

École polytechnique de Louvain

# Méthode d'évaluation numérique de la diffusion du chlore à l'intérieur du béton armé

Auteurs : **Arthur Herbiet**  
Promoteurs : **Luca Sgambi**  
Lecteurs : **Pierre Latteur, Martin Steinmetz**  
Année académique 2023–2024  
Master [120] : ingénieur civil des constructions

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Introduction</b>	<b>8</b>
<b>2</b>	<b>Dégradation du béton</b>	<b>9</b>
2.1	L'utilisation du béton au cours du temps . . . . .	9
2.2	Différentes pathologies du béton . . . . .	12
2.2.1	Causes physiques de dégradation . . . . .	12
2.2.2	Causes chimiques de dégradation . . . . .	14
2.2.3	Causes mécaniques de dégradation . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Modèles de dégradation par carbonatation et ions chlorure</b>	<b>20</b>
3.1	Phase d'initiation par carbonatation . . . . .	21
3.1.1	Description . . . . .	21
3.1.2	Évolution . . . . .	21
3.2	Phase d'initiation par les chlorures . . . . .	23
3.2.1	Provenance des chlorures . . . . .	23
3.2.2	Concentration de surface en chlorures . . . . .	23
3.2.3	Mécanisme de transport . . . . .	24
3.2.4	Évolution . . . . .	25
3.2.4.1	Diffusion en régime stationnaire mono-espèce . . . . .	25
3.2.4.2	Diffusion en régime non stationnaire mono-espèce . . . . .	26
3.2.4.3	Diffusion en régime non stationnaire avec fissures . . . . .	27
3.2.4.4	Diffusion multi-espèces . . . . .	27
3.2.4.5	Paramétrisation du coefficient de diffusion . . . . .	28
3.2.5	Concentration critique en chlorures . . . . .	32
3.3	Phase de propagation : corrosion des armatures . . . . .	33
3.3.1	Armatures standards . . . . .	33
3.3.2	Armatures précontraintes . . . . .	34
<b>4</b>	<b>Méthodes numériques de résolution</b>	<b>36</b>
4.1	Tracé historique . . . . .	36
4.2	Études antérieures . . . . .	39
4.3	Différences finies . . . . .	41
4.3.1	Implémentation Python : diffusion unidimensionnelle . . . . .	43
4.3.2	Implémentation Python : diffusion bidimensionnelle . . . . .	52
4.3.3	Implémentation Python : diffusion tridimensionnel . . . . .	63
4.3.4	Comparaison des dimensions . . . . .	68
4.4	Automates cellulaires . . . . .	70
4.4.1	Implémentation Python : diffusion unidimensionnelle . . . . .	73
4.4.2	Implémentation Python : diffusion bidimensionnelle . . . . .	76
4.4.3	Implémentation Python : diffusion tridimensionnelle . . . . .	80
4.5	Comparaisons des deux méthodes . . . . .	85
4.6	Critique aux automates cellulaires . . . . .	87
<b>5</b>	<b>Poutres Gerber</b>	<b>88</b>
5.1	Description . . . . .	88
5.2	Modes de rupture et fissuration . . . . .	94
5.3	Méthode bielle-tirant . . . . .	97

---

<b>6 Application</b>	<b>102</b>
6.1 Configuration d'une poutre Gerber . . . . .	102
6.2 Caractérisation de l'effort vertical ultime . . . . .	103
6.3 Caractérisation des armatures . . . . .	104
6.4 Modèle de diffusion et ses paramètres . . . . .	106
6.4.1 Conditions limites et initiales . . . . .	106
6.4.2 Coefficient de diffusion . . . . .	107
6.4.3 Évolution de la concentration en chlorures . . . . .	107
6.5 Modèle de corrosion et ses paramètres . . . . .	112
6.5.1 Effet de la carbonatation . . . . .	112
6.5.2 Vitesses de corrosion . . . . .	112
6.5.3 Diminution des armatures . . . . .	113
6.6 Évolution de la charge verticale . . . . .	116
6.7 Discussion des résultats . . . . .	117
6.8 Limites de l'étude . . . . .	118
<b>7 Conclusion</b>	<b>119</b>
<b>8 Annexes</b>	<b>127</b>
<b>A Eurocode : normes de durabilité</b>	<b>127</b>
<b>B Tableau : comparaison des schémas numériques explicites et des schémas analytiques 1D</b>	<b>129</b>
<b>C Implémentation Python : schémas implicites 1D</b>	<b>130</b>
<b>D Schémas implicites 2D : exemple proposé par Petter [83]</b>	<b>131</b>
<b>E Implémentation Python : schémas implicites 2D</b>	<b>133</b>

## Liste des tableaux

1	Niveaux de concentration en chlorure en surface . . . . .	24
2	Tableau des grandeurs physiques et des lois ou phénomènes associés. . . . .	25
3	Vitesse de corrosion dans un béton carbonaté seul et dans un béton carbonaté avec attaque des chlorures en fonction de l'humidité relative [19] . . . . .	34
4	Variations du ratio $R$ selon différentes études. . . . .	34
5	Paramétrisation pour l'analyse de diffusion 1D . . . . .	43
6	Comparaison des temps de simulation 1D . . . . .	51
7	Paramètres pour l'analyse de diffusion 2D . . . . .	52
8	Paramètres pour l'analyse de diffusion 2D . . . . .	60
9	Comparaison des temps de simulation 2D . . . . .	62
10	Paramètres pour l'analyse de diffusion 3D . . . . .	63
11	Paramétrisation pour l'analyse de diffusion 1D . . . . .	73
12	Paramètres pour l'analyse de diffusion 2D . . . . .	76
13	Paramètres pour l'analyse de diffusion 3D . . . . .	80
14	Comparaison des temps de simulation en 1D, 2D et 3D pour les différences finies et les automates cellulaires . . . . .	86
15	Charges surfaciques . . . . .	104
16	Tableau de synthèse des valeurs des points du domaine pour l'analyse temporelle de la concentration en chlorures, avec enrobage de 50 mm et 20 mm . . . . .	105
17	Tableau récapitulatif des temps d'initiation pour tous les coefficients de diffusion . . . . .	111
18	Tableau récapitulatif des aires et pertes pour tous les coefficients de diffusion . . . . .	114
19	Tableau récapitulatif des aires et pertes pour tous les coefficients de diffusion (suite) . . . . .	115
20	Tableau récapitulatif des charges et pertes pour tous les coefficients de diffusion . . . . .	116
21	Résultats des méthodes numériques (DFE) et analytiques (ANA) pour différentes profondeurs et durées	129

## Table des figures

1	Brique de boue [77] . . . . .	9
2	Pont du gard [16] . . . . .	9
3	Premier pont en béton armé : Camille-de-Hogues sur la Vienne à Châtellerault [13] . . . . .	10
4	Énoncé des différentes formes de retrait dans la vie du béton [8] . . . . .	12
5	Fissure provoquée par le retrait du béton [28] . . . . .	12
6	Écaillage du béton suite à un cycle de gel-dégel [20] . . . . .	13
7	Morceau de béton soumis à un incendie [4] . . . . .	13
8	Ouvrage hydraulique altéré par la lixiviation - Aspect du béton altéré par la lixiviation [7] . . . . .	14
9	Schématisation de la pénétration du dioxyde de carbone [76] . . . . .	15
10	Conséquence de la carbonatation [25] . . . . .	15
11	Effet de la pénétration des ions chlorure [10] . . . . .	16
12	Différentes zones en condition marine [11] . . . . .	16
13	Conséquence de l'attaque des ions chlorure en milieu marin (Cannes) [85] . . . . .	17
14	Microstructure du béton soumis à un gel expansif [12] . . . . .	17
15	Conséquences des attaques par les sulfates [29] . . . . .	18
16	Érosion du béton [24] . . . . .	18
17	Phase d'initiation et de propagation [14] . . . . .	20
18	Influence du rapport eau-ciment sur le coefficient de carbonatation des bétons à base de ciment CEM I 42,5 R dosé à 300 kg/m <sup>3</sup> [26] . . . . .	22
19	Concept de transport des zones à concentration élevée vers celles à concentration plus faible [9] . . . . .	24
20	Courbes de dépendance en fonctions des différents paramètres [45] . . . . .	30
21	Application de l'approche performantielle AFGC avec les matériaux étudiés par Timhadjelt et Lion [67] . . . . .	31
22	Plage de valeurs de la concentration critique en chlorure dans deux types de béton [65] . . . . .	32
23	Géométrie de la corrosion généralisée [50] . . . . .	33
24	Géométrie de la piqûre de corrosion d'un fil précontraint [53] . . . . .	35
25	Simulation d'une distribution de température dans une plaque par les différences finies [59] . . . . .	37
26	Modèle de diffusion en élément finis [103] . . . . .	37
27	John Conway - jeu de la vie (1970) présenté par Cazzaro [79] . . . . .	38
28	Résumé du tracé historique des méthodes numériques de résolution . . . . .	38
29	Évolution du (a) coefficient de diffusion apparent et (b) concentration en surface. Source : [40] . . . . .	39
30	Diffusion des chlorures à travers la matrice de béton comprenant des irrégularités : granite broyé et gravier rond. [56] . . . . .	39
31	(a) Maillage en automates cellulaires du domaines considéré (b) diffusion dans la section après 4 ans (c) 30 ans. [32] . . . . .	40
32	Diffusion des ions chlorure dans une section de pilier de pont après (a) 5 ans, (b) 20 ans, (c) 50 ans et (d) 100 ans. [97] . . . . .	40
33	Concept de voisinage dans le cas unidimensionnel [18] . . . . .	42
34	Schéma numérique en différence finie pour le calcul de la première itération $C_{1,1}$ . . . . .	45
35	Résultats numériques (schéma explicite) de la diffusion 1D . . . . .	46
36	Résultats analytiques de la diffusion 1D . . . . .	46
37	Comparaison des solutions analytiques et numériques . . . . .	47
38	Comparaison des résultats avec l'étude de Bitaraf [72] : évolution de la concentration en chlore après 20 ans . . . . .	47
39	Résultats numériques (schéma implicite) de la diffusion 1D . . . . .	50
40	Comparaison des solutions numériques explicites et implicites . . . . .	50
41	Schéma numérique en différence finie pour le calcul de la première itération $C_{1,1,1}$ . . . . .	54
42	Résultats numériques (schéma explicite) de la diffusion 2D : après 0 ans, 20 ans, 50 ans et 100 ans . . . . .	55
43	Comparaison de la diffusion 2D à la diffusion 1D . . . . .	55
44	Résultats numériques (schéma explicite) de la diffusion 2D : avec des armatures et après 100 ans . . . . .	56
45	Zoom sur le coin inférieur gauche de la section - Comparaison des dimensions à l'emplacement des armatures . . . . .	56

46	Résultats numériques (schéma implicite) de la diffusion 2D : après 0 ans, 20 ans, 50 ans et 100 ans	58
47	Section "half-joint" d'un modèle de pont [17]	59
48	Interprétation Python 2D de la poutre Gerber - Conditions limites imposées sur la poutre Gerber	59
49	Résultats numériques (schéma explicite) de la diffusion 2D avec conditions de surface appliquées sur 3 bords spécifiquement adaptées à une section de "half-joints" : après 0, 20, 50 et 100 ans	60
50	Poutre Gerber d'un pont se détériorant [2]	61
51	Illustration du domaine	63
52	Schéma numérique en différence finie pour le cas en 3 dimensions	65
53	Résultats numériques (schéma explicite) de la diffusion 3D : après 0 ans, 20 ans, 50 ans et 100 ans	66
54	Domaine avec ses conditions de bord et les points à l'étude	67
55	Évolution temporelle de la concentration en chlorures aux points $P_1$ , $P_2$ et $P_3$	67
56	Domaine avec ses conditions de bord et le point à l'étude	68
57	Comparaison des dimensions pour l'évolution temporelle de la concentration en chlorures au point $P_1$	68
58	Voisinages typiques pour des automates cellulaires en 1D et 2D [32]	70
59	Concept de voisinage des automates cellulaires dans le cas 3D [97]	71
60	Résultats numériques (schéma explicite) de la diffusion 1D	74
61	Comparaison des solutions numériques (automate cellulaire et différence finie)	75
62	Résultats numériques (automate cellulaire) de la diffusion 2D : après 0 ans, 20 ans, 50 ans et 100 ans	78
63	Comparaison des solutions numériques en automate cellulaire et en différence finie	78
64	Illustration du domaine	80
65	Résultats numériques (automate cellulaire) de la diffusion 3D : après 0 ans, 20 ans, 50 ans et 100 ans	83
66	Domaine avec ses conditions de bord et le point à l'étude	84
67	Comparaison des solutions numériques en automate cellulaire et en différence finie	84
68	Comparaison entre les différences finies et les automates cellulaires 1D	85
69	Comparaison entre les différences finies et les automates cellulaires 2D	85
70	Comparaison entre les différences finies et les automates cellulaires 3D	86
71	Illustration d'une structure type "half-joint" [15]	88
72	Exemple d'une DEB dans un pont routier [3]	88
73	Exemple d'une détérioration d'une DEB dans un pont routier [46]	89
74	Effondrements de plusieurs ponts routiers (Italie) : Annone [1], Ancona et Akragas [5]	89
75	Photographie du détail pendant les inspections en 1992 (gauche) et en en 2004 (droite) [98]	90
76	Photographie de l'effondrement du viaduc de la Concorde [98] (Canada)	90
77	Illustration de régions D et B sur une structure [51] (gauche) et au sein d'une DEB en particulier (droite)	91
78	Illustration de régions D sur des structures types [93]	91
79	Comparaison des systèmes de force : (a) dans une console de colonne et (b) dans une DEB [60]	92
80	Approches de conception de poutre Gerber avec des dispositions de renforcement différentes [35]	92
81	Géométrie et schéma d'armature de la poutre Gerber étudié par Dersnerck et al. [34]	93
82	Autre forme en schéma bielle-tirant [6]	93
83	Fissures rencontrées au sein d'une poutre "dapped-end" [52]	94
84	Schéma des armatures de poutres Gerber testés et les fissures associées [54]	94
85	Comparaison de la réponse charge-déformation prédite et observée pour des cas de DEB avec différentes configurations de barres [54]	95
86	Renforcement typique d'une DEB et localisation des fissures diagonales potentielles [60]	95
87	DEB : (a) géométrie typique avec la méthode bielle-tirant et (b) détail du renforcement vertical. [47]	97
88	Différents types de noeuds pour 3 intersections [36]	97
89	Zone nodale du modèle bielle-tirant [36]	98
90	Modèles courants de bielle-tirant dans les DEB : (a) modèle diagonal, (b), (c) et (d) modèles orthogonaux, et (e) une combinaison type. [36]	98
91	Modèles de bielle-tirant à l'étude	99
92	Schéma d'armatures d'une DEB selon Mattock et Chan [60]	100
93	Dimensions des poutres Gerber à l'étude	102
94	Dimensions du pont de la Concorde : (a) vue en plan (b) coupe (c) coupe transversale perpendiculaire à la coupe (b) [37]	103

95	Illustration des concentrations de bord : cas réel [46] et modèle AutoCAD . . . . .	106
96	Résultats numériques (différence finie) de la diffusion 3D après 50 ans pour 450, 320 et 200[mm] ( $D_a = 1 \times 10^{-12} [m^2/s]$ ) . . . . .	107
97	Résultats numériques (différence finie) de la diffusion 3D après 50 ans pour 450, 320 et 200[mm] ( $D_a = 10 \times 10^{-12} [m^2/s]$ ) . . . . .	107
98	Résultats numériques (différence finie) de la diffusion 3D après 50 ans pour 450, 320 et 200[mm] ( $D_a = 500 \times 10^{-12} [m^2/s]$ ) . . . . .	108
99	Évolution de la concentration en chlorures pour les barres horizontales ( $D_a = 1 \times 10^{-12} [m^2/s]$ ) . . . . .	108
100	Évolution de la concentration en chlorures pour les barres verticales ( $D_a = 1 \times 10^{-12} [m^2/s]$ ) . . . . .	108
101	Évolution de la concentration en chlorures pour les barres diagonales ( $D_a = 1 \times 10^{-12} [m^2/s]$ ) . . . . .	109
102	Évolution de la concentration en chlorures pour les barres horizontales ( $D_a = 10 \times 10^{-12} [m^2/s]$ ) . . . . .	109
103	Évolution de la concentration en chlorures pour les barres verticales ( $D_a = 10 \times 10^{-12} [m^2/s]$ ) . . . . .	109
104	Évolution de la concentration en chlorures pour les barres diagonales ( $D_a = 10 \times 10^{-12} [m^2/s]$ ) . . . . .	110
105	Évolution de la concentration en chlorures pour les barres horizontales ( $D_a = 500 \times 10^{-12} [m^2/s]$ ) . . . . .	110
106	Évolution de la concentration en chlorures pour les barres verticales ( $D_a = 500 \times 10^{-12} [m^2/s]$ ) . . . . .	110
107	Évolution de la concentration en chlorures pour les barres diagonales ( $D_a = 500 \times 10^{-12} [m^2/s]$ ) . . . . .	111
108	Évolution temporelle de la profondeur carbonatée dans un béton intacte . . . . .	112
109	Évolution temporelle de la section d'armature horizontale . . . . .	113
110	Évolution temporelle de la section d'armature verticale . . . . .	113
111	Évolution temporelle de la section d'armature diagonale . . . . .	113
112	Évolution temporelle de la charge verticale ultime . . . . .	116
113	Classes d'exposition en fonction des conditions environnementales (en partie) [75] . . . . .	127
114	Classe structurale (en partie) [75] . . . . .	128
115	Valeurs de l'enrobage minimal $c_{min,dur}$ requis vis-à-vis de la durabilité dans le cas des armatures de béton armé [75] . . . . .	128
116	Graille spatiale pour le maillage $N_x = 3$ et $N_y = 2$ . . . . .	131

# 1 Introduction

L'enjeu crucial de la pénétration des chlorures s'affirme comme l'un des défis les plus pressants pour les structures en béton armé existantes, menaçant sérieusement leur intégrité structurelle. La matrice de béton, en elle-même, est inoffensive vis-à-vis de tels agents agressifs. Cependant, l'introduction des armatures en acier, une innovation majeure depuis le 20ème siècle, a conduit à de sérieuses dégradations impactant le monde des ouvrages d'art. La corrosion généralisée des armatures en acier, induite principalement par la présence d'ions chlorure et/ou la carbonatation causée par le dioxyde de carbone présent continuellement dans l'air, entraîne une réduction des propriétés structurelles de l'acier et expose ces structures à des risques imprévus.

À l'échelle mondiale, de nombreux ponts sont confrontés à des déficiences structurelles, voire à une obsolescence imminente, principalement dues à la corrosion. Ces structures sont continuellement exposées à des agents agressifs présents dans l'eau de pluie, la pollution atmosphérique, ou plus ponctuellement les sels de déverglaçage. L'augmentation du trafic routier au fil des années et la présence des poids lourds de plus en plus pesants, aggravent des situations qui n'avaient pas été prises en compte lors de la construction, souvent réalisée plusieurs décennies auparavant. Cette dégradation progressive entraîne des coûts substantiels de maintenance et de réparation, posant des défis considérables pour la gestion et la durabilité des infrastructures, notamment des ponts.

Bien que leur nombre soit limité, les recherches actuelles se concentrent résolument sur une analyse approfondie de la pénétration des agents corrosifs. Des formules empiriques peuvent fournir l'évolution de la position de ces agents dans le temps. Cependant, dans le cas des ions chlorure, les simulations numériques s'imposent comme l'approche privilégiée. Elles offrent des avantages significatifs en termes de rapidité de résolution et de précision, permettant de mieux tenir compte des conditions limites réelles pour prédire le processus de diffusion.

Comprendre la diffusion des chlorures à travers le béton armé est essentiel pour évaluer la durabilité des structures. Ce mémoire se concentre sur l'évaluation numérique de cette diffusion, un aspect crucial pour garantir la longévité des ouvrages en béton armé, ainsi que sur l'évolution temporelle d'un élément structurel particulier soumis à une détérioration.

La première partie de ce mémoire parcourt l'évolution de l'utilisation du béton à travers les époques ainsi que les pathologies les plus courantes entraînant sa dégradation. Elle met en lumière des facteurs cruciaux tels que les attaques par les chlorures et la carbonatation, qui sont responsables de la future corrosion des armatures. Ces éléments posent les fondements nécessaires à l'étude approfondie des mécanismes spécifiques de diffusion du chlore dans le béton. Dans le deuxième volet, nous nous pencherons sur les modèles théoriques, analytiques ou empiriques qui cherchent à représenter et à prédire la corrosion du béton armé en approfondissant le transport diffusif du chlore dans le béton armé en examinant les divers mécanismes impliqués ainsi que les équations qui les régissent directement.

Le quatrième chapitre est dédié aux méthodes numériques utilisées pour résoudre les équations décrivant la diffusion du chlore dans le béton armé. Nous examinerons les comportements respectifs dans trois configurations dimensionnelles connues : unidimensionnelle, représentant une ligne ; bidimensionnelle, représentant une surface ; et tridimensionnelle, représentant l'élément dans son intégralité. Cette comparaison mettra en lumière l'impact significatif du choix de la dimension sur les résultats obtenus. Une autre partie de notre étude portera sur la confrontation entre les méthodes numériques dites primitives et les approches plus récentes fréquemment citées dans la littérature spécialisée.

La cinquième section se concentre sur un type de structure couramment utilisé dans la construction de ponts, mais également exposé à une vulnérabilité accrue face aux agents corrosifs : les poutres "Gerber", popularisées sous le nom de "Gerber saddles" ou "dapped-end beams" en anglais. Cette section explore en détail les caractéristiques de ces poutres, les différents schémas d'armature existants, ainsi que les modes de rupture potentiels. La dernière partie de l'étude applique les concepts étudiés à ces poutres particulières, en intégrant le modèle de diffusion et de corrosion pour des paramètres sélectionnées, puis analyse les résultats pour évaluer la capacité portante de ces structures après une détérioration progressive dans le temps, selon différents schémas d'armature.

## 2 Dégradation du béton

Tout au long de son cycle de vie, le béton armé est sujet à une pléthore de phénomènes qui engendrent sa dégradation ainsi que celle des armatures. En effet, la détérioration progressive de la matrice béton altère graduellement la protection naturelle qu'elle confère aux armatures.

Ce premier chapitre s'attache à retracer l'histoire du béton puis du béton armé, ainsi que les différentes formes qu'ils revêtent aujourd'hui. Par la suite, il explore les diverses pathologies que le béton rencontre tout au long de son existence, issues de sources variées, en mettant particulièrement l'accent sur celles qui sont principalement responsables de la corrosion des armatures.

### 2.1 L'utilisation du béton au cours du temps

L'histoire du béton est une saga qui traverse les siècles, dévoilant l'ingéniosité humaine dans l'évolution de ce matériau polyvalent. Les prémices du béton plongent leurs racines dans des civilisations anciennes, notamment l'Égypte et Rome, où des versions rudimentaires étaient employées pour des constructions durables. En effet, les égyptiens ont notamment utilisé une forme primitive de béton en mélangeant de la boue et des matériaux locaux pour créer des briques solides.



FIGURE 1 – Brique de boue [77]

Le terme "béton" n'était pas encore conceptualisé à ces époques reculées. Cependant, les civilisations anciennes avaient déjà saisi l'importance de bâtir des structures durables et solides en exploitant les ressources locales à leur disposition. L'apogée de cette pratique s'est réellement manifestée à l'époque de l'Empire romain, où les premiers ingénieurs ont perfectionné le procédé en y intégrant de la chaux et des agrégats. Cela a abouti à la construction de monuments emblématiques tels que le Panthéon, le Colisée à Rome et le Pont du Gard pour ne citer qu'eux. Par la suite, après le déclin de l'Empire romain, d'autres édifices, comme des églises et des cathédrales, ont été érigés en utilisant une forme primitive de béton.



FIGURE 2 – Pont du gard [16]

Au temps de la Renaissance (XVe et XVIe siècles), bien que le béton fût déjà connu et utilisé, son application restait limitée par rapport aux époques ultérieures. Les Romains de l'Antiquité avaient recours à une forme de béton dans leurs constructions, mais au fil du temps, les connaissances sur sa composition avaient largement disparu. Les architectes et ingénieurs de la Renaissance ont redécouvert les propriétés du béton romain, amorçant son intégration dans certaines conceptions architecturales. Cependant, la majorité des structures de cette période privilégiaient encore les méthodes traditionnelles, utilisant des matériaux comme la pierre et la brique.

Le XVIIIe siècle, marquant le début de la période néo-classique, s'illustre par un intérêt renouvelé pour l'art et l'architecture de l'Antiquité classique. Bien que les architectes de cette époque aient adopté des éléments architecturaux classiques tels que les colonnes, les arcs et les dômes, l'utilisation répandue du béton ne s'est manifestée que plus tard. À la chute de l'Empire romain, le béton a sombré dans l'oubli, mais sa redécouverte en 1755 par l'architecte d'Avaler, qui le définissait comme une "sorte de mortier jeté dans les fondements et qui durcit extrêmement vite", a annoncé son retour sur la scène architecturale [84].

Au XIXe siècle, des avancées significatives dans la composition et la technologie du béton ont vu le jour. En effet, en 1824, Joseph Aspdin a breveté le ciment Portland qui est devenu un ingrédient clé dans la production de béton. Ce nouveau ciment a permis la production de béton plus résistant et plus durable.

De plus, ce siècle a connu l'apparition des premiers travaux en béton renforcé par des armatures, connu de nos jours sous le nom de béton armé. Cela a permis la construction de structures plus hautes et plus audacieuses avec notamment les premiers grattes-ciel en Amérique. Pour ce qui est des ponts, le premier en béton armé fut construit par Hennebique en 1898 :



FIGURE 3 – Premier pont en béton armé : Camille-de-Hogues sur la Vienne à Châtellerault [13]

Au cours du XXe siècle, l'utilisation répandue du béton armé dans la construction de ponts et d'autres infrastructures de génie civil a connu une popularité croissante à l'échelle mondiale, propulsée par le succès des premiers projets réalisés. De manière concomitante, l'émergence du béton précontraint, souvent associée à l'ingénieur Eugène Freyssinet au début du siècle, a constitué une avancée révolutionnaire dans le domaine de la construction.

En 1928, Freyssinet a introduit la technique de précontrainte, une approche novatrice impliquant l'application de forces de tension contrôlées avant l'exposition aux charges de service. Cette méthode révolutionnaire a considérablement amélioré la résistance et la durabilité du matériau. Par conséquent, elle a ouvert la voie à la création de structures plus légères et plus efficaces, influençant des conceptions architecturales avant-gardistes à travers le monde. L'introduction de la précontrainte a ainsi joué un rôle crucial dans l'évolution des techniques de construction au XXe siècle, redéfinissant les normes et inspirant des avancées significatives dans le domaine de l'ingénierie structurelle.

A l'heure actuelle, le béton continue son évolution grâce aux avancées de la chimie moderne, permettant ainsi la création de ciments artificiels capables de relever tous les défis architecturaux [27]. Cette évolution ne se limite pas à un seul type de béton, mais englobe plutôt une diversité de formulations. Parmi celles-ci, on peut citer le béton à poudres réactives, le béton allégé intégrant des billes de polystyrène, le béton haute performance, le béton autoplaçant, ainsi que d'autres formulations innovantes.

Bien que le béton puisse être utilisé dans une variété de contextes, sa composition de base repose principalement sur trois éléments essentiels : le ciment, l'eau et les agrégats. Le ciment agit comme le liant primaire, réagissant chimiquement avec l'eau pour former une pâte qui relie ensuite les agrégats. En complément de ces éléments, des adjuvants peuvent être intégrés pour améliorer et ajuster les propriétés du béton en fonction des besoins spécifiques.

Malgré sa popularité, il n'est pas sans défauts et peut se dégrader avec le temps. L'incorporation d'armatures, souvent essentielle dans la construction de nombreuses structures, peut également introduire des vulnérabilités supplémentaires. La nécessité de la maintenance et du contrôle des structures en béton est cruciale, comme le montrent les dommages persistants sur les ponts et autres ouvrages construits au cours des siècles. Les premiers constructeurs n'avaient pas toujours une compréhension complète des problèmes de durabilité, car les mécanismes de dégradation étaient mal connus. Cependant, avec le temps, ces problèmes sont devenus évidents, nécessitant une vigilance accrue et des efforts de réparation. Aujourd'hui, grâce aux progrès dans notre compréhension des processus de dégradation du béton, nous sommes mieux équipés pour gérer ces défis et assurer la longévité des structures. La section suivante de ce document examine les diverses pathologies du béton, en soulignant les défis et les risques associés à son utilisation dans les projets de construction.

## 2.2 Différentes pathologies du béton

Cette section se consacre à l'analyse des diverses pathologies susceptibles de se manifester tout au long du cycle de vie du béton armé. Il s'agit d'une démarche incontournable pour appréhender la diffusion du chlore, une théorie fondamentale dans ce processus. Les principales sources de détérioration découlent des agressions physiques, chimiques et mécaniques auxquelles ce matériau composite est exposé. Comprendre ces facteurs de dégradation revêt une importance cruciale pour assurer la durabilité et la performance des structures en béton armé, tout en garantissant leur sécurité à long terme. Cette approche s'inspire des recherches menées par Kasri Sarra [68], Casasanta Loredana [86] et Maxime Cruysmans [91].

### 2.2.1 Causes physiques de dégradation

Lorsque nous évoquons les dégradations physiques, nous faisons référence à l'ensemble des facteurs susceptibles de causer la fissuration ou l'éclatement du béton. Voici une liste de causes physiques engendrant la dégradation du béton :

- Le retrait

Le retrait du béton est un processus physico-chimique inévitable qui se déroule tout au long de la vie du matériau, depuis la phase de prise initiale jusqu'à son vieillissement, mais principalement lors ses 24 premières heures de durcissement. Il est principalement causé par la libération de l'excès d'eau présente dans le béton, qui migre vers l'extérieur de l'élément de structure au fil du temps. Ce phénomène peut prendre différentes formes et se manifester à divers stades de la vie initiale de la structure en béton.

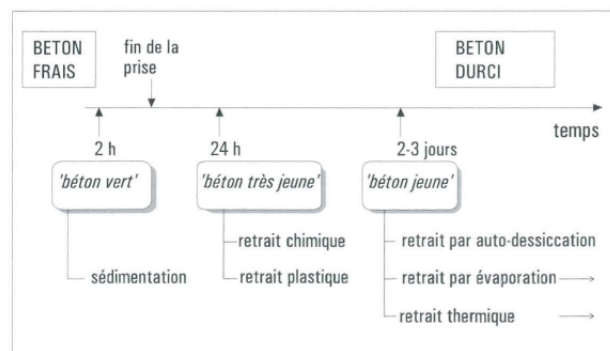


FIGURE 4 – Énoncé des différentes formes de retrait dans la vie du béton [8]

Un symptôme caractéristique de l'action du retrait sur une structure en béton est l'apparition de fissures. Ces fissures peuvent revêtir deux principales configurations : des fissures orientées, qui se forment dans une direction particulière en raison des contraintes internes générées par le retrait, et des fissures multidirectionnelles, qui se forment dans plusieurs directions en réaction aux contraintes multiples.



FIGURE 5 – Fissure provoquée par le retrait du béton [28]

- Cycles gel-dégel

Le gel-dégel est un processus météorologique présent dans les zones qui connaissent des températures de gel et des températures de dégel sur une saison. L'eau en provenance de sources extérieures pénètre dans les fissures et cavités du béton, pour enfin geler à des températures négatives. Le volume d'eau augmente de 9% une fois le gel créé. Le gel-dégel implique la dé-cohésion du béton. Cela mène à l'écaillage en surface du béton :



FIGURE 6 – Écaillage du béton suite à un cycle de gel-dégel [20]

Le pire cas est un béton de mauvaise qualité qui comporte de nombreux vides ou un béton de qualité, mais saturé en eau qui subit un gel brutal.

- Les incendies

Après une certaine température, le béton perd de ses capacités de résistance. En effet, il est important de rappeler quelques événements à plusieurs températures critiques :

- A partir de 100 degrés Celcius, il y a évaporation de l'eau présente dans les grands vides ; il faut laisser le temps à la vapeur d'eau de s'évacuer. Peu après, l'eau libre et absorbée est évacuée.
- A 300 degrés Celcius, il y a oxydation du silicate de calcium hydraté (CSH) provoquant un changement de couleur du béton passant du gris au rose. La perte de résistance se fait ressentir à partir de cette température.
- De 400 à 600 degrés, la pâte à ciment commence à se contracter à des effets supérieurs qu'à l'expansion thermique.
- Aux alentours de 1200 degrés, la pâte à ciment commence à fondre et le béton devient une masse fondue après 1300 degrés.



FIGURE 7 – Morceau de béton soumis à un incendie [4]

### 2.2.2 Causes chimiques de dégradation

Cela concerne les éléments/organismes extérieurs chimiques susceptibles d'abîmer le béton et d'en détériorer ses capacités. Voici une liste de causes chimiques engendrant la dégradation du béton :

- Attaque par les eaux (lixiviation et lessivage)

La lixiviation des bétons constitue un phénomène majeur associé au lessivage des hydrates de la pâte de ciment en présence de divers milieux fluides. Les constituants hydratés confèrent au béton un caractère basique, avec un pH avoisinant 13 dans la solution interstitielle. Cependant, la plupart des milieux environnants présentent un caractère acide par rapport au béton, entraînant des déséquilibres chimiques susceptibles de conduire à la dissolution des hydrates.

Les milieux favorables à l'induction de phénomènes de lixiviation incluent les eaux pures, les eaux douces et les pluies acides. La capacité de lixiviation d'un environnement est directement liée à son niveau d'acidité par rapport au béton. En raison de leur faible teneur en sel, ces eaux ont tendance à acquérir la composition saline du béton lui-même par la dissolution de l'hydroxyde de calcium ou de la chaux libre. Comme mentionné précédemment, l'érosion résultant de la circulation de fluides à la surface du béton est le principal phénomène associé à ce processus de lessivage.



FIGURE 8 – Ouvrage hydraulique altéré par la lixiviation - Aspect du béton altéré par la lixiviation [7]

- Carbonatation

La carbonatation est un phénomène chimique persistant dans l'épiderme du béton tout au long de sa vie qui découle de la réaction entre le dioxyde de carbone ( $\text{CO}_2$ ) présent dans l'air et l'hydrate de chaux ( $\text{CaOH}_2$ ) contenu naturellement dans le ciment. Cette réaction génère du calcaire et libère de l'eau, entraînant une baisse du pH et amorçant la corrosion des armatures proches. Au-delà d'une certaine couche, la corrosion devient impossible en raison des dépôts de calcaire issus de la pâte du ciment, qui entravent les échanges gazeux et maintiennent un pH stable d'environ 11, prévenant ainsi la manifestation de la corrosion.

En approfondissant la pénétration du  $\text{CO}_2$ , on observe que ce gaz diffuse sous forme gazeuse dans les pores du béton, se dissolvant ensuite pour former un acide au contact de la solution interstitielle de la pâte de ciment. Ce processus altère progressivement la composition chimique et la microstructure interne du béton, influençant les produits résultant de l'hydratation du ciment.

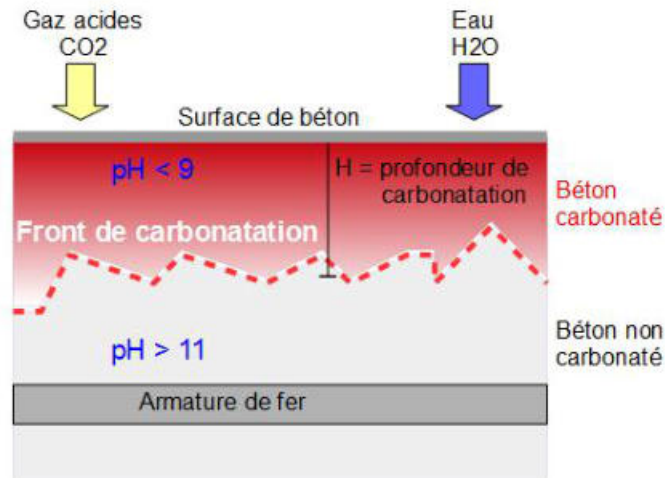


FIGURE 9 – Schématisation de la pénétration du dioxyde de carbone [76]

La corrosion induite par la carbonatation représente ainsi l'une des principales causes de la dégradation du béton armé dans divers ouvrages d'art existants. Sa gestion proactive est cruciale pour garantir la durabilité et la performance des structures en béton. Des études approfondies, telles que celles menées par Divet [87], offrent des analyses détaillées pour mieux comprendre ces mécanismes et développer des stratégies de préservation efficaces.



FIGURE 10 – Conséquence de la carbonatation [25]

- Attaque par les ions chlorure

Cette pathologie constitue le fondement même de ce mémoire. Les ions chlorure, issus de diverses sources telles que l'environnement marin, les sels de déverglaçage ou même la pollution atmosphérique pénètrent le béton par diffusion ou par d'autres phénomènes liés, se propageant dans les pores du matériau. Ces ions, en soi inoffensifs pour le béton, deviennent problématiques lorsqu'ils atteignent une concentration supérieure au seuil critique, entraînant la dépassivation des armatures. En particulier, une concentration élevée d'ions  $\text{Cl}^-$  entraîne la destruction du film passif entourant les barres, libérant ainsi des ions métalliques tels que le fer.

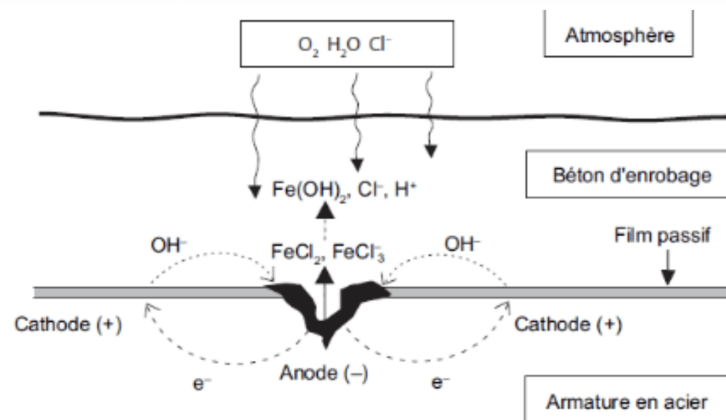


FIGURE 11 – Effet de la pénétration des ions chlorure [10]

Les chlorures peuvent également interagir avec les composants du matériau, soit par réaction chimique, soit par adsorption. Dans les environnements marins, divers mécanismes de transport des ions chlorure sont observés en fonction de la zone étudiée. Dans les zones submergées en permanence, la saturation du béton entraîne une diffusion des ions chlorure, dictée par un gradient de concentration entre la surface chlorurée et le cœur du béton. Dans les zones de marnage, d'éclaboussures et soumises à des cycles d'humidification/séchage, la pénétration des ions chlorure se fait par absorption capillaire et migration avec la phase liquide par convection. Le transport de la phase liquide et gazeuse dans le milieu poreux joue un rôle déterminant dans la propagation des ions chlorure.

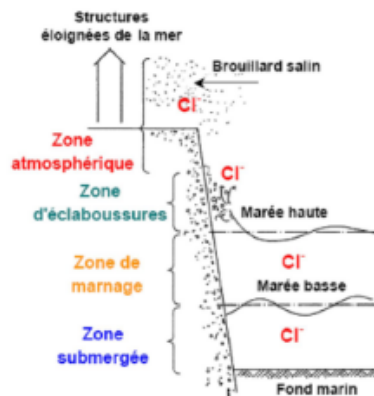


FIGURE 12 – Différentes zones en condition marine [11]

La corrosion se manifeste lorsque ces ions métalliques réagissent avec l'eau et l'oxygène présents dans le béton, formant ainsi de l'oxyde métallique et des ions hydroxyde. Ce processus corrosif débute dès lors, générant des conséquences néfastes pour la durabilité et l'intégrité des structures en béton armé.



FIGURE 13 – Conséquence de l'attaque des ions chlorure en milieu marin (Cannes) [85]

- Réactions avec les alcalins

Une réaction alcali-silice, impliquant la silice des granulats et les alcalins de la pâte de ciment, génère un gonflement préjudiciable à la résistance du béton. La prévention et la détection de cette réaction sont essentielles pour éviter le faïençage ou l'éclatement des éléments structuraux. Outre la principale réaction alcali-silice, d'autres types de réactions alcali-carbonate et alcali-silicate peuvent également survenir. Les conditions propices à cette réaction incluent la présence de silice dans les granulats, qualifiée de "potentiellement réactive", la présence d'alcalins dans le béton et une quantité suffisante d'eau.

Les conséquences de cette réaction donnent lieu à la création d'un gel expansif, favorisant les déformations et la microfissuration du béton, surtout au cœur de la structure. Si les contraintes expansives excèdent la résistance en traction du béton, elles peuvent entraîner le décollement à l'interface pâte-granulats, ainsi que la formation de microfissures à l'interface entre le béton et les armatures.

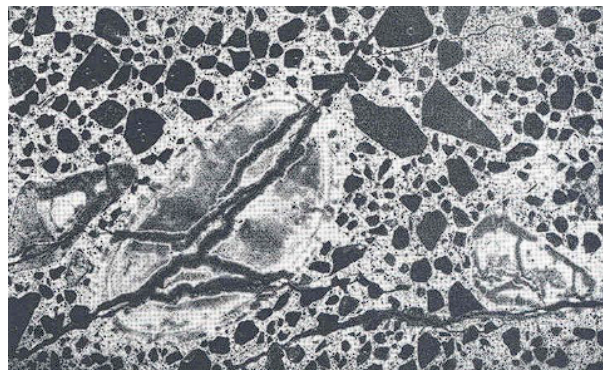


FIGURE 14 – Microstructure du béton soumis à un gel expansif [12]

Ces phénomènes se traduisent à la surface par une fissuration alignée selon la direction des armatures en acier ou répartie aléatoirement.

- Attaque par les sulfates

Les sulfates représentent un risque majeur pour le béton, étant la deuxième cause de dégradations sur 800 000 ponts mondiaux, d'après une enquête de l'OCDE (Organisation de Coopération et de Développement Économique) en 1989 [87]. Ces sulfates peuvent avoir une origine externe, par pénétration de liquides et de gaz, ou interne, introduits par les constituants du béton, notamment le ciment. Par exemple, le sulfate de calcium présent dans l'eau agressive réagit avec la Portlandite du ciment pour former un gypse secondaire qui réagit par la suite avec les aluminates du ciment pour former l'ettringite.



FIGURE 15 – Conséquences des attaques par les sulfates [29]

Divet [87] souligne que les normes françaises actuelles, dépendant de l'environnement de l'ouvrage, visent à assurer la durabilité face à une réaction sulfatique externe. Cependant, la protection contre la formation différée de l'ettringite n'est pas clairement définie en raison d'une compréhension restreinte des réactions internes se produisant.

### 2.2.3 Causes mécaniques de dégradation

Les causes mécaniques de dégradation du béton sont liées aux contraintes mécaniques et aux forces extérieures qui affectent le matériau. Ces causes comprennent :

- L'érosion

L'érosion du béton fait référence à la détérioration progressive de la surface du béton due à divers facteurs environnementaux. L'érosion par l'eau se produit lorsque l'eau en mouvement érode progressivement la surface du béton, en particulier dans les zones sujettes aux inondations, aux rivières ou aux côtes. L'eau peut emporter des particules de béton, provoquant ainsi une détérioration. Le vent peut également causer l'érosion en surface, le processus est accentué si le vent contient des particules solides.



FIGURE 16 – Érosion du béton [24]

L'érosion entraîne une diminution de la protection des armatures (enrobage) et facilite donc l'infiltration des agents corrosifs.

- Fatigue

La fatigue du béton armé émerge de contraintes répétitives ou cycliques qui agissent au fil du temps, soumettant la structure à des charges successives de compression et de relâchement. Ce processus crée un contexte propice à l'instauration de dommages progressifs. Les manifestations de cette fatigue sont diverses, englobant l'apparition de fissures, la diminution de la résistance structurelle, et éventuellement, la menace de défaillance. Ces fissures peuvent se développer aussi bien à l'intérieur du matériau bétonné qu'à l'interface entre le béton et l'acier d'armature.

Cette détérioration compromet la capacité portante de la structure, générant un environnement propice à l'infiltration d'agents corrosifs tels que l'eau et les sels, accélérant ainsi de manière significative le processus de détérioration.

- Vibrations et chocs

Le béton peut également subir des fissures ou se fracturer en raison des impacts provoqués par des véhicules de transport, des dispositifs de levage ou bien des divers outils de construction existants.

- Abrasion

L'abrasion se réfère à une diminution de la matière en surface du béton armé résultant de l'interaction avec des éléments abrasifs. Cette abrasion entraîne une réduction de l'enrobage des armatures, créant ainsi une opportunité pour la pénétration d'agents agressifs.

### 3 Modèles de dégradation par carbonatation et ions chlorure

Parmi toutes les pathologies présentées dans la section 2.2, seules la carbonatation et la pénétration des ions chlorure seront abordées plus en détail dans ce mémoire. Ces pathologies sont les plus agressives en ce qui concerne la dégradation des armatures.

Lors de sa phase initiale, le béton est caractérisé par un pH élevé, généralement supérieur à 12 ou 13. En effet, lorsque le béton est frais et en cours de durcissement, il est hautement alcalin en raison de la présence de chaux (oxyde de calcium) et d'autres composants alcalins. Cet environnement alcalin favorise la formation d'une couche de passivation sur la surface des armatures en acier, ce qui les protège naturellement contre la corrosion. Cette passivation consiste essentiellement en une fine couche d'oxydes qui empêche l'acier de réagir avec l'oxygène et l'eau, les éléments qui provoquent la corrosion. En d'autres termes, le béton agit comme une barrière protectrice pour les barres d'acier, empêchant leur corrosion prématurée.

Cependant, au fil du temps, le milieu basique se trouve progressivement modifié par la neutralisation de l'alcalinité du ciment pour atteindre un pH de l'ordre de 9, diminuant ainsi son caractère alcalin. Lorsque cette alcalinité est compromise, la couche de passivation sur les armatures métalliques peut être affectée, rendant celles-ci vulnérables à la corrosion.

Avant d'examiner les modèles mathématiques, il est crucial de comprendre le processus de corrosion des armatures. La réduction du pH alcalin du béton, due à des agents corrosifs comme la carbonatation et la pénétration d'ions chlorure, crée des zones locales de réactions électrochimiques sur la surface des armatures, formant des microanodes et des microcathodes. Le processus de corrosion se déroule en trois étapes principales.

**Réaction d'oxydation** Dans les microanodes, le fer de l'acier réagit avec l'eau et l'oxygène pour produire de l'hydroxyde de fer et des ions ferreux, libérant des électrons qui migrent vers les microcathodes.

**Réaction de réduction** Dans les microcathodes, ces électrons réduisent l'oxygène et l'eau, formant des ions hydroxydes.

**Formation de rouille** L'hydroxyde de fer II ( $\text{FeOH}_2$ ) produit dans les microanodes réagit avec les ions hydroxydes ( $\text{OH}^-$ ) générés dans les microcathodes pour former de l'hydroxyde de fer III ( $\text{FeOH}_3$ ), communément appelé "rouille".

Cette corrosion dans les structures suit plusieurs phases, notamment la phase d'initiation et la phase de propagation, représentant deux étapes critiques. La figure 17 illustre ces deux phases :

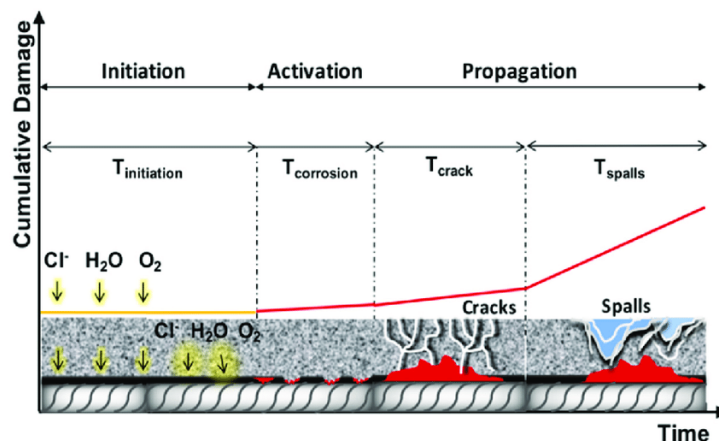


FIGURE 17 – Phase d'initiation et de propagation [14]

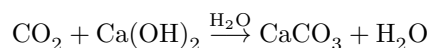
**Phase d'initiation** Période temporelle entre l'introduction des agents agressifs et la destruction de la couche protectrice d'oxyde. Elle marque en quelques sortes le point de départ du processus corrosif, où le taux de pénétration de dioxyde de carbone et des ions chlorure dans la matrice de béton peut être étudié.

**Phase de propagation** Au fur et à mesure que la corrosion progresse, la rouille se forme à partir des produits de la réaction d'oxydation. La période de propagation dure jusqu'à ce que la structure ait atteint un état limite en raison de la réduction de sa ductilité, sa capacité de charge ou de tout autre critère.

### 3.1 Phase d'initiation par carbonatation

#### 3.1.1 Description

Pour appel, la carbonatation décrit la réaction entre le dioxyde de carbone  $\text{CO}_2$  provenant de l'air et l'hydroxyde de calcium  $\text{Ca(OH)}_2$ , appelé chaux hydratée ou portlandite, initialement présent dans le béton. En milieu aqueux, ces deux éléments réagissent ensemble pour former du carbonate de calcium  $\text{CaCO}_3$ ; la réaction chimique est condensé de la sorte :



Lorsque le front de carbonatation atteint le niveau des armatures, celles-ci peuvent subir une dégradation par corrosion, entraînant une réduction de la résistance globale de la structure. En effet, la corrosion a un double impact : elle diminue la section résistante des armatures et provoque l'apparition de fissures, entraînant également l'effritement de l'enrobage.

#### 3.1.2 Évolution

La carbonatation se déploie de manière progressive à travers la profondeur de la section de béton. Une formule exhaustive soulignée par Sgambi [88] peut être fournie pour décrire l'avancement du front de carbonatation  $x(t)$  au fil du temps, en prenant en compte divers paramètres :

$$x(t) = \sqrt{2 \cdot \underbrace{k_e}_{\textcircled{1}} \cdot \underbrace{k_c}_{\textcircled{2}} \cdot \underbrace{(k_t \cdot R_{Acc,0}^{-1} + \epsilon_t)}_{\textcircled{3}} \cdot \underbrace{C_s}_{\textcircled{5}} \cdot \sqrt{t} \cdot \underbrace{W(t)}_{\textcircled{6}}} \quad (1)$$

Avec

- $\textcircled{1}$  : Coefficient qui prend en compte l'influence de l'humidité réelle
- $\textcircled{2}$  : Coefficient qui prend en compte l'influence de la période de curage
- $\textcircled{3}$  : Coefficient qui prend en compte l'inverse de la résistance à la carbonatation (essai de laboratoire)
- $\textcircled{4}$  : Coefficients qui prend en compte la transformation de l'inverse de la résistance à la carbonatation des conditions de laboratoires vers les conditions naturelles pour une humidité relative fixée
- $\textcircled{5}$  : Coefficient qui prend en compte la concentration en dioxyde de carbone dans l'air
- $\textcircled{6}$  : Coefficient qui prend en compte les conditions méso-climatiques dues à l'humidification de la surface de béton

Malgré sa complétude, cette dernière relation 1 s'avère complexe à mettre en pratique. Pour pallier cette complexité, Tuutti [100] a proposé un modèle simplifié. Ainsi, après un laps de temps  $t$ , une épaisseur  $x(t)$  du béton à l'intérieur de la section est carbonatée :

$$x(t) = K \cdot t^{\frac{1}{p}} \quad (2)$$

Avec

- $x[mm]$  l'épaisseur carbonatée
- $K[mm/an^{\frac{1}{p}}]$  le coefficient de carbonatation
- $t[anne]$  le temps à laquelle le front de carbonatation est mesuré
- $p[/math>] le paramètre dépendant de la porosité du béton$

Dans le contexte d'un béton poreux, une valeur courante pour  $p$  est 2, en accord avec les termes utilisés par Bontemps [21] :

$$x(t) = K \cdot t^{\frac{1}{2}} \quad (3)$$

Selon le CSTC (Centre Scientifique et Technique de la Construction) [26] : le coefficient de carbonatation  $K$  donne une indication de la résistance du béton à la carbonatation ; il dépend de la composition de ce dernier, de la cure réalisée et de l'exposition de la structure. Ces travaux ont montré que la valeur du coefficient de carbonatation peut varier en fonction du rapport eau/ciment (E/C) et ainsi que du type de ciment comme le montre la figure 18 :

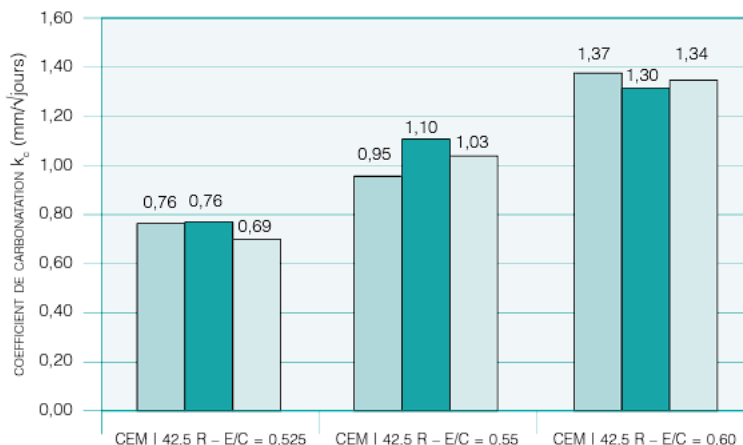


FIGURE 18 – Influence du rapport eau-ciment sur le coefficient de carbonatation des bétons à base de ciment CEM I 42,5 R dosé à 300 kg/m<sup>3</sup> [26]

Ces travaux se basent sur des tests in situ réalisés en laboratoire et expriment le coefficient de carbonatation en  $[mm/\sqrt{\text{jours}}]$ . Il est également possible de s'appuyer sur des résultats d'études reconnues, ce qui permet de prendre en compte une diversité de paramètres. Dans son cours sur les pathologies du béton, Sgambi [50] synthétise les valeurs de  $K$  obtenues pour des structures réelles exposées à l'atmosphère et protégées de la pluie. Ces valeurs varient de 2 à 15 exprimées cette fois-ci en  $[mm/an^{\frac{1}{p}}]$ , avec plus de précisions comme suit :  $2 < K < 6$  pour les bétons de haute compacité (c'est-à-dire avec un faible rapport eau/ciment, bien compactés et durcis) ;  $6 < K < 9$  pour les bétons de compacité moyenne ; et  $K > 9$  pour les bétons poreux.

