

Impact des copules sur la VaR.

Mémoire réalisé par
Nicolas Bakolas

Promoteur(s)
Frédéric Vrins

Année académique 2017-2018
Ingénieur de gestion

Table des matières

RÉSUMÉ	1
INTRODUCTION	2
PARTIE 1 : FONDEMENTS THÉORIQUES	3
CHAPITRE 1 MESURE DE RISQUE ET VAR	3
INTRODUCTION	3
RISQUE.....	3
MESURE DE RISQUE.....	4
LA VAR COMME MESURE DE RISQUE.....	5
CHAPITRE 2 ESTIMER LA VAR	7
INTRODUCTION	7
ESTIMATION NON PARAMÉTRIQUE - SIMULATION HISTORIQUE.....	7
MÉTHODE SEMI-PARAMÉTRIQUE.....	9
MÉTHODES D'ESTIMATION PARAMÉTRIQUES	14
MÉTHODE DE MONTE CARLO	18
CHAPITRE 3 COPULES	21
INTRODUCTION	21
LE TAU DE KENDALL	21
COPULES	22
PARTIE 2 : APPLICATIONS	31
CHAPITRE 1 APPLICATION SUR DONNÉES SIMULÉES	31
CHAPITRE 2 APPLICATION SUR DONNÉES RÉELLES	40
CONCLUSION	49
ANNEXES	50
ANNEXE 1: EVALUATION DE LA STABILITÉ DES ESTIMATEURS SUR DONNÉES SIMULÉES (TABLES).	50
ANNEXE 2: EVALUATION DE LA STABILITÉ DES ESTIMATEURS SUR DONNÉES SIMULÉES (BOX-PLOTS).	53
ANNEXE 3: VAR SELON LE NIVEAU DE CORRÉLATION DE KENDALL (TABLES).	59
ANNEXE 4: EVALUATION DES ESTIMATEURS DE VAR SELON LA CORRÉLATION : ÉCART MOYEN PAR RAPPORT À LA RÉALITÉ (TABLES).	61
ANNEXE 5: EVALUATION DES ESTIMATEURS DE VAR SELON LA CORRÉLATION : ÉCART MOYEN PAR RAPPORT À LA RÉALITÉ (GRAPHES).	63
ANNEXE 6: EVALUATION DES ESTIMATEURS DE VAR SELON LA CORRÉLATION : VARIANCE DES RÉSULTATS SELON LA CORRÉLATION (TABLES).	65
ANNEXE 7: EVALUATION DES ESTIMATEURS DE VAR SELON LA CORRÉLATION : VARIANCE DES RÉSULTATS SELON LA CORRÉLATION (GRAPHES).	67
ANNEXE 8: VAR CALCULÉE POUR CHAQUE ANNÉE (TABLES).	69
ANNEXE 9: VAR CALCULÉE POUR CHAQUE ANNÉE (GRAPHES).	71
ANNEXE 10: STABILITÉ DE LA VAR À L'AJOUT DE DONNÉES HISTORIQUES (TABLES).	72
ANNEXE 11: STABILITÉ DE LA VAR À L'AJOUT DE DONNÉES HISTORIQUES (GRAPHES).....	75
BIBLIOGRAPHIE	77

Liste des graphiques et illustrations

Figure 1 - VaR définition.....	6
Figure 2 - Fonctions de densité de Fréchet, Weibull et Gumbel	10
Figure 3 - Fonction de distribution F et fonction de distribution conditionnelle au dessus du seuil u	12
Figure 4 - Dépendogramme d'une copule de student.....	24
Figure 5 - Dépendogramme d'une copule gaussienne	25
Figure 6 - Dépendogramme d'une copule de Clayton.....	27
Figure 7 - Dépendogramme d'une copule de Gumbel	28
Figure 8 - Distribution cumulée des valeurs des couples d'actifs	30
Figure 9 - Distribution cumulée des pertes et profits du portefeuille	30
Figure 10 - Box-plot des estimations des VaR99,9%	35
Figure 11 - Ecart moyen des estimateurs par rapport à la réalité en fonction du niveau de corrélation de Kendall.....	37
Figure 12 - Evolution de la variance des estimations en fonction de la corrélation de Kendall	39
Figure 13 - Pertes estimées par les différents estimateurs en fonction des années d'observation	45
Figure 14 -Evolution des estimations de VaR en fonction de données historiques supplémentaires.....	47

Liste des tableaux

Tableau 1 - Copules elliptiques.....	26
Tableau 2 - Copules archimédiennes	29
Tableau 3 - Conversion corrélation Kendall en Pearson	32
Tableau 4 - Résultats obtenus sur base de 50 données simulées.	34
Tableau 5 - Résultats obtenus sur base de 100 données simulées.	34
Tableau 6 - Résultats obtenus sur base de 255 données simulées.	34
Tableau 7 - Résultats obtenus sur base de 500 données simulées.	34
Tableau 8 - VaR calculées pour différents niveaux de corrélation.....	36
Tableau 9 -Ecart moyen entre les estimations et la VaR99,9% réelle selon différents niveaux de corrélation de Kendall	37
Tableau 10 - Variance des estimations de VaR99,9% selon différents niveaux de corrélation de Kendall.	38
Tableau 11 -Corrélations de Pearson et de Kendall observées selon les années.....	41
Tableau 12 -Skewness et Kurtosis calculé pour chaque année sur l'AEX25	42
Tableau 13 - Skewness et Kurtosis calculé pour chaque année sur le BEL20	42
Tableau 14 - Variable de Jarque-Bera et p-value calculée pour chaque année sur l'AEX25...43	43
Tableau 15 - Variable de Jarque-Bera et p-value calculée pour chaque année sur le BEL20. 43	43
Tableau 16 - Moyenne des VaR calculées sur les années 2013 à 2017.	44
Tableau 17 -Variance des VaR calculées sur les années 2013 à 2017.....	44
Tableau 18 - Moyenne des VaR calculées dans toutes les périodes testées	46
Tableau 19 -Variance des VaR calculées pour toutes les périodes testées.....	46

Résumé

Ce mémoire vise à répondre à la question « Quel est l'impact des copules sur la Value-at-Risk ? ». Dans ce but, nous présentons dans un premier temps le concept de VaR ainsi que la théorie et hypothèses sous-jacentes aux méthodes traditionnelles pour la calculer. Nous explicitons ensuite la théorie des copules qui est essentielle en vue de comprendre leur fonctionnement ainsi que leurs particularités. La principale étant, à l'inverse des méthodes traditionnelles, de prendre en compte les distributions marginales en vue de trouver la VaR de la distribution jointe.

Ensuite, nous appliquons ces concepts et théories sur des cas pratiques dans le but d'évaluer un potentiel impact des méthodes copules sur l'estimation des VaR les plus extrêmes. Nous débutons par étudier un cas sur données simulées et parvenons à la conclusion que la copule Normale était la méthode la plus efficace pour estimer la VaR de notre portefeuille d'actifs équipondérés dont les rendements suivent une loi Normale bivariée.

Pour finir, nous étudions un cas utilisant des données réelles qui nous a permis de faire un premier constat, à savoir que l'hypothèse de normalité des rendements n'est pas valable pour des indices boursiers. La normalité supposée aurait pour conséquence de sous-estimer la VaR réelle. Nous pensons donc que l'utilisation des méthodes traditionnelles fondées sur une hypothèse de normalité des rendements sous-estime la VaR réelle.

Introduction

Au cours des trois dernières décennies, la Value at Risk (VaR) est devenue une mesure de risque incontournable dans le monde financier. En effet, elle occupe un rôle clé pour évaluer les risques des entreprises bancaires et d'assurance. Elle se retrouve d'ailleurs au centre des méthodes de calculs de capitaux propres à détenir en vue d'assurer un certain niveau de solvabilité dans les dernières réglementations Solvency II (assurance) et Bâle III (banque).

La VaR peut être évaluée de nombreuses façons différentes. Il existe tout d'abord les méthodes non paramétriques, qui utilisent des historiques de données sans faire d'hypothèses sur la distribution de celles-ci. Les méthodes semi-paramétriques font quant à elles des hypothèses de distribution sur les événements rares uniquement. Enfin, les méthodes d'estimation paramétrique utilisent les historiques de données afin d'ajuster une loi de probabilité sur l'évènement observé.

L'objectif, de ce mémoire, est de comparer les méthodes d'évaluation de VaR les plus courantes aux méthodes des copules dans différentes situations. Afin d'y parvenir, le mémoire est structuré en deux parties. La première consiste à introduire le concept de mesure de risque et de VaR. Elle détaille également les fondements théoriques des différentes méthodes d'estimation ainsi que la méthodologie à appliquer pour l'estimer.

La seconde partie a pour but de tester les concepts théoriques introduits dans différents cas pratiques. Premièrement, nous allons commencer par travailler sur des jeux de données simulées. Cela nous permettra d'évaluer la qualité et la stabilité des estimateurs, dans différentes situations, en les comparant à la VaR de la distribution réelle. Nous allons d'abord tester la stabilité des estimateurs en faisant varier la quantité de données disponibles pour calculer la VaR. Ensuite, nous testerons l'efficacité des différents estimateurs en fonctions de la corrélation entre les variables aléatoires. Pour cela, nous ferons varier la relation de dépendance entre les variables aléatoires générées et comparerons les VaR obtenues. Deuxièmement, nous allons effectuer des analyses sur des données réelles, à savoir un portefeuille équilibré entre les indices AEX25 et BEL20. Dans cette partie, nous étudierons également l'impact du nombre d'observations sur la VaR ainsi que la stabilité des différents estimateurs au cours du temps (période 2013-2017).

Partie 1 : Fondements Théoriques.

Chapitre 1 **Mesure de risque et VaR**

Introduction

L'objectif de ce chapitre est vise à introduire le concept de mesure de risque et d'expliquer la notion de Value at Risk. Nous commençons d'abord par expliquer ce qu'est un risque ainsi que les différents types de risques existants afin de situer le contexte dans lequel nous travaillons. Ensuite, nous expliciterons la notion de mesure risque qui nous permettra d'introduire le concept de VaR ainsi que son contexte d'utilisation.

Risque

Dans l'environnement financier, un risque peut être défini comme étant le degré d'incertitude sur les rendements nets futurs. Les marchés financiers sont soumis à divers risques qui sont le plus communément classés comme suit :

- Le risque de crédit est la perte potentielle due à l'incapacité d'une contrepartie à remplir ses obligations.
- Le risque de liquidité est l'incapacité pour une entreprise de vendre ses actifs.
- Le risque opérationnel est le risque de perte provenant de processus internes défectueux ou inadéquats, d'erreurs humaine ou informatique, ou provenant d'événements extérieurs.
- Le risque de marché est l'incertitude des rendements futurs due à un changement des conditions de marché (évolution de la courbe des taux d'intérêts, changement des prix sur le marché, variations des taux de changes...).

Tout au long de ce mémoire, nous nous concentrerons sur le risque de marché. Afin d'évaluer le montant de capital nécessaire pour couvrir un risque, il faut utiliser une mesure de risque adéquate.

Mesure de risque

Une mesure de risque est une fonction ρ faisant correspondre à un risque X un nombre positif $\rho(X)$. Dans le cas du risque de marché, $\rho(X)$ est le montant de capital nécessaire pour faire face à une perte X .

Pour que l'utilisation d'une mesure de risque soit pertinente, il est important qu'elle remplisse certains critères de cohérence. Comme défini par Artzner, Delbaen, Eber et Heath (1999), une mesure de risque est dite cohérente si elle satisfait les axiomes suivants :

- Axiome 1 : Invariance par translation

Pour tout risque X et toute constante c : $\rho(X + c) = \rho(X) + c$.

L'invariance par translation garantit que $\rho(X - \rho(X)) = 0$.

En outre, pour toute constante c , nous avons $\rho(c) = c$.

- Axiome 2 : Sous-additivité

Pour tout risque X et Y : $\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$.

Cet axiome signifie que la diversification permet de réduire le risque. Nous évaluons les effets de la diversification en calculant : $\rho(X) + \rho(Y) - \rho(X + Y) \geq 0$.

Nous pouvons interpréter cet axiome dans le contexte d'un portefeuille d'actions où, lequel le risque de deux actions ensemble sera inférieur ou égal au risque des actions évaluées séparément du fait de la diversification des actifs.

- Axiome 3 : Homogénéité positive

Pour tout risque X et constante positive c : $\rho(cX) = c\rho(X)$.

L'homogénéité peut être considérée comme un cas extrême de la sous-additivité. En effet, dans le cas où nous additionnons des risques similaires ne permettant aucune diversification : $\rho(cX) = \rho(X + X + X + \dots + X) = \rho(X) + \rho(X) + \dots + \rho(X) = c\rho(X)$.

- Axiome 4 : Monotonie

Pour tout risque X et Y : si $P(X \leq Y) = 1$ alors $\rho(X) \leq \rho(Y)$.

La VaR comme mesure de risque

La Value at Risk (VaR) est une mesure de risque principalement utilisée pour la mesure du risque de marché de portefeuilles à grande dimension. Cette mesure de risque a été institutionnalisée par les autorités de contrôle du secteur bancaire et de l'assurance et est désormais au cœur des calculs de capitaux économiques des régulations Solvency II et Bâle III.

La VaR est une mesure statistique du risque de perte exprimée en unités monétaires. Comme défini par Jorion (2003), la VaR sur un horizon défini, est la perte maximale, tel qu'il existe une faible probabilité prédéfinie à laquelle la perte réelle soit supérieure. Elle est donc déterminée par deux paramètres : le niveau de probabilité et l'horizon temporel.

Soit un portefeuille de risques de dimension d , détenu sur un horizon défini et représenté par un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)$ d'un espace de probabilité (Ω, \mathcal{F}, P) . L'exposition totale du portefeuille aux pertes S_d est donnée par la somme des éléments marginaux $S_d = X_1 + \dots + X_d$.

Soit un niveau de probabilité prédéfini $\alpha \in (0, 1)$, la VaR correspondante, notée $VaR[X; \alpha]$, est le quantile α de X tel que $VaR[X; \alpha] = F_X^{-1}(\alpha) = \inf\{x \in \mathbb{R}: F_X(x) \geq \alpha\}$ avec $F_X(x) = P(X \leq x)$ la fonction de distribution de X.

En pratique, F_X fait référence à une fonction de distribution des pertes et profits (P&L : Profit-and-Loss). L'estimation de la VaR se fait principalement suivant l'une des trois méthodes qui seront décrites ultérieurement : Simulation Historique, Méthode (semi-) paramétriques et simulations de Monte Carlo.

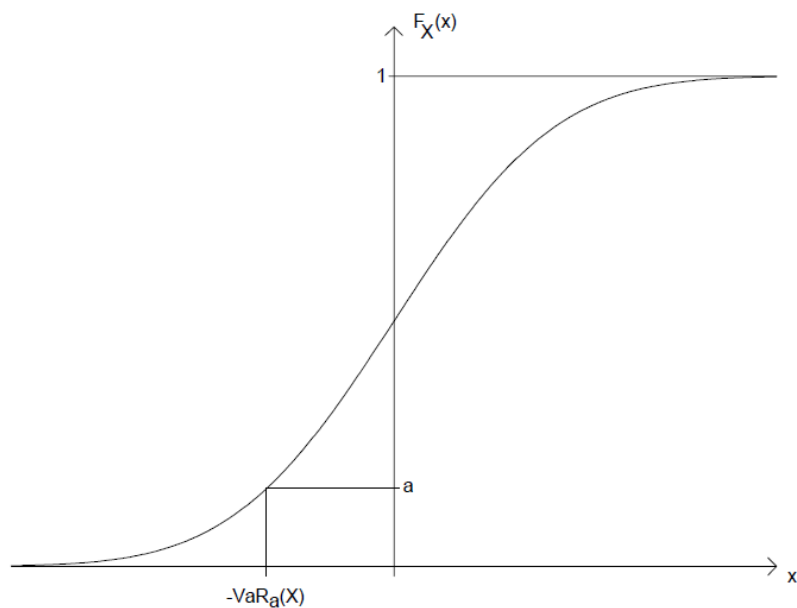


Figure 1 - VaR définition

La VaR n'est pas une mesure de risque cohérente. En effet, comme démontré par Artzner, Delbaen, Eber et Heath (1998), la VaR ne remplit pas tous les critères de cohérence. Bien qu'elle remplisse les critères d'invariance par translation, d'homogénéité positive et de monotonie, elle ne satisfait pas le critère de sous-additivité.

De ce fait, il convient de trouver une distribution jointe pour X en vue de déterminer la $\text{VaR}[S_d ; \alpha]$.

Chapitre 2 Estimer la VaR

Introduction

Dans ce chapitre, nous présenterons les méthodes d'estimation de VaR les plus courantes dans la littérature. Nous expliciterons dans un premier temps les fondements théoriques de ces différentes méthodes ainsi que la méthodologie à appliquer pour estimer la VaR. Ce chapitre comporte trois sections, la première porte sur les méthodes d'estimation non paramétriques, la deuxième sur les méthodes d'estimation semi-paramétriques et la troisième abordera les méthodes paramétriques.

Estimation non paramétrique - Simulation historique

Fondements Théoriques

La première méthode d'estimation de VaR proposée, est une méthode basée sur la distribution empirique des rendements. Cette méthode est dite « non-paramétrique », car elle ne nécessite pas d'émettre des hypothèses de distribution. Néanmoins, une hypothèse de stationnarité des rendements est considérée. L'approche par simulation historique se base sur les quantiles observés pour déterminer la VaR. Concrètement, l'échantillon des rendements est divisé en sous-échantillons, appelés fenêtres, de même longueur qui vont se superposer. La longueur d'un sous-échantillon est appelée la taille de la fenêtre. Si la taille de l'échantillon est T , et que la taille de la fenêtre est n , il est possible de construire $T-n+1$ sous-échantillons de sorte que deux échantillons consécutifs ne diffèrent que d'une seule date, et donc d'un seul rendement. Ensuite, il suffit de prendre le percentile p d'un sous-ensemble de rendements et l'appliquer à la valeur initiale du portefeuille pour obtenir une estimation de la VaR d'ordre p de ce sous-ensemble.

Soit un portefeuille de risques de dimension d , détenu sur un horizon défini et représenté par un vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_d)$. Nous possédons un historique de longueur T de la valeur des actifs. Nous pouvons en déduire les rendements de l'actif i du portefeuille de risque X à l'instant t :

$$r_i(t) = \frac{X_i(t) - X_i(t-1)}{X_i(t-1)} \text{ avec } i = 1, \dots, d \text{ et } t = 0, \dots, T - 1$$

Sur base de ces rendements, il est possible d'estimer la distribution future d'un actif i :
 $X_i(t + 1) = X_i(t)(1 + r_i(t))$.

Ensuite, il suffit de prendre le percentile p de cette distribution pour obtenir la $\text{VaR}[X_i ; p]$ désirée. Concrètement, si l'on possède un historique de 1000 observations du rendement journalier d'un actif X , la $\text{VaR}[X ; 0,99]$ sera le dixième plus mauvais rendement des 1000 observations.

Les principaux avantages de la méthode par simulation historique sont:

- Elle ne requière aucune hypothèse de distribution des rendements
- Simplicité d'utilisation

Les principaux inconvénients de cette méthode sont :

- Dépend de la disponibilité et de la qualité des données.
- Repose sur une fenêtre mobile pouvant omettre certains mouvements de marché.
- La fonction de distribution empirique est une fonction en escaliers, ce qui peut poser des problèmes de précisions dans les queues de distributions.

Méthodologie

Dès lors, pour obtenir la VaR du portefeuille X comprenant les actifs X_1, \dots, X_d , il faut tout d'abord obtenir l'historique de chacun des actifs sur la même période de temps. Notons qu'il est important que les historiques de chaque actif soient pris aux mêmes périodes de temps de sorte à prendre en compte les corrélations éventuelles entre actifs et autres dépendances avec des indicateurs économiques ou autres facteurs de risques. Sur base de cet historique, il faut calculer le rendement propre à chaque actif sur chaque période et le pondérer en concordance avec la pondération du portefeuille actuel. Nous obtenons de cette façon la distribution du portefeuille :

$$X(t + 1) = \sum_{i=1}^d w_i X_i(t)(1 + r_i(t)) \text{ avec } i = 1, \dots, d \text{ et } t = 0, \dots, T - 1$$

Où $X_i(t)$ est la valeur de l'actif i au temps t , $r_i(t)$ le rendement de l'actif i au temps t et w_i le poids de l'actif i dans le portefeuille X au temps t .

Ensuite, comme décrit précédemment, il ne reste qu'à prendre le percentile p de cette distribution pour obtenir la $\text{VaR}[X ; p]$ désirée. Dans le cas où le quantile recherché se trouve entre deux valeurs observées, la VaR est estimée en faisant une moyenne pondérée des deux valeurs d'actifs entourant le quantile recherché.

Méthode semi-paramétrique

Théorie des Valeurs Extrêmes

Fondements Théoriques

Comme souligné précédemment, l'un des inconvénients de la simulation historique est qu'elle repose sur un historique de données. En cas d'absence de données suffisantes, comme dans le cas d'une action d'entreprise récemment entrée en bourse, il sera impossible d'avoir une distribution de rendements tenant en compte de certains événements extrêmes (crises financières et autres). Dès lors, la VaR par simulation historique sera sans doute sous-estimée et ne sera pas représentative du risque de l'actif. De plus, comme la distribution obtenue par simulation historique est une fonction discrète, autrement dit en escalier, les estimations de VaR dans les queues de distribution pourraient être biaisées. C'est pourquoi il est primordial de quantifier ces événements extrêmes et leurs conséquences de façon statistique.

Une solution à ce problème a été proposée par la Théorie des Valeurs Extrêmes (EVT : Extreme Value Theory) décrite ci-dessous.

Soient les pertes d'un actif financier quelconque exprimées en valeurs absolue :

X_1, X_2, \dots, X_n iid possédant une fonction de distribution F .

Ces pertes sont des variables aléatoires identiquement distribuées et ne représentent qu'un côté de la distribution. L'EVT s'intéresse aux variables aléatoires extrêmes :

$$X_{n,n} = \min(X_1, \dots, X_n), X_{1,n} = \max(X_1, \dots, X_n)$$

Pouvant également s'écrire selon l'ordre statistique :

$$X_{n,n} \leq X_{n-1,n} \leq \dots \leq X_{1,n}$$

D'après le théorème de Gnedenko, Fisher-Trippett qui suppose également que s'il existe des constantes positives (a_n) , (b_n) et une fonction de distribution G telles que :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\frac{X_{1,n} - b_n}{a_n} \leq x\right) = G(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

Alors, G est une fonction de distribution des valeurs extrêmes de l'un des trois types suivants :

- Type I (Fréchet) :

$$\Phi_{\alpha}(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ \exp(-x^{-\alpha}), & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0$$

- Type II (Weibull) :

$$\Psi_{\alpha}(x) = \begin{cases} \exp(-(-x)^{\alpha}), & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases} \quad \alpha > 0$$

- Type III (Gumbel) :

$$\Lambda(x) = \exp(-e^{-x}), \quad x \in \mathbb{R}$$

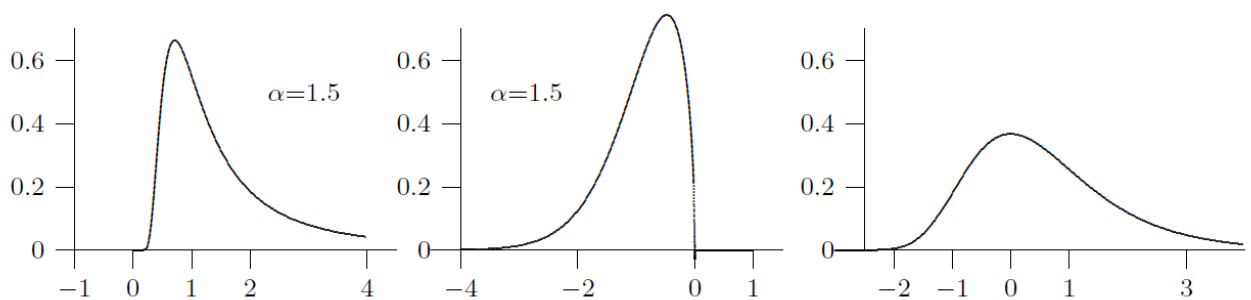


Figure 2 - Fonctions de densité de Fréchet, Weibull et Gumbel

Nous pouvons observer que la distribution de Fréchet est bornée sur sa partie inférieure et possède une queue de distribution décroissante et épaisse, ce qui fait d'elle la candidate idéale en vue d'évaluer le risque d'actifs financiers. La distribution de Gumbel est caractérisée par une partie supérieure de distribution bornée ainsi qu'une queue de distribution décroissante fine. La distribution Weibull est la seule distribution ne possédant pas de bornes sur ses queues de distribution.

Alternativement, Il existe une représentation généralisée des fonctions de distribution des valeurs extrêmes, appelée G.E.V. (« Generalized Extreme Value »), dont la fonction de distribution est :

$$G(x) = \begin{cases} \exp\left(-\left(1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma}\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right), & 1 + \xi \frac{x - \mu}{\sigma} > 0, \xi \neq 0 \\ \exp\left(-\exp\left(-\frac{x - \mu}{\sigma}\right)\right), & \xi = 0 \end{cases}$$

La valeur du paramètre de forme ξ nous permet de retrouver les trois types énoncés précédemment.

- Si $\xi = 0$, nous obtenons une fonction de distribution de type Gumbell.
- Si $\xi < 0$, nous obtenons une fonction de distribution de type Weibull.
- Si $\xi > 0$, nous obtenons une fonction de distribution de type Fréchet.

La représentation généralisée est particulièrement utile pour estimer les paramètres de distribution de l'échantillon de valeurs extrêmes par maximum de vraisemblance. En effet, on ne connaît généralement pas ces paramètres à l'avance, la forme généralisée est donc particulièrement utile dans ce cas.

Méthodologie

Concrètement, pour obtenir le percentile x_p d'ordre p , nous utilisons la représentation généralisée : $x_p = G^{-1}(p)$

Pour estimer les paramètres de la distribution nous utilisons la méthode du maximum de vraisemblance.

Ensuite, en substituant les paramètres ξ, μ et σ par leurs estimations $\hat{\xi}, \hat{\mu}$ et $\hat{\sigma}$ nous obtenons :

$$\text{VaR}[X; p] = x_p = \begin{cases} \hat{\mu} - \frac{\hat{\sigma}}{\hat{\xi}} (1 - (-\log(p))^{-\hat{\xi}}), & \hat{\xi} \neq 0 \\ \hat{\mu} - \hat{\sigma} \log(-\log(p)), & \hat{\xi} = 0 \end{cases}$$

Peak Over Thresholds

Fondements Théoriques

Il existe une méthode alternative à la GEV appelée « Peak Over Thresholds » (POT). Cette méthode trouve ses origines dans la Théorie des Valeurs Extrêmes et consiste à modéliser la queue de la distribution historique au-dessus d'un certain point. La méthode POT affirme qu'au-dessus d'un certain seuil suffisamment loin dans la queue de distribution, la distribution des valeurs qui excèdent ce seuil converge vers une distribution de Pareto Généralisée (GPD).

