

Faculté des sciences

L'algèbre max-times et son utilisation dans des modèles graphiques de type max-linéaires

Auteur : Alice Dhondt

Promoteur : Johan Segers

Lecteurs : Eugen Pircalabelu & Enrico Vitale

Année académique 2021-2022

Master [120] en sciences mathématiques

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
FACULTÉ DES SCIENCES
ÉCOLE DE MATHÉMATIQUES

L'algèbre max-times et son utilisation dans des modèles graphiques de type max-linéaires

Alice Dhondt
Promoteur : Johan Segers
Lecteurs : Eugen Pircalabelu & Enrico Vitale

Master thesis
Juin 2022

Remerciements

Je tiens tout d'abord à remercier grandement mon promoteur, Johan Segers, pour son accompagnement tout au long de mon mémoire, sa patience, ses nombreuses relectures et toute sa disponibilité. Merci à lui de m'avoir fait découvrir ce domaine passionnant qui m'était totalement inconnu, pour lequel j'ai apprécié découvrir de nouveaux aspects à chaque étape du travail. Je lui suis également reconnaissante pour toute la bienveillance dont il a fait preuve à mon égard. Cela a de loin contribué à la tournure positive qu'a pris ce travail pour moi.

Ensuite, j'adresse toute ma gratitude aux professeurs Eugen Pircalabelu et Enrico Vitale pour le temps qu'ils consacreront à la lecture de ce mémoire.

De plus, je voudrais remercier certaines personnes de mon entourage, dont Aurélien Buchet et Nikita Tyunyayev, mes camarades mémorants qui ont été un réel soutien moral lors de nos séances de travail ensemble. Merci également à Gauthier Hanse, qui – tel le futur physicien qu'il est – a relu mon mémoire avec intérêt et m'a apporté certaines rectifications orthographiques. Merci à Simon, Anthony, Yorick et Florian pour m'avoir encouragée à m'installer derrière mes feuilles pour donner le meilleur de moi-même.

Finalement, merci à ma famille pour leur soutien moral et pour m'avoir courageusement écoutée parler de mathématiques depuis quelques années maintenant. Plus particulièrement, je remercie ma maman pour son intérêt et sa curiosité dans mes études dès le premier jour.

Introduction

L’algèbre tropique, qui reprend trois algèbres isomorphes (l’algèbre max-times, max-linéaire et min-linéaire) a été introduite dans le courant des années 1960 par plusieurs mathématiciens et physiciens motivés par des domaines de recherche variés. Parmi eux, on compte Raymond Cuninghame-Green qui est l’un des premiers à avoir publié à propos de l’algèbre max-linéaire, son premier ouvrage étant publié en 1960 ; et Bernard Giffler qui a utilisé les opérations de l’algèbre max-linéaire dans son ouvrage “*Schedule algebra : A progress report*” en 1968 ([9]), tous les deux dans un travail de planification de machines, dont nous présenterons un exemple en page 12. Leur idée était de définir deux opérations, \oplus et \otimes représentant respectivement le maximum et l’addition classique, de sorte à présenter des problèmes non linéaires de manière linéaire. D’autres auteurs ont également utilisé ces outils dans des questions d’optimisation (comme présenté dans l’exemple en page 11), d’informatique et de théorie des graphes. Plus récemment, l’algèbre tropique a également été utilisée dans des domaines de physique, comme la déquantification ([10]). Le mot tropique a été donné en l’honneur du mathématicien brésilien Imre Simon, l’un des pionniers de cette branche ; cependant, les sources divergent sur la question de qui a introduit ce mot (cf. [8], [10]).

Dans ce mémoire, nous nous concentrerons sur l’algèbre max-times, qui est définie sur l’ensemble des réels non négatifs \mathbb{R}_{\geq} , et qui présente comme opération l’addition \oplus et la multiplication \odot qui sont respectivement le maximum et la multiplication classique. Les chapitres 1 et 2 constitueront les bases mathématiques de l’algèbre, dans lesquels nous définirons les propriétés de nos deux opérations, et où nous présenterons d’importants résultats analogues à l’algèbre linéaire, comme la moyenne cyclique maximale (définition 2.1) et la matrice Kleene Star (définition 2.11).

Ensuite, le chapitre 3 nous permettra de lier cette algèbre à des modèles non-linéaires, permettant ainsi de décrire ces modèles de manière récursive et de représenter leurs relations causales graphiquement. Le théorème principal de ce chapitre (théorème 3.5) donne la définition non récursive de nos variables, qui aura un lien avec la matrice Kleene Star introduite dans le chapitre 2. Ce type de modèle s’appelle *modèle max-linéaire* et s’appuie grandement sur notre algèbre max-times.

Enfin, dans le chapitre 4, nous présenterons deux grands théorèmes (théorèmes 4.8 et 4.15) nous donnant des critères suffisants dans l’étude d’indépendance conditionnelle entre des variables dans de tels modèles max-linéaires. Nous clôturerons sur la question de réciprocity de ces deux théorèmes, dont nous donnerons une motivation via un exemple, et pour laquelle un début de base théorique sera présenté dans l’annexe A.

Table des matières

Remerciements	5
Introduction	7
1 Algèbre max-times : introduction	11
1.1 Introduction et définitions des opérations	13
1.2 Graphes et matrices dans l'algèbre max-times	19
2 Algèbre max-times : nouvelles notions	25
2.1 Moyenne cyclique maximale	26
2.2 Fermeture transitive faible et matrice Kleene Star	30
3 Modèles max-linéaires	41
4 Indépendance conditionnelle	47
4.1 Indépendance conditionnelle selon une matrice distance-directe précise . .	51
4.2 Indépendance conditionnelle valable pour toute matrice distance-directe .	54
4.3 Exemple	57
4.4 Réciprocité	60
Conclusion	63
A Réciprocité des théorèmes d'indépendance	65

Chapitre 1

Algèbre max-times : introduction

Dans ce premier chapitre, nous allons construire une base mathématique de l'algèbre que nous allons utiliser tout au long du mémoire, l'algèbre max-times. Toutes les définitions et résultats de ce chapitre sont dérivés du livre de P. Butkovič, [7] qui se concentre sur l'algèbre max-linéaire. Cependant, comme nous le verrons dans la suite, nous serons plus intéressés par l'algèbre max-times.

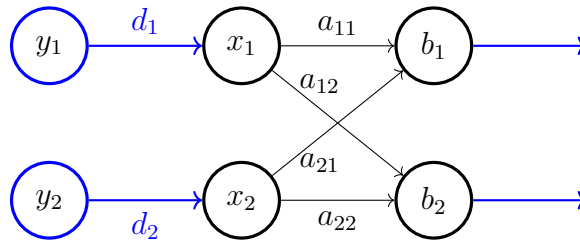
Nous verrons plus loin que nous utiliserons parfois le mot *tropique*. Ce mot fait référence aux algèbres max-linéaires, min-linéaires et max-times, qui sont étroitement liées comme nous le verrons plus bas. L'origine de ce mot vient du fait que le mathématicien Imre Simon (1943 – 2009), qui était l'un des pionniers de cette branche en ayant développé l'algèbre min-linéaire pour des problèmes d'optimisation, était Brésilien. Cette branche des mathématiques a été introduite en réponse à des problèmes d'optimisation. Commençons par présenter une version de deux de ces problèmes.

Temps de transfert ¹

Considérons deux avions décollant respectivement de leurs aéroports initiaux A et B . Le premier avion décolle de l'aéroport A à un temps y_1 et met un temps d_1 pour arriver dans un troisième aéroport C . Le second avion décolle à y_2 et a un temps de vol d_2 jusqu'au même aéroport C . Certains voyageurs de chacun des deux vols doivent prendre une correspondance dans cet aéroport, pour deux destinations différentes. Ces deux vols ont chacun des temps de départ fixés b_1 et b_2 et ne peuvent pas être changés. Les temps de transfert entre les portes d'arrivée et les portes de départ sont connus et donnés par $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$. La question est de savoir quels sont les temps de départ y_1 et y_2 des deux avions de leurs aéroports initiaux afin d'optimiser les temps de trajet.

1. Exemple 1.2.2 du livre [7]

La situation peut se modéliser par le schéma suivant :



Chercher x_1 et x_2 revient à résoudre les deux équations *non linéaires* suivantes

$$\begin{aligned}
 b_1 &= \max(y_1 + d_1 + a_{11}, y_2 + d_2 + a_{21}), \\
 b_2 &= \max(y_1 + d_1 + a_{12}, y_2 + d_2 + a_{22}).
 \end{aligned}$$

Nous aimerions pouvoir écrire ces relations de manière “linéaires”, et c’est cela qui motive les définitions d’une nouvelle algèbre, dont l’addition serait donnée par le maximum et le produit serait la somme au sens classique du terme. Cette algèbre est appelée *max-linéaire* et fait donc partie des algèbres tropiques. Grâce aux outils que nous allons développer plus loin, nous pouvons alors réécrire ces deux relations sous forme matricielle :

$$B = A \otimes X,$$

où A est la matrice des temps de transfert et D est le vecteur des temps de vol des deux avions entre les aéroports initiaux et l’aéroport C .

Processus de production interactif multi-machines²

Un problème assez connu qui est relevé dans plusieurs ouvrages est le problème de processus de production interactif multi-machines, qui est le suivant. Dans le cas où n machines doivent travailler simultanément et en chaîne pour préparer m produits, il se peut que certaines machines ne puissent pas commencer leur tâche avant que d’autres n’aient fini. On aimerait déterminer les temps de départ x_i auxquels les machines M_i doivent commencer leur tâche de manière optimale. Soit a_{ij} le temps durant lequel la machine M_j doit travailler sur le produit P_i , la matrice A s’appelle la matrice de production. Chaque produit P_i sera ainsi fini après un temps égal à

$$\max(x_1 + a_{i1}, \dots, x_n + a_{in}).$$

Si on note b_1, \dots, b_n ce temps de production total, alors le temps de départ de chaque machine x_i doit satisfaire

$$b_i = \max(x_1 + a_{i1}, \dots, x_n + a_{in})$$

2. Section 1.3.1 du livre [7]

pour tout $i = 1, \dots, n$. Ainsi, en écrivant sous forme matricielle avec les mêmes opérations que dans notre exemple précédent, cela nous donne

$$B = A \otimes X.$$

1.1 Introduction et définitions des opérations

Nous allons donner ici un condensé de définitions, propriétés, résultats et théorèmes concernant ce que l'on appelle l'algèbre max-times. Cette algèbre se révèle très intéressante dans l'idée de résoudre des problèmes non linéaires d'une manière analogue à l'algèbre linéaire.

Soient $\mathcal{G}_0 = (\mathbb{R}_{\geq}, \cdot, \leq)$, $\mathcal{G}_1 = (\mathbb{R}, +, \leq)$ et $\mathcal{G}_2 = (\mathbb{R}, +, \geq)$ des groupes commutatifs ordonnés linéaires, où $+$ et \cdot sont les opérations de groupes, et \leq et \geq représentent les ordres linéaires.

Algèbre max-linéaire Intéressons nous d'abord à \mathcal{G}_1 . On commence par définir $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$. Et pour $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$,

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \max(a, b), \\ a \otimes b &= a + b, \end{aligned}$$

où le symbole “+” dénote la somme classique. Comme dans l'algèbre linéaire, nous pouvons étendre les opérations (\oplus, \otimes) aux vecteurs et aux matrices. Pour les matrices $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ et $C = (c_{ij})$ de tailles compatibles (dans le même sens que pour les opérations matricielles de l'algèbre linéaire), on définit les opérations matricielles suivantes :

$$\begin{aligned} C = A \oplus B & & c_{ij} &= a_{ij} \oplus b_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij}) \\ C = A \otimes B & & c_{ij} &= \bigoplus_k a_{ik} \otimes b_{kj} = \max_k(a_{ik} + b_{kj}) \end{aligned}$$

Exemple 1.1. Pour illustrer ces nouvelles opérations, voici quelques exemples de calculs :

$$\begin{aligned}
 1 \oplus 5 &= 5 \\
 1 \otimes 5 &= 6 \\
 (3, 4) \otimes \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} &= \max(3 - 5, 4 + 1) = 5 \\
 \begin{pmatrix} -5 \\ 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ -\infty \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} -5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \max(-4, 3) & \max(3, 4) \\ \max(-7, 2) & \max(0, 3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

On peut également exprimer des systèmes d'équations :

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \otimes \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}$$

ce qui se traduit par le système $\begin{cases} \max(1 + x, 3 + y) = 4 \\ \max(-2 + x, 2 + y) = 0. \end{cases}$

Avec ces définitions, et en développant certaines propriétés, on peut voir que $(\overline{\mathbb{R}}, \oplus, \otimes)$ constitue un semi-anneau commutatif et idempotent. En effet pour $a, b, c \in \overline{\mathbb{R}}$ et $A, B, C \in \overline{\mathbb{R}}^{n \times n}$:

— \otimes est distributif par rapport à \oplus , c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 a \otimes (b \oplus c) &= (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) \\
 A \otimes (B \oplus C) &= (A \otimes B) \oplus (A \otimes C);
 \end{aligned}$$

— les neutres de \oplus et \otimes sont bien définis, à savoir

$$\begin{aligned}
 a \oplus -\infty &= a & A \oplus -\infty &= A \\
 a \otimes 0 &= a & A \otimes I_1 &= A
 \end{aligned}$$

où on note I_1 la matrice identité de dimensions $n \times n$ pour cette algèbre

$$I_1 = \begin{pmatrix} 0 & & -\infty \\ & \ddots & \\ -\infty & & 0 \end{pmatrix};$$

— $(\overline{\mathbb{R}}, \oplus, -\infty)$ est un monoïde³ commutatif et $(\overline{\mathbb{R}}^{n \times n}, \otimes, I_1)$ est un monoïde ;

— le neutre $-\infty$ est absorbant pour \otimes , c'est-à-dire que $a \otimes -\infty = -\infty$;

3. Pour rappel, un **monoïde** est un ensemble muni d'une loi de composition interne associative et d'un élément neutre

- l'opération \oplus n'a pas d'inverse. En effet, si par exemple $x \oplus 3 = 3$, on est incapable de déterminer x ;
- l'opération \oplus est idempotente : c'est-à-dire que $a \oplus a = a$.

La théorie autour de ce \mathcal{G}_1 s'appelle l'algèbre max-linéaire.

Algèbre min-linéaire Nous pouvons à présent nous intéresser à $\mathcal{G}_2 = (\mathbb{R}, +, \geq)$. Grâce à l'isomorphisme $f(x) = -x$, nous pouvons voir que \mathcal{G}_2 est isomorphe à \mathcal{G}_1 . Nous définissons alors l'opération \otimes de la même manière : $a \otimes b = a + b$, mais l'opération \oplus est telle que $a \oplus b = \min(a, b)$. On a ici une algèbre min-linéaire.

Algèbre max-times Ensuite, grâce à l'isomorphisme $f(x) = \ln(x)$, $\mathcal{G}_0 = (\mathbb{R}_{\geq}, \cdot, \leq)$ est également isomorphe à \mathcal{G}_1 . Contrairement au cas précédent, ici l'opération \oplus reste inchangée : $a \oplus b = \max(a, b)$ et représente le maximum, mais l'opération \otimes devient telle que $a \odot b = a \cdot b$. On parle ici d'algèbre *max-times*.

Grâce à ces deux isomorphismes, tous les résultats obtenus pour l'algèbre max-linéaire, qui est présente dans beaucoup d'ouvrages, peuvent être transposables pour ces deux autres algèbres. Dans la suite, nous allons nous intéresser à l'algèbre max-times.

Définissons proprement cette algèbre.

Notation 1.2. *Dans la suite, nous dénoterons*

$$\mathbb{R}_{\geq} = [0, +\infty),$$

et pour $a, b \in \mathbb{R}_{\geq}$,

$$\begin{aligned} a \oplus b &= \max(a, b) \\ a \odot b &= a \cdot b. \end{aligned}$$

Etendons à présent les opérations (\oplus, \odot) aux vecteurs et aux matrices.