Il est important de noter que la vitesse de carbonatation sera plus rapide dans un béton fissuré. En effet, ce type de béton entraîne un passage du dioxyde de carbone plus facilement à travers les pores. L'expression de l'épaisseur du front de carbonatation peut être approchée par Vesikari [30] :

$$x(t) = 50 \cdot \sqrt{w} \cdot t^{\frac{1}{4}} \quad (4)$$

Avec

- $x[mm]$  l'épaisseur carbonatée
- $w[mm]$  la largeur des fissures
- $t[année]$  le temps à laquelle le front de solidification est mesuré

On constate que cette dernière relation ne dépend plus du coefficient de carbonatation  $K$ . Les fissures vont favoriser à long terme la pénétration des différents agents agressifs étudiés dans cette étude.

## 3.2 Phase d'initiation par les chlorures

### 3.2.1 Provenance des chlorures

La phase d'initiation de la corrosion due aux chlorures dans le béton constitue une étape critique marquant le début du processus de détérioration des armatures métalliques au sein des structures en béton armé. Pour rappel, les chlorures, sous forme d'ions chlorure  $\text{Cl}^-$ , pénètrent dans le béton par divers moyens, notamment l'eau de mer, les eaux de dégel contenant du sel, les précipitations, la pollution atmosphérique ou encore les matériaux de construction contenant des chlorures, comme le béton lui-même. Il existe deux formes de chlorures dans les bétons :

- Chlorures libres : Ces ions sont habituellement présents dans les pores du béton et sont issus des causes précédemment mentionnées. Ils ont la capacité de diffuser à travers la matrice du béton et jouent un rôle crucial dans le processus de dépassivation, déclenchant ainsi la corrosion des armatures.
- Chlorures liés : Ces composés sont initialement et chimiquement fixés dans la matrice du béton, comme par exemple introduits lors de la fabrication du ciment.

Plus tard, cette étude abordera la quantification des ions chlorure au sein de la matrice du béton. Il est important de souligner que la progression de ces ions à l'intérieur de la matrice du béton est conditionnée par plusieurs facteurs, notamment les propriétés du béton, les mécanismes de transport pris en compte, le taux d'humidité, la configuration des fissures, l'épaisseur de la couverture du béton et la concentration des ions chlorure à la surface de l'élément.

### 3.2.2 Concentration de surface en chlorures

La concentration en chlorures en surface, notée  $C_s$ , revêt une importance capitale dans le processus de modélisation de la diffusion des chlorures. Cette valeur est généralement exprimée en pourcentage du poids total du béton, une mesure couramment utilisée dans les tests en laboratoire. Il est important de noter que la concentration critique  $C_{crit}$ , que nous détaillerons par la suite, est exprimée en pourcentage par kilogramme de ciment. Ainsi, il sera nécessaire de convertir les valeurs de  $C_s$  en fonction de la proportion de ciment dans le béton armé, qui varie généralement entre 10% et 15% du volume total du béton. La concentration en chlorures en surface dépend de divers facteurs, notamment la composition du béton, la position de la structure, l'emplacement et l'orientation de sa surface, ainsi que du micro-environnement dans lequel elle évolue. Elle est également influencée par la concentration de chlorures dans l'environnement, ainsi que par les conditions d'exposition telles que la direction, la vitesse et l'intensité du vent et de la pluie. Cette donnée est essentielle pour initier le processus numérique de modélisation.

Il est à noter que cette concentration n'est pas constante dans de nombreux cas, mais suit plutôt un processus d'accumulation en surface. La littérature propose plusieurs modèles, mais deux sont principalement reconnus. Le premier modèle illustré par Mustafa [63] et Meira et al. [64] décrit une accumulation linéaire de chlorures en surface, notamment dans des conditions d'exposition aux chlorures aéroportés, aux sels de déneigement et aux pulvérisations dans l'air.

$$C_s(t) = k \cdot t \quad (5)$$

Le second modèle illustré par Shin [61] et Kato et al. [39] décrit une accumulation selon une racine carrée, principalement observée dans des conditions de cycles de sécheresse et d'humidité.

$$C_s(t) = k \cdot \sqrt{t} \quad (6)$$

La durée de cette période d'accumulation de chlorures en surface dépend des environnements d'exposition. On s'attend à ce que cette période soit plus longue pour les chlorures aéroportés et les sels de déneigement, et plus courte pour les conditions de marée, de pulvérisation, d'éclaboussures et autres conditions connexes.

Il est également possible de considérer une concentration en chlorures à la surface qui reste constante dans le temps, déterminée à partir d'essais en laboratoire. Diverses études basées sur des tests en laboratoire ont généralisé des valeurs moyennes qui tiennent compte des variations annuelles en fonction de l'agressivité de l'environnement.

Aux États-Unis, par exemple, pour les dalles de pont, la classification suivante est souvent utilisée pour désigner le niveau d'agressivité de l'environnement :

Agressivité de l'environnement	[Kg/m <sup>3</sup> ]	[%] de la masse du béton
Faible	0.0 à 2.4	0.00 à 0.10
Moyenne	2.4 à 4.8	0.10 à 0.20
Élevé	4.8 à 5.9	0.20 à 0.25
Très élevé	5.9 à 8.9	0.25 à 0.37

TABLE 1 – Niveaux de concentration en chlorure en surface

Ce mémoire adopte une approche basée sur des valeurs constantes dans le temps, établies à partir d'essais en laboratoire. Nous supposons que l'application finale étudiée sera soumise à des agressions moyennes, voire élevées.

### 3.2.3 Mécanisme de transport

En guise d'introduction, cette sous-section a pour objectif de présenter le mécanisme de transport des ions chlorure dans le béton, le plan mathématique et les travaux relatifs seront examinés ultérieurement dans ce mémoire. Il est important de noter que ce mécanisme de transport s'accompagne d'une série de mécanismes connexes, certains d'entre eux étant prédominants à différents stades. Parmi les plus courants, on peut citer :

- L'absorption capillaire

L'absorption capillaire se manifeste généralement sur une surface sèche, se caractérisant par le mécanisme d'aspiration minutieuse de liquide à l'intérieur du matériau, comblant ainsi méticuleusement ses pores et capillaires. Ce phénomène trouve son origine dans les tensions superficielles issues des interactions entre le liquide transporteur et la surface des pores, constituant ainsi en quelque sorte le point de départ du processus de diffusion. La vitesse de cette absorption est influencé par la dimension des pores.

- La diffusion

La diffusion est le processus de transport d'une substance à l'intérieur d'un milieu, résultant de l'agitation moléculaire aléatoire. Ce transport se produit des zones à concentration élevée vers celles à concentration plus faible, en raison d'un gradient de concentration.

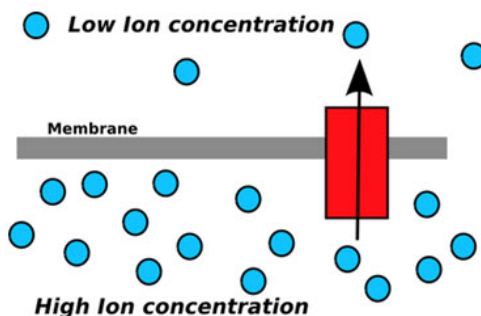


FIGURE 19 – Concept de transport des zones à concentration élevée vers celles à concentration plus faible [9]

Dans le contexte de la pénétration des ions chlorure dans le béton, deux modes de transport sont possibles : en phase liquide (pour les ions chlorure) et en phase gazeuse (pour le dioxyde de carbone, par exemple). La diffusion de ces constituants au sein du béton dépend étroitement de sa porosité ouverte interconnectée et de son degré de saturation.

- La migration sous champ électrique

En scrutant de manière approfondie, les ions chlorure interagissent électrochimiquement avec d'autres ions présents dans la matrice cimentaire. La migration, impulsée par le gradient de potentiel électrique, accélère significativement le processus de diffusion du chlore à travers la structure du béton.

Pour la migration dans l'eau, il est pertinent d'examiner les interactions complexes entre les ions chlorure, les ions hydroxydes, ainsi que le sodium et le potassium.

La modélisation de la pénétration des chlorures dans un élément en béton peut être effectuée en choisissant le mécanisme de transport approprié et en paramétrant sa vitesse. Il est ensuite possible de calculer l'évolution de la concentration à une certaine profondeur au fil du temps. La principale complexité réside dans la quantité et l'incertitude des paramètres en jeu, ainsi que dans la coexistence de plusieurs mécanismes de transport dans la réalité.

### 3.2.4 Évolution

Pour la suite de ce mémoire, nous allons uniquement considérer le transport par diffusion au sein de la matrice béton. Les autres formes, parfois plus complètes et complexes, seront présentées selon la complexité du modèle choisis. Ce processus est gouverné par les lois de Fick, qui offrent un cadre mathématique précis pour décrire et quantifier la diffusion à l'échelle cellulaire. Cette approche de modélisation repose souvent sur la résolution d'équations différentielles partielles de type parabolique, comme nous le verrons ultérieurement. En introduction, de nombreux modèles commencent par évaluer si le système est à l'équilibre ou non. À partir de là, les modèles se développent, intégrant progressivement des détails et devenant de plus en plus complexes.

En réalité, l'équation de diffusion de Fick fait partie d'une classe plus large d'équations qui incluent notamment la loi de Darcy en hydraulique, mais aussi d'autres lois présentées dans le tableau 2 en citant les plus connues.

Flux/Gradient	Charge hydraulique	Potentiel électrique	Température	Concentration
Fluide	Darcy			
Electricité		Ohm		
Chaleur			Fourier	
Soluté				Fick

TABLE 2 – Tableau des grandeurs physiques et des lois ou phénomènes associés.

#### 3.2.4.1 Diffusion en régime stationnaire mono-espèce

Dans le cas de la diffusion stationnaire, la concentration de la substance en cours de diffusion demeure constante dans la région d'intérêt au fil du temps. Cela reflète un équilibre entre les particules qui se déplacent de manière nette vers l'intérieur et celles qui se déplacent de manière nette vers l'extérieur de la région. Ceci veut dire que le flux d'ions chlorure  $J$  sur une unité de surface est proportionnel au gradient de concentration normale sur la section, soit l'expression de la première loi de Fick qui est mis en œuvre dans ce contexte :

$$J = -D_e \cdot (\nabla C) \quad (7)$$

Pour le cas unidimensionnel (1D), bidimensionnel (2D) et tridimensionnel (3D) :

$$\mathbf{1D} : J = -D_e(x, t) \cdot \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \quad (8)$$

$$\mathbf{2D} : J = -D_e(x, y, t) \cdot \left( \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial x} + \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial y} \right) \quad (9)$$

$$\mathbf{3D} : J = -D_e(x, y, z, t) \cdot \left( \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial x} + \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial y} + \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial z} \right) \quad (10)$$

Avec

- $J[\text{kg}/\text{m}^2\text{s}]$  le flux d'ions chlorure
- $D_e(x, t), D_e(x, y, t), D_e(x, y, z, t)[\text{m}^2/\text{s}]$  les coefficients de diffusion effectifs propre à la dimension respective
- $C(x, t), C(x, y, t), C(x, y, z, t)[\text{kg}/\text{m}^3]$  les concentrations en ions chlorure propre à la dimension respective
- $x, y, z[\text{m}]$  la distance à la paroi propre à la dimension respective

Étant donné que le processus de transport des ions chlorure peut être considéré comme transitoire dans le béton, les concentrations en chlorures  $C(x, t), C(x, y, t)$  ou  $C(x, y, z, t)$  évoluent au fil du temps, ce qui restreint l'applicabilité du modèle. Les prochaines investigations seront orientées vers des approches plus réalistes et mieux adaptées aux conditions concrètes existantes.

### 3.2.4.2 Diffusion en régime non stationnaire mono-espèce

Dans le cas de la diffusion non stationnaire, la concentration d'une substance varie au fil du temps dans la zone d'étude. Ce phénomène résulte des fluctuations des conditions de diffusion au fil du temps. Bien que les Lois de Fick restent applicables dans ce contexte, les équations deviennent plus complexes pour intégrer cette évolution temporelle de la concentration. C'est là qu'intervient la deuxième Loi de Fick décrivant la diffusion en régime non stationnaire. Mathématiquement, elle exprime que la variation temporelle de la concentration est équivalente au gradient du flux  $J$  de la substance, tel que décrit par la première loi de Fick (voir équation 7) :

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \nabla \cdot J = -D_a \cdot (\Delta C) \quad (11)$$

Pour les trois dimensions à l'étude (1D, 2D et 3D) :

$$\mathbf{1D} : \frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = -D_a(x, t) \cdot \frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} \quad (12)$$

$$\mathbf{2D} : \frac{\partial C(x, y, t)}{\partial t} = -D_a(x, y, t) \cdot \left( \frac{\partial^2 C(x, y, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C(x, y, t)}{\partial y^2} \right) \quad (13)$$

$$\mathbf{3D} : \frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial t} = -D_a(x, y, z, t) \cdot \left( \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right) \quad (14)$$

Avec

- $D_a(x, t), D_a(x, y, t), D_a(x, y, z, t)[\text{m}^2/\text{s}]$  les coefficients de diffusion apparents propre à la dimension respective
- $C(x, t), C(x, y, t), C(x, y, z, t)[\text{kg}/\text{m}^3]$  les concentrations en ions chlorure propre à la dimension respective
- $t[\text{année}]$  le temps
- $x, y, z[\text{m}]$  la distance à la paroi propre à la dimension respective

Ce modèle décrit le cas d'un transfert mono-espèce, traduisant le mouvement des ions chlorure sans tenir compte des interactions avec les autres espèces ioniques présentes, telles que le potassium, le sodium, les hydroxydes et autres. On note également l'apparition d'un coefficient de diffusion apparent  $D_a$ , utilisé à la place du coefficient effectif dans le cas stationnaire. La détermination de ce coefficient de diffusion apparent est souvent réalisée par des méthodes expérimentales, comme nous le verrons plus tard en section 3.2.4.5. Une solution analytique existe pour le cas unidimensionnel, lorsque le coefficient de diffusion est spatialement et temporellement constant. La concentration en chlorures  $C(x, t)$  devient alors :

$$C(x, t) = C_s \cdot \left( 1 - \text{erf}\left(\frac{x}{2 \cdot \sqrt{D_a t}}\right) \right) \quad (15)$$

Avec

- $C_s[\%]$  la concentration en surface (discutée en section 3.2.3)
- $\text{erf}()$  la fonction d'erreur de Gauss
- $D_a[\text{mm}^2/\text{s}]$  le coefficient de diffusion apparent

Pour les autres dimensions, il sera nécessaire de traiter le problème de diffusion via les méthodes numériques de résolution existantes (voir section 4).

### 3.2.4.3 Diffusion en régime non stationnaire avec fissures

En présence de fissures dans béton, la solution garde la même forme que l'expression 15 mais pour un coefficient de diffusion modifié qui tient compte de ces fissures. On le notera  $D_{av}$  et est exprimé par Boulfiza et al. [33] en fonction du coefficient de diffusion  $D_a$  et d'autres paramètres :

$$D_{av} = D_a + \frac{w}{s} \cdot D_{crack} \quad (16)$$

Avec

- $w[mm]$  la largeur des fissures
- $s[mm]$  l'écart entre les fissures
- $D_{crack}[mm^2/s]$  le coefficient de diffusion dans les fissures

Il est important de noter que la fissuration du béton a un impact significatif sur le coefficient de diffusion des ions chlorure. En particulier, on observe une augmentation du coefficient de diffusion à mesure que la largeur moyenne de fissuration augmente, et cette tendance est cohérente pour tous les types de béton. Assia [23] affirme que lorsque la largeur des fissures reste inférieure à 48  $\mu m$ , le coefficient de diffusion obtenu demeure similaire à celui évalué pour un béton non fissuré, mais au-delà de cette largeur critique, on constate une variation significative.

L'expression de la concentration en chlorure  $C(x, t)$  devient :

$$C(x, t) = C_s \cdot (1 - erf(\frac{x}{2 \cdot \sqrt{D_{av}t}})) \quad (17)$$

### 3.2.4.4 Diffusion multi-espèces

La théorie du transport ionique s'appuie sur des modèles comme la loi de Fick, qui considère le déplacement des ions en fonction du gradient de concentration, mais ignore les interactions électrochimiques réelles entre les ions en solution. En réalité, ces particules chargées sont soumises à des forces électrochimiques provenant de leurs interactions mutuelles et avec les solvants. L'équation de Nernst-Planck, plus complète, intègre ces forces dans le transport ionique, combinant mécanisme de diffusion et migration induite par ces forces électrochimiques. Ainsi, dans un matériau comme le béton, le modèle multi-espèces pour la pénétration des chlorures tient compte des interactions entre divers ions majeurs en solution, tels que les chlorures  $Cl^-$ , les hydroxydes  $OH^-$ , le sodium  $Na^+$  et le potassium  $K^+$ , préservant ainsi l'électroneutralité en considérant les vitesses variables de déplacement de chaque ion.

Par conséquent, la loi de Fick est moins adaptée que l'équation de Nernst-Planck [49] formulée de la manière suivante :

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} + \nabla \cdot J = 0 \quad (18)$$

$$\downarrow \text{ Avec } J = \underbrace{-D\nabla C(x, t)}_{\text{Diffusion}} + \underbrace{\frac{Dze}{k_B T} C(x, t) E}_{\text{Migration électrique}} \quad (19)$$

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (D\nabla C(x, t) + \frac{Dze}{k_B T} C(x, t) E) \quad (20)$$

Avec

- $C(x, t)[\%]$  la concentration en chlorure en pourcentage massique par rapport au ciment
- $t[année]$  le temps

- $D(x, t)[mm^2/s]$  le coefficient de diffusion
- $z[ ]$  la valence de l'espèce ionique
- $e[C]$  la charge élémentaire
- $k_B[m^2kg/s^2K]$  la constante de Boltzmann ( $= 1,38064910^{-23}[m^2kg/s^2K]$ )
- $T[K]$  la température absolue
- $E = -(\nabla\phi + \frac{\partial A}{\partial t})[V/mm]$  le champ électrique
- $\phi[V]$  le potentiel électrique
- $A[mm\cdot s]$  le vecteur magnétique potentiel

Pour être encore plus précis, on peut également considérer le cas d'une solution modérément diluée, qui est le cas pour le transport du chlore et qui tient compte de plusieurs effets comme la diffusion pure, la migration sous champ électrique, le potentiel chimique ainsi que la convection. Newman, dans son livre sur les systèmes électrochimiques (1991) [92], donne la relation suivante pour la description du flux d'ions  $J_i$  dans une solution modérément diluée pour chaque espèce  $i$  :

$$J_i = - \underbrace{\frac{z_i D_i F}{RT} \cdot c_i \nabla \phi}_{\text{Migration électrique}} - \underbrace{D_i \nabla c_i}_{\text{Diffusion pure}} - \underbrace{D_i c_i \nabla \ln \gamma_{i,n}}_{\text{Potentiel chimique}} + \underbrace{c_i v}_{\text{Convection}} \quad (21)$$

Dans le cadre de cette étude, la pénétration des ions chlorure est modélisée dans sa forme la plus simple, à savoir la diffusion traduisant le transport diffusif dans le béton ; c'est la formulation couramment utilisée dans la littérature scientifique. Une analyse comparative en trois dimensions pourra être effectuée. L'objectif est de comparer les méthodes numériques de résolution de la diffusion du chlorure dans le béton, avec une application sur un élément particulier de génie civil.

### 3.2.4.5 Paramétrisation du coefficient de diffusion

Le coefficient de diffusion  $D$  est intrinsèquement lié aux caractéristiques du matériau telles que sa composition, son âge, son état de carbonatation et sa fissuration, ainsi qu'aux conditions environnementales telles que la concentration en chlorures et la température. Une multitude de relations empiriques ont été établies à cet effet, résultant de diverses études menées dans le domaine. Selon Nilsson et al. [66], le coefficient de diffusion peut être considéré comme constant pour des structures en service depuis longtemps. Dans le cas stationnaire, où les conditions restent relativement constantes, le coefficient de diffusion effectif  $D_e$  est utilisé. En revanche, dans des situations non stationnaires où les conditions évoluent avec le temps, un coefficient de diffusion apparent  $D_a$  est plus approprié. Ces deux coefficients peuvent être reliés selon une formule établie par Nilsson en 1992 [66] et également présentée dans les recherches de Sarra et Roqiya [68].

$$D_a = \frac{D_e}{\phi + \rho \cdot \frac{\partial m_b}{\partial c_f}} \quad (22)$$

Avec

- $\phi[ ]$  la porosité du matériau accessible aux chlorures
- $\rho[kg/m^3]$  la masse volumique apparente du matériau à l'état sec
- $m_b[ ]$  la masse de chlorures liés par unité de masse de solide sec
- $c_f[\%]$  la concentration en chlorures libres de la solution interstitielle

Le coefficient de diffusion effectif  $D_e$  peut être déterminé expérimentalement à l'aide de diverses méthodes, notamment les tests de migration. Luping [89] généralise la diversité en deux types de méthodes : les méthodes conventionnelles et les méthodes rapides.

Les méthodes conventionnelles, telles que le test de diffusion en cellule et le test d'immersion, visent à reproduire le processus naturel de transport des chlorures, simulant ainsi les concentrations que l'on trouve dans l'eau de l'océan. Toutefois, ces approches sont chronophages. C'est pourquoi des méthodes plus rapides ont été développées. Ces méthodes accélérées exploitent un champ électrique externe, une solution concentrée en chlorure ou une température élevée pour accélérer la diffusion. Parmi ces méthodes, on compte les tests de migration électrique, qui utilisent l'équation de Nernst-Planck en conditions stationnaires ou non. Pour de plus amples informations sur ces méthodes, il convient de se référer à Luping [89], étant donné que ce n'est pas l'objectif principal de ce mémoire.

En outre, Nguyen [49] propose une modélisation du coefficient de diffusion apparent en prenant en compte ses diverses influences également appuyé par Martin-Perez et al. [45] et Alsheet [71] :

$$D_a = D_e \cdot f_1(S) \cdot f_2(T) \cdot f_3(h) \cdot f_4(t) \quad (23)$$

Avec

- $D_e$  le coefficient de diffusion effectif mesuré expérimentalement
- $f_1(S)$  la fonction liée au degré de saturation (comparaison insaturé/saturé)
- $f_2(T)$  la fonction liée à la température  $T$
- $f_3(h)$  la fonction liée à l'humidité relative  $h$
- $f_4(t)$  la fonction liée à l'âge du béton  $t$

Al-samawi et al. [97] donne une description plus complète du coefficient de diffusion à un instant donné  $D_t$  en considérant sa maturité dans le temps et d'autres fonctions complémentaires simulant les interactions environnementales :

$$D_t = D_{ref} \cdot f_1(t) \cdot f_2(T) \cdot f_3(h) \cdot f_4(D) \cdot f_5(\sigma) \cdot f_6(w) \quad (24)$$

Avec

- $D_{ref}$  le coefficient de diffusion mesuré au temps de référence  $t_{ref}$  Bentz et al. [31]
- $f_1(t)$  la fonction liée au temps  $t$  et à l'effet du rapport e/c
- $f_2(T)$  la fonction liée à la température  $T$
- $f_3(h)$  la fonction liée à l'humidité relative  $h$
- $f_4(D)$  la fonction liée au effet de dégradation du béton  $D$
- $f_5(\sigma)$  la fonction liée au effet de contrainte  $\sigma$
- $f_6(w)$  la fonction liée à la propagation de la corrosion et à l'effet de la fissuration  $w$

Des similitudes sont observées entre les deux approches, où des fonctions similaires sont définies. Ces diverses fonctions ont été établies dans plusieurs recherches.

Concernant la fonction de la température  $f(T)$ , Nguyen [49], Naito et al. [48] et Al-samawi [97] se regroupent sur une relation :

$$f(T) = e^{\frac{E_a}{R} \cdot (\frac{1}{T_{ref}} - \frac{1}{T})} \quad (25)$$

Avec

- $E_a [J/mol]$  l'énergie d'activation
- $R [J/Kgmol]$  la constante universelle des gaz parfait (= 8.314[J/Kgmol])
- $T_{ref} [^{\circ}C]$  la température de référence
- $T [^{\circ}C]$  la température moyenne de la structure

L'étude d'Al-samawi [97] apporte plus de précision sur la quantification de la température moyenne de la structure  $T$ . D'ailleurs, plus la température est importante, plus le coefficient de diffusion est élevé, cela peut s'expliquer par une agitation ionique (mouvement de Brownien) proportionnelle à la température. Pour ce qui est de la fonction de l'humidité relative  $f(h)$ , Martin-Perez [45] propose la relation suivante en tenant compte du paramètre  $h_c$  l'humidité à laquelle le coefficient de diffusion  $D_a$  ou  $D_t$  tombe à mi chemin entre son maximum et le minimum :

$$f(h) = \left(1 + \frac{(1-h)^4}{(1-h_c)^4}\right)^{-1} \quad (26)$$

Le paramètre  $h_c$  peut être pris à 0.75, correspondant à une valeur plausible basés sur des données expérimentales Bazant et Najjar [69]. D'après Al-samawi [97], l'humidité relative dans le béton  $h$  peut être exprimée au moyen d'une fonction sinusoïdale.

Ensuite, Naito et al. [48] propose une relation pour la fonction de l'âge sur base de la Loi d'Arthéus :

$$f(t) = \left(\frac{t_0}{t}\right)^\alpha \quad (27)$$

Avec

- $t_0[s]$  le temps initial de la structure
- $t[s]$  le temps de la mesure
- $\alpha[/]$  le coefficient d'âge du béton

Le paramètre  $\alpha$  peut être approché en fonction du rapport eau/ciment ( $e/c$ ) selon Mangat et Molloy [44]. En effet,  $\alpha = 2.4 \cdot (e/c)$  serait un bon candidat. De nombreuses études fournissent des valeurs du coefficient d'âge  $\alpha$  en fonction de plusieurs types de mixtures du béton. Celles de Bamforth [96] propose les valeurs suivantes :  $\alpha = 0.264$  pour des béton ordinaires,  $\alpha = 0.699$  pour des bétons à cendres volantes et  $\alpha = 0.621$  pour des bétons à laitiers.

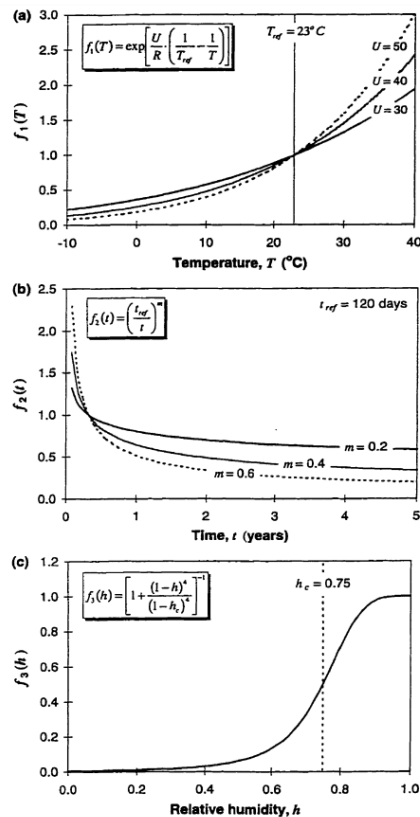


FIGURE 20 – Courbes de dépendance en fonctions des différents paramètres [45]

Concernant la fonction du degré de saturation, Nguyen [49] rapporte :

$$f(S) = \left(\frac{w}{\phi}\right)^{\frac{7}{3}} \quad (28)$$

- $w$  le degré de saturation
- $\phi$  la porosité

Les autres fonctions dues aux effets de dégradation  $f(D)$ , de contrainte  $f(\sigma)$  et de fissuration  $f(w)$  sont décrites en détails dans les recherches d'Al-samawi et al. [97].

Les recherches actuelles montrent que le coefficient de diffusion apparent  $D_a$  varie généralement de  $10^{-14}$  à  $10^{-11}$  [ $m^2/s$ ] pour un béton non fissuré, selon le type de béton étudié. Timhadjelt et Lion [67] ont utilisé l'approche performantielle de l'AFGC (Association Française de Génie civil) pour classer les spécimens soumis à des tests de migration électrique. Leur étude révèle que la classe de durabilité des bétons augmente avec la qualité des matériaux utilisés. En particulier, ils ont établi la classification suivante : le béton poreux (BP), le béton ordinaire (BO), et béton à très haute performance (BTHP). De plus, ils ont examiné l'effet de l'incorporation de laitiers de haut-fourneau, en ajoutant des spécimens de béton ordinaire contenant différents pourcentages  $x$  de laitier (BO- $x$ ). Les résultats indiquent que l'ajout de laitiers améliore également la durabilité du béton avec la diminution du coefficient de diffusion.

Classes et valeurs limites (durabilité potentielle)					
	Très faible (TF)	Faible (F)	Moyenne (M)	Élevée (E)	Très élevée (TE)
<b>Coefficient de diffusion apparent des chlorures : <math>D_{app}</math> (mig) en <math>10^{-12} m^2.s^{-1}</math></b>	>50	10 à 50	5 à 10	1 à 5	< 1
<b>Classement des matériaux étudiés</b>		BP BO-EA	BO	BO-40 BO-40-EA Coulis Mortier HP	BO-80 BTHP BTHP-40 BTHP-80

FIGURE 21 – Application de l'approche performantielle AFGC avec les matériaux étudiés par Timhadjelt et Lion [67]

En addition, Luping [89] identifie les critères de résistance au chlorure en fonction du coefficient de diffusion  $D_a$  comme suit.

- $D_a < 2 \times 10^{-12} m^2/s$  : Très bonne résistance contre l'entrée de chlorure
- $D_a < 8 \times 10^{-12} m^2/s$  : Bonne résistance contre l'entrée de chlorure
- $D_a < 16 \times 10^{-12} m^2/s$  : Résistance modérée contre l'entrée de chlorure
- $D_a > 16 \times 10^{-12} m^2/s$  : Pas adapté pour un environnement agressif

Pour un béton ordinaire utilisé dans le béton armé, une valeur de  $D_a = 10 \times 10^{-12} m^2/s$ , correspondant à une structure à moyenne résistance représentant la majorité des ponts construits avant les années 2000, est un choix pertinent pour le coefficient de diffusion. Cette valeur sera utilisée comme référence pour l'application finale discutée dans ce mémoire. Il sera intéressant de comparer la progression de la corrosion avec une structure mieux conçue, réalisée à partir d'un béton à haute performance pouvant contenir davantage de laitier. Pour ce type de béton, une valeur de  $D_a = 1 \times 10^{-12} m^2/s$  sera retenue.

Dans le cas des bétons fissurés, les recherches de Wang et al. [57] utilisent la formule présentée à la relation 16 pour étudier la valeur du coefficient de diffusion moyen  $D_{av}$  en fonction de la largeur des fissures  $w$  et de l'écart entre elles  $s$ . Ils ont observé que  $D_{av}$  peut être de 10 à 100 fois supérieur au coefficient de diffusion apparent dans le cas non fissuré  $D_a$ . Pour les besoins de ce mémoire, un coefficient  $D_{av} = 500 \times 10^{-12} m^2/s$  sera retenu soit 50 fois supérieur à un béton à résistance modérée.

### 3.2.5 Concentration critique en chlorures

Un autre paramètre essentiel à mentionner est la concentration critique  $C_{crit}$ , qui correspond à la concentration minimale à partir de laquelle la corrosion commence à se développer. Cette valeur est largement débattue dans la littérature. Selon le Comité Euro-international du Béton (CEB) [99], la concentration critique est fixée à 0.4% du poids de ciment pour le béton non carbonaté. En revanche, pour le béton carbonaté, le CEB suppose simplement la possibilité d'une concentration critique inférieure à 0.4% du poids de ciment.

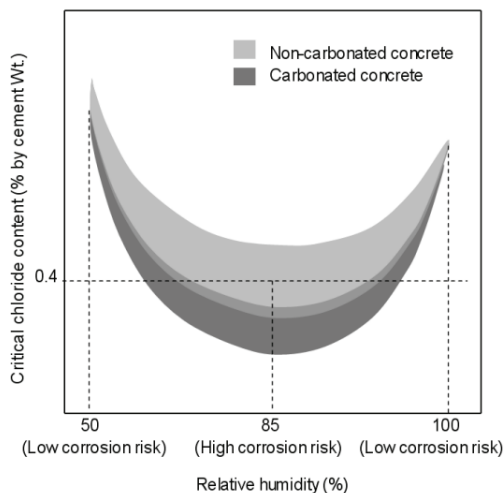


FIGURE 22 – Plage de valeurs de la concentration critique en chlorure dans deux types de béton [65]

Les observations du groupe Lerm [85] présentent également les normes EN 206 quant au béton armé sur la concentration critique en chlorures avec la connaissance du pH de la solution interstitielle. Cette valeur est également de l'ordre de 0.4% exprimée en concentration de chlorures en pourcentage de masse du ciment. En outre, l'armature du béton précontraint tolère une limite nettement inférieure valant 0.1%. Ces valeurs nous seront utiles pour l'application d'un cas concret du mémoire.

Mai-Nhu [81] précise que dans les modèles probabilistes de durabilité, la concentration critique est considérée comme une variable stochastique. Les nombreux tests effectués démontrent une moyenne de 0,6 % de chlorures totaux par rapport à la masse de ciment, avec une plage typique se situant entre 0,4 % et 1 %.

### 3.3 Phase de propagation : corrosion des armatures

Cette étape marque le début de la corrosion des armatures, causée par une pénétration suffisante de chlorures ou de dioxyde de carbone entraînant la carbonatation. Il est crucial de noter que ces agents agressifs ne provoquent pas directement la corrosion, mais y contribuent en présence d'eau et d'oxygène. Durant cette phase, le béton voit sa résistance diminuer pour plusieurs raisons : la réduction de la section d'acier diminue sa capacité portante, la perte d'adhérence entre l'acier et le béton, et les produits de corrosion provoquent des fissures et l'éclatement de l'enrobage. De nombreuses recherches se concentrent sur la réduction de section de l'acier en état carbonaté, révélant la dégradation intrinsèque des armatures. Le processus de corrosion varie entre les armatures standards, où elle se développe sur toute la circonférence de la barre, et les armatures de précontraintes, où elle est souvent localisée sous forme de piqûres.

#### 3.3.1 Armatures standards

Pour les armatures standards du béton armé, Sarja et Vesikari [19] ont établi une relation décrivant l'évolution temporelle du diamètre de l'armature  $d(t)$  :

$$d(t) = d_0 - n \cdot d'(t) \quad (29)$$

Avec

- $d_0[mm]$  le diamètre initial de l'armature
- $n[ ]$  le nombre de côtés attaqués ( $n = 1$  pour attaque "piqûre" et  $n = 2$  pour attaque uniforme)
- $d'(t)[mm]$  la profondeur de corrosion (voir Figure 23)

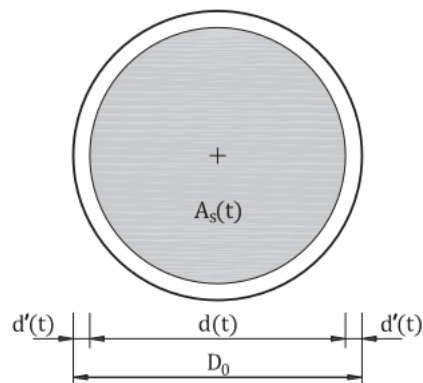


FIGURE 23 – Géométrie de la corrosion généralisée [50]

Ou bien exprimé en aire d'armatures  $A$  :

$$A = \frac{\pi d^2(t)}{4} \quad (30)$$

D'après Malerba et al. [43], la profondeur de corrosion  $d'(t)$  peut être approchée par la Loi de Faraday :

$$d'(t) = 0.0116 \cdot i_{corr} \cdot (t - t_0) = v_{corr} \cdot (t - t_0) \quad (31)$$

Avec

- $i_{corr}[\mu A/cm^2]$  le courant de corrosion surfacique
- $v_{corr}[\mu m/an]$  la vitesse de corrosion
- $t[anne]$  le temps totale
- $t_0[anne]$  le temps initiale (lorsque la propagation commence)

La constante de conversion de 0.0116 permet de passer des unités de courant électrique en  $[\mu A/cm^2]$  à des taux de corrosion en  $[\mu m/an]$ , selon la Loi de Faraday. La vitesse de corrosion  $v_{corr}$  est influencée par divers paramètres, tels que la composition et l'état de surface du matériau, les conditions environnementales (humidité relative, température), le type d'attaque chimique (carbonatation, chlorures, sulfates), les caractéristiques du béton et de l'acier, ainsi que l'ouverture des fissures.

Sarja et Vesikari [19] ont établi des recherches quant à la vitesse de corrosion  $v_{corr}$  en fonction de l'humidité relative et fournit le tableau de valeurs suivant dans le cas d'un béton carbonaté seul et d'un béton carbonaté avec une attaque des chlorures :

Humidité relative [%]	Béton carbonaté $[\mu m/an]$	Béton carbonaté avec chlorures $[\mu m/an]$
99	2	34
95	50	122
90	12	98
85	3	78
80	1	61
75	0.1	47
70	0	36
65	0	27
60	0	19
55	0	14
50	0	9

TABLE 3 – Vitesse de corrosion dans un béton carbonaté seul et dans un béton carbonaté avec attaque des chlorures en fonction de l'humidité relative [19]

La vitesse de corrosion augmente significativement à partir de 70% d'humidité relative, atteignant un maximum à 95 %. En dessous de 70 %, le béton carbonaté seul présente une vitesse de corrosion nulle, contrairement au béton carbonaté avec chlorures, qui montre des vitesses mesurables. Pour un béton complètement humidifié, la vitesse de corrosion diminue probablement en raison d'un transport ionique réduit. En Belgique, l'humidité relative varie entre 75% et 90% selon le mois. À toutes les humidités, la présence d'ions chlorure accroît et intensifie la vitesse de corrosion.

### 3.3.2 Armatures précontraintes

Dans le contexte des systèmes précontraints, des cavités localisées, semblables à des piqûres de corrosion, peuvent se former. La corrosion par piqûres résulte d'une déchirure très localisée de la couche passive de protection, souvent induite par des agents fortement activateurs tels que les ions chlorure ou fluorure. Cette phénoménologie affecte particulièrement ces systèmes, car les fils sont généralement plus fins que les barres d'armature conventionnelles et sont préalablement tendus, ce qui favorise la corrosion sous tension. Un rapport significatif peut être établi entre l'épaisseur de corrosion maximale  $p_{max}$  au sein d'une piqûre et une épaisseur de corrosion généralisée  $d'(t)$  ; ce ratio est supérieur à 1 [43].

$$R = \frac{p_{max}}{d'(t)} > 1 \quad (32)$$

Cette même étude évoque plusieurs valeurs du ratio  $R$  basés sur d'autres études :

Auteurs	Valeurs de $R$
Gonzalez et al [38]	4 à 8
Darmawan et Stewart [73]	8 à 11
Tuutti [100]	4 à 10

TABLE 4 – Variations du ratio  $R$  selon différentes études.

En addition, Val et al. [53] propose une géométrie à section hémisphérique synthétisant les différents formes creusées comme montré à la figure 24 :

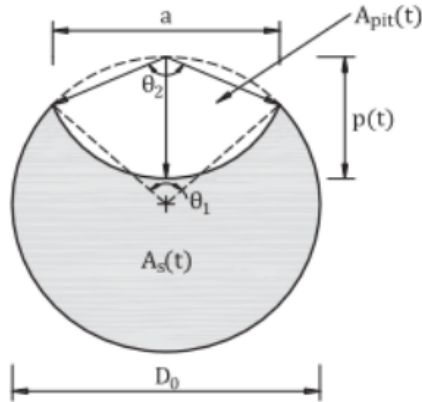


FIGURE 24 – Géométrie de la piqûre de corrosion d'un fil précontraint [53]

Cette aire approchée  $A_{pit}$  peut se calculer via la géométrie de la figure 24. La littérature [50] fournit les formules pour modéliser cette corrosion par piqûre. La définition de  $A_{pit}$  dépend de la valeur de profondeur de corrosion  $p(t)$  ( $= d'(t) \cdot R$ ) :

$$A_{pit}(t) = \begin{cases} A_1(t) + A_2(t) & \text{si } p(t) \leq \frac{D_0}{\sqrt{2}} \\ A_0 - A_1(t) + A_2(t) & \text{si } \frac{D_0}{\sqrt{2}} < p(t) \leq D_0 \\ A_0 & \text{si } p(t) > D_0 \end{cases} \quad (33)$$

En définissant  $a(t)$ ,  $\theta_1(t)$  et  $\theta_2(t)$ , nous pouvons exprimer les paramètres  $A_1(t)$  et  $A_2(t)$  :

$$\begin{cases} a(t) = 2 \cdot p(t) \cdot \sqrt{1 - \left(\frac{p(t)}{D_0}\right)^2} \\ \theta_1(t) = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{a(t)}{D_0}\right) \\ \theta_2(t) = 2 \cdot \arcsin\left(\frac{a(t)}{p(t)}\right) \end{cases} \quad (34)$$

$$\rightarrow \begin{cases} A_1(t) = 0.5 \cdot (\theta_1(t) \cdot \left(\frac{D_0}{2}\right)^2 - a(t) \cdot \left(\frac{D_0}{2} - \frac{p(t)^2}{D_0}\right)) \\ A_2(t) = 0.5 \cdot (\theta_2(t) \cdot p(t)^2 - a(t) \cdot \frac{p(t)^2}{D_0}) \end{cases} \quad (35)$$

La section en acier résultante après l'attaque  $A_s(t)$  est exprimée en fonction de son aire initiale  $A_0$  et de l'aire liée à la piqûre  $A_{pit}$  :

$$A_s(t) = A_0 - A_{pit} \quad (36)$$

## 4 Méthodes numériques de résolution

Dans le cadre de cette recherche, il est bien établi que le problème du transport des chlorures à travers le béton armé est gouverné par les équations de transport récemment exposées. Nous nous focaliserons principalement sur l'équation de diffusion pure, comme décrite à la relation 11. Pour résoudre une telle équation, reconnue comme une équation aux dérivées partielles, et ce, de manière rapide et efficace, surtout dans des régions/surfaces complexes, les méthodes numériques apparaissent comme des solutions de choix.

L'utilisation des méthodes numériques pour résoudre des équations aux dérivées partielles (EDP) est devenue une pratique essentielle dans de nombreuses branches des sciences et de l'ingénierie. Les EDP sont des outils mathématiques puissants pour modéliser une grande variété de phénomènes physiques, allant de la diffusion de la chaleur ou de la matière dans les matériaux à la propagation des ondes sismiques en passant par la dynamique des fluides. Ces équations peuvent être classées selon 3 catégories : hyperbolique, parabolique et elliptique. L'équation de diffusion présentée à la relation 11 se classe parmi les équations aux dérivées partielles paraboliques. La résolution analytique exacte des EDP est souvent complexe, voire impossible, pour de nombreux cas réels. C'est là qu'interviennent les méthodes numériques, qui permettent de transformer ces équations en problèmes solubles sur des ordinateurs, fournissant ainsi des solutions numériques approximatives.

Les méthodes numériques permettent d'obtenir des solutions approchées des EDP en discrétisant l'espace et le temps, puis en résolvant numériquement les équations discrétisées. Ces méthodes offrent une grande flexibilité pour traiter une variété de conditions aux limites, de géométries complexes et de dépendances non linéaires. En outre, elles permettent de simuler des phénomènes difficiles à étudier expérimentalement, d'optimiser la conception de systèmes complexes, de prédire le comportement de matériaux, et bien plus encore. Cela fait des méthodes numériques un pilier incontournable de la recherche scientifique et de l'ingénierie moderne.

Cette section vise à exposer, dans un premier temps, un aperçu historique des méthodes numériques utilisées pour résoudre des équations aux dérivées partielles, en mettant l'accent sur le cas spécifique de l'équation de diffusion, également connue sous le nom de seconde Loi de Fick. Ensuite, plusieurs études pertinentes sur ce sujet seront présentées. Dans un second temps, ce mémoire détaillera deux de ces méthodes numériques, à savoir les différences finies et les automates cellulaires, afin d'analyser leur efficacité, en les implémentant en Python pour résoudre des cas simples. L'objectif est de comparer leur performance et d'évaluer leur pertinence pour la modélisation de la diffusion des chlorures dans le béton.

### 4.1 Tracé historique

Avant d'explorer l'évolution historique des méthodes numériques, il est crucial de souligner que des solutions analytiques ont été envisagées pour des problèmes moins complexes. En particulier, la Loi de Fick, examinée dans le contexte de la diffusion du chlore dans le béton, a été formulée au 19e siècle, une période marquée par l'utilisation de la méthode de séparation des variables, notamment grâce aux travaux pionniers de Joseph Fourier.

La méthode de séparation des variables, souvent appelée méthode de Fourier, demeure une approche couramment employée pour résoudre les problèmes aux limites associés aux équations aux dérivées partielles [78]. Cette stratégie implique la recherche de solutions spécifiques sous la forme séparable  $u(x, y) = X(x)Y(y)$ , où  $X$  et  $Y$  représentent respectivement des fonctions de  $x$  et  $y$ . L'objectif est de réduire l'EDP à deux équations différentielles ordinaires distinctes, l'une pour  $X$  et l'autre pour  $Y$ , transformant ainsi le problème initial en problèmes aux limites impliquant des équations différentielles ordinaires. Cette méthode a donc la capacité de simplifier la résolution analytique de problèmes complexes régis par des EDP.

D'autres solutions analytiques ont été découvertes pour des équations aux dérivées partielles (EDP) dans divers domaines des mathématiques, notamment en théorie des plaques. Les fonctions de Airy et les solutions de Levy/Navier en sont des exemples notables. Cependant, ces approches se situent en dehors du contexte de la diffusion.

Le passage des méthodes analytiques aux méthodes numériques a suivi une évolution historique marquée par des besoins croissants de résoudre des problèmes complexes. Au départ, les méthodes analytiques dominaient, offrant des solutions précieuses pour des cas simples et réguliers. Cependant, avec la complexification des systèmes étudiés, notamment la nécessité de résoudre des équations aux dérivées partielles dans des configurations réalistes, les limites des solutions analytiques ont commencé à se manifester.

Le tournant décisif a eu lieu au 20e siècle avec l'avènement des calculateurs électroniques, qui ont permis de mettre en œuvre des méthodes numériques. Les différences finies, développées dans les années 1920-1930, ont été parmi les premières méthodes numériques à être largement utilisées. Ces approches ont introduit la discrétisation de l'espace et du temps, ouvrant la voie à la résolution numérique des EDP en exploitant des approximations de dérivées.

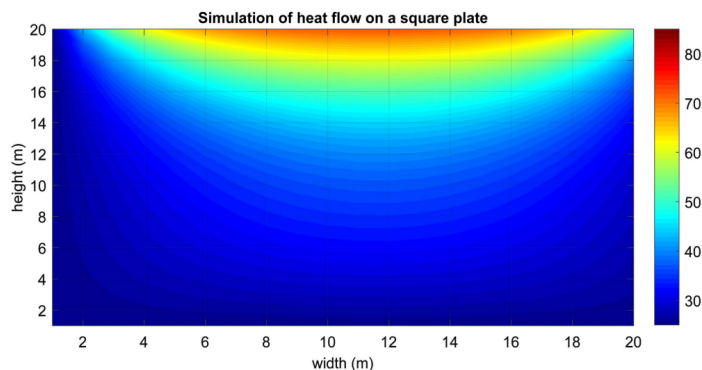


FIGURE 25 – Simulation d'une distribution de température dans une plaque par les différences finies [59]

Des développements ultérieurs, tels que les méthodes des éléments finis dans les années 1950-1960 et les méthodes de volumes finis peu de temps après, ont apporté des améliorations substantielles, élargissant la portée des simulations numériques. Ces avancées ont trouvé des applications dans des domaines divers, de la modélisation climatique à la simulation de structures complexes. Ces 2 autres méthodes numériques exploitent des approximations d'intégrales.

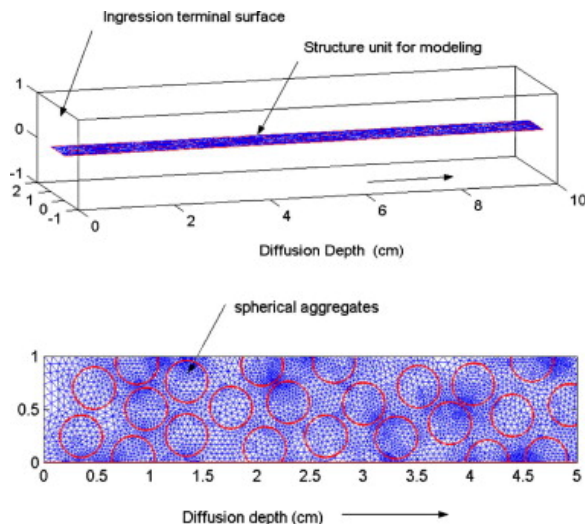


FIGURE 26 – Modèle de diffusion en élément finis [103]

Pendant cette période, un autre ajout notable était l'émergence d'un algorithme évolutionnaire connu sous le nom d'automates cellulaires. Ces derniers ont été initialement introduits par les mathématiciens von Neumann et Ulam

dans les années 60, puis développés ultérieurement par d'autres chercheurs scientifiques. Les automates cellulaires, à l'origine destinés à résoudre des problèmes d'autoréplication, ont gagné en popularité grâce au célèbre jeu de la vie inventé par Conway [79].

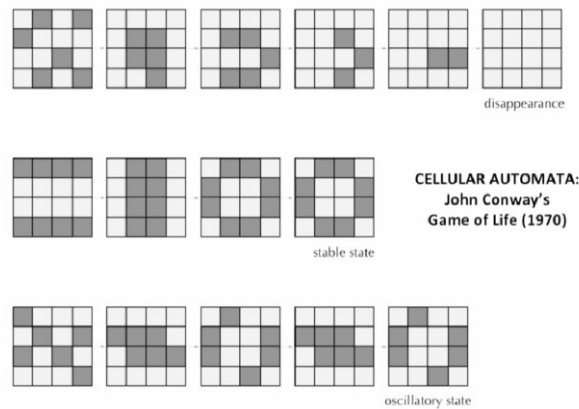


FIGURE 27 – John Conway - jeu de la vie (1970) présenté par Cazzaro [79]

Le jeu de la vie se déroule sur une grille bidimensionnelle composée de cellules carrées, où chaque cellule peut être soit vivante soit morte. L'évolution de la grille se fait par itérations discrètes en appliquant un ensemble de règles simples à chaque cellule en fonction de l'état de ses voisins immédiats. Hormis les cellules en bord de grille, chaque cellule a huit voisins adjacents. Les règles du jeu sont les suivantes : la survie, où une cellule vivante avec deux ou trois cellules voisines vivantes reste vivante, sinon elle meurt ; et la naissance, où une cellule morte avec exactement trois cellules voisines vivantes devient vivante.

L'utilisation véritable des automates cellulaires dans les domaines de l'ingénierie moderne est apparue un peu avant les années 2000. Depuis, ils ont trouvé des applications dans divers domaines évolutifs : en chimie, pour la simulation du comportement d'un gaz ou de la diffusion de matière dans un milieu ; dans la simulation et l'étude du développement urbain ; dans la propagation de feu de forêt ; mais plus globalement comme une alternative pour résoudre des problèmes physiques liés aux équations différentielles [80].

Cette diversité des méthodes numériques et leur importance dans les contextes actuels des problèmes d'ingénierie est notable. Un des objectifs de ce mémoire est de comparer la méthode numérique précurseur des différences finies avec les automates cellulaires, apparus comme une méthode moderne, en termes d'implémentation et de résultats. Cette comparaison sera réalisée en examinant des sections de structures simples à des sections plus complexes existantes, dans le cadre d'une structure sujette à la dégradation par les chlorures. Ces comparaisons permettront de mieux comprendre l'efficacité et les limites de chaque méthode, et de choisir la plus appropriée pour des applications spécifiques en ingénierie.