Tout d'abord, il convient de définir la fonction de distribution des excès. Soit la fonction de distribution F d'une valeur aléatoire X . Nous cherchons à estimer la fonction de distribution F_s des valeurs de x au-dessus d'un certain seuil s .

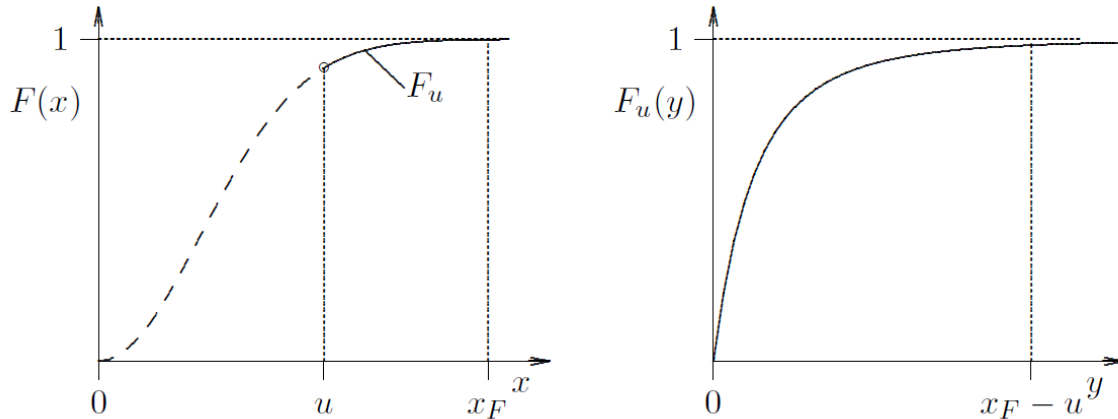


Figure 3 - Fonction de distribution F et fonction de distribution conditionnelle au dessus du seuil u

La fonction F_s est appelée fonction de distribution des excès et est définie comme

$$F_s(y) = P(X - s \leq y | X > s), \quad 0 \leq y \leq x_F - s$$

Où X est la variable aléatoire, s le seuil donné, $y = x - s$ sont les excès et $x_F \leq \infty$ est la borne supérieure de F . Nous pouvons réécrire F_s en fonction de F :

$$F_s(y) = \frac{F(s + y) - F(s)}{1 - F(s)} = \frac{F(x) - F(s)}{1 - F(s)}$$

Équation 1

Pour estimer F entre 0 et s , nous utilisons les données historiques que nous pouvons qualifier de suffisamment fiables car suffisamment abondantes. Cependant, le nombre d'observations supérieures au seuil s , correspondant à F_s , ne sont pas disponibles en quantité suffisante et ne permettent pas de faire une estimation fiable de la queue de distribution. Pour contourner ce problème, nous allons utiliser l'EVT et plus particulièrement le théorème de Balkema & de Haan (1974) et Pickands (1975) énonçant que pour une grande classe de fonctions de distribution sous-jacente F , la distribution conditionnelle des excès F_s , pour s suffisamment grand, est bien approximée par :

$$F_s(y) \approx G_{\xi, \sigma}(y), \quad s \rightarrow \infty,$$

$$\text{Où } G_{\xi, \sigma}(y) = \begin{cases} 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}y\right)^{-\frac{1}{\xi}}, & \xi \neq 0 \\ 1 - e^{-\frac{y}{\sigma}}, & \xi = 0 \end{cases}$$

Pour $y \in [0, (x_F - s)]$ si $\xi \geq 0$ et $y \in \left[0, -\frac{\sigma}{\xi}\right]$ si $\xi < 0$. La fonction $G_{\xi, \sigma}$ est une fonction de distribution de Pareto Généralisée de paramètre d'échelle σ et de paramètre de forme ξ (GPD(ξ, σ)).

Méthodologie

La première étape pour appliquer cette méthode est de déterminer le seuil s à partir duquel la loi de Pareto Généralisée prendra la place de la distribution basée sur les données historiques. Pour ce faire, nous utilisons la « Mean Excess Function » (MEF) qui est définie comme étant la moyenne des excédents au seuil s :

$$e(s) = E(X - s | X > s)$$

Où X est la variable aléatoire, s le seuil donné.

L'estimateur empirique de la MEF pour une série de n rendements (pertes) historiques X_1, X_2, \dots, X_n dont k sont supérieurs au seuil s est : $\widehat{e}_n(s) = \frac{\sum_{i=1}^k (X_i - s)_+}{k}$

Comme l'espérance d'une loi GPD (ξ, σ) est égale à : $\frac{\sigma + \xi s}{1 - \xi}$

Nous choisissons le seuil s tel que $\widehat{e}_n(x) = \frac{\sum_{i=1}^k (X_i - s)_+}{k} = \frac{\sigma + \xi s}{1 - \xi}$

Concrètement, nous allons faire la représentation graphique de la MEF, appelé graphe de Hill, et choisir comme seuil s de sorte que $\widehat{e}_n(x)$ soit approximativement linéaire pour $x > s$.

Dans la partie pratique, nous n'utiliserons pas cette méthode graphique car elle est très compliquée à appliquer sur l'ensemble des scénarios aléatoires générés. Dès lors, nous choisissons le seuil de 0,9, seuil à partir duquel nous ferons nos analyses.

Ensuite, les paramètres de la GDP, ξ et σ , seront estimés par la méthode de maximum de vraisemblance appliquée à la fonction : $G_{\xi, \sigma}(y) = 1 - \left(1 + \frac{\xi}{\sigma}y\right)^{-\frac{1}{\xi}}$

Une fois ces paramètres estimés, nous utilisons l'équation 1 et réécrivons :

$$F(x) = F(s) + F_s(y)(1 - F(s))$$

En remplaçant, F_s par la GDP et $F(s)$ par le seuil estimé, nous obtenons la distribution de queue suivante :

$$\widehat{F}(x) = \widehat{F}(s) + \left(1 - \left(1 + \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\xi}}(x - s)\right)^{-\frac{1}{\xi}}\right)(1 - \widehat{F}(s))$$

Pour obtenir la VaR pour une perte supérieure au seuil s , il nous suffit d'inverser la fonction de distribution de queue obtenue précédemment :

$$\text{VaR}[X; p] = s + \frac{\widehat{\sigma}}{\widehat{\xi}} \left(\left(1 - \frac{\widehat{F}(x) - \widehat{F}(s)}{1 - \widehat{F}(s)}\right)^{-\xi} - 1 \right), \forall p > \widehat{F}(s)$$

Pour une perte inférieure au seuil s , il nous suffira donc d'appliquer la méthode de la simulation historique pour obtenir la VaR.

Méthodes d'estimation paramétriques

Les méthodes d'estimation paramétriques sont les méthodes pour lesquelles il est nécessaire de faire des hypothèses sur la distribution des rendements. La première étape consiste à choisir une loi de distribution adéquate et à en estimer les paramètres. Il faut ensuite inverser la fonction de distribution obtenue et prendre le quantile de sorte que $\text{VaR}[X; p] = F_X^{-1}(p)$.

Méthode Variance-Covariance avec approche par moyenne mobile équi pondérée

Fondements Théoriques

La Méthode Variance-Covariance (VCM) est une méthode paramétrique qui détermine la VaR directement en fonction de la volatilité des rendements du portefeuille. Cette volatilité peut être calculée selon différentes méthodes. L'approche par moyenne mobile équi pondérée se base sur une plage de donnée fixe dans laquelle chaque valeur, quelle que soit son

ancienneté, a le même poids dans le calcul de la volatilité. L'écart-type par l'approche de la moyenne mobile équipondérée pour un actif i à l'instant t se calcule comme suit:

$$\sigma_{it} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_t - \bar{r})^2}$$

Où T est le nombre de jours inclus dans la moyenne mobile (période d'observation ou nombre de rendement observés), r_t le rendement observé au moment t , et \bar{r} le rendement moyen de l'actif i sur la période d'observation.

Généralement, les VCM font l'hypothèse que les rendements suivent une loi Normale. En effet, la loi Normale présente certaines caractéristiques attrayantes bien que ses queues de distribution semblent trop fines pour expliquer le rendement de certains actifs financiers. Tout d'abord, les paramètres de la loi Normale sont relativement simples à estimer. Ensuite, le fait que les lois sont additives, c'est-à-dire que la somme de lois Normales donne une loi Normale, peut s'avérer utile dans le cas d'un calcul de VaR sur plusieurs jours sur base de VaR quotidiennes.

Méthodologie

Pour estimer la VaR en utilisant VCM, il faut commencer par calculer la volatilité du

portefeuille :
$$\sigma = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n w_i w_j \sigma_{ij}}$$

Où w_i et w_j sont les poids alloués aux actifs i et j et où σ_{ij} est la covariance de leur rendement.

Pour obtenir la volatilité du portefeuille, il est nécessaire de calculer la covariance entre les actifs. L'estimateur de covariance équipondéré pour les séries de rendements des actifs i et j

est :
$$\sigma_{ij} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{it} - \bar{r}_i)(r_{jt} - \bar{r}_j)$$

Où T est le nombre de jours inclus dans la moyenne mobile (période d'observation ou nombre de rendement observés), r_{it} le rendement observé au moment t sur l'actif i , et \bar{r}_i (\bar{r}_j) le rendement moyen de l'actif i (j) sur la période d'observation.

Ensuite, en faisant l'hypothèse que les rendements sont indépendants et identiquement Normalement distribués : $r_i(t) \sim N(\mu, \sigma^2)$

La VaR s'obtient : $\text{VaR}[X ; p] = -W_0(e^{\mu+\sigma\Phi^{-1}(p)} - 1)$

Où W_0 est la valeur initiale du portefeuille et Φ la fonction de distribution de la loi Normale.

Méthode Variance-Covariance avec approche par moyenne mobile exponentiellement pondérée

Fondements Théoriques

En opposition à la méthode par moyenne mobile équipondérée, la méthode utilisant une moyenne mobile exponentiellement pondérée pour calculer la volatilité alloue une importance différente aux données prises en compte pour le calcul. Dans ce modèle, au plus l'observation est récente, au plus on lui donne un poids important. Cette approche permet donc d'avoir une volatilité plus réactive aux chocs de marché car les données récentes ont une pondération plus importante. Ensuite, cette méthode permet une réduction progressive de la volatilité au fur et à mesure que le choc est éloigné dans le temps. En effet, dans la méthode équipondérée, l'effet causé par un choc sur la volatilité restera constant durant toute la période d'observation et disparaîtra brusquement une fois sorti de cette période.

Le calcul de l'écart-type par l'approche de la moyenne mobile exponentiellement pondérée pour un actif i à l'instant t est:

$$\sigma_{it} = \sqrt{(1 - \lambda) \sum_{t=1}^{t-T1} \lambda^{t-1} (r_t - \bar{r})^2}, \quad 0 < \lambda < 1$$

Où T est le nombre de rendement observés, r_t le rendement observé au moment t , et \bar{r} le rendement moyen de l'actif i sur la période d'observation, et le paramètre λ , appelé facteur de décroissance, détermine la cadence à laquelle le poids sur les observations passées diminue au plus elles sont éloignées dans le temps.

L'équation de l'écart-type peut être réécrite comme étant fonction de la volatilité passée :

$$\sigma_{it} = \sqrt{\lambda \sigma_{it-1}^2 + (1 - \lambda)(r_{t-1} - \bar{r})^2}$$

Équation 2

Cette équation de la volatilité par moyenne mobile exponentiellement pondérée est en fait équivalente à un processus IGARCH(1,1) (Integrated Generalized Autoregressive Conditionally Heteroscedastic).

Méthodologie

Comme décrit par JP Morgan (1996), la première étape en vue d'utiliser l'approche par moyenne mobile exponentiellement pondérée est d'estimer le facteur de décroissance λ . Pour cela, nous commençons par introduire la matrice des variances-covariance Σ pour des séries de rendements des actifs i et j par exemple, notées r_{it} et r_{jt} :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \sigma_i^2(\lambda_1) & \sigma_{ij}(\lambda_3) \\ \sigma_{ji}(\lambda_3) & \sigma_j^2(\lambda_2) \end{bmatrix}$$

Chaque composant de la matrice est fonction d'un facteur de décroissance λ_1, λ_2 ou λ_3 . De plus, la matrice des variances-covariances doit satisfaire trois conditions :

Les variances σ_i^2 et σ_j^2 ne peuvent pas être négatives

Les covariances σ_{ij} et σ_{ji} doivent être égales.

La corrélation entre r_{it} et r_{jt} doit être comprise entre -1 et 1.

Si ces conditions sont remplies, les valeurs des facteurs λ_1, λ_2 ou λ_3 peuvent être obtenues en minimisant l'erreur quadratique moyenne RMSE (Root Mean Squared Error). L'équation à minimiser pour obtenir les facteurs de décroissance liés à la variance est :

$$\text{RMSE}_v = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{t+1}^2 - \hat{\sigma}_{t+1|t}^2(\lambda))^2}$$

Où r_{t+1} est le rendement attendu en $t + 1$ et $\hat{\sigma}_{t+1|t}^2$ la prévision de la variance des rendements en $t + 1$.

Similairement, pour obtenir les facteurs de décroissance liés à la covariance, il faut minimiser l'équation d'erreur quadratique moyenne :

$$\text{RMSE}_c = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (r_{it+1} r_{jt+1} - \hat{\sigma}_{ij,t+1|t}(\lambda))^2}$$

Où r_{it+1} et r_{jt+1} sont les rendements attendus en $t + 1$ pour les actifs i et j et $\hat{\sigma}_{ij,t+1|t}$ la prévision de la covariance des rendements en $t + 1$.

Une fois les facteurs de décroissance obtenus, nous pouvons aisément calculer les écarts-types via l'équation 2.

Ensuite, comme pour la méthode par moyenne mobile équipondérée, nous faisons l'hypothèse que les rendements sont indépendants et identiquement Normalement distribués : $r_i(t) \sim N(\mu, \sigma^2)$

La VaR s'obtient : $\text{VaR}[X ; p] = -W_0(e^{\mu + \sigma\Phi^{-1}(p)} - 1)$

Où W_0 est la valeur initiale du portefeuille et Φ la fonction de distribution de la loi Normale.

Méthode de Monte Carlo

Fondements Théoriques

La méthode de simulation de Monte Carlo consiste à générer des scénarios aléatoires de l'évolution d'actifs sur base de la volatilité et de la corrélation. Pour générer les scénarios aléatoires, nous faisons l'hypothèse que la valeur des actifs du portefeuille à un instant t suit une loi log-Normale :

$$P_t = P_0 e^{((\mu - 0.5\sigma^2) + z\sigma\sqrt{t})}$$

Équation 3

Où P_0 est la valeur initiale de l'actif, μ est la tendance de l'actif, σ la volatilité de l'actif et z une variable aléatoire suivant une loi Normale $(0,1)$.

Dans le cas où les n actifs à simuler ne sont pas corrélés, la solution est assez simple. Il suffit de générer n variables aléatoires à l'aide d'une loi Normale et d'utiliser l'équation 3 pour obtenir nos n scénarios. Cependant, pour générer des actifs corrélés la solution est un peu plus ardue et requière d'introduire la factorisation de Cholesky.

- Factorisation de Cholesky

L'objectif est de générer n valeurs corrélées de x qui ont une structure de corrélation tel que $V(x) = E(xx') = \Sigma$. Par exemple pour deux actifs i et j , nous avons :

$$V(x) = \begin{bmatrix} \sigma^2(x_i) & \text{cov}(x_i, x_j) \\ \text{cov}(x_j, x_i) & \sigma^2(x_j) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} = \Sigma$$

Comme la matrice Σ est une matrice réelle symétrique, elle peut être décomposée en facteurs de Cholesky : $Z = TT'$

Où T est une matrice triangulaire inférieure avec des valeurs nulles au-dessus de la diagonale.

Méthodologie

Premièrement, nous générons un vecteur z composé de variables aléatoires indépendantes suivant une loi Normale $(0,1)$. Comme les variables générées sont indépendantes, la matrice des variances-covariances est égale à la matrice identité : $V(z) = I$

Ensuite, nous construisons les variables corrélées $x = Tz$. Cette transformation nous permet de réécrire la matrice des variances covariances et d'obtenir les variables x avec la corrélation souhaitée :

$$V(x) = E(xx') = E((Tz)(Tz)') = E(Tzz'T') = TE(zz')T' = TV(z)T' = TIT' = TT' = \Sigma$$

Appliquons cette méthode dans le but de simuler deux actifs corrélés. Nous commençons par décomposer la matrice des corrélations, avec la corrélation souhaitée ρ entre les deux actifs, en utilisant la factorisation de Cholesky :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} = TT' = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{11}a_{21} \\ a_{21}a_{11} & a_{21}^2 + a_{22}^2 \end{bmatrix}$$

Pour trouver a_{11} , a_{21} , a_{22} , nous résolvons et substituons comme suit :

$$\begin{cases} a_{11}^2 = 1 \\ a_{11}a_{21} = \rho \\ a_{21}^2 + a_{22}^2 = 1 \end{cases}$$

Nous obtenons la factorisation de Cholesky suivante :

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{(1-\rho^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ 0 & \sqrt{(1-\rho^2)} \end{bmatrix}$$

Celle-ci nous permet d'obtenir deux variables corrélées, x_1 et x_2 , sur base des variables générées aléatoirement, z_1 et z_2 , en résolvant :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \rho & \sqrt{(1 - \rho^2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix}$$

Nous remplaçons x_1 et x_2 dans l'équation 3 et obtenons un scénario de prix pour les deux actifs en t . Nous recommençons de sorte à avoir un nombre suffisamment élevé de scénarios et nous prenons le percentile p de cette distribution créée pour obtenir la $\text{VaR}[X ; p]$ désirée. Dans le cas où le quantile recherché se trouve entre deux valeurs observées, la VaR est estimée en faisant une moyenne pondérée des deux valeurs d'actifs entourant le quantile recherché.

Chapitre 3 Copules

Introduction

L'objectif de cette section est d'introduire la théorie des copules, présenter les fonctions que nous utiliserons dans la partie pratique ainsi que la méthodologie appliquée afin d'obtenir la VaR. Ce chapitre provient en grande partie d'un précédent travail (Bakolas & Lefebvre, 2017), intitulé. « Corrélation et modélisation des dépendances pour le calcul du SCR du risque de primes et de réserve. », portant sur l'impact des méthodes copules dans le contexte du calcul de capital de solvabilité requis en assurance.

Il est important de s'intéresser et de comprendre les méthodes utilisant les copules car celles-ci possèdent la particularité de se baser sur les distributions marginales des actifs du portefeuille, pouvant avoir des comportements différents, à l'inverse des méthodes traditionnelles.

Le tau de Kendall

Nous commençons ce chapitre par introduire le tau de Kendall. Il nous est important d'introduire cette notion car elle occupera un rôle clé dans la calibration de nos fonctions copules et donc, dans la détermination de la VaR.

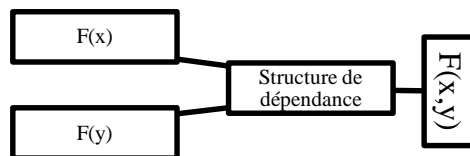
Comme défini dans Bakolas & Lefebvre (2017) : « Le tau de Kendall mesure la tendance de deux variables aléatoires à bouger dans la même direction. Le tau de Kendall associé à deux variables aléatoires X et Y et à un vecteur aléatoire (X', Y') identique à (X, Y) est défini comme suit :

$$\tau(X, Y) = P[(X - X')(Y - Y') > 0] - P[(X - X')(Y - Y') < 0]$$

Il s'agit de la probabilité que les deux vecteurs (X, Y) et (X', Y') soient concordants, c'est-à-dire que $(X - X')(Y - Y') > 0$ moins la probabilité qu'ils soient discordants, c'est-à-dire que $(X - X')(Y - Y') < 0$. Un $\tau = 1/3$ signifie que les vecteurs (X, Y) et (X', Y') ont une probabilité deux fois plus élevée d'être concordants que discordants ».

Copules

La dépendance entre variables aléatoires peut être représentée par une copule ; il s'agit d'une fonction qui lie des fonctions de répartition marginales en vue de générer une loi jointe. L'idée sous-jacente est que les variables aléatoires se comportent selon leur loi marginale quand elles sont « seules » mais lorsqu'elles sont « ensemble », elles se comportent selon la fonction de répartition jointe modélisée par la copule. L'avantage des copules est qu'elles permettent de relier des marginales suivant des lois différentes.



Définition

Une copule est une fonction de répartition multivariée dont les marginales sont uniformes sur $[0,1]$:

$$C(u_1, \dots, u_n) = P[U_1 \leq u_1, \dots, U_n \leq u_n]$$

Propriétés

Une copule bidimensionnelle possède les propriétés suivantes :

son domaine de définition est I^2 avec $I=[0,1]$

elle est bornée et 2-croissante, ce qui signifie que pour tout quadruplet $(x_1, x_2, y_1, y_2) \in I^4$ tel que $x_1 \leq x_2$ et $y_1 \leq y_2$:

$$C(x_2, y_2) - C(x_2, y_1) - C(x_1, y_2) + C(x_1, y_1) \geq 0$$

pour tout $u \in I$ et $v \in I$, $C(u, 1) = u$ et $C(1, v) = v$

Toute copule C est bornée positivement et négativement ; ces bornes sont appelées bornes de Fréchet :

$$\max(u + v - 1; 0) \leq C(u, v) \leq \min(u, v)$$

La fonction de densité d'une copule bivariée comme suit :

$$c(u, v) = \frac{\partial^2 C(u, v)}{\partial u \partial v}$$

Théorème de Sklar

Le théorème de Sklar est un théorème fondamental dans la théorie des copules : il stipule que peu importe les marginales, il est toujours possible de les relier entre elles au moyen d'une copule.

Soit $F(u, v)$, une distribution jointe de n -dimensions avec F_1, \dots, F_n , ses marginales continues. Il existe alors une copule C unique telle que $F(x_1, \dots, x_n) = C(F_1(x_1), \dots, F_n(x_n))$, où $(x_1, \dots, x_n) \in \text{Dom } F_1 * \dots * F_n$

Familles de copules

Il existe plusieurs familles de copules présentant chacune une structure de dépendance qui leur est propre (entre les valeurs extrêmes, dépendance positive/négative, dépendance de queue etc). Cette section détaille deux familles importantes : les copules elliptiques, qui s'appliquent à des distributions symétriques ainsi que les copules archimédiennes.

Les Copules elliptiques

Une copule elliptique est une copule qui relie des distributions marginales elliptiques. Soit F , la fonction de distribution cumulée multivariée d'une distribution elliptique et soit F_1, \dots, F_n ses marginales et $F_1^{-1}, \dots, F_n^{-1}$ ses fonctions inverses (fonctions quantiles) ; la copule elliptique C déterminée par F est définie par :

$$C(x_1, \dots, x_n) = F(F_1^{-1}(u_1), \dots, F_n^{-1}(u_n))$$

Ces copules sont davantage utilisées par les banques que par les assurances car elles sont appliquées à des distributions symétriques, ce qui est peu souvent le cas en assurance.

La Copule de Student

La copule de Student bivariée est une copule elliptique de dimension 2 définie comme suit :

$$C_{\rho, \nu} = (u, v) = \int_{-\infty}^{t_{\bar{v}}^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_{\bar{v}}^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ 1 + \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{\nu(1-\rho^2)} \right\}^{-\frac{\nu+2}{2}}$$

où t^{-1} est la fonction inverse d'une Student, ν le nombre de degrés de liberté et ρ le coefficient de corrélation linéaire.

La fonction de densité de la copule de Student de dimension n est :

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{f_{\nu, \Sigma}(t_{\nu}^{-1}(u_1), \dots, t_{\nu}^{-1}(u_n))}{\prod_{i=1}^n f_{\nu}(t_{\nu}^{-1}(u_i))}$$

Avec $f_{\nu, \Sigma}$ la densité de la loi de Student de degré de liberté ν et de matrice de corrélation Σ , f_{ν} la densité de loi de Student uni-variée et t_{ν}^{-1} l'inverse de la distribution de la loi de Student de degré de liberté ν .

Plus le degré de liberté est proche de 1, plus les variables jointes par la copule auront tendance à prendre des valeurs extrêmes en même temps.

Le lien entre le paramètre ρ de la copule de student et le tau de Kendall est donné par :

$$\rho(X, Y) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)$$

Le dépendogramme est un outil qui permet de représenter graphiquement la structure de dépendance à partir d'un nuage de points dont les marges sont uniformes. Le dépendogramme suivant illustre la structure de dépendance induite par une copule de student :

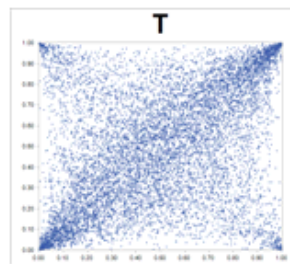


Figure 4 - Dépendogramme d'une copule de student

La Copule Gaussienne

La copule normale ou gaussienne bivariée est une copule elliptique de dimension 2 dont la fonction de distribution est donnée par :

$$C_\rho(u, v) = \Phi_\Sigma(\Phi^{-1}(u) + \Phi^{-1}(v))$$

$$= \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dx dy$$

Où Φ_Σ est la fonction de répartition de la loi normale dont la matrice variance covariance est la matrice de corrélation Σ , Φ^{-1} est l'inverse d'une Normale Standard et ρ le coefficient de corrélation linéaire.

La fonction de densité de la copule Gaussienne de dimension n est :

$$c(u_1, \dots, u_n) = \frac{e^{(-\frac{1}{2} \gamma(\Sigma^{-1} - I_n)\gamma')}}{\det(\Sigma)^{0.5}}$$

Avec $\gamma = (\Phi^{-1}(u_1) + \dots + \Phi^{-1}(u_n))$ et I la matrice unitaire.

Notons que contrairement à la copule de Student, la copule gaussienne n'est pas adaptée à la modélisation de risque pouvant prendre des valeurs extrêmes car les événements extrêmes des variables jointes par ce type de copule sont considérés comme indépendants. Elle est un cas particulier de la copule de Student avec un degré de liberté est égal à l'infini.

Le lien entre le tau de Kendall et le paramètre ρ est identique à celui de la copule de Student.

