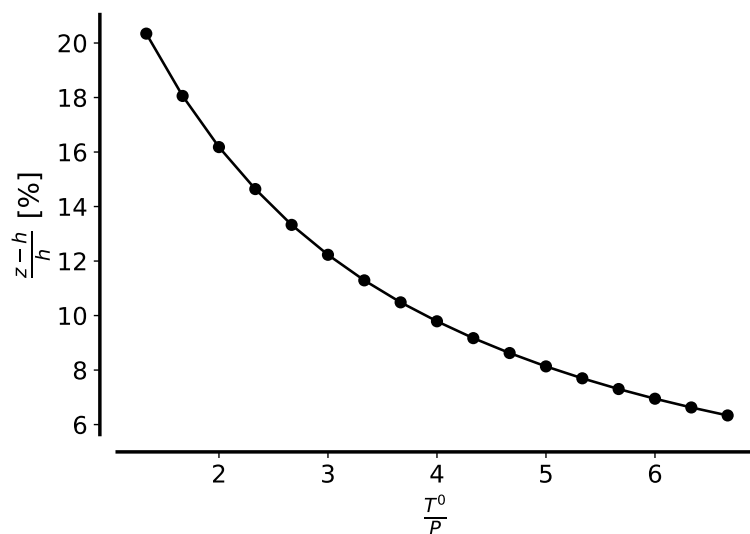


FIGURE 7.5 – Évolution de la flèche à mi-portée par rapport à la prétension dans le réseau.

7.4 Dimensionnement du câble parabolique inférieur

Comme exposé à la section 3.2.4, deux situations sont envisagées concernant l'action du vent sur la structure. Dans la première situation, le vent souffle verticalement de haut en bas sur les panneaux photovoltaïques. Dans la seconde, le vent souffle verticalement de bas en haut, provoquant un soulèvement des panneaux.

Dans la première configuration, l'analyse de la répartition des efforts dans les câbles paraboliques a montré que les efforts internes induits par les charges ponctuelles P , appliquées sur la structure, prédominent largement dans le câble supérieur. À l'inverse, dans le cas du soulèvement dû au vent, les efforts internes sont principalement concentrés dans le câble inférieur. Cette observation suit la logique constructive expliquée à la section 1.2 Figure 1.8b.

Dans la deuxième situation, c'est-à-dire, en cas de soulèvement, la direction et la norme des charges ponctuelles P diffèrent. En effet, si la charge de vent est dirigée de haut en bas, elle s'additionne au poids propre des panneaux. Par contre, si la charge est dirigée du bas vers le haut, le poids propre est négligé de manière sécuritaire et la résultante des forces est donc plus faible que dans le cas précédent.

L'objectif de cette partie est de déterminer les sections adéquates pour les câbles paraboliques inférieurs en cas de soulèvement. En effet, si l'on se base uniquement sur le cas où le vent souffle verticalement de haut en bas, la charge P , plus importante dans cette configuration, entraînerait un surdimensionnement des câbles inférieurs. Il est donc nécessaire de distinguer les deux analyses afin de dimensionner correctement les câbles inférieurs et supérieurs en fonction des sollicitations spécifiques à chaque situation. Une représentation schématique du réseau de câbles est visible à la Figure 7.6. Les nœuds rouges sont les points fixes dans la simulation, les points bleus sont libres et les nœuds bleus foncés sont ceux qui subissent l'action de la charge verticale ponctuelle P .

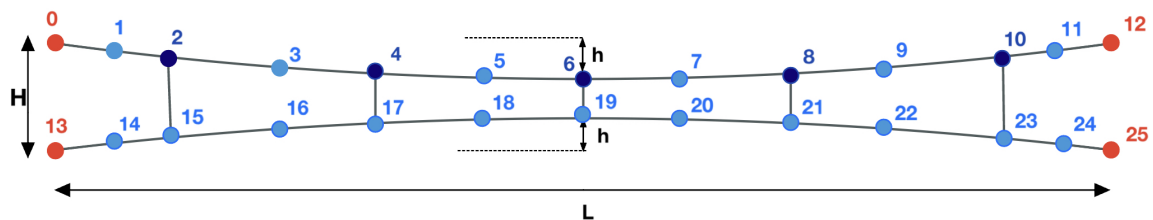


FIGURE 7.6 – Représentation géométrique de la structure étudiée avec mise en évidence des points qui subissent l'action verticale du vent.

À titre d'exemple, les efforts internes de chacun des éléments composants les câbles paraboliques inférieurs, supérieurs et les suspentes verticales ont été consignés dans la Table 7.1 pour le cas où le vent agit verticalement sur les panneaux photovoltaïques, du haut vers le bas. Dans cette configuration, la charge de vent s'ajoute aux charges dues au poids propre des panneaux et à la charge de neige. Ainsi, une charge ponctuelle de 30 [kN] s'applique aux cinq endroits où les poutres de support reposent sur les câbles. La charge totale est donc $P = 5 \cdot 30$ [kN] = 150 [kN]. Les dimensions géométriques de la structure sont les mêmes que celles étudiées précédemment :

- $L = 30$ [m],
- $H = 3$ [m],
- $h = 1,35$ [m],
- $f_y = 0,852$ [GPa],
- $T^0 = 200$ [kN].

Éléments	Câble parabolique supérieur	Éléments	Câble parabolique inférieur	Éléments	Suspente
0-1	390,28	13-14	34,54	2-15	0,94
1-2	390,28	14-15	34,54	4-17	2,069
2-3	385,19	15-16	34,45	6-19	2,069
3-4	385,19	16-17	34,45	8-21	2,069
4-5	382,43	17-18	34,45	10-23	0,94
5-6	382,43	18-19	34,39		
6-7	382,44	19-20	34,39		
7-8	382,44	20-21	34,39		
8-9	385,19	21-22	34,39		
9-10	385,19	22-23	34,39		
10-11	390,28	23-24	34,54		
11-12	390,28	24-25	34,54		

TABLE 7.1 – Répartition des efforts internes dans les câbles paraboliques et suspentes en [kN].

Les résultats de la Table 7.1 montrent que, dans le cas où la charge verticale de vent agit de haut en bas, le câble supérieur est sollicité de manière largement prédominante. L'effort résiduel présent dans le câble inférieur est dû à l'effort de prétension initial induit dans les câbles paraboliques. Quant aux suspentes, l'effort qui les sollicite est quasiment inexistant.

Les résultats de la Table 7.2 montrent que, dans le cas où le vent agit de bas en haut et provoque un soulèvement, le câble inférieur est sollicité de manière largement prédominante. Comme dans la situation précédente, l'effort résiduel présent dans le câble supérieur est dû à l'effort de prétension initial induit dans les câbles paraboliques et l'effort sollicitant les suspentes reste quasiment inexistant.

Éléments	Câble parabolique supérieur	Éléments	Câble parabolique inférieur	Éléments	Suspente
0-1	99,82	13-14	304,24	2-15	21,53
1-2	99,82	14-15	304,24	4-17	24,23
2-3	99,63	15-16	300,68	6-19	24,23
3-4	99,63	16-17	300,68	8-21	24,23
4-5	99,82	17-18	298,14	10-23	21,53
5-6	99,82	18-19	298,14		
6-7	99,82	19-20	298,14		
7-8	99,82	20-21	298,14		
8-9	99,63	21-22	300,68		
9-10	99,63	22-23	300,68		
10-11	99,82	23-24	304,24		
11-12	99,82	24-25	304,24		

TABLE 7.2 – Répartition des éléments et efforts internes dans les câbles paraboliques et suspentes en [kN].

Afin de prendre en compte cette différence de sollicitation, une seconde optimisation de la section suivant le même schéma d'optimisation (Figure 7.1) a permis de déduire les valeurs de section optimale des câbles paraboliques inférieurs en cas de soulèvement. Les résultats de cette optimisation sont présentés ci-dessous.

Section optimale du câble parabolique inférieur

Pour un $\frac{h}{H} = 0,45$, les résultats des sections optimales sont résumés dans la Table 7.3. Les valeurs de section sont calculées pour $\frac{T^0}{P}$ allant de 1,11 à 11,11 pour un $P = 90$ [kN], correspondant à une charge de soulèvement de 18 [kN] (soit pour une poutre de support de 6 [m]). Cette charge s'applique aux 5 nœuds représentés en bleu foncé sur la Figure 7.6.

T_0/P	1,11	2,22	3,33	4,44	5,55	6,66	7,77	8,88	10	11,11
$A \cdot f_y/P$	2,423	3,38	4,41	5,46	6,53	7,60	8,68	9,76	10,85	11,93

TABLE 7.3 – Tableau des valeurs de T_0/P et $A \cdot f_y/P$ des câbles inférieurs.

7.5 Conclusion du chapitre

Au cours de ce chapitre, il a été démontré que le poids propre des câbles est négligeable dans la situation développée. De plus, les analyses ont permis de déduire que le réseau de câbles avec les rapports $\frac{h}{H}$ les plus grands permettent de minimiser la section des câbles utilisés, cet effet est d'autant plus présent parmi les $\frac{T_0}{P}$ les plus petits testés. En outre, la répartition des efforts en fonction de la direction de la composante de vent a été présentée et a permis de ne pas surdimensionner le câble parabolique inférieur. Ces analyses et observations se basent toutefois sur une situation simplifiée car elles considèrent des points fixes aux extrémités de la structure. Or, dans la réalité, la structure sera attachée à des grumes de bois, sous tendues par des haubans et un déplacement latéral aux points d'accroche des haubans sur la grume de bois peut se produire. Cette situation fait l'objet de l'analyse du chapitre suivant en se basant sur les analyses de ce chapitre.

Chapitre 8

Prise en compte des haubans

8.1 Description de la situation

La structure complète considérée dans ce mémoire est constituée de grumes de bois et de haubans en plus du réseau de câbles étudié dans le Chapitre 7. La structure est illustrée ci-dessous (Figure 8.1). Le hauban supérieur ajouté à la structure forme un angle β avec la grume de bois.

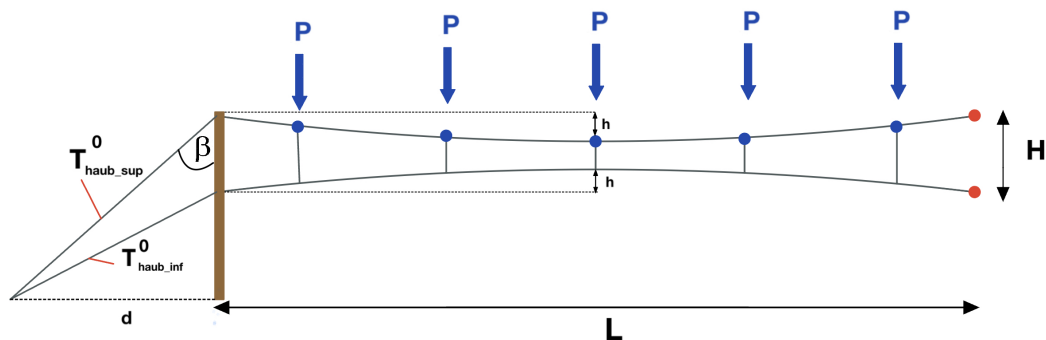


FIGURE 8.1 – Description statique avec haubans.

L'analyse effectuée dans le Chapitre 7 se concentrait sur l'optimisation de la section des deux câbles paraboliques. Lorsque les haubans sont ajoutés à la structure, les points extrêmes qui étaient considérés fixes dans la situation précédente deviennent mobiles. Dès lors, leur déplacement horizontal doit être limité afin de stabiliser la structure. Pour ce faire, une recherche de la prétension nécessaire à mettre dans les haubans afin de minimiser le déplacement horizontal des points mobiles est effectuée. Par ailleurs, il convient d'évaluer si la section renvoyée par l'optimisation effectuée dans le Chapitre 7 reste sécuritaire lorsque les déplacements horizontaux aux points d'accroche entre les haubans et la grume sont pris en compte.

Afin de réaliser cette analyse, les sections des câbles des haubans et des câbles paraboliques doivent être déterminées au préalable. Pour ce faire, la relation entre le déplacement horizontal du point mobile et les sections des haubans et des câbles paraboliques est établie dans les points suivants.

8.1.1 Section des câbles paraboliques

Pour commencer, l'évolution de la section des câbles paraboliques est analysée. Pour ce faire, la section des haubans est arbitrairement fixée à $\frac{A_{haub} \cdot f_y}{P} = 7,1$ soit une section $A_{haub} = 1250 [mm^2]$. Cette valeur sera discutée dans le point suivant. La valeur de la section des câbles paraboliques est analysée ici par rapport au déplacement horizontal ξ , qui doit être minimisé. La Figure 8.2 schématise le déplacement horizontal observé.

