

Faculté des sciences

Normalité

Auteur·es : Culot Maxime

Promoteur·rices : Van der Linden Tim

Lecteur·rices : Gran Marino, Vaz Pedro

Année académique 2019-2020

Master[120] en sciences mathématiques, à finalité approfondie

Normalité

Culot Maxime

PROMOTEUR : VAN DER LINDEN TIM

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN

FACULTÉ DES SCIENCES

ÉCOLE DE MATHÉMATIQUE

2019–2020

Je voudrais dédier tout spécialement ce mémoire à mon grand-père
Léon Lassoie qui nous a quitté le 10 février 2020. J'espère que, où que tu
sois, papy, tu es fier de ton petit-fils et que le professeur d'université que tu
étais, est fier de l'étudiant que je suis. C'est aussi grâce à ta force que j'ai
réussi à faire un mémoire aussi complet et aussi abouti.

Merci pour tout papy.

Je sais que je ne t'ai pas dit de vive voix que je voulais te montrer mon
mémoire, mais maintenant je me rends compte que j'aurais voulu voir ton
sourire quand je t'aurais remis mon travail fini et pouvoir en débattre sous
forme d'une discussion informelle avec le grand-père ou plus sérieuse avec
l'académicien que tu étais.

Je t'aime pour l'éternité

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier Mr Van der Linden de m'avoir accompagné lors de la réalisation et la rédaction de ce mémoire. Il a été présent à mes côtés à chaque fois que j'en ai eu besoin et même en les circonstances exceptionnelles de cette fin d'année académique particulière. Merci d'avoir eu la patience et le temps de répondre à mes questions et de m'avoir fait découvrir une nouvelle facette de la théorie des catégories. Merci de m'avoir poussé dans mes derniers retranchements. Merci d'avoir cru en moi. Je suis persuadé que ce mémoire à vos côtés m'a fait grandir que ce soit mathématiquement ou humainement.

Merci aussi à mes collègues, ou plutôt camarades, de l'UCLouvain car sans vous ces cinq années d'études n'auraient pas été les mêmes ; que ce soit pour les souvenirs liés au cours tout au long de notre cursus ou pour nos moments de partages (à la cafétéria, entre deux cours, ou alors via la technologie moderne). Je pense que sans vous cette dernière année, assez atypique, n'aurait pas eu la même saveur à mes yeux. Je chérirai toujours nos moments de partage, de joie, de détresse ou de désespoir au vu de l'épreuve du mémoire. J'espère que la vie ne nous éloignera pas et que notre belle amitié forgée au fil de ces années puisse survivre aux aléas de la vie et aux distances.

Je voudrais aussi remercier mes amis et amies du secondaire, vous qui m'avez épaulé aussi lors de ces cinq années d'études, preuve que l'on peut garder des liens. Vous avez été présents pour moi dans les bons comme dans les moins bons moments. Sans nos discussions et nos moments d'échange ces années d'université n'auraient pas été les mêmes pour moi. Je sais que je peux et que je pourrai toujours compter sur vous tous et toutes. J'espère pouvoir vous rendre la pareille que ce soit juste quand vous en aurez besoin ou simplement pour partager des moments privilégiés.

Je tenais aussi à remercier en particulier Audrey qui a été à mes côtés lors de ces années d'études avec des hauts et des bas. Tu m'as épaulé, soutenu, tu as été à mon écoute quand les mathématiques me submergeaient un peu. Tu m'as encouragé à persévérer quand je doutais de moi. Tu m'as soutenu moralement lors des diverses périodes de blocus et d'examens. Et même si

cette dernière année a été difficile pour nous deux, je tenais à te dire un grand merci. J'espère aussi avoir fait pareil pour toi lors de toutes tes années d'études.

Je voudrais terminer en remerciant ma famille : mes oncles, tantes, cousin(e)s, mes grands-mères et mes grands-pères d'avoir été à mes côtés lors de ces cinq années d'études intensives des mathématiques. J'ai toujours su que je pouvais compter sur vous pour me soutenir que soit à distance ou alors lors de repas familiaux. Je savais aussi que j'avais beau essayer de vous expliquer les cours que j'avais, vous ne compreniez pas tout mais votre intérêt pour mes études me faisait plaisir et était important pour moi. Alors merci à vous.

Enfin et surtout, je veux terminer ces remerciements en citant ma maman (chimiste) Marie-Agnès, mon papa (mathématicien) Patrick et mon frère jumeau (futur ingénieur industriel) Julien qui m'ont épaulé quotidiennement lors de ces cinq années. Vous étiez à mon écoute à tout moment. Je savais que je n'avais qu'un message ou un coup de fil à passer, et vous étiez là pour moi. Sans vous, je n'aurais pas pu réussir mes études comme je l'ai fait. Je voudrais remercier particulièrement ma maman pour avoir pris son courage à deux mains pour relire mon mémoire afin de me suggérer quelques modifications, je me doute que ce n'était pas très digeste à lire.

Table des matières

Remerciements	vii
Introduction	1
Chapitre 1. Rappel sur les groupes, anneaux, ...	5
1.1. Sous-groupes normaux	5
1.2. Les idéaux dans les anneaux et les algèbres de Lie	10
1.2.1. Les anneaux et les anneaux avec unité	10
1.2.2. Les idéaux	11
1.2.3. Les algèbres de Lie	12
Chapitre 2. Catégories semi-abéliennes	15
2.1. Rappel de catégories	15
2.1.1. Rappel de catégories courantes	15
2.1.2. Rappels de notions basiques	17
2.1.3. Les relations dans les catégories	26
2.2. Catégories régulières	32
2.2.1. Variations d'épimorphismes	33
2.2.2. Retour sur les catégories régulières	39
2.3. Catégories exactes	56
2.4. Catégories uniales et protomodulaires	58
2.4.1. Catégories uniales	59
2.4.2. Les objets abéliens	61
2.4.3. Catégories protomodulaires	75
2.5. Catégories semi-abéliennes	86
Chapitre 3. Première notion de normalité	89
3.1. Sous-objet normal	89
3.2. Approfondissement du lien entre noyau et sous-objet normal	97
3.3. L'exemple des algèbres de Lie	104
3.4. Conclusion du chapitre	105
Chapitre 4. Notions plus faibles que la normalité	107

4.1. Sous-objet semi-normal	107
4.2. Blocs	114
4.2.1. Monades	114
4.2.2. Retour aux blocs	117
4.3. Idéaux	134
4.4. Conclusion du chapitre	141
Chapitre 5. Les commutateurs et le lien avec la notion de normalité	143
5.1. Les définitions pour la notion de commutateur	143
5.1.1. Le commutateur formel	143
5.1.2. Le commutateur de Higgins et de Huq	145
5.2. Le lien avec la notion de sous-objets normaux	149
5.3. Les commutateurs et les algèbres de Lie	158
Bibliographie	161

Introduction

La notion de *groupes* a été introduite par le mathématicien français Évariste Galois durant le 19^e siècle. Ce dernier a travaillé sur la résolution d'équations polynomiales de degré au moins quatre en considérant des extensions de corps commutatifs. Galois avait noté une condition de résolution qui concernait les groupes symétriques des racines de l'équation considérée. Une notion familière, introduite en hommage à Galois, est la notion de *groupe de Galois* pour une extension de corps donnée L/K qui est le groupe des automorphismes de L tel que le sous-corps K est invariant.

De nos jours, la théorie des groupes possède beaucoup d'implications, et pas uniquement en mathématiques. En effet, les groupes peuvent être utilisés en physique (comme le *groupe de Lorentz* par exemple), en chimie (pour classer des structures de cristaux ou pour regarder les symétries au sein des molécules), dans les *computer sciences* (comme dans la cryptographie) et même dans les puzzles comme les Rubik's Cubes. Bien entendu, cette riche théorie des groupes possède aussi bons nombres d'applications dans le champ des mathématiques : en arithmétique puisque les entiers forment un groupe ou encore par l'arithmétique modulaire introduite par Gauss au début du 19^e siècle, en algèbre linéaire via les groupes linéaires qui sont des groupes de matrices, les groupes de Lie et les groupes de Galois.

Cependant comme toute théorie suffisamment riche tels que les ensembles, nous pouvons considérer des sous-objets de groupes : pour les ensembles, ce sont les sous-ensembles et pour les groupes, ce sont les *sous-groupes*. Pour lesquels, nous pouvons considérer deux « types » : les *sous-groupes normaux* et ceux qui ne le sont pas. Un avantage indéniable des sous-groupes normaux est de considérer des ensembles quotients possédant une structure de groupe. Cette construction sera rappelée dans la Section 1.1. De plus, grâce à cette notion de *groupe quotient*, nous pouvons démontrer trois théorèmes d'isomorphismes, qui ont énormément d'application en mathématiques. Pour illustrer l'importance de ces groupes quotients, on peut citer un exemple important en topologie algébrique : les groupes d'homologie et de cohomologie. Ce sont des groupes quotients définis via des complexes de chaînes et donc via des

modules sur un anneau commutatif. Ces groupes d'homologie permettent de comparer des objets topologiques et, par exemple, de démontrer le théorème du point fixe de Brouwer.

Cependant, nous savons que les groupes ne sont pas les seules structures mathématiques admettant des quotients via des sous-objets spécifiques. En effet, on va rappeler dans la Section 1.2 la définition d'idéaux d'un anneau ou d'une algèbre de Lie et qu'alors, si on effectue un quotient pour les anneaux et les algèbres de Lie par ces idéaux, on trouve des objets quotients comme dans les groupes. Au vu de ce fait, on peut se demander comment généraliser la notion de sous-groupes normaux. Via quelle théorie? Ou de quelle manière? Le but de ce mémoire est l'étude de cette généralisation du concept de sous-groupes normaux via la notion de catégories.

Tout d'abord, avant de regarder la définition de sous-objets normaux dans une catégorie, nous allons définir toutes les différents concepts de catégories qui seront utilisés dans la suite du mémoire. En effet, dans le Chapitre 2, après un bref rappel sur des notions basiques et des notations qui seront employées dans la suite, nous allons introduire les catégories suivantes : *régulières*, *normales*, *unitales*, *protomodulaires* et, pour finir, *semi-abéliennes*. On notera que pour étudier ces différentes catégories, nous ferons une courte sous-section sur l'étude des variations de la notion d'*épimorphisme* (voir Sous-section 2.2.1). On montrera au fur et à mesure du document que les catégories privilégiées, par excellence, pour étudier les sous-objets normaux seront les catégories semi-abéliennes puisqu'elles disposent de toutes les caractéristiques requises pour caractériser au mieux les sous-objets normaux. En effet, on rappellera que, dans la catégories des groupes, l'on peut définir la notion de sous-groupes normaux de cinq manières différents (voir les détails dans la Section 3.1). Soit G un groupe et H un sous-groupe de G , alors les conditions suivantes sont équivalentes et définissent ce qu'est un sous-groupe normal H de G

- (1) $\forall x \in G, xHx^{-1} \subset H$;
- (2) $\forall x \in G, xH = Hx$;
- (3) L'ensemble quotient G/H possède une structure de groupe telle que la projection $\pi : G \rightarrow G/H$ est un morphisme de groupes ;
- (4) H est le noyau d'un morphisme de groupes ;
- (5) $[H, G] \leq H$, où $[H, G]$ est le *commutateur* de H et G .

Par conséquent, la ligne directrice de ce mémoire sera, dans un premier temps de définir la notion de sous-normaux, de comparer cette notion dans

les ensembles, dans les groupes et dans les anneaux (voir Chapitre 3). En effet, on montrera que les sous-objets normaux dans la catégorie des groupes sont les sous-groupes (voir Lemme 3.2.0.1). De plus dans le Chapitre 3, nous étudierons le lien entre les noyaux et les sous-objets normaux. Pour cela nous montrerons sous quelles hypothèses, ces deux notions sont équivalentes. Dans le Chapitre 4, nous introduirons de nouveaux objets comme les *sous-objets semi-normaux*, les *blocs* (eng. *clots*) et les *idéaux*. Et à chaque nouvel objet introduit, nous regarderons dans quel cadre cette notion est équivalente avec la notion de sous-objet normal et avec les notions introduites précédemment dans le chapitre. On mettra en lumière, que sous certaines conditions, on peut arriver à traduire la caractérisation des sous-groupes normaux via la stabilité par conjugaison dans un cadre catégoriel. De plus, on montrera d'où vient cette caractérisation en explicitant des conditions à imposer sur la catégorie considérée pour avoir les équivalences souhaitées. Pour finir dans le Chapitre 5, on introduira la notion de commutateur dans les catégories et on prouvera un résultat caractérisant les sous-objets normaux via un commutateur spécifique. Toute fois, nous n'avons pas explicité la caractérisation des sous-objets normaux via des classes latérales à gauches et à droites comme dans le point (ii) plus haut. Premièrement car la référence de base de ce texte [23] ne le mentionnait pas et deuxièmement, il n'est pas évident d'arriver à généraliser cette caractérisation qui est assez propre à la catégorie des groupes. En effet, il n'est pas claire de savoir comment caractériser des sous-ensemble d'un groupe uniquement via des morphismes de groupes. Dès lors, il n'est pas possible de définir des classe suivant un sous-groupe d'une manière (eng. *cosets*) de manière aussi générale que les autres notions qui seront introduites dans ce mémoire.

Pour être plus précis, dans ce mémoire, nous exposerons sous quelles conditions la notion de sous-objet normal est équivalente à d'autres notions, aussi introduites dans ce travail, afin de retrouver en quelque sorte les cinq manières de définir les sous-groupes normaux dans les groupes. Dès lors, la catégorie des groupes sera l'exemple « fil conducteur » de ce mémoire. Et dans cette optique de caractérisation des sous-objets normaux, nous allons comparer une notion à une autre à la fois pour avoir à la fin une famille d'implications et d'équivalences en fonction des catégories considérées. Comme mentionné plus haut, les catégories semi-abéliennes seront les catégories pour lesquelles tous les concepts clés introduits seront équivalents.

Par ailleurs, dans ce mémoire, certains résultats et démonstrations proviennent de travaux dont les références sont reprises dans la bibliographie ou d'une collaboration entre Mr Van der Linden, mon promoteur, et l'auteur, ou finalement uniquement de la propre réflexion de l'auteur. Notons que, certains résultats, bien connus, ont du être adaptés aux contextes du mémoire. En effet, il se peut que certains résultats, pour lesquels on peut trouver des démonstrations dans certains ouvrages, ont du être légèrement modifiés pour satisfaire aux hypothèses requises pour démontrer d'autres résultats. Dès lors, afin de clarifier dans le texte, l'origine des preuves pour ces résultats connus mais énoncés dans un contexte différent (voire nouveau), il a été convenu de signaler quand il s'agissait d'une collaboration ou quand le résultat était propre à l'auteur.

Rappel sur les groupes, anneaux, ...

1.1. Sous-groupes normaux

Dans la suite de la section, on notera G pour le groupe $(G, \cdot, e)$ muni de l'opération $\cdot$ et du neutre e . Soit $x \in G$, nous utiliserons la notation x^{-1} pour noter son inverse dans le groupe G . Et nous utiliserons la notation $H \leq G$, pour dire que H est un sous-groupe de G .

DÉFINITION 1.1.0.1. [16, 2.9.3. Définition] Un sous-groupe H de G est dit *normal* dans G si H satisfait à la condition

$$xHx^{-1} \subset H, \quad \forall x \in G.$$

Cette définition veut, entre autre, dire : $\forall h \in H, \quad \forall x \in G, \quad xhx^{-1} \in H$.
Si H est un tel sous-groupe, on écrit $H \triangleleft G$.

EXEMPLE 1.1.0.2. [16, 2.9.6. Remarque]

- Tout groupe abélien est normal dans lui-même et tout sous-groupe d'un groupe abélien est normal.
- Soit $G = S_3$ le groupe symétrique à trois éléments. Si on pose $H = \langle (12) \rangle = \{e, (12)\}$ le sous-groupe engendré par la permutation (12) , alors H n'est pas un sous-groupe normal de G . En effet, si on pose $x = (23) = x^{-1} \in G$ alors nous obtenons $x \circ (12) \circ x^{-1} = (23) \circ (12) \circ (23) = (13) \notin H$.
- Soit $f : G \rightarrow G'$ un homomorphisme de groupes, alors $\ker(f) \triangleleft G$. En effet, nous pouvons montrer que $\ker(f) \leq G$. De plus, soit $h \in \ker(f)$ et $x \in G$, alors

$$\begin{aligned} f(xhx^{-1}) &= f(x)f(h)f(x)^{-1} \\ &= f(x)ef(x)^{-1} \\ &= f(xx^{-1}) \\ &= f(e) = e'. \end{aligned}$$

Ce qui prouve bien que $xhx^{-1} \in \ker(f)$. On montrera plus tard que tout sous-groupe normal H est aussi le noyau d'un certain morphisme de groupes (voir Proposition 1.1.0.5).

Comme pour beaucoup de notions en mathématiques, nous pouvons définir la notion de sous-groupe normal de plusieurs manières équivalentes à la Définition 1.1.0.1. Nous allons expliciter ces nouvelles conditions et prouver qu'elles sont équivalentes entre elles. Mais avant d'énoncer cette proposition, rappelons certaines notions.

DÉFINITION 1.1.0.3. [16, 2.12. 2. Définition] Soit $x \in G$. On définit un automorphisme $\phi_x : G \rightarrow G$ en posant

$$\phi_x(g) := xgx^{-1}, \quad \forall x \in G.$$

On appelle ϕ_x un *automorphisme intérieur* de G .

DÉFINITION 1.1.0.4. Soient $H \leq G$ et $K \leq G$. On pose

$$[H, K] := \langle \{[h, k] \mid h \in H, k \in K\} \rangle$$

où $[h, k] := hkh^{-1}k^{-1}$ est le commutateur des éléments h et k .

Une des utilisations des groupes normaux est d'effectuer des quotients sur le groupe de départ et tel que cet ensemble quotient, que l'on notera G/H , soit lui-même un groupe et tel que l'application quotient $\pi : G \rightarrow G/H$ soit elle-même un morphisme de groupes. Si l'ensemble G/H est un groupe, on l'appellera le *groupe quotient de G par H* . On rappelle que, pour effectuer un quotient sur un ensemble, il faut tout d'abord définir une relation sur le dit ensemble. Il ne nous reste plus qu'à rappeler la démarche pour construire l'ensemble G/H avec $H \leq G$. Pour cela, nous définissons les notions de

— *relation à gauche* : $R_H^g \subset G \times G$

$$xR_H^g y \iff x^{-1}y \in H.$$

— *relation à droite* : $R_H^d \subset G \times G$

$$xR_H^d y \iff yx^{-1} \in H.$$

On peut montrer que ce sont des relations d'équivalence. Nous pouvons, dès lors, considérer, par exemple, l'ensemble quotient obtenu avec la relation à gauche. Pour ce faire, il est utile de voir à quoi correspond un élément dans ce

quotient.; autrement dit, voir comment représenter les classes d'équivalence. On a

$$\begin{aligned}
 xR_H^g y &\iff x^{-1}y \in H \\
 &\iff \exists h \in H, \quad x^{-1}y = h \\
 &\iff \exists h \in H, \quad y = hx \\
 &\iff y \in xH.
 \end{aligned}$$

où $xH := \{xh | h \in H\}$.

Nous appelons ,les *classes à gauche* de x , les classes d'équivalence de x par la relation R_H^g . Pour la relation à droite, on utilise l'appellation : les *classes à droite* de x . Par conséquent, G/H est l'ensemble des classes à gauche modulo H et $H \backslash G$ est l'ensemble des classes à droite modulo H . Chacun de ses quotients est équipé d'une projection canonique π que l'on définit de la manière suivante :

$$\pi : G \rightarrow G/H, \quad x \mapsto xH \quad \pi : G \rightarrow H \backslash G, \quad x \mapsto Hx.$$

PROPOSITION 1.1.0.5. [16, 2.9.4. Proposition] Soit $H \leq G$. Les conditions suivantes sont équivalentes :

- (i) $H \triangleleft G$;
- (ii) $\forall x \in G, \quad xH = Hx$: autrement dit, les classes à gauche et à droite coïncident ;
- (iii) H est stable par tout automorphisme intérieur de G ;
- (iv) l'ensemble des classes à gauche (ou à droite) G/H possède une structure de groupe telle que l'application canonique associée $\pi : G \rightarrow G/H$ est un homomorphisme de groupe ;
- (v) H est le noyau d'un morphisme de groupes ;
- (vi) $[H, G] \leq H$.

DÉMONSTRATION.

- (i) $\Rightarrow$ (ii) Soit $h \in H$ et $x \in G$. Comme par hypothèse H est normal à G , on a que $xhx^{-1} \in H$. Or, si on écrit le produit $xh \in xH$ de la manière suivante : $xh = (xhx^{-1})x$, on obtient bien que $xh \in Hx$. Par conséquent, on vient de montrer que $xH \subset Hx$. L'autre inclusion peut être prouvée de manière similaire.
- (ii) $\Rightarrow$ (i) Soit $h \in H$. Comme par hypothèse les classes à gauche et à droite sont les mêmes, on peut écrire $xh \in xH = Hx$. Par conséquent,

il existe $h' \in H$ tel que $xh = h'x$, ce qui implique que $xhx^{-1} = h' \in H$ et $H \triangleleft G$.

- (i) $\iff$ (iii) Si on se rappelle ce que veut dire « être stable par automorphisme intérieur », alors les implications sont immédiates. En effet, la condition (iii) veut dire que pour tout $h \in H$ et pour tout automorphisme intérieur $\phi_x : G \rightarrow G$, la condition

$$\phi_x(h) = xhx^{-1} \in H, \quad \forall x \in G$$

est satisfaite.

- (i) $\iff$ (iv) [16, 2.9.8. Théorème]

Pour que $\pi : G \rightarrow G/H$ soit un homomorphisme, il faut que

$$\pi(xy) = \pi(x)\pi(y) \iff (xH)(yH) := (xy)H.$$

Cette loi est bien définie si et seulement si $H \triangleleft G$. En effet, elle ne dépend pas du choix du représentant de la classe à gauche. Supposons que $xH = x_1H$ et $yH = y_1H$. Autrement dit, $xx_1^{-1} \in H$ et $yy_1^{-1} \in H$. On aimerait montrer que $(xy)H = (x_1y_1)H$. Pour cela, il faut montrer que

$$xy(x_1y_1)^{-1} \in H \iff xy y_1^{-1} x_1^{-1} \in H \iff xy y_1^{-1} x^{-1} x x_1^{-1} \in H.$$

Or, on sait que yy_1^{-1} et xx_1^{-1} sont des éléments de H . Par conséquent, il faut et il suffit que $x(yy_1^{-1})x^{-1} = xhx^{-1} \in H$, avec $h := yy_1^{-1}$, pour que la loi soit bien définie. C'est-à-dire qu'il faut et il suffit que $H \triangleleft G$.

Cette loi est associative. En effet, cela vient directement de l'associativité de la loi sur le groupe G . Soit $x, y, z \in G$, alors

$$\begin{aligned} (xH)((yH)(zH)) &= (xH)((yz)H) \\ &= (x(yz))H \\ &= ((xy)z)H \\ &= ((xy)H)(zH) \\ &= ((xH)(yH))(zH). \end{aligned}$$

On vérifie que l'élément neutre de G/H est $eH = H$ et que l'inverse de xH est $x^{-1}H$.

- (v) $\Rightarrow$ (i) voir Exemple 1.1.0.2.
- (i) $\Rightarrow$ (v) Au vu du point (iv), on va considérer le morphisme $\pi : G \rightarrow G/H$. Au vu de la preuve de l'équivalence, on note que $\ker(\pi) = H$.

- (i) $\Rightarrow$ (vi) Soit $h \in H$ et $x \in G$, alors $[h, x] = h x h^{-1} x^{-1} \in [H, G]$ peut s'écrire comme $[h, x] = h(x h^{-1} x^{-1})$ puisque (en utilisant la normalité de H) les deux éléments appartiennent à H . Dès lors on a $[h, x] \in H$.
- (vi) $\Rightarrow$ (i) Soit $h \in H$ et $x \in G$. On veut montrer que $x h x^{-1} \in H$. Or, on a les égalités $x h x^{-1} = h(h^{-1} x h x^{-1}) = h[h^{-1}, x] \in H$; alors on a prouvé que $x h x^{-1} \in H$ et $H \triangleleft G$. $\square$

- REMARQUE 1.1.0.6. (1) On soulignera qu'au vu de l'équivalence entre (i) et (iv), on ne peut construire des groupes quotients à partir d'un groupe G que si et seulement si on quotient avec un sous-groupe normale. Dès lors, ce serait une bonne manière de définir la notion de sous-groupe normale dans un cadre plus général. En effet, elle ne fait intervenir que des objets G et G/H qui sont des groupes et un morphisme de groupes qui n'est rien d'autre que l'application quotient $\pi : G \rightarrow G/H$.
- (2) Dans la proposition précédente, la condition (iii) peut être formulée d'une autre manière. En effet, elle veut dire que H est son seul conjugué. Autrement dit, $N_G(H) := \{g \in G \mid g H g^{-1} = H\} = G$. On appelle un tel ensemble $N_G(H)$ le *normalisateur* de H dans le groupe G avec $H \leq G$.

Avec ces rappels de théorie des groupes, il a été mis en lumière qu'il existe plusieurs façons de définir la notion de sous-groupe normale :

- par les classes à gauches et à droites,
- par des automorphismes intérieurs, autrement dit avec la notion de normalisateur,
- par la notion de groupe quotient,
- par des noyaux,
- et pour finir par la notion de commutateur.

Le premier objectif de la suite de ce travail sera de définir la notion de sous-objets normaux dans une catégorie et dans un deuxième temps, de les caractériser avec des notions de commutateurs, de normalisateurs, ... dans un cadre catégoriel. Et pour finir, on mettra en lumière les liens entre ces différentes notions pour voir dans quelles catégories ces notions peuvent être équivalentes. Mais tout d'abord, nous allons faire quelques rappels d'algèbre (dans les prochaines sections) et de catégories (dans la prochain chapitre : Chapitre 2).

1.2. Les idéaux dans les anneaux et les algèbres de Lie

Cette section est destinée à mettre illustrer la notion "sous-groupes normaux" dans d'autres catégories que les groupes. On étudiera les exemples des anneaux et des algèbres de Lie.

1.2.1. Les anneaux et les anneaux avec unité. Rappelons la définition d'anneaux avec unité. Ce sera utile par la suite pour des exemples de catégories.

DÉFINITION 1.2.1.1. [24, Definition 2.1.] Un *anneau unitaire* est la donnée d'un quadruplet $(R, +, \cdot, 0, 1)$ où R est un ensemble, $1, 0 \in R$ et $+, \cdot$ sont des opérations binaires sur R tels que

- $(R, +, 0)$ est un groupe abélien ;
- l'opération binaire $\cdot$ est associative et $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ pour tout $x \in R$;
- la multiplication est distributive par rapport à l'addition : $\forall x, y, z \in R$

$$x \cdot (y + z) = (x \cdot y) + (x \cdot z), \quad (x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z).$$

Dans la littérature, il est courant de dire simplement *anneau* à la place d'anneau unitaire. Cependant, il est important de garder à l'esprit que cela sous-entend anneau unitaire car il existe une autre notion d'anneau plus général que l'on va définir par la suite. Notons que la condition 2 dans la Définition 1.2.1.1, nous dit que $(R, \cdot, 1)$ est un monoïde. Il est courant d'appeler les deux opérations binaires de la manière suivante : $+$ pour l'addition et $\cdot$ pour la multiplication.

Comme pour les groupes, on peut définir un morphisme entre deux anneaux. D'ailleurs, on pourra considérer ces anneaux unitaires et ces morphismes d'anneaux unitaires comme formant une catégorie : la *catégorie des anneaux unitaires* (voir p 15).

DÉFINITION 1.2.1.2. [24, Definition 2.5.] Une application $f : R \rightarrow S$ entre deux anneaux unités R et S est appelée un *morphisme d'anneaux unitaires* si

- (1) $f(1_R) = 1_S$;
- (2) $f(r_1 +_R r_2) = f(r_1) +_S f(r_2)$;
- (3) $f(r_1 \cdot_R r_2) = f(r_1) \cdot_S f(r_2)$.

Pour le moment, nous avons requis la condition que les anneaux possèdent une unité. Cependant, il existe une notion plus générale d'anneaux

que l'on nommera simplement *anneau*. Cette appellation suggèrera que tout anneau unitaire est un anneau mais que la réciproque est fausse.

DÉFINITION 1.2.1.3. Un *anneau* est un ensemble R muni de deux opérations binaires : $+$ et $\cdot$ et d'un élément $0 \in R$ tels que

- (1) $(R, +, 0)$ est un groupe abélien ;
- (2) $(R, \cdot)$ est un semi-groupe ;
- (3) la multiplication est distributive par rapport à l'addition comme dans la Définition 1.2.1.1.

Afin de mieux comprendre la notion d'anneau, il est utile de comprendre ce qu'est un semi-groupe. Un *semi-groupe* est un ensemble S équipé d'une opération binaire interne associative.

On peut aussi définir des morphismes pour ces types d'anneaux. La définition est similaire au cas des anneaux unitaires mais comme les anneaux ne possèdent pas nécessairement d'élément 1, comme dans la définition 1.2.1.1, on n'a pas besoin de la condition 1 dans la définition 1.2.1.2.

DÉFINITION 1.2.1.4. Une application $f: R \rightarrow S$ entre deux anneaux R et S est un *morphisme* si elle satisfait aux conditions 2 et 3 de la Définition 1.2.1.2.

Dès lors, on peut considérer la catégorie des anneaux, comme étant la catégorie dont les objets sont les anneaux et dont les morphismes sont les morphismes d'anneaux (voir p 15).

1.2.2. Les idéaux. On sait que dans le cadre des groupes pour obtenir un groupe quotient, il faut considérer des sous-groupes normaux (voir l'équivalence $(i) \iff (iv)$ dans la Proposition 1.1.0.5). Il est alors possible de transférer cette idée dans le cadre des anneaux. Pour cela, on a besoin d'un nouveau sous-ensemble d'un anneau donné, R , qui possède de bonnes propriétés afin de pouvoir faire un quotient R par ce sous-ensemble. Un tel objet s'appelle un *idéal*.

Contrairement aux groupes, on doit ici distinguer deux cas : les anneaux commutatifs et les non-commutatifs. Commençons par définir la notion d'idéal à gauche et à droite dans le cas où R , l'anneau sous-jacent, n'est pas commutatif.

DÉFINITION 1.2.2.1. Soit $(R, +, \cdot, e)$ un anneau non commutatif.

- Un sous-ensemble I de R est un *idéal à gauche* si :

- (1) $(I, +, e)$ est sous-groupe de $(R, +, e)$;
- (2) pour tout élément $r \in R$ et pour tout $a \in I$, on a que $r \cdot a \in I$.
- Un sous-ensemble I de R est un *idéal à droite* si :
 - (1) $(I, +, e)$ est sous-groupe de $(R, +, e)$;
 - (2) pour tout élément $r \in R$ et pour tout $a \in I$, on a que $a \cdot r \in I$.

Dans le cas où R n'est pas commutatif, un *idéal* est un sous-ensemble de R qui est à la fois idéal à gauche et idéal à droite. Il est évident que si R est commutatif, alors les deux notions coïncident et dans ce cas, on dira que I est un *idéal*. Il est courant d'utiliser la notation, $I \triangleleft R$, quand on veut spécifier que I est un idéal de l'anneau R .

Comme mentionné plus haut, on peut faire le quotient de R par I et l'ensemble obtenu sera toujours un anneau. Voici une petite explication de la construction de ce quotient [24, Section 4.1]. Comme I est un idéal de R , alors $(I, +)$ est un sous-groupe de $(R, +)$, qui est un groupe abélien. On peut dès lors, considérer le groupe quotient $(R/I, +)$. Sur ce groupe quotient, on définit comme relation : $r \sim s$ si et seulement si $r - s \in I$. Cette relation est bien entendu une relation d'équivalence et les classes latérales gauches sont $\{r + I \mid r \in R\}$. On définit une projection canonique qui est un morphisme d'anneaux $q : R \rightarrow R/I$ et dont la définition est forcée par :

$$(r_1 + r_2) + I = q(r_1 + r_2) = q(r_1) + q(r_2) = (r_1 + I) + (r_2 + I).$$

On pose alors $q(r) = r + I$. Pour que l'ensemble R/I soit un anneau, on muni le munit des opérations binaires, d'une unité et d'un élément zéro. On le notera : $(R/I, +, \cdot, 0 + I, e + I)$ où e est l'unité pour la somme dans R et 0 est le zéro pour le produit dans R .

Il n'y a pas que dans les anneaux que l'on peut considérer des idéaux. En effet, on peut aussi les considérer dans les algèbres de Lie. Ce sera expliqué dans la prochaine sous-section.

1.2.3. Les algèbres de Lie. On rappelle (voir [21, Définition 3.17]) qu'une *algèbre de Lie* sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ est la donnée d'un espace vectoriel, noté $\mathfrak{g}$, et d'une application, appelé *crochet*

$$[-, -] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g} \quad : \quad (X, Y) \mapsto [X, Y],$$

satisfaisant aux axiomes suivants :

- $\mathbb{K}$ -bilinéaire : si $a, b \in \mathbb{K}$

$$[aX + bY, Z] = a[X, Y] + b[Y, Z], \quad [Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$$

- anti-commutativité : $[X, Y] = -[Y, X]$
- l'identité de Jacobi : $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$.

Illustrons la notion d'algèbre de Lie par des exemples.

EXEMPLE 1.2.3.1. [21, Exemple 3.18-3.19] Soit $\mathbb{K}$ un corps.

- Tout espace vectoriel V sur $\mathbb{K}$ est trivialement muni d'une structure d'algèbre de Lie. En effet, il suffit de poser comme crochet le crochet identiquement nul, c'est-à-dire que pour tout couple de vecteurs $(X, Y) \in V^2$ $[X, Y] = 0$. Il est dès lors, facile de remarquer que la condition d'anti-commutativité, de $\mathbb{K}$ -bilinearité et l'identité de Jacobi sont trivialement satisfaites.
- Soit $(A, *)$ une $\mathbb{K}$ -algèbre associative. Alors A muni du crochet défini comme $\forall X, Y \in A$ $[X, Y] := X * Y - Y * X$ est une algèbre de Lie. En effet, on note tout d'abord que puisque A est une $\mathbb{K}$ -algèbre associative alors A est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$. Vérifions les conditions de la définition d'un crochet : soit $a, b \in \mathbb{K}$ et $X, Y, Z \in A$
 - $[aX + bY, Z] = (aX + bY) * Z - Z * (aX + bY) = aX * Z + bY * Z - aZ * X - bZ * Y = a(X * Z - Z * X) + b(Y * Z - Z * Y) = a[X, Z] + b[Y, Z]$
 - $[Z, aX + bY] = Z * (aX + bY) - (aX + bY) * Z = Z * aX + Z * bY - aX * Z - bY * Z = a(Z * X - X * Z) + b(Z * Y - Y * Z) = a[Z, X] + b[Z, Y]$
 - $[X, Y] = X * Y - Y * X = -(-X * Y + Y * X) = -[Y, X]$
 - Afin de vérifier l'identité de Jacobi, on développe les trois termes de la somme. On développera en détail le premier terme et on donnera le résultat final pour les deux autres puisque les calculs sont similaires :

$$\begin{aligned} [[X, Y], Z] &= [X, Y] * Z - Z * [X, Y] = (X * Y - Y * X) * Z - Z * (X * Y - Y * X) \\ &= X * Y * Z - Y * X * Z - Z * X * Y + Z * Y * X, \end{aligned}$$

$$[[Z, X], Y] = Z * X * Y - X * Z * Y - Y * Z * X + Y * X * Z,$$

$$[[Y, Z], X] = Y * Z * X - Z * Y * X - X * Y * Z + X * Z * Y.$$

Dès lors, on se rend bien compte que la somme de ces trois termes vaut zéro.

Un tel crochet est le commutateur des deux éléments.

Comme pour les anneaux, nous pouvons définir une notion d'idéal dans le cadre des algèbres de Lie sur un corps $\mathbb{K}$.

DÉFINITION 1.2.3.2. [21, Definition 3.21.] Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$. Un sous-espace $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ est appelé un *idéal* si pour tout $X \in \mathfrak{g}$, $Y \in \mathfrak{h}$ on a $[X, Y] \in \mathfrak{h}$.

On note une ressemblance avec la notion d'idéal dans les anneaux. En effet, dans les deux cas, on demande que le sous-ensemble soit stable pour la multiplication d'éléments de l'ensemble de départ. Cependant dans le cadre des anneaux, la multiplication est celle de l'anneau considéré alors que dans les algèbres de Lie c'est le crochet qui joue ce rôle.

Comme pour les groupes et les anneaux, les idéaux dans les algèbres de Lie, nous permettent de définir une notion de quotient tel que ce quotient soit encore une algèbre de Lie. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$ et $\mathfrak{h}$ un idéal de $\mathfrak{g}$. Alors, l'algèbre de Lie quotient est composé de l'espace vectoriel $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ défini comme l'ensemble des classes d'équivalence de vecteurs pour la relation $XR_{\mathfrak{h}}Y$ si et seulement si $X - Y \in \mathfrak{h}$ en tant que vecteur¹. De plus, on a muni cet espace vectoriel du crochet défini comme $[X + \mathfrak{h}, Y + \mathfrak{h}] = [X, Y]_{\mathfrak{g}} + \mathfrak{h}$. Le fait que cette application soit un crochet sur l'espace vectoriel quotient $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ découle du fait que $[-, -]_{\mathfrak{g}}$ soit un crochet sur $\mathfrak{g}$.

De plus, on notera que la projection $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h} : X \mapsto X + \mathfrak{h}$ est un morphisme d'algèbres de Lie. On rappelle qu'un morphisme d'algèbres de Lie est la donnée d'une application linéaire qui est compatible avec les crochets de Lie :

$$\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}', \quad \phi([X, Y]_{\mathfrak{g}}) = [\phi(X), \phi(Y)]_{\mathfrak{g}}.$$

C'est bien le cas pour l'application projection. En effet, soit $X, Y \in \mathfrak{g}$, alors

$$(1.1) \quad [\pi(X), \pi(Y)] = [X + \mathfrak{h}, Y + \mathfrak{h}] = [X, Y] + \mathfrak{h} = \pi([X, Y]_{\mathfrak{g}}).$$

1. Si on note par $\bar{v}$ la classe d'équivalence de v alors $\bar{v} = v + \mathfrak{h}$.

Catégories semi-abéliennes

Avant de définir et de regarder quelques propriétés des catégories semi-abéliennes, il est utile de rappeler quelques notions de catégories élémentaires et de rappeler certaines notations qui seront utilisées dans la suite du texte. Le second objectif de ce chapitre est de donner la définition de catégories semi-abéliennes. Cependant, cette définition demande d'introduire d'autres concepts au préalable pour bien comprendre la notion de catégories semi-abéliennes. Dès lors, nous allons donner la définition de catégories régulières, exactes, uniales et protomodulaires avant de définir les catégories semi-abéliennes qui seront très utilisées dans les prochains chapitres.

2.1. Rappel de catégories

Dans la première sous-section, on rappellera des catégories couramment utilisées. Cela permettra d'illustrer les différents concepts introduits au fur et à mesure. La seconde sous-section portera sur des rappels de définitions et de notations. Et pour finir, la dernière sous-section sera consacrée à la notion de relation dans les catégories.

2.1.1. Rappel de catégories courantes. Afin de mieux assimiler les nouvelles notions qui seront abordées dans la suite du texte, il est important de les illustrer. Pour se faire, on va utiliser avec les catégories suivantes :

- La catégorie des groupes (notée : GRP) est la catégorie dont les objets sont les groupes et les morphismes des morphismes de groupes ;
- La catégorie des anneaux avec unité (notée : URNG) est la catégorie dont les objets sont les anneaux avec unité (voir la définition [1.2.1.1](#)) et les flèches des morphismes d'anneaux unitaires (voir la définition [1.2.1.2](#)) ;
- La catégorie des anneaux (notée : RNG) est la catégorie dont les objets sont les anneaux (voir la définition [1.2.1.3](#)) et dont les morphismes sont les morphismes d'anneaux (voir la définition [1.2.1.4](#)). On appelle aussi cette catégorie la *catégorie des pseudo anneaux* ;

- La catégorie des algèbres de Lie sur un corps $\mathbb{K}$ (noté : $\text{LIE}_{\mathbb{K}}$) est la catégorie dont les objets sont des algèbres de Lie et les flèches sont des homomorphismes d'algèbres de Lie ;
- La catégorie des ensembles (notée : SET) est la catégorie composée des ensembles comme objets et dont les flèches sont les applications ;
- La catégorie des ensembles pointés (notée : SET_*) est composée d'objet de la forme : (X, x) où $X \in \text{SET}$ et $x \in X$ est un point spécifié¹ et les morphismes sont les flèches de la catégorie SET mais elles ont la particularité d'envoyer le point de base du domaine sur le point de base du codomaine. Autrement dit, $f : (X, x) \rightarrow (Y, y)$ est une flèche dans SET_* si et seulement si $f \in \text{SET}(X, Y)$ et $f(x) = y$. On nommera les objets de cette catégorie les *ensembles pointés* et les morphismes les *applications pointées* ;
- La catégorie des espaces topologiques (notée : TOP) est la catégorie dont les objets sont les espaces topologiques² et les flèches entre espaces topologiques sont les fonctions continues ;
- La catégorie des espaces topologiques pointés (notée : TOP_*) est la catégorie dont les objets sont objets de TOP mais pour chaque objet on spécifie un point de base. Par conséquent, on notera un élément de cette catégorie comme (X, x, τ) et un tel objet porte le nom de *espace pointé*. Les flèches, entre deux espaces topologiques pointés, sont des fonctions continues entre les espaces (X, τ) et (Y, σ) mais qui envoient le point de base de X sur le point de base de Y .

REMARQUE 2.1.1.1. Il est facile de voir que la catégorie des anneaux avec unité URNG est une sous-catégorie de RNG mais c'est une sous-catégorie non pleine.

Pour mieux comprendre la dernière remarque, il est utile de savoir ce qu'on entend par sous-catégorie et sous-catégorie pleine.

DÉFINITION 2.1.1.2. [5, Definition 1.5.3] Une *sous-catégorie* $\mathcal{B}$ d'une catégorie $\mathcal{A}$ consiste en

- (1) une sous-classe $|\mathcal{B}| \subseteq |\mathcal{A}|$ de la classe d'objets de $\mathcal{A}$;
- (2) pour chaque paire d'objets $A, A' \in \mathcal{A}$, on a un sous-ensemble $\mathcal{B}(A, A') \subseteq \mathcal{A}(A, A')$ de telle façon que

1. Un tel point $x \in X$ est appelé *point de base*.

2. On notera de tels objets comme (X, τ) où $X \in \text{SET}$ et τ est la topologie que l'on a mise sur X .

- (a) si $f \in \mathcal{B}(A, A')$ et $g \in \mathcal{B}(A', A'')$, alors $g \circ f \in \mathcal{B}(A, A'')$;
- (b) $\forall A \in \mathcal{B}$, on a $id_A \in \mathcal{B}(A, A)$

Une sous-catégorie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}$ nous donne un foncteur inclusion fidèle $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$.

DÉFINITION 2.1.1.3. [5, Definition 1.5.4] Une sous-catégorie $\mathcal{B}$ d'une catégorie $\mathcal{A}$ est dite *pleine* si le foncteur inclusion $\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{A}$ est un foncteur plein.

Par conséquent, $\mathcal{B}$ est une sous-catégorie pleine dans $\mathcal{A}$ si :

$$A, A' \in \mathcal{A} \implies \mathcal{B}(A, A') = \mathcal{A}(A, A').$$

2.1.2. Rappels de notions basiques. L'objectif de cette sous-section est de rappeler des notions de base utilisées dans les prochains Chapitres. On dénotera par $\mathcal{C}$ une catégorie quelconque.

DÉFINITION 2.1.2.1. [8, Definition 0.2.1] Une catégorie est *pointée* si elle admet un objet terminal et un objet initial et que ces deux objets sont isomorphes.

REMARQUE 2.1.2.2. [5, Definition 2.3.1][6, Definition 1.1.1]

- (1) On définit par un *objet zéro* dans $\mathcal{C}$, un objet qui est à la fois l'objet terminal et l'objet initial.
- (2) Un objet 1 d'une catégorie $\mathcal{C}$ est *terminal* quand, pour tout objet $A \in \mathcal{C}$, il existe une seule et unique flèche de A vers 1 :

$$A \xrightarrow{\tau_A} 1.$$

- (3) Un objet 0 d'une catégorie $\mathcal{C}$ est *initial* quand, pour tout objet $A \in \mathcal{C}$, il existe une seule et unique flèche de 0 vers A :

$$0 \xrightarrow{\alpha_A} A.$$

Illustrons ce concept de catégorie pointée par différents exemples de catégories pointées ou non.

EXEMPLE 2.1.2.3. [1, Chapter 7]

- SET : Dans cette catégorie l'objet initial est l'ensemble vide et l'objet terminal est le singleton $\{*\}$;

- TOP : L'objet initial est l'ensemble vide muni de la topologie qui ne contient que le vide et l'objet terminal est le singleton, que l'on note $\{\{*\}, \{\{*\}, \emptyset\}\}$;
- SET_{*} : Tout singleton est à la fois l'objet terminal et initial. En effet, on considère que le point de base est le singleton lui-même;
- TOP_{*} : L'argument utilisé pour les espaces pointés reste valide dans les espaces topologiques pointés;
- GRP : L'objet initial et terminal est le plus petit groupe auquel on peut penser : le groupe à un seul élément $\{e\}$, que l'on appelle aussi le *groupe trivial*;
- RNG : L'objet initial est l'anneau nul³ et l'objet terminal est l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$. En effet, si on considère un anneau quelconque avec une unité $(R, e, +, \times)$, alors l'unique morphisme $f : \mathbb{Z} \rightarrow R$ est défini comme

$$n \mapsto f(n) = \underbrace{e + e + \cdots + e}_{n \times e} \text{ et } f(-n) = -f(n);$$

- URNG : L'objet terminal et initial est l'anneau nul;
- LIE $_{\mathbb{K}}$: L'objet terminal et initial est l'espace vectoriel zéro muni du crochet trivial.

Au vu des exemples précédents, nous avons des exemples de catégories pointées (SET_{*}, TOP_{*}, GRP, RNG et LIE $_{\mathbb{K}}$) et des contre-exemples de catégories pointées (SET, TOP et URNG).

Afin de mieux comprendre ce qu'il se passe dans la catégorie RNG, il est utile de faire la remarque suivant, qui est due à l'auteur.

REMARQUE 2.1.2.4. Dans la catégorie des anneaux, il n'existe pas de morphismes d'anneaux entre l'anneau nul et n'importe quel anneau qui n'est pas l'anneau nul. En effet, supposons qu'il existe un tel morphisme $f : \{0\} \rightarrow (R, e)$. Alors, on a par la Définition 1.2.1.4 les conditions :

$$f(0) = e, f(0 + 0) = f(0) + f(0) \text{ et } f(0 \cdot 0) = f(0) \cdot 0.$$

En développant et en utilisant la condition sur le lien entre les unités, on a que

$$(2.1) \quad e = f(0) = f(0 + 0) = f(0) + f(0) = e + e$$

3. L'anneau nul est l'anneau avec un seul élément qui est 0 et 1 et les opérations binaires sont définies comme : $0 + 0 = 0$ et $0 \times 0 = 0$.

et

$$(2.2) \quad e = f(0) = f(0 \cdot 0) = f(0) \cdot f(0) = e \cdot e.$$

L'équation (2.1) implique que $e = 0$ (le zéro dans l'anneau R) et l'équation (2.2) implique d'autre part que $e = 1$. Or, comme R n'est pas l'anneau nul, ce n'est pas possible puisque si un anneau S est tel que $1 = 0$ alors S est l'anneau nul. En effet, soit $s \in S$ alors $s = s \cdot 1 = s \cdot 0 = s \cdot (0 + 0) = s \cdot 0 + s \cdot 0 = s \cdot 1 + s \cdot 1 = s + s$. Dès lors, si on applique à gauche et à droite l'inverse de s par rapport à l'addition, on trouve que $0 = s + (-s) = (s + s) + (-s) = s + 0 = s$. On a montré que si on considère un élément de S , alors nécessairement celui-ci est l'élément 0. De plus, comme par hypothèse 1 et 0 coïncident, cela prouve que S est l'anneau nul.

DÉFINITION 2.1.2.5. [5, Definition 2.7.2] La catégorie $\mathcal{C}$ est *finiment complète* (eng : *finitely complete*) quand tout foncteur

$$F : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C},$$

avec $\mathcal{D}$ une catégorie finie, a une limite.

Afin d'illustrer concrètement la notion de limite, nous allons donner quelques exemples couramment utilisés. On donnera aussi les notations utilisées pour faire référence à ces objets.

Le pullback ou produit fibré.

DÉFINITION 2.1.2.6. [5, Definition 2.5.1] Considérons deux morphismes $f : A \rightarrow C$, $g : B \rightarrow C$ dans une catégorie $\mathcal{C}$. Le *pullback* de (f, g) est un triplet (P, f', g') où

- (1) P est un objet de $\mathcal{C}$
- (2) $f' : P \rightarrow B$, $g' : P \rightarrow A$ sont des morphismes de $\mathcal{C}$ tels que $f \circ g' = g \circ f'$, autrement dit, f' et g' sont tels qu'ils rendent le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccc} P & \xrightarrow{f'} & B \\ g' \downarrow & & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

- (3) pour tout autre triplet (Q, f'', g'') où
 - (i) Q est un objet de $\mathcal{C}$
 - (ii) $f'' : Q \rightarrow B$, $g'' : Q \rightarrow A$ sont des morphismes de $\mathcal{C}$ tels que $f \circ g'' = g \circ f''$,

il existe un unique morphisme $q : Q \rightarrow P$ tel que $f'' = f' \circ q$ et $g'' = g' \circ q$ (voir le diagramme ci-dessous)

$$\begin{array}{ccccc}
 Q & & & & \\
 \downarrow \text{ } \exists! q \text{ } \downarrow & & & & \\
 P & \xrightarrow{f'} & B & & \\
 \downarrow g' & & \downarrow g & & \\
 A & \xrightarrow{f} & C & &
 \end{array}$$

(Note: The diagram also includes a curved arrow from Q to B labeled f'' and a curved arrow from Q to A labeled g'')

Dans la suite, on notera le produit fibré de (f, g) de la manière suivante :

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{p_1} & B \\
 p_2 \downarrow & \lrcorner & \downarrow g \\
 A & \xrightarrow{f} & C
 \end{array}$$

Un cas spécifique serait de considérer le pullback de la paire (f, f) si un tel pullback existe, alors ce type de limite porte le nom de *pair noyau*.

DÉFINITION 2.1.2.7. [5, Definition 2.5.4] Dans une catégorie $\mathcal{C}$ à limites finies, la *paire noyau* d'un morphisme

$$f : A \rightarrow B$$

est le pullback (P, α, β) de f avec lui-même.

$$\begin{array}{ccc}
 P & \xrightarrow{\alpha} & A \\
 \beta \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

On la note par $\text{Eq}(f)$.

Dans la catégorie des ensembles, cela correspond à la relation d'équivalence sur A qui identifie les éléments de A qui ont la même image par f .

Noyau et conoyau. Un exemple utile de pullback est donné par la notion de *noyau*.