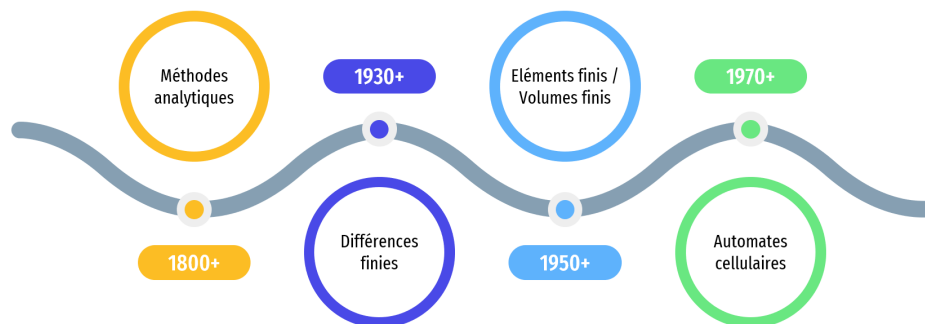


FIGURE 28 – Résumé du tracé historique des méthodes numériques de résolution

## 4.2 Études antérieures

Avant d'aborder les différentes méthodes numériques, il est pertinent de rappeler les études préalables réalisées dans ce domaine ou des domaines connexes, afin de comprendre le contexte restreint des exemples disponibles sur la modélisation numérique de la diffusion des chlorures dans la matrice du béton. Parmi ces recherches, on peut citer les travaux de Dudi et al. [42], qui ont utilisé la méthode des différences finies pour examiner la durée de vie des éléments en béton armé face à l'attaque des chlorures. Leur étude a pris en compte un coefficient de diffusion variant dans le temps, influencé par de nombreux facteurs environnementaux, comme indiqué précédemment en section 3.2.4.5. De plus, ils ont exploré l'évolution du courant de corrosion.

Dans le même contexte, l'étude de Lee [40] s'est penchée sur les considérations relatives aux pores et à leurs caractéristiques à l'aide de méthodes numériques pour la diffusion des chlorures. L'auteur a comparé ces méthodes avec des approches analytiques et des résultats de laboratoire. En outre, l'étude a porté sur la caractérisation du coefficient de diffusion et la concentration en surface, comme illustré dans la figure 29.

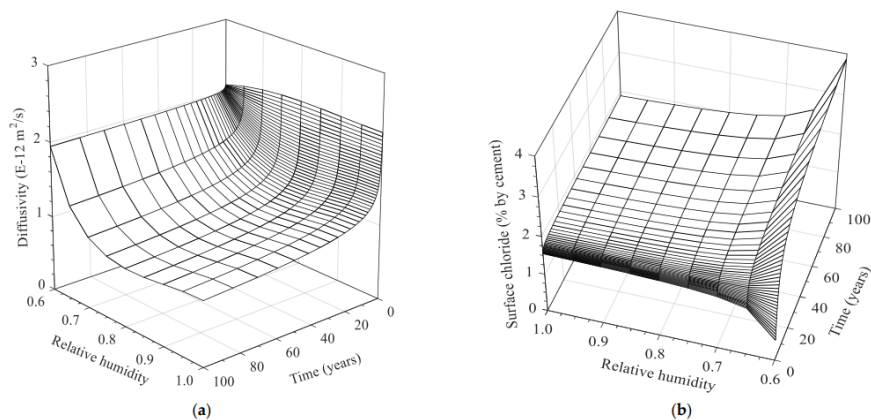


FIGURE 29 – Évolution du (a) coefficient de diffusion apparent et (b) concentration en surface. Source : [40]

D'autres recherches approfondies, menées par Jie et al. [56], ont utilisé un modèle par éléments finis pour représenter les agrégats et les discontinuités de forme dans la diffusion des chlorures. La figure 30 illustre la diffusion des chlorures à travers la matrice de béton, en tenant compte des irrégularités telles que le granite broyé et le gravier rond.

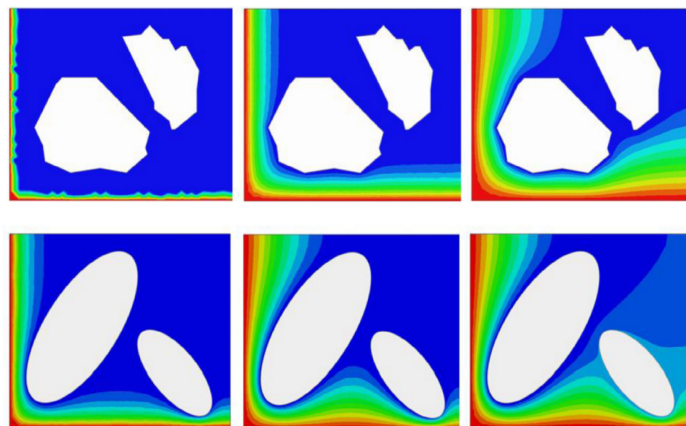


FIGURE 30 – Diffusion des chlorures à travers la matrice de béton comprenant des irrégularités : granite broyé et gravier rond. [56]

Les travaux de Bai [102] exploitent les schémas implicites des différences finies en utilisant la méthode ADI (Alternating-direction implicit method) pour modéliser la concentration en chlorures dans une surface, en tenant compte de coefficients variant dans le temps.

En ce qui concerne les automates cellulaires, nous pouvons citer les travaux de Bontempi et al. [32] ainsi que ceux d'Al-samawi et al. [97]. Ces études se concentrent d'abord sur l'établissement de ces méthodes numériques particulières, puis explorent la modélisation de structures types de ponts en utilisant ces concepts. Plus précisément, ces recherches examinent la diffusion d'agents agressifs, tels que les ions chlorure, sur les surfaces d'une poutre et d'un pilier de pont, respectivement.

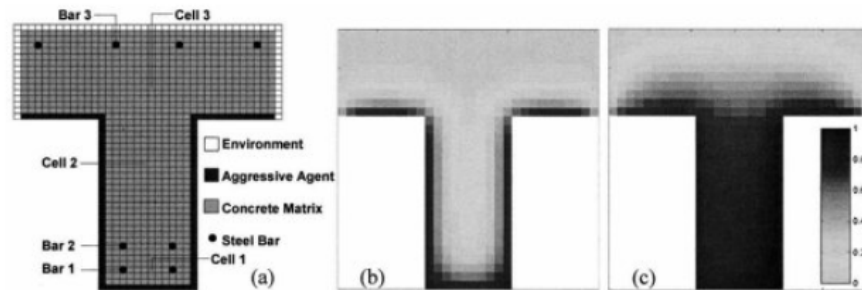


FIGURE 31 – (a) Maillage en automates cellulaires du domaines considéré (b) diffusion dans la section après 4 ans (c) 30 ans. [32]

Al-samawi [97] explore toutefois la diffusion en trois dimensions sur une structure simple :

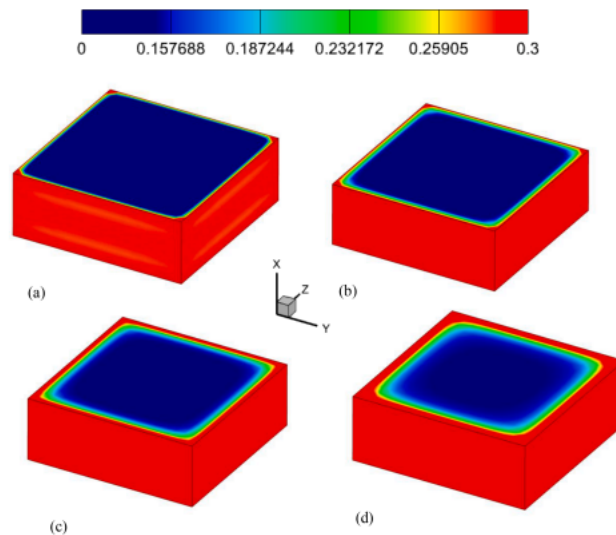


FIGURE 32 – Diffusion des ions chlorure dans une section de pilier de pont après (a) 5 ans, (b) 20 ans, (c) 50 ans et (d) 100 ans. [97]

Ces études, souvent restreintes au cas bidimensionnel et axées sur l'analyse des surfaces, sont relativement limitées en nombre. Il est dès lors impératif d'explorer les implications de la troisième dimension, notamment pour notre application spécifique : les poutres Gerber, qui sont exposées à des attaques dans les trois dimensions. Les sections suivantes permettront au lecteur de se familiariser avec les méthodes numériques existantes en examinant leur application dans les trois dimensions, à travers des cas d'étude simples, afin de parvenir à une modélisation adaptée à notre application.

### 4.3 Différences finies

Les méthodes de différences finies figurent parmi les premières approches numériques à émerger de manière fiable. Elles impliquent une discrétisation spatiale et temporelle, établissant des liens entre les valeurs des fonctions inconnues à des points suffisamment proches. Ces méthodes reposent sur une approximation par les dérivées, largement utilisées pour résoudre des équations aux dérivées partielles en estimant les dérivées à l'aide des valeurs voisines aux nœuds. En substance, cette approche permet une représentation numérique des variations locales des fonctions, simplifiant ainsi la résolution de problèmes complexes en transformant les équations aux dérivées partielles en des formes discrètes plus gérables. Il est important de souligner la diversité des schémas numériques en différences finies, comprenant deux types principaux : les schémas explicites et implicites, qui englobent plusieurs schémas numériques découverts au fil du temps. Parmi ceux-ci, citons le schéma d'Euler pour les méthodes explicites, qui existe également sous forme implicite, ainsi que la méthode de Crank-Nicolson pour les méthodes implicites [83].

La différence est qu'en explicite, la solution au temps  $t + 1$  est calculée grâce aux valeurs au temps  $t$ . Or, dans le cas implicite, la solution au temps  $t + 1$  requiert la connaissance des valeurs au temps  $t + 1$ , une résolution de système algébrique d'équations linéaires est alors indispensable. Les schémas explicites seront plus faciles à implémenter, mais seront limités par une condition de stabilité que nous verrons plus tard. En effet, ceux-ci sont dits conditionnellement stables tandis que les schémas implicites, plus complexes à implémenter, sont inconditionnellement stables.

La première étape, commune dans chaque schéma, dans la résolution par différences finies consiste à remplacer le domaine de l'étude selon la dimension considérée par un ensemble de points de discrétisation. Les dimensions spatiales et temporelle sont discrétisées comme suit :

$$x_i = i \cdot \Delta x \quad \text{Avec } i = 0 \dots N_x \quad (37)$$

$$y_j = j \cdot \Delta y \quad \text{Avec } j = 0 \dots N_y \quad (38)$$

$$z_k = k \cdot \Delta z \quad \text{Avec } k = 0 \dots N_z \quad (39)$$

$$t_n = n \cdot \Delta t \quad \text{Avec } n = 0 \dots N_t \quad (40)$$

L'étape suivante consiste à exprimer les dérivées temporelle et spatiale de notre concentration en chlorure  $C(x, t)$  (unidirectionnelle dans ce cas-ci) par les approximations de différences finies selon le schéma numérique souhaité. Par exemple, l'écriture d'un schéma en différences avant en temps et en différences centrées pour l'espace devient :

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} \approx \frac{C_i^{n+1}(x, t) - C_i^n(x, t)}{\Delta t} \quad (41)$$

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial x} \approx \frac{C_{i-1}^n(x, t) - C_{i+1}^n(x, t)}{2 \cdot \Delta x} \quad (42)$$

$$\frac{\partial^2 C(x, t)}{\partial x^2} \approx \frac{C_{i-1}^n(x, t) - 2C_i^n(x, t) + C_{i+1}^n(x, t)}{(\Delta x)^2} \quad (43)$$

L'équation 41 décrit en réalité le schéma d'Euler explicite en temps, ce qui constitue un modèle explicite. À l'inverse, le modèle implicite est décrit par une différence en arrière plus connue sous le nom de Euler implicite et s'illustre comme suit :

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial t} \approx \frac{C_i^n(x, t) - C_i^{n-1}(x, t)}{\Delta t} \quad (44)$$

La différence entre les deux schémas sera étudiée pour certaines dimensions dans la suite du mémoire, lors des simulations apportées sur des cas simples.

En considérant le premier schéma, nous pouvons reprendre l'équation de diffusion 11 dans le cas d'une diffusion pure et y appliquer les différences finies pour un schéma explicite. L'équation devient pour les cas à une, deux et trois dimensions, respectivement 1D, 2D et 3D :

$$\mathbf{1D} : \frac{C_i^{n+1}(x, t) - C_i^n(x, t)}{\Delta t} = D \cdot \left( \frac{C_{i-1}^n(x, t) - 2C_i^n(x, t) + C_{i+1}^n(x, t)}{(\Delta x)^2} \right) \quad (45)$$

$$\mathbf{2D} : \frac{C_{i,j}^{n+1}(x, y, t) - C_{i,j}^n(x, y, t)}{\Delta t} = D \cdot \left( \frac{C_{i-1,j}^n(x, y, t) - 2C_{i,j}^n(x, y, t) + C_{i+1,j}^n(x, y, t)}{(\Delta x)^2} + \right. \quad (46)$$

$$\left. \frac{C_{i,j-1}^n(x, y, t) - 2C_{i,j}^n(x, y, t) + C_{i,j+1}^n(x, y, t)}{(\Delta y)^2} \right) \quad (47)$$

$$\mathbf{3D} : \frac{C_{i,j,k}^{n+1}(x, y, z, t) - C_{i,j,k}^n(x, y, z, t)}{\Delta t} = D \cdot \left( \frac{C_{i-1,j,k}^n(x, y, z, t) - 2C_{i,j,k}^n(x, y, z, t) + C_{i+1,j,k}^n(x, y, z, t)}{(\Delta x)^2} + \right. \quad (48)$$

$$\left. \frac{C_{i,j-1,k}^n(x, y, z, t) - 2C_{i,j,k}^n(x, y, z, t) + C_{i,j+1,k}^n(x, y, z, t)}{(\Delta y)^2} + \right. \quad (49)$$

$$\left. \frac{C_{i,j,k-1}^n(x, y, z, t) - 2C_{i,j,k}^n(x, y, z, t) + C_{i,j,k+1}^n(x, y, z, t)}{(\Delta z)^2} \right) \quad (50)$$

Avec

- $n$  l'index temporel
- $i, j, k$  l'index spatial dans la direction x, y, z
- $C_i^n$  la concentration en chlorures donnée au temps  $t$  dans le cas unidimensionnel
- $C_i^{n+1}, C_{i,j}^{n+1}, C_{i,j,k}^{n+1}$  la concentration en chlorures donnée au temps  $t + 1$  dans le cas unidimensionnel, bidimensionnel, tridimensionnel
- $D$  le coefficient de diffusion, supposé constant
- $\Delta t$  l'incrément temporel
- $\Delta x, \Delta y, \Delta z$  l'incrément spatial dans la direction x, y, z

En Python, pour implémenter ces équations, nous devons isoler le terme de concentration au temps  $n + 1$  du membre de gauche des équations ci-dessus. Ensuite, nous itérons pour chaque pas spatial et pour chaque pas temporel. Les concentrations seront mis à jour à chaque itération grâce aux connaissances de leurs valeurs voisins dans l'espace mais aussi dans le temps. Nous aborderons plus tard l'implémentation des schémas numériques implicites. La figure suivante illustre le concept de voisinage pour le cas unidirectionnel avec dans notre cas  $u_j^n = C_i^n$  :

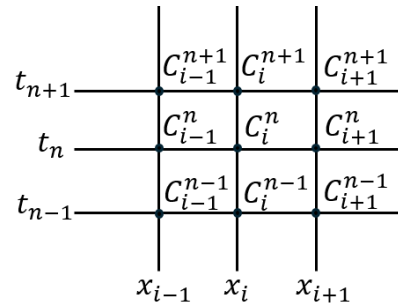


FIGURE 33 – Concept de voisinage dans le cas unidimensionnel [18]

Avant d'entamer la modélisation de ces équations, il est crucial de prendre en considération le concept de stabilité, particulièrement pour les différences centrées, et plus généralement pour les méthodes numériques explicites. En effet, les mathématiciens Courant, Friedrichs et Lewy [41] proposent un critère essentiel que l'on peut trouver dans

les écrits de Legat [101] pour déterminer les intervalles de temps et d'espace afin d'assurer la stabilité numérique, en prenant en compte le coefficient de diffusion  $D$  :

$$\frac{D \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq \frac{1}{2} \quad (51)$$

$$\Leftrightarrow \Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2}{2 \cdot D} \quad (52)$$

L'interprétation physique de la restriction 52 est que le pas de temps maximum autorisé  $\Delta t$  est, jusqu'à un facteur numérique, le temps de diffusion à travers une cellule de largeur  $\Delta x$  [55]. Il s'agit en fait d'une contrainte sur l'incrément temporel, connue sous le nom de condition Courant-Friedrichs-Lewy (CFL), qui garantit la convergence de ces méthodes et prévient la production de résultats totalement incohérents. De manière similaire, pour le cas en deux dimensions, Nytma [94] propose une reformulation de ce critère, recommandant l'utilisation de la relation suivante :

$$D \cdot \Delta t \cdot \left( \frac{1}{(\Delta x)^2} + \frac{1}{(\Delta y)^2} \right) \leq \frac{1}{2} \quad (53)$$

$$\Leftrightarrow \Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2}{2 \cdot D \cdot ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)} \quad (54)$$

De façon analogue, sans les énoncer, cette approche peut être étendue aux dimensions supérieures.

En choisissant soigneusement les valeurs des incréments tout en respectant le critère de stabilité, il est possible de modéliser les équations discrétisées à l'aide de Python. Les modèles présentés dans la suite de ce mémoire évolueront progressivement vers l'objectif ultime de la modélisation d'un élément de poutre Gerber de pont exposée aux chlorures, devenant ainsi de plus en plus complexes à mesure que l'étude se déploie. En effet, l'analyse exploratoire des dimensions possibles impliquera l'examen de sections à forme simple qui convergent vers l'application spécifique.

### 4.3.1 Implémentation Python : diffusion unidimensionnelle

#### □ Paramétrisation

Commençons par la dimension unidimensionnelle, nous considérons dans un premier temps une longueur  $L$  de béton de 1000 [mm] de long selon l'axe des  $x$  qui sera indexé par un indice  $i$  en Python pendant une période  $T$  de 100 [années]. On suppose également une concentration de bord  $C(0, t) = C_s$ . Le tableau suivant reprend les paramètres requis pour cette première étude en reprenant le coefficient de diffusion  $D$  et le coefficient en surface  $C_s$  décrits auparavant :

Paramètre	Valeur	Unité
$L$	1000	[mm]
$N_x$	100	[/]
$\Delta x$	10	[mm]
$T$	100	[années]
$N_t$	1000	[/]
$\Delta t$	0.1	[année]
$D$	0.00001	[mm <sup>2</sup> /s]
$C_s$	1	[%]

TABLE 5 – Paramétrisation pour l'analyse de diffusion 1D

## □ Implémentation

Le code suivant modélise l'équation de diffusion en une dimension en considérant les paramètres de la table 5 pour le cas analytique et le cas numérique par l'application du schéma explicite d'Euler en temps et d'une différence centrée en position :

```

1      """Modélisation de la diffusion 1D de chlore dans une longueur de 1000mm de béton + comparaison méthode analytique"""
2
3      # Importation
4      import numpy as np
5      import math
6      import matplotlib.pyplot as plt
7      import time
8
9      # Paramètres
10     L = 1000 # Longueur du béton selon x (mm)
11     T = 100 # Durée totale d'analyse (années)
12     D = 0.00001 # Coefficient de diffusion supposé constant (mm^2/s)
13     C_s = 1 # Concentration à la surface (%)
14
15     # Partie analytique : fonction erf
16
17     # Discrétisation
18     Nx = 100 # Nombre de points spatiaux selon x
19     Nt = 1000 # Nombre de points temporels
20     C_ana = np.zeros((Nx,Nt)) # Matrice de concentration C[x, t] initié à 0
21
22     # Condition de bord
23     C_ana[0,:] = C_s # Condition en C[0, t]
24
25     # Listes
26     x = np.linspace(0, L, Nx) # Liste des valeurs de profondeur x (mm)
27     t = np.linspace(0, T, Nt) # Liste des valeurs temporelles (années)
28
29     # Mise à jour de la liste concentration C[x, t]
30     t1 = time.time() # Temps initial processus
31     # Boucles for
32     for n in range(Nt):
33         for i in range(1,Nx-1):
34             C_ana[i,n] = (C_s * (1 - (math.erf(x[i]/(2*(math.sqrt(D_app*t[n]*365*24*3600)))))))
35     t2 = time.time() # Temps final processus
36
37     # Partie numérique : différences finies (explicite)
38
39     # Discrétisation
40     Nx = 100 # Nombre de points spatiaux selon x
41     Deltax = L/(Nx) # Pas de discrétisation selon x
42     Deltat = (1/(2*D_app))*(Deltax**2)*(1/(365*24*3600)) # Critère de stabilité
43     Deltat = 0.1 # Incrément temporel choisi
44     Nt = int((T/Deltat) + 1) # Nombre de points temporels
45     C_num = np.zeros((Nx,Nt)) # Matrice de concentration C[x, t] initié à 0
46
47     # Condition de bord
48     C_num[0,:] = C_s # Condition en C[0, t]
49
50     # Listes
51     x = np.linspace(0, L, Nx) # Liste des valeurs de positions (mm)
52     t2 = np.linspace(0, T, Nt) # Liste des valeurs de temps (année)
53
54     # Mise à jour de la liste concentration C[x, t]
55     t0 = time.time() # Temps initial processus

```

```

56     # Boucles for
57     for n in range(Nt-1):
58         for i in range(1,Nx-1):
59             C_num[i,n+1] = C_num[i,n] + (D_app*(C_num[i+1,n]-(2*C_num[i,n])+C_num[i-1,n]))*((Deltat*365*24*3600)/(Deltax**2))
60     t1 = time.time() # Temps final processus

```

Pour ces deux types de solutions, nous commençons par initialiser une matrice à deux dimensions représentant l'espace des différentes positions  $x$  et le temps  $t$ . Cette matrice est dimensionnée en fonction du nombre de points d'interpolation de l'espace  $N_x$  et du temps  $N_t$ . Ensuite, nous imposons notre condition de bord en choisissant une concentration en surface  $C_s$  en  $(x = 0, t)$  pour chaque pas de temps. La condition initiale est également écrite. Enfin, la matrice est remplie à l'aide de boucles "for" itératives de Python.

Pour la partie analytique, le remplissage se fait au travers d'une boucle qui parcourt les différentes positions  $x$  répétée pour le nombre de pas de temps défini en utilisant la relation 17.

Pour la partie numérique, nous appliquons également deux boucles d'itérations. En ce qui concerne les bornes, nous imposons sur les boucles  $[1 \dots N_x - 1]$  pour celle qui parcourt la dimension spatiale des  $x$  et  $[1 \dots N_t]$  pour celle qui parcourt la dimension temporelle des  $t$ . Cette fois-ci, le remplissage de la matrice des concentrations aux différentes positions se fait par le calcul au temps  $t + 1$  étant donné la connaissance des valeurs précédentes dans le temps. Le schéma suivant illustre ce principe pour le calcul de la première itération soit  $C_{1,1}$  :

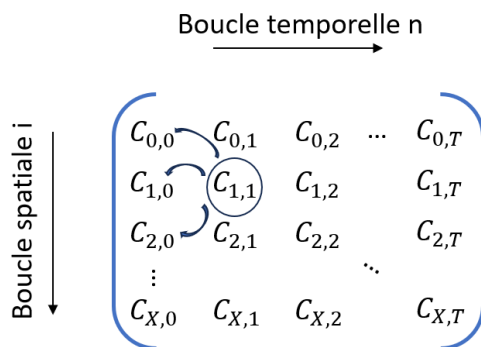


FIGURE 34 – Schéma numérique en différence finie pour le calcul de la première itération  $C_{1,1}$

Le calcul de la concentration  $C_{1,1}$  se fait grâce aux données  $C_{0,0}$ ,  $C_{1,0}$  et  $C_{2,0}$  qui sont initialement imposées par les conditions limites et initiales. On procède ainsi de suite pour les autres valeurs jusqu'au remplissage complet de la matrice des concentrations.

## □ Résultats

En considérant la paramétrisation donnée en table 5, les figures 35 et 36 illustrent les évolutions temporelles des concentrations en chlorures pour différentes profondeurs avec les schémas numériques explicites et les schémas analytiques respectivement :

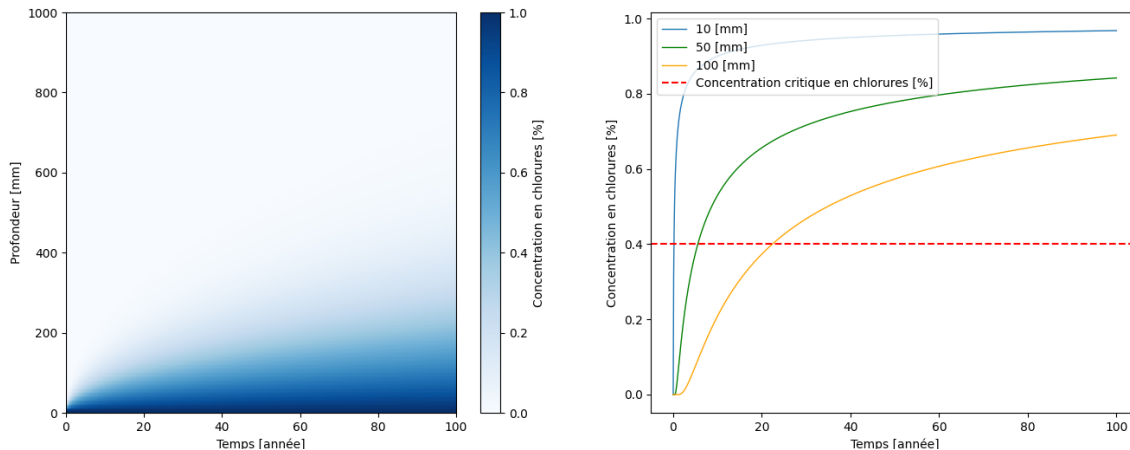


FIGURE 35 – Résultats numériques (schéma explicite) de la diffusion 1D

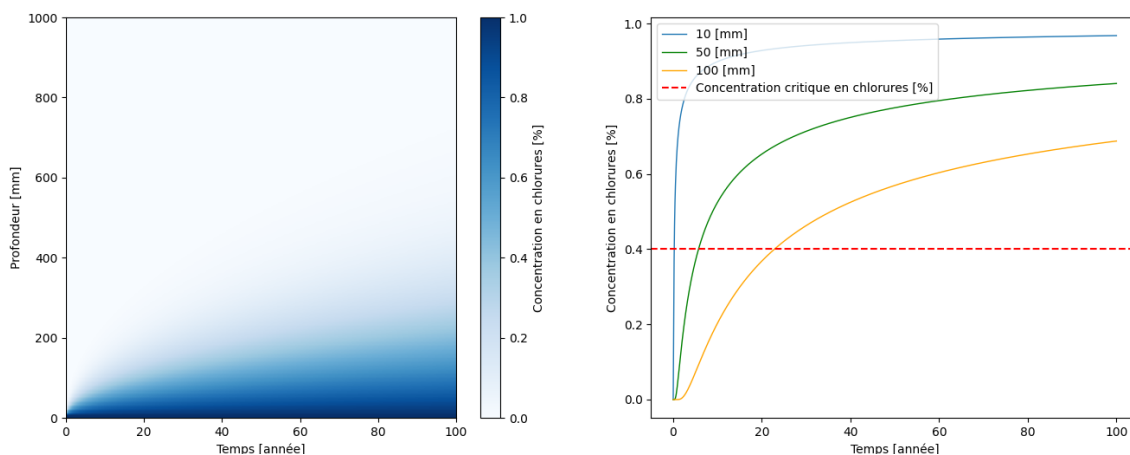


FIGURE 36 – Résultats analytiques de la diffusion 1D

A première vue, les figures 35 et 36 démontrent une concordance, soulignant la validité des méthodes numériques même dans des situations élémentaires tout en respectant le critère de stabilité 52.

- Les figures de gauche offrent un aperçu des concentrations en chlorures pour une profondeur et une année données. On observe une diffusion assez rapide au cours des premières dizaines d'années, suivie d'une diffusion plus lente qui atteint un plateau pour le reste de la durée illustrant en quelques sortes le comportement de la fonction d'erreur de Gauss provenant de la solution analytique.
- Pour une perspective plus détaillée, les figures de droite présentent plusieurs courbes décrivant l'évolution temporelle des concentrations en chlorure à différentes profondeurs dont 10 [mm], 50 [mm] et 100 [mm] dans le béton. Le tracé rouge en pointillé représente le seuil critique de concentration en chlorures, au-delà duquel la corrosion s'amorce. On remarque que les trois courbes atteindront la concentration critique  $C_{\text{crit}} = 0.4\%$  à différents moments. En effet, la couche de 10 [mm], assez proche du bord donc, l'atteindra quasi instantanément, tandis que la couche à 50 [mm] l'atteindra après 5 ans. Par ailleurs, la couche la plus éloignée à 100 [mm] l'atteindra après plus de 20 ans.

La concordance entre les schémas numériques explicites et les schémas analytiques est illustrée à la figure 37.

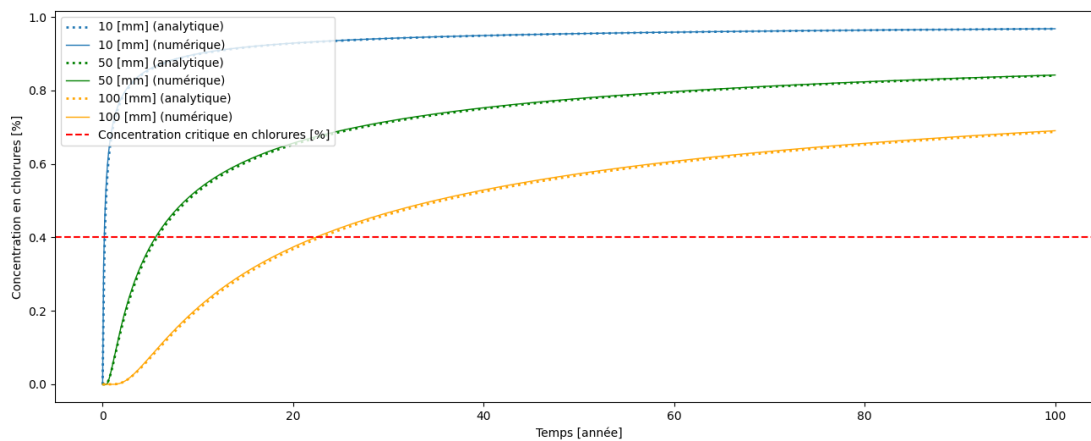


FIGURE 37 – Comparaison des solutions analytiques et numériques

Il est établi que les deux schémas concordent presque parfaitement. Pour différents points à différents temps, l'annexe B montre que la différence entre les deux méthodes ne dépasse pas le centième soit 1%.

Une autre comparaison significative peut être établie en se référant à une étude antérieure menée par Bitaraf [72]. Les résultats obtenus pour des paramètres similaires à différence que le coefficient de diffusion vaut  $D = 1 \times 10^{-12} [m^2/s]$  sont illustrés à la figure 38, où la concentration en chlorures est représentée en fonction de la profondeur après 20 ans de simulations. Cette représentation met en évidence une forte similarité entre l'étude de Bitaraf (figure 38 à gauche) et celle dans le cadre de ce mémoire (figure 38 à droite) :

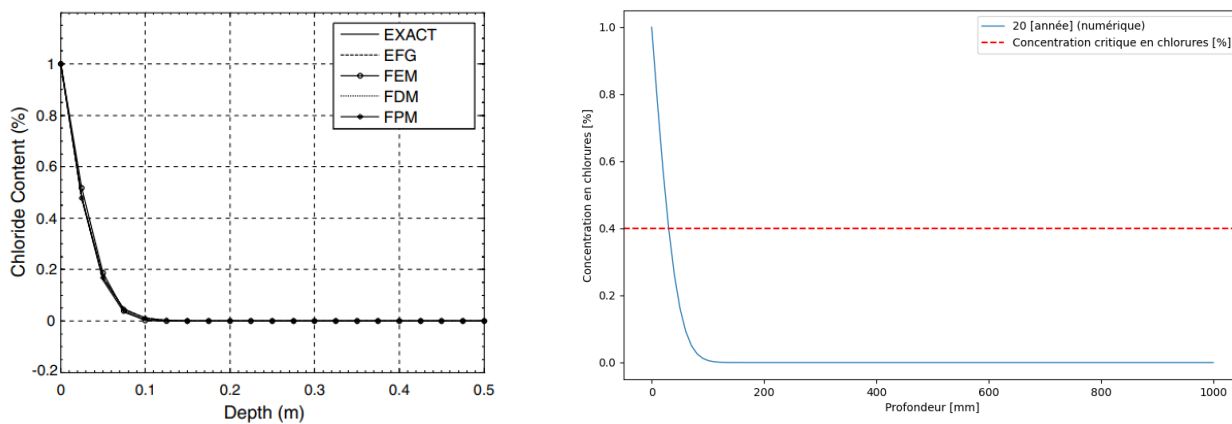


FIGURE 38 – Comparaison des résultats avec l'étude de Bitaraf [72] : évolution de la concentration en chlore après 20 ans

## □ Optimisation du code

Sur le plan de l'optimisation, une alternative aux boucles "for" itératives de Python peut être déployée pour diminuer le temps de calcul des opérations. En effet, la méthode de "slicing", ou "découpage/tranchage", consiste à réaliser les boucles "for" directement via les indices des matrices et permet de réduire le temps de calcul [83]. Au départ, deux boucles "for" sont établies pour permettre le remplissage de la matrice de concentration  $C(x, t)$  :

---

```

1     # Boucles for
2     for n in range(Nt-1):
3         for i in range(1,Nx-1):
4             C_num[i,n+1] = C_num[i,n] + (D_app*(C_num[i+1,n]-(2*C_num[i,n])+C_num[i-1,n])*
5                 ((Deltat*365*24*3600)/(Deltax**2)))

```

---

Après optimisation, la boucle "for" spatiale est remplacée par le "slicing" en reprenant les mêmes bords :

---

```

1     # Slicing
2     for n in range(Nt-1):
3         C_num[1:Nx-1, n+1] = C_num[1:Nx-1, n] + (D_app * (C_num[0:Nx-2, n] - 2 * C_num[1:Nx-1, n] + C_num[2:Nx, n]) *
4             (Deltat * 365 * 24 * 3600) / (Deltax ** 2))

```

---

Le "slicing" en Python est une technique efficace permettant d'extraire une partie d'une séquence (comme une liste, un tuple ou une chaîne de caractères) en utilisant une notation spécifique. Le "slicing" utilise la syntaxe suivante : "sequence[start :stop]", où "start" est l'indice de début inclusif (par défaut 0) et "stop" est l'indice de fin exclusif. Dans l'exemple du dessus, "sequence" représente la liste des concentrations  $C_{num}$ , "start" vaut 1 et "stop" vaut  $N_x - 1$ . Cette méthode s'avère particulièrement performante par rapport aux boucles "for" généralement utilisées. En effet, itérer sur un objet 'range' au sein d'une boucle "for" est plus lent que d'itérer sur une sous-séquence obtenue par "slicing".

D'un point de vue implémentation, le "slicing" en Python est optimisé en C, ce qui permet d'effectuer les opérations de copie et de manipulation des séquences à un niveau bas. Ces opérations sont réalisées en utilisant des instructions bas niveau qui exploitent efficacement les capacités du processeur, notamment les caches. En revanche, les boucles "for" en Python sont interprétées, ce qui signifie que chaque étape de la boucle doit être décodée et exécutée par l'interpréteur Python. Cette interprétation introduit une surcharge significative en termes de cycles CPU par rapport aux opérations optimisées en C. La comparaison des temps de simulation sera effectuée en section 4.3.1 de cette étude.

### □ Schémas implicites

En outre, nous pouvons implémenter le schéma numérique implicite d'Euler introduit auparavant pour en discuter les similarités et différences. Avant de l'implémenter en Python, il est important de comprendre son fonctionnement. L'équation 45 devient dans le cas implicite en répartissant les termes et en définissant  $F_x = \frac{D \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2}$  :

$$-F_x \cdot C_{i-1}^n(x, t) + (1 + 2F_x) \cdot C_i^n(x, t) - F_x \cdot C_{i+1}^n(x, t) = C_i^{n-1}(x, t) \quad (55)$$

Le membre de gauche reprend les concentrations inconnues à trouver tandis que le membre de droite comporte celles qui sont connues grâce à l'hypothèse d'une concentration initiale et de bord. Pour ce schéma ci, à la différence des méthodes explicites, la connaissance de la concentration à l'instant  $n$  nécessite la connaissance de ses valeurs voisines au même temps. Un système d'inconnues est alors créé et une résolution matricielle est alors requise pour chaque temps.

Le système d'équations algébriquement couplées peut être traduit dans une relation de matrices :

$$Ac = b \quad (56)$$

Avec  $c$ , le vecteur des concentration inconnues à calculer au temps  $n$  et  $b$  le vecteur des concentrations connues au temps  $n - 1$ . La matrice  $A$  reprend les coefficients devant ces inconnues, celle-ci sera principalement constituée d'éléments non nuls diagonaux étant donné le voisinage proposé par les différences centrées. Pour une dimensions de  $(N_x) \times (N_x)$ , la matrice peut s'écrire :

$$A = \begin{pmatrix} A_{0,0} & A_{0,1} & 0 & \dots & \dots & & & 0 \\ A_{1,0} & A_{1,1} & A_{1,2} & \ddots & & & & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & & \vdots \\ \vdots & & A_{i,i-1} & A_{i,i} & A_{i,i+1} & & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & \ddots & & A_{N_x-1,N_x} \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & A_{N_x,N_x-1} & & A_{N_x,N_x} \end{pmatrix}$$

Il est évident que seuls les éléments de la diagonale principale et ceux de ses voisins immédiats de part et d'autre sont non nuls. La matrice  $A$  peut dès lors être considérée comme tridiagonale. En effet, ces éléments prennent les valeurs suivantes :

$$A_{i,i-1} = -F_x$$

$$A_{i,i} = 1 + 2F_x$$

$$A_{i,i+1} = -F_x$$

L'indice  $i$  parcourt les points internes du domaine, soit  $i = 1, \dots, N_x - 1$  étant donné la condition de bord imposée en  $C(0, t)$ . La première et la dernière ligne de la matrice  $A$  correspondent aux conditions frontières de  $x$ . Le vecteur  $b$  est d'abord initialisé selon les conditions imposées et est ensuite corrigé par le nouveau vecteur des concentrations trouvé en résolvant le système 56, son écriture devient :

$$b = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_{N_x} \end{pmatrix}$$

Lorsqu'on impose une condition de bord  $C(0, t) = C_s$ , cela se traduit par  $b_0 = C_s$ . Maintenant que la théorie est posée, nous pouvons procéder à l'implémentation en Python, le code présent en annexe C fournit une implémentation pour les mêmes paramètres que la méthode explicite.

Pour les mêmes incréments temporel et spatial que ceux utilisés pour la méthode explicite ainsi que les paramètres donnés en table 6, les graphiques suivants sont obtenus pour la méthode des différences finies en schéma implicite (DFI) :

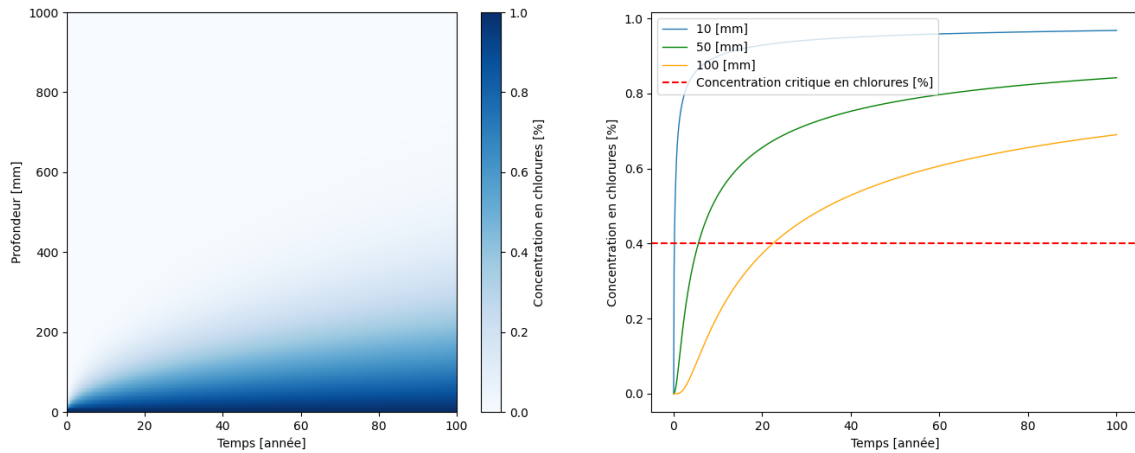


FIGURE 39 – Résultats numériques (schéma implicite) de la diffusion 1D

La concordance entre les deux schémas numériques explicites et implicites est démontrée ci-dessous par les courbes des concentrations en chlorures à différentes profondeurs, en l'occurrence à 10 [mm], 50 [mm] et 100 [mm] du bord à travers le temps :

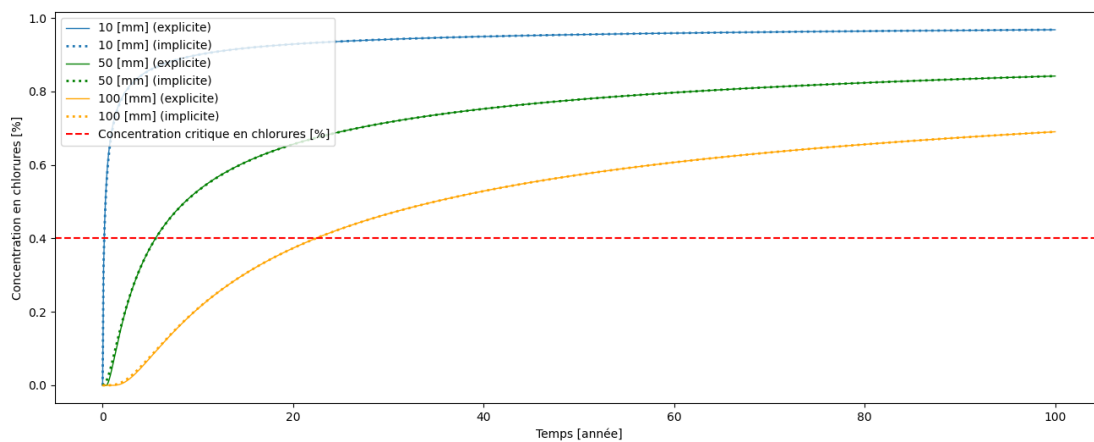


FIGURE 40 – Comparaison des solutions numériques explicites et implicites

### □ Performance des schémas

Dans le schéma implicite, l'absence de restriction sur l'incrément temporel  $\Delta t$  confère naturellement une exécution plus rapide par rapport aux cas les plus restreints en incrément de temps du schéma explicite. Cependant, en Python, la résolution du système  $Ac = b$  à chaque étape temporelle constitue une opération chronophage. Le tableau suivant compare les temps de calcul obtenus pour chaque méthode utilisée dans le cas 1D :

Méthode	$\Delta t$ [s]	Temps de simulation [s]
ANA	0.1	0.19
DFE sans "slicing"	0.1	0.30
DFE avec "slicing"	0.1	0.02
DFI avec "slicing"	1	1.05
DFI avec "slicing"	0.1	2.39

TABLE 6 – Comparaison des temps de simulation 1D

On observe une forte similarité dans les temps d'exécution entre la méthode analytique et la méthode explicite sans "slicing", en raison de l'utilisation des mêmes boucles "for". Le dixième de seconde de différence est attribué aux opérations internes réalisées. De plus, l'efficacité du "slicing" dans la méthode explicite se manifeste par une amélioration significative des performances, avec un gain de vitesse d'un facteur de 15. Lorsque l'incrément de temps est très petit pour respecter le critère de stabilité de la méthode explicite, la méthode implicite perd de son intérêt et peut ne pas être optimale. En effet, pour un incrément temporel  $\Delta t = 0.01[s]$ , la méthode DFI avec "slicing" nécessite plus de 350 secondes d'exécution, contre seulement quelques secondes pour la méthode DFE avec "slicing".

Dans le cadre de notre étude, il est impératif de sélectionner des approches numériques qui rendent compte de la complexité des structures en béton armé. La diffusion en une dimension pourrait se révéler limitée pour représenter de manière adéquate ces structures tridimensionnelles dans le contexte actuel. Ainsi, opter pour la modélisation de la diffusion en deux dimensions se présente comme un choix plus judicieux, constituant une transition vers la modélisation 3D. Cette approche offre une représentation plus fidèle de la réalité des sections en béton armé, permettant une analyse approfondie de la diffusion des chlorures au sein de ce matériau.

### 4.3.2 Implémentation Python : diffusion bidimensionnelle

#### □ Paramétrisation

De manière similaire, il est envisageable de modéliser le processus de diffusion décrit par les équations 46 et 47 en utilisant le langage Python. L'analyse en deux dimensions offre une représentation plus proche de la réalité de la future structure étudiée, en passant par l'analyse détaillée de sa section, tel que c'est le cas pour le calcul des armatures en béton armé et précontraint. La modélisation 2D offre un vaste champ d'étude en diversifiant les domaines ainsi que les conditions de bord. Cela implique la création d'une matrice tridimensionnelle dans laquelle les valeurs de profondeur selon  $x$ , de profondeur selon  $y$  et du temps  $t$  peuvent être insérées. On peut rappeler le critère de stabilité qui doit être respectée :

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2}{2 \cdot D \cdot ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2)} \quad (57)$$

Nous considérons dans un premier temps un domaine carré d'une longueur  $X$  de béton de 1000 [mm] de long selon l'axe des  $x$  qui sera indexé par un indice  $i$  en Python et d'une longueur  $Y$  de béton de 1000 [mm] de long selon l'axe des  $y$  qui sera lui indexé par l'indice  $j$  pendant une période  $T$  de 100 années. On suppose également une concentration  $C_s$  sur les 4 bords du domaine. Le tableau suivant reprend les paramètres requis pour cette étude en reprenant le coefficient de diffusion  $D$  et le coefficient en surface  $C_s$  décrits auparavant :

Paramètre	Valeur	Unité
$X$	1000	[mm]
$N_x$	100	[/]
$\Delta x$	10	[mm]
$Y$	1000	[mm]
$N_y$	100	[/]
$\Delta y$	10	[mm]
$T$	100	[années]
$N_t$	1000	[/]
$\Delta t$	0.1	[années]
$D$	0.00001	[mm <sup>2</sup> /s]
$C_s$	1	%

TABLE 7 – Paramètres pour l'analyse de diffusion 2D

## □ Implémentation

Le code suivant modélise l'équation de diffusion en deux dimensions en considérant les paramètres de la table 8 pour le cas numérique par l'application du schéma explicite d'Euler en temps et d'une différence centrée en position :

---

```

1      """Modélisation de la diffusion 2D de chlore dans une section carrée 1000x1000mm de béton"""
2
3      # Importation
4      import numpy as np
5      import matplotlib.pyplot as plt
6      import time
7
8      # Paramètres
9      X = 1000 # Longueur du béton selon x (mm)
10     Y = 1000 # Longueur du béton selon y (mm)
11     T = 100 # Durée totale d'analyse (années)
12     D_app = 0.00001 # Coefficient de diffusion supposé constant (mm2/s)
13     C_s = 1 # Concentration à la surface (%)
14
15     # Discrétisation
16     Nx = 100 # Nombre de points spatiaux selon x
17     Ny = 100 # Nombre de points spatiaux selon y
18     Deltax = X/(Nx) # Pas de discrétisation selon x
19     Deltay = Y/(Ny) # Pas de discrétisation selon y
20     Deltat = (1/(2*D_app))*((Deltax**2)*(Deltay**2)/((Deltax**2)+(Deltay**2)))*(1/(365*24*3600)) # Critère de stabilité
21     Deltat = 0.1 # Incrément temporel choisi
22     Nt = int((T/Deltat) + 1) # Nombre de points temporels
23     C_num = np.zeros((Nx,Ny,Nt)) # Matrice de concentration C[x, y, t] initié à 0
24
25     # Conditions de bord
26     C_num[0,:,:) = C_s # Condition en C[0, y, t]
27     C_num[-1,:,:) = C_s # Condition en C[1000, y, t]
28     C_num[:,0,:) = C_s # Condition en C[x, 0, t]
29     C_num[:,,-1,:) = C_s # Condition en C[x, 1000, t]
30
31     # Listes
32     x = np.linspace(0, X, Nx) # Liste des valeurs de profondeur x (mm)
33     y = np.linspace(0, Y, Ny) # Liste des valeurs de profondeur y (mm)
34     t = np.linspace(0, T, Nt) # Liste des valeurs temporelles (années)
35
36     # Mise à jour de la liste concentration C[x, y, t]
37     t1 = time.time() # Temps initial processus
38     # Boucles for
39     for n in range(Nt-1):
40         for i in range(1, Nx-1):
41             for j in range(1, Ny-1):
42                 C_num[i, j, n+1] = C_num[i, j, n] + (D_app * Deltat * 365 * 24 * 3600 * (((1/(Deltax**2))*
43                     (C_num[i+1, j, n] - 2*C_num[i, j, n] + C_num[i-1, j, n])) +
44                     ((1/(Deltay**2))*(C_num[i, j+1, n] - 2*C_num[i, j, n] + C_num[i, j-1, n]))))
45     t2 = time.time() # Temps final processus

```

---

La mise en forme de ce code ressemble fortement au cas unidimensionnel dans lequel on définit une dimension en plus, celle qui traverse la profondeur selon l'axe  $y$ . On définit également le nombre de points d'interpolation de l'espace  $N_y$ .

Le schéma suivant illustre le principe pour le calcul de la première itération  $C_{1,1,1}$  :

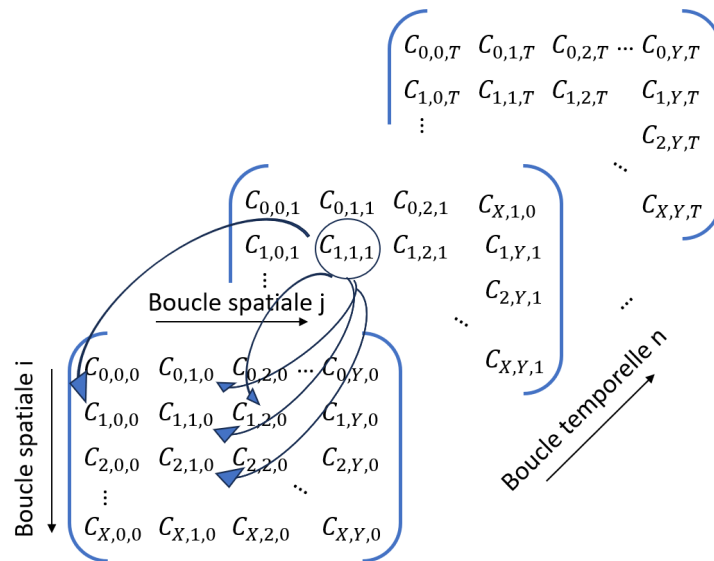


FIGURE 41 – Schéma numérique en différence finie pour le calcul de la première itération  $C_{1,1,1}$

Plus précisément, le calcul de la concentration  $C_{1,1,1}$  se fait grâce aux données voisines dans l'espace  $i, j$  et à l'instant précédent  $C_{1,0,0}, C_{1,1,0}, C_{1,2,0}, C_{0,1,0}, C_{2,1,0}$  qui sont initialement imposées par les conditions limites et initiales. On procède ainsi de suite pour les autres valeurs jusqu'au remplissage complet de la matrice des concentrations.

### □ Optimisation du code

Il est également possible d'utiliser la méthode de "slicing" décrite au cas unidimensionnel pour diminuer le temps de calcul. Au départ, les boucles spatiales et temporelle sont décrites :

---

```

1 # Boucles for
2 for n in range(Nt-1):
3     for i in range(1, Nx-1):
4         for j in range(1, Ny-1):
5             C_num[i, j, n+1] = C_num[i, j, n] + (D_app * Deltat * 365 * 24 * 3600 * (((1/(Deltax**2))*(C_num[i+1, j, n] -
6                 2*C_num[i, j, n] + C_num[i-1, j, n])) +
7                 ((1/(Deltay**2))*(C_num[i, j+1, n] - 2*C_num[i, j, n] + C_num[i, j-1, n])))))

```

---

Après optimisation, le "slicing" est appliqué sur les boucles spatiales :

---

```

1 # Slicing
2 for n in range(Nt-1):
3     C_num[1:Nx-1, 1:Ny-1, n+1] = C_num[1:Nx-1, 1:Ny-1, n] + (D_app * Deltat * 365 * 24 * 3600 *
4         (((1/(Deltax**2))*(C_num[0:Nx-2, 1:Ny-1, n] - 2*C_num[1:Nx-1, 1:Ny-1, n] + C_num[2:Nx, 1:Ny-1, n])) +
5         ((1/(Deltay**2))*(C_num[1:Nx-1, 0:Ny-2, n] - 2*C_num[1:Nx-1, 1:Ny-1, n] + C_num[1:Nx-1, 2:Ny, n]))))

```

---

Nous verrons par la suite que l'utilisation du "slicing" prend son sens lorsqu'on rentre dans des modélisations multidimensionnelles.