Notation 1.3. *Pour les matrices $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ et $C = (c_{ij})$ de tailles compatibles (dans le même sens que pour les opérations matricielles de l'algèbre linéaire), on définit les opérations matricielles suivantes :*

$$\begin{aligned} C = A \oplus B & & c_{ij} &= a_{ij} \oplus b_{ij} = \max(a_{ij}, b_{ij}) \\ C = A \odot B & & c_{ij} &= \bigoplus_k a_{ik} \odot b_{kj} = \max_k(a_{ik} \cdot b_{kj}). \end{aligned}$$

Nous notons également A^\top pour la matrice transposée de A , et $A \leq B$ si $a_{ij} \leq b_{ij} \forall i, j$.

Afin de nous familiariser avec le produit matriciel \odot , voici quelques exemples :

Exemple 1.4.

$$(3, 4) \odot \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \max(3 \cdot 5, 4 \cdot 1) = 15$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \max(1 \cdot 5, 3 \cdot 0) & \max(1 \cdot 2, 3 \cdot 1) \\ \max(2 \cdot 5, 0 \cdot 0) & \max(2 \cdot 2, 0 \cdot 1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$$

$$4 \odot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 & 8 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$$

Afin de pouvoir définir plus d'outils, notons que nous avons toutes les propriétés suivantes (dont les preuves sont plus ou moins directes depuis les définitions de nos opérations) pour $a, b \in \mathbb{R}_{\geq}$:

$$\begin{aligned} a \oplus b &= b \oplus a & a \odot b &= b \odot a \\ a \oplus (b \oplus c) &= (a \oplus b) \oplus c & a \odot (b \odot c) &= (a \odot b) \odot c \\ a \oplus 0 &= a & a \odot 1 &= a \\ & & a \odot 0 &= 0 \\ a \oplus b &\geq a \quad \text{et} \quad a \oplus b \geq b \\ a \geq b &\Rightarrow a \oplus c \geq b \oplus c & a \geq b &\Leftrightarrow a \odot c \geq b \odot c \quad (\text{si } c > 0) \\ & & (a \oplus b) \odot c &= (a \odot c) \oplus (b \odot c) \end{aligned}$$

On peut remarquer par ces propriétés que les neutres pour \oplus et \odot sont respectivement 0 et 1. De plus, ces propriétés s'étendent aux vecteurs et matrices. Ici, la matrice identité de dimensions $n \times n$ se note

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}.$$

Et on a donc pour des matrices A, B, C, I de tailles compatibles sur \mathbb{R}_{\geq}^d et pour $a \in \mathbb{R}_{\geq}$

$$\begin{aligned} A \oplus B &= B \oplus A & (A \odot B) \odot C &= A \odot (B \odot C) \\ (A \oplus B) \oplus C &= A \oplus (B \oplus C) & A \odot I &= A = I \odot A \\ A \oplus 0 &= A = 0 \oplus A & A \odot 0 &= 0 = 0 \odot A \\ A \oplus B \leq A &\quad \text{et} \quad A \oplus B \leq B & a \odot (B \odot C) &= B \odot (a \odot C) \end{aligned}$$

$$a \odot (B \oplus C) = (a \odot B) \oplus (a \odot C)$$

$$A \odot (B \oplus C) = (A \odot B) \oplus (A \odot C)$$

Et nous pouvons ainsi voir que les neutres pour \oplus et \odot de l'opération matricielle sont

respectivement les matrices 0 et I .

Ainsi, avec toutes nos définitions et propriétés établies, on a que $(\mathbb{R}_{\geq}, \oplus, \odot)$ constitue également un semi-anneau commutatif et idempotent.

En effet :

- \odot est distributif par rapport à \oplus , c'est-à-dire

$$\begin{aligned} a \odot (b \oplus c) &= (a \odot b) \oplus (a \odot c) \\ A \odot (B \oplus C) &= (A \odot B) \oplus (A \odot C); \end{aligned}$$

- les neutres de \odot et \oplus sont bien définis, à savoir

$$\begin{aligned} a \oplus 0 &= a & A \oplus 0 &= A \\ a \odot 1 &= a & A \odot I &= A \end{aligned}$$

où on note I la matrice identité "classique" de dimensions $n \times n$;

- $(\mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}, \oplus, 0)$ est un monoïde commutatif et $(\mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}, \odot, I)$ est un monoïde;
- le neutre 0 de \oplus est absorbant pour \odot , c'est-à-dire que $a \odot 0 = 0$;
- l'opération \oplus n'a pas d'inverse;
- l'opération \oplus est idempotente.

Bien que \oplus n'ait pas d'inverse, le fait qu'il soit idempotent nous permettra de construire des outils qui nous seront utiles pour des problèmes de valeurs et vecteurs propres, de résolution de systèmes d'équations, etc.

Définition 1.5. Une **matrice diagonale** A est telle que les éléments sur sa diagonale sont d_1, d_2, \dots, d_n et que ceux en dehors de la diagonale sont 0 : $A = \text{diag}(d)$. Ainsi, la matrice identité peut s'écrire $I = \text{diag}(1, \dots, 1)$.

Définition 1.6. Une **matrice de permutation** est une matrice obtenue à partir de la matrice identité en échangeant des lignes et/ou des colonnes.

Une **matrice de permutation généralisée** est une matrice obtenue à partir de la matrice identité en échangeant des lignes et/ou des colonnes et en multipliant chacune de celles-ci par des constantes strictement positives.

Pour toute matrice de permutation $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$, il existe une permutation π de $N = \{1, \dots, n\}$ tel que $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq} \Leftrightarrow j = \pi(i)$.

Exemple 1.7. Par exemple, soient

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

La matrice A est une matrice de permutation, tandis que les matrices B et C sont des matrices de permutation généralisées.

Le théorème suivant nous prouve que les seules matrices qui possèdent un inverse sont les matrices de permutation généralisées.

Théorème 1.8. *Soit $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$. Il existe une matrice B telle que $A \odot B = I = B \odot A$ si et seulement si A est une matrice de permutation généralisée.*

Démonstration. Supposons qu'il existe une telle matrice B . Cela revient à écrire que

$$\max_k (a_{ik} \cdot b_{kj}) = \max_k (b_{ik} \cdot a_{kj}) = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases}.$$

Prenons par exemple l'équation $1 = \max_k (a_{ik} \cdot b_{ki})$. Soit $r \in \{1, \dots, n\}$ qui maximise ce produit, et donc qui est tel que $a_{ir} \odot b_{ri} = 1$. Cela implique que a_{ir} et b_{ri} sont non nuls. Nous voulons montrer qu'il s'agit du seul élément sur la i -ème ligne de la matrice A qui soit non nul. Supposons par contradiction qu'il existe $l \neq r$ tel que $a_{il} \neq 0$. Dans ce cas, le produit $b_{ri} \cdot a_{il}$ est non nul et nous avons que l'élément (rl) de notre matrice identité donné par

$$\max_k (a_{rk} \cdot b_{kl}) = \max(\dots, b_{ri} \cdot a_{il}, \dots) \neq 0,$$

ce qui contredit la définition de la matrice I . Ainsi, il ne peut y avoir qu'un seul élément non nul par ligne de A . Nous pouvons montrer que c'est également le cas pour les colonnes de la matrice par un argument similaire. Finalement, A est bien une matrice de permutation généralisée.

Supposons à présent que A est une matrice de permutation généralisée, et prenons π une permutation telle que $a_{ij} \in \mathbb{R}_{\geq} \Leftrightarrow j = \pi(i)$. On définit $B = (b_{ij}) \in \mathbb{R}_{\geq}$ telle que

$$b_{ij} = \begin{cases} (a_{i,j})^{-1} & \text{si } j = \pi(i) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Ainsi, on a bien $A \odot B = B \odot A = I$ □

Remarque 1.9. Notons que l'inverse d'une matrice diagonale est facile à déterminer et, si $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$, son inverse est $X^{-1} = \text{diag}(x_1^{-1}, \dots, x_n^{-1})$.

Dans la suite, nous allons beaucoup travailler avec des puissances de matrices. Pour cela, nous aurons besoin de la définition suivante.

Définition 1.10. La puissance k -ème d'un élément $a \in \mathbb{R}_{\geq}$ est tout simplement a^k comme dans le sens classique. La puissance k -ème de la matrice $A \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$ s'écrit par l'itération

$$A^k = A \odot A \odot \cdots \odot A = A^{k-1} \odot A.$$

Et par convention, nous notons

$$a^0 = 1 \quad \text{et} \quad A^0 = I.$$

Notation 1.11. Il faut bien différencier les deux notations suivantes :

$a_{ij}^{(k)}$ représente la (ij) ème entrée de la matrice A^k .

a_{ij}^k représente la puissance k de la (ij) ème entrée de la matrice A .

Lemme 1.12. Pour une matrice $A \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$ et un entier positif k , on a

$$(I \oplus A)^k = I \oplus A \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^k.$$

Démonstration. On calcule simplement depuis les définitions et en utilisant que l'opération \oplus est idempotente et que $I \odot A = A$,

$$(I \oplus A)^2 = (I \oplus A) \odot (I \oplus A) = I \oplus A \oplus A \oplus A^2 = I \oplus A \oplus A^2.$$

Et donc, par récurrence sur k :

$$\begin{aligned} (I \oplus A)^k &= (I \oplus A)^{k-1} \odot (I \oplus A) \\ &= (I \oplus A \oplus \cdots \oplus A^{k-1}) \odot (I \oplus A) \\ &= I \oplus A \oplus \cdots \oplus A^{k-1} \oplus A \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^k \\ &= I \oplus A \oplus \cdots \oplus A^k. \end{aligned}$$

□

1.2 Graphes et matrices dans l'algèbre max-times

Comme nous l'avons vu dans les exemples introductifs de temps de transfert et de processus de production interactif multi-machines aux pages 11 et 12 au début du chapitre – et que nous le verrons de manière plus approfondie dans le chapitre 3 – nous sommes intéressés dans la représentation graphique que peut offrir cette nouvelle algèbre. Cette section se concentre donc à donner une brève série de définitions et concepts sur les *graphes*.

Définition 1.13. Un **graphe** est une paire ordonnée $D = (V, E)$ où V est un ensemble fini non vide de noeuds et $E \subseteq V \times V$ est l'ensemble des arcs entre ces noeuds.

Un **sous-graphe** est un graphe $D' = (V', E')$ tel que $V' \subseteq V$ et $E' = \{(u, v) \in E \mid u, v \in V'\} \subseteq E$.

Notation 1.14. On dit qu'un arc $e \in E$ va de u à v pour $u, v \in V$ en notant $e = (u, v)$. Ainsi, avec cette notation, $e = (u, u)$ est une **boucle**.

Définition 1.15. Soit $D = (V, E)$ un graphe. Un **chemin** est une suite de noeuds $\pi = (v_1, v_2, \dots, v_p)$ où $p \geq 1$, $(v_i, v_{i+1}) \in E$ pour tout $i = 1, \dots, p-1$. On dit que v_1 est le noeud de départ et v_p le noeud d'arrivée. On peut également noter π comme $v_1 \rightarrow v_p$.

La **longueur** du chemin π est donnée par $l(\pi) = p - 1$.

Si il existe un chemin $u \rightarrow v$, alors on dit que v est **accessible** depuis u .

Nous pouvons voir que si il existe $\pi : u \rightarrow v$ et $\pi' : v \rightarrow w$, alors $\pi \circ \pi'$ est un chemin $u \rightarrow w$.

Définition 1.16. Un **cycle** est un chemin $\sigma = (v_1, \dots, v_{p-1}, v_1)$ tel que $v_1 = v_p$ pour $p \geq 1$.

Un **cycle élémentaire** est un cycle tel que chacun de ses noeuds v_i est différent pour $i \in \{1, \dots, p-1\}$. C'est-à-dire un chemin (v_1, \dots, v_p) tel que $v_1 = v_p$ et tel que $v_i \neq v_j$ pour tout $i \neq j$.

Un graphe D est **acyclique** s'il ne contient aucun cycle de longueur supérieure à 1.

Un graphe D est **fortement connexe** s'il existe un chemin $u \rightarrow v$ pour tout $u, v \in V$.

Notons donc que si un graphe ne contient qu'un noeud et aucun arc, alors le graphe est fortement connexe et acyclique. Et si un graphe contient 2 noeuds et un arc, alors il est acyclique (et fortement connexe).

Définition 1.17. Un **graphe pondéré** $D = (V, E, w)$ est un graphe (V, E) avec w une fonction réelle dans E ; où, si $\pi = (v_1, \dots, v_p)$ est un chemin, alors le poids de π est

$$w(\pi) = \begin{cases} w(v_1, v_2) \cdot w(v_2, v_3) \cdots \cdots w(v_{p-1}, v_p) & \text{si } p > 1 \\ 0 & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

Notation 1.18. Soient $N = \{1, \dots, n\}$ et une matrice $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$. On note D_A le graphe pondéré (N, E, w) où E est l'ensemble des arcs, c'est-à-dire toutes les paires (i, j) tels que $a_{ij} > 0$ et où $w_{ij} = a_{ij}$ pour tout $(i, j) \in E$. Si $\pi = (i_1, \dots, i_p) \in D_A$ est un chemin, alors

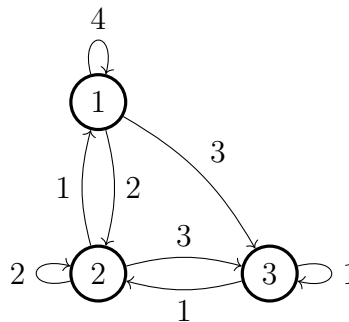
$$w(\pi, A) = w(\pi) = \begin{cases} a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdots \cdots a_{i_{p-1} i_p} & \text{si } p > 1 \\ 0 & \text{si } p = 1. \end{cases}$$

Si D_A est un graphe pondéré avec la fonction poids w , alors on note la **matrice distance-directe de D** $A_D := (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$ où

$$a_{ij} = \begin{cases} w(i, j) & \text{si } (i, j) \in E \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, dans ce cas on note $F_A = (N, E)$.

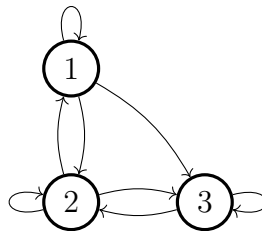
Exemple 1.19. Considérons le graphe D_A suivant.



Avec un tel graphe, où les poids de chaque arc sont notés à côté de l'arc correspondant, nous avons la matrice distance directe correspondante :

$$A_D = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

De plus, on a $F_A =$



Nous pouvons voir que, tout comme dans l'algèbre linéaire, nous pouvons avoir des relations d'équivalence entre deux matrices.

Définition 1.20. Une matrice B peut être obtenue à partir d'une autre matrice A par **échelonnement similaire diagonal** si on peut écrire B comme $B = X^{-1} \odot A \odot X$ où X est une matrice diagonale.

Remarque 1.21. Nous pouvons noter d'autres relations d'équivalence, qui ne seront pas utilisées dans la suite du mémoire mais qui sont néanmoins présentées ici à titre d'information pour le lecteur.

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

où P est une matrice de permutation, C, D sont des matrices diagonales et Q, R sont des matrices de permutation généralisées.

A et B sont **équivalentes**, $A \equiv B$, si on peut écrire la matrice B comme $B = P^{-1} \odot A \odot P$, où P est une matrice de permutation. Autrement dit, si B peut être obtenue à partir de A en échangeant certaines lignes et/ou colonnes. Par exemple, on a

$$P^{-1} \odot A \odot P = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = B$$

où cette matrice B est bien obtenue en échangeant ses lignes et colonnes : $A \equiv B$.

A et E sont **directement similaires**, $A \sim E$, si on peut écrire E comme $E = C \odot A \odot D$ où C et D sont des matrices diagonales. Autrement dit, si E peut être obtenue à partir de A en multipliant des constantes finies non nulles aux lignes et aux colonnes de A . Par exemple,

$$C \odot A \odot D = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 24 \\ 6 & 0 \end{pmatrix} = E$$

où cette matrice E est bien obtenue en multipliant toutes les entrées de A par une constante : $A \sim E$.