Le dépendogramme d'une telle copule est le suivant :

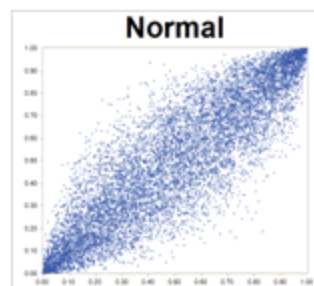


Figure 5 - Dépendogramme d'une copule gaussienne

Tableau récapitulatif

	Student	Normal
Equation	$C_{\rho,v} = (u, v) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \left\{ 1 + \frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{v(1-\rho^2)} \right\}^{-\frac{v+2}{2}}$	$C_{\rho}(u, v) = \phi_{\Sigma}(\phi^{-1}(u) + \phi^{-1}(v)) = \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{\phi^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1-\rho^2)^{\frac{1}{2}}} \exp\left\{-\frac{x^2 - 2\rho xy + y^2}{2(1-\rho^2)}\right\} dx dy$
Paramètre	$\rho(X, Y) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)$	$\rho(X, Y) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)$

Tableau 1 - Copules elliptiques

Les copules archimédiennes

Une copule Archimédienne de dimension n est une fonction C, définie dans I, possédant des valeurs dans [0, ∞] et dont la distribution est donnée par :

$$C(u_1, \dots, u_n) = \phi^{-1}(\phi(u_1) + \dots + \phi(u_n))$$

Où ϕ est la fonction génératrice de la copule.

Cette fonction génératrice est continue, strictement décroissante et convexe définie de [0, 1] dans [0, ∞] tel que $\phi(0) = \infty$ et $\phi(1) = 0$. Le pseudo-inverse (ou inverse généralisée) de la fonction ϕ , noté $\phi^{[-1]}$, est définie de [0, ∞] et possède des valeurs dans [0, 1] tel que :

$$\phi^{[-1]}(t) = \begin{cases} \phi^{-1}(t) & \text{si } 0 \leq t \leq \phi(0) \\ 0 & \text{si } \phi(0) \leq t \leq \infty \end{cases}$$

La fonction $\phi^{[-1]}$ est continue, strictement décroissante sur [0, $\phi(0)$] et non croissante sur [0, ∞]. De plus, $\phi^{[-1]}(\phi(u)) = u$ sur [0, 1] :

$$\phi\left(\phi^{[-1]}(t)\right) = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t \leq \phi(0) \\ \phi(0) & \text{si } \phi(0) \leq t \leq \infty \end{cases} = \min(t, \phi(0))$$

Dans le cas où $\phi(0) = +\infty$, $\phi^{[-1]}(t) = \phi^{-1}(t)$.

En outre, ϕ^{-1} est égale à l'inverse de la transformée de Laplace d'une distribution G définie sur [0, ∞] avec $G(0) = 0$.

Les copules de la famille archimédienne ont l'avantage d'être faciles à construire. Les trois copules archimédiennes les plus connues sont la copule de Clayton, la copule de Gumbel et la copule de Frank.

La Copule de Clayton

La copule de Clayton est une copule archimédienne asymétrique dont la fonction génératrice s'écrit :

$$\phi(t) = \frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1)$$

Avec $\theta > -1$ et $\theta \neq 0$, qui exprime le degré de liaison entre les variables aléatoires. Au plus ce paramètre est élevé, au plus fortement les variables sont liées. Lorsque il est nul, la copule est indépendante ; lorsque avec $\theta = +\infty$, la copule est monotone.

La copule bivariée de Clayton est dès lors donnée par :

$$C(u, v) = (x_1^{-\theta} + x_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$$

Le lien entre le tau de Kendal et le paramètre θ de la copule est :

$$\theta = \frac{2\tau}{1 - \tau}$$

La copule de Clayton est une copule asymétrique qui montre une plus grande dépendance dans les queues négatives que dans les positives. Elle sert à étudier les risques corrélés car elle tient compte des dépendances des queues inférieures. Elle possède en effet une queue épaisse à gauche ($\lambda_{\text{lower}} = 2^{-1/\theta} > 0$) mais ne possède pas de queue à droite ($\lambda_{\text{lower}} = 0$) comme le montre son dépendogramme :

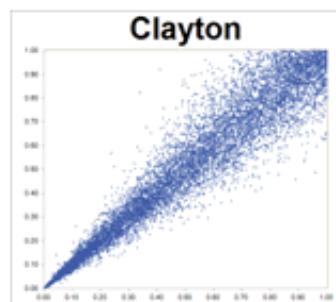


Figure 6 - Dépendogramme d'une copule de Clayton

La Copule de Gumbel

La copule de Gumbel est une copule archimédienne asymétrique dont la fonction génératrice s'écrit :

$$\phi(t) = (-\ln t)^\theta$$

Avec $\theta \geq 1$. Plus θ est petit, moins les marginales sont dépendantes. Lorsque $\theta = 1$, cela signifie une indépendance parfaite entre les marginales. La copule est par contre comotone lorsque $\theta = +\infty$. Notons qu'elle n'est pas applicable pour les dépendances négatives.

Le lien entre le tau de Kendal et le paramètre θ de la copule est :

$$\theta = \frac{1}{1 - \tau}$$

La copule de Gumbel bivariée est donc définie comme suit :

$$C(u, v) = \exp\left(-\left((-\ln(u))^\theta + (-\ln(v))^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)$$

La copule de Gumbel est principalement utilisée modéliser les dépendances asymétriques, principalement en cas de faibles dépendances dans les queues inférieures ($\lambda_{\text{lower}} = 0$) et fortes dépendances dans les queues supérieures ($\lambda_{\text{upper}} = 2 - 2^{\frac{1}{\theta}} > 0$). Elle permet donc de modéliser les événements d'intensité élevée ayant un impact sur la dépendance entre les risques. Son dépendogramme se présente comme suit :

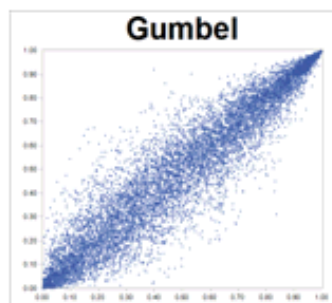


Figure 7 - Dépendogramme d'une copule de Gumbel

Tableau récapitulatif

	Clayton	Gumbel
Génératrice	$\phi(t) = \frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1)$	$\phi(t) = (-\ln t)^\theta$
Equation	$C(u, v) = (x_1^{-\theta} + x_2^{-\theta} - 1)^{-\frac{1}{\theta}}$	$C(u, v) = \exp\left(-\left((-\ln(u))^\theta + (-\ln(v))^\theta\right)^{\frac{1}{\theta}}\right)$
Paramètre	$\theta = \frac{2\tau}{1-\tau}$ avec $\theta > -1 \setminus \{0\}$	$\theta = \frac{1}{1-\tau}$ avec $\theta \geq 1$

Tableau 2 - Copules archimédiennes

Le paramètre θ indique la dépendance entre les variables jointes par la copule. Un θ élevé implique une forte dépendance positive tandis qu'un θ tendant vers sa valeur minimale implique une indépendance entre les variables jointes par la copule.

Méthodologie

Pour obtenir la VaR par la méthode des copules, nous commençons par définir les lois marginales. Nous faisons l'hypothèse que la valeur des actifs du portefeuille suivent des lois Log-Normale dont les paramètres μ_1 et μ_2 sont estimés en prenant l'espérance des logarithmes des rendements

$$\mu_1 = E\left(\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)\right)$$

Où P_t est le prix de l'actif le jour t et P_{t-1} le prix de l'actif le jour précédent.

Les paramètres σ_1 et σ_2 sont eux estimés comme suit

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sum_{t=1}^n (\ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right) - \mu_1)^2}{n - 1}}$$

Avec n le nombre de jours présents dans l'échantillon.

Ensuite nous calculons le taux de corrélation de Kendall et le convertissons en paramètre de copule comme explicité précédemment.

Une fois la copule paramétrée, nous générons 100 000 scénarios pour obtenir la fonction de distribution cumulée de la valeur des deux actifs.

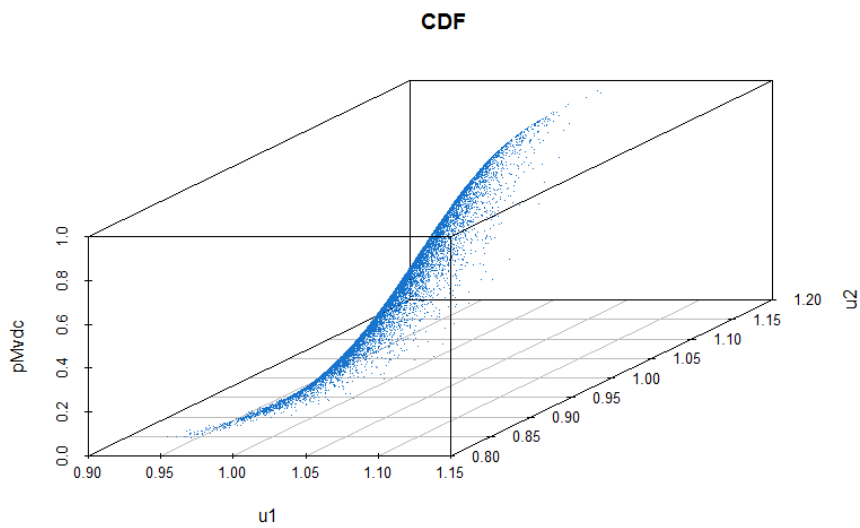


Figure 8 - Distribution cumulée des valeurs des couples d'actifs

En sommant les couples générés nous obtenons la distribution cumulée du portefeuille à laquelle nous enlevons la valeur initial pour obtenir la distribution des pertes et profits. Enfin, nous prenons le quantile désiré de cette distribution des pertes et profits pour obtenir la VaR du portefeuille.

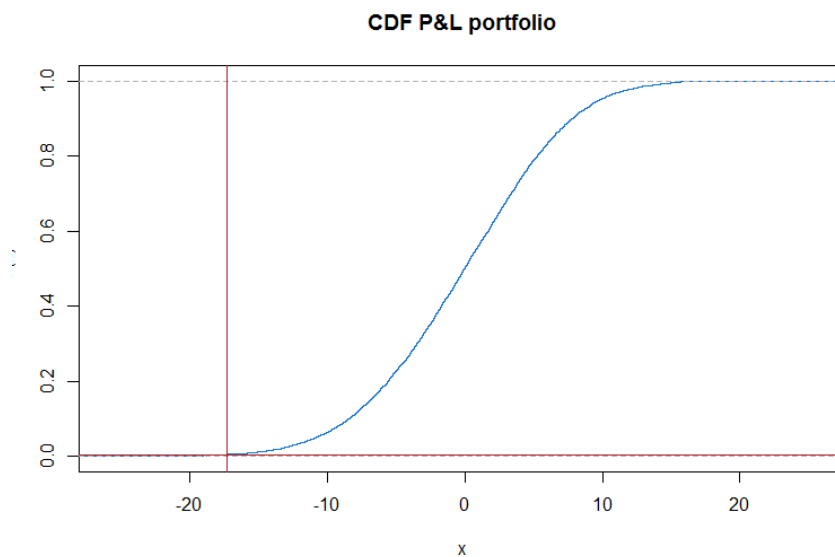


Figure 9 - Distribution cumulée des pertes et profits du portefeuille

Partie 2 : Applications

Chapitre 1 Application sur données simulées

Introduction

Ce chapitre a pour but de comparer les différentes méthodes d'estimation de VaR dans un environnement où les données sont simulées. Cela nous permettra d'évaluer les résultats obtenus sur base de ces différentes méthodes à la VaR réelle.

Au cours de ce chapitre, nous testerons la qualité et sensibilité des estimateurs en fonction de la quantité de données disponibles. Nous évaluerons également les estimateurs selon le niveau de corrélation entre les variables simulées.

Description des données.

Dans ce chapitre, nous utilisons des jeux de données simulées avec le logiciel R. Nous allons simuler les rendements d'un portefeuille composé de deux actifs corrélés équipondérés. Nous simulons les rendements de ces deux actifs dont les rendements et volatilités ont été fixés arbitrairement :

L'actif 1 est supposé donner un rendement de 5% annuellement et possède un écart-type de 30%.

L'actif 2 est supposé donner un rendement de 12% annuellement et possède un écart-type de 80%.

Pour exprimer les rendements de nos actifs sur une période de k jours, nous utilisons les rendements continus définis comme :

$$r_t(k) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-k}}\right)$$

Où P_t est le prix de l'actif à l'instant t et P_{t-k} le prix de l'actif k jours auparavant.

Nous faisons l'hypothèse que ces rendements continus suivent une loi Normale. Nous avons donc que les rendements annuels de l'actif 1 suivent une loi normale de paramètres $\sim N(0,05; 0,3)$ et l'actif 2 $\sim N(0,12; 0,8)$. Nous convertissons ces paramètres pour avoir des lois de rendements journaliers. Pour l'espérance de l'actif 1, en supposant la stationnarité des rendements et pour une année comprenant 255 jours ouvrables :

$$e^{255*\mu_1} = 1,05 \leftrightarrow \mu_1 = \frac{\ln(1,05)}{255} = 0,000191334$$

En procédant de la même manière pour l'actif 2, nous obtenons $\mu_2 = 0,0004444262$.

Ensuite, nous convertissons la volatilité annuelle en volatilité journalière. Nous obtenons pour l'actif 1 :

$$0,3 = \frac{\sigma_1}{\sqrt{255}} \leftrightarrow \sigma_1 = 0,01878673$$

Similairement pour l'actif 2, nous obtenons $\sigma_2 = 0,05009794$.

Nous devons désormais définir la corrélation entre les deux actifs. Dans cette partie, nous testerons différents niveaux de corrélation pour en évaluer l'impact. Nous testerons des niveaux de corrélation allant d'un tau de Kendall de -0,75 à 0,75. Nous choisissons le tau de Kendall comme référence en vue de déterminer les paramètres des copules plus facilement grâce aux relations définies dans la partie précédente. En utilisant la relation entre le tau de Kendall et le coefficient de corrélation linéaire pour une loi Normale bivariée

$$\rho(X, Y) = \sin\left(\frac{\pi}{2}\tau\right)$$

Nous obtenons l'ensemble de corrélations linéaires suivant :

τ	-0,75	-0,5	-0,25	0	0,25	0,5	0,75
ρ	-0,92	-0,71	-0,38	0,00	0,38	0,71	0,92

Tableau 3 - Conversion corrélation Kendall en Pearson

Pour générer nos échantillons de couples (X, Y) aléatoires, nous utilisons une loi Normale bivariée de densité

$$f(X, Y) = \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2\sqrt{1-\rho^2}} e^{-\frac{0,5}{1-\rho^2} \left[\frac{(x-\mu_1)^2}{\sigma_1^2} - 2\rho\frac{(x-\mu_1)(y-\mu_2)}{\sigma_1\sigma_2} + \frac{(y-\mu_2)^2}{\sigma_2^2} \right]}$$

La valeur finale de notre portefeuille, équilibré entre les deux actifs, de valeur initiale 200 sera après un jour:

$$\pi(X, Y) = 200 (0,5 e^X + 0,5 e^Y)$$

Avec $X = \mu_1 + \sigma_1 z$ et $Y = \mu_2 + \sigma_2(\rho z + \sqrt{1 - \rho^2} z^*)$ où z et z^* sont indépendants et identiquement distribués suivant une loi Normale $(0,1)$.

Pour pouvoir calculer la VaR de notre portefeuille, nous devons d'abord trouver la fonction de densité de celui-ci, à savoir la densité d'une somme de variables aléatoire suivant des lois log-Normales.

La densité de notre portefeuille π pour une valeur u est égale à l'ensemble des probabilités de toutes les combinaisons de couples z et z^* donnant la valeur u .

Or, si nous fixons une valeur pour z , il n'existe qu'un seul z^* tel que notre portefeuille vaille u . Nous avons donc que z^* est fonction de z et de u :

$$z^* = \frac{\ln\left(\frac{u - 0,5 e^{\mu_1 + \sigma_1 z}}{0,5}\right) - \mu_2}{\sigma_2} - \rho z$$

Et comme z et z^* sont indépendants et identiquement distribués suivant une loi Normale $(0,1)$, nous trouvons la densité du portefeuille en intégrant :

$$f_\pi(u) = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(z) \varphi(z^*) \frac{dz^*}{du} dz$$

Où $\varphi \sim N(0,1)$.

Ensuite, la fonction de distribution cumulée du portefeuille en v est obtenue en intégrant :

$$F_\pi(v) = \int_{-\infty}^v f_\pi(u) du$$

La VaR du portefeuille pour un niveau de probabilité α , $\text{VaR}[\pi ; \alpha]$, s'obtient en trouvant v° tel que $F_\pi^{-1}(\alpha) = v^\circ$.

Evaluation de la stabilité des estimateurs de VaR

Dans cette section, nous étudions la stabilité des différents estimateurs de VaR. Pour ce faire, nous allons comparer les résultats obtenus en fonction du nombre de données sur lesquelles se base l'estimateur de VaR. Dans chacun des cas, nous générerons 50 scénarios aléatoirement de sorte à pouvoir juger de la stabilité des estimateurs.

Nous allons comparer les VaR obtenues en nous basant sur 50, 100, 255 et 500 données simulées. Nous faisons l'hypothèse que les rendements d'actifs suivent une loi Normale bivariée dont les paramètres ont été définis précédemment et dont la corrélation est de 0,5 (Kendall).

Les tableaux ci-dessous reprennent la moyenne des VaR99,9% à un jour, estimées dans les 50 scénarios pour chaque estimateur, l'écart par rapport à la VaR réelle, la variance des estimations de VaR ainsi que les valeurs minimales et maximales prises par chaque estimateur. Les tableaux similaires calculés pour les VaR90%, VaR99% et VaR99,5% sont disponibles à l'annexe 1.

50 data	Hist	Gev	POT	VC.MA.EQ	VC.EXP	MCS	GUMBEL	CLAYTON	NORMAL	STUDENT
MEAN	13,694	17,817	20,807	18,824	18,593	18,632	17,780	19,474	18,410	19,123
DELTA	-5,042	-0,919	2,071	0,088	-0,142	-0,104	-0,956	0,738	-0,325	0,387
VAR	10,010	7,562	1142,218	3,384	3,355	4,370	3,166	3,453	3,524	3,212
MIN	7,971	10,812	8,316	14,721	14,796	13,838	13,882	14,913	14,274	14,731
MAX	23,688	23,139	245,926	22,760	22,650	23,555	21,554	23,639	22,992	23,123

Tableau 4 - Résultats obtenus sur base de 50 données simulées.

100 data	Hist	Gev	POT	VC.MA.EQ	VC.EXP	MCS	GUMBEL	CLAYTON	NORMAL	STUDENT
MEAN	14,897	17,539	16,367	18,778	18,563	18,410	17,731	19,488	18,377	19,115
DELTA	-3,838	-1,196	-2,369	0,043	-0,173	-0,325	-1,005	0,753	-0,359	0,379
VAR	6,600	4,395	18,722	1,856	1,605	4,324	2,023	1,798	1,848	1,954
MIN	10,528	12,855	10,610	16,444	16,077	14,484	14,889	16,600	15,777	16,234
MAX	24,157	21,271	35,519	22,099	22,219	23,084	21,684	22,348	22,321	22,797

Tableau 5 - Résultats obtenus sur base de 100 données simulées.

255 data	Hist	Gev	POT	VC.MA.EQ	VC.EXP	MCS	GUMBEL	CLAYTON	NORMAL	STUDENT
MEAN	16,705	17,788	17,611	18,963	18,749	18,708	17,974	19,706	18,590	19,330
DELTA	-2,031	-0,948	-1,125	0,227	0,014	-0,028	-0,762	0,970	-0,146	0,595
VAR	4,513	1,257	7,305	0,685	0,685	3,993	1,033	0,950	0,922	0,820
MIN	13,546	15,534	13,635	16,703	16,294	14,436	15,122	17,751	16,126	17,221
MAX	23,639	20,954	26,028	21,083	20,418	24,111	20,681	22,351	20,612	21,330

Tableau 6 - Résultats obtenus sur base de 255 données simulées.

500 data	Hist	Gev	POT	VC.MA.EQ	VC.EXP	MCS	GUMBEL	CLAYTON	NORMAL	STUDENT
MEAN	17,532	17,896	18,099	19,136	18,925	18,893	18,156	19,850	18,775	19,487
DELTA	-1,204	-0,840	-0,636	0,400	0,189	0,157	-0,579	1,115	0,040	0,751
VAR	2,101	0,879	3,500	0,388	0,451	5,874	0,656	0,673	0,679	0,591
MIN	14,455	16,019	14,844	18,037	17,790	13,312	16,395	18,042	17,250	18,021
MAX	21,072	20,053	25,693	20,774	20,185	25,956	19,836	22,297	20,760	21,506

Tableau 7 - Résultats obtenus sur base de 500 données simulées.

Sur base de ces tableaux, nous constatons que les méthodes d'estimation par simulation historique, par la méthode de Monte Carlo ainsi que celles issues la théorie des valeurs extrêmes donnent les résultats les plus volatiles. Ces méthodes sont également les plus sensibles à l'ajout de données supplémentaires. Les méthodes estimant le mieux le quantile réel sont les méthodes Variance-Covariance ainsi que celle liée à la copule de Normale. Ce sont également les méthodes les moins sensibles à l'ajout de données supplémentaires. Cette conclusion est observable pour tous les quantiles estimés et pour tous les cas de données simulées.

Nous pouvons visualiser les résultats obtenus sur base de 500 données simulées grâce au box-plot ci-dessous. Nous observons que la médiane de la copule de Normale est la plus proche de la valeur réelle (ligne discontinue). Les résultats obtenus avec moins de données simulées et pour les VaR90%, VaR99% et VaR99,5% sont disponibles à l'annexe 2.

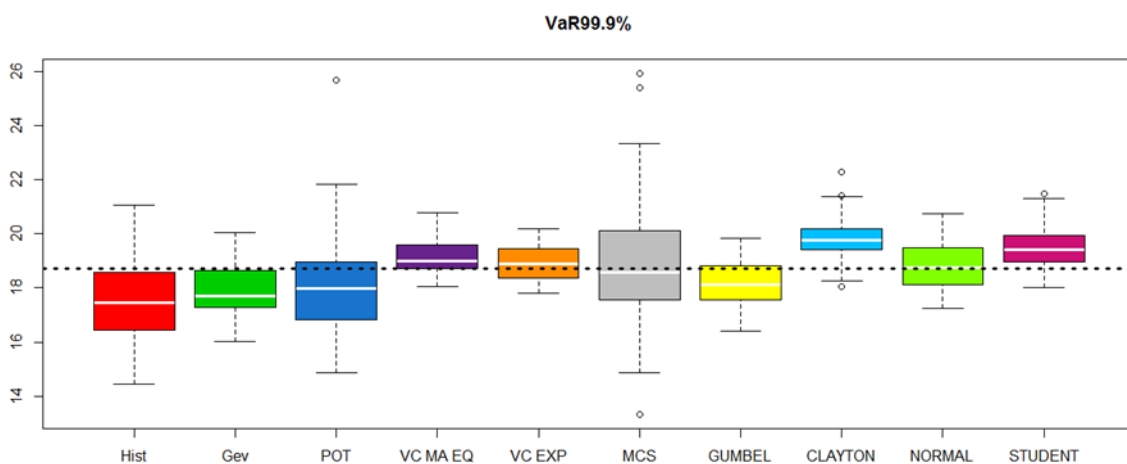


Figure 10 - Box-plot des estimations des VaR99,9%

Evaluation des estimateurs de VaR selon la corrélation

Dans cette partie, nous allons évaluer la qualité des estimateurs en fonction du niveau de corrélation entre les deux actifs présents dans le portefeuille. Le but est de vérifier que les observations de la section précédente sont valables pour tous niveaux de corrélation. Nous testerons l'ensemble des corrélations énoncées dans la partie « Description des données » sur 50 scénarios de 500 données simulées et conserverons les hypothèses de distribution et d'allocation du portefeuille.

Afin d'évaluer l'impact de la corrélation sur nos estimateurs, nous calculons la différence moyenne entre les VaR calculées sur base des 50 scénarios et la VaR réelle dans les différents niveaux de corrélation. Ensuite, nous analyserons l'évolution de la variance des résultats en fonction du niveau de corrélation.

Comme montré dans le tableau ci-dessous, nous observons une augmentation de la VaR avec le niveau de corrélation. Cela est facilement explicable, car en effet, au plus les actifs sont corrélés positivement, au plus la perte du portefeuille en cas de chute sera grande car l'un des actifs ne permet pas d'atténuer les pertes dues à l'autre. Les VaR90%, VaR99% et VaR99,5% sont disponibles à l'annexe 3.

VaR99,9%	-0,75	-0,50	-0,25	0,00	0,25	0,50
Réelle	9,11	10,99	13,25	15,44	17,31	18,74
Historique	8,53	10,27	12,36	14,42	16,18	17,53
Generalized Extreme Value	8,86	10,61	12,73	14,80	16,56	17,90
Peak Over the Threshold	8,78	10,61	12,77	14,88	16,68	18,10
VarCov. Equally Weighted	10,03	11,71	13,82	15,92	17,75	19,14
VarCov. Expo. Weighted	9,25	11,15	13,45	15,66	17,53	18,92
Monte Carlo	9,91	11,54	13,61	15,68	17,50	18,89
Copule Gumbel	NA	NA	NA	NA	16,79	18,16
Copule Clayton	8,93	9,92	11,49	15,66	19,17	19,85
Copule Normale	9,17	11,09	13,34	15,44	17,32	18,78
Copule Student	9,67	13,70	16,32	17,85	18,86	19,49

Tableau 8 - VaR calculées pour différents niveaux de corrélation

Le tableau ci-dessous reprend l'écart moyen des VaR99,9% par rapport à la VaR réelle pour différents niveaux de corrélation. Les tableaux similaires calculés pour les VaR90%, VaR99% et VaR99,5% sont disponibles à l'annexe 4. Sur base de ce tableau, nous pouvons conclure que la méthode basée sur la copule Normale est la plus précise car l'écart moyen des VaR calculées avec cette méthode est la plus proche de 0 dans tous les cas testés. A l'inverse, la copule de Student fournit les résultats les moins satisfaisants, particulièrement pour les faibles niveaux de corrélation.