DÉFINITION 2.1.2.8. [22][23] Soit $\mathcal{C}$ une catégorie pointée qui admet des limites finies. Un morphisme $k : K \rightarrow A$ est un *noyau* quand il existe un morphisme $f : A \rightarrow B$ tel que le diagramme suivant

$$(2.3) \quad \begin{array}{ccc}
 K & \xrightarrow{\tau_K} & 0 \\
 k \downarrow & \lrcorner & \downarrow \alpha_B \\
 A & \xrightarrow{f} & B
 \end{array}$$

est un pullback. Le morphisme k est alors le noyau de f .

REMARQUE 2.1.2.9. Les flèches τ_K et α_B dans la définition précédente sont les morphismes tels que

- $\alpha_B : 0 \rightarrow B$ est l'unique flèche partant de l'objet initial
- $\tau_K : K \rightarrow 1$ est l'unique flèche allant dans l'objet terminal.

La composition $\alpha_B \circ \tau_K : K \rightarrow B$ est alors le morphisme nul que l'on note $\omega_{K,B} := \alpha_B \circ \tau_K$.

Cependant, il existe une seconde manière de définir la notion de noyau mais cette fois-ci sans l'aide des pullbacks.

DÉFINITION 2.1.2.10. [8, Definition 0.2.4] Dans une catégorie $\mathcal{C}$ pointée qui admet des limites finies, le *noyau* d'une flèche $f : A \rightarrow B$ est l'égalisateur $\text{Ker}(f) := (K[f], \text{ker } f)$ de ce morphisme avec la flèche zéro.

$$K[f] \xrightarrow{\text{ker}(f)} A \xrightleftharpoons[\omega_{A,B}]{f} B$$

On note que la flèche $\text{ker}(f)$ est nécessairement un monomorphisme car c'est le morphisme associé à un égalisateur (voir [5, Proposition 2.4.3]).

Bien qu'il existe deux définitions pour le noyau, ces deux notions sont équivalentes. En effet, si on ne considère que la Définition 2.1.2.8, on aimerait montrer que (K, k) est l'égalisateur de

$$A \xrightleftharpoons[\omega_{A,B}]{f} B.$$

On vérifie :

- (1) Que k égalise bien les deux morphismes. On a d'un côté par l'hypothèse du pullback que $f \circ k = \alpha_B \circ \tau_K$ et ainsi par définition, on obtient que $f \circ k = \omega_{K,B}$ et d'autre part on a $\omega_{A,B} \circ k = \omega_{K,B}$ par la [6, Proposition 1.1.4]. On a montré que k égalise bien les deux morphismes.
- (2) La propriété universelle de l'égalisateur. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{k} & A & \xrightleftharpoons[\omega_{A,B}]{f} & B \\ & & \uparrow m & & \\ & & M & & \end{array}$$

où (M, m) est tel que $f \circ m = \omega_{A,B} \circ m$. On aimerait trouver un unique morphisme $n : M \rightarrow K$ tel que $m = k \circ n$. Pour le trouver, on utilise

notre hypothèse sur le pullback et plus précisément on veut utiliser la propriété universelle de celui-ci. Considérons le diagramme suivant :

$$(2.4) \quad \begin{array}{ccccc} M & & & & \\ & \searrow n & & \nearrow \tau_M & \\ & K & \xrightarrow{\tau_K} & 0 & \\ & \downarrow k & \lrcorner & \downarrow \alpha_B & \\ & A & \xrightarrow{f} & B & \end{array}$$

m (curved arrow from M to A)

Pour utiliser la propriété universelle, il faut vérifier que $f \circ m = \alpha_B \circ \tau_M = \omega_{M,B}$. Par hypothèse sur m , on a $f \circ m = \omega_{A,B} \circ m = \omega_{M,B}$ où la dernière égalité est obtenue par la [6, Proposition 1.1.4]. Par conséquent, il existe un unique $n : M \rightarrow K$ tel que $k \circ n = m$.

Il reste à montrer l'autre implication. On considère la Définition 2.1.2.10 et on montre que celle avec le pullback en découle. Pour cela on vérifie :

- (1) La commutativité du diagramme (2.3) commute, Autrement dit que $f \circ k = \omega_{K,B}$. Cela suit directement du fait que k égalise f et $\omega_{A,B}$.
- (2) La propriété universelle du pullback. Pour cela, on va faire comme précédemment mais cette fois-ci, en utilisant la propriété universelle de l'égalisateur. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} M & & & & \\ & \searrow u & & \nearrow \tau_M & \\ & K & \xrightarrow{\tau_K} & 0 & \\ & \downarrow k & \lrcorner & \downarrow \alpha_B & \\ & A & \xrightarrow{f} & B & \end{array}$$

m (curved arrow from M to A)

où m et τ_M sont tels que $f \circ m = \alpha_B \circ \tau_M = \omega_{M,B}$. Or, on remarque que $f \circ k = \omega_{A,B} \circ k = \omega_{K,B}$ et ainsi par la propriété universelle de l'égalisateur il existe un unique $u : M \rightarrow K$ tel que $m = k \circ u$. On a aussi que $\tau_M = \tau_K \circ u$ car τ_M est l'unique flèche allant dans l'objet terminal.

La démonstration montre l'équivalence entre les deux définitions. On note que puisque k est un égalisateur alors k est nécessairement un monomorphisme ([5, Proposition 2.4.3]) et par conséquent, on peut aussi voir K comme un sous-objet de A , ce qui était déjà le cas dans les groupes.

NOTATION 2.1.2.11. Dans la suite, on utilisera la notation suivante pour faire la différence entre l'objet qui caractérise le noyau et le morphisme. On va reprendre les notations de la Définition 2.1.2.10. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme, alors on notera par $(K[f], \ker(f))$ le noyau où $K[f]$ est un objet de la catégorie de départ et où $\ker(f) : K[f] \rightrightarrows A$ est un morphisme de cette même catégorie.

Comme pour tout concept en catégories, il existe une notion duale à la notion de noyau. Cette notion s'appelle le *conoyau*. On notera par $\operatorname{coker}(f)$ le morphisme associé au conoyau de f .

Pour illustrer l'importance des noyaux dans les catégories, nous allons expliciter une propriété importante qui sera utilisée plus tard pour illustrer le lien entre la notion de noyau et la notion de sous-objet normal.

LEMME 2.1.2.12. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie pointée. Si $k : K \rightrightarrows A$ est un noyau alors $k = \ker(\operatorname{coker}(k))$.

La démonstration du lemme précédent est due à l'auteur.

DÉMONSTRATION. Soit $f : A \rightarrow Y$ tel que $k = \ker(f)$. Afin de montrer que k est le noyau du conoyau, il faut vérifier que $\operatorname{coker}(k) \circ k = \omega_{K,Q}$ (cette égalité est triviale par définition du conoyau) et la propriété universelle qui définit le noyau.

Soit $l : L \rightarrow A$ un morphisme tel que $\operatorname{coker}(k) \circ k = \omega_{L,Q}$ comme sur le diagramme 2.5. On note que puisque k est le noyau de f , nous avons que $f \circ k = \omega_{K,Y}$. Par conséquent, f coégalise aussi k et $\omega_{K,A}$. Dès lors, nous avons l'existence d'un unique morphisme $q : Q \rightarrow Y$ tel que $f = q \circ \operatorname{coker}(k)$ par la propriété universelle du conoyau de k . Par hypothèse, nous avons que $\operatorname{coker}(k) \circ l = \omega_{L,Q}$ et par conséquent, cela implique aussi que

$$\omega_{L,Y} = q \circ \omega_{L,Q} = q \circ \operatorname{coker}(k) \circ l = f \circ l.$$

Par la propriété universelle du noyau k , nous avons l'existence d'une unique flèche $h : L \rightarrow K$ tel que $l = k \circ h$.

$$(2.5) \quad \begin{array}{ccccc} & L & & & \\ & \downarrow h & \searrow l & & \\ K & \xrightarrow{k} & A & \xrightarrow{f} & Y \\ & & \downarrow \text{coker}(k) & \nearrow q & \\ & & Q & & \end{array}$$

□

Le produit.

DÉFINITION 2.1.2.13. [5, Definition 2.1.1.] Soient A, B deux objets d'une catégorie $\mathcal{C}$. Le *produit* de A et B est la donnée d'un triplet (P, p_A, p_B) où

- (1) $P \in \mathcal{C}$ est un objet
- (2) $\pi_1 : P \rightarrow A$ et $\pi_2 : P \rightarrow B$ sont des morphismes,

et ce triplet est tel que pour tout autre triplet (Q, f, g) où

- (1) $Q \in \mathcal{C}$ est un objet
- (2) $f : Q \rightarrow A$ et $g : Q \rightarrow B$ sont des morphismes,

il existe un unique morphisme $r : Q \rightarrow P$ tel que $f = \pi_1 \circ r$ et $g = \pi_2 \circ r$

NOTATION 2.1.2.14. Il est courant de noter un tel produit entre les objets A et B dans la catégorie $\mathcal{C}$: $A \times B$ (pour rappeler la notation de produit cartésien dans les ensembles) à la place de l'objet P . Et par convention, on notera $\langle f, g \rangle$ à la place du morphisme r . Cette notation permet de faire référence aux deux morphismes f et g considérés pour appliquer la propriété universelle du produit et l'existence et l'unicité du morphisme $\langle f, g \rangle$.

Avec les nouvelles notations, on peut mieux comprendre la définition 2.1.2.13 avec l'aide du diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & A \times B & & & \\ & \swarrow \pi_1 & \uparrow \exists! \langle f, g \rangle & \searrow \pi_2 & \\ A & & & & B \\ & \swarrow f & \downarrow & \searrow g & \\ & Q & & & \end{array}$$

Avec l'aide du produit, on peut définir le produit de deux morphismes de la manière suivante : soit $f : A \rightarrow B$ et $g : C \rightarrow D$ deux morphismes dans une

catégorie $\mathcal{C}$ qui admet les produits binaires. On a alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & A \times C & & \\
 & \swarrow \pi_1^A & & \searrow \pi_2^C & \\
 A & & & & C \\
 \downarrow f & & \langle f \circ \pi_1^A, g \circ \pi_2^C \rangle & & \downarrow g \\
 B & & & & D \\
 & \swarrow \pi_1^B & & \searrow \pi_2^D & \\
 & & B \times D & &
 \end{array}$$

et on définit le produit de f et g comme étant l'unique flèche engendrée par la propriété universelle du produit $B \times D$:

$$(2.6) \quad f \times g := \langle f \circ \pi_1^A, g \circ \pi_2^C \rangle.$$

Le coproduit. On sait qu'il existe une notion duale au produit, que l'on appelle le coproduit :

DÉFINITION 2.1.2.15. [5, Definition 2.2.1] Soit A, B deux objets d'une catégorie $\mathcal{C}$. Le *coproduit* de A et B est la donnée d'un triplet (Q, i_A, i_B) où

- (1) $Q \in \mathcal{C}$ est un objet,
- (2) $i_A : A \rightarrow Q$ et $i_B : B \rightarrow Q$ sont des morphismes de $\mathcal{C}$,

et ce triplet est tel que pour tout autre triplet (Z, f, g) où

- (1) $Z \in \mathcal{C}$ est un objet,
- (2) $f : A \rightarrow Z$ et $g : B \rightarrow Z$ sont des morphismes,

alors il existe un unique morphisme $r : Q \rightarrow Z$ tel que $f = r \circ i_A$ et $g = r \circ i_B$.

NOTATION 2.1.2.16. Si le coproduit de deux objets A et B existe, on notera l'objet Q comme $A + B$ et l'unique morphisme r sera noté de comme suit $\begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix}$ (voir diagramme 2.7).

$$(2.7) \quad
 \begin{array}{ccccc}
 & & A + B & & \\
 & \swarrow i_A & & \searrow i_B & \\
 A & & & & B \\
 \searrow f & & \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} & & \swarrow g \\
 & & Z & &
 \end{array}$$

On a défini le produit de deux flèches (voir équation 2.6). Dès lors, on peut aussi définir la somme de deux morphismes via le coproduit. Soit $f : A \rightarrow B$ et $g : C \rightarrow D$, on définit la somme de f et g comme étant la flèche engendrée

par le coproduit $A + C$ comme dans le diagramme

$$(2.8) \quad \begin{array}{ccccc} & & A + C & & \\ & i_A \nearrow & & \nwarrow i_C & \\ A & & & & C \\ f \downarrow & & (i_B \circ f) & & \downarrow g \\ B & & & & D \\ i_B \searrow & & & \swarrow i_D & \\ & & B + D & & \end{array}$$

Autrement dit on pose $f + g := \begin{pmatrix} (i_B \circ f) \\ (i_D \circ g) \end{pmatrix}$.

2.1.3. Les relations dans les catégories. Pour trouver un équivalent à la notion de groupe quotient dans les catégories, il est utile de définir la notion de relation, de relation d'équivalence et de quotient.

DÉFINITION 2.1.3.1. [6, Definition 2.5.1] Une *relation* sur un objet A d'une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée d'un objet $R \in \mathcal{C}$ et d'une paire de flèches conjointement monomorphiques

$$r_1, r_2 : R \rightrightarrows A,$$

c'est-à-dire étant données deux flèches $x, y : X \rightrightarrows R$, alors $x = y$ si et seulement si $r_1 \circ x = r_1 \circ y$ et $r_2 \circ x = r_2 \circ y$.

On notera une telle relation avec le triplet (R, r_1, r_2, A) et s'il n'y pas d'ambiguïté sur le sous-objet sur lequel porte la relation, alors on l'omettra.

Pour chaque objet $X \in \mathcal{C}$, on note

$$R_X := \{(r_1 \circ x, r_2 \circ x) | x \in \mathcal{C}(X, R)\}$$

pour la relation (au sens ensembliste usuel) correspondant à la relation R sur l'ensemble $\mathcal{C}(X, A)$.

On rappelle qu'une relation sur un ensemble A est un sous-ensemble R inclus dans le produit $A \times A$, c'est-à-dire $R \subset A \times A$.

Comme pour beaucoup de notions en mathématiques, il existe une autre manière de définir une relation sur un objet mais celle-ci demande que la catégorie, dans laquelle on définit la relation, admette des produits binaires. Cependant dans le cadre de ce texte, nous allons travailler avec des catégories qui admettent des limites finies et donc des produits binaires.

DÉFINITION 2.1.3.2. [8, Definition A.2.1] Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec des limites finies. Une *relation* d'un objet $X \in \mathcal{C}$ vers un objet $Y \in \mathcal{C}$ est un sous-objet

$$r: R \rightrightarrows X \times Y .$$

Une relation d'un objet X dans lui-même est simplement une *relation sur* X .

NOTATION 2.1.3.3. Comme illustré dans la Définition ci-dessus, nous allons utiliser la notation suivante pour faire référence à une flèche qui est un monomorphisme : $f: A \rightrightarrows B$ pour une flèche f qui est un monomorphisme.

Bien entendu que les deux notions sont équivalentes. Pour s'en convaincre, regardons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} & R & \\ r_1 \swarrow & \downarrow \langle r_1, r_2 \rangle & \searrow r_2 \\ X & & X \\ p_1 \swarrow & \downarrow & \searrow p_2 \\ & X \times X & \end{array}$$

où (R, r_1, r_2, X) est une relation sur X . Si on pose que $r = \langle r_1, r_2 \rangle$, on peut facilement montrer que r est un monomorphisme car r_1 et r_2 sont conjointement monomorphiques et réciproquement.

On connaît aussi la notion de relation d'équivalence dans le cadre classique des ensembles, qui n'est rien d'autres qu'une relation symétrique, transitive et réflexive. Mais comment peut-on traduire ce concept en catégories? Doit-on définir les notions de symétrie, transitivité et de réflexivité afin de définir une relation d'équivalence avec des catégories? La réponse est plus simple que ça, on utilise l'ensemble R_X défini un peu plus haut pour définir les différents types de relations qui existent.

DÉFINITION 2.1.3.4. [6, Definition 2.5.2] Soit (R, r_1, r_2) une relation sur un objet $A \in \mathcal{C}$. Si pour tout objet $X \in \mathcal{C}$, la relation correspondante R_X sur l'ensemble $\mathcal{C}(X, A)$ est une relation d'équivalence, alors de même, la relation R est réflexive (respectivement transitive, symétrique) si chaque relation R_X l'est.

Comme mentionné plus haut, nous allons travailler avec des catégories qui admettent des produits binaires et par conséquent, on peut utiliser une autre définition équivalente pour la notion de relation d'équivalence⁴.

4. Le lecteur peut aller regarder la proposition 2.5.4 de [6] et la preuve pour avoir l'équivalence entre les deux définitions.

DÉFINITION 2.1.3.5. [17, 1.2.13. Definition] Soit $\mathcal{C}$ une catégorie finement complète et soit une relation (R, r_1, r_2, X) sur X :

- (1) R est *réflexive* s'il existe un morphisme $\delta : X \rightarrow R$ tel que $r_1 \circ \delta = 1_X = r_2 \circ \delta$
- (2) R est *symétrique* s'il existe une flèche $\sigma : R \rightarrow R$ tel que $r_1 \circ \sigma = r_2$ et $r_2 \circ \sigma = r_1$
- (3) Considérons le pullback

$$\begin{array}{ccc} R \times_X R & \xrightarrow{p_2} & R \\ p_1 \downarrow & \lrcorner & \downarrow r_1 \\ R & \xrightarrow{r_2} & X \end{array}.$$

La relation R est *transitive* s'il existe une flèche $\tau : R \times_X R \rightarrow R$ telle que $r_1 \circ \tau = r_1 \circ p_1$ et $r_2 \circ \tau = r_2 \circ p_2$.

Une relation R sur X est une *relation d'équivalence* si R est réflexive, symétrique et transitive.

Un exemple concret de relation d'équivalence est la paire noyau d'un morphisme.

LEMME 2.1.3.6. [17, 1.2.14 Lemma] Dans une catégorie qui admet des pullbacks, la paire noyau $\text{Eq}(f) \xrightleftharpoons[p_2]{p_1} X$ d'une flèche $f : X \rightarrow Y$ est une relation d'équivalence sur X dans $\mathcal{C}$.

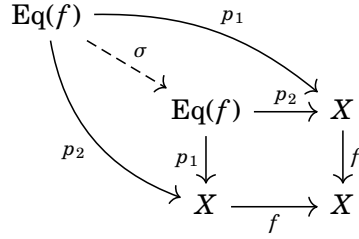
Pour démontrer le résultat, on va utiliser la seconde définition d'une relation d'équivalence introduite dans ce texte (voir Définition 2.1.3.5).

DÉMONSTRATION. Commençons par montrer que $\text{Eq}(f)$ est réflexive, c'est-à-dire qu'il faut trouver une flèche $\delta : X \rightarrow \text{Eq}(f)$ avec certaines bonnes propriétés. Pour cela, il suffit de remarquer que la commutativité du diagramme

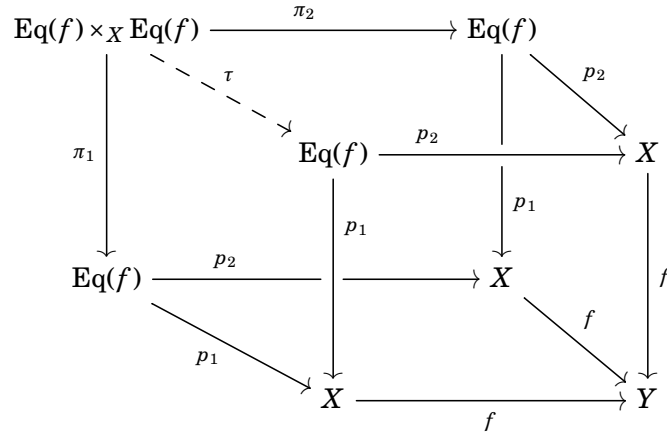
$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{1_X} & X \\ 1_X \downarrow & & \downarrow f \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

et la propriété universelle de la paire noyau $(\text{Eq}(f), p_1, p_2)$ implique qu'il existe un unique $\delta : X \rightarrow \text{Eq}(f)$ tel que $p_1 \circ \delta = 1_X = p_2 \circ \delta$.

De manière similaire, la commutativité de la partie extérieure du diagramme



implique qu'il existe une unique flèche $\sigma : \text{Eq}(f) \rightarrow \text{Eq}(f)$ tel que $p_1 \circ \sigma = p_2$ et $p_2 \circ \sigma = p_1$; ainsi $\text{Eq}(f)$ est symétrique. Pour la transitivité de $\text{Eq}(f)$, on considère le diagramme commutatif suivant



où la face arrière est un pullback. La commutativité du diagramme et la propriété universelle de la paire noyau $(\text{Eq}(f), p_1, p_2)$ montre l'existence d'un unique τ tel que $p_1 \circ \tau = p_1 \circ \pi_1$ et $p_2 \circ \tau = p_2 \circ \pi_2$ et cela termine la preuve. $\square$

Ce résultat sera utile pour montrer un lien entre la notion de noyaux et le concept de sous-objets normaux.

Les relations d'équivalence n'ont pas toutes les mêmes propriétés et une propriété intéressante est la notion d'effectivité.

DÉFINITION 2.1.3.7. [6, Definition 2.5.3] Une relation d'équivalence R sur un objet A de la catégorie $\mathcal{C}$, que l'on notera (R, r_1, r_2, A) , est *effective* quand le coégalisateur q de (r_1, r_2) existe et (r_1, r_2) est la paire noyau de q .

On a introduit la notion de relation d'équivalence. Cependant, il existe des catégories dans lesquelles toute relation réflexive est une relation d'équivalence : ce sont les catégories de *Mal'tsev*.

DÉFINITION 2.1.3.8. [8, Definition 2.2.3] Une catégorie $\mathcal{C}$ est une catégorie de *Mal'tsev* si $\mathcal{C}$ admet les limites finies et si toute relation réflexive est une relation d'équivalence.

L'exemple suivant est dû à l'auteur.

EXEMPLE 2.1.3.9. La catégorie des groupes GRP est une catégorie de Mal'tsev. On sait déjà que GRP est complète et donc admet les limites finies. Il reste donc à montrer qu'étant donné R une relation réflexive, alors elle est aussi symétrique et transitive. Soit R une relation réflexive sur X . Étant donné que l'on considère des relations dans les groupes nous savons que R est une congruence (voir Définition 2.2.2.2). Montrons que R est symétrique et transitive :

- Symétrie : Soient $x, y \in X$ et xRy . On veut montrer que yRx . Comme R est réflexive, on a que xR et yRy , on a aussi que $x^{-1}Ry^{-1}$ car R est une congruence. On peut aussi faire la multiplication puisque R est une congruence :

$$xRx, x^{-1}Ry^{-1} \text{ et } yRy \text{ implique que } xx^{-1}yRxy^{-1}y = yRx.$$

- Transitivité : Soit xRy et yRz , on veut montrer que xRz . En utilisant le fait que R est réflexive et une congruence, on a $y^{-1}Ry^{-1}$. Si on met tout bout à bout, on trouve :

$$xRy, y^{-1}Ry^{-1} \text{ et } yRz \text{ implique que } xRz.$$

Un résultat assez surprenant concernant les relations d'équivalence est que l'on peut caractériser assez facilement les paires noyaux de certains morphismes associés à la relation d'équivalence considérée. Si on reprend les notations de la Définition 2.1.3.5, on peut énoncer le résultat suivant.

LEMME 2.1.3.10. [12, Remark 1.3] Soit (R, r_1, r_2, A) une relation d'équivalence sur A . Alors la paire noyau de r_1 est donnée par (p_1, τ) et la paire noyau de r_2 est donnée par (p_2, τ) .

La prochaine démonstration est due à une collaboration de Mr Van der Linden et de l'auteur.

DÉMONSTRATION. On va seulement montrer la première partie du lemme car la seconde est analogue. Montrons que le diagramme suivant, qui est commutatif par transitivité, est un pullback :

$$\begin{array}{ccc} R \times_A R & \xrightarrow{p_1} & R \\ \tau \downarrow & \lrcorner & \downarrow r_1 \\ R & \xrightarrow{r_1} & A \end{array}$$

Soient $f : Z \rightarrow R$ et $g : Z \rightarrow R$ tel que $r_1 \circ g = r_1 \circ f$.

$$\begin{array}{ccccc} & & & & f \\ & & & & \searrow \\ Z & \xrightarrow{\quad ?\tilde{h} \quad} & R \times_A R & \xrightarrow{p_2} & R \\ & \searrow g & \downarrow p_1 & & \downarrow r_1 \\ & & R & \xrightarrow{r_1} & A \end{array}$$

On sait par symétrie de la relation que $r_1 \circ g = r_1 \circ \sigma \circ g = r_1 \circ f$. Dès lors, par la propriété universelle du pullback associée à r_1 et r_2 , il existe un unique morphisme $h : Z \rightarrow R \times_A R$ tel que $p_2 \circ h = f$ et $p_1 \circ h = \sigma \circ g$ (voir le diagramme suivant) :

$$\begin{array}{ccccc} & & & & f \\ & & & & \searrow \\ Z & \xrightarrow{\quad h \quad} & R \times_A R & \xrightarrow{p_2} & R \\ & \searrow g & \downarrow p_1 & & \downarrow r_1 \\ R & \xrightarrow{\sigma} & R & \xrightarrow{r_2} & A \end{array}$$

On notera $h := (\sigma \circ g, g)$ pour plus de facilité. On a alors un candidat pour $\tilde{h}$. Posons $\tilde{h} := (g, \tau \circ (\sigma \circ g))$. Vérifions que :

- $p_1 \circ (g, \tau \circ (\sigma \circ g, f)) = g$ (c'est le cas par les notations adoptées dans la preuve) ;
- $\tau \circ (g, \tau \circ (\sigma \circ g, f)) = f$. Pour vérifier cette égalité, on va utiliser le fait que la paire (r_1, r_2) est conjointement monomorphique. Dès lors il nous suffit de voir si

$$r_1 \circ \tau \circ (g, \tau \circ (\sigma \circ g, f)) = r_1 \circ f \text{ et } r_2 \circ \tau \circ (g, \tau \circ (\sigma \circ g, f)) = r_2 \circ f$$

En se rappelant que par transitivité on a que $r_i \circ \tau = r_i \circ p_i$ pour $i \in \{1, 2\}$, alors on a

$$r_1 \circ \tau \circ (g, \tau \circ (\sigma \circ g, f)) = r_1 \circ p_1 \circ (g, \tau \circ (\sigma \circ g, f)) = r_1 \circ g$$

et par hypothèse, on a bien que $r_1 \circ f = r_1 \circ g$. Pour l'autre égalité, on a

$$\begin{aligned} r_2 \circ \tau \circ (g, \tau \circ (\sigma \circ g, f)) &= r_2 \circ p_2 \circ (g, \tau \circ (\sigma \circ g, f)) \\ &= r_2 \circ \tau \circ (\sigma \circ g, f) \\ &= r_2 \circ p_2 \circ (\sigma \circ g, f) \\ &= r_2 \circ f. \end{aligned}$$

Cela termine donc la preuve. $\square$

2.2. Catégories régulières

Dans cette section, nous allons aborder la notion de catégorie exacte. Mais pour cela, nous aurons au préalable besoin d'introduire la notion de catégorie régulière. Ces deux notions nous permettront de mettre en lumière que la notion de sous-groupes normaux est équivalente à la notion de sous-objets normaux dans la catégorie des groupes.

On explique les ingrédients de la définition suivante :

DÉFINITION 2.2.0.1. [8, Definition A.5.1] Une catégorie $\mathcal{C}$ est *régulière* quand elle satisfait aux conditions suivantes :

- (1) $\mathcal{C}$ a des limites finies
- (2) toute paire noyau a un coégalisateur
- (3) tout épimorphisme régulier est stable par pullback.

La dernière condition peut être reformulée comme suit : si dans le diagramme suivant, qui est un pullback, p est un épimorphisme régulier, alors q aussi.

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{g} & B \\ \downarrow q & \lrcorner & \downarrow p \\ A & \xrightarrow{f} & C \end{array}$$

Il faut remarquer que, bien évidemment cette condition n'est pas triviale. En effet, on sait que dans une catégorie qui admet des pullbacks, les monomorphismes sont stables ([5, Proposition 2.5.3]). Cependant, les épimorphismes ne sont pas nécessairement stables par pullback, mais ils sont stables par pushout (voir [5][Proposition 4.3.8]).

Pour mieux comprendre la Définition 2.2.0.1, il est utile de comprendre les différentes notions d'épimorphismes qui existent.

2.2.1. Variations d'épimorphismes. La première conception de la surjectivité que l'on rencontre est souvent l'*épimorphisme*. C'est la notion la plus faible comparativement à celles qui vont suivre.

DÉFINITION 2.2.1.1. [5, Definition 1.8.1] Un morphisme $f : B \rightarrow A$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ est appelé *épimorphisme* quand pour tout objet $C \in \mathcal{C}$ et pour toute paire de morphismes $A \begin{array}{c} \xrightarrow{f} \\ \xrightarrow{g} \end{array} C$, la propriété suivante est satisfaite :

$$(g \circ f = h \circ f) \implies (g = h).$$

Cette notion est assez familière car dans la catégorie des ensembles SET, les fonction surjectives correspondent exactement à la notion d'épimorphismes dans cette catégorie ([5, Example 1.8.5.a]). Cependant tout épimorphisme n'est pas nécessairement une surjection. En effet, si on considère l'inclusion $i : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Q}$ dans la catégorie URNG, alors i est bien un épimorphisme mais pas une surjection. C'est bien un épimorphisme car soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $b \neq 0$:

$$\begin{aligned} h\left(\frac{a}{b}\right) &= h\left(\frac{1}{b}\right)h(a) = h\left(\frac{1}{b}\right)h(i(a)) = h\left(\frac{1}{b}\right)g(i(a)) = h\left(\frac{1}{b}\right)g(a) \\ &= h\left(\frac{1}{b}\right)g\left(b\frac{a}{b}\right) = h\left(\frac{1}{b}\right)g(b)g\left(\frac{a}{b}\right) = h\left(\frac{b}{b}\right)g\left(\frac{a}{b}\right) = g\left(\frac{a}{b}\right); \end{aligned}$$

où $i(a) = a$ puisque a est un entier.

Il y a différentes manières d'exprimer le concept de surjection. A première vue, on n'y penserait pas si on se place dans la catégorie des ensembles, mais comme on vient de le voir dans la catégorie URNG, la surjectivité n'est pas seulement la notion d'épimorphisme. D'ailleurs, nous allons présenter cinq façons différentes de codifier ce concept de surjection. Tout au long des définitions de ces différents concepts, nous allons montrer une certaine hiérarchie dans le sens que certaines notions impliquent d'autre plus faibles. De plus, certains sont équivalents si la catégorie remplit certaines conditions.

Cependant, il existe des morphismes qui seront toujours des épimorphismes mais dont la réciproque n'est pas vraie. En effet, dans notre cas on considère cinq autres notions d'épimorphismes : les *épimorphismes extrémaux*, les *épimorphismes réguliers*, les *épimorphismes forts*, les *épimorphismes scindés* et les *épimorphismes normaux*.

DÉFINITION 2.2.1.2. [5, Definition 4.3.1] Dans une catégorie, un épimorphisme est dit *régulier* s'il est le coégalisateur d'une paire de flèches.

On peut reformuler la définition de la manière suivante : $f : A \rightarrow B$ est un épimorphisme régulier si on peut trouver des morphismes $u, v : C \rightarrow A$ tels que $f = \text{coeg}(u, v)$.

NOTATION 2.2.1.3. Dans la suite, on notera $f : A \twoheadrightarrow B$ si f est un épimorphisme régulier.

DÉFINITION 2.2.1.4. [5, Definition 4.3.2] Un épimorphisme $f : A \rightarrow B$ dans une catégorie est dit *extrémal* pour une factorisation $f = i \circ p$ donnée de f à travers un monomorphisme i , i est nécessairement un isomorphisme.

Ce type d'épimorphisme admet les propriétés suivantes.

PROPOSITION 2.2.1.5. [5, Proposition 4.3.3]

- (1) *Tout épimorphisme régulier est extrémal*
- (2) *Un morphisme, qui est un monomorphisme et un épimorphisme extrémal, est un isomorphisme*

DÉMONSTRATION. (1) Soit $f = \text{coeg}(u, v)$ et $f = i \circ p$, avec i un monomorphisme. Comme $i \circ p \circ u = f \circ u = f \circ v = i \circ p \circ v$, on en déduit que $p \circ u = p \circ v$ car i est un monomorphisme. Ainsi par la propriété universelle du coégalisateur, il existe un unique j tel que $j \circ f = p$ (voir le diagramme ci-dessous).

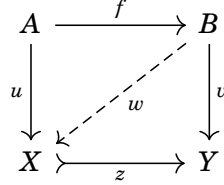
$$\begin{array}{ccccc}
 X & \xrightarrow[u]{v} & A & \xrightarrow{f} & B \\
 & & \downarrow p & \nearrow j & \\
 & & I & \xleftarrow{i} &
 \end{array}$$

De l'équation $i \circ j \circ f = i \circ p = f$, on en déduit que $j \circ i = 1_B$ puisque f est un épimorphisme. De plus, on peut déduire de $i \circ j \circ i = 1_B \circ i = i$ que $j \circ i = 1_I$ car i est un monomorphisme. On vient de montrer que i est bien un isomorphisme.

- (2) Si $f : A \rightarrow B$ est un monomorphisme, on peut considérer la factorisation $f = f \circ 1_A$ et comme f est un épimorphisme extrémal, alors le monomorphisme f est un isomorphisme. $\square$

On vient de montrer que « épimorphisme régulier » implique « épimorphisme extrémal ». Mais il existe un type d'épimorphisme entre les deux, un peu plus faible que régulier mais plus fort que extrémal : il s'agit des épimorphismes forts.

DÉFINITION 2.2.1.6. [5, Definition 4.3.5] Dans une catégorie $\mathcal{C}$, un épimorphisme $f : A \rightarrow B$ est appelé un *épimorphisme fort* quand, pour tout carré commutatif $z \circ u = v \circ f$ comme dans le diagramme ci-dessous, avec $z : X \rightarrow Y$ un monomorphisme, il existe une (unique) flèche $w : B \rightarrow X$ telle que $w \circ f = u$, $z \circ w = v$.

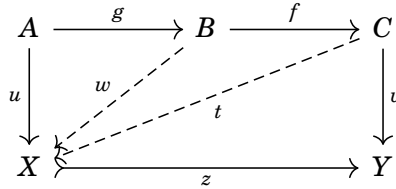


On remarque que la condition d'unicité de la flèche w est redondante car elle découle directement du fait que f est un épimorphisme et que z est un monomorphisme. Tout comme les épimorphismes extrémaux, les épimorphismes forts possèdent de bonnes propriétés.

PROPOSITION 2.2.1.7. [5, Proposition 4.3.6] Dans une catégorie $\mathcal{C}$,

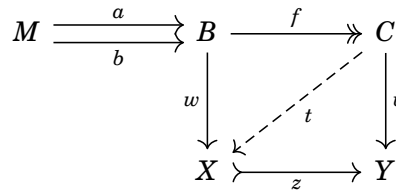
- (1) La composition de deux épimorphismes forts est encore un épimorphisme fort.
- (2) Tout épimorphisme régulier est fort.
- (3) Tout épimorphisme fort est extrémal.

DÉMONSTRATION. (1) Si f et g sont des épimorphismes forts, dans le diagramme suivant



$z \circ u = v \circ f \circ g$ avec z un monomorphisme. Comme g est un épimorphisme fort, il existe w tel que $w \circ g = u$ et $z \circ w = v \circ f$ (on retrouve un nouveau carré commutatif avec le même monomorphisme qu'au départ). Puisque f est un épimorphisme régulier, il existe t tel que $t \circ f = w$ et $z \circ t = v$. On remarque que t est la factorisation attendue.

- (2) Si $f = \text{coeg}(a, b)$ et $z \circ w = v \circ f$ avec z un monomorphisme (voir le diagramme ci-dessous) alors



de l'équation $z \circ w \circ a = v \circ f \circ a = v \circ f \circ b = z \circ w \circ b$, on en déduit que $w \circ a = w \circ b$ car z est un monomorphisme. Par conséquent, il existe une factorisation t de w travers f . Comme $w = t \circ f$, on en déduit que $z \circ t \circ f = z \circ w = v \circ f$ et ainsi $z \circ t = v$ car f est un épimorphisme.

- (3) Si f est un épimorphisme fort et $f = i \circ p$ avec i un monomorphisme comme sur le diagramme suivant ,

$$\begin{array}{ccc}
 B & \xrightarrow{f} & C \\
 \downarrow p & \searrow t & \parallel \\
 X & \xrightarrow{i} & C
 \end{array}$$

alors il existe un unique t tel que $t \circ f = p$ et $i \circ t = 1_C$. Par conséquent, i est un isomorphisme. En effet, on a déjà que $i \circ t = 1_C$ et on a aussi que $i \circ t \circ i = i$ et $t \circ i = 1_C$. $\square$

Nous avons noté qu'un épimorphisme fort est toujours un épimorphisme extrémal. Cependant on a aussi une équivalence entre ces deux notions sous certaines conditions imposées sur la catégorie dans laquelle on considère les morphismes.

PROPOSITION 2.2.1.8. [5, Proposition 4.3.7 (3)] *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant les pullbacks alors un épimorphisme est fort si et seulement si il est extrémal.*

DÉMONSTRATION. Il nous suffit de montrer que tout épimorphisme extrémal est aussi fort. Soit $f : A \rightarrow B$ un tel morphisme. Si $z \circ u = v \circ f$ avec z un monomorphisme, alors si on considère le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc}
 A & & & & B \\
 & \searrow r & & \nearrow q & \\
 & P & \xrightarrow{\quad} & B & \\
 & \downarrow p & & \downarrow v & \\
 & A & \xrightarrow{\quad z \quad} & Y & \\
 u \nearrow & & & &
 \end{array}$$

il existe une unique factorisation r telle que $q \circ r = f$ et $p \circ r = q$. Puisque z est un monomorphisme, q aussi est un monomorphisme (par [5, Proposition 2.5.3]). Or, f est un épimorphisme extrémal donc q est un isomorphisme. Par conséquent, $p \circ q^{-1} : B \rightarrow A$ est la factorisation attendue pour montrer que f

est un épimorphisme fort. L'unicité de cette factorisation découle du fait que f est un épimorphisme et que z est un monomorphisme. $\square$

Avant de clôturer cette sous-section sur les différents épimorphismes, il est utile de définir les deux dernières variantes de la notion d'épimorphismes : les épimorphismes scindés et les épimorphismes normaux.

Commençons par définir la notion d'épimorphisme scindé.

DÉFINITION 2.2.1.9. [8, Definition A.4.10] Soit $\mathcal{C}$ une catégorie arbitraire. Un morphisme $f : A \rightarrow B$ est un *épimorphisme scindé* s'il existe un morphisme $s : B \rightarrow A$ tel que $f \circ s = 1_B$.

Un tel s est appelé une *section*.

Pour le moment, on a montré que les épimorphismes réguliers étaient la notion la plus forte. Cependant il en existe une notion encore plus forte qui est la notion d'épimorphisme scindé.

PROPOSITION 2.2.1.10. [8, Proposition A.4.11] Dans une catégorie $\mathcal{C}$ arbitraire, tout épimorphisme scindé est un épimorphisme régulier.

DÉMONSTRATION. Soit $f : A \rightarrow B$ un épimorphisme scindé et s une section de f . On veut montrer que $f = \text{coeg}(1_A, s \circ f)$.

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xrightarrow{1_A} & A & \xleftarrow{s} & B \\
 & \searrow s \circ f & & \searrow f & \\
 & & X & &
 \end{array}$$

h (vertical arrow from A to X), $h \circ s$ (dashed arrow from B to X)

On note que $f \circ (s \circ f) = f \circ s \circ f = 1_B \circ f = f = f \circ 1_A$. Il ne reste plus qu'à montrer la propriété universelle. Si $h \circ 1_A = h \circ s \circ f$ alors, $h \circ s$ est une factorisation de h à travers f . De plus cette factorisation est unique puisque f est un épimorphisme. $\square$

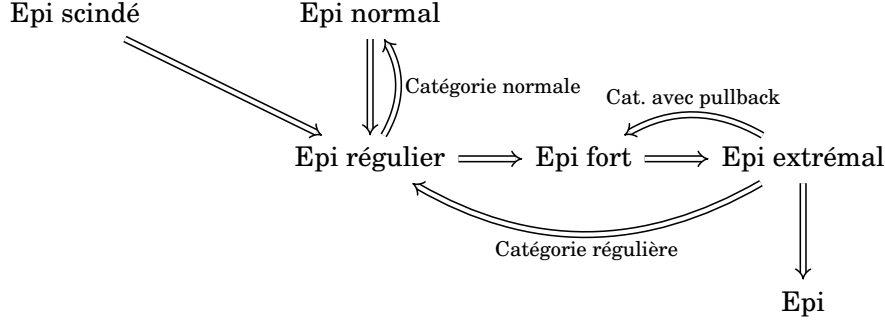
Il reste à introduire la notion d'épimorphisme normal.

DÉFINITION 2.2.1.11. [18, Section 2] Un morphisme $\alpha : A \rightarrow B$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ est dit *épimorphisme normal* si α est le coégalisateur d'un morphisme f et du morphisme nul.

Au vu de la définition, on note que tout épimorphisme normal est régulier mais que l'inverse n'est pas toujours vrai. Notons que la réciproque est seulement vraie dans les catégories *normales*.

DÉFINITION 2.2.1.12. [20] Une catégorie pointée $\mathcal{C}$ est dite *normale* si tout épimorphisme régulier est normal.

Résumons tous les différents épimorphismes et leurs implications⁵ :



Le prochain exemple est dû à une discussion entre Mr Van der Linden et l'auteur.

EXEMPLE 2.2.1.13. Afin d'illustrer que la notion d'épimorphismes scindés n'implique pas la notion d'épimorphismes normaux, nous allons mettre en lumière ce fait via un exemple. Considérons la catégorie des monoïdes, que l'on notera MON . Soit $g : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : (n, m) \mapsto n + m$ un morphisme de monoïdes. Alors, g est un épimorphisme scindé mais pas un épimorphisme normal. En effet, g est un épimorphisme scindé puisque g possède comme inverse à droite le morphisme de monoïdes $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N} : n \mapsto (n, 0)$. Supposons que g est un épimorphisme normal, par conséquent, il existe un morphisme $f : A \rightarrow \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, un morphisme de monoïdes, tel que $g = \text{coeg}(f, \omega_{A, \mathbb{N} \times \mathbb{N}})$. Or, comme g est un épimorphisme normal c'est aussi un épimorphisme régulier (voir Définition 2.2.1.11). Cependant par le Lemme 2.2.2.13, on sait que g co-égalise sa paire noyau. Étant donné que nous nous sommes dans la catégorie des monoïdes, nous connaissons explicitement la forme de la paire noyau de tout morphisme :

$$\text{Eq}(g) = \{(n, m, n', m') \in (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \times (\mathbb{N} \times \mathbb{N}) \mid g(n, m) = g(n', m')\} = \mathbb{N} \times \mathbb{N}.$$

Dès lors, les deux morphismes associés à la paire noyau de g sont les morphismes identités. On a alors une contradiction puisque aucun des deux morphismes de $\text{Eq}(g)$ n'est le morphisme nul. Cela montre que g n'est pas un épimorphisme normal.

5. L'implication allant des épimorphismes extrémaux vers les épimorphismes réguliers est une conséquence du Corollaire 2.2.2.17.

2.2.2. Retour sur les catégories régulières. Il est temps de donner des exemples et des contre-exemples pour illustrer le concept de catégories régulières. Cette sous-section a été inspirée de la référence [17].

EXEMPLE 2.2.2.1. La catégorie des ensembles SET est régulière. En effet, on sait déjà que SET admet des limites finies.

On va montrer que toute paire noyau ⁶ $\text{Eq}(f) \rightrightarrows A$ dans SET a un coégalisateur. On va considérer l'application quotient $\pi : A \rightarrow A/\text{Eq}(f)$ définie par $\pi(a) = \bar{a}$ où $\bar{a} := \{b \in A \mid a \text{Eq}(f)b\}$. Cette application est bien le coégalisateur de p_1 et p_2 ([5, Exemples 2.4.6]). Il ne reste plus qu'à montrer que les épimorphismes réguliers sont stables par pullback dans SET. Dans cette catégorie les épimorphismes réguliers correspondent aux surjections. Par conséquent, on doit vérifier que les surjections soient stables par pullback. Considérons le pullback suivant où p est une application surjective :

$$\begin{array}{ccc} E \times_B A & \xrightarrow{\pi_2} & A \\ \pi_1 \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ E & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

et que l'on veut montrer que π_2 est aussi une surjection. Soit $b \in B$, par surjectivité de f il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$. On peut considérer que $b = p(e)$ pour un certain $e \in E$. Par conséquence, il existe $e \in E$ tel que $p(e) = f(a)$ et donc $(e, a) \in E \times_B A$. De plus, cette paire d'éléments (a, e) est telle que $\pi_2(e, a) = a$, cela montre que π_2 est bien une surjection.

Dans le prochain exemple, on va traiter le cas des groupes mais avant il est utile de faire un rappel sur les groupes quotients vus comme groupe quotienté par une relation d'équivalence. En d'autres mots, supposons que nous avons un groupe G et une relation d'équivalence R sur G et on se demande si l'ensemble G/R possède une structure de groupe. Tout d'abord, on se rappelle que quand on parle de relation d'équivalence sur un groupe, on sous-entend une relation de congruence.

DÉFINITION 2.2.2.2. Une relation d'équivalence R sur un groupe A est une *congruence* si les deux conditions sont satisfaites :

- (1) pour $e \in A$ le neutre eRe ,
- (2) pour tout $a, a', b, b' \in A$ si aRa' et bRb' , alors $(a \cdot b)R(a' \cdot b')$,

6. On rappelle que dans la catégorie des ensembles $\text{Eq}(f) = \{(x, y) \in A \times A \mid f(x) = f(y)\}$.

(3) pour tout $a, b \in A$ si aRb , alors $a^{-1}Rb^{-1}$.

On notera que cette définition nous donne R un sous-groupe de $A \times A$ puisque la première condition implique que le neutre du groupe produit $A \times A$ appartient à R , la condition (2) implique que R soit stable sous l'opération produit de $A \times A$ et la condition (3) implique que R soit stable pour l'inverse du groupe produit $A \times A$. Dès lors, on a que si R est un sous-groupe de $A \times A$, alors R est une congruence sur le groupe A .

En fait, quand on écrit G/R , on sous-entend : le groupe quotient $G/[e]_R$ où $[e]_R := \{a \in G \mid aRe\}$. Afin d'expliquer cet abus de notation, il est utile de montrer que toute congruence R est déterminée entièrement par la classe d'équivalence du neutre $[e]_R$. En effet, soient $a, b \in G$ alors par réflexivité de R , on a bRb et comme R est une congruence, on a aussi $b^{-1}Rb^{-1}$, cela implique les équivalences :

$$aRb \iff aRb \text{ et } bRb \text{ et } b^{-1}Rb^{-1} \iff b^{-1}aRb^{-1}b \iff b^{-1}aRe.$$

Or on sait que l'ensemble $G/R := \{[g]_R \mid g \in G\}$ où $[g]_R := \{h \in G \mid hRg\} = \{h \in G \mid h^{-1}gRe\}$ et on aimerait mettre une structure de groupe sur G/R mais pour cela, il nous faut définir un sous-groupe normal de G . Posons $K := [e]_R$. C'est bien un sous-groupe normal de G . En effet, soit $k \in K$ et $x \in G$. Par congruence et réflexivité de R , on a que xRx et $x^{-1}Rx^{-1}$ et par congruence, on a que $x^{-1}kxRe$ et donc $x^{-1}kx \in K$. Par définition d'un groupe quotient, on a que $G/K := \{gK \mid g \in G\}$ mais on a que $G/R = G/K$ en tant qu'ensemble car pour tout groupe quotient, il existe une congruence définie de la manière suivante $xR_K y \iff x^{-1}y \in K \iff xRy$ et donc $R = R_K$ et cela montre bien que $G/R = G/K$.

EXEMPLE 2.2.2.3. De manière similaire, on peut montrer que la catégorie des groupes GRP est aussi une catégorie régulière. Premièrement, on sait que GRP admet des limites finies. Pour montrer cela, on utilise la [5, Proposition 2.8.2]. Par conséquent, on doit montrer que la catégorie des groupes a un objet terminal, des produits binaires et des égalisateurs :

- (1) le groupe trivial $\{e\}$ est l'objet terminal car tout morphisme de groupes doit envoyer le neutre du domaine sur le neutre du codomaine
- (2) on considère comme produit binaire des groupes A et B

$$A \times B := \{(a, b) \mid a \in A; b \in B\}$$

muni de la loi de groupe définie composante par composante

$$(a, b) + (a', b') = (a + a', b + b').$$

- (3) et pour finir l'égalisateur de deux morphismes $f, g : A \rightarrow B$ est le sous-groupe de A défini comme

$$\text{Ker}(f, g) := \{a \in A \mid f(a) = g(a)\}.$$

Il ne reste plus qu'à montrer que les paires noyaux ont des coégalisateurs et que les épimorphismes réguliers sont stables par pullback.

Montrons l'existence des coégalisateurs pour la paire noyau d'un morphisme de groupe $f : G \rightarrow G'$. Comme pour la catégorie des ensembles, on peut trouver sa paire noyau mais cette fois-ci $\text{Eq}(f)$ est un groupe. On peut voir $\text{Eq}(f)$ comme un sous-groupe du groupe produit $G \times G$ du groupe G avec lui-même. Le morphisme associé au coégalisateur est le quotient canonique $\pi : G \rightarrow G/\text{Eq}(f)$ qui est un morphisme de groupe. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Eq}(f) & \xrightarrow[\beta]{\alpha} & A \xrightarrow{f} B \\ & & \downarrow \pi \\ & & A/\text{Eq}(f) \end{array}$$

où (α, β) sont les morphismes associés à la paire noyau $\text{Eq}(f)$. Montrons que π est bien la coégalisateur de α et β .

- $\pi \circ \alpha = \pi \circ \beta$. Soit $(a, a') \in \text{Eq}(f)$ alors $\pi \circ \alpha(a, a') = \pi(a) = \bar{a}$ et $\pi \circ \beta(a, a') = \pi(a') = \bar{a}'$ où $\bar{a} := \{x \in A \mid f(x) = f(a)\}$ est la classe d'équivalence de a pour la relation $\text{Eq}(f)$. Au vu de la définition de classe d'équivalence, il est clair que $\bar{a} = \bar{a}'$.
- il reste à montrer la propriété universelle. Pour cela, considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} \text{Eq}(f) & \xrightarrow[\beta]{\alpha} & A \xrightarrow{\pi} A/\text{Eq}(f) \\ & & \downarrow \pi' \\ & & Q \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \phi \end{array}$$

où π' est tel que $\pi' \circ \alpha = \pi' \circ \beta$ et on veut trouver ϕ tel que $\pi' = \phi \circ \pi$. Posons $\phi(\bar{a}) = \phi \circ \pi(a) = \pi'(a)$. Par cette définition, ϕ est bien définie.

En effet, si on considère $a, a' \in A$ tel que, $\bar{a} = \overline{a'}$ alors

$$\begin{aligned}\phi(\bar{a}) &= \pi'(a) \\ &= \pi'(\alpha(a, a')) \\ &= \pi'(\beta(a, a')) \\ &= \pi'(a') \\ &= \phi(\overline{a'})\end{aligned}$$

Avec cette argument, on peut aussi montrer que ϕ est bien un morphisme de groupes.

Pour finir, il reste à montrer que les épimorphismes réguliers sont stables par pullback. Pour se faire, on calcule de la même manière que pour la catégorie des ensembles. En effet, la proposition suivante nous permet de l'affirmer.

PROPOSITION 2.2.2.4. [17] *Dans GRP les épimorphismes réguliers sont les homomorphismes surjectifs.*

La démonstration du résultat est due à l'auteur.