A et F sont **similaires**, $A \approx B$, si on peut écrire F comme $F = Q \odot A \odot R$ où Q et R sont des matrices de permutation généralisées. Autrement dit, si F peut être obtenue à partir de A en permutant et/ou en multipliant des constantes non nulles aux lignes et aux colonnes de A . Par exemple,

$$Q \odot A \odot R = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix} = F$$

où cette matrice F est bien obtenue à partir de A , en échangeant les deux lignes et ensuite en multipliant chaque entrée par une constante non nulle, $A \approx F$.

Proposition 1.22. Soient des matrices $A, B \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$, $B = X^{-1} \odot A \odot X$ où $X = \text{diag}(x_1, \dots, x_n)$. Alors $w(\sigma, A) = w(\sigma, B)$ pour tout cycle σ dans $F_A (= F_B)$.

Démonstration. Si $B = X^{-1} \odot A \odot X$, alors les éléments de $X^{-1} \odot A$ sont de la forme $c_{il} = \max_k(x_{ik}^{-1} \cdot a_{kl})$ et donc les éléments de la matrice B sont tels que

$$b_{ij} = \max_l(\max_k(x_{ik}^{-1} \cdot a_{kl}) \cdot x_{lj}).$$

Ensuite, puisqu'on a que

$$x_{ij} = \begin{cases} x_i & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases},$$

cela revient à dire que le maximum sera atteint lorsque $i = k$ et $l = j$, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} b_{ij} &= \max_{k,l}(x_{ik}^{-1} \cdot a_{kl} \cdot x_{lj}) = x_i^{-1} \cdot a_{ij} \cdot x_j \\ &= \frac{1}{x_i} \cdot a_{ij} \cdot x_j. \end{aligned}$$

A présent, soit un cycle $\sigma = (i_1, i_2, \dots, i_{p-1}, i_p = i_1)$ dans (N, E) , on a

$$\begin{aligned} w(\sigma, B) &= b_{i_1 i_2} \cdot b_{i_2 i_3} \cdots b_{i_{p-1} i_1} \\ &= \frac{1}{x_{i_1}} \cdot a_{i_1 i_2} \cdot x_{i_2} \cdot \frac{1}{x_{i_2}} \cdot a_{i_2 i_3} \cdot x_{i_3} \cdots \frac{1}{x_{i_{p-1}}} \cdot a_{i_{p-1} i_1} \cdot x_{i_1} \\ &= a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{p-1} i_1} = w(\sigma, A) \end{aligned}$$

□

Chapitre 2

Algèbre max-times : nouvelles notions

Grâce à toutes les définitions du chapitre précédent, nous sommes à présent capables de développer des outils clefs dans cette algèbre max-times. Tout comme le premier chapitre du mémoire, ce chapitre-ci s'appuie également sur le livre de P. Butkovič, [7].

Le premier point essentiel est la moyenne cyclique maximale d'une matrice. Cette notion est primordiale pour la suite. Nous en donnerons donc la définition, des exemples pour la calculer, et plusieurs propositions intéressantes qui en découlent. Il est intéressant de noter que cette notion est analogue à celle de valeur propre dans l'algèbre linéaire.

La seconde partie de ce chapitre sera consacrée aux matrices de fermeture transitives faibles et fortes, qui nous permettront d'ensuite construire notre troisième chapitre. Dans le cadre de ce mémoire, nous ne développerons malheureusement pas tous les objets mathématiques de notre algèbre, mais pour une présentation plus complète de tous les analogues que nous pouvons construire, le lecteur est invité à consulter le livre de P. Butkovič, [7], qui en donne un spectre assez large.

2.1 Moyenne cyclique maximale

Définition 2.1. La *moyenne cyclique maximale* de A se définit par

$$\lambda(A) = \max_{\sigma \in D_A} \mu(\sigma, A)$$

où on prend le maximum sur les cycles élémentaires dans D_A (définition 1.16 et notation 1.18) et où

$$\mu(\sigma, A) = w(\sigma, A)^{1/l(\sigma)}$$

est la moyenne géométrique du cycle élémentaire σ .

Notons que D_A est acyclique si et seulement si $\lambda(A) = 0$. En effet, si le graphe est acyclique, alors on prend par convention que le maximum du vide est nul.

Exemple 2.2. Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de notre exemple 1.19. Les cycles élémentaires de longueur 1 possibles sont

$$\begin{aligned} w(1) &= a_{11} = 4 \\ w(2) &= a_{22} = 2 \\ w(3) &= a_{33} = 1. \end{aligned}$$

De même, pour les cycles élémentaires de longueur 2, on a

$$\begin{aligned} w(1, 2) &= a_{12} \cdot a_{21} = 2 \cdot 1 = 2 & w(2, 1) &= a_{21} \cdot a_{12} = 1 \cdot 2 = 2 \\ w(2, 3) &= a_{23} \cdot a_{32} = 3 \cdot 1 = 3 & w(3, 2) &= a_{32} \cdot a_{23} = 1 \cdot 3 = 3. \end{aligned}$$

Et pour ceux de longueur 3,

$$\begin{aligned} w(1, 3, 2) &= a_{13} \cdot a_{32} \cdot a_{21} = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3 \\ w(2, 1, 3) &= a_{21} \cdot a_{13} \cdot a_{32} = 1 \cdot 3 \cdot 1 = 3 \\ w(3, 2, 1) &= a_{32} \cdot a_{21} \cdot a_{13} = 1 \cdot 1 \cdot 3 = 3. \end{aligned}$$

On calcule donc

$$\lambda(A) = \max(4^1, 2^1, 1^1, 2^{1/2}, 3^{1/2}, 3^{1/3}) = 4.$$

Dans les faits, la définition que l'on a donné de $\lambda(A)$ peut rendre le calcul long. On va donc donner un résultat qui facilite le calcul. Pour cela, rappelons nous de la notation 1.11.

Proposition 2.3 (Propriété de Vorobyov).

$$\lambda(A) = \max_{k \in \mathbb{N}} \max_{i \in N} (a_{ii}^{(k)})^{1/k}.$$

Exemple 2.4. On reprend la même matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ que dans l'exemple 1.19.

On calcule les puissances de A :

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ A^2 &= \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16 & 8 & 12 \\ 4 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \\ A^3 &= \begin{pmatrix} 16 & 8 & 12 \\ 4 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 64 & 32 & 48 \\ 16 & 8 & 12 \\ 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Il nous faut donc regarder pour chaque puissance, la plus grande valeur sur la diagonale (inscrite à chaque fois en rouge dans les calculs précédents). Nous avons alors

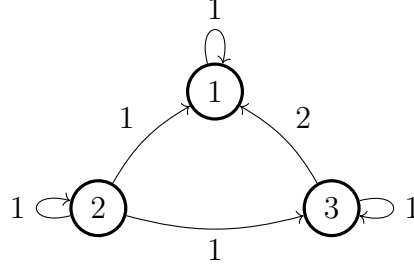
$$\lambda(A) = \max_{k \in \mathbb{N}} \max_{i \in N} (a_{ii}^{(k)})^{1/k} = \max(4^1, 16^{1/2}, 64^{1/3}) = 4.$$

Définition 2.5. A est **définite** si $\lambda(A) = 1$. C'est-à-dire si tous les cycles dans D_A ont un poids inférieur à 1 avec au moins un cycle de poids égal à 1.

Exemple 2.6. Prenons à présent une matrice

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

qui représente la matrice distance-directe du graphe suivant.



On peut calculer

$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Ainsi, grâce à l'axiome de Vorobyov 2.3,

$$\lambda(B) = \max_{k \in N} \max_{i \in N} (b_{ii}^{(k)})^{1/k} = \max(1) = 1.$$

On peut donc voir que cette matrice est définite.

Proposition 2.7. Soient une matrice $A \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq}$. Alors

$$\lambda(\alpha \odot A) = \alpha \cdot \lambda(A).$$

On peut également en déduire que la matrice $A_\lambda = (\lambda(A))^{-1} \odot A$ est définite quand $\lambda(A) > 0$.

Démonstration. Soient $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$, un cycle dans D_A , $\sigma = (i_1, \dots, i_k, i_1)$, et $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq}$. Notons que si $\alpha = 0$, la preuve est claire. Supposons donc à présent $\alpha > 0$. On calcule facilement que

$$\begin{aligned} \mu(\sigma, \alpha \odot A) &= (\alpha a_{i_1 i_2} \cdot \alpha a_{i_2 i_3} \cdots \alpha a_{i_{k-1} i_k} \cdot \alpha a_{i_k i_1})^{1/k} \\ &= \left(\alpha^k (a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{k-1} i_k} \cdot a_{i_k i_1}) \right)^{1/k} \\ &= \alpha (a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{k-1} i_k} \cdot a_{i_k i_1})^{1/k} \\ &= \alpha \odot \mu(\sigma, A). \end{aligned}$$

A présent, grâce à ce résultat, nous pouvons voir que

$$\begin{aligned} \lambda(\alpha \odot A) &= \max_{\sigma} \mu(\sigma, \alpha \odot A) \\ &= \max_{\sigma} \alpha \odot \mu(\sigma, A) \\ &= \alpha \odot \max_{\sigma} \mu(\sigma, A) \\ &= \alpha \odot \lambda(A). \end{aligned}$$

De plus,

$$\lambda\left(\left(\lambda(A)\right)^{-1} \odot A\right) = \left(\lambda(A)\right)^{-1} \odot \lambda(A) = 1. \quad \square$$

Définition 2.8. Un chemin $\pi_1 : i \rightarrow j$ est **critique** si son poids est plus lourd que les poids de tous les autres chemins $\pi_k : i \rightarrow j : w(\pi_1) \geq w(\pi_k) \quad \forall k$.

Définition 2.9. Soit $A \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$, on écrit **l'ensemble des noeuds critiques**

$$N_C(A) = \{i \in N : \exists \sigma = (i = i_1, \dots, i_k, i_1) \in D_A \text{ tel que } \mu(\sigma, A) = \lambda(A)\}.$$

C'est-à-dire l'ensemble des noeuds i qui font partie d'un cycle qui maximise notre moyenne cyclique maximale.

De plus, on dit qu'un cycle σ est **critique** si $\mu(\sigma, A) = \lambda(A)$.

On dit que i et j sont **équivalents**, $i \sim j$, si $i, j \in N_C(A)$ appartiennent au même cycle critique.

Notons que \sim définit une relation d'équivalence sur N_C .

Proposition 2.10. Soit une matrice $A \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$, alors pour tout $\alpha > 0$, $N_C(\alpha \odot A) = N_C(A)$.

Démonstration. Nous avons déjà prouvé dans la proposition 2.7 que pour $A \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$ et $\alpha \in \mathbb{R}_{\geq}$, $\lambda(\alpha \odot A) = \alpha\lambda(A)$. Or si $i \in N_C(\alpha \odot A)$, alors il appartient à un cycle critique σ , qui est tel que $\mu(\sigma, \alpha \odot A) = \lambda(\alpha \odot A)$. Nous voulons montrer que pour ce même cycle, $\mu(\sigma, A) = \lambda(A)$. Nous avons

$$\alpha \odot \mu(\sigma, A) = \mu(\sigma, \alpha \odot A) = \lambda(\alpha \odot A) = \alpha\lambda(A),$$

et donc finalement $\mu(\sigma, A) = \lambda(A)$. □

2.2 Fermeture transitive faible et matrice Kleene Star

Définissons à présent les fermetures transitives faible et forte. Ces deux concepts permettront de décrire des solutions de “vecteurs propres” dans notre algèbre.

Définition 2.11. La *fermeture transitive faible* est égale à $\Gamma(A) = A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \dots$.

La *fermeture transitive forte*, également appelée *matrice Kleene¹ star* est égale à $\Delta(A) = I \oplus \Gamma(A) = I \oplus A \oplus A^2 \dots$.

Ces deux notions sont bien définies si la limite est finie pour chaque élément γ_{ij} et δ_{ij} . Notons que les limites existent, puisque chaque élément de nos deux matrices définissent des suites non décroissantes. Nous verrons plus loin un critère pour déterminer si toutes les entrées de $\Gamma(A)$ et $\Delta(A)$ sont finies.

Remarque 2.12. Les entrées de la matrice A^k , $(a_{ij}^{(k)})$, représentent les poids des chemins de longueur k les plus lourds. En effet $a_{ij} = w(i, j)$ où w est la fonction poids, donc $a_{ij}^{(1)}$ est bien le poids maximum de longueur 1 pour la paire de noeuds (i, j) . En effectuant le produit A^2 , on aura $a_{ij}^{(2)} = \max_l(a_{il} \cdot a_{lj})$, et on peut remarquer que c’est le poids le plus lourd de tous les chemins allant de i à j de longueur 2, c’est-à-dire les chemins (i, l, j) . Par itération, on peut ainsi voir que les valeurs $a_{ij}^{(k)}$ représentent bien les poids des chemins les plus lourds de longueur k .

Ainsi, les entrées de $\Gamma(A)$ sont les poids des chemins les plus lourds de n’importe quelle longueur pour toute paire de noeuds, puisque chaque entrée (γ_{ij}) de la matrice $\Gamma(A)$ est donnée par le maximum sur k des $(a_{ij}^{(k)})$.

En fait, comme nous le montrerons plus loin, la matrice de fermeture transitive faible permettra de décrire les solutions de $A \odot x = \lambda \odot x$, tandis que la matrice Kleene star permettra de décrire les solutions de $A \odot x \leq \lambda \odot x$ pour $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^n$ et $x \in \mathbb{R}_{\geq}^n$.

Définition 2.13. Les *valeurs propres tropiques* de A sont les $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^n$ tels qu’il existe $x \in \mathbb{R}_{\geq}^n$ tels que

$$A \odot x = \lambda \odot x.$$

Les $x \in \mathbb{R}_{\geq}^n$ correspondants sont les *vecteurs propres tropiques*.

Les *sous-valeurs propres* et *sous-vecteurs propres tropiques* de A sont les $\lambda \in \mathbb{R}_{\geq}^n$ et $x \in \mathbb{R}_{\geq}^n$ satisfaisant

$$A \odot x \leq \lambda \odot x.$$

1. Ce nom vient du mathématicien Stephen Cole Kleene (1909-1994). Il est l’un des fondateurs de la logique de récursion. Il a notamment introduit un opérateur nommé fermeture de Kleene : si X est un alphabet, alors sa fermeture de Kleene est l’ensemble des mots que l’on peut construire à partir de cet alphabet. Notre matrice Kleene Star est étroitement liée avec ce principe.

On note l'ensemble des sous-vecteurs propres tropiques par

$$V^*(A, \lambda) = \{x \in \mathbb{R}_{\geq}^n : A \odot x \leq \lambda \odot x\}. \quad (2.1)$$

Théorème 2.14. ² *La moyenne cyclique maximale $\lambda(A)$ de notre définition 2.1 est toujours valeur propre tropique de A .*

Dans un premier temps, nous allons juste donner un exemple de ce théorème, sans le prouver. Un début de preuve, où on montre que $\lambda(A)$ est sous-valeur propre tropique, est donnée par la proposition 2.24.

