

École polytechnique de Louvain

Etude numérique et expérimentale du comportement dynamique des structures de tensegrité

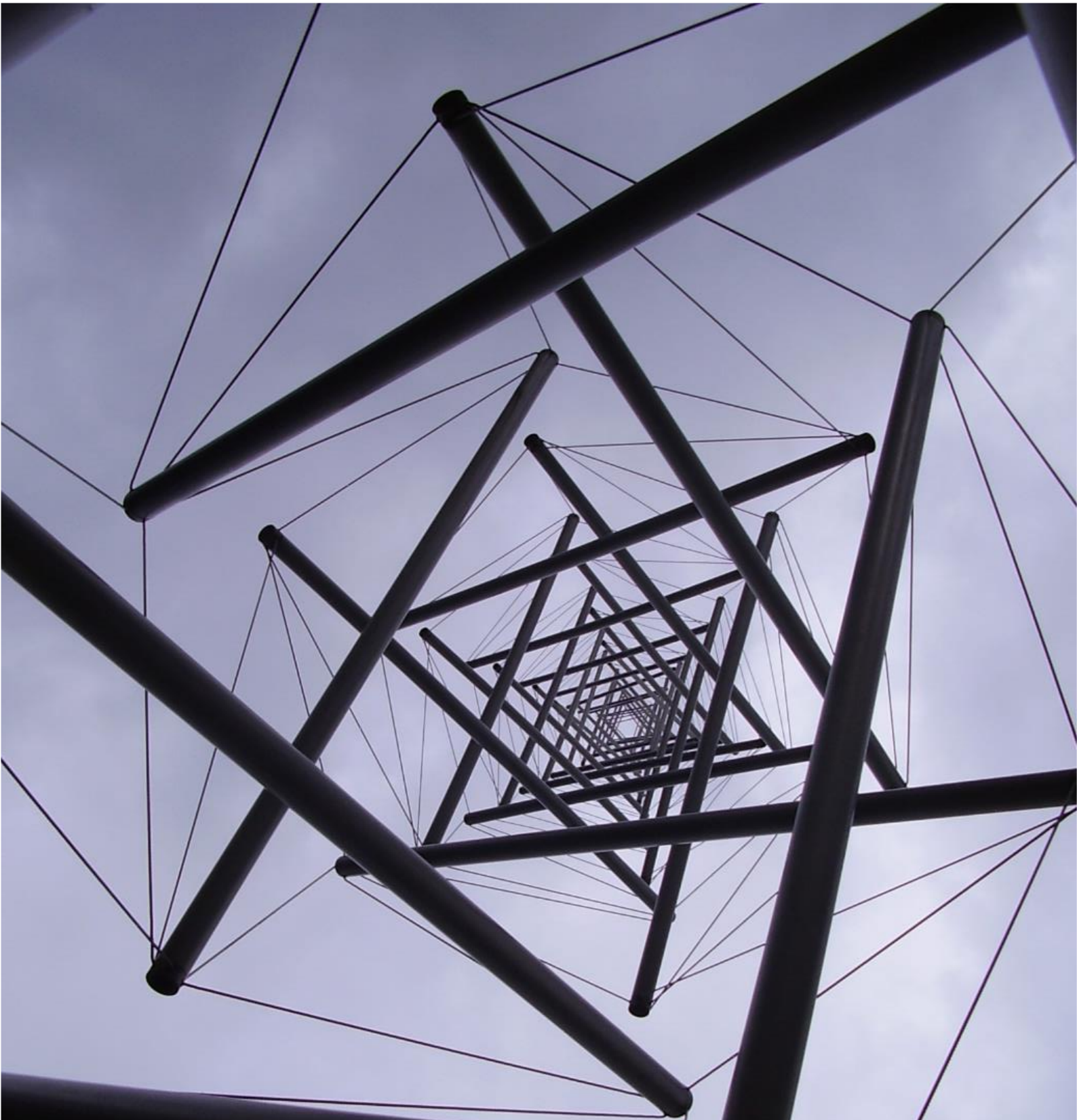
Auteur : **Antoine DESMET**

Promoteurs : **Pierre LATTEUR, João PACHECO DE ALMEIDA**

Lecteurs : **Jonas FERON, Jens NICLAES**

Année académique 2021–2022

Master [120] : ingénieur civil des constructions



Année académique : 2021-2022

Promoteurs : Prof. Pierre LATTEUR

Prof. João PACHECO DE ALMEIDA

Assistant : Jonas FERON

Source : [47]

Etude numérique et expérimentale du comportement dynamique des structures de tensegrité

Antoine DESMET

« Tout obstacle renforce la détermination. Celui qui s'est fixé un but n'en change pas. »

Léonard de Vinci

Résumé

Les structures en tensegrité sont composées de barres en compression connectées entre elles grâce à des câbles en traction.

Le nombre de structures civiles réellement construites en tensegrité reste à ce jour très limité car elles se déforment de manière significative lorsqu'elles sont chargées. Ce comportement s'appelle la non-linéarité géométrique.

Ce mémoire étudie l'influence de ce comportement sur la dynamique des structures en tensegrité. A cette fin, les résultats expérimentaux obtenus sur un SIMPLEX instrumenté de grande taille sont comparés aux résultats numériques obtenus grâce à un logiciel paramétrique développé à cet effet.

Mots-clés : tensegrité, dynamique, précontrainte, chargement externe, non-linéarité géométrique, numérique, Rhino-Grasshopper, expérimental, SIMPLEX.

Remerciements

Ce mémoire est le fruit d'une année de travail auquel de nombreuses personnes ont contribué de près ou de loin.

Que tous ceux qui m'ont encouragé et conseillé judicieusement tout au long de ces recherches trouvent ici l'expression de ma profonde reconnaissance.

Mes remerciements s'adressent en particulier à Jonas FERON, doctorant à l'UCLouvain, qui par ses conseils avisés m'a guidé durant ces recherches.

Je remercie les Professeurs Pierre LATTEUR et João PACHECO DE ALMEIDA qui ont toujours fait preuve de disponibilité pour me conseiller.

Je remercie Jens NICLAES, doctorant à l'UCLouvain, d'avoir accepté d'être lecteur de ce travail.

Table des matières

Résumé	VI
Remerciements	VI
Introduction	1
Fondements	5
1 Introduction	7
2 Etat de l'art	7
2.1 Définitions.....	7
2.2 Contexte historique de la tenségrité	8
2.3 Typologie des structures en tenségrité	10
2.3.1 Cellule élémentaire	10
2.3.2 Combinaison de cellules élémentaires.....	11
2.4 La tenségrité au pôle GCE de l'EPL	12
3 Le SIMPLEX instrumenté de grande taille	15
3.1 Les deux types de positions du SIMPLEX	16
3.2 Poids propre du « SIMPLEX – masses pendues »	18
3.2.1 Poids propre du « SIMPLEX – masses pendues »	18
3.2.2 Poids propre du « SIMPLEX – masses pendues » incluant la masse des accéléromètres	19
3.3 La précontrainte	21
3.3.1 Introduction homogène de la précontrainte	21
3.3.2 Mode d'auto-contrainte	22
3.3.3 Matrice de sensibilité.....	23
3.4 Le chargement externe	24
4 Comportement statique des structures en tenségrité et le cas du SIMPLEX.....	27
4.1 La non-linéarité géométrique	27
4.2 Rigidité matérielle et géométrique	30
4.3 Résultats statiques sous l'influence du niveau de précontrainte sous poids propre	32
4.4 Résultats statiques sous l'influence du chargement externe	34
4.5 Conclusion	36
5 La dynamique des structures : concepts théoriques	39
5.1 Calcul statique versus calcul dynamique	39
5.2 Equation de base	40
5.3 Single Degree of Freedom – SDOF	41

5.3.1	Les forces résistantes.....	41
5.3.2	L'équation du mouvement.....	43
5.3.3	Les caractéristiques intrinsèques au système.....	46
5.3.4	Résolution des équations : oscillation libre	46
5.3.5	Résolution des équations : oscillation forcée	46
5.3.6	L'excitation d'un degré de liberté	47
5.4	Multi Degree Of Freedom – MDOF	50
5.4.1	Equation du mouvement.....	50
5.4.2	Les fréquences propres	51
5.4.3	Les modes propres.....	52
5.4.4	Propriété des modes.....	52
5.4.5	Equation du mouvement selon la variable q	53
5.4.6	Normalisation des modes	53
5.4.7	Résolution des équations modales.....	54
5.4.8	Combinaison des modes	55
6	Conclusion de la partie « Fondements ».....	55
	Etude dynamique du SIMPLEX.....	57
1	Introduction	59
1.1	Exploration bibliographique sur la dynamique des structures en tensegrité.....	59
1.2	Objectifs de l'étude dynamique du SIMPLEX	62
2	Outil numérique.....	63
2.1	Le logiciel	64
2.1.1	Rhino-Grasshopper.....	64
2.1.2	C#	68
2.1.3	Python.....	69
2.2	Les composants Grasshopper développés pour le calcul dynamique	69
2.2.1	Exemple concret de l'utilisation des composants « dynamiques ».....	71
2.2.2	Les types de composants « dynamiques ».....	76
2.2.3	Composants « <i>Calculateurs</i> ».....	77
2.2.4	Composants « <i>Exécutants</i> ».....	79
2.3	Le code Python	83
2.3.1	Structure du code Python.....	83
2.3.2	Les tests effectués.....	84
2.4	Les problèmes et difficultés rencontrés	84
3	Etude expérimentale et numérique de la dynamique du SIMPLEX.....	87

3.1	Introduction.....	87
3.2	Méthode	87
3.2.1	Description du prototype	87
3.2.2	Description du protocole de test sur le « SIMPLEX – masses posées »	91
3.2.3	Hypothèses du calcul numérique.....	92
3.3	Résultats.....	93
3.3.1	Etude des fréquences propres	93
3.3.2	Etude des modes propres	105
	Conclusion et perspectives	117
	Annexes.....	123
1	Annexe 1 – Caractéristiques du SIMPLEX.....	125
1.1	Caractéristiques mécaniques	126
2	Annexe 2 – Vérification du comportement statique du SIMPLEX.....	129
3	Annexe 3 – Deux modèles de matrice de masse	131
3.1	Matrice de masse « <i>lumped</i> ».....	132
3.2	Matrice de masse « <i>consistent</i> ».....	132
4	Annexe 4 – Version des logiciels utilisés.....	133
5	Annexe 5 – Etapes d’installation du programme en mode « développeur »	135
6	Annexe 6 – Dispositif d’acquisition des données.....	137
6.1	L’accéléromètre	137
6.2	Acquisition des données.....	138
7	Annexe 7 – Descriptif du logiciel ARTeMIS (Traitement des données expérimentales)	141
7.1	La Méthode EFDD.....	142
8	Annexe 8 – Etude dynamique du « SIMPLEX – masses pendues »	145
8.1	Introduction.....	145
8.2	Méthode	145
8.2.1	Description du prototype	145
8.2.2	Description du protocole	145
8.3	Résultats.....	147
8.3.1	Tendance des mesures expérimentales	147
8.3.2	Choix d’un protocole expérimental	152
8.4	Conclusion	153
8.5	Données expérimentales post-traitées avec ARTeMIS.....	154
9	Annexe 9 – Détermination du chargement maximal	163
9.1	Données.....	163

9.2	Hypothèses.....	164
9.3	Méthode de résolution.....	164
9.4	Résolution	165
10	Annexe 10 – Résultats expérimentaux du « SIMPLEX – masses posées »	167
10.1	Synthèse des résultats de la première fréquence propre	167
10.2	Synthèse des résultats de la seconde fréquence propre	168
10.3	Graphiques des valeurs singulières des densités spectrales.....	168
11	Annexe 11 – Rapport numérique en position déformée entre la fréquence propre liée uniquement à la rigidité matérielle et la fréquence propre liée à la rigidité totale sur le « SIMPLEX – masses posées »	175
12	Annexe 12 – Evolution numérique des fréquences propres du « SIMPLEX – masses posées » 181	
13	Annexe 13 – Modes propres du « SIMPLEX – masses posées ».....	185
14	Annexe 14 – Comparaison entre le premier mode numérique et l'expérimental – « SIMPLEX – masses posées »	191
	Liste des figures.....	199
	Liste des tableaux	207
	Liste des équations	209
	Bibliographie	211

Introduction

Le visiteur de l'Expo 2019 à Pékin n'a pu manquer le nuage blanc qui surplombe le jardin belge. Ce nuage blanc apprécié pour son aspect léger, souple et aérien, flottant littéralement dans l'air, est basé sur le principe de la tensegrité.

Plus connue du grand public à travers l'art depuis les années 60-70, la tensegrité est « l'art de la construction de structures faisant illusion de défier la gravité » [1]. La tensegrité est en architecture la conception d'une structure qui se tient et se stabilise par les jeux de forces de tension et de compression. [2]. Elle constitue une des techniques de construction les plus complexes car l'équilibre des contraintes mécaniques est la base de la stabilité de la structure, et non la résistance de chacun des éléments.



Figure 1 – Structure en tensegrité – jardin belge de l'Expo 2019 à Pékin [3]

Même si l'origine de la tensegrité est l'objet de débats, les premières formes de structures en tensegrité remonteraient aux années 1920 [2]. Jusqu'à présent, elles ont été principalement utilisées pour la création d'œuvres d'art. Le nombre de structures civiles réellement construites en tensegrité reste à ce jour très limité et ce type de systèmes est principalement très peu ou non portant.

Depuis, le concept énoncé par l'architecte américain Richard Buckminster Fuller qui se référait à des « îlots de compression au sein d'un océan de tension » [4], les structures en tensegrité connaissent un développement théorique et applicatif important au cours de ces dernières années en raison de leur comportement structurel particulier : afin d'absorber une force externe, une structure en tensegrité atteint son équilibre statique grâce à une déformation géométrique significative. Ce comportement est similaire à celui d'une slackline tendue entre deux arbres qui, sous la force externe d'un funambule, se déforme du fait de l'absence de rigidité dans sa position initiale pour atteindre son équilibre statique.



Figure 2 – Déformation d'une slackline [5]

Cette caractéristique comportementale qui rend les structures en tenségrité particulièrement flexibles sous un chargement externe est appelée la non-linéarité géométrique ou la déviation importante entre la configuration initiale de la structure et sa configuration déformée. Introduire de la précontrainte, c'est-à-dire agir sur une contrainte initialement présente dans la structure, permet de la rigidifier afin d'en limiter les déplacements. Dans le cas du funambule et de la slackline, la précontrainte prend la forme d'une tension initiale introduite par un raccourcissement du câble.

La non-linéarité géométrique des structures en tenségrité constitue un défi majeur pour l'utilisation de ce type de structures en génie civil, ce qui explique en partie leur nombre très limité et le regain d'intérêt de la recherche.

L'étude des structures en tenségrité au pôle Génie Civil et Environnemental de l'UCLouvain (UCL/GCE) a débuté durant l'année académique 2013-2014 sous l'impulsion du Professeur Pierre LATTEUR dont les recherches ont pour objectif d'étudier la possibilité d'utiliser ces structures en génie civil.

Depuis lors, les recherches se sont concentrées sur un cas d'étude : une passerelle appelée « Snake Footbridge ». Elles ont notamment permis d'aboutir au développement d'un logiciel d'analyse statique structurale spécifique aux structures en tenségrité et à sa validation sur un prototype expérimental en aluminium d'un SIMPLEX¹ de deux mètres de haut.

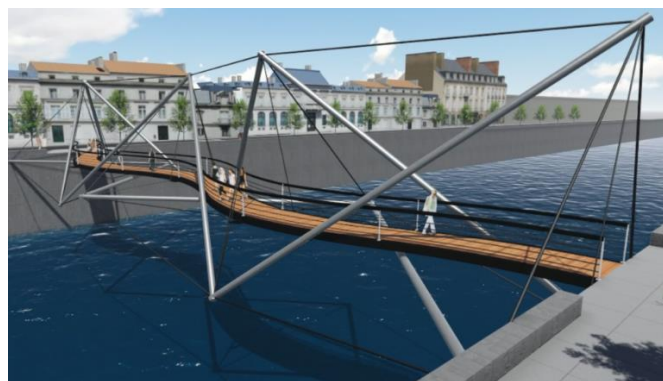


Figure 3 – « Snake Footbridge » [6]

Une étude holistique des possibilités d'utilisation des structures en tenségrité dans le domaine du génie civil ne peut toutefois ignorer la perspective dynamique. En effet, tous les ouvrages civils sujets à un chargement cyclique tel que le passage de piétons ou le vent nécessitent un dimensionnement dynamique. En outre, dans certains cas, l'excitation due au chargement périodique peut créer des effets indésirables pour le confort des utilisateurs ou même, dans les cas les plus critiques, mener à la ruine de la structure. Une étude dynamique des ouvrages d'art, tels que la passerelle « Snake Footbridge », ne peut donc être négligée afin de s'assurer que les piétons qui emprunteront celle-ci ne risquent pas de faire rentrer en résonance la structure.

En s'appuyant sur les travaux de recherche existants, le présent mémoire consiste à étudier, pour la première fois à l'UCLouvain, le comportement dynamique d'un SIMPLEX dans une perspective numérique et expérimentale. A cette fin, le présent mémoire a un double objectif.

¹ Structure 3D la plus simple en tenségrité (Figure 8 en page 11)

D'une part, cette étude développe un outil numérique paramétrique permettant de calculer les fréquences et mode propre d'une structure en tensegrité. La spécificité de l'outil numérique réside dans la considération de l'effet de la précontrainte dans la rigidité totale de la structure ainsi que de la possibilité d'étudier la dynamique dans la position initiale et la position déformée de la structure. Ces deux éléments font la force de l'outil développé car ils ne peuvent actuellement pas être considérés dans les logiciels commerciaux tel que SCIA.

D'autre part, ce mémoire étudie l'effet des grands déplacements sur la dynamique du SIMPLEX en confrontant les résultats numériques à ceux obtenus expérimentalement sur le SIMPLEX de grande taille qui a été testé sous différents niveaux de précontrainte et de chargement externe. Cette étude est particulièrement intéressante dans la mesure où les articles scientifiques disponibles n'ont pas encore abordé l'effet de la non-linéarité géométrique sur la dynamique des structures en tensegrité.

Ce mémoire s'articule en deux parties : Fondements et Etude dynamique du SIMPLEX.

La **première partie** a pour objectif de présenter la tensegrité d'un point de vue historique et théorique. Cette partie est subdivisée en quatre chapitres. Le premier chapitre contextualise le mémoire dans l'évolution historique de la tensegrité et les développements effectués ces dernières années à l'UCL/GCE. Le deuxième chapitre présente les caractéristiques géométriques et mécaniques du SIMPLEX expérimental. Le troisième chapitre synthétise le comportement statique du SIMPLEX et fournit une base théorique de certaines notions-clés. Enfin, les éléments théoriques de la dynamique des structures sont abordés dans le quatrième chapitre.

La **seconde partie** du mémoire porte sur la dynamique des structures en tensegrité dans une perspective théorique et expérimentale. Cette partie est subdivisée en trois chapitres. Le premier chapitre présente le contexte scientifique de la dynamique des structures en tensegrité. L'outil numérique paramétrique développé sous Rhino – Grasshopper est exposé dans le deuxième chapitre. Le dernier chapitre présente la démarche suivie pour effectuer les tests expérimentaux et compare les résultats numériques et expérimentaux.

L'enjeu majeur et l'originalité de ce mémoire consistent à apporter une meilleure compréhension théorique et expérimentale de l'influence de la non-linéarité géométrique sur la dynamique des structures en tensegrité et plus particulièrement du SIMPLEX.

Fondements

1 Introduction

La partie « Fondements » de ce mémoire est organisée en quatre chapitres.

Le premier chapitre présente l'état de l'art historique et ainsi que les recherches effectuées sur la tenségrité au pôle UCL/GCE.

Le deuxième chapitre présente les caractéristiques du SIMPLEX de grande taille.

Le troisième chapitre synthétise le comportement statique du SIMPLEX et fournit des explications sur les caractéristiques importantes de ce dernier.

Enfin, le dernier chapitre présente tous les éléments théoriques et les termes techniques de la dynamique des structures afin de comprendre l'étude dynamique effectuée dans la deuxième partie de ce mémoire.

2 Etat de l'art

Afin de faciliter la compréhension et les enjeux de l'étude des structures en tenségrité, l'état de l'art historique et la révision de la littérature scientifique sont scindés.

La révision de la littérature scientifique, portant sur la dynamique des structures en tenségrité, est présentée dans le premier chapitre de la seconde partie de ce mémoire.

2.1 Définitions

Le mot « tenségrité » provient du mot anglais « tensegrity », contraction de deux mots [7] : « tensional » et « integrity ». L'intégrité, la stabilité de la structure, est garantie par la tension dans les câbles. Cela reste cependant flou et de nombreuses définitions existent pour définir ce type de structure.

Dans son brevet, R. B. FULLER [4] définit la tenségrité telle que « *Une île de compression à l'intérieur d'un océan de tension* ».

Plus précisément, PLUG [4] propose lui une définition permettant d'avoir une image plus précise de ce que représente la tenségrité :

« *Un système de tenségrité est établi lorsqu'un ensemble de composantes discontinues de compression interagit avec un ensemble de composantes continues de traction pour définir un volume stable dans l'espace* ».

Cette dernière permet de comprendre le concept d'interaction entre un ensemble de barres non continues en compression et de câbles continus en traction. Cependant, elle ne met pas en lumière une caractéristique essentielle des structures en tenségrité : l'autocontrainte.

Cette caractéristique est traitée dans une définition donnée par MOTRO [8] :

« Un système de tenségrité est un système dans un état d'autocontrainte stable, il comprend un ensemble discontinu de composants comprimés à l'intérieur d'un continuum de composants tendus »

L'autocontrainte, aussi appelée précontrainte, est un état de la structure dans laquelle les efforts internes dans celle-ci sont non-nuls. Les réactions aux appuis restent nulles car les efforts bien que non nuls s'auto-équilibrent dans la structure.

Enfin, les barres et les câbles sont connectés entre eux par des nœuds. Ces nœuds sont des rotules car aucun moment n'est transmis depuis les nœuds vers les éléments linéiques. C'est en ces nœuds que s'applique le chargement externe ponctuel.

Ce dernier point permet à tous les éléments qui composent une structure en tenségrité de n'avoir que des efforts normaux. Cela rapproche les structures en tenségrité d'un treillis en trois dimensions². Contrairement aux treillis, la répartition des efforts est limitée par l'impossibilité des câbles de résister à un effort de compression.

2.2 Contexte historique de la tenségrité

Méconnue, la tenségrité est un principe structurel tel qu'il en existe des multitudes. Son origine remonterait aux années 1920. [2] L'artiste soviétique Karl IOGANSON expose alors des œuvres tri-dimensionnelles, illustrées ci-dessous, dont l'équilibre se produit grâce à l'équilibre entre les forces de tension dans les câbles et de compression dans les barres.



Figure 4 – Exposition de Karl IOGANSON [2]

² Uniquement du point de vue de la géométrie et du type d'effort présent dans la structure car leurs comportements ne sont pas identiques.

En 1949, Richard BUCKMINSTER FULLER, architecte américain [9], crée un dôme géodésique en tensegrité et dépose des brevets. Il a joué un rôle prépondérant dans l'invention du concept et sa popularisation.

L'origine exacte de la tensegrité reste cependant sujette à discussion et son origine précise contestée car Kenneth SNELSON, élève de R. B. FULLER et artiste, affirme que ce dernier lui a usurpé sa découverte. K. SNELSON est l'auteur de « Needle Tower », une tour en tensegrité d'une hauteur de 26.5 mètres construite en 1961.



Figure 5 – « Needle Tower » de K. SNELSON [10]

David Georges EMMERICH, contemporain de R. B. Fuller et K. SNELSON, développe et popularise en France un concept nommé « systèmes autotendants ». Cet ingénieur et architecte, principal représentant en France de la recherche sur la morphologie structurale [11], a par exemple développé un projet de pont au-dessus de la Manche en tensegrité en forme de delta-octogone.

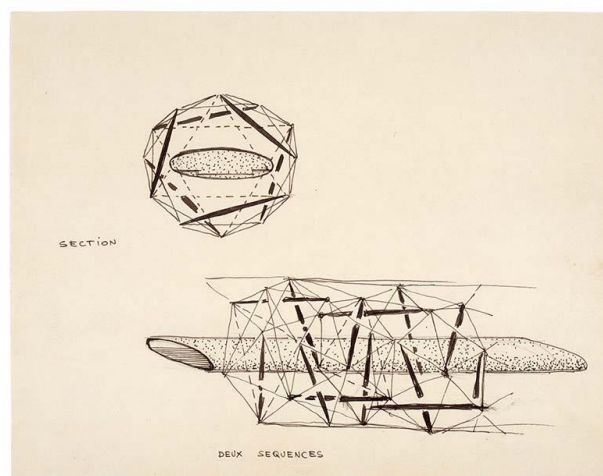


Figure 6 – Pont sur la Manche en structure en tensegrité [12]

Notons que la tensegrité n'est pas seulement un sujet de recherche dans le domaine de l'architecture. Des recherches sont aussi effectuées dans le domaine de la biologie (cytosquelettes) et plus récemment dans le domaine des structures.