□ Résultats

En considérant la paramétrisation donnée en table 8, la figure 42 illustre l'évolution de la concentration en chlorures pour différents temps :

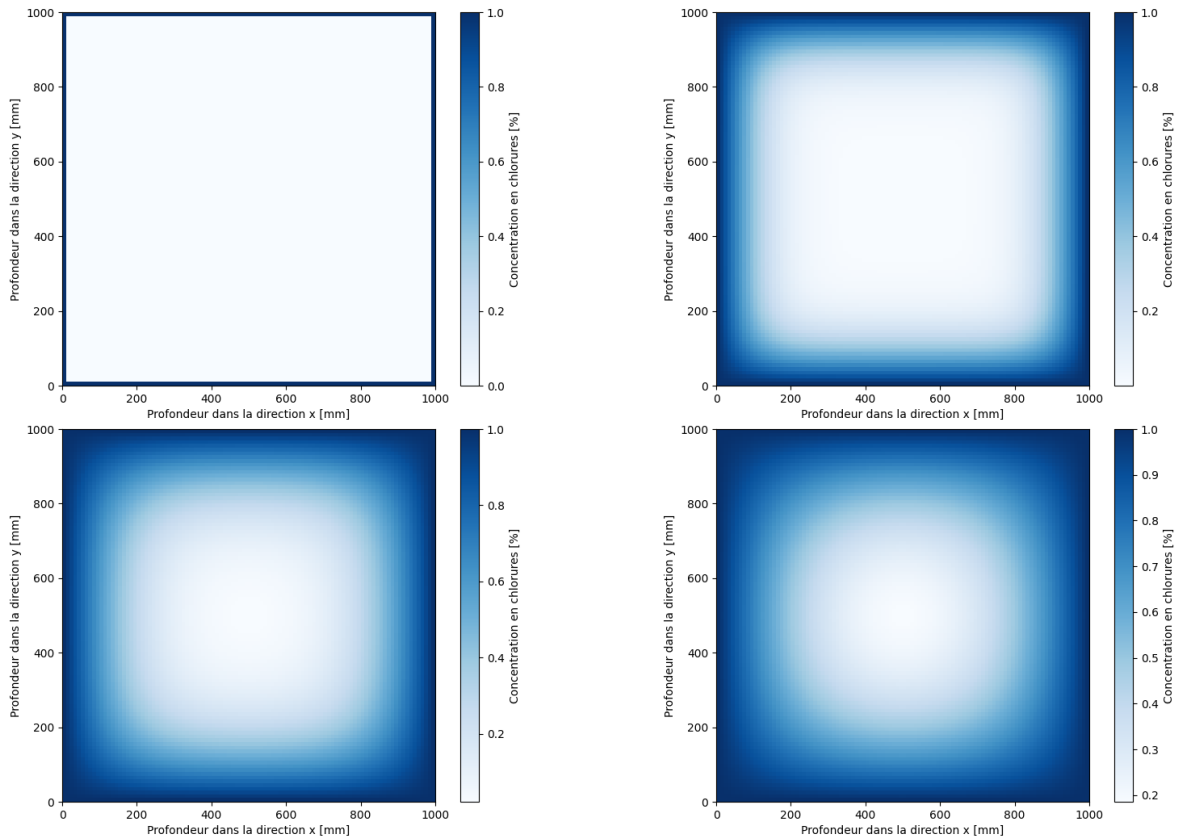


FIGURE 42 – Résultats numériques (schéma explicite) de la diffusion 2D : après 0 ans, 20 ans, 50 ans et 100 ans

Nous observons une diffusion assez homogène vers le centre de la surface. Nous pouvons comparer un point particulier en (500, 50) [mm] avec les résultats obtenus dans le cas unidimensionnel à une profondeur de 50 [mm] :

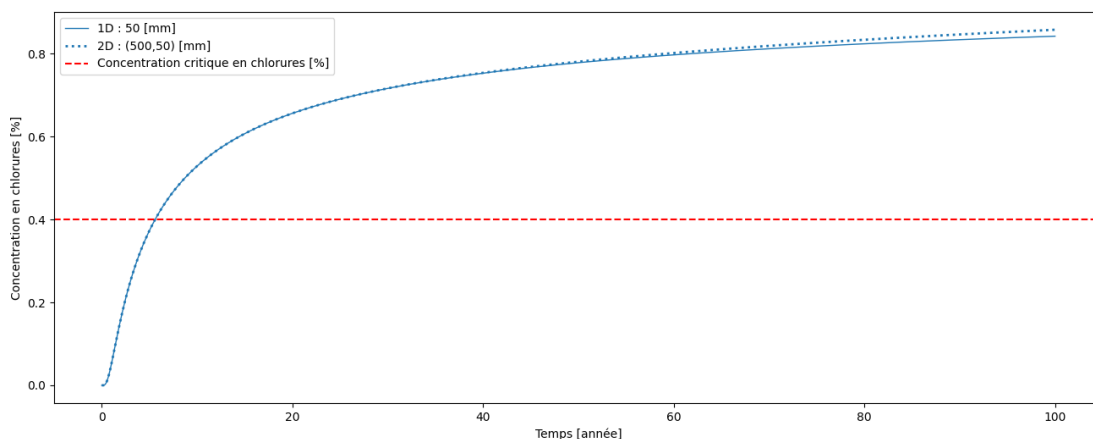


FIGURE 43 – Comparaison de la diffusion 2D à la diffusion 1D

La figure 43 illustre une concordance notable entre les deux courbes, bien que celles-ci commencent à diverger légèrement vers la fin de la simulation. En sélectionnant une ligne d'étude du modèle 2D à une position de  $x = 500$  [mm], nous négligeons les effets de la diffusion dans l'autre dimension, compte tenu de notre éloignement des bords gauche et droit du domaine considéré. Cette approche se rapproche du cas unidimensionnel, tel qu'illustré dans la figure 43, ce qui valide la pertinence et la précision de notre modèle 2D.

On peut également envisager d'assimiler le domaine carré à une colonne en béton armé avec des armatures réparties dans ses quatre coins, là où les effets de l'autre dimension seront montrés. Une question naturelle serait de déterminer à quel moment la concentration critique en chlorure de 0.4% est atteinte, déclenchant ainsi le début de la corrosion. En supposant un enrobage de 50 [mm] sur chaque côté et des armatures  $\phi 25$  (25mm) placées aux quatre coins, nous obtenons le schéma de diffusion suivant :

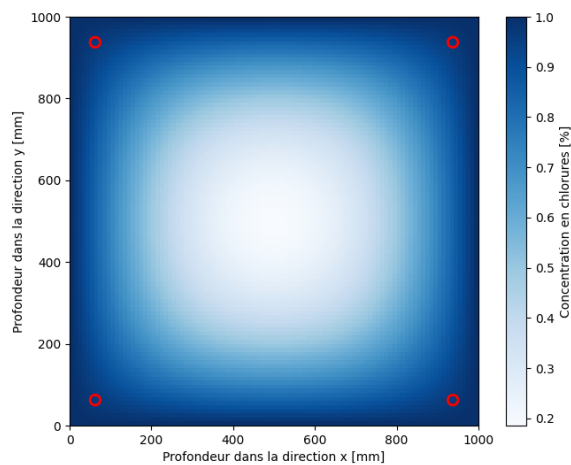


FIGURE 44 – Résultats numériques (schéma explicite) de la diffusion 2D : avec des armatures et après 100 ans

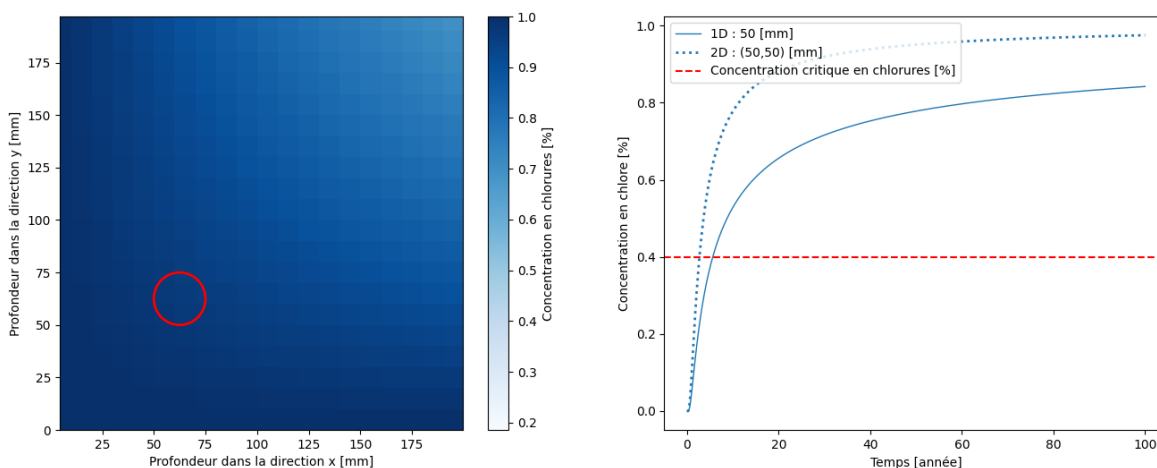


FIGURE 45 – Zoom sur le coin inférieur gauche de la section - Comparaison des dimensions à l'emplacement des armatures

On constate une nette différence entre les deux dimensions à l'endroit des coins. En effet, dans le cas unidimensionnelle, nous avons trouvé qu'une concentration en chlorures critique serait atteinte après plus de 5 ans alors qu'en considérant le cas bidimensionnelle, la concentration critique est atteinte après moins de 3 ans, déclenchant ainsi le processus de corrosion des barres et ses conséquences associées.

### □ Schémas implicites

Au même titre qu'au cas unidimensionnel, il est également possible d'utiliser des méthodes implicites de résolution. Ces dernières requièrent la résolution d'équations couplés, sous forme matricielle à chaque niveau de temps. Pour n'importe quelle méthode implicite, il n'y a plus une seule inconnue à rechercher au temps  $t + 1$  mais bien plusieurs car celles qui sont voisines dans l'espace sont également inconnues. En général, on peut appliquer une règle theta  $\theta$  pour obtenir notre schéma numérique [83], l'équation de diffusion en 2 dimensions discrétisée devient :

$$\frac{C_{i,j}^{n+1}(x, y, t) - C_{i,j}^n(x, y, t)}{\Delta t} = \theta \cdot (D \cdot (\frac{C_{i-1,j}^{n+1}(x, y, t) - 2C_{i,j}^{n+1}(x, y, t) + C_{i,j+1}^{n+1}(x, y, t)}{(\Delta x)^2} +$$
(58)

$$\frac{C_{i,j-1}^{n+1}(x, y, t) - 2C_{i,j}^{n+1}(x, y, t) + C_{i,j+1}^{n+1}(x, y, t)}{(\Delta y)^2})) + (1 - \theta) \cdot (D \cdot (\frac{C_{i-1,j}^n(x, y, t) - 2C_{i,j}^n(x, y, t) + C_{i,j+1}^n(x, y, t)}{(\Delta x)^2} +$$
(59)

$$\frac{C_{i,j-1}^n(x, y, t) - 2C_{i,j}^n(x, y, t) + C_{i,j+1}^n(x, y, t)}{(\Delta y)^2}))$$
(60)

Cette équation généralisée cache trois schémas numériques bien connus en fonction de la valeur de  $\theta$  :

- Lorsque  $\theta = 1$ , cela génère le schéma d'Euler implicite.

Ce schéma est implicitement stable pour toutes les valeurs de  $\Delta t$ . Il utilise les valeurs au temps  $t + 1$  pour calculer les valeurs au temps  $t$ .

- Lorsque  $\theta = 0.5$ , cela génère le schéma de Crank-Nicolson.

Ce schéma est inconditionnellement stable pour toutes les valeurs de  $\Delta t$ . Il utilise la moyenne entre les valeurs au temps  $t$  et au temps  $t + 1$  pour calculer les valeurs au temps  $t + 1$ .

- Lorsque  $\theta = 0$ , cela génère le schéma d'Euler explicite.

Ce schéma explicite est utilisé pour obtenir les résultats précédents dans le cas unidirectionnel et bidirectionnel. Nous avons vu qu'il est conditionnellement stable en suivant la relation 4.3.2, et son implémentation en Python n'est pas trop complexe.

En laissant  $\theta$  comme paramètre, il sera intéressant de comparer les méthodes entre elles. Pour résoudre de telles équations implicites, nous pouvons réarranger l'équation précédente en triant ce qui est connu de ce qui est inconnu comme pour le cas unidimensionnel. En posant  $F_x = \frac{D \cdot \Delta t}{(\Delta x)^2}$  et  $F_y = \frac{D \cdot \Delta t}{(\Delta y)^2}$ , les inconnues sont placées dans le membre de gauche :

$$C_{i,j}^{n+1}(x, y, t) - \theta \cdot (F_x \cdot (C_{i-1,j}^{n+1}(x, y, t) - 2C_{i,j}^{n+1}(x, y, t) + C_{i,j+1}^{n+1}(x, y, t)) +$$
(61)

$$F_y \cdot (C_{i,j-1}^{n+1}(x, y, t) - 2C_{i,j}^{n+1}(x, y, t) + C_{i,j+1}^{n+1}(x, y, t))) =$$
(62)

$$(1 - \theta) \cdot (F_x \cdot (C_{i-1,j}^n(x, y, t) - 2C_{i,j}^n(x, y, t) + C_{i,j+1}^n(x, y, t)) + F_y \cdot (C_{i,j-1}^n(x, y, t) - 2C_{i,j}^n(x, y, t) + C_{i,j+1}^n(x, y, t)))$$
(63)

Au même titre qu'au cas unidimensionnel, un système couplé d'équations algébriques linéaires peut être écrit sous format matriciel  $Ac = b$  où  $A$  est une matrice qui reprend les coefficients,  $c$  est le vecteur des inconnues  $C_{i,j}^{n+1}$  pour  $i = 0 \dots N_x$  et  $j = 0 \dots N_y$  et  $b$  est le vecteur reprenant les termes de droite connus notamment à l'aide des conditions frontières et initiales. Dans ce cas particulier, les conditions aux limites sont gérées à l'intérieur des boucles "for" plutôt qu'en amont, comme c'est le cas pour une approche unidirectionnelle. Afin d'illustrer le problème, l'annexe D décrit l'exemple proposé par Petter [83] avec  $N_x = 3$  et  $N_y = 2$ .

Pour un incrément temporel  $\Delta t = 0.1$ [année], des incréments spatiaux  $\Delta x = \Delta y = 10$ [mm] et les paramétrisation donnée en table 8 nous obtenons les graphiques suivants pour le schéma implicite numérique en différences centrées :

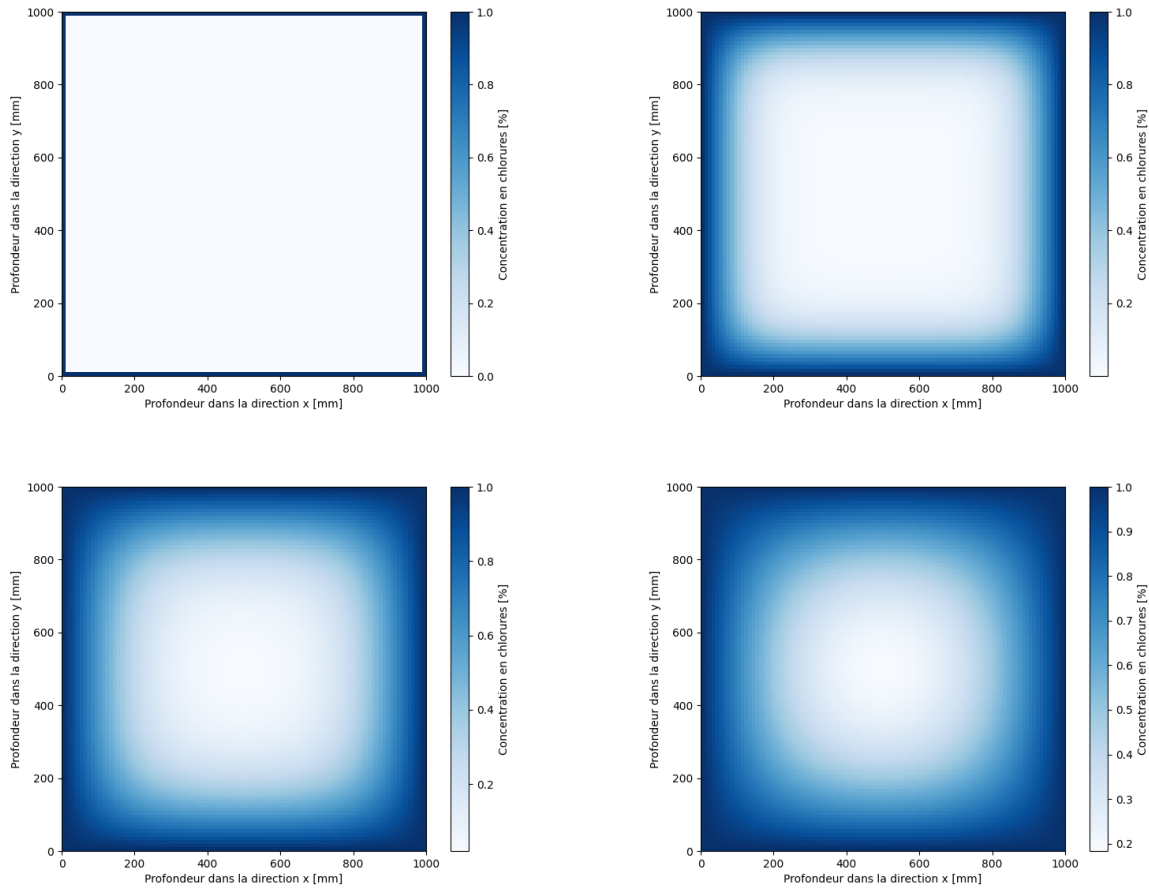


FIGURE 46 – Résultats numériques (schéma implicite) de la diffusion 2D : après 0 ans, 20 ans, 50 ans et 100 ans

On constate une similitude par rapport aux résultats obtenus avec le schéma explicite.

□ **Domaine de l'application**

Nous pouvons approfondir notre analyse en augmentant la complexité du domaine étudié. L'application finale de ce mémoire sera centrée sur l'étude des poutres Gerber présentes sur certains ponts. Par conséquent, il est pertinent de concevoir un premier modèle de diffusion pour cette application. En ajustant les quelques lignes de code du script précédent qui concernent l'étude du domaine carré, notamment dans la partie des conditions aux limites, nous serons en mesure de créer cette surface et d'y appliquer le modèle de diffusion.

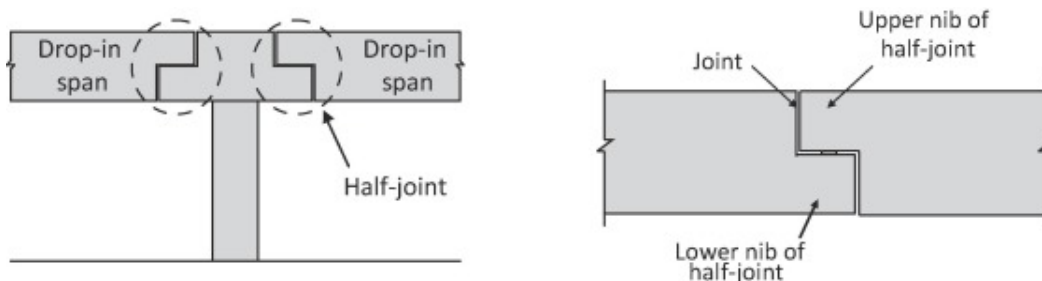


FIGURE 47 – Section "half-joint" d'un modèle de pont [17]

Dans ce genre de structure, la corrosion induite par les chlorures s'aggrave souvent en raison de l'eau de drainage qui s'infiltre à travers les joints. Les conditions défavorables à la préservation des joints sont souvent dues à un drainage inadéquat ou à l'absence de systèmes d'étanchéité efficaces. L'infiltration d'eau et de sels de déneigement initie le processus corrosif des barres d'armature, entraînant ainsi une diminution de la capacité de l'ensemble du système.

En Python, la modélisation d'une poutre appuyée statiquement sur une autre peut être réalisée en considérant le cas d'un rectangle (similaire au carré) englobant l'ensemble de la structure. Nous retirons ensuite la partie hors du domaine, représentée par la surface marquée "Lower nib of half-joint" dans la figure 47. Ce retrait est implémenté à l'aide de conditions "if" dans les boucles itératives qui gèrent les indexations hors du domaine. En tenant compte de notre matrice de concentration, nous pouvons représenter la surface du half-joint à l'intérieur de celle-ci, avec les indexations  $i, j$  s'intercalant parmi les points d'interpolation marqués par des points gris sur la figure suivante :

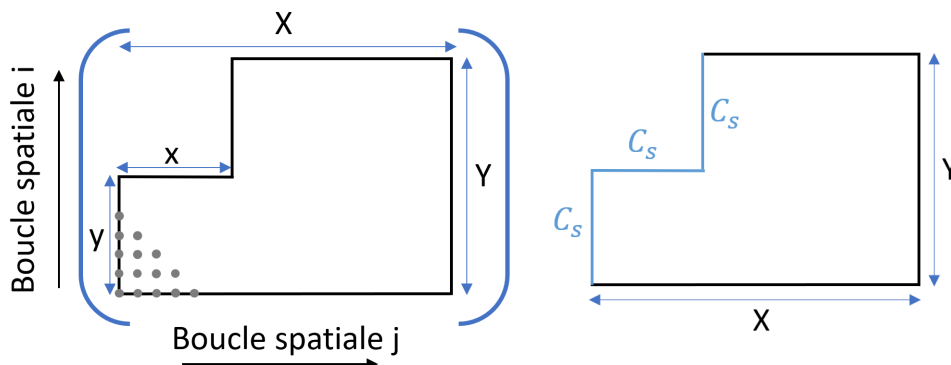


FIGURE 48 – Interprétation Python 2D de la poutre Gerber - Conditions limites imposées sur la poutre Gerber

On remarque la section marquée par la surface  $x \times y$  à retirer du rectangle complet  $X \times Y$ , qui ne sera pas prise en compte par les conditions "if" sur ces dimensions dans les boucles itératives. On rappelle que, pour chaque temps, les boucles itératives parcourent les points intérieurs au domaine. Les points extérieurs sont ceux donnés par les conditions de bords et initiales. D'ailleurs, nous pouvons considérer dans un premier temps une concentration  $C_s = 1$  [%] sur plusieurs bords du morceau en béton comme illustré à droite sur la figure 48.

Nous pouvons à présent lancer la simulation Python avec les nouvelles conditions de bords et les nouvelles boucles temporelles pour les paramètres suivants :

Paramètre	Valeur	Unité
$X$	1000	[mm]
$N_x$	100	[/]
$\Delta x$	10	[mm]
$Y$	1200	[mm]
$N_y$	120	[/]
$\Delta y$	10	[mm]
$x$	600	[mm]
$y$	600	[mm]
$T$	100	[années]
$N_t$	1000	[/]
$\Delta t$	0.1	[années]
$D$	0.00001	[mm <sup>2</sup> /s]
$C_s$	1	%

TABLE 8 – Paramètres pour l'analyse de diffusion 2D

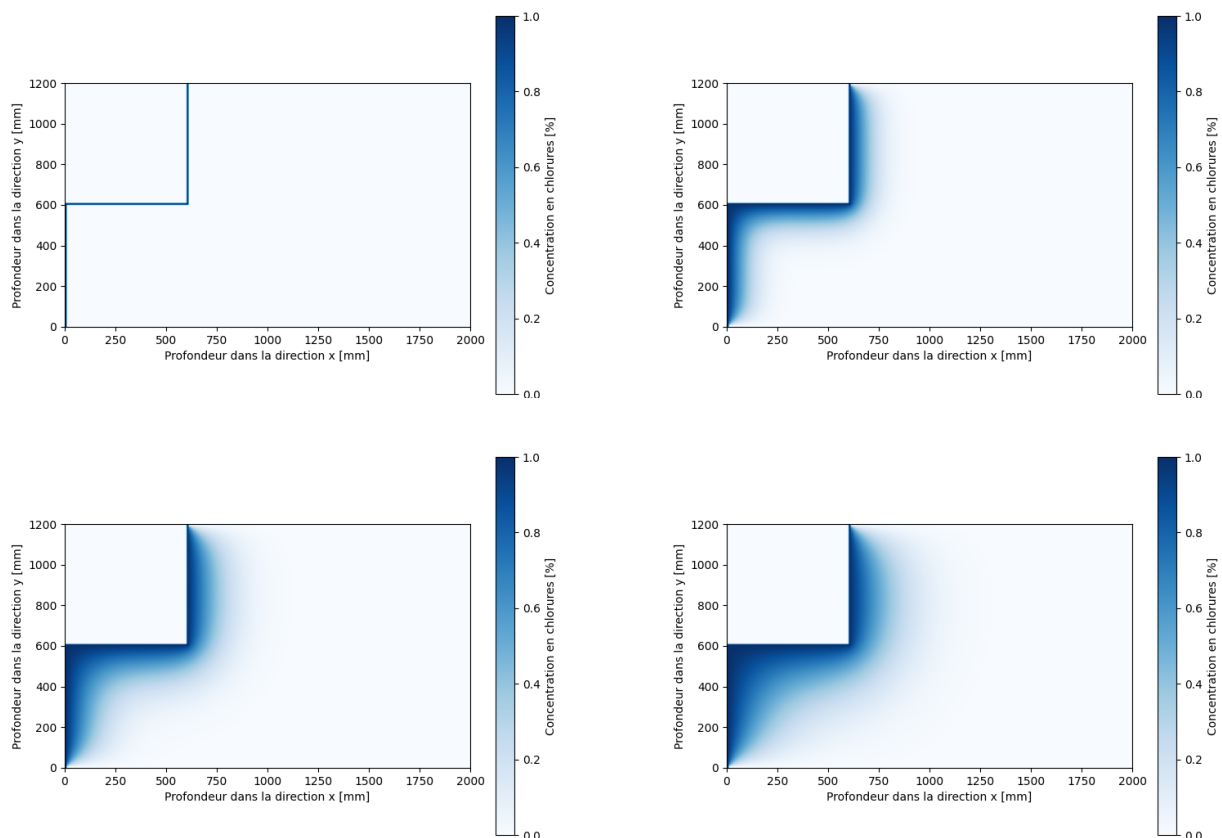


FIGURE 49 – Résultats numériques (schéma explicite) de la diffusion 2D avec conditions de surface appliquées sur 3 bords spécifiquement adaptées à une section de "half-joints" : après 0, 20, 50 et 100 ans

Les résultats mettent en évidence le potentiel d'agression lorsque de telles conditions limites sont imposées. Les barres d'armature dans les zones de concentration critique seront fortement affectées par les chlorures diffusant à partir du bord. La diminution de leur section, entraînant une perte de résistance, sera étudiée en détail à la section 6. En pratique, les chlorures ciblent non seulement les surfaces cachées à l'inspection lorsqu'on étend les segments bleus à la figure 48, mais également certaines surfaces exposées des poutres, notamment celles situées dans le plan perpendiculaire à la surface cachée (voir figure 50). Ces zones sont particulièrement vulnérables à l'eau de drainage des routes, qui peut les atteindre directement. Les images ci-dessous montrent l'effet de ce phénomène sur un pont existant constitué de poutres Gerber :

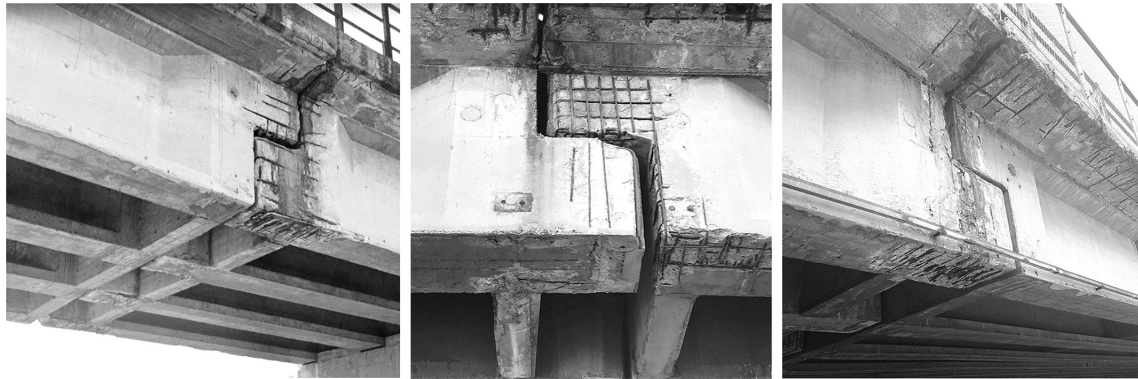


FIGURE 50 – Poutre Gerber d'un pont se détériorant [2]

La modélisation 2D de la diffusion des chlorures dans le cas des poutres Gerber ne tient pas entièrement compte de la réalité. En effet, compte tenu de l'ampleur des dimensions différentes affectées par les conditions en chlorures de bord dues aux circulations d'eau, une modélisation en 3D s'avère nécessaire. Pour comprendre et modéliser au mieux ce phénomène, nous devons passer à une étude en trois dimensions. Ces surfaces affectées seront modélisées dans le sens des  $z$ . La prochaine section introduira la modélisation 3D en intégrant des concentrations de bord surfaciques.

## □ Performance des schémas

À ce stade de complexité numérique, il est essentiel de considérer le temps d'exécution lors de la modélisation de la diffusion du chlore à travers une surface. Bien que les méthodes implicites puissent sembler attrayantes en raison de l'incrément temporel non restreint, leur mise en œuvre en Python nécessite la manipulation de systèmes linéaires avec de grandes matrices augmentant considérablement le temps de simulation étant donné que le "slicing" ne peut pas être appliquée sur l'opération de calcul. En effet, le tableau 9 montre un temps de simulation de plusieurs minutes, voire de plusieurs heures selon l'incrément temporel retenu. Pour optimiser les performances, il est possible d'explorer d'autres méthodes de résolution telles que les gradients conjugués, en tirant parti de la structure creuse de la matrice  $A$  mais cela dépasse les recherches de ce mémoire. Cependant, même avec ces optimisations, le "slicing" reste une méthode efficace pour obtenir une légère diminution du temps de simulation.

De plus, les méthodes explicites offrent une solution robuste et rapide en termes d'exécution. Cette différence de performance souligne l'importance de maîtriser ces subtilités de programmation en Python, notamment pour la modélisation impliquant des listes et matrices de grande taille. L'utilisation du "slicing" dans les méthodes explicites réduit les temps de simulation de presque 100 fois par rapport à l'utilisation classique des boucles "for". Le tableau suivant compare les temps de calcul obtenus pour une même précision sur les résultats pour chaque méthode utilisée dans le cas 2D :

Méthode	$\Delta t$ [s]	Temps de simulation [s]
DFE sans "slicing"	0.01	53.19
DFE avec "slicing"	0.01	0.63
DFI avec "slicing"	1	576.24
DFI avec "slicing"	0.1	5418.68
DFI avec "slicing"	0.01	55820.34

TABLE 9 – Comparaison des temps de simulation 2D

### 4.3.3 Implémentation Python : diffusion tridimensionnel

#### □ Paramétrisation

Pour mieux refléter la réalité, l'étude de ce mémoire entame une modélisation tridimensionnelle de l'équation de diffusion, discrétisée selon les équations 48, 49, et 50. En se souvenant de la relation 57, le critère de stabilité dans le cas 3D peut être établi :

$$\Delta t \leq \frac{(\Delta x)^2 \cdot (\Delta y)^2 \cdot (\Delta z)^2}{2 \cdot D \cdot ((\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2)} \quad (64)$$

Dans cette étude, nous considérons un parallélépipède rectangle en béton avec les dimensions suivantes : une épaisseur de  $Z = 500$  [mm] selon l'axe  $z$ , une hauteur de  $Y = 1200$  [mm] selon l'axe  $y$ , et une longueur de  $X = 2000$  [mm] selon l'axe  $x$ . Ces dimensions sont indexées respectivement par les indices  $i$ ,  $j$ , et  $k$ . La durée de l'étude est de  $T = 100$  années. Nous supposons également une concentration de bord  $C_s$  partiellement sur trois surfaces comme le montre l'illustration suivante :

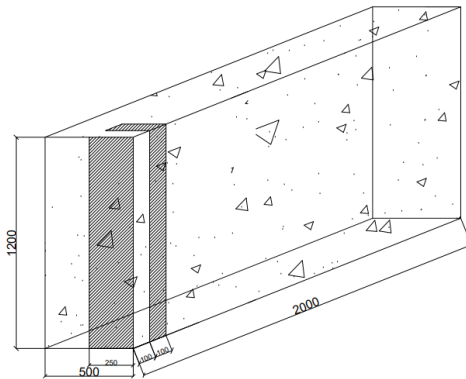


FIGURE 51 – Illustration du domaine

Les paramètres nécessaires pour cette étude, comprenant le coefficient de diffusion  $D$  et le coefficient en surface  $C_s$  décrits précédemment, sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Paramètre	Valeur	Unité
$X$	2000	[mm]
$N_x$	200	[/]
$\Delta x$	10	[mm]
$Y$	1200	[mm]
$N_y$	120	[/]
$\Delta y$	10	[mm]
$Z$	500	[mm]
$N_z$	50	[/]
$\Delta z$	10	[mm]
$T$	100	[années]
$N_t$	1000	[/]
$\Delta t$	0.1	[années]
$D$	0.00001	[mm <sup>2</sup> /s]
$C_s$	1	%

TABLE 10 – Paramètres pour l'analyse de diffusion 3D

## □ Implémentation

Le code suivant modélise l'équation de diffusion en trois dimensions en considérant les paramètres de la table 10 pour le cas numérique par l'application du schéma explicite d'Euler en temps et d'une différence centrée en position :

---

```

1  """Modélisation de la diffusion 3D de chlore dans un cube 1000x1000x1000mm de béton"""
2
3  # Importation
4  import numpy as np
5  import matplotlib.pyplot as plt
6  import time
7
8  # Paramètres
9  X = 2000 # Longueur du béton selon x (mm)
10 Y = 1200 # Longueur du béton selon y (mm)
11 Z = 500 # Longueur du béton selon z (mm)
12 T = 100 # Durée totale d'analyse (années)
13 D_app = 0.00001 # Coefficient de diffusion supposé constant (mm^2/s)
14 C_s = 1 # Concentration à la surface (%)
15
16 # Discrétisation
17 Nx = 200 # Nombre de points spatiaux selon x
18 Ny = 120 # Nombre de points spatiaux selon y
19 Nz = 50 # Nombre de points spatiaux selon z
20 Deltax = X/(Nx) # Pas de discrétisation selon x
21 Deltay = Y/(Ny) # Pas de discrétisation selon y
22 Deltaz = Z/(Nz) # Pas de discrétisation selon z
23 Deltat = (1/(2*D_app))*((Deltax**2)*(Deltay**2)*(Deltaz**2)/((Deltax**2)+(Deltay**2)+(Deltaz**2)))
24 *(1/(365*24*3600)) # Critère de stabilité
25 Deltat = 0.1 # Incrément temporel choisi
26 Nt = int((T/Deltat) + 1) # Nombre de points temporels
27 C_num = np.zeros((Nx,Ny,Nz,Nt)) # Matrice de concentration C[x, y, z, t] initié à 0
28
29 # Conditions de bord
30 C_num[0, :, 25, :] = C_s # Condition en C[0, y, 250:500, t]
31 C_num[10:15, :, -1, :] = C_s # Condition en C[100:150, y, 500, t]
32 C_num[10:15, -1, 25, :] = C_s # Condition en C[100:150, 1200, 250:500, t]
33
34 # Listes
35 x = np.linspace(0, X, Nx) # Liste des valeurs de profondeur x (mm)
36 y = np.linspace(0, Y, Ny) # Liste des valeurs de profondeur y (mm)
37 z = np.linspace(0, Z, Nz) # Liste des valeurs de profondeur z (mm)
38 t = np.linspace(0, T, Nt) # Liste des valeurs temporelles (années)
39
40 # Mise à jour de la liste concentration C[x, y, z, t]
41 t1 = time.time() # Temps initial processus
42 # Boucles for
43 for n in range(Nt-1):
44     for i in range(1, Nx-1):
45         for j in range(1, Ny-1):
46             for k in range(1, Nz-1):
47                 C_num[i, j, k, n+1] = C_num[i, j, k, n] + (D_app * Deltat * 365 * 24 * 3600 *
48                     (((1/(Deltax**2))*(C_num[i-1, j, k, n] - 2*C_num[i, j, k, n] + C_num[i+1, j, k, n])) +
49                      ((1/(Deltay**2))*(C_num[i, j-1, k, n] - 2*C_num[i, j, k, n] + C_num[i, j+1, k, n])) +
50                      ((1/(Deltaz**2))*(C_num[i, j, k-1, n] - 2*C_num[i, j, k, n] + C_num[i, j, k+1, n]))))
51 t2 = time.time() # Temps final processus

```

---

La mise en forme de ce code ressemble fortement au cas bidimensionnel dans lequel on définit une dimension en plus, celle qui traverse la profondeur selon l'axe  $z$ . Le schéma suivant illustre le principe :

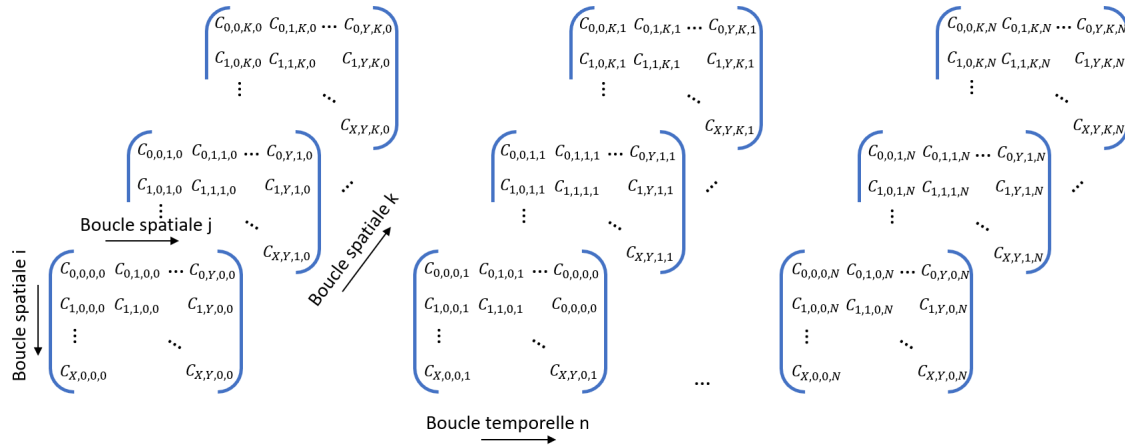


FIGURE 52 – Schéma numérique en différence finie pour le cas en 3 dimensions

Plus précisément, le calcul de la concentration  $C_{1,1,1,1}$  se fait grâce aux données voisines dans l'espace  $i, j, k$  et à l'instant précédent  $C_{1,0,1,0}, C_{1,1,1,0}, C_{1,2,1,0}, C_{0,1,1,0}, C_{2,1,1,0}, C_{1,1,0,0}$  et  $C_{1,1,2,0}$  qui sont initialement imposées par les conditions limites et initiales. On procède ainsi de suite pour les autres valeurs jusqu'au remplissage complet de la matrice des concentrations.

### □ Optimisation du code

A ce stade de complexité, il devient nécessaire d'utiliser le "slicing" pour éviter des heures de simulations. Au départ, les boucles spatiales et temporelles sont décrites :

```

1  # Boucles for
2  for n in range(Nt-1):
3      for i in range(1, Nx-1):
4          for j in range(1, Ny-1):
5              for k in range(1, Nz-1):
6                  C_num[i, j, k, n+1] = C_num[i, j, k, n] + (D_app * Deltat * 365 * 24 * 3600 *
7                      (((1/(Deltax**2))*(C_num[i-1, j, k, n] - 2*C_num[i, j, k, n] + C_num[i+1, j, k, n])) +
8                      ((1/(Deltay**2))*(C_num[i, j-1, k, n] - 2*C_num[i, j, k, n] + C_num[i, j+1, k, n])) +
9                      ((1/(Deltaz**2))*(C_num[i, j, k-1, n] - 2*C_num[i, j, k, n] + C_num[i, j, k+1, n])))))

```

Après optimisation, le "slicing" est appliqué sur les boucles spatiales :

```

1  # Slicing
2  for n in range(Nt-1):
3      C_num[1:Nx-1, 1:Ny-1, 1:Nz-1, n+1] = C_num[1:Nx-1, 1:Ny-1, 1:Nz-1, n] + (D_app * Deltat * 365 * 24 * 3600 *
4          (((1/(Deltax**2))*(C_num[0:Nx-2, 1:Ny-1, 1:Nz-1, n] - 2*C_num[1:Nx-1, 1:Ny-1, 1:Nz-1, n] +
5          C_num[2:Nx, 1:Ny-1, 1:Nz-1, n])) + ((1/(Deltay**2))*(C_num[1:Nx-1, 0:Ny-2, 1:Nz-1, n] -
6          2*C_num[1:Nx-1, 1:Ny-1, 1:Nz-1, n] + C_num[1:Nx-1, 2:Ny, 1:Nz-1, n])) +
7          ((1/(Deltaz**2))*(C_num[1:Nx-1, 1:Ny-1, 0:Nz-2, n] - 2*C_num[1:Nx-1, 1:Ny-1, 1:Nz-1, n] +
8          C_num[1:Nx-1, 1:Ny-1, 2:Nz, n]))))

```

## □ Résultats

En considérant la paramétrisation donnée en table 10, la figure 53 illustre les évolutions temporelles des concentrations en chlorures pour différentes profondeurs avec les schémas numériques explicites :

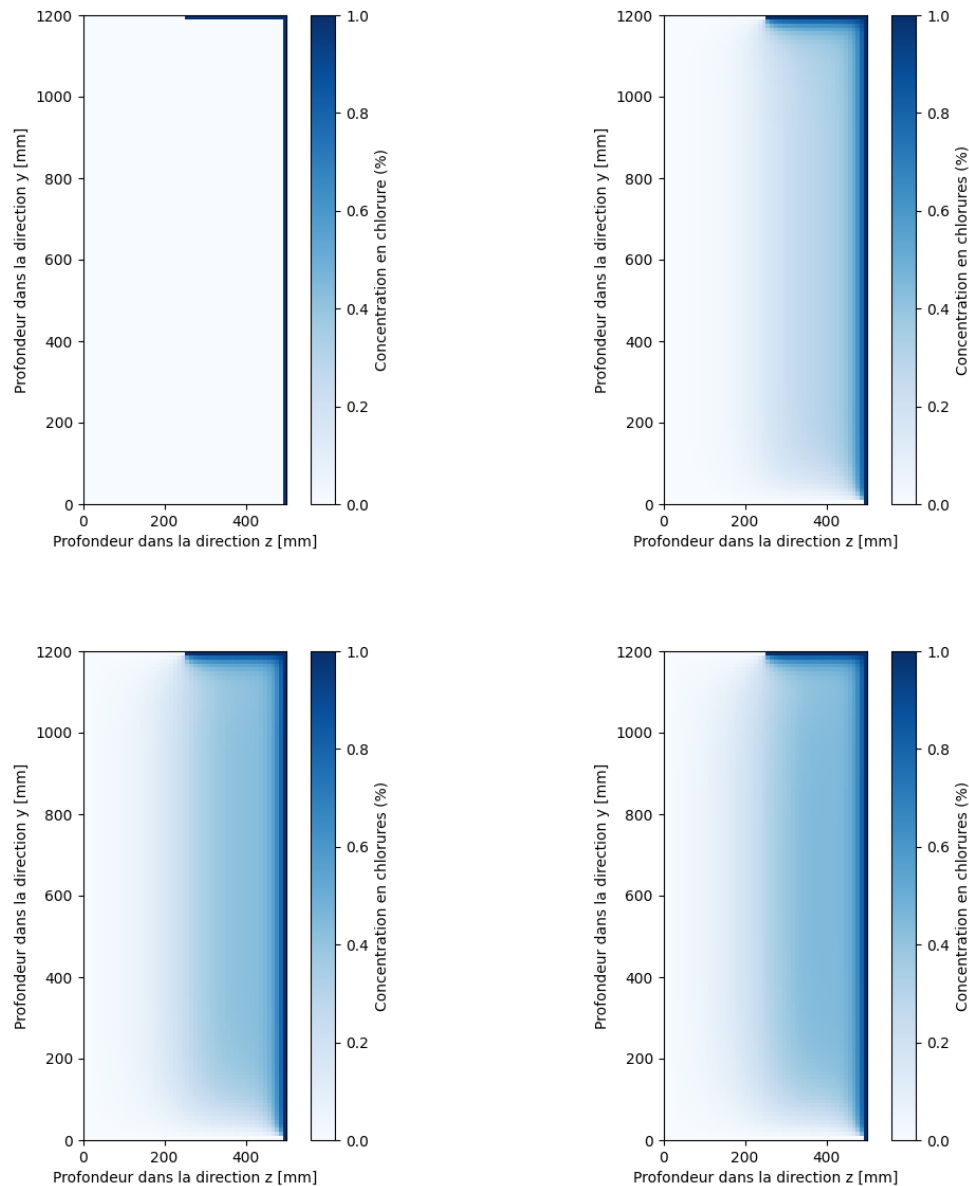


FIGURE 53 – Résultats numériques (schéma explicite) de la diffusion 3D : après 0 ans, 20 ans, 50 ans et 100 ans

On constate une diffusion homogène partant des bords où une concentration de bord existe tout comme nous avons pu le constater auparavant. A cela, vient s'ajouter l'effet de la diffusion sur le bord en  $x = 0[mm]$  qui se marque de plus en plus au fil que l'on avance dans le temps au centre de la section. Pour être plus précis, nous pouvons tracer l'évolution temporelle de plusieurs points particuliers  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  en  $(x,y,z)$  [mm] au sein de la même tranche de section située à 10 cm du bord  $x = 0$ .

$$P_1 = (100, 400, 50) \text{ [mm]}$$

$$P_2 = (100, 400, 450) \text{ [mm]}$$

$$P_3 = (100, 1150, 450) \text{ [mm]}$$

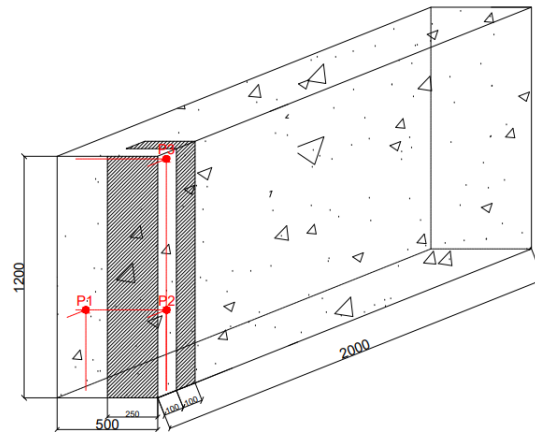
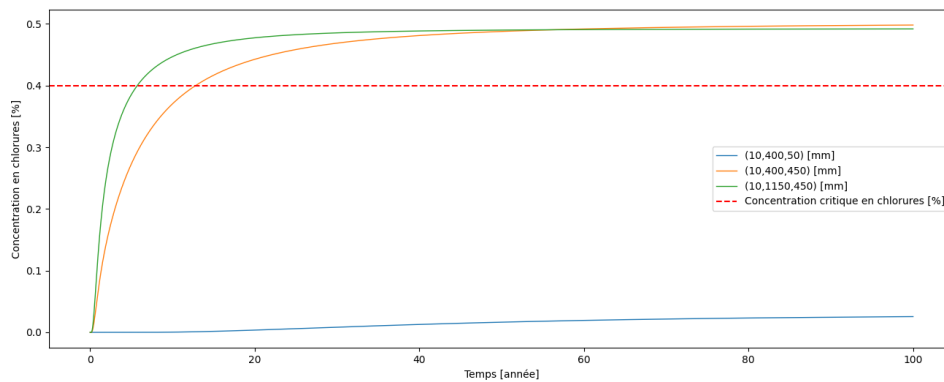


FIGURE 54 – Domaine avec ses conditions de bord et les points à l'étude

FIGURE 55 – Évolution temporelle de la concentration en chlorures aux points  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$ 

La figure 55 illustre des résultats différents pour les trois courbes. En effet, lorsque le point est éloigné des conditions de bords, celui-ci n'atteindra pas la concentration critique même pour un béton de qualité moyenne. Les deux autres courbes décrivent l'évolution temporelle de la concentration en chlorures pour des points proches de la concentration de bord. Ces points atteignent la concentration critique après moins de 20 ans. Une différence est notable pour le point  $P_3$  qui subit les effets des deux bords. Son temps d'initiation sera légèrement plus court.

### 4.3.4 Comparaison des dimensions

Après avoir analysé les différentes dimensions individuellement, il est intéressant de comparer l'effet d'une implémentation en 3D par rapport aux simplifications possibles dans les dimensions inférieures. En prenant en compte le même domaine étudié dans le cas tridimensionnel en section 4.3.3, avec les mêmes concentrations de bord, la comparaison entre les dimensions peut être établie en se basant sur un point d'étude  $P_1$  :

$$P_1 = (100, 400, 230) \text{ [mm]}$$

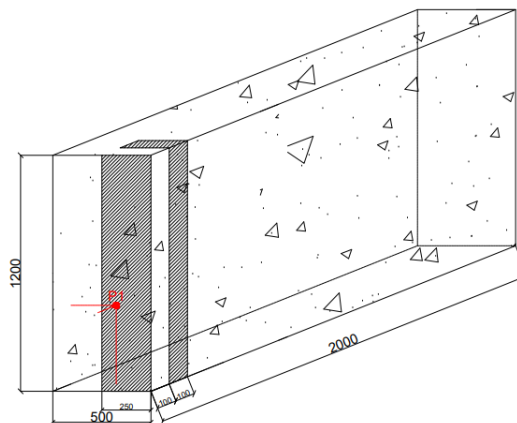


FIGURE 56 – Domaine avec ses conditions de bord et le point à l'étude

Selon la dimension considérée, le point  $P_1$  sera soumis aux conditions de bord ou non. En effet, pour le cas unidimensionnel, le point sera directement influencé par la concentration de bord imposée sur le bord en  $z = 500$  à une distance de 270 [mm] (1D-1). Cependant, en faisant des hypothèses, il pourrait également être soumis à la concentration du bord en  $x = 0$  à une distance de 100 [mm] (1D-2) ou à l'autre extrême ne pas être influencé par une concentration de bord (1D-3) selon l'hypothèse faite. Les cas bidimensionnels et tridimensionnels respectent la réalité du domaine sans nécessiter d'hypothèses. La comparaison entre ces différents cas est illustrée dans la figure suivante :

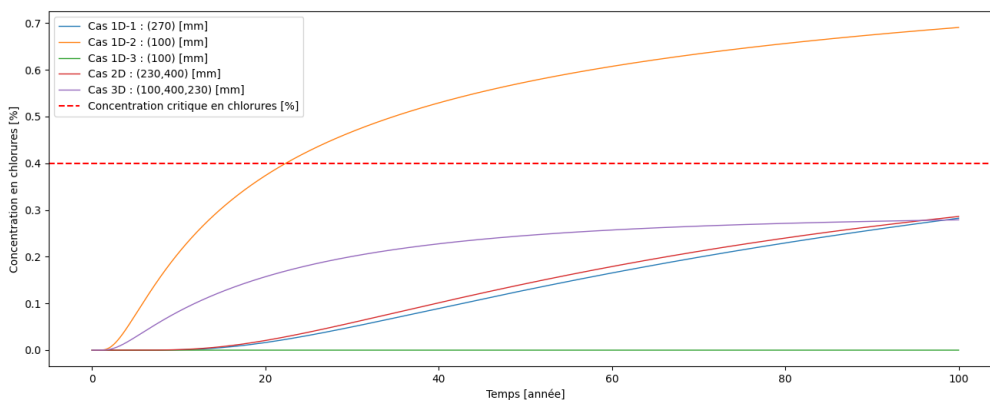


FIGURE 57 – Comparaison des dimensions pour l'évolution temporelle de la concentration en chlorures au point  $P_1$

On constate que seul le cas 1D-2 atteint la concentration critique en chlorures pour les conditions de bord imposées. Il est également intéressant de noter qu'une certaine concentration existe dans le cas 3D qui n'est pas atteinte dans le cas 1D représenté par 1D-3. Bien que la concentration critique ne soit pas atteinte, cela montre que pour des concentrations de bord plus importantes, le point atteindra la concentration critique dans le cas 3D alors

que ce ne sera pas le cas dans le cas 1D. L'hypothèse de considérer le point dans l'alignement de la concentration de bord dans le cas 1D est donc une hypothèse sécuritaire. En réalité, il serait plus pertinent de considérer, pour le cas unidimensionnel, une concentration de bord multipliée par un facteur entre 0 et 1 tenant compte des effets tridimensionnels.

## 4.4 Automates cellulaires

Après avoir exploré les méthodes numériques traditionnelles telles que les différences finies, il est pertinent de se tourner vers une autre approche puissante et innovante : les automates cellulaires. Les automates cellulaires, souvent désignés par l'acronyme CA pour "Cellular Automata" en anglais, sont des modèles mathématiques puissants qui permettent de représenter et d'analyser une variété de systèmes dynamiques complexes. En discrétisant à la fois l'espace et le temps, l'espace étant représenté par une matrice de cellules avec une ou plusieurs dimensions, les CA offrent un cadre formel pour étudier des phénomènes variés, allant de la diffusion chimique aux schémas de trafic urbain. Leur structure est composée d'une grille de cellules, chaque cellule pouvant prendre un état parmi un ensemble fini de valeurs possibles. À chaque étape, l'état de chaque cellule est mis à jour en fonction de l'état de ses cellules voisines, conformément à des règles d'évolution prédéfinies.

L'approche d'analyse cellulaire se distingue également comme l'un des outils les mieux adaptés pour modéliser les divers facteurs environnementaux et leur impact sur les ponts [97] comme par exemple les sels de déneigement en hiver, le brouillard salin et les corrosions induites par les sels marins. De même, elle prend en compte les variations saisonnières et les conditions tropicales, comme la concentration en dioxyde de carbone, les précipitations et l'humidité atmosphérique pour des modélisations numériques détaillées. Toutefois, une quantité substantielle de données de terrain demeure indispensable pour garantir une simulation précise et fiable à long terme.