Exemple 2.15. Reprenons à nouveau notre exemple 2.2, nous voulons montrer qu'il existe $x \in \mathbb{R}_{\geq}^3$ tel que

$$A \odot x = 4x.$$

Pour ce faire, nous écrivons

$$\begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 4x_1 \oplus 2x_2 \oplus 3x_3 \\ x_1 \oplus 2x_2 \oplus 3x_3 \\ x_2 \oplus x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x_1 \\ 4x_2 \\ 4x_3 \end{pmatrix}.$$

Nous pouvons réécrire cela selon le système

$$4x_1 \oplus 2x_2 \oplus 3x_3 = 4x_1 \quad (2.2)$$

$$x_1 \oplus 2x_2 \oplus 3x_3 = 4x_2 \quad (2.3)$$

$$x_2 \oplus x_3 = 4x_3. \quad (2.4)$$

La dernière équation nous dit donc que $\max(x_2, x_3) = 4x_3$. Ce maximum doit être atteint par soit x_2 soit x_3 . On sait également que si x_3 est nul, cela voudrait dire que x_2 l'est également (car alors $x_2 \oplus 0 = 0$ et donc $x_2 \leq 0$), et ensuite que x_1 l'est aussi. Considérons donc que l'on cherche une solution non dégénérée et supposons $x_3 \neq 0$. S'il était atteint par x_3 , nous aurions $x_2 \oplus x_3 = x_3$. Puisque cela n'est pas le cas, cela force $x_2 \oplus x_3 = x_2$ et donc

$$x_2 = 4x_3.$$

Ensuite, grâce à cette égalité, la seconde équation peut se réécrire $x_1 \oplus 8x_3 \oplus 3x_3 = x_1 \oplus 8x_3 = 16x_3$. Or le maximum entre $(x_1, 8x_3)$ doit être atteint par soit x_1 , soit $8x_3$.

2. D'après P. Butkovič, ce serait Raymond Cuninghame-Green qui aurait été le premier à réaliser ce fait, dans son article [2].

S'il était atteint par $8x_3$, on aurait $x_1 \oplus 8x_3 = 8x_3$, ce n'est pas le cas, et donc cela force $x_1 \oplus 8x_3 = x_1$, et donc

$$x_1 = 16x_3.$$

Dans ce cas-ci, la première équation ne nous donne pas plus d'informations. En effet, elle peut se réécrire $4x_1 \oplus 2x_2 \oplus 3x_3 = 64x_3 \oplus 8x_3 \oplus 3x_3 = 64x_3$ ce qui est précisément donné par notre solution.

Nous avons donc le vecteur propre tropique de la forme

$$v = \begin{pmatrix} 16x_3 \\ 4x_3 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

qui est associé à la valeur propre tropique $\lambda(A) = 4$. On peut vérifier, qu'en prenant n'importe quel vecteur de la forme v , cela vérifie bien $A \odot v = 4v$. (Par exemple, le vecteur $(16, 4, 1)$ vérifie bien cette identité, tandis que $(1, 4, 1)$ ne la vérifie pas.)

Proposition 2.16. — *Si $\lambda(A) \leq 1$, alors les matrices de fermetures transitives faibles et fortes sont données par*

$$\begin{aligned} \Gamma(A) &= A \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^n && \text{et} \\ \Delta(A) &= I \oplus A \oplus \cdots \oplus A^n. \end{aligned}$$

— *Si $\lambda(A) > 1$, la somme $\Gamma(A)$ diverge.*

Démonstration. — Si $\lambda(A) \leq 1$ (c'est en particulier le cas pour les matrices définites entre autres), alors tous les cycles de D_A ont des poids inférieurs à 1, et donc il existe un chemin "le plus lourd" mais dont le poids sera néanmoins inférieur à 1. De plus, on sait que le chemin le plus lourd a une longueur inférieure ou égale à n . En gardant en tête que chaque $a_{ij}^{(k)}$ représente le poids le plus lourd de longueur k , alors pour tout $k \geq 1$, on a

$$A^k \leq A \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^n.$$

Ainsi, pour toute matrice A telle que $\lambda(A) \leq 1$,

$$\Gamma(A) = A \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^n,$$

puisque en prenant $k > n$, les entrées $(a_{ij}^{(k)})$ seront inférieures ou égales aux entrées de $A \oplus A^2 \oplus \cdots \oplus A^n$.

Nous avons ainsi également

$$\Delta(A) = I \oplus A \oplus \cdots \oplus A^n.$$

- Si $\lambda(A) > 1$, alors cela veut dire qu'il existe au moins un cycle de poids supérieur à 1 dans D_A , et donc qu'au moins une entrée de A^k peut tendre vers l'infini quand on prend $k \rightarrow \infty$. \square

Définition 2.17. Une matrice $A \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$ est **croissante** si toutes ses entrées diagonales a_{ii} sont supérieures ou égales à 1.

On peut remarquer que si A est une matrice croissante, alors $A = I \oplus A$ et donc $\Gamma(A) = \Delta(A)$.

Exemple 2.18. Par exemple, dans la matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de notre exemple 1.19, on voit que toutes les entrées a_{ii} sont supérieures ou égales à 1, et donc cette matrice est croissante. De plus

$$A \oplus I = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} = A.$$

Mais puisque $\lambda(A) > 1$, on peut voir qu'au moins une entrée de $\Gamma(A) = \Delta(A)$ tendra vers l'infini.

Exemple 2.19. Reprenons à présent notre matrice $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ de notre exemple 2.6. On est donc face à une matrice croissante, mais telle que $\lambda(B) = 1$. On a bien

$$B \oplus I = B$$

et on peut remarquer grâce aux calculs effectués dans l'exemple 2.6 que

$$\Gamma(B) = \Delta(B) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.20. Si A est croissante, alors $x \leq A \odot x$ pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, et donc

$$A \leq A^2 \leq A^3 \leq \dots$$

Démonstration. Si A est croissante, alors clairement $I \leq A$, et donc $x = I \odot x \leq A \odot x$. \square

On remarque donc que lorsque $A \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$ est une matrice croissante, alors $\Delta(A) = \Gamma(A)$ sera égale à la plus haute puissance possible de A . Mais on a vu que si $\lambda(A) \leq 1$, alors $\Gamma(A) = A \oplus \dots \oplus A^n$. Donc, on peut finalement voir que si A est à la fois croissante et telle que $\lambda(A) \leq 1$, alors

$$\Gamma(A) = \Delta(A) = A^n.$$

Cela motive la définition suivante.

Définition 2.21. Une matrice A est **fortement définite** si elle est définite et croissante (voir définitions 2.5 et 2.17). C'est-à-dire que ces entrées sur sa diagonale sont toutes égales à 1 et telle que $\lambda(A) = 1$.

Lemme 2.22. Si $A \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$ est fortement définite, alors

$$\Gamma(A) = \Delta(A) = A^{n-1} = A^n = A^{n+1}.$$

Démonstration. Si A est fortement définite, elle est en particulier croissante et donc telle que $A \leq A^2 \leq A^3 \leq \dots$. De plus, puisque $\lambda(A) = 1$, on a grâce à la proposition 2.16 que

$$\Gamma(A) = A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^n = A^n.$$

Regardons les entrées diagonales d'une matrice A^k pour n'importe quel $k \geq 1$. Elles sont obligatoirement inférieures ou égales à 1, car sinon cela contredirait $\lambda(A) = 1$, et elles sont en fait exactement égales à 1 : $a_{ii}^{(k)} = 1$.

A présent, soit $i \neq j$, et considérons $a_{ij}^{(n-1)}$ et $a_{ij}^{(n)}$. On sait que $a_{ij}^{(n-1)} \leq a_{ij}^{(n)}$, et nous allons prouver qu'en fait $a_{ij}^{(n-1)} = a_{ij}^{(n)}$.

Supposons par contradiction que $a_{ij}^{(n-1)} < a_{ij}^{(n)}$. Soit le chemin π_n de longueur n allant de i à j qui maximise le poids de tous les tels chemins, et le chemin π_{n-1} de longueur $n-1$ allant également de i à j et maximisant également le poids. Alors $w(\pi_{n-1}) < w(\pi_n)$. Considérons que π_n contienne un cycle σ , alors on peut considérer le nouveau chemin π' qui est le chemin π auquel on a enlevé le cycle σ . Ainsi, le poids de notre chemin π' est tel que $w(\pi_n) = w(\pi').w(\sigma)$. Et donc, puisque $w(\sigma) \leq 1$ (car $\lambda(A) = 1$), on a

$$w(\pi') = \frac{w(\pi_n)}{w(\sigma)} \geq w(\pi).$$

Ce qui contredit donc l'hypothèse $a_{ij}^{(n-1)} < a_{ij}^{(n)}$. □

Grâce à toutes ces propriétés, nous pouvons à présent formuler la proposition suivante, qui sera également très importante dans la suite, car elle nous permet en effet de calculer de manière rapide la matrice Kleene Star dans des cas où $\lambda(A) \leq 1$.

Proposition 2.23. *Si $A \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$ est telle que $\lambda(A) \leq 1$, alors*

- $\Delta(A) = I \oplus A \oplus \dots \oplus A^{n-1}$;
- $(\Delta(A))^k = \Delta(A)$ pour tout $k \geq 1$;
- $A \odot \Delta(A) = \Gamma(A)$.

Démonstration. — Si $\lambda(A) \leq 1$, alors on a que $(I \oplus A)$ est fortement définite et $I \oplus A = A$. En effet, si $\lambda(A) \leq 1$, alors forcément $\lambda(I \oplus A) \leq 1$, et est en fait égale à 1, car, les entrées diagonales de $I \oplus A$ sont maintenant, toutes égales à 1.

Et donc on a grâce aux lemmes 1.12 et 2.22

$$\Delta(A) = \Gamma(I \oplus A) = (I \oplus A)^{n-1} = I \oplus A \oplus \dots \oplus A^{n-1}.$$

- De même, on calcule grâce aux lemmes 2.22 et 1.12

$$(\Delta A)^k = (I \oplus A \oplus \dots \oplus A^{n-1})^k = (I \oplus A)^{(n-1) \cdot k} = \Delta A.$$

- Et également

$$A \odot \Delta A = A \odot (I \oplus A \oplus \dots \oplus A^{n-1}) = A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^n = \Gamma(A). \quad \square$$

Si $\lambda(A) \leq 1$, alors on a vu dans la proposition 2.16 que $A^k \leq A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^n$; et donc

$$\begin{aligned} A \odot \Gamma(A) &= A \odot (A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^n) \\ &= A^2 \oplus A^3 \oplus \dots \oplus A^{n+1} \\ &\leq A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^{n+1} = \Gamma(A). \end{aligned}$$

On a également vu que dans ce cas, $\Delta(A) = I \oplus A \oplus \dots \oplus A^{n-1}$, et donc de manière similaire, on a

$$\begin{aligned} A \odot \Delta(A) &= A \odot (I \oplus A \oplus \dots \oplus A^{n-1}) \\ &= A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^n = \Gamma(A) \leq \Delta(A). \end{aligned}$$

Ainsi, on a les deux inégalités

$$\begin{aligned} A \odot \Gamma(A) &\leq \Gamma(A) \\ A \odot \Delta(A) &\leq \Delta(A). \end{aligned}$$

Donc, si $\lambda(A) \leq 1$, toutes les colonnes de $\Gamma(A)$ et de $\Delta(A)$ sont solutions de $A \odot x \leq x$.

Supposons à présent que A soit fortement définite, alors on a vu dans le lemme 2.22 que

$$\Delta(A) = \Gamma(A) = A^{n-1} = A^n = A^{n+1}$$

et donc

$$A \odot \Gamma(A) = A \odot A^{n-1} = A^n = \Gamma(A)$$

$$A \odot \Delta(A) = A \odot A^{n-1} = A^n = \Delta(A).$$

Donc, si A est fortement définite, toutes les colonnes de $\Delta(A)$ et de $\Gamma(A)$ sont solutions de $A \odot x = x$.

Proposition 2.24. Soient $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n} \neq 0$ et $x \in \mathbb{R}_{\geq}^n$, et où V^* est défini dans l'équation (2.1),

1. $A \odot x \leq \lambda \odot x$ a une solution finie si et seulement si $\lambda \geq \lambda(A)$.
2. Si $\lambda \geq \lambda(A)$, alors $V^*(\lambda, A) = \{\Delta(\lambda^{-1} \odot A) \odot u : u \in \mathbb{R}_{\geq}^n\}$.
3. Si $\lambda \geq \lambda(A)$, alors $\left[A \odot x \leq \lambda \odot x, x \in \mathbb{R}_{\geq}^n \Leftrightarrow x = \Delta(\lambda^{-1} \odot A) \odot u, u \in \mathbb{R}_{\geq}^n \right]$

Notons que le premier point constitue un argument que la moyenne cyclique maximale est une sous-valeur propre tropique (cf. théorème 2.14).

Démonstration. 1. \Rightarrow : Supposons qu'on ait un $x \in \mathbb{R}_{\geq}^n$ tel que $A \odot x \leq \lambda \odot x$. Puisque $A \neq 0$, alors $\lambda \neq 0$.

Notons que si $\lambda(A) = 0$, alors évidemment $\lambda \geq \lambda(A)$.

Si par contre $\lambda(A) > 0$, alors il existe au moins un cycle possible dans D_A . Prenons un cycle quelconque $\sigma = (i_1, \dots, i_{k-1}, i_k = i_1)$. Notre x vérifie l'inégalité

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \leq \lambda \odot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},$$

qui peut se réécrire sous le système

$$\begin{aligned} \max(a_{11} \cdot x_1, a_{12} \cdot x_2, \dots, a_{1n} \cdot x_n) &\leq \lambda \cdot x_1, \\ \max(a_{21} \cdot x_1, a_{22} \cdot x_2, \dots, a_{2n} \cdot x_n) &\leq \lambda \cdot x_2, \\ &\vdots \\ \max(a_{n1} \cdot x_1, a_{n2} \cdot x_2, \dots, a_{nn} \cdot x_n) &\leq \lambda \cdot x_n. \end{aligned}$$

De plus, en prenant les noeuds du cycle σ , on arrive au système

$$\begin{aligned} a_{i_1 i_2} \cdot x_{i_2} &\leq \lambda \cdot x_{i_1}, \\ a_{i_2 i_3} \cdot x_{i_3} &\leq \lambda \cdot x_{i_2}, \\ &\vdots \\ a_{i_{k-1} i_1} \cdot x_{i_1} &\leq \lambda \cdot x_{i_{k-1}}. \end{aligned}$$

En multipliant chacune de ces équations, on arrive à

$$a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{k-1} i_1} \cdot x_{i_2} \cdot x_{i_3} \cdots x_{i_{k-1}} \cdot x_{i_1} \leq \lambda^k x_{i_1} \cdot x_{i_2} \cdots x_{i_{k-1}},$$

autrement dit

$$(a_{i_1 i_2} \cdot a_{i_2 i_3} \cdots a_{i_{k-1} i_1})^{1/k} \leq \lambda.$$

Puisque le membre de gauche est exactement égal à $\mu(\sigma, A)$, on a finalement l'inégalité souhaitée :

$$\max_{\sigma} \mu(\sigma, A) = \lambda(A) \leq \lambda.$$

\Leftarrow Supposons à présent qu'on ait $\lambda \geq \lambda(A)$ et $\lambda > 0$. On a alors

$$\lambda(\lambda^{-1} \odot A) = \lambda^{-1} \odot \lambda(A) = \frac{\lambda(A)}{\lambda} \leq 1.$$

Nous allons montrer que, soit $u \in \mathbb{R}_{\geq}^n$, $x = \Delta(\lambda^{-1} \odot A) \odot u$ vérifie notre inégalité. On calcule

$$\Delta(\lambda^{-1} \odot A) = I \oplus (\lambda^{-1} \odot A) \oplus (\lambda^{-1} \odot A)^2 \oplus \cdots \geq I.$$

Ainsi, $x \geq u$ et $x \in \mathbb{R}_{\geq}^n$. On peut ensuite calculer, en se souvenant que $(\Delta(A))^k = \Delta(A)$,

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda^{-1} \odot A) \odot x &= \Delta(\lambda^{-1} \odot A) \odot \Delta(\lambda^{-1} \odot A) \odot u \\ &= \left(\Delta(\lambda^{-1} \odot A) \right)^2 \odot u \\ &= \Delta(\lambda^{-1} \odot A) \odot u \\ &= x. \end{aligned}$$

Avec tout ceci, on a l'inégalité suivante :

$$(\lambda^{-1} \odot A) \odot x \leq \Delta(\lambda^{-1} \odot A) \odot x = x.$$

D'où on peut finalement tirer que $\lambda^{-1} \odot A \odot x \leq x$ et donc

$$A \odot x \leq \lambda \odot x.$$

2. Le deuxième point de cette proposition nous dit donc que si $\lambda \geq \lambda(A)$, alors les

$x \in \mathbb{R}_{\geq}^n$ définis par $x = \Delta(\lambda^{-1} \odot A) \odot u$ pour tout $u \in \mathbb{R}_{\geq}^n$ sont les seuls sous-vecteurs propres associés à la sous-valeur propre λ . Nous ne montrerons pas ici cette fin de proposition. \square

Nous pouvons également brièvement développer un outil analogue au déterminant de l'algèbre linéaire, que nous n'utiliserons pas dans la suite. Cet outil peut être utilisé pour résoudre des problèmes d'affectation, comme expliqué ci-dessous.