Un grand nombre de géométries et de projets concernant la tensegrité existent dans la littérature mais seulement un petit nombre a vu le jour tel que le pavillon des Etats-Unis à l'exposition universelle de 1967.

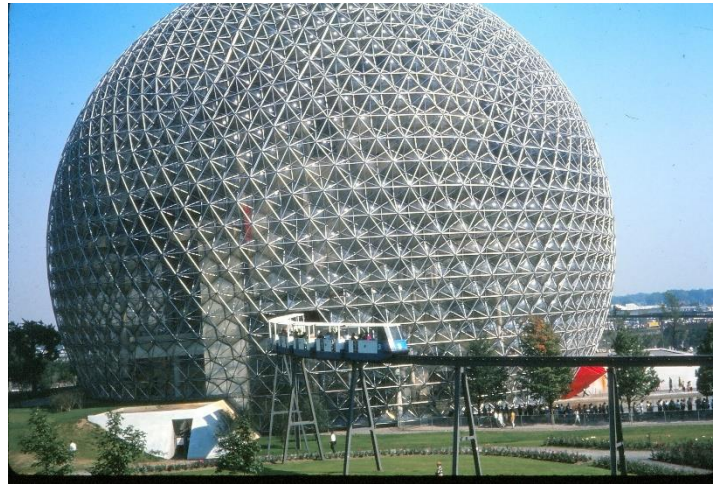


Figure 7 – « La Biosphère » de BUCKMINSTER FULLER, pavillon des Etats-Unis à l'exposition universelle de 1967 [13]

Le faible nombre de projets réels est dû à la complexité provenant du processus de construction, de son optimisation, de la précontrainte nécessaire pour rigidifier la structure et de son comportement statique. [6]

2.3 Typologie des structures en tensegrité

Après avoir défini la tensegrité et développé le contexte historique, cette section a pour but d'aller plus en détail sur la typologie des structures en tensegrité. Les structures en tensegrité peuvent être une cellule élémentaire ou un assemblage de cellules élémentaires.

2.3.1 Cellule élémentaire

L'imagination est l'une des limites à la création d'une cellule élémentaire. La seconde est la physique : « Existe-t-il une tension finie permettant de soutenir le système dans un état d'auto-équilibre³ stable ? »

Les cellules de tensegrité élémentaires sont généralement des structures prismatiques et sont classées selon leurs formes géométriques globales.

³ La configuration géométrique des structures en tensegrité doit permettre au minimum un état de précontrainte.

Ci-dessous, les modules prismatiques sont nommés en fonction du nombre de côtés que comportent leur base.

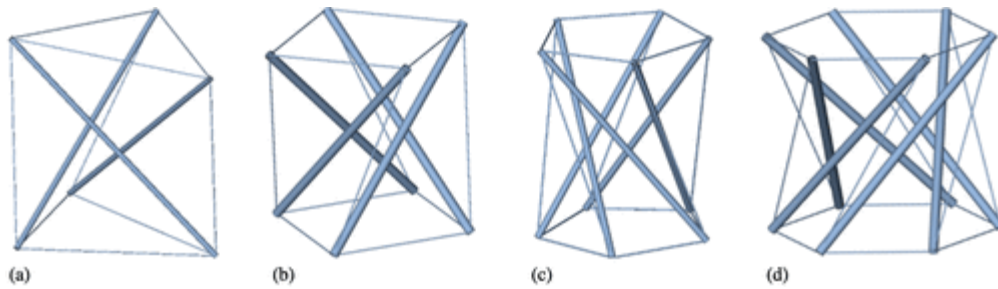


Figure 8 – Modules élémentaires prismatiques [14]

De gauche à droite : un simplex, un quadruplex, un pentaplex et un hexaplex ayant respectivement des bases formées par 3,4,5 et 6 cotés.

Le SIMPLEX est le module élémentaire prismatique en tensegrité le plus simple. Comme cela peut être visualisée sur la figure 8, il est composé de 3 barres en compression et 9 câbles en traction.

Ce module a été retenu pour être le module utilisé dans les différentes recherches effectuées au pôle Génie Civil et Environnemental (GCE) de l'Ecole Polytechnique de Louvain (EPL) ainsi que pour ce mémoire.

2.3.2 Combinaison de cellules élémentaires

Comme écrit plus haut, les modules élémentaires peuvent être combinés entre eux. Les assemblages peuvent se faire dans une ou deux direction(s) (unidimensionnels ou bidimensionnels). [15]

Concernant les assemblages unidimensionnels, les cellules peuvent être assemblées de deux manières différentes : soit par contact entre les nœuds soit par un contact entre les nœuds et les barres.

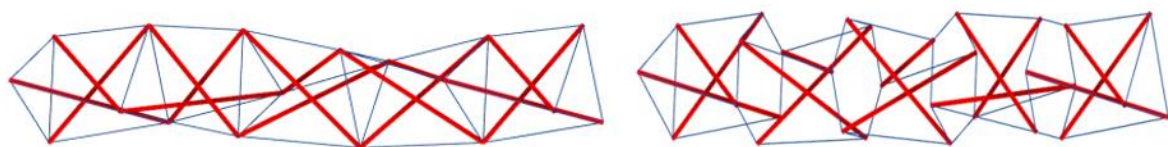


Figure 9 – Combinaison unidimensionnelle des cellules élémentaires [15]

Les assemblages bidimensionnels sont rendus complexes par la jonction entre les différents éléments. Ce type de structure peut aussi être à couches multiples et/ou courbe telle « La Biosphère » de R. B. FULLER. (Cfr. figure 7)

2.4 La tenségrité au pôle GCE⁴ de l'EPL

Comme indiqué dans l'introduction de ce mémoire, la tenségrité est un sujet de recherche mené par le Prof. P. LATTEUR depuis l'année académique 2013-2014. L'objectif final de ces recherches est d'optimiser les structures en tenségrité selon différents critères afin de pouvoir démontrer la faisabilité de l'utilisation ce type de structure dans le domaine du génie civil.

Cette recherche s'est articulée autour de l'étude d'une passerelle en tenségrité nommée « Snake footbridge » représentée ci-dessous.

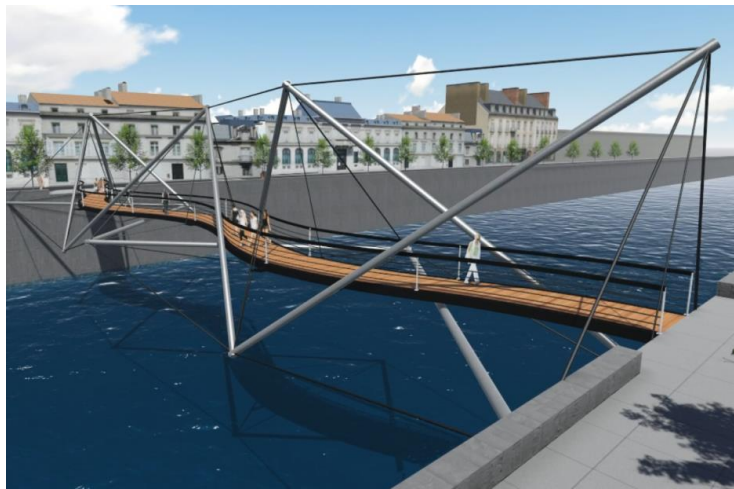


Figure 10 – « Snake footbridge » [6]

Cette section a pour but de contextualiser ce mémoire et de présenter succinctement les recherches et résultats qui ont été obtenus au cours de ces dernières années.

Le premier mémoire traitant de la tenségrité est réalisé durant l'année académique 2013-2014. Alexis BASTIEN et Quentin GRAVY étudient les différentes typologies des modules élémentaires des structures en tenségrité. Afin de construire une passerelle en tenségrité, ils choisissent le SIMPLEX comme élément élémentaire. Ensuite, ils étudient numériquement les structures en tenségrité. Cependant, cette étude est menée selon un modèle linéaire. Or, ces structures ont un comportement non-linéaire géométrique⁵. [15] [16] Elles sont instables au premier ordre.

Durant l'année académique 2014-2015, Marc ELIAERS met au point un méthode numérique permettant de modéliser le comportement physique non-linéaire des structures en tenségrité. [16]

L'année suivante, Jonas FERON développe un outil de calcul numérique plus complet en Python en se basant sur le travail de M. ELIARS. De plus, il développe une méthode d'optimisation des structures en tenségrité basée sur la théorie des indicateurs morphologiques développée par le Prof. P. LATTEUR. Les recherches menées par J. FERON ont permis de démontrer [16] qu'il est possible de construire des passerelles en tenségrité dont les déplacements sont jugés admissibles.

⁴ Génie Civil et Environnemental

⁵ Ce terme est expliqué dans la sous-section 4.1

Lors de l'année académique 2016-2017, Lindy BOUCHER [17] intègre la prise en compte du poids propre dans l'outil de calcul numérique. Grâce à l'outil numérique existant, une étude numérique est menée sur les différentes typologies. L'étude permet de conclure que certains modules sont plus pertinents si le critère d'optimisation est la limitation de la quantité de matière. L'un des modules qui semble le plus pertinent est le SIMPLEX.

Toujours dans l'optique d'étudier la faisabilité des structures en tensegrité et d'améliorer l'outil numérique, Igor BOUCKAERT intègre la possibilité d'étudier les cas de charges aléatoires durant l'année académique 2018-2019. Les recherches permettent d'arriver à la conclusion que le critère de flèche n'est que rarement dimensionnant pour les structures en tensegrité. [18]

Afin de généraliser l'étude des structures en tensegrité à tout type de structure, Alexandre FLAMANT [15] développe, durant l'année académique 2019-2020, un outil paramétrique sous la forme d'un plug-in sous Grasshopper.

En parallèle depuis l'année académique 2018-2019, Jonas FERON effectue un doctorat portant sur l'optimisation des passerelles en tensegrité. Afin d'étudier les structures en tensegrité, un outil paramétrique a été développé par ses soins sous la forme d'un plug-in Grasshopper. Cet outil, dénommé « MUSCLE », permet d'effectuer le dimensionnement statique d'une structure en tensegrité allant d'un SIMPLEX à une passerelle comportant plusieurs modules de tensegrité.

Durant l'année académique 2020-2021, Romain ANTOINE et Nicolas DANZIN [19] ont analysé le comportement statique d'un simplex instrumenté de grande taille et comparé ces mesures aux résultats numériques obtenus à l'aide du logiciel développé par J. FERON.

Depuis le début des recherches sur la tensegrité, seul le dimensionnement statique des structures en tensegrité a été abordé. Ce mémoire s'inscrit dans la lignée des recherches effectuées durant ces dernières années mais est le premier à aborder la dynamique de ce type de structure.

3 Le SIMPLEX instrumenté de grande taille

Un SIMPLEX instrumenté de grande taille a été conçu afin de comparer les résultats numériques et expérimentaux. Celui-ci est monté au laboratoire LEMSC de l'UCLouvain.



Figure 11 – SIMPLEX expérimental au laboratoire LEMSC [19]

Une nomenclature a été définie afin de répertorier les éléments composants le SIMPLEX :

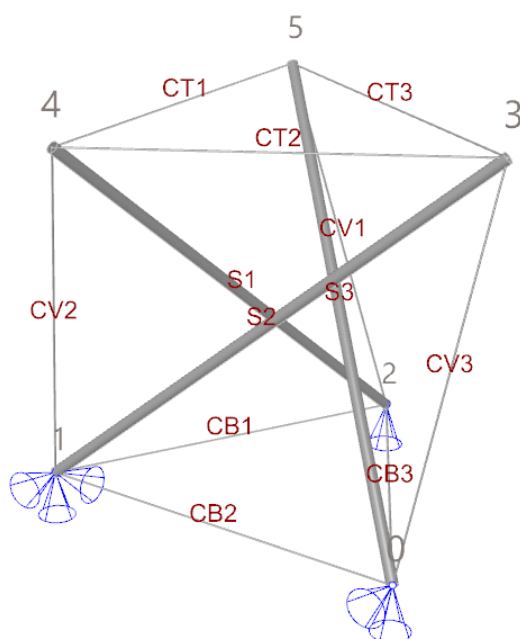


Figure 12 – Nomenclature des éléments constitutifs du SIMPLEX

Ce chapitre est articulé en quatre sections.

La première section présente les deux types de positions du SIMPLEX.

La deuxième section synthétise le poids propre du « SIMPLEX – masses pendues » avec et sans les accéléromètres utilisés pour effectuer les prises de mesures dynamiques.

Enfin, les deux dernières sections présentent les deux paramètres d'études : la précontrainte et le chargement externe.

3.1 Les deux types de positions du SIMPLEX

Les structures en tenségrité étant sujettes à de grands déplacements, deux positions sont définies pour l'étude du SIMPLEX.

La première position est la **position initiale (= position théorique avec un angle relatif de 30°)**. Elle est fixe et ne varie pas. Cette dernière sert de référence pour la construction du modèle numérique. Cette position ne considère aucune déformation que ce soit lié au poids propre, à un chargement externe ou à une modification de la précontrainte.

Dans cette position, les nœuds ont les coordonnées suivantes :

Nœud	X [mm]	Y[mm]	Z[mm]
1	0	-2043.8	0
2	0	0	0
3	1770	-1021.9	0
4	590	-2201.9	1950
5	-431.9	-431.9	1950
6	1611.9	-431.9	1950

Tableau 1 – Coordonnées nodales en position initiale

Dans la position initiale, l'angle relatif entre le triangle inférieur et le triangle supérieur vaut 30°. Ce dernier évolue lorsque la structure se déforme.

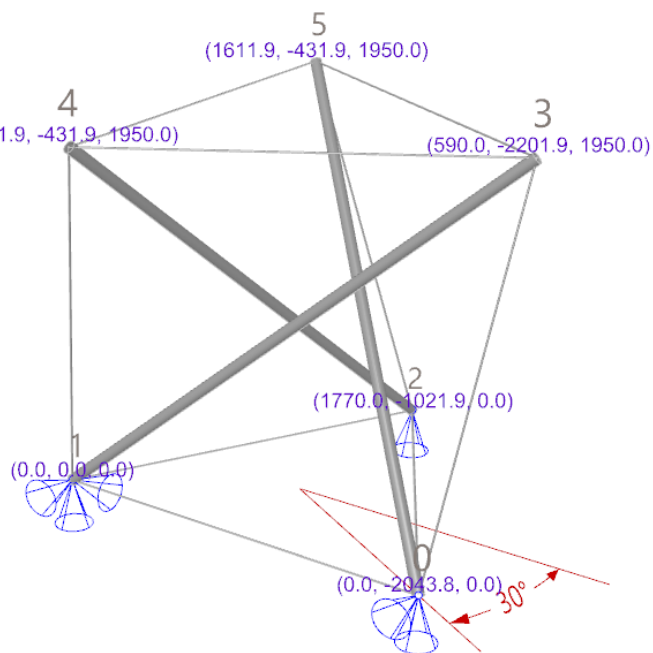


Figure 13 – Vue en perspective du SIMPLEX avec les coordonnées des nœuds en position initiale

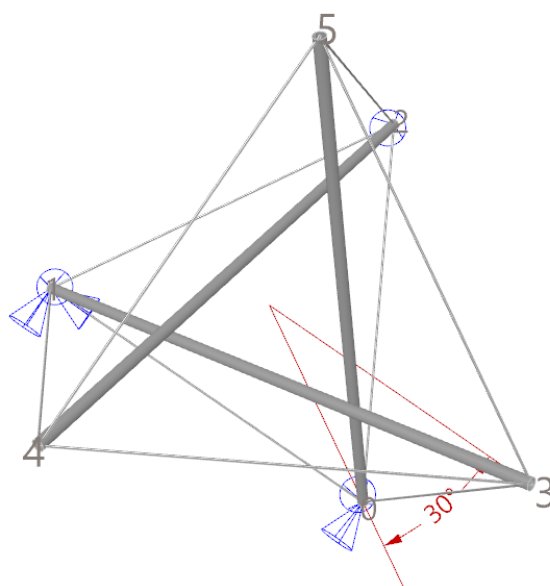


Figure 14 – Angle relatif en position initiale (vue du dessus)

La **seconde position** est la position déformée. Cette position est obtenue en considérant les déformations liées au poids propre, au chargement externe et à la précontrainte appliquée dans la structure.

D'autres caractéristiques importantes définissent le SIMPLEX. L'annexe 1 présente les caractéristiques mécaniques du SIMPLEX.

3.2 Poids propre du « SIMPLEX – masses pendues »

En plus des caractéristiques mécaniques, le poids propre du SIMPLEX est une caractéristique très importante car la structure se déforme sous son poids propre.

Dans cette section, deux poids propres du « SIMPLEX – masses pendues » sont présentés car des accéléromètres ont été ajoutés sur la structure afin d'effectuer les prises de mesures dynamiques.

Le poids propre du SIMPLEX de l'étude statique n'est donc pas le même que celui de l'étude dynamique.

Par soucis de clarté vis à vis des études menées ultérieurement dans ce mémoire, ce SIMPLEX est appelé : « SIMPLEX – masses pendues » en référence à la méthode de chargement⁶ externe présentée dans la section suivante.

3.2.1 Poids propre du « SIMPLEX – masses pendues »

Le poids propre de la structure est de 268.79 [N]. Il peut être modélisé par des charges nodales selon la répartition suivante :

	Nœuds inférieurs			Nœuds supérieurs		
	Noeud 0	Noeud 1	Noeud 2	Noeud 3	Noeud 4	Noeud 5
Poids [N]	45.7	45.7	45.7	41.6	41.6	41.6
Masse [kg]	4.66	4.66	4.66	4.24	4.24	4.24

Tableau 2 – Répartition nodale du poids propre du « SIMPLEX – masses pendues » - étude statique

Le poids de chaque élément est détaillé ci-dessous :

	Nœuds inférieurs			Nœuds supérieurs		
	Noeud 0	Noeud 1	Noeud 2	Noeud 3	Noeud 4	Noeud 5
Poids [N]	25.94	25.89	25.92	21.89	21.89	21.83
Masse [kg]	2.64	2.64	2.64	2.23	2.23	2.23

Tableau 3 – Poids propre des nœuds du « SIMPLEX – masses pendues » - étude statique

Il est à noter que les poids nodaux des nœuds supérieurs présentés dans les deux tableaux ci-dessus (Tableau 2 et Tableau 3) incluent le poids des câbles et des anneaux de levage.

⁶ Cette méthode sera menée à évoluer durant ce mémoire.

	Identification des éléments			Nœud de départ	Nœud d'arrivée	Masse des éléments	Poids des éléments
	Nom	Index	Nomenclature	n0	n1	m	<i>P</i>
	[/]	[/]	[/]	[/]	[/]	[kg]	[N]
Barres	24B	0	S1	2	4	2.524	24.76
	13B	1	S2	1	3	2.508	24.61
	05B	2	S3	0	5	2.524	24.76
Câbles bas	12C	3	CB1	1	2	0.499	4.90
	01C	4	CB2	0	1	0.504	4.95
	02C	5	CB3	0	2	0.507	4.98
Câbles haut	45C	6	CT1	4	5	0.505	4.95
	34C	7	CT2	3	4	0.506	4.96
	35C	8	CT3	3	5	0.503	4.93
Câbles verticaux	25C	9	CV1	2	5	0.487	4.78
	14C	10	CV2	1	4	0.501	4.91
	03C	11	CV3	0	3	0.507	4.97

Tableau 4 – Poids propre des éléments linéiques composant le « SIMPLEX – masses pendues » - étude statique

3.2.2 Poids propre du « SIMPLEX – masses pendues » incluant la masse des accéléromètres

Les tests dynamiques ont été effectués à l'aide de cinq accéléromètres dont les caractéristiques sont décrites dans l'annexe 6.

Ils sont positionnés de la manière suivante sur la structure :

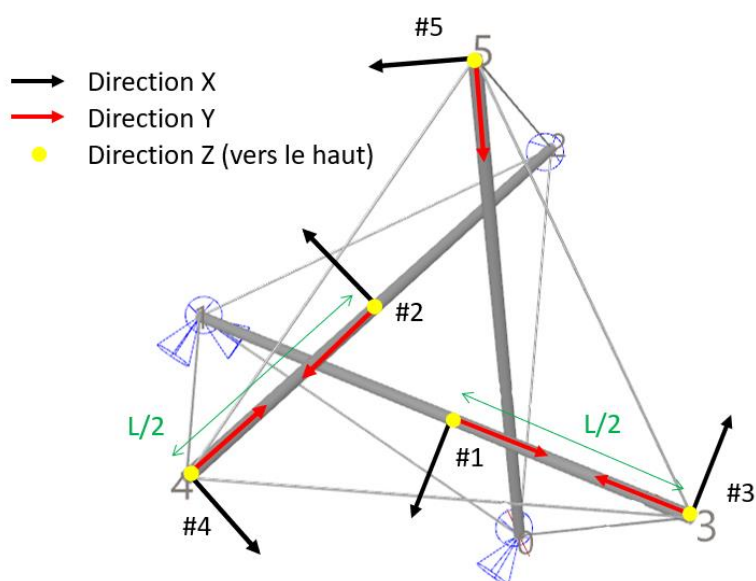


Figure 15 - Positionnement des accéléromètres

L' « ensemble accéléromètre » comprenant le U métallique, l'accéléromètre et deux mètres de câble a une masse de 167.6 [g]. (Cet ensemble est dénommé poids des accéléromètres dans la suite du mémoire.)

Le poids propre de la structure incluant le poids propre des accéléromètres est détaillé ci-dessous.

	Nœuds inférieurs			Nœuds supérieurs		
	Noeud 0	Noeud 1	Noeud 2	Noeud 3	Noeud 4	Noeud 5
Poids [N]	45.70	46.52	46.52	44.07	44.07	43.24
Masse [kg]	4.66	4.74	4.74	4.49	4.49	4.41

Tableau 5 – Répartition nodale du poids propre du « SIMPLEX – masses pendues » - étude dynamique

Le poids de chaque élément est détaillé ci-dessous :

	Nœuds inférieurs			Nœuds supérieurs		
	Noeud 0	Noeud 1	Noeud 2	Noeud 3	Noeud 4	Noeud 5
Poids [N]	25.94	25.89	25.92	23.53	23.54	23.47
Masse [kg]	2.64	2.64	2.64	2.40	2.40	2.39

Tableau 6 – Poids propre des nœuds du « SIMPLEX – masses pendues » - étude dynamique

Il est à noter que les poids nodaux des nœuds supérieurs présentés dans les deux tableaux ci-dessus (Tableau 5 et Tableau 6) incluent le poids des câbles et des anneaux de levage.

	Identification des éléments			Nœud de départ	Nœud d'arrivée	Masse des éléments	Poids des éléments
	Nom	Index	Nomenclature	n0	n1	m	P
	[/]	[/]	[/]	[/]	[/]	[kg]	[N]
Barres	24B	0	S1	2	4	2.691	26.40
	13B	1	S2	1	3	2.676	26.25
	05B	2	S3	0	5	2.524	24.76
Câbles bas	12C	3	CB1	1	2	0.499	4.90
	01C	4	CB2	0	1	0.504	4.95
	02C	5	CB3	0	2	0.507	4.98
Câbles haut	45C	6	CT1	4	5	0.505	4.95
	34C	7	CT2	3	4	0.506	4.96
	35C	8	CT3	3	5	0.503	4.93
Câbles verticaux	25C	9	CV1	2	5	0.487	4.78
	14C	10	CV2	1	4	0.501	4.91
	03C	11	CV3	0	3	0.507	4.97

Tableau 7 – Poids propre des éléments linéiques composant le « SIMPLEX – masses pendues » - étude dynamique

3.3 La précontrainte

La précontrainte est le premier paramètre des études présentées dans ce mémoire. Elle est toujours introduite dans la structure avant que celle-ci ne soit chargée.

Cette dernière a pour but d'insérer des efforts internes initiaux dans la structure afin de la rigidifier.

Dans le cas de l'exemple de la slackline⁷ utilisé dans l'introduction de ce mémoire, la précontrainte est introduite par un raccourcissement du câble qui a pour effet d'augmenter la tension dans le câble. Cette tension permet de limiter la déformation du câble lorsqu'un funambule marche sur le câble.

Pour le SIMPLEX, le principe est le même mais il existe différentes manières d'insérer de la précontrainte car la structure est plus complexe. La première façon permettant d'introduire de la précontrainte est l'« allongement d'une/des barre(s) »⁸ et la deuxième est le « raccourcissement d'un/des câble(s) »⁹.

La précontrainte appliquée définit un état de précontrainte de la structure. Cet état peut être obtenu numériquement par la résolution des équations d'équilibre, des lois constitutives des matériaux ainsi que des équations de compatibilité. [20]

Cette section a pour but d'expliquer les termes utilisés dans ce mémoire lorsqu'il est question de précontrainte.

3.3.1 Introduction homogène de la précontrainte

Même si la précontrainte peut être introduite de différentes manières dans le SIMPLEX, l'objectif est de garder la symétrie de la structure. Pour se faire, la précontrainte doit être introduite de manière homogène.

⁷ L'exemple de la slackline est utilisé car son comportement est similaire à celui de SIMPLEX.