En reprenant les termes de Lalonde [90], de tels systèmes sont décrits comme automates cellulaires à condition que ces derniers respectent les trois propriétés fondamentales suivantes :

- Le parallélisme : L'ensemble des constituants de l'automate évoluent simultanément
- La localité : le nouvel état d'une cellule ne dépend que de son état actuel et de l'état des cellules de son voisinage immédiat
- L'homogénéité : Les règles d'évolution sont universelles, soit communes à l'ensemble de l'espace de l'automate

Les principaux composants d'un automate cellulaire incluent les cellules elles-mêmes, leur état, les règles d'évolution, ainsi que les conditions initiales et les limites du système. Le choix du voisinage cellulaire, tel que les voisins de von Neumann ou de Moore, détermine la nature de la discrétisation adoptée et influence directement le comportement global du modèle. La figure suivante illustre ces concepts dans des contextes unidimensionnels et bidimensionnels, mettant en évidence les interactions entre les cellules et leur environnement.

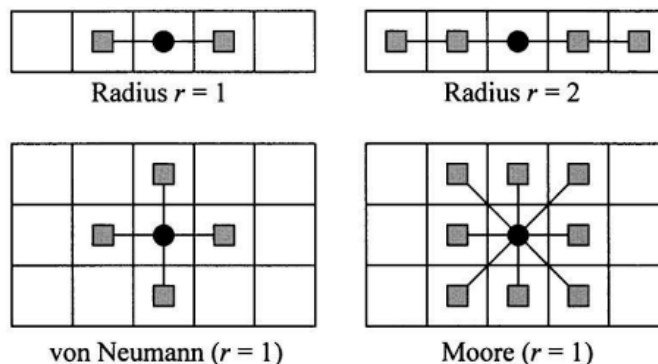


FIGURE 58 – Voisinages typiques pour des automates cellulaires en 1D et 2D [32]

De manière plus spécifique, un automate cellulaire se compose d'une grille régulière et uniforme de sites ou de cellules, théoriquement infinie en étendue. Chaque cellule renferme une variable discrète qui peut prendre un nombre fini d'états, la caractéristique propre à chaque cellule étant représentée par une variable, assimilée dans notre contexte à la concentration, évoluant de manière continue dans le temps. Selon Ruan et al. [58], l'état  $C(s_i, n + 1)$

de la cellule  $s_i$  à l'instant  $n + 1$  est continuellement synchronisé avec les états voisins de  $C(s_i, n)$  à l'instant  $n$ , se manifestant par une règle d'évolution locale  $f(\cdot)$  :

$$C(s_i, n + 1) = f(C(s_0, n), C(s_1, n), \dots, C(s_i, n), \dots) \quad (65)$$

Comme démontré par Bontempi et al. [32], le processus de diffusion, régi par la seconde loi de Fick en  $d$  dimensions ( $d = 1, 2, 3$ ), peut être modélisé en adoptant le voisinage de von Neumann de rayon 1 :

$$C_i^{n+1} = \phi_0 \cdot C_i^n + \sum_{j=1}^d (\phi_j^- \cdot C_{i-1,j}^n + \phi_j^+ \cdot C_{i+1,j}^n) \quad (66)$$

Avec

- $C_i^{n+1}$  la concentration du composant dans la cellule  $i$  au temps  $n + 1$
- $\phi_0, \phi_j^-, \phi_j^+$  les coefficients d'évolution
- $d$  la dimension du problème ( $=1, 2, 3$ )

Pour un milieu isotrope, la condition de symétrie peut être adoptée :  $\phi_j^- = \phi_j^+ = \phi_j$  (pour  $j = 1, 2, 3$ ). L'expression 66 peut se réécrire selon la dimension considérée :

$$\mathbf{1D} : C_i^{n+1}(x, t) = \phi_0 \cdot C_i^n(x, t) + \phi_i \cdot (C_{i-1}^n(x, t) + C_{i+1}^n(x, t)) \quad (67)$$

$$\mathbf{2D} : C_{i,j}^{n+1}(x, y, t) = \phi_0 \cdot C_{i,j}^n(x, y, t) + \phi_{i,j} \cdot (C_{i-1,j}^n(x, y, t) + C_{i+1,j}^n(x, y, t) + C_{i,j-1}^n(x, y, t) + C_{i,j+1}^n(x, y, t)) \quad (68)$$

$$\mathbf{3D} : C_{i,j,k}^{n+1}(x, y, z, t) = \phi_0 \cdot C_{i,j,k}^n(x, y, z, t) + \phi_{i,j,k} \cdot (C_{i-1,j,k}^n(x, y, z, t) + C_{i+1,j,k}^n(x, y, z, t) + C_{i,j-1,k}^n(x, y, z, t) + \quad (69)$$

$$C_{i,j+1,k}^n(x, y, z, t) + C_{i,j,k-1}^n(x, y, z, t) + C_{i,j,k+1}^n(x, y, z, t)) \quad (70)$$

Cette formulation présente une similitude marquée avec la méthode des différences finies à la différence qu'on utilise des coefficients d'évolution.

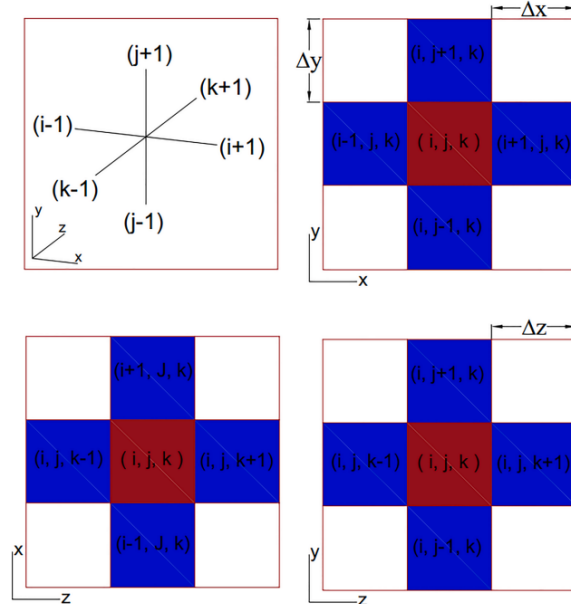


FIGURE 59 – Concept de voisinage des automates cellulaires dans le cas 3D [97]

De plus, les coefficients d'évolution doivent satisfaire la loi normale, exprimant la conservation de la masse pour éviter les effets directionnels :

$$\phi_0 + \sum_{j=1}^d (\phi_j^- + \phi_j^+) = \phi_0 + \sum_{j=1}^d (2 \cdot \phi_j) = 1 \quad (71)$$

En utilisant la condition de symétrie, cette dernière relation peut être exprimée selon la dimension considérée :

$$\mathbf{1D} : \phi_1 = \phi_2 = \frac{1 - \phi_0}{2} \quad (72)$$

$$\mathbf{2D} : \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \frac{1 - \phi_0}{4} \quad (73)$$

$$\mathbf{3D} : \phi_1 = \phi_2 = \phi_3 = \phi_4 = \phi_5 = \phi_6 = \frac{1 - \phi_0}{6} \quad (74)$$

Afin de réguler le processus, similaire à la notion de stabilité pour les différences finies, une discrétisation adéquate en espace  $\Delta$  et en temps  $\Delta t$  doit être appliquée, établissant un lien entre le coefficient de diffusion  $D$ , les coefficients d'évolution  $\phi_0$  et  $\phi_1$  ainsi que la dimension considérée  $d$  [32] :

$$D = \frac{1 - \phi_0}{2d} \frac{(\Delta)^2}{\Delta t} = \phi_1 \frac{(\Delta)^2}{\Delta t} \quad (75)$$

$$\hookrightarrow \Delta t = \frac{1 - \phi_0}{2d} \frac{(\Delta)^2}{D} \quad (76)$$

Cette dernière expression suppose que les cellules ont la même forme et la même taille  $\Delta x = \Delta y = \Delta z = \Delta$ . En outre, Ardigo et Motta [22] ont démontré que les valeurs des coefficients d'évolution  $\phi_0 = 1/2$  et  $\phi_1 = 1/(4d)$  avec  $d$  la dimension considérée sont appropriées pour garantir une précision satisfaisante des automates peu importe la dimension étudiée. Dans les applications pratiques, la diffusion des chlorures est influencée par de nombreux facteurs interdépendants que nous avons pu aborder lors de la paramétrisation du coefficient de diffusion  $D$  tels que la variation temporelle, la concentration en chlorure, les propriétés du béton, l'environnement, la température, les contraintes, la dégradation des matériaux, la corrosion et les fissures. Ainsi, pour assurer la précision de la simulation, le pas de temps et les dimensions de la grille doivent être soigneusement sélectionnés pour équilibrer ces paramètres.

Nous pouvons combiner les relations 67, 68 et 69-70 avec la nouvelle définition des coefficients d'évolution pour exprimer l'évolution des automates cellulaires dans la dimension considérée :

$$\mathbf{1D} : C_i^{n+1}(x, t) = \phi_0 \cdot C_i^n(x, t) + \frac{1 - \phi_0}{2} \cdot (C_{i-1}^n(x, t) + C_{i+1}^n(x, t)) \quad (77)$$

$$\mathbf{2D} : C_{i,j}^{n+1}(x, y, t) = \phi_0 \cdot C_{i,j}^n(x, y, t) + \frac{1 - \phi_0}{4} \cdot (C_{i-1,j}^n(x, y, t) + C_{i+1,j}^n(x, y, t) + C_{i,j-1}^n(x, y, t) + C_{i,j+1}^n(x, y, t)) \quad (78)$$

$$\mathbf{3D} : C_{i,j,k}^{n+1}(x, y, z, t) = \phi_0 \cdot C_{i,j,k}^n(x, y, z, t) + \frac{1 - \phi_0}{6} \cdot (C_{i-1,j,k}^n(x, y, z, t) + C_{i+1,j,k}^n(x, y, z, t) + C_{i,j-1,k}^n(x, y, z, t) +$$

$$C_{i,j+1,k}^n(x, y, z, t) + C_{i,j,k-1}^n(x, y, z, t) + C_{i,j,k+1}^n(x, y, z, t)) \quad (80)$$

Une fois les équations établies, nous entamons l'implémentation en Python dans les trois dimensions considérées pour les automates cellulaires au même titre que les différences finies. Une comparaison des résultats obtenus entre les différentes dimensions ainsi qu'entre les deux méthodes numériques sera pertinente, étant donné leur similarité sur le plan mathématique, notamment en ce qui concerne le concept de voisinage.

#### 4.4.1 Implémentation Python : diffusion unidimensionnelle

##### □ Paramétrisation

Commençons par la dimension unidimensionnelle, nous considérons dans un premier temps une longueur  $L$  de béton de 1000 [mm] de long selon l'axe des  $x$  qui sera indexé par un indice  $i$  en Python pendant une période  $T$  de 100 [années]. On suppose également une concentration de bord  $C(0,t) = C_s$ . Le tableau suivant reprend les paramètres requis pour cette première étude en reprenant le coefficient de diffusion  $D$  et le coefficient en surface  $C_s$  décrits auparavant :

Paramètre	Valeur	Unité
$L$	1000	[mm]
$N_x$	100	[/]
$\Delta x$	10	[mm]
$T$	100	[années]
$N_t$	1000	[/]
$\Delta t$	0.1	[année]
$D$	0.00001	[mm <sup>2</sup> /s]
$C_s$	1	[%]

TABLE 11 – Paramétrisation pour l'analyse de diffusion 1D

##### □ Implémentation

Le code suivant modélise l'équation de diffusion en une dimension en considérant les paramètres de la table 11 pour le cas numérique par l'application du automates cellulaires :

---

```

1      """Implémentation des automates cellulaires de la diffusion 1D"""
2
3      #Import
4      import numpy as np
5      import math
6      import matplotlib.pyplot as plt
7      import time
8
9      #Paramètres
10     L = 1000 # Longueur de béton (mm)
11     T = 100 # Temps total (année)
12     D_app = 0.00001 # Coefficient de diffusion constant (mm^2/s)
13     C_s = 1 # Concentration de chlorure en surface (%)
14
15     # Coefficients d'évolution
16     phi_0 = 1/2
17     phi_i = (1 - phi_0)/(2)
18
19     # Discrétisation
20     Nx = 100 # Nombre de points spatiaux
21     Deltax = L/(Nx) # Incrément spatial
22     Deltat = (1/(D_app*2))*((1-phi_0)*Deltax**2)*(1/(365*24*3600)) # Critère de stabilité
23     Deltat = 0.007 # Incrément temporel retenu
24     Nt = int((T/Deltat) + 1) # Nombre de points temporels
25     C_num = np.zeros((Nx,Nt)) # Matrice des concentrations C(x,t) initié à 0
26
27     # Listes
28     x = np.linspace(0, L, Nx) # Liste des valeurs de positions (mm)

```

---

```

29     t = np.linspace(0, T, Nt) # Liste des valeurs de temps (année)
30
31     # Condition de bord
32     C_num[0,:] = C_s # Condition en C[0, t]
33
34     # Mise à jour de la liste concentration C[x, t]
35     t0 = time.time() # Temps initial processus
36     # Boucle for
37     for n in range(Nt-1):
38         for i in range(1,Nx-1):
39             C_num[i,n+1] = (phi_0 * C_num[i,n]) + ((phi_i*C_num[i-1,n]) + (phi_i*C_num[i+1,n]))
40     t1 = time.time() # Temps final processus

```

### □ Optimisation du code

Il est également possible d'utiliser la méthode de "slicing" décrite aux différences finies 4.3.1 pour diminuer le temps de calcul. Au départ, les boucles spatiale et temporelle sont décrites :

```

1     # Boucles for
2     for n in range(Nt-1):
3         for i in range(1,Nx-1):
4             C_num[i,n+1] = (phi_0 * C_num[i,n]) + ((phi_i*C_num[i-1,n]) + (phi_i*C_num[i+1,n]))

```

Après optimisation, le "slicing" est appliqué sur la boucle spatiale :

```

1     # Slicing
2     for n in range(Nt-1):
3         C_num[1:Nx-1,n+1] = (phi_0 * C_num[1:Nx-1,n]) + ((phi_i*C_num[:Nx-2,n]) + (phi_i*C_num[2:Nx,n]))

```

### □ Résultats

En considérant la paramétrisation donnée en table 11, la figure 60 illustre les évolutions temporelles des concentrations en chlorures pour différentes profondeurs avec les automates cellulaires :

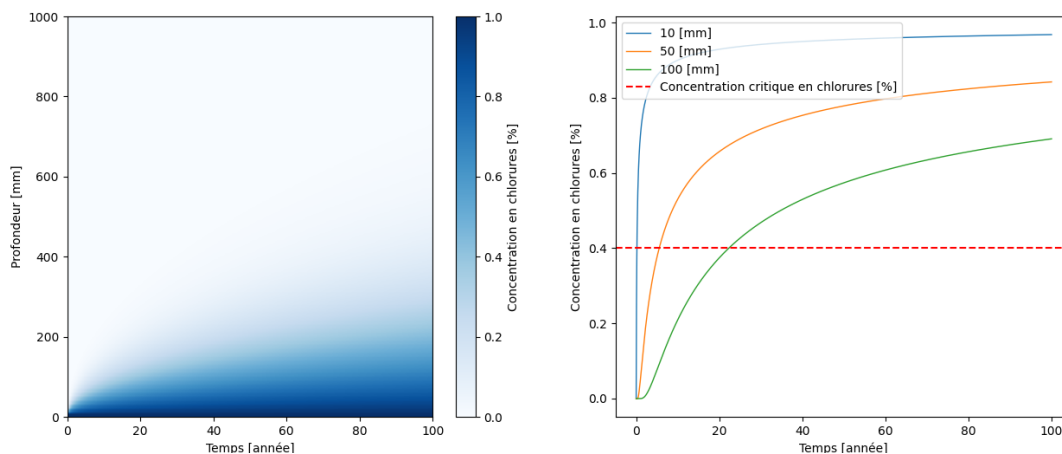


FIGURE 60 – Résultats numériques (schéma explicite) de la diffusion 1D

A première vue, les résultats ressemblent fortement à ceux obtenus via les différences finies. En effet, la diffusion rapide au début suivit d'un plateau apparaît. On remarque sur la figure 60 que les trois courbes atteindront la concentration critique  $C_{\text{crit}} = 0.4\%$  à différents moments. En effet, la couche de 10 [mm], assez proche du bord donc, l'atteindra quasi instantanément, tandis que la couche à 50 [mm] l'atteindra après 5 ans. Par ailleurs, la couche la plus éloignée à 100 [mm] l'atteindra après plus de 20 ans. La comparaison avec les différences finies est montrée à la figure suivante 61, où nous comparons une des courbes en  $x = 50[\text{mm}]$  :

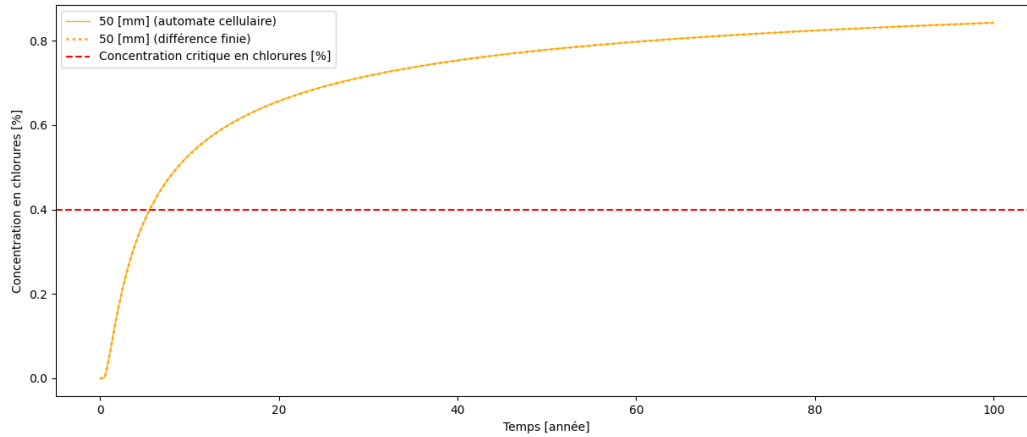


FIGURE 61 – Comparaison des solutions numériques (automate cellulaire et différence finie)

On constate une concordance parfaite entre les 2 méthodes numériques, ce qui prouve une première fiabilité des automates cellulaires dans la modélisation numérique de la diffusion du chlore.

#### 4.4.2 Implémentation Python : diffusion bidimensionnelle

##### □ Paramétrisation

Continuons l'analyse en passant cette fois ci au cas bidimensionnelle. Nous considérons un domaine carré d'une longueur  $X$  de béton de 1000mm de long selon l'axe des  $x$  qui sera indexé par un indice  $i$  en Python et d'une longueur  $Y$  de béton de 1000m de long selon l'axe des  $y$  qui sera lui indexé par l'indice  $j$  pendant une période  $T$  de 100 années. On suppose également une concentration  $C_s$  sur les 4 bords du domaine. Le tableau suivant reprend les paramètres requis pour cette étude en reprenant le coefficient de diffusion  $D$  et le coefficient en surface  $C_s$  décrits auparavant :

Paramètre	Valeur	Unité
$X$	1000	[mm]
$N_x$	100	[/]
$\Delta x$	10	[mm]
$Y$	1000	[mm]
$N_y$	100	[/]
$\Delta y$	10	[mm]
$T$	100	[années]
$N_t$	1000	[/]
$\Delta t$	0.1	[années]
$D$	0.00001	[mm <sup>2</sup> /s]
$C_s$	1	%

TABLE 12 – Paramètres pour l'analyse de diffusion 2D

##### □ Implémentation

Le code suivant modélise l'équation de diffusion en une dimension en considérant les paramètres de la table 12 pour le cas numérique par l'application du automates cellulaires :

```

1      """Implémentation des automates cellulaires de la diffusion 2D"""
2
3      #Import
4      import numpy as np
5      import math
6      import matplotlib.pyplot as plt
7      import time
8
9      #Paramètres
10     X = 1000 # Longueur de béton selon x (mm)
11     Y = 1000 # Longueur de béton selon y (mm)
12     T = 100 # Temps total (année)
13     D_app = 0.00001 # Coefficient de diffusion constant (mm^2/s)
14     C_s = 1 # Concentration de chlorure en surface (%)
15
16     # Coefficients d'évolution
17     phi_0 = 1/2
18     phi_i = (1 - phi_0)/(4)
19
20     # Discrétisation
21     Nx = 100 # Nombre de points spatiaux selon x
22     Ny = 100 # Nombre de points spatiaux selon y
23     Deltax = X/(Nx) # Pas de discrétisation selon x
24     Deltay = Y/(Ny) # Pas de discrétisation selon y

```

```

25 Deltat = (1/(D_app*4))*((1-phi_0)*Deltax**2)*(1/(365*24*3600)) # Critère de régulation
26 Deltat = 0.39 # Incrément temporel choisi
27 Nt = int((T/Deltat) + 1) # Nombre de points temporels
28 C_num = np.zeros((Nx,Ny,Nt)) # Matrice des concentrations C(x,t) initié à 0
29
30 # Listes
31 x = np.linspace(0, X, Nx) # Liste des valeurs de profondeur x (mm)
32 y = np.linspace(0, Y, Ny) # Liste des valeurs de profondeur y (mm)
33 t = np.linspace(0, T, Nt) # Liste des valeurs de temps (année)
34
35 # Condition de bord
36 C_num[-1,:,:] = C_s # Condition en C[1000, y, t]
37 C_num[:, -1, :] = C_s # Condition en C[x, 1000, t]
38 C_num[0,:,:] = C_s # Condition en C[0, y, t]
39 C_num[:,0,:] = C_s # Condition en C[x, 0, t]
40
41 # Mise à jour de la liste concentration C[x, y, t]
42 t0 = time.time() # Temps initial processus
43 # Boucles for
44 for n in range(Nt-1):
45     for i in range(1, Nx-1):
46         for j in range(1, Ny-1):
47             C_num[i, j, n+1] = (phi_0 * C_num[i, j, n]) + (phi_i * C_num[i-1, j, n]) + (phi_i * C_num[i+1, j, n]) +
48                 (phi_i * C_num[i, j-1, n]) + (phi_i * C_num[i, j+1, n])
49 t1 = time.time() # Temps final processus

```

### □ Optimisation du code

Afin d'optimiser les boucles, nous pouvons une nouvelle fois utiliser la méthode de "slicing". Au départ, les boucles spatiales et temporelle sont décrites :

```

1 # Boucles for
2 for n in range(Nt-1):
3     for i in range(1, Nx-1):
4         for j in range(1, Ny-1):
5             C_num[i, j, n+1] = (phi_0 * C_num[i, j, n]) + (phi_i * C_num[i-1, j, n]) +
6                 (phi_i * C_num[i+1, j, n]) + (phi_i * C_num[i, j-1, n]) + (phi_i * C_num[i, j+1, n])

```

Après optimisation, le "slicing" est appliqué sur la boucle spatiale :

```

1 # Slicing
2 for n in range(Nt-1):
3     C_num[1:Nx-1,1:Ny-1,n+1] = (phi_0 * C_num[1:Nx-1,1:Ny-1,n]) + ((phi_i*C_num[:Nx-2,1:Ny-1,n]) +
4         (phi_i*C_num[2:Nx,1:Ny-1,n]) + (phi_i*C_num[1:Nx-1,:Ny-2,n]) + (phi_i*C_num[1:Nx-1,2:Ny,n]))

```

□ Résultats

En considérant la paramétrisation donnée en table 12, la figure 62 illustre l'évolution de la concentration en chlorures pour différents temps :

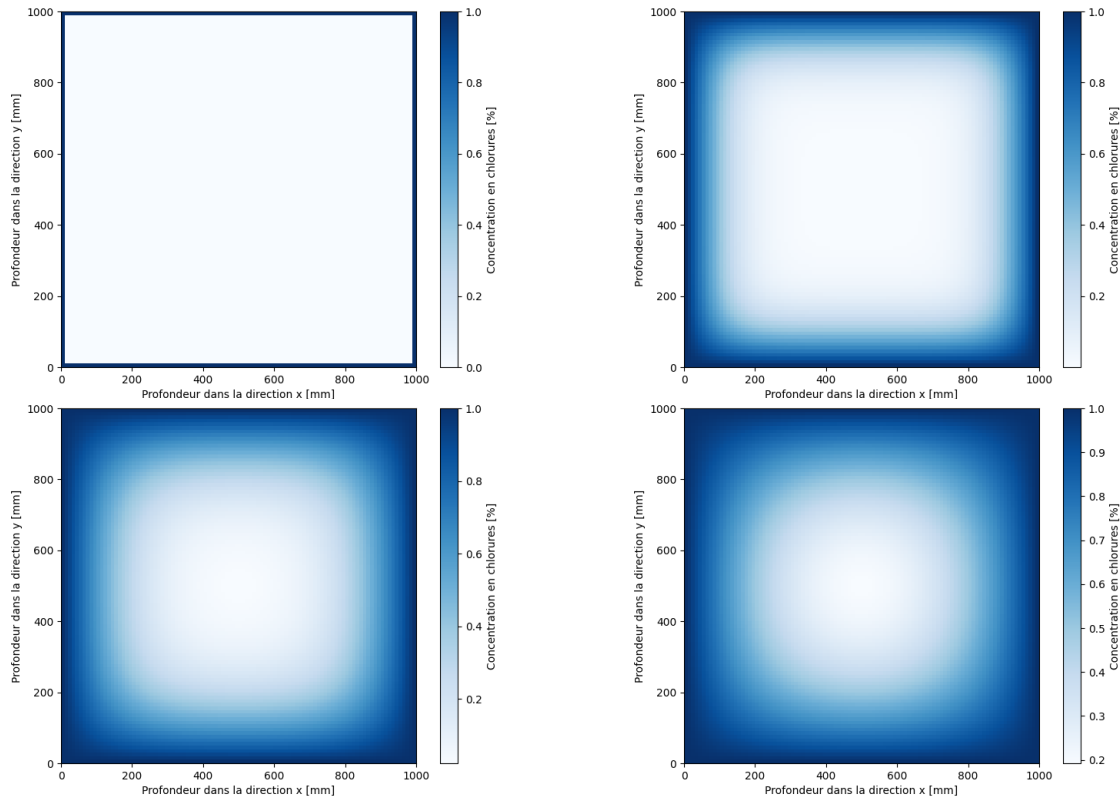


FIGURE 62 – Résultats numériques (automate cellulaire) de la diffusion 2D : après 0 ans, 20 ans, 50 ans et 100 ans

Nous observons une diffusion assez homogène vers le centre de la surface. Les effets de la deuxième dimension sont montrés aux 4 coins du domaine comme c'était le cas avec les différences finies. D'ailleurs la similitude entre les deux méthodes numériques est montré à la figure suivante :

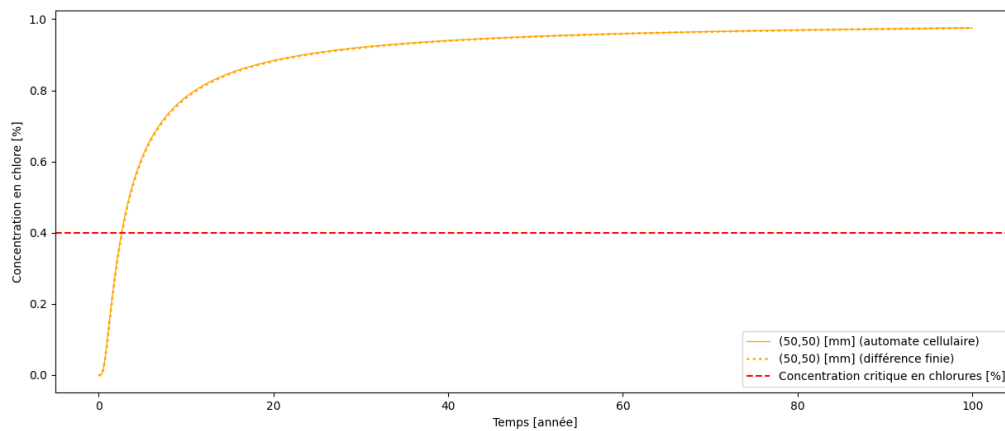


FIGURE 63 – Comparaison des solutions numériques en automate cellulaire et en différence finie

Une nouvelle fois, la concordance est parfaite entre les deux modèles, soulignant également les effets de bords prononcés par la seconde dimension.

#### 4.4.3 Implémentation Python : diffusion tridimensionnelle

##### □ Paramétrisation

Pour terminer la comparaison entre les deux méthodes numériques, l'implémentation tridimensionnelle peut être menée. Dans cette étude, nous considérons un parallélépipède rectangle en béton avec les dimensions suivantes : une épaisseur de  $Z = 500$  [mm] selon l'axe  $z$ , une hauteur de  $Y = 1200$  [mm] selon l'axe  $y$ , et une longueur de  $x = 2000$  [mm] selon l'axe  $x$ . Ces dimensions sont indexées respectivement par les indices  $i$ ,  $j$ , et  $k$ . La durée de l'étude est de  $T = 100$  années. Nous supposons également une concentration initiale  $C_s$  sur une portion de surface pleine ainsi que sur une autre surface partielle comme le montre l'illustration suivante :

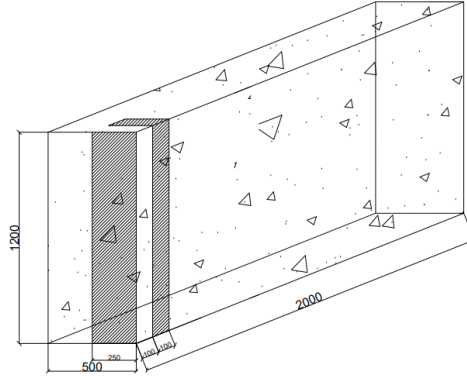


FIGURE 64 – Illustration du domaine

Les paramètres nécessaires pour cette étude, comprenant le coefficient de diffusion  $D$  et le coefficient en surface  $C_s$  décrits précédemment, sont résumés dans le tableau ci-dessous :

Paramètre	Valeur	Unité
$X$	2000	[mm]
$N_x$	200	[/]
$\Delta x$	10	[mm]
$Y$	1200	[mm]
$N_y$	120	[/]
$\Delta y$	10	[mm]
$Z$	500	[mm]
$N_z$	50	[/]
$\Delta z$	10	[mm]
$T$	100	[années]
$N_t$	1000	[/]
$\Delta t$	0.1	[années]
$D$	0.00001	[mm <sup>2</sup> /s]
$C_s$	1	%

TABLE 13 – Paramètres pour l'analyse de diffusion 3D

## □ Implémentation

Le code suivant reprend l'implémentation des automates cellulaires en Python dans le cas à 3 dimensions :

---

```

1      """Implémentation des automates cellulaires de la diffusion 3D"""
2
3      #Import
4      import numpy as np
5      import math
6      import matplotlib.pyplot as plt
7      import time
8
9      #Paramètres
10     X = 2000 # Longueur de béton (mm)
11     Y = 1200 # Longueur de béton (mm)
12     Z = 500 # Longueur de béton (mm)
13     T = 100 # Temps total (année)
14     D_app = 0.00001 # Coefficient de diffusion constant (mm^2/s)
15     C_s = 1 # Concentration de chlorure en surface (%)
16
17     # Coefficients d'évolution
18     phi_0 = 1/2
19     phi_i = (1 - phi_0)/(6)
20
21     # Discrétisation
22     Nx = 40 # Nombre de points spatiaux
23     Ny = 80 # Nombre de points spatiaux
24     Nz = 100 # Nombre de points spatiaux
25     Deltax = X/(Nx) # Incrément spatial
26     Deltay = Y/(Ny) # Incrément spatial
27     Deltaz = Z/(Nz) # Incrément spatial
28     Deltat = (1/(D_app*6))*((1-phi_0)*Deltax**2)*(1/(365*24*3600)) # Critère de stabilité
29     Deltat = 0.05 # Incrément temporel retenu
30     Nt = int((T/Deltat) + 1) # Nombre de points temporels
31     C_num = np.zeros((Nx,Ny,Nz,Nt)) # Matrice des concentrations C(x,t) initié à 0
32
33     # Conditions de bord
34     C_num[0,:,25:,:] = C_s # Condition en C[0, y, 250:500, t]
35     C_num[10:15,,-1,:] = C_s # Condition en C[100:150, y, 500, t]
36     C_num[10:15,-1,25:,:] = C_s # Condition en C[100:150, 1200, 250:500, t]
37
38     # Listes
39     x = np.linspace(0, X, Nx) # Liste des valeurs de positions (mm)
40     y = np.linspace(0, Y, Ny) # Liste des valeurs de positions (mm)
41     z = np.linspace(0, Z, Nz) # Liste des valeurs de positions (mm)
42     t = np.linspace(0, T, Nt) # Liste des valeurs de temps (année)
43
44     # Mise à jour de la liste concentration C[x, y, z, t]
45     t0 = time.time() # Temps initial processus
46     # Boucles for
47     for n in range(Nt-1):
48         for i in range(1, Nx-1):
49             for j in range(1, Ny-1):
50                 for k in range(1, Nz-1):
51                     C_num[i, j, k, n+1] = (phi_0 * C_num[i, j, k, n]) + (phi_i * C_num[i-1, j, k, n]) +
52                     (phi_i * C_num[i+1, j, k, n]) + (phi_i * C_num[i, j-1, k, n]) + (phi_i * C_num[i, j+1, k, n]) +

```

---

---

```

53         (phi_i * C_num[i, j, k-1, n]) + (phi_i * C_num[i, j, k+1, n])
54     t1 = time.time() # Temps final processus

```

---

### □ Optimisation du code

A nouveau, le "slicing" peut être appliqué sur les boucles spatiales. Au départ, les boucles spatiales et temporelles sont décrites :

---

```

1     # Boucles for
2     for n in range(Nt-1):
3         for i in range(1, Nx-1):
4             for j in range(1, Ny-1):
5                 for k in range(1, Nz-1):
6                     C_num[i, j, k, n+1] = (phi_0 * C_num[i, j, k, n]) + (phi_i * C_num[i-1, j, k, n]) +
7                     (phi_i * C_num[i+1, j, k, n]) + (phi_i * C_num[i, j-1, k, n]) + (phi_i * C_num[i, j+1, k, n]) +
8                     (phi_i * C_num[i, j, k-1, n]) + (phi_i * C_num[i, j, k+1, n])

```

---

Après optimisation, le "slicing" est appliqué sur la boucle spatiale :

---

```

1     # Slicing
2     ffor n in range(Nt-1):
3         C_num[1:Nx-1,1:Ny-1,1:Nz-1,n+1] = (phi_0 * C_num[1:Nx-1,1:Ny-1,1:Nz-1,n]) +
4         ((phi_i*C_num[:Nx-2,1:Ny-1,1:Nz-1,n]) + (phi_i*C_num[2:Nx,1:Ny-1,1:Nz-1,n]) +
5         (phi_i*C_num[1:Nx-1,:Ny-2,1:Nz-1,n]) + (phi_i*C_num[1:Nx-1,2:Ny,1:Nz-1,n]) +
6         (phi_i*C_num[1:Nx-1,1:Ny-1,:Nz-2,n]) + (phi_i*C_num[1:Nx-1,1:Ny-1,2:Nz,n]))

```

---

□ Résultats

En considérant la paramétrisation donnée en table 13, la figure 65 illustre les évolutions temporelles des concentrations en chlorures pour différentes profondeurs avec les schémas numériques explicites :

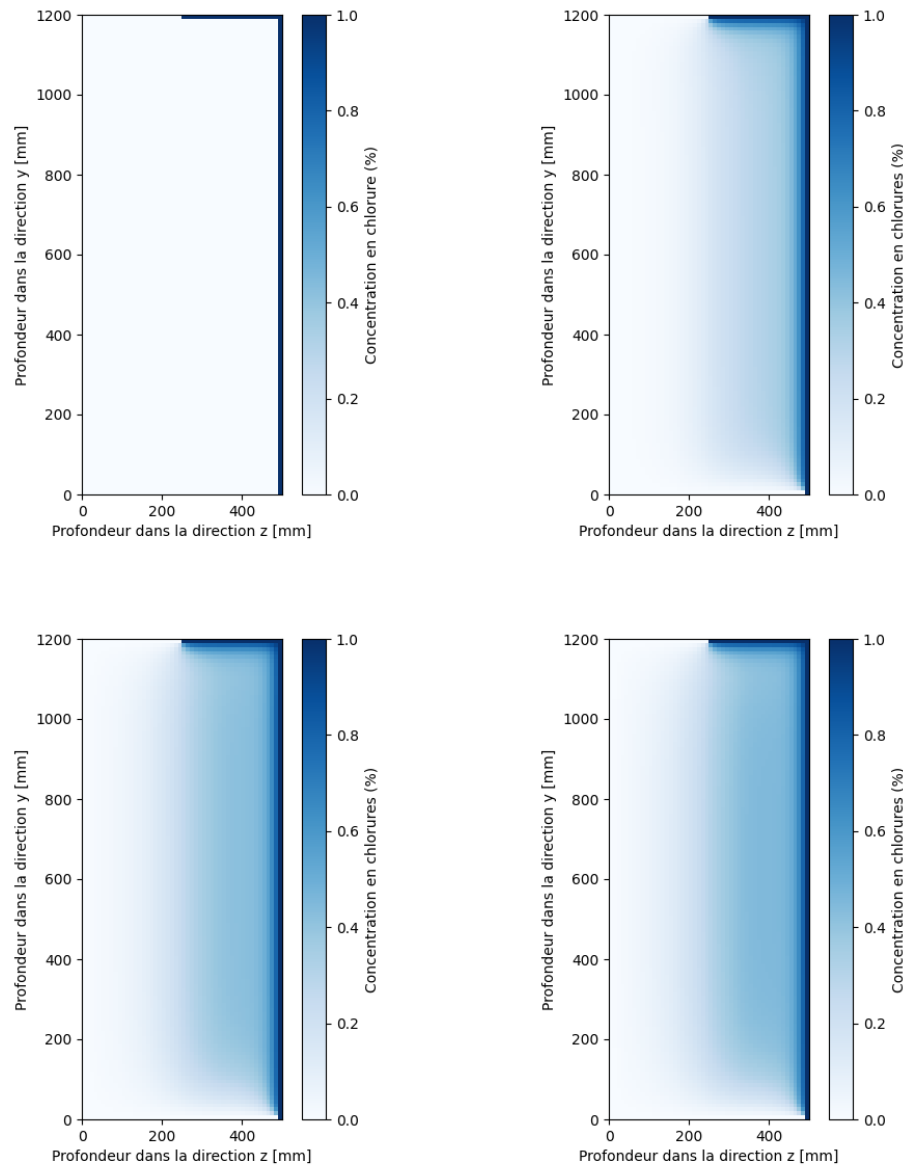


FIGURE 65 – Résultats numériques (automate cellulaire) de la diffusion 3D : après 0 ans, 20 ans, 50 ans et 100 ans

On constate une diffusion homogène partant des bords où une concentration de bord existe tout comme nous avons pu le constater auparavant. A cela vient s'ajouter l'effet de la diffusion sur le bord en  $x = 0[mm]$  qui se marque de plus en plus au fur et à mesure que l'on avance dans le temps au centre de la section.

Pour être plus précis, nous pouvons tracer l'évolution temporelle de plusieurs points particuliers  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$  en  $(x,y,z)$  [mm] au sein de la même tranche de section située à 10 cm du bord  $x = 0$ .

- $P_1 = (100, 400, 50)$  [mm]
- $P_2 = (100, 400, 450)$  [mm]
- $P_3 = (100, 1150, 450)$  [mm]

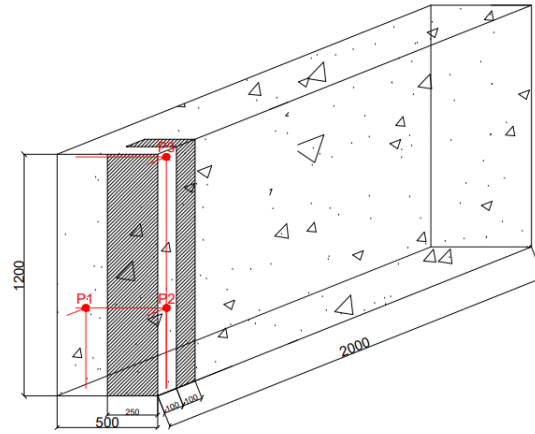


FIGURE 66 – Domaine avec ses conditions de bord et le point à l'étude

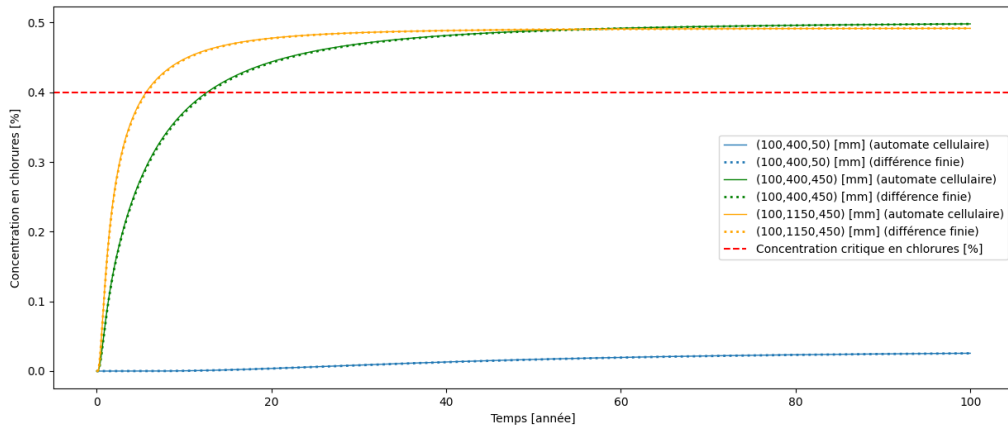


FIGURE 67 – Comparaison des solutions numériques en automate cellulaire et en différence finie

Une nouvelle fois, on retrouve une concordance parfaite entre les 3 paires de courbes, ce qui prouve au dépit des 3 dimensions analysées la validité des modèles numériques en automates cellulaires pour la modélisation des chlorures au sein du béton.

### 4.5 Comparaisons des deux méthodes

En revisitant les sections précédentes, les comparaisons entre les deux méthodes numériques choisies pour l'analyse révèlent une similarité très marquée à travers toutes les dimensions. Dans cette comparaison, nous examinons les mêmes domaines respectifs étudiés dans les sous-sections précédentes et nous présentons l'analyse temporelle de trois points particuliers en fonction des dimensions considérées. Plus précisément, pour le cas unidimensionnel, nous étudions la concentration en chlorures  $C(x, t)$  au point  $x = 50$  [mm] pour le domaine présenté en section 4.4.1. Pour le cas bidimensionnel, nous analysons la concentration en chlorures  $C(x, y, t)$  au point  $(x = 50, y = 50)$  [mm] pour le domaine présenté en section 4.4.2. Enfin, pour le cas tridimensionnel, nous étudions la concentration en chlorures  $C(x, y, z, t)$  au point  $(x = 100, y = 400, z = 450)$  [mm] pour le domaine présenté en section 4.4.3. Les graphiques suivants illustrent ces comparaisons pour les trois dimensions considérées :

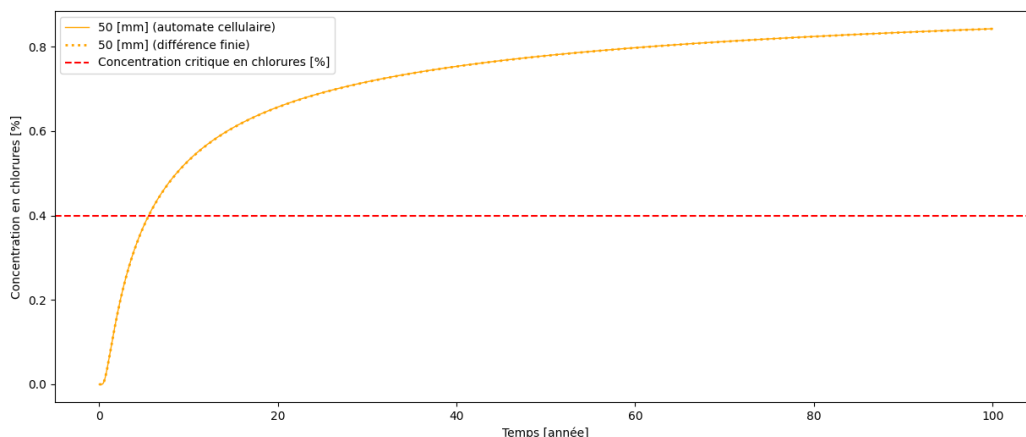


FIGURE 68 – Comparaison entre les différences finies et les automates cellulaires 1D

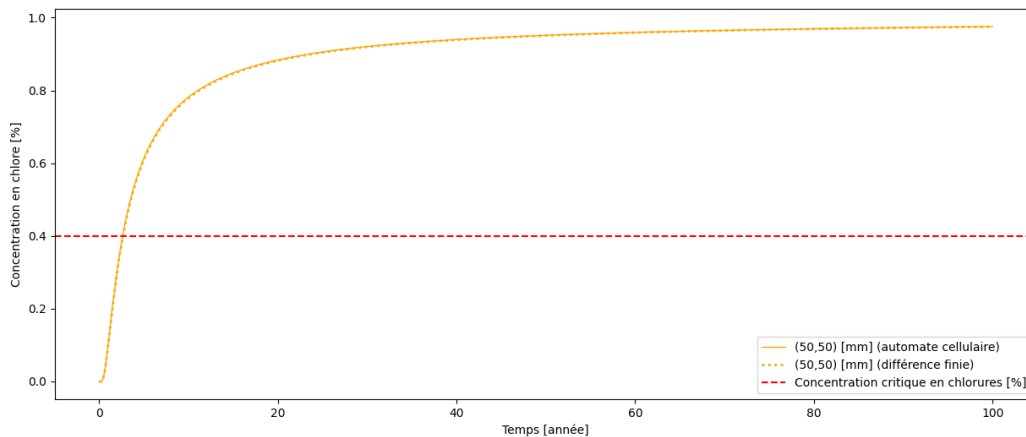


FIGURE 69 – Comparaison entre les différences finies et les automates cellulaires 2D

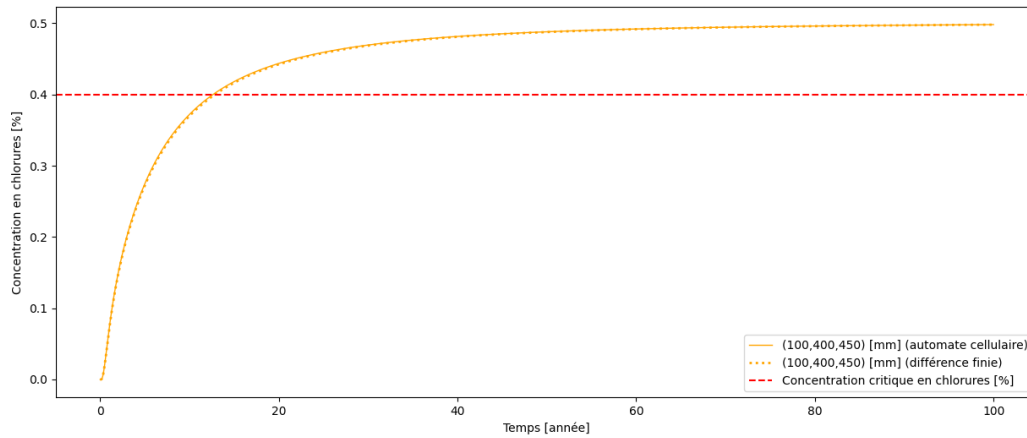


FIGURE 70 – Comparaison entre les différences finies et les automates cellulaires 3D

Les trois dernières figures 68, 69 et 70 illustrent une concordance remarquable entre les deux méthodes numériques étudiées. Concernant les performances en terme de vitesse d'exécution, avec l'application du "slicing", les automates restent cependant une meilleure approche plus rapide étant donné le moindre nombre d'opérations à réaliser. Ces différences sont minimes et sont exposées dans le tableau 14.

Dimension	Temps d'exécution [s]	
	Différences finies	Automates cellulaires
1D	0.023	0.016
2D	2.09	1.62
3D	594.01	417.96

TABLE 14 – Comparaison des temps de simulation en 1D, 2D et 3D pour les différences finies et les automates cellulaires

Le tableau 14 montre que la différence en termes de temps de simulation s'accroît progressivement avec l'augmentation de la dimension.

## 4.6 Critique aux automates cellulaires

Cette forte similarité entre les automates cellulaires et les différences finies suggère une possible filiation entre ces deux approches. En approfondissant cette hypothèse, nous pouvons explorer l'idée de remplacer l'incrément temporel  $\Delta t$  des différences finies par l'incrément de temps imposé par la condition de régularité des automates cellulaires. Cela nécessite de réécrire les équations des différences finies en tenant compte d'un incrément spatial égal dans les trois dimensions  $\Delta = \Delta x = \Delta y = \Delta z$  comme cela fut le cas pour l'ensemble de l'étude. Cette réécriture permettrait de vérifier si les méthodes des automates cellulaires et des différences finies convergent vers des résultats similaires ou s'il existe des différences notables. Voici l'approche mathématique de cette substitution :

$$\mathbf{1D} : \frac{C_i^{n+1} - C_i^n}{\Delta t} = D \cdot \frac{C_{i-1}^n - 2 \cdot C_i^n + C_{i+1}^n}{\Delta^2} \quad (81)$$

$$\downarrow \Delta t = \frac{1 - \phi_0}{2 \cdot d} \cdot \left(\frac{\Delta^2}{D}\right) \quad (82)$$

$$C_i^{n+1} = C_i^n + \frac{1 - \phi_0}{2} \cdot (C_{i-1}^n - 2 \cdot C_i^n + C_{i+1}^n) \quad (83)$$

$$= \frac{C_i^n}{2} + \frac{1}{4} \cdot (C_{i-1}^n + C_{i+1}^n) \quad (84)$$

$$\mathbf{2D} : \frac{C_{i,j}^{n+1} - C_{i,j}^n}{\Delta t} = D \cdot \left( \frac{C_{i-1,j}^n - 2 \cdot C_{i,j}^n + C_{i+1,j}^n}{\Delta^2} + \frac{C_{i,j-1}^n - 2 \cdot C_{i,j}^n + C_{i,j+1}^n}{\Delta^2} \right) \quad (85)$$

$$\downarrow \Delta t = \frac{1 - \phi_0}{2 \cdot d} \cdot \left(\frac{\Delta^2}{D}\right) \quad (86)$$

$$C_{i,j}^{n+1} = C_{i,j}^n + \frac{1 - \phi_0}{4} \cdot (C_{i-1,j}^n - 2 \cdot C_{i,j}^n + C_{i+1,j}^n + C_{i,j-1}^n - 2 \cdot C_{i,j}^n + C_{i,j+1}^n) \quad (87)$$

$$= \frac{C_{i,j}^n}{2} + \frac{1}{8} \cdot (C_{i-1,j}^n + C_{i+1,j}^n + C_{i,j-1}^n + C_{i,j+1}^n) \quad (88)$$

$$\mathbf{3D} : \frac{C_{i,j,k}^{n+1} - C_{i,j,k}^n}{\Delta t} = D \cdot \left( \frac{C_{i-1,j,k}^n - 2 \cdot C_{i,j,k}^n + C_{i+1,j,k}^n}{\Delta^2} + \frac{C_{i,j-1,k}^n - 2 \cdot C_{i,j,k}^n + C_{i,j+1,k}^n}{\Delta^2} + \right. \quad (89)$$

$$\left. \frac{C_{i,j,k-1}^n - 2 \cdot C_{i,j,k}^n + C_{i,j,k+1}^n}{\Delta^2} \right) \quad (90)$$

$$\downarrow \Delta t = \frac{1 - \phi_0}{2 \cdot d} \cdot \left(\frac{\Delta^2}{D}\right) \quad (91)$$

$$C_{i,j,k}^{n+1} = C_{i,j,k}^n + \frac{1 - \phi_0}{6} \cdot (C_{i-1,j,k}^n - 2 \cdot C_{i,j,k}^n + C_{i+1,j,k}^n + C_{i,j-1,k}^n - 2 \cdot C_{i,j,k}^n + C_{i,j+1,k}^n + \quad (92)$$

$$C_{i,j,k-1}^n - 2 \cdot C_{i,j,k}^n + C_{i,j,k+1}^n) \quad (93)$$

$$= \frac{C_{i,j,k}^n}{2} + \frac{1}{12} \cdot (C_{i-1,j,k}^n + C_{i+1,j,k}^n + C_{i,j-1,k}^n + C_{i,j+1,k}^n + C_{i,j,k-1}^n + C_{i,j,k+1}^n) \quad (94)$$

Les développements mathématiques montrent que les relations 84, 88 et 94 sont identiques à celles introduites en section 4.4 pour les automates cellulaires dans toutes les dimensions respectives. Bien que les références consultées n'indiquent pas explicitement cette similitude, il serait incorrect de les considérer comme des entités totalement indépendantes. En réalité, les automates cellulaires peuvent être vus comme une extension naturelle des méthodes de différences finies pour l'étude de la numérisation du phénomène de diffusion des chlorures. La diffusion est un problème régulé par des lois physiques existantes, mais les automates cellulaires sont généralement très utiles pour décrire des phénomènes où ces lois ne sont pas connues, contrairement aux méthodes de différences finies.

De nombreux articles dans la littérature ne mentionnent pas explicitement que la méthode des automates cellulaires comme utilisée dans le cas de la diffusion des chlorures, n'est pas une innovation, mais une adaptation des différences finies en utilisant des simplifications mathématiques pour passer de l'une à l'autre. Pour n'en citer que quelques uns Podrouzek [74], Al-Samawi [97] et Zhu [62].

## 5 Poutres Gerber

Cette section présente la structure choisie pour l'application pratique : les poutres Gerber, fréquemment utilisées dans de nombreux ponts. Elle aborde la description théorique de ces éléments particuliers, les différents modes de rupture potentiels associés aux fissurations, ainsi que la méthode bielle-tirant utilisée pour élaborer les schémas d'armatures constituant la poutre. Cette section théorique prépare le terrain pour l'évaluation et l'analyse de l'évolution temporelle de la charge verticale ultime que ces poutres peuvent supporter lorsqu'elles sont soumises aux agressions environnementales.