Problème d'affectation³ Considérons que nous avons, dans une entreprise, n postes de travail que nous aimerions affecter à n individus. Pour chaque $1 \leq i, j \leq n$, la valeur a_{ij} représente la mesure de l'efficacité du i -ème individu pour le j -ème travail. Nous cherchons donc l'affectation qui maximise cette efficacité. Cela revient à chercher la permutation π qui maximise

$$\sum_{i=1}^n a_{i\pi(i)}.$$

On peut voir que l'on peut représenter ça en termes d'algèbre tropique.

Pour ce faire, on notera P_N l'ensemble des permutations de N , et on notera de manière équivalente $\sigma : i_1 \rightarrow i_2 \rightarrow \dots \rightarrow i_k \rightarrow i_1 = (i_1, i_2, \dots, i_k, i_1)$. On rappelle également que toute permutation peut s'écrire comme un produit de cycles :

$$\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (143)(25).$$

Définition 2.25. La *permanence max-times* de A :

$$\text{maper}(A) = \bigoplus_{\pi \in P_N} \bigodot_{i \in N} a_{i,\pi(i)}.$$

Le *poids de la permutation* est

$$w(\pi, A) = \bigodot_{i \in N} a_{i,\pi(i)},$$

et finalement on a également

$$\text{ap}(A) = \{\pi \in P_N : w(\pi, A) = \text{maper}(A)\}.$$

Illustrons ces notions sur base d'un exemple :

3. Exemple 1.2.5 dans [5]

Exemple 2.26. Reprenons la même matrice $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Les poids des différentes permutations π possibles sont

$$\begin{aligned}w(123) &= a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} = 2 \cdot 3 \cdot 0 = 0, \\w(132) &= a_{13} \cdot a_{32} \cdot a_{21} = 3 \cdot 1 \cdot 1 = 3, \\w((1)(23)) &= a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} = 4 \cdot 3 \cdot 1 = 12, \\w((12)(3)) &= a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} = 2 \cdot 1 \cdot 1 = 2, \\w((1)(2)(3)) &= a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} = 4 \cdot 2 \cdot 1 = 8, \\w((13)(2)) &= a_{13} \cdot a_{31} \cdot a_{22} = 3 \cdot 0 \cdot 2 = 0.\end{aligned}$$

Ainsi, on a

$$\text{maper}(A) = \max_{\pi \in N} (0, 3, 12, 2, 8) = 12$$

et donc

$$\text{ap}(A) = \{(1)(23)\}.$$

Chapitre 3

Modèles max-linéaires

Nous avons déjà défini dans les deux premiers chapitres les fondements de l'algèbre max-times, ses définitions et propriétés. Nous allons à présent voir comment cela s'inscrit dans l'étude de modèles statistiques.

On peut en effet considérer un modèle récursif où on peut identifier chaque variable en fonction de leurs variables parentales et d'innovations indépendantes. Nous pouvons dès lors représenter la structure causale de ce type de modèle par un graphe dirigé acyclique, où chaque noeud représente une variable et le graphe montre donc les relations d'indépendance conditionnelle entre différentes variables, comme nous en parlerons dans le quatrième et dernier chapitre.

Nous avons déjà défini dans le chapitre précédent ce qu'est un graphe dirigé acyclique (cf. définition 1.16). Ajoutons à notre vocabulaire quelques définitions.

Définition 3.1. *Le noeud i est un **parent** de j s'il existe une flèche allant de i à j ($i \rightarrow j$), c'est-à-dire si $(i, j) \in E$. On notera $i \in \text{pa}(j)$. Le noeud j est alors également appelé un **enfant** de i .*

*Le noeud i est un **ancêtre** de j s'il existe un chemin allant de i à j , c'est-à-dire s'il existe un chemin $\pi = (i, \dots, j)$. On notera $i \in \text{an}(j)$. De plus, on notera $\text{An}(j) = \text{an}(j) \cup \{j\}$.*

Soient un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_n)$, un graphe dirigé acyclique pondéré $D = (V, E, w)$ avec $A_D = (a_{ij})$ la matrice distance-directe de D dépendant de w (cf. notation 1.18), et $Z = (Z_1, \dots, Z_n)$ un vecteur d'innovations identiquement et continuellement distribué.

Chaque variable X_j est définie par le système récursif d'équations max-linéaires :

$$X_j = \bigoplus_{i \in \text{pa}(j)} a_{ij} X_i \oplus Z_j. \quad (3.1)$$

Notons que si $\text{pa}(j) = \emptyset$ alors $X_j = Z_j$.

Sous forme matricielle, cela s'écrit

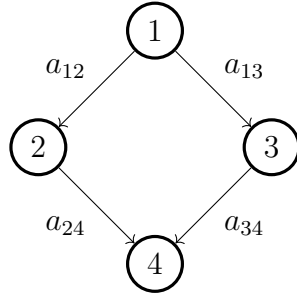
$$X = (A_D^\top \odot X) \oplus Z.$$

C'est cela que l'on appelle *modèle max-linéaire* : on peut écrire chaque variable X_j comme fonction max-linéaire de ses parents et de son innovation.

Notation 3.2. Afin de faciliter les notations dans la suite, nous noterons A_D pour notre matrice distance-directe, et $A = A_D^\top$ pour sa transposée, que nous utiliserons plus fréquemment à partir de maintenant. La précédente équation s'écrit maintenant comme

$$X = (A \odot X) \oplus Z. \quad (3.2)$$

Exemple 3.3. Par exemple, considérons le graphe



Grâce à l'équation (3.1) et à notre matrice distance-directe

$$A_D = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & a_{13} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et donc} \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{24} & a_{34} & 0 \end{pmatrix},$$

nous pouvons écrire chaque variable X_j comme :

$$\begin{aligned} X_1 &= Z_1, \\ X_2 &= a_{12}X_1 \oplus Z_2, \\ X_3 &= a_{13}X_1 \oplus Z_3, \\ X_4 &= a_{24}X_2 \oplus a_{34}X_3 \oplus Z_4. \end{aligned}$$

Nous aimerions pouvoir écrire ces équations de manière non récursive, sur base uniquement de notre matrice A .

Pour ce faire, en substituant dans chaque équation, nous pouvons obtenir

$$\begin{aligned}
X_1 &= Z_1, \\
X_2 &= a_{12}Z_1 \oplus Z_2, \\
X_3 &= a_{13}Z_1 \oplus Z_3, \\
X_4 &= a_{12}a_{24}Z_1 \oplus a_{24}Z_2 \oplus a_{13}a_{34}Z_1 \oplus a_{34}Z_3 \oplus Z_4 \\
&= (a_{12}a_{24} \oplus a_{13}a_{34})Z_1 \oplus a_{24}Z_2 \oplus a_{34}Z_3 \oplus Z_4.
\end{aligned}$$

Ainsi, on a pu écrire chaque variable X_j telle que

$$X_j = \bigoplus_{i \in \text{An}(j)} b_{ji} Z_i. \quad (3.3)$$

Sous forme matricielle, cela revient à écrire

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & 1 & 0 & 0 \\ a_{13} & 0 & 1 & 0 \\ a_{12}a_{24} \oplus a_{13}a_{34} & a_{24} & a_{34} & 1 \end{pmatrix} \odot \begin{pmatrix} Z_1 \\ Z_2 \\ Z_3 \\ Z_4 \end{pmatrix} \\
X &= B \odot Z,
\end{aligned}$$

où B est une matrice qui est une fonction de A .

Nous allons voir dans la remarque 3.4 et plus formellement dans le théorème 3.5 qu'en fait, cette matrice B est exactement la matrice Kleene Star (définie dans la définition 2.11) de notre matrice A , $\Delta(A)$.

Notons que puisque notre graphe est acyclique, nous savons que notre moyenne cyclique maximale (définition 2.1) est nulle, $\lambda(A) = 0$, et donc dans ce cas – et ce le sera pour tous nos exemples à partir de maintenant – la matrice Kleene Star de A est bien définie, et grâce à la proposition 2.23, elle peut se calculer comme $\Delta(A) = I \oplus A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^{n-1}$.

En effet, on calcule

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12}a_{24} \oplus a_{13}a_{34} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et donc

$$\begin{aligned}\Delta(A) &= I \oplus A \oplus A^2 \oplus A^3 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{12} & 1 & 0 & 0 \\ a_{13} & 0 & 1 & 0 \\ a_{12}a_{24} \oplus a_{13}a_{34} & a_{24} & a_{34} & 1 \end{pmatrix} = B.\end{aligned}$$

Remarque 3.4. La matrice B qui nous permet d'écrire notre système sous forme d'une équation non récursive $X = B \odot Z$ est exactement donnée par la matrice Kleene Star $\Delta(A)$.

En effet, nous avons déjà explicité dans la remarque 2.12 que les entrées $a_{ij}^{(k)}$ de la matrice A^k représentent les chemins les plus lourds de longueur k entre l'élément i et l'élément j . Et qu'ainsi, les entrées de la matrice de fermeture transitive faible $\Gamma \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$ représentent les chemins les plus lourds de n'importe quelle longueur entre ces deux éléments. La matrice Kleene Star fait le même processus, en ayant en plus les éléments diagonaux égaux à 1.

Or via l'équation (3.1), on sait que la matrice B doit représenter les ancêtres sur toute "génération" de chaque variable. Donc l'élément b_{ji} – qui représente donc le poids avec lequel l'innovation Z_i influence la variable X_j – passe par tous les noeuds intermédiaires entre eux. De plus, il faut que chaque entrée diagonale de B soit égale à 1, car chaque X_i doit également être déterminée par sa propre innovation Z_i . C'est la même idée que ce que fait la matrice Kleene Star.

Cela ajoute également du sens au fait que, dans nos cas de graphes acycliques, $\Delta(A)$ se calcule en allant jusqu'à la $n - 1$ ème puissance de A , car ça n'aurait pas de sens de remonter à plus de générations qu'il n'en existe dans notre graphe.

Théorème 3.5. *Si X suit un modèle max-linéaire, alors le modèle peut être décrit de manière non récursive par l'équation*

$$X = \Delta(A) \odot Z.$$

Démonstration. Partons de l'équation récursive (cf. équation (3.1)) d'une variable X_j .

Le prochain calcul se fait ainsi de manière récursive

$$\begin{aligned}
X_j &= \bigoplus_{i \in \text{pa}(j)} a_{ij} X_i \oplus Z_j \\
&= \bigoplus_{i \in \text{pa}(j)} a_{ij} \left(\bigoplus_{l \in \text{pa}(i)} a_{li} X_l \oplus Z_i \right) \oplus Z_j \\
&= \bigoplus_{\substack{l \in \text{pa}(i) \\ i \in \text{pa}(j)}} a_{li} a_{ij} X_l \oplus \bigoplus_{i \in \text{pa}(j)} a_{ij} Z_i \oplus Z_j \\
&= \bigoplus_{\substack{l \in \text{pa}(i) \\ i \in \text{pa}(j)}} a_{lj}^{(2)} X_l \oplus \bigoplus_{i \in \text{pa}(j)} a_{ij} Z_i \oplus Z_j \\
&= \bigoplus_{\substack{l \in \text{pa}(i) \\ i \in \text{pa}(j)}} a_{lj}^{(2)} \left(\bigoplus_{m \in \text{pa}(l)} a_{ml} X_m \oplus Z_l \right) \oplus \bigoplus_{i \in \text{pa}(j)} a_{ij} Z_i \oplus Z_j \\
&= \bigoplus_{\substack{m \in \text{pa}(l) \\ l \in \text{pa}(i) \\ i \in \text{pa}(j)}} a_{lj}^{(2)} a_{ml} X_m \oplus \bigoplus_{\substack{l \in \text{pa}(i) \\ i \in \text{pa}(j)}} a_{lj}^{(2)} Z_l \oplus \bigoplus_{i \in \text{pa}(j)} a_{ij} Z_i \oplus Z_j \\
&= \bigoplus_{\substack{m \in \text{pa}(l) \\ l \in \text{pa}(i) \\ i \in \text{pa}(j)}} a_{mj}^{(3)} X_m \oplus \bigoplus_{\substack{l \in \text{pa}(i) \\ i \in \text{pa}(j)}} a_{lj}^{(2)} Z_l \oplus \bigoplus_{i \in \text{pa}(j)} a_{ij} Z_i \oplus Z_j.
\end{aligned}$$

On peut ainsi remarquer qu'en continuant et en allant de plus en plus haut dans le graphe, jusqu'au premier parent possible, cela s'écrit

$$X_j = \bigoplus_{\substack{k \\ d \in \text{An}(j)}} a_{dj}^{(k)} Z_d. \quad (3.4)$$

Or les éléments de la matrice Kleene Star $\Delta(A)$ sont exactement définis par

$$\delta_{ji} = \begin{cases} \max_k a_{ij}^{(k)} & \text{si } i \neq j \\ \max_k (1, a_{ij}^{(k)}) & \text{si } i = j \end{cases}.$$

Finalement, l'équation 3.4 devient donc

$$X_j = \bigoplus_{d \in \text{An}(j)} \delta_{jd} Z_d,$$

c'est-à-dire

$$X = \Delta(A) \odot Z. \quad \square$$

Chapitre 4

Indépendance conditionnelle

Ce dernier chapitre présente l'utilité de l'algèbre max-times dans la résolution de question d'indépendance conditionnelle dans un modèle max-linéaire. Il se base sur les articles de N. Gissibl et C. Klüppelberg, [6], et de C. Améndola, C. Klüppelbeg, S. Lauritzen et N. M. Tran, [1]. Nous y verrons trois différents cas d'indépendance conditionnelle :

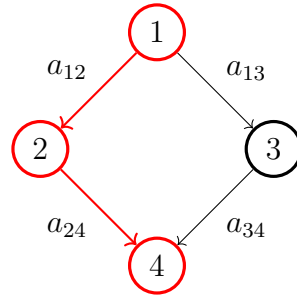
- selon un contexte spécifique en fixant la valeur d'une variable. Nous n'approfondirons pas ce cas dans ce mémoire, le lecteur est invité à se référer au texte [1] ;
- sans contexte spécifique mais en ayant une matrice distance-directe donnée (impliquant l'existence de chemin critique) ;
- et enfin le cas général qui nous permettra de savoir s'il peut exister des indépendances conditionnelles valables pour toute matrice distance-directe.

Pour cela, nous allons définir deux graphes dérivés d'un graphe original D (le graphe critique $D_K^*(A)$ et le graphe d'accessibilité conditionnelle D_K^*) ainsi que plusieurs critères de séparations (séparation critique et séparation D^*). Nous verrons finalement comment chacune de ses séparations peut impliquer une éventuelle indépendance conditionnelle dans le graphe original D .

Les deux théorèmes principaux de ce chapitre (4.8 et 4.15) sont basés sur l'article de C. Améndola, C. Klüppelbeg, S. Lauritzen et N. M. Tran, [1]. De plus, nous discuterons brièvement de la question de réciprocity de ces théorèmes dans la dernière section, mais nous en donnerons uniquement des contre-exemples. L'énoncé d'un théorème formalisant cette réciprocity peut se trouver en annexe A.

Le premier exemple ci-dessous (exemple 4.1) montre un exemple d'indépendance conditionnelle, sans contexte spécifique – c'est-à-dire sans fixer les valeurs des variables X_i – tandis que le second exemple (exemple 4.2) nous montre un exemple d'indépendance conditionnelle sous un contexte spécifique.