DÉMONSTRATION. Soit $f : A \rightarrow B$ un morphisme de groupe. Supposons dans un premier temps que f est un épimorphisme régulier. Dès lors, on peut trouver deux autres morphismes $C \rightrightarrows B$ tels que $f = \text{coeg}(i, v)$. On connaît explicitement les coégalisateurs dans GRP. En effet, si on veut trouver le coégalisateur de u et v , il suffit de prendre l'application quotient $q : B \rightarrow B/\sim$ où $\sim$ est la relation d'équivalence telle que $\sim := \{(u(c), v(c)) \in B \times B \mid c \in C\}$. Or on sait que q est une surjection et que f est isomorphe à q et donc, f est aussi une surjection.

Inversement, supposons que f est une surjection et montrons que f co-égalise sa paire noyau. On sait que la paire noyau est donnée par le pullback suivant :

$$\begin{array}{ccc} \text{Eq}(f) & \xrightarrow{f_1} & A \\ f_2 \downarrow & \lrcorner & \downarrow f \\ A & \xrightarrow{f} & B \end{array}$$

où $\text{Eq}(f) = \{(a, a') \in A \times A \mid f(a) = f(a')\}$. Or on sait que GRP admet les co-égalisateurs des paires noyaux, dès lors, on peut considérer $q = \text{coeg}(f_1, f_2)$. Puisque par définition f coégalise aussi f_1 et f_2 , alors f se factorise à travers

q comme sur le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} \text{Eq}(f) & \xrightarrow[f_2]{f_1} & A & \xrightarrow{q} & A/\sim \\ & & \downarrow f & \swarrow h & \\ & & B & & \end{array}$$

où $h([a]) = f(a)$ puisque cela implique que $h \circ q(a) = f(a)$.

Montrons que h est une bijection car si tel est le cas alors cela prouvera que f est un épimorphisme régulier. Soit $(x, y) \in A^2$ alors $h([x]) = h([y]) \iff f(x) = f(y) \iff x \sim y \iff [x] = [y]$. Cela montre que h est une injection. De plus, c'est une surjection puisque f est une surjection. En effet, soit $b \in B$ alors il existe $a \in A$ tel que $f(a) = b$. Dès lors, il existe $[a] \in A/\sim$ tel que $h(q(a)) = f(a) = b$. Cela montre que h est une bijection. $\square$

On notera que l'on aurait pu démontrer cette proposition en utilisant deux lemmes intermédiaires mais nous avons préféré l'approche de la démonstration car elle peut se généraliser alors que les deux preuves des lemmes sont exclusivement pensées dans le cadre des groupes.

Voici les deux lemmes dont les preuves sont plus spécifiques aux groupes.

LEMME 2.2.2.5. [17, Exercice 1.1.8] *Dans GRP, les épimorphismes coïncident avec les homomorphismes surjectifs.*

DÉMONSTRATION. Supposons que $f : A \rightarrow B$ soit un morphisme de groupe surjectif et on aimerait montrer que f est un épimorphisme. Soient $\alpha, \beta : B \rightarrow C$ deux morphismes de groupes tels que $\alpha \circ f = \beta \circ f$. Soit $y \in B$ alors par surjectivité de f , il existe $x \in A$ tel que $f(x) = y$. Ainsi, on a les égalités :

$$\alpha(y) = \alpha(f(x)) = \beta(f(x)) = \beta(y).$$

Cela montre bien que $\alpha = \beta$ et donc que f est un épimorphisme.

Réciproquement, supposons que f est un épimorphisme. Au vu du théorème de factorisation canonique d'un morphisme [16, Théorème 2.10.1] et si $g \circ h$ est un épimorphisme, alors h en est un, on peut sans perte de généralité supposer que f est l'inclusion de H dans G et H est un sous-groupe de G . Le but de la preuve sera de montrer que la seule possibilité est que $[G : H] = 1$. Pour cela, on va raisonner par l'absurde en analysant deux cas :

- 1^{er} cas : On suppose que $[G : H] = 2$. Par conséquent, H est un sous-groupe normal de G . Soient $\alpha, \beta : G \rightarrow G/H$ où α est la projection canonique et β est le morphisme trivial. Puisque $\alpha \circ f = \beta \circ f$, on a que $\alpha = \beta$ car f est un épimorphisme. Cela implique alors que le

quotient G/H ne contient que le neutre et cela contredit l'hypothèse que l'indice de H dans G soit égal à deux.

- 2^e cas : On suppose que $[G : H] > 2$. Par conséquent, on peut trouver deux éléments $u, v \in G$ tels que les classes latérales H , uH et vH soient disjointes deux à deux. On peut définir une bijection comme suit : $uH \rightarrow vH$; $uh \mapsto vh$. Cette bijection nous permet de définir un morphisme de groupe $\sigma \in S(G)$:

$$\sigma(uh) = vh, \sigma(vh) = uh \text{ et } \sigma(g) = g \text{ pour tout } g \in G \setminus (uH \cup vH).$$

Pour tout $g \in G$, on peut définir la translation à droite $\alpha_g : G \rightarrow G$, $x \mapsto xg$. Par conséquent, on a défini un morphisme $\alpha : G \rightarrow S(G)$, $g \mapsto \alpha_g$ et on peut aussi définir un morphisme de groupe $\beta : G \rightarrow S(G)$ $g \mapsto \sigma^{-1}\alpha\sigma$. Pour $x \in H$ et $g \in G$, on calcule

$$(\beta \circ f)(x)(g) = \beta(x)(g) = \sigma^{-1}\alpha_x\sigma(g) = \sigma^{-1}(\sigma(g)x).$$

On peut alors regarder sur quoi sont envoyés les éléments des trois classes latérales considérées plus haut :

$$\begin{aligned} (\beta \circ f)(x)(g) &= \sigma^{-1}(v h x) = u h x = g x \text{ si } g = u h \text{ avec } h \in H, \\ (\beta \circ f)(x)(g) &= \sigma^{-1}(u h x) = v h x = g x \text{ si } g = v h \text{ avec } h \in H \text{ et} \\ (\beta \circ f)(x)(g) &= \sigma^{-1}(g x) = g x \text{ si } g \in G \setminus (uH \cup vH). \end{aligned}$$

On vient de montrer que $\alpha \circ f = \beta \circ f$ et par conséquent, on devrait avoir que $\alpha = \beta$ mais ce n'est pas le cas. En effet, si on prend comme élément $x \in G \setminus (H \cup v^{-1}uH)$, on a alors $vx \in G \setminus (uH \cup vH)$ et si on évalue β et α en cette élément x , on a :

$$\beta(x)(u) = \sigma^{-1}\alpha_x\sigma(u) = \sigma^{-1}(\sigma(ux)) = \sigma^{-1}(ux) = vx \neq ux = \alpha(x)(u).$$

Cela contredit le fait que f soit un épimorphisme.

Les deux cas ont montré que l'indice de H dans G vaut un et donc $H = G$. $\square$

REMARQUE 2.2.2.6. La première partie de la preuve du Lemme 2.2.2.5 peut être reproduite pour toute catégorie qui admet comme objet des ensembles avec une structure algébrique additionnelle. Un tel objet mathématique porte le nom de *variété d'algèbres*⁷. Par conséquent, on peut montrer que dans ce genre de catégorie toute surjection est un épimorphisme mais la réciproque n'est pas toujours vraie⁸.

7. Voir [8, Définition A.1.11].

8. Ce n'est pas le cas dans URNG (voir page 33).

LEMME 2.2.2.7. [5, Example 4.3.10 (a)] *Dans GRP, les épimorphismes réguliers ne sont rien de plus que les épimorphismes.*

DÉMONSTRATION. Nous savons déjà que tout épimorphisme régulier est un épimorphisme et ce fait est valable dans toutes les catégories.

Réciproquement, on sait par le Lemme 2.2.2.5 que si on considère un épimorphisme $f : A \rightarrow B$ alors f est une surjection. Ainsi on peut voir B comme étant le quotient de A par une relation R où aRa' si et seulement si $f(a) = f(a')$ (par le théorème de factorisation canonique d'une fonction [16, Théorème 1.1.13]). Dans ce cas, on a que f est le coégalisateur de sa paire noyau. Et par conséquent, f est bien un épimorphisme régulier. $\square$

On vient de donner deux exemples de catégories régulières. Comme pour chaque notion mathématique, il est utile de connaître aussi des contre-exemples.

CONTRE-EXEMPLE 2.2.2.8. La catégorie des espaces topologiques n'est pas une catégorie régulière. Pour montrer cela, on va trouver un exemple pour lequel les épimorphismes réguliers ne sont pas stables. Afin de comprendre l'exemple, il faut remarquer que les épimorphismes forts dans cette catégorie sont les applications quotient topologiques (c'est-à-dire les applications continues surjectives allant dans les espaces avec la topologie finale [5, Example 4.3.10.b]) et on sait que tout épimorphisme régulier est fort. Par conséquent, si on montre que les applications quotients ne sont pas stables on aura montré que TOP n'est pas une catégorie régulière.

LEMME 2.2.2.9. [5, Example 4.3.10.b] *Dans TOP, les épimorphismes forts sont les applications quotients topologiques.*

La prochaine démonstration est due d'une collaboration entre Mr Van der Linden et l'auteur.

DÉMONSTRATION. Grâce à la Proposition 2.2.1.8, il nous suffit de montrer que les épimorphismes extrémaux sont les applications quotients dans TOP.

Soit $q : X \rightarrow Z$ une application quotient et soit la factorisation $q = m \circ f$ où $f : X \rightarrow Y$ est un morphisme et où $m : Y \rightarrow Z$ est un monomorphisme. Si on montre que m est un isomorphisme alors q sera un épimorphisme extrémal. Cependant, comme nous travaillons dans TOP, nous savons que les notions

de monomorphisme, épimorphisme et isomorphisme correspondent respectivement aux applications continues injectives, surjectives et aux homéomorphismes. Par conséquent, pour montrer que m soit un homéomorphisme, il suffit de montrer que m est une surjection (comme m est aussi est une injection cela nous donnera que m est une bijection) et une application ouverte (cela impliquera que la fonction inverse de m est continue) :

- Soit $z \in Z$. Comme q est une application quotient et donc une surjection, il existe $x \in X$ telle que $q(x) = z$. Comme q se factorise via f et m , l'antécédent de z pour l'application z est $f(x)$ car $m(f(x)) = q(x) = z$. On a montré que m est bien une surjection.
- Soit $\mathcal{O}$ un ouvert de Y . Par définition d'application quotient, on sait que $m(\mathcal{O})$ est un ouvert de Z si et seulement si $q^{-1}(m(\mathcal{O}))$ est un ouvert de X . Dès lors, par la factorisation, nous avons

$$q^{-1}(m(\mathcal{O})) = (f^{-1} \circ m^{-1})(m(\mathcal{O})) = f^{-1}(m^{-1} \circ m(\mathcal{O})) = f^{-1}(\mathcal{O})$$

où la dernière égalité découle de l'injectivité de m . Or on sait que comme f est une application continue alors $f^{-1}(\mathcal{O})$ est un ouvert de X . Cela montre que m est une application ouverte.

Inversement soit $q : X \rightarrow Z$ un épimorphisme extrémal dans TOP. On sait par le théorème de factorisation canonique d'une fonction ([16, Théorème 1.1.13]) que l'on peut factoriser q à travers son ensemble image. On a alors le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{q} & Z \\ p \downarrow & & \uparrow i \\ X/\text{Eq}(f) & \xrightarrow{\phi} & q(X) \end{array}$$

où on munit $X/\text{Eq}(q)$ de la topologie quotient, ce qui fait de l'application q une application quotient, et on munit $q(X)$ de la topologie de sous-espace. On note que ϕ est bien une application continue par les topologies que l'on considère sur $X/\text{Eq}(f)$ et sur $q(X)$. De plus ϕ est une bijection. Cette bijection est définie par l'assignation $[x] \mapsto x$ où $[x]$ est la classe d'équivalence pour la relation d'équivalence définie par la paire noyau $\text{Eq}(q)$. Dès lors, on a que ϕ est une injection et donc un monomorphisme et puisque i est l'application inclusion c'est aussi un monomorphisme. On a alors une nouvelle factorisation de q à travers un monomorphisme $i \circ \phi$. Comme q est par hypothèse un épimorphisme extrémal, on a que $i \circ \phi$ est un isomorphisme et donc on

a une identification entre q un épimorphisme extrémal et p une application quotient. $\square$

Montrons que les applications quotients ne sont pas stables sous pullback. Considérons le pullback suivant

$$\begin{array}{ccc} X \times_Y Z & \xrightarrow{p_2} & Z \\ p_1 \downarrow & \lrcorner & \downarrow g \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

où $X = (\{a, b, c, d\}, \tau_X)$, $Y = (\{x, y, z\}, \tau_Y)$ et $Z = (\{l, m, n\}, \tau_Z)$ et les topologies sont : $\tau_X := \{\emptyset, \{a, b, c, d\}, \{a, b\}\}$, $\tau_Y = \{\emptyset, \{x, y, z\}\}$ (la topologie grossière) et $\tau_Z = \{\emptyset, \{l, m, n\}, \{l, m\}\}$. Les applications continues f et g sont définies de la manière suivante :

$$f(a) = x, f(b) = y = f(c), f(d) = z,$$

$$g(l) = x, g(m) = z = g(n).$$

Remarquons que $f : X \rightarrow Y$ est une application quotient. En effet, f est surjective par définition et il ne reste plus qu'à voir que $U \subset Y$ est ouvert si et seulement si $f^{-1}(U)$ est ouvert dans X . L'implication gauche à droite est directe car Y est muni de la topologie grossière. Pour l'autre sens, il faut lister les différentes parties $U \subset Y$ de Y et on remarque que $U \subset Y$ tel que $f^{-1}(U) \in \tau_X$ sont le vide et Y tout entier⁹

Le pullback

$$X \times_Y Z = \{(a, l); (d, m); (d, n)\}, \tau\}$$

est équipé de la topologie induite

$$\tau = \{\emptyset, X \times_Y Z, \{(a, l)\}, \{(a, l); (d, m)\}\}.$$

On note alors que la projection p_2 n'est pas une application quotient puisque $p_2^{-1}(l) = \{(a, l)\}$ est ouvert dans le pullback alors que $\{l\}$ n'est pas un ouvert dans Z .

On vient de montrer que la catégorie des groupes est régulière et que celle des espaces topologiques ne l'est pas. Cependant la catégorie des groupes topologiques $\text{GRP}(\text{TOP})$, elle est régulière. C'est la catégorie dont :

9. Il n'existe pas de partie de Y telle que l'image inverse soit égale à $\{a, b\}$.

- les objets sont les groupes topologiques, c'est-à-dire les groupes munis d'une topologie compatible avec la structure de groupe. Autrement dit, on considère que les applications internes du groupes (produit et inverse) sont continues ;
- les morphismes sont les homomorphismes de groupes entre deux groupes et de plus, ces homomorphismes sont continus.

EXEMPLE 2.2.2.10. $\text{GRP}(\text{TOP})$ est régulière. Contrairement aux deux exemples au-dessus, ce résultat est moins trivial et demande un peu plus d'effort.

LEMME 2.2.2.11. *Dans $\text{GRP}(\text{TOP})$, les coégalisateurs existent.*

DÉMONSTRATION. Soit $f : (G, \tau_G) \rightarrow (H, \tau_H)$ un morphisme de groupe continu. La paire noyau $(\text{Eq}(f), \tau)$ est un groupe topologique pour la topologie de sous-espace τ engendrée par la topologie produit $\tau_{G \times G}$ du groupe topologique $(G \times G, \tau_{G \times G})$:

$$\text{Eq}(f) = \{(g, g') \in G \times G \mid f(g) = f(g')\} \leq G \times G.$$

Soit le diagramme suivant

$$(\text{Eq}(f), \tau) \begin{array}{c} \xrightarrow{p_1} \\ \xrightarrow{p_2} \end{array} (G, \tau_G) \xrightarrow{f} (H, \tau_H)$$

Quel est le coégalisateur de (p_1, p_2) ? On applique la même méthode que dans la catégorie des groupes car les quotients dans $\text{GRP}(\text{TOP})$ sont calculés de manières similaires que dans GRP :

$$\begin{array}{ccc} (\text{Eq}(f), \tau) & \begin{array}{c} \xrightarrow{p_1} \\ \xrightarrow{p_2} \end{array} & (G, \tau_G) \xrightarrow{f} (H, \tau_H) \\ & & \downarrow \pi \\ & & (G/\text{Eq}(f), \tau_Q) \end{array}$$

où π est la projection et τ_Q est la topologie quotient (c'est-à-dire rendant π continue). Montrons que $\pi = \text{coeg}(p_1, p_2)$:

- on a bien que $\pi \circ p_1 = \pi \circ p_2$ car $\pi \circ p_i(g, g') = e \text{Eq}(f)$
- il reste à montrer la propriété universelle. Un argument similaire au cas des groupes montre le résultat souhaité. $\square$

Afin de finir la preuve que $\text{GRP}(\text{TOP})$ est régulière, il suffit de montrer que les épimorphismes réguliers sont stables par pullback. Avant de montrer cette propriété, il est important de voir à quoi ils correspondent dans cette catégorie.

LEMME 2.2.2.12. *Dans $\text{GRP}(\text{TOP})$, les épimorphismes réguliers sont les homomorphismes surjectifs ouverts, c'est-à-dire les morphismes de groupes surjectifs tels que $f(U) \subset \tau_H$ pour tout ouvert $U \in \tau_G$.*

DÉMONSTRATION. Considérons la situation suivante : soit $f : (H, \theta) \rightarrow (G, \tau_G)$ un morphisme dans $\text{GRP}(\text{TOP})$ et soit $\pi : H \rightarrow H/\text{Eq}(f)$ l'application quotient (qui est un épimorphisme régulier) d'un groupe topologique (H, θ) par la relation $(\text{Eq}(f), \tau)$. Dans ce contexte, π est une application surjective ouverte. Dans le cadre des groupes, on a déjà montré l'aspect surjectif et par conséquent il ne reste plus qu'à montrer l'aspect ouvert de l'application. Posons $K = \ker(\pi)$ et montrons que, pour tout ouvert $V \in \theta$, on a

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = VK.$$

D'un côté, si $z = vk$ où $v \in V$ et $k \in K$,

$$\pi(z) = \pi(vk) = \pi(v)\pi(k) = \pi(v) \in \pi(V),$$

ainsi, on a $z \in \pi^{-1}(\pi(V))$. D'autre part, si $z \in \pi^{-1}(\pi(V))$, alors $\pi(z) = \pi(v_1)$ pour un $v_1 \in V$, de sorte que $v_1^{-1}z \in K$ et $z = v_1k$ pour un $k \in K$.

Cela implique que

$$\pi^{-1}(\pi(V)) = \bigcup_{k \in K} Vk \in \theta.$$

En effet, la fonction $m_k : H \rightarrow H$ définie par $m_k(x) = xk$ pour n'importe quel $x \in H$ (avec $k \in K$ fixé) est un homéomorphisme, puisque m_k est la multiplication de deux éléments du groupes (et donc continue) et car elle admet comme inverse $(m_k)^{-1}(x) = (xk)^{-1}$ qui est aussi continue car c'est la composition du produit et de l'inversion qui sont toutes deux des applications continues, ainsi $Vk = m_k(V) \in \theta$ puisque $V \in \theta$.

On vient de montrer que pour tout ouvert $V \in \theta$, $\pi^{-1}(\pi(V)) \in \theta$ et donc que $\pi(V)$ est ouvert ; cela implique que π est une application ouverte. $\square$

A partir de la preuve précédente, nous pouvons en tirer que tout coégalisateur de la paire noyau d'un morphisme f existe. Bien entendu que π est un épimorphisme régulier mais on aimerait montrer que si f est un épimorphisme régulier alors le même argument fonctionne. Et heureusement c'est le cas.

LEMME 2.2.2.13. [8, Lemma A.4.8]. *Dans une catégorie $\mathcal{C}$ avec des limites finies, tout épimorphisme régulier est le coégalisateur de sa paire noyau.*

DÉMONSTRATION. Soit f un épimorphisme régulier. Par conséquent, il existe deux morphismes u, v tels que $f = \text{coeg}(u, v)$ et entre autre $f \circ u = f \circ v$. Considérons $(\text{Eq}(f), f_1, f_2)$ la paire noyau de f et par conséquent $f \circ f_1 = f \circ f_2$.

$$\begin{array}{ccccc}
 W & \xrightarrow[u]{v} & X & \xrightarrow{f} & Y \\
 & \searrow f' & \uparrow f_2 \uparrow f_1 & & \\
 & & \text{Eq}(f) & &
 \end{array}$$

Par la propriété universelle de la paire noyau (plus précisément du pullback associé), il existe un unique f' tel que la paire (u, v) se factorise à travers (f_1, f_2) via f' . De plus, si on a un morphisme $g : X \rightarrow W$ tel que $q \circ f_1 = q \circ f_2$ alors nécessairement $q \circ u = q \circ v$ et par la propriété universelle du coégalisateur il existe un unique morphisme $w : Y \rightarrow W$ tel que $q = w \circ f$. Cela montre que q se factorise à travers f , c'est-à-dire la propriété universelle. $\square$

Donc si f est un épimorphisme régulier alors $f = \pi$.

Afin de compléter la preuve, il reste à montrer que les homomorphismes surjectifs ouverts sont stables par pullback. La partie homomorphisme surjectif est similaire au cas des groupes, il suffit de montrer que les applications ouvertes sont stables par pullback. Pour cela, on va utiliser le lemme suivant, qui est dû à une collaboration entre Mr Van der Linden et l'auteur.

LEMME 2.2.2.14. *Considérons le diagramme suivant :*

$$\begin{array}{ccc}
 A & \xrightarrow{a} & X \\
 g \downarrow & & \downarrow f \\
 B & \xrightarrow{b} & Y
 \end{array}$$

Si $f \circ a = b \circ g$ est un pullback dans la catégorie des ensembles SET alors $g \circ a^{-1} = b^{-1} \circ f : \mathcal{P}(X) \rightarrow \mathcal{P}(B)$.

La démonstration du lemme précédent est due à l'auteur.

DÉMONSTRATION. Comme on a un pullback dans SET, on a les identités suivantes :

$$A = \{(\tilde{b}, x) \in B \times X \mid f(x) = b(\tilde{b})\}, \quad g(\tilde{b}, x) = \tilde{b}, \quad a(\tilde{b}, x) = x.$$

Afin de montrer le résultat, il est utile de voir à quoi correspond ga^{-1} et $b^{-1}f$. Pour cela, on va évaluer les deux fonctions sur une partie de X , disons

$C \in \mathcal{P}(X)$. Calculons

$$g \circ a^{-1}(C) = g\{\tilde{a} \in A \mid a(\tilde{a}) \in C\},$$

où $\tilde{a} = (\tilde{b}, x)$ avec $x \in C$,

$$g(\{\tilde{a} \in A \mid a(\tilde{a}) \in C\}) = \{g(\tilde{a}) \mid \tilde{a} \in A \text{ et avec } a(\tilde{a}) \in C\},$$

autrement dit

$$g \circ a^{-1}(C) = \{\tilde{b} \in B \mid (\tilde{b}, x) \in A \text{ et } x \in C\}.$$

De l'autre côté, on a

$$b^{-1} \circ f(C) = b^{-1}(\{f(c) \mid c \in C\}) = \{\tilde{b} \in B \mid b(\tilde{b}) \in f(C)\}.$$

Soit $\tilde{b} \in g \circ a^{-1}(C)$. Avons-nous que $\tilde{b} \in b^{-1}f(C)$?

$$\tilde{b} \in b^{-1}f(C) \iff b(\tilde{b}) \in f(C),$$

or comme $(\tilde{b}, x) \in A$ alors $b(\tilde{b}) = f(x) \in f(C)$ ce qui est vrai car $x \in C$.

Soit $\tilde{b} \in b^{-1}f(C)$. Avons-nous que $\tilde{b} \in g \circ a^{-1}(C)$? Nous devons trouver $x \in C$ tel que $(\tilde{b}, x) \in A$. Or $\tilde{b} \in b^{-1}f(C)$, par conséquence $b(\tilde{b}) \in f(C)$ et donc il existe $x \in C$ tel que $b(\tilde{b}) = f(x)$. On a trouvé la paire $(\tilde{b}, x) \in A$. $\square$

On va utiliser ce lemme afin de montrer la proposition suivante qui conclut la preuve de l'exemple. Le prochain résultat et sa preuve sont dus à une collaboration de Mr Van der Linden et de l'auteur.

PROPOSITION 2.2.2.15. *Considérons le même diagramme que pour le lemme précédent. Dans TOP, si $f \circ a = b \circ g$ est un pullback, alors, f une surjection ouverte, implique que g est une surjection ouverte.*

DÉMONSTRATION. On prend un ensemble ouvert dans A ; ceux-ci sont engendrés par des ouverts de la forme

$$W = g^{-1}(U) \cap a^{-1}(V),$$

pour U ouvert dans B et V ouvert dans X . En effet, A est inclus dans le produit cartésien $B \times X$ et par conséquent, la topologie de A est la topologie induite par la topologie produit sur $B \times X$.

On doit montrer que $g(W)$ est ouvert dans B :

$$g(W) = g \circ g^{-1}(U) \cap g \circ a^{-1}(V),$$

on a que $g \circ g^{-1}(U) = U$ car g est une surjection et d'autre part, on a, par le Lemme 2.2.2.14, $g \circ a^{-1}(V) = b^{-1} \circ f(V)$. Or, $f(V)$ est un ouvert de Y et comme b est une application continue, $b^{-1}(f(V))$ est un ouvert de B . On vient de

montrer que $g(W)$ est l'intersection de deux ouverts de B et par conséquent, $g(W)$ est aussi un ouvert de B . $\square$

Une propriété remarquable qu'ont les catégories régulières est la propriété de factorisation de n'importe quel morphisme. Cette propriété peut souvent être utile afin de montrer qu'une certaine flèche est un épimorphisme régulier ou un monomorphisme.

THÉORÈME 2.2.2.16. [8, Theorem A.5.3] *Dans une catégorie régulière, chaque morphisme se factorise comme un épimorphisme régulier suivi d'un monomorphisme. Cette factorisation est unique à isomorphisme près et est appelée factorisation image de f .*

DÉMONSTRATION. Considérons f , sa paire noyau (u, v) et le coégalisateur $p = \text{Coeg}(u, v)$ comme dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 P & \xrightarrow{u} & A & \xrightarrow{f} & B \\
 \downarrow q & \searrow v & \downarrow p & \nearrow i & \\
 R & \xrightarrow{r} & I & &
 \end{array}$$

$\xrightarrow{s}$

Puisque $f \circ u = f \circ v$, on a par la propriété universelle de la paire noyau l'existence d'une unique flèche i telle que $f = i \circ p$. On va prouver que i est un monomorphisme.

Soit (r, s) la paire noyau de i . Puisque

$$i \circ p \circ u = f \circ u = f \circ v = i \circ p \circ v,$$

il existe un unique morphisme q tel que

$$r \circ q = p \circ u, \quad s \circ q = p \circ v.$$

Par régularité, on a que q est un épimorphisme régulier. Par conséquent,

$$r \circ q = p \circ u = p \circ v = s \circ q \implies r = s.$$

Cela implique que i est un monomorphisme car une flèche est un monomorphisme si et seulement si les deux flèches associées à la paire noyau sont égales (voir [8, Lemma A.2.7.2]).

Il ne reste plus qu'à montrer l'unicité modulo un isomorphisme. Soit $f = i' \circ p'$ une autre factorisation avec i' un monomorphisme et p' un épimorphisme régulier comme dans le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 P & \xrightarrow[u]{v} & A & \xrightarrow{p} & I & \xrightarrow{i} & B \\
 & & & \searrow p' & \downarrow q & \nearrow i' & \\
 & & & & I' & &
 \end{array}$$

Comme i' est un monomorphisme,

$$i' \circ p' \circ u = f \circ u = f \circ v = i' \circ p' \circ v \implies p' \circ u = p' \circ v,$$

ce qui nous permet d'exhiber une unique flèche q qui factorise p' à travers $\text{Coeg}(u, v) = p : p' = q \circ p$. Puisque p' est un épimorphisme régulier, il est aussi fort et donc q est aussi un épimorphisme fort. De plus puisque p est un épimorphisme

$$i' \circ q \circ p = i' \circ p' = f = i \circ p \implies i' \circ q = i.$$

Puisque i est un monomorphisme, q est un monomorphisme aussi et comme q est à la fois un monomorphisme et un épimorphisme fort, c'est un isomorphisme. Ce qui conclut l'unicité. $\square$

Les catégories régulières sont les catégories à considérer si on veut utiliser des propriétés concernant les épimorphismes réguliers. En effet, nous avons le résultat suivant.

COROLLAIRE 2.2.2.17. [8, Corollary A.5.4] *Dans une catégorie régulière :*

- (1) *les épimorphismes réguliers coïncident avec les épimorphismes forts ;*
- (2) *la composition de deux épimorphismes réguliers est encore un épimorphisme régulier ;*
- (3) *le produit de deux épimorphismes réguliers est un épimorphisme régulier.*

DÉMONSTRATION.

- (1) Nous savons déjà par la Proposition 2.2.1.7 que les épimorphismes réguliers sont forts. Inversement, supposons que f est un épimorphisme fort et factorisons le comme $f = i \circ p$ avec i un monomorphisme et p un épimorphisme régulier¹⁰. Le monomorphisme i est

10. Cette factorisation est possible car nous sommes dans une catégorie régulière [8, Theorem A.5.3]

un isomorphisme ([8, Theorem A.4.3]). Et par conséquent, f est isomorphe à p qui est un épimorphisme régulier.

- (2) Cela découle du fait que régulier et fort coïncident et que la composition de deux épimorphismes forts est encore un épimorphisme fort par la Proposition(2.2.1.7).

- (3) Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & f \times g & & \\
 & \swarrow & \text{---} & \searrow & \\
 & A \times C & \xrightarrow{f \times id_C} & B \times C & \xrightarrow{id_B \times g} & B \times D \\
 & \swarrow p_A & & \swarrow p_B & & \swarrow p_D \\
 A & \xrightarrow{f} & B & & C & \xrightarrow{g} & D
 \end{array}$$

où le produit de deux épimorphismes f et g est la composition au-dessus du graphe et où les deux parallélogrammes sont des pullbacks. Les morphismes $f \times id_C$ et $id_B \times g$ sont des épimorphismes réguliers car nous sommes dans une catégorie régulière et que les épimorphismes réguliers sont stables par pullback. Ainsi la composition d'épimorphismes réguliers est encore un épimorphisme régulier. $\square$

On va donner un exemple d'une catégorie dans laquelle la composition d'épimorphismes réguliers n'est pas un épimorphisme régulier. De plus, cela nous donnera un exemple supplémentaire de catégories non régulières. Le prochain exemple, qui est inspiré de [1, Example 7.S], est dû à l'auteur.

EXEMPLE 2.2.2.18. Soit CAT la catégorie dont les objets sont les catégories petites et dont les morphismes sont les foncteurs entre catégories petites. On va expliciter le coproduit dans CAT . Soit $\{C_i\}_{i \in I}$ une collection finie de catégories petites. Dès lors le coproduit, qui sera noté $\coprod_{i \in I} C_i$, est la catégorie petite dont les objets sont les paires ordonnées $(i, \text{obj}(\mathcal{C}_i))$ où $\text{obj}(\mathcal{C}_i)$ sont les objets de la catégorie $\mathcal{C}_i$. Un morphisme dans $\coprod_{i \in I} C_i$, noté $f : (i, A) \rightarrow (j, B)$ où A est un objet de $\mathcal{C}_i$ et B un objet de $\mathcal{C}_j$, est la donnée d'un morphisme dans $\mathcal{C}_i$ $f : A \rightarrow B$ si $i = j$ et sinon on n'y a pas de morphismes. Autrement dit

$$\coprod_{i \in I} C_i((i, A); (j, B)) = \begin{cases} \mathcal{C}_i(A, B) & \text{si } i = j \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dès lors, on peut construire nos deux foncteurs qui seront des épimorphismes réguliers mais tels que la composition ne sera pas un épimorphisme régulier.

Soit $2 := \{X \xrightarrow{z} Y\}$ la catégorie petite contenant deux objets, deux morphismes identités et un morphisme $z : X \rightarrow Y$. Soit $\mathcal{A}$ la catégorie petite composée d'un seul objet et dont les morphismes sont les éléments du monoïde des naturels $\mathbb{N}$ pour l'addition. Soit $\mathcal{C}$ la catégorie petite constituée d'un seul objet et dont les flèches forment le sous-monoïde $\{0, 1\}$ monoïde $\mathbb{Z}$ pour la multiplication. Vu que les catégories $\mathcal{A}$ et $\mathcal{C}$ n'ont qu'un seul objet, il suffit pour définir un foncteur ayant comme codomaine $\mathcal{A}$ ou $\mathcal{C}$ de définir le foncteur sur les flèches. Posons les foncteurs $F : 2 \coprod 2 \rightarrow \mathcal{A}$ et $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ tels que :

- $F((2, z)) = 1$ et $F((1, z)) = 0$;
- $G(n) = 0$ si $n > 0$ et $G(0) = 1$.

Cela implique alors que $G \circ F((2, z)) = G(1) = 0$ et $G \circ F((1, z)) = G(0) = 1$. Dans la suite, on écrira $(i, z) = z_i$ pour alléger les notations.

Montrons dans un premier temps que $Q := G \circ F$ n'est pas un épimorphisme régulier. Pour cela, il suffit de montrer que Q n'est pas le coégalisateur de sa paire noyau. La paire noyau de Q est donnée par $(\mathcal{P}, P_1, P_2)$ où $\mathcal{P}$ est la catégorie décrite comme suit :

$$\begin{array}{ccccc}
 (X_1, X_1) & \xrightarrow{(1_{X_1}, z_1)} & (X_1, Y_1) & & (X_1, X_2) & & (X_1, Y_2) \\
 (z_1, 1_{X_1}) \downarrow & & \searrow (z_1, z_1) & \downarrow (z_1, 1_{Y_1}) & \downarrow (z_1, 1_{X_2}) & & \downarrow (z_1, 1_{Y_2}) \\
 (X_1, X_1) & \xrightarrow{(1_{Y_1}, z_1)} & (Y_1, Y_1) & & (Y_1, X_2) & & (Y_1, Y_2) \\
 \\
 (X_2, X_1) & \xrightarrow{(1_{X_2}, z_1)} & (X_2, Y_1) & & (X_2, X_2) & & (X_2, Y_2) \\
 \\
 (Y_2, X_1) & \xrightarrow{(1_{Y_2}, z_1)} & (Y_2, Y_1) & & (Y_2, X_2) & \searrow (z_2, z_2) & (Y_2, Y_2)
 \end{array}$$

où les indices 1 et 2 sont utilisés pour dénoter les éléments dans les composantes du coproduit. Les foncteurs P_1 et P_2 sont la projection sur la premier et la seconde composante respectivement. Vérifions que c'est bien la paire noyau de Q :

- La commutativité est évidente concernant les objets et pour les flèches, on note que c'est aussi le cas. En effet, tous les cas sont similaires au cas $Q \circ P_1((1_{X_1}, z_1)) = Q(1_{X_1}) = 1 = Q(z_1) = Q \circ P_2((1_{X_1}, z_1))$;
- La propriété universelle est immédiate puisque si on considère deux foncteurs $K : \mathcal{D} \rightarrow 2 \coprod 2$ et $H : \mathcal{D} \rightarrow 2 \coprod 2$, alors il existe un unique morphisme $(K, H) : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{P}$ défini comme $(K, H)(A) = (K(A), H(A))$ et $(K, H)(\mathcal{D}(A, B)) = (K(\mathcal{D}(A, B)), H(\mathcal{D}(A, B)))$ pour A et B deux objets de $\mathcal{D}$. Ainsi $P_1 \circ (K, H) = K$ et $P_2 \circ (K, H) = H$.

On assume que le coégalisateur de (P_1, P_2) est donné par le morphisme $F : 2 \coprod 2 \rightarrow \mathcal{A}$. En effet, tout d'abord on note que l'égalité $F \circ P_1 = F \circ P_2$ est satisfaite pour les objets et concernant les morphismes, c'est aussi le cas puisque $H(z_1) = 0 = H(1_{X_1})$ et les autres cas sont analogues.

Pour la propriété universelle, on considère un foncteur $H : 2 \coprod 2 \rightarrow \mathcal{H}$ comme dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{D} & \xrightarrow[P_2]{P_1} & 2 \coprod 2 \xrightarrow{F} \mathcal{A} \\ & \searrow H & \swarrow L \\ & \mathcal{H} & \end{array}$$

tel que $H \circ P_1 = H \circ P_2$. Dès lors on peut noter que cette dernière condition impose que $H(X_1) = H(X_2) = H(Y_1)H(Y_2)$ et que $H(z_1) = H(1_{X_1})$. Grâce à cette remarque, on peut poser ainsi le foncteur $L : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{H}$ comme $K(*) = H(X_1)$ et $K(1) = H(z_2)$. Cela implique alors que $L \circ F = G$.

Dès lors on a montré que Q n'est pas un épimorphisme régulier et par la même occasion, on a aussi montré que F est un épimorphisme régulier.

Il nous reste à montrer que $G : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$ est aussi un épimorphisme régulier. Considérons les deux foncteurs suivants :

$$F_1 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad n \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } n = 0 \\ 1 & \text{sinon.} \end{cases} \quad \text{et } F_2 : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{A}, \quad n \mapsto n.$$

On affirme que $G = \text{coeg}(F_1, F_2)$. En effet, G coégalise F_1 et F_2 puisque $G \circ F_1(0) = G(0) = 1 = G(0) = G \circ F_2(0)$ et si $n > 0$ $G \circ F_1(n) = G(1) = 0 = G(n) = G \circ F_2(n)$. De plus, considérons un foncteur $H : \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{D}$ tel que $H \circ F_1 = H \circ F_2$. Dès lors, cela implique que $H(1) = H(n)$. Ainsi si on pose comme foncteur $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$; $K(*) = H(*)$ et $K(0) = H(1)$.

2.3. Catégories exactes

Dans la section précédente, on a montré que GRP et $\text{GRP}(\text{TOP})$ sont des catégories régulières. Cependant la catégorie des groupes a une autre propriété que n'a pas la catégorie des groupes topologiques : elle est exacte.

Il existe différentes notions de catégories que l'on appelle exacte mais dans ce texte, on considère la notion d'exactitude dans le sens de Barr. En effet, Barr a introduit cette axiome d'exactitude en 1971 dans [3] et dans [4]. Cette axiome d'exactitude unifie les catégories d'algèbres universelles¹¹ (qui

11. Voir [2, 1.2 Definition].

sont toujours exactes (voir [2, 3.18 Corollary]) avec les topos¹² (qui généralisent les ensembles) et les catégories abéliennes¹³ (qui sont toujours exactes (voir [8, Exemple 5.1.10] et additives (voir [6, Section 1.6])).

On peut maintenant définir la notion de catégorie exacte.

DÉFINITION 2.3.0.1. [6, Definition 2.6.1] Une catégorie *exacte* est une catégorie régulière telle que chaque relation d'équivalence est effective, c'est-à-dire que le coégalisateur q de (r_1, r_2) existe et (r_1, r_2) est la paire noyau de q .

Illustrons cette nouvelle définition dans la catégorie des ensembles.

EXEMPLE 2.3.0.2. [6, Section 2.5] Soit $R \subset A \times A$ une relation d'équivalence sur $A \in \text{SET}$. On peut effectuer le quotient de A par R , cela nous donne le diagramme

$$R \begin{array}{c} \xrightarrow{r_1} \\ \xrightarrow{r_2} \end{array} A \xrightarrow{q} A/R := \{[a] \mid a \in A\},$$

où $[a] = [b]$ si et seulement si aRb . Le coégalisateur de r_1, r_2 est le quotient de A par R , qui n'est rien de plus que q . D'un autre côté, $q(a) = q(a') \iff aRa'$ pour $a, a' \in A$ nous indique que (r_1, r_2) est la paire noyau de q .

EXEMPLE 2.3.0.3. La catégorie des groupes GRP est une catégorie exacte. Comme on a déjà montré que GRP était régulière, il nous suffit de montrer que toute relation d'équivalence est effective. Afin de voir cela, il faut comprendre à quoi correspond une relation d'équivalence R sur un groupe G dans GRP. Bien entendu, c'est une relation d'équivalence sur l'ensemble sous-jacent au groupe comme dans SET, mais de plus R doit être compatible avec la structure de groupe (voir la Définition 2.2.2.2). Autrement dit, on a toujours que le neutre est en relation avec lui-même : eRe ; que si x et y sont en relation il en va de même pour leurs inverses : $xRy \implies x^{-1}R^{-y}$ et de plus, si xRy et uRv , alors R est compatible avec le produit : xRy et $uRv \implies xuRyv$. Par conséquent, l'application quotient $\pi : G \rightarrow G/R$ est un homomorphisme de groupe et $\text{Eq}(\pi) = R$. Dès lors, on a bien que π est la paire noyau de la relation R sur G .

Pour le moment, nous avons montré deux exemples de catégories qui étaient régulières et exacte. Cependant, il existe des exemples de catégories qui sont régulières mais non exactes. Le prochain exemple est dû à l'auteur.

12. Voir [7, Definition 5.1.3].

13. Voir [6, Definition 1.4.1].

EXEMPLE 2.3.0.4. La catégorie des groupes topologiques $\text{GRP}(\text{TOP})$ n'est pas exacte. On sait déjà que $\text{GRP}(\text{TOP})$ est régulière, par conséquent si on trouve un exemple d'une relation d'équivalence qui n'est pas effective alors la catégorie des groupes topologiques ne sera pas exacte.

Considérons l'exemple suivant : soit A un espace possédant au moins deux éléments¹⁴ et soit $R = \nabla_A$ la relation grossière sur A

$$\nabla_A := \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in A \text{ et } a_2 \in A\}.$$

On munit A de la topologie grossière, que l'on note τ_G , et on munit R de la topologie discrète, que l'on note θ . Nous sommes dans le cas suivant :

$$(\nabla_A, \theta) \xrightleftharpoons[r_2]{r_1} (A, \tau_G) \xrightarrow{\pi} (A/\nabla_A, \tau_Q)$$

où τ_Q est la topologie quotient¹⁵ rendant π continue. On sait que $\text{coeg}(r_1, r_2) = \pi$ et on se demande si $\text{Eq}(\pi) = (r_1, r_2)$. Par conséquent, on se demande si $\nabla \sim A \times_{A/\nabla_A} A$. Tout d'abord, on note que A/∇_A est seulement composé de la classe d'équivalence du neutre, $\bar{e}$. Par définition du pullback, on a

$$A \times_{A/\nabla_A} A = \{(a, a') \in A \times A \mid \pi(a) = \pi(a') = \bar{e}\},$$

mais au vu de la relation R tous les éléments sont en relation avec tous les autres et par conséquent, on a bien l'isomorphisme, en tant que groupe, souhaité. Cependant les topologies ne sont pas les mêmes car la topologie de $A \times_{A/\nabla_A} A$ est la topologie de sous-espace de $A \times A$ alors que celle de ∇_A est la topologie discrète. Par conséquent, les deux espaces ne sont pas isomorphes en tant que groupes topologiques.

2.4. Catégories uniales et protomodulaires

Un dernier outil essentiel avant d'introduire la notion de définition de catégories semi-abéliennes est la définition de catégories protomodulaires. On verra cependant que la définition de catégories protomodulaires est assez restrictive et qu'il y existe un cadre plus général que l'on appelle les catégories uniales. Dans cette section, nous donnerons dans un premier temps la définition de catégories uniales, nous donnerons des exemples et des applications dans les objets abéliens qui feront l'objet de la seconde sous-section. Et pour finir, on introduira la notion de catégories protomodulaires dans la

14. Cette condition implique que la topologie grossière de A sera différente de la topologie discrète de A .

15. Pour être précis, c'est également la topologie grossière.

dernières sous-section et on montrera entre autre que toute catégorie proto-modulaire est unitale et normale.

2.4.1. Catégories unitales. On commencera par donner la définition pour ensuite donner des exemples.

DÉFINITION 2.4.1.1. [8, Definition A.4.16] Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant les limites finies. Une famille de morphismes $(f_i: A_i \rightarrow B)_{i \in I}$ avec le même codomaine est *fortement épimorphique* si une des conditions suivantes est satisfaite :

- (1) étant donné un monomorphisme m à travers lequel tous les f_i factorisent :

$$\begin{array}{ccc} A_i & \xrightarrow{f_i} & B \\ & \searrow g_i & \nearrow m \\ & Q & \end{array}$$

m est nécessairement un isomorphisme ;

- (2) étant donné un morphisme h et un monomorphisme m à travers lequel tous les $h \circ f_i$ factorisent :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_i} & B \\ g_i \downarrow & \swarrow t & \downarrow h \\ Q & \xrightarrow{m} & V \end{array}$$

il existe un unique morphisme t rendant tous les diagrammes commutatifs.

On remarque une certaine similitude avec la notion d'épimorphisme extrémale et fort. On rappelle que si une catégorie possède le pullback alors ces deux notions sont équivalentes. C'est pourquoi ici on a deux conditions puisque par hypothèse la catégorie $\mathcal{C}$ est complète.

DÉFINITION 2.4.1.2. [8, Definition 1.2.5] Une catégorie $\mathcal{C}$ est *unitale* quand

- (1) $\mathcal{C}$ est pointée ;
- (2) $\mathcal{C}$ admet les limites finies ;
- (3) pour toute paire d'objets X, Y , la paire $(\langle 1_X, \omega_{X,Y} \rangle, \langle \omega_{X,Y}, 1_Y \rangle)$ est fortement épimorphique.

Le prochain exemple est dû à l'auteur.

EXEMPLE 2.4.1.3. La catégorie des groupes GRP est unitale. En effet, nous savons que les conditions 1 et 2 de la Définition 2.4.1.2 sont satisfaites et il suffit donc de vérifier la condition 3. L'idée de la preuve est inspirée de [8, Theorem 1.2.3]. Soient X et Y des groupes. Soit une factorisation de $\langle 1_X, \omega_{X,Y} \rangle$ à travers un monomorphisme $r: R \rightarrow X \times Y$ comme dans le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\langle 1_X, \omega_{X,Y} \rangle} & X \times Y \\ & \searrow g_x & \nearrow r \\ & R & \end{array}$$

Soit $x \in X$ alors, on note que $\langle 1_X, \omega_{X,Y} \rangle(x) = (x, e)$ or puisque $r(g_x(x)) = (x, e)$ et comme R est un sous-object de $X \times Y$, alors $(x, e) \in R$. De même, soit $y \in Y$, alors on a que $(e, y) \in R$ puisque $r \circ g_Y = \langle \omega_{X,Y}, 1_Y \rangle$. Cependant, on est dans la catégorie des groupes donc $(x, y) \in X \times Y$ peut se décomposer comme le produit suivant $(x, y) = (x, e) \cdot (e, y) \in R$ puisque R est un sous-groupe. Cela montre que r est un isomorphisme de groupes.

Le dernier exemple peut se généraliser aux magmas, aux monoïdes, aux anneaux, ... Cependant on ne peut pas faire la même argumentation dans SET_* ; dès lors, on peut se demander si cette catégorie est unitale ou non. On va montrer qu'elle n'est pas unitale. Le prochain contre-exemple est le fruit d'une discussion entre Mr Van der Linden et de l'auteur.

CONTRE-EXEMPLE 2.4.1.4. Soit un ensemble pointé à deux éléments $X := (\{1, 2\}, 1)$ où 1 est le point de base et soit un autre ensemble à trois éléments $Y := (\{1, 2, 3\}, 1)$ où 1 est le point de base. Alors, si on considère le produit $X \times Y$, ce n'est rien de plus que le produit cartésien donné par $X \times Y = (\{1, 2\} \times \{1, 2, 3\}, (1, 1))$. On note que le produit $X \times Y$ est un ensemble à six éléments. On peut factoriser $\langle 1_X, \omega_{X,Y} \rangle$ et $\langle \omega_{X,Y}, 1_Y \rangle$ à travers le coproduit $X + Y$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\langle 1_X, \omega_{X,Y} \rangle} & X \times Y \\ & \searrow i_X & \nearrow r \\ & X + Y & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} Y & \xrightarrow{\langle \omega_{X,Y}, 1_Y \rangle} & X \times Y \\ & \searrow i_Y & \nearrow r \\ & X + Y & \end{array}$$

On a bien que r est une injection puisque $X + Y = ((X \times \{0\}) \cup (Y \times \{1\})) / \sim$, où $(1, 0) \sim (1, 1)$, possède quatre éléments et donc r est un monomorphisme. Mais r n'est pas un isomorphisme puisque $|X + Y| = 4 < 6 = |X \times Y|$.

On vient de montrer que la catégorie des ensembles pointés n'est pas unitale. On pourrait se demander ce qui se passe dans SET. L'argument précédent reste encore valide mais on peut aussi le montrer en utilisant la notion de groupes internes. Ce sera l'objet de la prochaine section. Bien entendu cette sous-section sur les groupes internes n'a pas pour but premier de donner une autre preuve que SET n'est pas unitale mais bien d'explorer de généraliser le fait suivant dans un cadre catégorique : les sous-groupes de groupes abéliens sont toujours normaux.

2.4.2. Les objets abéliens. Dans cette sous-section, nous allons aborder la notion d'objet commutatif, de structure interne de magmas, de monoïdes et de groupes. Cette section a été inspirée par la référence [11]. Le but de cette sous-section est de donner les concepts pour montrer à la fin de la Section 3.1 que tout sous-objet d'un objet abélien est un sous-objet normale. Dans ce cas si on considère la catégorie des groupes, on retrouve le résultat disant que tout sous-groupe d'un groupe abélien est normal. La définition de sous-objet normaux fera l'objet de la Section 3.1. Dans la suite, on supposera que la catégorie $\mathcal{C}$ admet des limites finies.

DÉFINITION 2.4.2.1. [11, Définition 2.1.1] Un *magma interne unitaire* est la donnée d'un triplet (M, m, e) où $M \in \mathcal{C}$ est un objet, $m : M \times M \rightarrow M$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$ et où $e : 1 \rightarrow M$ où 1 est l'objet terminal et e est tel qu'il rend commutatif les deux triangles :

$$(2.9) \quad \begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\langle 1_M, (e \circ \tau_M) \rangle} & M \times M & \xleftarrow{\langle (e \circ \tau_M), 1_M \rangle} & M \\ & \searrow 1_M & \downarrow m & \swarrow 1_M & \\ & & M & & \end{array}$$

où $\tau_M : M \rightarrow 1$ est l'unique flèche déterminée par l'objet terminal. Un *monoïde interne unitaire* est un magma interne unitaire qui rend le diagramme

$$(2.10) \quad \begin{array}{ccc} M \times M \times M & \xrightarrow{m \times 1_M} & M \times M \\ \downarrow 1_M \times m & & \downarrow m \\ M \times M & \xrightarrow{m} & M \end{array}$$

commutatif.

On note que la Définition 2.4.2.1 copie la définition d'un magma et d'un monoïde au sens algébrique du terme. En effet, un magma est la donnée d'un ensemble N et d'une opération binaire interne (dans la Définition 2.4.2.1) cela

correspond au morphisme m et un magma est unitaire s'il possède un élément neutre e c'est-à-dire que pour tout $x \in N$ $e \cdot x = x = x \cdot e$ (c'est le morphisme e et la condition est exprimée via le diagramme 2.9). Un monoïde est un magma tel que l'opération interne est associative (c'est la condition donnée par le diagramme 2.10).