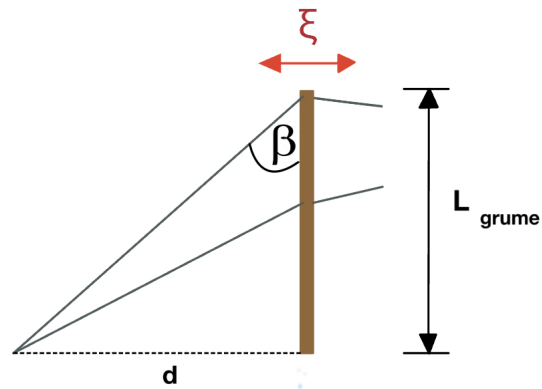


FIGURE 8.2 – Description de la situation avec le déplacement horizontal ξ .

Dans cette partie, pour chaque valeur de prétension appliquée aux câbles paraboliques, une analyse est effectuée en incrémentant successivement la prétension dans les haubans. Pour chacune de ces valeurs de prétension dans les haubans, la section des câbles paraboliques est optimisée grâce au schéma d'optimisation de la Figure 7.1. Le déplacement ξ correspondant à chacune des situations est retenu. Le code pour cette analyse est disponible dans le lien de l'Annexe A sous le nom `Section_DeplHorizontal.py`

La Figure 8.3 représente l'évolution de la section par rapport au déplacement horizontal ξ pour différentes valeurs de prétension dans les câbles paraboliques. Le déplacement horizontal ξ a été normalisé par rapport à un critère de déplacement fixé qui vaut $\frac{L_{grume}}{500}$ où L_{grume} représente la longueur de la grume de bois. Un déplacement horizontal de $\frac{L_{grume}}{500}$ représente une abscisse de 100%. Étant donné que ce déplacement doit être limité, les valeurs de section qui permettent de respecter ce critère sont particulièrement intéressantes.

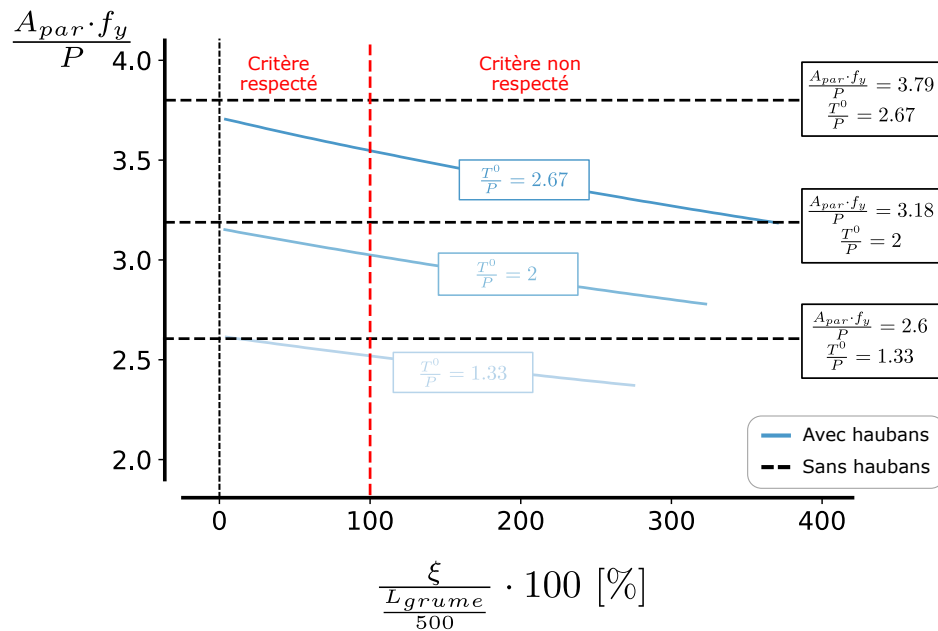


FIGURE 8.3 – Evolution de la section par rapport au déplacement horizontal.

Les lignes noires pointillées représentent la valeur de la section renvoyée dans la situation du Chapitre 7, sans haubans et donc en considérant les points d'accroches des haubans sur la colonne comme fixes. Les courbes bleues représentent, quant à elles, la valeur de la section lorsque les haubans sont présents. Selon ce graphe, la valeur de section optimale obtenue sans haubans est toujours supérieure à la valeur obtenue avec haubans à l'exception de la courbe de plus faible prétension dans les paraboles dû à des imprécisions numériques. De plus, il peut être observé que plus le déplacement horizontal est faible, plus la valeur de la section se rapproche de la valeur de la situation sans haubans. Cela signifie que la section optimale trouvée dans le Chapitre 7 peut être réutilisée ici. En effet, cette section est sécuritaire car supérieure à celles trouvées pour la situation en présence des haubans et pour de faibles déplacements, elle est très proche de la valeur optimale.

La Figure 8.4 s'intéresse d'un peu plus près à la différence de sections obtenues dans les deux situations. Elle illustre que plus la prétension est élevée dans le réseau de câbles et plus la différence de section est importante. Cependant, pour des déplacements horizontaux faibles, la différence est minimale et reste limitée. Opter pour la section obtenue sans haubans semble donc être un choix judicieux, permettant d'obtenir un bon équilibre entre sécurité et optimalité.

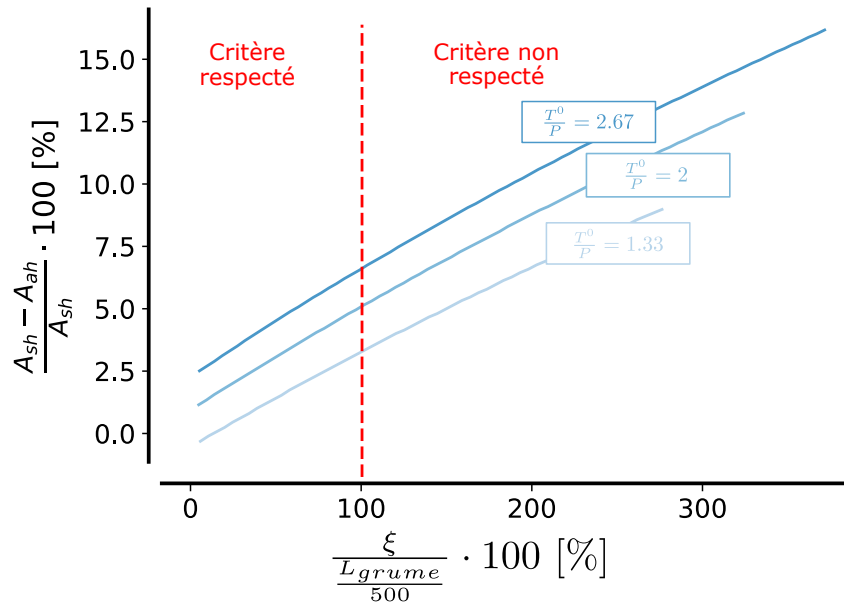


FIGURE 8.4 – Différence entre les sections obtenues avec ou sans haubans.

8.1.2 Section des haubans

Afin de déterminer la section des haubans à utiliser dans les analyses suivantes, l'impact de la section des haubans sur le déplacement horizontal du point mobile va également être analysé. Pour cela, la prétension est fixée à $\frac{T_{haub}^0}{P} = 0$ dans les haubans et à $\frac{T_{par}^0}{P} = 4$ dans les câbles paraboliques. La section optimale associée à cette prétension définie par la situation sans haubans comme expliqué ci-dessus est sélectionnée pour la section des câbles paraboliques. L'évolution de la section des haubans par rapport au déplacement horizontal est représentée sur la Figure 8.5. Cette figure illustre que plus la section des haubans augmente, plus le déplacement horizontal au droit de la colonne diminue. Ceci est expliqué par le fait qu'une augmentation de section augmente la raideur du hauban et donc diminue le déplacement horizontal. Le graphe est utile pour quantifier le gain en diminution de déplacement par rapport à la section choisie. En effet, il semble judicieux de choisir une section située aux alentours de $\frac{A_{haubans} \cdot f_y}{P} = 7$ étant donné que pour les $\frac{A_{haubans} \cdot f_y}{P}$ entre 7 et 11, le gain en termes de diminution de déplacement horizontal n'est pas considérable. Une section de haubans de $1250 \text{ [mm}^2\text{]}$ est donc sélectionnée pour la suite des analyses, ce qui correspond à un rapport $\frac{A_{haubans} \cdot f_y}{P}$ de 7,1.

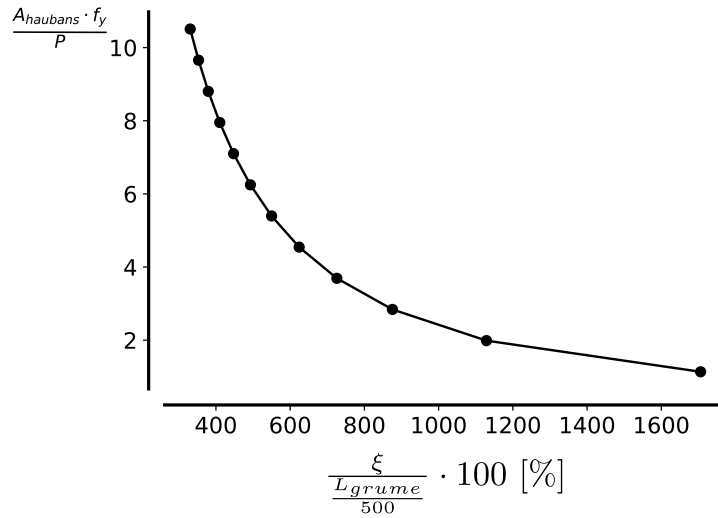


FIGURE 8.5 – Evolution de la section des haubans par rapport au déplacement horizontal.

8.2 Sélection de la prétension dans les haubans

Un schéma d’optimisation similaire à celui développé pour l’optimisation de la section dans le Chapitre 7 est utilisé pour sélectionner la prétension dans les haubans permettant de stabiliser la structure. Le schéma développé est présenté à la Figure 8.6.

A nouveau, la méthode de la bisection est utilisée afin d’obtenir la prétension dans le hauban supérieur nécessaire à la minimisation du déplacement horizontal. La valeur de prétension dans le hauban inférieur est fixée à $\frac{T_{haub,inf}^0}{P} = 0,67$. Seule la prétension dans le hauban supérieur est optimisée. En effet, limiter le déplacement du point mobile supérieur permet également de limiter le déplacement du point mobile inférieur. L’optimisation de la prétension dans le hauban inférieur nécessiterait une optimisation combinée qui n’est pas réalisée dans ce mémoire.

L’algorithme débute en fixant les paramètres géométriques liés au réseau de câbles (H, h, L) , ainsi que la section des câbles paraboliques A_{par} trouvée via l’optimisation développée au Chapitre 7. Une fois tous les paramètres initiaux fixés, le drawer est appelé. Ensuite, les bornes supérieure et inférieure de prétension à mettre dans le hauban supérieur sont définies et utilisées dans la méthode de la bisection. Le solveur est ensuite appelé et en fonction du déplacement horizontal qui est renvoyé, la prétension dans le hauban est ajustée. Une fois la convergence du processus itératif de la bisection atteint, la prétension à mettre dans le hauban supérieur afin de stabiliser la structure est obtenue. Une vérification quant à la limite d’élasticité est faite sur le câble du hauban supérieur. Si ce test est rempli, le résultat est retenu. Sinon, il est rejeté. D’autres valeurs de prétension à mettre dans les câbles paraboliques sont ensuite éventuellement testées.