Exemple 4.1. Si on reprend notre dernier exemple 3.3, choisissons un chemin critique, par exemple le chemin $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$.



Cela veut dire que $a_{12}a_{24} \geq a_{13}a_{34}$, et donc la variable X_4 peut se réécrire différemment et nous avons le système suivant :

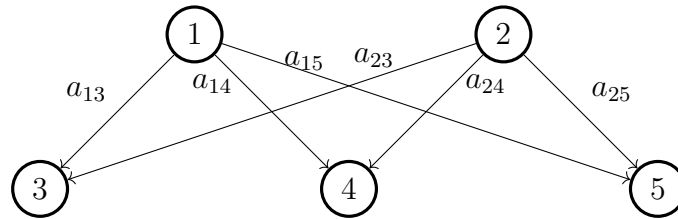
$$\begin{aligned} X_1 &= Z_1, & X_2 &= a_{12}Z_1 \oplus Z_2, \\ X_3 &= a_{13}Z_1 \oplus Z_3, & X_4 &= a_{12}a_{24}Z_1 \oplus a_{24}Z_2 \oplus a_{34}Z_3 \oplus Z_4 \\ & & &= a_{24}X_2 \oplus a_{34}Z_3 \oplus Z_4. \end{aligned}$$

On observe ainsi que X_1 et X_4 sont indépendantes conditionnellement à X_2 ,

$$X_1 \perp\!\!\!\perp X_4 \mid X_2.$$

Cette méthode peut permettre de visualiser des dépendances entre variables dans un certain contexte que l'on ne voit pas à première vue graphiquement.

Exemple 4.2. Considérons à présent le graphe D



Supposons que tous les arcs du graphe valent 1. C'est-à-dire qu'on a les matrices

$$A_D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Delta(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

de telle sorte qu'on ait à présent le système

$$X = \Delta(A) \odot Z.$$

A présent, on choisit de fixer les variables $K = \{4, 5\}$, et on va voir ce qu'il se passe dans le contexte spécifique de $X_4 = X_5 = 3$. Dans ce cas, nous avons le système

$$\begin{aligned} X_1 &= Z_1, & X_2 &= Z_2, \\ X_3 &= Z_1 \oplus Z_2 \oplus Z_3, & X_4 &= Z_1 \oplus Z_2 \oplus Z_4 = 3, \\ X_5 &= Z_1 \oplus Z_2 \oplus Z_5 = 3. \end{aligned}$$

Puisque la distribution des Z_i est continue, les deux dernières équations forcent $Z_1 \oplus Z_2 = 3$, et donc $Z_1, Z_2, Z_4, Z_5 \leq 3$. D'autre part, on a ainsi le système

$$\begin{aligned} X_1 &= Z_1, & X_2 &= Z_2, \\ X_3 &= 3 \oplus Z_3 \geq 3, & X_4 &= 3 \oplus Z_4 = 3, \\ X_5 &= 3 \oplus Z_5 = 3. \end{aligned}$$

Finalement, on voit ici que *dans ce contexte où $X_4 = X_5 = 3$* , on a l'indépendance conditionnelle de X_3 par rapport à X_1 et X_2 ,

$$X_3 \perp\!\!\!\perp (X_1, X_2) \mid X_4 = 3 = X_5.$$

Nous n'approfondirons pas la théorie derrière l'indépendance conditionnelle dans un contexte spécifique.

Dans la suite, nous allons présenter deux théorèmes donnant un critère d'indépendance conditionnelle sans contexte. Le premier théorème présentera un résultat dépendant d'une matrice distance-directe A_D fixée, le théorème 4.8, tandis que le second est indépendant de toute matrice distance-directe, le théorème 4.15. Pour ce faire, nous aurons besoin des deux définitions suivantes.

Définition 4.3. Soient $D = (V, E)$, et $K \subset V$. Un chemin $\pi : i \rightarrow j$ se **factorise à travers** K s'il existe un noeud $k \in \pi$, tel que $k \neq i, k \neq j$ et $k \in K$.

Définition 4.4. Un chemin π non dirigé entre i et j est ***-connectant relativement à K** si c'est un chemin de la forme suivante, où les noeuds en rouge représentent les seuls noeuds k appartenant à K .

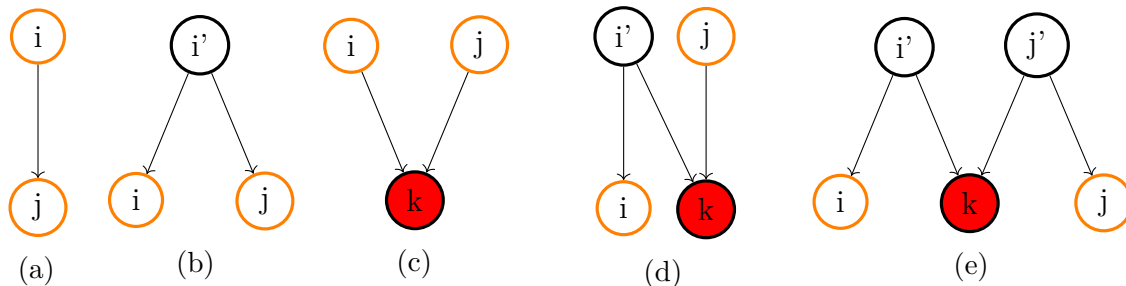
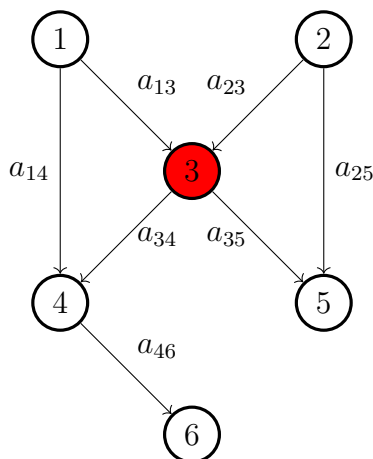


FIGURE 4.1

Il est important de noter que chaque arc représente un chemin de **de longueur 1**. Comme nous le verrons plus tard, cette définition est centrale dans les questions d'indépendances conditionnelles.

Exemple 4.5. Considérons le graphe D , ainsi que l'ensemble $K = \{3\}$, représenté en rouge dans le graphe.



Illustrons d'abord la définition 4.3.

- Les chemins $\pi_1 : 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$, $\pi_2 : 1 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6$ se factorisent à travers K .
- Il en est de même pour les chemins $\pi_3 : 2 \rightarrow 3 \rightarrow 5$ et $\pi_4 : 1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$.
- Il en est également de même pour les chemins $\pi_5 : 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ et $\pi_6 : 2 \rightarrow 3 \rightarrow 4 \rightarrow 6$.
- Aucun autre chemin ne se factorise à travers K . Par exemple pour les chemins $1 \rightarrow 3$ et $3 \rightarrow 4$, $k = \{3\} \in K$ est le noeud de départ ou d'arrivée et donc cela contredit la définition.

A présent, regardons la définition 4.4.

- Les chemins de longueur 1 entre $\{1\}$ et $\{4\}$; $\{2\}$ et $\{5\}$; et également entre $\{4\}$ et $\{6\}$ sont $*$ -connectant, puisqu'ils sont du type de la figure 4.1a de la définition 4.4.

- D'autre part, le chemin non dirigé entre $\{1\}$ et $\{2\}$ est $*$ -connectant, puisqu'il est du type de la figure 4.1c : ils ont le noeud $\{3\}$ en enfant commun.
- Parmi les chemins possibles entre $\{1\}$ et $\{5\}$, et entre $\{2\}$ et $\{4\}$, il y en a un qui est $*$ -connectant, puisqu'ils sont de la forme de la figure 4.1d de notre définition, cf. figures 4.2a et 4.2b.
- Enfin, parmi les chemins entre $\{4\}$ et $\{5\}$, il y en a également un qui l'est, puisqu'il est comme la figure 4.1e de la définition, cf. figure 4.2c.
- Tous les autres chemins ne sont pas $*$ -connectant dans notre graphe D .

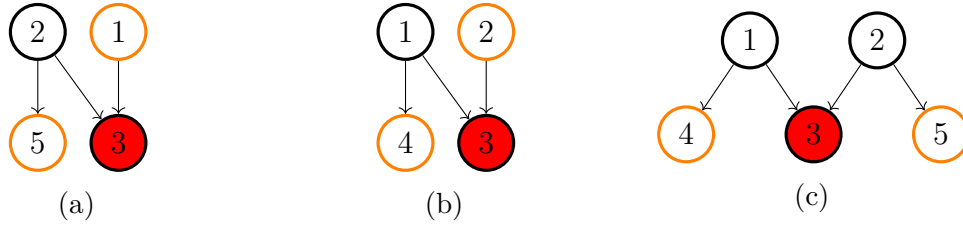


FIGURE 4.2

4.1 Indépendance conditionnelle selon une matrice distance-directe précise

Dans cette section, nous noterons le graphe pondéré dirigé $D = (V, E, w)$, $K \subset V$ un ensemble de noeuds inclus dans notre graphe, et $A = A_D^T$ la transposée de la matrice distance-directe associée au graphe.

Définition 4.6. Le **graphe critique** $D_K^*(A)$ est le graphe sur V qui contient les arcs $i \rightarrow j$ si et seulement si les deux conditions suivantes sont respectées :

- l'élément (ji) de la matrice Kleene-Star $\Delta(A)$ est non nul ;
- aucun chemin dirigé critique $i \rightarrow j$ ne se factorise à travers K .

Définition 4.7. Soient $I, J, K \subset V$ disjoints. On dit que I et J sont **critiquement séparés par K dans le graphe D** s'il n'existe aucun chemin $*$ -connectant de I à J à travers K dans $D_K^*(A)$.

On note cela $I \perp_{A^*} J \mid K$.

Remarquons que, comme explicité dans la remarque 3.4, la première condition de la définition 4.6 du graphe critique qui demande que l'élément (ji) de la matrice Kleene Star soit non nul revient à dire qu'il faut qu'il existe un chemin dirigé entre $\{i\}$ et $\{j\}$ dans le graphe original D , c'est-à-dire que $\{i\}$ soit un ancêtre de $\{j\}$.

De plus, dans notre définition 4.4 de chemins $*$ -connectants, les arcs représentent toujours des chemins de longueur 1, mais étant donné qu'ils sont ici considérés dans le graphe critique, il se peut qu'ils représentent en fait des chemins plus longs dans le graphe original.

Toutes ces définitions nous mènent finalement au théorème suivant, que nous ne prouverons pas. La démonstration se base sur le cas d'indépendance avec contexte, que nous avons déjà mentionné plus haut. Le lecteur est invité à se référer au théorème 5.12 de [1], qui explique les bases de la démonstration de notre théorème 4.8.

Théorème 4.8 (Sans contexte, avec matrice A fixée). ¹ Soient $X = (X_1, \dots, X_n)$, $D = (V, E, w)$ et $A \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$ la transposée de la matrice directe associée à la fonction poids w . Pour tout $I, J, K \subset V$ disjoints, si $I \perp_{A^*} J \mid K$, alors

$$X_I \perp\!\!\!\perp X_J \mid X_K.$$

Dès lors qu'il existe un chemin $*$ -connectant relativement à K entre I et J dans le graphe critique (et ce qui suit sera également d'application pour le graphe d'accessibilité conditionnelle que nous définirons dans la section suivante), nous ne pouvons pas affirmer l'indépendance entre X_I et X_J conditionnellement à K .

Regardons la définition 4.4 de plus près. Si nous avons deux variables X_i et X_j telles que dans la figure 4.1a, cela paraît logique qu'elles ne soient pas indépendantes, étant donné que X_j est déterminée, entre autre, par X_i . Si maintenant X_i et X_j ont un parent commun dans $D_K^*(A)$, $X_{i'}$, tel que représenté dans la figure 4.1b, alors il existe un lien entre elles, puisqu'elles seront toutes deux déterminées par $X_{i'}$. Ces deux cas ne dépendaient pas de notre variable X_k . Mais si maintenant, X_i et X_j ont X_k comme enfant commun (figure 4.1c), et que l'on connaît X_k , alors puisque X_k est déterminée par ces deux variables, on peut en effet s'attendre à ce qu'il existe un lien entre elles.

Supposons maintenant qu'on soit dans le cas de la figure 4.1d. Ici, via le point précédent, si X_k est un enfant commun à $X_{i'}$ et X_j , nous savons qu'il existe un lien entre $X_{i'}$ et X_j . Par extension, puisqu'il existe également un lien entre $X_{i'}$ et X_i , nous avons donc une dépendance entre X_i et X_j conditionnellement à X_k .

Enfin, la figure 4.1e est le cas qui mélange notre première et quatrième configuration. Sachant X_k , on sait que $X_{i'}$ et X_i ont un lien, de même que $X_{i'}$ et $X_{j'}$ et également pour $X_{j'}$ et X_j . Finalement, il y a une dépendance entre X_i et X_j conditionnellement à X_k .

Qu'est ce qui nous empêcherait alors d'aller encore plus loin ? Par exemple, si nous avons une figure de la forme 4.3, pourquoi ne pouvons pas dire qu'il existe un lien entre $\{i\}$ et $\{j\}$ conditionnellement au noeud $\{k\}$? Nous savons à présent qu'en connaissant X_k , X_i et $X_{j''}$ sont liés, mais nous ne pouvons pas faire remonter ce lien jusqu'à un autre

1. Théorème 5.14 de [1]

parent de $X_{j''}$, car même si X_j et $X_{j''}$ sont $*$ -connectant, ce n'est pas le cas pour $X_{j'}$ et X_j .

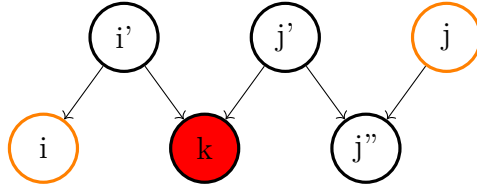


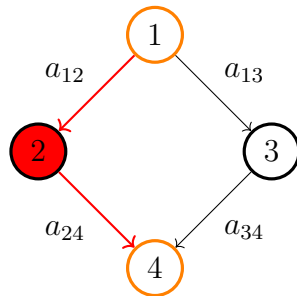
FIGURE 4.3

Exemple 4.9. Reprenons notre exemple 4.1, avec à nouveau $K = \{2\}$ et le chemin critique $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$. Soient $I = \{1\}$ et $J = \{4\}$.

Nous voulons voir si $1 \perp_{A^*} 4 \mid 2$. Pour cela, il faut d'abord déterminer le graphe critique $D_K^*(A)$. Dans la matrice Kleene star de notre graphe, $\Delta(A)$, on peut voir que les éléments (21), (31), (41), (42) et (43) sont non nuls.

Puisqu'aucun des chemins entre $\{1\}$ et $\{2\}$; $\{1\}$ et $\{3\}$; $\{2\}$ et $\{4\}$; et $\{3\}$ et $\{4\}$ ne se factorise à travers K , ils feront tous les quatre partie du graphe critique. Cependant, le seul chemin critique entre $\{1\}$ et $\{4\}$ étant $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$, et ce chemin se factorisant à travers K , il n'y aura pas de chemin $1 \rightarrow 4$.

Finalement, le graphe critique $D_K^*(A)$ est le même que le graphe original D_A et il est donné par



Pour savoir si $1 \perp_{A^*} 4 \mid 2$, nous devons vérifier qu'**aucun** chemin entre $\{1\}$ et $\{4\}$ soit $*$ -connectant dans $D_K^*(A)$. On peut en effet vérifier que ni le chemin $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$, ni $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ n'est de la forme de la définition 4.4. Nous avons donc bien

$$X_1 \perp\!\!\!\perp X_4 \mid X_2.$$

Ce qui était également montré dans l'exemple 4.1.