VaR99,9%	-0,75	-0,50	-0,25	0,00	0,25	0,50
Historique	-6,3%	-6,6%	-6,7%	-6,6%	-6,6%	-6,4%
Generalized Extreme Value	-2,7%	-3,5%	-3,9%	-4,1%	-4,3%	-4,5%
Peak Over the Threshold	-3,6%	-3,5%	-3,6%	-3,6%	-3,7%	-3,4%
VarCov. Equally Weighted	10,2%	6,6%	4,3%	3,2%	2,5%	2,1%
VarCov. Expo. Weighted	1,6%	1,4%	1,5%	1,4%	1,2%	1,0%
Monte Carlo	8,9%	5,0%	2,7%	1,6%	1,1%	0,8%
Copule Gumbel	NA	NA	NA	NA	-3,0%	-3,1%
Copule Clayton	-1,9%	-9,8%	-13,2%	1,5%	10,7%	5,9%
Copule Normale	0,8%	0,9%	0,7%	0,0%	0,0%	0,2%
Copule Student	6,2%	24,7%	23,1%	15,6%	8,9%	4,0%

Tableau 9 -Ecart moyen entre les estimations et la VaR99,9% réelle selon différents niveaux de corrélation de Kendall

Le graphe ci-dessous permet de visualiser les résultats du tableau précédent. Les résultats obtenus pour les autres VaR sont disponibles à l'annexe 5.

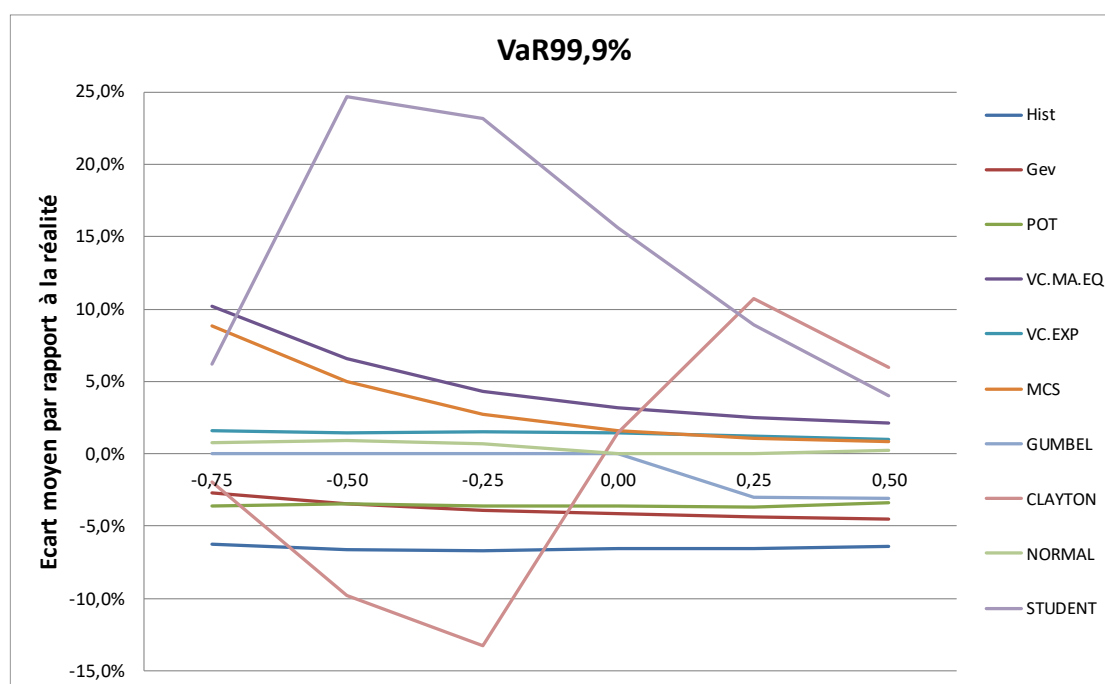


Figure 11 - Ecart moyen des estimateurs par rapport à la réalité en fonction du niveau de corrélation de Kendall

Nous observons que la qualité de l'estimation de certains estimateurs est impactée par le niveau de corrélation. Les copules de Clayton et de Student semblent les plus impactées. La copule de Clayton tend à surestimer la VaR lorsque la corrélation est positive tandis qu'elle tend à la sous-estimer lorsque la corrélation est négative. La copule de Student surestime la

VaR dans tous les cas de corrélation mais semble plus précise en cas de corrélation extrême. Notons également qu'au plus le quantile est extrême, au moins la copule de Student est précise.

Les méthodes de Variance-Covariance exponentiellement pondérées et de copule de Normale semblent les plus précises. Cette tendance est également observée pour les autres VaR estimées.

Concernant la variabilité des résultats, nous observons une tendance croissante de la variabilité avec le niveau de corrélation.

VaR99,9%	-0,75	-0,50	-0,25	0,00	0,25	0,50	0,75
Historique	40,6%	65,3%	97,9%	133,3%	172,8%	210,1%	240,3%
Generalized Extreme Value	20,5%	31,5%	46,4%	62,4%	76,7%	87,9%	95,1%
Peak Over the Treshold	55,0%	84,7%	124,6%	181,2%	238,7%	350,0%	331,4%
VarCov. Equally Weighted	10,8%	14,2%	19,6%	26,1%	32,9%	38,8%	43,0%
VarCov. Expo. Weighted	15,7%	22,7%	26,1%	33,8%	38,5%	45,1%	72,2%
Monte Carlo	185,5%	225,4%	298,5%	394,7%	497,7%	587,4%	649,1%
Copule Gumbel	NA	NA	NA	NA	38,8%	65,6%	81,6%
Copule Clayton	10,6%	16,5%	27,0%	90,0%	65,4%	67,3%	58,6%
Copule Normale	14,9%	26,3%	32,2%	46,2%	54,0%	67,9%	71,4%
Copule Student	19,0%	68,1%	62,7%	52,1%	54,6%	59,1%	62,5%

Tableau 10 - Variance des estimations de VaR99,9% selon différents niveaux de corrélation de Kendall.

Nous constatons également que la méthode Variance-Covariance équipondérée est la plus stable pour tous les niveaux de corrélation testés. A l'inverse, la méthode de Monte Carlo est de loin la plus volatile et semble donc inappropriée pour estimer une VaR réelle. Comme présenté à l'annexe 6, les tendances sont identiques pour tous les quantiles testés. Le graphe ci-dessous permet de mieux visualiser les résultats observés précédemment. Les résultats obtenus pour les autres VaR testées sont disponibles à l'annexe 7.

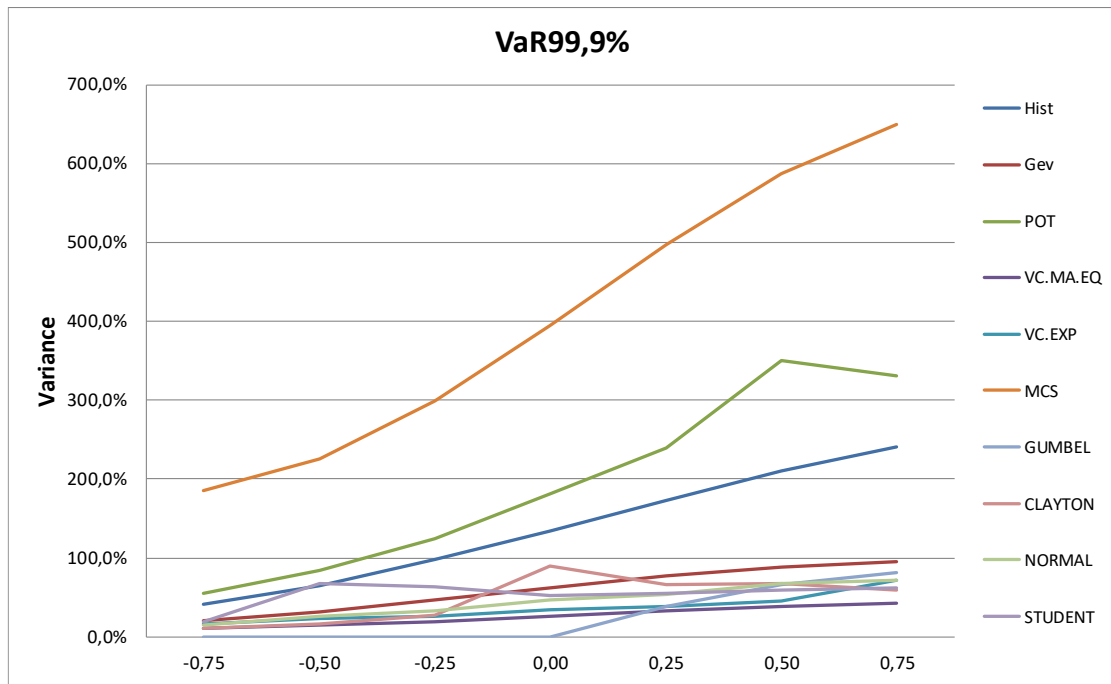


Figure 12 - Evolution de la variance des estimations en fonction de la corrélation de Kendall

Conclusion

Sur base des tests effectués, nous pouvons conclure que les méthodes Variance-Covariance ainsi que celle basée sur la copule Normale sont les moins sensibles à l'ajout de données supplémentaires. La copule Normale donne, en moyenne et pour tous niveaux de corrélation, les résultats les plus proches de la valeur réelle. Cependant, ces résultats sont moins stables que ceux obtenus avec les méthodes Variance-Covariance.

Nous observons également une tendance haussière de la variabilité en fonction de la corrélation. Toutefois, cette observation ne s'applique pas complètement à la copule de Clayton, les résultats obtenus présentant un comportement différent des autres méthodes. En effet, celle-ci perd en stabilité et en précision pour les corrélations les plus faibles. Elle tend également à surestimer la VaR en cas de corrélation positive et à la sous-estimer en cas de corrélation négative.

Chapitre 2 Application sur données réelles

Introduction

Ce chapitre a pour but de comparer les différentes méthodes d'estimation de VaR dans un environnement réel. Cela nous permettra de comparer les résultats obtenus dans le précédent chapitre à la réalité.

Au cours de ce chapitre, nous testerons la sensibilité des estimateurs au cours du temps ainsi que l'impact de l'ajout des données d'historique supplémentaires

Description des données

Dans ce chapitre, nous utiliserons des données réelles pour faire notre analyse. Nous nous baserons sur deux indices :

- AEX 25 : indice boursier composé des 25 entreprises les plus représentatives du marché néerlandais.
- BEL 20 : indice boursier composé des 20 entreprises les plus représentatives du marché belge.

Nous disposons d'un historique de données de cinq années (2013 à 2017) contenant la cotation des deux indices sur base journalière. La cotation d'un indice est fonction du prix des actions qui le composent. L'utilisation d'indices nous permet de réduire l'impact de certains événements pouvant influencer le prix d'une action, comme le versement de dividendes, une augmentation de capital...

Notre portefeuille est équilibré entre les deux actifs et possède une valeur initiale de 200. La valeur de notre portefeuille en t , après une journée est égale à

$$V = 100e^{r_t^{\text{AEX}}(1)} + 100e^{r_t^{\text{BFX}}(1)}$$

De la même manière que précédemment, nous exprimons les rendements de nos actifs sur base journalière et, nous utilisons les rendements continus définis comme :

$$r_t(1) = \ln\left(\frac{P_t}{P_{t-1}}\right)$$

Où P_t est le prix de l'actif à l'instant t et P_{t-1} le prix de l'actif un jour auparavant.

Corrélation entre les deux indices

Comme souligné au chapitre précédent, la corrélation entre les deux actifs du portefeuille à un impact sur la VaR. Sur base de nos données réelles, nous observons les corrélations suivantes pour chaque année :

	2013	2014	2015	2016	2017	TOT
ρ	0,850	0,892	0,937	0,933	0,843	0,905
τ	0,625	0,649	0,748	0,748	0,642	0,685

Tableau 11 -Corrélations de Pearson et de Kendall observées selon les années

Nous constatons une forte corrélation positive entre les deux indices au cours du temps. Sur base de ce tableau et des observations du chapitre précédent, nous pouvons supposer que, pour des rendements identiquement distribués, la VaR de notre portefeuille sera la plus faible pour 2013 et la plus élevée en 2016 et en 2017.

Vérification de la normalité

Dans le chapitre précédent, nous faisons l'hypothèse que le logarithme des rendements journaliers suivait une loi Normale. En effet, un certain nombre de méthodes fait l'hypothèse de normalité des logarithmes des rendements pour estimer la VaR. Cependant, il paraît opportun de vérifier que cette hypothèse est cohérente avec les données observées dans la réalité, car cela pourrait avoir un impact sur la qualité de l'estimation de VaR. Pour vérifier cette hypothèse, nous allons nous baser sur deux indicateurs et un test statistique :

- Skewness : il s'agit d'une mesure d'asymétrie de distribution définie comme suit :

$$\text{Skewness} = \frac{1}{n} \sum_t (r_t(1) - \overline{r(1)})^3$$

Où n est le nombre de rendements observés, $r_t(1)$ le rendement journalier observé en t et $\overline{r(1)}$ la moyenne des rendements journaliers de la période observée.

La Skewness s'interprète de la façon suivante :

- Skewness = 0, la distribution est parfaitement symétrique.
- Skewness > 0, la distribution est asymétrique à gauche.
- Skewness < 0, la distribution est asymétrique à droite.

Dans le cas d'une distribution Normale, la Skewness est nulle.

- Kurtosis : il s'agit d'une mesure d'aplatissement des rendements définie comme suit :

$$\text{Kurtosis} = \frac{1}{n} \sum_t (r_t(1) - \overline{r(1)})^4$$

Où n est le nombre de rendements observés, $r_t(1)$ le rendement journalier observé en t et $\overline{r(1)}$ la moyenne des rendements journaliers de la période observée.

La Kurtosis s'interprète de la façon suivante :

- Kurtosis = 3, la distribution est normale.
 - Kurtosis > 3, la distribution montre une probabilité plus faible d'être autour de la moyenne, et plus élevée d'être loin de la moyenne.
 - $0 < \text{Kurtosis} < 3$, la distribution montre une probabilité plus élevée d'être autour de la moyenne, et plus faible d'être loin de la moyenne.
- Jarque-Bera : sur base de la Skewness et de la Kurtosis nous pouvons effectuer un test de normalité de Jarque-Bera dont le test d'hypothèse est :

H_0 : normalité des rendements et H_1 : non – normalité des rendements

Plus la variable de Jarque-Bera est proche de 0 plus il est probable que les rendements suivent une loi normale. La variable de Jarque-Bera se calcule à partir de la Skewness et la Kurtosis

$$JB = \frac{n}{6} \left(\text{Skewness}^2 + \frac{(\text{Kurtosis} - 3)^2}{4} \right)$$

Nous commençons donc par calculer la Skewness et la Kurtosis sur nos données réelles :

AEX	2013	2014	2015	2016	2017	TOT
Skewness	-0,086	-0,216	-0,277	-0,450	0,224	-0,343
Kurtosis	3,948	5,393	4,194	5,313	3,769	6,101

Tableau 12 -Skewness et Kurtosis calculé pour chaque année sur l'AEX25

BFX	2013	2014	2015	2016	2017	TOT
Skewness	-0,145	-0,179	-0,287	-0,859	0,586	-0,449
Kurtosis	3,722	5,187	4,625	7,169	5,150	6,600

Tableau 13 - Skewness et Kurtosis calculé pour chaque année sur le BEL20

Ensuite, nous pouvons effectuer nos tests d'hypothèses de Jarque-Bera :

AEX	2013	2014	2015	2016	2017	TOT
JB	10,498	65,031	19,292	68,110	8,891	539,400
p-value	0,005	7,55E-15	6,47E-05	1,67E-15	0,012	< 2,2E-16

Tableau 14 - Variable de Jarque-Bera et p-value calculée pour chaque année sur l'AEX25.

BFX	2013	2014	2015	2016	2017	TOT
JB	6,899	54,137	32,883	223,150	65,484	735,980
p-value	0,032	1,76E-12	7,24E-08	< 2,2E-16	6,00E-15	< 2,2E-16

Tableau 15 - Variable de Jarque-Bera et p-value calculée pour chaque année sur le BEL20.

Au vu des résultats ci-dessus, nous pouvons rejeter l'hypothèse de normalité des distributions des rendements. En effet, sur les deux actifs, nous constatons une tendance négative de la Skewness à l'exception de l'année 2017. Ce qui signifie que les rendements des deux indices ont tendance à être positifs. Concernant la Kurtosis, nous observons des valeurs supérieures à 3, ce qui signifie que par rapport à une loi Normale, il a plus de probabilité probable d'avoir des rendements extrêmes plutôt qu'autour de la moyenne.

Nous pouvons donc déduire que les méthodes de calcul de VaR faisant des hypothèses de normalité des rendements ne sont pas assez conservatrices. La queue de distribution à gauche d'une loi normale étant plus fine que celle de la distribution empirique.

Evolution de la VaR au cour du temps

Dans cette section, nous allons évaluer la stabilité de la VaR journalière de notre portefeuille au cours du temps selon les différentes méthodes. Nous allons pouvoir observer la stabilité de la VaR d'année en année. Nous nous focaliserons sur des quantiles extrêmes, à savoir, les VaR90%, VaR99%, VaR99,5% et VaR99,9%.

Le tableau ci-dessous reprend la moyenne des VaR journalières observées sur les années 2013 à 2017 sur notre portefeuille équipondéré. Il reprend la moyenne des pertes qui ne devraient pas être dépassées avec des probabilités de 90%, 99%, 99,5%, 99,9% sur un horizon de un jour. Le détail des VaR calculées pour chaque année est disponible à l'annexe 8.

Méthodes	VaR90%	VaR99%	VaR99,5%	VaR99,9%
Historique	0,882	2,057	2,253	3,040
Generalized Extreme Value	1,032	1,823	2,002	2,359
Peak Over the Treshold	0,908	2,154	2,546	3,551
VarCov. Equally Weighted	0,989	1,817	2,014	2,420
VarCov. Expo. Weighted	0,901	1,657	1,837	2,208
Monte Carlo	1,036	1,880	2,097	2,469
Copule Gumbel	0,974	1,754	1,938	2,325
Copule Clayton	1,005	1,852	2,049	2,497
Copule Normale	0,986	1,809	1,994	2,395
Copule Student	0,979	1,840	2,042	2,462

Tableau 16 - Moyenne des VaR calculées sur les années 2013 à 2017.

Le tableau de résultat ci-dessus nous indique que la méthode Variance-Covariance avec approche par moyenne mobile exponentiellement pondérée nous donne des résultats en moyenne inférieurs (en vert) à ceux obtenus avec les autres méthodes. Cela provient du très faible niveau des VaR pour les années 2016 et 2017 (annexe 8). A l'inverse, la méthode Peak Over the Treshold donne des résultats en moyenne supérieurs aux autres méthodes. Cela est dû aux queues de distribution plus épaisses de la loi de Pareto utilisée pour estimer les quantiles. Concernant les méthodes par copules, nous observons que la méthode de Gumbel donne les résultats les plus faibles tandis que celle de Clayton les plus élevés.

Nous allons maintenant analyser la stabilité des estimations faites avec les différentes méthodes. Le tableau ci-dessous reprend les variances des VaR estimées de 2013 à 2017.

Méthodes	VaR90%	VaR99%	VaR99,5%	VaR99,9%
Historique	0,074	0,413	0,463	1,627
Generalized Extreme Value	0,098	0,342	0,421	0,609
Peak Over the Treshold	0,065	0,482	0,802	2,321
VarCov. Equally Weighted	0,079	0,252	0,308	0,439
VarCov. Expo. Weighted	0,126	0,413	0,505	0,724
Monte Carlo	0,106	0,328	0,405	0,556
Copule Gumbel	0,080	0,245	0,298	0,429
Copule Clayton	0,079	0,246	0,299	0,442
Copule Normale	0,079	0,252	0,302	0,430
Copule Student	0,080	0,252	0,307	0,439

Tableau 17 - Variance des VaR calculées sur les années 2013 à 2017.

Le tableau de résultats ci-dessus nous montre une plus grande stabilité des estimations par méthodes de copule. A l'inverse, la méthode Peak Over the Treshold requérant d'ajuster une distribution de Pareto est plus volatile.

Nous pouvons illustrer les chiffres des tableaux ci-dessus via le graphique de l'évolution de la VaR99,9%. On voit que la méthode Peak Over the Treshold donne des estimations de VaR supérieures aux autres méthodes pour toutes les années suivie de la méthode par simulation historique. On remarque également une certaine convergence entre la plupart des méthodes. Les graphes des résultats obtenus pour les autres VaR testées suivent la même tendance et sont disponibles à l'annexe 9.

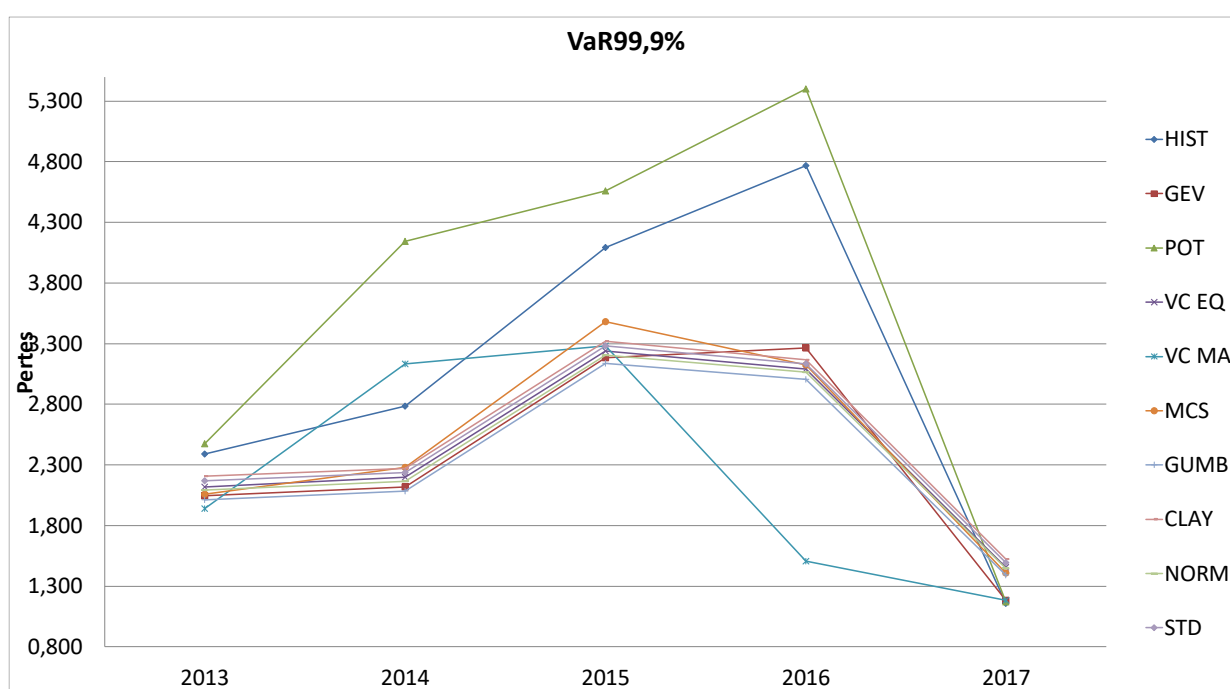


Figure 13 - Pertes estimées par les différents estimateurs en fonction des années d'observation

Stabilité de la VaR à l'ajout de données historiques.

Dans cette section, nous allons évaluer la stabilité de la VaR journalière de notre portefeuille à l'ajout de données historiques pour les différentes méthodes. Pour cela, nous allons analyser l'évolution de la VaR 2017 à l'ajout d'années de données historiques supplémentaires.

Le tableau ci-dessous reprend la moyenne des VaR journalières observées sur notre portefeuille équilibré dans les périodes 2017, 2016-2017, 2015-2017, 2014-2017 et 2013-2017. Il reprend la moyenne des pertes qui ne devraient pas être dépassées avec des

probabilités de 90%, 99%, 99,5%, 99,9% sur un horizon de un jour. Le détail des VaR calculées pour chaque période est disponible à l'annexe 10.

Méthodes	VaR90%	VaR99%	VaR99,5%	VaR99,9%
Historique	0,826	2,219	2,477	3,731
Generalized Extreme Value	1,017	1,783	1,955	2,296
Peak Over the Treshold	0,828	2,136	2,590	3,807
VarCov. Equally Weighted	0,956	1,755	1,945	2,337
VarCov. Expo. Weighted	0,477	0,889	0,987	1,189
Monte Carlo	0,998	1,813	2,023	2,382
Copule Gumbel	0,941	1,696	1,869	2,243
Copule Clayton	0,972	1,787	1,978	2,405
Copule Normale	0,952	1,746	1,925	2,312
Copule Student	0,946	1,776	1,970	2,375

Tableau 18 - Moyenne des VaR calculées dans toutes les périodes testées

Le tableau de résultats ci-dessous nous montre que la méthode Variance-Covariance avec approche par moyenne mobile exponentiellement pondérée est celle qui donne les résultats les plus faibles peu importe le nombre d'années d'historique. Cela est dû à la plus grande importance donnée à l'année 2017 pour laquelle la VaR est la plus faible. Les VaR les plus élevées sont données par les méthodes Peak Over the Treshold et de simulation historique. Concernant les méthodes par copules, nous observons que la méthode de Gumbel donne les résultats les plus faibles tandis que celle de Clayton les plus élevés.

Nous allons maintenant analyser la stabilité des estimations faites avec les différentes méthodes. Le tableau ci-dessous reprend les variances des VaR estimées pour l'ensemble des périodes.

Méthodes	VaR90%	VaR99%	VaR99,5%	VaR99,9%
Historique	0,024	0,350	0,460	1,700
Generalized Extreme Value	0,053	0,182	0,223	0,318
Peak Over the Treshold	0,019	0,308	0,565	1,786
VarCov. Equally Weighted	0,037	0,117	0,143	0,204
VarCov. Expo. Weighted	1,95E-05	1,31E-05	1,18E-05	9,30E-06
Monte Carlo	0,048	0,150	0,185	0,254
Copule Gumbel	0,035	0,111	0,132	0,190
Copule Clayton	0,036	0,115	0,140	0,205
Copule Normale	0,036	0,114	0,138	0,197
Copule Student	0,036	0,116	0,141	0,204

Tableau 19 - Variance des VaR calculées pour toutes les périodes testées.

Le tableau de résultats ci-dessous nous montre que la méthode la plus stable est la méthode Variance-Covariance avec approche par moyenne mobile exponentiellement pondérée. En effet, cette méthode est celle qui varie le moins à l'ajout de données historiques. Cela est dû à l'importance plus importante donnée aux données les plus récentes lors du calcul de la variance. Notons que les méthodes par copules sont parmi les plus stables dans l'estimation de tous les quantiles.