### 5.1 Description

L'ensemble de cette étude est directement applicable à des situations réelles, telles que les poutres Gerber plus connues sous le nom de "dapped-end beams" (DEB), "Gerber saddles" ou "half-joint" en anglais. Elles sont utilisées comme éléments structuraux au sein de nombreux ponts et sont une innovation dans la construction des tabliers de ponts, visant à simplifier la conception. Cependant, les DEB présentent une vulnérabilité significative en cas de défaillance des joints de dilatation, ou même la migration de chlorures due à un mauvais drainage des eaux amorçant ainsi le processus de corrosion de l'armature. Cette détérioration peut induire des contraintes excessives, compromettant la sécurité structurelle. De plus, leur emplacement difficile d'accès au-dessus des voies de circulation rend l'inspection et l'entretien complexes.

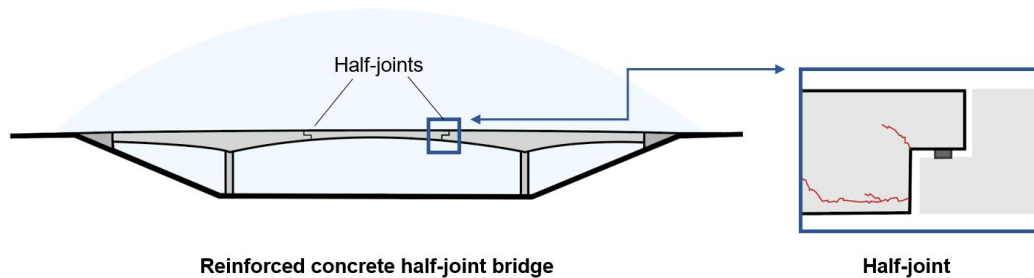


FIGURE 71 – Illustration d'une structure type "half-joint" [15]

Ce détail de construction constitue actuellement une problématique majeure pour de nombreux ponts. Il représente un point critique où presque toutes les surfaces exposées montrent des signes d'écoulement, avec des zones de stagnation qui favorisent les attaques par les chlorures. Ces surfaces sont altérées à divers degrés, notamment par l'expulsion localisée de la couche de béton, entraînant une perte d'enrobage et la désintégration du béton en surface. Ces manifestations visibles de corrosion de l'armature ont un impact significatif sur l'intégrité structurelle de l'ensemble.



FIGURE 72 – Exemple d'une DEB dans un pont routier [3]

Les ponts routiers devraient évacuer l'eau de la chaussée par le biais de drains latéraux, tandis que les joints de dilatation sur les poutres Gerber devraient être étanches pour empêcher toute infiltration d'eau. En pratique, le manque de maintenance générale, ainsi que le défaut d'entretien et de conception des drains et des joints, entraînent systématiquement des infiltrations d'eau, causant la dégradation des éléments structurels sous-jacents.



FIGURE 73 – Exemple d'une détérioration d'une DEB dans un pont routier [46]

Les figures 72 et 73 mettent en évidence que ce sont les parties inférieures des poutres Gerber, là où repose l'autre élément de la poutre, qui subissent le plus de dégâts. En effet, cette partie de l'élément possède une surface plane favorisant la stagnation de l'eau issue du drainage. Ces zones critiques revêtent une importance particulière dans le cadre de la modélisation de la diffusion des chlorures. En pratique, l'étude des éléments supérieurs se révèle pertinente pour évaluer les ruptures et les fissurations potentielles sous charge, tandis que celle des éléments inférieurs s'avère utile dans la modélisation de la dégradation due à la diffusion des chlorures ou à d'autres agents agressifs.

Pour revenir au contexte de l'application, ce phénomène affecte particulièrement l'Italie, où de nombreux ponts ont été construits le long du fleuve Pô dans les années 1960, et certains ont connu des effondrements ces dernières années.



FIGURE 74 – Effondrements de plusieurs ponts routiers (Italie) : Annone [1], Ancona et Akragas [5]

Un autre événement tragique a marqué l'effondrement d'un pont routier au Canada, où une structure comportant des poutres Gerber a cédé. La commission d'enquête [98] a mis en lumière plusieurs inspections antérieures :



FIGURE 75 – Photographie du détail pendant les inspections en 1992 (gauche) et en en 2004 (droite) [98]

La figure 75 met en évidence l'évolution sur 12 ans des marques d'écoulement laissées par la dégradation. Plusieurs années après les inspections, le pont s'est effondré à l'articulation de la poutre Gerber. La commission a identifié plusieurs causes principales ayant contribué à la défaillance du viaduc :

- Un soutien inadéquat et une installation incorrecte des barres d'armature pour la conception, ayant créé un "plan de faiblesse" où des fissures se sont finalement produites
- L'utilisation de béton de qualité médiocre pour la construction du viaduc
- Le tout exacerbé par la corrosion



FIGURE 76 – Photographie de l'effondrement du viaduc de la Concorde [98] (Canada)

Sur le plan structurel, ce type de configuration présente une zone critique en termes de contraintes, principalement en raison du changement abrupt de la hauteur et de la charge verticale concentrée. Cette variation des contraintes n'est pas uniforme sur toute la longueur de l'élément, mais est confinée à une certaine distance  $x$  à partir de l'articulation, conforme au théorème de Saint-Venant qui définit la portée de la discontinuité. Pour ce type de configuration, la littérature estime une longueur  $x$  valant la hauteur de la section pleine comme illustré en figure 77. En dehors de cette zone, les contraintes suivent une distribution linéaire, ce qui permet leur étude en utilisant les hypothèses de Bernoulli selon lesquelles les sections planes restent planes après déformation. Cependant, à l'emplacement de la discontinuité, qui intéresse notre étude, ces mêmes lois ne sont plus applicables ; c'est pourquoi nous recourons à la méthode bielle-tirant ou "strut-and-tie" (ST) en anglais qui utilise les concepts des treillis. Cette méthode est décrite comme une procédure de conception rationnelle pour le calcul de ferrailage dans les régions de discontinuités des structures en béton armé.

Pour distinguer ces zones distinctes, nous les divisons en régions "D" (pour "Discontinuité") et "B" (pour "Bernoulli"), comme illustré ci-dessous :

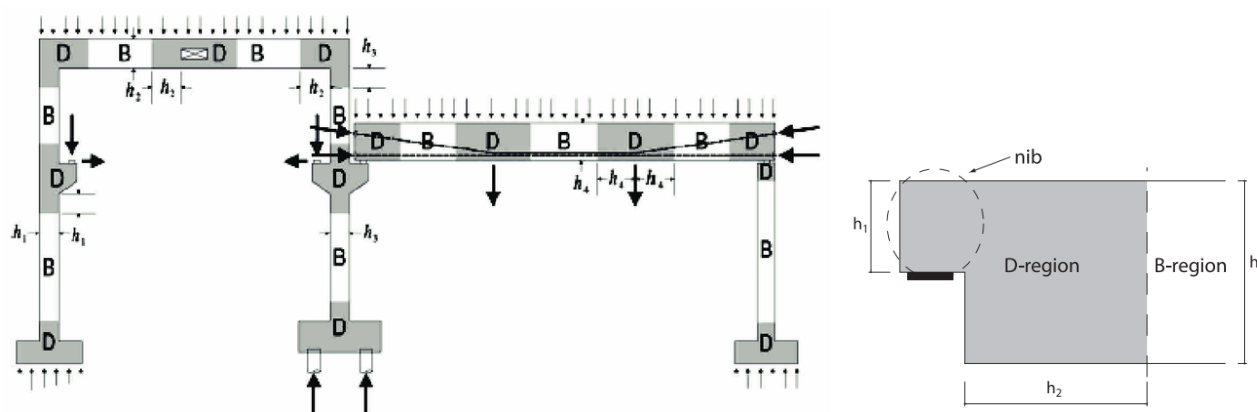


FIGURE 77 – Illustration de régions D et B sur une structure [51] (gauche) et au sein d'une DEB en particulier (droite)

Les recherches de Nguyen [93] offrent une perspective nouvelle sur les zones présentant une distribution de contraintes non linéaire. Cette analyse révèle une similarité entre les configurations des DEB et le cas (a) des poutres présentant également un changement abrupt de hauteur illustré à la figure 78 :

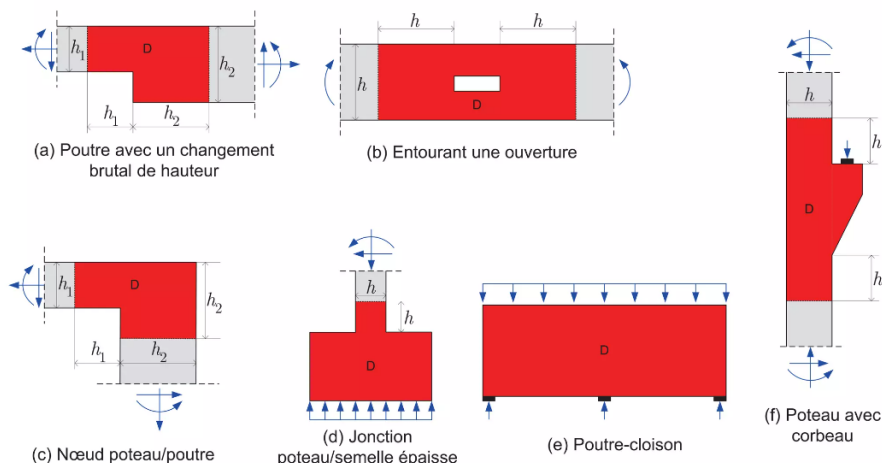


FIGURE 78 – Illustration de régions D sur des structures types [93]

Le fonctionnement des DEB est analogue à celui d'une console intégrée dans une colonne sur le plan schématique, mais diffère quant à la répartition des efforts. Dans le cas d'une console, la force de compression induite par la charge verticale externe est absorbée et équilibrée par les armatures axiales de la colonne. Cependant, dans le cas des DEB, cette même force à l'extrémité est équilibrée par une force de traction dans les armatures verticales, commençant dès le début de la section pleine, comme illustré à la figure suivante :

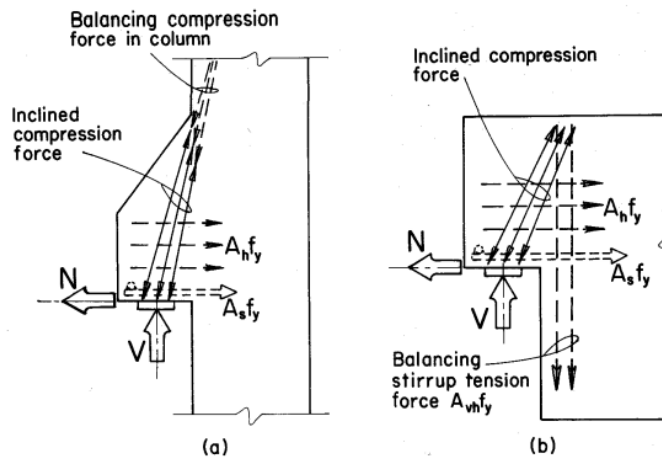


FIGURE 79 – Comparaison des systèmes de force : (a) dans une console de colonne et (b) dans une DEB [60]

L'illustration 79 met en évidence l'incorporation du ferrailage en bielle-tirant pour reprendre les efforts verticaux et horizontaux et les transférer vers la partie pleine de la section. Les DEB peuvent être renforcées selon l'une des deux principales conceptions présentées ci-dessous à la figure 94. En Europe, on a souvent recours à un renforcement diagonal afin de transférer une partie de la charge appliquée à la section pleine hauteur de la poutre. Aux États-Unis, une approche plus fréquente implique l'utilisation d'un renforcement en "maillage" substantiel dans le bout d'appui avec des plaques d'ancrage pour garantir une fixation solide ainsi qu'un renforcement conséquent vertical ou "hanger reinforcement" en anglais, au début de grande section.

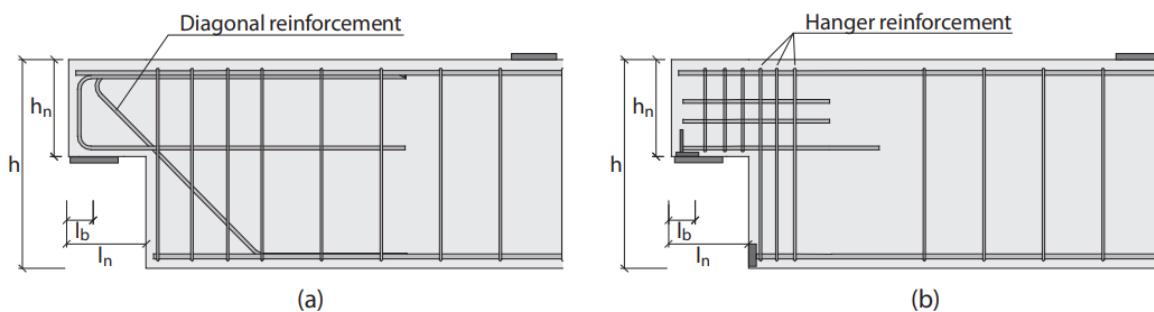


FIGURE 80 – Approches de conception de poutre Gerber avec des dispositions de renforcement différentes [35]

Ces schémas de renforcement reposent sur les méthodes de bielle-tirant ou "Strut and tie" en anglais, décrit plus tard dans l'étude, qui fournissent une base pour la conception de l'acier dans la région D autour du bout d'appui.

Les mêmes armatures sont également conçues pour la poutre Gerber qui nous intéresse, notamment pour celle située en dessous où repose statiquement l'autre poutre Gerber. En effet, une symétrie peut être appliquée pour obtenir le schéma d'armatures. Desnerck et al. [34] ont mené une étude sur l'impact de la réduction des armatures sur l'effort vertical résistant pour ce type de configuration de poutre.

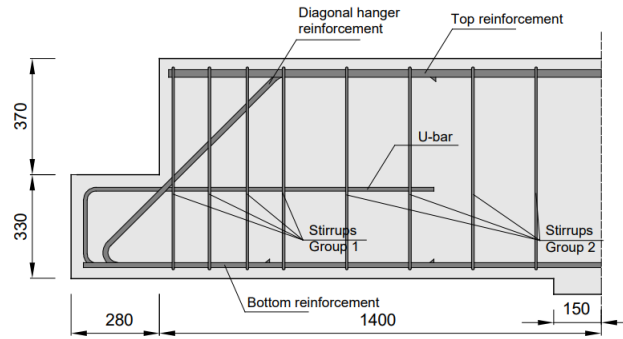


FIGURE 81 – Géométrie et schéma d'armature de la poutre Gerber étudié par Dersnerck et al. [34]

A titre informatif, ce type de renforcement en bielle-tirant sera également présent pour les autres formes de structures constituant une région de discontinuité :

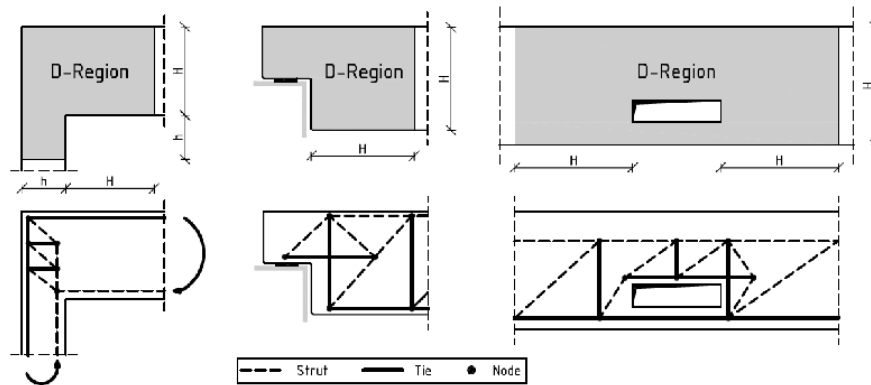


FIGURE 82 – Autre forme en schéma bielle-tirant [6]

## 5.2 Modes de rupture et fissuration

Les poutres Gerber suscitent un vif intérêt dans la littérature et offrent un vaste champ d'exploration pour concevoir les schémas d'armatures souhaités. Dans ce mémoire, il est crucial d'examiner les divers modes de rupture possibles et les phénomènes de fissuration qui en résultent. Théoriquement, Shakir et al. [52] décrivent cinq types de fissures, chacun associé à un mode de rupture spécifique pouvant survenir au cours du cycle de charge des DEB.

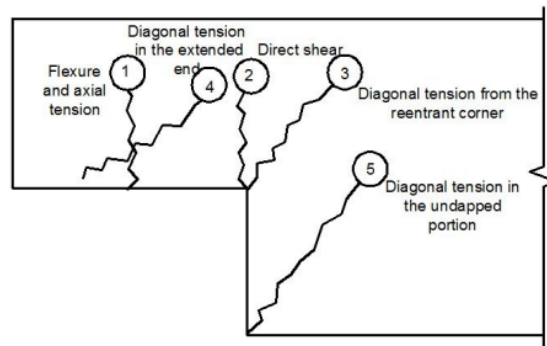


FIGURE 83 – Fissures rencontrées au sein d'une poutre "dapped-end" [52]

En outre, des recherches effectuées sur des tests en laboratoire des DEB [35] ont mis en évidence trois modes potentiels de rupture confirmant l'étude de Shakir et al. [52] : d'abord, une défaillance au niveau de la pointe (marqué par ③), caractérisée par une fissure débutant depuis la pointe interne et s'étendant selon un angle incliné par rapport à l'axe longitudinal de la poutre; ensuite, une défaillance par flexion affectant toute la section en profondeur typique d'une poutre en flexion. De plus, un troisième mode de rupture a été identifié, provenant du coin inférieur de la section complète (marqué par ⑤). Au fur et à mesure que les fissures s'ouvrent, l'éclatement et l'écaillage du béton se produisent notamment dans les zones au dessus des barres en étriers dans la section pleine.

En se référant aux deux modèles présentés à la figure 81, l'article de Shakir et al. [52] souligne différentes recherches justifiant un meilleur contrôle de la fissuration avec les barres diagonales plutôt qu'avec les barres verticales. Ce même constat a également été souligné par Clark et Thorogood [70], qui ont observé des fissures plus larges en leur absence. Une autre étude [54], utilisant la méthode des éléments finis se penche sur l'impact des schémas d'armatures sur les résultats obtenus. Cette étude explore quatre modèles distincts : un modèle comportant tous les éléments d'armature, un modèle sans barres de type u, un modèle sans barres diagonales et un modèle avec un nombre réduit d'étriers de renforcement. Les résultats relatifs à la fissuration sont ensuite présentés :

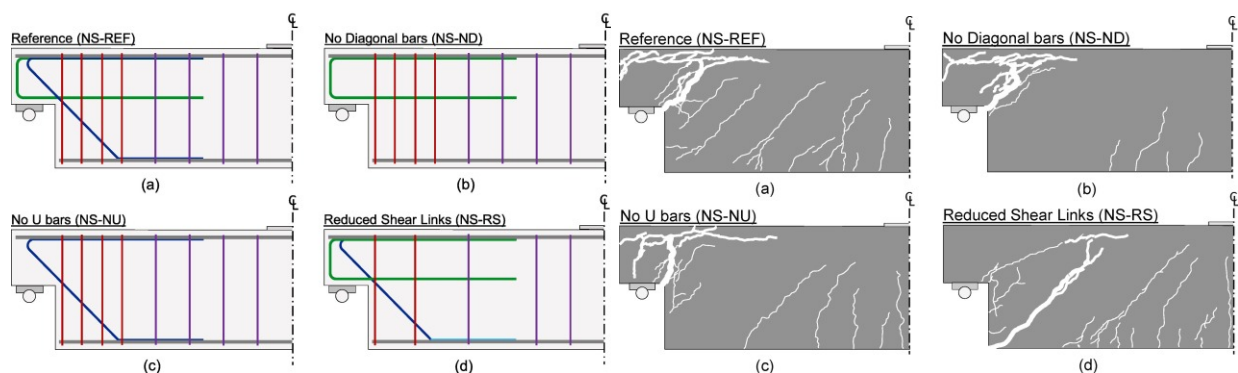


FIGURE 84 – Schéma des armatures de poutres Gerber testées et les fissures associées [54]

Plusieurs résultats sont à discuter :

- Les 3 modèles avec barre diagonale illustrent une fissuration de type ③ moindre que sans barre. De plus, la capacité de chargement par rapport à la déflexion en mi-portée est deux fois supérieure au cas sans barre diagonale (voir figure 85).
- L'élément u n'apporte que peu d'impact sur la fissuration (voir figure 85).
- Les barres verticales de cisaillement en section pleines génèrent une meilleure fissuration au sein du point d'appui, mais conduisent à une rupture de cisaillement en section pleine plus rapide (voir figure 85).

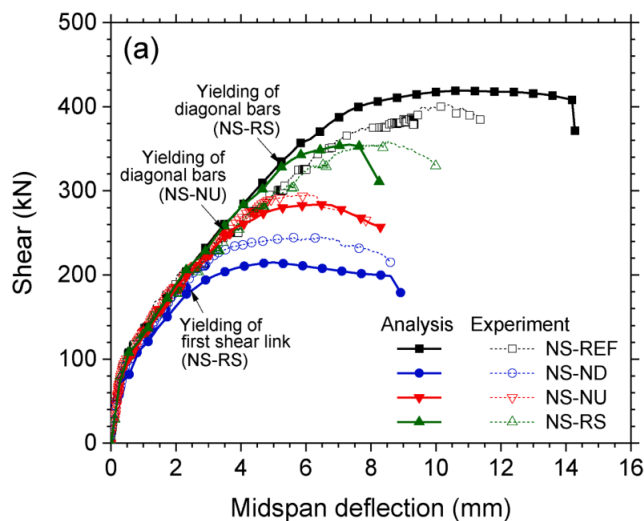


FIGURE 85 – Comparaison de la réponse charge-déformation prédite et observée pour des cas de DEB avec différentes configurations de barres [54]

Par ailleurs, le choix du type de support est également crucial ; un support rigide favorise un motif de fissure moins étendu et des fissures moins larges. Ces diverses études convergent vers une conclusion commune : la nécessité d'un ancrage adéquat des barres longitudinales et d'un nombre suffisant d'étriers.

Mattock et Chan [60] explorent néanmoins le comportement et la fiabilité d'une DEB sans barre diagonale, remplacée par une série de barres verticales ("hanger reinforcement") près de l'intersection des deux sections, en suivant le modèle américain et en supposant 2 modes de fissuration diagonaux.

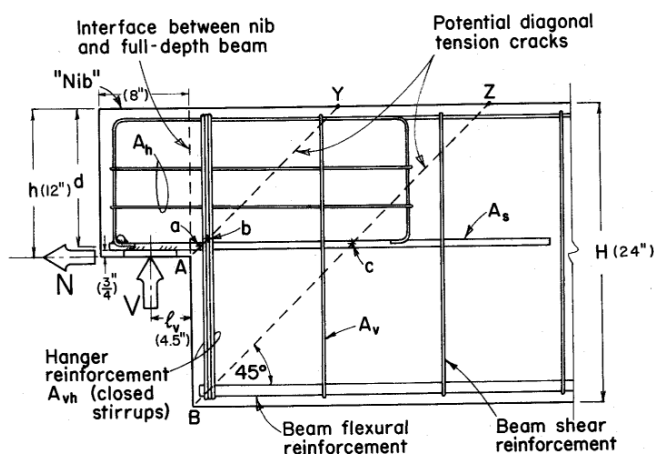


FIGURE 86 – Renforcement typique d'une DEB et localisation des fissures diagonales potentielles [60]

Ce même article propose des recommandations quant aux calculs des sections d'armatures pour ce type de configuration qui nous sera utile ultérieurement au sein de l'application.

### 5.3 Méthode bielle-tirant

La méthode bielle-tirant ou plus connue sous le nom de "strut and tie method" (STM) en anglais est souvent privilégiée par les ingénieurs pour étudier et concevoir les zones où des discontinuités surviennent, telles que près de changements brusques de géométrie ou à proximité de points d'application de forces concentrées, où une distribution non linéaire des contraintes est observée, comme c'est le cas pour les poutres Gerber. C'est d'ailleurs le principe utilisé pour modéliser les armatures de cisaillement dans une poutre en béton armé. Bontemps [21] met en évidence que la méthode privilégie la sécurité en se basant sur le théorème plastique inférieur : la charge verticale ultime calculée doit être inférieure à la véritable capacité de la structure. Cela implique également que la structure est suffisamment ductile pour redistribuer la charge appliquée.

La méthode des bielles et tirants (STM) modélise la zone de discontinuité à l'aide d'un treillis composé de plusieurs éléments :

- Les bielles : représentent les zones de contraintes de compression uniaxiale, souvent en béton mais parfois également constituées d'armatures de compression.
- Les tirants : modélisent la traction dans les armatures, assurant la reprise des efforts de traction.
- Les noeuds : représentent les points de rencontre des bielles, des tirants, des forces ou des réactions d'appuis, où l'équilibre doit être respecté.

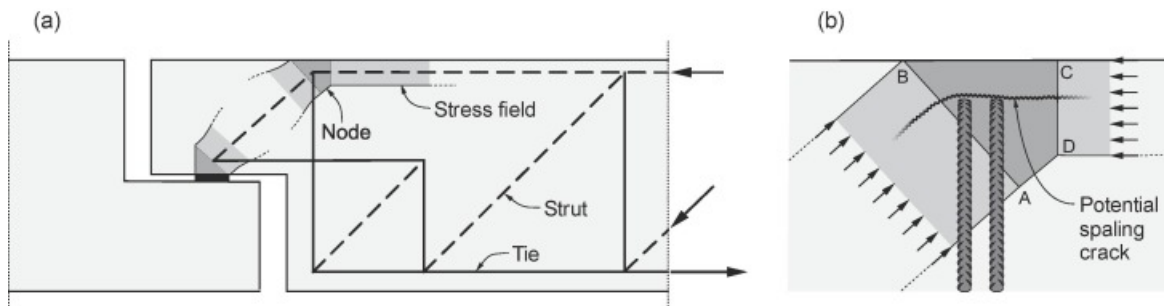


FIGURE 87 – DEB : (a) géométrie typique avec la méthode bielle-tirant et (b) détail du renforcement vertical. [47]

Plusieurs directives existent pour les bielles, l'inclinaison doit être de minimum  $25^\circ$  selon l'ACI318 tandis que l'Eurocode 2 suggère des valeurs avoisinant les  $45^\circ$  comme c'est le cas pour les bielles dans les calculs en contraintes linéaires dans le béton armé. Les barres de tension ou tirants doivent être agencés et alignés autant que possibles.

En ce qui concerne les noeuds, nous avons déjà souligné qu'ils sont les points de jonction entre les bielles et les tirants. Selon le nombre d'intersections variant généralement de deux à quatre, la littérature décrit plusieurs modèles, par exemple, quatre modèles existent lorsqu'il y a trois intersections.

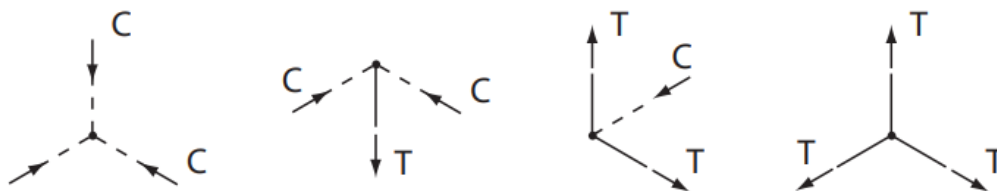


FIGURE 88 – Différents types de noeuds pour 3 intersections [36]

Les noeuds sont soumis à un état de contraintes multidirectionnelles, étant donné qu'ils représentent la région d'intersection d'un nombre multiple de bielles compressives et de tirants en traction.

La figure 87 met également en évidence un détail crucial concernant les renforcements orthogonaux, ou "hanger reinforcements". Cette région est sujette à un fort champ de contraintes en raison de sa nature nodale, ce qui peut entraîner un écaillage du béton, comme observé dans diverses études. Cela concerne également les autres noeuds.

Par conséquent, la littérature préconise une longueur d'ancrage  $l_b$  adéquate pour résoudre ce problème. Les codes s'accordent généralement sur l'ancrage à partir du point où la force de tension résultante entre dans la zone nodale étendue, comme illustré à la figure 89 ci-contre.

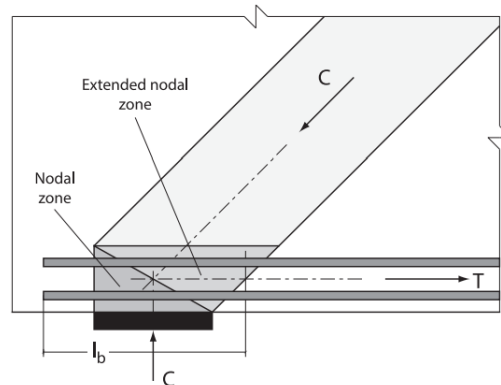


FIGURE 89 – Zone nodale du modèle bielle-tirant [36]

Pour une poutre Gerber donnée, les modèles de bielle-tirant ne sont pas uniques, mais représentent une multitude de configurations d'équilibre possibles, pourvu que l'équilibre et le critère de limite élastique soient respectés. Les charges externes appliquées et les forces de réaction doivent être en équilibre avec la distribution supposée des forces internes que décrivent les contraintes dans les bielles, les tirants et les noeuds doivent rester dans des limites acceptables. Toutefois, la littérature identifie généralement trois modèles de bielle-tirant dans les DEB, les distinguant par leur schéma d'armatures : diagonaux, orthogonaux ou combinés et présentent différentes complexités.

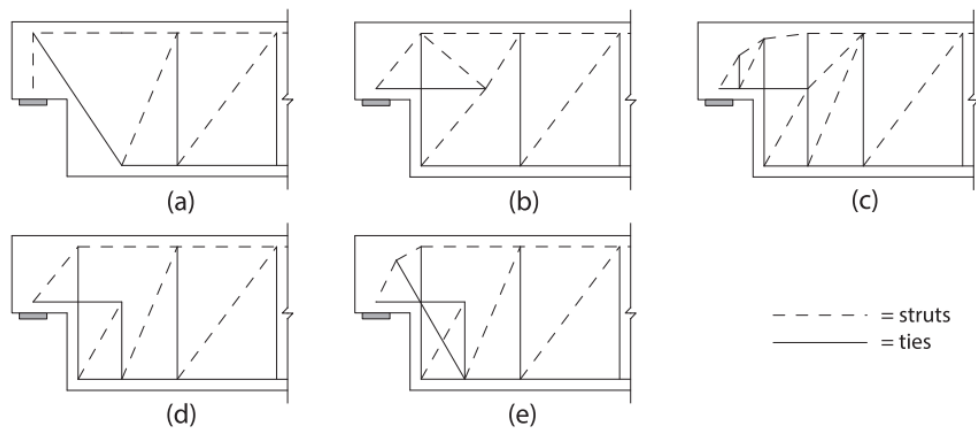


FIGURE 90 – Modèles courants de bielle-tirant dans les DEB : (a) modèle diagonal, (b), (c) et (d) modèles orthogonaux, et (e) une combinaison type. [36]

Une fois le schéma d'armature choisi, le dimensionnement des armatures peut être effectué en équilibrant les forces sur chaque noeud. Dans les cas simples, lorsque le modèle est isostatique, un calcul manuel est possible, mais dans les situations plus complexes impliquant des schémas hyperstatiques, la résolution nécessite souvent des modèles empiriques ou l'utilisation de logiciels d'analyse assistée par ordinateur. Mata-Falcon et al. [46] étudie la

caractérisation de la charge ultime verticale pour un modèle hyperstatique avec optimisation de la position des armatures. Ces recherches sont d'ailleurs utilisées par Bontemps [21] pour ses travaux sur la corrosion.

Pour illustrer la méthode des bielles et tirants (STM), certains modèles peuvent être mis en lumière dans cette étude afin de déterminer les efforts dans les armatures en parcourant les nœuds du modèle. Les deux premiers modèles isostatiques peuvent être extraits de Desnerck et al. [36], respectivement les modèles (a) et (b) présentés à la figure 90. Un schéma de forces peut y être réalisé :

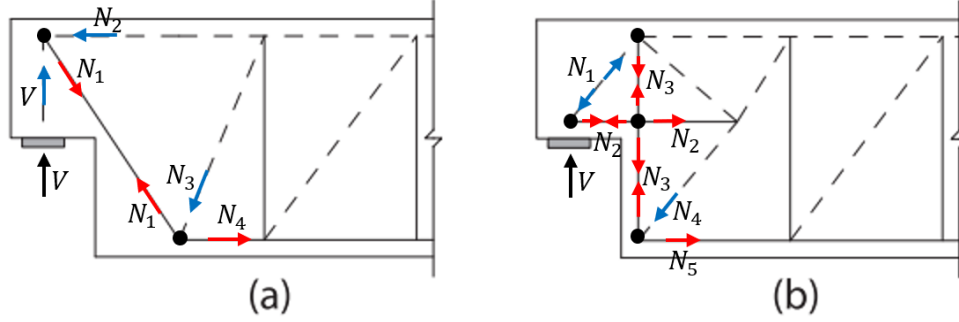


FIGURE 91 – Modèles de bielle-tirant à l'étude

Un équilibre des forces sur chaque nœuds (boule noire) donne les efforts de compression (flèche bleue) et de traction (flèche rouge) recherchés pour une charge à l'appui  $V$  :

$$\text{Structure (a) : } \begin{cases} N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot V \text{ (traction)} \\ N_2 = V \text{ (compression)} \end{cases} \quad (95)$$

$$\text{Structure (b) : } \begin{cases} N_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot V \text{ (compression)} \\ N_2 = V \text{ (traction)} \\ N_3 = V \text{ (traction)} \\ N_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot V \text{ (compression)} \\ N_5 = V \text{ (traction)} \end{cases} \quad (96)$$

En se limitant à la région D pour illustrer la méthode, une fois que les forces dans les différents éléments ont été déterminées, il est nécessaire de vérifier les contraintes admissibles dans chaque élément individuel. Les contraintes dans tous les éléments ne doivent pas dépasser les contraintes admissibles sous la charge appliquée (facteur de sécurité) pour considérer l'articulation comme sûre. Conformément à Desnerck et al. [36], des égalités apparaissent dans les tirants et dans les bielles :

- Dans une bielle  $i$ , la force de compression est lié aux contraintes dans le béton comprimé et dans l'armature suivant le tracé de la bielle  $i$  :

$$N_i = \sigma_{c,i} \cdot A_{c,i} + \sigma_{s,i} \cdot A_{s,i} \quad (97)$$

Avec

- $N_i$  : l'effort de compression dans la bielle trouvé via l'équilibre statique des forces
- $\sigma_{c,i}$  : la contrainte dans le béton comprimé de la bielle  $i$
- $A_{c,i}$  : l'aire de la section du béton comprimé de la bielle  $i$
- $\sigma_{s,i}$  : la contrainte dans l'armature comprimée de la bielle  $i$
- $A_{s,i}$  : l'aire de la section d'armature comprimée de la bielle  $i$
- Dans un tirant  $j$ , la force de traction est liée aux contraintes dans l'armature tendue suivant le tracé du tirant  $j$  :

$$N_j = \sigma_{s,j} \cdot A_{s,j} \quad (98)$$

Avec

- $N_j$  : l'effort de traction dans le tirant trouvé via l'équilibre statique des forces
- $\sigma_{s,j}$  : la contrainte dans l'armature tendue de la bielle  $j$
- $A_{s,j}$  : l'aire de la section d'armature tendue de la bielle  $j$

Ces formules permettent de calculer la section d'armature nécessaire pour une force verticale donnée  $V$ , ou inversement, de déterminer la nouvelle force maximale calculée  $V$  pour une section d'armature soumise à un modèle de corrosion spécifique. Ces formules sont étudiées dans l'article de Mattock et Chan [60], dont question dans la section précédente. Les conclusions de cet article, ainsi que les recommandations du livre PCI (1978), suggèrent plusieurs relations pour le calcul des aires d'armatures nécessaires afin de supporter l'effort vertical.

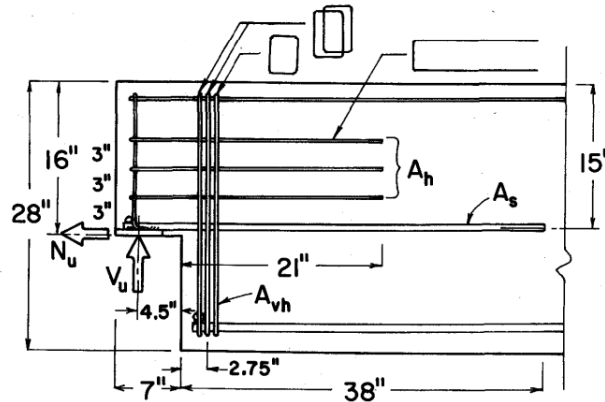


FIGURE 92 – Schéma d'armatures d'une DEB selon Mattock et Chan [60]

Parmi les armatures qui nous intéressent, on peut citer :

- Armatures verticales proches de l'interface  $A_{vh}$

La relation suivante pour le calcul de l'aire d'acier  $A_{vh}$  des barres verticales proche de l'interface afin d'équilibrer l'effort vertical  $V$  :

$$A_{vh} = \frac{V}{\phi \cdot f_y} \quad (99)$$

Avec

- $A_{vh}$  : aire d'armature verticales ("hanger reinforcement") nécessaire
- $V$  : effort vertical ultime
- $\phi$  : facteur de réduction (=0.85)
- $f_y$  : limite élastique de l'acier
- Armatures principales horizontales partant de la petite section  $A_s$

La relation suivante pour le calcul de l'aire d'acier  $A_s$  des barres horizontales partant de la petite section afin d'équilibrer l'effort vertical  $V$  :

$$A_s = \frac{V}{\phi \cdot f_y} \quad (100)$$

Avec

- $A_s$  : aire d'armature horizontale nécessaire
- $V$  : effort vertical ultime
- $\phi$  : facteur de réduction (=0.85)
- $f_y$  : limite élastique de l'acier

Pour le calcul de la section d'armature diagonale requise, Liem [82] propose la relation suivante :

$$A_d = \frac{V}{1.41 \cdot \phi \cdot f_y} \quad (101)$$

Avec

- $A_d$  : aire d'armatures verticales ("hanger reinforcement") nécessaire
- $V$  : effort vertical ultime
- $\phi$  : facteur de réduction (=0.85)
- $f_y$  : limite élastique de l'acier

Selon les dires de Mattock et Chan [60], le facteur de réduction  $\phi = 0.85$  semble être une bonne valeur pour tenir compte de certaines incertitudes comme la position exacte de la charge verticale ultime  $V$  et la position exacte de la section critique soumise à la flexion dans le bec.

## 6 Application

Il est maintenant établi que l'adoption de poutres Gerber ou DEB constitue un compromis favorable en matière de conception. Cependant, l'un de ses principaux inconvénients réside dans l'imperméabilité de l'articulation ou de la zone d'emboîtement. Un système de drainage défectueux peut entraîner le suintement de l'eau sur les surfaces exposées, ainsi que la stagnation d'eau sur le bec inférieur. Souvent, cette eau contient des ions chlorure provenant des sels de déverglaçage, de la pollution atmosphérique, de précipitations et de l'environnement marin dans certains cas. Il est également crucial de noter l'impact de la carbonatation induite par la présence continue de dioxyde de carbone dans l'air. De plus, la maintenance de ces structures est complexe en raison de la position de l'articulation et de l'accès restreint aux faces non visibles, les rendant ainsi vulnérables et sujettes à la dégradation.

L'objectif de cette étude, après avoir examiné les méthodes numériques pour modéliser la diffusion des chlorures dans plusieurs cas simples de structure en béton ainsi que les différents aspects théoriques des poutres Gerber, est de déterminer l'évolution de la capacité de charge du bec d'une de ces poutres particulières lorsqu'elle est exposée à un environnement agressif, notamment à la présence de chlorures et à la carbonatation. En lien avec l'annexe A, qui décrit les normes de durabilité des structures, et en considérant le schéma typique des armatures analysé dans la section 5, il sera pertinent d'étudier l'importance de l'enrobage et de la fissuration. Cette étude sera menée en utilisant deux spécimens types décrivant un béton de mauvaise qualité se rapportant à un système mal conçu et un béton de bonne qualité se rapportant à un système bien conçu, en couplant le modèle de diffusion 3D des chlorures aux équations de dégradation, pour décrire la réduction de la section des armatures.

Cette section débutera en présentant la configuration de la poutre avec ses dimensions et la position des armatures qui sera comparée en ce qui concerne l'évolution de la charge verticale ultime. Ensuite, nous procéderons à la caractérisation de cette charge verticale initiale, calculée à partir d'un exemple concret et à la caractérisation des armatures. Par la suite, nous analyserons le modèle de diffusion et de corrosion, ainsi que les différents paramètres significatifs associés. Enfin, nous comparerons les résultats concernant la diminution de la capacité de charge verticale au niveau du bec.

### 6.1 Configuration d'une poutre Gerber

La section 5 présente divers schémas d'armatures pour des poutres, mettant en lumière trois types cruciaux pour le transfert efficace des charges de la petite vers la grande section : les armatures horizontales s'étendant de la petite section, les armatures verticales proches de l'intersection, et dans certains cas, les armatures diagonales traversant les deux sections. Ces configurations ont été sélectionnées pour étudier l'évolution de la charge verticale admissible. Chaque schéma d'armature (zone noire sur la figure 93) sera examiné pour une valeur d'enrobage (zone hachurée sur la figure 93) sélectionnée selon les normes présentées en annexe A. Tous les spécimens étudiés auront les mêmes dimensions, comme illustré à la figure 93, ces dernières sont inspirées du travail de recherche de Bontemps [21].

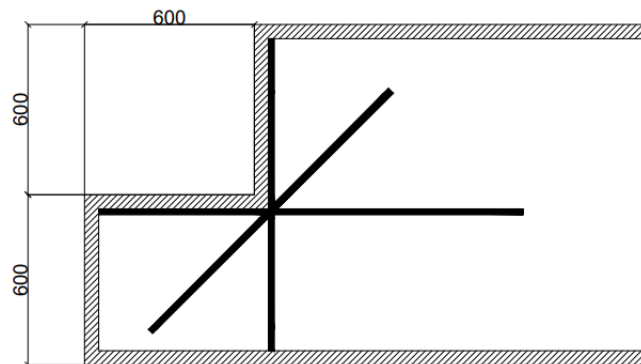


FIGURE 93 – Dimensions des poutres Gerber à l'étude

## 6.2 Caractérisation de l'effort vertical ultime

L'effort vertical ultime noté  $V$  sur les configurations présentes en figure 93 peut être estimé au moyen d'un exemple concret d'un pont constitué de poutres DEB retenant le tablier. En effet, cette charge verticale résume l'ensemble des charges appliquées sur le pont que ce soit des charges permanentes  $G_i$  ou des charges variables  $Q_i$  d'un élément  $i$  et dans un contexte de dimensionnement à l'ELU, la combinaison suivante peut être menée :

$$V = 1.35 \cdot \sum_i G_i + 1.5 \cdot \sum_i Q_i \quad (102)$$

Avec cette relation, il nous reste à déterminer les différentes charges présentes sur un pont routier. Pour ce faire, nous pouvons prendre l'exemple d'un pont muni de poutres DEB comme c'est le cas pour le pont de la Concorde situé au Québec et qui s'est malheureusement effondré avant sa durée de vie estimée suite à une mauvaise configuration de l'armature en acier dans les éléments DEB soutenant le tablier ainsi qu'une mauvaise qualité de béton déployée face aux sels fondants. Les dimensions sont fournies dans l'article de Golden [37] :

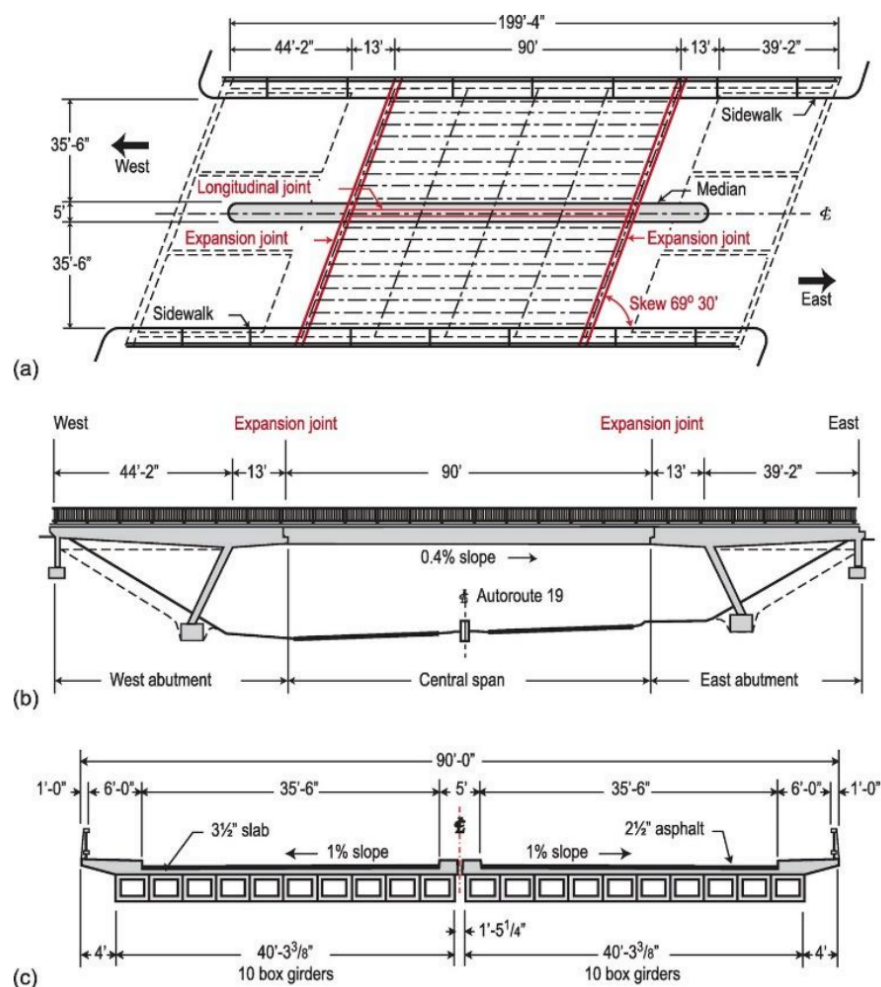


FIGURE 94 – Dimensions du pont de la Concorde : (a) vue en plan (b) coupe (c) coupe transversale perpendiculaire à la coupe (b) [37]

La superstructure est conçue pour diviser le pont en deux segments distincts, chacun réagissant indépendamment grâce à un joint longitudinal. Le tablier est composé d'une couche d'asphalte reposant sur une dalle de transition. Chaque segment du tablier est soutenu par une rangée de 10 poutres DEB, reposant sur des appuis. Bien que ces

poutres forment un ensemble structurel agissant conjointement avec la dalle de transition, nous avons choisi, dans l'application de ce mémoire, d'utiliser les poutres d'extrémité afin de prendre en compte les effets tridimensionnels. En effet, les poutres internes peuvent se limiter à la modélisation en 2D. La figure 94 présente quelques dimensions importantes :

- Portée centrale de plus de 28 m
- Portée aux aboutements de plus de 17 m
- Largeur de la travée indépendante de plus de 10 m
- Épaisseur de la couche d'asphalte de plus de 5 cm
- Épaisseur de la dalle de transition de plus de 8 cm

Ces informations nous seront utiles pour la caractérisation des charges permanentes et variables. D'ailleurs ces 2 types de charges peuvent être décrites et quantifiées.

### Charges permanentes

- Charges dues au poids de la couche d'asphalte d'une masse volumique  $\rho = 2200[kg/m^3]$
- Charges dues au poids de la dalle de transition d'une masse volumique  $\rho = 2500[kg/m^3]$
- Charges dues au poids de la poutre DEB d'une masse volumique  $\rho = 2500[kg/m^3]$
- Charges dues aux équipements du pont d'une charge surfacique de  $V_e = 4[kN/m^2]$

### Charges variables

- Charge due au trafic (système UDL) d'une charge surfacique de  $V_t = 9[kN/m^2]$
- Charge due aux piétons d'une charge surfacique de  $V_p = 2[kN/m^2]$

Nous obtenons le tableau suivant de charge surfaciques :

Charge	Poids volumique [ $kN/m^3$ ]	Charge surfacique [ $kN/m^2$ ]
Asphalte	22	$22 \times 0.05 = 1.1$
Dalle de transition	25	$25 \times 0.75 = 1.875$
Poutre DEB	25	$25 \times 0.80 = 2$
Équipements du pont	-	4.00
Trafic (système UDL)	-	9.00
Piétons	-	2.00

TABLE 15 – Charges surfaciques

En considérant la surface d'influence d'une poutre DEB d'1.2 mètre de large sur 14 mètres de long et les valeurs des charges surfaciques reprises dans le tableau, nous obtenons la charge verticale ultime :

$$V = 1.35 \cdot \sum_i G_i + 1.5 \cdot \sum_i Q_i \quad (103)$$

$$\Leftrightarrow V = 1.35 \cdot (1.1 + 1.875 + 2 + 4) \cdot (1.2 \times 14) + 1.5 \cdot (9 + 2) \cdot (1.2 \times 14) \quad (104)$$

$$= 214.37 + 277.2 = 491.57 = \pm 500[kN] \quad (105)$$

## 6.3 Caractérisation des armatures

En supposant que la combinaison de charge trouvée à la relation 105 représente l'effort verticale ultime agissant sur la poutre Gerber, nous pouvons calculer les sections d'armatures requises pour assurer le dimensionnement de la structure. Les sections d'armatures sont trouvées via les formules présentées en section précédente, celles-ci sont par la suite calculées :

- Armatures verticales  $A_{vh}$

$$A_{vh} = \frac{V}{\phi \cdot f_y} = \frac{500000}{0.85 \cdot 500} = 1176.47[mm^2] \quad (106)$$

En considérant les diamètres des barres standardisés européens, nous pouvons imposer 4 barres D20 ( $A_{vh} = 1257[mm^2]$ ).

- Armatures horizontales  $A_s$

$$A_s = \frac{V}{\phi \cdot f_y} = \frac{500000}{0.85 \cdot 500} = 1176.47[mm^2] \quad (107)$$

En considérant les diamètres des barres standardisés européens, nous pouvons imposer 4 barres D20 ( $A_s = 1257[mm^2]$ ).

- Armatures diagonales  $A_d$

$$A_d = \frac{V}{1.41 \cdot \phi \cdot f_y} = \frac{500000}{1.41 \cdot 0.85 \cdot 500} = 834.38[mm^2] \quad (108)$$

En considérant les diamètres des barres standardisés européens, nous pouvons imposer 5 barres D16 ( $A_{vh} = 1005[mm^2]$ ).

En lien avec la figure 95, la disposition des armatures illustrée se répète sur toute l'épaisseur de la poutre Gerber. Nous pouvons donc supposer leur emplacement et indiquer les points critiques du domaine  $(x, y, z)[mm]$  qui les représentent pour effectuer l'analyse temporelle de la concentration en chlorures. En considérant une barre de chaque côté de l'épaisseur au minimum requis de l'enrobage et les autres venant s'y insérer plus ou moins à équidistance entre elles, nous obtenons le tableau de synthèse 16 reprenant l'identité des barres (BH = barre horizontale, BV = barre verticale et BD = barre diagonale) avec les points à l'étude les représentant :

Type de barre	Identité	Point du domaine $(x, y, z)[mm]$	
		Enrobage 50 [mm]	Enrobage 20 [mm]
Horizontales	BH1	(300, 550, 50)	(300, 580, 20)
	BH2	(300, 550, 180)	(300, 580, 170)
	BH3	(300, 550, 320)	(300, 580, 330)
	BH4	(300, 550, 450)	(300, 580, 480)
Verticales	BV1	(650, 900, 50)	(620, 900, 20)
	BV2	(650, 900, 180)	(620, 900, 170)
	BV3	(650, 900, 320)	(620, 900, 330)
	BV4	(650, 900, 450)	(620, 900, 480)
Diagonales	BD1	(625, 575, 50)	(625, 575, 20)
	BD2	(625, 575, 150)	(625, 575, 140)
	BD3	(625, 575, 250)	(625, 575, 250)
	BD4	(625, 575, 350)	(625, 575, 360)
	BD5	(625, 575, 450)	(625, 575, 480)

TABLE 16 – Tableau de synthèse des valeurs des points du domaine pour l'analyse temporelle de la concentration en chlorures, avec enrobage de 50 mm et 20 mm

## 6.4 Modèle de diffusion et ses paramètres

Maintenant que les dimensions des poutres, la charge verticale ultime initiale et les sections d'armatures correspondantes sont choisies, nous pouvons passer à la description du modèle de diffusion des chlorures appliquée et à la quantification de ses paramètres. Pour rappel, la diffusion des chlorures suit la Loi de Fick en considérant le cas tridimensionnelle. Cette loi est ensuite discrétisée en temps et en espace pour obtenir notre modèle 3D en différences finies ou en automates cellulaires. Pour cette application, nous choisissons d'utiliser les différences finies :

$$\frac{\partial C(x, y, z, t)}{\partial t} = D \cdot \left( \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 C(x, y, z, t)}{\partial z^2} \right) \quad (109)$$

$$\hookrightarrow \frac{C_{i,j,k}^{n+1}(x, y, z, t) - C_{i,j,k}^n(x, y, z, t)}{\Delta t} = D \cdot \left( \frac{C_{i-1,j,k}^n(x, y, z, t) - 2C_{i,j,k}^n(x, y, z, t) + C_{i+1,j,k}^n(x, y, z, t)}{(\Delta x)^2} + \right. \quad (110)$$

$$\left. \frac{C_{i,j-1,k}^n(x, y, z, t) - 2C_{i,j,k}^n(x, y, z, t) + C_{i,j+1,k}^n(x, y, z, t)}{(\Delta y)^2} + \right. \quad (111)$$

$$\left. \frac{C_{i,j,k-1}^n(x, y, z, t) - 2C_{i,j,k}^n(x, y, z, t) + C_{i,j,k+1}^n(x, y, z, t)}{(\Delta z)^2} \right) \quad (112)$$

Les paramètres représentent, dans le cas d'une diffusion, les conditions limites et initiales avec la notion de concentration de surface  $C_s$  (exprimée en pourcentage de masse ciment) et le coefficient de diffusion  $D$  constant dans les trois dimensions.