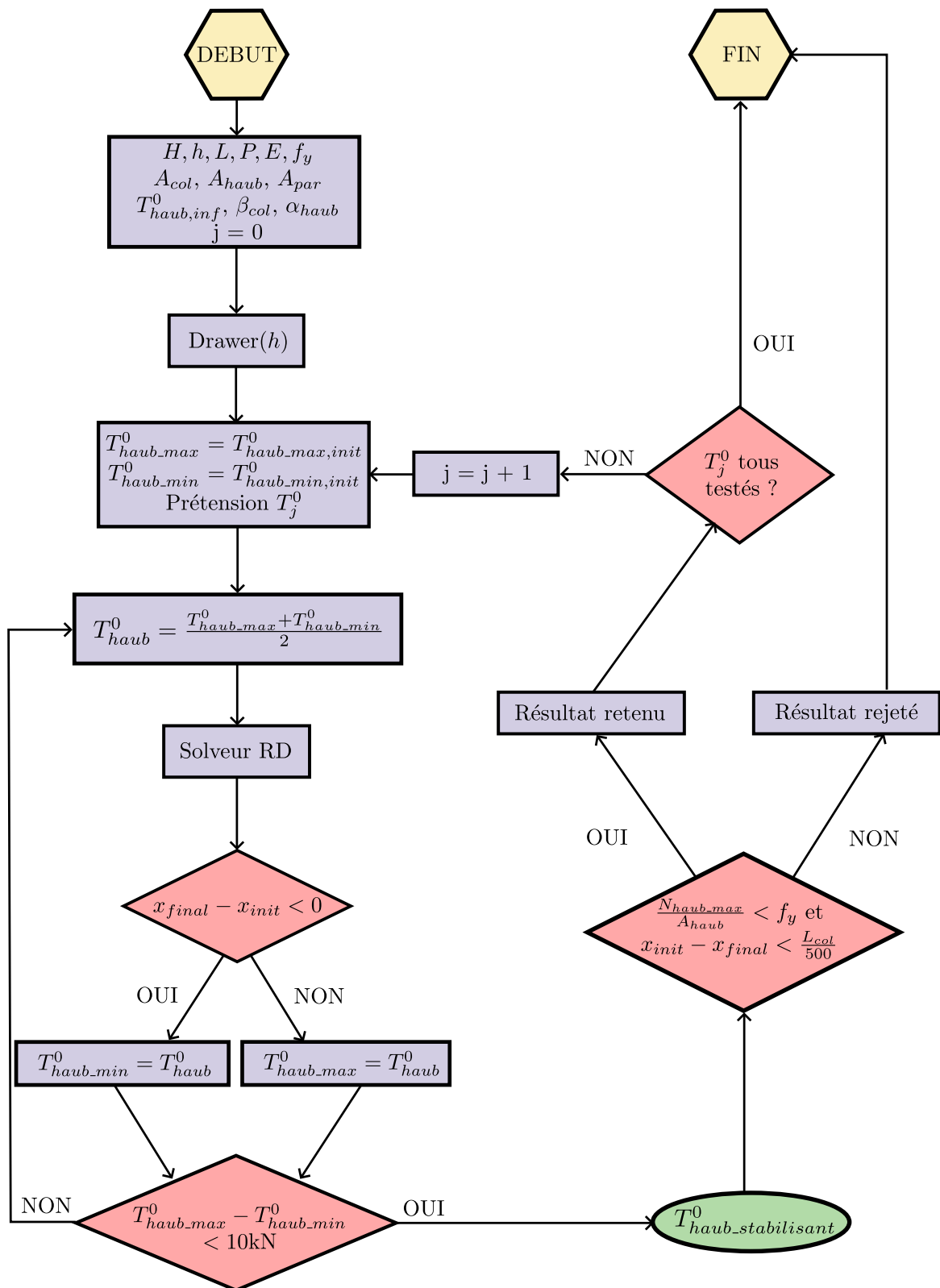


FIGURE 8.6 – Schéma d'optimisation de la prétension dans les haubans.

L'algorithme présenté à la Figure 8.6 permet notamment d'obtenir le graphe de la Figure 8.7 obtenu grâce au code `BissectionHaubans.py` disponible en suivant le lien de l'Annexe A. Cette figure illustre que seules les valeurs de $\frac{T_{par}^0}{P}$ allant de 1,33 à 4 ont été retenues pour les structures de rapport $\frac{L}{H} = 10$ et $P = 150$ [kN]. Cela signifie que, au delà de ce rapport de 4, la valeur de prétension à mettre dans le hauban supérieur pour stabiliser la structure était trop importante que pour respecter le critère d'élasticité de celui-ci. Le graphe permet également de synthétiser tous les résultats importants. Il permet en outre de sélectionner la section dans les câbles paraboliques, la prétension à mettre dans ces câbles paraboliques ainsi que la prétension nécessaire dans le hauban supérieur afin de stabiliser la structure.

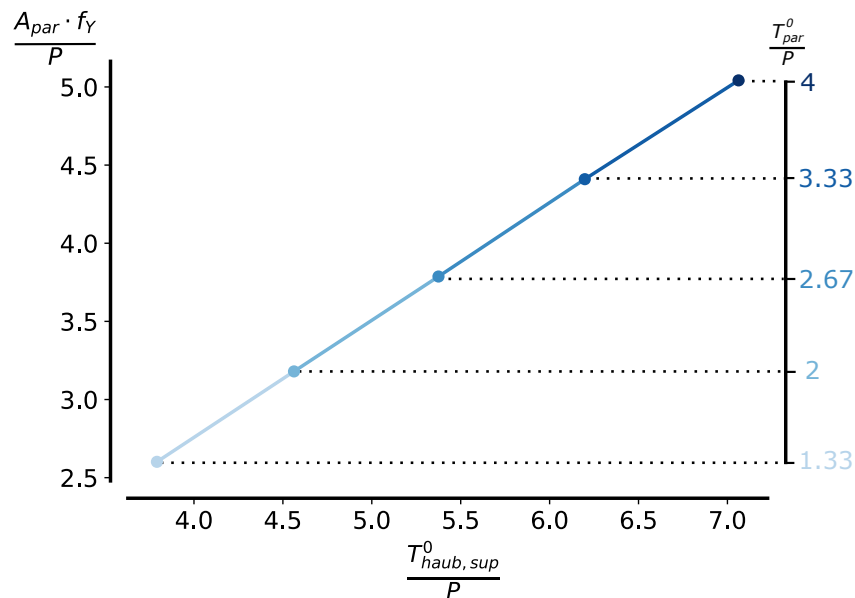


FIGURE 8.7 – Évolution de la section A_{par} des câbles paraboliques prétendus en fonction des valeurs stabilisantes de prétensions $T_{haub,sup}^0$.

Dans les analyses de ce chapitre, la section des haubans est considérée comme fixe et n'est pas optimisée. Cependant, plusieurs autres paramètres peuvent être ajustés, tels que la distance entre le pied de la grume et le point d'ancrage des haubans, ainsi que le taux de travail dans les haubans. Ce dernier est défini comme le rapport entre l'effort maximal dans les haubans et le produit de la section des haubans par la limite d'élasticité.

L'objectif est d'exploiter pleinement la capacité des haubans, en cherchant à maximiser leur taux de travail. Par ailleurs, l'encombrement doit être minimisé. Pour ce faire, il est nécessaire de réduire la distance entre le pied de la grume et le point d'ancrage des haubans, ce qui entraîne également une diminution de l'angle β . La Figure 8.8 montre l'évolution du taux de travail en fonction de l'angle formé entre les haubans et la grume, β , pour différentes valeurs de la prétension dans le réseau de câbles paraboliques T_{par}^0 . Sur ce graphe, le taux de travail augmente

lorsque l'angle β diminue. Cela s'explique par le fait qu'une diminution de l'angle β réduit la capacité du hauban à reprendre les efforts horizontaux, ce qui augmente les efforts transmis à celui-ci lorsqu'il est plus vertical. De plus, plus la prétension T_{par}^0 est élevée, plus le taux de travail pour une inclinaison β donnée est important. Cela reflète le fait que, lorsque la prétension dans le réseau de câbles paraboliques augmente alors que la section des haubans reste identique, les efforts repris par les haubans augmentent également, permettant ainsi une utilisation plus efficace des haubans à des niveaux de prétension plus élevés.

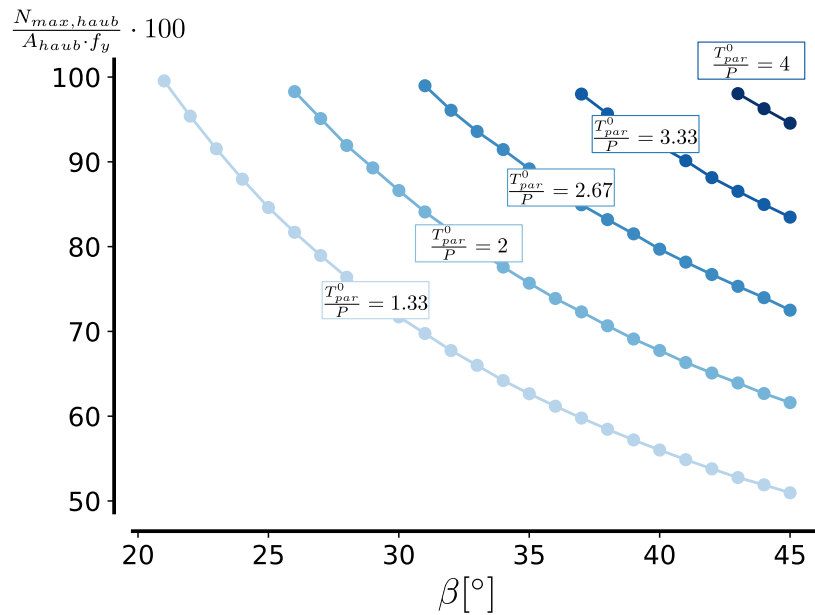


FIGURE 8.8 – Evolution de la prétension dans les haubans en fonction de l'angle d'inclinaison des haubans.

8.3 Conclusion du chapitre

Ce chapitre a montré que les valeurs de sections paraboliques trouvées dans le Chapitre 7 sont sécuritaires. De plus, les prétensions dans le hauban supérieur qui stabilisent la structure ont été déterminées pour chacun des niveaux de prétension testés précédemment dans les câbles paraboliques. Une analyse complémentaire a montré l'intérêt combiné de l'optimisation du taux de travail et de la distance entre le pied de la grume et le point d'ancrage des haubans. Diminuer cette distance permet d'augmenter le taux de travail, menant à une utilisation plus efficace du hauban tout en minimisant l'espace occupé par la structure.

Chapitre 9

Inclinaison des grumes

Dans la structure étudiée jusqu'à présent, les grumes de bois étaient placées de manière verticale. Toutefois, il est pertinent de s'interroger sur l'influence que l'inclinaison de ces grumes pourrait avoir sur la configuration globale de la structure. En effet, une modification de l'inclinaison est susceptible d'influencer la distance entre la grume et le point d'ancrage des haubans, les efforts transmis dans les haubans ainsi que les sollicitations mécaniques au sein des grumes elles-mêmes. Le but de ce chapitre est donc d'analyser en détail les effets de l'inclinaison des grumes sur ces différents paramètres et d'en évaluer les conséquences sur la stabilité et le comportement mécanique de la structure.

Les paramètres de géométrie utilisés dans la suite des analyses sont repris ci-contre à la Figure 9.1. Ces paramètres permettent de décrire la configuration spatiale de la grume et des haubans, essentiels pour comprendre leur interaction. L'angle α représente l'angle d'inclinaison de la grume par rapport à la verticale. L'angle β , quant à lui, correspond à l'angle formé par les haubans avec la grume de bois lorsque cette dernière est dans sa position verticale. La distance d est la distance entre le pied de la grume et l'ancrage des haubans. Cette distance est un paramètre géométrique clé qui peut être exprimé de manière analytique en fonction de la longueur de la grume L_{grume} et de l'angle β selon la relation suivante :

$$d = L_{grume} \cdot \tan(\beta)$$

Dans les analyses qui suivent, les situations comparées correspondent à des configurations où la distance d entre le pied de la grume et le point d'ancrage des haubans reste constante, quelle que soit l'inclinaison de la grume. Pour respecter cette contrainte, il est nécessaire de déterminer l'angle formé entre la grume inclinée

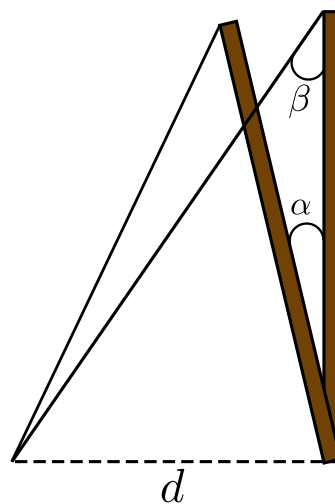


FIGURE 9.1 – Représentation schématique de l'inclinaison de la grume.

et le hauban, en fonction des angles α et β . Le détail de la démarche ayant permis d'obtenir cet angle est présenté à l'annexe C. Les graphes ci-dessous sont établis sur la base de cette distance d , sans explicitement mentionner l'angle correspondant. Par ailleurs, la distance d est normalisée par rapport à la longueur de la grume L_{grume} afin d'à nouveau permettre une interprétation plus généralisée des résultats :

$$\frac{d}{L_{grume}} = \tan(\beta)$$

9.1 Evolution de la distance entre la grume et le point d'ancrage des haubans

Pour commencer, l'évolution du taux de travail dans les haubans par rapport à la distance normalisée $\tan(\beta)$ a été analysée pour deux valeurs différentes d'inclinaison de la grume, $\alpha = 0^\circ$ et $\alpha = 10^\circ$. Ces résultats ont été obtenus en utilisant le code `BissectionHaubans_alpha.py`. Dans cette analyse, la valeur de section pour les câbles paraboliques a été déterminée en se basant sur la situation sans haubans, tout en prenant en compte une inclinaison des points fixes. Cette valeur de section optimale a été obtenue avec le code `OptimisationSection.py`. Comme dans le chapitre précédent, cette méthode de sélection de la section permet d'assurer un dimensionnement sécuritaire. Les valeurs adoptées pour les autres paramètres restent identiques à celles utilisées précédemment. Par ailleurs, différentes valeurs de prétension dans les paraboles ont été testées. Pour chacune d'elles, la prétension dans les haubans a été calculée conformément au schéma illustré dans la Figure 8.6.