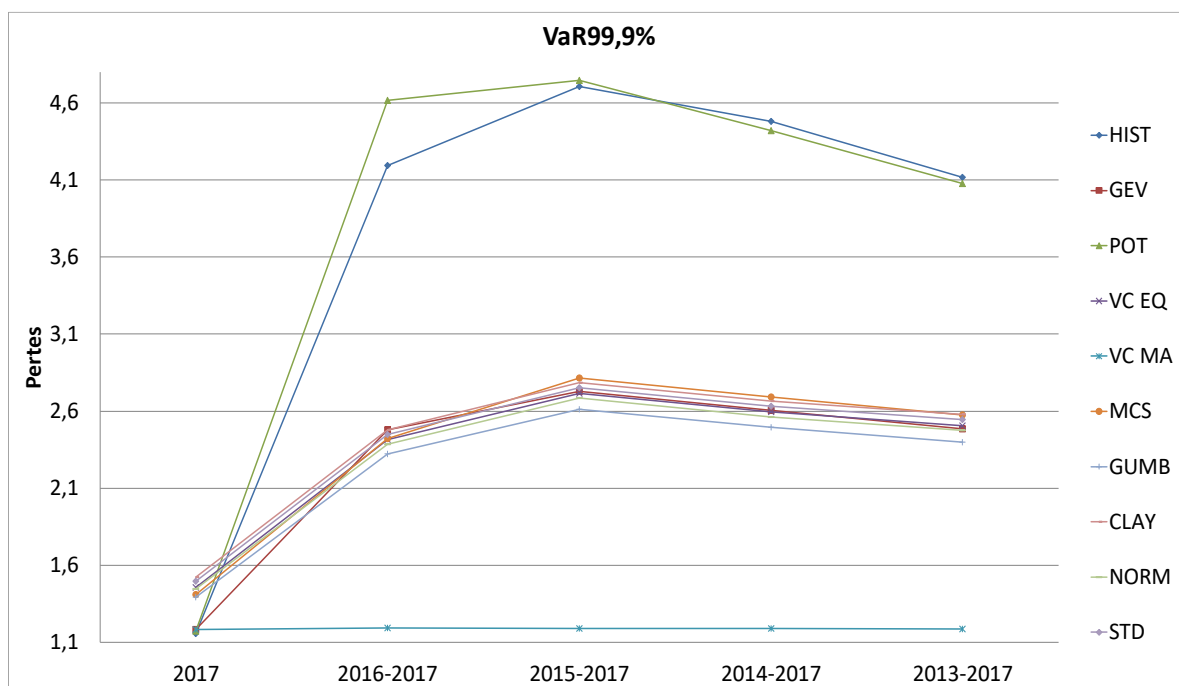


Figure 14 - Evolution des estimations de VaR en fonction de données historiques supplémentaires

Nous pouvons illustrer les chiffres des tableaux ci-dessus via la graphique de l'évolution de la VaR99,9%. On voit que la méthode Peak Over the Treshold et de simulation historique donne des estimations de VaR les plus sensibles à l'ajout d'années d'historiques. A l'inverse, la méthode la plus stable est la méthode Variance-Covariance avec approche par moyenne mobile exponentiellement pondérée est largement la moins impactée à l'ajout d'années d'historiques. Les graphes des résultats obtenus pour les autres VaR testées suivent la même tendance et sont disponibles à l'annexe 11.

Conclusion

Les analyses effectuées dans ce chapitre nous permettent de tirer plusieurs conclusions.

Premièrement, nous constatons clairement que l'utilisation d'une loi Normale pour estimer le logarithme des rendements n'est pas une méthode optimale pour la modélisation d'un portefeuille composé d'indices. En effet, les rendements des indices tendent à être positifs et sont plus dispersés autour de la moyenne en comparaison à une loi Normale. Les queues inférieures d'une loi Normale sont donc plus fines que celles observées. Cela signifie donc que les VaR se basant sur une loi Normale sous-estiment la VaR de la distribution réelle.

Ensuite, concernant la stabilité au cours du temps, nous observons, qu'en moyenne, les VaR les plus faibles sont obtenues par la méthode Variance-Covariance avec approche par moyenne mobile exponentiellement pondérée. Cela provient du très faible niveau des VaR calculés pour les années 2016 et 2017. Cependant, cette méthode montre une grande variabilité selon les années, car elle permet mieux de s'adapter aux vicissitudes du marché.

Les résultats obtenus par méthode des copules sont assez homogènes. Notons simplement que la copule de Gumbel donne les résultats de VaR les plus faibles et est la plus stable parmi toutes les copules. Tandis que la copule de Clayton est celle avec laquelle les résultats obtenus sont les plus élevés.

Enfin, pour ce qui est de la stabilité à l'ajout de données historiques, la méthode Variance-Covariance avec approche par moyenne mobile exponentiellement pondérée est de loin la plus stable car elle donne plus d'importance aux données récentes, ce qui atténue l'effet de données supplémentaires.

Les méthodes des copules sont quant à elles, dans une moindre mesure faiblement impactées par les données supplémentaires avec encore une fois une plus grande stabilité de la méthode de Gumbel.

Conclusion

Afin de répondre à la question sur laquelle se base ce mémoire, à savoir « Quel est l'impact des copules sur la Value-at-Risk ? », nous avons dans un premier temps appréhendé le concept de VaR ainsi que la théorie et hypothèses sous-jacentes aux méthodes traditionnelles pour la calculer. Nous nous sommes ensuite intéressés aux fondements de la théorie des copules qui est essentielle en vue de comprendre son fonctionnement ainsi que ses particularités. La principale étant, à l'inverse des méthodes traditionnelles, de prendre en compte les distributions marginales en vue de trouver la distribution jointe.

Ensuite, nous avons continué notre cheminement en mettant en application les concepts et théories étudiés sur des cas pratiques dans le but d'évaluer un potentiel impact des méthodes copules sur l'estimation des VaR les plus extrêmes. Nous avons commencé par étudier un cas sur données simulées, nous permettant de connaître au préalable les valeurs réelles des quantiles que nous cherchons à estimer. Nous en avons conclu que la copule Normale était la méthode la plus précise et l'une des plus stable pour estimer la VaR de notre portefeuille d'actifs équipondérés suivant une loi Normale bivariée. Nous avons également pu constater des tendances différentes avec les copules de Student et de Clayton. En effet, celles-ci semblent perdre de leur précision pour les faibles niveaux de corrélations.

Enfin, nous avons étudié un cas utilisant des données réelles qui nous a permis de faire un premier constat, à savoir que l'hypothèse de normalité des rendements est inadéquate pour des indices boursiers. La normalité supposée aurait pour conséquence de sous-estimer la VaR réelle. Il est donc opportun de penser que l'utilisation d'une copule Normale sous-estime la VaR réelle. Dès lors, l'utilisation d'une copule de Clayton donnant des valeurs de quantiles supérieures pourrait prendre sens, car celle-ci a la particularité de posséder une queue de distribution épaisse à gauche.

ANNEXES

ANNEXE 1: Evaluation de la stabilité des estimateurs sur données simulées (Tables).

VaR90,0%

Historique de 50 données.

50 data	Hist	Gev	POT	VC.MA.EQ	VC.EXP	MCS	GUMBEL	CLAYTON	NORMAL	STUDENT
MEAN	7,624	7,871	8,160	7,952	8,062	7,868	7,799	8,143	7,916	7,761
DELTA	-0,391	-0,144	0,145	-0,063	0,047	-0,147	-0,216	0,128	-0,099	-0,254
VAR	2,199	1,474	1,968	1,369	1,402	1,650	1,313	1,404	1,346	1,361
MIN	4,236	5,393	4,305	5,431	5,384	5,045	5,520	5,647	5,429	5,372
MAX	11,285	10,450	11,202	10,639	10,836	10,992	10,428	10,978	10,682	10,471

Historique de 100 données.

100 data	Hist	Gev	POT	VC.MA.EQ	VC.EXP	MCS	GUMBEL	CLAYTON	NORMAL	STUDENT
MEAN	7,678	7,910	7,959	7,959	8,067	7,800	7,816	8,173	7,924	7,776
DELTA	-0,337	-0,105	-0,056	-0,056	0,052	-0,215	-0,199	0,158	-0,091	-0,239
VAR	0,781	0,671	0,812	0,605	0,619	1,031	0,618	0,673	0,589	0,604
MIN	6,189	6,416	6,401	6,529	6,745	6,022	6,299	6,700	6,640	6,465
MAX	9,899	9,805	10,188	9,851	10,001	9,676	9,744	9,993	9,576	9,510

Historique de 255 données.

255 data	Hist	Gev	POT	VC.MA.EQ	VC.EXP	MCS	GUMBEL	CLAYTON	NORMAL	STUDENT
MEAN	7,979	8,079	8,050	8,057	8,164	7,947	7,922	8,277	8,036	7,882
DELTA	-0,036	0,064	0,035	0,042	0,149	-0,068	-0,093	0,262	0,021	-0,133
VAR	0,364	0,253	0,358	0,239	0,248	0,841	0,246	0,270	0,240	0,227
MIN	6,281	6,763	6,370	6,724	6,792	6,179	6,629	6,685	6,598	6,541
MAX	9,284	9,207	9,351	9,274	9,472	10,285	9,091	9,681	9,326	9,127

Historique de 500 données.

500 data	Hist	Gev	POT	VC.MA.EQ	VC.EXP	MCS	GUMBEL	CLAYTON	NORMAL	STUDENT
MEAN	8,109	8,163	8,109	8,126	8,238	8,023	7,996	8,357	8,112	7,958
DELTA	0,094	0,148	0,094	0,111	0,223	0,008	-0,019	0,342	0,097	-0,057
VAR	0,287	0,151	0,287	0,135	0,151	1,132	0,133	0,160	0,144	0,136
MIN	7,123	7,492	7,123	7,543	7,583	5,488	7,425	7,629	7,493	7,299
MAX	9,308	9,216	9,308	9,150	9,388	11,352	8,980	9,564	9,178	8,994

VaR99,0%

Historique de 50 données.

50 data	Hist	Gev	POT	VC.MA.EQ	VC.EXP	MCS	GUMBEL	CLAYTON	NORMAL	STUDENT
MEAN	12,624	13,791	13,047	14,310	14,325	14,162	13,653	14,854	14,145	14,396
DELTA	-1,681	-0,514	-1,258	0,004	0,020	-0,143	-0,652	0,548	-0,160	0,090
VAR	5,256	3,872	7,540	2,358	2,268	3,009	2,062	2,259	2,182	2,301
MIN	7,518	9,154	7,700	11,061	11,052	10,361	10,837	11,475	10,855	11,022
MAX	17,936	17,609	20,227	17,739	17,412	18,354	17,120	18,510	17,659	17,747

Historique de 100 données.

100 data	Hist	Gev	POT	VC.MA.EQ	VC.EXP	MCS	GUMBEL	CLAYTON	NORMAL	STUDENT
MEAN	13,055	13,672	13,574	14,286	14,294	14,003	13,648	14,878	14,144	14,387
DELTA	-1,250	-0,633	-0,731	-0,020	-0,012	-0,302	-0,658	0,572	-0,162	0,082
VAR	3,984	2,149	3,435	1,230	1,192	2,662	1,236	1,207	1,213	1,174
MIN	9,469	10,464	10,128	12,327	12,363	10,970	11,554	12,850	12,179	12,467
MAX	19,862	16,502	19,164	16,993	17,228	17,486	16,559	17,305	16,860	16,869

Historique de 255 données.

255 data	Hist	Gev	POT	VC.MA.EQ	VC.EXP	MCS	GUMBEL	CLAYTON	NORMAL	STUDENT
MEAN	13,664	13,903	14,055	14,435	14,451	14,240	13,808	15,050	14,305	14,571
DELTA	-0,641	-0,403	-0,251	0,129	0,146	-0,066	-0,497	0,745	-0,001	0,266
VAR	1,248	0,661	1,215	0,458	0,408	2,402	0,502	0,498	0,521	0,409
MIN	11,521	12,033	12,270	12,553	13,204	10,993	11,855	12,950	12,334	12,903
MAX	16,309	15,943	16,913	16,120	16,101	18,399	15,694	17,035	16,445	16,148

Historique de 500 données.

500 data	Hist	Gev	POT	VC.MA.EQ	VC.EXP	MCS	GUMBEL	CLAYTON	NORMAL	STUDENT
MEAN	14,144	14,009	14,359	14,565	14,583	14,381	13,933	15,165	14,448	14,689
DELTA	-0,162	-0,296	0,054	0,260	0,278	0,075	-0,373	0,860	0,142	0,384
VAR	0,901	0,447	0,568	0,262	0,234	3,485	0,265	0,318	0,320	0,281
MIN	12,303	12,743	12,724	13,724	13,659	10,047	13,101	14,085	13,421	13,567
MAX	16,155	15,643	16,089	15,954	15,829	19,931	15,444	16,946	15,882	16,073

VaR99,5%*Historique de 50 données.*

50 data	Hist	Gev	POT	VC.MA.EQ	VC.EXP	MCS	GUMBEL	CLAYTON	NORMAL	STUDENT
MEAN	13,219	15,132	14,201	15,796	15,767	15,634	14,991	16,417	15,546	15,980
DELTA	-2,546	-0,632	-1,563	0,032	0,003	-0,130	-0,773	0,653	-0,218	0,216
VAR	7,495	4,873	24,834	2,668	2,586	3,423	2,445	2,614	2,488	2,528
MIN	7,769	9,734	8,239	12,265	12,262	11,504	11,818	12,651	12,256	12,294
MAX	21,132	19,380	39,707	19,394	18,997	20,069	18,517	20,045	19,094	19,534

Historique de 100 données.

100 data	Hist	Gev	POT	VC.MA.EQ	VC.EXP	MCS	GUMBEL	CLAYTON	NORMAL	STUDENT
MEAN	14,079	14,965	14,478	15,765	15,714	15,454	14,958	16,410	15,524	15,975
DELTA	-1,685	-0,800	-1,286	0,001	-0,050	-0,310	-0,806	0,646	-0,240	0,211
VAR	4,567	2,760	4,847	1,421	1,355	3,165	1,517	1,391	1,363	1,326
MIN	10,057	11,285	10,453	13,686	13,726	12,125	12,792	14,204	13,629	13,813
MAX	21,413	18,085	21,845	18,658	18,919	19,334	18,215	18,825	18,864	18,611

Historique de 255 données.

255 data	Hist	Gev	POT	VC.MA.EQ	VC.EXP	MCS	GUMBEL	CLAYTON	NORMAL	STUDENT
MEAN	14,903	15,203	15,272	15,926	15,887	15,711	15,126	16,606	15,730	16,167
DELTA	-0,861	-0,561	-0,492	0,162	0,123	-0,053	-0,638	0,842	-0,034	0,403
VAR	1,898	0,825	1,965	0,527	0,485	2,884	0,644	0,614	0,561	0,478
MIN	12,658	13,206	12,918	13,918	14,403	12,124	12,888	14,629	13,760	14,431
MAX	18,413	17,602	19,420	17,756	17,478	20,284	17,443	18,541	17,740	18,040

Historique de 500 données.

500 data	Hist	Gev	POT	VC.MA.EQ	VC.EXP	MCS	GUMBEL	CLAYTON	NORMAL	STUDENT
MEAN	15,285	15,312	15,672	16,071	16,034	15,867	15,269	16,735	15,863	16,296
DELTA	-0,479	-0,452	-0,092	0,307	0,270	0,103	-0,495	0,971	0,099	0,532
VAR	1,434	0,566	0,961	0,300	0,279	4,210	0,338	0,378	0,343	0,322
MIN	13,099	13,848	13,609	15,144	15,066	11,119	14,235	15,375	14,922	15,036
MAX	20,008	17,089	18,297	17,542	17,312	21,922	16,933	18,455	17,333	17,390

VaR99,9%*Historique de 50 données.*

50 data	Hist	Gev	POT	VC.MA.EQ	VC.EXP	MCS	GUMBEL	CLAYTON	NORMAL	STUDENT
MEAN	13,694	17,817	20,807	18,824	18,593	18,632	17,780	19,474	18,410	19,123
DELTA	-5,042	-0,919	2,071	0,088	-0,142	-0,104	-0,956	0,738	-0,325	0,387
VAR	10,010	7,562	1142,218	3,384	3,355	4,370	3,166	3,453	3,524	3,212
MIN	7,971	10,812	8,316	14,721	14,796	13,838	13,882	14,913	14,274	14,731
MAX	23,688	23,139	245,926	22,760	22,650	23,555	21,554	23,639	22,992	23,123

Historique de 100 données.

100 data	Hist	Gev	POT	VC.MA.EQ	VC.EXP	MCS	GUMBEL	CLAYTON	NORMAL	STUDENT
MEAN	14,897	17,539	16,367	18,778	18,563	18,410	17,731	19,488	18,377	19,115
DELTA	-3,838	-1,196	-2,369	0,043	-0,173	-0,325	-1,005	0,753	-0,359	0,379
VAR	6,600	4,395	18,722	1,856	1,605	4,324	2,023	1,798	1,848	1,954
MIN	10,528	12,855	10,610	16,444	16,077	14,484	14,889	16,600	15,777	16,234
MAX	24,157	21,271	35,519	22,099	22,219	23,084	21,684	22,348	22,321	22,797

Historique de 255 données.

255 data	Hist	Gev	POT	VC.MA.EQ	VC.EXP	MCS	GUMBEL	CLAYTON	NORMAL	STUDENT
MEAN	16,705	17,788	17,611	18,963	18,749	18,708	17,974	19,706	18,590	19,330
DELTA	-2,031	-0,948	-1,125	0,227	0,014	-0,028	-0,762	0,970	-0,146	0,595
VAR	4,513	1,257	7,305	0,685	0,685	3,993	1,033	0,950	0,922	0,820
MIN	13,546	15,534	13,635	16,703	16,294	14,436	15,122	17,751	16,126	17,221
MAX	23,639	20,954	26,028	21,083	20,418	24,111	20,681	22,351	20,612	21,330

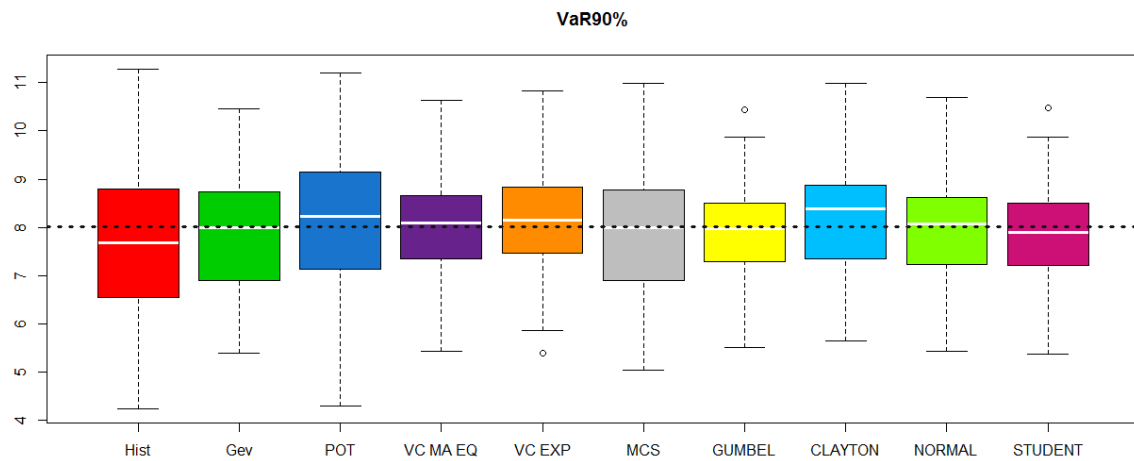
Historique de 500 données.

500 data	Hist	Gev	POT	VC.MA.EQ	VC.EXP	MCS	GUMBEL	CLAYTON	NORMAL	STUDENT
MEAN	17,532	17,896	18,099	19,136	18,925	18,893	18,156	19,850	18,775	19,487
DELTA	-1,204	-0,840	-0,636	0,400	0,189	0,157	-0,579	1,115	0,040	0,751
VAR	2,101	0,879	3,500	0,388	0,451	5,874	0,656	0,673	0,679	0,591
MIN	14,455	16,019	14,844	18,037	17,790	13,312	16,395	18,042	17,250	18,021
MAX	21,072	20,053	25,693	20,774	20,185	25,956	19,836	22,297	20,760	21,506

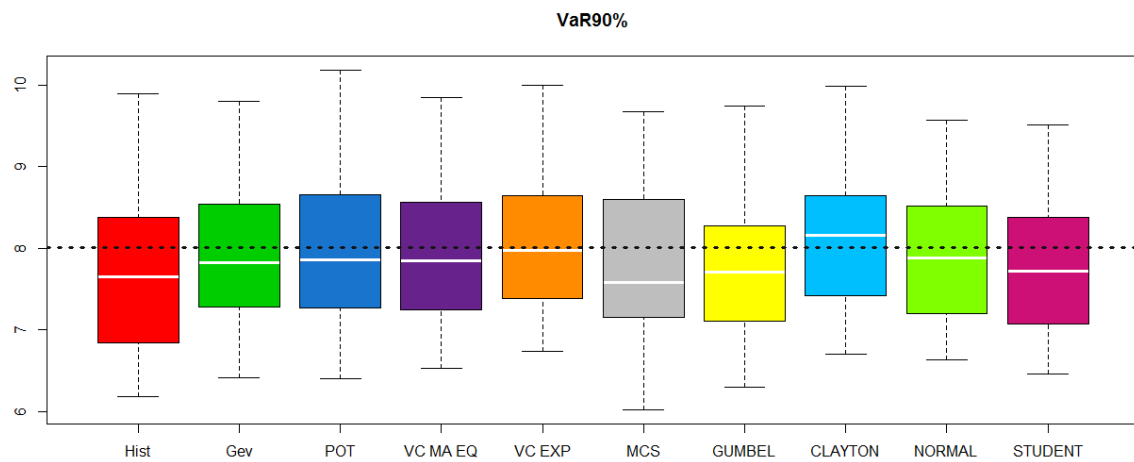
ANNEXE 2: Evaluation de la stabilité des estimateurs sur données simulées (Box-Plots).

VaR90%

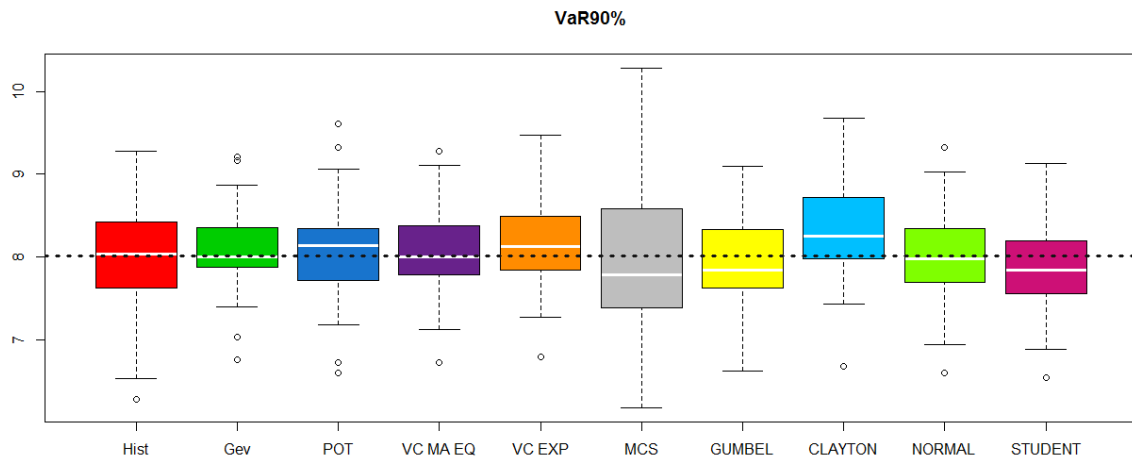
Historique de 50 données.



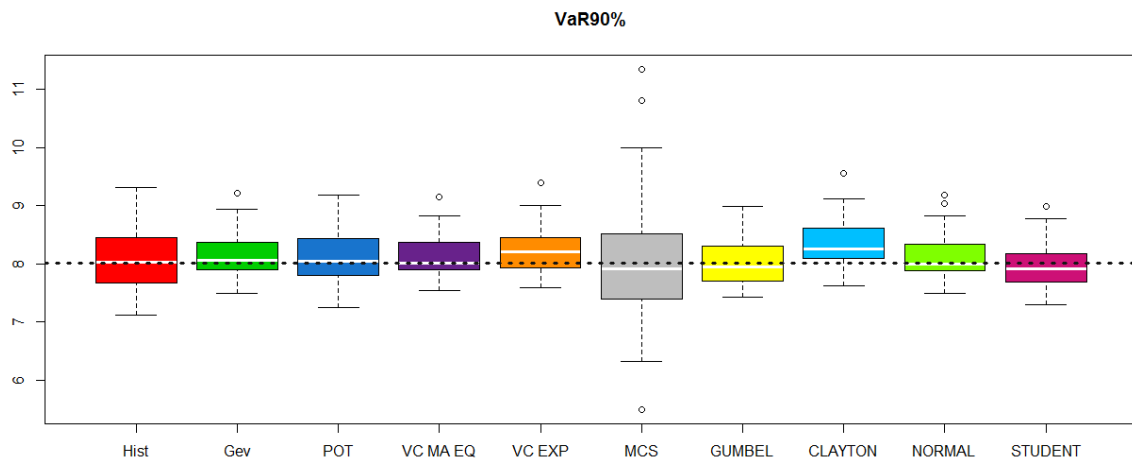
Historique de 100 données.



Historique de 255 données.

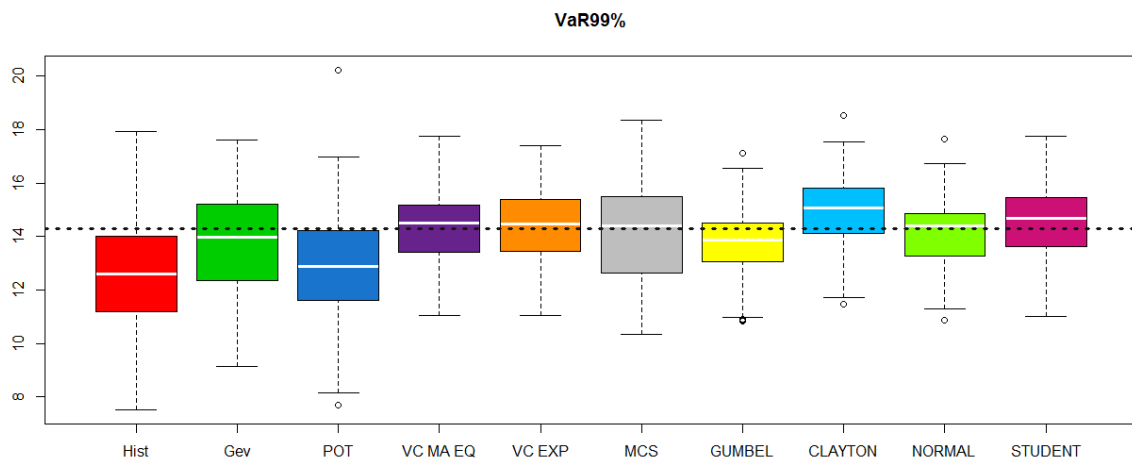


Historique de 500 données.