### 6.4.1 Conditions limites et initiales

Les conditions limites et initiales doivent refléter au mieux la réalité des bords de domaine de la poutre. À cet effet, nous fixons une concentration de bord  $C_s = 2\%$  (hachuré sur la figure 95) sur les trois surfaces dissimulées au niveau de l'articulation, ainsi que sur trois morceaux sur la surface visible, simulant ainsi l'écoulement de l'eau de drainage.

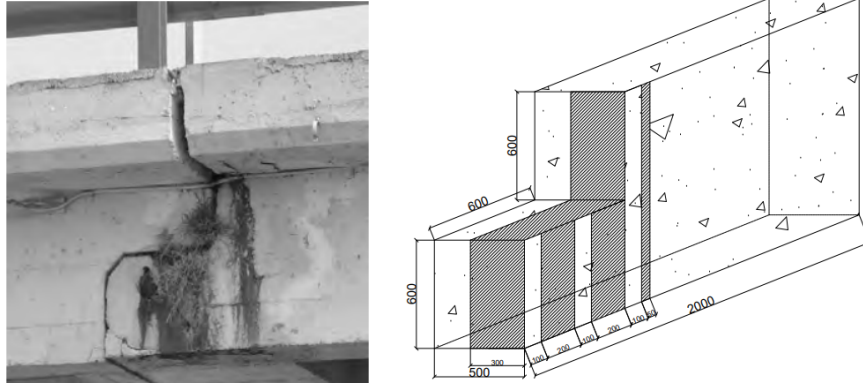


FIGURE 95 – Illustration des concentrations de bord : cas réel [46] et modèle AutoCAD

La condition initiale reflète simplement ces différentes concentrations de surfaces, ainsi qu'une concentration en chlorures nulle pour le reste du domaine au temps initial avant le début de la diffusion. D'un point de vue mathématiques, les conditions limites et initiales sont exprimées sur bases de la concentration en chlorures  $C(x, y, z, t)$  :

$$C(x = 0, 0 < y < 600, 200 < z < 500, t) = C_s \quad (113)$$

$$C(0 < x < 600, y = 600, 200 < z < 500, t) = C_s \quad (114)$$

$$C(x = 600, y > 600, 200 < z < 500, t) = C_s \quad (115)$$

$$C(100 < x < 300, y, z = 500, t) = C_s \quad (116)$$

$$C(400 < x < 600, y, z = 500, t) = C_s \quad (117)$$

$$C(700 < x < 750, y, z = 500, t) = C_s \quad (118)$$

### 6.4.2 Coefficient de diffusion

Comme évoqué dans la section 3.2.4.5, le coefficient de diffusion apparent  $D_a$  du béton est influencé par divers paramètres tels que la température, l'humidité relative et l'âge du matériau. Les fissures présentes dans le béton agissent également comme des voies d'infiltration pour les chlorures, augmentant ainsi le coefficient de diffusion. Pour cette étude, nous considérons plusieurs coefficients de diffusion uniformes dans les trois dimensions de l'espace. Les valeurs de référence, discutées en section 3.2.4.5, sont  $D_a = 1 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$  pour un système bien conçu avec un béton de qualité et  $D_a = 10 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$  et  $D_a = 500 \times 10^{-12} \text{ m}^2/\text{s}$  pour un montage mal exécuté avec un béton de mauvaise qualité avec l'effet de sa fissuration respectivement.

### 6.4.3 Évolution de la concentration en chlorures

Il est bien établi que le processus de corrosion, déclenché par la présence de chlorures, commence lorsque leur concentration au niveau des armatures atteint un seuil critique, noté  $C_{\text{crit}}$ , ou lorsque le front de carbonatation atteint l'armature. La littérature converge vers une valeur typique de concentration critique de  $C_{\text{crit}} = 0.4\%$ , exprimée en pourcentage de la masse de ciment. Maintenant que tous les paramètres de diffusion des chlorures sont définis, nous pouvons implémenter la méthode numérique sur les configurations des poutres Gerber à l'aide d'un programme Python. L'analyse sera effectuée sur une période  $T$  de 100 ans. Les résultats ci-dessous illustrent l'évolution de la concentration de chlorures après 50 ans de simulation dans une tranche de béton à des profondeurs

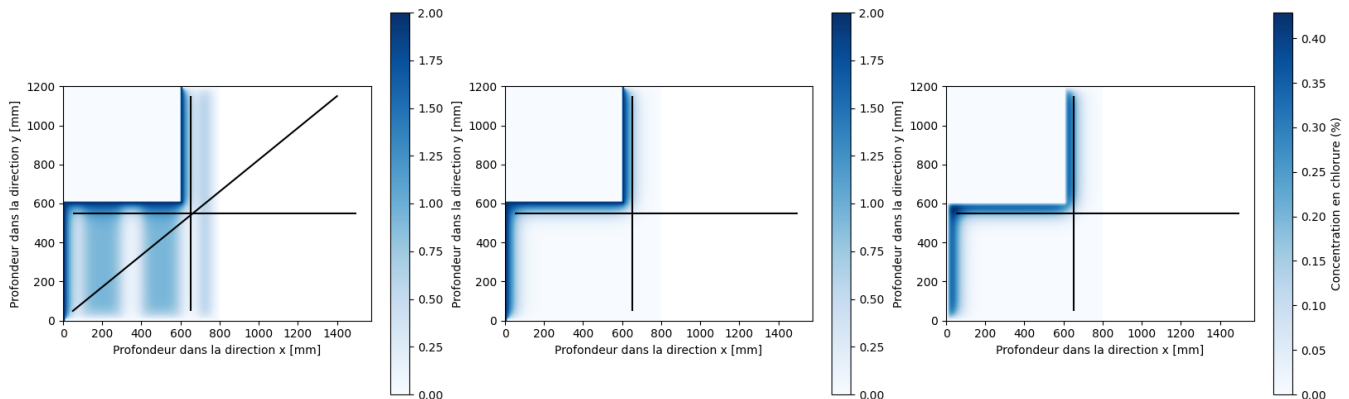


FIGURE 96 – Résultats numériques (différence finie) de la diffusion 3D après 50 ans pour 450, 320 et 200[mm] ( $D_a = 1 \times 10^{-12} [m^2/s]$ )

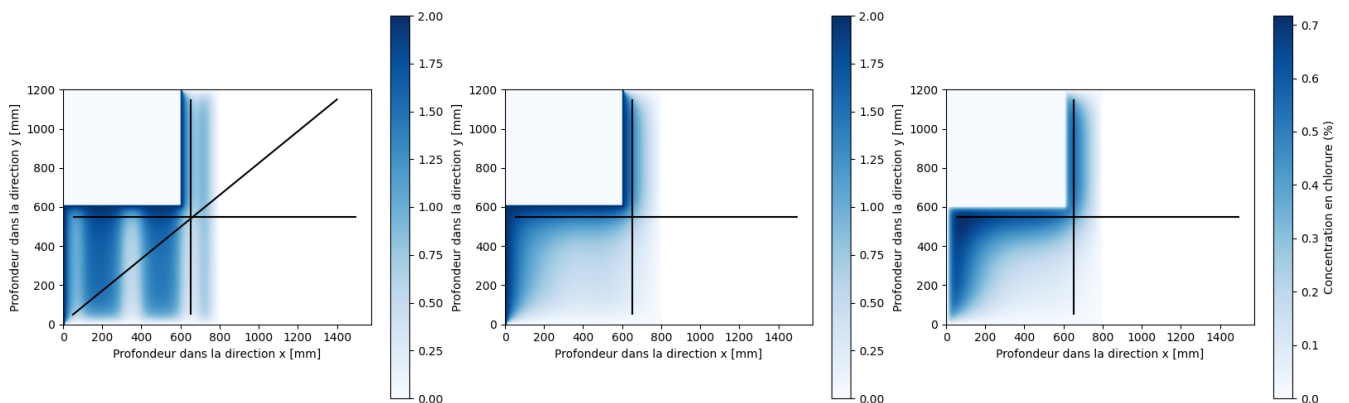


FIGURE 97 – Résultats numériques (différence finie) de la diffusion 3D après 50 ans pour 450, 320 et 200[mm] ( $D_a = 10 \times 10^{-12} [m^2/s]$ )

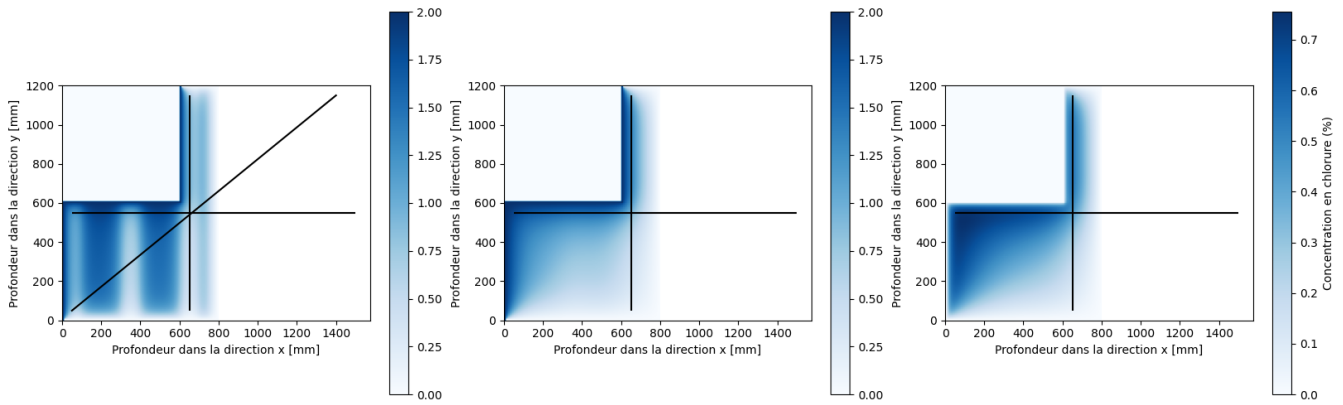


FIGURE 98 – Résultats numériques (différence finie) de la diffusion 3D après 50 ans pour 450, 320 et 200[mm] ( $D_a = 500 \times 10^{-12} [m^2/s]$ )

À première vue, il est évident que les armatures verticales et horizontales subiront les attaques les plus significatives sur une partie de leur longueur, tandis que les armatures diagonales seront soumises à des attaques plus localisées. Pour être plus précis, plusieurs graphes peuvent être construits selon la qualité de conception de la structure pour décrire l'évolution temporelle de la concentration aux points critiques correspondant aux trois types d'armatures.

- Structure bien conçue :  $D_a = 1 \times 10^{-12} [m^2/s]$

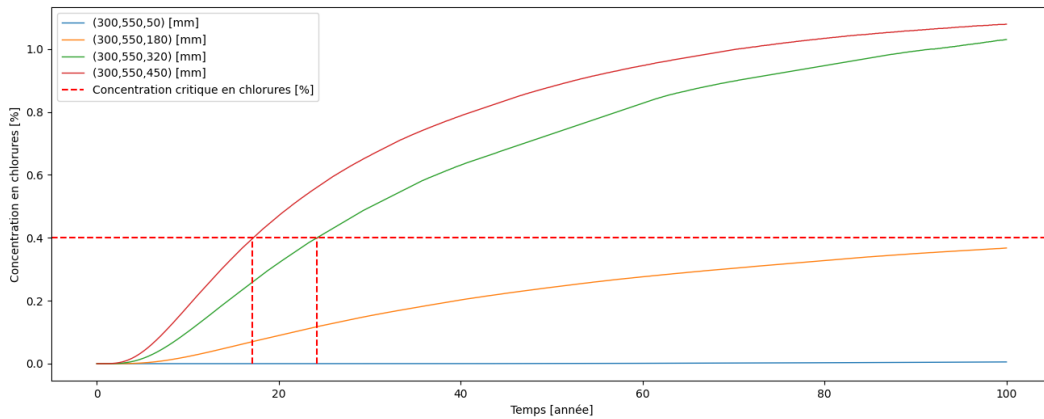


FIGURE 99 – Évolution de la concentration en chlorures pour les barres horizontales ( $D_a = 1 \times 10^{-12} [m^2/s]$ )

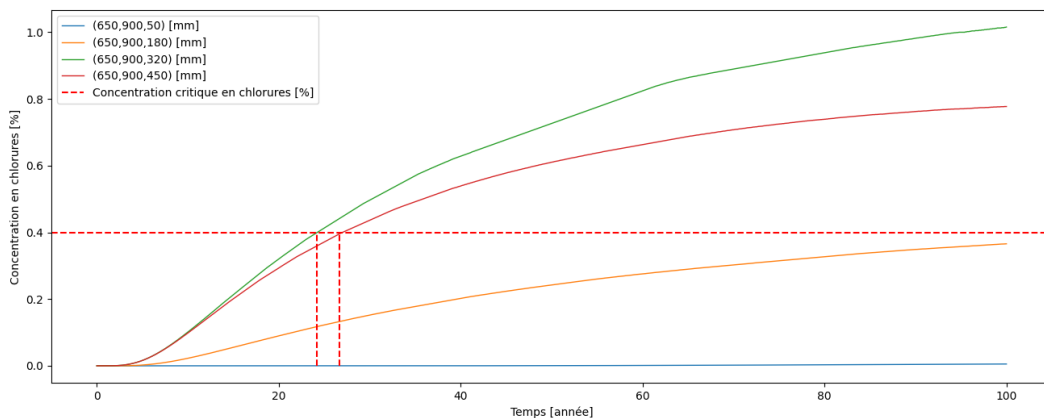


FIGURE 100 – Évolution de la concentration en chlorures pour les barres verticales ( $D_a = 1 \times 10^{-12} [m^2/s]$ )

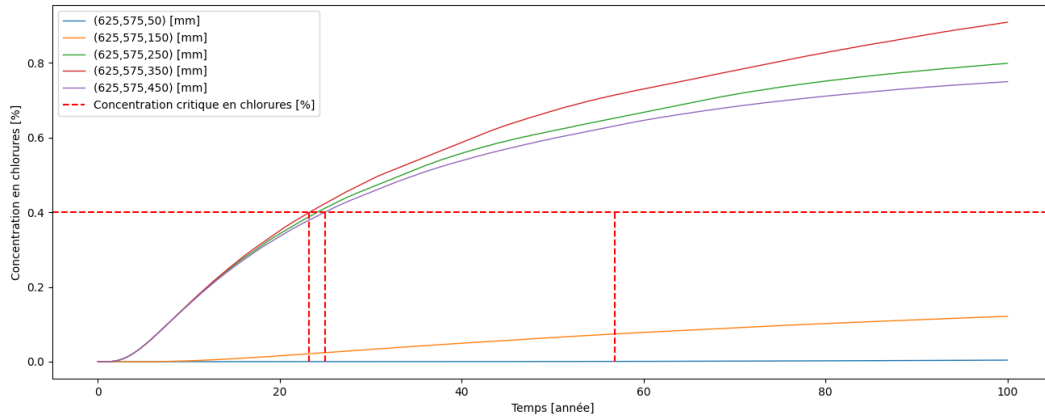


FIGURE 101 – Évolution de la concentration en chlorures pour les barres diagonales ( $D_a = 1 \times 10^{-12} [m^2/s]$ )

- Structure mal conçue :  $D_a = 10 \times 10^{-12} [m^2/s]$

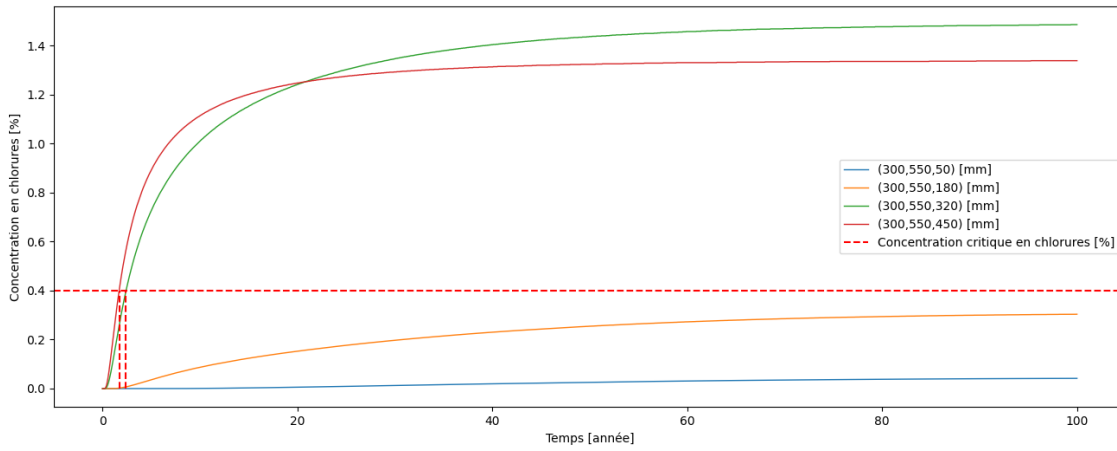


FIGURE 102 – Évolution de la concentration en chlorures pour les barres horizontales ( $D_a = 10 \times 10^{-12} [m^2/s]$ )

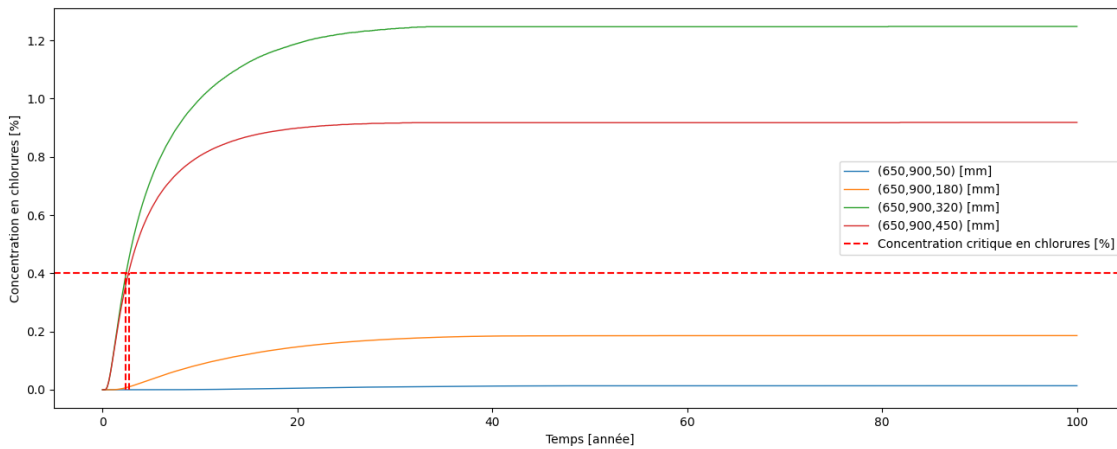


FIGURE 103 – Évolution de la concentration en chlorures pour les barres verticales ( $D_a = 10 \times 10^{-12} [m^2/s]$ )

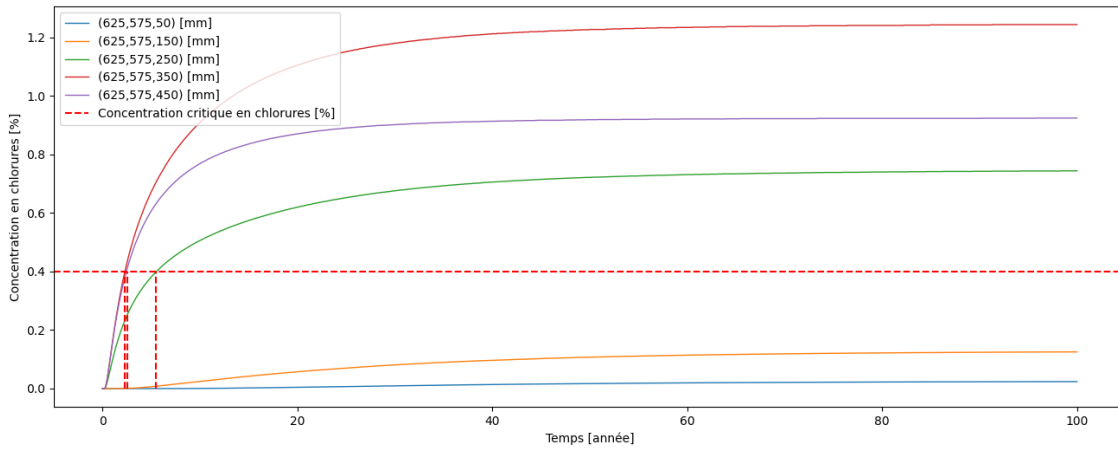


FIGURE 104 – Évolution de la concentration en chlorures pour les barres diagonales ( $D_a = 10 \times 10^{-12} [m^2/s]$ )

- Structure mal conçue et fissurée :  $D_a = 500 \times 10^{-12} [m^2/s]$

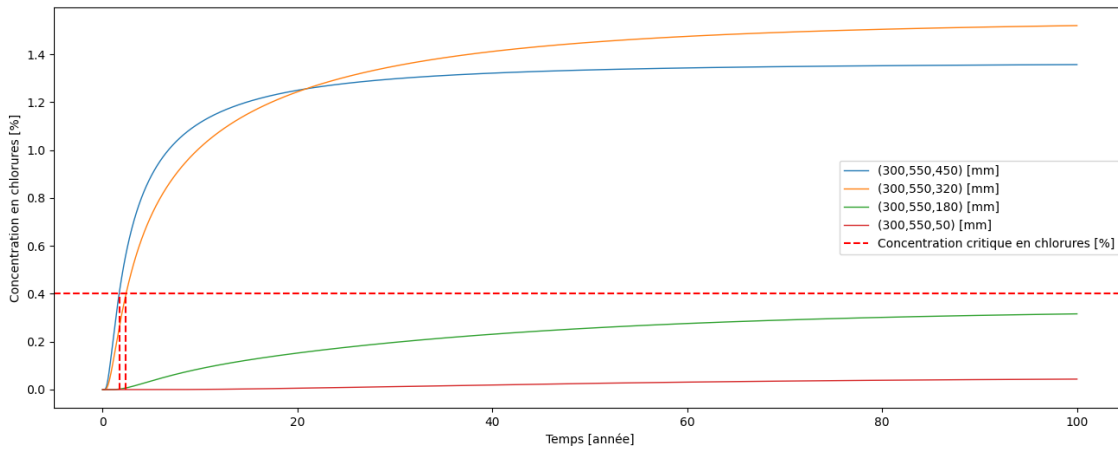


FIGURE 105 – Évolution de la concentration en chlorures pour les barres horizontales ( $D_a = 500 \times 10^{-12} [m^2/s]$ )

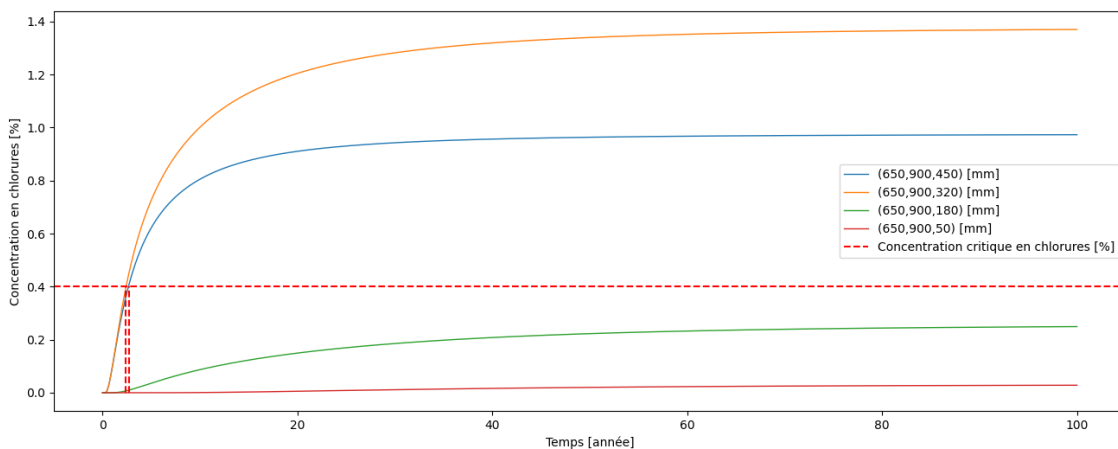


FIGURE 106 – Évolution de la concentration en chlorures pour les barres verticales ( $D_a = 500 \times 10^{-12} [m^2/s]$ )

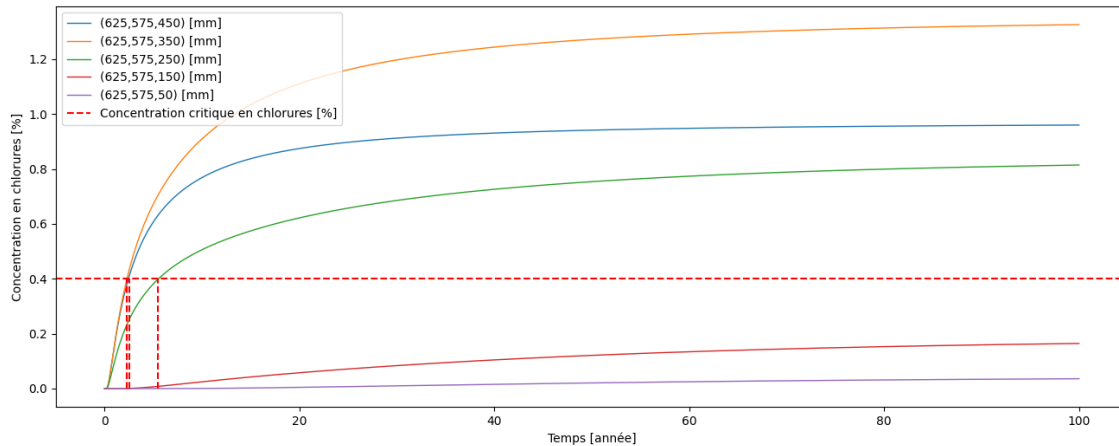


FIGURE 107 – Évolution de la concentration en chlorures pour les barres diagonales ( $D_a = 500 \times 10^{-12} [m^2/s]$ )

L'examen des graphiques 99, 100, 101, 102, 103, 104, 105, 106 et 107 et du tableau 17 révèle une relation directe entre la performance du béton et les temps d'initiation : plus le béton est performant, plus les temps d'initiation sont longs. Pour un béton fissuré avec le plus grand coefficient de diffusion  $D_a$ , les temps d'initiation sont d'environ un an. En revanche, pour un béton de performance moyenne, avec un coefficient de diffusion  $D_a = 10 \times 10^{-12} m^2/s$ , les temps d'initiation varient entre une et dix années. Pour un béton à haute performance, ayant un coefficient de diffusion  $D_a = 1 \times 10^{-12} m^2/s$ , ces temps peuvent s'étendre de 10 à 30 ans. Il est également intéressant de constater que les barres BH2 et BV2 situées hors de l'axe des concentrations de bord atteindront la concentration critique dans les deux cas de la structure mal conçue ce qui montre l'importance de la simulation 3D pour ces structures particulières.

Barre/Coefficient	Temps d'initiation [année]		
	$D_{av} = 1 \times 10^{-12} [m^2/s]$	$D_a = 10 \times 10^{-12} [m^2/s]$	$D_a = 500 \times 10^{-12} [m^2/s]$
BH1	/	/	/
BH2	/	11.56	0.23
BH3	24.19	2.40	0.048
BH4	17.19	1.70	0.035
BV1	/	/	/
BV2	/	11.61	0.23
BV3	24.21	2.40	0.048
BV4	27.01	2.65	0.053
BD1	/	/	/
BD2	/	/	/
BD3	24.13	2.37	0.047
BD4	23.28	2.29	0.045
BD5	24.95	2.44	0.049

TABLE 17 – Tableau récapitulatif des temps d'initiation pour tous les coefficients de diffusion

## 6.5 Modèle de corrosion et ses paramètres

Une fois le modèle de diffusion 3D réalisé sur la poutre en application, nous pouvons procéder au modèle de corrosion décrivant la future réduction des armatures suite à l'attaque de la carbonatation dans un premier temps, puis en y ajoutant la contribution des chlorures lorsque la concentration critique est atteinte. Pour décrire cette dégradation, nous pouvons utiliser la Loi de Faraday, évoqué dans Malerba et al. [43], décrivant une corrosion généralisée et présentée en section 3.3.1 :

$$d'(t) = 0.0116 \cdot i_{corr} \cdot (t - t_0) = v_{corr} \cdot (t - t_0) \quad (119)$$

Le modèle de corrosion décrivant la profondeur de corrosion  $d'(t)$  dépend donc de la vitesse de corrosion  $v_{corr}$  et du temps de la simulation  $t$  par rapport au temps initial  $t_0$ .

### 6.5.1 Effet de la carbonatation

Avant tout chose, il est utile de rappeler que la structure sera constamment soumise aux effets de la carbonatation. En utilisant le modèle simpliste de Tuutti exprimant la profondeur carbonatée  $x(t)$  en fonction du coefficient de carbonatation  $K$ , pris dans le cas de l'application à  $K = 6[mm/an^{1/2}]$  et  $K = 9[mm/an^{1/2}]$  correspondant à un béton de haut et moyen compactage respectivement, il est possible d'estimer la profondeur carbonatée :

$$x(t) = K \cdot \sqrt{t} \quad (120)$$

Nous pouvons estimer le temps nécessaire pour atteindre les armatures :

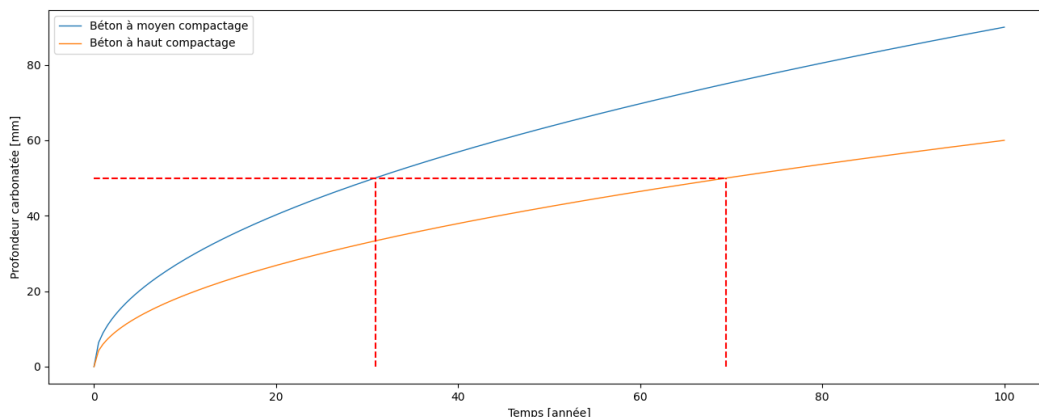


FIGURE 108 – Évolution temporelle de la profondeur carbonatée dans un béton intacte

Une observation minutieuse révèle que toute l'armature de la poutre Gerber, avec un enrobage de 5 cm, subira les effets de la carbonatation après 30 ans pour un béton à compactage moyen décrivant une structure mal conçue. Dans le cas d'une structure bien conçue avec un béton à haut compactage, la profondeur carbonatée de  $50[mm]$  est atteinte après 69 ans.

### 6.5.2 Vitesses de corrosion

Auparavant, nous avons vu que la vitesse de corrosion  $v_{corr}$  dépendait fortement de l'humidité relative. En se fixant une humidité relative arbitraire de 85%, nous obtenons les vitesses de corrosion  $v_{corr} = 3[\mu m/an]$  (seulement carbonatation) et  $v_{corr} = 78[\mu m/an]$  (carbonatation avec attaque des chlorures) sur base du tableau 3.

### 6.5.3 Diminution des armatures

En utilisant tous les paramètres décrits auparavant, nous pouvons lancer un programme Python pour décrire l'évolution des sections d'armatures suite aux effets de carbonatation et des chlorures. Les figures 109, 110 et 111 illustrent respectivement la réduction en armatures pour les différents bétons étudiés. L'ensemble des données prises à 0, 20, 40, 60, 80 et 100 ans sont ensuite regroupées dans les tableaux 18 et 19.

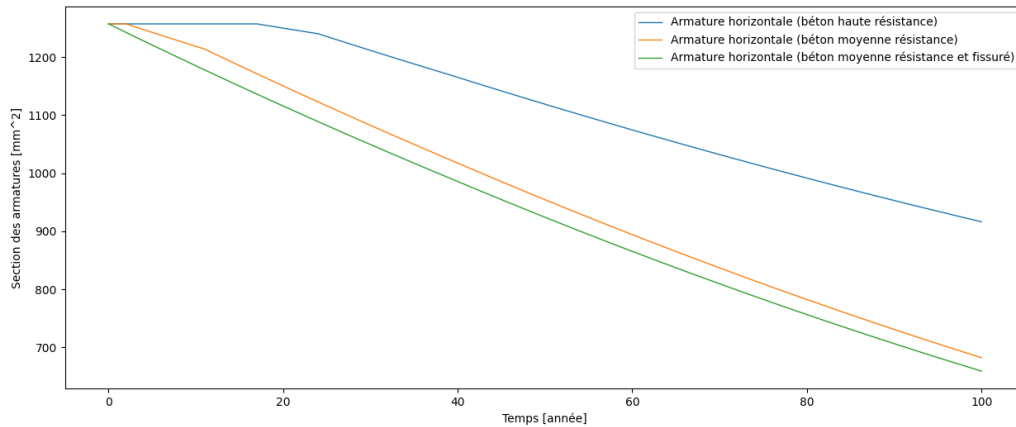


FIGURE 109 – Évolution temporelle de la section d'armature horizontale

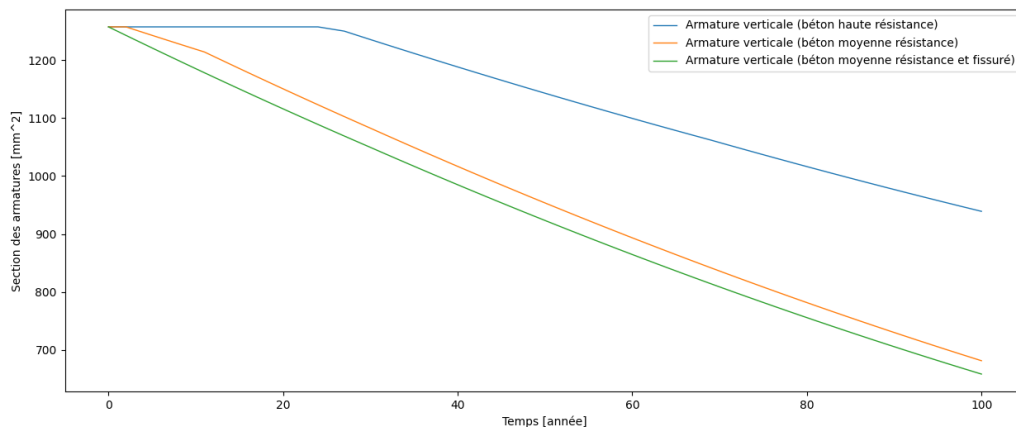


FIGURE 110 – Évolution temporelle de la section d'armature verticale

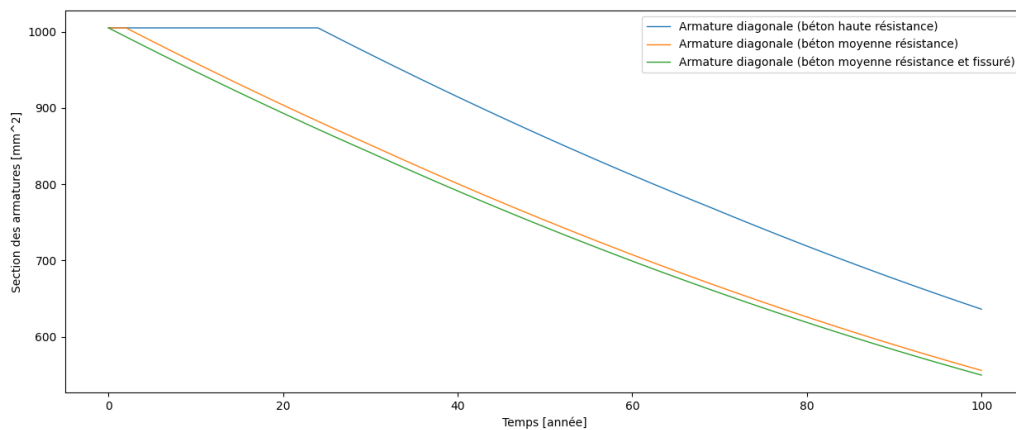


FIGURE 111 – Évolution temporelle de la section d'armature diagonale

Année	Barre	$D_a = 1 \times 10^{-12} [m^2/s]$		$D_a = 10 \times 10^{-12} [m^2/s]$		$D_a = 500 \times 10^{-12} [m^2/s]$	
		Aire [ $mm^2$ ]	Perte [%]	Aire [ $mm^2$ ]	Perte [%]	Aire [ $mm^2$ ]	Perte [%]
0	BH1	314.25	0	314.25	0	314.25	0
	BH2	314.25	0	314.25	0	314.25	0
	BH3	314.25	0	314.25	0	314.25	0
	BH4	314.25	0	314.25	0	314.25	0
	BV1	314.25	0	314.25	0	314.25	0
	BV2	314.25	0	314.25	0	314.25	0
	BV3	314.25	0	314.25	0	314.25	0
	BV4	314.25	0	314.25	0	314.25	0
	BD1	201.00	0	201.00	0	201.00	0
	BD2	201.00	0	201.00	0	201.00	0
	BD3	201.00	0	201.00	0	201.00	0
	BD4	201.00	0	201.00	0	201.00	0
	BD5	201.00	0	201.00	0	201.00	0
20	BH1	314.25	0	314.25	0	314.25	0
	BH2	314.25	0	292.58	6.88	267.15	15.00
	BH3	314.25	0	271.68	13.55	267.15	15.00
	BH4	306.94	2.33	271.68	13.55	267.15	15.00
	BV1	314.25	0	314.25	0	314.25	0
	BV2	314.25	0	292.58	6.88	267.15	15.00
	BV3	314.25	0	271.68	13.55	267.15	15.00
	BV4	314.25	0	271.68	13.55	267.15	15.00
	BD1	201.00	0	201.00	0	201.00	0
	BD2	201.00	0	201.00	0	201.00	0
	BD3	201.00	0	167.27	16.79	163.71	18.55
	BD4	201.00	0	167.27	16.79	163.71	18.55
	BD5	201.00	0	167.27	16.79	163.71	18.55
40	BH1	314.16	0.03	314.16	0.03	314.16	0.03
	BH2	314.16	0.03	247.20	21.32	223.86	28.75
	BH3	276.26	12.11	228.02	27.44	223.86	28.75
	BH4	260.41	17.13	228.02	27.44	223.86	28.75
	BV1	314.25	0	313.31	0.30	313.31	0.30
	BV2	314.25	0	247.20	21.32	223.86	28.75
	BV3	276.26	12.11	228.02	27.44	223.86	28.75
	BV4	283.20	9.88	228.02	27.44	223.86	28.75
	BD1	201.00	0	200.25	0.37	200.25	0.37
	BD2	201.00	0	200.25	0.37	200.25	0.37
	BD3	170.86	14.98	133.42	33.62	130.24	35.20
	BD4	170.86	14.98	133.42	33.62	130.24	35.20
	BD5	170.86	14.98	133.42	33.62	130.24	35.20

TABLE 18 – Tableau récapitulatif des aires et pertes pour tous les coefficients de diffusion

Année	Barre	$D_{av} = 1 \times 10^{-12} [m^2/s]$		$D_a = 10 \times 10^{-12} [m^2/s]$		$D_a = 500 \times 10^{-12} [m^2/s]$	
		Aire [ $mm^2$ ]	Perte [%]	Aire [ $mm^2$ ]	Perte [%]	Aire [ $mm^2$ ]	Perte [%]
60	BH1	312.27	0.63	312.27	0.63	312.27	0.63
	BH2	312.27	0.63	205.63	34.55	184.40	41.34
	BH3	232.21	26.07	188.18	40.12	184.40	41.34
	BH4	217.70	30.73	188.18	40.12	184.40	41.34
	BV1	314.25	0	311.43	0.90	311.43	0.90
	BV2	314.25	0	205.63	34.55	184.40	41.34
	BV3	232.21	26.07	188.18	40.12	184.40	41.34
	BV4	238.58	24.07	188.18	40.12	184.40	41.34
	BD1	201.00	0	198.74	1.12	198.74	1.12
	BD2	201.00	0	198.74	1.12	198.74	1.12
	BD3	136.63	32.02	103.39	48.56	100.60	49.95
	BD4	136.63	32.02	103.39	48.56	100.60	49.95
BD5	136.63	32.02	103.39	48.56	100.60	49.95	
80	BH1	310.40	1.23	310.40	1.23	310.40	1.23
	BH2	310.40	1.23	167.89	46.57	148.77	52.64
	BH3	191.99	38.91	152.16	51.57	148.77	52.64
	BH4	178.82	43.10	152.16	51.57	148.77	52.64
	BV1	313.21	0.33	309.55	1.50	309.55	1.50
	BV2	313.21	0.33	167.89	46.57	148.77	52.64
	BV3	191.99	38.91	152.16	51.57	148.77	52.64
	BV4	197.78	37.06	152.16	51.57	148.77	52.64
	BD1	200.17	0.41	197.25	1.87	197.25	1.87
	BD2	200.17	0.41	197.25	1.87	197.25	1.87
	BD3	106.22	47.17	77.19	61.59	74.78	62.80
	BD4	106.22	47.17	77.19	61.59	74.78	62.80
BD5	106.22	47.17	77.19	61.59	74.78	62.80	
100	BH1	308.53	1.82	308.53	1.82	308.53	1.82
	BH2	308.53	1.82	133.98	57.36	116.95	62.78
	BH3	155.59	50.48	119.96	61.82	116.95	62.78
	BH4	143.75	54.24	119.96	61.82	116.95	62.78
	BV1	311.33	0.93	307.69	2.09	307.69	2.09
	BV2	311.33	0.93	133.98	57.36	116.95	62.78
	BV3	155.59	50.48	119.96	61.82	116.95	62.78
	BV4	160.81	48.83	119.96	61.82	116.95	62.78
	BD1	198.67	1.16	195.76	2.60	195.76	2.60
	BD2	198.67	1.16	195.76	2.60	195.76	2.60
	BD3	79.64	60.39	54.81	72.73	52.78	73.75
	BD4	79.64	60.39	54.81	72.73	52.78	73.75
BD5	79.64	60.39	54.81	72.73	52.78	73.75	

TABLE 19 – Tableau récapitulatif des aires et pertes pour tous les coefficients de diffusion (suite)

L'analyse révèle que la qualité du béton a une influence déterminante sur la réduction des armatures, avec des pertes pouvant dépasser 70% après 100 ans de simulation dans les bétons de mauvaise qualité. De plus, en examinant les résultats, les armatures diagonales (BD) seront les plus affectées, subissant les plus grandes réductions.

## 6.6 Évolution de la charge verticale

Une fois l'évolution de l'armature décrite, il est possible de tracer l'évolution de la charge ultime que la structure est en mesure de reprendre selon le type de structure étudié, soit une structure bien conçue avec un béton de bonne qualité, soit une structure mal conçue avec un béton de moins bonne qualité en y ajoutant le cas fissuré.

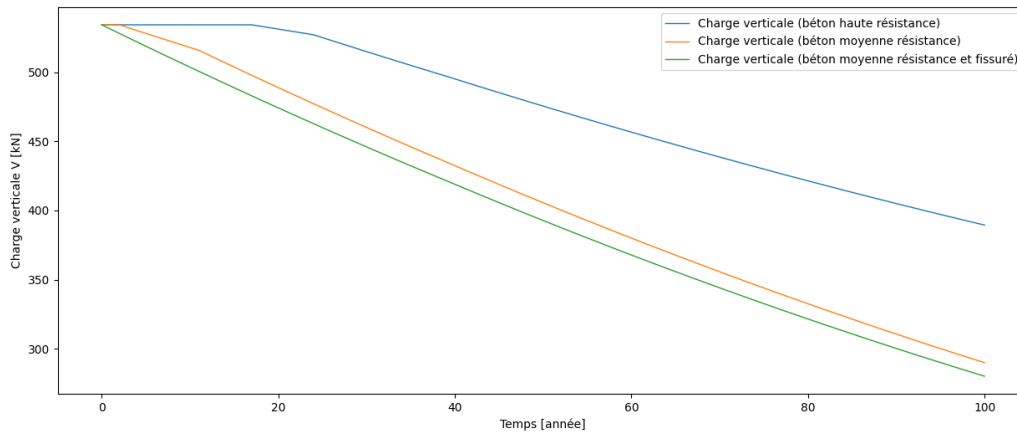


FIGURE 112 – Évolution temporelle de la charge verticale ultime

La figure 112 illustre que la charge ultime d'une structure bien conçue, utilisant un béton résistant aux agents agressifs, diminue presque deux fois moins rapidement qu'une structure mal conçue avec un béton de qualité moyenne ou médiocre. En effet, après 100 ans, la charge ultime avoisine les 400 kN pour la structure bien conçue, tandis qu'elle chute en dessous de 300 kN pour une structure moins performante. Le tableau 20 résume les valeurs de la charge verticale ultime  $V$  à différents intervalles de temps.

Année	$D_a = 1 \times 10^{-12} [m^2/s]$		$D_a = 10 \times 10^{-12} [m^2/s]$		$D_a = 500 \times 10^{-12} [m^2/s]$	
	Charge [kN]	Perte [%]	Charge [kN]	Perte [%]	Charge [kN]	Perte [%]
0	534.23	0	534.23	0	534.23	0
20	531.12	0.58	488.83	8.49	474.17	11.25
40	495.12	7.32	432.39	19.05	418.94	21.58
60	456.65	14.51	380.06	28.88	367.83	31.13
80	421.43	21.13	332.61	37.73	321.60	39.80
100	389.47	27.09	290.03	45.68	280.24	47.54

TABLE 20 – Tableau récapitulatif des charges et pertes pour tous les coefficients de diffusion

## 6.7 Discussion des résultats

Les résultats obtenus dans cette étude concernant la poutre Gerber révèlent une différence significative en fonction de la qualité du béton utilisé. En effet, une réduction notable de la capacité portante est observée après les 20 à 40 premières années de service, avec des pertes pouvant atteindre près de 10 à 20 %. Ce constat met en évidence que les structures construites utilisant un béton de qualité inférieure, nécessitent une attention particulière. Cela explique également les divers effondrements observés lorsque des inspections rigoureuses ne sont pas effectuées en temps voulu. De nos jours, les structures sont conçues avec des matériaux et des normes plus rigoureux pour minimiser ces risques. En effet, la charge verticale ultime ne doit pas diminuer de plus de 30 % pour la durée de vie souhaitée de 100 ans.

Il convient également de souligner que les temps d'initiation liés à la pénétration des chlorures, présentés dans le tableau 14, sont tous inférieurs aux temps d'initiation pour la carbonatation, illustrés à la figure 108. Ce constat renforce l'importance de la prise en compte des chlorures dans l'analyse de la durabilité des structures en béton, car leur pénétration peut conduire à une dégradation plus rapide que celle due à la carbonatation.

Un autre résultat important de cette étude est l'intégration d'un modèle structurel en 3 dimensions, permettant une meilleure approximation de la réalité. Comme mentionné précédemment (section 4.3.4), les armatures qui ne sont pas alignées avec les zones de forte concentration en chlorures peuvent tout de même être affectées par la pénétration de ces ions, notamment lorsqu'un modèle 3D complet est pris en compte. Pour cette application, l'analyse montre que les armatures BH2 et BV2 (tableau 16), bien que situées hors des zones de concentration de bord, peuvent être impactées dans le cas d'une structure mal conçue ou fissurée.

Il est également pertinent de discuter de l'effet de l'enrobage, même si ce facteur n'a pas été directement analysé dans cette étude. Selon les normes de l'Eurocode (voir Annexe A), un enrobage de 50 mm est recommandé. Cette valeur a été utilisée pour l'étude de la poutre Gerber dans ce mémoire. À titre comparatif, Bontemps [21] examine également la réduction de la charge verticale ultime en fonction de l'enrobage, ce qui souligne l'importance de ce paramètre dans la durabilité des structures en béton.

Tous ces résultats sont étroitement liés aux modèles employés, qui présentent certaines limitations. Ces limites seront abordées en détail dans le prochain chapitre 6.8.

## 6.8 Limites de l'étude

Cette analyse sur les poutres Gerber est soumise à de nombreuses limitations, énoncées ci-contre, en raison du grand nombre de paramètres à considérer, dont l'approximation est souvent difficile.

- ❖ Le coefficient de carbonatation  $K$  est influencé par divers paramètres liés au béton lui-même (porosité, humidité relative, ratio  $e/c$ , alcalinité du ciment, etc.) ainsi que par les conditions environnementales (température, concentration ambiante, etc.) (voir 3.1). Nous considérons également une condition constante dans l'air, ce qui n'est pas tout à fait exact en réalité. En pratique, dans les régions à forte concentration en ions chlorure, l'effet du dioxyde de carbone peut être devancé. Les valeurs  $K = 6[mm/an^{1/2}]$  et  $K = 9[mm/an^{1/2}]$  prises pour l'application correspondent à un béton hautement et moyennement compacté respectivement.
- ❖ La concentration en ions chlorure de surface  $C_s$  est également influencée par divers paramètres tels que la composition du béton, la position de la structure, l'emplacement et l'orientation de sa surface, la concentration de chlorures dans l'environnement, ainsi que par les conditions d'exposition telles que la direction, la vitesse et l'intensité du vent et de la pluie. Dans cette application, nous considérons une concentration de bord  $C_s = 2\%$  constante sur tous les bords correspond à une attaque moyenne-élevée (voir 1). Cette valeur fournie dans la littérature représente une valeur moyenne sur toute l'année. En réalité, la concentration variera dans les régions de stagnation et de coulée. De plus, les sels de déverglaçage apparaissent seulement pendant une période de l'année, entraînant une concentration de bord dépendante du temps.
- ❖ Les coefficients de diffusion  $D_a$  et  $D_{av}$  dans le cas d'un béton intact et fissuré respectivement ont été considérés comme constants dans toutes les dimensions étudiées. En réalité, ces paramètres, qui décrivent la pénétration des chlorures, varient fortement en fonction des propriétés du béton telles que l'humidité relative, l'âge du béton, le ratio  $e/c$ , etc. Les valeurs choisies pour cette étude correspondent à celles d'un béton très résistant face aux chlorures, moyennement résistant avec son cas fissuré. Chaque structure a donc son coefficient de diffusion spécifique, et il est compliqué de trouver la valeur exacte sans étudier le site en détail. Les tests en laboratoire restent cependant une bonne alternative.

De plus, le modèle utilisé pour prédire la pénétration des chlorures à travers la matrice de béton repose uniquement sur le phénomène de diffusion, tel que décrit par la seconde loi de Fick 11. Bien que la littérature reconnaisse la diffusion comme le mécanisme principal pour expliquer le comportement des chlorures dans le béton, il est important de noter que d'autres phénomènes peuvent également jouer un rôle et influencer légèrement sur les résultats (voir 3.2.3).

- ❖ La vitesse de corrosion, provenant du taux de corrosion, est également considérée comme constante dans le temps et l'espace. Sa valeur a été sélectionnée sur la base de l'humidité relative, bien qu'elle dépende d'autres paramètres tels que la température, l'état de surface, et les caractéristiques du béton et de l'acier (voir 3.3.1). Cela suppose une réduction uniforme de l'acier sur toute la longueur de l'armature. On considère également une corrosion généralisée, négligeant ainsi la présence presque certaine de corrosion par piqûres, qui a un impact plus important sur l'armature en raison de certains agents agressifs.
- ❖ La micro-fissuration du béton a également été prise en compte dans l'étude afin de pouvoir comparer avec un élément intact. Les normes imposent des fissures maximales correspondant au cas analysé d'un béton moyennement fissuré [21]. Il serait évidemment trop compliqué de connaître la largeur exacte des fissures et l'espacement entre elles.
- ❖ Cette étude se concentre sur des simulations purement prototypes et n'est pas basée sur des tests en laboratoire, ni vérifiée par ceux-ci. Néanmoins, ces simulations s'appuient sur des modèles discutés et approuvés dans la littérature.

## 7 Conclusion

De nombreuses études ont été réalisées au cours des dernières décennies pour examiner l'impact de la corrosion sur divers ouvrages d'art, les ponts étant parmi les cas les plus étudiés. Depuis leur construction après la Seconde Guerre mondiale, époque où le béton armé était considéré comme un matériau robuste et intemporel, les superstructures ont subi de nombreuses dégradations, entraînant des effondrements imprévus avant la fin de leur durée de vie prévue. Ces dégradations ont non seulement engendré des coûts importants de maintenance et de réparation, mais ont également suscité des sentiments d'insécurité parmi la population. De plus, vers la conquête d'un transport de plus en plus optimal, l'augmentation des charges dues aux poids lourds modernes n'a fait qu'aggraver la situation.