⁸ Appliqué grâce à l'allongement des tiges filetées se trouvant aux extrémités des barres

⁹ Appliqué grâce à l'ensemble tige/tendeur

Dans ce mémoire, la précontrainte est appliquée uniquement via un allongement uniforme de toutes les barres. Ainsi, la structure se déforme de manière homogène : les plans formés par les deux faces triangulaires restent parallèles.

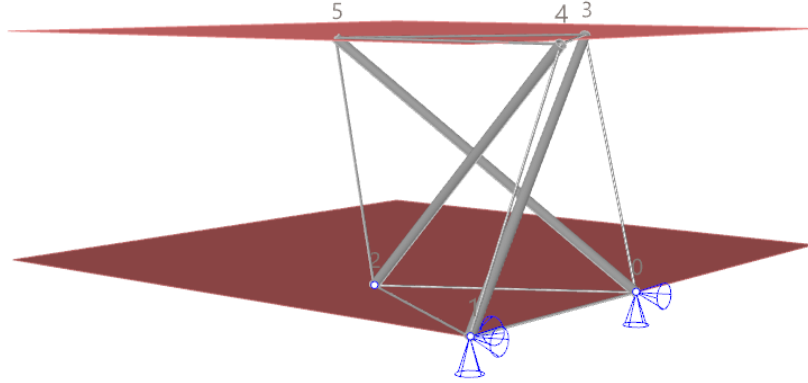


Figure 16 – Plans parallèles formés par les nœuds supérieurs et inférieurs

3.3.2 Mode d'auto-contrainte

Les efforts internes obtenus à la suite d'un allongement d'une ou des barre(s)¹⁰ sont liés entre eux par une relation : le mode d'auto-contrainte.

Le SIMPLEX étant une structure statiquement indéterminée, il possède un unique mode d'auto-contrainte. [20] Au mode d'auto-contrainte M_{prec} [-], on associe un scalaire appelé niveau de précontrainte N_{prec} [kN] permettant d'obtenir les efforts internes dans la structure sous la forme du vecteur F_i [kN] :

$$F_i = N_{prec} \cdot M_{prec}$$

Équation 1

Le mode d'auto-contrainte est donc un vecteur qui prend la forme suivante pour le SIMPLEX :

$$\{M_{prec}\} = \{-1, -1, -1, 0.39, 0.39, 0.39, 0.39, 0.39, 0.39, 0.68, 0.68, 0.68\}$$

Barres

Câbles horizontaux

Câbles verticaux

Équation 2

Ce vecteur est défini de telle manière que l'équilibre aux nœuds soit respecté. Cette distribution d'efforts en équilibre considère le poids propre mais aucune charge externe.

Grâce à la relation décrite dans l'équation 1, il devient inutile de décrire la configuration de tous les efforts internes dus à la précontrainte. Une configuration d'efforts internes due à une introduction de précontrainte est liée à un niveau de précontrainte qui permet de définir directement tous les efforts internes dans la structure.

¹⁰ Et un raccourcissement d'un ou des câbles. (Même si cette technique n'est pas utilisée dans ce mémoire.)

En d'autres termes, le niveau de précontrainte est égal à l'effort de compression dans les barres. Ce dernier est composé de l'effort de compression dû au poids propre de la structure et à la précontrainte introduite dans la structure.

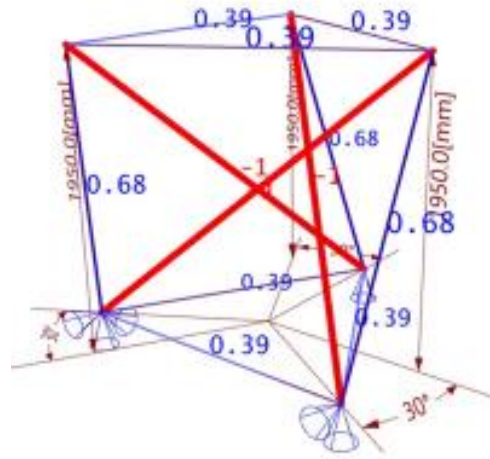


Figure 17 – Mode de précontrainte du SIMPLEX [20]

Lorsque le SIMPLEX a un niveau de précontrainte de 1.5 [kN], les efforts internes dans les barres sont de -1.5 [kN] (compression), 0.586 [kN] dans les câbles horizontaux et 1.02 [kN] dans les câbles verticaux (traction).

3.3.3 Matrice de sensibilité

Dans la sous-section précédente, un lien a pu être établi entre tous les efforts internes de la structure lorsque de la précontrainte est introduite.

La variation des efforts internes peut être aussi directement liée à la variation des longueurs des éléments du SIMPLEX grâce au vecteur de sensibilité.

L'allongement des barres¹¹ augmente les efforts selon une certaine distribution qui est synthétisée dans le vecteur de sensibilité : SM_a .

¹¹ Ou le raccourcissement des câbles

$$\Delta F_i = SM_a \cdot e_0$$

Équation 3

Ou,

- ΔF_i [kN] : Vecteur de la variation des efforts internes
- SM_a [kN/mm] : La matrice de sensibilité
- e_0 [mm] : Le vecteur contentant les allongements ou raccourcissements apportés aux éléments de la structure

Le vecteur de sensibilité est défini comme suit :

$$SM_a = \{0.60, 0.60, 0.60, -0.24, -0.24, -0.24, -0.24, -0.24, -0.24, -0.41, -0.41, -0.41\}$$

Barres
Câbles horizontaux
Câbles verticaux

Équation 4

Ainsi, pour un millimètre d'élongation d'une barre, le niveau de précontrainte du SIMPLEX augmente de 0.6 [kN]. Lorsqu'un câble horizontal ou vertical est raccourci d'un millimètre, le niveau de précontrainte augmente respectivement de 0.24 [kN] et 0.41 [kN].

3.4 Le chargement externe

Le chargement externe est le deuxième paramètre des études statiques et dynamiques. Il est toujours ajouté sur la structure après la précontrainte.

Pour l'analyse du comportement du SIMPLEX, le chargement externe a été appliqué à l'aide de poids posés sur des plateaux suspendus aux nœuds supérieurs de la structure (3,4 et 5).



Figure 18 – Système de chargement du « SIMPLEX – masses pendues » [19]

Cette méthode est dénommée « SIMPLEX – masse pendues » et a été utilisée pour l'étude statique et une partie de l'étude dynamique.

Afin de limiter les déformations non-symétriques, la structure est chargée de manière homogène et, lorsqu'il est question de chargement, celui-ci est indiqué en [kN] par nœud.

Le système de suspension est composé d'une tige filetée et d'une plaque. Sa masse moyenne est 1.45 [kg]. Cette masse est considérée dans le chargement externe de la structure.



Figure 19 – Anneau de suspension et plateau de levage [Adapté de [19]]

Cette méthode de chargement évoluera dans la seconde partie de ce mémoire car elle provoque un effet non souhaité sur la dynamique du SIMPLEX.

4 Comportement statique des structures en tensegrité et le cas du SIMPLEX

Les expériences menées durant l'année académique 2021-2022 [19] ont permis de définir le comportement statique d'un SIMPLEX selon les paramètres de précontrainte et de chargement externe. L'objectif principal de ce mémoire fut de confronter les résultats numériques obtenus par J. FERON aux résultats expérimentaux.

De cette comparaison de résultats, découle un article scientifique écrit par J. FERON en collaboration avec Prof. L. RHODE-BARBARIGOS et Prof. P. LATTEUR : « Experimental testing of a tensegrity simplex : self-stress implementation and static loading » [20].

L'objectif final de ce chapitre est de présenter ces résultats statiques qui ont une influence non négligeable sur l'étude dynamique effectuée dans la seconde partie de ce mémoire.

Afin d'atteindre cet objectif, ce chapitre est articulé en quatre sections.

Les deux premières sections présentent deux éléments théoriques permettant de comprendre les résultats. Ces deux points théoriques sont : les grands déplacement (comportement de non-linéarité géométrique) et l'influence de la précontrainte sur la rigidité de la structure.

Enfin, les deux dernières sections présentent les résultats obtenus sous une variation du niveau de précontrainte et ensuite sous l'influence du chargement externe.

4.1 La non-linéarité géométrique

Il existe deux types de non-linéarité : la non-linéarité matérielle et la non-linéarité géométrique.

La **non-linéarité matérielle** est liée aux caractéristiques des matériaux. Les matériaux ont ce comportement lorsque la limite élastique est dépassée. Dans ce mémoire, on considère que les matériaux se déforment dans leurs domaines élastiques. La loi de Hooke de déformation élastique des matériaux est utilisée.

La **non-linéarité géométrique** est quant à elle liée aux grands déplacements que subit une structure sous l'effet d'un chargement externe¹².

Si les positions initiales et déformées ne peuvent plus être confondues, la structure doit être étudiée dans sa position déformée afin d'obtenir les efforts internes réels. Le calcul est alors effectué au second ordre. [21]

Afin d'expliquer ce phénomène, l'exemple de la slackline est utilisé. Cet exemple simple se rapproche le plus du SIMPLEX car les efforts internes sont uniquement de type normal.

¹² Cela peut aussi être dû à son poids propre.

La **position initiale** de cette slackline est un câble parfaitement horizontal car le poids propre n'est pas considéré. Le câble est précontraint sous une tension P [N] afin de le rigidifier.



Figure 20 – Slackline en position initiale déjà précontrainte

En position initiale, l'équilibre est vérifié.

Lorsqu'une force verticale est appliquée sur le nœud du milieu, la structure doit se déformer fortement car elle ne possède aucune rigidité en position initiale. Grâce à ce grand déplacement u , l'équilibre des forces est vérifié.

La **position déformée** est la suivante :

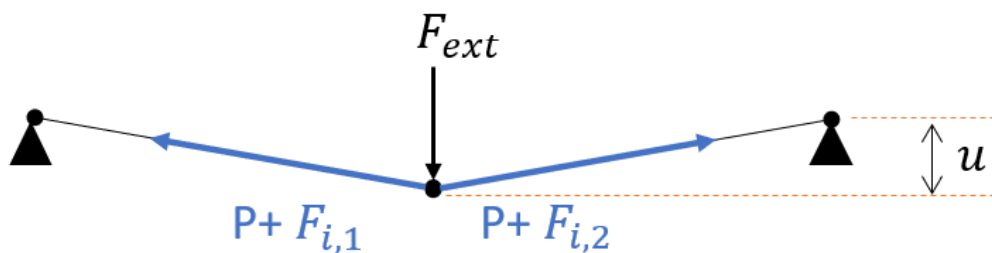


Figure 21 – Equilibre des forces en position déformée

La tension totale dans le câble évolue selon la loi :

$$N = P + EA \left(\sqrt{1 + \left(\frac{u}{L_0} \right)^2} - 1 \right)$$

Équation 5

Le câble, en se déformant, gagne en rigidité et les forces internes s'équilibrent avec la force externe appliquée.

Ce principe est identique au comportement du SIMPLEX et est représenté schématiquement ci-dessous :

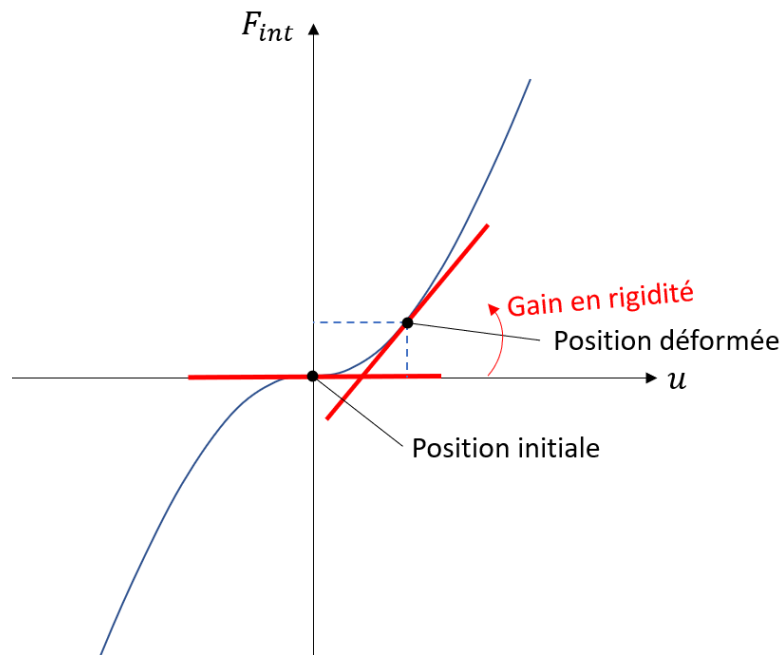


Figure 22 – Principe de non-linéarité géométrique

Comme pour l'exemple de la slackline ci-dessus, la déformation du SIMPLEX influe sur la valeur des efforts normaux et les efforts internes ne sont pas proportionnels à la force externe appliquée.

Lorsqu'une structure est linéaire matérielle et géométrique, le principe de superposition peut être utilisé :

« Les effets statiques (efforts internes, contraintes et déplacements) engendrés par un ensemble d'actions sont égaux à la somme algébrique des effets statiques engendrés par chacune des actions prise isolément. » [21]

Ce principe n'est plus vérifié lorsque la structure a un comportement non-linéaire géométrique et/ou matériel. [22] Les effets des différentes charges ne peuvent donc plus être étudiés de manière indépendante afin d'obtenir les effets totaux par combinaison linéaire.

Dans ce mémoire, le SIMPLEX est toujours en premier lieu précontraint puis dans un second temps chargé.

Cette caractéristique de non-linéarité géométrique est l'élément central de l'étude qui sera menée dans ce mémoire. L'objectif final est de répondre à la question suivante : la dynamique des structures en tenségrité doit-elle être étudiée sur le SIMPLEX en position initiale ou déformée ?

4.2 Rigidité matérielle et géométrique

La précontrainte introduite dans les structures en tenségrité est essentielle. Comme expliqué avec l'exemple de la slackline, elle permet de rigidifier la structure et ainsi de limiter la déformation qu'elle subit. [20]

Cet effet est présenté sur le graphique suivant :

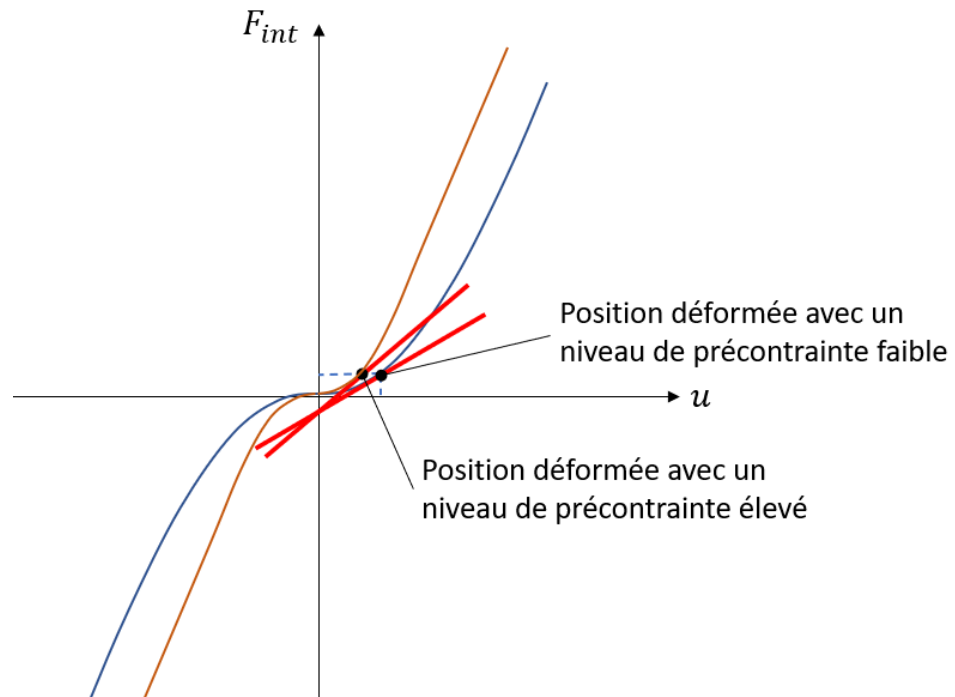


Figure 23 – Influence de la précontrainte sur la déformation de la structure

Le niveau de précontrainte de la structure est donc à prendre en compte dans le calcul de la rigidité de la structure.

Ainsi, la rigidité tangente (=totale) K_T d'une structure en tenségrité est composée de deux rigidités distinctes : la rigidité matérielle K_M liée aux éléments et la rigidité géométrique K_G due à la précontrainte introduite initialement dans la structure. [23]

$$K_T = K_M + K_G$$

Équation 6

Les éléments composant le SIMPLEX sont considérés comme des éléments rectilignes (= barres) étant rotulés aux deux extrémités. Les éléments ont donc seulement une rigidité axiale.

Pour un élément e :

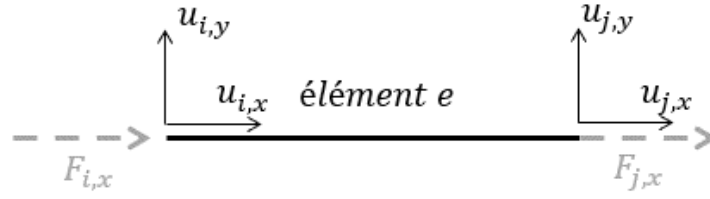


Figure 24 – Élément « e » dans le repère local

La rigidité matérielle de l'élément e a la forme connue d'une matrice de rigidité d'une structure n'étant pas auto-contrainte :

$$K_{M,e,loc} = \frac{EA}{l_0} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

Équation 7

Afin de prendre en compte la rigidité liée à la précontrainte, KEBICHE & al. [24] proposent de prendre celle-ci en considération de la manière suivante pour l'élément e :

$$K_{G,e,loc} = \frac{T}{l_0} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Équation 8

Dans ce mémoire, la dynamique des structures en tenségrité est étudiée selon deux paramètres : la prétension et le chargement externe. Le chargement externe influe lui aussi sur la tension et la compression dans les câbles et les barres. Pour tenir compte de cette influence du chargement externe sur les efforts normaux, la matrice de rigidité géométrique prend en compte la tension (ou compression) finale, c'est-à-dire une fois que la structure a été précontrainte et puis chargée.

Afin d'obtenir les matrices $K_{M,e,glob}$ et $K_{G,e,glob}$ à partir des matrices dans le système local, un changement de repère doit être effectué :

$$K_{T,e,glob} = r_c^T \cdot K_{T,e,loc} \cdot r_c$$

Équation 9

En considérant r_c comme la matrice de compatibilité :

$$r_c = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos(\theta) & \sin(\theta) \end{bmatrix}$$

Équation 10

Cette matrice permet d'effectuer le lien entre les deux repères illustrés à la figure 24 et figure 25.

$$u_{loc} = r_c \cdot u_{glob}$$

Équation 11

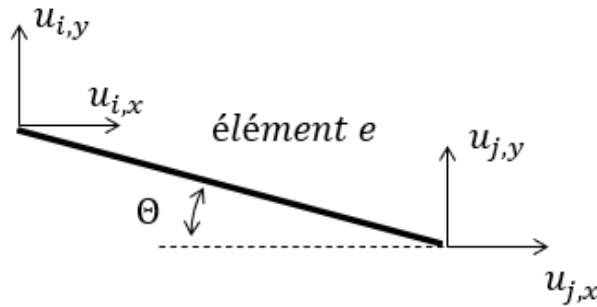


Figure 25 – Élément « e » dans le repère global

La matrice de rigidité de la structure K_T est obtenue en combinant les matrices de rigidité de chaque élément de la structure.

4.3 Résultats statiques sous l'influence du niveau de précontrainte sous poids propre

Toutes les expériences sont effectuées à partir d'un niveau de précontrainte minimal de 1.5 [kN]. Ce niveau de précontrainte permet d'avoir une tension suffisante dans les câbles afin de pouvoir négliger l'effet de chaînette des câbles dû à leur poids propre. [20].

En plus de l'augmentation de la rigidité de la structure, la précontrainte a pour effet de modifier la géométrie du SIMPLEX : augmenter sa hauteur, diminuer l'angle de rotation relatif et de modifier les efforts internes.

Sous poids propre, la hauteur et l'angle relatif du SIMPLEX évoluent de la manière suivante en fonction du niveau de précontrainte :

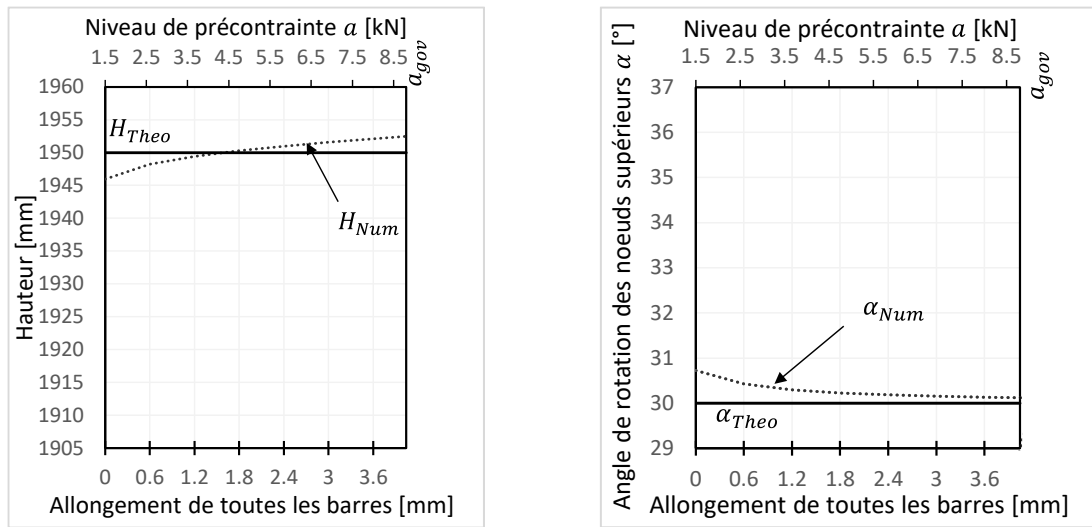


Figure 26 – Evolution de la géométrie du « SIMPLEX – masses pendues » sous poids propre en fonction du niveau de précontrainte [Adapté de [20]]

NB : H_{Theo} et α_{Num} représentent la géométrie du SIMPLEX en position initiale.

Ces deux graphiques mettent en lumière les déplacements que subit la structure sous une variation du niveau de précontrainte.

4.4 Résultats statiques sous l'influence du chargement externe

Les expériences de chargement statique ont permis de mettre en lumière l'évolution de la géométrie du SIMPLEX en fonction du chargement externe appliqué.

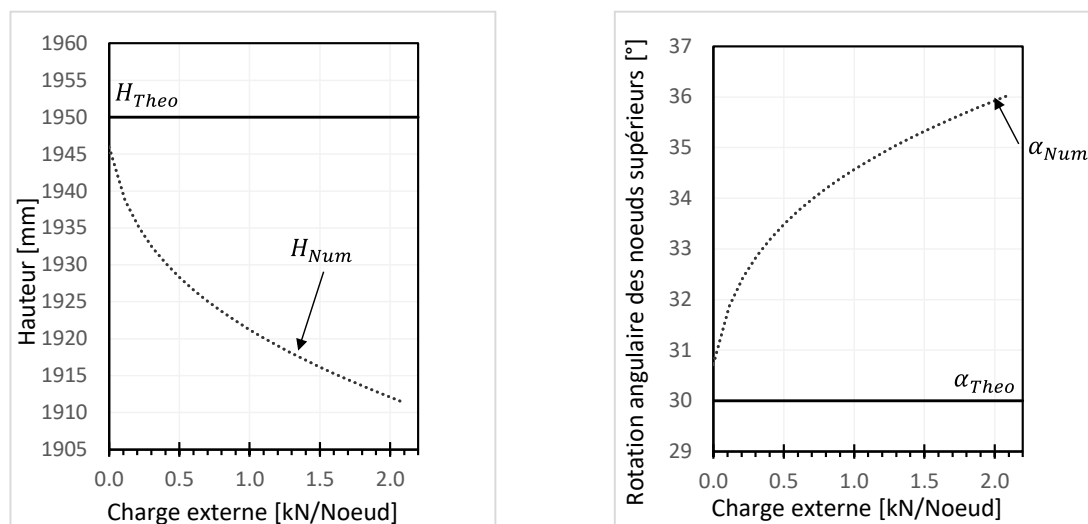


Figure 27 – Evolution¹³ de la géométrie du « SIMPLEX – masses pendues » sous un niveau de précontrainte de 1.5[kN]
[Adapté de [20]]

Le SIMPLEX s'écrase sur lui-même lorsqu'un chargement externe lui est appliqué sur ses trois nœuds supérieurs. Sa hauteur diminue et l'angle de rotation relatif augmente.

Il est intéressant de noter que, sous poids propre et 1.5[kN] de niveau de précontrainte, le SIMPLEX n'est déjà plus en position initiale¹⁴ : l'angle relatif a augmenté de 0.7° et sa hauteur a diminué de presque 5 [mm].

Cet effet est limité lorsque le niveau de précontrainte initial est plus élevé. Comme dit plus haut, un niveau de précontrainte élevé confère une rigidité plus élevée à la structure et donc une limitation des déformations de celle-ci.