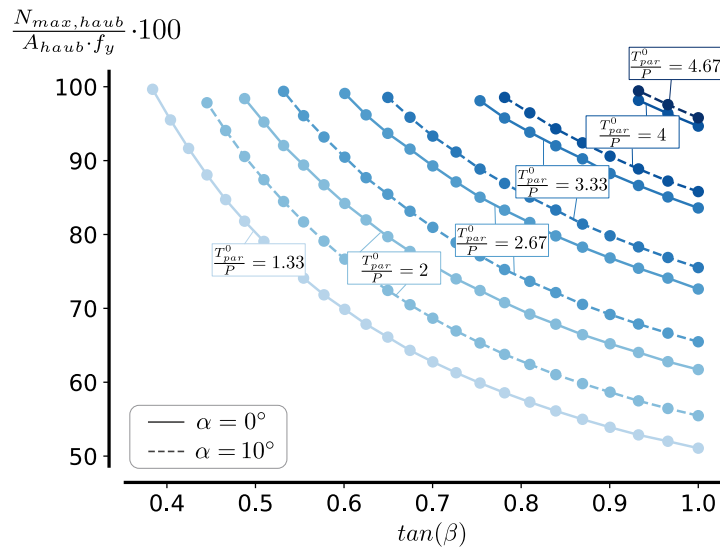


FIGURE 9.2 – Evolution du taux de travail dans les haubans par rapport à la distance normalisée $\tan(\beta)$ entre le pied de la grume et le point d'ancrage des haubans.

La Figure 9.2 illustre l'évolution du taux de travail dans les haubans en fonction de la distance normalisée entre le pied de la grume et le point d'ancrage des haubans. Il convient de noter que toutes les valeurs de prétension dans les câbles paraboliques ne peuvent pas être représentées dans les deux configurations d'angle α . En effet, pour la plus faible prétension, $T_{par}^0 = 1,33$, lorsque la grume est inclinée de 10° , un croisement des câbles à mi-portée se produit, rendant impossible les calculs numériques dans cette situation. A l'inverse, pour une prétension élevée de $T_{par}^0 = 4,67$, lorsque la grume est verticale, les efforts générés dans les haubans deviennent trop importants, dépassant le critère d'élasticité admissible.

L'analyse de la Figure 9.2 met en évidence une tendance claire : plus la distance entre le pied de la grume et le point d'ancrage des haubans diminue, plus les efforts dans les haubans augmentent, ce qui se traduit par une hausse du taux de travail. Par ailleurs, il est intéressant de constater que, pour une même prétension dans les câbles paraboliques, l'inclinaison de la grume permet de réduire la distance d , offrant ainsi une meilleure optimisation de la configuration géométrique. Ces observations motivent l'analyse approfondie de l'influence de l'angle d'inclinaison α sur la distance d .

Afin de mener cette analyse, plusieurs valeurs d'inclinaison de la grume ont été examinées : $\alpha = [0^\circ; 2,5^\circ; 5^\circ; 7,5^\circ; 10^\circ; 12,5^\circ; 15^\circ]$. Des valeurs d'inclinaison supérieures à 15° engendrent un croisement lors du chargement et donc une instabilité numérique. Pour chacune de ces inclinaisons, et pour chaque valeur de prétension dans les câbles paraboliques T_{par}^0 , la distance et la prétension dans les haubans correspondant au taux de travail maximal des haubans a été identifiée et retenue. Les résultats de cette analyse sont synthétisés dans la Figure 9.3.

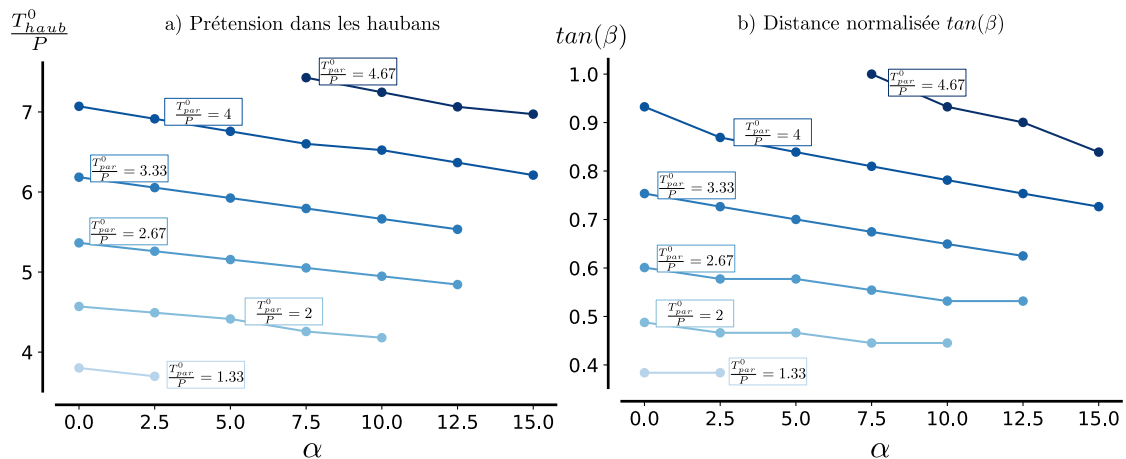


FIGURE 9.3 – Influence de l'angle d'inclinaison de la grume α sur a) la prétension dans les haubans, b) la distance normalisée $\tan(\beta)$ entre le pied de la grume et le point d'ancrage des haubans.

La Figure 9.3a montre l'évolution de la prétension calculée dans les haubans par rapport à l'angle d'inclinaison de la grume. Cette figure montre clairement que,

lorsque la prétension dans le réseau de câbles paraboliques augmente, la prétension nécessaire pour stabiliser la structure à l'aide des haubans doit également être augmentée. Cela s'explique par le fait que, lorsque la prétension dans les câbles paraboliques augmente, les efforts horizontaux transférés aux haubans deviennent plus importants. Pour compenser ces efforts supplémentaires et garantir la stabilité de la structure, il est nécessaire d'augmenter la force de tension dans les haubans. Une autre observation importante ressort de cette analyse : l'inclinaison de la grume permet de réduire la prétension nécessaire dans les haubans pour stabiliser la structure.

De plus, la Figure 9.3b montre que l'augmentation de la prétension dans le réseau de câbles paraboliques entraîne une augmentation de la distance normalisée $\tan(\beta)$. Ce phénomène s'explique par le fait que l'augmentation de la prétension génère des efforts horizontaux plus importants, et accroître la distance $\tan(\beta)$ permet aux haubans de mieux supporter ces efforts. Une observation importante est que l'augmentation de l'angle d'inclinaison α conduit à une diminution de la distance normalisée $\tan(\beta)$. De plus, cette réduction de $\tan(\beta)$ est d'autant plus marquée lorsque la prétension dans les câbles paraboliques est élevée.

En conclusion, l'inclinaison de la grume permet de réduire la précontrainte dans les haubans tout en diminuant la distance entre le pied de la grume et le point d'ancrage des haubans. Il est important de noter que l'aspect discontinu des courbes résulte du fait que chaque point représente le taux de travail maximal pour cette configuration spécifique. Bien que les taux de travail maximum se situent tous entre 95% et 100%, ils ne sont pas exactement égaux, ce qui provoque de légères discontinuités graphiques.

9.2 Evolution de la compression reprise par les grumes

L'inclinaison de la grume pourrait également influencer la compression qu'elle reprend. En effet, comme mentionné précédemment, lorsque la grume est inclinée, la prétension nécessaire dans les haubans pour stabiliser la structure diminue. Il est donc essentiel de vérifier si une partie des efforts est transférée à la grume de bois afin de garantir qu'elle puisse supporter les contraintes qui lui sont appliquées. La Figure 9.4 reprend les valeurs d'efforts maximaux dans la colonne par rapport à l'angle d'inclinaison des haubans pour un angle β fixé à 45° et pour différentes valeurs de prétension dans le réseau de câbles paraboliques T_{par}^0 . La compression reprise par la grume reste relativement constante, indépendamment de l'angle d'inclinaison. Afin d'évaluer la constance de la compression dans les grumes, l'écart relatif pour chaque courbe a été déterminé à l'aide de la formule suivante :

$$\text{écart relatif} = \frac{\left(\frac{N_{col,max}}{P}\right)_{max} - \left(\frac{N_{col,max}}{P}\right)_{min}}{\left(\frac{N_{col,max}}{P}\right)_{max}}$$

La valeur maximale d'écart relatif obtenue est de 1,23%, correspondant à la courbe avec une prétension $\frac{T_{par}^0}{P} = 2$. Cette faible variation souligne que, malgré l'inclinaison de la grume et pour une même distance normalisée $\tan(\beta)$, les efforts de compression qu'elle reprend varient peu, assurant ainsi une stabilité structurale satisfaisante.

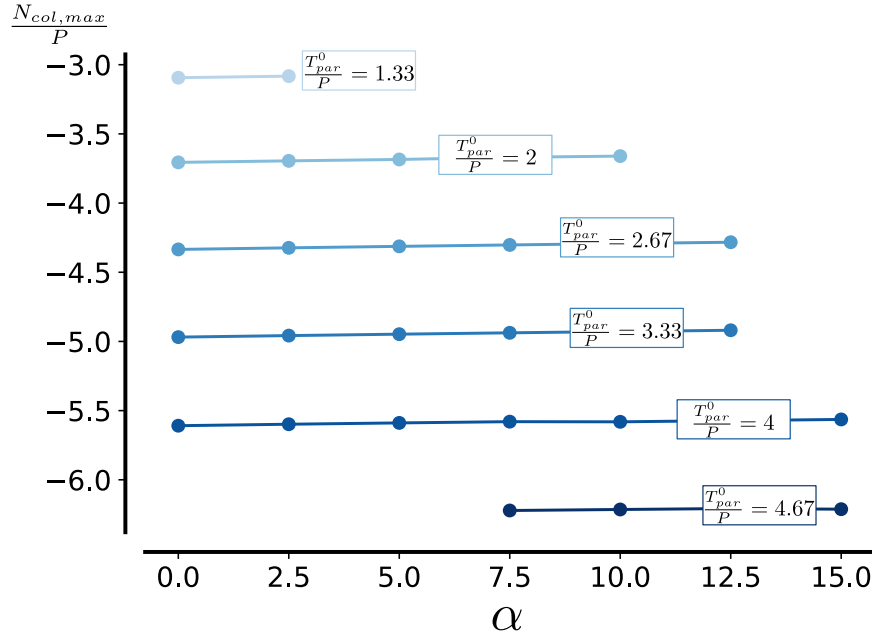


FIGURE 9.4 – Efforts de compression dans la grume de bois par rapport à l'inclinaison de la grume.

Les caractéristiques mécaniques d'un bois D40 [30] de 50 [cm] de diamètre sont utilisées dans les simulations. Une vérification du dimensionnement au flambement est réalisée à l'Annexe D sur base du plus grand effort de compression trouvé via le graphe 9.4.

9.3 Conclusion du chapitre

L'analyse menée dans ce chapitre a permis de mettre en évidence les impacts de l'inclinaison des grumes sur plusieurs paramètres de la structure. Tout d'abord, il a été montré que l'inclinaison de la grume réduit la prétension nécessaire dans les haubans pour stabiliser la structure. En parallèle, il a été observé que l'augmentation de l'angle d'inclinaison α réduit la distance normalisée $\tan(\beta)$ entre le pied de la grume et le point d'ancrage des haubans. Cette diminution est plus marquée pour des valeurs de prétension plus élevées dans les câbles paraboliques, confirmant que l'inclinaison des grumes contribue à une meilleure efficacité structurale.

Enfin, l'impact de l'inclinaison des grumes sur la compression reprise par celles-ci a également été étudié. Les résultats montrent que, malgré les modifications induites par l'inclinaison, les efforts de compression restent relativement constants pour une même distance normalisée $\tan(\beta)$. La faible variation des efforts maximaux dans les grumes, indépendamment de leur angle d'inclinaison, garantit que celles-ci

conservent leur capacité à reprendre les charges sans compromettre la stabilité globale de la structure.

En conclusion, incliner les grumes s'avère être une stratégie efficace pour optimiser le comportement global du système, tant au niveau des haubans que des efforts supportés par les grumes elles-mêmes.

Conclusion

L'objectif central de ce mémoire était d'optimiser des structures photovoltaïques combinant des câbles et des grumes de bois, afin de proposer des solutions innovantes et écologiques répondant aux défis énergétiques actuels. Un des principaux défis a été la conception d'un outil de calcul capable de modéliser avec précision les structures câblées selon les spécificités souhaitées. Cet outil, basé sur la méthode de relaxation dynamique, a permis de simuler de manière fiable le comportement mécanique de ces structures en tension, tout en prenant en compte les non-linéarités géométriques propres aux réseaux câblés.