Cependant, nous savons qu'il existe aussi des magmas et des monoïdes qui sont commutatifs. Pour exprimer cette condition dans un cadre catégorique, on introduit un morphisme spécifique qui porte le nom d'*isomorphisme de torsion* (english : *twist*) .

DÉFINITION 2.4.2.2. [11, §1.9] L'isomorphisme de torsion est l'unique morphisme $tw_{X,Y} : X \times Y \rightarrow Y \times X$ tel que les diagrammes

$$\begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\pi_Y^2} & Y \\ \downarrow tw_{X,Y} & \nearrow \pi_Y^1 & \\ Y \times X & & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X \times Y & \xrightarrow{\pi_X^1} & Y \\ \downarrow tw_{X,Y} & \nearrow \pi_X^2 & \\ Y \times X & & \end{array}$$

commutent.

Dès lors, on peut définir la notion de magma/monoïde interne commutatif.

DÉFINITION 2.4.2.3. [11, Definition 2.1.8] Un magma (respectivement monoïde) (M, m, e) est *commutatif* si le diagramme suivant est commutatif

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{tw_{M,M}} & M \times M \\ & \searrow m \quad \swarrow m & \\ & M & \end{array}$$

où $tw_{M,M}$ est l'isomorphisme de torsion (voir Définition 2.4.2.2).

On remarque intuitivement que c'est exactement ce à quoi correspond la notion d'opérateur commutatif en algèbre général.

Nous avons pour le moment parler de structure interne de magma unitaire et de monoïde interne mais nous n'avons pas encore abordé la notion de structure interne de groupe et de groupe abélien. On rappelle que tout monoïde n'est pas un groupe car il manque la condition d'existence d'un opérateur inverse interne. Nous allons expliciter cette condition en termes de catégories.

DÉFINITION 2.4.2.4. [11, Definition 2.2.2] Un *groupe interne* dans $\mathcal{C}$ est un monoïde interne (M, m, e) tel que le diagramme

$$(2.11) \quad \begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{m} & M \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \tau_M \\ M & \xrightarrow{\tau_M} & 1 \end{array}$$

est un pullback. Un *groupe abélien interne* est un monoïde interne commutatif tel que le diagramme 2.11 est un pullback.

NOTATION 2.4.2.5. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie, on notera par $\text{GRP}(\mathcal{C})$ la sous-catégorie pleine de $\text{MON}(\mathcal{C})$ (la catégorie des monoïdes internes unitaires dans $\mathcal{C}$) dont les objets sont les groupes internes.

REMARQUE 2.4.2.6. Explicitons un peu plus cette notation en montrant que le foncteur d'inclusion $I : \text{GRP}(\mathcal{C}) \rightarrow \text{MON}(\mathcal{C})$ est plein. Tout d'abord, puisque tout groupe est un monoïde et que tout morphisme de groupes est un morphisme de monoïde. On a bien que $\text{GRP}(\mathcal{C})$ est une sous-catégorie de $\text{MON}(\mathcal{C})$. Ensuite, pour se rendre compte que I est plein, il suffit de noter qu'un morphisme de monoïdes entre deux groupes est un morphisme de groupes. De plus, on sait qu'un morphisme de groupes entre deux groupes préservent et l'unité du groupe et les inverses. Dès lors, la structure de groupes est préservée par les morphismes de groupes.

Contrairement aux autres définitions, ce n'est pas évident que cette condition sur le diagramme 2.11 implique l'existence d'un inverse. Pour s'en convaincre nous illustrons cette définition avec un exemple, qui est dû à l'auteur.

EXEMPLE 2.4.2.7. [11, Exercice 2.2.1] Montrons qu'un monoïde (M, m, e) est un groupe si et seulement si le diagramme commutatif 2.11 considéré dans SET est un pullback. Supposons dans un premier temps que (M, m, e) est un groupe, c'est-à-dire que c'est un monoïde avec en plus une opération $\text{inv} : M \rightarrow M ; m \mapsto \text{inv}(m)$ où $\text{inv}(m)$ est l'inverse de m dans le groupe. Pour montrer que le diagramme 2.11 est un pullback on utilise le fait que le diagramme suivant

$$(2.12) \quad \begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{\pi_2} & M \\ \pi_1 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \tau_M \\ M & \xrightarrow{\tau_M} & 1 \end{array}$$

soit un pullback¹⁶. Puisque nous savons que le diagramme 2.12 est un pullback, nous avons l'existence d'un unique morphisme $g : M \times M \rightarrow M \times M$ tel que $\pi_1 \circ g = \pi_1$ et $m \circ g = \pi_2$ (voir le diagramme 2.13)

$$(2.13) \quad \begin{array}{ccccc} M \times M & & & & \\ & \searrow g & & \searrow \pi_2 & \\ & M \times M & \xrightarrow{m} & M & \\ & \downarrow \pi_1 & & \downarrow & \\ & M & \xrightarrow{\quad} & 1 & \end{array}$$

Posons $g = \langle \pi_1, m \circ (\text{inv} \times 1_M) \rangle$. Étant donné que l'on considère les diagrammes dans la catégorie des ensembles, nous pouvons utiliser les éléments pour vérifier les égalités pour la propriété universelle : soit $x, y \in M$, alors on a que $\pi_1 \circ \langle \pi_1, m \circ (\text{inv} \times 1_M) \rangle(x, y) = \pi_1(x, y) = x$ et $m \circ \langle \pi_1, m \circ (\text{inv} \times 1_M) \rangle(x, y) = m(x, m(\text{inv}(x), y)) = m(m(x, \text{inv}(x)), y) = m(e_M, y) = y$ où e_M est le neutre du groupe.

Inversement supposons que (M, m, e) est seulement un monoïde et que le diagramme 2.11 est un pullback. Pour que (M, m, e) possède une structure de groupe nous devons trouver une application inverse, que l'on notera $\text{inv} : M \rightarrow M$. Puisque que l'on sait que le diagramme 2.11 est un pullback nous pouvons trouver un morphisme $h : M \rightarrow M \times M$ tel que $\pi_1 \circ h = \pi_1$ et $m \circ h = \pi_2$ (voir le diagramme 2.14) :

$$(2.14) \quad \begin{array}{ccccc} M & & & & \\ & \searrow h & & \searrow e \circ \tau_M & \\ & M \times M & \xrightarrow{\pi_2} & M & \\ & \downarrow \pi_1 & & \downarrow & \\ & M & \xrightarrow{\quad} & 1 & \end{array}$$

Puisque le carré extérieur commute, on a l'existence d'un tel h . Posons $h = \langle 1_M, \text{inv} \rangle$. Nous avons bien que $\pi_1 \circ \langle 1_M, \text{inv} \rangle = \pi_1$ et pour montrer la seconde égalité nous allons utiliser le fait que l'on considère le diagramme dans les

16. Il est assez facile de montrer que c'est un pullback : cela découle de la définition de l'objet terminal (voir Définition 2.1.2.2.) et de la propriété universelle du produit (voir Définition 2.1.2.13)

ensembles. Soit $x \in M$, alors $m \circ \langle 1_M, \text{inv} \rangle(x, y) = m(x, \text{inv}(x)) = e_M = e \circ \tau_M(x)$ où e_M est l'élément neutre du monoïde.

DÉFINITION 2.4.2.8. [22, Section 3.6] Un *groupe (abélien) interne* est un monoïde (commutatif) (M, m, e) s'il existe une flèche $\zeta : M \rightarrow M$ telle que le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\Delta} & M \times M & \xrightarrow{1_M \times \zeta} & M \times M \\ \tau_M \downarrow & & & & \downarrow m \\ 1 & \xrightarrow{e} & & & M \end{array}$$

où Δ est le morphisme diagonale défini comme $\Delta := \langle 1_M, 1_M \rangle$.

Intuitivement le morphisme ζ envoie un élément $x \in M$ sur son inverse. Dès lors, on peut aussi noter que le morphisme ζ rend le diagramme suivant commutatif :

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\Delta} & M \times M & \xrightarrow{\zeta \times 1_M} & M \times M \\ \tau_M \downarrow & & & & \downarrow m \\ 1 & \xrightarrow{e} & & & M \end{array}$$

La prochaine remarque est due à l'auteur.

REMARQUE 2.4.2.9. Nous avons défini la notion de groupe interne de deux manières via les Définitions 2.4.2.4 et 2.4.2.8. Cependant ces deux définitions sont équivalentes. Nous allons suivre la même démarche que pour l'Exemple 2.4.2.7 mais dans un cadre plus général, c'est-à-dire que l'on se restreint plus seulement au cas où le diagramme 2.11 est dans SET.

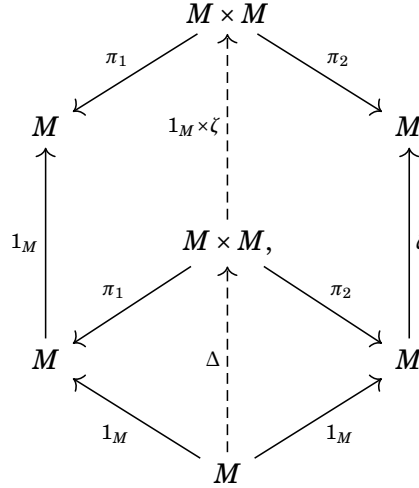
Reprenons comme définition de départ la Définition 2.4.2.4. On veut montrer que cette définition implique l'existence d'un certain morphisme rendant commutatif le diagramme de Définition 2.4.2.8 où (M, m, e) est un monoïde interne au sens de la Définition 2.4.2.1. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} M & \xrightarrow{\tau_M} & 1 & & \\ & \searrow h & \downarrow e & & \\ & M \times M & \xrightarrow{m} & M & \\ & \pi_1 \downarrow & & \downarrow \tau_M & \\ & M & \xrightarrow{\tau_M} & 1 & \end{array}$$

1_M (courbe courbe de M à M)

Puisque $\tau_m = \tau_M \circ e \circ \tau_M = \tau_M \circ 1_M = \tau_M$, il existe un unique morphisme $h : M \rightarrow M \times M$ tel que $\pi_1 \circ h = 1_M$ et $m \circ h = e \circ \tau_M$. Or, puisque h est un morphisme

tel que son codomaine est un produit alors h devrait être de la forme $\langle a, b \rangle$ pour $a : M \rightarrow M$ et $b : m \rightarrow M$ deux morphismes. Dès lors, posons $h := \langle 1_M, \zeta \rangle$ où $\zeta : M \rightarrow M$ est un morphisme. Dès lors, on a bien que $\zeta : M \rightarrow M$ est bien le morphisme tel que $m \circ (\zeta \times 1_m) \circ \Delta = e \circ \tau_M$ puisque par l'unicité du morphisme induit par le produit (voir le diagramme ci-dessous); on a que $\langle 1_M, \zeta \rangle = (1_M \times \zeta) \circ \Delta$.



Inversement, supposons que le monoïde (M, m, e) satisfasse à la Définition 2.4.2.8 et on voudrait montrer que le pullback des morphismes

$$M \xrightarrow{\tau_M} 1 \xleftarrow{\tau_M} M$$

est donné par le diagramme commutatif :

$$(2.15) \quad \begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{m} & M \\ \pi_1 \downarrow & & \downarrow \tau_M \\ M & \xrightarrow{\tau_M} & 1 \end{array}$$

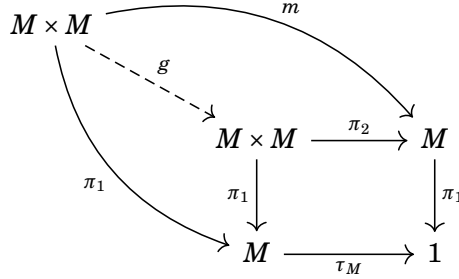
Or, nous savons que la paire noyau de $\tau_M : M \rightarrow 1$ est donnée par le diagramme suivant¹⁷ :

$$\begin{array}{ccc} M \times M & \xrightarrow{\pi_1} & M \\ \pi_2 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \tau_M \\ M & \xrightarrow{\tau_M} & 1 \end{array}$$

Cependant, on sait que le pullback d'une paire de morphismes est défini à isomorphisme près. Donc, si on arrive à trouver un isomorphisme adéquat, on aura montré que le diagramme 2.15 est bien un pullback.

17. Par définition de l'objet terminal, il est commutatif et la propriété universelle découle de celle pour le produit $M \times M$.

En observant le diagramme suivant :



puisque le carré extérieur est commutatif, il existe un unique morphisme $g : M \times M \rightarrow M \times M$ tel que $\pi_1 \circ g = \pi_1$ et $\pi_2 \circ g = m$. Au vu des conditions sur g , on pose $g := \langle \pi_1, m \rangle$. Si on arrive à montrer que g est un isomorphisme, on aura prouvé le résultat souhaité. Posons comme candidat pour $g^{-1} := \langle \pi_1, m \circ (\zeta \times 1_M) \rangle$. On doit montrer que $g \circ g^{-1} = 1_{M \times M} = g^{-1} \circ g$. On va se concentrer sur la première égalité, la seconde sera faite de manière analogue. Pour montrer que $g \circ g^{-1} = 1_{M \times M}$ il faut et il suffit de montrer que les deux égalités suivantes sont satisfaites :

$$\pi_1 \circ g \circ g^{-1} = \pi_1 \circ 1_{M \times M} = \pi_1 \text{ et } \pi_2 \circ g \circ g^{-1} = \pi_2 \circ 1_{M \times M} = \pi_2.$$

La première égalité est assez triviale puisque

$$\begin{aligned}
 \pi_1 \circ g \circ g^{-1} &= \pi_1 \circ \langle \pi_1, m \rangle \circ \langle \pi_1, m \circ (\zeta \times 1_M) \rangle \\
 &= \pi_1 \circ \langle \pi_1, m \circ (\zeta \times 1_M) \rangle = \pi_1.
 \end{aligned}$$

Regardons la seconde équation. Nous devons montrer que

$$(2.16) \quad \pi_2 \circ g \circ g^{-1} = \pi_2 \circ \langle \pi_1, m \rangle \circ \langle \pi_1, m \circ (\zeta \times 1_M) \rangle = m \circ \langle \pi_1, m \circ (\zeta \times 1_M) \rangle = \pi_2.$$

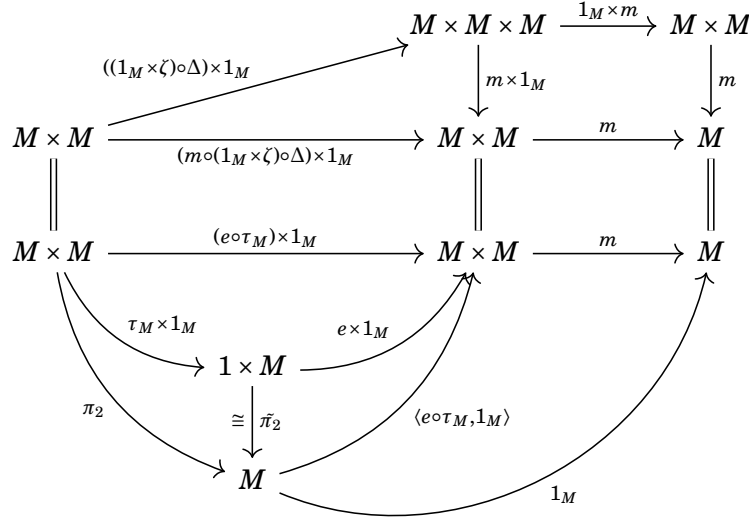
Considérons les diagrammes suivants qui seront utiles pour montrer que l'équation 2.16 est satisfaite :

$$(2.17) \quad
 \begin{array}{ccccc}
 & & M \times M & & \\
 & \swarrow \pi_1 & \uparrow m \times 1_M & \searrow \pi_2 & \\
 M & & & & M \\
 \uparrow m & & & & \uparrow 1_M \\
 M \times M & \xleftarrow{\pi_1} & (M \times M) \times M & \xrightarrow{\pi_2} & M \\
 \uparrow 1_M \times \zeta & & \uparrow & & \uparrow \\
 M \times M & & ((1_M \times \zeta) \circ \Delta) \times 1_M & & 1_M \\
 \uparrow \Delta & & \uparrow & & \\
 M & \xleftarrow{\pi_1} & M \times M & \xrightarrow{\pi_2} & M
 \end{array}$$

Le diagramme 2.17 nous montre que par l'unicité de la flèche induite par le produit $M \times M$ on trouve que

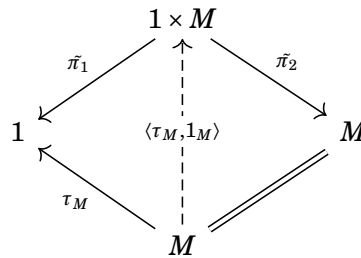
$$(2.18) \quad (m \times 1_M) \circ [(1_M \times \zeta) \circ \Delta] \times 1_M = (m \circ (1_M \times \zeta) \circ \Delta) \times 1_M.$$

(2.19)



Dans le diagramme 2.19, tous les sous-diagrammes commutent :

- Le triangle en haut à gauche commute à cause de l'équation 2.18 ;
- Le carré en haut à droite commute à cause de l'associativité associée au monoïde (M, m, e) ;
- Le carré du milieu à droite commute par définition du morphisme ζ qui est tel que $m \circ (1_M \times \zeta) \Delta = e \circ \tau_M$;
- Pour la partie du dessous, il faut au préalable noter que $(e \circ \tau_M) \times 1_M = (e \times 1_M) \circ (\tau_M \times 1_M)$ par l'unicité du morphisme induite par le produit $M \times M$. Ensuite, pour se convaincre que le reste commute il faut expliciter l'isomorphisme canonique entre $1 \times M$ et M . Regardons le diagramme suivant :



La flèche $\langle \tau_M, 1_M \rangle: M \rightarrow 1 \times M$ est un isomorphisme et admet comme morphisme inverse la projection $\tilde{\pi}_2: 1 \times M$. En effet, on a que

$$\tilde{\pi}_2 \circ \langle \tau_M, 1_M \rangle = 1_M$$

et pour montrer que $\langle \tau_M, 1_M \rangle \circ \tilde{\pi}_2 = 1_{1 \times M}$, il suffit de montrer que :

- $\tilde{\pi}_2 \circ \langle \tau_M, 1_M \rangle \tilde{\pi}_2 = 1_M \circ \tilde{\pi}_2 = \tilde{\pi}_2$,
- et $\tilde{\pi}_1 \circ \langle \tau_M, 1_M \rangle \tilde{\pi}_2 = \tau_M \circ \tilde{\pi}_2 = \tilde{\pi}_1$ (cette dernière égalité est vérifiée par définition de l'objet terminal).

On a montré que l'on a bien un isomorphisme entre M et $1 \times M$ et il est donné par $\tilde{\pi}_2: 1 \times M \rightarrow M$. Dès lors, nous avons bien que $\tilde{\pi}_2 \circ (\tau_M \times 1_M) = \tilde{\pi}_2 \circ \tau_M \circ \pi_1, \pi_2 \rangle = \pi_2$. De plus, nous avons aussi que $e \times 1_M = \langle e \circ \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2 \rangle = \langle e \circ \tau_M, 1_M \rangle \circ \tilde{\pi}_2$ puisque $e \circ \tilde{\pi}_1 = e \circ \tau_M \circ \tilde{\pi}_2$ (par définition de l'objet terminal) et $\tilde{\pi}_2 = 1_M \tilde{\pi}_2$. Et pour finir, puisque (M, m, e) est un monoïde et donc un magma, nous avons que $1_M = m \circ \langle e \circ \tau_M, 1_M \rangle$.

$$(2.20) \quad \begin{array}{ccccc} M & \xleftarrow{\pi_1} & M \times M & \xrightarrow{\pi_2} & M \\ \parallel & & \uparrow 1_M \times m & & \uparrow m \\ M & \xleftarrow{p_1} & M \times (M \times M) & \xrightarrow{p_2} & M \times M \\ \parallel & & \uparrow 1_M \times (\zeta \times 1_M) & & \uparrow \zeta \times 1_M \\ M & \xleftarrow{p_1} & M \times (M \times M) & \xrightarrow{p_2} & M \times M \\ \uparrow \pi_1 & & \uparrow \cong & & \parallel \\ M \times M & \xleftarrow{\tilde{\pi}_1} & (M \times M) \times M & & \\ \uparrow \Delta & & \uparrow \Delta \times 1_M & & \\ M & \xleftarrow{\pi_1} & M \times M & & \end{array}$$

Dans le diagramme 2.20, tous les diagrammes commutent. La plupart commute à cause de la propriété universelle du produit sauf le triangle en bas à gauche. Pour ce dernier, il faut expliciter l'isomorphisme canonique entre $(M \times M) \times M$ et $M \times (M \times M)$. Pour se faire il suffit de montrer que le diagramme suivant est un diagramme commutatif où on reprend les notations

du diagramme 2.20

$$\begin{array}{ccc}
 M \times (M \times M) & \xrightarrow{p_2} & M \times M \\
 \uparrow \langle \pi_1 \circ \tilde{\pi}_1, \langle \pi_2 \circ \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2 \rangle \rangle & & \parallel \\
 (M \times M) \times M & \xrightarrow{\pi_2 \times 1_M} & M \times M \\
 \uparrow \Delta \times 1_M & \nearrow & \\
 M \times M & &
 \end{array}$$

Le carré est commutatif puisque $p_2 \circ \langle \pi_1 \circ \tilde{\pi}_1, \langle \pi_2 \circ \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2 \rangle \rangle = \langle \pi_2 \circ \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2 \rangle = \pi_2 \times 1_M$ par définition du morphisme produit. De plus le triangle est aussi commutatif puisque $(\pi_2 \times 1_M) \circ (\Delta \times 1_M) = (\pi_2 \circ \Delta) \times 1_M = 1_M \times 1_M = 1_{M \times M}$ (toutes les égalités découlent de l'unicité des morphismes induits par les produits et par la définition du morphisme Δ). Pour plus de faciliter, on pose $\varepsilon := \langle \pi_1 \circ \tilde{\pi}_1, \langle \pi_2 \circ \tilde{\pi}_1, \tilde{\pi}_2 \rangle \rangle$

Dès lors, nous avons tous les ingrédients nécessaires pour montrer que l'équation 2.16 est satisfaite : par le diagramme 2.20, nous avons montré que

$$\langle \pi_1, m \circ (\zeta \times 1_M) \rangle = (1_M \times m) \circ (1_M \times (\zeta \times 1_M)) \circ \varepsilon \circ (\Delta \times 1_M),$$

ainsi on obtient l'égalité

$$m \circ \langle \pi_1, m \circ (\zeta \times 1_M) \rangle = m \circ (1_M \times m) \circ (1_M \times (\zeta \times 1_M)) \circ \varepsilon \circ (\Delta \times 1_M),$$

par l'associativité du monoïde (M, m, e) nous obtenons

$$m \circ (1_M \times m) \circ (1_M \times (\zeta \times 1_M)) \circ (\Delta \times 1_M) = m \circ (m \times 1_M) \circ (1_M \times (\zeta \times 1_M)) \circ \varepsilon \circ (\Delta \times 1_M),$$

puisque nous avons l'isomorphisme canonique $\varepsilon : (M \times M) \times M \cong M \times (M \times M)$, on a que $(1_M \times \zeta) \times 1_M = 1_M \times (\zeta \times 1_M) \circ \varepsilon$ et ainsi

$$m \circ (m \times 1_M) \circ (1_M \times (\zeta \times 1_M)) \circ \varepsilon \circ (\Delta \times 1_M) = m \circ (m \times 1_M) \circ ((1_M \times \zeta) \times 1_M) \circ (\Delta \times 1_M),$$

par unicité du morphisme induit, on trouve que $((1_M \times \zeta) \times 1_M) \circ (\Delta \times 1_M) = ((1_M \times \zeta) \circ \Delta) \times 1_M$ et ainsi on trouve

$$m \circ (m \times 1_M) \circ ((1_M \times \zeta) \times 1_M) \circ (\Delta \times 1_M) = m \circ (m \times 1_M) \circ [((1_M \times \zeta) \circ \Delta) \times 1_M],$$

par le diagramme 2.17, on a trouvé l'égalité $(m \times 1_M) \circ [((1_M \times \zeta) \circ \Delta) \times 1_M] = (m \circ (1_M \times \zeta) \circ \Delta) \times 1_M$ et on trouve ainsi

$$m \circ (m \times 1_M) \circ [((1_M \times \zeta) \circ \Delta) \times 1_M] = m \circ ((m \circ (1_M \times \zeta \circ \Delta)) \times 1_M),$$

par définition du morphisme ζ , on obtient l'équation

$$m \circ ((m \circ (1_M \times \zeta \circ \Delta)) \times 1_M) = m \circ ((e \circ \tau_M) \times 1_M)$$

et pour finir le diagramme 2.19 nous donne la conclusion via les dernières égalités ci-dessous :

$$\begin{aligned} m \circ ((e \circ \tau_M) \times 1_M) &= m \circ (e \times 1_M) \circ (\tau_M \times 1_M) \\ &= m \circ \langle e \circ \tau_M, 1_M \rangle \circ \tilde{\pi}_2 \circ (\tau_M \times 1_M) \\ &= m \circ \langle e \circ \tau_M, 1_M \rangle \circ \pi_2 = 1_M \circ \pi_2 = \pi_2 \end{aligned}$$

Il nous reste à montrer l'autre égalité : $g^{-1} \circ g = 1_{M \times M}$. La démarche est assez analogue et il suffit de remarquer que puisque $g^{-1} \circ g = \langle \pi_1, m \circ (\zeta \times 1_M) \circ \langle \pi_1, m \rangle \rangle$, on a que

$$\langle \zeta \circ \pi_1, m \rangle = (1_M \times m) \circ ((\zeta \times 1_M) \times 1_M) \circ (\Delta \times 1_M),$$

où $(\zeta \times 1_M) \times 1_M = (\zeta \times (1_M \times 1_M)) \circ \varepsilon = (\zeta \times 1_{M \times M}) \circ \varepsilon$.

On peut dès lors introduire la notion d'objet abélien :

DÉFINITION 2.4.2.10. Un objet $X \in \mathcal{C}$ est *abélien* si X possède une structure de groupe abélien interne au sens de la Définition 2.4.2.8.

Pour le moment nous avons simplement donné des conditions d'existence pour les monoïdes internes, les groupes internes et les objets abéliens ; mais nous ne savons pas si cette structure est unique. En effet, si on considère la notion de groupes internes dans SET alors, si on considère l'ensemble à six éléments, on peut trouver deux structures de groupes non isomorphes : Sym(3) un groupe non abélien et $\mathbb{Z}/\mathbb{Z}6$ un groupe abélien. On peut dès lors se demander sous quelle(s) condition(s) cette structure interne est unique. La réponse est assez simple : il suffit de demander que $\mathcal{C}$ soit unitale. Avant de montrer ce résultat d'unicité il nous faut introduire une nouvelle définition.

DÉFINITION 2.4.2.11. [8, Definition 1.4.1] Soit $\mathcal{C}$ une catégorie unitale, un objet $X \in \mathcal{C}$ est *commutatif* quand l'identité sur X est centrale. Autrement dit, il existe un morphisme $\phi : X \times X \rightarrow X$ tel que

$$\begin{array}{ccccc} X & & \xrightarrow{1_X} & & X \\ & \searrow \langle 1_X, \omega_{X,X} \rangle & & \searrow \phi & \\ & X \times X & \xrightarrow{\phi} & X & \\ & \nearrow \langle \omega_{X,X}, 1_X \rangle & & \nearrow \phi & \\ X & & \xrightarrow{1_X} & & X \end{array}$$

On notera que si un tel ϕ existe alors il est unique. En effet, si on suppose qu'il existe un autre morphisme $\tilde{\phi}$ rendant commutatif les deux triangles

ci-dessus. Dès lors, par hypothèse, on a que la paire $(\langle \omega_{X,X}, 1_X \rangle, \langle 1_X, \omega_{X,X} \rangle)$ coégalise ϕ et $\tilde{\phi}$. Or, puisque $\mathcal{C}$ est unitale, la paire $(\langle \omega_{X,X}, 1_X \rangle, \langle 1_X, \omega_{X,X} \rangle)$ est conjointement fortement épimorphique, alors $\phi = \tilde{\phi}$.

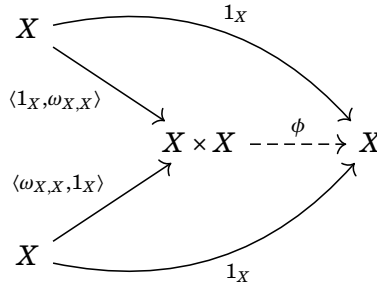
On peut, dès à présent, énoncer le résultat qui nous donne l'unicité dans la structure de magma interne.

THÉORÈME 2.4.2.12. [8, Theorem 1.4.5] *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie unitale. Les conditions suivantes sont équivalentes pour un objet $X \in \mathcal{C}$:*

- (1) X est commutatif;
- (2) X est muni d'une structure de magma interne.

De plus, un objet de $\mathcal{C}$ admet au plus une structure de magma interne.

DÉMONSTRATION. L'objet X est commutatif précisément quand il existe un morphisme rendant le diagramme suivant commutatif :



Les deux triangles commutatifs expriment précisément le fait que le morphisme $\alpha_X = e : 1 \rightarrow X$ est l'unité à gauche et à droite pour la multiplication ϕ . C'est équivalent à dire que ϕ munit X d'une structure de magma interne. Cela montre l'équivalence entre les deux conditions.

Par l'unicité du morphisme ϕ , cela prouve aussi que la multiplication associée à un magma interne est donnée par l'unique morphisme ϕ . $\square$

Par conséquent, si on reprend notre exemple avec SET qui possède deux structures de groupes différentes pour l'ensemble à six éléments alors cela montre bien que SET n'est pas unitale.

Pour mieux comprendre la notion de groupe interne, nous allons illustrer cela via différents exemples. Mais avant, rappelons un résultat qui sera utilisé dans les exemples qui suivent.

LEMME 2.4.2.13 (L'argument de Eckmann-Hilton). *Soit X un ensemble avec deux opérations binaires $*$ et $\bullet$ et supposons que :*

- (1) $*$ et $\bullet$ possèdent toutes les deux des éléments neutres;
- (2) pour tout $a, b, c, d \in X$ $(a * b) \bullet (c * d) = (a \bullet c) * (b \bullet d)$

alors les deux opérations binaires coïncident et elles sont associatives et commutatives.

Avant de passer des exemples, nous allons donner la preuve de ce dernier lemme, qui est due à l'auteur.

DÉMONSTRATION. Montrons que l'unité pour l'opération $*$, que l'on note 1_* , et que l'unité pour l'opération $\bullet$, que l'on notera $1_\bullet$, coïncident. En effet, on a les égalités suivantes par définition de l'unité pour une opération binaire :

$$1_* = 1_* * 1_* = (1_\bullet \bullet 1_*) * (1_* \bullet 1_\bullet)$$

Par la seconde condition du lemme, on trouve

$$(1_\bullet \bullet 1_*) * (1_* \bullet 1_\bullet) = (1_\bullet * 1_*) \bullet (1_* * 1_\bullet)$$

et ainsi, on obtient

$$(1_\bullet * 1_*) \bullet (1_* * 1_\bullet) = 1_\bullet \bullet 1_\bullet = 1_\bullet$$

Puisque l'on a prouvé que $1_\bullet = 1_*$, on notera l'unité par 1 l'unité pour les opérations $\bullet$ et $*$.

Montrons que $*$ est commutatif et que les opérations $*$ et $\bullet$ sont les mêmes. Soit $a, b \in X$. Par la seconde condition du lemme, on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} a * b &= (1 \bullet a) * (b \bullet 1) = (1 * b) \bullet (a * 1) \\ &= b \bullet a = (b * 1) \bullet (1 * a) = (b \bullet 1) * (1 \bullet a) \\ &= b * a \end{aligned}$$

On vient de montrer que $a * b = b \bullet a = b * a$.

Pour finir montrons que $*$ est associative : soit $a, b, c \in X$, on a alors les égalités suivantes :

$$(a * b) * c = (a * b) * (1 * c) = (a * 1) * (b * c) = a * (b * c).$$

□

Les prochains exemples sont dus à l'auteur.

EXEMPLE 2.4.2.14.

- $\text{GRP}(\text{GRP}) = \text{AB}$: soit $(G, \cdot, e_G)$ un groupe possédant une structure de groupes internes, c'est-à-dire que l'on a le quadruplet (G, m, e, ζ) tel que $m : (G, \cdot, e_G) \times (G, \cdot, e_G) \rightarrow (G, \cdot, e_G)$, $e : 0 \rightarrow G$ et $\zeta : G \rightarrow G$ sont des morphismes de groupes. Dès lors, on a que $\cdot$ et m possède des éléments neutres puisque pour $\cdot$ c'est e_G et pour m , c'est déterminé

par e qui est tel que $e \circ \tau_G(x) = e(e_G) = e_G$ pour tout $x \in G$. De plus, on a que puisque m est un morphisme de groupes, alors si on considère $(x, y) \cdot (x', y') = (x \cdot x', y \cdot y') \in G \times G$, on a alors que

$$m((x, y) \cdot (x', y')) = m(x \cdot x', y \cdot y') = m(x, y) \cdot m(x', y').$$

Dès lors, si on applique le Lemme 2.4.2.13, on trouve que $m = \cdot$ et que $\cdot$ est commutatif. Dès lors, cela montre que le groupe $(G, \cdot, e_G)$ de départ était abélien.

- $\text{GRP}(\text{LIE}_{\mathbb{K}}) = \text{VECT}_{\mathbb{K}}$: soit $(\mathfrak{g}, m, e, \zeta)$ un groupe interne dans $\text{LIE}_{\mathbb{K}}$ et où $(\mathfrak{g}, [-, -])$ est une algèbre de Lie. La seule définition possible pour $m : (\mathfrak{g}, [-, -]) \times (\mathfrak{g}, [-, -]) \rightarrow (\mathfrak{g}, [-, -])$ est donnée par $m(X, Y) = Y + X$. En effet $m(X, Y) = m(0 + X, Y + 0) = m((0, Y) + (X, 0)) = m(0, Y) + m(X, 0) = Y + X$ où 0 est le neutre pour l'addition vectorielle et pour m . Or, on demande à ce que m soit un morphisme d'algèbre de Lie. Il faut donc demander en plus que le crochet de Lie soit trivial.

$$\begin{aligned} [X, Y] &= m([X, Y], 0) = m([X, Y], [X, X]) = [m(X, X), m(Y, X)] \\ &= [2X, Y + X] = 2[X, Y] + 2[X, X] = 2[X, Y]; \end{aligned}$$

ainsi $[X, Y] = 0$ pour tout $X, Y \in \mathfrak{g}$.

- $\text{GRP}(\text{RNG}) = \text{AB}$: soit (M, m, e, ζ) un groupe interne dans RNG . Comme pour l'exemple précédent nous avons que la seule possibilité pour $m : M \times M \rightarrow M$, d'être un morphisme d'anneau, est donnée par $m(a, b) = b + a$. En effet, si on note par 0 le neutre pour m et l'addition dans l'anneau unitaire considéré et soit $(a, b) \in M^2$ alors on trouve

$$m(a, b) = m(0 + a, b + 0) = m((0, b) + (a, 0)) = m(0, b) + m(a, 0) = b + a.$$

Or, on sait que l'addition préserve la multiplication, c'est-à-dire que $\forall (a, a', b, b') \in M^4$ alors

$$(a \cdot a') + (b \cdot b') = (a + b) \cdot (a' + b') = a \cdot a' + a \cdot b' + b \cdot a' + b \cdot b'.$$

Cependant si on prend $a' = 0 = b$, on obtient que $0 = a \cdot b'$ et ainsi on trouve que la multiplication est triviale. Dès lors, M n'est rien de plus qu'un groupe abélien pour l'addition.

2.4.3. Catégories protomodulaires. On va définir la notion de catégorie protomodulaire d'une manière similaire au catégorie unitale.

DÉFINITION 2.4.3.1. [11, Definition 4.1.1] Soit $\mathcal{C}$ une catégorie finiment complète et pointée. Si pour tout épimorphisme scindé $X \xrightleftharpoons[s]{f} Y$ tel que $f \circ s = 1_Y$, alors la paire de monomorphisme suivante :

$$Y \xrightarrow{s} X \xleftarrow{\ker(f)} K[f]$$

est une paire conjointement fortement épimorphique.

Au delà de la similitude entre les définitions de catégories protomodulaires et uniales, on peut se demander si l'une des deux définitions n'implique pas l'autre. C'est bien le cas.

PROPOSITION 2.4.3.2. *Toute catégorie protomodulaire est uniale.*

La démonstration du résultat est due à l'auteur.

DÉMONSTRATION. Il suffit de montrer que la paire de morphisme

$$X \xrightarrow{\langle 1_X, \omega_{X,Y} \rangle} X \times Y \xleftarrow{\langle \omega_{X,Y}, 1_Y \rangle} Y$$

soit conjointement fortement épimorphique. Notons que, puisque

$$\pi_X \circ \langle 1_X, \omega_{X,Y} \rangle = 1_X$$

alors π_X est un épimorphisme scindé avec comme scindage $\langle 1_X, \omega_{X,Y} \rangle$. Puisque $\mathcal{C}$ est protomodulaire, on a que la décomposition suivante

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{\langle 1_X, \omega_{X,Y} \rangle} & X \times Y & \xleftarrow{\ker(\pi_X)} & K[\pi_X] \\ & \searrow s_1 & \uparrow m & \swarrow s_2 & \\ & & R & & \end{array}$$

où m est un monomorphisme, implique que m est un isomorphisme par protomodularité. Or, le noyau de la projection $\pi_X : X \times Y \rightarrow X$ est donné par le morphisme $\langle \omega_{X,Y}, 1_Y \rangle : Y \rightarrow X \times Y$. Cela conclut la preuve. $\square$

Étant donné que nous avons déjà montré que la catégorie GRP est une catégorie uniale, on peut se demander si elle est aussi protomodulaire. C'est le cas. Le prochain exemple est le fruit d'une discussion entre Mr Van der Linden et de l'auteur.

EXEMPLE 2.4.3.3. Montrons que la catégorie des groupes est une catégorie uniale. Soit $X \xrightleftharpoons[s]{f} Y$ une paire de morphisme de groupes telle que $f \circ s = 1_Y$. On veut montrer que $Y \xrightarrow{s} X \xleftarrow{\ker(f)} K[f]$ est une

paire fortement conjointement épimorphique. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & \xrightarrow{s} & X & \xleftarrow{\ker(f)} & K[f] \\
 & \searrow & \uparrow m & \swarrow & \\
 & & R & &
 \end{array}$$

où m est un monomorphisme. Dès lors, $R \cong R$ si et seulement si on peut écrire un élément $x \in X$ avec des éléments $s(Y)$ et $\ker(f)(K[f])$. Or, on sait que $s \circ f(x) \in s(Y)$ et $s \circ f(x)^{-1} \cdot x \in K[f]$ puisque $f(s(f(x)^{-1}) \cdot x) = f(x)^{-1} \cdot f(x) = e_X$. Dès lors, on peut conclure que $x = (s \circ f(x)) \cdot ((s \circ f(x))^{-1})$.

On pourrait se demander si la réciproque est vraie. Mais avant de donner un contre-exemple, montrons que toute catégorie protomodulaire est normale. Le prochain lemme et la démonstration sont dus à une collaboration entre Mr Van der Linden et l'auteur.

LEMME 2.4.3.4. *Toute catégorie protomodulaire est normale.*

DÉMONSTRATION. La preuve consiste à démontrer deux résultats :

- (1) tout épimorphisme scindé est normal ;
- (2) tout épimorphisme régulier est normal.

L'objectif de la preuve est de démontrer le point deux. Mais pour ce faire, nous aurons besoin du point un¹⁸. Montrons le premier point. Soit $f : X \rightarrow Y$ un épimorphisme scindé avec comme scindage $s : Y \rightarrow X$ c'est-à-dire que $f \circ s = 1_Y$. Soit $k = \ker(f)$ le noyau de f , alors on veut montrer que $f = \text{coeg}(k, \omega_{X,Y})$. Regardons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z & \xleftarrow{g} & X \\
 & & \uparrow g & & \uparrow s \\
 K[f] & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow[f]{s} & Y
 \end{array}$$

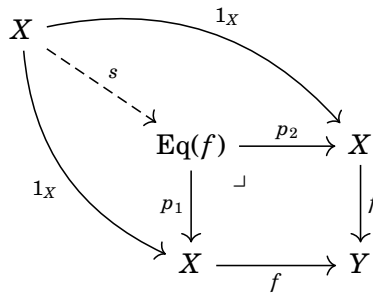
Il est évident que f coégalise k et $\omega_{X,Y}$. Regardons la propriété universelle. Soit $g : X \rightarrow Z$ tel que $g \circ k = \omega_{K,Z}$. On veut montrer que $g \circ s : Y \rightarrow Z$ satisfait $(g \circ s) \circ f = g$. Or, on sait que par protomodularité la paire (k, s) est conjointement fort et il suffit donc de vérifier que :

- $(g \circ s) \circ f \circ k = (g \circ s) \circ \omega_{K,Y} = \omega_{K,Z} = g \circ k$;
- $(g \circ s) \circ f \circ s = g \circ s$.

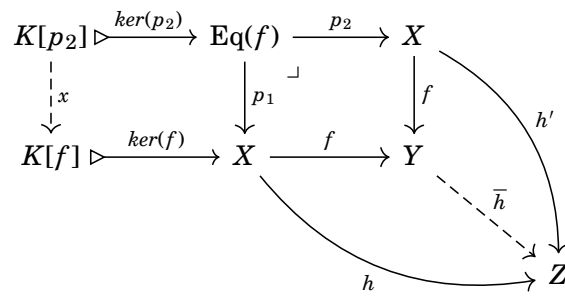
18. On rappelle que ce n'est pas toujours vrai (voir l'Exemple 2.2.1.13).

Cela prouve que nous avons bien une factorisation de g à travers f mais nous ne savons rien sur l'unicité de cette factorisation. Supposons qu'il existe un autre morphisme $\tilde{g} : Y \rightarrow Z$ tel que $\tilde{g} \circ f = g$ alors on a que $\tilde{g} \circ f \circ s = \tilde{g} = g \circ s$. Cela montre l'unicité.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que tout épimorphisme régulier est normal. Soit $f : X \rightarrow Y$, alors on peut trouver un scindage pour chaque morphisme associé au pullback comme le montre le diagramme suivant :



En effet par la propriété universelle du pullback, il existe un unique morphisme $s : X \rightarrow \text{Eq}(f)$ tel que $p_1 \circ s = 1_X$ et $p_2 \circ s = 1_X$. On a alors deux épimorphismes scindés qui sont aussi normaux par le point (1) de la preuve. Un fait surprenant est que le diagramme associé à la paire noyau est aussi un pushout. En effet, la commutativité du diagramme découle de la commutativité associée au pullback. En ce qui concerne la propriété universelle, on va considérer le diagramme suivant :



où $x : K[p_2] \rightarrow K[f]$ est l'unique flèche induite par la noyau de f tel que $\ker(f) \circ f = p_1 \circ \ker(p_2)$. Soient h et h' deux morphismes tels que $h' \circ p_2 = h \circ p_1$, alors $h = h \circ p_1 \circ s = h \circ p_2 \circ s = h'$. Dès lors, puisque f est un épimorphisme régulier tel que $f = \text{coeg}(p_1, p_2)$, alors il existe un unique morphisme $\bar{h} : Y \rightarrow Z$ tel que $h = \bar{h} \circ f = h'$. Cela prouve que c'est bien un pushout.

Pour terminer la preuve, on veut montrer que f est le conoyau de son noyau. Pour cela, il suffit de vérifier la propriété universelle liée au conoyau.

Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 K[p_2] & \xrightarrow{\ker(p_2)} & \text{Eq}(f) & \xrightarrow{p_2} & X \\
 \downarrow x & & \downarrow p_1 & \lrcorner & \downarrow f \\
 K[f] & \xrightarrow{\ker(f)} & X & \xrightarrow{f} & Y \\
 & & \downarrow l & \nearrow \bar{l} & \\
 & & W & &
 \end{array}$$

(A dashed arrow $\bar{l}$ also goes from Y to W , and a dashed arrow $\bar{l}$ goes from X to W .)

où $l : X \rightarrow W$ est tel que $l \circ \ker(f) = \omega_{K,W}$. Dès lors, nous avons que $\omega_{K[p_2],W} = l \circ \ker(f) \circ x = (l \circ p_1) \circ \ker(p_2)$. Or, puisque p_2 est un épimorphisme scindé et donc un épimorphisme normale, $p_2 = \text{coker}(\ker(p_2))$. Ainsi par la propriété universelle du conoyau il existe un unique morphisme $\tilde{l} : X \rightarrow W$ tel que $l \pi_1 = \tilde{l} \circ p_2$. Dès lors, par la propriété universelle du pushout, il existe un unique morphisme $\bar{l} : Y \rightarrow W$ tel que $\bar{l} \circ f = l$. $\square$

On peut donc donner un exemple d'une catégorie qui est unitale mais non protomodulaire.

EXEMPLE 2.4.3.5. Soit MON la catégorie des monoïdes. On sait que cette catégorie est unitale¹⁹. Or on sait, par l'Exemple 2.2.1.13, que MON n'est pas une catégorie normale et donc elle n'est pas protomodulaire.

Comme pour beaucoup de choses en mathématiques, il existe plusieurs manières de définir la notion de protomodularité et donc en fonction du contexte, il y a certaines définitions qui sont plus utiles à facile que d'autres²⁰. Cependant, dans la suite nous allons souvent utiliser un lemme assez bien connu qui est une manière équivalente pour définir la notion de catégorie protomodulaire. Mais dans la suite, on considérera ce lemme comme une conséquence de la définition de protomodularité.

DÉFINITION 2.4.3.6. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie pointée. Le *lemme des cinq court scindé* est vrai dans $\mathcal{C}$ quand étant donné un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccccccc}
 0 & \longrightarrow & A & \rightrightarrows^u & B & \xrightleftharpoons[p]{q} & C & \longrightarrow & 0 \\
 \parallel & & \downarrow a & & \downarrow b & & \downarrow c & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & A' & \rightrightarrows_v & B' & \xrightleftharpoons[t]{q} & C' & \longrightarrow & 0
 \end{array}$$

19. Voir l'Exemple 2.4.1.3.

20. Voir le Théorème [11, Theorem 4.2.2].

où q, p sont des épimorphismes scindés

$$p \circ s = 1_C, \quad q \circ t = 1_{C'}$$

avec respectivement comme noyaux

$$u = \ker(p), \quad v = \ker(q).$$

Si a et c sont des isomorphismes, alors b est aussi un isomorphisme.

Nous avons montré que toute catégorie protomodulaire est unitale et normale. Cependant, on peut aussi lier la notion de catégories protomodulaires et les catégories Mal'tsev.

LEMME 2.4.3.7. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie protomodulaire et exacte, alors $\mathcal{C}$ est une catégorie de Mal'tsev.*

Mais avant de faire la preuve (voir page 84), nous avons besoin de certains résultats intermédiaires. Le prochain résultat et la démonstration associée sont le fruit d'une collaboration entre Mr Van der Linden et de l'auteur.

LEMME 2.4.3.8. *Dans une catégorie régulière, protomodulaire et pointée, si le diagramme suivant*

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{f} & Y \longrightarrow 0 \\ & & \downarrow p & & \downarrow q & & \parallel \\ 0 & \longrightarrow & K' & \xrightarrow{k'} & X' & \xrightarrow{f'} & Y \longrightarrow 0 \end{array}$$

est un morphisme de suites exactes courtes où p est un épimorphisme régulier, alors q aussi.

DÉMONSTRATION. Considérons dans un premier temps la factorisation de q dans une catégorie régulière. C'est-à-dire qu'il existe un épimorphisme régulier $r : X \rightarrow I$ et un monomorphisme $m : I \rightarrow X'$ tel que $q = m \circ r$. Si on considère la pullback de m et k' comme dans le diagramme de gauche

$$\begin{array}{ccc} I' & \xrightarrow{\tilde{k}} & I \\ \bar{m} \downarrow & \lrcorner & \downarrow m \\ K' & \xrightarrow{k'} & X' \end{array} \quad \begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{k} & IX \\ \bar{r} \downarrow & \lrcorner & \downarrow r \\ I' & \xrightarrow{\tilde{k}} & I \end{array}$$

alors $\bar{m}$ est un monomorphisme. De plus, si on considère le pullback de r et $\tilde{k}$ comme dans le diagramme de droite ci-dessus, alors par régularité de la

catégorie on sait, que $\bar{r}$ est un épimorphisme régulier. Or, puisque par hypothèse p est déjà un épimorphisme régulier et puisque $p = \bar{m} \circ \bar{r}$, alors $\bar{m}$ est un isomorphisme. Dès lors si on montre que le diagramme

$$(2.21) \quad \begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & I' & \xrightarrow{\tilde{k}} & I & \xrightarrow{f' \circ m} & Y & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow \bar{m} & \lrcorner & \downarrow m & & \parallel & & \\ 0 & \longrightarrow & K' & \xrightarrow{k'} & X' & \xrightarrow{f'} & Y & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

est une suite exacte courte, alors on aura par le Lemme des cinq court scindé (voir le Lemme 2.4.3.6) que q est un épimorphisme régulier puisque m sera un isomorphisme.

Le seul condition à vérifier dans le diagramme 2.21 est de montrer que $\tilde{k}$ est le noyau de $f' \circ m$. Tout d'abord notons que $f' \circ m \circ \tilde{k} = f' \circ k' \circ \bar{m} = 0$. Ensuite, considérons un morphisme $z : Z \rightarrow I$ tel que $f' \circ m \circ z = 0$. Alors par la propriété universelle du noyau de f' , il existe un unique morphisme $t : Z \rightarrow K'$ tel que $m \circ z = k' \circ t$. Or, par la propriété universelle du pullback, il existe un unique morphisme $\tilde{t} : Z \rightarrow I'$ tel que $z = \tilde{k} \circ \tilde{t}$. Cela montre la propriété universelle du noyau de $f' \circ m$ et par la même occasion. $\square$

Le prochain lemme et la démonstration sont dus à une collaboration entre Mr Van der Linden et de l'auteur.

LEMME 2.4.3.9. *Dans une catégorie régulière, protomodulaire et pointée, l'image régulière d'une relation d'équivalence est une relation d'équivalence.*

DÉMONSTRATION. Soit (R, r_1, r_2) une relation d'équivalence sur X et soit $f : X \rightarrow Y$ un épimorphisme. Posons la relation (S, s_1, s_2) par le carré commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\bar{f}} & S \\ \downarrow \langle r_1, r_2 \rangle & & \downarrow \langle s_1, s_2 \rangle \\ X \times X & \xrightarrow{f \times f} & Y \times Y \end{array}$$

Étant donné que $\langle s_1, s_2 \rangle \circ \bar{f}$ est la factorisation de $(f \times f) \circ \langle r_1, r_2 \rangle$ par un épimorphisme régulier suivi d'un monomorphisme, alors cela montre que S est une relation sur Y .

Puisque R est une relation réflexive, il existe un morphisme $e : X \rightarrow R$ tel que $\langle r_1, r_2 \rangle \circ e = \Delta_X$. Dès lors, on a le carré extérieur commutatif

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\bar{f} \circ e} & S \\ f \downarrow & \nearrow e_S & \downarrow \langle s_1, s_2 \rangle \\ Y & \xrightarrow{\Delta_Y} & Y \times Y \end{array}$$

où f est un épimorphisme fort. Dès lors, puisque $\langle s_1, s_2 \rangle$ est un monomorphisme, il existe un morphisme $e_S : Y \rightarrow S$ tel que les deux triangles commutent. Cela montre que S est aussi une relation réflexive.