¹³ Par soucis de clarté, le graphique inclus seulement la simulation numérique. Le chargement nodal est appliqué aux nœuds supérieurs de la structure (3,4 & 5)

¹⁴ Position indiquée sur les graphes à l'aide de la droite horizontale

Ci-dessous, les résultats obtenus pour le SIMPLEX sous un niveau de précontrainte de 8.5 [kN] :

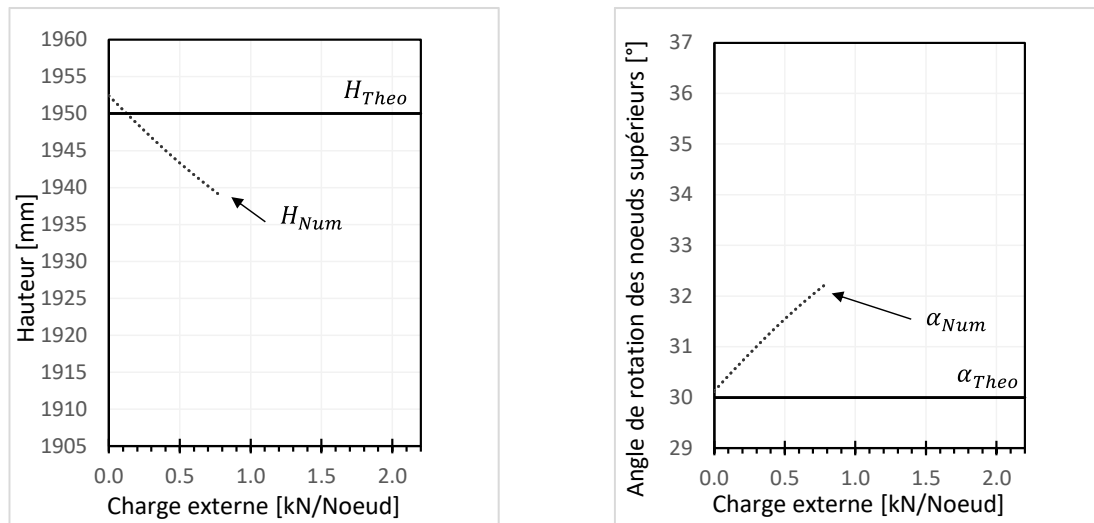


Figure 28 – Evolution de la géométrie du « SIMPLEX – masses pendues » sous un niveau de précontrainte de 8.5 [kN]
[Adapté de [20]]

Sous poids propre, l'angle relatif et la hauteur sont très proches de leurs valeurs théoriques respectives.

La charge externe maximale est plus faible dans le cas d'un niveau de précontrainte de 8.5 [kN] car l'augmentation du niveau de précontrainte implique une augmentation des efforts internes initiaux. La limite de rupture est ainsi atteinte plus rapidement.

Entre les années académiques 2020-21 et 2021-22, le SIMPLEX a été démonté puis remonté. Après avoir remonté le SIMPLEX, des tests ont été menés afin de s'assurer que celui-ci se comportait toujours de la même manière lors de chargements statiques. Les prises de mesures ont été concluantes. Celles-ci sont présentées en annexe 2.

4.5 Conclusion

Ces différents tests ont permis de démontrer le comportement de non-linéarité du SIMPLEX.

En plus de ces résultats, les efforts internes ont été étudiés expérimentalement et numériquement. Ces derniers permettent de définir les limites du protocole de test dynamique.

Ci-dessous deux graphes essentiels sont présentés.

Sous un niveau de précontrainte de 1.5 [kN], les efforts internes évoluent de la manière suivante en fonction du chargement externe :

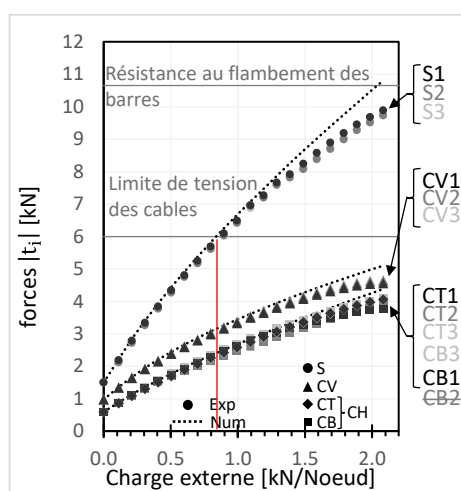


Figure 29 – Evolution des efforts internes sous un niveau de précontrainte de 1.5 [kN] [Adapté de [20]]

Ce graphique met en lumière le flambement des barres (S1, S2 & S3). Afin de ne pas avoir cet effet, le chargement externe sera limité à 81.45 [kg] (799 [N]) pour un niveau de précontrainte de 1.5 [kN] lors des tests dynamiques.

Sous un niveau de précontrainte de 8.5 [kN], les efforts internes évoluent de la manière suivante en fonction du chargement externe :

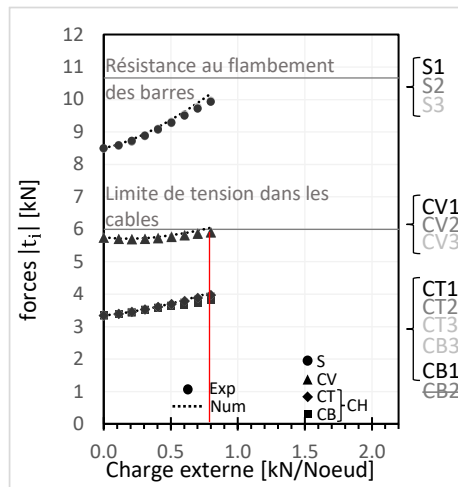


Figure 30 – Evolution des efforts internes sous un niveau de précontrainte de 8.5 [kN] [Adapté de [20]]

Ce graphique met en lumière le fait que les câbles verticaux (CV1, CV2 & CV3) atteignent la limite de tension lorsque le chargement externe atteint environ 80 [kg] par nœud supérieur. Afin de ne pas atteindre la rupture, le chargement externe sera limité à 81.45 [kg] (799 [N]) pour un niveau de précontrainte de 8.5 [kN] lors des tests dynamiques.

Les tests dynamiques devront être effectués sous un niveau de précontrainte allant de 1.5 [kN] à 8.5 [kN] et sous un chargement externe maximal de 81.45 [kg] par nœud.

5 La dynamique des structures : concepts théoriques

Ce chapitre a pour objectif de présenter deux concepts théoriques essentiels de l'étude dynamique d'une structure et utilisés en seconde partie de ce mémoire.

Ces deux concepts que sont les fréquences propres et les modes propres sont expliqués à travers une introduction et une mise en contexte générale de la dynamique.

A cet effet, ce chapitre est structuré en quatre sections.

Tout d'abord, une comparaison est effectuée entre le calcul statique et le calcul dynamique. Ensuite, l'équation du mouvement est introduite. L'avant-dernière section expose la résolution de l'équation dynamique pour un degré de liberté. Ce développement est ensuite généralisé pour un système à plusieurs degrés de liberté au dernier point de ce chapitre.

5.1 Calcul statique versus calcul dynamique

Dans peu de cas, une force s'applique de manière constante dans le temps sur une structure. La plupart des forces varient telles que celles induites par la marche d'une personne, par le vent, par les tremblements de terre ou par l'activité humaine.

Lorsque ces forces varient suffisamment lentement [25], l'hypothèse de forces (quasi-) statiques peut être prise. Dès lors, les calculs se basent sur l'équilibre des forces en négligeant les effets d'inertie. L'étude se base alors sur la première loi de Newton : $\sum_i \vec{F}_i = 0$.

Dans le cas contraire, les forces appliquées sur la structure ne peuvent plus être négligées : l'inertie des masses joue un rôle non négligeable. Il faut alors mener une étude dynamique.

L'étude dynamique se base sur la seconde loi de Newton ($\sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}$) qui considère l'influence de l'accélération subie par la/les masse(s) du système.

5.2 Equation de base

En se basant sur la seconde loi de Newton, il est possible de développer l'équation d'équilibre d'un élément « masse » unique.

Ainsi la seconde loi de Newton s'énonce comme suit :

« Dans un repère inertiel, la somme vectorielle des forces appliquées sur un objet est égale au produit de la masse de l'objet par son vecteur accélération ». [25]

$$\sum_i \vec{F}_i = m \cdot \vec{a}$$

Équation 12

Considérant un simple élément de masse, on peut définir deux types de force : une force de résistance $p_r(t)$ et une force appliquée $p(t)$.

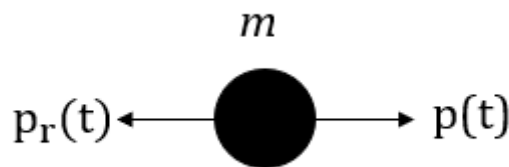


Figure 31 – Equilibre d'un élément « masse » [Figure de l'auteur inspirée de [26]]

En considérant les différentes forces, l'équilibre peut s'écrire de la manière suivante : [9]

$$p(t) - p_r(t) = m \cdot \ddot{u}(t)$$

Équation 13

En réarrangeant les termes, l'équation 13 peut se réécrire :

$$m \cdot \ddot{u}(t) + p_r(t) = p(t)$$

Équation 14

Dès à présent, il est possible de déterminer deux cas :

- $p(t) = 0$: La vibration est dite « libre » car aucune force externe n'est appliquée sur la masse.
- $p(t) \neq 0$: Inversement, la vibration est dite « forcée ».

Concernant les forces résistantes, en plus de dépendre du déplacement de la structure comme dans le cas statique, elles dépendent aussi de la vitesse.

$$m \cdot \ddot{u}(t) + p_r[u(t), \dot{u}(t)] = p(t)$$

Équation 15

5.3 Single Degree of Freedom – SDOF

L'analyse de système à un degré de liberté, nommé en anglais « Single Degree Of Freedom », a un intérêt capital pour deux raisons : [26] [27]

- Ce système est le plus simple à étudier car il n'est composé que d'un degré de liberté ;
- L'étude des systèmes à plusieurs degrés de liberté peut être développée¹⁵ comme une combinaison de systèmes indépendants à un degré de liberté.

Les systèmes à un degré de liberté sont composés de 3 éléments qui réagissent à la force extérieure appliquée $p(t)$.

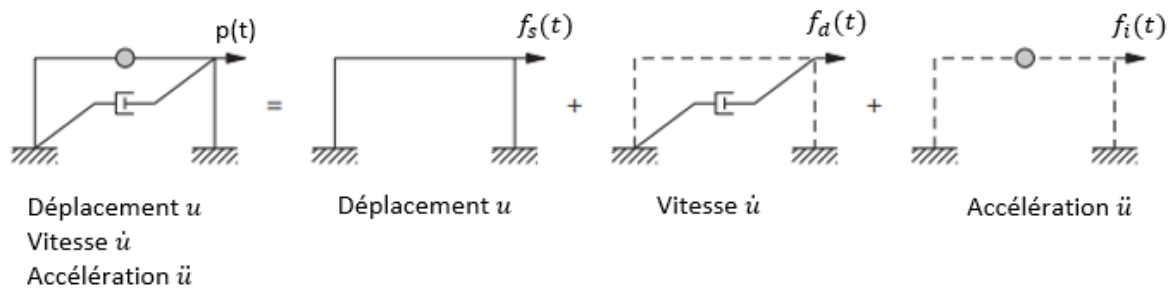


Figure 32 – Composantes d'un système à un degré de liberté [Adapté de [27]]

5.3.1 Les forces résistantes

Les forces résistantes $p_r[u(t), \dot{u}(t)]$ peuvent prendre deux formes : une force de résistance liée à la rigidité $f_s(t)$ et l'autre liée à l'amortissement linéaire visqueux $f_d(t)$.

¹⁵ Cela est développé dans la section 5.4

5.3.1.1 Force de résistance latérale¹⁶

Dans ce développement, les systèmes considérés sont linéaires¹⁷ élastiques. Cela a pour conséquence que la force de résistance a une relation linéaire avec le déplacement et que la réponse reste élastique¹⁸ telle la droite sur le graphique ci-dessous.

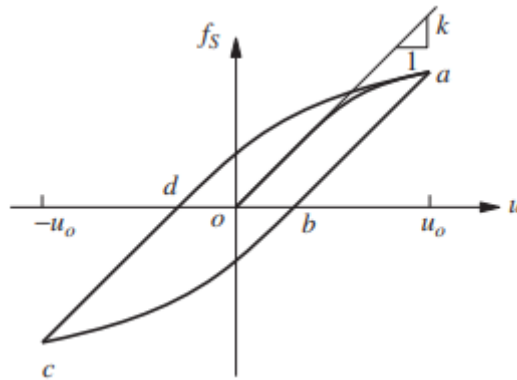


Figure 33 – Réponse linéaire et non-linéaire [27]

Cette force est proportionnelle au déplacement et est définie de la façon suivante :

$$f_s(t) = k \cdot u(t)$$

Équation 16

Où le coefficient k représente la rigidité en [N/m].

5.3.1.2 Force d'amortissement visqueuse

Dans un système idéalisé, cette force d'amortissement n'est parfois pas prise en compte. Cela implique alors un mouvement perpétuel car cette force est la seule qui permet au système de dissiper de l'énergie.

L'amortissement dépend directement de la capacité du matériau et des assemblages à dissiper de l'énergie. [25] Elle est intrinsèque à chaque système. Cependant, étant complexe à déterminer, sa valeur est souvent définie par convention en fonction du matériau utilisé¹⁹.

¹⁶ Nom donnée par Anil K. Chopra dans [27] pour nommer la force de résistance lié à la rigidité du degré de liberté.

¹⁷ Il est à noter, comme expliqué précédemment, que les structures en tenségrité sont non-linéaires géométriquement. Cependant, l'étude dynamique est menée autour d'un point d'équilibre autour duquel on considère le système linéaire si celui-ci est sujet à de faibles déplacements.

¹⁸ La réponse n'a pas de palier plastique tel que f_s à partir de u_{el} devient indépendant de u .

¹⁹ Le facteur d'amortissement ξ utilisé pour l'acier vaut par exemple 0.3%.

Cette force est proportionnelle à la vitesse et est définie de la façon suivante :

$$f_d(t) = c \cdot \dot{u}(t)$$

Équation 17

Où le coefficient c est appelé coefficient d'amortissement. Ses unités sont : $[N \cdot s/m]$.

5.3.2 L'équation du mouvement

Avec l'hypothèse d'un système élastique linéaire et les développements ci-dessus, l'équation du mouvement peut être réécrite [26] :

$$m \cdot \ddot{u}(t) + c \cdot \dot{u}(t) + k \cdot u(t) = p(t)$$

Équation 18

Afin de résoudre cette équation différentielle dont l'objectif est d'obtenir l'évolution temporelle du mouvement, il faut tout d'abord définir les conditions initiales du problème.

$$\begin{cases} u(t=0) = u_0 \\ \dot{u}(t=0) = \dot{u}_0 \end{cases}$$

Équation 19

Une fois que l'équation 18 est obtenue, celle-ci peut être réécrite sous une autre forme générale faisant apparaître deux nouvelles constantes :

$$\ddot{u}(t) + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \dot{u}(t) + \omega^2 \cdot u(t) = \frac{p(t)}{m}$$

Équation 20

Deux nouvelles constantes sont à définir :

- ω : la fréquence circulaire
- ξ : le facteur d'amortissement

5.3.2.1 La fréquence circulaire

La fréquence circulaire est définie comme suit :

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} [\text{Rad/s}]$$

Équation 21

Rappelons : $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega} [\text{s}]$

La fréquence circulaire représente la fréquence du mouvement du degré de liberté sujet à une excitation libre.

Il est à noter que la fréquence et la période du degré de liberté sont influencées par l'amortissement de ce même degré de liberté.

Pour prendre en compte cette influence, deux nouvelles variables sont définies : [26]

$$\omega_d = \omega \cdot \sqrt{1 - \xi^2}$$

Équation 22

$$T_d = \frac{T}{\sqrt{1 - \xi^2}}$$

Équation 23

Les structures en génie civil ont un facteur d'amortissement très faible (généralement sous 20%). Les valeurs de ω_d et T_d sont respectivement proches des valeurs de ω et T . Cela est illustré sur la figure ci-dessous.

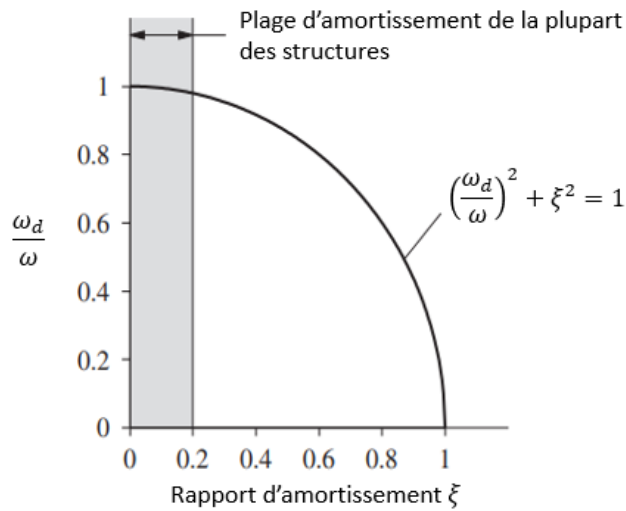


Figure 34 – Influence de l'amortissement sur la fréquence propre [Adapté de [27]]

5.3.2.2 Le rapport d'amortissement

$$\xi = \frac{c}{2 \cdot m \cdot \omega} = \frac{c}{c_{cr}}$$

Équation 24

Comme le facteur d'amortissement C , le rapport ξ représente lui aussi la dissipation de l'énergie du système.

En fonction de la valeur de ξ , différents cas sont définis :

$$\xi \begin{cases} > 1 : \text{Amortissement surcritique} \\ = 1 : \text{Amortissement critique} \\ < 1 : \text{Amortissement sous-critique} \end{cases}$$

Équation 25

Ces différents cas définissent la manière dont la structure atteindra sa position d'équilibre après avoir été excitée : la structure atteindra plus ou moins vite sa position d'équilibre.²⁰

Sur la figure 35, on peut remarquer que lorsque le facteur ξ vaut 1, la réponse atteint le plus rapidement la position d'équilibre. [26]

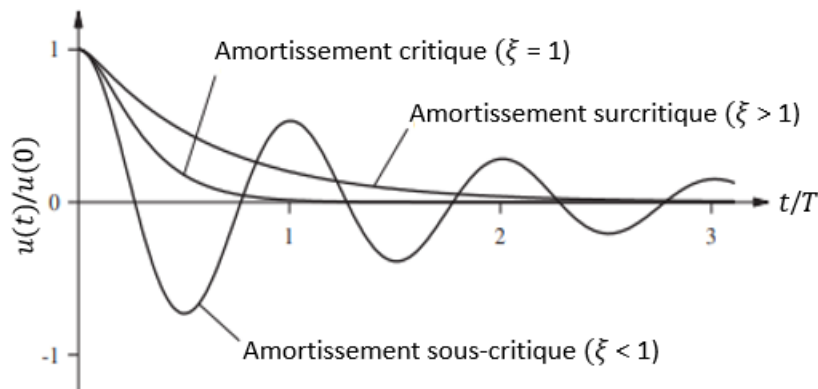


Figure 35 – Influence de l'amortissement sur la réponse²¹ [Adapté de [27]]

En génie civil, la valeur du facteur d'amortissement varie entre 0 et 0.2. L'amortissement est donc sous-critique.

²⁰ Position où le déplacement est nul.

²¹ T est la période naturelle du degré de liberté.

5.3.3 Les caractéristiques intrinsèques au système

Chaque système a deux caractéristiques intrinsèques présentées dans les deux sous-sections précédentes : la fréquence propre et le rapport d'amortissement. Ces caractéristiques sont essentielles car elles déterminent la manière dont le système va se comporter en vibration.

La suite logique de ces développements est la résolution de l'équation du mouvement. Pour cela, il faut distinguer deux cas : l'oscillation libre et l'oscillation forcée.

5.3.4 Résolution des équations : oscillation libre

Ce cas est défini par une force extérieure appliquée $p(t)$ nulle. La solution analytique de l'équation du mouvement est connue²² si le système considéré est linéaire élastique. L'équation dépend des conditions initiales et les caractéristiques intrinsèques (ω et ξ).

Dans ce cas, le système va vibrer selon la fréquence propre du système ω_d et s'amortir.

5.3.5 Résolution des équations : oscillation forcée

La force extérieure peut être soit périodique ou variable. Ces deux cas sont distingués pour la résolution des équations.

5.3.5.1 Force appliquée périodique

Lorsque la force appliquée est périodique et que le système est linéaire élastique, la solution analytique est connue. Celle-ci dépend, comme pour l'oscillation libre, des caractéristiques intrinsèques (ω et ξ) ainsi que de la grandeur de la force externe appliquée (p_0) et de la fréquence de cette dernière ($\bar{\omega}$).

Dans ce cas, la solution est une combinaison d'une réponse d'« état d'équilibre », constante dans le temps²³ et d'une réponse transitoire.

La partie transitoire disparaît dans le temps grâce à l'effet de l'amortissement.

²² Cela sous-entend que l'équation est obtenue en remplaçant les paramètres cités dans une solution analytique générique.

²³ L'amplitude et la fréquence de la fonction périodique sont constants dans le temps.

5.3.5.2 Force appliquée non-périodique

Dans ce cas, il n'existe pas de solution analytique générique. Une méthode d'intégration numérique doit être utilisée afin d'obtenir cette dernière.²⁴

5.3.6 L'excitation d'un degré de liberté

Comme introduit dans la sous-section 5.3.5.1, lorsqu'un système est excité par une force périodique, la réponse totale est la somme d'une réponse transitoire et permanente.

Pour illustrer ces propos, l'exemple d'un système amorti forcé est considéré. Sa réponse analytique est définie comme suit : (développement inspiré de [26])

$$u(t) = \underbrace{e^{-\xi\omega t} \cdot [A \cos(\omega_d t) + B \sin(\omega_d t)]}_{\text{Transitoire}} + \underbrace{C \sin(\bar{\omega}t) + D \cos(\bar{\omega}t)}_{\text{état stable}}$$

Équation 26

Considérant que la partie transitoire disparaît, seul la réponse permanente peut être analysée. De plus en considérant une force sinusoïdale de type $p(t) = p_0 \cdot \sin(\bar{\omega}t)$, la solution analytique devient :

$$u(t) = \frac{p_0}{k} \frac{1}{1 - (\bar{\omega}/\omega)^2} \cdot \sin(\bar{\omega}t)$$

Équation 27

Afin d'avoir un ordre de grandeur, cette solution peut être comparée à la réponse statique²⁵ du système réagissant à la même force $p(t)$.

La réponse statique obtenue devient alors :

$$u_{\text{statique}}(t) = \frac{p_0}{k} \cdot \sin(\bar{\omega}t) = u_{\text{statique},max} \cdot \sin(\bar{\omega}t)$$

Équation 28

²⁴ Notons que l'approche fréquentielle de résolution peut aussi être envisagée si l'excitation est une combinaison de fonction périodiques.

²⁵ La réponse statique est obtenue en négligeant l'accélération dans l'équation du mouvement. En d'autres mots, cela équivaut à la résolution de l'équation : $F = K \cdot U$.

En remplaçant les termes de l'équation 27 par la relation définie dans l'équation 28, la relation suivante est obtenue :

$$u(t) = u_{\text{statique}}(t) \cdot \underbrace{\left[\frac{1}{1 - (\bar{\omega}/\omega)^2} \right]}_{\text{facteur de proportionnalité}}$$

Équation 29

Cette dernière équation fait apparaître une relation majeure qui lie le déplacement dynamique à l'état d'équilibre avec le déplacement statique.

En introduisant le facteur d'amplification $H(\bar{\omega}/\omega)$ et un angle de déphasage ϕ , l'équation 29 est réécrite de la manière suivante :

$$u(t) = u_{\text{statique,max}} \cdot H(\bar{\omega}/\omega) \cdot \sin(\bar{\omega}t - \phi)$$

Équation 30

Le facteur d'amplification dans l'équation 30 représente la valeur absolue du facteur de proportionnalité de l'équation 29. Pour ne pas perdre le signe de ce facteur de proportionnalité, la fonction harmonique est déphasée.

Sur la figure ci-dessous, l'évolution du facteur d'amplification est exposée.

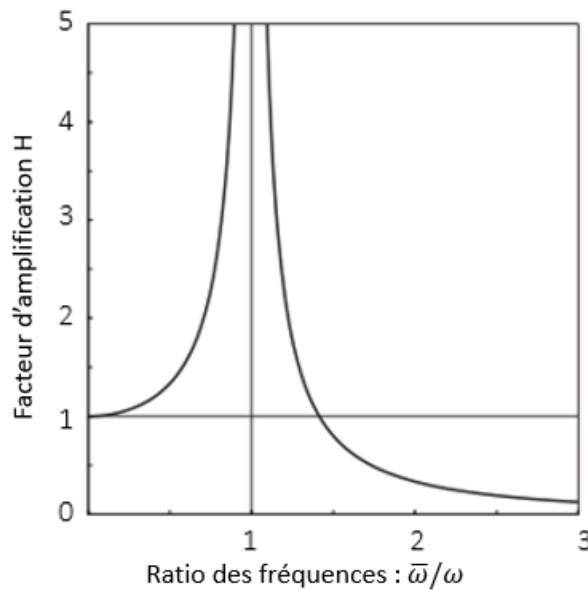


Figure 36 – Facteur d'amplification [Adapté de [27]]

Ce dernier graphique permet de mettre en évidence l'augmentation (ou de la diminution) que subit le déplacement dynamique par rapport au déplacement statique en fonction du rapport des fréquences circulaires.