À partir de cet outil, des schémas d'optimisation ont été développés pour intégrer le solveur de relaxation dynamique dans une démarche exploratoire. Ces schémas ont permis d'évaluer l'influence de divers paramètres géométriques et des forces appliquées sur les performances des structures. Cette approche a conduit à des conclusions majeures concernant la minimisation des matériaux utilisés et l'optimisation de l'occupation de l'espace, tout en garantissant la stabilité et l'efficacité structurale. Les résultats obtenus répondent directement à l'objectif initial de concevoir des structures légères, économes en ressources, et adaptées à des contextes d'utilisation variés tels que des parkings solaires ou agricoles.

Au terme des analyses menées dans les trois derniers chapitres de ce mémoire, plusieurs conclusions importantes ont été tirées concernant l'optimisation des structures câblées composées de grumes de bois et de haubans.

Dans les conditions simplifiées étudiées dans le Chapitre 7, il a été démontré que le poids propre des câbles est négligeable et que dans ces conditions, si les rapports des paramètres adimensionnels sont conservés, les graphes issus des diverses expériences d'optimisations devenaient universels. L'analyse a révélé que les réseaux de câbles avec des rapports $\frac{h}{H}$ plus élevés permettent de minimiser les sections des câbles particulièrement pour les plus petites prétensions testée dans le réseau de câble parabolique, favorisant une utilisation économique des matériaux. En outre, une répartition précise des efforts en fonction de la direction du vent a permis de ne pas surdimensionner le câble parabolique inférieur, garantissant ainsi une stabilité structurale optimale. Toutefois, cette analyse repose sur l'hypothèse de points fixes aux extrémités des structures, une condition simplifiée qui ne reflète pas entièrement la réalité. En pratique, des déplacements latéraux peuvent survenir au niveau des points d'accroche des haubans sur les grumes de bois. Ces limitations

ont été approfondies dans le chapitre suivant.

Dans le Chapitre 8, la prise en compte des déplacements horizontaux possibles au niveau des points d'accroche des haubans et des câbles paraboliques a confirmé la sécurité des sections des câbles paraboliques déterminées au Chapitre 7. Les prétensions nécessaires dans les haubans supérieurs pour stabiliser la structure ont été calculées pour différents niveaux de prétension dans les câbles paraboliques. L'analyse a également mis en évidence l'importance de la distance entre le pied de la grume et le point d'ancrage des haubans : réduire cette distance augmente le taux de travail des haubans, améliorant leur efficacité structurale tout en minimisant l'espace occupé par la structure.

Enfin, dans le Chapitre 9, l'inclinaison des grumes de bois a été identifiée comme une stratégie efficace pour optimiser le comportement global de la structure. Cette inclinaison réduit les prétensions nécessaires dans les haubans pour stabiliser le système et diminue la distance normalisée $\tan(\beta)$ entre le pied de la grume et le point d'ancrage des haubans, particulièrement pour des niveaux de prétension plus élevés dans les câbles paraboliques. Par ailleurs, il a été observé que les efforts de compression repris par les grumes restent relativement constants pour une même distance normalisée, indépendamment de leur angle d'inclinaison. Cela garantit que les grumes conservent leur capacité à reprendre les charges tout en contribuant à la stabilité globale de la structure.

Bien que l'étude présentée dans ce mémoire se veuille aussi complète que possible, certaines limitations subsistent. En effet, les codes Python développés ainsi que les algorithmes d'optimisation qui en dépendent pourraient être améliorés pour garantir une convergence plus rapide. Une telle optimisation des outils numériques permettrait de réaliser des campagnes de tests plus vastes et plus complexes avec une plus grande aisance. Par ailleurs, les schémas d'optimisation proposés comportent des simplifications qui excluent l'évolution de certains paramètres au cours des calculs. Ainsi, pour faciliter l'analyse dans certaines situations, certains paramètres ont été considérés comme constants. Par exemple, dans le Chapitre 8, l'influence du hauban inférieur sur les déplacements horizontaux ou sur les prétensions à appliquer n'a pas été étudiée en détail. Cette omission inclut également l'analyse des conséquences que ces évolutions de prétensions pourraient avoir sur la stabilité de la structure ou sur la distance normalisée entre le point d'ancrage et le pied de la grume. Des schémas d'optimisation plus élaborés, intégrant ce type de paramètres, pourraient être développés à partir des bases méthodologiques établies dans ce mémoire.

Enfin, bien que cette étude ait principalement porté sur l'aspect statique des structures câblées, une première perspective de recherche pourrait consister en une analyse dynamique des effets du vent. Comprendre les oscillations et les vibrations dues à ces charges dynamiques est essentiel pour garantir la stabilité et la sécurité à long terme des structures. Une autre piste intéressante serait de quantifier les gains financiers que ces structures optimisées pourraient offrir par rapport à des solutions existantes. Par ailleurs, une évaluation approfondie des coûts financiers

pour une application à un cas réel fournirait des éléments concrets pour favoriser leur adoption. En complément, des études sur la production d'électricité que ces structures permettraient de générer pourraient enrichir la vision globale de leur efficacité énergétique et économique. Enfin, des travaux futurs pourraient explorer l'impact des conditions climatiques extrêmes et du vieillissement des matériaux. Ces pistes de recherche offrent de nombreuses opportunités pour approfondir et élargir les contributions de ce travail dans le domaine des structures légères, économes en matériaux, et intégrant des objectifs énergétiques ambitieux. Ces perspectives garantissent un avenir radieux à ce genre de centrale photovoltaïques.

Bibliographie

- [1] Pierre LATTEUR. *Calculer une structure, De la théorie à l'exemple*. 2016.
- [2] Elizabeth DAVALOS. "Structural Behaviour of Cable-stayed Bridges". In : *Environmental Engineering* (1998).
- [3] Daniel COLMENARES. *Numerical analysis of cabled-truss structures*. 2016.
- [4] Anahita KHODADADI. *Basic concepts of structural design for architecture students*. Sous la dir. de Portland State University LIBRARY. 2021.
- [5] H. A.. BUCHHOLDT. *An introduction to cable roof structures*. Thomas Telford ; ASCE Press [distributeur], 1999, p. 285. ISBN : 9780727726247.
- [6] TSE ÉNERGIE. <https://www.tse.energy>.
- [7] Fabio RIZZO, Aleksander PISTOL et Luca CARACOGIA. "Estimating non-linear wind-induced response of roof cable nets by aeroelastic experiments and ML modeling". In : *Reliability Engineering and System Safety* 248 (août 2024). ISSN : 09518320. DOI : [10.1016/j.ress.2024.110183](https://doi.org/10.1016/j.ress.2024.110183).
- [8] Fabio RIZZO, Gregory A. KOPP et Gian Felice GIACCU. "Investigation of wind-induced dynamics of a cable net roof with aeroelastic wind tunnel tests". In : *Engineering Structures* 229 (fév. 2021). ISSN : 18737323. DOI : [10.1016/j.engstruct.2020.111569](https://doi.org/10.1016/j.engstruct.2020.111569).
- [9] John D ANDERSON. *Fundamentals of Aerodynamics Sixth Edition*. 2017.
- [10] Marc BUFFAT. *Introduction à la programmation scientifique*. 2018.
- [11] Vincent LEGAT et Grégoire WINCKELMANS. *LMECA1321 : Mécanique des fluides et transferts*. 2020.
- [12] Michael R BARNES. "Form Finding and Analysis of Tension Structures by Dynamic Relaxation". In : *International Journal of Space Structures* 14 (2 1999), p. 89.
- [13] Rattez H ; Saraiva Esteves Pacheco De Almeida J ; *LGCIV2041 : Numerical Analysis of civil engineering structures*. 2023.
- [14] M HÜTTNER, J MÁCA et P FAJMAN. *Numerical Analysis of Cable Structures*. 2012.
- [15] P.Ivanyi B.H.V. TOPPING. *Computer-Aided-Design-of-Cable-Membrane-Structures*.
- [16] Barnes Michael R. *Form finding and analysis of tensions space structures by dynamic relaxation*. 1977.

- [17] Pr.Pirouz NOURIAN et Shervin AZADI. *EARTHY : Computational Design for Earth Architecture*, Delft University of Technology. 2020.
- [18] Doghri ISSAM. *LMECA1100 : Mécanique des solides déformables*. 2020.
- [19] Benjamin DARDENNE et Xavier De LIEDEKERKE. *École polytechnique de Louvain Conception et optimisation de structures agrivoltaïques via modélisation paramétrique*.
- [20] *Chambres d'agriculture, Centre-Val de Loire*. URL : <https://centre-valdeloire.chambres-agriculture.fr/sinformer/energies/photovoltaïque>.
- [21] European Committee for STANDARDIZATION. *Eurocode 1 : Actions on - Part 1-4 General Actions - Wind Actions*. 2010.
- [22] Pr.Pirouz NOURIAN et Shervin AZADI. *Python Code*. 2018. URL : https://github.com/Pirouz-Nourian/VectoRelax_Vectorized_Dynamic_Relaxation/blob/master/py/DynamicRelaxation.py.
- [23] Charlier MARION et Vassart OLIVIER. *LG CIV2033 : Steel and composite steel-concrete structures*. 2024.
- [24] Milos HUTTNER, Jiri MACA et Petr FAJMAN. "Efficiency of Dynamic Relaxation Method in Form-Finding Process of Cable-Membrane Structures". In : *Applied Mechanics and Materials* 769 (juin 2015), p. 260-263. DOI : [10.4028/www.SCIENTIFIC.NET/AMM.769.260](https://doi.org/10.4028/www.scientific.net/AMM.769.260).
- [25] Pierre LATTEUR. *ISSD*. 1999.
- [26] *Solutions de levage manutention / Câbleries Namuroises*. URL : <https://www.cabnam.be/fr>.
- [27] Tew-Fik MAHDI. *CIV2310 : MÉCANIQUE DES FLUIDES*, Polytechnique Montréal. 2022.
- [28] Pierre LATTEUR. *Optimisation et prédimensionnement des treillis, arcs, poutres et câbles sur bas des indicateurs morphologiques*. 2000.
- [29] Vincent LEGAT. *LEPL1104 : Méthodes numériques*. 2024.
- [30] Pierre LATTEUR. *LG CIV2043 : Structure en bois*. 2023.
- [31] European Committee for STANDARDIZATION. *Eurocode 5 : Design of timber structures - Part 1-1 : General - Common rules and rules for buildings*. 2008.
- [32] J.J. CONNOR et S. FARAJI. *Fundamentals of Structural Engineering*. 2013.
- [33] Peter YOUNG. *Physics 115/242 The leapfrog method and other "symplectic" algorithms for integrating Newton's laws of motion*.

A Codes Python

Tous les codes réalisés dans le cadre de ce mémoire sont disponibles au lien suivant : https://uclouvain-my.sharepoint.com/:f:/g/personal/nicola_capone_student_uclouvain_be/Ei01IH54d1VLjJwd3FDYmS8B_PjBPqlvaJNEBdiVf85gkQ?e=M94EAE

Les différents codes disponibles sont :

- `BissectionHaubans.py` : Ce code permet d'effectuer la bisection sur la précontrainte dans le hauban afin de trouver la valeur qui stabilise la structure.
- `BissectionHaubans_alpha.py` : Ce code permet également d'effectuer la bisection sur la précontrainte dans le hauban afin de trouver la valeur qui stabilise la structure et cela, pour différentes valeurs d'angle entre la grume inclinée et le hauban (différente distance entre le pied de la grume et le point d'ancrage des haubans).
- `Drawer.py` : Ce code permet de générer les structures étudiées dans ce mémoire (structure à double câble de concavité inversée, avec ou sans haubans, avec ou sans inclinaison des grumes de bois).
- `DrawerForValidation.py` : Ce code est une version du générateur de structure utilisée pour une structure différente afin de valider le comportement du code Solveur (utilisation sur un treillis).
- `OptimisationSection.py` : Ce code est utilisé afin de faire la bisection sur la section des câbles afin de trouver la valeur optimale par rapport aux efforts dans la structure et à la flèche maximale autorisée.
- `Section_DeplHorizontal.py` : Ce code est utilisé afin d'obtenir la section optimale pour les câbles paraboliques en présence des haubans pour lesquels différentes prétensions sont testées (engendrant différents déplacements horizontaux).
- `Solveur.py` : Ce code est le solveur de relaxation dynamique utilisé pour calculer toutes les structures de ce mémoire.
- `Validation_treillis.py` : Ce code est utilisé afin de valider le comportement du solveur sur un treillis.
- `Validation5.1and5.2.py` : Ce code est utilisé afin de valider le comportement du solveur sur un câble simple parabolique et un câble soumis à la prétension.

Utilisation de l'intelligence artificielle

ChatGPT¹ a été utilisé afin de résoudre certaines erreurs de syntaxe dans les codes précités ainsi que pour la reformulation de quelques phrases de ce manuscrit.