Nous allons utiliser un procédé similaire pour montrer la symétrie et la transitivité de la relation S . En effet, puisque R est une relation symétrique, alors il existe un morphisme $\tau : S \rightarrow R$ tel que $\langle r_1, r_2 \rangle = \langle r_2, r_1 \rangle \circ \tau$. Dès lors, on a le carré extérieur commutatif

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\bar{f} \circ \tau} & S \\ \bar{f} \downarrow & \nearrow \sigma & \downarrow \langle s_1, s_2 \rangle \\ S & \xrightarrow{\langle s_1, s_2 \rangle} & Y \times Y \end{array}$$

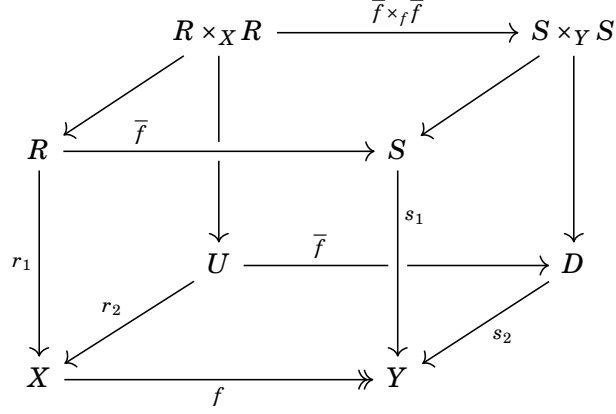
et puisque $\bar{f}$ est un épimorphisme fort, alors il existe un morphisme σ rendant commutatif les deux triangles.

Pour montrer la transitivité de S , il suffit de montrer que $\bar{f} \times_f \bar{f} : R \times_X R \rightarrow S \times_Y S$ est un épimorphisme régulier. Car, si tel est le cas, alors la transitivité de S découle de la transitivité de R :

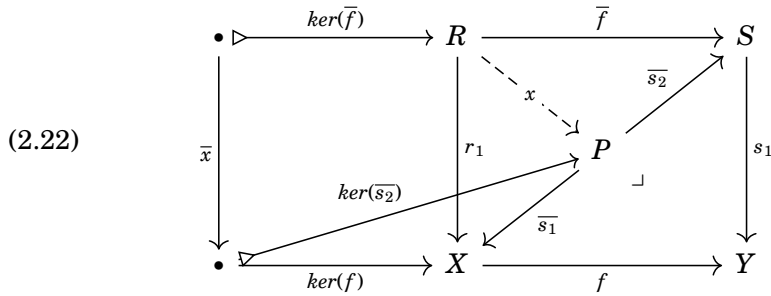
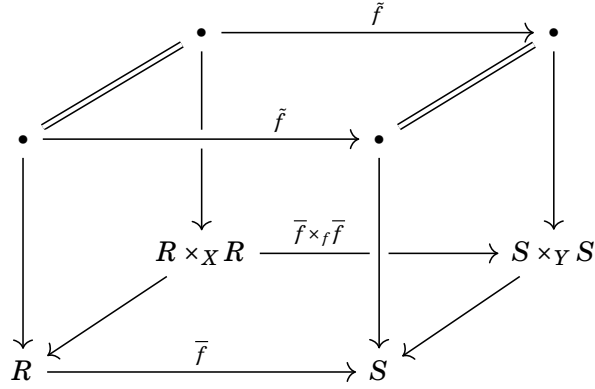
$$\begin{array}{ccccc} R \times_X R & \xrightarrow{t} & R & \xrightarrow{\bar{f}} & S \\ \bar{f} \times_f \bar{f} \downarrow & & & \nearrow \bar{t} & \downarrow \langle s_1, s_2 \rangle \\ S \times_Y S & \xrightarrow{\quad} & & & Y \times Y \end{array}$$

où le morphisme t est le morphisme associé à la transitivité de R .

Considérons les diagrammes suivants

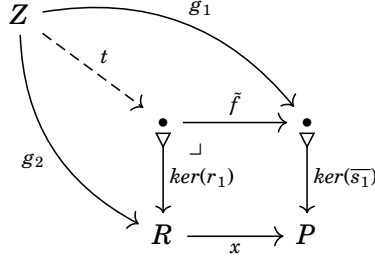


où les faces sur les cotés droits et gauches sont des pullbacks,



Si on regarde le diagramme 2.22, on note que puisque r_1 est un épimorphisme scindé, alors $\bar{x}$, qui est l'unique morphisme rendant commutatif le carré de gauche, est aussi un épimorphisme scindé. Par réflexivité de R , on sait qu'il existe un morphisme $\delta : X \rightarrow R$ tel que $r_1 \circ \delta = 1_X$. Dès lors, on note que $\delta \circ \ker(f) \circ \bar{f} = 0$. Par conséquent, par la propriété universelle du noyau de $\bar{f}$, il existe un unique morphisme t tel que $\delta \circ \ker(f) = \ker(\bar{f}) \circ t$. Or, on sait que

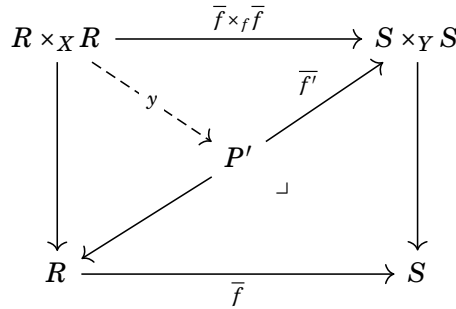
$\ker(f) \circ \bar{x} = r_1 \circ \ker(\bar{f})$, et si on post-compose avec δ , on obtient $\ker(\bar{f}) \circ \bar{x} \circ t = \ker(\bar{f})$. Cependant, puisque $\ker(\bar{f})$ est un monomorphisme, alors on obtient ainsi $\bar{x} \circ t = 1$. De plus considérons le carré supérieur dans le diagramme



On affirme que ce dernier est un pullback. Dès lors par régularité de la catégorie considérée, on obtient que $\tilde{f}$ est aussi un épimorphisme régulier. Montrons que c'est bien un pullback. Il suffit de vérifier la propriété universelle puisque la commutativité découle de la définition du morphisme x . Soit une paire de morphismes g_1, g_2 tels que $\ker(\bar{s}_1) \circ g_1 = x \circ g_2$. Dès lors, on obtient $\bar{s}_1 \circ x \circ g_2 = \bar{s}_1 \circ \ker(\bar{s}_1) \circ g_1 = 0$. Par la propriété universelle du noyau de $\bar{s}_1$, il existe un unique morphisme $t : Z \rightarrow \bullet$ tel que $g_2 = \ker(r_1) \circ t$. De plus, puisque $\ker(\bar{s}_1)$ est un monomorphisme et que l'on a l'égalité :

$$\ker(\bar{s}_1) \circ g_1 = x \circ g_2 = x \circ \ker(r_1) \circ t = \ker(\bar{s}_1) \circ \tilde{f} \circ t,$$

ainsi on a montré que le morphisme t est tel que $g_1 = \tilde{f} \circ t$ et que donc le morphisme t est le morphisme associé à la propriété universelle du pullback.



Si on considère le diagramme ci-dessus, alors on trouve bien que y est un épimorphisme régulier, par une preuve analogue à celle pour montrer que x est un épimorphisme régulier, on a alors que $\bar{f} \times_f \bar{f}$ est un épimorphisme car c'est la composition de deux épimorphismes réguliers dans une catégorie régulière. $\square$

Le prochain résultat est le fruit d'une collaboration entre Mr Van der Linden et de l'auteur.

PROPOSITION 2.4.3.10. *Dans une catégorie protomodulaire, pointée et exacte, l'image régulière d'une relation d'équivalence est une relation d'équivalence effective.*

Tous les résultats précédents étaient des préparatifs pour montrer qu'un certain axiome est vrai dans une catégorie protomodulaire, pointée et exacte. Cet axiome est

(A2) l'image régulière d'un noyau est un noyau.

Comme mentionné, cet axiome est appelé dans la littérature et sera appelé par la suite : l'axiome (A2). Le prochain résultat est dû à une discussion entre Mr Van der Linden et l'auteur.

PROPOSITION 2.4.3.11. *Dans une catégorie protomodulaire, pointée et exacte, l'axiome (A2) est vrai.*

La preuve sera faite plus loin (voir page 111) car nous avons besoin d'avoir des résultats concernant les noyaux et la normalité. Nous avons maintenant assez de résultats pour aborder la preuve concernant les catégories exactes et protomodulaires et les catégories de Mal'tsev (voir le Lemme 2.4.3.7). Cette preuve est le fruit d'une collaboration entre Mr Van der Linden et l'auteur.

PREUVE DU LEMME 2.4.3.7. Soit (R, d_1, d_2, δ) une relation réflexive sur X . Soit q le coéglisateur de la paire (d_1, d_2) . Alors, on a le pushout suivant²¹

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{d_1} & X \\ d_2 \downarrow & \lrcorner & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{q} & Q \end{array}$$

Puisque d_2 est un épimorphisme scindé et par le Lemme 2.4.3.4, on a que d_2 est le conoyau de son noyau k . L'image i de k par d_1 , un épimorphisme régulier, est un noyau par la Proposition 2.4.3.11

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{p} & I \\ k \downarrow & & \downarrow i \\ R & \xrightarrow{d_1} & X \end{array}$$

On affirme que q est le conoyau de q . En effet, il suffit de vérifier la propriété universelle puisque comme p est un épimorphisme régulier et donc un épimorphisme, alors $q \circ i \circ p = 0$ implique que $q \circ i = 0$. Vérifions la propriété universelle. Soit $f : X \rightarrow Z$ tel que $f \circ i = 0$. Dès lors, on a que $f \circ i \circ p = f \circ d_1 \circ k =$

21. Voir [11, Exercice 1.10.4].

0. Or, puisque d_2 est le conoyau de k , alors il existe un unique morphisme $\tilde{f} : X \rightarrow Z$ tel que $\tilde{f} \circ d_2 = f \circ d_1$. De plus, par la propriété universelle du pushout, il existe un unique morphisme $\hat{f} : Q \rightarrow Z$ tel que $f = \hat{f} \circ i$. Puisque i est un noyau et puisque q est le conoyau de i , alors i est le noyau de q .

On vérifie que p est un monomorphisme. Puisque R est une relation alors la paire (d_1, d_2) est une paire conjointement monomorphisme. De plus, on note que $d_1 \circ k = d_2 \circ k = 0$. Cela nous montre que $d_1 \circ k$ est un monomorphisme. Ainsi, on a que $d_1 \circ k = i \circ p$ est un monomorphisme et donc, p est un monomorphisme.

Il s'en suit que puisque p est un monomorphisme et un épimorphisme régulier, alors c'est un isomorphisme. Regardons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{d_1} & X \\
 \downarrow d_2 & \searrow r & \uparrow q \\
 & P & \\
 & \swarrow \bar{q} & \downarrow q \\
 X & \xrightarrow{q} & Q
 \end{array}$$

⊥

où r est l'unique morphisme induit par la propriété universelle du pullback.

On trouve un morphisme de suites exactes courtes scindées

$$\begin{array}{ccccccc}
 0 & \longrightarrow & I & \xrightarrow{\ker(\bar{q})} & P & \xrightarrow{\bar{q}} & X \longrightarrow 0 \\
 & & \uparrow p & & \uparrow r & & \parallel \\
 0 & \longrightarrow & K & \xrightarrow{k} & R & \xrightarrow{d_2} & X \longrightarrow 0
 \end{array}$$

Ainsi par le Lemme des cinq scindés (voir le Lemme 2.4.3.6), r est un isomorphisme et donc R est la paire noyau de q et donc R est une relation d'équivalence puisque toute paire noyau est une relation d'équivalence (voir le Lemme 2.1.3.6). $\square$

2.5. Catégories semi-abéliennes

Maintenant que nous avons défini les catégories régulières, exactes, unital et protomodulaires, nous disposons de tout le matériel nécessaire afin d'introduire le concept de catégories semi-abéliennes.

DÉFINITION 2.5.0.1. [8, Definition 5.1.1] Une catégorie $\mathcal{C}$ est *semi-abélienne* quand

- (1) $\mathcal{C}$ est pointée;
- (2) $\mathcal{C}$ est exacte;

- (3) $\mathcal{C}$ est protomodulaire ;
- (4) $\mathcal{C}$ admet les coproduits finis.

Avec ce que l'on a montré dans les sections précédentes de ce chapitre, on peut déjà donner des exemples et des contre-exemples.

EXEMPLE 2.5.0.2. La catégorie des groupes est semi-abélienne. En effet, on sait que GRP est pointée (voir Exemple 2.1.2.3), exacte (voir Exemple 2.3.0.3), protomodulaire (voir Exemple 2.4.3.3) et admet les coproduits finis (il suffit de considérer le produit libre).

CONTRE-EXEMPLE 2.5.0.3. La catégorie des groupes topologiques n'est pas semi-abélienne car elle n'est pas exacte. La catégorie des ensembles et la catégorie des monoïdes n'est pas semi-abélienne car elle n'est pas protomodulaire. La catégorie des espaces topologiques n'est pas semi-abélienne car elle n'est pas pointée et pas régulière.

On peut aussi faire un résumé des propriétés qui découlent des catégories exactes et protomodulaires pour mettre en lumière les propriétés que possèdent les catégories semi-abéliennes.

REMARQUE 2.5.0.4. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie semi-abélienne alors :

- (1) $\mathcal{C}$ est complète (par la Définition 2.2.0.1 et la Définition 2.3.0.1) ;
- (2) $\mathcal{C}$ admet la factorisation « épimorphisme régulier - monomorphisme » (par la Définition 2.3.0.1 et le Théorème 2.2.2.16) ;
- (3) $\mathcal{C}$ est unitale et normale (par la Proposition 2.4.3.2 et le Lemme 2.4.3.4). Et donc dans $\mathcal{C}$, les épimorphismes extrémaux, forts, régulier et normaux coïncident (par la Définition 2.2.1.12, par la Proposition 2.2.1.8 et le Corollaire 2.2.2.17) ;
- (4) $\mathcal{C}$ est de Mal'tsev (par le Lemme 2.4.3.7) ;
- (5) $\mathcal{C}$ est une catégorie *homologique*, c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ est pointée, protomodulaire et régulière (voir [11, Définition 5.4.1]) ;
- (6) $\mathcal{C}$ est une catégorie *idéaux déterminés* (eng. *ideal-determined*), c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ satisfait aux conditions :
 - $\mathcal{C}$ a une factorisation « épimorphisme normal - monomorphisme » qui est stable par pullback (par la Définition 2.2.0.1, par le Théorème 2.2.2.16 et par le Lemme 2.4.3.4) ;
 - les images régulières de noyaux sont des noyaux (par le Lemme 2.4.3.11).

Concernant les deux derniers points, on peut trouver plus de détails dans [23, Section 3].

Première notion de normalité

Ce chapitre inspiré de l'article [23] a pour but d'énoncer la notion de sous-objet normaux dans des catégories finiment complètes. Afin de voir à quoi le sous-objet normal correspond dans des catégories concrètes telles que SET ou GRP, nous allons avoir besoin de la notion de noyau et d'expliquer toutes les différentes variantes qui existent pour la notion d'épimorphismes. Ces différentes notions d'épimorphismes seront utiles pour comprendre les concepts de catégories régulières et exactes. On rappelle que la discussion des différentes notions d'épimorphismes à déjà fait l'objet d'une section dans le Chapitre 2 (voir Section 2.2.1). Toutes ces notions, introduites dans le Chapitre 2, seront utilisées dans la preuve de la proposition qui montre le lien entre la notion de sous-groupe normal et de sous-objet normal dans la catégorie des groupes. On expliquera aussi le lien entre noyau et sous-objet normal puisque l'on sait (voir Proposition 1.1.0.5) que dans GRP les deux notions sont similaires.

3.1. Sous-objet normal

Dans la catégorie des groupes, un sous-groupe normal H d'un groupe G est avant tout un sous-groupe de G . On peut exprimer cette notion de sous-objet en catégories :

DÉFINITION 3.1.0.1. [5, Definition 4.1.1] [1, Definition 7.79] Soit une catégorie $\mathcal{C}$ et un objet A de $\mathcal{C}$.

- Deux monomorphismes $f : R \rightarrowtail A$ et $g : S \rightarrowtail A$ sont *équivalents* quand il existe un isomorphisme $\tau : R \xrightarrow{\cong} S$ tel que $g \circ \tau = f$. Une classe d'équivalence de monomorphismes avec codomaine A est appelée un *sous-objet* de A .
- Un sous-objet représenté par $f : R \rightarrowtail A$ de A est dit *plus petit que* $g : S \rightarrowtail A$, noté $R \leq S$, s'il existe un morphisme (nécessairement unique), nécessairement un monomorphisme, $h : R \rightarrow S$ tel que $f = g \circ h$.

Dans GRP, le monomorphisme associé au sous-groupe H est l'inclusion qui est bien une flèche de GRP car c'est un homomorphisme de groupes.

REMARQUE 3.1.0.2. Au vu de la définition précédent, on peut se poser la question suivant : que se passe-t-il si on a deux sous-objets R et S d'un même objet A tel que $R \leq S$ et $S \leq R$? Notre intuition nous dit que R et S sont les mêmes et donc qu'il existerait un isomorphisme $R \xrightarrow{\cong} S$ puisque les deux objets seraient équivalents. Regardons en détails ce qu'il se passe. Soit $f : R \rightarrowtail A$ et $g : S \rightarrowtail A$ deux monomorphismes. Puisque $R \leq S$, il existe un monomorphisme $h : R \rightarrowtail S$ tel que $f = g \circ h$. Inversement puisque $S \leq R$, il existe un monomorphisme $k : S \rightarrowtail R$ tel que $g = f \circ k$. Dès lors, on obtient que $f = g \circ h = (f \circ k) \circ h$ et comme f est un monomorphisme, on trouve que $1_R = k \circ h$. En appliquant un argument similaire, on obtient que $1_S = h \circ k$. Ces deux équations impliquent que h est un isomorphisme. Dès lors, notre intuition ne nous a pas trompé puisque cela prouve que R et S sont équivalents.

EXEMPLE 3.1.0.3. Montrons qu'il y a une bijection entre les sous-objets dans la catégorie SET et les sous-ensembles. L'idée de la preuve est tirée de [1].

Soit B un ensemble. Soient $\mathcal{B}$ les parties de B et $\mathcal{S}(B)$ la classe de tous les sous-objets de B . Par la définition de sous-objet, on sait qu'un sous-objet est caractérisé par un objet A et un monomorphisme $m : A \rightarrowtail B$. On notera alors par le couple (A, m) le sous-objet A de B associé au monomorphisme m . Définissons une fonction $H : \mathcal{S}(B) \rightarrow \mathcal{P}(B) ; (A, m) \mapsto m(A)$. On a alors

- (A, m) et (A', m') sont isomorphes si et seulement si $m(A) = m'(A')$. En effet, par définition (A, m) et (A', m') sont isomorphes si et seulement si il existe un isomorphisme $\phi : A \rightarrowtail A'$ tel que $m = m' \circ \phi$. Comme on sait que dans la catégorie des ensembles SET, les isomorphismes ne sont rien de plus que les bijections entre ensembles, on a alors que l'existence de ce ϕ est équivalent à $m(A) = m'(\phi(A)) = m'(A')$.
- $(A, m) \leq (A', m')$ si et seulement si $m(A) \subseteq m'(A')$. Il suffit d'utiliser la définition de H , la définition de sous-objet plus petit qu'un autre et la définition d'inclusion pour des ensembles pour montrer l'équivalence.

On a alors montré que les sous-objets de B dans SET correspondent bijectivement aux sous-ensembles de B .

Il est temps de donner la définition de sous-objet normal en terme d'objets et de morphismes. On attire l'attention sur le fait que cette notion de normalité en catégories a été introduite pour des catégories avec des limites finies par Bourn dans [10]. Par conséquent dans la suite, on va considérer seulement des catégories $\mathcal{C}$ finement complètes.

DÉFINITION 3.1.0.4. [8, Definition 3.2.1] Soit (R, r_1, r_2) une relation d'équivalence sur un objet Y de $\mathcal{C}$. On dit qu'un morphisme $f : X \rightarrow Y$ est *normal* à la relation R quand il existe un morphisme $\tilde{f} : X \times X \rightarrow R$ tel que les diagrammes suivants sont des pullbacks :

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{\tilde{f}} & R \\ \downarrow 1_{X \times X} & \lrcorner & \downarrow \langle r_1, r_2 \rangle \\ X \times X & \xrightarrow{f \times f} & Y \times Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{\tilde{f}} & R \\ \downarrow \pi_1 & \lrcorner & \downarrow r_1 \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

Il est commun de noter le morphisme $\langle r_1, r_2 \rangle$ par r .

La prochaine remarque est due à une discussion entre Mr Van der Linden et l'auteur.

REMARQUE 3.1.0.5. Le premier diagramme nous est utile pour la commutativité car la propriété universelle est immédiate puisque r est un monomorphisme. Tout d'abord montrons qu'effectivement r est un monomorphisme. Si on a deux autres morphismes f et g tels que $r \circ f = r \circ g$, alors on a $r_i \circ f = p_i \circ r \circ f = p_i \circ r \circ g = r_i \circ g$ pour $i \in \{1, 2\}$ et comme la paire (r_1, r_2) est conjointement monomorphique, on a que $f = g$.

Montrons que la propriété universelle du diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{\tilde{f}} & R \\ \parallel & & \downarrow r \\ X \times X & \xrightarrow{f} & Y \times Y \end{array}$$

est immédiate. En effet, soit $f_1 : Z \rightarrow R$ et $f_2 : Z \rightarrow X \times X$ tel que $r \circ f_1 = f \circ f_2$ alors on aimerait trouver $v : Z \rightarrow X \times X$ tel que $v \circ 1_{X \times X} = f_2$ et tel que $\tilde{f} \circ v = f_1$. Par la première égalité, on voit que v doit être égale à f_2 . On a en effet que $f_2 = 1 \circ v = 1 \circ f_2 = f_2$ et de plus, on a que $f_1 = \tilde{f} \circ v$. En effet, comme r est un monomorphisme, on a

$$f_1 = \tilde{f} \circ v = \tilde{f} \circ f_2 \iff r \circ f_1 = r \circ \tilde{f} \circ f_2 = f \circ id \circ f_2 = f \circ f_2.$$

On a, dès lors, montré l'existence et l'unicité de la flèche v .

Afin de mieux comprendre ce nouvel objet, il est utile de voir à quoi cela correspond dans GRP. On rappelle que cette catégorie est bien finement complète. Il est donc intéressant de voir à quoi correspondent des sous-objets normaux dans celle-ci. Mais pour se faire, on a besoin d'un résultat dans la catégorie des ensembles¹ (notée SET) :

LEMME 3.1.0.6. [8, Lemma 3.2.3] *Dans la catégorie SET, un sous-objet $X \hookrightarrow Y$ est normal à une relation d'équivalence R sur Y quand X est une classe d'équivalence par rapport à la relation R .*

DÉMONSTRATION. Posons $f = i$ dans la Définition 3.1.0.4, où i est l'inclusion canonique. Premièrement, on note que $\tilde{i}$ est aussi un monomorphisme car i en est un (voir Lemme 3.1.0.7). Par conséquent, on peut voir $i : X \rightarrow Y$ comme $X \subseteq Y$ et $\tilde{i} : X \times X \rightarrow R$ comme $X \times X \subseteq R$. Observons les deux diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{\tilde{i}} & R \\ \downarrow 1_{X \times X} & \lrcorner & \downarrow r \\ X \times X & \xrightarrow{i \times i} & Y \times Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X \times X & \xrightarrow{\tilde{i}} & R \\ \downarrow \pi_1 & \lrcorner & \downarrow r_1 \\ X & \xrightarrow{i} & Y \end{array}$$

et en tirer les conclusions souhaitées. Regardons le premier diagramme. Car $X \times X = \{(x_1, x_2) \mid x_i \in X \ i \in \{1, 2\}\}$, la commutativité du diagramme nous dit, que si $(x_1, x_2) \in X \times X$:

$$(x_1, x_2) = (i \times i) \circ 1_{X \times X}(x_1, x_2) = r \circ \tilde{i}(x_1, x_2) = r(x_1, x_2) \iff (x_1, x_2) \in R \iff x_1 R x_2.$$

Par conséquent, le premier pullback nous dit que si $x_1, x_2 \in X$, alors $x_1 R x_2$; c'est-à-dire que tous les couples d'éléments de X sont en relation.

Regardons à présent le second pullback. La commutativité de celui-ci nous dit que, si on considère le couple $(x, y) \in X \times Y$ tel que $x R y$ (c'est-à-dire que $(x, y) \in R$), alors $y \in X$. En effet, on se rappelle que par définition du pullback, on a que

$$X \times X = \{(x, (y_1, y_2)) \in X \times Y \times Y \mid x = i(x) = r_1(y_1, y_2) = y_1\} \cong \{(x, y_2) \in X \times Y \mid x R y_2\},$$

cela prouve bien que si $x R y$ avec $x \in X$ et $y \in Y$, alors $y \in X$.

Résumons ce que l'on vient de montrer :

- $\forall x, x' \in X, (x, x') \in R$; autrement dit X est contenu dans une classe d'équivalence ;

1. On rappelle que c'est une catégorie finiment complète.

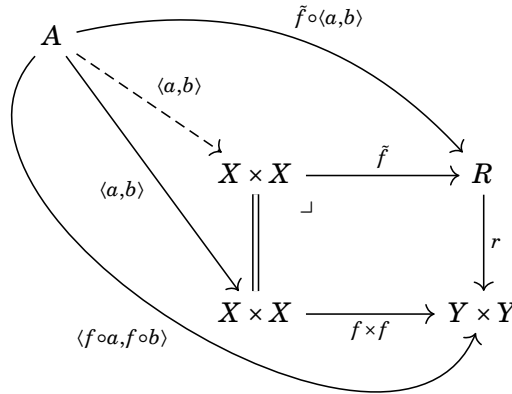
- $\forall x \in X, \forall y \in Y$ tel que si $(x, y) \in R$, alors $y \in X$; autrement dit il n'y a rien d'autre que les éléments de X dans cette classe.

Par conséquent, $X = [x] := \{y \in Y \mid xRy\}$ pour un certain $x \in X$. En effet, si on prend $y \in [x]$, alors nécessairement $y \in Y$ et xRy ; et par conséquent $y \in X$. Inversement, si on considère $x_1 \in X$, alors par le premier point, x_1Rx et par conséquent $x_1 \in [x]$. $\square$

D'autres exemples suivront par la suite. Mais pour le moment il est utile d'étudier certaines propriétés des sous-objets normaux. La première est de montrer que l'on a bien des sous-objets au sens catégorique du terme et pour cela il faudrait que f dans la Définition 3.1.0.4 soit un monomorphisme. Heureusement c'est le cas.

LEMME 3.1.0.7. [8, Lemma 3.2.2] *Dans les conditions de la Définition 3.1.0.4, le morphisme f est nécessairement un monomorphisme.*

DÉMONSTRATION. On veut montrer que si on a deux flèches $a, b : A \rightrightarrows X$ telles que $f \circ a = f \circ b$, alors $a = b$. Pour montrer cela, on a besoin des deux diagrammes de la Définition 3.1.0.4. Considérons le diagramme suivant où on utilise le premier diagramme pour la normalité de f :



Par la propriété universelle du produit $X \times X$, on a le morphisme $\langle a, b \rangle : A \rightarrow X \times X$ et par hypothèse, il existe un morphisme $(f \circ a, f \circ b) : A \rightarrow Y \times Y$ tel que $(f \times f) \circ \langle a, b \rangle = \langle f \circ a, f \circ b \rangle$.

Utilisons à présent le second pullback qui découle de la normalité de f :

$$(3.1) \quad \begin{array}{ccccc} & & & \tilde{f} \circ \langle a, b \rangle & \\ & & & \searrow & \\ A & & & & R \\ & \swarrow \langle a, b \rangle & & & \downarrow r_1 \\ & X \times X & \xrightarrow{\tilde{f}} & & \\ & \downarrow \pi_1 & \lrcorner & & \\ & X & \xrightarrow{f} & Y & \\ & \uparrow a & & & \end{array}$$

On note que $f \circ a = r_1 \circ \tilde{f} \circ \langle a, b \rangle$. En effet, par la commutativité du premier diagramme on a que :

$$\langle f \circ a, f \circ b \rangle = (f \times f) \circ \langle a, b \rangle = r \circ \tilde{f} \circ \langle a, b \rangle,$$

ainsi en précomposant avec la première projection, on obtient l'égalité

$$f \circ a = \pi_1 \circ (f \times f) \circ \langle a, b \rangle = \pi_1 \circ r \circ \tilde{f} \circ \langle a, b \rangle = r_1 \circ \tilde{f} \circ \langle a, b \rangle.$$

En utilisant la propriété universelle du pullback, on a l'existence d'une unique flèche $\langle a, b \rangle : A \rightarrow X \times X$ telle que $\pi_1 \circ \langle a, b \rangle = a$ et $\tilde{f} \circ \langle a, b \rangle = \tilde{f} \circ (a, b)$ (voir sur le diagramme (3.1)). Cependant ce n'est pas la seule flèche qui rend commutatif les deux triangles du diagramme (3.1).

En effet, le morphisme $\langle a, a \rangle$ aussi fait commuter les deux triangles. Pour montrer cela on utilise le fait que r est un monomorphisme et l'hypothèse de départ, ainsi on a les égalités suivantes :

$$\begin{aligned} r \circ \tilde{f} \circ \langle a, b \rangle &= (f \times f) \circ \langle a, b \rangle \\ &= \langle f \circ a, f \circ b \rangle \\ &= \langle f \circ a, f \circ a \rangle \\ &= (f \times f) \circ \langle a, a \rangle \\ &= r \circ \tilde{f} \circ \langle a, a \rangle. \end{aligned}$$

Comme r est un monomorphisme, on obtient que $\tilde{f} \circ \langle a, b \rangle = \tilde{f} \circ \langle a, a \rangle$. Par conséquent, on peut remplacer $\tilde{f} \circ \langle a, b \rangle$ par $\tilde{f} \circ \langle a, a \rangle$ dans le raisonnement précédent. Par la propriété universelle, on a une deuxième flèche $\langle a, a \rangle : A \rightarrow X \times X$. Or, par unicité on a que les deux flèches coïncident : $\langle a, a \rangle = \langle a, b \rangle$. Cela montre bien que $a = b$ car il suffit de prendre la projection sur la seconde coordonnée pour obtenir le résultat. $\square$

COROLLAIRE 3.1.0.8. *Dans les conditions de la Définition 3.1.0.4, le morphisme $\tilde{f}$ est un monomorphisme.*

La preuve découle du Lemme 3.1.0.7 et en appliquant le fait que les monomorphismes sont pullbacks stables (voir [5, Proposition 2.5.3]), on a le résultat souhaité.

Dans le Chapitre 1, on avait rappelé que dans les groupes tout noyau est un sous-groupe normal (voir Exemple 1.1.0.2). On peut dès lors se demander si ce fait général est aussi vrai dans les catégories. La réponse à cette question est l'objet du prochain lemme.

LEMME 3.1.0.9. [8, Exemple 3.2.5] *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie pointée qui admet des limites finies et $g : A \rightarrow B$ un morphisme arbitraire. Le noyau*

$$\ker(g) : K[g] \rhd \longrightarrow A$$

est normal pour la paire noyau $\text{Eq}(g)$ de g .

Avant de faire la preuve, rappelons que nous avons montré que toute paire noyau d'un morphisme est bien une relation d'équivalence (voir Lemme 2.1.3.6). Dès lors pour montrer le résultat il suffit de prouver que les diagrammes de la Définition 3.1.0.4 sont bien des pullbacks.

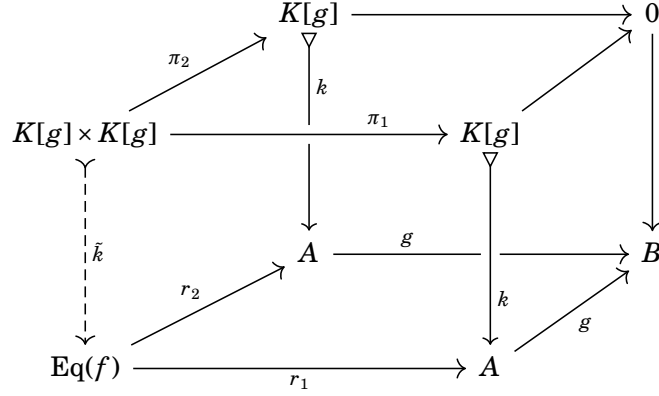
DÉMONSTRATION. Supposons que l'on a le diagramme 2.3 et que l'on veut montrer que les diagrammes suivants

$$\begin{array}{ccc} K[g] \times K[g] & \xrightarrow{\tilde{k}} & \text{Eq}(g) \\ \parallel & & \downarrow \langle r_1, r_2 \rangle \\ K[g] \times K[g] & \xrightarrow[k \times k]{} & A \times A \end{array} \quad \begin{array}{ccc} K[g] \times K[g] & \xrightarrow{\tilde{k}} & \text{Eq}(g) \\ \downarrow \pi_1 & & \downarrow r_1 \\ K[g] & \xrightarrow[k]{} & A \end{array}$$

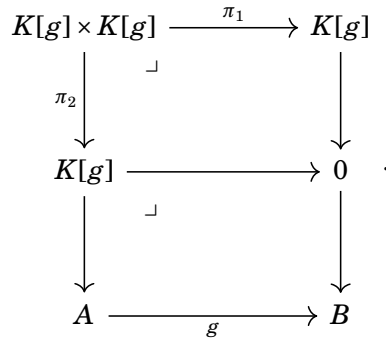
sont des pullbacks, où $k = \ker(g)$ est le noyau du morphisme $f : A \rightarrow B$ et où $(\text{Eq}(g), r_1, r_2, A)$ est la relation paire noyau de g sur A . Commençons par montrer que le deuxième diagramme est un pullback. Pour cela, on veut montrer que le diagramme extérieur est un pullback :

$$(3.2) \quad \begin{array}{ccc} K[g] \times K[g] & \xrightarrow{\pi_1} & K[g] \\ \downarrow \tilde{k} & & \downarrow k \\ \text{Eq}(g) & \xrightarrow{r_1} & A \\ \downarrow r_2 & \lrcorner & \downarrow g \\ A & \xrightarrow{g} & B \end{array} .$$

Afin d'arriver à prouver cela, on va utiliser un autre diagramme qui est équivalent au précédent et qui est un pullback. Pour cela, on va visualiser l'équivalence entre les diagrammes via le cube suivant :



où les faces avant et en dessous sont les diagrammes montrés plus haut. On choisit $\tilde{k}$ tel que le diagramme de la face avant commute. Le cube nous montre que le diagramme est équivalent au diagramme qui est composé des faces du dessus et arrière du cube. Autrement dit le diagramme suivant



On note que le diagramme du dessous est un pullback via la définition du produit et que le diagramme du dessus en est un aussi car k est le noyau de f . Par [5, Proposition 2.5.9], le diagramme extérieur est un pullback. Cela finit la preuve car en utilisant la même proposition, on montre que le seconde diagramme de la condition de normalité de k est bien un pullback.

Pour le premier diagramme, il suffit de montrer qu'il est commutatif (grâce à la remarque 3.1.0.5). Autrement dit, on veut montrer que $\langle r_1, r_2 \rangle \circ \tilde{k} = \langle k \circ \pi_1, k \circ \pi_2 \rangle = k \times k$. Mais si on se rappelle de la définition de $\tilde{k}$ et du fait que les projections du produits sont conjointement monomorphiques, alors la commutativité suit directement. $\square$

Nous savons que dans la théorie des groupes tout sous-groupe d'un groupe abélien est normal. On peut, dès lors, se demander si c'est encore le cas dans les catégories. La réponse est affirmative ; ce sera l'objet du prochain résultat. Pour cela, on se rappelle de la définition d'objet abélien dans une catégorie (voir Définition [2.4.2.10](#)).

Le prochain résultat est dû à une collaboration entre Mr Van der Linden et l'auteur.

LEMME 3.1.0.10. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie admettant les limites finies, pointée et de Mal'tsev. Alors tout sous-objet d'un objet abélien est normal.*

La preuve sera faite dans le prochain chapitre puisque nous avons besoin d'introduire la notion de sous-objet semi-normal. Mais nous reviendrons à la démonstration dès que nous aurons assez de matériel pour la faire (voir page [112](#)).

3.2. Approfondissement du lien entre noyau et sous-objet normal

On a déjà montré que dans la catégorie des ensembles, les sous-objets normaux correspondent à des classes d'équivalence (voir Lemme [3.1.0.6](#)). Mais il est intéressant de se poser la question suivante : qu'en est-il dans la catégorie des groupes ? Est-ce que les sous-groupes normaux correspondent aux sous-objets normaux comme les sous-ensembles avec les sous-objets ? La réponse est oui. Dès lors, le premier objectif de cette section sera d'illustrer ce fait. Afin d'étoffer notre catalogue d'exemples concernant les sous-objets normaux, nous explorerons aussi l'exemple des anneaux et des algèbres de Lie. Un deuxième objectif de cette section est de voir le lien entre la notion de noyau et le concept de sous-objet normal. Nous savons déjà que tout noyau d'un morphisme est un sous-objet normal (voir le Lemme [3.1.0.9](#)). Or, on sait que la réciproque est vraie dans les groupes. Dès lors, nous allons voir sous quelles hypothèses nous avons une équivalence entre la notion de noyau et sous-objet normal. Et pour comprendre l'utilité des hypothèses de ce dernier résultat, nous allons donner un exemple d'un sous-objet normal qui n'est pas un noyau.

Il est temps de montrer que la notion de sous-groupe normal et de sous-objet normal coïncident dans la catégorie des groupes. La démonstration est inspirée de [[8](#), Exemple 3.2.10].

LEMME 3.2.0.1. [[8](#), Exemple 3.2.10] *Dans la catégorie des groupes, les sous-objets normaux sont les sous-groupes normaux.*

DÉMONSTRATION. Supposons que le sous-groupe $H \rhd G$ soit normal pour la relation d'équivalence/congruence R sur G . Puisque la catégorie des groupes est exacte (voir Exemple 2.3.0.3) alors R est la paire noyau du quotient $\pi : G \twoheadrightarrow G/K$ où K est la classe d'équivalence de $e \in G$ pour la congruence R . En effet, on rappelle qu'une congruence dans les groupes est univoquement déterminée par la classe d'équivalence du neutre. Or, H est une classe d'équivalence pour R (voir 3.1.0.6) et comme H est un sous-groupe de G , nécessairement $e \in H$. Par conséquent, $K = H$ et H est un sous-groupe normal.

Inversement, supposons que H est un sous-groupe normale. Soit $g : G \rightarrow G/H$ le quotient de G modulo H . On a déjà montré que le noyau d'un morphisme est toujours normal pour la relation d'équivalence engendrée par la paire noyau (voir 3.1.0.9). Par conséquent, le noyau $\ker(g) : K[g] \rightarrow A$ de g est normal pour la relation $\text{Eq}(g)$. Or, on sait que le noyau de g est H . On vient alors de montrer que $H = K[g]$ et donc que H est un sous-objet normal de G . $\square$

LEMME 3.2.0.2. [8, Exemple 3.2.11] *Dans les anneaux, les sous-objets normaux sont les idéaux.*

La preuve est analogue à celle pour le Lemme précédent.

Nous avons déjà montré que la notion de noyau impliquait la notion de sous-objet normal (voir proposition 3.1.0.9) mais on pourrait se demander si la réciproque est vraie? La réponse est oui mais dans certains cas. Tout d'abord donnons un contre-exemple. Pour cela nous avons besoin de la notion de groupe abélien interne défini à la page 65.

CONTRE-EXEMPLE 3.2.0.3. [8, Counterexample 3.2.19] Dans la catégorie des groupes topologiques, un sous-objet $K \subset G$ est un noyau quand K est un sous-groupe normal de G muni de la topologie induite. Il existe des sous-objets normaux qui ne sont pas des noyaux. Dans $\text{GRP}(\text{TOP})$, le noyau $K[f] \rhd G$ d'un homomorphisme continu $f : G \rightarrow H$ est un noyau (au sens théorie des groupes) muni de la topologie induite par celle de G . Tout sous-groupe normal équipé de la topologie induite est le noyau de son conoyau muni de la topologie quotient. En effet, soit $k : (H, \tau) \rightarrow (G, \tau_\theta)$ un sous-groupe normal à (G, τ_G) et où τ est la topologie induite par τ_G . Soit $\pi : (G, \tau_G) \rightarrow (G/H, \tau_Q)$ où τ_Q est la topologie quotient. Nous savons déjà que $\ker(k) = \pi$. On aimerait montrer que $k = \text{coker}(\pi)$ et pour cela il faut vérifier les deux conditions qui définissent un conoyau :

- $\pi \circ k = 0 \circ k = 0$ qui est déjà satisfait si on note que $\ker(k) = \pi$;
- On doit vérifier la propriété universelle. Pour cela, on considère le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc}
 (H, \tau) & \xrightarrow{k} & (G, \tau_G) & \xrightarrow[\quad 0 \quad]{\pi} & (G/H, \tau_Q) \\
 & & \uparrow f & \nearrow i & \\
 & & (G', \tau_{G'}) & &
 \end{array}$$

Supposons f tel que $\pi \circ f = 0$. Cela implique $G' \leq (\pi) = H$ ainsi par la propriété universelle du quotient il existe un morphisme de groupe $i : G' \rightarrow H$ tel que $f = k \circ i$. Il nous faut encore vérifier que cette flèche i soit continue car il faut que ce soit un morphisme de la catégorie $\text{GRP}(\text{Top})$. Soit $U \in \tau$, on aimerait savoir si $i^{-1}(U) \in \tau_{G'}$. Or on sait qu'il existe $V \in \tau_G$ tel que $U = k^{-1}(V)$ et par définition de i , nous avons que

$$i^{-1}(U) = i^{-1}k^{-1}(V) = (k \circ i)^{-1}(V) = f^{-1}(V) \in \tau_{G'} \text{ puisque } f \text{ est continue.}$$

Si on met ensemble les deux remarques, on conclut que $k = \text{coker}(\pi) = \text{coker}(\ker(k))$.

On veut exhiber un exemple d'un sous-objet normal qui n'est pas un noyau. Pour cela, considérons un groupe topologique abélien² (A, θ) où θ n'est pas la topologie discrète. Reprenons le même groupe abélien A mais on le munit cette fois-ci avec la topologie discrète θ_0 . Grâce à la topologie θ_0 , on a que l'inclusion $(A, \theta_0) \hookrightarrow (A, \theta)$ est une fonction continue et on a par conséquent que (A, θ_0) est un sous-objet de (A, θ) dans la catégorie des groupes topologiques. Etant donné que l'objet (A, θ) est abélien, on a alors que le sous-objet $(A, \theta_0) \hookrightarrow (A, \theta)$ est normal (voir Lemme 3.1.0.10). Cependant ce sous-objet n'est pas un noyau par la première partie. En effet, on sait que la seule possibilité est $k = \text{coker}(\ker(k))$. Déterminons le noyau de k . Par les points précédents, on sait que $\pi = \ker(k)$ où π est la projection canonique comme le montre le diagramme :

$$(A, \theta_0) \xrightarrow{k} (A, \theta) \xrightarrow{\pi} (e, \theta_Q),$$

où θ_Q est la topologie quotient. Il ne reste plus qu'à montrer que k ne peut pas être le conoyau de π . Supposons que ce soit le cas. Par conséquent k doit

2. On pourrait prendre, par exemple, les réels $\mathbb{R}$.

satisfaire à la propriété universelle pour le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 (A, \theta_0) & \xrightarrow{k} & (A, \theta) & \xrightarrow{\pi} & (e, \theta_Q) \\
 & \nwarrow i & \uparrow q & & \\
 & & (G, \tau) & &
 \end{array}$$

où q est tel que q coégalise π et 0. La propriété universelle nous assure l'existence d'un morphisme i tel que $q = k \circ i$. Cependant, au vu des topologies, nous n'avons pas que la flèche i est continue et par conséquent, la propriété universelle n'est pas satisfaite et donc, k n'est pas le noyau de son conoyau. Par le Lemme 2.1.2.12, nous savons dès lors que k n'est pas un noyau.

On vient de montrer que dans les groupes topologiques, noyau et sous-objet normal ne sont pas les mêmes alors que dans les groupes c'est le cas. On peut alors se demander quand les deux notions sont équivalentes. La prochaine proposition répond à cette question.

PROPOSITION 3.2.0.4. [8, Proposition 3.2.20] *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie exacte et pointée. Soit $f : X \rightarrow Y$ un monomorphisme, si f est normal pour une relation d'équivalence (R, r_1, r_2) sur Y alors f est un noyau.*

Si de plus $\mathcal{C}$ est une catégorie normale, alors le morphisme pour lequel f est un coégalisateur est unique à isomorphisme près et la relation pour laquelle f est normale est aussi unique à isomorphisme près.

DÉMONSTRATION. Supposons que $f : X \rightarrow Y$ est un sous-objet normal de Y pour la relation d'équivalence (R, r_1, r_2, Y) . On a, par définition, les deux diagrammes

$$\begin{array}{ccc}
 X \times X & \xrightarrow{\tilde{f}} & R \\
 \downarrow 1_{X \times X} & \lrcorner & \downarrow r \\
 X \times X & \xrightarrow{f \times f} & Y \times Y
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 X \times X & \xrightarrow{\tilde{f}} & R \\
 \downarrow p_X & \lrcorner & \downarrow r_1 \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

qui sont des pullbacks. On aimerait trouver un morphisme tel que f serait le noyau de ce morphisme. Un candidat serait de considérer le coégalisateur de R , $q : Y \rightarrow Q$ qui existe par exactitude de $\mathcal{C}$. Par conséquent, on veut montrer

que le diagramme

$$(3.3) \quad \begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{f} & Y \\ \tau_X \downarrow & & \downarrow q \\ 0 & \xrightarrow{\alpha_Q} & Q \end{array}$$

est un pullback. Pour cela, il faut vérifier les deux conditions de la définition : la commutativité du diagramme et la propriété universelle.

Commençons par la commutativité du diagramme 3.3. On sait que $r \circ \tilde{f} = f \times f$

$$\begin{array}{ccccc} & X \times X & \xrightarrow{\tilde{f}} & R & \\ & \parallel & & \downarrow r & \\ X & \xrightarrow{(1,0)} & X \times X & \xrightarrow{f \times f} & Y \times Y \end{array}$$

et cela implique, on a que $r \circ \tilde{f} \circ (1,0) = (f \times) \circ (1,0) = (f, 0)$. De plus, on sait par définition de r que $\pi_1 \circ r = r_1$ et $\pi_2 \circ r = r_2$. Par conséquent, on obtient les égalités

$$r_1 \circ \tilde{f} \circ (1,0) = \pi_1 \circ r \circ \tilde{f} \circ (1,0) = \pi_1 \circ (f, 0) = f$$

et

$$r_2 \circ \tilde{f} \circ (1,0) = \pi_2 \circ r \circ \tilde{f} \circ (1,0) = \pi_2 \circ (f, 0) = 0.$$

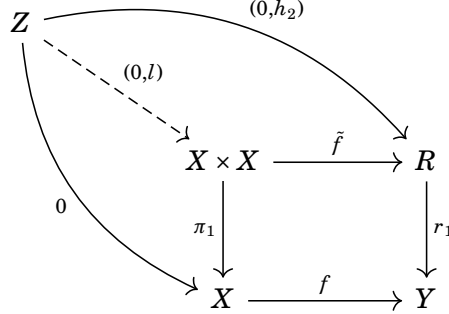
Or q est le coégalisateur de la paire $\{r_1, r_2\}$ et donc, on a

$$q \circ f = q \circ r_1 \circ \tilde{f} = q \circ r_2 \circ \tilde{f} = q \circ 0 = 0.$$

Il reste à montrer la propriété universelle. Pour cela, on considère le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & \\ & \searrow h & \\ Z & & Y \\ & \downarrow f & \downarrow q \\ & X & \\ & \downarrow & \\ & 0 & \rightarrow Q \end{array}$$

Pour trouver l'existence d'une unique flèche entre Z et X , on va s'aider du diagramme



où h_2 est tel que $h = r_2 \circ h_2$. Afin de montrer l'existence d'une unique flèche $(0,l) : Z \times X \times X$, il nous reste à montrer que $r_1 \circ (0,h_2) = f \circ 0 = 0$. C'est bien le cas grâce aux égalités :

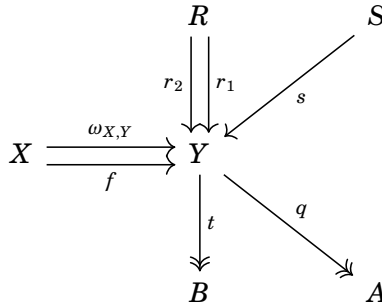
$$\begin{aligned}
 r_1 \circ (0,h_2) &= \pi_1 \circ r \circ (0,h_2) \\
 &= \pi_1 \circ (r_1, r_2) \circ (0,h_2) \\
 &= \pi_1 \circ (r_1 \circ 0, r_2 \circ h_2) \\
 &= \pi_1 \circ (0, h) = 0
 \end{aligned}$$

Cependant, on a que

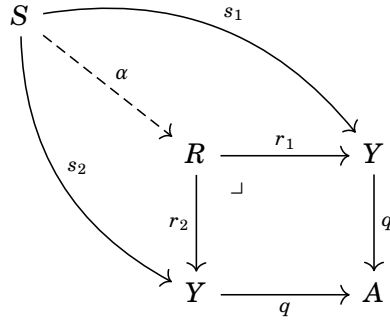
$$\begin{aligned}
 (0, f \circ l) &= (f \times f) \circ (0, l) \\
 &= (r_1, r_2) \circ \tilde{f} \circ (0, l) \\
 &= (r_1, r_2) \circ (0, h_2) \\
 &= (r_1 \circ 0, r_2 \circ h_2) \\
 &= (0, h).
 \end{aligned}$$

Cette dernière chaîne d'égalités nous montre que $l : Z \times X$ est l'unique morphisme tel que $f \circ l = h$ et cela clôture la première partie de la preuve.

Dans la première partie de la preuve, on a montré que si $\mathcal{C}$ est exacte et pointée et que si $f : X \rightarrow Y$ est normal pour une relation d'équivalence R alors f est le noyau de $\text{Coeg}(R) = q$. Résumons tout cela avec le diagramme



où (S, s_1, s_2) est une autre relation d'équivalence sur X pour laquelle f est normale et t est le coégalisateur de $\{s_1, s_2\}$. On a alors que t et q sont tous les deux conoyaux de s . On sait que le conoyau est unique à isomorphisme près. On a donc que $t \cong q$. Cet isomorphisme implique aussi un isomorphisme entre R et S . Pour le voir, on utilise le Lemme 2.2.2.13. On peut appliquer le lemme précédent puisque t et q sont tous les deux des épimorphismes réguliers, nous avons dès lors que $q = \text{Coeg}(\text{Eq}(q))$ et $t = \text{Coeg}(\text{Eq}(t))$. Or, on sait que $q = \text{Coeg}(r_1, r_2)$ et $t = \text{Coeg}(s_1, s_2)$. Dès lors, nous avons que la paire noyau de q est r_1, r_2 et que celle pour t est s_1, s_2 . Par conséquent, nous avons le diagramme suivant où le carré intérieur est un pullback par définition de la paire noyau :



On sait que t coégalise s_1 et s_2 et puisque t et q sont isomorphismes il existe un isomorphisme $b : B \rightarrow A$ tel que $q = b \circ t$. Par conséquent, nous avons que $t \circ s_1 = t \circ s_2$ implique que $q \circ s_1 = b \circ t \circ s_1 = b \circ t \circ s_2 = q \circ s_2$. Dès lors par la propriété universelle de la paire noyau de q , il existe un unique morphisme $\alpha : S \rightarrow R$ tel que $s_i = r_i \circ \alpha$ pour $i = 1, 2$. Un argument similaire nous donne l'existence d'un unique $\beta : R \rightarrow S$ tel que $r_i = s_i \circ \beta$ pour $i = 1, 2$. De plus α et β sont inverses l'un de l'autre par la propriété universelle. Dès lors, nous avons montré que S et R sont isomorphes via le morphisme α . $\square$

REMARQUE 3.2.0.5. Avec ce que l'on vient de montrer, il est évident que dans une catégorie semi-abélienne, on a que les noyaux et les sous-objets normaux coïncident.