4.2 Indépendance conditionnelle valable pour toute matrice distance-directe

Dans cette section, nous noterons le graphe pondéré dirigé $D = (V, E, w)$, et $K \subset V$ un ensemble de noeuds inclus dans notre graphe. La discussion est valable pour toute matrice $A = A_D^T \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$.

Tout comme on a défini le graphe critique $D_K^*(A)$ à la section précédente, on définit ici le graphe d'accessibilité conditionnelle D_K^* .

Définition 4.10. Soient un graphe pondéré dirigé $D = (V, E, w)$, et $K \subset V$. Le **graphe d'accessibilité conditionnelle** D_K^* est le graphe sur V qui contient les arcs $i \rightarrow j$ si et seulement s'il existe un chemin dirigé $i \rightarrow j$ dans E qui ne se factorise pas à travers K (cf. définition 4.3).

Proposition 4.11. Soit A_D une matrice distance directe d'un graphe dirigé pondéré $D = (V, E, w)$. Le graphe critique $D_K^*(A)$ est toujours inclus dans le graphe d'accessibilité conditionnelle D_K^* :

$$D_K^*(A) \subseteq D_K^*.$$

Démonstration. Prenons un arc $i \rightarrow j$ dans $D_K^*(A)$. Par la définition 4.6, on sait alors que l'élément b_{ji} de la matrice Kleene Star de A est non nul, et qu'il existe au moins un chemin dirigé critique $i \rightarrow j$ qui ne se factorise pas à travers K dans D_A .

Le fait que b_{ji} soit non nul implique qu'il existe en effet un chemin dirigé allant de $\{i\}$ à $\{j\}$, et on sait donc qu'au moins un de ces chemins ne se factorise pas à travers K . Donc l'arc $i \rightarrow j$ existe également dans D_K^* . \square

Lemme 4.12. S'il existe un chemin *-connectant entre I et J dans le graphe critique $D_K^*(A)$, alors il en existe également un dans le graphe d'accessibilité conditionnelle D_K^* .

Démonstration. Si un chemin non dirigé entre $\{i\}$ et $\{j\}$ est *-connectant dans le graphe critique, on sait par la proposition 4.11 que ce chemin existe également dans le graphe d'accessibilité et, de plus, il sera également *-connectant, car de la forme d'une des figures 4.1a à 4.1e de la définition 4.4. \square

En se rappelant la définition 4.4 d'un chemin *-connectant, on définit (analogiquement à la définition 4.7) :

Définition 4.13. Soient $I, J, K \subset V$ disjoints. On dit que I et J sont **D^* -séparés** par K dans le graphe D , s'il n'existe aucun chemin *-connectant de I à J à travers K dans D_K^* .

On note cela $I \perp_{D^*} J \mid K$.

Ici, contrairement à la section précédente, la notion de chemin critique n'intervient pas, puisque la définition est valable pour toute matrice $A \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$.

Lemme 4.14. *Si I et J sont D^* -séparés par K dans D , alors ils sont également critiqueusement séparés.*

Démonstration. Nous allons plutôt montrer que si I et J ne sont pas critiqueusement séparés par K dans le graphe D , alors ils ne sont pas D^* -séparés non plus.

Si I et J ne sont pas critiqueusement séparés par K , cela veut dire qu'il existe au moins un chemin $*$ -connectant de I à J dans $D_K^*(A)$. Or par le lemme 4.12 on sait que ce chemin l'est également dans D_K^* ; et donc I et J ne sont pas D^* -séparés. \square

Grâce à toutes ces définitions, nous pouvons formuler notre deuxième grand théorème de ce chapitre :

Théorème 4.15 (Sans contexte, pour toute matrice A). ² *Soit $D = (V, E)$. Pour tout $I, J, K \subset V$, si $I \perp_{D^*} J \mid K$, alors pour toute matrice $A \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$ telle que l'élément a_{ij} est non nul si et seulement si (i, j) appartient à E ,*

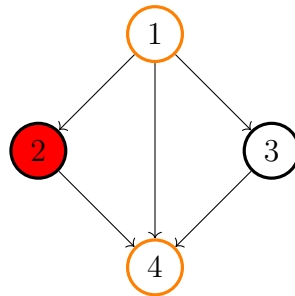
$$X_I \perp\!\!\!\perp X_J \mid X_K.$$

Démonstration. Si nous avons $I \perp_{D^*} J \mid K$, alors on sait par le lemme 4.14 que $I \perp_{A^*} J \mid K$, et donc le théorème 4.8 nous garantit que $X_I \perp\!\!\!\perp X_J \mid X_K$. \square

Exemple 4.16. Reprenons à nouveau notre exemple 4.1 avec $K = \{2\}$, mais sans considérer aucun chemin critique. Notre développement suivant est valable pour toute matrice distance directe A_D .

Nous voulons voir si nous pouvons également obtenir l'indépendance entre X_1 et X_4 conditionnellement à X_2 pour toute matrice $A \in \mathbb{R}_{\geq}^{2 \times 2}$.

Le graphe d'accessibilité conditionnelle D_K^* est donné par :



2. Théorème 5.15 de [1]

Ici, il y a en effet l'arc $1 \rightarrow 4$, car le chemin $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ ne se factorise pas à travers $K = \{2\}$.

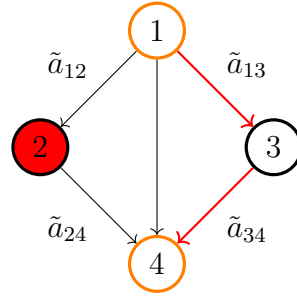
A présent, il nous reste à regarder si $\{1\}$ et $\{4\}$ sont D^* -séparés par $\{2\}$. Pour cela, il faut qu'il n'existe aucun chemin $*$ -connectant de $\{1\}$ à $\{4\}$ dans D_K^* . Les chemins $1 \rightarrow 2 \rightarrow 4$ et $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ ne sont en effet pas $*$ -connectant, mais le chemin $1 \rightarrow 4$ l'est.

Ainsi, nous n'avons pas $1 \perp_{D^*} 4 \mid 2$, et donc nous **ne pouvons pas affirmer** l'indépendance de X_1 et X_4 conditionnellement à X_2 pour toute matrice $A \in \mathbb{R}_{\geq}^{2 \times 2}$.

Nous pouvons nous demander s'il existe un contre-exemple de matrice A qui ne nous permet en effet pas d'affirmer que X_1 et X_4 soient indépendants conditionnellement à X_2 .

Exemple 4.17. Reprenons une dernière fois notre exemple avec le graphe en diamant 3.3, avec à nouveau $K = \{2\}$, $I = \{1\}$ et $J = \{4\}$. Mais choisissons cette fois-ci une matrice \tilde{A}_D telle que c'est le chemin $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ qui est critique, c'est-à-dire telle que $\tilde{a}_{13}\tilde{a}_{34} \geq \tilde{a}_{12}\tilde{a}_{24}$.

Cette fois-ci, le seul chemin critique entre $\{1\}$ et $\{4\}$ – le chemin $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ – ne se factorise pas à travers K . Cela implique qu'il existe un arc $1 \rightarrow 4$ dans notre graphe critique $D_K^*(\tilde{A})$, qui sera donc donné par



A présent, regardons si $1 \perp_{\tilde{A}^*} 4 \mid 2$. Il faudrait qu'il n'existe aucun chemin $*$ -connectant entre $\{1\}$ et $\{4\}$ dans le graphe $D_K^*(\tilde{A})$. Or le nouveau chemin $1 \rightarrow 4$ l'est, et nous **n'avons donc à priori pas** $X_1 \perp\!\!\!\perp X_4 \mid X_2$ pour cette matrice \tilde{A} .

Cela peut en effet se vérifier en se rappelant que $X_4 = (\tilde{a}_{12}\tilde{a}_{24} \oplus \tilde{a}_{13}\tilde{a}_{34})Z_1 \oplus \tilde{a}_{24}Z_2 \oplus \tilde{a}_{34}Z_3 \oplus Z_4$, qui grâce à l'inégalité $\tilde{a}_{13}\tilde{a}_{34} \geq \tilde{a}_{12}\tilde{a}_{24}$, peut se réécrire comme

$$X_4 = \tilde{a}_{13}\tilde{a}_{34}Z_1 \oplus \tilde{a}_{24}Z_2 \oplus \tilde{a}_{34}Z_3 \oplus Z_4.$$

Cela confirme que nous avons trouvé un exemple où

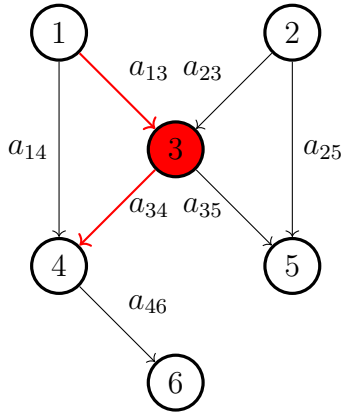
$$X_1 \not\perp\!\!\!\perp X_4 \mid X_2.$$

Nous verrons plus tard (dans l'exemple 4.18) si nous pouvons toujours trouver un contre-exemple de dépendance conditionnelle lorsque nous n'avons pas $I \perp J \mid K$.

4.3 Exemple

Dans cette section, nous allons discuter d'éventuelles relations de dépendance conditionnelle dans notre exemple 4.5.

Selon une matrice distance-directe Considérons le graphe suivant (V, E, w) avec la matrice distance-directe A_D associée :



$$A = A_D^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{14} & 0 & a_{34} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{25} & a_{35} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{46} & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Choisissons $K = \{3\}$, et pour commencer, posons le chemin critique $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$, c'est-à-dire $a_{13}a_{34} \geq a_{14}$.

Si on veut appliquer la méthode comme dans l'exemple 4.1, il nous faut d'abord trouver la matrice Kleene star $\Delta(A_D)$.

En calculant ensuite les puissances A^2, A^3, A^4, A^5 , on trouve la matrice Kleene star

$$\Delta(A) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ a_{13} & a_{23} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ a_{13}a_{34} \oplus a_{14} & a_{23}a_{34} & a_{34} & 1 & 0 & 0 \\ a_{13}a_{35} & a_{23}a_{35} \oplus a_{25} & a_{35} & 0 & 1 & 0 \\ a_{46}(a_{14} \oplus a_{13}a_{34}) & a_{23}a_{34}a_{46} & a_{34}a_{46} & a_{46} & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

En écrivant cela sous forme d'équations et en utilisant la relation $a_{13}a_{34} \geq a_{14}$, on

obtient

$$\begin{aligned}
X_1 &= Z_1, \\
X_2 &= Z_2, \\
X_3 &= a_{13}Z_1 \oplus a_{23}Z_2 \oplus Z_3, \\
X_4 &= (a_{13}a_{34} \oplus a_{14})Z_1 \oplus (a_{23}a_{34})Z_2 \oplus a_{34}Z_3 \oplus Z_4 \\
&= a_{34}X_3 \oplus Z_4, \\
X_5 &= (a_{13}a_{35})Z_1 \oplus (a_{23}a_{35} \oplus a_{25})Z_2 \oplus a_{35}Z_3 \oplus Z_5 \\
&= a_{35}X_3 \oplus a_{25}Z_2 \oplus Z_5, \\
X_6 &= a_{46}(a_{14} \oplus a_{13}a_{34})Z_1 \oplus (a_{23}a_{34}a_{46})Z_2 \oplus (a_{34}a_{46})Z_3 \oplus a_{46}Z_4 \oplus Z_5 \\
&= a_{46}(a_{34}X_3 \oplus Z_4) \oplus Z_6 \\
&= a_{46}X_4 \oplus Z_6.
\end{aligned}$$

On peut observer qu'on a les relations

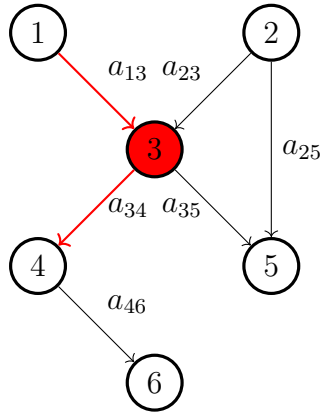
$$X_1 \perp\!\!\!\perp X_4 \mid X_3, \quad (4.1)$$

$$X_1 \perp\!\!\!\perp X_6 \mid X_3, \quad (4.2)$$

$$X_2 \perp\!\!\!\perp X_4 \mid X_3, \quad (4.3)$$

$$X_2 \perp\!\!\!\perp X_6 \mid X_3. \quad (4.4)$$

Mais on a dû faire beaucoup de calculs intermédiaires pour en arriver là. C'est pour cela que la méthode du graphe critique $D_K^*(A)$ (définition 4.6) peut être plus pratique. Ici, le graphe critique est donné par



Il est le même que le graphe d'origine D_A , sans l'arc $1 \rightarrow 4$, celui-ci n'apparaissant pas car le chemin critique $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ se factorise par $K = \{3\}$.

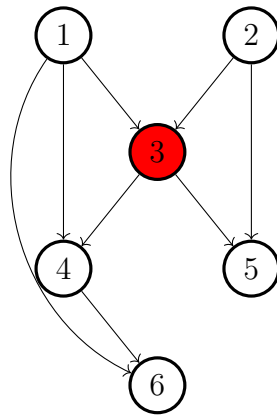
De plus, même si les éléments (15), (16), (24), (26) de la matrice Kleene star sont positifs, ils n'apparaîtront pas dans le graphe critique, car ces chemins critiques se factorisent à travers K .

Vérifions quelles variables sont critiqueusement séparées par K grâce à la définition 4.7.

- $1 \perp_{A^*} 2 \mid 3$? Non, car, puisque $\{1\}$ et $\{2\}$ ont un enfant commun, le chemin entre $\{1\}$ et $\{2\}$ est $*$ -connectant.
- $1 \perp_{A^*} 4 \mid 3$? Oui, car le seul chemin entre $\{1\}$ et $\{4\}$ dans le graphe critique est le chemin $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$, qui n'est pas $*$ -connectant.
- $1 \perp_{A^*} 5 \mid 3$? Non, car il existe un chemin $*$ -connectant entre $\{1\}$ et $\{5\}$, cf. figure 4.2a
- $1 \perp_{A^*} 6 \mid 3$? Oui, car il n'y a pas de chemin $*$ -connectant entre $\{1\}$ et $\{6\}$.
- $2 \perp_{A^*} 4 \mid 3$? Idem.
- $2 \perp_{A^*} 5 \mid 3$? Non, car le chemin direct $2 \rightarrow 5$ est $*$ -connectant.
- $2 \perp_{A^*} 6 \mid 3$? Oui, car il n'y a pas de chemin $*$ -connectant.

Finalement, dans le cas où le chemin $1 \rightarrow 3 \rightarrow 4$ est critique, nous avons donc observé les mêmes relations de dépendance conditionnelle qu'exprimé dans les équations (4.1) à (4.4).

Pour toute matrice distance-directe Dans le même exemple, considérons encore $K = \{3\}$ mais regardons ce qu'il se passe pour toute matrice A_D . Le graphe d'accessibilité conditionnelle D_K^* est donné par



Il y a un arc $1 \rightarrow 6$, car le chemin $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6$ ne se factorise pas par K . Regardons à présent quelles variables sont D^* -séparées par K , selon la définition 4.13. Nous devons donc vérifier s'il existe un chemin $*$ -connectant entre I et J . Beaucoup de cas ont déjà été développés dans l'exemple 4.5. De plus, par le lemme 4.12, nous savons déjà que tous les chemins qui étaient $*$ -connectant dans le graphe critique le seront également dans le graphe d'accessibilité conditionnellement. Nous avons donc d'emblée $1 \not\perp_{K^*} 2 \mid 3$; $1 \not\perp_{K^*} 5 \mid 3$ et $2 \not\perp_{K^*} 5 \mid 3$. Considérons les cas qu'il nous reste :

- $1 \perp_{K^*} 4 \mid 3$? Non, car le chemin $1 \rightarrow 4$ est $*$ -connectant.
- $1 \perp_{K^*} 6 \mid 3$? Non, car le chemin $1 \rightarrow 6$ est $*$ -connectant.
- $2 \perp_{K^*} 4 \mid 3$? Non, car il existe un chemin $*$ -connectant, cf. figure 4.2b.
- $2 \perp_{K^*} 6 \mid 3$? Non, car le chemin non dirigé $2 - 3 - 1 - 6$ est de la forme de la figure 4.1e de la définition 4.4.