1. Source : <https://chatgpt.com>

B Résultats pour différents cas de charges

Les différents paramètres permettant une lecture claire des différents graphes présentés dans cette annexe sont exposés schématiquement aux figures B.1 et B.2. Les câbles utilisés ont comme module de Young $E=170$ [GPa] et une limite élastique $f_y = 0,852$ [GPa]. Cette limite élastique comprend un coefficient de sécurité de 2,2 comme le prévoit [26]. Les panneaux photovoltaïques ont comme dimension 2 mètres de longueur pour 1 mètre de large.

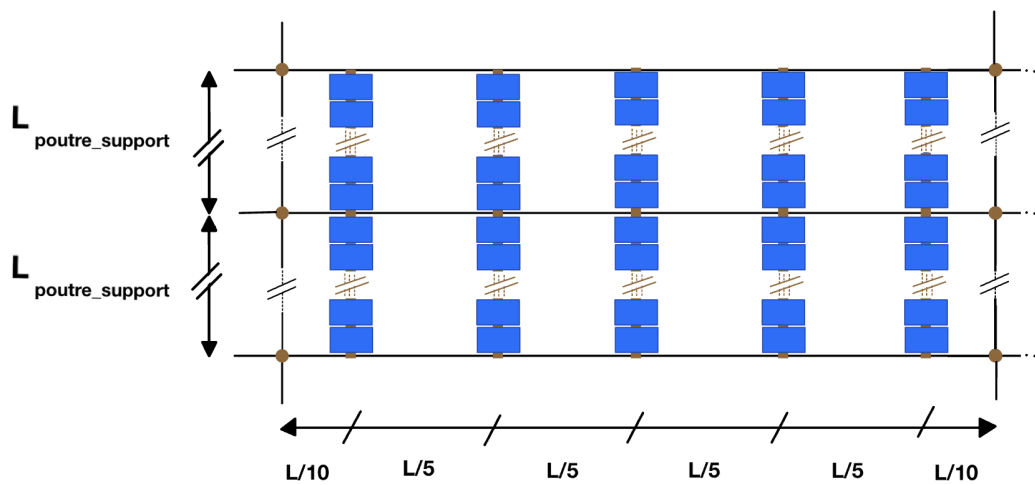


FIGURE B.1 – Représentation schématique des paramètres de dimensions dans la vue du haut.

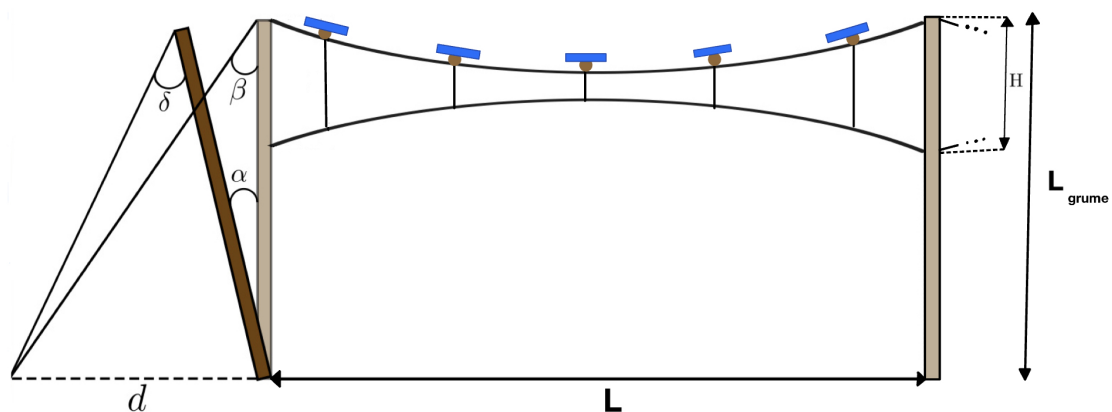


FIGURE B.2 – Représentation schématique des paramètres de dimensions et des angles.

La Table B.1 reprend les charges ponctuelles totales qui s'appliquent en un point du câble et présente le paramètre P qui y est associé.

Nombre de panneaux	Longueur des poutres de supports	P	Paramètres P associés
6	6 [m]	30 [kN]	150
5	5 [m]	25 [kN]	125
4	4 [m]	20 [kN]	100
3	3 [m]	15 [kN]	75
2	2 [m]	10 [kN]	50
1	1 [m]	5 [kN]	25

TABLE B.1 – Tableau des charges totales ponctuelles (P) s’appliquant en 1 point de câble en fonction de la longueur des poutres de supports et du nombre de panneaux.

Les résultats principaux pour chaque type de chargement sont résumés ci-après, offrant une plus grande flexibilité dans le choix de la longueur des poutres de support. Une analyse détaillée des résultats a été réalisée pour le cas où $P=125$, tandis que pour les autres cas de charges, seules les figures présentant les résultats les plus significatifs sont fournies, sans analyse approfondie.

B.1 $P = 125$

Câbles paraboliques entre 4 points fixes

La structure composée uniquement de câbles paraboliques entre 4 points fixes est d’abord étudiée. L’évolution de la section est analysée sur la Figure B.3. Il en découle le choix de la flèche géométrique initiale $h = 0,45$. Ensuite, l’évolution de la flèche pour $h = 0,45$ est présentée sur la Figure B.4. La flèche diminue lorsque la prétension augmente.

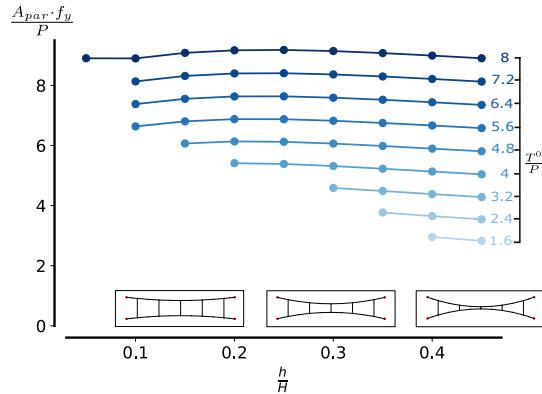


FIGURE B.3 – Evolution de la section des câbles paraboliques en fonction de la flèche géométrique initiale pour différentes prétensions dans les câbles paraboliques.

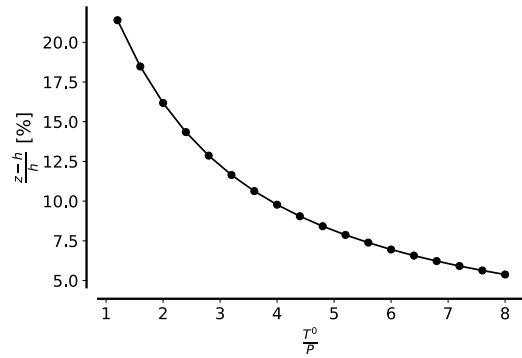


FIGURE B.4 – Évolution de la flèche à mi-portée par rapport à la prétension dans le réseau.

Ajout des haubans

Les haubans sont ensuite ajoutés à la structure pour la suite des analyses. La Figure B.5 montre l'évolution de la section dans le hauban supérieur par rapport au déplacement horizontal au droit de la grume de bois. Au plus la section augmente, au plus le gain en déplacement horizontal diminue. La valeur de la section est donc sélectionnée telle que $\frac{A_{haubans} \cdot f_y}{P} \cong 8,5$, c'est-à-dire, $A_{haubans} = 1250 \text{ mm}^2$. La Figure B.6 présente ensuite les différentes combinaisons de section des câbles paraboliques (associée à une prétension des câbles paraboliques) et de prétension dans les haubans permettant de stabiliser la structure.

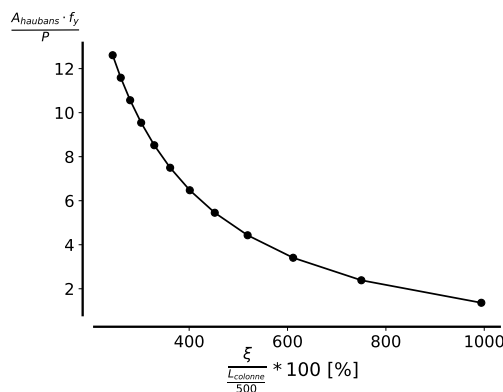


FIGURE B.5 – Evolution de la section des haubans par rapport au déplacement horizontal.

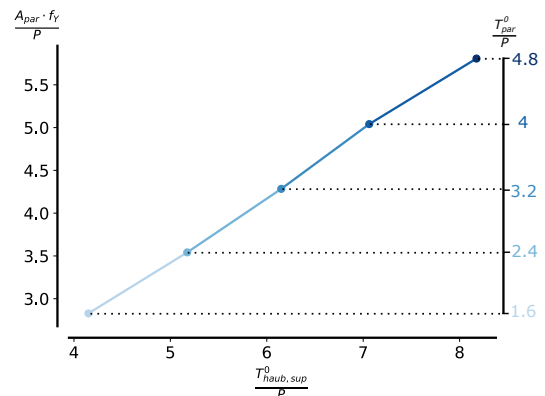


FIGURE B.6 – Combinaison de sections A_{par} des câbles paraboliques prétendus et des valeurs de prétension $T_{haub,sup}^0$ stabilisant la structure.

Inclinaison des grumes

L'influence de l'inclinaison de la grume sur la structure est analysée sur les Figures B.7 et B.8. La Figure B.7 montre que pour une prétension $\frac{T_{par}^0}{P}$ fixée, l'inclinaison de la grume permet de diminuer la prétension dans les haubans. La Figure B.8 illustre qu'incliner la grume permet de diminuer la distance entre le point d'ancrage des haubans et la grume. Ces deux effets sont plus marqués pour des prétensions plus élevées.

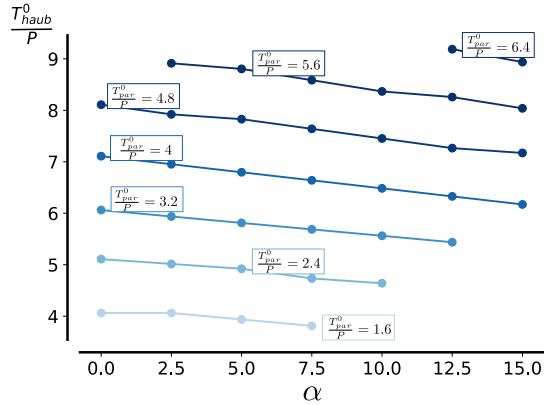


FIGURE B.7 – Influence de l'angle d'inclinaison de la grume α sur la prétension dans les haubans.

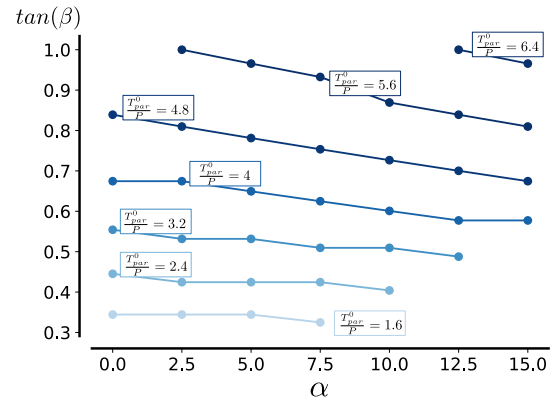


FIGURE B.8 – Influence de l'angle d'inclinaison de la grume α sur la distance normalisée $\tan(\beta)$ entre le pied de la grume et le point d'ancrage des haubans.

B.2 P = 100

Câbles paraboliques entre 4 points fixes

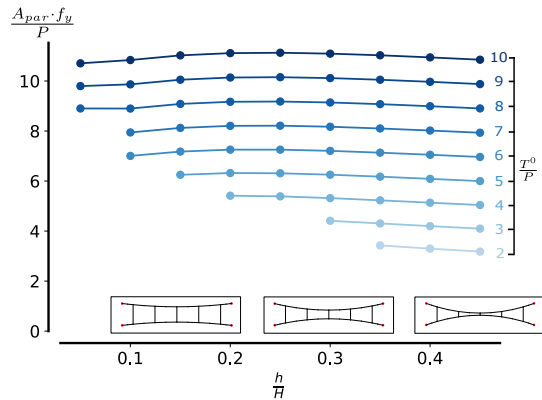


FIGURE B.9 – Evolution de la section des câbles paraboliques en fonction de la flèche géométrique initiale pour différentes prétensions dans les câbles paraboliques.

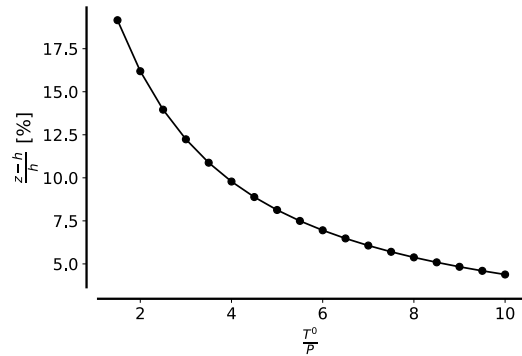


FIGURE B.10 – Evolution de la flèche à mi-portée par rapport à la prétension dans le réseau.