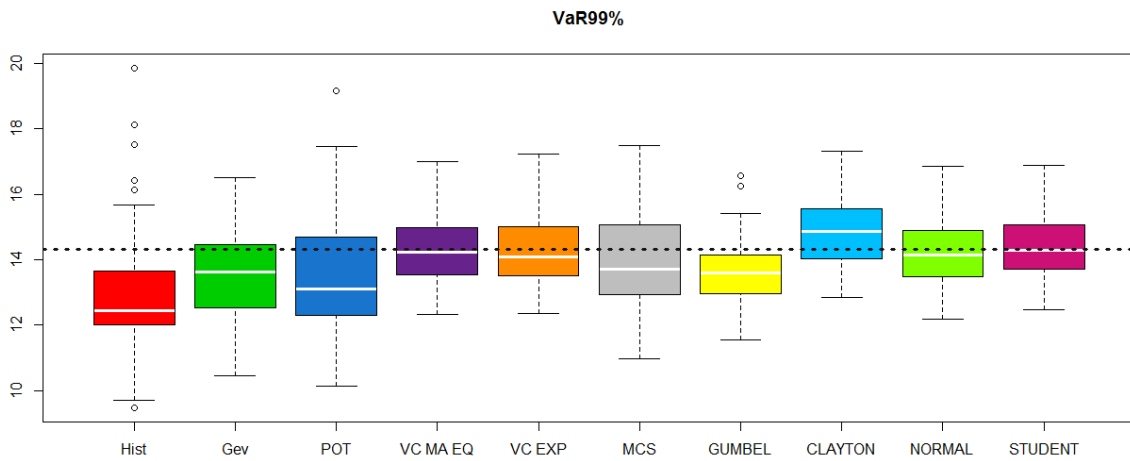


VaR99%

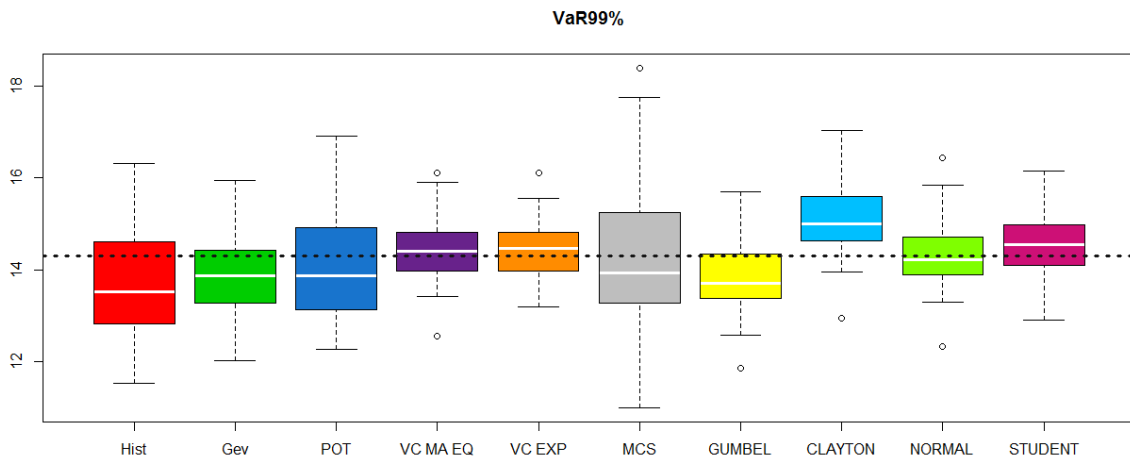
Historique de 50 données.



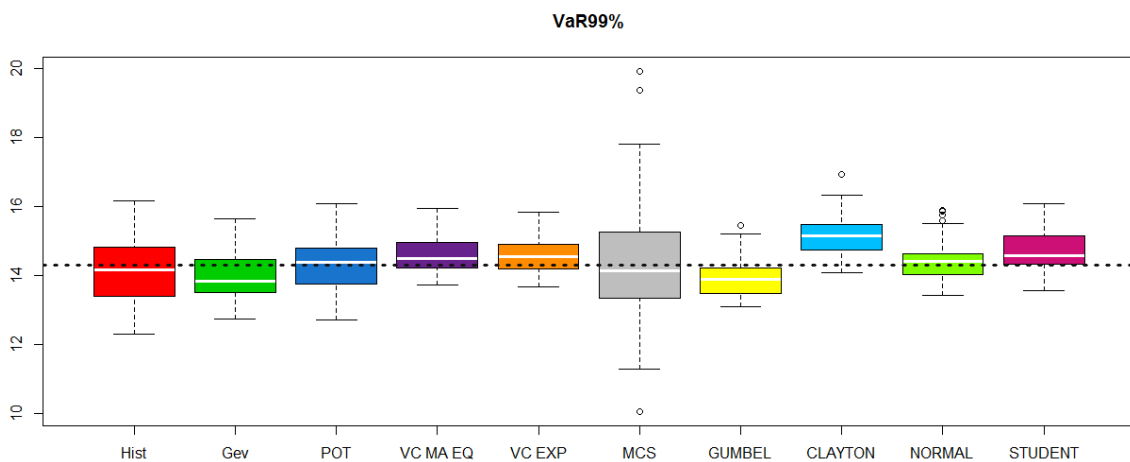
Historique de 100 données.

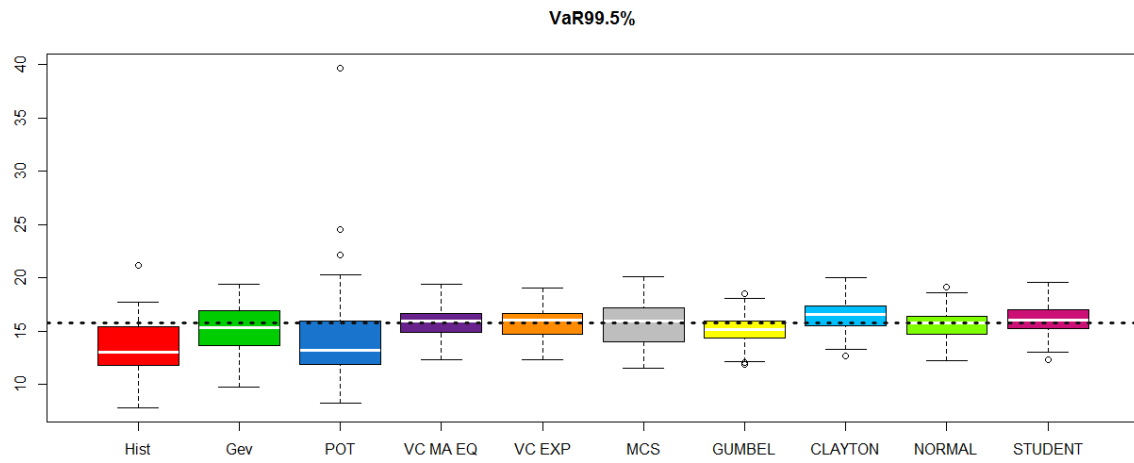
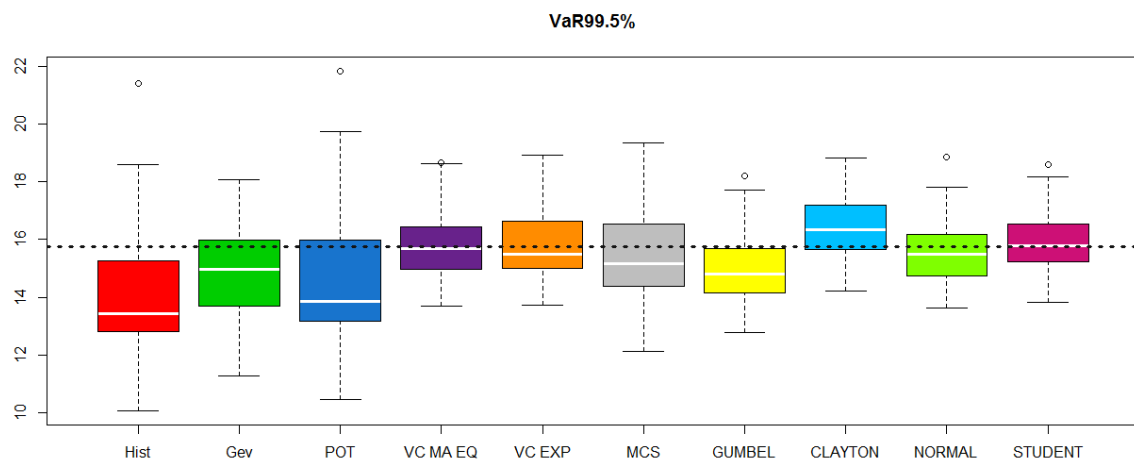
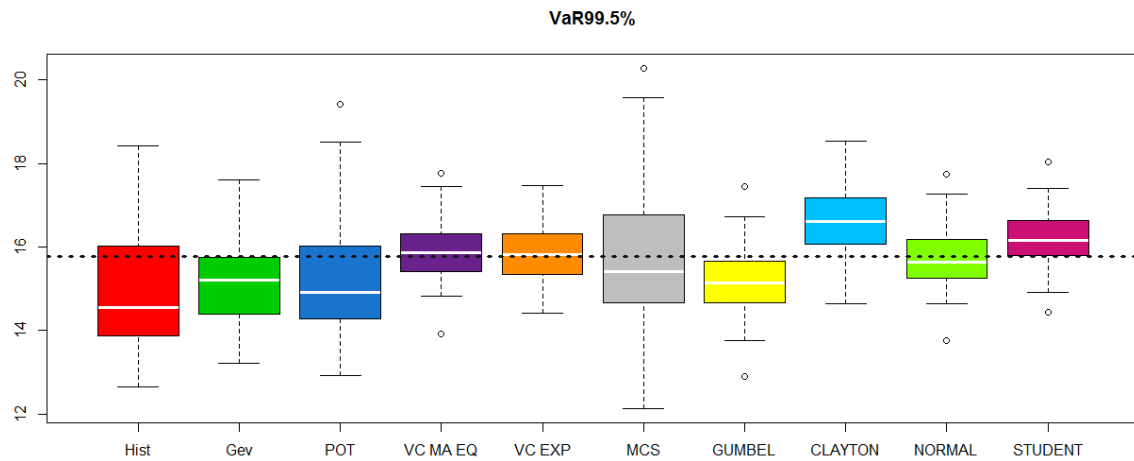


Historique de 255 données.

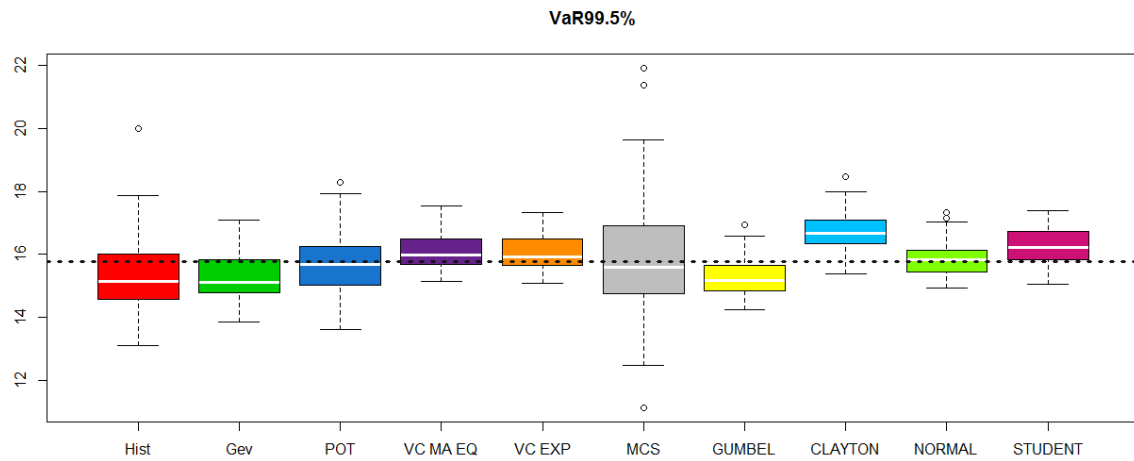


Historique de 500 données.



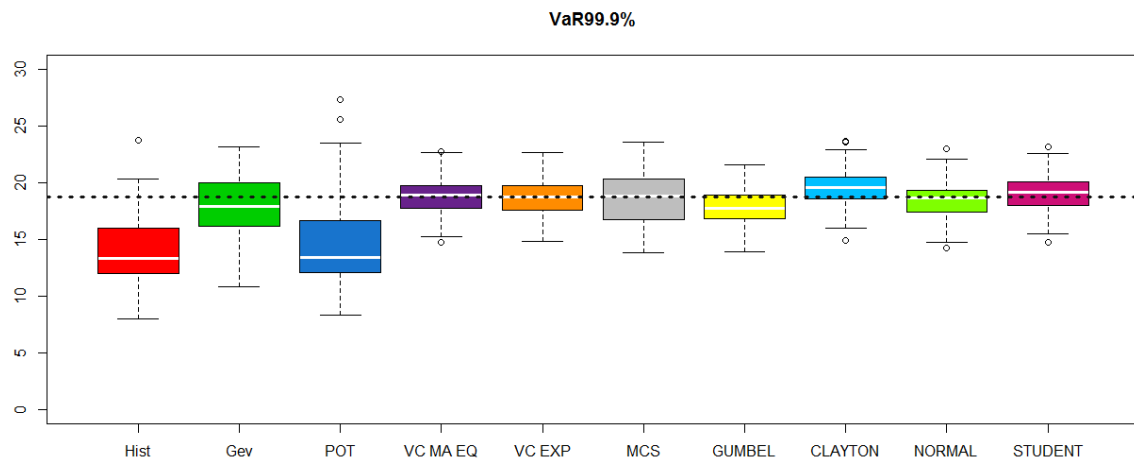
VaR99,5%*Historique de 50 données.**Historique de 100 données.**Historique de 255 données.*

Historique de 500 données.



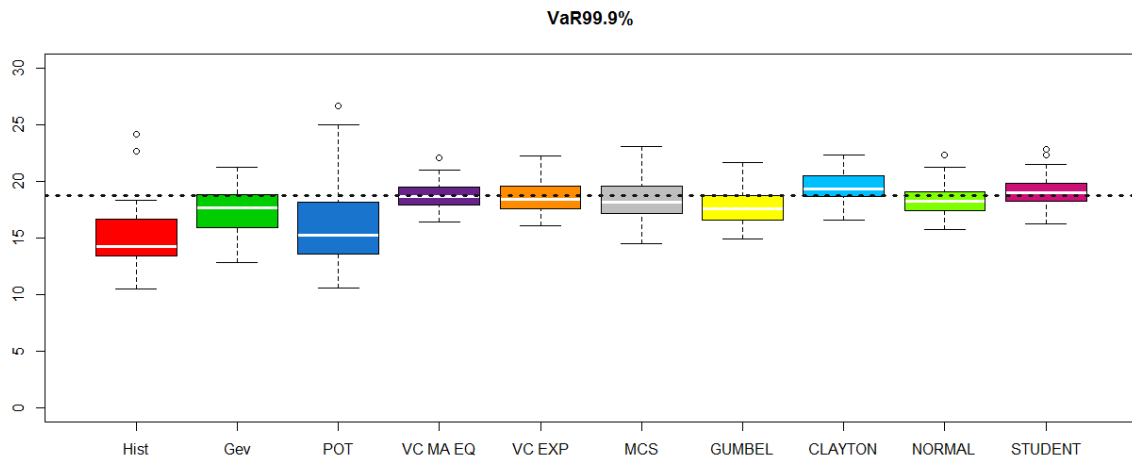
VaR99.9%

Historique de 50 données.

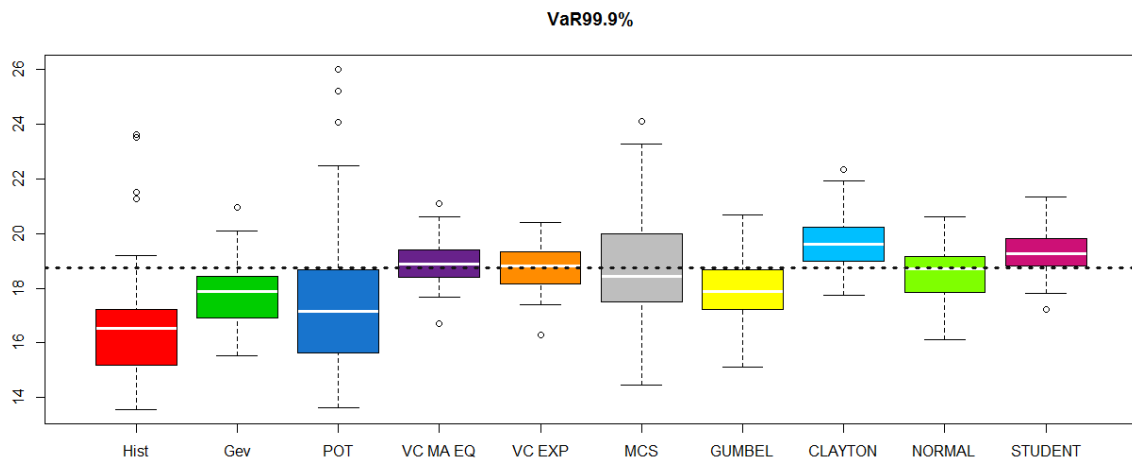


Axe des ordonnées borné à 30 car certaines valeurs extrêmes rendent le graphe illisible.

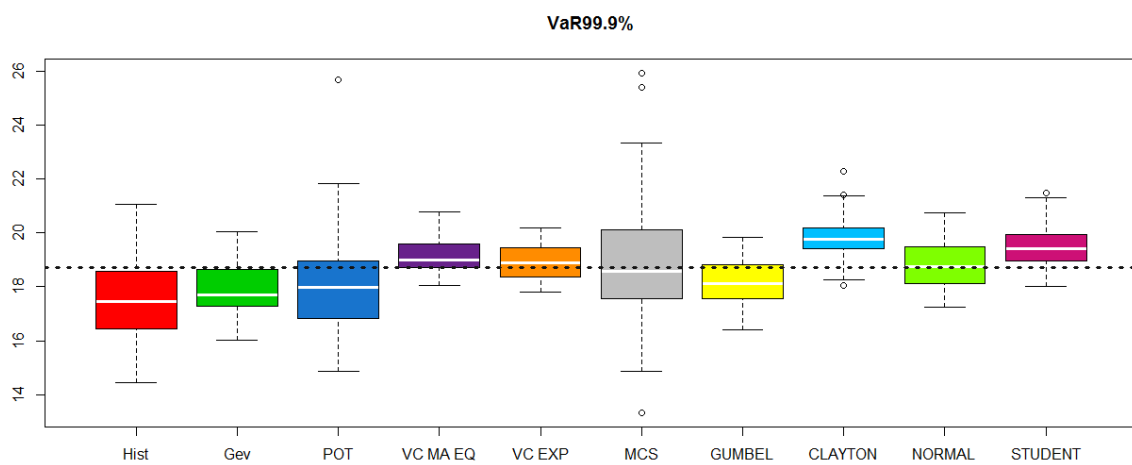
Historique de 100 données.



Historique de 255 données.



Historique de 500 données.



ANNEXE 3: VaR selon le niveau de corrélation de Kendall (tables).

VaR90%

VaR90%	-0,75	-0,50	-0,25	0,00	0,25	0,50
Réelle	4,01	4,74	5,66	6,58	7,39	8,01
Historique	4,08	4,88	5,83	6,75	7,50	8,11
Generalized Extreme Value	4,08	4,84	5,78	6,72	7,54	8,16
Peak Over the Threshold	4,08	4,85	5,79	6,72	7,51	8,12
VarCov. Equally Weighted	4,13	4,85	5,77	6,70	7,51	8,13
VarCov. Expo. Weighted	4,20	4,94	5,87	6,79	7,62	8,24
Monte Carlo	4,08	4,78	5,68	6,59	7,40	8,02
Copule Gumbel	NA	NA	NA	NA	7,36	8,00
Copule Clayton	4,14	4,68	5,57	6,67	7,65	8,36
Copule Normale	4,05	4,79	5,73	6,67	7,49	8,11
Copule Student	4,09	4,74	5,54	6,40	7,25	7,96

VaR99%

VaR99%	-0,75	-0,50	-0,25	0,00	0,25	0,50
Réelle	7,04	8,43	10,11	11,78	13,21	14,31
Historique	6,94	8,24	9,89	11,55	13,06	14,14
Generalized Extreme Value	6,97	8,31	9,96	11,57	12,96	14,01
Peak Over the Threshold	7,06	8,43	10,12	11,78	13,26	14,36
VarCov. Equally Weighted	7,56	8,85	10,46	12,08	13,49	14,57
VarCov. Expo. Weighted	7,25	8,64	10,36	12,02	13,47	14,58
Monte Carlo	7,47	8,71	10,30	11,90	13,30	14,38
Copule Gumbel	NA	NA	NA	NA	12,91	13,93
Copule Clayton	7,06	7,81	9,18	12,03	14,45	15,17
Copule Normale	7,12	8,50	10,21	11,89	13,35	14,45
Copule Student	7,11	8,77	10,92	12,66	13,88	14,69

VaR99,5%

VaR99,5%	-0,75	-0,50	-0,25	0,00	0,25	0,50
Réelle	7,74	9,28	11,15	12,98	14,56	15,76
Historique	7,50	9,06	10,88	12,61	14,10	15,28
Generalized Extreme Value	7,60	9,09	10,89	12,65	14,17	15,31
Peak Over the Threshold	7,67	9,19	11,05	12,86	14,47	15,67
VarCov. Equally Weighted	8,37	9,79	11,57	13,35	14,89	16,07
VarCov. Expo. Weighted	7,91	9,51	11,43	13,23	14,81	16,03
Monte Carlo	8,27	9,64	11,39	13,14	14,68	15,87
Copule Gumbel	NA	NA	NA	NA	14,23	15,27
Copule Clayton	7,69	8,52	9,97	13,26	16,02	16,74
Copule Normale	7,82	9,37	11,24	13,09	14,67	15,86
Copule Student	7,83	10,08	12,61	14,36	15,52	16,30

VaR99,9%

VaR99,9%	-0,75	-0,50	-0,25	0,00	0,25	0,50
Réelle	9,11	10,99	13,25	15,44	17,31	18,74
Historique	8,53	10,27	12,36	14,42	16,18	17,53
Generalized Extreme Value	8,86	10,61	12,73	14,80	16,56	17,90
Peak Over the Treshold	8,78	10,61	12,77	14,88	16,68	18,10
VarCov. Equally Weighted	10,03	11,71	13,82	15,92	17,75	19,14
VarCov. Expo. Weighted	9,25	11,15	13,45	15,66	17,53	18,92
Monte Carlo	9,91	11,54	13,61	15,68	17,50	18,89
Copule Gumbel	NA	NA	NA	NA	16,79	18,16
Copule Clayton	8,93	9,92	11,49	15,66	19,17	19,85
Copule Normale	9,17	11,09	13,34	15,44	17,32	18,78
Copule Student	9,67	13,70	16,32	17,85	18,86	19,49

ANNEXE 4: Evaluation des estimateurs de VaR selon la corrélation : écart moyen par rapport à la réalité (tables).