Une conséquence de la Proposition 3.2.0.4 est l'unicité pour la relation d'équivalence pour un sous-objet normale.

COROLLAIRE 3.2.0.6. *Dans une catégorie normale, un monomorphisme f est normal pour au plus une relation.*

Dès lors, on peut considérer la définition suivante :

DÉFINITION 3.2.0.7. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie normale, un monomorphisme $f : X \rightarrow A$ est *normal* s'il existe une relation d'équivalence R sur A pour laquelle f est normal au sens de la Définition 3.1.0.4.

3.3. L'exemple des algèbres de Lie

Afin d'étoffer notre catalogue d'exemples de sous-objets normaux, nous allons nous intéresser au cas des algèbres de Lie sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ (voir p 12). Pour mieux comprendre à quoi correspond la définition de sous-objet normaux dans une algèbre de Lie sur $\mathbb{K}$, il est important de caractériser la catégorie des algèbres de Lie $\mathbf{Lie}_{\mathbb{K}}$. Puisque qu'avant tout une algèbre de Lie, c'est un espace vectoriel munit d'une opération, alors on peut montrer que cette catégorie est une variété d'algèbre et donc $\mathbf{Lie}_{\mathbb{K}}$ est exacte (voir [2, 3.18 Corollary]). De plus, étant donné que $\mathbf{Lie}_{\mathbb{K}}$ est une variété pointée³. Dès lors, cette catégorie est protomodulaire⁴ puisque chaque algèbre de Lie possède une structure de groupe interne via la structure d'espace vectoriel. Dès lors, il est facile de caractériser les sous-objets normaux dans $\mathbf{Lie}_{\mathbb{K}}$. En effet par le Lemme 2.4.3.4 et la Proposition 3.2.0.4, il nous suffit de caractériser les noyaux pour trouver les sous-objets normaux.

Le prochain résultat et sa démonstration sont dus à l'auteur.

LEMME 3.3.0.1. *Le noyau d'un morphisme d'algèbre de Lie $\phi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}'$ est un idéal dans $\mathfrak{g}$. Inversement, pour un idéal $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$, $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ est une algèbre de Lie et $\mathfrak{h}$ est le noyau du morphisme quotient $\pi : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}/\mathfrak{h}$.*

DÉMONSTRATION. Soit $Y \in \ker \phi$ et $X \in \mathfrak{g}$, on a alors $\phi([X, Y]) = [\phi(X), \phi(Y)] = [\phi(X), 0] = 0$. Dès lors, on a que $[X, Y] \in \ker \phi$. Ainsi, on a montré que $\ker \phi$ est un idéal de $\mathfrak{g}$. Pour l'autre implication, il suffit de montrer la dernière partie puisque le reste a déjà été prouvé (voir p 14). Soit $X \in \mathfrak{g}$, on a alors que $\pi(X) = X + \mathfrak{h}$. Dès lors,

$$X \in \ker \pi \iff X + \mathfrak{h} = \mathfrak{h} \iff X \in \mathfrak{h}$$

. Ainsi, on a montré que $\ker \pi = \mathfrak{h}$. □

On vient de montrer que les noyaux sont les idéaux et donc dans $\mathbf{Lie}_{\mathbb{K}}$, les sous-objets normaux sont les idéaux.

3. Il suffit de noter que l'objet zéro est l'espace vectoriel nul avec le crochet nul. Une telle algèbre de Lie est l'*algèbre de Lie triviale*.

4. Voir [8, Corollary 3.1.7].

REMARQUE 3.3.0.2. La catégorie $\mathbf{Lie}_{\mathbb{K}}$ n'est pas simplement une catégorie pointée, exacte et protomodulaire. En effet, c'est une catégorie semi-abélienne. On peut montrer que une variété est semi-abélienne si et seulement si elle est pointée et protomodulaire (voir [8, Exemple 5.1.4]).

3.4. Conclusion du chapitre

Dans ce chapitre, nous avons introduit la définition de sous-objet normal (voir Définition 3.1.0.4). Ensuite, nous avons explicité quelques exemples comme dans SET (voir Lemme 3.1.0.6) et comme dans GRP (voir Lemme 3.2.0.1). Pour ce dernier exemple, nous avons du montrer que tout noyau est un sous-objet normal (voir Lemme 3.1.0.9). Ce résultat généralise le fait que dans les groupes, tout noyau est un sous-groupe normal (voir page 5). Ensuite, on a montré que dans une catégorie exacte et normale, alors les noyaux et les sous-objets normaux coïncident (voir Proposition 3.2.0.4) et ce dernier résultat nous montre que dans les catégories normales, un monomorphisme peut être normal pour au plus une relation d'équivalence (voir Corollaire 3.2.0.6). Pour finir, on a donné un dernier exemple de sous-objets normaux via la catégorie des algèbres de Lie. Pour montrer ce résultat, nous avons eu recours à la proposition caractérisant les sous-objet normaux dans les catégories exactes et normales (voir Proposition 3.2.0.4).

Notions plus faibles que la normalité

Nous savons que le concept de sous-objet normal peut être défini de plusieurs manières dans la catégorie des groupes. Il est alors intéressant d'essayer de codifier ces différentes manières d'exprimer la normalité dans un cadre catégorique plus général et de voir quand ces différents concepts sont équivalents pour essayer de retrouver les résultats que nous connaissons dans GRP. Cette section va s'intéresser à ces nouveaux objets plus généraux que les sous-objets normaux. On va parler de sous-objets semi-normaux, de blocs (eng : clots) et d'idéaux. Et pour définir la notion de bloc, nous allons avoir besoin de beaucoup de nouvelles notions comme celles d'action interne et de monades. On abordera aussi les conditions que l'on doit imposer sur les catégories pour que ces notions plus générales soient équivalentes aux sous-objets normaux. Finalement pour illustrer ces différentes notions, nous allons voir à quoi elles correspondent dans la catégorie des groupes.

4.1. Sous-objet semi-normal

La définition de sous-objet normal (voir Définition 3.1.0.4) requière une relation d'équivalence sur un A et l'on considère un sous-objet de A via un morphisme $k : K \rightarrowtail A$. On rappelle, que si un sous-objet est normal pour une relation d'équivalence R , alors nécessairement le morphisme associé k est un monomorphisme (voir Lemme 3.1.0.7). On sait qu'une relation d'équivalence est une relation symétrique, réflexive et transitive. Dès lors on peut se demander ce qui se passerait si on garde seulement la notion de réflexivité. Si on travaille seulement avec des relations internes réflexives, on peut alors définir un nouveau type de sous-objets : les *sous-objets semi-normaux*.

DÉFINITION 4.1.0.1. [23] Soit (R, r_1, r_2, A) une relation réflexive sur un objet A . On appellera un morphisme $k : K \rightarrow A$ un *sous-objet semi-normal*

dans A par rapport à la relation R lorsque k est obtenu par le pullback :

$$(4.1) \quad \begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{\quad} & R \\ \downarrow k & \lrcorner & \downarrow \langle r_1, r_2 \rangle \\ A & \xrightarrow{\langle 1_A, 0 \rangle} & A \times A \end{array}$$

On notera que par définition de sous-objet semi-normal nous avons que k est bien un monomorphisme et que l'on peut donc bien parler de sous-objets. En effet par [5, Proposition 2.5.3], on sait que si $\langle r_1, r_2 \rangle$ dans le diagramme 4.1 est un monomorphisme alors k le sera aussi. Or, comme R est une relation, nous avons que r_1, r_2 sont conjointement monomorphiques (voir Définition 2.1.3.1) et dès lors, on peut montrer que cela implique que (r_1, r_2) est un monomorphisme.

Si on impose que la relation R ne soit pas uniquement une relation réflexive mais une relation d'équivalence, alors nous avons un certain résultat d'unicité dans la construction de sous-objets normaux.

LEMME 4.1.0.2. [12, Proposition 3.6.] *Si $\mathcal{C}$ est une catégorie pointée et finiment complète, alors toute relation d'équivalence R sur un objet A détermine un unique morphisme normal dans A .*

DÉMONSTRATION. Soit (R, r_1, r_2) une relation d'équivalence sur un objet A de $\mathcal{C}$. Considérons le diagramme suivant qui est un pullback :

$$(4.2) \quad \begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{k'} & R \\ \downarrow k & \lrcorner & \downarrow \langle r_1, r_2 \rangle \\ A & \xrightarrow{\langle 1_A, \omega_{A,A} \rangle} & A \times A \end{array}$$

On doit vérifier que k est normal par rapport à R . En d'autres mots, on doit définir un morphisme $\tilde{k} : K \times K \rightarrow R$ rendant les deux carrés utiles en des pullbacks.

Puisque (R, r_1, r_2) est une relation d'équivalence, on sait que la paire noyau de r_1 est donnée par (p_1, τ) (voir le Lemme 2.1.3.10). De plus, notons que le noyau de r_2 est donné par $k' : K \rightarrow R$. En effet, pour montrer que le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{k'} & R \\ \downarrow & & \downarrow r_2 \\ 0 & \longrightarrow & A \end{array}$$

est un pullback, il nous suffit de montrer que le noyau de la seconde projection π_2 est donné par $\langle 1_A, \omega_{A,A} \rangle : A \rightarrow A \times A$. Tout d'abord, on a bien que $\pi_2 \circ \langle 1_A, \omega_{A,A} \rangle = \omega_{A,A}$. Pour la propriété universelle, on considère le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} A & \xrightarrow{\langle 1_A, \omega_{A,A} \rangle} & A \times A & \xrightarrow[\omega_{A,A}]{\pi_2} & A \\ & \nwarrow f & \uparrow g = \langle f, \omega_{A,A} \rangle & & \\ & & Q & & \end{array}$$

Considérons un morphisme $g : A \times A \rightarrow Q$ tel que $\pi_2 \circ g = \omega_{A,A}$. Dès lors g doit être de la forme $\langle f, \omega_{A,A} \rangle$. Il est dès lors facile de voir qu'il existe un unique morphisme $f : Q \rightarrow A$ tel que $\langle f, \omega_{A,A} \rangle = \langle 1_A, \omega_{A,A} \rangle \circ f$ (par l'unicité du morphisme induit par la produit). Ainsi le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc} K & \xrightarrow{k'} & R & & \\ \downarrow k & \lrcorner & \downarrow \langle r_1, r_2 \rangle & & \\ A & \xrightarrow{\langle 1_A, \omega_{A,A} \rangle} & A \times A & & \\ \downarrow \tau_A & \lrcorner & \downarrow \pi_2 & & \\ 0 & \xrightarrow{\alpha_A} & A & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \tau_K \curvearrowright \\ \curvearrowleft r_2 \end{array}$$

prouve que le carré commutatif extérieur est bien un pullback. En regroupant ce résultat avec le fait que l'on connaisse la paire noyau de r_2 , on obtient le cube suivant :

$$\begin{array}{ccccc} K \times K & \xrightarrow{\pi_2} & K & \xrightarrow{k'} & R \\ \downarrow \pi_1 & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow r_2 \\ K & \xrightarrow{k'} & K & \xrightarrow{k'} & R \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow r_2 \\ 0 & \xrightarrow{\alpha_A} & A & & \end{array} \quad \begin{array}{c} \bar{k} : K \times K \dashrightarrow R \times_A R \\ \tau : R \times_A R \rightarrow R \end{array}$$

Dès lors, si on considère le diagramme composé des faces de gauche et avant du cube, on a le pullback suivant :

$$\begin{array}{ccccc} K \times K & \xrightarrow{\pi_2} & K & \xrightarrow{k'} & R \\ \downarrow \pi_1 & \lrcorner & \downarrow & \lrcorner & \downarrow r_2 \\ K & \xrightarrow{\alpha_A} & 0 & \xrightarrow{\alpha_A} & A \end{array}$$

Or on sait que ce pullback est équivalent au diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & k' \circ \pi_2 & & \\
 & \curvearrowright & & \curvearrowright & \\
 K \times K & \xrightarrow{\bar{k}} & R \times_A R & \xrightarrow{p_2} & R \\
 \pi_1 \downarrow & & \downarrow \tau & \lrcorner & \downarrow r_2 \\
 K & \xrightarrow{k'} & R & \xrightarrow{r_2} & A \\
 & \curvearrowleft & & \curvearrowleft & \\
 & & \omega_{K,A} & &
 \end{array}$$

Cela implique que le carré commutatif de gauche est aussi un pullback. Ainsi on a que le rectangle extérieur du diagramme suivant est un pullback :

$$\begin{array}{ccccc}
 K \times K & \xrightarrow{\bar{k}} & R \times_A R & \xrightarrow{p_1} & R \\
 \pi_1 \downarrow & \lrcorner & \downarrow \tau & \lrcorner & \downarrow r_1 \\
 K & \xrightarrow{k'} & R & \xrightarrow{r_2} & A
 \end{array}$$

Par le diagramme 4.2 (qui est un pullback), on a alors que $\langle r_1, r_2 \rangle \circ k' = \langle 1_A, \omega_{A,A} \rangle \circ k$ et ainsi on trouve que $r_1 \circ k' = \pi_1 \circ \langle r_1, r_2 \rangle \circ k' = \pi_1 \circ \langle 1_A, \omega_{A,A} \rangle \circ k = k$. Dès lors, si on pose $\tilde{k} := p_1 \circ \bar{k}$ on a que le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 K \times K & \xrightarrow{\tilde{k}} & R \\
 \pi_1 \downarrow & & \downarrow r_1 \\
 K & \xrightarrow{k} & A
 \end{array}$$

est un pullback.

Pour finir la preuve, il nous suffit de montrer que le diagramme suivant est commutatif :

$$\begin{array}{ccc}
 K \times K & \xrightarrow{\tilde{k}} & R \\
 \parallel & & \downarrow \langle r_1, r_2 \rangle \\
 K \times K & \xrightarrow{k \times k} & A \times A
 \end{array}$$

Or on sait que la paire constituée des deux projections associées au produit $A \times A$ (π_1, π_2) est conjointement monomorphique. Dès lors, pour vérifier que $k \times k = \langle r_1, r_2 \rangle \circ \tilde{k}$ il faut montrer que :

- $r_1 \circ \tilde{k} = k \circ \pi_1$ (c'est le cas par la première partie de la preuve);
- $r_2 \circ \tilde{k} = k \circ \pi_2$. Par les notations précises et par la définition de $\tilde{k}$ et de $\bar{k}$; on a que $r_2 \circ \tilde{k} = r_2 \circ p_2 \circ \bar{k} = r_1 \circ p_2 \bar{k} = r_1 \circ k' \circ \pi_2 = k \circ \pi_2$. Cela montre le résultat souhaité.

L'unicité du morphisme normal associé à la relation d'équivalence R vient de la construction du diagramme 4.2. $\square$

Grâce à ce dernier Lemme et à sa preuve, on peut donner la preuve de la Proposition 2.4.3.11. Rappelons cette dernière : dans une catégorie protomodulaire, exacte et pointée ; l'axiome (A2) est vrai.

PREUVE DE LA PROPOSITION 2.4.3.11. Soit $k : K \rightarrow X$ le noyau d'un morphisme $g : X \rightarrow Z$ et $f : X \rightarrow Y$ un épimorphisme régulier. Soit (R, r_1, r_2) la paire noyau de g , où $k = \ker(g)$, qui est une relation d'équivalence pour laquelle k est normal (voir le Lemme 3.1.0.9) et soit S son image par f , qui est une relation d'équivalence par le Lemme 2.4.3.9.

Considérons le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 K & \xrightarrow{\tilde{f}} & L \\
 \downarrow \ker(r_2) & & \downarrow \ker(s_2) \\
 R & \xrightarrow{\bar{f}} & S \\
 \downarrow r_2 \quad \downarrow r_1 & & \downarrow s_2 \quad \downarrow s_1 \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 k = r_1 \circ \ker(r_2) \\
 l = s_1 \circ \ker(s_2)
 \end{array}$$

Notons que puisque R est la paire noyau, alors il existe un unique morphisme tel que k se factorise à travers r_1 . Or par unicité du sous-objet normal associé à R , on a que $k = r_1 \circ \ker(r_2)$ (voir le diagramme ci-dessous).

$$\begin{array}{ccccc}
 K & & & & 0 \\
 \downarrow \ker(r_2) & & & & \searrow \\
 R & \xrightarrow{r_2} & X & & \\
 \downarrow r_1 & \lrcorner & \downarrow g & & \\
 X & \xrightarrow{g} & Z & &
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 k \\
 \searrow
 \end{array}$$

Soit l le morphisme normale pour la relation d'équivalence S . Par la preuve du lemme ci-dessus ; on a que $l = s_1 \circ \ker(s_2)$. De plus, par la Proposition 3.2.0.4 on sait que l est un noyau. Puisque par la propriété universelle du noyau de s_2 il existe un unique morphisme $\tilde{f}$ rendant commutatif le carré du dessus, alors on a que $\tilde{f}$ est un épimorphisme régulier car $l \circ \tilde{f}$ est la factorisation épimorphisme régulier-monomorphisme du morphisme $f \circ k$. $\square$

Au vu de l'appellation, on s'attend à ce que tout objet normal soit aussi semi-normal et c'est le cas.

LEMME 4.1.0.3. [23] Soit (R, r_1, r_2, A) une relation d'équivalence sur A et soit $k : K \rightarrow A$ un sous-objet normal pour la relation R alors le morphisme k est un semi normal dans A pour la relation R .

DÉMONSTRATION. Soit $k : K \rightarrow A$ un sous-objet normal pour la relation d'équivalence R . Par le Lemme 4.1.0.2 on sait que par l'unicité si on considère le morphisme k induit par le pullback suivant :

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{k'} & R \\ \downarrow k & \lrcorner & \downarrow \langle r_1, r_2 \rangle \\ A & \xrightarrow{\langle 1_A, \omega_{A,A} \rangle} & A \times A \end{array}$$

alors $k : K \rightarrow A$ est un sous-objet normal pour la relation R . De plus ce morphisme k est semi-normal par construction. $\square$

On peut aussi se demander quand un sous-objet semi-normal est normal. Pour répondre à cela on a besoin du Lemme 4.1.0.2. Or dans ce Lemme on a besoin que R , qui est par hypothèse une relation réflexive, soit une relation d'équivalence. En effet, on remarque alors que si $k : K \rightarrow A$ est un semi-normal dans A par rapport à R une relation réflexive, alors k est normal dans A si R devient une relation d'équivalence. Dès lors, on a le résultat suivant :

LEMME 4.1.0.4. Dans une catégorie $\mathcal{C}$ de Mal'tsev, tout sous-objet semi-normal pour une relation réflexive R est normal pour cette même relation R .

Grâce au Lemme 4.1.0.4, on peut montrer un résultat énoncé dans la Section 3.1. Rappelons le résultat :

LEMME 4.1.0.5. Soit $\mathcal{C}$ une catégorie pointée et de Mal'tsev. Alors tout sous-objet d'un objet abélien est normal.

La démonstration est due à une collaboration entre Mr Van der Linden et l'auteur.

DÉMONSTRATION. Soit A un objet abélien¹ et $k : K \rightarrow A$ un monomorphisme. Posons comme structure de groupe sur A , le quadruplet (A, α_A, m, ζ) . Prenons le pullback suivant :

$$\begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{s} & K \\ \downarrow r & \lrcorner & \downarrow k \\ A \times A & \xrightarrow{\text{sub}} & A \end{array}$$

1. Autrement dit A possède une structure de groupe.

où sub dénote la soustraction de A . Autrement dit $\text{sub} := m \circ (1_A \times \zeta) : A \times A \rightarrow A$.

On assume que k est semi-normal par rapport à la relation réflexive R sur A . Puisque dans une catégorie de Mal'tsev, R est une relation d'équivalence et k est normal².

Tout d'abord R est bien une relation sur A puisque r est un monomorphisme par propriété du pullback³ et k est un monomorphisme par hypothèse. Ensuite cette relation R sur A est bien une relation réflexive. En effet, considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & & & & \\
 & \searrow \delta & & \nearrow \omega_{A,K} & \\
 & R & \xrightarrow{s} & K & \\
 \langle 1_A, 1_A \rangle \swarrow & \downarrow r & & \downarrow k & \\
 & A \times A & \xrightarrow{m \circ (1_A \times \zeta)} & A &
 \end{array}$$

Puisque $m \circ (1_A \times \zeta) \circ \langle 1_A, 1_A \rangle = \alpha_1 \circ \tau_A = \omega_{A,A} = k \circ \omega_{A,K}$, alors par la propriété universelle du pullback il existe un unique morphisme $\delta : A \rightarrow R$ tel que $r \circ \delta = \langle 1_A, 1_A \rangle$. Cela montre la réflexivité de la relation R sur A .

Il ne reste plus qu'à montrer que k est semi-normal pour la relation R . Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1_K & & \\
 & \searrow k' & & \nearrow & \\
 K & \xrightarrow{\quad} & R & \xrightarrow{s} & K \\
 \downarrow k & & \downarrow r & & \downarrow k \\
 A & \xrightarrow{\langle 1_A, \omega_{A,A} \rangle} & A \times A & \xrightarrow{\text{sub}} & A \\
 & \searrow & & \nearrow 1_A &
 \end{array}$$

On note que le rectangle extérieur est un pullback⁴ car par hypothèse k est un monomorphisme. De plus, on sait que le carré de droite est aussi un pullback. Dès lors, pour montrer que le carré de gauche est un pullback et conclure que k est semi-normal par rapport à la relation réflexive R , il suffit de montrer l'existence de la flèche k' rendant le carré de droite commutatif⁵. Or puisque le carré de droite est un pullback, il nous suffit de montrer

2. Voir le Lemme 4.1.0.4.

3. Voir [5, Proposition 2.5.3].

4. Voir [5, Proposition 2.5.6].

5. En effet ce sont les conditions requises pour appliquer [5, Proposition 2.5.9].

que $sub \circ \langle 1, 0 \rangle = 1_A$. En effet, si c'est le cas alors par la propriété universelle du pullback associé aux morphismes k et sub , alors il existe un unique morphisme $k' : K \rightarrow R$ tel que $\langle 1_A, \omega_{A,A} \rangle \circ k = r \circ k'$.

Montrons que $sub \circ \langle 1_A, \omega_{A,A} \rangle = 1_A$. Puisque (M, m, α_A) est un monoïde, alors on sait que $m \circ \langle \alpha_A \circ \tau_A, 1_A \rangle = 1_A$. Dès lors, il nous suffit de montrer que $\langle 1_A, \alpha_1 \circ \tau_A \rangle = (1_A \times \zeta) \circ \langle 1_A, \omega_{A,A} \rangle$. On a l'égalité par l'unicité du morphisme induit par la propriété universelle du produit :

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \xleftarrow{\pi_2} & A \times A & \xrightarrow{\pi_1} & A \\
 \uparrow 1_A & & \uparrow 1_A \times \zeta & & \uparrow \zeta \\
 A & \xleftarrow{\pi_2} & A \times A & \xrightarrow{\pi_1} & A \\
 & \nwarrow 1_A & & \nearrow \omega_{A,A} & \\
 & A & & &
 \end{array}$$

Cela conclut la preuve pour montrer que k est semi-normal et donc normal dans une catégorie Mal'tsev. $\square$

4.2. Blocs

Dans cette section, nous allons aborder une notion encore plus générale que la notion de sous-objets semi-normaux. Nous allons parler de blocs (eng : clots). Mais afin de bien comprendre la construction de ces blocs, nous allons avoir besoin de la notion de monade. Dans la seconde sous-section, nous allons pouvoir donner la notion de blocs.

4.2.1. Monades. On peut aussi parler d'actions internes en fonction des monades.

DÉFINITION 4.2.1.1. [8, Definition A.6.2] Une *monade* $\mathbb{T}$ dans une catégorie $\mathcal{C}$ est la donnée d'un triplet $\mathbb{T} = (T, \varepsilon, \mu)$ où $T : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ est un foncteur et $\varepsilon : \text{Id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow T$; $\mu : T \circ T \Rightarrow T$ sont des transformations naturelles rendant les diagrammes commutatifs

$$\begin{array}{ccc}
 T & \xrightarrow{\varepsilon * 1_T} & T \circ T \xleftarrow{1_T * \varepsilon} T \\
 & \searrow \mu & \swarrow \mu \\
 & T &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 T \circ T \circ T & \xrightarrow{\mu * 1_T} & T \circ T \\
 \downarrow 1_T * \mu & & \downarrow \mu \\
 T \circ T & \xrightarrow{\mu} & T
 \end{array}$$

Afin de montrer l'utilité de la notion de monade, on peut citer la proposition suivante qui montre une application de la notion de monade quand nous avons une adjonction entre deux foncteurs.

PROPOSITION 4.2.1.2. [8, Proposition A.6.3] Soit $R : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$, $L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{D}$ deux foncteurs adjoints tels que L est adjoint à gauche à R . Soient $\alpha : id_{\mathcal{C}} \Rightarrow R \circ L$ et $\beta : L \circ R \Rightarrow id_{\mathcal{D}}$ respectivement l'unité et la co-unité de cette adjonction. Dans ces conditions, si on pose le foncteur $T = R \circ L : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ avec les transformations naturelles :

$$\varepsilon = \alpha : id_{\mathcal{C}} \Rightarrow T \text{ et } \mu = 1_R * \beta * 1_L : T \circ T \Rightarrow T$$

alors le triplet $\mathbb{T} = (T, \varepsilon, \mu)$ est une monade sur $\mathcal{C}$

Illustrons cette proposition via un exemple qui est dû à l'auteur.

EXEMPLE 4.2.1.3. [5, Exemples 3.1.6b] Soit $U : \text{GRP} \rightarrow \text{SET}$ le foncteur d'oubli qui envoie un groupe G sur l'ensemble G en oubliant la structure de groupe de G et en ne gardant que l'ensemble G . Il existe un foncteur $F : \text{SET} \rightarrow \text{GRP}$ tel que F est adjoint à gauche de U . Définissons le foncteur F de la manière suivante : soit X un ensemble, alors on pose que $F(X)$ est le groupe libre sur X . Cependant avant de donner une construction explicite de $F(X)$, il est utile de faire quelques rappels sur les monoïdes libres. Soit $X \in \text{SET}$, on peut considérer X^- comme étant une « copie de X », c'est-à-dire que d'un point de vue ensembliste $X = X^-$, mais on notera les éléments de X comme x^+ et ceux de X^- avec la notation x^- . Dès lors, nous pouvons considérer l'union disjointe $X \dot{\cup} X^-$. Par conséquent, on peut considérer le monoïde $M(X)$ engendré par X comme suit : $M(X)$ est composé de mots dans l'alphabet $X \dot{\cup} X^-$. En d'autres termes, si on considère un élément de $M(X)$ qui n'est pas le vide alors on peut l'écrire comme $x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n}$ où $\{x_i\}_{1 \leq i \leq n} \in X$ et $\{\sigma_i\}_{1 \leq i \leq n} \in \{+, -\}$. Et pour l'opération sur $M(X)$, on considère la concaténation des mots et on la nommera *conc*. En outre, on peut former un groupe à partir de $M(X)$. En effet, il suffit de considérer la relation d'équivalence $\approx$ qui est la plus petite relation d'équivalence sur $M(X)$ qui contient tous les couples de type $(x^+x^-, ())$ ou $(x^-x^+, ())$ où $()$ désigne le mot vide qui est le neutre du monoïde libre. Par conséquent, on peut poser

$$F(X) := (M(X) / \approx, \text{conc} / \approx)$$

On peut montrer qu'avec une telle construction, $F(X)$ est un groupe libre et que, dès lors, ce groupe possède la propriété universelle suivante : soit pour tout $G \in \text{GRP}$ et pour toute application $f : X \rightarrow G$, alors il existe un unique morphisme de groupes $\hat{f} : F(X) \rightarrow G$ tel que $\hat{f}|_X = f$. On peut résumer cela

avec le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & F(X) \\ & \searrow \forall f & \downarrow \exists! \hat{f} \\ & & G \end{array}$$

On notera que cette propriété nous permet de montrer que F est bien un foncteur puisque l'on peut définir F sur les flèches avec le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i} & F(X) \\ f \downarrow & & \downarrow F(f) := \widehat{j \circ f} \\ Y & \xrightarrow{j} & F(Y) \end{array}$$

Montrons que nous avons bien une adjonction $F \dashv U$. Pour cela, on va trouver l'unité de l'adjonction et on va vérifier que la propriété universelle associée est satisfaite. On pose comme unité la transformation naturelle $\eta : 1_{\text{ENS}} \Rightarrow U \circ F$ définie par la famille $\{\eta_X : X \rightarrow U \circ F(X) = (X \amalg X)^* / \cong\}_{X \in \text{ENS}}$ qui est l'inclusion des générateurs de X dans le monoïde libre $U \circ F(X)$. Avec cette définition, on a que le diagramme suivant, qui est dans ENS , est commutatif avec $f \in \text{ENS}(X, Y)$:

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta_X} & U \circ F(X) \\ f \downarrow & & \downarrow F(f) \\ Y & \xrightarrow{\eta_Y} & U \circ F(Y) \end{array}$$

où $F(X)$ et $F(Y)$ sont vus comme des ensembles et $F(f)$ comme une application. De plus, on a que la propriété universelle du groupe libre $F(X)$ nous donne la propriété suivante qui est suffisante pour conclure que nous avons bien une adjonction : soit $X \in \text{ENS}$, $Y \in \text{GRP}$ et $f \in \text{ENS}(X, U(Y))$ il existe un unique morphisme $\hat{f} \in \text{GRP}(F(X), Y)$ tel que le triangle suivant commute

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\eta} & U \circ F(X) \\ & \searrow f & \downarrow U(\hat{f}) \\ & & U(Y) \end{array}$$

Puisque nous avons montré que l'on a une adjonction entre GRP et ENS , on peut alors appliquer la Proposition 4.2.1.2. Montrons à quoi ressemble la monade associée à l'adjonction $F \dashv U$. On a déjà explicité l'unité associée à cette adjonction, on va maintenant expliciter la co-unité $\varepsilon : F \circ U \Rightarrow 1_{\text{GRP}}$. Soit $G \in \text{GRP}$; dès lors, $F \circ U(G)$ est le groupes libre engendré par l'ensemble sous-jacent au groupe G . On a alors que $\varepsilon_G : F(U(G)) \rightarrow G$ envoie les générateurs

de $F(U(G))$ sur les éléments de G correspondants. On peut dès à présent considérer la monade donnée par le triplet (T, η, μ) où par $T = U \circ F$ et $\mu = 1_U * \varepsilon * 1_F$. On note alors que pour $X \in \text{ENS}$, $T(X)$ est l'ensemble composé des mots constitués par l'alphabet $X \dot{\cup} X^-$ et dont aucun mot de la forme $x^+ x^-$ ou $x^- x^+$ n'est présent. On sait que $\mu = 1_U * \varepsilon * 1_F$, dès lors, si on prend $X \in \text{ENS}$ et qu'on développe on trouve que $\mu_X = U(\varepsilon_{F(X)})$, c'est-à-dire que si on a un mot en l'alphabet $T(X) \dot{\cup} T(X)^-$, disons ω , alors

$$\mu_X(\omega) = \mu_X(y_1^{\sigma_1} \cdots y_n^{\sigma_n}) = (y_1^{\sigma_1} \cdots y_n^{\sigma_n})$$

où $\{y_i\}_{1 \leq i \leq n}$ sont des générateurs de $T(X)$ et où $\{\sigma_j\}_{1 \leq j \leq n} \in \{-, +\}$. On peut dès lors penser μ comme une certaine concaténation des éléments de $T(X)$.

4.2.2. Retour aux blocs. La sous-section précédente permet de définir la notion de blocs via la notion d'action liée à un objet fixé de la catégorie $\mathcal{C}$. Mais avant cela nous avons besoin d'une monade. Par conséquent nous allons avoir besoin de définir deux foncteurs dont l'un sera adjoint à gauche de l'autre.

DÉFINITION 4.2.2.1. [8, Definition 2.1.10] Soit $\mathcal{C}$ une catégorie et soit $B \in \mathcal{C}$ un objet. On peut alors définir la *catégorie $Pt_B(\mathcal{C})$ des points de $\mathcal{C}$ sur B* comme étant la catégorie dont

- les objets sont les paires de morphismes de $\mathcal{C}$ $A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{smallmatrix} B$ tels que $\alpha \circ \beta = 1_B$ (cela veut dire que α est un épimorphisme scindé avec un scindage donné);
- les morphismes sont donnés par

$$u : (A \begin{smallmatrix} \xrightarrow{\alpha} \\ \xleftarrow{\beta} \end{smallmatrix} B) \rightarrow (C \begin{smallmatrix} \xrightarrow{\gamma} \\ \xleftarrow{\delta} \end{smallmatrix} B)$$

où $u : A \rightarrow C$ est un morphisme de $\mathcal{C}$ tel que $\alpha = \gamma \circ u$ et $u \circ \beta = \delta$ (voir le diagramme 4.3).

$$(4.3) \quad \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{u} & C \\ \swarrow \beta & & \searrow \gamma \\ & B & \\ \nwarrow \alpha & & \nearrow \delta \end{array}$$

REMARQUE 4.2.2.2. Il est courant de noter un objet de $Pt_B(\mathcal{C})$ par un triplet (A, α, β) . On remarquera que l'ordre du triplet est important puisqu'il détermine laquelle des deux flèches est l'épimorphisme scindé. Dans notre cas c'est le morphisme α .

Dans la suite on considérera que la catégorie $\mathcal{C}$ est pointée, compète et qu'elle admet les coproduits finis. Soit $B \in \mathcal{C}$, on peut alors définir un foncteur "ker" :

$$\ker : Pt_B(\mathcal{C}) \rightarrow \mathcal{C}, \quad \begin{array}{c} A \\ \uparrow \beta \quad \downarrow \alpha \\ B \end{array} \longmapsto K[\alpha].$$

L'explication suivante et les détails sont dus à l'auteur.

On sait comment se comporte le foncteur $\ker$ sur les objets de $Pt_B(\mathcal{C})$ mais nous ne savons pas comment ils se comportent sur les morphismes de la catégorie des points de $\mathcal{C}$ au-dessus de B . Soit $u : (A \xrightarrow{\alpha} B) \rightarrow (C \xrightarrow{\gamma} B)$ un morphisme dans $Pt_B(\mathcal{C})$ et le fait qu'on aimerait déterminer un morphisme $\tilde{u}$ dans $\mathcal{C}$ tel que $\tilde{u} = \ker(u) : K[\alpha] \rightarrow K[\gamma]$. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} K[\alpha] & \xrightarrow{k} & A & \xrightarrow{u} & C & \xrightarrow{\gamma} & B \\ & \searrow \tilde{u} & & & \uparrow k' & & \\ & & & & K[\gamma] & & \end{array}$$

(Note: In the original image, there is a curved arrow labeled α from A to B above the horizontal arrows, and a curved arrow labeled γ from C to B above the horizontal arrows. The arrow k is from $K[\alpha]$ to A , k' is from $K[\gamma]$ to C , and $\tilde{u}$ is a dashed arrow from $K[\alpha]$ to $K[\gamma]$.)

On note que $\gamma \circ k' = 0$ or $\gamma \circ u \circ k = \alpha \circ k = 0$ dès lors, on a l'existence d'une unique flèche $\tilde{k} : K[\alpha] \rightarrow K[\gamma]$ par la propriété universelle du noyau de α . On note que $\tilde{u}$ est tel que $k' \circ \tilde{u} = u \circ k$.

On peut définir un foncteur adjoint à $\ker$ de la manière suivante :

$$B + (-) : \mathcal{C} \rightarrow Pt_B(\mathcal{C}), X \longmapsto \begin{array}{c} B + X \\ \uparrow i_B \quad \downarrow \begin{pmatrix} 1_B \\ 0 \end{pmatrix} \\ B \end{array}$$

L'explication suivante et les détails sont dus à l'auteur.

Pour se convaincre que $B + (-)$ est bel et bien un foncteur, on peut regarder comment il agit sur les morphismes. Soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme de $\mathcal{C}$, on aimerait savoir comment est défini $B + (f) : B + X \rightarrow B + Y$. Or on sait que $B + X$ et $B + Y$ sont des coproduits et donc chacun a une propriété universelle qui peut être utilisée pour déterminer $B + (f)$. Soit le diagramme illustrant

la propriété universelle du coproduit $B + X$ et en reprenant les notations du diagramme 2.8 (voir p 26)

$$\begin{array}{ccccc}
 & & B+Y & & \\
 & j_B \nearrow & \uparrow & \nwarrow j_Y & \\
 B & & & & Y \\
 \parallel & & 1_B + f & & \uparrow f \\
 B & & & & X \\
 & i_B \searrow & \downarrow & \swarrow i_X & \\
 & & B+X & &
 \end{array}$$

Posons $B + (f) = j_B + (j_Y \circ f)$. Il reste à montrer que cette flèche est bien un morphisme de $Pt_B(\mathcal{C})$. Pour cela, il faut vérifier deux conditions : $\begin{pmatrix} 1_B \\ 0_Y \end{pmatrix} \circ (j_B + (j_Y \circ f)) = \begin{pmatrix} 1_B \\ 0_X \end{pmatrix}$ et $i_B \circ \begin{pmatrix} 1_B \\ 0_Y \end{pmatrix} = j_B$. On notera que la seconde égalité est directement vérifiée par définition de $\begin{pmatrix} 1_B \\ 0_Y \end{pmatrix}$. Considérons le diagramme suivant pour montrer la première égalité

$$\begin{array}{ccccc}
 B & & & & \\
 \searrow i_B & & & & \\
 X & \xrightarrow{i_X} & B+X & \xrightarrow{j_B + (j_Y \circ f)} & B+Y \\
 & & \searrow \begin{pmatrix} 1_B \\ 0_X \end{pmatrix} & & \swarrow \begin{pmatrix} 1_B \\ 0_Y \end{pmatrix} \\
 & & B & &
 \end{array}$$

Pour montrer $\begin{pmatrix} 1_B \\ 0_Y \end{pmatrix} \circ (j_B + (j_Y \circ f)) = \begin{pmatrix} 1_B \\ 0_X \end{pmatrix}$, il faut et il suffit de prouver deux autres égalités qui sont satisfaites :

- $1_B = \begin{pmatrix} 1_B \\ 0_Y \end{pmatrix} \circ j_B = \begin{pmatrix} 1_B \\ 0_Y \end{pmatrix} \circ (j_B + (j_Y \circ f)) \circ j_B = \begin{pmatrix} 1_B \\ 0_X \end{pmatrix} \circ i_B = 1_B$;
- $0 = 0 \circ f = \begin{pmatrix} 1_B \\ 0_Y \end{pmatrix} \circ j_Y \circ f = \begin{pmatrix} 1_B \\ 0_Y \end{pmatrix} \circ (j_B + (j_Y \circ f)) \circ i_X = \begin{pmatrix} 1_B \\ 0_X \end{pmatrix} \circ i_X = 0$.

On vient de montrer que $j_B + (j_Y \circ f)$ est bien un morphisme de $Pt_B(\mathcal{C})$.

Dans la sous-section précédente, nous avons mis en lumière que pour avoir une action nous avons besoin d'une monade. Or on sait par la Proposition 4.2.1.2, que si on a une adjonction entre deux foncteurs, alors nous avons une monade. Cependant ici nous avons deux foncteurs, que l'on notera $G = \ker$ et $F = B + (-)$.

LEMME 4.2.2.3. *Le foncteur F est adjoint à gauche du foncteur G .*

La preuve du lemme précédent est due à une collaboration entre Mr Van der Linden et l'auteur.

DÉMONSTRATION. Afin de montrer que cette paire de foncteurs forme une adjonction nous allons trouver une bijection naturelle que l'on va noter $\theta_{X,(A,p,s)} : Pt_B(\mathcal{C})(F(X), (A, p, s)) \rightarrow \mathcal{C}(C, K[p])$ où $X \in \mathcal{C}$ et le triplet $(A, p, s) \in$

$Pt_B(\mathcal{C})$. On rappelle que la notation sous-forme de triplet implique que nous avons ce couple de morphismes $A \xrightleftharpoons[p]{p} B$ tel que $p \circ s = 1_B$. Soient $Z \in \mathcal{C}$, $(A, p, s) \in Pt_B(\mathcal{C})$ et soit un morphisme $f \in \mathcal{C}(Z, \ker(A, p, s))$ et un autre morphisme $\tilde{f} \in Pt_B(\mathcal{C})(F(Z), (A, p, s))$, on a alors le diagramme suivant dans $\mathcal{C}$:

$$Z \xrightarrow{f} K[p] \xrightarrow{\ker(p)} A \xrightleftharpoons[p]{p} B$$

et le suivant dans $Pt_B(\mathcal{C})$:

$$\begin{array}{ccc} B+Z & \xrightarrow{h=\tilde{f}} & A \\ \uparrow i_B \downarrow (1_B)_0 & & \uparrow s \downarrow p \\ B & \xlongequal{\quad} & B \end{array}$$

où $h : B+Z \rightarrow A$ est un morphisme tel que $\begin{pmatrix} 1_B \\ 0 \end{pmatrix} = p \circ h$ et $s = h \circ i_B$. Dès lors, on pose $h := \begin{pmatrix} s \\ g \end{pmatrix}$ où $g : Z \rightarrow A$ est un morphisme dans $\mathcal{C}$ tel que $p \circ g = 0$. Vérifions que ce candidat pour h est le bon morphisme $\tilde{f}$: avec le diagramme suivant dans $\mathcal{C}$ résumant les morphismes liés au coproduit $B+Z$. C'est presque immédiat que h remplit les deux conditions pour que ce soit un morphisme dans $Pt_B(\mathcal{C})$

$$\begin{array}{ccccc} & & B+Z & & \\ & \nearrow i_B & & \nwarrow i_Z & \\ B & & & & Z \\ & \searrow s & & \swarrow g & \\ & & A & & \end{array}$$

Dès lors, on a bien que $\begin{pmatrix} s \\ g \end{pmatrix} \circ i_B = s$ et pour la condition $\begin{pmatrix} 1_B \\ 0 \end{pmatrix} = p \circ \begin{pmatrix} s \\ g \end{pmatrix}$, il suffit de vérifier que si on précompose⁶ avec i_B et i_Z , on obtient bien les mêmes morphismes :

- $1_B = \begin{pmatrix} 1_B \\ 0 \end{pmatrix} \circ i_B = p \circ \begin{pmatrix} s \\ g \end{pmatrix} \circ i_B = p \circ s$;
- $0 = \begin{pmatrix} 1_B \\ 0 \end{pmatrix} \circ i_Z = p \circ \begin{pmatrix} s \\ g \end{pmatrix} \circ i_Z = p \circ g$

Cependant, il n'est pas clair que nous ayons une bijection entre

$$f \in \mathcal{C}(Z, \ker(A, p, s)) \quad \text{et} \quad \tilde{f} \in Pt_B(\mathcal{C})(F(Z), (A, p, s))$$

$f \in \mathcal{C}(Z, \ker(A, p, s))$ et $\tilde{f} \in Pt_B(\mathcal{C})(F(Z), (A, p, s))$. Or, on se rappelle que nous avons dans $\mathcal{C}$ que $p \circ \ker(p) = 0$ et que donc $p \circ \ker(p) \circ f = 0$ et $\ker(p) \circ f \in \mathcal{C}(Z, X)$. Dès lors, on pose $g := \ker(p) \circ f$. Cela nous montre que nous avons une bijection via le morphisme g .

6. On rappelle que la paire (i_B, i_Z) est conjointement épimorphique.

Il ne reste plus qu'à montrer la naturalité de cette bijection $\theta_{X,(A,p,s)}$. Soit $\gamma \in \mathcal{C}(X',X)$ et γ un morphisme dans $Pt_B(\mathcal{C})$ comme montré dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{\delta} & A' \\ \swarrow p & & \searrow s' \\ & B & \end{array} \quad \begin{array}{ccc} & \nwarrow s & \\ & & \nearrow p' \\ & & \end{array}$$

On veut montrer que le carré

$$\begin{array}{ccc} Pt_B(\mathcal{C})(F(X), (A, p, s)) & \xleftarrow{\theta_{X,(A,p,s)}^{-1}} & \mathcal{C}(X, G(A, p, s)) \\ \delta \circ - \circ F(\gamma) \downarrow & & \downarrow G(\delta) \circ - \circ \gamma \\ Pt_B(\mathcal{C})(F(X'), (A', p', s')) & \xleftarrow{\theta_{X,(A',p',s')}^{-1}} & \mathcal{C}(X', G(A', p', s')) \end{array}$$

est commutatif. Soit $f \in \mathcal{C}(X, G(A, p, s))$ alors on sait que $\theta_{X,(A,p,s)}^{-1}(f) = \begin{pmatrix} s \\ \ker(p) \circ f \end{pmatrix}$ et de plus, on sait que $F(\gamma) = 1_B + \gamma : B + X' \rightarrow B + X$. On a alors

$$\delta \circ \theta_{X,(A,p,s)}^{-1}(f) \circ F(\gamma) = \delta \circ \begin{pmatrix} s \\ \ker(p) \circ f \end{pmatrix} \circ (1_B + \gamma).$$

De l'autre côté, on sait que $G(\delta)$ est donné par l'unique morphisme rendant le carré suivant commutatif

$$\begin{array}{ccc} K[p] & \xrightarrow{\tilde{\delta} := G(\gamma)} & K[p'] \\ \ker(p) \downarrow & & \downarrow \ker(p') \\ A & \xrightarrow{\delta} & A' \end{array}$$

On a alors une composition de morphismes

$$X' \xrightarrow{\gamma} X \xrightarrow{f} K[p] \xrightarrow{\tilde{\delta}} K[p']$$

et si on applique la bijection $\theta_{X',(A',p',s')}^{-1}$ à cette composition, on trouve un morphisme

$$h := \begin{pmatrix} s' \\ \ker(p') \circ \tilde{\delta} \circ f \circ \gamma \end{pmatrix} : B + X' \rightarrow A'$$

qui est l'unique morphisme rendant les deux triangles suivants commutatifs.

$$\begin{array}{ccccc} & & B + X' & & \\ & \nearrow i_B & \uparrow & \nwarrow i_{X'} & \\ B & & & & X' \\ & \searrow s' & \downarrow h & \swarrow \ker(p') \circ \tilde{\delta} \circ f \circ \gamma & \\ & & A & & \end{array}$$

Dès lors, pour montrer le résultat il suffit de vérifier que si on précompose $\delta \circ (ker(p) \circ f) \circ (1_A + \gamma)$ avec i_B et i_Z et que l'on trouve respectivement s' et $ker(p') \circ \tilde{\delta} \circ f \circ \gamma$ alors la preuve sera terminée :

- $\delta \circ (ker(p) \circ f) \circ (1_A + \gamma) \circ i_B = \delta \circ (ker(p) \circ f) \circ j_B = \delta \circ s = s'$ où la dernière égalité est obtenue puisque γ est un morphisme dans $Pt_B(\mathcal{C})$;
- $\delta \circ (ker(p) \circ f) \circ (1_A + \gamma) \circ i_{X'} = \delta \circ (ker(p) \circ f) \circ j_X \circ \gamma = \delta \circ ker(p) \circ f \circ \gamma = ker(p') \circ \tilde{\delta} \circ f \circ \gamma$ où la dernière égalité est obtenue par la définition de $\tilde{\delta}$.

Cela conclut la preuve. $\square$

Puisque nous avons une adjonction par le Lemme 4.2.2.3, on peut alors expliciter l'unité et la co-unité de cette adjonction ⁷ :

- soit $X \in \mathcal{C}$ alors l'unité η_X est induite par l'injection $X \rightarrow B + X$. En d'autres mots, on a que η_X est le morphisme rendant le triangle

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{i_X} & B + X \\ & \searrow \eta_X & \uparrow n_{B,X} \\ & & BbX \end{array}$$

commutatif.

- soit $(A, p, s) \in Pt_B(\mathcal{C})$ alors $\varepsilon_{(A,p,s)} : F \circ G(A, p, s) = (B + K[p], \begin{pmatrix} 1_B \\ 0 \end{pmatrix}, i_B)$ est induit par les morphismes $s : B \rightarrow A$ et $ker(p) : K[p] \rightarrow A$ comme le montre le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} & & B + K[p] & & \\ & \nearrow i_B & \downarrow \varepsilon_{(A,p,s)} & \nwarrow i_{K[p]} & \\ B & & & & K[p] \\ & \searrow s & & \swarrow ker(p) & \\ & & A & & \end{array}$$

Par la suite on notera par $Bb(-) := G \circ F$ la monade associée à l'adjonction du Lemme 4.2.2.3. En fait, pour chaque objet $A \in \mathcal{C}$, on a un diagramme de noyau :

$$A \xrightarrow{F} \begin{array}{c} B + A \\ \uparrow i_B \downarrow \begin{pmatrix} 1_B \\ 0 \end{pmatrix} \\ B \end{array} \xrightarrow{G} K \left[\begin{pmatrix} 1_B \\ 0 \end{pmatrix} \right] = BbA \xrightarrow{n_{B,A}} B + A \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_B \\ 0 \end{pmatrix}} B + A.$$

7. Voir [9, Section 3.2] pour plus de détails.

On notera que le morphisme $n_{B,A}$ est un monomorphisme puisque par définition c'est le noyau de $\begin{pmatrix} 1_B \\ 0 \end{pmatrix}$.

Afin de mieux comprendre à quoi correspond ce nouvel objet BbA , nous allons voir à quoi cela correspond si on considère $\mathcal{C}$ comme étant la catégorie des groupes GRP.

EXEMPLE 4.2.2.4. [23] Dans la catégorie GRP, l'objet BbA (où B est un groupe fixé et où A est un groupe arbitraire) correspond au groupe engendré par les conjugaisons formelles d'éléments de A par ceux de B . On rappelle qu'une conjugaison formelle d'éléments de A par ceux de B veut dire que l'on a des triplets de la forme (b, a, b^{-1}) où $a \in A$ et $b \in B$. En effet par la définition du morphisme $n_{B,A} : BbA \rightarrow B + A$ qui est le noyau du morphisme $\begin{pmatrix} 1_B \\ 0 \end{pmatrix} : B + A \rightarrow B$ alors $BbA = \{g \in B + A \mid \begin{pmatrix} 1_B \\ 0 \end{pmatrix}(g) = e_B\}$. Or on sait que dans le cadre des groupes le coproduit $B + A$ correspond au produit libre de B et A . Dès lors, on sait que si $g \in B + A$, alors $g = (s_1, s_2, \dots, s_n)$ où $\{s_i\}_{1 \leq i \leq n} \in A \cup B$ et tel que, sauf si g est le neutre, alors aucun des s_i n'est le neutre de A et ni de B et deux éléments consécutifs dans l'écriture de g n'appartiennent pas au même groupe. De plus on sait caractériser le morphisme $\begin{pmatrix} 1_B \\ 0 \end{pmatrix} : B + A \rightarrow B$. En effet si $a \in A$ et $b \in B$ alors $ab \in B + A$ et dès lors $\begin{pmatrix} 1_B \\ 0 \end{pmatrix}(a, b) = 0(a) \cdot 1_B(b) = e_B \cdot b = b$. Ainsi, il est facile de voir que les $g \in B + A$ tel que $\begin{pmatrix} 1_B \\ 0 \end{pmatrix}(g) = e_G$ sont de la forme (b, a, b^{-1}) avec $a \in A$ et $b \in B$.