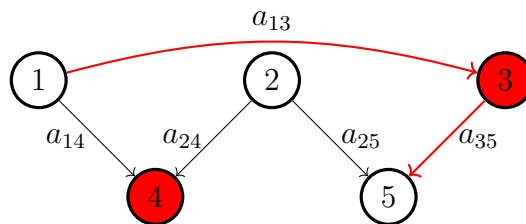
Il n'y a donc aucune variable qui peut être D^* -séparée d'une autre par K . Et nous n'avons donc aucun cas d'indépendance conditionnelle par rapport à $K = \{3\}$ pour toute matrice $A \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$.

4.4 Réciprocité

Nous voulons savoir si nous pouvons avoir la réciprocité des théorèmes 4.8 et 4.15. Autrement dit, la condition d'être critiquelement séparé ou D^* -séparé est-elle nécessaire pour avoir l'indépendance conditionnelle ?

Comme le montre l'exemple suivant, ce n'est pas le cas.

Exemple 4.18. Considérons le graphe suivant, où $K = \{3, 4\}$ et le chemin $1 \rightarrow 3 \rightarrow 5$ est critique.



Commençons par construire le graphe critique $D_K^*(A)$ et le graphe d'accessibilité conditionnelle D_K^* .

Ces deux graphes contiennent les arcs $1 \rightarrow 4$, $1 \rightarrow 3$, $2 \rightarrow 4$, $2 \rightarrow 5$, et $3 \rightarrow 5$, car aucun de ces chemins ne se factorise à travers K . Le dernier chemin à étudier est le chemin $1 \rightarrow 5$, car c'est le seul chemin tel que l'élément (b_{51}) de la matrice Kleene Star est non nul ($\{1\}$ est un ancêtre de $\{5\}$). Ce chemin n'appartient cependant pas aux graphes critique et d'accessibilité conditionnelle, car il se factorise à travers $\{3\}$ qui appartient à K . On a donc

$$D_K^*(A) = D_K^* = D.$$

À présent, regardons si nous avons $1 \perp_{A^*} 5 \mid 3, 4$. Puisque le chemin $1 \rightarrow 4 \leftarrow 2 \rightarrow 5$ est $*$ -connectant (car il est de la forme de la figure 4.1d de la définition de chemin $*$ -connectant), nous pouvons conclure que

$$1 \not\perp_{A^*} 5 \mid 3, 4.$$

Et donc, via le lemme 4.14,

$$1 \not\perp_{D^*} 5 \mid 3, 4.$$

On se demande à présent si il est quand même possible que $X_1 \perp\!\!\!\perp X_5 \mid X_3, X_4$. On peut écrire toutes les variables telles que :

$$\begin{aligned} X_1 &= Z_1 \\ X_2 &= Z_2 \\ X_3 &= a_{13}X_1 \oplus Z_3 \\ X_4 &= a_{14}X_1 \oplus a_{24}X_2 \oplus Z_4 \\ X_5 &= a_{24}X_2 \oplus a_{35}X_3 \oplus Z_5. \end{aligned}$$

On peut ainsi voir que, si nous connaissons X_3 et X_4 , alors X_1 et X_5 deviennent indépendantes, donc

$$X_1 \perp\!\!\!\perp X_5 \mid X_3, X_4.$$

Ce qui montre que nous n'avons pas la réciprocity des théorèmes 4.8 et 4.15.

Nous avons cependant un théorème donnant une condition nécessaire et suffisante sur le graphe critique $D_K^*(A)$ pour avoir une indépendance conditionnelle étant donné une matrice A . Ce théorème peut être retrouvé dans l'annexe A où nous donnerons les bases théoriques pour construire ce théorème, sans en donner une démonstration.

Conclusion

L'objectif de ce mémoire était d'étudier des relations d'indépendance conditionnelle dans des modèles max-linéaires. Dans le chapitre 3, nous avons vu que nous pouvons représenter les relations causales de tels modèles par des graphes. Pour ce faire, nous avons étudié l'algèbre tropique, et plus particulièrement l'algèbre max-times, et en avons donné une série de propriétés et outils.

Nous avons notamment observé le rôle que la moyenne cyclique maximale joue sur les matrices de fermetures transitives faibles ($\Gamma(A)$) et fortes ($\Delta(A)$) de la matrice A (qui, graphiquement, encode les poids des arcs dans notre graphe). Dans le chapitre 2, nous avons en effet vu dans la proposition 2.16 que si $\lambda(A) > 1$, alors au moins une des entrées de nos matrices de fermetures transitives tend vers l'infini. Tandis que si $\lambda(A) \leq 1$, alors toutes les entrées de $\Gamma(A)$ et $\Delta(A)$ (notre matrice Kleene Star) sont finies. Nos deux matrices sont alors définies par $\Gamma(A) = A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^n$ et $\Delta(A) = I \oplus A \oplus A^2 \oplus \dots \oplus A^n$ (où n est la nombre de lignes et de colonnes de A).

Nos modèles max-linéaires étant représentés par des graphes acycliques pondérés, nous savons que $\lambda(A) = 0$. Nous pouvons donc définir notre matrice Kleene Star via une somme finie de puissances de notre matrice A . Tout cela nous a permis de construire une équation non récursive définissant nos variables :

$$X = \Delta(A) \odot Z,$$

qui a été donnée dans notre théorème 3.5.

Forts de toutes ces notions, nous avons finalement pu construire nos deux théorèmes principaux du chapitre 4, les théorèmes 4.8 et 4.15. Ces deux théorèmes présentent un critère suffisant pour déterminer une éventuelle relation d'indépendance conditionnelle dans notre modèle, l'un dépendant de la matrice A , l'autre étant valable indépendamment de A . Ce critère s'appuie sur deux nouveaux types de séparation graphique, la séparation critique (définition 4.7) et la D^* -séparation (définition 4.13). Chacune de ces séparations est basée sur l'étude de chemin *-connectant (définition 4.4) dans de nouveaux graphes construits à partir de notre graphe original D_A .

- Le graphe critique (définition 4.6) $D_K^*(A)$ est construit en prenant tous les arcs $i \rightarrow j$ tels que $\{i\}$ est un ancêtre de $\{j\}$ dans le graphe D_A et si aucun chemin critique $i \rightarrow j$ ne se factorise à travers un des noeuds appartenant à l'ensemble K par lequel on conditionne notre indépendance.

- Le graphe d’accessibilité (définition 4.10) D_K^* quant à lui est composé des arcs $i \rightarrow j$ si $\{i\}$ est un ancêtre de $\{j\}$ et s’il existe un chemin $i \rightarrow j$ qui ne se factorise pas à travers K .

Nous avons finalement vu que la réciproque de ces deux théorèmes est fautive grâce à un contre-exemple.

Ce domaine d’étude est vaste et il ouvre la porte à plusieurs questions qui n’ont pas été approfondies dans ce mémoire. Parmi celles-ci, nous relevons les points suivants :

- Le théorème A.1 nous donne justement une condition nécessaire et suffisante pour des liens d’indépendance conditionnelle. Nous n’en avons donné qu’une vision restreinte, mais il peut être intéressant de l’explorer plus en détails. Ceux-ci peuvent être trouvés dans l’article de C. Améndola, C. Klüppelberg, S. Lauritzen et N. M. Tran [1].
- Nous avons assumé le théorème 4.8 comme acquis mais il peut également être intéressant d’en développer la preuve, qui s’appuie sur un troisième critère qui n’a été que cité dans le mémoire, la *séparation source*. Cette séparation source est étudiée dans un nouveau graphe, le *graphe source*, qui correspond à l’étude de dépendance conditionnelle sous un contexte spécifique, dont nous avons donné un bref aperçu dans l’exemple 4.2. A nouveau, le lecteur est redirigé vers l’article [1].
- Finalement, l’algèbre tropique constitue un vaste sujet d’étude et beaucoup d’autres outils intéressants peuvent y être développés. Nous n’en avons donné qu’une brève présentation, mais le livre de P. Butkovič [7] peut assouvir la curiosité de ceux qui aimeraient en découvrir plus.

Annexe A

Réciprocité des théorèmes d'indépendance

Dans cette annexe, nous donnons les bases théoriques pour formuler un théorème nous donnant une condition nécessaire et suffisante pour avoir l'indépendance conditionnelle entre des variables de nos modèles max-linéaires, comme abordé dans la section 4.4. Pour plus de détails concernant la démonstration de ce dernier théorème A.1, le lecteur peut se référer à la sixième section de l'article [1].

Théorème A.1. ¹ Soit un graphe pondéré acyclique $D = (V, E)$, une matrice distance directe $A \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$, et les ensembles disjoints $I, J, K \subset V$.

Nous avons l'indépendance conditionnelle $X_I \perp\!\!\!\perp X_J \mid X_K$ si et seulement si il n'existe aucun chemin $*$ -connectant effectif (définition A.4) entre I et J relativement à K dans le graphe critique $D_K^*(A)$.

Pour comprendre ce théorème, nous aurons encore besoin de deux définitions.

Dans la suite, l'ensemble $\text{enf}_{D^*}(i)$ est l'ensemble des enfants du noeud $\{i\}$ dans le graphe $D_K^*(A)$ et $\text{pa}_{D^*}(j)$ est l'ensemble des parents du noeud $\{j\}$ dans le même graphe. De plus nous notons la matrice Kleene Star par $B \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$.

Définition A.2. Soit un graphe pondéré acyclique $D = (V, E)$, une matrice distance directe $A \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$ fixée, et $K \subset V$. La **matrice de substitution** $\Xi_K^{j_i}$ d'un chemin $i \rightarrow j \in D_K^*(A)$ est une matrice de taille $|K| \times |K|$, où les entrées se calculent de la manière suivante.

1. Déterminer les $k \in K \cap \text{enf}_{D^*}(i)$,
2. Déterminer les $l \in K \cap (\text{pa}_{D^*}(j) \cup \{j\})$

1. Théorème 6.18 de [1]

3. Pour chaque combinaison possible de k et l , les éléments non nuls de la matrice Ξ_K^{ji} sont uniquement tels que $k \neq l$ et sont calculés par

$$\xi_{kl}^{ji} = \frac{b_{ki}b_{jl}}{b_{ji}}.$$

Si π est un chemin $*$ -connectant entre $\{i\}$ et $\{j\}$ dans $D_K^*(A)$, alors la **matrice de substitution** de π relativement à K est donnée par

$$\Xi_K^\pi = \bigoplus_{u \rightarrow v \in \pi} \Xi_K^{vu}.$$

Exemple A.3. Reprenons l'exemple 4.18, mais en considérant que tous les arcs existant dans le graphe D sont égaux à 1, pour faciliter les calculs suivants. Intéressons nous au chemin $*$ -connectant $\pi : 1 \rightarrow 4 \leftarrow 2 \rightarrow 5$. Les arcs composant ce chemin sont $1 \rightarrow 4$, $2 \rightarrow 4$, $2 \rightarrow 5$. Nous devons donc calculer ces trois matrices de substitution.

- $\Xi_K^{41} = ?$ Ici, $k \in K \cap \text{enf}_{D^*}(1) = \{3, 4\}$, et $l \in K \cap (\text{pa}_{D^*}(4) \cup \{4\}) = \{4\}$. Nous avons donc la forme de matrice

$$\Xi_K^{41} = \begin{pmatrix} \xi_{33}^{41} & \xi_{34}^{41} \\ \xi_{43}^{41} & \xi_{44}^{41} \end{pmatrix}.$$

où $\xi_{33}^{41} = \xi_{44}^{41} = \xi_{43}^{41} = 0$, et $\xi_{34}^{41} = \frac{b_{31}b_{44}}{b_{41}} = 1$. Finalement,

$$\Xi_K^{41} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- $\Xi_K^{42} = ?$ Ici, $k \in K \cap \text{enf}_{D^*}(2) = \{4\}$, et $l \in K \cap (\text{pa}_{D^*}(4) \cup \{4\}) = \{4\}$. Il est donc impossible de trouver un k différent de l , et donc

$$\Xi_K^{42} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- $\Xi_K^{52} = ?$ Ici, $k \in K \cap \text{enf}_{D^*}(2) = \{4\}$, et $l \in K \cap (\text{pa}_{D^*}(5) \cup \{5\}) = \{3\}$. Nous avons $\xi_{33}^{52} = \xi_{44}^{52} = \xi_{34}^{52} = 0$, et $\xi_{42}^{52} = \frac{b_{42}b_{53}}{b_{52}} = 1$. Finalement,

$$\Xi_K^{52} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous avons finalement la matrice de substitution

$$\begin{aligned} \Xi_K^\pi &= \Xi_K^{41} \oplus \Xi_K^{42} \oplus \Xi_K^{52} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Définition A.4. Un chemin $*$ -connectant π de I à J dans le graphe critique est **effectif** si

$$\lambda(\Gamma_{KK} \oplus \Xi_K^\pi) < 1.$$

où

- λ représente la moyenne cyclique maximale (définition 2.1);
- Γ_{KK} est la matrice de fermeture transitive faible (définition 2.11) restreinte aux composantes de K ;
- Ξ_K^π est la matrice de substitution du chemin $*$ -connectant (définition A.2).

Nous allons terminer en clôturant l'exemple A.3.

Exemple A.5. Pour savoir si le chemin $\pi : 1 \rightarrow 4 \leftarrow 2 \rightarrow 5$ est effectif, nous devons d'abord déterminer Γ_{KK} . Le seul élément non nul de la matrice dont nous devons calculer la matrice de fermeture transitive faible est l'élément $a_{35} = 1$. On a

$$\Gamma_{KK} = \Gamma \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi,

$$E = \Gamma_{KK} \oplus \Xi_K^\pi = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Pour calculer la valeur moyenne cyclique maximale, nous calculons $E^2 = I$, et donc par la propriété 2.3 de Vorobyov,

$$\lambda(E) = \max(0, 1^{1/2}) = 1.$$

Cela implique que ce chemin $*$ -connectant π n'est pas effectif, et donc par le théorème A.1, nous avons bien

$$X_1 \perp\!\!\!\perp X_5 \mid X_3, X_4.$$

Bibliographie

- [1] C. Améndola, C. Klüppelberg, S. Lauritzen & N. M. Tran. *Conditional independance in max-linear bayesian networks*. The Annals of Applied Probability, Vol. 32, No. 1, 1-45, 2022.
- [2] R. Cuninghame-Green. *Describing Industrial Processes with Interference and Approximating Their Steady-State Behaviour*. OR 1962-mar vol. 13 iss. 1, 1962.
- [3] N. Gissibl, C. Klüppelberg & S. Lauritzen. *Identifiability and estimation of recursive max-linear models*. Scandinavian Journal of Statistics, 48 : 188-211, 2021.
- [4] D. Maclagan & B. Sturmfels. *Introduction to Tropical Geometry*. Graduate Studies in Mathematics, 2015.
- [5] R. Cuninghame-Green. *Minimax Algebra*. Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems, N°166, 1976.
- [6] N. Gissibl & C. Klüppelberg. *Max-linear models on directed acyclic graphs*. Bernoulli, 24(4A), 2693-2720, 2018.
- [7] P. Butkovič. *Max-linear Systems : Theory and Algorithms*. Springer Monographs in Mathematics, 2010
- [8] I. Simon. *Recognizable Sets with Multiplicities in the Tropical Semiring*. Lecture Notes in Computer Science, vol. 324, 1988.
- [9] B. Giffler. *Schedule algebra : A progress report*. Naval Research Logistics (NRL) 1968-jun vol. 15 iss. 2, 1968
- [10] G.L. Litvinov. *The Maslov dequantization, idempotent and tropical mathematics : a brief introduction*. arXiv :math/0507014, 2005.

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
Faculté des sciences

Place des sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/sc