Lorsque le ratio des fréquences vaut 1, l'équation 26 n'est plus valable. Ce cas a une formule analytique qui lui est spécifique.

Du graphique présenté en figure 36, il est possible de déduire certains éléments :

- Lorsque le rapport des fréquences tend vers zéro, la période d'application de la force extérieure est très longue. Cela implique une réponse qui tend vers une réponse statique.
- Lorsque ce rapport tend vers l'unité, le facteur d'amplification tend vers des valeurs très élevées. Les déplacements de la réponse dynamique sont donc amplifiés par rapport à ceux de la réponse statique.
- Lorsque ce rapport tend vers l'infini, la période d'application de la force extérieure est très faible. Le système n'a pas le temps de réagir à la force appliquée et le déplacement tend à être nul.

L'augmentation du déplacement lorsque le rapport des fréquences tend vers l'unité est un élément essentiel dans l'étude de la dynamique des structures. Cet effet est appelé la **résonance**.

L'étude de la dynamique d'un système débute toujours par la détermination de sa fréquence propre. Rapidement, il est possible de connaître la tendance du déplacement du degré de liberté si la période de la force externe est connue.

Cependant, cela est rendu plus complexe lorsque la force externe appliquée n'est pas périodique. Dans ce cas, afin de déterminer le déplacement du degré de liberté, l'intégration numérique sera requise.

Cette augmentation des déplacements lors de la résonance a évidemment un impact direct sur les efforts internes du système étudié qui évoluent. Cela implique le dimensionnement dynamique des structures sujettes à des forces dynamiques.

5.3.6.1 L'importance de l'amortissement

Comme indiqué dans la sous-section 5.3.1.2, l'amortissement est le seul élément permettant au système de perdre de l'énergie.

Lorsque la structure est mise en résonance et si le modèle n'inclut pas d'amortissement, le déplacement maximal augmente indéfiniment dans le temps : il n'est pas borné. Cela n'est évidemment pas réaliste.

Inversement, la réponse dynamique est bornée lorsque le système est sujet à de l'amortissement.

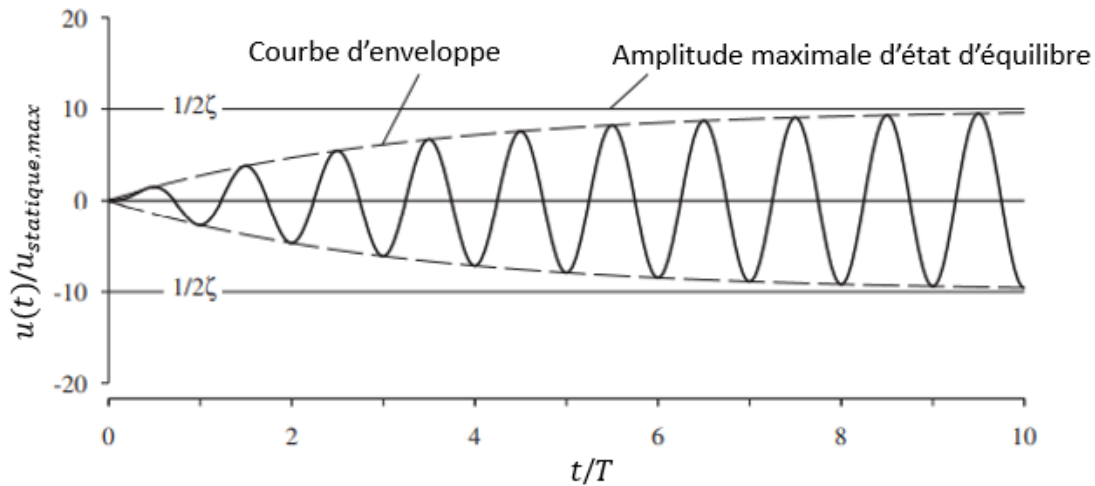


Figure 37 – Limitation du déplacement total sous résonance dû à l'amortissement [Adapté de [27]]

5.4 Multi Degree Of Freedom – MDOF

Dans le monde qui nous entoure, peu de systèmes sont composés uniquement d'un degré de liberté. Il est donc nécessaire de généraliser les développements précédents aux structures ayant des degrés multiples.

5.4.1 Equation du mouvement

L'équation du mouvement d'un système à N degrés de liberté est écrite de la manière suivante sous forme matricielle : [26] [27]

$$M \cdot \ddot{U}(t) + C \cdot \dot{U}(t) + K \cdot U(t) = P(t)$$

Équation 31

Où :

- M, C & K sont des matrices carrées de dimension N par N. Ces matrices représentent respectivement : la matrice de masse, la matrice d'amortissement et la matrice de rigidité.
- $\ddot{U}, \dot{U}, U$ & P sont des vecteurs de dimension N par 1. Ils représentent respectivement : l'accélération, la vitesse, le déplacement et la force externe appliquée.

L'équation 31 représente un système de N équations dépendantes les unes des autres. L'objectif est de rendre par un artifice mathématique les équations indépendantes les unes des autres.

En considérant un système non amorti et libre, l'équation 31 devient :

$$M \cdot \ddot{U}(t) + K \cdot U(t) = 0$$

Équation 32

Si on considère que les déplacements sont faits des combinaisons, alors la solution est de la forme suivante : [26]

$$U(t) = \phi \cdot [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$$

Équation 33

En remplaçant dans l'équation 32 le déplacement et l'accélération selon la forme définie à l'équation 33, l'équation 34 est obtenue :

$$[-\omega^2 M \phi + K \phi] \cdot [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] = 0$$

Équation 34

L'équation 34 est vérifiée dans deux cas. Un cas est trivial car l'équation est vérifiée pour un déplacement nul. En considérant seulement le cas non trivial, le problème matriciel aux valeurs propres est obtenu : [26]

$$[K - \omega_i^2 M] \cdot \phi_i = 0 \quad i = 1, \dots, N$$

Équation 35

Enfin, l'équation 35 admet une solution non-triviale si l'équation ci-dessous est vérifiée.

$$\det [K - \omega_i^2 M] = 0$$

Équation 36

L'équation 36 est définie comme l'équation caractéristique. [26]

5.4.2 Les fréquences propres

Les fréquences propres ou naturelles sont donc obtenues en résolvant l'équation caractéristique (Équation 36). Cette équation est en fait un problème aux valeurs propres.

Un système ayant N degrés de liberté a donc N fréquences propres. Celles-ci sont, par convention, triées dans un ordre croissant : $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$. [26]

5.4.3 Les modes propres

Lorsque les fréquences propres sont obtenues, le vecteur ϕ_i peut être obtenu pour chacune des fréquences.

Ce vecteur²⁶ ϕ_i est le mode naturel de vibration de la fréquence propre i . À chaque fréquence propre correspond un mode. Ce vecteur de dimension N est en fait un vecteur propre qui représente les rapports de déplacement entre tous les degrés de liberté. Il est donc adimensionnel.

Les vecteurs ϕ_i peuvent être assemblés dans une matrice Φ de dimension N par N selon la convention suivante²⁷ :

$$\Phi_1 = \Phi_{1,j}$$

Équation 37

5.4.4 Propriété des modes

Les modes ont une propriété essentielle : l'orthogonalité. [26]

Pour deux modes i et j , si $\omega_i \neq \omega_j$, il peut être démontré que :

$$\phi_i^T \cdot K \cdot \phi_j = 0$$

Équation 38

$$\phi_i^T \cdot M \cdot \phi_j = 0$$

Équation 39

Ces deux dernières relations (Équation 40 et Équation 41) permettent de définir, depuis l'équation 32, N équations indépendantes les unes des autres car les matrices K_g et M_g définies ci-dessous sont des matrices diagonales.

$$K_g = \Phi^T \cdot K \cdot \Phi$$

Équation 40

$$M_g = \Phi^T \cdot M \cdot \Phi$$

Équation 41

Les matrices K_g et M_g sont appelées respectivement matrice de rigidité généralisée et matrice de masse généralisée. [27]

²⁶ Dans le problème aux valeurs propres, ce vecteur est connu sous le nom de vecteur propre.

²⁷ Pour la première fréquence propre.

Dans le cas où M et K sont définies positives, les éléments se trouvant sur les diagonales des matrices M_g et K_g sont aussi positifs et liés par la relation suivante : [26]

$$K_{g,i} = \omega_i^2 \cdot M_{g,i}$$

Équation 42

5.4.5 Equation du mouvement selon la variable q

En multipliant l'équation 32 par Φ et en remplaçant $U(t) = \Phi \cdot q(t)$ tel que suggéré à l'équation 33, le système à N dimensions est obtenu. **Ce système est formé de N équations indépendantes les unes des autres.**

$$M_g \cdot \ddot{q}(t) + K_g \cdot q(t) = 0$$

Équation 43

Cette étape est extrêmement importante car elle permet d'étudier un système complexe en en N systèmes simples (SDOF) dont la résolution a été expliquée dans la section 5.3.

Le système étant défini par une nouvelle inconnue q , il faut redéfinir les conditions initiales du problème. En se basant sur la relation $U(t) = \Phi \cdot q(t)$, les conditions initiales deviennent : [26]

$$q_j(0) = \frac{\Phi_j^T \cdot M \cdot U(0)}{M_j} \quad \& \quad \dot{q}_j(0) = \frac{\Phi_j^T \cdot M \cdot \dot{U}(0)}{M_j}$$

Équation 44

5.4.6 Normalisation des modes

Il existe différentes manières de normaliser les modes. [26] Les modes peuvent par exemple être normalisés afin d'avoir l'élément le plus grand du vecteur égal à l'unité.

Une autre normalisation est très régulièrement utilisée : la normalisation selon la masse. Cette dernière a pour objectif que la matrice de masse généralisée soit égale à la matrice identité :

$$M_g = \Phi^T \cdot M \cdot \Phi = I$$

Équation 45

Lorsque la normalisation par la masse est effectuée, l'équation 43 est réécrite de la manière suivante :

$$\ddot{q}(t) + \Omega^2 \cdot q(t) = 0$$

Équation 46

Cette normalisation permet de faire apparaître le carré des fréquences propres sur la diagonale de la matrice Ω^2 . Pour la fréquence propre j , l'équation 46 se réécrit :

$$\ddot{q}_j(t) + \omega_j^2 \cdot q_j(t) = 0$$

Équation 47

Cette dernière équation fait apparaître la fréquence propre liée au mode j et est résolue de la même manière que l'équation d'un degré de liberté.

Ces développements peuvent être généralisés en ajoutant les termes liés à l'amortissement et à la force externe appliquée :

$$\ddot{q}_j(t) + 2\xi_j\omega_j\dot{q}_j(t) + \omega_j^2 q_j(t) = \frac{P_j(t)}{M_j}$$

Équation 48

Concernant le terme lié à l'amortissement, il est important de noter que cette dernière équation ne peut être obtenue que lorsque l'amortissement est classique. Ce type d'amortissement est obtenu lorsque l'égalité suivante est vérifiée. [26]

$$C \cdot M^{-1} \cdot K = K \cdot M^{-1} \cdot C$$

Équation 49

Ainsi, la matrice d'amortissement ne couple pas les modes entre eux. L'une des formes de matrice d'amortissement classique est la matrice CAUGHEY.

5.4.7 Résolution des équations modales

Les équations modales de mouvement sont résolues tel que les méthodes énoncées pour les systèmes à un degré de liberté.

Les effets concernant l'amplification des déplacements dus à la fréquence de la force d'excitation sont toujours valables.

Ainsi, la position d'application de la force et la fréquence d'application impacteront la réponse de la structure.

5.4.8 Combinaison des modes

La réponse d'une structure une déformation initiale ou d'une excitation est une combinaison des solutions des équations de mouvement de chaque mode :

$$U(t) = \sum_{j=1}^N \phi_j q_j(t)$$

Équation 50

Où $q_j(t)$ est la réponse modale de l'équation du mouvement du mode j .

6 Conclusion de la partie « Fondements »

Ce chapitre 6 clôture la première partie de ce mémoire qui s'est focalisée sur le comportement statique du SIMPLEX et une introduction aux concepts théoriques de la dynamique des structures.

De cette partie, des éléments essentiels sont à retenir.

Tout d'abord, deux paramètres sont utilisés afin de tester le comportement statique et dynamique du SIMPLEX : le niveau de précontrainte et le chargement externe.

Ensuite, les résultats des tests statiques présentés dans chapitre 4 ont mis en lumière la capacité de la précontrainte à rigidifier la structure et les grands déplacements que subit cette structure lorsqu'elle est précontrainte et chargée. Ces tests statiques ont aussi permis de déterminer les limites de niveau de précontrainte et de chargement externe qui peuvent être appliqués lors des tests dynamiques.

Enfin, les concepts de fréquences propres et de modes propres ont été introduits dans le dernier chapitre de cette partie. Ces concepts sont centraux dans toute étude dynamique. Chaque fréquence propre est liée à un mode propre correspondant. Ce mode est un vecteur adimensionnel représentant la forme de la vibration. Il est central dans l'étude numérique car il permet de simplifier un système à N équations dépendantes en un système de N équations indépendantes.

Etude dynamique du SIMPLEX

1 Introduction

1.1 Exploration bibliographique sur la dynamique des structures en tensegrité

Datant d'environ une septantaine d'années, les structures en tensegrité n'ont pas encore permis de dévoiler tout leur potentiel. La littérature disponible sur la tensegrité est très vaste et le nombre d'articles publiés chaque année poursuit sa croissance exponentielle. [28] Le comportement dynamique des structures en tensegrité étant étudié pour la première fois à l'UCL/GCE, ce chapitre résume le résultat de mes recherches bibliographiques à ce sujet.

Dans les années 80, MOTRO effectue une étude statique et dynamique sur un SIMPLEX. L'étude compare des résultats numériques à des prises de mesures expérimentales. MOTRO [29] démontra qu'un modèle dynamique linéarisé autour d'un point d'équilibre de la structure permet d'obtenir une bonne approximation du caractère non-linéaire de ces structures. Ce point d'équilibre est défini dans ce mémoire tel que la position déformée de la structure sous la précontrainte. Cette étude est limitée car elle est menée uniquement sous poids propre pour différents niveaux de précontrainte.



Figure 38 – Prototype pour l'étude statique et dynamique effectuée par MOTRO [29]

Au-delà du comportement de non-linéarité géométrique des structures en tenségrité, celles-ci ont la possibilité de gagner en rigidité en ajoutant une précontrainte initiale dans la structure comme expliqué dans la section 4.2 de la partie « Fondements ». Le niveau de précontrainte joue un rôle majeur dans la rigidité des structures en tenségrité. [30] La rigidité tangente (= totale) de la structure est définie telle qu'étant la somme de la rigidité matérielle (liée à la rigidité des matériaux) et la rigidité géométrique (liée à la précontrainte). [23] [31]

La précontrainte influence dès lors la valeur des fréquences propres via la rigidité de la structure. Dès 1992, FURUYA indique que si la prétension augmente, la fréquence propre augmente mais que cette dernière reste aussi dépendante de la configuration géométrique de la structure. [32]

En 2001, MOUSSA & al. publient un article [33] concernant l'étude dynamique d'un SIMPLEX et de structures multi-modules composées de SIMPLEX. Cette étude est réalisée sur des structures non chargées dont l'unique paramètre est le niveau de précontrainte. L'article met en lumière le fait que la première fréquence propre est directement fonction du niveau de précontrainte mais que cette relation n'est plus vérifiable pour des structures chargées. Lorsque les structures sont chargées, elles se déforment et la rigidité n'est plus constante du fait de la non-linéarité géométrique.

La même année, MURAKAMI [34] a établi un lien entre les mécanismes et les modes de vibration. Selon l'auteur de cet article, il existe deux types de fréquences/modes : les modes liés à des mécanismes²⁸ internes et les modes liés à des déplacements/vibrations (Càd les modes flexionnels et torsionnels). L'étude permet d'arriver à la conclusion que les fréquences des modes liés à des mécanismes internes sont beaucoup plus influencées par une variation de précontrainte contrairement aux modes flexionnels.

En 2020, L. MAŁYSZKO et A. RUTKIEWICZ [35] ont effectué une comparaison entre l'étude expérimentale et numérique sur un SIMPLEX de petite taille. Cette étude est limitée car elle ne s'effectue que sous l'influence de la précontrainte. Le modèle numérique considère la position déformée de la structure sous l'effet de la précontrainte. Ils confirment les propos de MURAKAMI [34] concernant le lien entre les modes propres et les mécanismes spécifiquement pour un SIMPLEX. Pour un SIMPLEX non chargé, ils arrivent à la conclusion que le mode de la première fréquence est lié au mécanisme interne et unique de la structure mais aucune comparaison avec le mode expérimental n'est effectuée. Les onze fréquences restantes sont plus liées à la rigidité matérielle et ne varient que très peu face à une variation de précontrainte.

²⁸ De la même manière qu'un câble tendu possède un mécanisme qui le fait vibrer autour de sa position d'équilibre, le SIMPLEX est composé d'un mécanisme en torsion.



Figure 39 – Simplex expérimental de l'étude de L. Małyszko and A. Rutkiewicz [35]

Cette étude [35] conclut aussi que les résultats numériques avec une matrice de masse « *lumped* » (=Granulated) approchent mieux les résultats expérimentaux que la matrice de masse « *consistent* ». Les résultats obtenus sont présentés sur la figure 40. L'explication théorique des deux modèles de masse est présentée dans l'annexe 3.

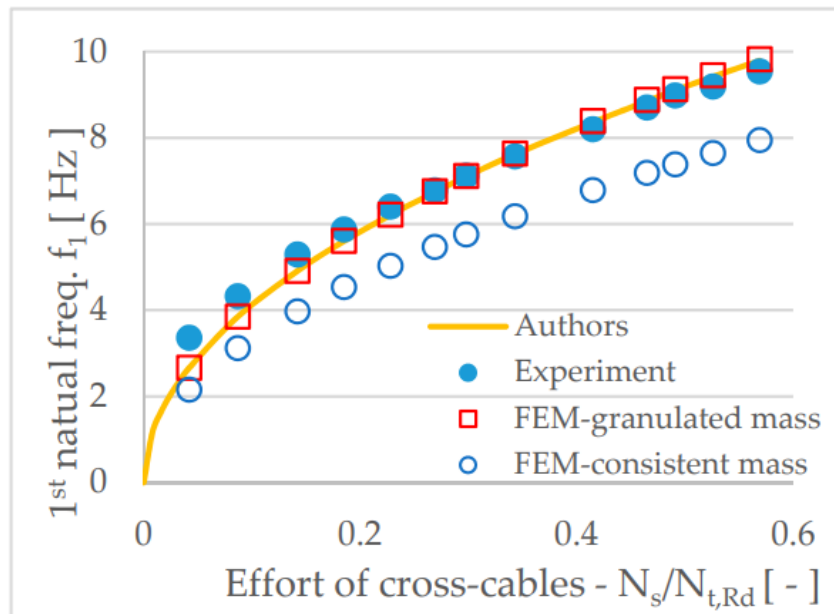


Figure 40 – Résultat de l'étude menée par L. Małyszko and A. Rutkiewicz [35]

1.2 Objectifs de l'étude dynamique du SIMPLEX

La révision de la littérature scientifique montre que toutes les études dynamiques actuelles ont été effectuées sous poids propre en faisant varier le niveau de précontrainte. Ce protocole ne permet pas d'étudier l'influence de la non-linéarité géométrique sur la dynamique des structures.

Or, cet élément est essentiel afin de construire des structures de génie civil. Lorsque les piétons traverseront la passerelle projet « Snake footbridge » (Figure 3 – « Snake Footbridge » en page 2), le poids des piétons va déformer statiquement la passerelle et ensuite en fonction de la cadence de leurs pas exciter ou non la structure.

L'objectif de l'étude menée dans la seconde partie de ce mémoire est d'intégrer l'influence de la non-linéarité géométrique sur la dynamique du SIMPLEX en considérant, de manière inédite, les deux paramètres d'étude suivants :

- Le niveau de précontrainte
- Le chargement externe

L'intérêt est de comprendre si les grands déplacements que subit ce type de structure influence les valeurs des fréquences propres. Cette analyse est effectuée en comparant les résultats expérimentaux et les résultats numériques en position initiale et déformée.

Enfin, ce mémoire va sur un autre point aussi au-delà des recherches menées actuellement. En plus d'analyser la première fréquence, il compare les résultats de simulations numériques aux prises de mesures expérimentales pour la seconde fréquence propre et le premier mode.

2 Outil numérique

Comme expliqué dans l'introduction de ce mémoire, un code informatique orienté utilisateur a été développé durant ce mémoire en Rhino Grasshopper [36].

Le développement de ce code permettant l'étude dynamique s'inscrit dans la continuité du code développé par J. FERON durant son doctorat.

Le code de J. FERON permet actuellement d'effectuer un calcul statique : de créer la structure et les éléments composant la structure, de définir la précontrainte et les charges externes appliquées et de calculer la géométrie déformée de la structure ainsi que les efforts internes selon la méthode d'analyse statique structurale appelée « relaxation dynamique ». (Présenté en détail dans la sous-section 2.1.1.1)

Le but premier de l'outil développé durant ce mémoire est d'obtenir des résultats numériques concernant les fréquences propres et les modes propre afin de les comparer à aux résultats expérimentaux obtenus durant ce mémoire.

Le développement de cet outil est indispensable pour deux raisons.

Premièrement, les logiciels commerciaux tel que SCIA ne permettent pas de calculer la dynamique des structures dans la position déformée.

Deuxièmement, les logiciels commerciaux ne prennent pas la précontrainte en compte dans la rigidité de la structure. Or, il a été démontré dans la section 4.2 de la première partie de ce mémoire qu'elle joue un rôle essentiel dans la rigide tangente (= totale).

Ce chapitre a pour objectif de présenter les forces du code, sa structure, les développements effectués ainsi que ses capacités.

A cette fin, le chapitre est articulé de la manière suivante.

La première section présente le logiciel, l'ensemble des langages informatiques et les capacités du code statistique « MUSCLE ».

Ensuite, les deux sections suivantes présentent les composants développés durant ce mémoire et la structure du code Python.

Enfin, la dernière section présente les difficultés informatiques rencontrées durant le développement du logiciel.

2.1 Le logiciel

La structure du code est complexe. Le code fait interagir trois niveaux informatiques qui sont définis par des langages différents : Rhino-Grasshopper, C# (C Sharp) et Python.

L'utilisateur effectue tous les calculs sur l'interface Grasshopper. Les codes C# et Python travaillent de manière autonome en arrière-plan afin d'effectuer les tâches demandées par l'utilisateur dans Grasshopper.

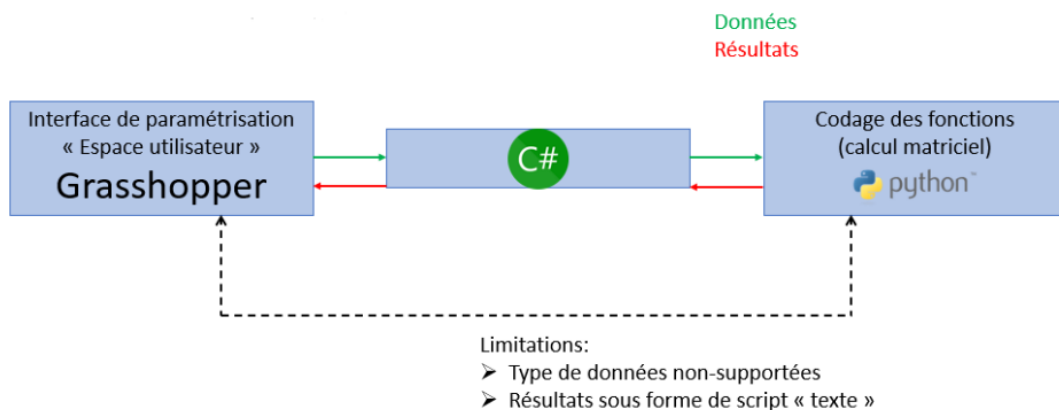


Figure 41 – Structure du code

2.1.1 Rhino-Grasshopper

Grasshopper est l'« interface utilisateur » choisie pour le code informatique. C'est un langage visuel qui s'exécute dans l'application Rhinoceros 3D²⁹. [37]

Le logiciel Rhino-Grasshopper a été choisi pour trois de ces qualités.

La **première qualité** est liée à Grasshopper. Elle réside dans le fait que ce langage ne demande aucun prérequis de programmation ni de connaissance de syntaxe. Son utilisateur peut produire son propre algorithme et structurer le code de la façon dont il le souhaite. [36]

Le code se réalise en positionnant des composants sur le canevas et en les reliant entre eux tel que sur la figure 42 a). Chaque composant effectue une tâche ou un calcul. Les liens entre les composants permettent de transférer de l'information.