En pratique, comprendre et analyser la corrosion implique de déterminer le temps nécessaire pour que le dioxyde de carbone, dans le cas de la carbonatation, ou que les ions chlorure, dans le cas d'une attaque par des ions de chlore, atteignent un seuil critique au niveau des armatures, désactivant ainsi la protection naturelle du béton. Dans certains contextes, la corrosion peut être causée uniquement par la carbonatation. Cependant, lorsque l'environnement est riche en ions chlorure, ces deux pathologies peuvent interagir dans le modèle de corrosion. Pour développer des modèles réalistes et précis, il est essentiel de prendre en compte toutes les dimensions de l'espace et d'imposer les conditions limites appropriées.

La modélisation de la carbonatation est généralement simplifiée par la présence quasi uniforme du dioxyde de carbone dans l'air ambiant, comme le décrit Tuutti [100]. En revanche, la modélisation de la pénétration des ions chlorure nécessite une attention particulière à la forme réelle de la structure et à ses conditions de bord. Les résultats de la simulation seront plus précis et pertinents si les concentrations de bord sont prises en compte dans les trois dimensions. C'est ici que les méthodes numériques, telles que les différences finies (DF) et les automates cellulaires (AC), deviennent essentielles. En effet, les DF tout comme les AC sont bien adaptées pour approcher le mécanisme de diffusion, permettant de discrétiser l'espace et le temps. La fiabilité de ces méthodes est désormais largement reconnue pour traiter des phénomènes complexes dans divers domaines de l'ingénierie. En intégrant ces techniques numériques, on peut obtenir des simulations plus réalistes et des prédictions plus précises de la corrosion, contribuant ainsi à une meilleure compréhension et gestion de la durabilité des structures en béton armé.

Pour une interprétation fiable, il est crucial d'inspecter la structure pendant des phénomènes de transport et de diffusion, comme les pluies. Toutefois, l'inspection peut s'avérer difficile en raison de la position peu accessible de la structure et de la présence de surfaces cachées ou inaccessibles.

C'est le cas des poutres Gerber, également connues sous le nom de "dapped-end beams" en anglais, qui se caractérisent par une réduction de la hauteur aux extrémités afin de créer un support appelé pointe ou courbeau. Une des utilités principales de ce design réside dans la création d'un joint d'expansion, ce qui améliore le comportement global du pont en permettant des mouvements d'expansion et de contraction. De plus, cette configuration facilite la construction du pont en simplifiant le montage des éléments structuraux. Cependant, ce détail de construction n'est malheureusement pas exempt de défauts. L'eau constitue son principal ennemi, notamment par infiltration au niveau du joint ou à cause d'un système de drainage défaillant, pouvant entraîner une stagnation sur la partie inférieure du bec de la poutre. Pendant l'hiver, la situation est aggravée par l'utilisation de sels de déverglage, qui augmentent la concentration en chlorures dans les eaux d'infiltration.

En raison de leur section réduite et de la présence de forces concentrées, les poutres Gerber constituent des éléments critiques créant une région perturbée où la théorie classique des poutres ne peut pas être appliquée en raison de la distribution non linéaire des contraintes. Pour pallier cette région discontinue, la méthode bielle-tirant ou "strut and tie" en anglais, largement discutée dans la littérature, s'est avérée être une solution optimale pour déterminer les armatures nécessaires à reprendre la charge verticale ultime dans le bec de l'élément. Le modèle étudié fait partie des recherches de Desnerck et al. [36]. Il est important de rappeler que de nombreuses recherches ont été élaborées pour avoir un meilleur contrôle sur la fissuration. En effet, les poutres Gerber, de par leur position, se trouvent à un endroit où les contraintes de cisaillement sont élevées, menant à des fissurations de plus en plus conséquentes qui deviennent un endroit privilégié pour les agents agressifs.

Ce mémoire de fin d'étude a permis dans un premier temps au lecteur de se familiariser au concept de pénétration d'agents agressifs en particulier les ions chlorure issus de diverses sources au travers du phénomène qui le caractérise au mieux : la diffusion avec l'utilisation des méthodes numériques populaires à ce jour. Les nombreuses analyses réalisées dans les trois dimensions au sein de la section 4 permettent de conclure que les automates cellulaires fournissent des résultats similaires que les différences finies, avec certaines simplifications et optimisations. En effet, les automates cellulaires présentées dans la littérature scientifique et utilisées dans le contexte de diffusion des chlorures sont en réalité des différences finies. Les AC restent cependant puissants pour modéliser des phénomènes où la loi de modélisation n'est pas connue.

Dans un second temps, l'étude a porté sur l'application de ces différents concepts à l'élément critique que constitue la poutre Gerber. À l'aide d'un modèle bielle-tirant sélectionné, l'évolution de la charge verticale ultime dans le temps a pu être analysée en considérant la phase d'initiation par la carbonatation et les chlorures pour des paramètres imposés, ainsi que la phase de propagation décrite par le modèle de corrosion. Pour mener à bien cette étude, l'effet de l'enrobage a été discuté, ainsi que l'impact de la fissuration sur la matrice béton, afin de valider les normes existantes [75].

L'analyse des résultats montre que la qualité du béton est un facteur déterminant pour la durabilité des structures, en particulier pour celles construites avec les moyens des années d'après guerre, bien que ce problème puisse également survenir dans des constructions actuelles. Une réduction de la capacité portante de 10 à 20 % après 20 à 40 ans de service, pouvant atteindre 50 % après 100 ans, souligne l'importance de porter une attention particulière à ces ouvrages anciens. En revanche, pour des structures récentes utilisant un béton de meilleure qualité, ces pertes sont réduites à 5 % et 25 % respectivement. De plus, la pénétration des chlorures entraîne un temps d'initiation de la corrosion plus court que celui causé par la carbonatation, soulignant un risque accru de dégradation. L'intégration d'un modèle 3D a également révélé que des armatures éloignées des zones de concentration de bord peuvent être affectées dans des structures mal conçues ou fissurées. Enfin, bien que l'effet de l'enrobage n'ait pas été directement analysé, il demeure un paramètre crucial pour la durabilité des structures, comme le soulignent les normes Eurocode (Annexe A) et les recherches de Bontemps [21].

Bien que cela ne soit pas l'objet principal de ce mémoire, il est pertinent d'évoquer les diverses techniques actuelles de contrôle et de réparation pour prévenir la dégradation des structures. Tout d'abord, l'utilisation d'un béton de haute qualité, conçu pour résister à la pénétration des agents agressifs, est essentielle. L'application de revêtements imperméables peut également renforcer la protection contre ces agents. En ce qui concerne le contrôle des structures, l'installation de capteurs pour surveiller en continu les changements au fil du temps est une approche efficace. Parmi les techniques disponibles, les émissions acoustiques, les capteurs piézoélectriques et la tomographie permettent de détecter précocement les signes de détérioration. Pour la réparation, le renforcement des structures à l'aide de plaques d'acier externes, jouant un rôle similaire à celui des armatures, est une option viable. Toutefois, il est crucial d'assurer un suivi régulier et une maintenance proactive, particulièrement pour les structures anciennes, où une réhabilitation peut s'avérer indispensable. Quant aux nouvelles constructions, l'intégration de ces mesures dès la phase de conception est essentielle pour garantir leur durabilité et leur sécurité à long terme.

En conclusion, en reliant les différentes sections, ce mémoire vise à fournir une compréhension complète des défis posés par la corrosion dans les structures en béton armé, en mettant l'accent sur les méthodes numériques pour modéliser la diffusion des chlorures et sur l'application de ces concepts à des éléments de structure spécifiques comme les poutres Gerber. Cette approche permet de mieux comprendre les mécanismes de dégradation et de développer des stratégies efficaces pour prolonger la durée de vie des structures en béton armé exposées à des environnements agressifs.

## Références

- [1] Annone : 5 anni dal crollo del ponte. messa e fiori sul posto - casateonline. <https://www.casateonline.it/notizie/129973/annone-5-anni-dal-crollo-del-ponte-messa-e-fiori-sul-posto-lt-br-gt>.
- [2] Assessment and strengthening of reinforced concrete bridges with half-joint deterioration. <https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1002/suco.202200367>.
- [3] Durability of gerber saddles in rc bridges : Analyses and applications (musmeci bridge, italy). <https://doi.org/10.3390/infrastructures6020025>.
- [4] Effects of fire on concrete. <https://www.edtengineers.com/sites/default/files/inline-images/fire%20on%20concrete%20example%203.jpg>.
- [5] In italy, will the morandi bridge be replaced? <https://qph.cf2.quoracdn.net/main-qimg-d36f9ee6d6a56209ae3f1be5ec53fa23-pjlq>.
- [6] Innovative analysis methods of reinforced concrete structures : the strut and tie method. [https://www.researchgate.net/publication/325999119\\_Innovative\\_analysis\\_methods\\_of\\_reinforced\\_concrete\\_structures\\_the\\_strut\\_and\\_tie\\_method](https://www.researchgate.net/publication/325999119_Innovative_analysis_methods_of_reinforced_concrete_structures_the_strut_and_tie_method).
- [7] La lixiviation. <http://doc.lerm.fr/wp-content/uploads/2013/08/lixiviation-carde.pdf>.
- [8] Le retrait dans le béton jeune en cours de durcissement. [https://www.febelcem.be/fileadmin/user\\_upload/dossiers-ciment-94-08/fr/16\\_fr.pdf](https://www.febelcem.be/fileadmin/user_upload/dossiers-ciment-94-08/fr/16_fr.pdf).
- [9] Lesson-31 introduction, fick's law of diffusion, mass transfer coefficients. <http://ecoursesonline.iasri.res.in/mod/page/view.php?id=2367>.
- [10] Mécanismes d'altérations des matériaux cimentaires soumis aux milieux fortement agressifs. <https://www.memoireonline.com/10/12/6325/Mecanismes-d-alterations-des-materiaux-cimentaires-soumis-aux-milieus-fortement-agressifs35.png>.
- [11] Mécanismes d'altérations des matériaux cimentaires soumis aux milieux fortement agressifs. [https://www.memoireonline.com/10/12/6325/m\\_Mecanismes-d-alterations-des-materiaux-cimentaires-soumis-aux-milieus-fortement-agressifs29.html](https://www.memoireonline.com/10/12/6325/m_Mecanismes-d-alterations-des-materiaux-cimentaires-soumis-aux-milieus-fortement-agressifs29.html).
- [12] Pathologie fissuration. <https://slideplayer.fr/slide/10640226/>.
- [13] Pont camille de hogues, châtellerault. <https://structurae.net/fr/medias/3959-pont-camille-de-hogues-chatellerault-cote-amont>.
- [14] Probabilistic corrosion initiation model for coastal concrete structures. [https://www.researchgate.net/publication/346262787\\_Probabilistic\\_Corrosion\\_Initiation\\_Model\\_for\\_Coastal\\_Concrete\\_Structures](https://www.researchgate.net/publication/346262787_Probabilistic_Corrosion_Initiation_Model_for_Coastal_Concrete_Structures).
- [15] Reinforced concrete half-joint structures | concrete infrastructure research group (cirtg). <https://www.cirtg.eng.cam.ac.uk/ResearchThemes/Reinforcedconcretehalf-jointstructures/reinforced-concrete-half-joint-structures>.
- [16] Site officiel du pont du gard. <https://pontdugard.fr/fr>.
- [17] Strut-and-tie models for deteriorated reinforced concrete half-joints. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029617304492>.
- [18] Équation de diffusion à une dimension. <https://www.f-legrand.fr/scidoc/docmml/numerique/diffusion/methode/diffusion.html>.
- [19] E. Vesikari A. Sarja. CRC Press, 1st edition, 1996. <https://www.routledge.com/Durability-Design-of-Concrete-Structures/Sarja-Vesikari/p/book/9780367865375>.
- [20] ACPresse. Qu'entend-on par "attaque des ouvrages en béton par l'action du gel-dégel"? <https://www.acpresse.fr/gel-degel-betons-nouveau-protocole-essai/>.
- [21] Bontemps Alexandra. Effects of corrosion on the capacity of the nib of reinforced concrete dapped-end beams, 2021. <http://hdl.handle.net/2078.1/thesis:30599>.

- [22] S. Ardigò C. et Motta. Durability analysis of concrete structures subjected to the diffusive action of external aggressive agents.
- [23] Djerbi Assia. Effet de l'endommagement mécanique sur la diffusion des ions chlorure dans les bétons, 2021. <https://www.iut.u-bordeaux.fr/gc/augc07/index/pdf/CJC/CJC-Assia.pdf>.
- [24] bortolopavingandconcrete. Five causes of concrete erosion how to prevent them. <https://bortolopavingandconcrete.com/five-causes-of-concrete-erosion-how-to-prevent-them/>.
- [25] Corroh. Corrosion des infrastructures : expertises et services - corroh. <https://www.corroh.com/corrosion-des-infrastructures-expertises-et-services/>.
- [26] CSTC. Prévenir la corrosion des armatures induite par la présence de chlorures dans le béton. [https://www.buildwise.be/umbraco/surface/publicationitem/downloadfile?file=31850/fr/unprotected/cstc\\_artonline\\_2008\\_4\\_no12.pdf](https://www.buildwise.be/umbraco/surface/publicationitem/downloadfile?file=31850/fr/unprotected/cstc_artonline_2008_4_no12.pdf), 2007.
- [27] TP Demain. L'histoire du béton. <https://tpdemain.com/module/lhistoire-du-beton/#:~:text=En%201867%2C%20Fran%C3%A7ois%20Hennebique%20d%C3%A9pose,ciment%20arm%C3%A9%20de%20fers%20ronds.>, 2020.
- [28] Béton Direct. Qu'est-ce que le retrait du béton? <https://www.toutsurlebeton.fr/le-ba-ba-du-beton/le-retrait-du-beton/>, 2017.
- [29] ENPC. Principales agressions et attaques du béton. [https://www.cerema.fr/system/files/documents/2017/10/02-GASSER-141022\\_Agressions\\_attaques\\_beton\\_approche\\_performantielle\\_ENPC.pdf](https://www.cerema.fr/system/files/documents/2017/10/02-GASSER-141022_Agressions_attaques_beton_approche_performantielle_ENPC.pdf), 2014.
- [30] Vesikari Erkki. Service life of concrete structures with regard to corrosion of reinforcement. 1988. [https://www.researchgate.net/publication/27785770\\_Service\\_life\\_of\\_concrete\\_structures\\_with\\_regard\\_to\\_corrosion\\_of\\_reinforcement](https://www.researchgate.net/publication/27785770_Service_life_of_concrete_structures_with_regard_to_corrosion_of_reinforcement).
- [31] Bentz D. et al. Predicting service life of steel-reinforced concrete exposed to chlorides. *Concrete International*, 36 :55–64, 2014. [https://www.researchgate.net/publication/265160668\\_Predicting\\_Service\\_Life\\_of\\_Steel-Reinforced\\_Concrete\\_Exposed\\_to\\_Chlorides](https://www.researchgate.net/publication/265160668_Predicting_Service_Life_of_Steel-Reinforced_Concrete_Exposed_to_Chlorides).
- [32] Biondini Fabio et al. Cellular automata approach to durability analysis of concrete structures in aggressive environments. *Journal of Structural Engineering-asce - J STRUCT ENG-ASCE*, 130, 2004. [https://www.researchgate.net/publication/228759132\\_Cellular\\_Automata\\_Approach\\_to\\_Durability\\_Analysis\\_of\\_Concrete\\_Structures\\_in\\_Aggressive\\_Environments](https://www.researchgate.net/publication/228759132_Cellular_Automata_Approach_to_Durability_Analysis_of_Concrete_Structures_in_Aggressive_Environments).
- [33] Boulfiza Moh et al. Prediction of chloride ions ingress in uncracked and cracked concrete. *ACI Materials Journal*, 100 :38–48, 2003. [https://www.researchgate.net/publication/279907351\\_Prediction\\_of\\_chloride\\_ions\\_ingress\\_in\\_uncracked\\_and\\_cracked\\_concrete](https://www.researchgate.net/publication/279907351_Prediction_of_chloride_ions_ingress_in_uncracked_and_cracked_concrete).
- [34] Desnerck Pieter et al. Impact of material deterioration on the strength of reinforced concrete half joint structures. volume 103, 2015. [https://www.researchgate.net/publication/272357744\\_Impact\\_of\\_Material\\_Deterioration\\_on\\_the\\_Strength\\_of\\_Reinforced\\_Concrete\\_Half\\_Joint\\_Structures](https://www.researchgate.net/publication/272357744_Impact_of_Material_Deterioration_on_the_Strength_of_Reinforced_Concrete_Half_Joint_Structures).
- [35] Desnerck Pieter et al. Impact of the reinforcement layout on the load capacity of reinforced concrete half-joints. *Engineering Structures*, 127, 2016. [https://www.researchgate.net/publication/308089235\\_Impact\\_of\\_the\\_reinforcement\\_layout\\_on\\_the\\_load\\_capacity\\_of\\_reinforced\\_concrete\\_half-joints](https://www.researchgate.net/publication/308089235_Impact_of_the_reinforcement_layout_on_the_load_capacity_of_reinforced_concrete_half-joints).
- [36] Desnerck Pieter et al. Strut-and-tie models for deteriorated reinforced concrete half-joints. *Engineering Structures*, 161 :41–54, 2018. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029617304492>.
- [37] Golden Jennifer et al. De la concorde overpass bridge collapse : Analysis of a historical failure. 2018. [https://www.researchgate.net/publication/338293655\\_De\\_La\\_Concorde\\_Overpass\\_Bridge\\_Collapse\\_Analysis\\_of\\_a\\_Historical\\_Failure/](https://www.researchgate.net/publication/338293655_De_La_Concorde_Overpass_Bridge_Collapse_Analysis_of_a_Historical_Failure/).
- [38] Gonzalez J.A. et al. Comparison of rates of general corrosion and maximum pitting penetration on concrete embedded steel reinforcement. *Cement and Concrete Research*, 25 :257–264, 1995. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/0008884695000062>.
- [39] Kato Ema et al. Development of simulation model of chloride ion transportation in cracked concrete. *Journal of Advanced Concrete Technology*, 3 :85–94, 2005. <https://doi.org/10.3151/jact.3.85>.
- [40] Lee Jae-Min et al. Numerical modeling of chloride transport in concrete under cyclic exposure to chloride. *Materials*, 15, 2022. <https://doi.org/10.3390/ma15175966>.

- [41] Lewy H. et al. Über die partiellen differenzgleichungen der mathematischen physik. *Mathematische Annalen*, 100 :32–74, 1928. <http://eudml.org/doc/159283>.
- [42] Lupesh Dudi et al. Numerical modeling for predicting service life of reinforced concrete structures exposed to chloride. *Journal of Building Engineering*, 79, 2023. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352710223020478>.
- [43] Malerba Pier et al. Influence of corrosive phenomena on bearing capacity of rc and pc beams. *Advances in concrete construction*, 5 :117–143, 2017. [https://www.researchgate.net/publication/318196783\\_Influence\\_of\\_corrosive\\_phenomena\\_on\\_bearing\\_capacity\\_of\\_RC\\_and\\_PC\\_beams](https://www.researchgate.net/publication/318196783_Influence_of_corrosive_phenomena_on_bearing_capacity_of_RC_and_PC_beams).
- [44] Mangat P.S. et al. Microstructure, chloride diffusion and reinforcement corrosion in blended cement paste and concrete. *Cement and Concrete Composites*, 16 :73–81, 1994. <https://www.sciencedirect.com/science/article/abs/pii/0958946594900027>.
- [45] Martin-Perez Beatriz et al. A study of the effect of chloride binding on service life predictions. *Cement and Concrete Research*, 30 :1215–1223, 2000. [https://www.researchgate.net/publication/44081575\\_A\\_Study\\_of\\_the\\_effect\\_of\\_chloride\\_binding\\_on\\_service\\_life\\_predictions](https://www.researchgate.net/publication/44081575_A_Study_of_the_effect_of_chloride_binding_on_service_life_predictions).
- [46] Mata-Falcón Jaime et al. Experimental research on reinforced concrete dapped-end beams : shear strength and serviceability behaviour. 2012. [https://www.researchgate.net/publication/333517239\\_Experimental\\_research\\_on\\_reinforced\\_concrete\\_dapped-end\\_beams\\_shear\\_strength\\_and\\_serviceability\\_behaviour](https://www.researchgate.net/publication/333517239_Experimental_research_on_reinforced_concrete_dapped-end_beams_shear_strength_and_serviceability_behaviour).
- [47] Mata-Falcón Jaime et al. Proposal and experimental validation of simplified strut-and-tie models on dapped-end beams. *Engineering Structures*, 183 :594–609, 2019. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029618320595>.
- [48] Naito Clay et al. Chloride migration characteristics and reliability of reinforced concrete highway structures in pennsylvania. *Construction and Building Materials*, 231, 2020. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0950061819324870>.
- [49] Nguyen Thai Quang et al. Approche multi-échelles pour modéliser la pénétration des ions chlorure dans le béton. [http://oldgc.iut-nimes.fr/internet/augc/Papiers/024\\_ngu.pdf](http://oldgc.iut-nimes.fr/internet/augc/Papiers/024_ngu.pdf).
- [50] Sgambi Luca et al. The influence of degradation phenomena on collapse modes in prestressed concrete beams. *International Journal of Lifecycle Performance Engineering*, 1 :41–63, 2012. [https://www.researchgate.net/publication/258629693\\_The\\_influence\\_of\\_degradation\\_phenomena\\_on\\_collapse\\_modes\\_in\\_prestressed\\_concrete\\_beams](https://www.researchgate.net/publication/258629693_The_influence_of_degradation_phenomena_on_collapse_modes_in_prestressed_concrete_beams).
- [51] Shah Attaullah et al. Analysis and design of disturbed regions in concrete structures. *Procedia Engineering*, 14, 2011. [https://www.researchgate.net/publication/281929660\\_Analysis\\_and\\_Design\\_of\\_Disturbed\\_Regions\\_in\\_Concrete\\_Structures](https://www.researchgate.net/publication/281929660_Analysis_and_Design_of_Disturbed_Regions_in_Concrete_Structures).
- [52] Shakir Qasim et al. Effect of opening characteristics on the performance of high strength rc dapped-end beams. 15 :693–708, 2020. [https://www.researchgate.net/publication/339310775\\_EFFECT\\_OF\\_OPENING\\_CHARACTERISTICS\\_ON\\_THE\\_PERFORMANCE\\_OF\\_HIGH\\_STRENGTH\\_RC\\_DAPPED-END\\_BEAMS](https://www.researchgate.net/publication/339310775_EFFECT_OF_OPENING_CHARACTERISTICS_ON_THE_PERFORMANCE_OF_HIGH_STRENGTH_RC_DAPPED-END_BEAMS).
- [53] Val Dimitri et al. Effect of reinforcement corrosion on reliability of highway bridges. *Engineering Structures*, 20 :1010–1019, 1998. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0141029697001971>.
- [54] W. Don et al. Forensic assessments of the influence of reinforcement detailing in reinforced concrete half-joints : A nonlinear finite element study. *Structures*, 38 :689–703, 2022. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352012422001205>.
- [55] William H. Press et al. *Numerical Recipes : The Art of Scientific Computing, Second Edition*. Cambridge University Press, 1992.
- [56] Wu Jie et al. Experimental and numerical modeling of chloride diffusivity in hardened cement concrete considering the aggregate shapes and exposure-duration effects. *Results in Physics*, 7 :1427–1432, 2017. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2211379717303753>.
- [57] X. H. Wang et al. Prediction of equivalent chloride ion diffusion coefficient in cracked concrete of the in-service rc element. *KSCE Journal of Civil Engineering*, 26 :2369–2380, 2022. <https://doi.org/10.1007/s12205-022-1601-4>.

- [58] Xin Ruan et al. Simulation method of concrete chloride ingress with mesoscopic cellular automata. *Construction and Building Materials*, 249, 2020. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0950061820307832>.
- [59] Santos V. et Anjos P.T. Finite difference method applied in two-dimensional heat conduction problem in the permanent regime in rectangular coordinates. *Advances in Pure Mathematics*, 12 :505–518, 2022. [https://www.researchgate.net/publication/363306609\\_Finite\\_Difference\\_Method\\_Applied\\_in\\_Two-Dimensional\\_Heat\\_Conduction\\_Problem\\_in\\_the\\_Permanent\\_Regime\\_in\\_Rectangular\\_Coordinates](https://www.researchgate.net/publication/363306609_Finite_Difference_Method_Applied_in_Two-Dimensional_Heat_Conduction_Problem_in_the_Permanent_Regime_in_Rectangular_Coordinates).
- [60] Mattock Alan H. et Chan Timothy C. Design and behavior of dapped-end beams. *PCI Journal*, 24 :28–45, 1979. <https://doi.org/10.15554/pcij.11011979.28.45>.
- [61] Chee Burm Shin et Eun Kyum Kim. Modeling of chloride ion ingress in coastal concrete. *Cement and Concrete Research*, 32 :757–762, 2002. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0008884601007566>.
- [62] Zhu Jinsong et He Likun. Cellular automata-based chloride ion diffusion modelling of concrete bridge under multifactor coupling action. *Journal of Wuhan University of Technology-Mater. Sci. Ed.*, 27, 2011. [https://www.researchgate.net/publication/257698337\\_Cellular\\_Automata-Based\\_Chloride\\_Ion\\_Diffusion\\_Modelling\\_of\\_Concrete\\_Bridge\\_under\\_Multifactor\\_Coupling\\_Action](https://www.researchgate.net/publication/257698337_Cellular_Automata-Based_Chloride_Ion_Diffusion_Modelling_of_Concrete_Bridge_under_Multifactor_Coupling_Action).
- [63] M.A. Mustafa et K.M. Yusof. Atmospheric chloride penetration into concrete in semitropical marine environment. *Cement and Concrete Research*, 24 :661–670, 1994. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0008884694901902>.
- [64] M.A. Mustafa et K.M. Yusof. Durability of concrete structures in marine atmosphere zones – the use of chloride deposition rate on the wet candle as an environmental indicator. *Cement and Concrete Research*, 32 :427–435, 2010. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0958946510000399>.
- [65] Yoon I et Koenders Eduardus. Theoretical time evolution of critical chloride content in concrete. *SDHM Structural Durability and Health Monitoring*, 117 :1–19, 2009. [https://www.researchgate.net/publication/258446875\\_Theoretical\\_Time\\_Evolution\\_of\\_Critical\\_Chloride\\_Content\\_in\\_Concrete](https://www.researchgate.net/publication/258446875_Theoretical_Time_Evolution_of_Critical_Chloride_Content_in_Concrete).
- [66] Tang Luping et Lars-Olof Nilsson. Rapid determination of the chloride diffusivity in concrete by applying an electrical field. *Materials Journal*, 89 :49–53, 1993. <https://www.concrete.org/publications/internationalconcreteabstractsportal/m/details/id/1244>.
- [67] Timhadjelt Nassim et Lion Maxime. Impact de la formulation des bétons sur le coefficient de diffusion des ions chlorure - focus sur l'effet des laitiers de haut-fourneau. In *Conférence Internationale Francophone NoMaD 2018*, 2018. <https://popups.uliege.be/nomad2018/index.php?id=321&file=1>.
- [68] Kasri Sarra et Meftah Roqiya. Etude de la diffusivité des ions chlorures comme indicateur de durabilité, 2020. <https://theses-algerie.com/2424802462153597/memoire-de-master/universite-mohamed-boudiaf-msila/etude-de-la-diffusivite-des-ions-chlorures-comme-indicateur-de-durabilite>.
- [69] Bazant Z.P. et Najjar L.J. Nonlinear water diffusion in nonsaturated concrete. *MATERIAUX ET CONSTRUCTIONS*, 5, 1972. <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=2c03eada41978ce816f21e5c097606b4e316f7b6>.
- [70] L. A. Clark et P. Thorogood. Serviceability behaviour of reinforced concrete half joints. *The Structural Engineer*, 66, 1988. [https://www.istructe.org/journal/volumes/volume-66-\(published-in-1988\)/issue-18/serviceability-behaviour-of-reinforced-concrete-ha/](https://www.istructe.org/journal/volumes/volume-66-(published-in-1988)/issue-18/serviceability-behaviour-of-reinforced-concrete-ha/).
- [71] Alsheet Feras et Razaqpur G. Effect of time-dependent chloride profile and temperature variation on chloride diffusion in concrete. 2018.
- [72] M. Bitaraf et S. Mohammadi. Analysis of chloride diffusion in concrete structures for prediction of initiation time of corrosion using a new meshless approach. *Construction and Building Materials*, 22 :546–556, 2008. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0950061806003035>.
- [73] Darmawan Muhammad et Stewart Mark. Effect of pitting corrosion on capacity of prestressing wires. *Magazine of Concrete Research - MAG CONCR RES*, 59 :131–139, 2007. [https://www.researchgate.net/publication/250072672\\_Effect\\_of\\_pitting\\_corrosion\\_on\\_capacity\\_of\\_prestressing\\_wires](https://www.researchgate.net/publication/250072672_Effect_of_pitting_corrosion_on_capacity_of_prestressing_wires).

- [74] Podrouzek Jan et Teplý Břetislav. Modelling of chloride transport in concrete by cellular automata. *Engineering Mechanics*, 15, 2008. [https://www.researchgate.net/publication/41956791\\_Modelling\\_of\\_Chloride\\_Transport\\_in\\_Concrete\\_by\\_Cellular\\_Automata](https://www.researchgate.net/publication/41956791_Modelling_of_Chloride_Transport_in_Concrete_by_Cellular_Automata).
- [75] FEBELCEM. Condensé de l'eurocode 2, 2017. [https://www.febelcem.be/fileadmin/user\\_upload/autres-publications/fr/EC2Condense.pdf](https://www.febelcem.be/fileadmin/user_upload/autres-publications/fr/EC2Condense.pdf).
- [76] Generalservices. Carbonatation du béton armé. [https://www.generalservices.ch/maconnerie\\_fr/carbonatation/index.html](https://www.generalservices.ch/maconnerie_fr/carbonatation/index.html).
- [77] Rémi I. Brique de boue. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Brique\\_de\\_boue](https://fr.wikipedia.org/wiki/Brique_de_boue), 2009.
- [78] REZZOUG Imad. Méthodes numériques pour les équations différentielles partielles. [https://www.academia.edu/34966901/M%C3%A9thodes\\_num%C3%A9riques\\_pour\\_les\\_%C3%A9quations\\_diff%C3%A9rentielles\\_partielles\\_pdf](https://www.academia.edu/34966901/M%C3%A9thodes_num%C3%A9riques_pour_les_%C3%A9quations_diff%C3%A9rentielles_partielles_pdf), 2017.
- [79] Cazzaro Irene. L'émergence d'une forme : le modèle d'alan turing et la conception de l'image entre naturalia et artificialia. 2020. [https://www.researchgate.net/publication/330668349\\_L%27emergence\\_d%27une\\_forme\\_le\\_modele\\_d%27Alan\\_Turing\\_et\\_la\\_conception\\_de\\_l%27image\\_entre\\_Naturalia\\_et\\_Artificialia](https://www.researchgate.net/publication/330668349_L%27emergence_d%27une_forme_le_modele_d%27Alan_Turing_et_la_conception_de_l%27image_entre_Naturalia_et_Artificialia).
- [80] Rennard Jean-Philippe. Introduction aux automates cellulaires. <https://www.renard.org/alife/french/ac.pdf>.
- [81] Mai-Nhu Jonathan. *Corrosion des armatures du béton : couplage carbonatation-chlorures en présence de cycles hydriques*. PhD thesis, Université Toulouse 3, 2013. <https://theses.fr/2013TOU30124>.
- [82] Liem Siong Ket. Maximum shear strength of dapped-end or corbel, 1983. <https://spectrum.library.concordia.ca/id/eprint/3649/>.
- [83] Hans Petter Langtangen. Finite difference methods for diffusion processes. <http://hplgit.github.io/num-methods-for-PDEs/doc/pub/diffu/sphinx/index.html>, 2015.
- [84] lavieenpierre.com. Le béton. <https://lavieenpierre.com/fr/utilisation-pierre/le-beton-1.html>.
- [85] Lerm. La protection des bétons en zone littorale. [https://www.strres.org/fichier-utilisateur/fichiers/matinee\\_technique/27\\_11\\_2013\\_diagnostic\\_des\\_chlorures\\_bernard\\_quenee\\_lem.pdf](https://www.strres.org/fichier-utilisateur/fichiers/matinee_technique/27_11_2013_diagnostic_des_chlorures_bernard_quenee_lem.pdf), 2013.
- [86] Casasanta Loredana. Effet des hydrofuges sur la diffusion des ions chlores, 2015. <https://matheo.uliege.be/handle/2268.2/2391>.
- [87] Divet Loïc. Comment se prémunir des réactions sulfatiques dans les bétons? *BULLETIN DES LABORATOIRES DES PONTS ET CHAUSSÉES*, 340 :87–94, 2022. [https://www.ifsttar.fr/collections/BLPCpdfs/blpc\\_240\\_87-94.pdf](https://www.ifsttar.fr/collections/BLPCpdfs/blpc_240_87-94.pdf).
- [88] Sgambi Luca. *LG CIV2047 - Pathologie et Réhabilitation des Ouvrages - Cours UCLouvain*.
- [89] Tang Luping and Lars-Olof Nilsson. Chloride diffusivity in high strength concrete at different ages. *Nordic Concrete Research*, 11 :162–171, 1992.
- [90] Lalonde Martin. Modélisation par automates cellulaires de brèches hydrothermales. [https://www.researchgate.net/publication/32049974\\_Modelisation\\_par\\_automates\\_cellulaires\\_de\\_brech\\_hydrothermales](https://www.researchgate.net/publication/32049974_Modelisation_par_automates_cellulaires_de_brech_hydrothermales).
- [91] Cruysmans Maxime. Évaluation de la résistance résiduelle des structures en béton armé soumises à la corrosion, 2021. <http://hdl.handle.net/2078.1/thesis:30546>.
- [92] John S. Newman. *Electrochemical Systems*. Prentice-Hall Inc., Englewood Cliffs, NJ, 1991.
- [93] Quang Huy Nguyen. *Béton armé 3 : méthode bielles-tirants*.
- [94] Arno Nytma. Différences finies pour la résolution numérique des équations de la mécanique des fluides. [https://www.academia.edu/38629555/Diff%C3%A9rences\\_finies\\_pour\\_la\\_r%C3%A9solution\\_num%C3%A9rique\\_des\\_%C3%A9quations\\_de\\_la\\_m%C3%A9canique\\_des\\_fluides](https://www.academia.edu/38629555/Diff%C3%A9rences_finies_pour_la_r%C3%A9solution_num%C3%A9rique_des_%C3%A9quations_de_la_m%C3%A9canique_des_fluides), 2006.
- [95] OpenAI. Chatgpt : A large language model. <https://chat.openai.com/>, 2024.
- [96] Bamforth Phillip. Spreadsheet model for reinforcement corrosion in structures exposed to chlorides. *Concrete under Severe Conditions 2*, 1 :64–75, 1998. [https://www.researchgate.net/publication/313629115\\_Spreadsheet\\_model\\_for\\_reinforcement\\_corrosion\\_in\\_structures\\_exposed\\_to\\_chlorides](https://www.researchgate.net/publication/313629115_Spreadsheet_model_for_reinforcement_corrosion_in_structures_exposed_to_chlorides).

- [97] Al samawi Mohammed et al. Application of 3d cellular automata-based analysis to chloride diffusion process in concrete bridges. *Structures*, 47 :500–519, 2023. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S2352012422011109>.
- [98] Leavitt Sarah. De la concorde overpass : Before and after the collapse, 2016. <https://www.cbc.ca/news/canada/montreal/de-la-concorde-overpass-collapse-timeline-1.3784265>.
- [99] Telford Thomas. *Durable Concrete Structures : Design Guide, 2nd Edition*. Fédération Internationale du Béton (fib), 2019. <https://www.fib-international.org/publications/ceb-bulletins/durable-concrete-structures-pdf-detail.html>.
- [100] Kyösti Tuutti. *Corrosion of steel in concrete*. PhD thesis, Division of Building Materials, 1982. <https://lucris.lub.lu.se/ws/files/4709458/3173290.pdf>.
- [101] Legat Vincent. *LEPL1104 - Mathématiques et méthodes numériques - Cours UCLouvain*.
- [102] Bai Yu. Numerical analysis of chloride diffusion in concrete with time varying coefficient based on the adi method. *Mathematical Modelling and Applications*, 2, 2017. [https://www.researchgate.net/publication/326421134\\_Numerical\\_Analysis\\_of\\_Chloride\\_Diffusion\\_in\\_Concrete\\_with\\_Time\\_Varying\\_Coefficient\\_Based\\_on\\_the\\_ADI\\_Method](https://www.researchgate.net/publication/326421134_Numerical_Analysis_of_Chloride_Diffusion_in_Concrete_with_Time_Varying_Coefficient_Based_on_the_ADI_Method).
- [103] Yanwei Zeng. Modeling of chloride diffusion in hetero-structured concretes by finite element method. *Cement and Concrete Composites*, 29 :559–565, 2007. <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0958946507000613>.

## 8 Annexes

### A Eurocode : normes de durabilité

Selon l'Eurocode 2 [75], pour garantir la durée de vie requise d'une structure, il est impératif de prendre des mesures adéquates afin de protéger chaque élément structural des actions environnementales. Outre les actions mécaniques, les conditions d'exposition incluent également les conditions chimiques et physiques auxquelles la structure est soumise. Parmi ces mesures, un enrobage approprié est essentiel pour plusieurs raisons : assurer une bonne transmission des forces d'adhérence, protéger l'acier contre la corrosion et garantir une résistance au feu adéquate.

Les Eurocodes EN 1992-1-1 définissent les différentes classes d'exposition en fonction des conditions environnementales. La figure suivante illustre les classes d'exposition pour une structure en béton en fonction de son type d'exposition :

Classe	Description de l'environnement	Exemples informatifs illustrant le choix des classes d'exposition
<b>1 Aucun risque de corrosion ou d'attaque</b>		
X0	Béton non armé et sans pièces métalliques noyées: toutes expositions sauf en cas de gel/dégel, d'abrasion et d'attaque chimique. Béton armé ou avec des pièces métalliques noyées : très sec	Béton à l'intérieur des bâtiments où le taux d'humidité de l'air ambiant est très faible
<b>2 Corrosion induite par carbonatation</b>		
XC1	Sec ou humide en permanence	Béton à l'intérieur des bâtiments où le taux d'humidité de l'air ambiant est faible Béton submergé en permanence dans de l'eau
XC2	Humide, rarement sec	Surfaces de béton soumises au contact à long terme de l'eau Un grand nombre de fondations (souvent en combinaison avec un environnement chimique agressif approprié pour la classe de béton)
XC3	Humidité modérée	Béton à l'intérieur de bâtiments où le taux d'humidité de l'air est moyen ou élevé Béton extérieur abrité de la pluie
XC4	Alternativement humide et sec	Surfaces de béton soumises au contact de l'eau, mais n'entrant pas dans la classe d'exposition XC2
<b>3 Corrosion induite par les chlorures</b>		
XD1	Humidité modérée	Surfaces de béton exposées à des chlorures transportés par voie aérienne
XD2	Humide, rarement sec	Béton totalement immergé dans de l'eau contenant des chlorures, par exemple les piscines Béton exposé à des eaux industrielles contenant des chlorures
XD3	Alternativement humide et sec	Éléments de ponts exposés à des projections contenant des chlorures Chaussées, dalles de parcs de stationnement de véhicules
<b>4 Corrosion induite par les chlorures présents dans l'eau de mer</b>		
XS1	Exposé à l'air véhiculant du sel marin mais pas en contact direct avec l'eau de mer	Structures sur ou à proximité d'une côte (jusqu'à 3 km de la côte)
XS2	Immergé en permanence	Éléments de structures marines
XS3	Zones de marnage, zones soumises à des projections ou des embruns	Éléments de structures marines

FIGURE 113 – Classes d'exposition en fonction des conditions environnementales (en partie) [75]

Pour l'application étudiée décrite dans le chapitre 7, les poutres Gerber constituent les éléments structuraux d'un pont exposé à la présence de dioxyde de carbone (carbonatation) et aux attaques d'ions chlorure (diffusion) dues au drainage et aux précipitations. En se référant à la figure 113, les classes d'exposition associées à ces poutres Gerber sont XC4 et XD3, selon la prédominance d'une dégradation par rapport à l'autre.

Pour déterminer l'enrobage minimal  $c_{min,dur}$  de l'élément étudié, il est recommandé de se référer à une classe structurale S4 (illustrée en gras dans la figure 115), décrivant un projet avec une durée de vie de 50 ans (par exemple, pour des immeubles), et de modifier cette classe selon les exigences spécifiques décrites partiellement dans la figure 114.

Critère	Classe d'exposition et d'environnement selon le <a href="#">Tableau 4.1</a>					
	XC1	XC2/XC3	XC4	XD1	XD2/XS1	XD3/XS2/XS3
	EI	EE1, EE2	EE3		ES1, ES2	ES3, EE4, ES4
Durée d'utilisation de projet de 100 ans	majoration de 2 classes	majoration de 2 classes	majoration de 2 classes	majoration de 2 classes	majoration de 2 classes	majoration de 2 classes
Classe de résistance	$\geq C30/37$ minoration de 1 classe	$\geq C35/45$ minoration de 1 classe	$\geq C40/50$ minoration de 1 classe	$\geq C40/50$ minoration de 1 classe	$\geq C40/50$ minoration de 1 classe	$\geq C45/55$ minoration de 1 classe
Élément assimilable à une dalle (1)	minoration de 1 classe	minoration de 1 classe	minoration de 1 classe	minoration de 1 classe	minoration de 1 classe	minoration de 1 classe
Maîtrise particulière de la qualité de production du béton (2)	minoration de 1 classe	minoration de 1 classe	minoration de 1 classe	minoration de 1 classe	minoration de 1 classe	minoration de 1 classe

FIGURE 114 – Classe structurale (en partie) [75]

Pour l'application en question, à savoir les poutres Gerber d'un pont, la durée de vie prévue est de 100 ans. En se référant à la figure 114, pour les classes d'exposition XC4 et XD3, il est nécessaire d'augmenter de deux classes, soit S6, pour ce type de structure. Toutefois, en tenant compte de la classe de résistance courante C40/50, il est possible de diminuer d'une classe, ce qui revient à considérer la classe structurale S5 pour les poutres Gerber.

Classe Structurale	Classes d'exposition et d'environnement selon le <a href="#">Tableau 4.1</a>					
	XC1 EI	XC2, XC3 EE1, EE2	XC4 EE3	XD1, XS1 ES2	XD2, XS2 ES1, ES3	XD3, XS3 EE4, ES4
S1	10	10	15	20	25	30
S2	10	15	20	25	30	35
S3	10	20	25	30	35	40
<b>S4</b>	<b>15</b>	<b>25</b>	<b>30</b>	<b>35</b>	<b>40</b>	<b>45</b>
S5	20	30	35	40	45	50
S6	25	35	40	45	50	55

Pour le béton armé exposé à un environnement chimiquement agressif (XA et EA), la plus grande valeur  $c_{min,dur}$  exigée pour les autres classes d'exposition et d'environnement auxquelles le béton est exposé est d'application

FIGURE 115 – Valeurs de l'enrobage minimal  $c_{min,dur}$  requis vis-à-vis de la durabilité dans le cas des armatures de béton armé [75]

En se référant au tableau de la figure 115, la classe structurale S5 permet d'obtenir les valeurs d'enrobage minimales  $c_{min,dur} = 35$  mm et  $c_{min,dur} = 50$  mm pour les classes d'exposition XC4 et XD3, respectivement. Ces normes concluent que l'enrobage requis pour un type de structure dépend principalement de sa classe d'exposition, de sa durée de vie et de la classe de résistance du béton utilisé.

## B Tableau : comparaison des schémas numériques explicites et des schémas analytiques 1D

Les résultats découlant de la solution numérique par les différences finies en schéma explicite (DFE) et de la solution analytique (ANA) ainsi que l'erreur entre les deux sont repris dans le tableau suivant :

Temps [année]	Profondeur [mm]	DFE [%]	ANA [%]	Différence [%]
10	10	0.6899	0.6877	0.0022
	50	0.0505	0.0444	0.0061
	100	0.0002	0.0001	0.0001
20	10	0.7780	0.7762	0.0018
	50	0.1609	0.1552	0.0057
	100	0.0057	0.0045	0.0012
50	10	0.8586	0.8573	0.0013
	50	0.3734	0.3687	0.0047
	100	0.0758	0.0722	0.0036
100	10	0.8998	0.8988	0.0010
	50	0.5289	0.5248	0.0041
	100	0.2082	0.2034	0.0048

TABLE 21 – Résultats des méthodes numériques (DFE) et analytiques (ANA) pour différentes profondeurs et durées

## C Implémentation Python : schémas implicites 1D

---

```

1      """Modélisation de la diffusion 1D de chlore dans une longueur de 1000mm de béton"""
2
3      # Importation
4      import numpy as np
5      import math
6      import matplotlib.pyplot as plt
7      import time
8
9      # Paramètres
10     L = 1000 # Longueur du béton selon x (mm)
11     T = 100 # Durée totale d'analyse (années)
12     D_app = 0.000001 # Coefficient de diffusion supposé constant (mm2/s)
13     C_s = 1 # Concentration à la surface (%)
14
15     # Partie numérique : différences finies (implicite)
16
17     # Discrétisation
18     Nx = 100 # Nombre de points spatiaux selon x
19     Deltax = L/(Nx) # Pas de discrétisation selon x
20     Deltat = 0.1 # Incrément temporel choisi
21     Nt = int((T/Deltat) + 1) # Nombre de points temporels
22
23     # Creation de la matrice A et du vecteur b
24     A = np.zeros((Nx, Nx))
25     b = np.zeros(Nx)
26     F = D_app * Deltat * 365 * 24 * 3600 / (Deltax**2)
27     for i in range(1, Nx-1):
28         A[i,i-1] = -F
29         A[i,i+1] = -F
30         A[i,i] = 1 + 2*F
31     A[0,0] = A[Nx-1,Nx-1] = 1
32
33     # Listes
34     t = np.linspace(0, T, Nt) # Liste des valeurs de temps (mm)
35     x = np.linspace(0, L, Nx) # Liste des valeurs de positions (mm)
36     c = np.zeros(Nx) # Listes des valeurs de concentrations initiales C(x) initié à 0
37     c_n = np.zeros(Nx) # Matrice des valeurs de concentrations finales C(x) initié à 0
38
39     # Mise à jour de la liste concentration C[x, t]
40     C_num = []
41     for n in range(0, Nt):
42         # Iteration dans b
43         b[1:Nx-1] = c_n[1:Nx-1]
44         # Condition de bord
45         b[0] = C_s
46         # Resolution du systeme
47         c[:] = np.linalg.solve(A, b)
48
49         C_num.append(c.copy())
50         c_n = c[:]
51     C_num = np.array(C_num)

```

---

## D Schémas implicites 2D : exemple proposé par Petter [83]

La figure suivante illustre le maillage spatiale en 2 dimensions :



FIGURE 116 – Graille spatiale pour le maillage  $N_x = 3$  et  $N_y = 2$

Sur le plan matriciel, la structure de la matrice des coefficients  $A$  reste similaire à celle du cas unidirectionnel. Cependant, le vecteur  $c$  des inconnues, qui était présent dans le cas unidimensionnel, doit désormais accueillir une dimension supplémentaire pour inclure les indices  $j$  indiquant les dimensions des  $y$ . Ainsi,  $c$  devient un tableau de valeurs à deux dimensions. Cette modification engendre une incompatibilité de taille lors du produit matriciel. Pour remédier à cette situation, il est nécessaire d'établir un "mapping"  $m(i, j)$ , permettant de représenter les indices  $(i, j)$  d'une grille bidimensionnelle dans un tableau unidimensionnel à l'aide d'indices unidimensionnels  $p$ , comme présenté dans [83].

$$p = m(i, j) = j \cdot (N_x) + i \quad (121)$$

Pour l'exemple choisi, on obtient le mapping suivant :

$$(0, 0) \rightarrow 0, (1, 0) \rightarrow 1, (2, 0) \rightarrow 2, (3, 0) \rightarrow 3, \quad (122)$$

$$(0, 1) \rightarrow 4, (1, 1) \rightarrow 5, (2, 1) \rightarrow 6, (3, 1) \rightarrow 7, \quad (123)$$

$$(0, 2) \rightarrow 8, (1, 2) \rightarrow 9, (2, 2) \rightarrow 10, (3, 2) \rightarrow 11 \quad (124)$$

Ces valeurs de  $p$  sont également présentes dans la grille représentative de l'exemple de maillage choisi à la figure 116. La construction de la matrice  $A$  peut se faire à l'aide de ces nouveaux indices, on remarquera le caractère diagonal de la matrice :

$$A[p, m(i, j - 1)] = -\theta \cdot Fy \quad (125)$$

$$A[p, m(i - 1, j)] = -\theta \cdot Fx \quad (126)$$

$$A[p, p] = 1 + 2\theta \cdot (Fx + Fy) \quad (127)$$

$$A[p, m(i + 1, j)] = -\theta \cdot Fx \quad (128)$$

$$A[p, m(i, j + 1)] = -\theta \cdot Fy \quad (129)$$

$$(130)$$

La matrice  $A$ , étant majoritairement composée de zéros, est considérée comme creuse. Pour intégrer les conditions de bords, il faut attribuer une valeur unitaire à certains éléments. Par exemple, pour appliquer une condition  $C_s$

sur les quatre bords du domaine, nous utilisons des conditions "if" pendant le remplissage de  $A$ . Ainsi, lorsque  $i$  est soit 0, soit  $N_x$  pour toutes les valeurs de  $j$ , ou lorsque  $j$  est soit 0, soit  $N_y$  pour toutes les valeurs de  $i$ , nous imposons une valeur unitaire à l'élément correspondant de  $A$ .

## E Implémentation Python : schémas implicites 2D

---

```

1      """Modélisation de la diffusion 2D de chlore dans une section de béton avec schéma implicite"""
2
3      # Importation
4      import sys
5      import numpy as np
6      import time
7      import matplotlib.pyplot as plt
8      import scipy.linalg
9
10     # Paramètres
11     theta = 0.5 # Choix du theta
12     X = 100 # Longueur du béton selon x (mm)
13     Y = 100 # Longueur du béton selon y (mm)
14     T = 100 # Durée totale d'analyse (années)
15     D_app = 0.000001 # Coefficient de diffusion supposé constant (mm2/s)
16     C_s = 1 # Concentration à la surface (%)
17
18     # Partie numérique : différences finies (implicite)
19
20     # Discrétisation
21     Nx = 100 # Nombre de points spatiaux selon x
22     Ny = 100 # Nombre de points spatiaux selon y
23     Deltax = X/(Nx) # Pas de discrétisation selon x
24     Deltay = Y/(Ny) # Pas de discrétisation selon y
25     Deltat = 1 # Incrément temporel
26     Nt = int((T/Deltat) + 1) # Nombre de points temporels
27
28     # Listes
29     x = np.linspace(0, X, Nx) # Liste des valeurs de profondeur x (mm)
30     y = np.linspace(0, Y, Ny) # Liste des valeurs de profondeur y (mm)
31     t = np.linspace(0, T, Nt) # Liste des valeurs temporelles (années)
32     c = np.zeros((Nx+1, Ny)) # Liste des valeurs de concentrations initiales C(x) initié à 0
33     c_n = np.zeros((Nx+1, Ny)) # Liste des valeurs de concentrations finales C(x) initié à 0
34
35     t0 = time.time() # Temps initial processus
36
37     # Mapping
38     m = lambda i, j: j*(Nx) + i
39
40     # Creation de la matrice A et du vecteur b
41     A = np.zeros(((Nx)*(Ny), (Nx) *(Ny)))
42     b = np.zeros((Nx)*(Ny))
43     Fx = D_app*Deltat*365*24*3600/Deltax**2
44     Fy = D_app*Deltat*365*24*3600/Deltay**2
45     for j in range(Ny):
46         for i in range(Nx):
47             p = m(i, j)
48             if j == 0 or j == Ny-1 or i == 0 or i == Nx-1:
49                 A[p, p] = 1 # Conditions frontières sur les 4 bords
50             else:
51                 A[p, m(i, j - 1)] = -theta * Fy
52                 A[p, m(i - 1, j)] = -theta * Fx
53                 A[p, p] = 1 + 2 * theta * (Fx + Fy)

```

---

```
54         A[p, m(i + 1, j)] = -theta * Fx
55         A[p, m(i, j + 1)] = -theta * Fy
56
57     # Mise à jour de la liste concentration C[x, y, t]
58     C_num = []
59     for n in range(0, Nt):
60         # Iteration dans b
61         for j in range(Ny):
62             for i in range(Nx):
63                 p = m(i, j)
64                 # Conditions de bord
65                 if j == 0 or j == Ny-1 or i == 0 or i == Nx-1:
66                     b[p] = C_s # Condition en C[0, y, t], C[1000, y, t], C[x, 0, t], C[x, 1000, t]
67                 else:
68                     b[p] = c_n[i, j] + (1 - theta) * (
69                         Fx * (c_n[i + 1, j] - 2 * c_n[i, j] + c_n[i - 1, j]) +
70                         Fy * (c_n[i, j + 1] - 2 * c_n[i, j] + c_n[i, j - 1])
71                     )
72
73     # Resolution du systeme
74     c_sys = np.linalg.solve(A, b)
75     # Remplissage de c avec c_sys
76     for i in range(Nx):
77         for j in range(Ny):
78             c[i,j] = c_sys[m(i,j)]
79     C_num.append(c.copy())
80     c_n = c
81     C_num = np.array(C_num)
82     t1 = time.time() # Temps final processus
83
```

---

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN  
École polytechnique de Louvain

Rue Archimède, 1 bte L6.11.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | [www.uclouvain.be/epl](http://www.uclouvain.be/epl)