On a maintenant assez de matériel pour définir les B -actions internes dans $\mathcal{C}$.

DÉFINITION 4.2.2.5. [23] Soit $B \in \mathcal{C}$ un objet fixé dans une catégorie $\mathcal{C}$ finiment complète et admettant les produits, une B -action interne dans $\mathcal{C}$ est la donnée d'un morphisme $\xi : BbA \rightarrow A$ rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccccc} Bb(BbA) & \xrightarrow{\gamma_{B,B,A}} & (B+B)bA & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_B \\ 1_B \end{pmatrix} b 1_A} & BbA & \xleftarrow{\eta_A} & A \\ 1_B b \xi \downarrow & & & & \downarrow \xi & \nearrow & \\ BbA & \xrightarrow{\xi} & & & A & & \end{array}$$

Avant de poursuivre vers la définition de blocs, on va commenter la définition précédente :

- $\eta_A : A \rightarrow BbA$ est l'unité associée à la monade ;
- la composition $\begin{pmatrix} 1_B \\ 1_B \end{pmatrix} b 1_A \circ \gamma_{B,B,A} = \mu_A$ est la multiplication dans la définition de monade⁸ et le morphisme $\gamma_{A,B,X} : Ab(BbX) \rightarrow (A+B)bX$

8. Voir [9] pour plus de détails.

est l'unique morphisme rendant commutatif le diagramme :

$$\begin{array}{ccc}
 A \flat (B \flat X) & \xrightarrow{\gamma_{A,B,X}} & (A+B) \flat X \\
 n_{A,B \flat X} \downarrow & & \downarrow n_{A+B,X} \\
 A + (B \flat X) & & \\
 1_A + n_{B,X} \downarrow & & \downarrow \\
 A + (B + X) & \longrightarrow & (A+B) + X
 \end{array}$$

De plus si on note la composition $(\begin{smallmatrix} 1_B \\ 1_B \end{smallmatrix}) \flat 1_A \circ \gamma_{B,B,A}$ par μ_A , qui est la multiplication associée à la monade, alors μ_A est l'unique morphisme rendant commutatif le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 B \flat (B \flat A) & \xrightarrow{\mu_A} & B \flat A \\
 n_{B,B \flat A} \downarrow & & \downarrow n_{B,A} \\
 B + (B \flat A) & & \\
 1_B + n_{B,A} \downarrow & & \downarrow \\
 B + (B + A) & \xrightarrow{\alpha} (B+B) + A \xrightarrow{(\begin{smallmatrix} 1_B \\ 1_B \end{smallmatrix}) + 1_A} & B + A
 \end{array}$$

où α est l'isomorphisme canonique entre $B + (B + X)$ et $(B+B) + X$.

Avant de continuer la discussion d'action dans le but de définir les blocs, il est utile de noter qu'étant donné une catégorie $\mathcal{C}$ semi-abélienne⁹ alors la *catégorie des actions internes dans $\mathcal{C}$* est équivalent à la *catégorie des points de $\mathcal{C}$* . Faisons une petite remarque pour montrer cette équivalence avant de revenir à l'étude des actions pour définir les blocs.

REMARQUE 4.2.2.6. [13] [15, Remark 2.17] Commençons par définir les deux catégories mentionnées précédemment. Soit $Pt(\mathcal{C})$ la catégorie des points de $\mathcal{C}$. Les objets de $Pt(\mathcal{C})$ sont les *points* dans $\mathcal{C}$ donnés par une paire (p, s) tel que p est un épimorphisme scindé avec comme scindage s , c'est-à-dire que si $p : A \rightarrow B$ et $s : B \rightarrow A$ alors $p \circ s = 1_B$. Les morphismes de $Pt(\mathcal{C})$ entre deux points (p, s) et (p', s') est donné par une paire de morphismes verticales (f, g) telle que les deux carrés formés par les morphismes parallèles

$$\begin{array}{ccc}
 A & \begin{array}{c} \xrightarrow{p} \\ \xleftarrow{s} \end{array} & B \\
 f \downarrow & & \downarrow g \\
 A' & \begin{array}{c} \xrightarrow{p'} \\ \xleftarrow{s'} \end{array} & B'
 \end{array}$$

commutent. Soit $Act(\mathcal{C})$ la catégorie des actions internes sur $\mathcal{C}$. Les objets de cette catégorie sont les triplets (A, X, ξ) où $\xi : A \flat X \rightarrow X$ est une A -action

9. Voir [13, 3.4 Theorem] pour plus d'explications sur cette condition.

sur X . Un morphisme entre deux triplets (A, X, ξ) et (A', X', ξ') est donné par une paire de morphisme dans $\mathcal{C}$ (f, g) où $f : A \rightarrow A'$ et $g : X \rightarrow X'$ telle que $\xi' \circ (f \flat g) = g \circ \xi$.

Regardons maintenant comment on peut montrer que les catégories $Pt(\mathcal{C})$ et $Act(\mathcal{C})$ sont équivalentes. Nous n'allons pas faire les détails de la preuve de l'équivalence mais nous allons tout de même définir deux foncteurs qui permettent de vérifier l'équivalence (voir [5, Définition 3.4.4]).

Définissons deux foncteurs : $F_1 : Pt(\mathcal{C}) \rightarrow Act(\mathcal{C})$ et $F_2 : Act(\mathcal{C}) \rightarrow Pt(\mathcal{C})$. Définissons le foncteur F_1 . Soit $(p : A \rightarrow B, s : B \rightarrow A) \in Pt(\mathcal{C})$, alors $F_1(p : A \rightarrow B, s : B \rightarrow A) = (B, K[p], \xi)$ où ξ est l'unique morphisme rendant commutatif le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccccc} B \flat K[p] & \xrightarrow{n_{B, K[p]}} & B + K[p] & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_B \\ 0 \end{pmatrix}} & B \\ \downarrow \xi & & \downarrow \begin{pmatrix} s \\ \ker(p) \end{pmatrix} & & \parallel \\ K[p] & \xrightarrow{\ker(p)} & A & \xrightarrow{p} & B \end{array}$$

et $(K[p], \ker(p))$ est le noyau du morphisme p . Pour montrer que ξ est bien l'unique morphisme rendant commutatif le carré de gauche dans le diagramme ci-dessus, il faut noter deux choses :

- On a bien que le carré de droit est commutatif puisque $p \circ s = 1_B$ et $p \circ \ker(p) = 0$, et il suffit de noter que la commutativité suite de ces deux égalités et de l'unicité dans le morphisme associé au coproduit $B + K[p]$;
- La commutativité du diagramme de gauche et l'unicité du morphisme ξ le rendant commutatif suivent de la propriété universelle du noyau de p . En effet, on a que $p \circ \begin{pmatrix} s \\ \ker(p) \end{pmatrix} \circ n_{B, K[p]} = \begin{pmatrix} 1_B \\ 0 \end{pmatrix} \circ n_{B, K[p]} = 0$. On rappelle que la dernière égalité suit de la définition du morphisme $n_{B, K[p]}$. Dès lors, $\begin{pmatrix} s \\ \ker(p) \end{pmatrix} \circ n_{B, K[p]}$ se factorise à travers $\ker(p)$ via ξ .

Montrons que le triplet $(B, K[p], \xi)$ est bien une action et donc un objet de la catégorie $Act(\mathcal{C})$. Il nous suffit de vérifier les deux conditions de la Définition 4.2.2.5 :

- Puisque $\ker(p)$ est un monomorphisme, montrer l'égalité $\xi \circ \eta_B = 1_{K[p]}$ cela revient à vérifier l'égalité $\ker(p) \circ \xi \circ \eta_B = \ker(p)$. Or par définition de ξ et de la condition liée à l'unité η_B , on a

$$\ker(p) \circ \xi \circ \eta_B = \begin{pmatrix} s \\ \ker(p) \end{pmatrix} \circ n_{B, K[p]} \circ \eta_B = \begin{pmatrix} s \\ \ker(p) \end{pmatrix} \circ i_{K[p]} = \ker(p).$$

- La seconde égalité sera un peu plus technique à montrer puisque nous allons devoir utiliser ce que l'on sait sur la multiplication $\mu_{K[p]}$ associée à la monade. En effet, on sait que

$$(4.4) \quad n_{B,K[p]} \circ \mu_{K[p]} = \left(\begin{pmatrix} 1_B \\ 1_B \end{pmatrix} + 1_{K[p]} \right) \circ \alpha \circ (1_B + n_{B,K[p]}) \circ n_{B,B \flat BK[p]}.$$

De plus, en explicitant l'isomorphisme canonique α , on peut montrer que

$$(4.5) \quad \left(\begin{pmatrix} 1_B \\ 1_B \end{pmatrix} + 1_{K[p]} \right) \circ \alpha \circ (1_B + n_{B,K[p]}) = \begin{pmatrix} i_B \\ n_{B,K[p]} \end{pmatrix}.$$

Dès lors, on peut montrer la seconde égalité afin de vérifier que ξ est bien une B -action sur $K[p]$. De nouveau, puisque $\ker(p)$ est un monomorphisme, on sait que l'on l'équivalence entre les deux égalités suivantes :

$$\xi \circ \mu_{K[p]} = \xi \circ (1_B \flat \xi) \iff \ker(p) \circ \xi \circ \mu_{K[p]} = \ker(p) \circ \xi \circ (1_B \flat \xi)$$

Ainsi, il suffit de vérifier la seconde égalité. Par les équations (4.4) et (4.5) et par définition du morphisme ξ , on a

$$\ker(p) \circ \xi \circ \mu_{K[p]} = \begin{pmatrix} s \\ \ker(p) \end{pmatrix} \circ n_{B,K[p]} \circ \mu_{K[p]} = \begin{pmatrix} s \\ \ker(p) \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} i_B \\ n_{B,K[p]} \end{pmatrix} \circ n_{B,B \flat K[p]}.$$

D'un autre coté, on a par définition de ξ et par définition du morphisme $n_{B,-} : B \flat - \rightarrow B + -$, on trouve

$$\ker(p) \circ \xi \circ (1_B \flat \xi) = \begin{pmatrix} s \\ \ker(p) \end{pmatrix} \circ n_{B,K[p]} \circ (1_B \flat \xi) = \begin{pmatrix} s \\ \ker(p) \end{pmatrix} \circ (1_B + \xi) \circ n_{B,B \flat K[p]}.$$

Dès lors, on note que pour terminer la vérification que ξ est bien une action, il suffit de montrer que $1_B + \xi = \begin{pmatrix} i_B \\ n_{B,K[p]} \end{pmatrix}$. Or c'est le cas par unicité du morphisme associé au coproduit $B + (B \flat K)$, par définition de ξ et par protomodularité¹⁰ de $\mathcal{C}$. Ainsi, on a montré que le triplet $(B, K[p], \xi) \in \text{Act}(\mathcal{C})$.

Définissons maintenant le second foncteur F_2 . Ce foncteur F_2 envoie un triplet (A, X, ξ) de $\text{Act}(\mathcal{C})$ sur $X \rtimes_{\xi} A \xrightleftharpoons[i_{\xi}]{\pi_{\xi}} A$ où le *produit semi-direct* $X \rtimes_{\xi} A$ est défini comme étant le coégalisateur suivant

$$A \flat X \xrightleftharpoons[n_{A,X}]{i_X \circ \xi} A + X \xrightarrow{\sigma_{\xi}} X \rtimes_{\xi} A$$

10. En effet, il faut utiliser le fait que $\begin{pmatrix} s \\ \ker(p) \end{pmatrix}$ est un épimorphisme mais par protomodularité, c'est un épimorphisme fort.

Le morphisme π_ξ est l'unique morphisme tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} A + X & \xrightarrow{\sigma_\xi} & X \rtimes_\xi A \\ \Sigma_{A,X} \downarrow & & \downarrow \pi_\xi \\ A \times X & \xrightarrow{\pi_1} & A \end{array}$$

commute, où $\Sigma_{A,X} := \left(\begin{smallmatrix} 1_A & 0 \\ 0 & 1_X \end{smallmatrix} \right) = \left\langle \begin{smallmatrix} 1_A \\ 0 \end{smallmatrix}, \begin{smallmatrix} 0 \\ 1_X \end{smallmatrix} \right\rangle$. En effet, π_ξ est défini via la propriété universelle du coégalisateur puisque $\pi_1 \circ \Sigma_{A,X}$ coégalise $n_{A,X}$ et $i_X \circ \xi$:

$$\begin{aligned} \pi_1 \circ \Sigma_{A,X} \circ (i_X \circ \xi) &= \pi_1 \circ \langle 0, 1_X \rangle \xi = 0 \\ &= \begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix} \circ n_{A,X} = \pi_1 \circ \Sigma_{A,X} \circ n_{A,X}. \end{aligned}$$

Et pour finir, on pose $i_\xi = \sigma_\xi \circ i_A$. Ainsi, on a bien que (π_ξ, i_ξ) est un point de $\mathcal{C}$ puisque

$$\pi_\xi \circ i_\xi = \pi_\xi \circ \sigma_\xi \circ i_A = \pi_1 \circ \Sigma_{A,X} \circ i_A = \pi_1 \circ \langle 1_A, 0 \rangle = 1_A$$

Cette dernière égalité conclut la remarque concernant l'équivalence entre la catégorie des actions de $\mathcal{C}$ et la catégorie des points de $\mathcal{C}$.

On peut toutefois aussi considérer un cas particulier d'action. En effet, pour tout objet $A \in \mathcal{C}$, on peut définir une action canonique de A sur A par la composition :

$$\chi_A : A \flat A \xrightarrow{n_{A,A}} A + A \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix}} A.$$

LEMME 4.2.2.7. *Le morphisme χ_A défini ci-dessus est une action.*

La démonstration du résultat précédent est due à l'auteur.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, on a par la condition sur l'unité η_A associé à la monade, que $n_{A,A} \circ \eta_A = i_A$ et donc $\begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} \circ n_{A,A} \circ \eta_A = \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} \circ i_A = 1_A$. Pour la seconde condition, on doit vérifier l'égalité

$$\chi_A \circ \mu_A = \chi_A \circ (1_A \flat \chi_A).$$

Or par définition du morphisme $n_{A,-} : A \flat - \rightarrow A + -$, on obtient l'équation

$$\chi_A \circ (1_A \flat \chi_A) = \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} \circ n_{A,A} \circ (1_A \flat \chi_A) = \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} \circ (1_A + \chi_A) \circ n_{A,A \flat A}.$$

De l'autre coté par la propriété énoncée pour le morphisme μ_A , on obtient

$$\chi_A \circ \mu_A = \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} \circ n_{A,A} \circ \mu_A = \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} + 1_A \right) \circ \alpha \circ (1_A + n_{A,A}) \circ n_{A,A \flat A}.$$

Or puisque α correspond à l'isomorphisme canonique du produit ternaire, on a ainsi $\left(\begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} + 1_A\right) \circ \alpha = 1_A + \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix}$. Dès lors, par l'unicité du morphisme induit par le coproduit, on a $(1_A + \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix}) \circ (1_A + n_{A,A}) = 1_A + \chi_A$. Ainsi si on résume les dernières étapes comme suit :

$$\begin{aligned}
 \chi_A \circ \mu_A &= \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} \circ n_{A,A} \circ \mu_A \\
 &= \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} \circ \left(\begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} + 1_A \right) \circ \alpha \circ (1_A + n_{A,A}) \circ n_{A,AbA} \\
 &= \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} \circ \left(1_A + \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} \right) \circ (1_A + n_{A,A}) \circ n_{A,AbA} \\
 &= \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} \circ (1_A + \chi_A) \circ n_{A,AbA} \\
 &= \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} \circ n_{A,A} \circ (1_A \flat \chi_A) = \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} \circ (1_A + \chi_A) \circ n_{A,AbA} \\
 &= \chi_A \circ (1_A \flat \chi_A)
 \end{aligned}$$

On peut voir que l'on a montré l'égalité souhaitée et cela termine la preuve. $\square$

Dès lors, on peut noter que ce morphisme correspond dans GRP à la conjugaison usuelle dans A . En effet, on sait déjà que AbA est engendré par les triplets de la forme (g, x, g^{-1}) . Or le morphisme $\begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix}$ envoie ce triplet sur $g \cdot x \cdot g^{-1}$ la conjugaison usuelle.

DÉFINITION 4.2.2.8. [23] Un sous-objet $k: K \rightarrowtail A$ est un *bloc* dans A quand il existe un morphisme $\chi: AbK \rightarrow K$ tel que le diagramme

$$\begin{array}{ccc}
 AbK & \xrightarrow{\chi} & K \\
 1_A \flat k \downarrow & & \downarrow k \\
 AbA & \xrightarrow{\chi_A} & A
 \end{array}$$

commute.

On notera que contrairement aux définitions de sous-objets normaux et semi-normaux, on impose dans la définition de blocs que k soit un monomorphisme car ce n'est pas une conséquence de la définition. De plus, on note que puisque k est un monomorphisme alors χ est unique.

Le prochain résultat et sa preuve sont dus à l'auteur.

LEMME 4.2.2.9. Dans les conditions et avec les notations de la Définition 4.2.2.8, alors χ est une action.

DÉMONSTRATION. Tout d'abord montrons que $\chi \circ \eta_K = 1_K$. Puisque k est un monomorphisme cela revient équivalent à vérifier que $k = k \circ \chi \circ \eta_K$. Or on sait par définition de χ que $k \circ \chi \circ \eta_K = \chi_A \circ 1_A \flat k \circ \eta_K$, de plus comme η est une transformation naturelle et puisque $1_A \flat k = GF(k)$ on a que $\chi_A \circ 1_A \flat k \circ \eta_K = \chi_1 \circ \eta_A \circ k$. Pour finir puisque χ_A est une action on a ainsi $\chi_1 \circ \eta_A \circ k = 1_A \circ k = k$. D'autre part on veut montrer que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} Ab(AbK) & \xrightarrow{\mu_K} & AbK \\ 1_A \flat \chi \downarrow & & \downarrow \chi \\ AbK & \xrightarrow{\chi} & K \end{array}$$

commute. Or puisque k est un monomorphisme, on sait que montrer

$$\chi \circ (1_A \flat \chi) = \chi \circ \mu_K$$

revient à montrer que

$$(4.6) \quad \chi_A \circ 1_A \flat k \circ 1_A \flat k = k \circ \chi \circ (1_A \flat \chi) = k \circ \chi \circ \mu_K = \chi_1 \circ Abk \circ \mu_K.$$

Or on sait que puisque χ_A est une action alors le carré

$$\begin{array}{ccc} Ab(AbA) & \xrightarrow{\mu_A} & AbA \\ 1_A \flat \chi_A \downarrow & & \downarrow \chi_A \\ AbA & \xrightarrow{\chi_A} & A \end{array}$$

commute. Dès lors, pour montrer l'équation 4.6, il suffit de montrer que le carré supérieur commute dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc} Ab(AbK) & \xrightarrow{\mu_K} & AbK \\ 1_A \flat (1_A \flat k) \downarrow & & \downarrow 1_A \flat k \\ Ab(AbA) & \xrightarrow{\mu_A} & AbA \\ 1_A \flat \chi_A \downarrow & & \downarrow \chi_A \\ AbA & \xrightarrow{\chi_A} & A \end{array}$$

et que $1_A \flat \circ 1_A \flat \chi = 1 \flat \chi_A \circ 1_A \flat (1_A \flat k)$. Puisque $\mu : (Ab(-)) \circ (Ab(-)) \Rightarrow Ab(-)$ est une transformation naturelle, on a directement que le carré supérieur commute. Pour finir, on remarque que si on note le foncteur associé à la monade par $T := G \circ F$ alors, on trouve

$$\begin{aligned} (1_A \flat \chi_A) \circ (1_A \flat (1_A \flat k)) &= T(\chi_A) \circ T(1_A \flat k) = T(\chi_A \circ 1_A \flat) \\ &= T(k \circ \chi) = T(k) \circ T(\chi) = (1_A \flat k) \circ (1_A \flat \chi) \end{aligned}$$

Cela termine la preuve que χ est bien une action. □

On notera que l'on peut définir la notion de bloc d'une autre manière équivalente à la Définition 4.2.2.8. En effet par [18, Définition 7.1], dans les conditions et avec les notations de la Définition 4.2.2.8, on peut montrer que les deux carrés suivants sont équivalents :

$$\begin{array}{ccc}
 AbK & \xrightarrow{\chi} & K \\
 1_A \flat k \downarrow & & \downarrow k \\
 AbA & \xrightarrow{\chi_A} & A
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 AbK & \xrightarrow{\chi} & K \\
 n_{A,K} \downarrow & & \downarrow k \\
 A + K & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_A \\ k \end{pmatrix}} & A
 \end{array}$$

L'explication entre l'équivalence des deux définitions est due à l'auteur.

Celui de gauche étant celui de la Définition 4.2.2.8. Afin de montrer l'équivalence entre les deux diagrammes, il suffit de regarder le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 AbK & \xrightarrow{n_{A,K}} & A + K & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_A \\ 0_K \end{pmatrix}} & A \\
 \chi \downarrow & \searrow 1_A \flat k & \downarrow 1_A + k & \searrow \begin{pmatrix} 1_A \\ 0_A \end{pmatrix} & \parallel \\
 & AbA & \xrightarrow{n_{A,A}} & A + A & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_A \\ 0_A \end{pmatrix}} & A \\
 & & \searrow \chi_A & \downarrow \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} & \\
 & & K & \xrightarrow{k} & A
 \end{array}$$

On assume que ce diagramme montre l'équivalence entre les deux diagrammes pour la définition de blocs. En effet, il suffit de faire quelques remarques :

- par définition de χ_A , on a que $\chi_A = \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} \circ n_{A,A}$;
- par la propriété universelle du coproduit $A + K$, on a que $\begin{pmatrix} 1_A \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} \circ (1_A + k)$. En effet le résultat suit de l'unicité et des équations : $1_A = \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} \circ i_A = \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} \circ (1_A + k) \circ j_A = \begin{pmatrix} 1_A \\ k \end{pmatrix} \circ j_A = 1_A$ et $k = 1_A \circ k = \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} \circ i_A \circ k = \begin{pmatrix} 1_A \\ 1_A \end{pmatrix} \circ (1 + k) \circ j_K = \begin{pmatrix} 1_A \\ k \end{pmatrix} \circ j_K = k$ où j_A, j_K sont les injections associées au coproduit $A + K$ et i_A est l'injection associée au coproduit $A + A$;
- avec un argument similaire à celui fait dans le point précédent, on a que $\begin{pmatrix} 1_A \\ 0_A \end{pmatrix} \circ (1_A + k) = \begin{pmatrix} 1_A \\ 0_A \end{pmatrix}$; dès lors, on a par définition de $n_{A,A}$ et $n_{A,K}$ que le morphisme $\begin{pmatrix} 1_A \\ 0_A \end{pmatrix} \circ (1_A + k) \circ n_{A,K}$ se factorise à travers $n_{A,A}$ et cette factorisation est donnée par $1_A \flat k$.

Dès lors, on remarque que l'on a

$$k \circ \chi = \begin{pmatrix} 1_A \\ k \end{pmatrix} \circ n_{A,K} \iff k \circ \chi = \chi_A \circ 1_A \flat k.$$

On aimerait savoir le lien entre la notion de bloc et les deux autres notions données précédemment. Dès lors, on va approfondir le lien entre les blocs et

les sous-objets normaux. On va montrer que tout sous-objet semi-normal est toujours un bloc et que la réciproque n'est vraie que si $\mathcal{C}$ est pointée, admet les coproduits et est régulière.

THÉORÈME 4.2.2.10. [19, Theorem 2.2] *Les conditions suivantes sur un sous-objet $m : K \rightarrow A$ dans une catégorie pointée régulière avec les coproduits finis sont équivalentes :*

- (1) (K, m) est un bloc dans A ;
- (2) il existe une relation réflexive (S, s_1, s_2) sur A telle que m soit un sous-objet normal de A par rapport à la relation S .

On notera que la condition (ii) est équivalente à demander l'existence d'une relation réflexive (S, s_1, s_2) et d'un morphisme $k : K \rightarrow S$ tel que $m = s_1 \circ k$ et (K, k) est le noyau de s_2 .

DÉMONSTRATION. (i) $\implies$ (ii). On prend comme définition pour la relation (S, s_1, s_2) l'image régulière du morphisme

$$\left(\begin{array}{c} \langle 1_A, 1_A \rangle \\ \langle m, 0 \rangle \end{array} \right) = \left\langle \begin{pmatrix} 1_A \\ m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle : A + K \rightarrow A \times A$$

Dès lors (S, s_1, s_2) est défini (comme sur le diagramme 4.7) avec un épimorphisme régulier $e : A + K \rightarrow S$ tel que

$$s_1 \circ e = \begin{pmatrix} 1_A \\ m \end{pmatrix} : A + K \rightarrow A \text{ et } s_2 \circ e = \begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix} : A + K \rightarrow A$$

$$(4.7) \quad \begin{array}{ccc} A + K & \xrightarrow{e} \twoheadrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \langle s_1, s_2 \rangle \\ A \times A & \xlongequal{\quad} & A \times A \end{array}$$

Avec cette définition pour le morphisme $\langle s_1, s_2 \rangle$, on a par la factorisation « épimorphisme régulier-monomorphisme » associée au catégorie régulière que c'est un monomorphisme et donc (S, s_1, s_2) est bien une relation sur A .

De plus, la relation (S, s_1, s_2) est une relation réflexive. En effet, en composant les deux morphismes avec la première injection du coproduit $i_A : A \rightarrow A + K$, on obtient

$$s_A \circ e \circ i_A = \begin{pmatrix} 1_A \\ k \end{pmatrix} \circ i_A = 1_A = \begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix} \circ i_A = s_2 \circ e \circ i_A.$$

Ainsi on peut utiliser $e \circ i_A$ comme scindage joint pour la paire s_1, s_2 .

Considérons maintenant le diagramme commutatif

$$(4.8) \quad \begin{array}{ccccc} \text{Ab}K & \xrightarrow{f} & N & \xrightarrow{\quad} & 0 \\ \downarrow n_{A,K} & \searrow \chi & \swarrow l & \downarrow n & \downarrow \lrcorner \\ & K & & S & \downarrow \\ & \searrow k & & & A \\ A+K & \xrightarrow{e} & S & \xrightarrow{s_2} & A \end{array}$$

$(\begin{smallmatrix} 1_A \\ 0 \end{smallmatrix})$

constitué des flèches solides où (N, n) est le noyau de s_2 et puisque $(\text{Ab}K, n_{A,K})$ est le noyau de $s_2 \circ e = \begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix}$, alors $e \circ n_{A,K}$ se factorise à travers n via le morphisme f qui est induit par la propriété universelle du noyau de s_2 .

Puisque le carré de gauche et le rectangle extérieure sont des pullbacks par définition de noyau d'un morphisme alors le carré de gauche est aussi un pullback.

Ensuite, on peut considérer les flèches en pointillées dans le diagramme 4.8 comme définies comme suit :

- χ est le morphisme associé au block (K, m) ;
- $k := e \circ i_K$ où $i_K : K \rightarrow A + K$ est la seconde injection associée au coproduit ;
- puisque $s_2 \circ k = s_2 \circ e \circ i_K = \begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix} \circ i_K = 0$, alors par la propriété universelle du noyau de s_2 il existe un unique morphisme l tel que $n \circ l = k$

Ainsi, on remarque que $m = \begin{pmatrix} 1_A \\ m \end{pmatrix} = s_1 \circ e \circ i_K = s_1 \circ k$ comme souhaité.

Ensuite, on assume que le diagramme reste commutatif. Pour montrer cela, il suffit de vérifier que

$$(4.9) \quad e \circ n_{A,K} = k \circ \chi$$

Or, on a déjà que

$$s_1 \circ e \circ n_{A,K} = \begin{pmatrix} 1_A \\ m \end{pmatrix} \circ n_{A,K} = m \circ \chi = s_1 \circ k \circ \chi$$

et de plus puisque (K, m) est un bloc, on a

$$s_2 \circ e \circ n_{A,K} = \begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix} = 0 = 0 \circ \chi = \begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix} \circ i_K \circ \chi = s_2 \circ k \circ \chi$$

Or, puisque s_1 et s_2 sont conjointement monomorphiques et puisque (S, s_1, s_2) est une relation, alors cela prouve l'équation 4.9.

On assume aussi que χ est un épimorphisme scindé. Soit $h : k \rightarrow \text{Ab}K$ le morphisme induit par la propriété universelle du noyau $(\text{Ab}K, n_{A,K})$ puisque $\begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix} \circ i_K = 0$ comme sur la diagramme

$$\begin{array}{ccccc} \text{Ab}K & \xrightarrow{n_{A,K}} & A + K & \xrightarrow[\begin{smallmatrix} 0 \\ \begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix} \end{smallmatrix}]{\begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix}} & A \\ & \nwarrow h & \uparrow i_K & & \\ & & K & & \end{array}$$

dès lors, on a que $n_{A,K} \circ h = i_K$. Ainsi, on trouve

$$m \circ \chi \circ h = \begin{pmatrix} 1_A \\ m \end{pmatrix} \circ n_{A,K} \circ h = \begin{pmatrix} 1_A \\ m \end{pmatrix} \circ i_K = m$$

Mais puisque par hypothèse m est un monomorphisme, on trouve que $\chi \circ h = 1_K$.

Finalement, on observe

- Puisque le carré de droite est un pullback et puisque e est un épimorphisme régulier, alors par régularité f est aussi un épimorphisme régulier;
- Puisque χ et f sont des épimorphismes réguliers, alors l aussi en est un;
- Etant donné que nous avons que $s_1 \circ k = m$, $s_2 \circ k = 0$ et m est un monomorphisme alors k aussi est un monomorphisme. En effet si on considère les diagrammes suivants :

$$\begin{array}{ccc} K & \xrightarrow{k} & S \\ & \searrow \langle m, 0 \rangle & \downarrow \langle s_1, s_2 \rangle \\ & & A \times A \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} Z & \xrightarrow[\begin{smallmatrix} g \\ \end{smallmatrix}]{f} & K & \xrightarrow{\langle m, 0 \rangle} & A \times A \\ & & \searrow m & & \downarrow \pi_1 \\ & & & & A \end{array}$$

Le diagramme de gauche nous montre que si on a que $\langle m, 0 \rangle \circ f = \langle m, 0 \rangle \circ g$ alors, puisque m est un monomorphisme, alors $f = g$ et donc $\langle m, 0 \rangle$ est un monomorphisme et donc k aussi;

- Puisque $n \circ l = k$, l est un épimorphisme régulier et k et n sont des monomorphismes alors l est un isomorphisme. Cela nous montre alors que (K, k) est le noyau de s_2 et cela conclut la preuve de la première implication.

(ii) $\implies$ (i) Supposons que (ii) soit vrai et considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 A \flat K & \xrightarrow{n_{A,K}} & A + K & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix}} & A \\
 \chi \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} t \\ \ker(s_2) \end{pmatrix} & & \parallel \\
 K & \xrightarrow{k} & S & \xrightarrow{s_2} & A
 \end{array}$$

où $t : A \rightarrow S$ est tel que $s_1 \circ t = 1_A = s_2 \circ t$ (un tel morphisme existe puisque la relation (S, s_1, s_2) est réflexive) et χ est induit par la propriété universelle du noyau de s_2 puisque $s_2 \circ \begin{pmatrix} t \\ k \end{pmatrix} \circ n_{A,K} = 0$.

On veut montrer qu'un tel χ rend le diagramme suivant

$$\begin{array}{ccc}
 A \flat K & \xrightarrow{1_A \flat m} & A \flat A \\
 \chi \downarrow & & \downarrow \chi_A \\
 K & \xrightarrow{m} & A
 \end{array}$$

commutatif ou de manière équivalente, prouver l'égalité :

$$m \circ \chi = \begin{pmatrix} 1_A \\ m \end{pmatrix} \circ n_{A,K}$$

Puisque $m = s_1 \circ k$ et $k \circ \chi = \begin{pmatrix} t \\ k \end{pmatrix} \circ n_{A,K}$, on a

$$m \circ \chi = s_1 \circ k \circ \chi = s_1 \circ \begin{pmatrix} t \\ k \end{pmatrix} \circ n_{A,K} = \begin{pmatrix} s_1 \circ t \\ s_1 \circ k \end{pmatrix} \circ n_{A,K} = \begin{pmatrix} 1_A \\ m \end{pmatrix} \circ n_{A,K}.$$

□

Au vu de la preuve, on notera que l'implication (ii) $\implies$ (i) est vraie sans l'hypothèse de régularité sur $\mathcal{C}$ alors que pour la réciproque c'est nécessaire.

4.3. Idéaux

Après avoir vu la notion de sous-objet semi-normal et de bloc, il est temps de passer à la dernière notion de sous-objet la plus générale possible : la notion d'*idéaux*. Commençons par la définition avant de voir le lien entre ce nouveau concept et ceux introduits précédemment dans le chapitre.

DÉFINITION 4.3.0.1. [23] Un sous-objet $k : K \rightarrowtail A$ est un *idéal* dans A quand il est l'image régulière d'un bloc le long d'un épimorphisme régulier.

Afin de mieux comprendre cette définition on va l'expliciter. Un sous-objet $k : K \rightarrow A$ est un idéal s'il existe un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{f'} & K \\ \downarrow l & & \downarrow k \\ B & \xrightarrow{f} & A \end{array}$$

où l est un bloc et f, f' sont des épimorphismes réguliers.

Avant de continuer à étudier les idéaux, il est utile de motiver une telle définition. On sait que dans les catégories semi-abéliennes, l'axiome (A2) est vrai (voir Proposition 2.4.3.11). On rappelle cet axiome : l'image régulière de noyau est encore un noyau. Dès lors, on a que dans les catégories semi-abéliennes, les noyaux sont stables par image régulière. Or on sait que la notion de noyau est assez restrictive puisqu'elle est déjà plus forte que la notion de sous-objet normal en générale (voir Lemme 3.1.0.9). Dès lors, on pourrait essayer de considérer des objets moins restrictifs et d'ensuite prendre leur image régulière. Pour le moment, la notion la plus faible que l'on a rencontré est la notion de bloc. Dès lors, on peut voir ce qui motive la définition d'idéal puisque qu'un idéal est l'image régulière d'un bloc qui est la notion la plus générale que l'on a introduit dans ce texte et dans ce cas, on n'a pas besoin de se restreindre à des catégories où l'axiome (A2) est vrai comme dans les catégories semi-abéliennes.

Tout d'abord, on note que l'on impose que le morphisme k soit un monomorphisme comme dans la définition de blocs car ce n'est pas une condition de la définition.

Au vu de cette caractérisation des idéaux, il est évident que tout bloc est un idéal. Par contre, il est moins évident, que sous certaines conditions, un idéal soit un sous-objet normal. Avant de donner le résultat que l'on vient d'énoncer vaguement, nous allons faire quelques remarques préliminaires et donner des résultats intermédiaires nécessaires afin de donner la preuve de l'implication entre idéaux et sous-objets normaux .

Tout d'abord, si on suppose que $\mathcal{C}$ est régulier alors les blocs sont les images régulières d'un noyau. En effet, si on regarde le diagramme

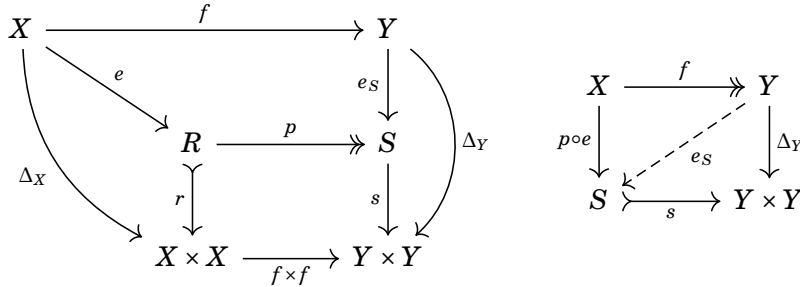
$$\begin{array}{ccc} A \downarrow K & \xrightarrow{\chi} & K \\ \downarrow n_{A,K} & & \downarrow k \\ A + K & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_A \\ k \end{pmatrix}} & A \end{array}$$

De plus on sait que par la preuve du Théorème 4.2.2.10, χ et $\binom{1_A}{k}$ sont des épimorphismes scindés et donc commutatifs des épimorphismes réguliers. De plus on sait que dans une catégorie régulière les épimorphismes réguliers se composent. Ainsi, les idéaux sont les images régulières de noyaux. En outre, si on arrive à montrer que les images régulières de noyaux sont normales, alors on aura montré l'implication souhaitée. Ce sera l'objectif du reste de la section.

Commençons par donner deux résultats préliminaires. La prochaine proposition et sa démonstration sont dues à une collaboration entre Mr Van der Linden et l'auteur.

PROPOSITION 4.3.0.2. *Soit une catégorie $\mathcal{C}$ régulière et de Mal'tsev. Si (R, r_1, r_2) est une relation d'équivalence sur un objet X de $\mathcal{C}$ alors l'image régulière de R est aussi une relation d'équivalence.*

DÉMONSTRATION. On pose S l'image régulière de R à travers les réguliers $p : R \twoheadrightarrow S$ et $f \times f : X \times X \twoheadrightarrow Y \times Y$ où $f : X \twoheadrightarrow Y$. Si on montre que (S, s_1, s_2) est une relation sur Y et que c'est une relation réflexive alors, ce sera nécessairement une relation d'équivalence par la condition que $\mathcal{C}$ est de Mal'tsev. Considérons les diagrammes suivants :



Tout d'abord, s est un monomorphisme puisque l'on a la factorisation épimorphisme régulier - monomorphisme du morphisme $(f \times f) \circ r$ et p est un épimorphisme régulier par hypothèse.

Et pour finir puisque R , est entre autre une relation réflexive, alors il existe un morphisme $e : X \rightarrow R$ tel que $r \circ e = \Delta_X$. Dès lors, on a que le diagramme de droite. En effet, par le diagramme de gauche on a

$$\Delta_Y \circ f = (f \times f) \circ \Delta_X = (f \times f) \circ r \circ e = s \circ p \circ e$$

De plus puisque s est un monomorphisme et que f est un épimorphisme fort alors il existe un morphisme $e_S : Y \rightarrow S$ tel que $s \circ e_S = \Delta_Y$. Cela montre que S est réflexive. $\square$

LEMME 4.3.0.3. [8, Lemma 2.5.7] Soit $\mathcal{C}$ une catégorie régulière et de Mal'tsev. Considérons les deux carrés commutatifs

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{g} & B \\ p \downarrow & \lrcorner & \downarrow q \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} A' & \xrightarrow{g'} & B' \\ p' \downarrow & \lrcorner & \downarrow q' \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

avec la même flèche en bas. Supposons que les morphismes f , g et g' sont des épimorphismes réguliers et que les morphismes verticaux pour le carré de gauche sont des épimorphismes réguliers : $p \circ s = 1_X$ et $q \circ t = 1_Y$. Dans ces conditions, la factorisation

$$g \times_F g' : A \times_X A' \rightarrow B \times_Y B'$$

à travers le pullback est aussi un épimorphisme régulier.

DÉMONSTRATION. Premièrement considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} A \times_X A' & \xrightarrow{\tilde{p}_A} & A & & \\ \downarrow g \times_F A' & & \downarrow (g,p) & \searrow p & \\ B \times_Y A' & \xrightarrow{B \times_Y p'} & B \times_Y X & \xrightarrow{p_B} & B \\ \downarrow p_{A'} & & \downarrow p_X & \swarrow p & \downarrow q \\ A' & \xrightarrow{p'} & X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

où les deux carrés en dessous sont des pullbacks. Pour être précis, le morphisme $(g,p) : A \rightarrow B \times_Y X$ est l'unique morphisme rendant les deux triangles suivants commutatifs :

$$\begin{array}{ccccc} A & & & & \\ \downarrow p & \searrow (g,p) & & \searrow g & \\ B \times_Y X & \xrightarrow{p_B} & B & & \\ \downarrow p_X & & \downarrow q & & \\ X & \xrightarrow{f} & Y & & \end{array}$$

Le rectangle avec les flèches incurvées et le diagramme en dessous à gauche est un pullback. Dès lors, on a une factorisation $g \times_f A'$ rendant le carré du dessus un pullback. Or, par [8, Lemma 2.5.6], le morphisme (g,p) est un épimorphisme régulier et ainsi $g \times_f A'$ l'est aussi.

Ensuite on considère le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & p_B \circ (B \times_Y p') & & \\
 & \swarrow & & \searrow & \\
 B \times_Y A' & \xrightarrow{B \times_Y g'} & B \times_Y B' & \xrightarrow{\tilde{p}_B} & B \\
 p_{A'} \downarrow & & \downarrow \tilde{p}_B & & \downarrow q \\
 A' & \xrightarrow{g'} & B' & \xrightarrow{q'} & Y \\
 & \searrow & & \swarrow & \\
 & & f \circ p' & &
 \end{array}$$

où le carré de droite est un pullback et le carré extérieur aussi par le début de la preuve. Ainsi, on obtient une factorisation $B \times_Y g'$ rendant le carré de gauche commutatif et pullback. Puisque g' est un épimorphisme régulier, alors $B \times_Y g'$ aussi.

Dès lors, on peut conclure que, puisque dans une catégorie régulière la composition d'épimorphismes réguliers est encore un épimorphisme régulier

$$g \times_f g' = (B \times_Y g') \circ (g \times_f A')$$

Cela termine la preuve. $\square$

A la fin de la preuve, on a utilisé la définition de la factorisation $g \times_f g'$. On va montrer d'où vient cette définition. Si on considère le diagramme commutatif suivant :

$$\begin{array}{ccccc}
 A \times_X A' & \xrightarrow{\tilde{p}_A} & A & & \\
 \downarrow p_{A'} & \searrow g \times_f A' & \downarrow g & & \downarrow q \\
 & B \times_Y A' & & & B \\
 & \downarrow p_{A'} & \searrow B \times_Y g' & \searrow \tilde{p}_B & \\
 & A' & & B \times_Y B' & B \\
 & \downarrow p_{A'} & \downarrow \tilde{p}_{B'} & \downarrow \tilde{p}_B & \downarrow q \\
 & A' & \xrightarrow{g'} & B' & \xrightarrow{q'} & Y \\
 & & \searrow & & \swarrow & \\
 & & & f \circ p' & &
 \end{array}$$

On voit alors que l'on a bien $g \times_f g' = (B \times_Y g') \circ (g \times_f A')$.

Dès à présent, on a assez de résultats pour montrer le résultat disant que : dans une catégorie régulière et de Mal'tsev, les images régulières de noyaux sont des sous-objets normaux. Avec un tel résultat, on aura bien montré que les idéaux sont des sous-objets normaux.

PROPOSITION 4.3.0.4. [8, Proposition 3.2.7] Soit $\mathcal{C}$ une catégorie régulière et de Mal'tsev. Considérons un sous-objet $j : X' \rightarrowtail X$ normal pour une relation (R, r_1, r_2) sur X . Pour tout épimorphisme régulier $f : X \twoheadrightarrow Y$, le sous-objet image $j' : f(X') \rightarrowtail Y$ est normal pour la relation d'équivalence $f(R)$ sur Y .

DÉMONSTRATION. Le sous-objet image et la relation image sont donnés par la factorisation épimorphisme régulier-monomorphisme présent dans une catégorie régulière :

$$\begin{array}{ccc} X' & \xrightarrow{f'} \twoheadrightarrow & f(X') \\ j \downarrow & & \downarrow j' \\ X & \xrightarrow{f} \twoheadrightarrow & Y \end{array} \quad \begin{array}{ccc} R & \xrightarrow{\phi} \twoheadrightarrow & f(R) \\ r \downarrow & & \downarrow r' \\ X \times X & \xrightarrow{f \times f} \twoheadrightarrow & Y \times Y \end{array}$$

On sait par la Proposition 4.3.0.2 que $f(R)$ ainsi défini est une relation sur Y et que c'est aussi une relation d'équivalence.

Par la définition de normalité, on a aussi les pullbacks

$$\begin{array}{ccc} X' \times X' & \xrightarrow{\tilde{j}} & R \\ \parallel \lrcorner & & \downarrow r \\ X' \times X' & \xrightarrow{j \times j} & X \times X \end{array} \quad \begin{array}{ccc} X' \times X' & \xrightarrow{\tilde{j}} & R \\ \downarrow \pi_1 \lrcorner & & \downarrow r_1 \\ X' & \xrightarrow{j} & X \end{array}$$

où j est un monomorphisme et $\tilde{j}$ aussi.

On doit prouver que les pullbacks analogues existent avec cette fois j' et la relation $f(R)$.

Le rectangle extérieur dans le diagramme 4.10 commute trivialement avec $f' \times f'$ qui est un épimorphisme puisque f' en est un et que dans une catégorie régulière, le produit d'épimorphismes réguliers est un épimorphisme régulier. Et $j' \times j'$ est un monomorphisme puisque j' en est un.

(4.10)

$$\begin{array}{ccccc} X' \times X & \xrightarrow{\tilde{j}} & R & \xrightarrow{\phi} \twoheadrightarrow & f(R) \\ \downarrow f' \times f' & \searrow & \downarrow r & & \downarrow r' \\ & X' \times X' & \xrightarrow{j \times j} & X \times X & \\ & & \searrow f \times f & & \\ f(X') \times f(X') & \xrightarrow{j' \times j'} & & Y \times Y & \end{array}$$

Puisque $f' \times f'$ est un épimorphisme régulier et ainsi un épimorphisme fort, il existe une factorisation unique $\tilde{j}' : f(X') \times f(X') \rightarrow f(R)$ qui est un monomorphisme puisque $j' \times j'$ en est un (voir le diagramme ci-dessous).

$$\begin{array}{ccccc}
 X' \times X' & \xrightarrow{\tilde{j}} & R & \xrightarrow{\phi} & f(R) \\
 f' \times f' \downarrow & & & \nearrow \tilde{j}' & \downarrow r' \\
 f(X') \times f(X') & \xrightarrow{j' \times j'} & Y \times Y & &
 \end{array}$$

L'existence de ce morphisme $\tilde{j}'$, rendant commutatif le triangle en bas à gauche du diagramme au-dessus, nous donne déjà la preuve que le premier carré pour la définition de normalité est un pullback.

Maintenant on doit prouver que le carré

$$\begin{array}{ccc}
 f(X') \times f(X') & \xrightarrow{\tilde{j}'} & f(R) \\
 \pi_1 \downarrow & & \downarrow r'_1 \\
 f(X') & \xrightarrow{j'} & Y
 \end{array}$$

est aussi un pullback. Pour cela on considère les carrés

$$\begin{array}{ccc}
 R & \xrightarrow{\phi} & f(R) \\
 s_1 \uparrow & & \uparrow s'_1 \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{ccc}
 X' & \xrightarrow{f'} & f(X') \\
 j \downarrow & & \downarrow j' \\
 X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

où $r_1 \circ s_1 = 1_X$ où s_1 existe puisque R est une relation réflexive et où f' , f et ϕ sont des épimorphismes réguliers. Par le Lemme 4.3.0.3, la factorisation

$$f' \times_f \phi : X' \times_X R \twoheadrightarrow f(X') \times_Y f(R)$$

est un épimorphisme régulier.

Ensuite on considère la factorisation ψ à travers le pullback

$$\begin{array}{ccccc}
 & & & \tilde{j}' & \\
 f(X') \times f(X') & & & \searrow & \\
 & \psi & & & f(R) \\
 & \searrow & f(X') \times_Y f(R) & \longrightarrow & \downarrow r'_1 \\
 & & \downarrow & & Y \\
 & \pi_1 & f(X') & \xrightarrow{j} &
 \end{array}$$

où le carré extérieur commute par définition de $\tilde{j}'$. Puisque $\tilde{j}'$ est un monomorphisme alors la factorisation ψ est aussi un monomorphisme. On peut,

dès lors, considérer le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X' \times X' & \xrightarrow{f' \times f'} & f(X') \times f(X') \\ (p_1, \tilde{j}) \downarrow \cong & & \downarrow \psi \\ X' \times_X R & \xrightarrow{f' \times_f \phi} & f(X') \times_Y f(R) \end{array}$$

où le morphisme de gauche vertical est un isomorphisme par la condition de normalité de j par rapport à la relation d'équivalence R . Puisque $f' \times_f \phi$ est un épimorphisme régulier alors le monomorphisme ψ est un épimorphisme régulier aussi. Ainsi on a montré que ψ est un isomorphisme. En conclusion, on vient de montrer que $f(X') \times_Y f(R) \cong_{\psi} f(X') \times f(X')$. Et cela montre la deuxième condition de normalité de j' pour la relation d'équivalence $f(R)$. $\square$

La prochaine explication est due à l'auteur. A la fin de la preuve, nous avons utilisé le fait que le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X' \times X' & \xrightarrow{f' \times f'} & f(X') \times f(X') \\ (p_1, \tilde{j}) \downarrow & & \downarrow \psi \\ X' \times_X R & \xrightarrow{f' \times_f \phi} & f(X') \times_Y f(R) \end{array}$$

était commutatif. A priori il n'est pas facile de vérifier sa commutativité mais on va l'expliciter : considérons les projections liées au pullback $f(X') \times_Y f(R)$ où on notera la première sur la composante $f(X')$ par $p_{f(X')}$ et la seconde sur la composante $f(R)$ par $p_{f(R)}$. Dès lors, pour montrer que $\psi \circ (f' \times f') = (f' \times_f \phi) \circ (\pi_1, \tilde{j})$, il suffit de post-composer avec les deux projections et de vérifier que les équations obtenues sont satisfaites puisqu'alors l'égalité recherchée découlera de l'unicité de la factorisation associée au pullback. On trouve :

$$\begin{aligned} (p_1, \tilde{j}) \circ (f' \times_f \phi) \circ p_{f(X')} &= (p_1, \tilde{j}) \circ p_{X'} \circ f' = p_1 \circ f' \\ (f' \times f') \circ \psi \circ p_{f(X')} &= f' \circ \pi_1 = p_1 \circ f' \end{aligned}$$

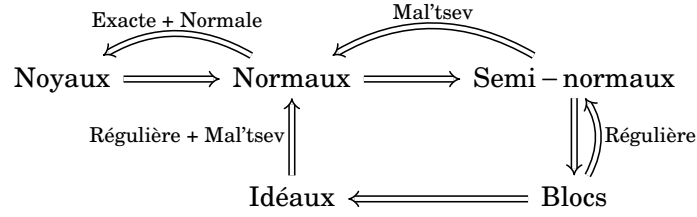
et pour avec la seconde projection

$$\begin{aligned} (p_1, \tilde{j}) \circ (f' \times_f \phi) \circ p_{f(R)} &= (p_1, \tilde{j}) \circ p_R \circ \phi = \tilde{j} \circ \phi' \\ (f' \times f') \circ \psi \circ p_{f(R)} &= (f' \times f') \circ \tilde{j}. \end{aligned}$$

4.4. Conclusion du chapitre

Avec ce dernier résultat, on trouve que si $\mathcal{C}$ est une catégorie régulière et de Mal'tsev alors toutes les notions introduites dans ce chapitre sont équivalentes. En effet résumons tous les résultats montrés dans le diagramme

ci-dessous :



Le prochain paragraphe explicatif est dû à l'auteur. Par ailleurs, si on regarde dans GRP, on peut noter quelque chose d'assez particulier. Regardons dans un premier temps ce que la définition de bloc implique dans GRP. Supposons, que $k : K \rightarrow A$ soit un sous-objet de A qui soit en plus un bloc de A . Dès lors, on peut regarder à quoi correspond l'égalité $k \circ \chi = \chi_1 \circ (1_A \flat k)$. Tout d'abord, on se rappelle que les éléments de $A \flat K$ sont de la forme (a, l, a^{-1}) pour $a \in A$ et $l \in K$. De plus, on sait de quelle manière agit le morphisme $1_A \flat k$ sur des éléments de la forme (a, l, a^{-1}) . En effet, on a que c'est une injection. Dès lors on peut regarder l'image de (a, l, a^{-1}) via l'action $\chi_A : (a, l, a^{-1}) \mapsto a \cdot l \cdot a^{-1}$. D'un autre côté, on sait que l'élément (a, k, a^{-1}) sera envoyé sur un élément de K par l'action χ . En outre, puisque l'on peut voir la flèche k comme une injection, on note alors que $a \cdot k \cdot a^{-1} \chi_A(a, k, a^{-1}) = \tilde{k} = \chi(a, k, a^{-1}) \in K$. Tout cela montre alors bien que la condition sur les blocs nous dit clairement que K doit être stable par conjugaison.