Ajout des haubans

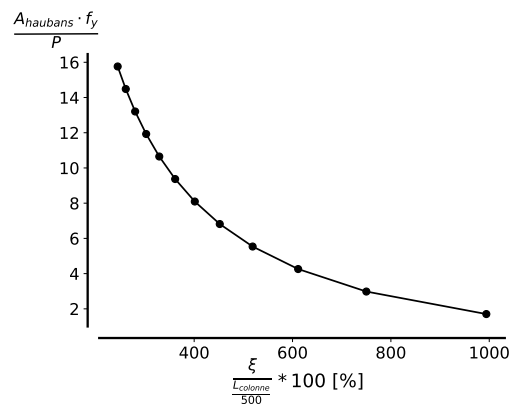


FIGURE B.11 – Evolution de la section des haubans par rapport au déplacement horizontal.

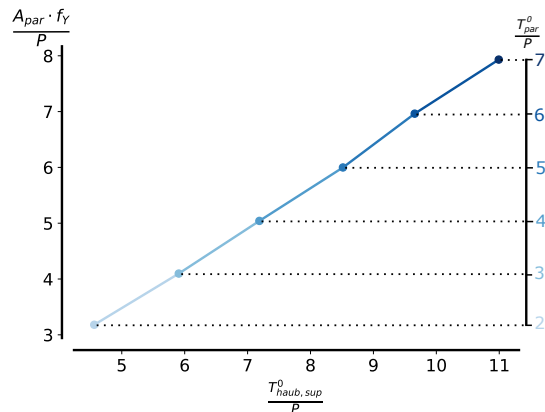


FIGURE B.12 – Combinaison de sections A_{par} des câbles paraboliques prétendus et des valeurs de prétension $T^0_{haub,sup}$ stabilisant la structure.

Inclinaison des grumes

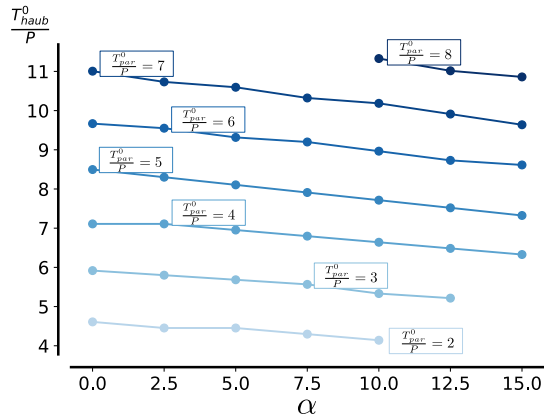


FIGURE B.13 – Influence de l'angle d'inclinaison de la grume α sur la pré-tension dans les haubans.

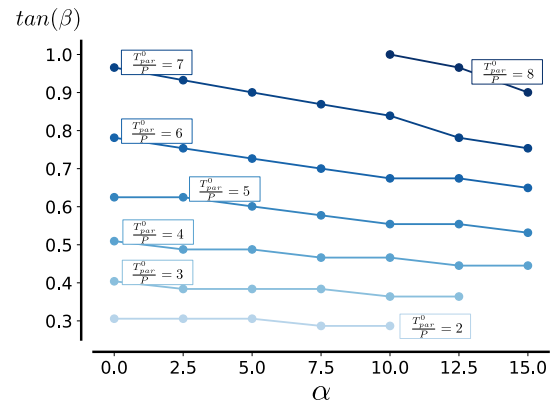


FIGURE B.14 – Influence de l'angle d'inclinaison de la grume α sur la distance normalisée $\tan(\beta)$ entre le pied de la grume et le point d'ancrage des haubans.

B.3 P = 75

Câbles paraboliques entre 4 points fixes

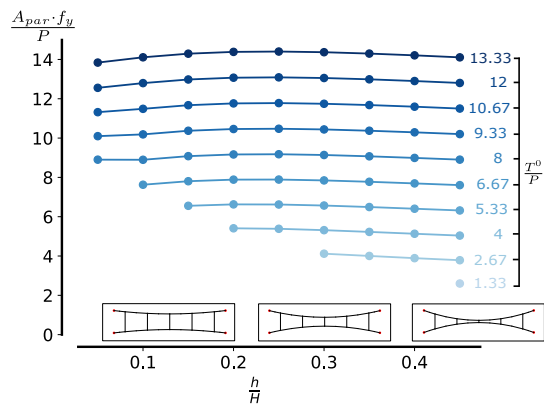


FIGURE B.15 – Evolution de la section des câbles paraboliques en fonction de la flèche géométrique initiale pour différentes prétensions dans les câbles paraboliques.

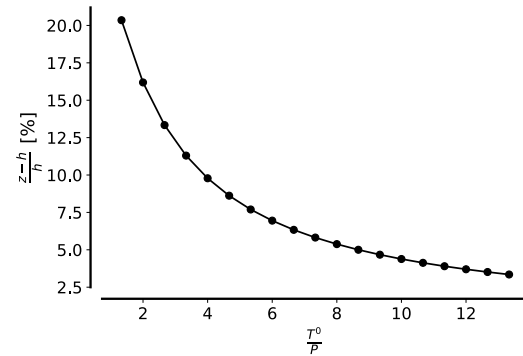


FIGURE B.16 – Évolution de la flèche à mi-portée par rapport à la prétension dans le réseau.

Ajout des haubans

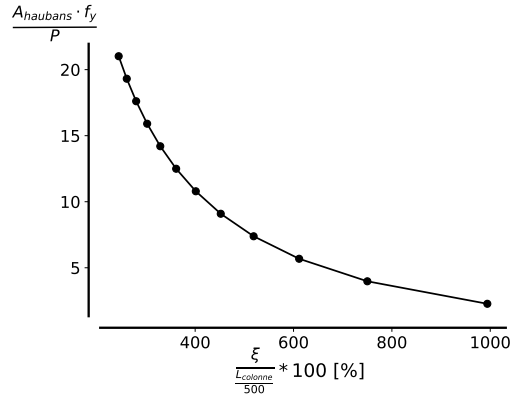


FIGURE B.17 – Evolution de la section des haubans par rapport au déplacement horizontal.

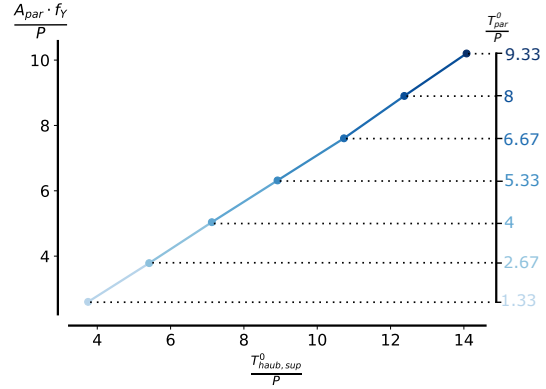


FIGURE B.18 – Combinaison de sections A_{par} des câbles paraboliques prétenus et des valeurs de prétension $T_{haub,sup}^0$ stabilisant la structure.

Inclinaison des grumes

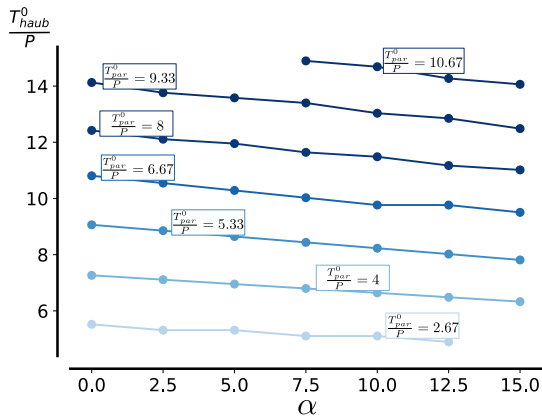


FIGURE B.19 – Influence de l'angle d'inclinaison de la grume α sur la prétension dans les haubans.

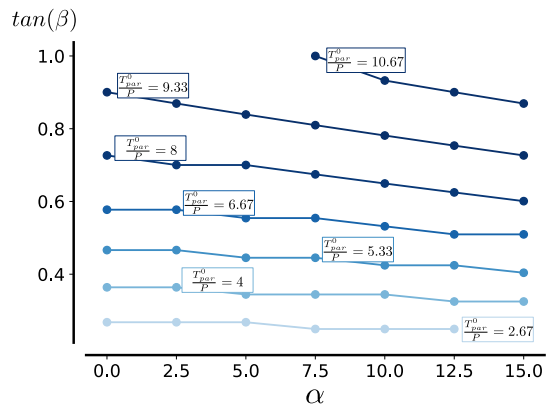


FIGURE B.20 – Influence de l'angle d'inclinaison de la grume α sur la distance normalisée $\tan(\beta)$ entre le pied de la grume et le point d'ancrage des haubans.

B.4 P = 50

Câbles paraboliques entre 4 points fixes

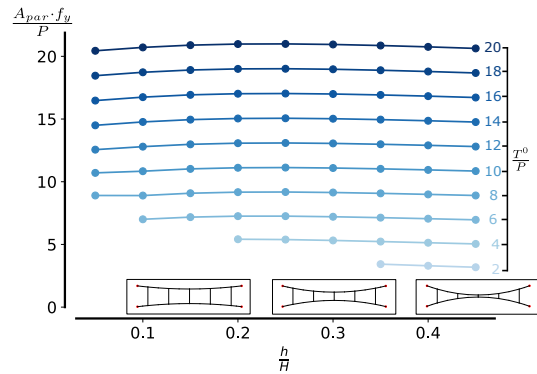


FIGURE B.21 – Evolution de la section des câbles paraboliques en fonction de la flèche géométrique initiale pour différentes prétensions dans les câbles paraboliques.

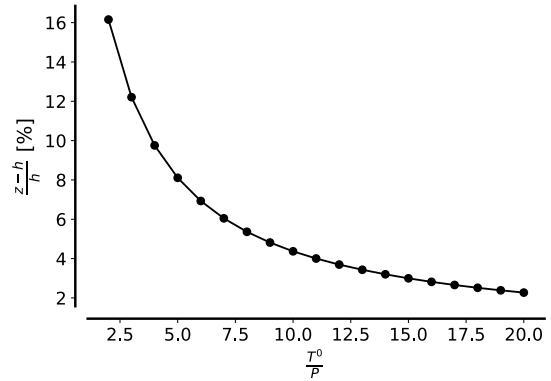


FIGURE B.22 – Évolution de la flèche à mi-portée par rapport à la prétension dans le réseau.

Ajout des haubans

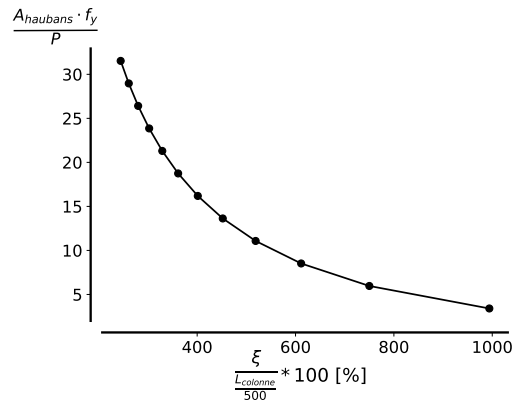


FIGURE B.23 – Evolution de la section des haubans par rapport au déplacement horizontal.

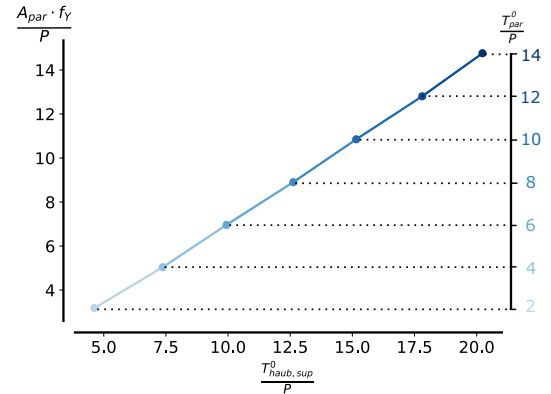


FIGURE B.24 – Combinaison de sections A_{par} des câbles paraboliques prétendus et des valeurs de prétension $T_{haub,sup}^0$ stabilisant la structure.