VaR90%

VaR90%	-0,75	-0,50	-0,25	0,00	0,25	0,50
Historique	1,7%	3,1%	3,0%	2,5%	1,5%	1,2%
Generalized Extreme Value	1,7%	2,1%	2,1%	2,1%	2,0%	1,8%
Peak Over the Threshold	1,7%	2,4%	2,3%	2,1%	1,6%	1,3%
VarCov. Equally Weighted	2,9%	2,4%	1,9%	1,7%	1,5%	1,4%
VarCov. Expo. Weighted	4,6%	4,2%	3,7%	3,2%	3,0%	2,8%
Monte Carlo	1,6%	0,9%	0,3%	0,1%	0,1%	0,1%
Copule Gumbel	NA	NA	NA	NA	-0,4%	-0,2%
Copule Clayton	3,1%	-1,1%	-1,6%	1,3%	3,5%	4,3%
Copule Normale	1,0%	1,2%	1,3%	1,3%	1,3%	1,2%
Copule Student	2,0%	0,1%	-2,1%	-2,8%	-2,0%	-0,7%

VaR99%

VaR99%	-0,75	-0,50	-0,25	0,00	0,25	0,50
Historique	-1,5%	-2,3%	-2,2%	-1,9%	-1,2%	-1,1%
Generalized Extreme Value	-1,1%	-1,4%	-1,5%	-1,7%	-1,9%	-2,1%
Peak Over the Threshold	0,3%	0,0%	0,1%	0,1%	0,4%	0,4%
VarCov. Equally Weighted	7,3%	4,9%	3,5%	2,6%	2,1%	1,8%
VarCov. Expo. Weighted	2,9%	2,5%	2,5%	2,1%	2,0%	1,9%
Monte Carlo	6,0%	3,3%	1,8%	1,0%	0,7%	0,5%
Copule Gumbel	NA	NA	NA	NA	-2,3%	-2,6%
Copule Clayton	0,2%	-7,4%	-9,2%	2,2%	9,4%	6,0%
Copule Normale	1,1%	0,8%	0,9%	1,0%	1,0%	1,0%
Copule Student	0,9%	3,9%	7,9%	7,5%	5,1%	2,7%

VaR99,5%

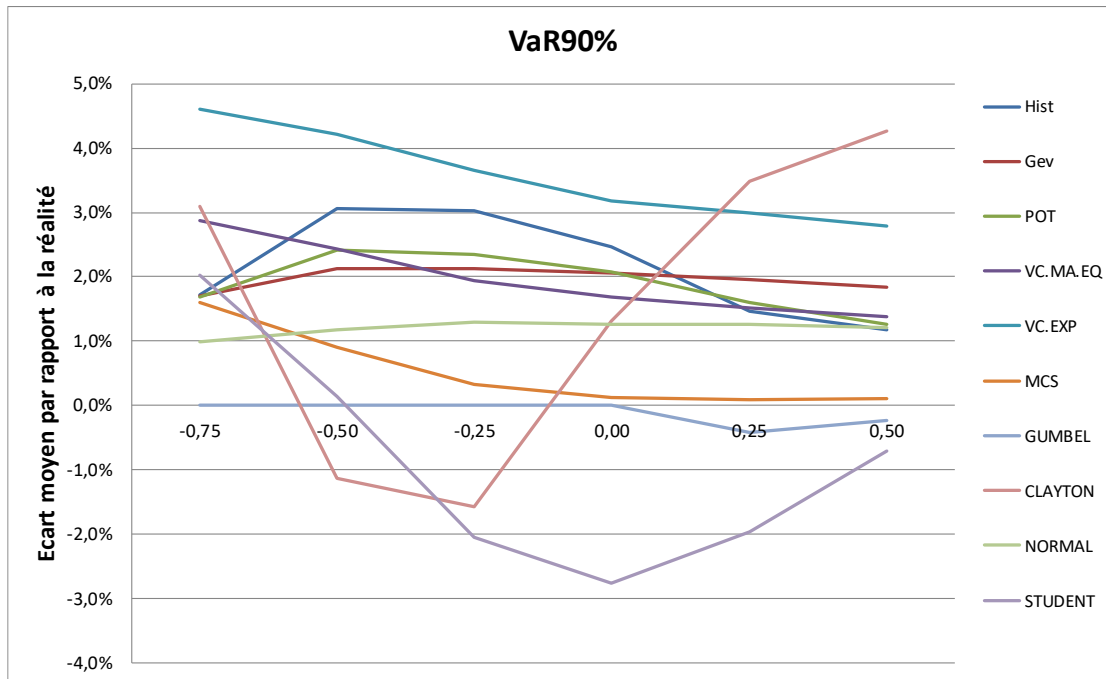
VaR99,5%	-0,75	-0,50	-0,25	0,00	0,25	0,50
Historique	-3,0%	-2,4%	-2,4%	-2,8%	-3,2%	-3,0%
Generalized Extreme Value	-1,7%	-2,1%	-2,3%	-2,5%	-2,7%	-2,9%
Peak Over the Threshold	-0,8%	-0,9%	-0,9%	-0,9%	-0,67%	-0,58%
VarCov. Equally Weighted	8,2%	5,5%	3,7%	2,8%	2,2%	1,9%
VarCov. Expo. Weighted	2,3%	2,4%	2,5%	1,9%	1,7%	1,7%
Monte Carlo	6,9%	3,9%	2,1%	1,2%	0,8%	0,7%
Copule Gumbel	NA	NA	NA	NA	-2,3%	-3,1%
Copule Clayton	-0,6%	-8,2%	-10,6%	2,1%	10,0%	6,2%
Copule Normale	1,0%	1,0%	0,8%	0,8%	0,7%	0,6%
Copule Student	1,2%	8,6%	13,1%	10,6%	6,6%	3,4%

VaR99,9%

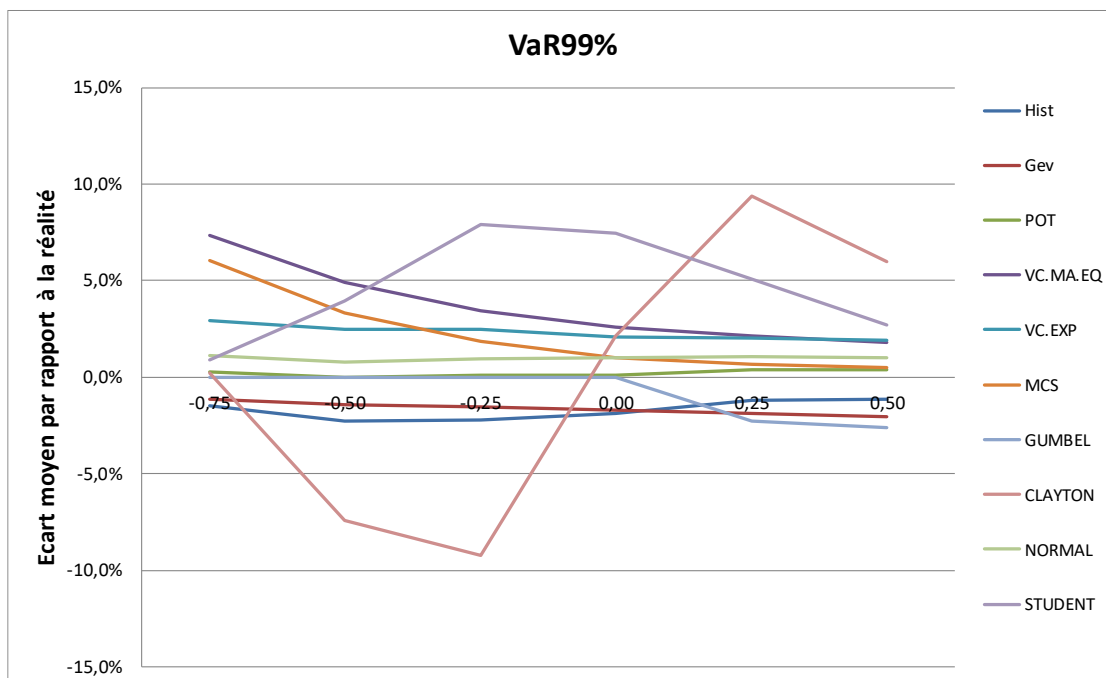
VaR99,9%	-0,75	-0,50	-0,25	0,00	0,25	0,50
Historique	-6,3%	-6,6%	-6,7%	-6,6%	-6,6%	-6,4%
Generalized Extreme Value	-2,7%	-3,5%	-3,9%	-4,1%	-4,3%	-4,5%
Peak Over the Treshold	-3,6%	-3,5%	-3,6%	-3,6%	-3,7%	-3,4%
VarCov. Equally Weighted	10,2%	6,6%	4,3%	3,2%	2,5%	2,1%
VarCov. Expo. Weighted	1,6%	1,4%	1,5%	1,4%	1,2%	1,0%
Monte Carlo	8,9%	5,0%	2,7%	1,6%	1,1%	0,8%
Copule Gumbel	NA	NA	NA	NA	-3,0%	-3,1%
Copule Clayton	-1,9%	-9,8%	-13,2%	1,5%	10,7%	5,9%
Copule Normale	0,8%	0,9%	0,7%	0,0%	0,0%	0,2%
Copule Student	6,2%	24,7%	23,1%	15,6%	8,9%	4,0%

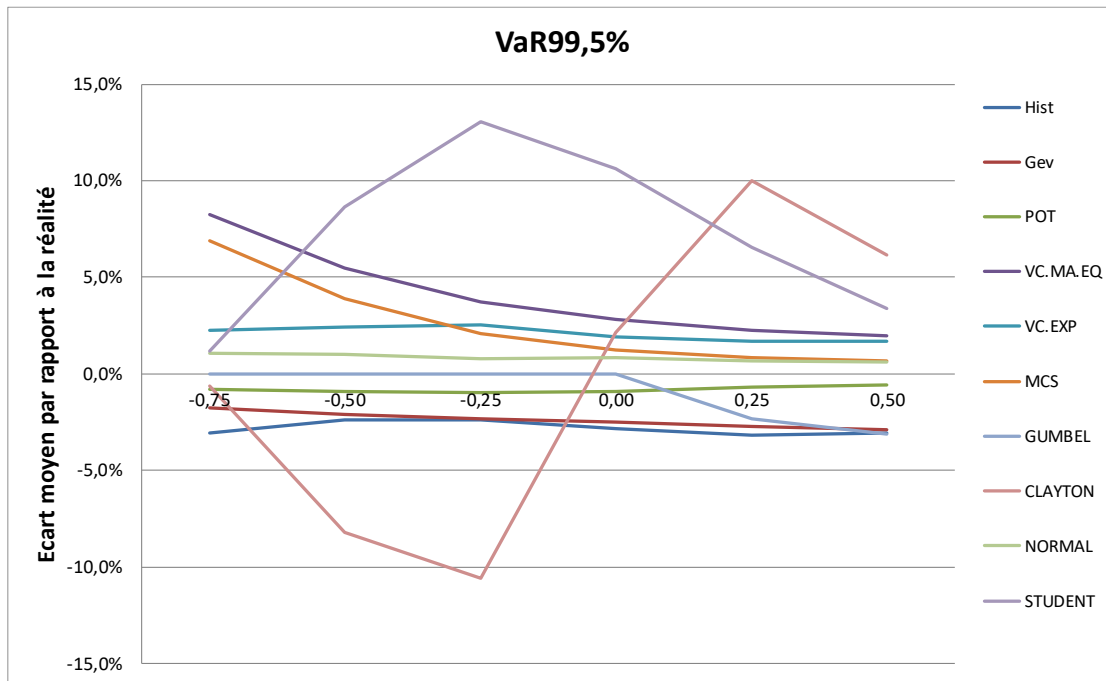
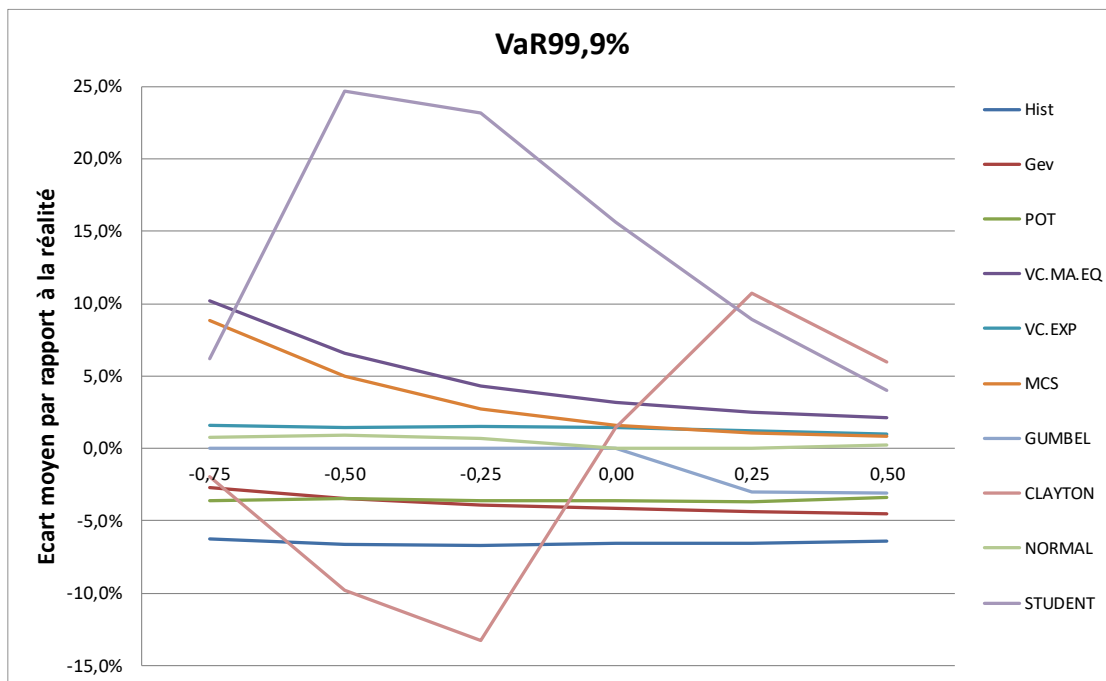
ANNEXE 5: Evaluation des estimateurs de VaR selon la corrélation : écart moyen par rapport à la réalité (graphes).

VaR90%



VaR99,0%



VaR99,5%**VaR99,9%**

ANNEXE 6: Evaluation des estimateurs de VaR selon la corrélation : Variance des résultats selon la corrélation (tables).

VaR90%

VaR90%	-0,75	-0,50	-0,25	0,00	0,25	0,50	0,75
Historique	5,5%	7,9%	11,0%	14,5%	21,0%	28,7%	32,8%
Generalized Extreme Value	3,4%	4,7%	6,8%	9,5%	12,5%	15,1%	17,0%
Peak Over the Treshold	4,5%	6,7%	9,6%	12,4%	16,3%	19,6%	22,4%
VarCov. Equally Weighted	3,4%	4,5%	6,3%	8,6%	11,2%	13,5%	15,1%
VarCov. Expo. Weighted	3,8%	4,9%	6,7%	8,9%	12,4%	15,1%	15,3%
Monte Carlo	33,6%	40,8%	54,7%	73,6%	94,6%	113,2%	126,1%
Copule Gumbel	NA	NA	NA	NA	10,8%	13,3%	15,2%
Copule Clayton	3,4%	5,2%	7,3%	10,2%	13,6%	16,0%	17,1%
Copule Normale	3,0%	4,7%	6,7%	9,6%	12,5%	14,4%	16,3%
Copule Student	3,1%	5,0%	7,1%	9,2%	11,9%	13,6%	14,7%

VaR99,0%

VaR99%	-0,75	-0,50	-0,25	0,00	0,25	0,50	0,75
Historique	19,7%	31,7%	46,3%	46,3%	76,4%	90,1%	81,7%
Generalized Extreme Value	10,3%	15,4%	22,5%	22,5%	38,4%	44,7%	48,9%
Peak Over the Treshold	12,9%	18,0%	26,8%	26,8%	50,0%	56,8%	60,9%
VarCov. Equally Weighted	7,1%	9,3%	12,8%	12,8%	22,0%	26,2%	29,1%
VarCov. Expo. Weighted	5,8%	9,0%	13,1%	13,1%	19,8%	23,4%	31,2%
Monte Carlo	107,4%	130,7%	173,9%	173,9%	293,9%	348,5%	386,3%
Copule Gumbel	NA	NA	NA	NA	21,5%	26,5%	31,0%
Copule Clayton	6,3%	9,0%	16,4%	16,4%	33,6%	31,8%	34,3%
Copule Normale	6,1%	10,7%	15,0%	15,0%	29,5%	32,0%	33,0%
Copule Student	5,6%	10,2%	15,1%	15,1%	21,2%	28,1%	28,3%

VaR99,5%

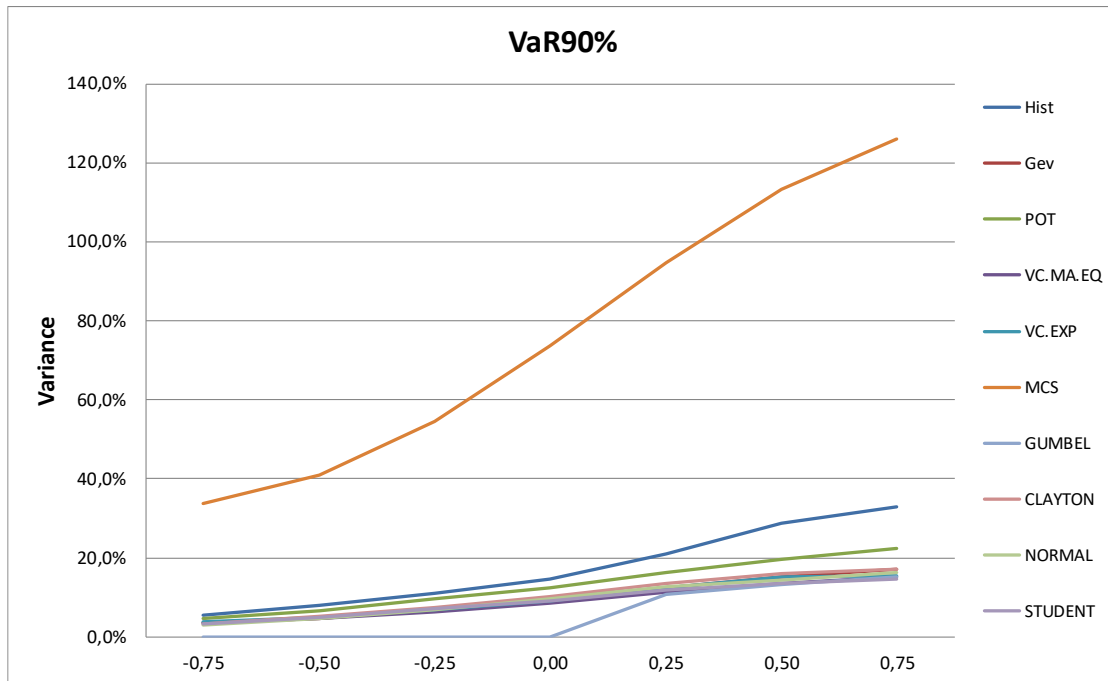
VaR99,5%	-0,75	-0,50	-0,25	0,00	0,25	0,50	0,75
Historique	35,2%	56,1%	83,8%	109,3%	134,6%	143,4%	145,9%
Generalized Extreme Value	13,1%	19,8%	29,0%	39,3%	48,9%	56,6%	61,6%
Peak Over the Treshold	19,2%	27,5%	40,8%	58,7%	78,8%	96,1%	101,9%
VarCov. Equally Weighted	8,2%	10,8%	14,8%	19,9%	25,3%	30,0%	33,4%
VarCov. Expo. Weighted	6,4%	10,7%	15,9%	19,5%	23,8%	27,9%	31,5%
Monte Carlo	130,8%	159,1%	211,4%	280,8%	355,6%	421,0%	466,1%
Copule Gumbel	NA	NA	NA	NA	24,9%	33,8%	36,6%
Copule Clayton	6,8%	11,0%	18,3%	45,1%	40,3%	37,8%	40,0%
Copule Normale	7,2%	12,2%	22,7%	28,8%	32,0%	34,3%	37,1%
Copule Student	6,7%	15,4%	21,2%	27,1%	27,5%	32,2%	37,3%

VaR99,9%

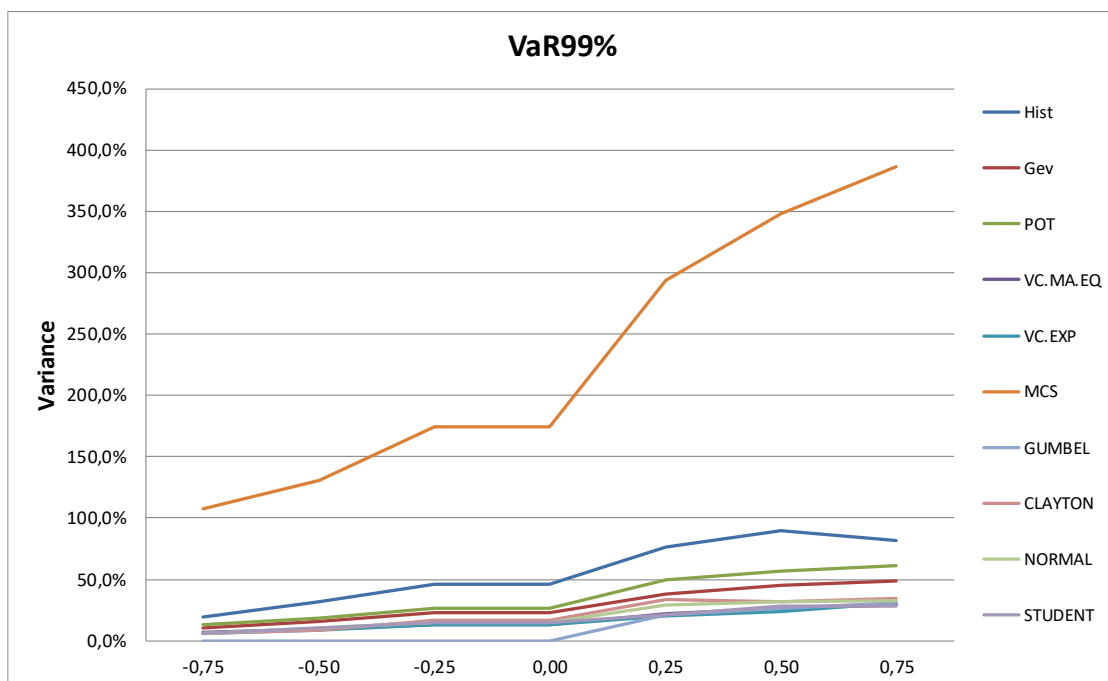
VaR99,9%	-0,75	-0,50	-0,25	0,00	0,25	0,50	0,75
Historique	40,6%	65,3%	97,9%	133,3%	172,8%	210,1%	240,3%
Generalized Extreme Value	20,5%	31,5%	46,4%	62,4%	76,7%	87,9%	95,1%
Peak Over the Treshold	55,0%	84,7%	124,6%	181,2%	238,7%	350,0%	331,4%
VarCov. Equally Weighted	10,8%	14,2%	19,6%	26,1%	32,9%	38,8%	43,0%
VarCov. Expo. Weighted	15,7%	22,7%	26,1%	33,8%	38,5%	45,1%	72,2%
Monte Carlo	185,5%	225,4%	298,5%	394,7%	497,7%	587,4%	649,1%
Copule Gumbel	NA	NA	NA	NA	38,8%	65,6%	81,6%
Copule Clayton	10,6%	16,5%	27,0%	90,0%	65,4%	67,3%	58,6%
Copule Normale	14,9%	26,3%	32,2%	46,2%	54,0%	67,9%	71,4%
Copule Student	19,0%	68,1%	62,7%	52,1%	54,6%	59,1%	62,5%

ANNEXE 7: Evaluation des estimateurs de VaR selon la corrélation : Variance des résultats selon la corrélation (graphes).

VaR90%



VaR99%



ANNEXE 8: VaR calculée pour chaque année (tables).

VaR90%

VaR90%	2013	2014	2015	2016	2017
Historique	0,683	0,805	1,252	1,137	0,531
Generalized Extreme Value	0,876	0,951	1,394	1,370	0,569
Peak Over the Threshold	0,757	0,808	1,256	1,150	0,571
VarCov. Equally Weighted	0,848	0,898	1,332	1,283	0,583
VarCov. Expo. Weighted	0,773	1,288	1,350	0,622	0,470
Monte Carlo	0,846	0,961	1,478	1,319	0,576
Copule Gumbel	0,829	0,875	1,320	1,273	0,575
Copule Clayton	0,867	0,911	1,347	1,299	0,600
Copule Normale	0,845	0,889	1,328	1,282	0,585
Copule Student	0,835	0,881	1,324	1,277	0,579

VaR99%

VaR99%	2013	2014	2015	2016	2017
Historique	1,731	2,041	2,757	2,715	1,040
Generalized Extreme Value	1,572	1,651	2,462	2,485	0,945
Peak Over the Threshold	1,900	2,042	2,881	2,905	1,041
VarCov. Equally Weighted	1,581	1,650	2,436	2,329	1,087
VarCov. Expo. Weighted	1,446	2,355	2,468	1,133	0,883
Monte Carlo	1,559	1,736	2,657	2,381	1,066
Copule Gumbel	1,514	1,575	2,369	2,265	1,048
Copule Clayton	1,631	1,685	2,461	2,357	1,125
Copule Normale	1,572	1,633	2,430	2,324	1,088
Copule Student	1,610	1,666	2,458	2,353	1,112

VaR99,5%

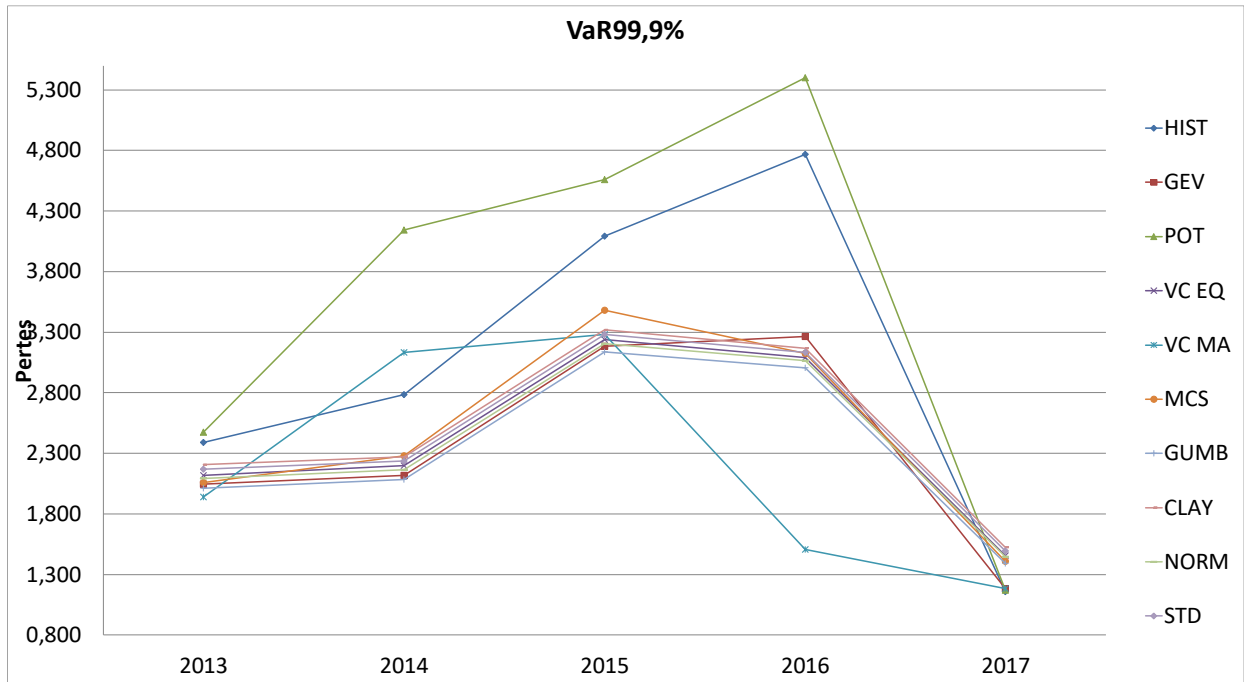
VaR99,5%	2013	2014	2015	2016	2017
Historique	2,034	2,199	2,865	3,040	1,126
Generalized Extreme Value	1,730	1,807	2,703	2,743	1,025
Peak Over the Threshold	2,120	2,560	3,380	3,568	1,100
VarCov. Equally Weighted	1,756	1,830	2,699	2,578	1,208
VarCov. Expo. Weighted	1,607	2,609	2,734	1,255	0,981
Monte Carlo	1,743	1,935	2,960	2,654	1,192
Copule Gumbel	1,673	1,739	2,620	2,498	1,162
Copule Clayton	1,807	1,864	2,722	2,603	1,247
Copule Normale	1,738	1,801	2,674	2,557	1,202
Copule Student	1,791	1,849	2,726	2,606	1,237