²⁹ Logiciel de conception 3D utilisé dans le design ou l'architecture, Disponible sous licence

Grasshopper inclus une bibliothèque contenant des composants de base mais celle-ci reste limitée dans les possibilités de calcul.



Figure 44 – Composants initialement présents

Mc NEEL & Associates, société développant Rhino-Grasshopper, permet aux concepteurs de développer leurs propres composants en Python ou C# (C Sharp).

Le développement via Python s'effectue directement dans l'interface Grasshopper. Le codage est aisé mais limité pour des codes complexes. [15] De plus, certaines librairies tel que NUMPY³⁰ ne sont pas accessibles. [38]

Le développement de composants via C# se réalise dans l'application Microsoft Visual Studio³¹. Les composants peuvent créés avec beaucoup de flexibilité et peuvent communiquer en dehors de C#. [38] J. FERON a décidé de développer sa propre librairie de composants en C# sous le nom « MUSCLE ».

Les capacités de ce logiciel statique sont présentées dans la sous-section suivante.

2.1.1.1 Présentation du logiciel « MUSCLE » - calcul statique

MUSCLE est constitué de composants qui sont orienté objet. L'objet principal est la structure. Elle est créée à l'aide d'autres objets : les nœuds, les supports, les éléments, ... Une fois que les éléments, les nœuds et les supports sont définis, la structure est assemblée afin de créer la structure en position initiale.

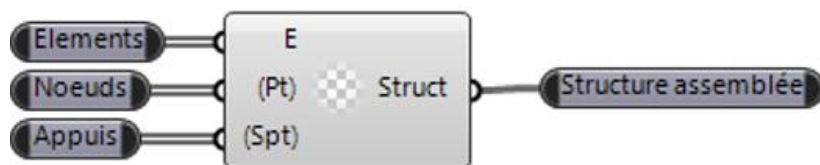


Figure 45 – Composant permettant l'assemblage de la structure

Lorsque la position initiale est définie, la structure déformée sous son poids propre peut être calculée grâce à la méthode de relaxation dynamique présentée sur la figure 46. Cette méthode permet d'obtenir l'équilibre de la structure grâce à un calcul non-linéaire.

³⁰ Librairie de Python permettant entre autres du calcul matriciel.

³¹ Les composants sont alors uniquement programmés en C#.

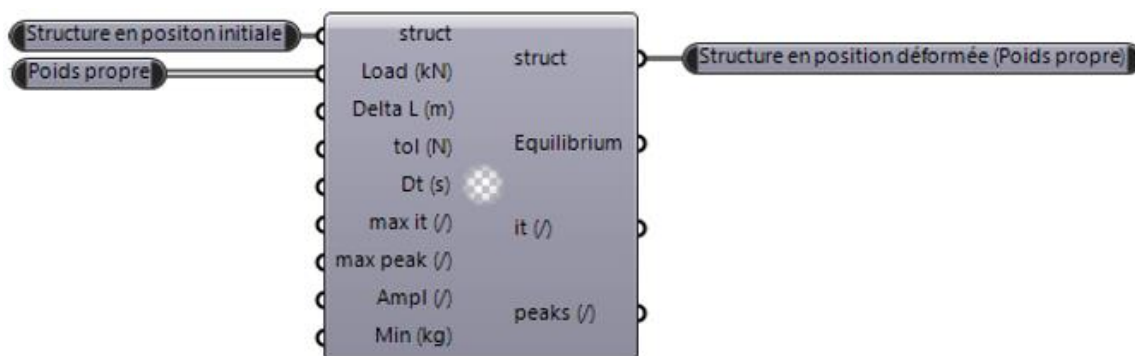


Figure 46 – Composant « Dynamic relaxation » permettant le calcul de la structure déformée sous son poids propre

Le code est polyvalent : l'utilisateur décide ce qu'il souhaite appliquer à la structure pour effectuer le calcul : des charges externes, de la précontrainte ou les deux ... Cela permet d'étudier très rapidement les déformations de la structure et l'évolution des efforts internes en fonction de ce qu'il lui est précisément appliqué. Par exemple³² : d'abord le poids propre, puis la précontrainte et enfin le chargement externe.

Cette polyvalence est extrêmement importante pour l'étude des structures ayant un comportement de non-linéarité géométrique car le principe de superposition n'est pas vérifié. (Cfr. section 4.2 dans la partie « Fondements ») Dès lors, la disposition temporelle des étapes de chargement et/ou de mise en précontrainte a de l'influence sur la position d'équilibre final de la structure.

Le composant de relaxation dynamique présenté en figure 46 permet d'effectuer le calcul d'équilibre statique en appliquant un chargement ou de la précontrainte sur n'importe quelle structure : en position initiale ou déjà déformée. La structure obtenue en sortie est la structure à l'équilibre. Celle-ci contient de nombreuses informations tel que la géométrie déformée ou les efforts internes.

L'objet structure évolue et peut être étudié à n'importe quel instant du calcul.

En reliant le composant de la figure 46 à un second composant, la structure déformée d'abord sous son poids propre puis sous un niveau de précontrainte est calculée tel que sur la figure 47.

³² Méthode utilisée spécifiquement pour l'étude du SIMPLEX.

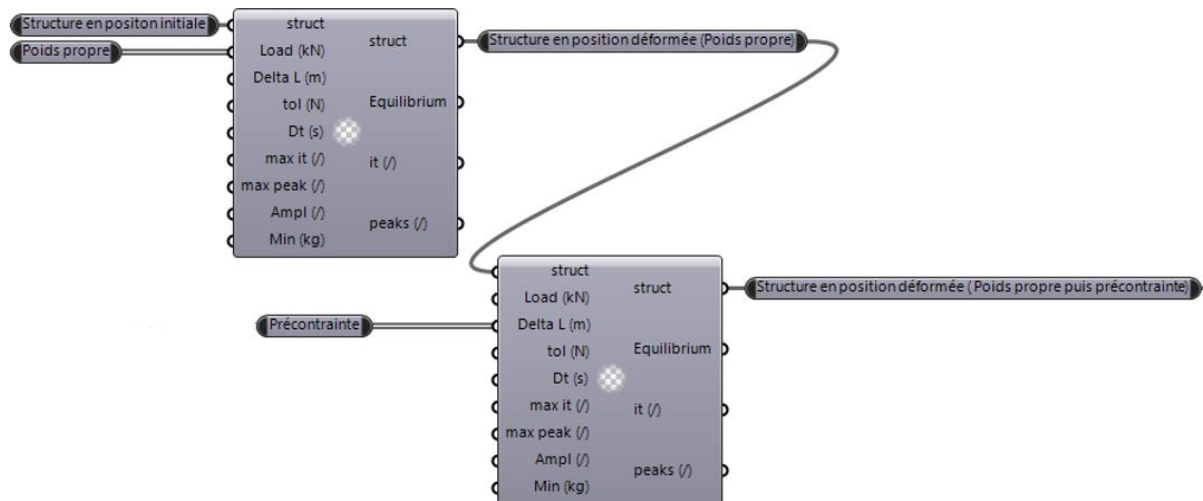


Figure 47 – Assemblage de deux composants « Dynamic relaxation » afin d’obtenir la position déformée sous poids propre puis sous précontrainte

2.1.2 C#

Les composants développés pour le calcul statique et dynamique sont codés en langage C#. Ce langage est orienté objet [39]. Cela lui confère une certaine efficacité dans la vitesse de traitement des données grâce aux méthodes et attributs définis pour les objets faisant partie d’une classe.

Cependant, le langage C# ne permet pas de calcul vectoriel et matriciel contrairement à Python. C’est sa plus grosse faiblesse.

Afin de pallier cette faiblesse, la structure du code est faite tel que C# communique avec Python afin que les calculs vectoriels et/ou matriciels y soient effectués.

Cette communication est effectuée par l’appel de fonction Python depuis le code C# en écrivant dans l’invite de commande de l’ordinateur (Cmd³³). Les données sont transférées via des fichiers au format txt dont la syntaxe est régie par le package JSON.

JSON, abréviation de « JavaScript Object Notation » [40], permet de transcrire les données selon un certain format qui est lisible et transcriptible par l’Homme.

Ce transfert de données a un certain coût temporel et est donc limité à certains calculs.

³³ En Anglais : Command prompt

2.1.3 Python

Enfin, Python permet de palier à la limitation du code C# : il est utilisé afin d'effectuer les calculs vectoriels et/ou matriciels. Ce langage de programmation orienté objet a en son sein des bibliothèques optimisées tel que NUMPY permettant d'effectuer des calculs numériques vectorisés.

Le code Python est organisé sous forme de classes contenant des méthodes. Les méthodes sont des fonctions associées spécifiquement à une classe.

Les étapes majeures du calcul dynamique sont effectuées sous le langage Python et sont expliquées dans la section 2.3.

2.2 Les composants Grasshopper développés pour le calcul dynamique

Les composants développés durant ce mémoire permettent de calculer les fréquences propres et les modes propres associés ainsi que de visualiser ces derniers.

La force des composants développés réside dans les quatre éléments cités ci-dessous :

Tout d'abord, les composants permettent d'effectuer ce calcul sur tout type de structures en tenségrité et plus généralement sur n'importe quel treillis.

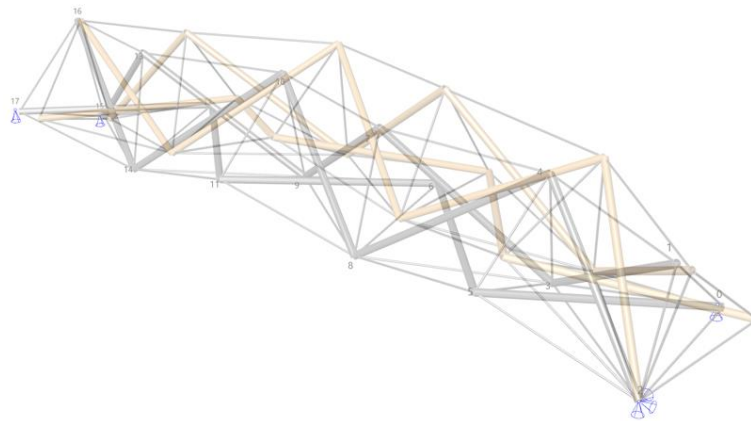
Grâce à sa polyvalence présentée précédemment, le calcul de fréquence propre et de mode propre peut être effectué à tout instant. En d'autres termes, le calcul peut être effectué sur la position initiale ou déformée quels que soient le niveau d'auto-contrainte ou les charges externes appliquées sur la structure.

Ensuite, le calcul des fréquences propres et des modes propres peut être effectué selon deux types de matrice de masse : « *Lumped* » ou « *Consistent* ». Ces dernières sont présentées en annexe 3.

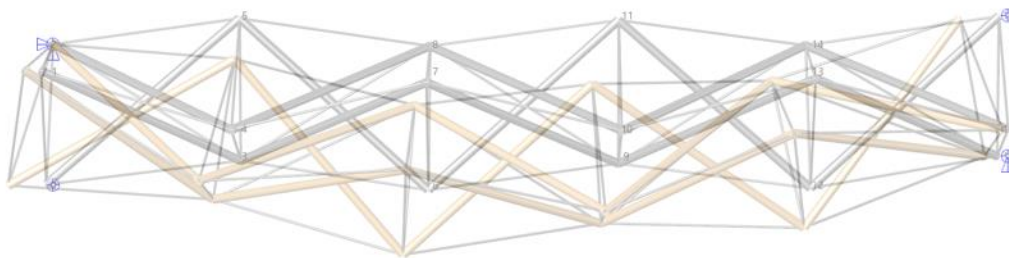
Enfin, deux composants sont exclusivement dédiés à l'affichage d'une part des modes et de l'autre des masses nodales considérées dans le calcul dynamique.

L'affichage du mode permet de voir en trois dimensions la forme de la vibration de la structure selon le mode choisi tel que pour la passerelle en bambou faisant partie du mémoire de Maxime CAULIER et Nicolas BOUCHAT. Ce mode, présenté sur la figure 48, a été simulé en position déformée avec la matrice de masse « *Lumped* » sous poids propre avec le chargement des piétons.

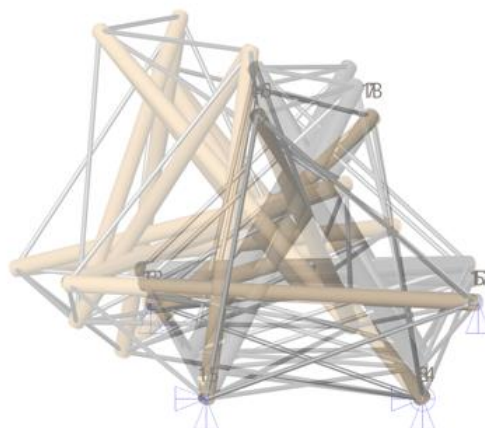
NB: La position grisée est la position d'équilibre statique.



Vue en perspective



Vue du dessus



Vue de coté

Figure 48 – Exemple d'affichage des modes
(Mode 1 d'une passerelle en bambou/corde marine composée de 5 modules en tensegrité pour une portée de 15 [m])

Grace à l'outil développé, la répartition des masses nodales peut être représenté sous formes de sphères de diamètres différents tel que sur la figure 49. Cela permet d'avoir une vue globale des masses utilisées sur les grandes structures.

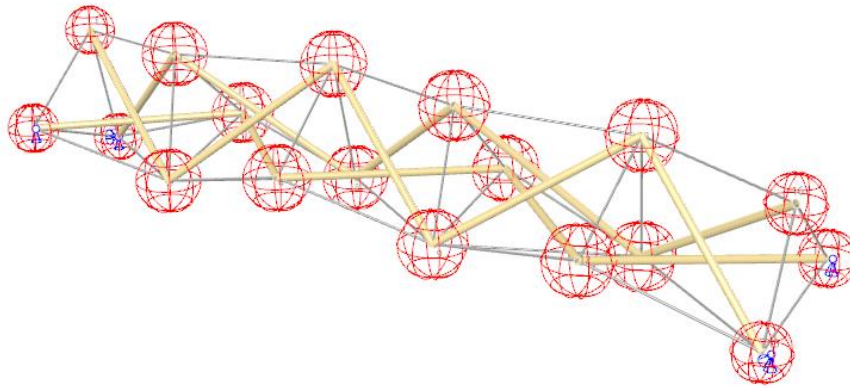


Figure 49 - Exemple d'affichage des masses nodales

2.2.1 Exemple concret de l'utilisation des composants « dynamiques »

Cette sous-section explique brièvement la manière dont les composants peuvent être utilisés et liés entre eux. Ils seront cependant présentés en détail dans la sous-section suivante.

Comme expliqué en début de ce chapitre, les composants développés peuvent effectuer l'étude dynamique sur la structure soit en position initiale soit en position déformée. Dans le dernier cas, le calcul statique doit être effectué au préalable.

Un canevas type de l'utilisation de composants pour l'étude dynamique est présenté sur la figure suivante et est détaillé à la page suivante.

Une présentation technique de tous ces composants est disponible en section 2.2.2.

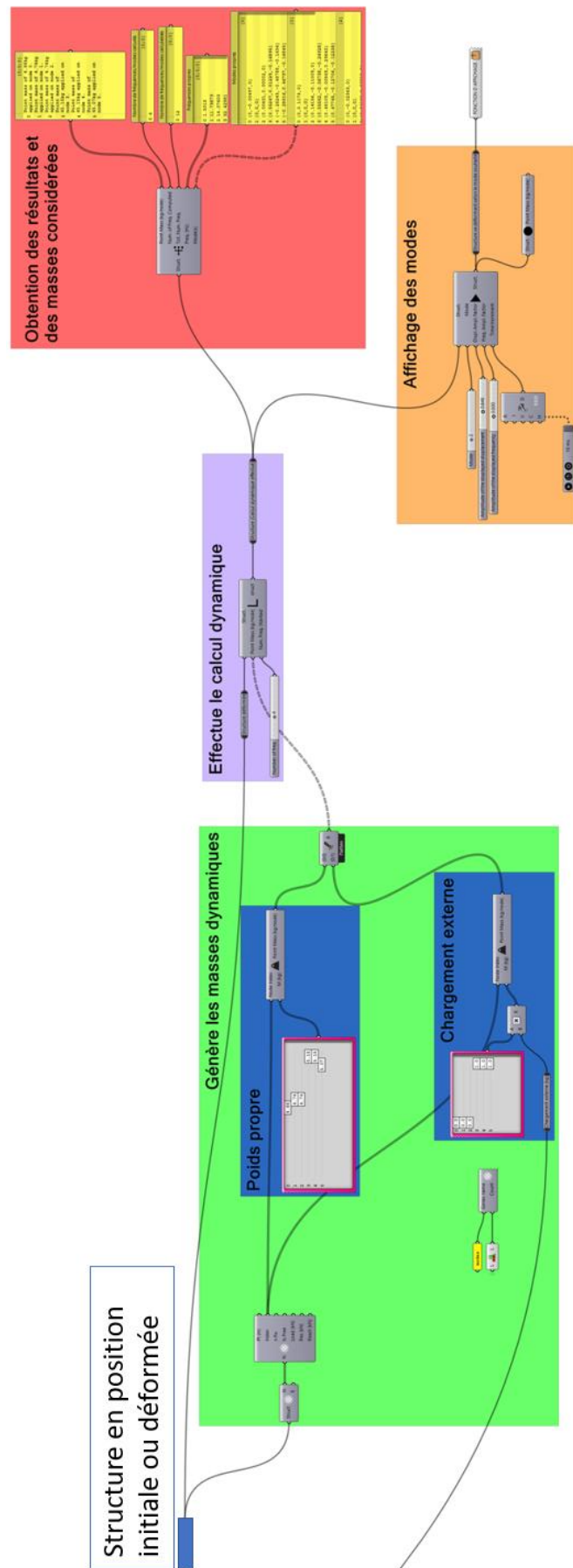


Figure 50 – Utilisation type des composants créés pour le calcul dynamique

Les étapes présentées sur le canevas sont détaillées ci-dessous.

1. La première étape de tout calcul dynamique a pour objectif la détermination des masses modales liées au poids propre et au chargement externe.

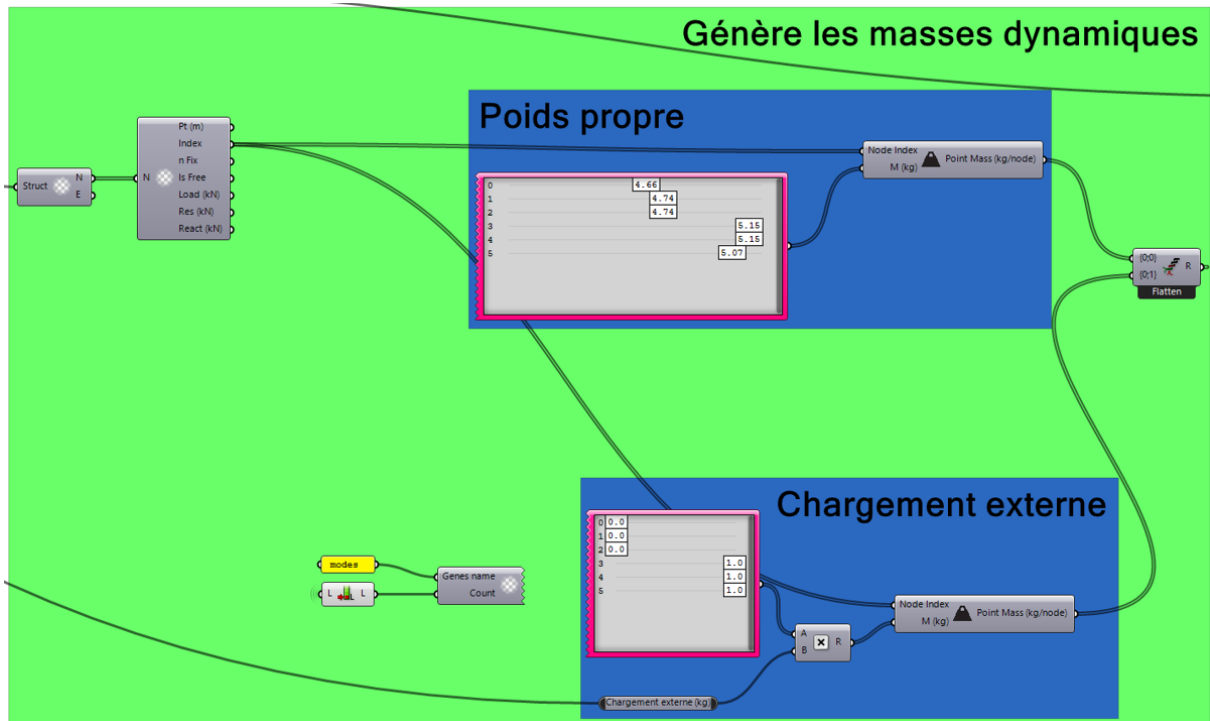


Figure 51 – Exemple de canevas pour la génération des masse nodales considérées dans le calcul dynamique

2. Le calcul dynamique est effectué. Un paramètre permet de limité le nombre de données transférées afin, comme dans ce cas, d’obtenir uniquement les quatre premiers couples de fréquence et mode. Cela est utile pour les grandes structures afin de limiter la latence.

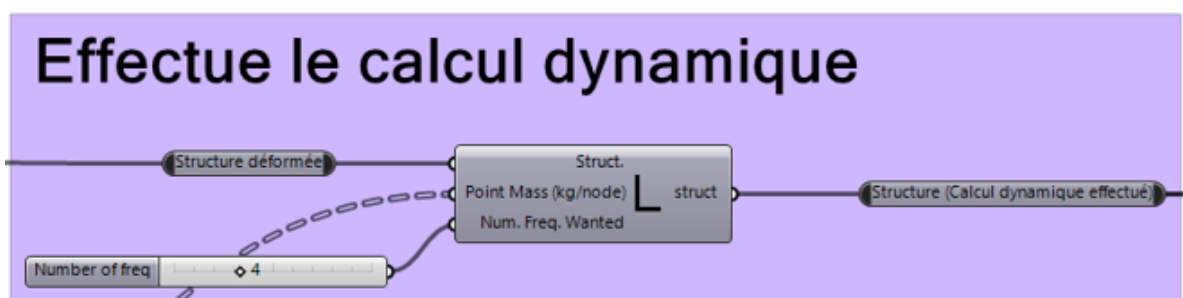


Figure 52 – Exemple de canevas pour la résolution du calcul dynamique

3. Les résultats peuvent ensuite être obtenus sous forme de liste.

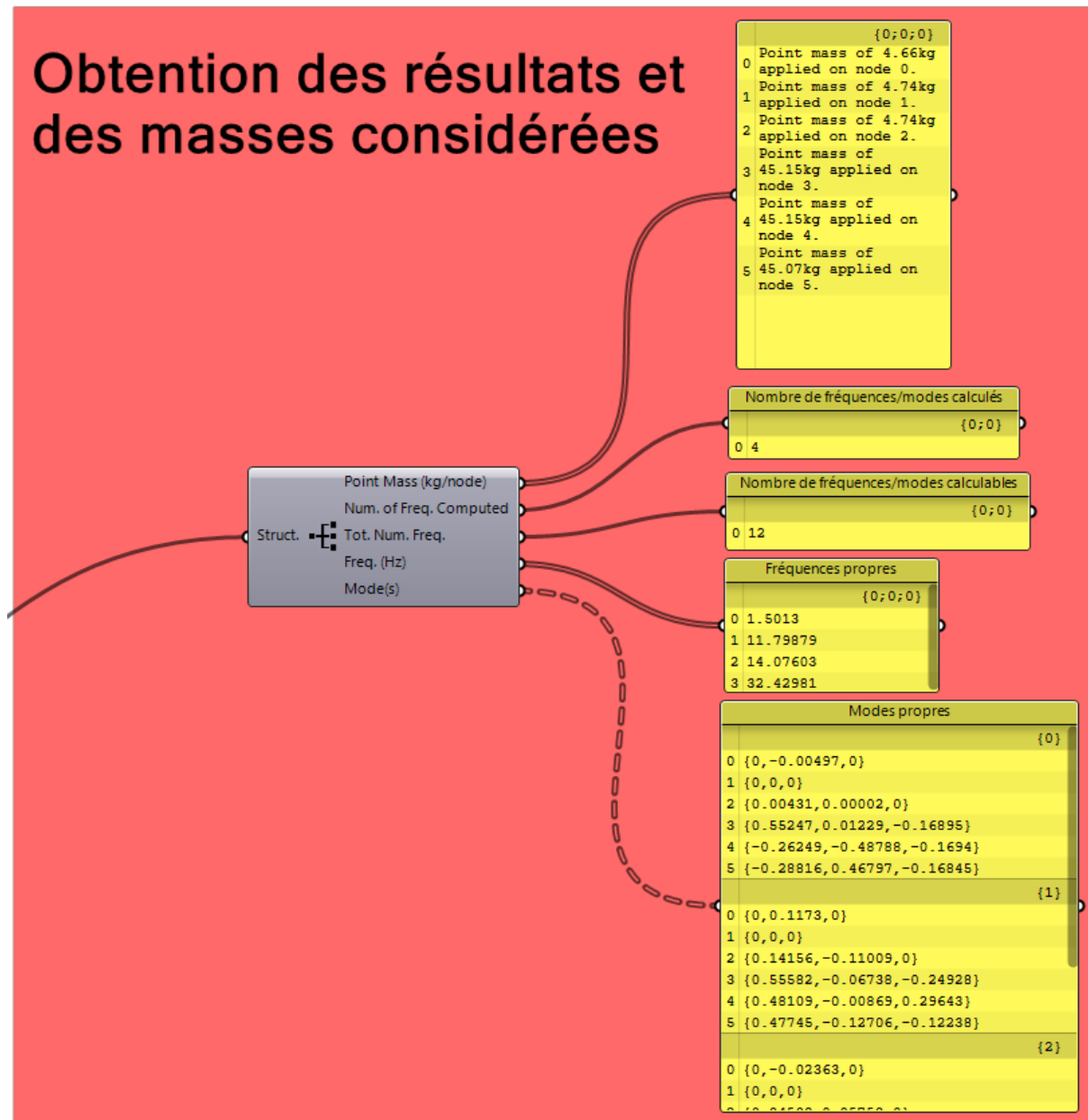


Figure 53 – Exemple de canevas pour l'obtention des résultats après le calcul dynamique

4. Les modes peuvent être affichés sur l'interface Rhino. L'utilisateur peut adapter l'amplitude et la fréquence de la vibration.