Inclinaison des grumes

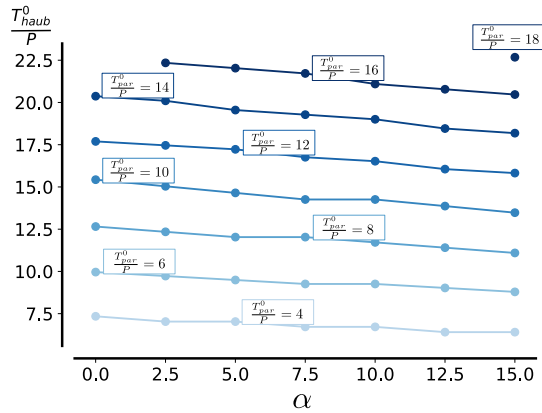


FIGURE B.25 – Influence de l'angle d'inclinaison de la grume α sur la prétension dans les haubans.

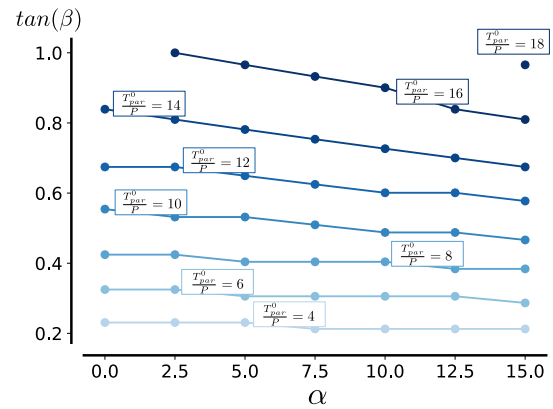


FIGURE B.26 – Influence de l'angle d'inclinaison de la grume α sur la distance normalisée $\tan(\beta)$ entre le pied de la grume et le point d'ancrage des haubans.

B.5 P = 25

Câbles paraboliques entre 4 points fixes

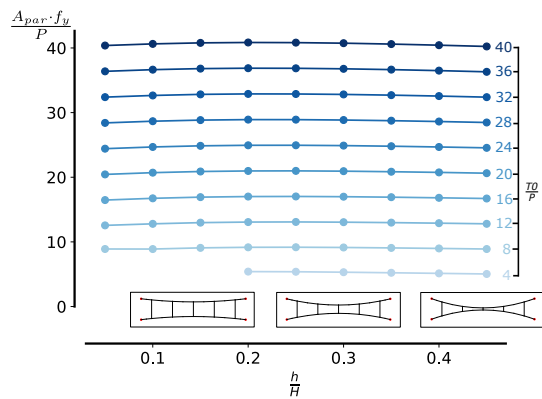


FIGURE B.27 – Evolution de la section des câbles paraboliques en fonction de la flèche géométrique initiale pour différentes prétensions dans les câbles paraboliques.

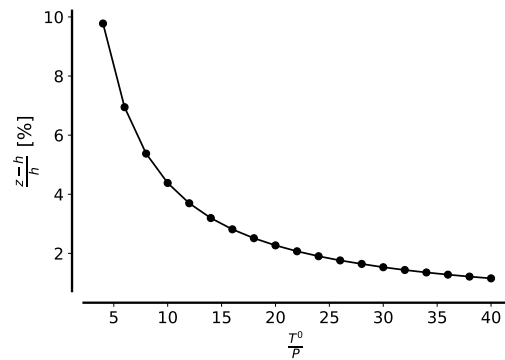


FIGURE B.28 – Évolution de la flèche à mi-portée par rapport à la prétension dans le réseau.

Ajout des haubans

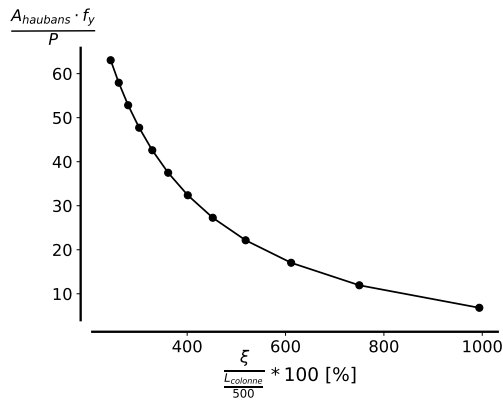


FIGURE B.29 – Evolution de la section des haubans par rapport au déplacement horizontal.

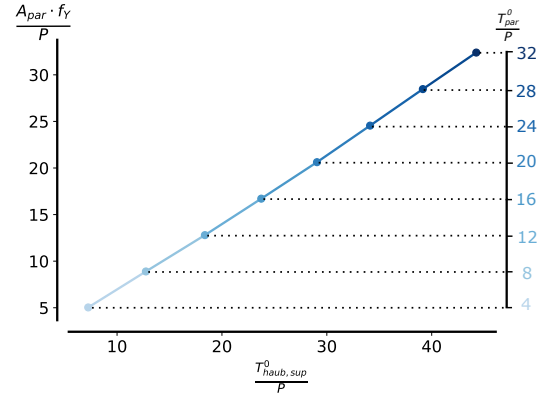


FIGURE B.30 – Combinaison de sections A_{par} des câbles paraboliques prétenus et des valeurs de prétension $T^0_{haub,sup}$ stabilisant la structure.

Inclinaison des grumes

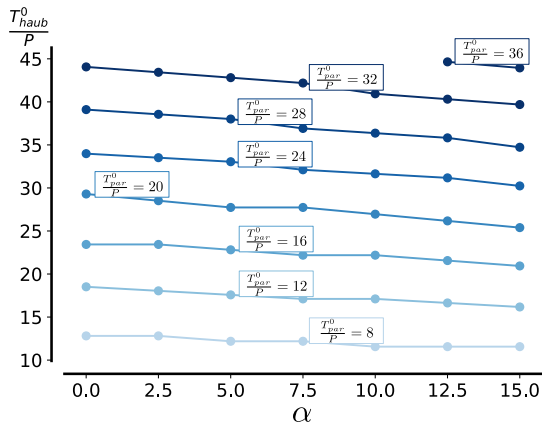


FIGURE B.31 – Influence de l'angle d'inclinaison de la grume α sur la prétension dans les haubans.

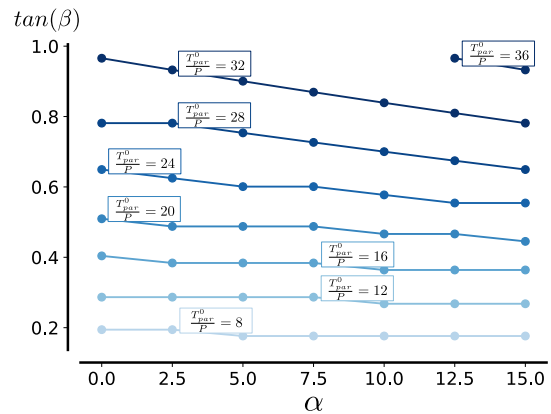


FIGURE B.32 – Influence de l'angle d'inclinaison de la grume α sur la distance normalisée $\tan(\beta)$ entre le pied de la grume et le point d'ancrage des haubans.

C Calcul de l'angle entre la grume inclinée et le hauban

Dans cette annexe, le développement menant au calcul de l'angle entre la grume inclinée et le hauban est présenté. La situation est schématisée à la Figure C.1. Le but est de calculer l'angle δ qui permette de garder la même distance au sol d en inclinant la grume que dans le cas où la grume n'est pas inclinée.

Pour commencer, la distance d peut être calculée dans le triangle ABC :

$$\begin{aligned} \tan(\beta) &= \frac{d}{L_{grume}} \\ \Leftrightarrow d &= L_{grume} \cdot \tan(\beta) \end{aligned} \quad (C.1)$$

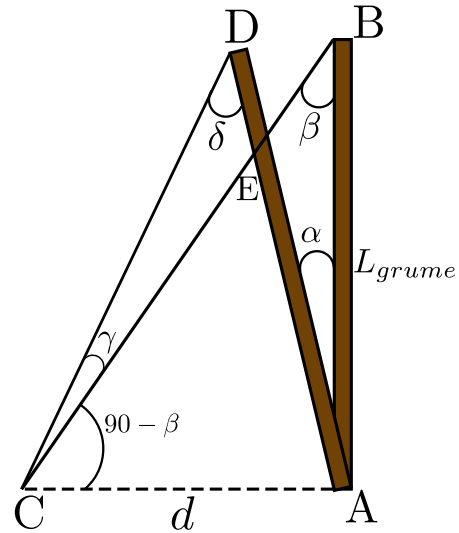


FIGURE C.1 – Représentation schématique de l'inclinaison de la grume et calcul d'angles.

La loi des sinus peut ensuite être utilisée dans le triangle ADC pour mettre en relation l'angle δ avec l'angle β connu :

$$\frac{\sin(\delta)}{d} = \frac{\sin(90 - \beta + \gamma)}{L_{grume}}$$

La distance d peut être substituée grâce à l'Equation C.1 :

$$\frac{\sin(\delta)}{L_{grume} \cdot \tan(\beta)} = \frac{\sin(90 - \beta + \gamma)}{L_{grume}} \quad (C.2)$$

La variable L_{grume} se simplifie. L'angle γ étant également inconnu, il convient de l'exprimer par rapport aux autres données. Les triangles CED et ABE étant de sommets opposés, l'expression suivante est établie :

$$\begin{aligned} \delta + \gamma &= \alpha + \beta \\ \Leftrightarrow \gamma &= \alpha + \beta - \delta \end{aligned} \quad (C.3)$$

En substituant l'expression C.3 pour γ dans l'Equation C.2, la relation suivante est obtenue :

$$\begin{aligned} \sin(\delta) &= \tan(\beta) \cdot \sin(90 - \beta + \alpha + \beta - \delta) \\ &= \tan(\beta) \cdot \sin(90 + \alpha - \delta) \\ &= \tan(\beta) \cdot \cos(\delta - \alpha) \end{aligned}$$

Cette relation peut être développée comme suit :

$$\sin(\delta) = \tan(\beta) \cdot [\cos(\delta) \cos(\alpha) + \sin(\delta) \sin(\alpha)]$$

Ou encore :

$$\sin(\delta)(1 - \tan(\beta) \sin(\alpha)) = \tan(\beta) \cos(\delta) \cos(\alpha)$$

$$\frac{\sin(\delta)}{\cos(\delta)}(1 - \tan(\beta) \sin(\alpha)) = \tan(\beta) \cos(\alpha)$$

$$\tan(\delta) = \frac{\tan(\beta) \cos(\alpha)}{1 - \tan(\beta) \sin(\alpha)}$$

$$\tan(\delta) = \frac{\cos(\alpha)}{\frac{1}{\tan(\beta)} - \sin(\alpha)}$$

La valeur de l'angle δ est donc exprimée par rapport à l'angle β définissant la longueur d et l'angle α d'inclinaison de la grume :

$$\delta = \operatorname{atan} \left(\frac{\cos(\alpha)}{\frac{1}{\tan(\beta)} - \sin(\alpha)} \right)$$

D Dimensionnement de la grume au flambement

Le dimensionnement au flambement d'une colonne en bois D40 suit les recommandations de l'Eurocode 5[31]. Le calcul est itératif et est réalisé comme suit :

- $f_{c,0,k} = 27$ [MPa] : résistance caractéristique en compression du D40,
- $E_{0,k} = 10900$ [MPa] : module de Young caractéristique,
- $N_{Ed} = 1097.33$ [kN] : compression déduite sur base du graphe de la figure 9.4,
- $\gamma_m = 1.3$ [/] : coefficient de sécurité sur le matériau,
- $k_{mod} = 0.5$ [/] : coefficient prenant en compte la classe d'exposition du bois,
- L_f la longueur de flambement de la colonne vaut $L_{grume} = 7$ [m],
- $D = 50$ [cm] : le diamètre de la colonne en grume de bois.

L'élançement λ est calculé via :

$$\lambda = L_f \sqrt{\frac{A}{I}} = 56,51 \quad (\text{D.1})$$

L'élançement relatif λ_{rel} est calculée par :

$$\lambda_{rel} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{f_{c,0,k}}{E_{0,k}}} = 0,895 \quad (\text{D.2})$$

Les conditions sont ensuite évaluées comme suit :

Si $\lambda_{rel} > 0.3$, alors :

$$k = 0.5 \left(1 + \beta (\lambda_{rel} - 0.3) + \lambda_{rel}^2 \right) = 0,96 \quad (\text{D.3})$$

avec $\beta = 0,2$ car le D40 est assimilé à du bois massif.

On déduit ensuite k_c via l'équation suivante :

$$k_c = \frac{1}{k + \sqrt{k^2 - \lambda_{rel}^2}} = 0,764 \quad (\text{D.4})$$

Enfin, la vérification du critère de dimensionnement est réalisée par l'inégalité suivante :

$$\frac{N_{Ed} \cdot \gamma_m}{\pi \cdot \left(\frac{D}{2}\right)^2 \cdot k_c \cdot k_{mod} \cdot f_{c,0,k}} \leq 1 \quad (\text{D.5})$$

On déduit que le critère de flambement est respecté vu que $0,7 \leq 1$.

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
École polytechnique de Louvain

Rue Archimède, 1 bte L6.11.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/epl