VaR99,9%

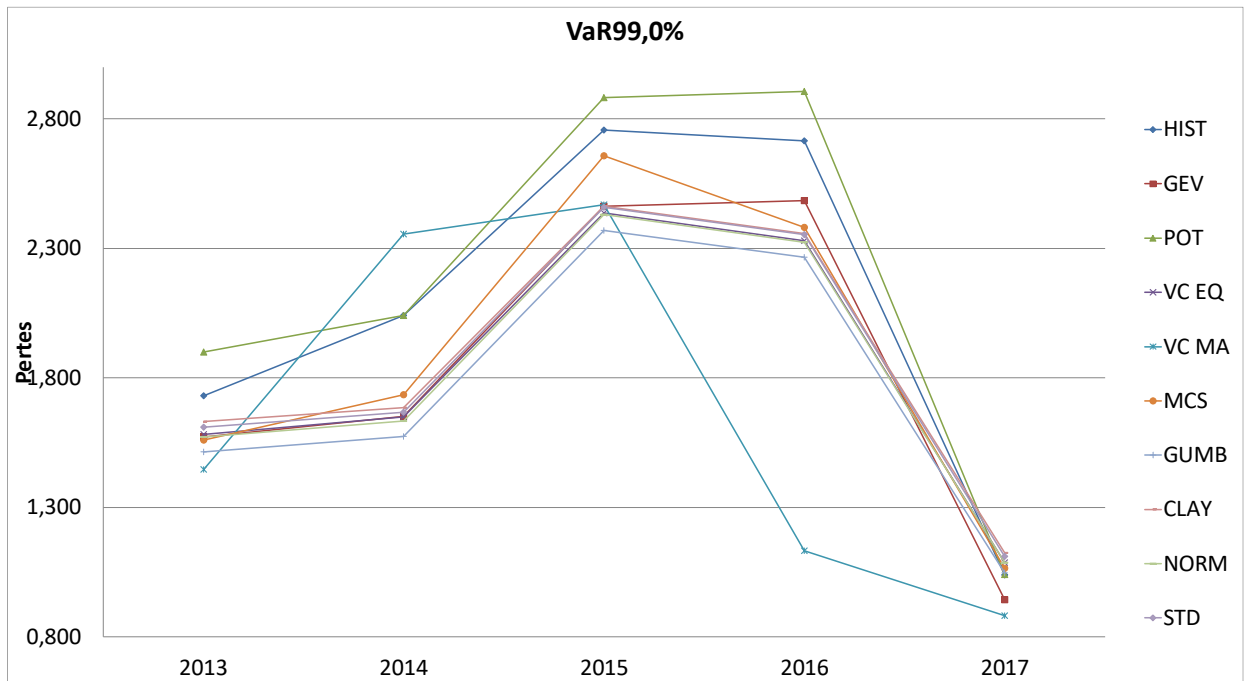
VaR99,9%	2013	2014	2015	2016	2017
Historique	2,390	2,786	4,094	4,770	1,157
Generalized Extreme Value	2,044	2,116	3,186	3,264	1,182
Peak Over the Treshold	2,476	4,142	4,560	5,402	1,172
VarCov. Equally Weighted	2,116	2,199	3,239	3,091	1,455
VarCov. Expo. Weighted	1,937	3,132	3,282	1,506	1,184
Monte Carlo	2,058	2,277	3,480	3,123	1,408
Copule Gumbel	2,010	2,085	3,135	3,004	1,392
Copule Clayton	2,207	2,270	3,319	3,168	1,523
Copule Normale	2,092	2,164	3,204	3,066	1,447
Copule Student	2,167	2,236	3,281	3,131	1,495

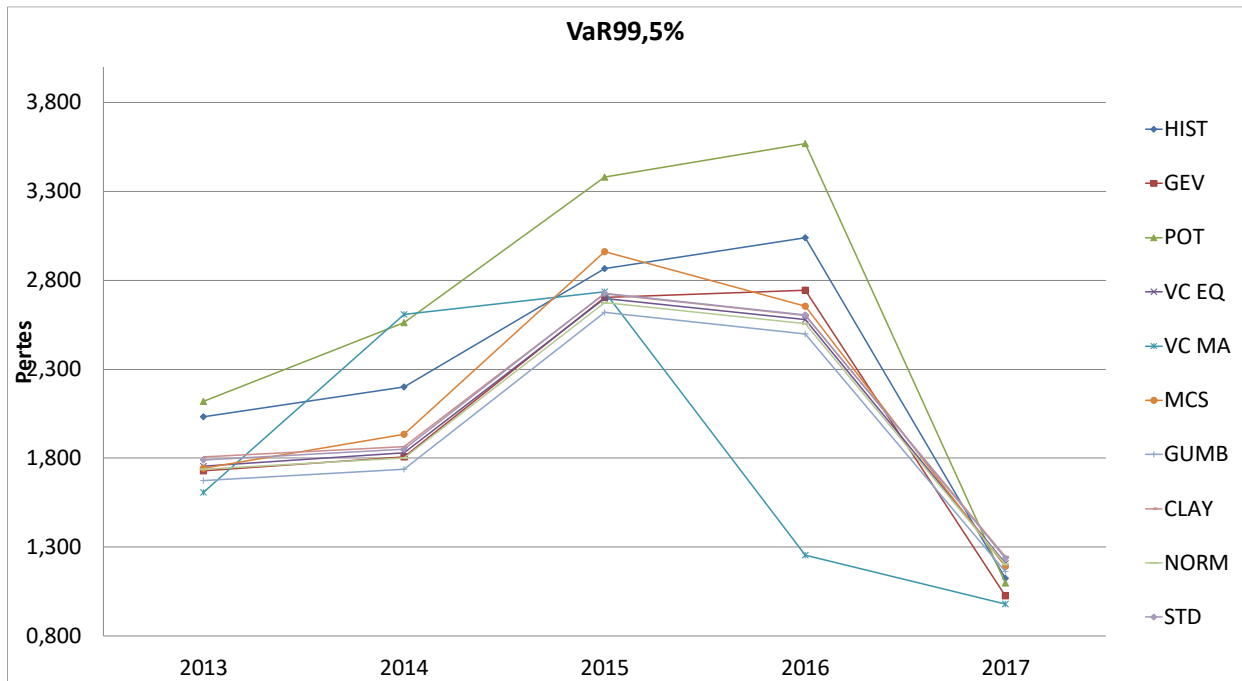
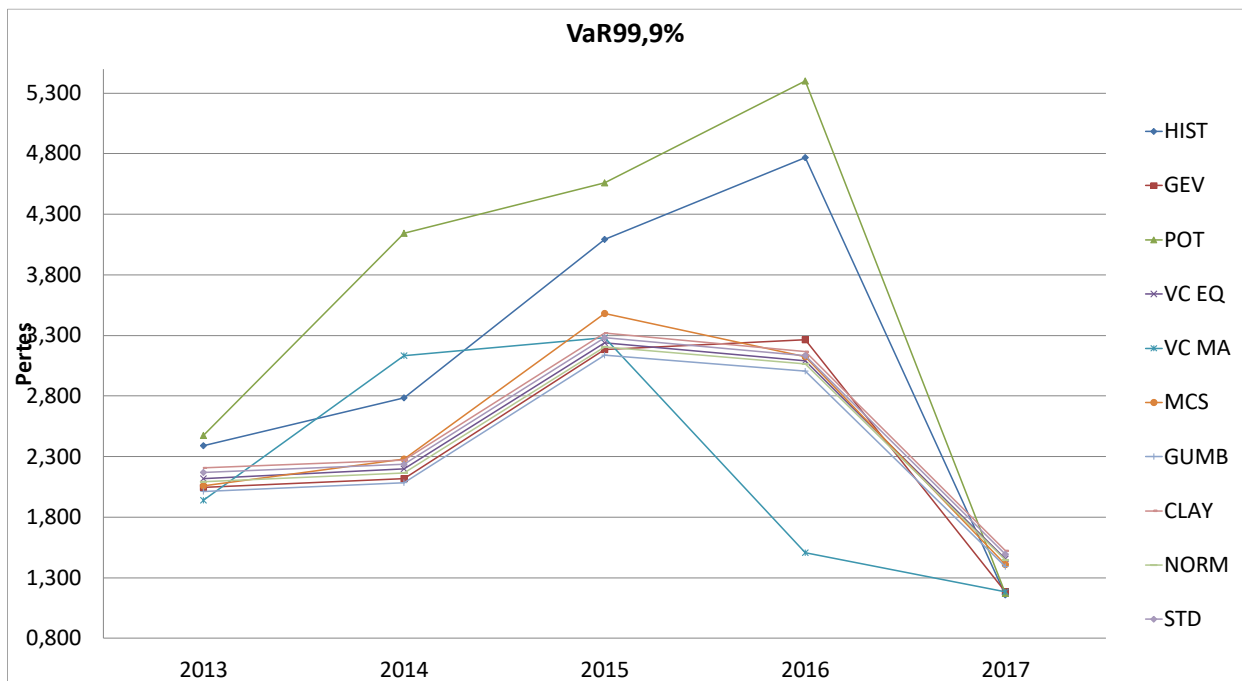
ANNEXE 9: VaR calculée pour chaque année (graphes).

VaR90%



VaR99,0 %



VaR99,5%**VaR99,9%**

ANNEXE 10: Stabilité de la VaR à l'ajout de données historiques (tables).

VaR90%

VaR90%	2017	2016-17	2015-17	2014-17	2013-17
Historique	0,531	0,826	0,974	0,920	0,877
Generalized Extreme Value	0,569	1,042	1,208	1,159	1,108
Peak Over the Treshold	0,571	0,815	0,954	0,917	0,884
VarCov. Equally Weighted	0,583	0,992	1,116	1,065	1,024
VarCov. Expo. Weighted	0,470	0,482	0,480	0,479	0,474
Monte Carlo	0,576	1,014	1,186	1,134	1,081
Gumbel	0,575	0,976	1,101	1,047	1,006
Clayton	0,600	1,007	1,131	1,080	1,040
Normal	0,585	0,987	1,112	1,060	1,019
Student	0,579	0,981	1,106	1,053	1,011

VaR99%

VaR99%	2017	2016-17	2015-17	2014-17	2013-17
Historique	1,040	2,440	2,585	2,549	2,480
Generalized Extreme Value	0,945	1,895	2,118	2,025	1,934
Peak Over the Treshold	1,041	2,276	2,550	2,450	2,362
VarCov. Equally Weighted	1,087	1,815	2,042	1,950	1,881
VarCov. Expo. Weighted	0,883	0,893	0,891	0,890	0,886
Monte Carlo	1,066	1,843	2,146	2,050	1,961
Gumbel	1,048	1,752	1,979	1,885	1,814
Clayton	1,125	1,844	2,072	1,981	1,915
Normal	1,088	1,804	2,031	1,938	1,869
Student	1,112	1,835	2,062	1,969	1,901

VaR99,5%

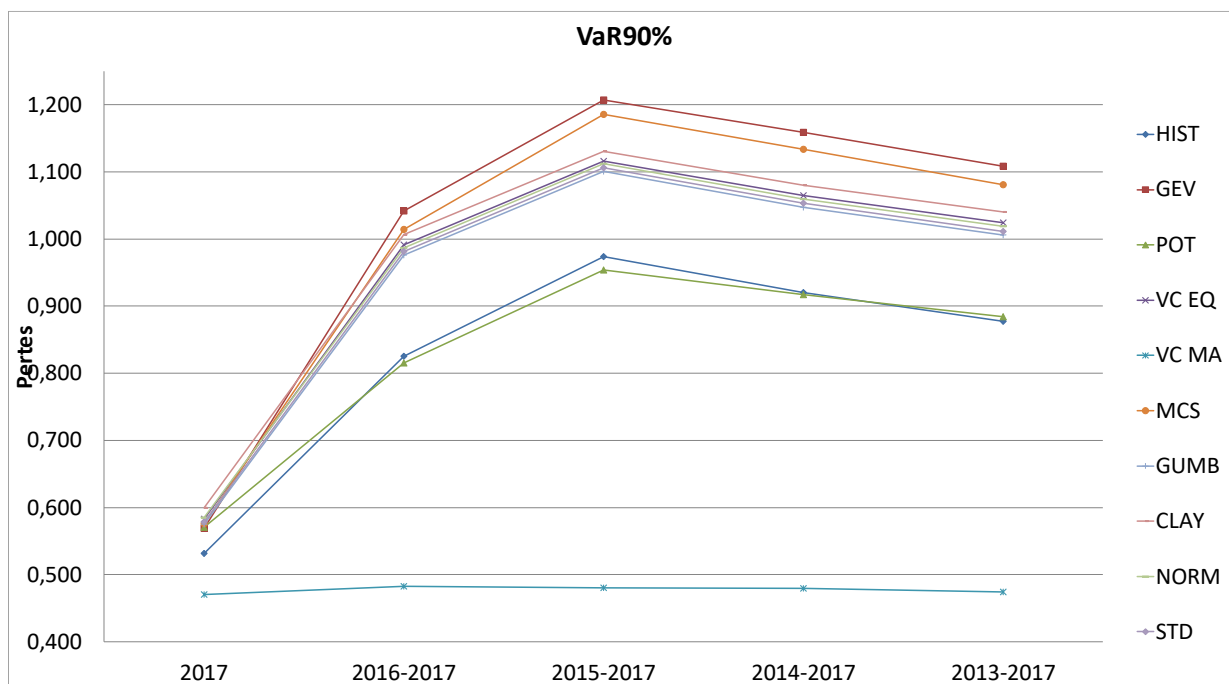
VaR99,5%	2017	2016-17	2015-17	2014-17	2013-17
Historique	1,126	2,719	2,886	2,873	2,779
Generalized Extreme Value	1,025	2,089	2,322	2,219	2,118
Peak Over the Treshold	1,100	2,868	3,136	2,992	2,852
VarCov. Equally Weighted	1,208	2,011	2,262	2,161	2,085
VarCov. Expo. Weighted	0,981	0,991	0,989	0,988	0,984
Monte Carlo	1,192	2,056	2,392	2,286	2,187
Gumbel	1,162	1,932	2,179	2,077	1,995
Clayton	1,247	2,041	2,288	2,192	2,122
Normal	1,202	1,988	2,239	2,136	2,061
Student	1,237	2,034	2,287	2,183	2,109

VaR99,9%

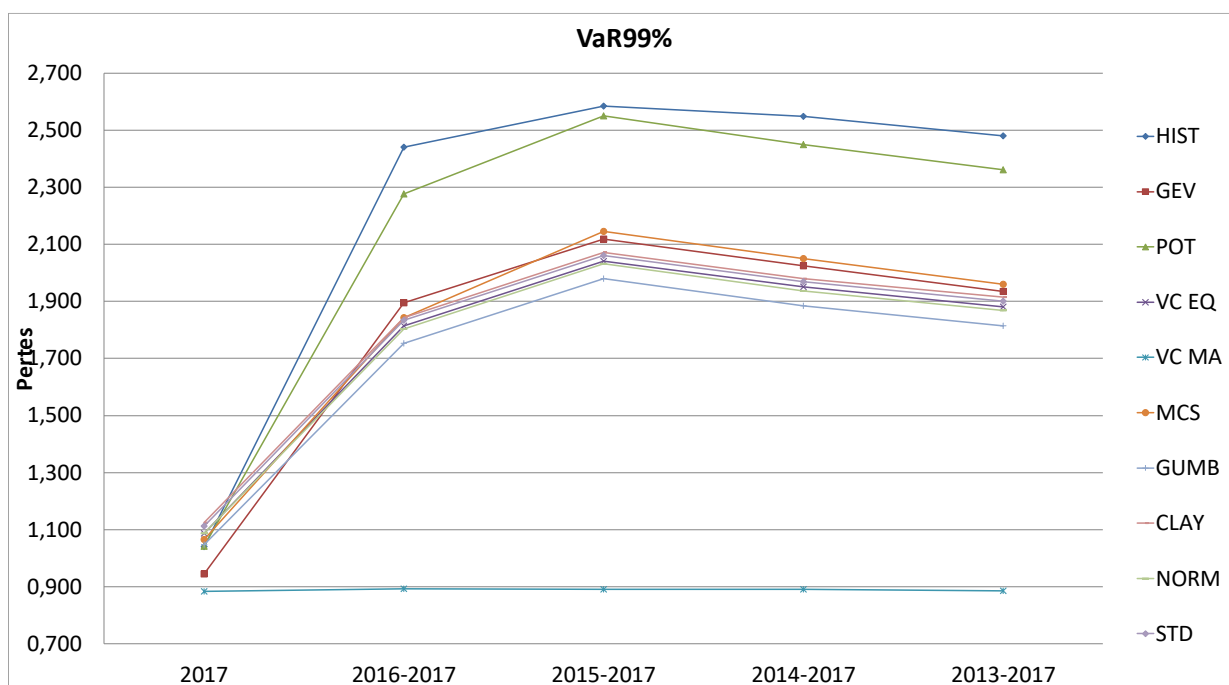
VaR99,9%	2017	2016-2017	2015-2017	2014-2017	2013-2017
Historique	1,157	4,194	4,706	4,480	4,117
Generalized Extreme Value	1,182	2,478	2,730	2,604	2,484
Peak Over the Treshold	1,172	4,618	4,747	4,420	4,077
VarCov. Equally Weighted	1,455	2,414	2,716	2,595	2,505
VarCov. Expo. Weighted	1,184	1,193	1,191	1,190	1,187
Monte Carlo	1,408	2,422	2,815	2,691	2,575
Gumbel	1,392	2,321	2,611	2,494	2,398
Clayton	1,523	2,479	2,784	2,664	2,578
Normal	1,447	2,386	2,686	2,563	2,476
Student	1,495	2,448	2,753	2,632	2,545

ANNEXE 11: Stabilité de la VaR à l'ajout de données historiques (graphes).

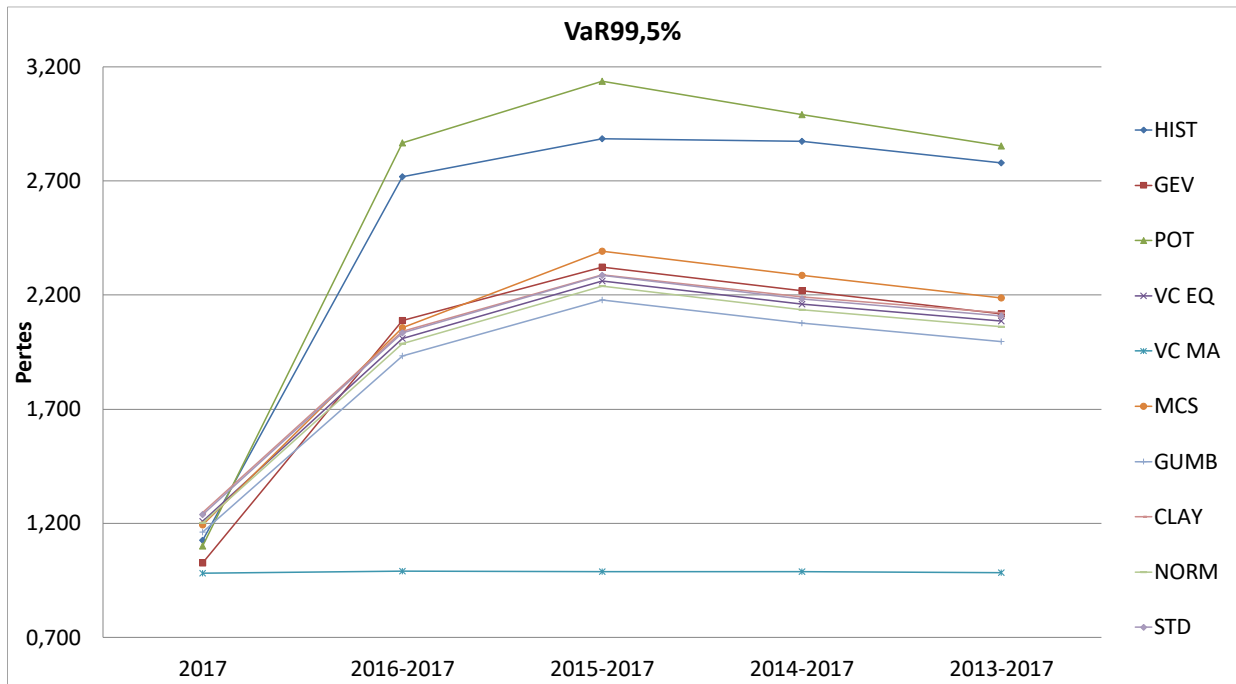
VaR90%



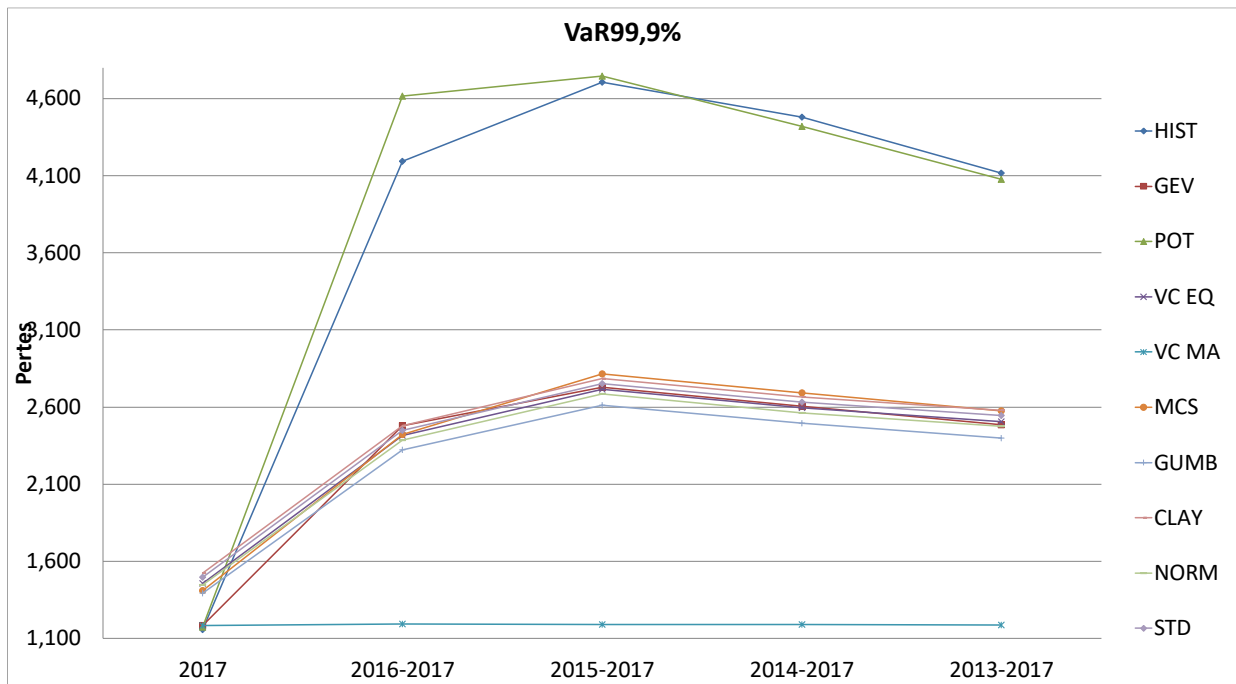
VaR99%



VaR99,5%



VaR99,9%



Bibliographie

- Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., & Heath, D. (1998). *Coherent measures of risk*.
- Bakolas, N., & Lefebvre, X. (2017). *Corrélation et modélisation des dépendances pour le calcul du SCR du risque de primes et de réserve*. Louvain School of Statistics, Biostatistics and Actuarial Science.
- Balkema, A. A., & de Haan, L. (1974). Residual life time at great age. *Annals of Probability*, 2(5), S. 792-804.
- Benseghir, S. (2006). *Calcul de la VaR selon l'approche historique et la théorie des valeurs extrêmes sur un fonds alternatif de Dexia Asset Management*.
- Charpentier, A. (2010). *Mesures de risques*.
- Charpentier, A. (2014). *Computational Actuarial Science with R*. Chapman & Hall/Crc: the R Series.
- Denuit, M., & Charpentier, A. (2004). *Mathématiques de l'assurance non-vie: Tome 1*. Economica.
- Denuit, M., Dhaene, J., Goovaerts, M., & Kaas, R. (2009). *Actuarial Theory for Dependent Risks: Measures, Orders and Models*. Wiley.
- Dispas, C., & Boudghene, Y. (2011). *Gestion de Portefeuille: Guide pratique*. Larcier.
- Embrechts, P. (2000). *Extreme Value Theory: Potential And Limitations As An Integrated Risk Management Tool*.
- Embrechts, P., Höing, A., & Juri, A. (2003). *Using Copulae to bound the Value-at-Risk for functions of dependent risks*.
- Embrechts, P., Resnick, S. I., & Samorodnitsky, G. (April 1999). Extreme Value Theory as a Risk Management Tool. *North American Actuarial Journal*.
- Fisher, R. A., & Trippett, L. H. (1928). Limiting Forms of the Frequency Distribution of the Largest or Smallest Member of a Sample. *Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*(24), 180-190.
- Gajadharsingh, A. (2013). Méthodologie du calcul de la VaR de marché: revue de l'approche basée sur des simulations historiques. *Mesure et analyse quantitative du risque - Caisse de dépôt et placement du Québec*.
- Gilli, M., & Këllezi, E. (May 2006). An Application of Extreme Value Theory for Measuring Financial Risk. *Computational Economics*, S. 207-228.
- Gnedenko, B. (July 1943). Sur la distribution limite du terme maximum d'une série aléatoire. *Annals of Mathematics*, 44, S. 423-453.
- Haugh, M. (2004). *The Monte Carlo Framework, Examples from Finance and Generating Correlated Random Variables*.

- Hendricks, D. (April 1996). Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data. *FRBNY Economic Policy Review*.
- Hull, J., & White, A. (October 1998). Incorporating Volatility Updating Into The Historical Simulation Method For Value At Risk. *Journal Of Risk*.
- J.P. Morgan/Reuters. (1996). *RiskMetrics-Technical Document (Fourth Edition)*. New York.
- Jorion, P. (2003). *Financial Risk Manager handbook: second edition*. Wiley Finance.
- Lindskog, F., Mcneil, A., & Schmock, U. (2002). *Kendall's Tau for Elliptical Distributions*.
- Odening, M., & Hinrichs, J. (2003). Using extreme value theory to estimate Value-at-Risk. *Agricultural Finance Review*, 63(1), S. 55-73.
- Pickands, J. (1975). Statistical Inference Using Extreme Order Statistics. *The Annals of Statistics*, 3(1), S. 119-131.
- Planchet, F., & Charpentier, A. (2006). Estimer une VaR: Aspects pratiques. *CPA-Séminaire "mesures de risque"*.
- Puccetti, G., Rüschendorf, L., Small, D., & Vanduffel, S. (2015). Reduction of Value-at-Risk bounds via independence and variance information. *Scandinavian Actuarial Journal*.
- van den Goorbergh, R., & Vlaar, P. (1999). *Value-at-Risk Analysis of Stock Returns Historical Simulation, Variance Techniques or Tail Index Estimation?*