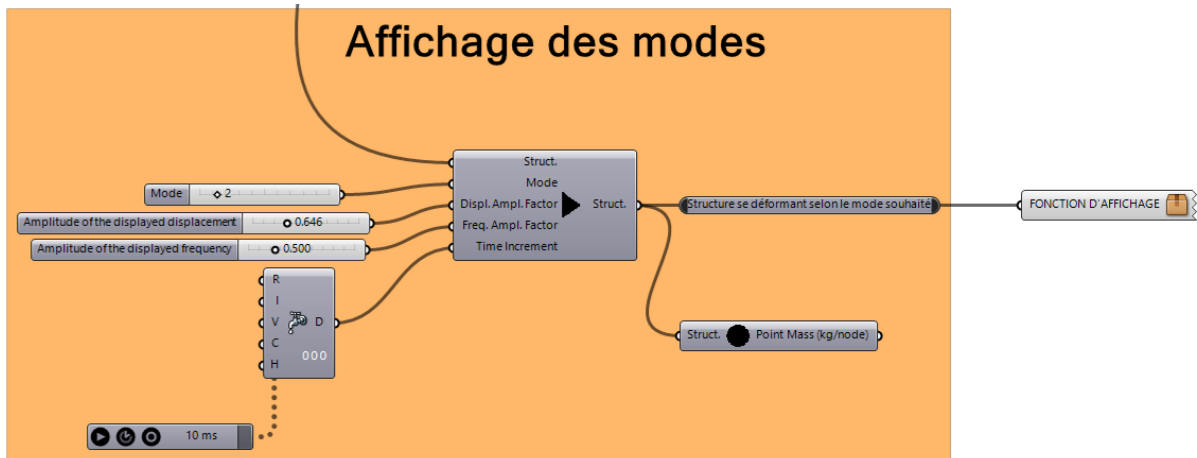


Figure 54 – Exemple de canevas pour l'affichage des modes après le calcul dynamique

La « fonction d'affichage » présente sur la figure 54 permet de définir la manière dont les éléments vont apparaître. Ce dernier peut prendre la forme suivante :

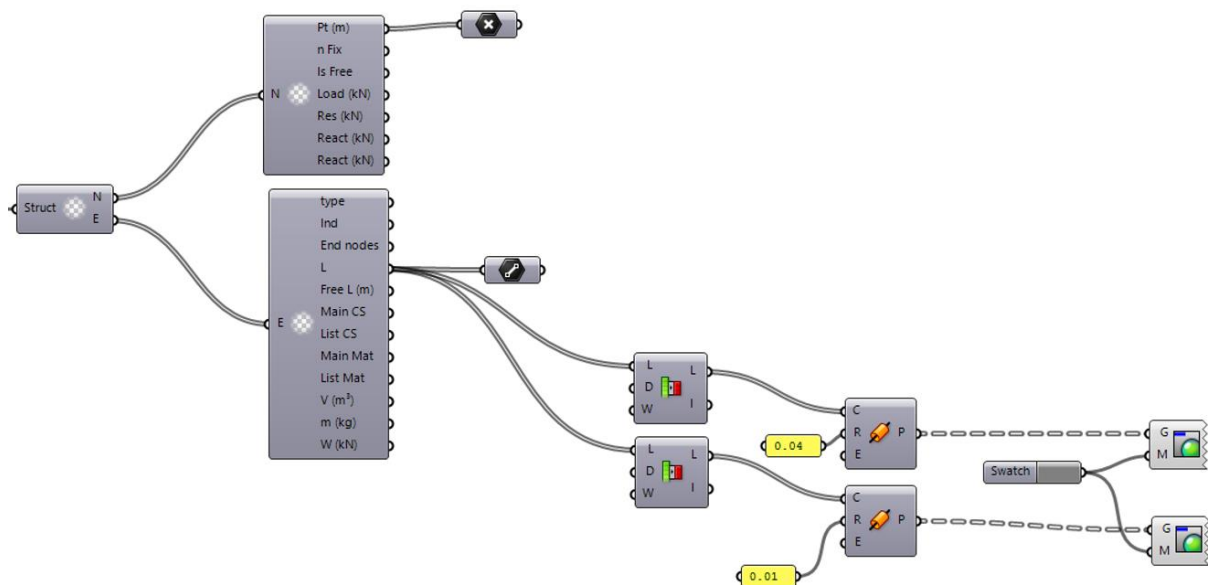


Figure 55 – Exemple de canevas permettant d'afficher une structure

2.2.2 Les types de composants « dynamiques »

En plus de suivre la même logique et la même syntaxe que les composants développés pour le calcul statique, trois lignes directrices ont été suivies : la simplicité, la modularité et la robustesse.

Les composants³⁴ permettant le calcul dynamique sont regroupés en deux familles : les composants « calculateurs » et les « exécutants ».

Les composants « calculateurs » sont les seuls à effectuer des calculs via Python. Il en existe deux car, comme dit précédemment, le coût temporel de l'écriture et d'envoi des données est non négligeable.

Les composants « exécutants » regroupent deux types de composants : le type « propriétés » et le type « affichage ».

Le type « Propriétés » permet de définir ou obtenir une propriété liée au calcul dynamique tandis que le type « Affichage » permet de visualiser les masses nodales et les modes.

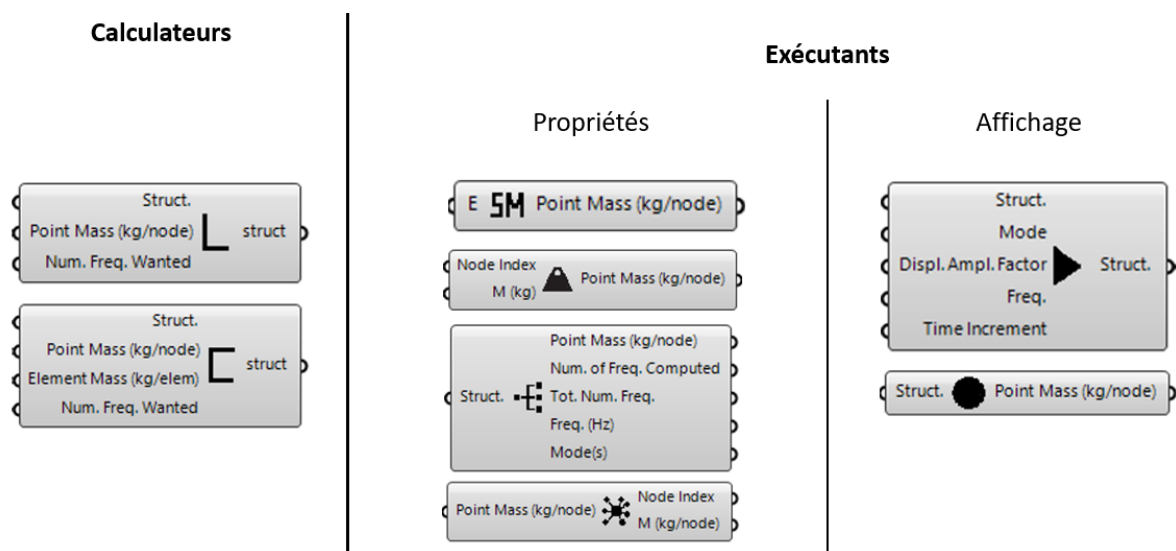


Figure 56 - Synthèse des différents types de composants développés pour le calcul dynamique

³⁴ Les composants ont été développés sous des logiciels et langages ayant des versions spécifiques. Cela est décrit dans l'annexe 4.

2.2.3 Composants « Calculateurs »

Deux composants font partie de la famille « Calculateurs ». Ils se distinguent par leurs matrices de masse respective. L'un suit le modèle « *lumped* » et l'autre le modèle « *consistent* ». (Cfr. annexe 3)

1. Composant « Dynamics Solver Lumped »

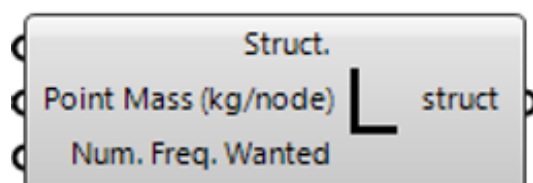


Figure 57 - Composant « Dynamics Solver Lumped »

Entrées	- La structure (type : objet) - Les masses nodales à considérer (type : liste d'objets « Point Mass ») - Le nombre de fréquence propre à calculer (type : entier) Cette entrée permet de limiter le nombre de fréquences propres et de modes qui doivent être transférés à C# depuis Python. Cela a pour but de limiter le trafic de données pour les structures contenant un grand nombre de degrés de liberté³⁵. $i \begin{cases} = 0 : N_{freq} \\ \leq \text{Nombre de fréquences possibles} : i \\ > \text{Nombre de fréquences possibles} : N_{freq} \end{cases}$
Sortie	- La structure contenant toutes les informations du calcul dynamique (type : objet)
Description	Le composant effectue le calcul dynamique en considérant la rigidité matérielle et géométrique. La matrice de masse utilisée est de type « Lumped ».

Tableau 8 - Descriptif du composant « Dynamics Solver Lumped »

³⁵ Le nombre de fréquences propres est égal au nombre de degré de liberté de la structure. N_{freq} est le nombre total de fréquence propre de la structure.

2. Composant « *Dynamics Solver Consistent* »

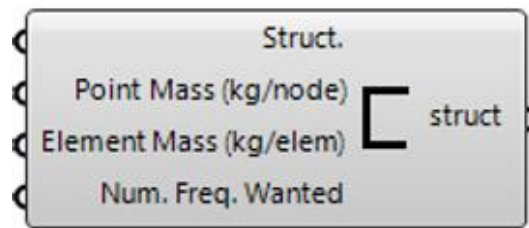


Figure 58 - Composant « *Dynamics Solver Consistent* »

Entrées	- La structure (type : objet) - Les masses nodales à considérer (type : liste d'objets « Point Mass ») - Les masses des éléments à considérer (type : liste de réels classés dans le même ordre que les éléments dans l'objet structure) - Le nombre de fréquences propres et modes à transférer à C# depuis Python (type : entier) (Se référer au composant « Dynamics Solver Lumped » pour plus de détails.)
Sortie	- La structure contenant toutes les informations du calcul dynamique (type : objet)
Description	Le composant effectue le calcul dynamique en considérant la rigidité matérielle et géométrique. La matrice de masse utilisée est de type « Consistent ».

Tableau 9 - Descriptif du composant « *Dynamics Solver Consistent* »

2.2.4 Composants « Exécutants »

Six composants font partie de la famille « Exécutants ». Quatre sont de type « Propriétés » et deux de type « Affichage »

2.2.4.1 Composants « Exécutants » de type « propriétés »

1. Composant « Self Mass »

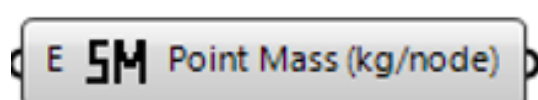


Figure 59 - Composant « Self Mass »

Entrée	- Les éléments (type : liste d'objets « éléments »)
Sortie	- Les masses nodales (type : liste d'objets « Point Mass »)
Description	Détermine une liste d'objet « Point Mass » composé de la valeur de la masse et de l'index du nœud où celle-ci doit être considérée. Pour chaque élément introduit, la masse de l'élément est répartie sur les deux nœuds à ses extrémités. (Moitié de la masse totale sur chaque nœud.) <u>NB :</u> Cet élément n'est utile que dans le cas du modèle de matrice de masse « <i>Lumped</i> ».

Tableau 10 - Descriptif du composant « Self Mass »

2. Composant « *Point Mass* »

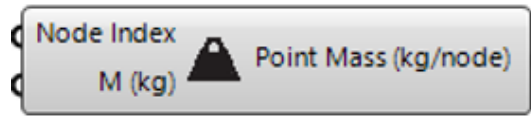


Figure 60 - Composant « *Point Mass* »

Entrées	- Les index des nœuds (type : liste d'entiers) - Les masses (type : liste de nombres réels)
Sortie	- Les masses nodales (type : liste d'objets « <i>Point Mass</i> »)
Description	Retourne une liste d'objets « <i>Point Mass</i> ». Les objets créés contiennent les données des listes aux mêmes positions.

Tableau 11 - Descriptif du composant « *Point Mass* »

3. Composant « *Disassemble Dynamics* »

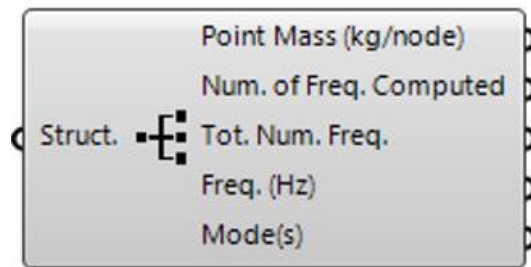


Figure 61 - Composant « *Disassemble Dynamics* »

Entrée	- La structure (type : objet)
Sorties	- Les masses nodales (type : liste d'objets « <i>Point Mass</i> ») - Le nombre de fréquence(s) calculée(s) (type : entier) - Le nombre de fréquences propres maximales de la structure (type : entier) - Les fréquences propres (type : liste de réels) - Les modes propres (type : liste de liste de vecteurs)
Description	Ce composant permet d'obtenir toutes les caractéristiques dynamiques contenues dans un élément structure ainsi que les masses nodales considérées. <u>NB</u> : Pour le calcul avec la matrice de masse « <i>consistent</i> », la sortie permettant d'obtenir les masses nodales ne permet pas d'obtenir toutes les masses considérées pour le calcul. Dans le modèle « <i>consistent</i> », les masses ne sont pas uniquement considérées aux nœuds. (Voir annexe 3)

Tableau 12 - Descriptif du composant « *Disassemble Dynamics* »

4. Composant « Point Mass Properties »

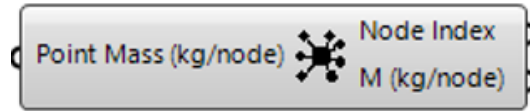


Figure 62 - Composant « Point Mass Properties »

Entrée	- Les masses nodales (type : liste d'objets « Point Mass »)
Sortie	- Les index des nœuds (type : liste d'entiers) - Les masses (type : liste de réels)
Description	Permet d'obtenir les index des nœuds et les masses provenant d'une liste d'objet « Point Mass ».

Tableau 13 - Descriptif du composant « Point Mass Properties »

2.2.4.2 Composants « exécutants » de type « Affichage »

1. Composant « Dynamics Masses Display »

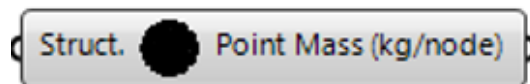


Figure 63 - Composant « Dynamic Masses Display »

Entrée	- La structure (type : objet)
Sortie	- Les masses nodales (type : liste d'objet « Point Mass »)
Description	Ce composant permet d'afficher les masses nodales sous forme de sphères. Le diamètre des sphères dépend de l'importance de la masse nodale. NB : Ce composant ne fonctionne que pour le modèle de masse « <i>lumped</i> » car le composant ne considère que les masses se trouvant précisément aux nœuds.

Tableau 14 - Descriptif du composant « Dynamics Masses Display »

2. Composant « *Dynamics Display* »

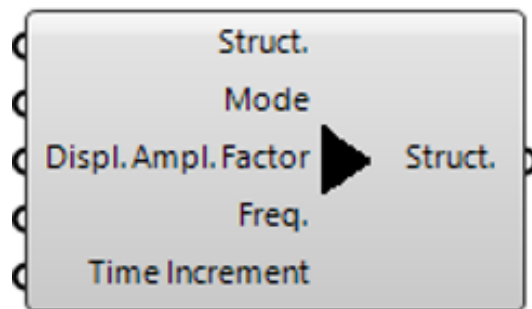


Figure 64 - Composant « *Dynamics Display* »

Entrées	- La structure (type : objet) - Le mode (type : entier à partir de 1) - Le facteur d'amplification des déformations souhaitées (type : réel) - La fréquence circulaire³⁶ d'affichage du mode (type : réel) - Incrément de temps (type : entier) Pour cette entrée, le composant « Tap Buffer » de la bibliothèque gratuite³⁷ « Heteroptera » est utilisé et activé grâce au composant « Trigger ». Cela permet de visualiser le mode en continu.
Sortie	- La structure déformée (type : objet)
Description	Ce composant permet d'afficher la déformée de la structure selon un de ses modes tout en pouvant régler l'amplitude du mouvement et la fréquence d'affichage.

Tableau 15 - Descriptif du composant « *Dynamics Display* »

³⁶ L'affichage du mode suit une fonction cosinus : $\cos(freq \cdot t)$.

³⁷ Disponible sur le site internet : <https://www.food4rhino.com/en/app/heteroptera>

2.3 Le code Python

Le code python tourne en arrière-plan. Il n'est appelé que par les composants de type « calculateurs ». Dans cette partie de code, deux méthodes ont été créées. Celles-ci sont identiques à une chose près : la matrice de masse.

La structure générale de ces deux méthodes et les tests effectués sont présentés dans cette section.

2.3.1 Structure du code Python

Les méthodes ne sont pas directement appelées depuis C#. Un fichier Python intermédiaire s'occupe de créer l'élément structure dans Python, d'appeler les méthodes nécessaires et d'enregistrer les résultats.

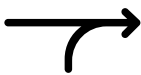
Les méthodes du calcul dynamique se trouvent dans le fichier StructureObj.py et sont structurées de la manière suivante :



Initialisation toutes les variables de l'objet structure : Appel de la fonction « InitializeDynamic »



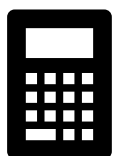
Appel de différentes méthodes pour obtenir : les longueurs des éléments, les cosinus directeurs, les modules de Young et les sections des éléments.



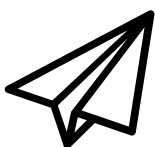
Ajoute à la matrice de rigidité finale : la matrice de rigidité géométrique et la matrice de rigidité matérielle (Les changements de repères ont été effectués.)



Crée la matrice de masse.



Calcul des fréquences propres et des modes.



Renvoi des données souhaitées et ordonnées ($\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_n$)

2.3.2 Les tests effectués

Avant de développer le lien entre Grasshopper et Python, le code Python a été testé afin de comparer les résultats obtenus avec le logiciel commercial SCIA. Les résultats obtenus par Python sont identiques à ceux obtenus via SCIA.

Les tests ont été rapidement limités pour deux raisons.

Premièrement, le logiciel commercial ne prend pas en compte la rigidité liée à la précontrainte dans le calcul dynamique. Lorsque la matrice de rigidité matérielle est nulle à cause de la non-linéarité géométrique, SCIA ne permet pas d'effectuer le calcul.

Deuxièmement, le calcul dynamique ne peut pas être effectué en position déformée dans des logiciels commerciaux tel que SCIA.

Pour ces deux raisons, l'influence de la rigidité géométrique et la non-linéarité géométrique n'ont pas pu être testés pour valider le code Python.

2.4 Les problèmes et difficultés rencontrés

Avant de pouvoir développer la partie dynamique du logiciel, de nombreux problèmes ont été rencontrés. Ceux-ci sont uniquement liés au développement des composants sous C# depuis l'application Microsoft Visual Studio.

Cette section a pour but de présenter brièvement les deux problèmes majeurs qui ont été rencontrés lors de la mise en route du logiciel dans Visual Studio.

Premièrement, lors de la première utilisation du code MUSCLE développé par J. FERON, l'application n'a pas pu faire le lien entre différents fichiers de MUSCLE et les packages téléchargés. Ceux-ci sont indispensables pour la création des composants.

La notice de mise en route disponible sur le site internet RhinoDeveloper ne permettait pas de solutionner le problème. Pour résoudre cela, le projet MUSCLE a été recréé de zéro et tous les codes ont été copiés-collés dans le nouveau projet.

Le problème lié au package a cependant persisté en partie avec les packages *Log4Net* et *Newtonsoft.Json*.

Ce second problème fut le plus long à solutionner d'un point de vue temporel car les feedbacks concernant les erreurs sur l'application Visual Studio ne sont pas clairs. En plus de ce manque de clarté, peu d'informations concernant ces erreurs sont disponibles sur internet.

Afin de résoudre le problème, l'auteur de ce mémoire s'est d'abord concentré sur la résolution du problème concernant le package *Newtonsoft.Json* car le programme ne peut pas fonctionner sans. Ce package permet de transférer les données entre C# et Python selon une syntaxe structurée.

Les lignes utilisant le package *Log4Net* ont été à cet égard mises en commentaire dans le code et seuls quelques messages d'erreurs persistaient. Ceux-ci indiquaient que la bonne version du package³⁸ *Newtonsoft.Json* n'était pas disponible (or le package est téléchargé directement depuis l'application Visual Studio ...).

Toutes les pistes de solutions trouvées sur des sites spécialisés ou des forums, n'ont pas permis de résoudre le problème. Ce problème étant très fortement lié à de l'informatique pur et non à du codage, l'auteur a éprouvé des difficultés à trouver une solution. Le problème étant si spécifique que très peu d'informations sont disponibles à ce sujet sur internet.

Sachant que le package est téléchargé sur l'ordinateur, une piste éventuelle et très intuitive, à savoir le mauvais positionnement des fichiers du package dans l'ordinateur est explorée.

Cette piste a permis de trouver la solution aux problèmes des packages *Newtonsoft.Json* et *Log4Net*. Les fichiers .dll et .xml des packages sont téléchargés dans les fichiers de l'application Visual Studio de l'ordinateur. Ces derniers doivent être copiés et collés dans le dossier \obj du programme MUSCLE.

Afin de simplifier la démarche d'installation du fichier MUSCLE développeur, l'annexe 5 présente les étapes d'installation du programme.

³⁸ L'erreur s'indique comme suit : « 1. *Solution exception : Impossible de charger le fichier ou l'assembly 'Newtonsoft.Json, Version=13.0.0.0, Culture=neutral, PublicKeyToken=30ad4fe6b2a6aeed' ou une de ses dépendances. Le fichier spécifié est introuvable.* »

3 Etude expérimentale et numérique de la dynamique du SIMPLEX

3.1 Introduction

Ce chapitre présente les résultats expérimentaux et compare ceux-ci aux résultats numériques obtenus par le biais du logiciel développé durant ce mémoire et décrit dans le chapitre 2 de la seconde partie de ce mémoire.

Ce chapitre a pour objectif de répondre aux trois questions suivantes.

Premièrement, le logiciel peut-il être validé à la lumière de la comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux ?

Deuxièmement, les fréquences propres expérimentales du SIMPLEX suivent-elles la tendance des simulations numériques de la structure en position initiale ou en position déformée, position d'équilibre de la structure lorsque le niveau de précontrainte puis le chargement externe a été appliqué ? L'objectif principal de cette question est de démontrer si la déformation de la structure du fait de son comportement de non-linéarité géométrique a de l'influence sur la dynamique des structures en tenségrité.

Troisièmement, la rigidité matérielle a-t-elle une influence constante sur l'évolution des fréquences propres ?

A cette fin, ce chapitre est structuré de la manière suivante.

Tout d'abord, le prototype et le protocole sont présentés. Ensuite, les hypothèses numériques sont énumérées. La dernière section présente les résultats.

3.2 Méthode

3.2.1 Description du prototype

Afin de répondre à ces trois questions, un dispositif de prise de mesures a été mis en place sur le SIMPLEX de grande taille dont les caractéristiques mécaniques sont présentées en annexe 1.1.

Le dispositif de prise de mesure est composé de cinq accéléromètres. Trois sont positionnés sur les nœuds supérieurs et deux sur deux des trois barres du SIMPLEX.