Si on combine cette remarque avec le commentaire général précédent, on se rend compte que l'on vient de montrer qu'un sous-groupe est normal si et seulement si il est stable par conjugaison.

Les commutateurs et le lien avec la notion de normalité

Dans les chapitres précédents, nous avons montré que l'on peut caractériser les sous-objets normaux via les notions de noyaux, sous-objets semi-normaux, de blocs et d'idéaux en fonction des conditions que l'on imposait sur la catégorie $\mathcal{C}$. Si on regarde les différentes manières dont on peut définir la notion de sous-groupes normaux, on se rend compte que nous n'avons pas encore expliciter celle disant : $H \triangleleft G \iff [H, G] \leq G$. Ce sera le but de ce chapitre mais pour cela nous allons tout d'abord donner une définition pour la notion de commutateur et ensuite présenter un résultat montrant l'équivalence entre un certain type de commutateur (en fonction des objets considérés) et la notion de sous-objets normaux. Ce chapitre s'inspire de [23].

Dans la suite, on utilisera les notations suivantes :

- $k : K \rightarrow A$ et $h : H \rightarrow A$ deux objets de $\mathcal{C}$ une catégorie pointée, finiment complète et admettant les coproduits ;
- $\Sigma_{H,K} := \langle \begin{pmatrix} 1_H \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1_K \end{pmatrix} \rangle = \begin{pmatrix} 1_H & 0 \\ 0 & 1_K \end{pmatrix} : H + K \rightarrow H \times K$. On notera que $\Sigma_{H,K}$ est un épimorphisme fort si et seulement si $\mathcal{C}$ est une catégorie unitale.

5.1. Les définitions pour la notion de commutateur

Avant de donner des résultats concernant les commutateurs, il nous faut définir cette notion. Cependant contrairement au commutateur dans les groupes, il existe trois notions de commutateur dans les catégories. Toutefois on ne s'intéressera qu'à seulement deux d'entre elles et nous verrons quand ces deux notions coïncident.

5.1.1. Le commutateur formel. [23, § 5.2]

Considérons H et K deux objets de $\mathcal{C}$. On définit le *commutateur formel* de H et K comme le noyau $(H \diamond K, \sigma_{H,K})$ de $\Sigma_{H,K}$. De plus, $H \diamond K$ est l'intersection de $H \flat K$ et $K \flat H$. Avant de montrer cela, il est utile de donner un peu de terminologie.

Étant donné un objet A d'une catégorie $\mathcal{D}$, considérons la classe

$$\text{Mono}(A) := \{m \text{ monomorphisme} \mid \exists B \in \mathcal{D}, m : B \rightarrow A\}.$$

Un monomorphisme $r : S \rightarrow A$ est *plus petit* que le monomorphisme $s : S \rightarrow A$ quand il existe un monomorphisme $t : R \rightarrow S$ tel que $s \circ t = r$. On notera alors $r \leq s$. Si de plus $s \leq r$, alors t est un isomorphisme. En effet la condition $s \leq r$ nous donne l'existence d'un morphisme $t' : S \rightarrow R$ tel que $r \circ t' = s$. Ainsi on a $r \circ t' \circ r = r$ et $s \circ t \circ t' = s$. Et, puisque r et s sont des monomorphismes, on trouve $t' \circ t = 1_R$ et $t \circ t' = 1_S$. En réalisant le quotient de $\text{Mono}(A)$ en identifiant les monomorphismes qui sont isomorphes, on obtient un ordre partiel sur la classe $\text{Sub}(A)$ des sous-objets de A . Puisque $\text{Sub}(A)$ est partiellement ordonné, cela fait sens de considérer l'existence d'un infimum pour la famille des sous-objets.

DÉFINITION 5.1.1.1. [5, Definition 4.2.1] Considérons un objet A dans une catégorie $\mathcal{D}$. Par l'*intersection* d'une famille de sous-objets, on veut dire l'infimum dans $\text{Sub}(A)$.

Dès lors, pour montrer que $H \diamond K$ est l'intersection de $H \bowtie K$ et $K \bowtie H$, on doit montrer :

- $H \diamond K$ est un sous-objet de $H \bowtie K$ et de $K \bowtie H$;
- $H \diamond K$ est le plus grand de tels sous-objets.

La vérification de cela est due à une discussion entre Mr Van der Linden et l'auteur.

Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 H \diamond K & \xrightarrow{a} & H \bowtie K & & \\
 \downarrow b & \searrow \sigma_{H,K} & \downarrow n_{H,K} & & \\
 K \bowtie H & \xrightarrow{n_{H,K}} & H + K & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1_K \end{pmatrix}} & K \\
 & & \downarrow \begin{pmatrix} 1_H \\ 0 \end{pmatrix} & \searrow \Sigma_{H,K} & \uparrow \pi_2 \\
 & & H & \xleftarrow{\pi_1} & H \times K
 \end{array}$$

où le morphisme $a : H \diamond K \rightarrow H \bowtie K$ est induit par la propriété universelle du noyau $n_{H,K}$ puisque $\begin{pmatrix} 1_H \\ 0 \end{pmatrix} \circ \Sigma_{H,K} = \pi_1 \circ \Sigma_{H,K} \circ \sigma_{H,K} = 0$. De plus, a est un monomorphisme puisque $\sigma_{H,K}$ en est un. De manière similaire, le monomorphisme b est induit par la propriété universelle de $n_{K,H}$. Ainsi, $H \diamond K$ est un sous-objet de $H \bowtie K$ et de $K \bowtie H$. Afin de montrer que $H \diamond K$ est l'infimum on considère le

diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 P & \xrightarrow{q_1} & H \bowtie K & & \\
 \downarrow q_2 & \searrow q & \downarrow n_{H,K} & & \\
 H \bowtie K & \xrightarrow{n_{K,H}} & H + K & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1_K \end{pmatrix}} & K \\
 \uparrow z_1 & \nearrow z_2 & \downarrow \begin{pmatrix} 1_H \\ 0 \end{pmatrix} & \searrow \Sigma_{H,K} & \uparrow \pi_2 \\
 Z & \xrightarrow{z} & H & \xleftarrow{\pi_1} & H \times K
 \end{array}$$

Montrons que $(P, q) = (\Sigma_{H,K}, \ker(\Sigma_{H,K}))$ car si tel est le cas alors $P = H \diamond K$ et par la propriété universelle associée au pullback, on aura bien que c'est l'intersection de $H \bowtie K$ et $K \bowtie H$. On note que puisque $\begin{pmatrix} 1_H \\ 0 \end{pmatrix} \circ q = \begin{pmatrix} 1_H \\ 0 \end{pmatrix} \circ n_{H,K} \circ q_1 = 0$ et $\begin{pmatrix} 0 \\ 1_K \end{pmatrix} \circ q = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_K \end{pmatrix} \circ n_{K,H} \circ q_2 = 0$; on a que $\Sigma_{H,K} \circ q = 0$ puisque la paire (π_1, π_2) est conjointement épimorphique. Pour la propriété universelle du noyau, on considère un morphisme $z : Z \rightarrow H + K$ tel que $\Sigma_{H,K} \circ z = 0$. Ainsi on a que $\pi_1 \circ \Sigma_{H,K} \circ z = 0$ et par la propriété universelle du noyau $n_{K,H}$, il existe un unique $z_1 : Z \rightarrow H \bowtie K$ tel que $z = n_{H,K} \circ z_1$. De manière similaire, on a trouvé l'existence d'un unique morphisme $z_2 : Z \rightarrow H \bowtie K$ tel que $z = n_{K,H} \circ z_2$. Dès lors par la propriété universelle du pullback, il existe un unique morphisme $z' : Z \rightarrow P$ tel que $z_1 = q_2 \circ z'$ et ainsi $z = n_{K,H} \circ z_1 = q \circ z'$.

L'appellation formelle provient de la catégorie des groupes. En effet, on sait que les éléments de $H + K$ peuvent être exprimés comme un format réduit de juxtaposition d'éléments de H et K comme la suite de ce genre $(h_1, k_1, \dots, h_n, k_n)$. Ainsi $H \diamond K$ est engendré par tous les mots de la forme (x, y, x^{-1}, y^{-1}) avec $x \in H$ et $y \in K$.

En outre on peut essayer de voir le lien entre ce commutateur formel et le commutateur usuel dans GRP. Pour cela si on rappelle que les sous-objets K et K d'un groupe A sont notés comme suit : $k : K \rightarrow A$ et $h : H \rightarrow A$ alors l'application canonique

$$\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} : H + K \rightarrow A$$

possède une interprétation intéressante. L'application $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$ agit sur la suite du type $(h_1, k_1, \dots, h_n, k_n)$ par comme la multiplication dans le groupe A ; ainsi on obtient un élément $h_1 \cdot k_1 \cdots h_n \cdot k_n$ calculé dans A . Dès lors, si on considère l'image du groupe $H \diamond K$ à travers ce morphisme on trouve le sous-groupe commutateur de H et K dans A .

5.1.2. Le commutateur de Higgins et de Huq. Comme annoncé précédemment, nous allons nous concentrer sur deux notions de commutateur

afin d'élaborer un résultat montrant un lien avec la théorie des commutateurs et la notion de normalité. Dans un premier temps, nous allons énoncer ces deux types de commutateurs et ensuite nous allons voir les liens entre les deux et dans quel cadre ils coïncident.

DÉFINITION 5.1.2.1. [23, Definition 5.1] Soit $\mathcal{C}$ une catégorie avec détermination des idéaux. Alors le *commutateur de Higgins* $[H, K]_H$ de deux sous-objets $k : K \rightarrowtail A$ et $h : H \rightarrowtail A$ de A est l'image régulière de $H \diamond K$ à travers le morphisme $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \circ \sigma_{H,K}$ (voir le diagramme ci-dessous)

$$\begin{array}{ccc} H \diamond K & \xrightarrow{\quad} & [H, K]_H \\ \sigma_{H,K} \downarrow & & \downarrow \\ H + K & \xrightarrow{\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}} & A \end{array}$$

DÉFINITION 5.1.2.2. [23, Proposition 5.5] Soit $\mathcal{C}$ une catégorie unitale, finiment complète et finiment cocomplète, telle que les épimorphismes forts et normaux coïncident. Considérons deux sous-objets $k : K \rightarrowtail A$ et $h : H \rightarrowtail A$ de A . On définit le *commutateur de Huq* $[H, K]_Q$ de H et K comme étant le noyau du morphisme q décrit dans le pushout

$$\begin{array}{ccc} H + K & \xrightarrow{\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}} & A \\ \Sigma_{H,K} \downarrow & & \downarrow q \\ H \times K & \xrightarrow{m} & Q \end{array}$$

REMARQUE 5.1.2.3. Soit $\mathcal{C}$ étant la catégorie des groupes. L'opération de groupe $*$: $H \times K \dashrightarrow A$ n'est pas toujours un morphisme. En effet¹, si on considère $A = S_3$ et les sous-groupes $H = \langle (12) \rangle$ et $K = \langle (23) \rangle$, alors on a

$$*(((12), (23)) \cdot_A ((12), (23))) = *(e, e) = e \cdot_A e = e$$

et de l'autre côté, on trouve

$$*((12), (23)) \cdot_A *((12), (23)) = (123) \cdot_A (123) = (132) \neq e.$$

Cependant, on peut toujours quotienter A avec un sous-groupe normal de telle sorte que l'application quotient soit un morphisme. C'est toujours possible : un exemple trivial est de considérer A comme sous-groupe normal. Une meilleure réponse est donnée par le commutateur de H et K qui est le plus

1. Cet exemple est dû à l'auteur.

petit sous-groupe normal tel que l'application quotient est un morphisme : avec $Q = A/[H, K]_Q$ on a

$$\begin{array}{ccccc} H \times K & \dashrightarrow & A & \xrightarrow{q} & A/[H, K]_Q \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & m & & \end{array}$$

Finalement, si on prend $K = H = A$ par l'argument de Eckmann-Hilton (voir le Lemme 2.4.2.13), alors on a que A est abélien si et seulement si l'opération de groupe $A \times A \rightarrow A$ est un morphisme de groupe et cette dernière condition est vraie quand le sous-groupe dérivé $[A, A]_Q$ est trivial.

Avant d'énoncer un premier résultat liant ces deux commutateurs, on a énoncé un lemme qui sera utilisé dans la preuve de ce premier résultat.

LEMME 5.1.2.4. [25, Lemma 2.1] *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie pointée avec les colimites finies. Pour chaque diagramme commutative comme ci-dessous :*

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\text{coker}(f)} & Z \\ e \downarrow & & \downarrow s & & \downarrow r \\ A & \xrightarrow{k} & B & \xrightarrow{g} & C \end{array}$$

où e est un épimorphisme, le carré de droite est un pushout si g est le conoyau de k .

DÉMONSTRATION. Il suffit de vérifier la propriété universelle. Pour cela on considère le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X & \xrightarrow{f} & Y & \xrightarrow{\text{coker}(f)} & Z \\ e \downarrow & & \downarrow s & & \downarrow r \\ A & \xrightarrow{k} & B & \xrightarrow{g} & C \end{array} \quad \begin{array}{c} \searrow f_2 \\ \downarrow t \\ \nearrow f_1 \end{array} \quad \begin{array}{c} \\ \\ Q \end{array}$$

où f_1 et f_2 sont tels que $f_1 \circ s = f_2 \circ \text{coker}(f)$. Ainsi on trouve $f_1 \circ k \circ e = f_1 \circ s \circ f = f_2 \circ \text{coker}(f) = 0$. Or puisque e est un épimorphisme, alors $f_1 \circ k = 0$. Ainsi, par la propriété universelle du conoyau de k , il existe un unique morphisme $t : C \rightarrow Q$ tel que $t \circ g = f_1$. Il nous reste à vérifier si $f_2 = t \circ r$. Or puisque $\text{coker}(f)$ est un épimorphisme, cela revient à montrer que

$$f_2 \circ \text{coker}(f) = f_1 \circ s = t \circ s \circ g = t \circ r \circ \text{coker}(f)$$

□

DÉFINITION 5.1.2.5. [25] Pour un sous-objet $l : L \rightarrowtail X$ de X dans une catégorie normale $\mathcal{C}$ avec des colimites finies, la *clôture normale* de l dans X est donnée par le noyau du conoyau de l .

On notera que la clôture normale de tout objet est un sous-objet normal puisque c'est un noyau.

Avec cette définition et ce lemme, on peut montrer que la clôture normale du commutateur de Higgins est le commutateur de Huq.

PROPOSITION 5.1.2.6. [25, Proposition 2.2] *Dans une catégorie normale, régulière, unitale avec des colimites finies, le commutateur de Huq est la clôture normale du commutateur de Higgins.*

DÉMONSTRATION. Soit $h : H \rightarrowtail A$ et $k : K \rightarrowtail A$ une paire de sous-objets de A . Considérons le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc}
 H \diamond K & \xrightarrow{\sigma_{H,K}} & H + K & \xrightarrow{\Sigma_{H,K}} & H \times K \\
 e \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} & & \downarrow \phi \\
 [H, K]_H & \xrightarrow{m} & A & \xrightarrow{\text{coker}(m)} & Q
 \end{array}$$

où le diagramme de gauche commute par définition du commutateur de Higgins et le morphisme ϕ est donné par la propriété universelle du conoyau. En effet, puisque $\text{coker}(m) \circ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \circ \sigma_{H,K} = \text{coker}(m) \circ m \circ e = 0$, ainsi il existe un unique ϕ rendant le carré de droite commutatif. Puisque la catégorie de départ est unitale, alors $\Sigma_{H,K}$ est un épimorphisme fort mais comme en plus c'est une catégorie régulier alors $\Sigma_{H,K}$ est un épimorphisme régulière. De plus comme la catégorie est normale, alors $\Sigma_{H,K}$ est un noyau et en particulier, $\Sigma_{H,K} = \text{coker}(\ker(\Sigma_{H,K})) = \text{coker}(\sigma_{H,K})$.

Par le Lemme 5.1.2.4, le carré de droite est un pushout. De plus le noyau de $\text{coker}(m)$ est par définition le commutateur de Huq $[H, K]_Q$, qui est alors la clôture normale du commutateur de Higgins $[H, K]_Q$. $\square$

Le résultat précédent peut s'écrire comme $[H, K]_Q = \overline{[H, K]_H}$ où on utilise la notation $\bar{}$ pour faire référence à la clôture normale.

Il est temps de voir quand ces deux notions coïncident. Tout d'abord les deux ne sont en général pas les mêmes (voir [23, Exemple 5.8]. Par contre, il existe un cas spécifique où les deux coïncident. Pour voir cela, on regarde le

diagramme qui résume les deux définitions

$$\begin{array}{ccccc}
 H \diamond K & \xrightarrow{\sigma_{H,K}} & H + K & \xrightarrow{\Sigma_{H,K}} & H \times K \\
 \downarrow e & & \downarrow \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} & & \downarrow m \\
 & \nearrow t & [H, K]_Q & \searrow & \\
 [H, K]_H & \xrightarrow{[h, k]} & A & \xrightarrow{q} & Q \\
 & & \downarrow z & & \\
 & & Z & &
 \end{array}$$

On observe que $[H, K]_H$ est un sous-objet de $[H, K]_Q$ puisque

$$q \circ [h, k] = 0 \iff 0 = q \circ j \circ e = q \circ \begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} \circ \sigma_{H,K} = m \circ \Sigma_{H,K} \circ \sigma_{H,K} = 0$$

dès lors, il existe un unique $t : [H, K]_H \rightarrow [H, K]_Q$ tel que le triangle commute et t est un monomorphisme. De plus, on sait par la Proposition 5.1.2.6 que $q = \text{coker}(j)$.

De plus, si on se met dans une catégorie semi-abélienne, alors si on prend $H = A$ alors $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1_A \\ k \end{pmatrix}$ qui est un épimorphisme scindé et donc un épimorphisme régulier. Ainsi $[h, k]$ est normal puisque c'est l'image régulière d'un noyau par la Proposition 4.3.0.2 et par la Proposition 3.2.0.4. Dès lors, on trouve que

$$[h, k] = \ker(\text{coker}([h, k])) = \ker(g) = \sigma_{H,K}$$

et cela nous montre bien que $[A, K]_Q = [A, K]_H$. Dans un tel cas on dira que c'est le commutateur de A avec K et on le notera $[A, K]$.

5.2. Le lien avec la notion de sous-objets normaux

Après avoir introduit les différentes notions de commutateur et d'avoir regardé les liens entre eux, il est nécessaire de voir le lien avec la normalité. Mais avant de donner le premier résultat, on va faire une remarque concernant les conoyaux.

REMARQUE 5.2.0.1. [23, Remark 5.9] Dans une catégorie pointée avec des colimites finies, le conoyau d'un morphisme $k : K \rightarrow A$ peut être obtenu

comme le pushout p de $\begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix} : A + K \rightarrow A$ le long de $\begin{pmatrix} 1_A \\ k \end{pmatrix} : A + K \rightarrow A$:

$$\begin{array}{ccc} A + K & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_A \\ k \end{pmatrix}} & A \\ \downarrow \begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix} & \lrcorner & \downarrow q \\ A & \xrightarrow{p} & C \end{array}$$

(en précomposant par l'injection $i_A : A \rightarrow A + K$, cela force le fait que les deux morphismes obtenus par le pullback soient égaux et avec l'autre injection on obtient $p \circ k = 0$).

On peut dès à présent montrer que, si on a un sous-objet K dans A qui est normal, alors $[A, K]$ est un sous-objet de K .

PROPOSITION 5.2.0.2. [23, Proposition 6.1] *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie semi-abélienne. Si K est un sous-objet normal de A alors $[A, K]$ est un sous-objet normal de K .*

DÉMONSTRATION. Considérons le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccccc} A \diamond K & \xrightarrow{e} & [A, K] & \dashrightarrow & K \\ \downarrow \sigma_{A,K} & & \downarrow j & \nearrow k & \\ A + K & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_A \\ k \end{pmatrix}} & A & & \\ \downarrow \Sigma_{A,K} & \lrcorner & \downarrow q & & \\ \begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix} \downarrow & A \times K & \longrightarrow & Q & \downarrow p \\ \downarrow \pi_1 & \downarrow & & \downarrow & \\ A & \xrightarrow{p} & C & & \end{array}$$

Par la Remarque 5.2.0.1, le pushout de $\begin{pmatrix} 1_A \\ 0 \end{pmatrix}$ le long de $\begin{pmatrix} 1_A \\ k \end{pmatrix}$ nous donne le conoyau p de k . Or k est un sous-objet normal alors c'est un noyau par exactitude et protomodularité de $\mathcal{C}$, ainsi $k = \ker(\text{coker}(k)) = \ker(p)$. Dès lors, pour prouver que $[A, K] \leq K$, il suffit de prouver que $p \circ j = 0$. En effet, si c'est le cas, alors par la propriété universelle du noyau de p , il existe un unique morphisme rendant commutatif le triangle en haut à droite et de plus un tel morphisme sera un monomorphisme. Or, $p \circ j = 0$ découle de la factorisation de p par $q = \text{coker}(j)$. En effet, puisque $j = \ker(q)$ alors $q \circ j = 0$ puisque le carré du milieu est un pushout par définition. $\square$

La réciproque à cette proposition qui est vraie et ce sera le dernier résultat de ce texte. Mais cela demande un peu plus de matériel pour faire la preuve.

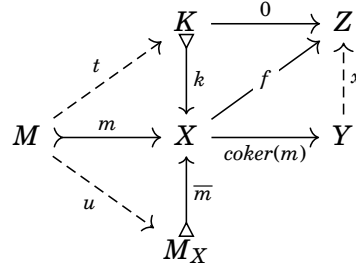
On va tout d'abord donner une nouvelle caractérisation de la clôture normale. Pour cela, on rappelle l'axiome (A2), qui a déjà été introduit à la page 84 :

l'image régulière de tout noyau est un noyau .

Le prochain lemme et la démonstration en dessous sont dus à l'auteur.

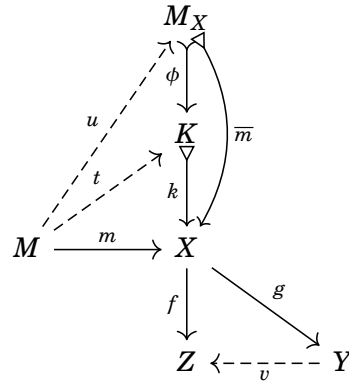
LEMME 5.2.0.3. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie pointée, régulière, finiment cocomplète et satisfaisant l'axiome (A2) et soit $m : M \rightarrow X$ un monomorphisme. Alors $\bar{m} : M_X \rightarrow X$ est la clôture normale de m si et seulement si $\bar{m}$ est le plus petit morphisme normal à travers lequel m se factorise.*

DÉMONSTRATION. Supposons dans un premier temps que $\bar{m}$ est la clôture normale de m et considérons le diagramme suivant :



où (K, k) est le noyau du morphisme f tel que m se factorise à travers k via t . Puisque $\text{coker}(m) \circ m = 0$, alors par la propriété universelle du noyau, on a l'existence d'un unique morphisme $u : M \rightarrow M_X$ tel que $m = \bar{m} \circ u$. De plus, comme $f \circ m = f \circ k \circ t = 0$, alors par la propriété universelle du conoyau de m , il existe un unique morphisme $x : Y \rightarrow Z$ tel que $f = x \circ \text{coker}(m)$. Ainsi, on a que $f \circ \bar{m} = x \circ \text{coker}(m) \circ \bar{m} = x \circ 0 = 0$ et par la propriété universelle du noyau de f , il existe un unique morphisme $\phi : M_X \rightarrow K$ tel que $\bar{m} = k \circ \phi$ et ce morphisme ϕ est un monomorphisme.

Inversement supposons que $\bar{m}$ est le plus petit noyau à travers lequel m se factorise. Considérons le diagramme suivant



où k est le noyau de f et $\overline{m}$ est le conoyau de g . Il suffit, dès lors, de montrer que g est le conoyau de m . Tout d'abord, on note que $g \circ m = g \circ \overline{m} \circ u = 0 \circ u = 0$. De plus, si on considère un morphisme $f : X \rightarrow Z$ tel que $f \circ m = 0$, alors il existe un unique $t : M \rightarrow K$ tel que $m = k \circ t$ par la propriété universelle du noyau. De plus, on a qu'il existe un monomorphisme $\phi : M_X \rightarrow K$ tel que $\overline{m} = k \circ \phi$. Or, puisque $f \circ \overline{m} = f \circ k \circ \phi = 0$, alors il existe un unique morphisme $v : Y \rightarrow Z$ tel que $f = v \circ g$. Cela montre que g est le conoyau de m . $\square$

On observera que cette dernière caractérisation de la clôture normale s'apparente plus à celle que l'on connaît pour les groupes. En effet, on rappelle que la clôture normale d'un sous-ensemble A d'un groupe G est définie comme l'intersection sur tous les sous-groupes normaux de G contenant A .

Il est temps de donner un résultat important afin de montrer la réciproque à la Proposition 5.2.0.2.

LEMME 5.2.0.4. [14, Lemma 6.12] Soit $\mathcal{C}$ une catégorie pointée, régulière, finiment cocomplète et remplissant l'axiome (A.2). Pour un monomorphisme $m : M \rightarrow X$, le monomorphisme dans le diagramme

$$\begin{array}{ccc} X \bowtie M & \xrightarrow{n_{X,M}} & X + M \xleftarrow[\begin{smallmatrix} 1_X \\ i_X \end{smallmatrix}]{\begin{smallmatrix} 1_X \\ 0 \end{smallmatrix}} X \\ \theta \downarrow & & \downarrow \begin{smallmatrix} 1_X \\ m \end{smallmatrix} \\ M_X & \xrightarrow{\overline{m}} & X \end{array}$$

où $\overline{m} \circ \theta$ est la factorisation de $\begin{pmatrix} 1_X \\ m \end{pmatrix} \circ n_{X,M}$ comme étant un épimorphisme régulier suivi d'un monomorphisme ; alors $\overline{m}$ est la clôture normale de m .

DÉMONSTRATION. Tout d'abord, notons que $\overline{m}$ peut être obtenu comme l'image de $n_{X,M}$ le long de $\begin{pmatrix} 1_X \\ m \end{pmatrix}$. En effet puisque la paire $X \xrightarrow{1_X} M \xleftarrow{m} X$ est conjointement fortement épimorphique alors le morphisme $\begin{pmatrix} 1_X \\ m \end{pmatrix}$ est un épimorphisme fort et par régularité de $\mathcal{C}$, on a que c'est en plus un épimorphisme régulier. Ainsi ce monomorphisme est normal par (A.2). Soit $\eta_M : M \rightarrow X \bowtie M$ l'unique morphisme² tel que

$$n_{X,M} \circ \eta_M = i_M : M \rightarrow X + M.$$

Le morphisme m se factorise à travers $\overline{m}$ puisque

$$\overline{m} \circ \theta \circ \eta_M = \begin{pmatrix} 1_X \\ m \end{pmatrix} \circ n_{X,M} \circ \eta_M = \begin{pmatrix} 1_X \\ m \end{pmatrix} \circ i_M = m$$

2. On rappellera que c'est l'unité associée à l'adjonction $B + (-) \dashv \ker$.

Ainsi d'après le Lemme 5.2.0.3, on doit montrer que $\overline{m}$ est le plus petit noyau à travers lequel m se factorise.

Soit $k : K \rightarrow X$ un morphisme normal et soit $f : X \rightarrow Y$ un morphisme tel que k est le noyau de f . Considérons le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 K & & & & \\
 \eta_K \downarrow & \searrow i_K & & & \\
 X \bowtie K & \xrightarrow{n_{X,K}} & X + K & \xrightleftharpoons[(i_X)]{(\begin{smallmatrix} 1_X \\ 0 \end{smallmatrix})} & X \\
 \phi \downarrow & & \downarrow (\begin{smallmatrix} (1_X, k) \\ (1_X, 0) \end{smallmatrix}) & & \parallel \\
 K & \xrightarrow{\langle k, 0 \rangle} & K \times_Y X & \xrightleftharpoons[(1_X, 1_X)]{\pi_2} & X \\
 \parallel & & \downarrow \pi_1 \lrcorner & & \downarrow f \\
 K & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

où

- η_K est l'unique morphisme rendant commutatif le triangle au-dessus ;
- Le carré du bas à droite est un pullback ;
- $\langle k, 0 \rangle$ est le noyau de π_2 . En effet, il nous suffit de vérifier la propriété universelle. Pour cela on considère le diagramme

$$\begin{array}{ccccc}
 & & Z & & \\
 & \nearrow t & \downarrow z & & \\
 K & \xrightarrow{\langle k, 0 \rangle} & X \times_Y X & \xrightarrow{\pi_2} & X \\
 \parallel & & \downarrow \pi_1 & & \downarrow f \\
 K & \xrightarrow{k} & X & \xrightarrow{f} & Y
 \end{array}$$

où $z : Z \rightarrow X \times_Y X$ est tel que $p_2 \circ z = 0$. Ainsi on a $0 = f \circ \pi_2 \circ z = f \circ \pi_1 \circ z$ et par la propriété universelle du noyau de f , il existe un unique morphisme $t : K \rightarrow Z$ tel que $\pi_1 \circ z = k \circ t = \pi_1 \circ \langle k, 0 \rangle \circ t$. Dès lors, on a bien que $\langle k, 0 \rangle \circ t = z$ puisque $\pi_1 \circ \langle k, 0 \rangle \circ t = \pi_1 \circ z$ et $0 = \pi_2 \circ \langle k, 0 \rangle \circ t = \pi_2 \circ z$ par hypothèse ;

- ϕ est l'unique morphisme rendant le dessus comme étant un morphisme d'extension scindé.

Puisque $\langle k, 0 \rangle$ est un monomorphisme, il suit que $\phi \circ \eta_K = 1_K$ (ainsi ϕ est un épimorphisme scindé) et donc dans la diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} X \bowtie K & \xrightarrow{n_{X,K}} & X + K \\ \phi \downarrow & & \downarrow \left(\begin{smallmatrix} 1_X \\ k \end{smallmatrix} \right) \\ K & \xrightarrow{k} & X \end{array}$$

$k \circ \phi$ est la factorisation épimorphisme régulier-monomorphisme de $\left(\begin{smallmatrix} 1_X \\ k \end{smallmatrix} \right) \circ n_{X,K}$. Maintenant supposons que m se factorise à travers k via un morphisme $t : M \rightarrow K$ tel que $k \circ t = m$.

Puisqu'il existe un unique morphisme $X \bowtie t : X \bowtie M \rightarrow X \bowtie K$ rendant le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} X \bowtie M & \xrightarrow{n_{X,M}} & X + M & \xleftarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1_X \\ 0 \end{smallmatrix} \right)} & X \\ \downarrow X \bowtie t & & \downarrow 1_X + t & \xleftarrow{i_X} & \parallel \\ X \bowtie K & \xrightarrow{n_{X,K}} & X + K & \xleftarrow{\left(\begin{smallmatrix} 1_X \\ 0 \end{smallmatrix} \right)} & X \\ & & & \xleftarrow{j_X} & \end{array}$$

un morphisme d'extension scindé, ainsi si on considère le cube suivant

$$\begin{array}{ccccc} & & X \bowtie M & \xrightarrow{n_{X,M}} & X + M \\ & \swarrow X \bowtie t & \downarrow & \searrow 1_X + t & \downarrow \left(\begin{smallmatrix} 1_X \\ m \end{smallmatrix} \right) \\ X \bowtie K & \xrightarrow{n_{X,K}} & X + K & & \\ \downarrow \phi & \downarrow \theta & \downarrow \left(\begin{smallmatrix} 1_X \\ k \end{smallmatrix} \right) & & \downarrow \\ & M_X & \xrightarrow{\bar{m}} & & X \\ & \swarrow x & \downarrow & \searrow & \parallel \\ K & \xrightarrow{k} & X & & \end{array}$$

Dès lors puisque θ est un épimorphisme fort, on a alors l'existence du morphisme x tel que $\bar{m} = k \circ x$ (voir le diagramme ci-dessous) :

$$\begin{array}{ccc} X \bowtie M & \xrightarrow{\phi \circ (X \bowtie t)} & K \\ \downarrow \theta & \searrow x & \downarrow k \\ M_X & \xrightarrow{\bar{m}} & X \end{array}$$

□

COROLLAIRE 5.2.0.5. Avec les conditions et l'énoncé du lemme précédent, M_X est un sous-objet normal de X .

On vient de caractériser la clôture normale d'un sous-objet. Cependant il est possible de relier l'objet M_X associé à cette clôture normale et le commutateur $[X, M]$. Pour se faire, on introduit la notion d'« union » de deux objets.

DÉFINITION 5.2.0.6. [23] Dans une catégorie avec idéaux déterminés, on peut définir l'union de deux sous-objets (H, h) et (K, k) d'un objet A comme l'image régulière de l'application canonique $\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}$:

$$\begin{array}{ccc} & H \vee K & \\ p \nearrow & & \nwarrow q \\ H + K & \xrightarrow{\begin{pmatrix} h \\ k \end{pmatrix}} & A. \end{array}$$

Le prochain résultat et la démonstration sont dus à une collaboration entre Mr Van der Linden et l'auteur.

LEMME 5.2.0.7. Dans les conditions du Lemme 5.2.0.4, on a que

$$M_X = [X, M] \vee M.$$

DÉMONSTRATION. Considérons les diagrammes

$$\begin{array}{ccccc} X \diamond M & \xrightarrow{\tau_M} & M \flat X & \xleftarrow{\begin{pmatrix} 0 \\ 1_X \end{pmatrix} \circ n_{M,X}} & X \\ \tau_X \downarrow & \searrow \sigma_{X,M} & \downarrow n_{M,X} & \swarrow \eta_X & \parallel \\ X \flat M & \xrightarrow{n_{X,M}} & X + M & \xrightarrow{\begin{pmatrix} 1_X \\ 0 \end{pmatrix}} & X \\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1_M \end{pmatrix} \circ n_{X,M} \downarrow & \eta_M \uparrow & \downarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1_M \end{pmatrix} & \swarrow \Sigma_{X,M} & \uparrow \pi_1 \\ M & \xlongequal{\quad} & M & \xleftarrow{\pi_2} & X \times M \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} X \diamond M & \xrightarrow{\sigma_{X,M}} & X + M & \xrightarrow{\Sigma_{X,M}} & X \times M \\ \phi \downarrow & & \downarrow \begin{pmatrix} 1_X \\ m \end{pmatrix} & \searrow \ulcorner & \downarrow \\ [X, M] & \xrightarrow{\ker(q)} & X & \xrightarrow{q} & Q \end{array}$$

où le diagramme du dessous est commutatif par définition du commutateur qui est le commutateur de Higgins et de Huq.

Tout d'abord on note que $X \diamond M \xrightarrow{\tau_X} X \flat M \xrightleftharpoons[\eta_M]{\begin{pmatrix} 0 \\ 1_M \end{pmatrix} \circ n_{X,M}} M$ est une suite courte scindée. En effet, il nous suffit de vérifier que τ_X est le noyau de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1_M \end{pmatrix} \circ n_{X,M}$ et que η_M est le scindage pour le morphisme $\begin{pmatrix} 0 \\ 1_M \end{pmatrix} \circ n_{X,M}$. Afin de vérifier que τ_X est le noyau de $\begin{pmatrix} 0 \\ 1_M \end{pmatrix} \circ n_{X,M}$, on observe que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1_M \end{pmatrix} \circ n_{X,M} \circ \tau_X = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_M \end{pmatrix} \circ \sigma_{X,M} = \pi_2 \circ \Sigma_{X,M} \circ \sigma_{X,M} = 0$$

Ensuite considérons un morphisme $z : Z \rightarrow X \bowtie M$ tel que $\begin{pmatrix} 0 \\ 1_M \end{pmatrix} \circ n_{X,M} \circ z = 0$. Dès lors, on a d'une part $\pi_2 \circ \Sigma_{X,M} \circ n_{X,M} \circ z = 0$ et d'autre part $\pi_1 \circ \Sigma_{X,M} \circ n_{X,M} \circ z = \begin{pmatrix} 1_X \\ 0 \end{pmatrix} \circ n_{X,M} \circ z = 0$; cela implique que $\Sigma_{X,M} \circ n_{X,M} \circ z = 0$. Dès lors, par la propriété universelle du noyau de $\Sigma_{X,M}$ il existe un unique morphisme $t : Z \rightarrow X \diamond M$ tel que $\sigma_{X,M} \circ t = n_{X,M} \circ z$. Or, puisque $n_{X,M}$ est un monomorphisme et que $\sigma_{X,M} \circ t = n_{X,M} \circ \tau_X \circ t$, on a que $\tau_X \circ t = z$. Pour montrer que l'on a bien le scindage souhaité, il suffit de noter que

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1_M \end{pmatrix} \circ n_{X,M} \circ \eta_M = \begin{pmatrix} 0 \\ 1_M \end{pmatrix} \circ i_M = 1_M$$

Par conséquent, on sait par protomodularité que le morphisme $\begin{pmatrix} \tau_X \\ \eta_M \end{pmatrix} : (X \diamond M) + M \rightarrow X \bowtie M$ est un épimorphisme fort. Dès lors, par régularité de la catégorie $\mathcal{C}$, ce morphisme est un épimorphisme régulier. On peut, dès à présent, considérer le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccccc} (X \diamond M) + M & \xrightarrow{\begin{pmatrix} \tau_X \\ \eta_M \end{pmatrix}} & X \bowtie M & & \\ \phi + 1_M \downarrow & & \downarrow n_{X,M} & \searrow \theta & \\ [X, M] + M & \xrightarrow{\ker(q) + 1_M} & X + M & & M \\ \downarrow e & \searrow \begin{pmatrix} \ker(q) \\ m \end{pmatrix} & \downarrow \begin{pmatrix} 1_M \\ m \end{pmatrix} & & \uparrow m \\ [X, M] \vee M & \xrightarrow{i} & X & \xleftarrow{\quad} & \end{array}$$

Afin de vérifier que le diagramme précédent soit bien commutatif, il nous suffit de vérifier que le carré en haut à gauche est commutatif. Pour cela on note les injections pour le produit $(X \diamond M) + M$ comme suit $i_{X \diamond M} : X \diamond M \rightarrow (X \diamond M) + M$ et $i_M : M \rightarrow (X \diamond M) + M$ et concernant les injections pour le produit $X + M$, on les notera $j_X : X \rightarrow X + M$ et $j_M : M \rightarrow X + M$. Ainsi pour montrer que

$$(\ker(q) + 1_M) \circ (\phi + 1_M) = (\ker(q) \circ \phi) + 1_M = n_{X,M} \circ \begin{pmatrix} \tau_X \\ \eta_M \end{pmatrix}$$

il suffit d'utiliser le fait que la paire $(i_M, i_{X \diamond M})$ soit conjointement épimorphique. Or puisque $\ker(q) \circ \phi = \begin{pmatrix} 1_X \\ m \end{pmatrix} \circ \sigma_{X,M}$, on trouve

$$\begin{aligned} & \left[\left(\begin{pmatrix} 1_X \\ m \end{pmatrix} \circ \sigma_{X,M} \right) + 1_M \right] \circ i_M = j_M \\ n_{X,M} \circ \begin{pmatrix} \tau_X \\ \eta_M \end{pmatrix} \circ i_M &= n_{X,M} \circ \eta_M = j_M \\ & \left[\left(\begin{pmatrix} 1_X \\ m \end{pmatrix} \circ \sigma_{X,M} \right) + 1_M \right] \circ i_{X \diamond M} = j_X \circ \left(\begin{pmatrix} 1_X \\ m \end{pmatrix} \circ \sigma_{X,M} \right) = 1_X \circ \sigma_{X,M} = \sigma_{X,M} \\ n_{X,M} \circ \begin{pmatrix} \tau_X \\ \eta_M \end{pmatrix} \circ i_{X \diamond M} &= n_{X,M} \circ \tau_X = \sigma_{X,M}. \end{aligned}$$

Cela montre alors que l'on a bien que $(\ker(q) + 1_M) \circ (\phi + 1_M) = n_{X,M} \circ \begin{pmatrix} \tau_X \\ \eta_M \end{pmatrix}$ et que donc le diagramme considéré avant est bien commutatif.

Comme $m \circ \theta \circ \begin{pmatrix} \tau_X \\ \eta_M \end{pmatrix} = i \circ e \circ (\phi + 1_M)$ et comme $\theta \circ \begin{pmatrix} \tau_X \\ \eta_M \end{pmatrix}$ et $e \circ (\phi + 1_M)$ sont tous les deux des épimorphismes réguliers alors par l'unicité associée à la factorisation épimorphisme régulier-monomorphisme, on a que $M_X = [X, M] \vee M$. $\square$

On a suffisamment de matériel pour énoncer le dernier résultat et le démontrer.

PROPOSITION 5.2.0.8. *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie semi-abélienne. Si un sous-objet $m : M \rightarrow X$ de X est tel que $[X, M]$ est un sous-objet de M alors M est un sous-objet normal de X .*

La démonstration de la proposition précédente est due à l'auteur.

DÉMONSTRATION. Par le Corollaire du Lemme 5.2.0.4, il nous suffit de montrer que $M_X = M$. Or par Lemme 5.2.0.7, on sait que $M_X = [X, M] \vee M$ et on a alors le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & [X, M] \vee M & & \\ & \nearrow & \uparrow k & \nwarrow \bar{m} & \\ [X, M] + M & \xrightarrow{\quad} & M & \xrightarrow{m} & X \\ & \searrow & \downarrow \scriptstyle (\ker(q)) & \nearrow & \\ & & m & & \end{array}$$

Puisque $\bar{m}$ est la clôture normale de m , il existe un unique morphisme $k : M \rightarrow [X, M] \vee M$ tel que $m = \bar{m} \circ k$. Dès lors, puisque m est un monomorphisme, alors k est aussi un monomorphisme. De plus, par régularité et comme $\bar{m}$ est un monomorphisme alors $\bar{m} \circ k$ est la factorisation épimorphisme régulier-

monomorphisme, cela implique alors que le monomorphisme k est aussi un épimorphisme régulier. Ainsi k est un isomorphisme et donc $M = M_X$. $\square$

On a alors le résultat plus général qui met en lumière le fait qu'un sous-groupe H de G est normal si et seulement si son commutateur de H et G est un sous-groupe de H .

THÉORÈME 5.2.0.9. [23, Theorem 6.3] *Soit $\mathcal{C}$ une catégorie semi-abélienne et $K \rightarrowtail A$. Alors K est un sous-objet normal de A si et seulement si $[A, K]$ est un sous-objet de K .*

5.3. Les commutateurs et les algèbres de Lie

Dans la Section 3.3, nous avons montré que la catégorie des algèbres de Lie $\text{Lie}_{\mathbb{K}}$ est une catégorie semi-abélienne (voir Remarque 3.3.0.2) et par la Proposition 3.2.0.4, on a montré que les sous-objets normaux sont les idéaux. Premièrement, on notera que puisque $\text{Lie}_{\mathbb{K}}$ est une catégorie semi-abélienne, alors tous les équivalences discutées dans la Section 4.4 sont vraies dans cette catégorie.

Ensuite étant donné que c'est une catégorie semi-abélienne, nous pouvons définir le commutateur de Higgins et de Huq. En outre, on peut caractériser les sous-objets normaux à l'aide des commutateurs (voir Théorème 5.2.0.9). Dès lors, on peut se demander à quoi correspond le commutateur dans les algèbres de Lie. La réponse est très simple : le commutateur n'est rien de plus que le crochet associé aux algèbres de Lie. On notera que c'est cohérent avec le Théorème 5.2.0.9 puisque si on considère une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ et une sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, alors on sait que $\mathfrak{h}$ est un sous-objet normal de $\mathfrak{g}$ si et seulement si le commutateur $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]$ est un sous-objet de $\mathfrak{h}$. Or dans le cas des algèbres de Lie, on peut montrer qu'être un sous-objet c'est équivalent à être une sous-algèbre. De plus, on sait que les sous-objets normaux sont les idéaux et on sait qu'une sous-algèbre est un idéal si le crochet $[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}]$ est un sous-algèbre de $\mathfrak{h}$. Ainsi, c'est cohérent que les commutateurs soient les crochets de Lie. De plus, on notera que dans certains ouvrages on appelle l'opérateur $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ le *commutateur* (voir [21, Section 3.2]).

Puisque l'on sait à quoi correspond le commutateur, on peut se demander, si comme pour les groupes, on peut définir une sous-algèbre via le commutateur. Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie et soit $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$ deux sous-algèbres de Lie de $\mathfrak{g}$, on pose $[\mathfrak{h}, \mathfrak{k}]$ la sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$ comme étant l'espace linéaire engendré par les éléments $[X, Y]$ où $X \in \mathfrak{h}$ et $Y \in \mathfrak{k}$. Il est courant d'appeler cette sous-algèbre, la *sous-algèbre de Lie commutateur* des sous-algèbres de Lie $\mathfrak{h}$ et $\mathfrak{k}$.

Dès lors, on se rend compte que $[g, h]$ est toujours une sous-algèbre de g et que si en plus, h est un idéal de g , alors $[g, h]$ est une sous-algèbre de h .

Au vu de cette nouvelle sous-algèbre, on peut donner une sous-algèbre de g qui sera un idéal. Il suffit de considérer le cas particulier où $h = g = \mathfrak{k}$. Il est évident que $[g, g]$ est un idéal de g . Il est courant d'appeler cette idéal l'*idéal dérivé*.

Un dernier fait intéressant concernant les sous-algèbres de Lie commutateurs est de savoir quand cette sous-algèbre est un idéal de g . Il suffit que h et $\mathfrak{k}$ soient des idéaux et le résultat suit de l'identité de Jacobi. On notera que ce dernier résultat est similaire à celui dans les groupes. En effet, si on considère un groupe G et deux sous-groupes H et K , alors le sous-groupe commutateur $[H, K]$ est normal dans G si H et K le sont dans G .

Bibliographie

- [1] J. Adámek, H. Herrlich, and G. E. Strecker, *Abstract and Concrete Categories : The Joy of Cats*, Wiley-Interscience Publication Pure and Applied Mathematics, New York (N.Y.) : Wiley, 1990. ↑17, 54, 89, 90
- [2] J. Adámek, J. Rosický, and E. M. Vitale, *Algebraic theories : A Categorical Introduction To General Algebra*, Cambridge Tracts in Mathematics, vol. 184, Cambridge University Press, Great Britain, 2011. ↑57, 104
- [3] M. Barr, P. A. Grillet, and D. H. van Osdol, *Exact categories and categories of sheaves*, Lecture Notes in Math., vol. 236, Springer, 1971. ↑57
- [4] M. Barr, *Exact categories*, Exact categories and categories of sheaves, pp. 1–120. ↑57
- [5] F. Borceux, *Handbook of Categorical Algebra 1 : Basic Category Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Great Britain, 1994. ↑16, 17, 19, 20, 21, 23, 24, 25, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 39, 41, 45, 89, 95, 96, 108, 113, 115, 125, 144
- [6] ———, *Handbook of Categorical Algebra 2 : Categories and Structure*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Great Britain, 1994. ↑17, 21, 22, 26, 27, 29, 57
- [7] ———, *Handbook of Categorical Algebra 3 : Categories of Sheaves*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Great Britain, 1994. ↑57
- [8] F. Borceux and D. Bourn, *Mal'cev, Protomodular, Homological and Semi-Abelian Categories*, Mathematics and Its Applications, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 2004. ↑17, 21, 27, 30, 32, 37, 45, 50, 52, 53, 54, 57, 59, 60, 72, 86, 91, 92, 93, 95, 97, 98, 100, 104, 105, 114, 115, 117, 137, 139
- [9] F. Borceux, G. Janelidze, and G. M. Kelly, *Internal object actions*, Comment. Math. Univ. Carolinae **46** (2005), 235–255. ↑122, 123
- [10] D. Bourn, *Normal subobjects and abelian objects in protomodular categories*, Journal of Algebra **228** (2000), 143–164. ↑91
- [11] D. Bourn, *From Groups to Categorical Algebra : Introduction to protomodular and Mal'tsev categories*, Compact Textbooks in Mathematics, Birkhäuser, 2017. ↑61, 62, 63, 75, 79, 84, 87
- [12] D. Bourn and M. Gran, *IV - Regular, Protomodular, and Abelian Categories*, Cambridge University Press, 2003. ↑30, 108
- [13] D. Bourn and G. Janelidze, *Protomodularity, Descent, and Semidirect Products*, Theory Appl. Categ. **4** (1998), no. 2, 37–46. ↑124
- [14] A. S. Cigoli, J. R. A. Gray, and T. Van der Linden, *Algebraically coherent categories*, Theory and Applications of Categories **30** (2015), 1864–1905. ↑152

- [15] D. di Micco and T. Van der Linden, *Compatible actions in semi-abelian categories*, Homology, Homotopy and Applications **22** (2020), 221–250. ↑124
- [16] M. Gran, *Algèbre multilinéaire et théorie des groupes*, Diffusion Universitaire CIACO, Louvain-la-Neuve, 2015. ↑5, 6, 7, 8, 43, 45, 46
- [17] ———, *Notes on regular, exact and additive categories*, Summer School on Category Theory and Algebraic Topology, Ecole Polytechnique Fédérale de Lausanne, Louvain-la-Neuve, 2014. ↑28, 39, 42, 43
- [18] G. Janelidze, L. Mařki, and A. Ursini, *Ideals and clots in universal algebra and in semi-abelian categories*, Journal of Algebra **307** (2007), 191–208. ↑38, 130
- [19] ———, *Ideals and Clots in Pointed Regular Categories*, Appl. Categor. Struct. **17** (2009). ↑131
- [20] Z. Janelidze, *The pointed subobject functor, 3x3 lemmas, and subtractivity of spans*, Theory and Applications of Categories **23** (2010), 221–242. ↑38
- [21] A. Kirilov Jr., *Introduction to Lie Groups and Lie Algebras*, Cambridge University Press, New York, 2008. ↑12, 13, 14, 158
- [22] S. Mac Lane, *Categories for the working mathematician*, Graduate Texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York Heidelberg Berlin, 1998. ↑20, 65
- [23] S. Mantovani and G. Metere, *Normalities and commutators*, Journal of Algebra **324** (2010), 2568–2588. ↑3, 20, 87, 89, 107, 112, 123, 128, 134, 143, 146, 148, 149, 150, 155, 158
- [24] K. McGerty, *Algebra II : Rings and Modules. Lecture Notes, Hilary 2016*, University of Oxford, Oxford, 2016. <http://people.maths.ox.ac.uk/mcgerty/Algebra%20II.pdf>. ↑10, 12
- [25] V. Tuhafeni Shaumbwa, *A characterization of the Huq commutator*, Theory and Applications of Categories **32** (2017), 1588–1600. ↑147, 148