En considérant les numéros des accéléromètres du tableau 37 en annexe 6, les accéléromètres sont positionnés de la manière suivante sur la structure :

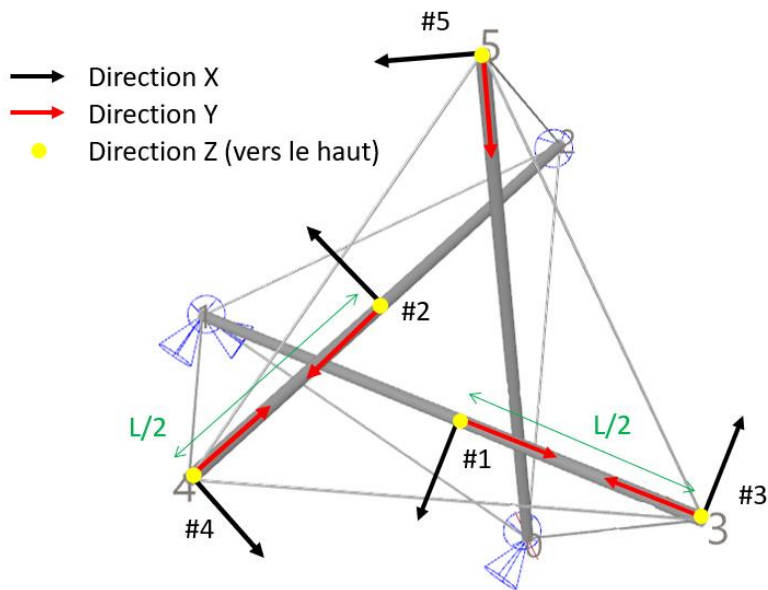


Figure 65 - Positionnement des accéléromètres

La direction Z des accéléromètres 1 et 2 n'est pas parfaitement verticale. Celle-ci est inclinée de tel sorte que l'axe de la direction Y est parallèle à l'axe de la barre.

Les accéléromètres 3,4 et 5 sont positionnés d'une telle manière que l'axe Y soit parallèle à l'axe de la barre.

La manière dont les données ont été acquises est présentée en annexe 6.

3.2.1.1 Influence du système de chargement

Afin de connaître la tendance de l'évolution des fréquences propre du SIMPLEX, quatre mesures expérimentales extrêmes ont été effectuées sur le « SIMPLEX – masses pendues » décrit dans le chapitre 3 de la première partie de ce mémoire.

Le dispositif de chargement (figure 66-a)) est identique à celui utilisé lors de l'étude statique du SIMPLEX : les poids sont posés sur des plateaux suspendus aux trois nœuds supérieurs.

Cette première étude disponible en annexe 8 a pu mettre en lumière un élément majeur : l'influence du système de chargement de la structure sur la dynamique de celle-ci. Le dispositif de chargement a un effet pendule sur la structure, ce qui ne permet pas de considérer le chargement externe aux trois nœuds supérieurs. Cet effet n'est pas souhaité.

Afin d'annuler cet effet, le système de chargement a été modifié. Celui-ci est désormais rigide et positionné en partie haute de chaque nœud supérieur tel que sur la figure 66-b). La structure étudiée dans ce chapitre n'est donc pas identique à celle présentée dans la section 3 de la première partie de ce mémoire car son poids propre a été modifié. Par souci de clarté, cette nouvelle configuration du

SIMPLEX est appelée « SIMPLEX – masses posées ». Un descriptif complet de la structure étudiée est disponible dans la sous-section suivante.

3.2.1.2 Système étudié – « SIMPLEX – masses posées »

Cette section présente les caractéristiques massiques du « SIMPLEX – masses posées » visible sur la figure ci-dessous par opposition au « SIMPLEX – masses pendues » sur lequel le chargement est effectué à l'aide des plateaux suspendus.

NB : Les caractéristiques mécaniques des deux prototypes sont identiques. Celles-ci sont présentées en annexe 1.1.

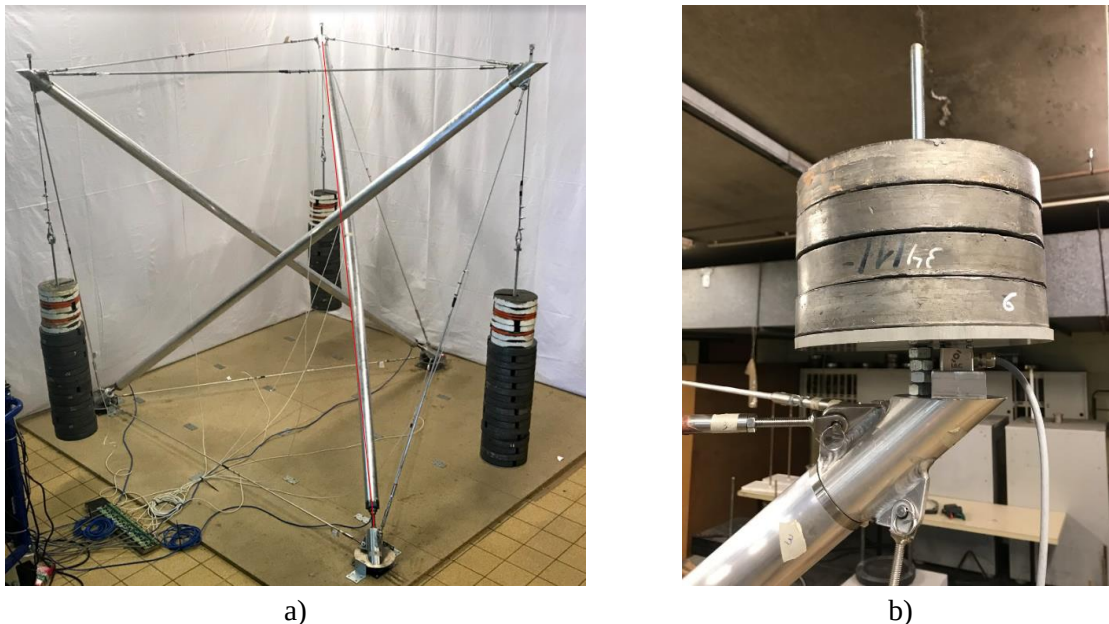


Figure 66 - Système de chargement: a) « SIMPLEX – masses pendues » et b) « SIMPLEX – masses posées »

Le système de chargement ayant été modifié, le poids propre de la structure a évolué. Celui-ci est présenté ci-dessous.

En pesant le matériel enlevé puis ajouté, une masse nette³⁹ de 661.31 [g] doit être ajoutée au poids propre des nœuds supérieurs du SIMPLEX.

NB : La nomenclature est définie dans l'annexe 1.

³⁹ 364.08 [g] doit être soustrait par nœud supérieur et une masse de 1025.39 [g] doit être ajoutée.

Le poids propre incluant le poids des cinq accéléromètres est détaillé dans les tableaux suivants:

	Nœuds inférieurs			Nœuds supérieurs		
	Noeud 0	Noeud 1	Noeud 2	Noeud 3	Noeud 4	Noeud 5
Poids [N]	45.70	46.52	46.52	50.55	50.55	49.73
Masse [kg]	4.66	4.74	4.74	5.15	5.15	5.07

Tableau 16 - Répartition nodale du poids propre du « SIMPLEX – masses posées » incluant les masses des accéléromètres

Le poids de chaque nœud est détaillé ci-dessous :

	Nœuds inférieurs			Nœuds supérieurs		
	Noeud 0	Noeud 1	Noeud 2	Noeud 3	Noeud 4	Noeud 5
Poids [N]	25.94	25.89	25.92	30.02	30.02	29.96
Masse [kg]	2.64	2.64	2.64	3.06	3.06	3.05

Tableau 17 - Poids propre des nœuds du « SIMPLEX – masses posées » incluant les masses des accéléromètres

Concernant les éléments linéiques, il n'y a aucun changement.

	Identification des éléments			Nœud de départ	Nœud d'arrivée	Masse des éléments	Poids des éléments
	Nom	Index	Nomenclature	n0	n1	m	P
	[/]	[/]	[/]	[/]	[/]	[kg]	[N]
Barres	24B	0	S1	2	4	2.691	26.403
	13B	1	S2	1	3	2.676	26.251
	05B	2	S3	0	5	2.524	24.759
Câbles bas	12C	3	CB1	1	2	0.499	4.898
	01C	4	CB2	0	1	0.504	4.945
	02C	5	CB3	0	2	0.507	4.978
Câbles haut	45C	6	CT1	4	5	0.505	4.953
	34C	7	CT2	3	4	0.506	4.959
	35C	8	CT3	3	5	0.503	4.932
Câbles verticaux	25C	9	CV1	2	5	0.487	4.776
	14C	10	CV2	1	4	0.501	4.913
	03C	11	CV3	0	3	0.507	4.971

Tableau 18 - Poids propre des éléments linéiques composant le « SIMPLEX – masses posées »

3.2.2 Description du protocole de test sur le « SIMPLEX – masses posées »

Afin d'étudier l'influence du comportement de non-linéarité géométrique sur la dynamique du SIMPLEX, ce mémoire étudie l'évolution des fréquences propres et des modes de la structure selon deux paramètres : le niveau de précontrainte et le chargement externe.

Pour tous les tests, la structure a été d'abord précontrainte au niveau⁴⁰ souhaité puis chargée aux trois nœuds supérieurs.

Ces tests ont été limités, comme expliqué dans la section 4.5 en première partie de ce mémoire, par la résistance des matériaux et le flambement des barres. En plus de ces limitations, le niveau de précontrainte maximal a été limité à 5.5 [kN] afin de ne pas abimer les tiges filetées permettant d'allonger les barres. Le chargement externe a lui aussi été limité à 40[kg] par nœud du fait du changement du dispositif de chargement. Le calcul de résistance du dispositif de chargement est disponible en annexe 9.

Ainsi, pour les tests expérimentaux concernant la dynamique, le niveau de précontrainte peut varier de 1.5 à 5.5 [kN] et le chargement maximal est de 40 [kg].

Cependant, les graphiques présentant l'évolution numérique des fréquences propres ont un chargement externe variant de 0 à 80 [kg]. Cette limite numérique de 80 [kg] peut-être atteinte si on ne considère pas la limite pratique du dispositif de chargement.

Durant ces tests, dix-sept situations sont testées.

		Chargement externe				
		0 [kg] 0 [N]	10 [kg] 98.1 [N]	20 [kg] 196.2 [N]	30 [kg] 294.3 [N]	40 [kg] 392.4 [N]
Niveau de précontrainte [kN]	1.5	X	X	X	X	X
	2.5	X				
	3.5	X	X	X	X	X
	4.5	X				
	5.5	X	X	X	X	X

Tableau 19 - Situations testées sur le « SIMPLEX – masses posées »

Afin d'atteindre ces situations, la structure est d'abord précontrainte et ensuite chargée.

Dans les sections suivantes et les annexes liées à ces dernières, la nomenclature suivante est utilisée afin de nommer les situations : 0 [kg] & 1.5 [kN] pour 0 [kg] de chargement externe sous un niveau de précontrainte de 1.5 [kN].

⁴⁰ Obtenu par allongement homogène de toutes les barres afin de garder la géométrie de la structure.

Lors de ces prises de mesures, la structure est excitée par un coup horizontal sur le nœud 3. Cette excitation est effectuée à l'aide d'un marteau. Cette méthode d'excitation a été choisie lors des essais sur le « SIMPLEX – masses pendues » dont l'analyse est disponible en annexe 8. De tous les protocoles testés, le coup de marteau permet d'avoir un graphe de densité spectral net et n'exerce aucune influence liée à un quelconque mouvement de pendule. (ex : l'électro-aimant)

Ce marteau ne permet toutefois pas l'enregistrement des données liées à l'impulsion. Le post-traitement est donc effectué selon la méthode OMA – Operational Modal Analysis.

Durant ces prises de mesures, les accélérations qui sont subies par la structure, sont mesurées et enregistrées par les cinq accéléromètres fixés sur la structure.

Le post-traitement de toutes les accélérations est ensuite effectué à l'aide du logiciel commercial ARTeMIS. Ce logiciel permet de réaliser une étude modale et d'obtenir in fine le spectre des fréquences composant le signal temporel.

Durant le post-traitement, l'objectif est de ressortir les pics liés aux deux premières fréquences propres du SIMPEX. Pour chaque pic choisi sur le spectre, le logiciel calcul ensuite un mode expérimental associé.

Une description du logiciel ARTeMIS et la méthode de post-traitement sont présentées en annexe 7.

Tous les graphiques des spectres des fréquences obtenues à la suite des tests expérimentaux sont disponibles dans l'annexe 10.

3.2.3 Hypothèses du calcul numérique

Les simulations numériques sont effectuées en considérant le poids propre du « SIMPLEX – masses posées » présenté en section 3.2.1.2 et des caractéristiques mécaniques présentées en annexe 1.1.

Toutes les masses sont considérées aux nœuds et sont considérées via la matrice de masse « *Lumped* ». Selon L. MAŁYSZKO et A. RUTKIEWICZ [35], cette matrice donne, pour la première fréquence et sous poids propre, de meilleurs résultats que la matrice de masse « *consistent* ».

La position initiale représente la position théorique dont l'angle relatif vaut 30° tandis que la position déformée représente la position d'équilibre statique de la structure.

Cet équilibre statique est obtenu en calculant la structure déformée dans un ordre précis d'application des charges et de la précontrainte :

1. Le poids propre
2. Le niveau de précontrainte
3. Le chargement externe

3.3 Résultats

Cette section présente les résultats obtenus sur le « SIMPLEX – masses posées » à la suite de la batterie de tests décrite ci-dessus.

Les résultats expérimentaux sources sont disponibles en annexe 10.

Cette section est articulée en deux parties. La première partie présente la comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux pour les deux premières fréquences. La deuxième partie se concentre sur l'étude du premier mode.

3.3.1 Etude des fréquences propres

Cette sous-section présente premièrement une comparaison entre les résultats numériques et expérimentaux pour les deux premières fréquences du « SIMPLEX - masses posées ».

Les deux derniers points de cette sous-section étudie numériquement l'influence de la rigidité matérielle et présente l'évolution numérique des dix fréquences propres suivantes.

3.3.1.1 Evolution de la première fréquence propre

La première fréquence propre est liée au premier mode. Le premier mode numérique est représenté sur la figure 76 en page 107. Ce dernier est étudié plus en détail dans la section 3.3.2.

La comparaison entre l'évolution numérique et expérimentale de la première fréquence propre est obtenue ci-dessous sous poids propre et sous chargement externe.

Sous poids propre :

Ce graphique représente l'évolution de la première fréquence propre sous différents niveaux de précontrainte. Il est l'unique cas étudié dans la littérature actuelle.

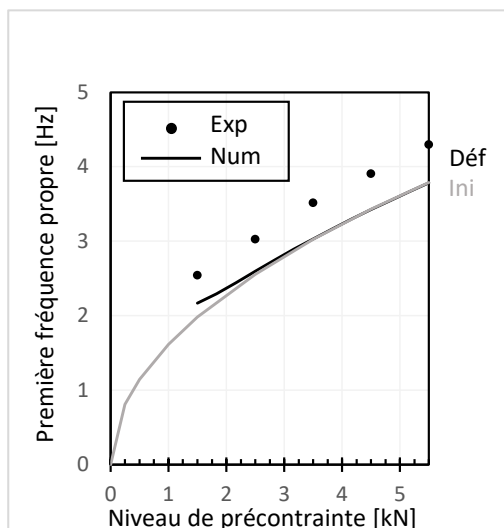


Figure 67 - Comparaison entre les résultats numériques (lumped) et les résultats expérimentaux de la première fréquence propre du « SIMPLEX – masses posées » sous poids propre

Observations	- Les données suivent la tendance attendue : pour une augmentation de la rigidité, la fréquence augmente. - Les simulations numériques suivent la tendance des mesures expérimentales. - L'erreur maximale relative entre les résultats numériques obtenus en position déformée et les données expérimentales est obtenue sous un niveau de précontrainte de 1.5 [kN] et vaut 17.1%. Cette erreur diminue avec l'augmentation de la précontrainte.
Analyse	- Comme attendu, sous poids propre, les grands déplacements du SIMPLEX n'ont que très peu d'influence. Les résultats obtenus en position déformée sont confondus avec ceux obtenus en position initiale lorsque le niveau de précontrainte est supérieure à 2.5 [kN].
Conclusion	- La non-linéarité géométrique n'a pas d'effet sous poids propre. - Les résultats numériques sont légèrement décalés par rapport aux résultats expérimentaux, une comparaison entre les résultats numériques obtenus à l'aide des deux matrices de masse « <i>lumped</i> » et « <i>consistent</i> » est nécessaire. Cette analyse est effectuée dans la sous-section 3.3.1.1.1.

Tableau 20 - Analyse des résultats de la première fréquence propre sous poids propre et différents niveaux de précontrainte

Sous chargement externe :

L'étude de ce paramètre est inédite car l'influence de la non-linéarité géométrique sur la dynamique des structures en tenségrité n'a jamais été étudiée.

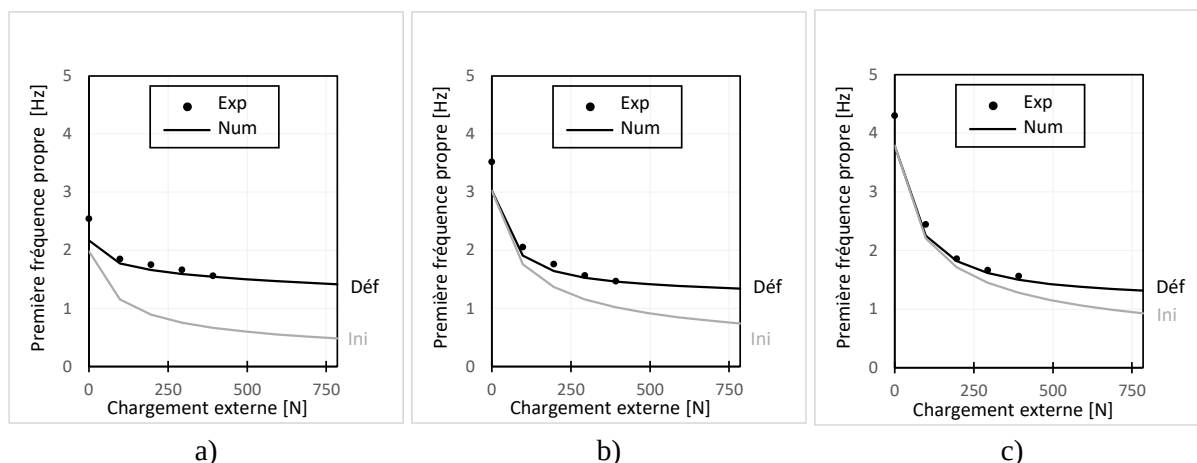


Figure 68 - Comparaison entre les résultats numériques (lumped) et expérimentaux sur le « SIMPLEX – masses posées » pour la première fréquence propre selon trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Observations	- Les études numériques en position initiale et déformée ne donnent pas les mêmes résultats. - Les résultats expérimentaux suivent la courbe des résultats numériques de la première fréquence étudiée en position déformée. - Sous chargement externe, l'erreur relative maximale entre les résultats numériques obtenus en position déformée et les résultats expérimentaux vaut 8.3 % sous un chargement externe de 10 [kg] et un niveau de précontrainte de 5.5 [kN].
Analyse	- La non-linéarité géométrique a de l'influence sur la première fréquence propre du « SIMPLEX – masses posées » sous chargement externe.
Conclusion	- La première fréquence propre est influencée par la non-linéarité géométrique et doit de ce fait être étudié numériquement en position déformée.

Tableau 21 - Analyse des résultats de la première fréquence propre sous chargement externe et différents niveaux de précontrainte

3.3.1.1.1 Influence du type de matrice de masse pour la première fréquence propre

Comme indiqué dans l'analyse de la figure 67, une comparaison entre les résultats obtenus selon les deux matrices de masse doit être effectuée.

Selon l'article de L. MAŁYSZKO et A. RUTKIEWICZ [35], la matrice de masse « *lumped* » permettrait, pour la première fréquence propre et sous poids propre, de mieux approcher les résultats expérimentaux que la matrice de masse « *consistent* ».

Les simulations en position déformée permettent d'obtenir les graphes suivants sous poids propre et sous chargement externe.

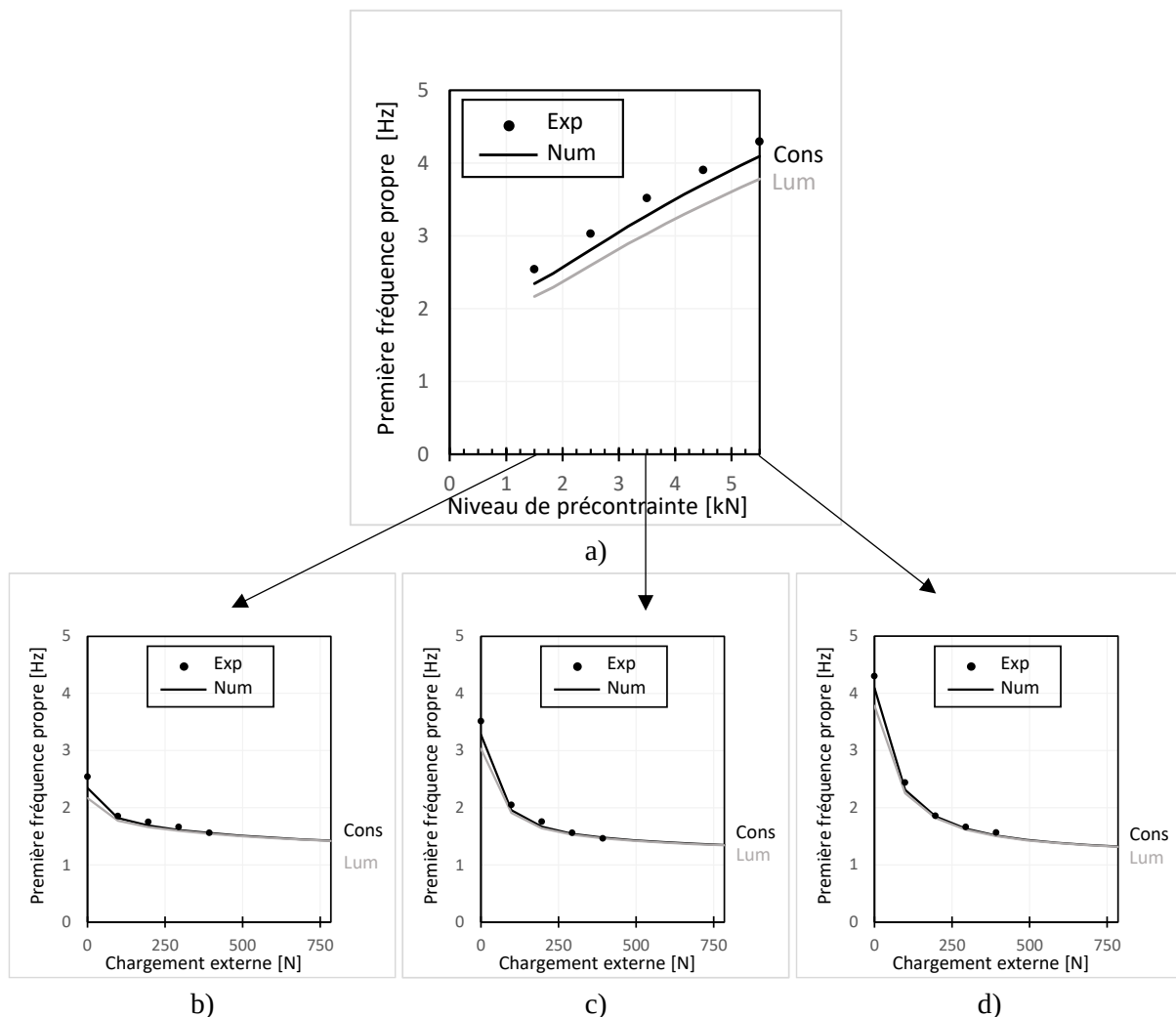


Figure 69 - Comparaison des résultats numériques en position déformée (1^{ère} fréq.) entre la matrice de masse « *consistent* » et la matrice « *lumped* » sous poids propre (a) et sous chargement externe (b, c, d) pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Observations	- Les deux matrices de masse ont la même tendance et elles suivent la tendance des résultats expérimentaux. - Sous poids propre, les matrices de masses donnent des résultats différents. - Dès que la structure est chargée, les résultats obtenus par les deux matrices de masse se confondent.
Analyses	- Sous poids propre, l'erreur maximale relative entre les résultats numériques obtenus en position déformée (<i>consistent</i>) et les données expérimentales est obtenue sous un niveau de précontrainte de 1.5 [kN] et vaut 8.2%. (17.1% pour le modèle de matrice de masse « <i>lumped</i> ») - Sous chargement externe, l'erreur maximale relative entre les résultats numériques obtenus en position déformée (<i>consistent</i>) et les données expérimentales vaut 5.6%. (8.3% pour le modèle de matrice de masse « <i>lumped</i> ») - Sous poids propre, la matrice de masse « <i>consistent</i> » approche mieux les résultats expérimentaux. Cette analyse est contraire à celle obtenue par L. MAŁYSZKO et A. RUTKIEWICZ [35]. (Cfr. Figure 40 en page 61)
Conclusion	- Le choix de la matrice de masse influence davantage les résultats sous poids propre. - La matrice de masse « <i>consistent</i> » permet d'approcher au mieux les résultats expérimentaux de la première fréquence propre.

Tableau 22 - Analyse de la comparaison des résultats obtenus grâce aux deux types de matrice de masse pour la première fréquence propre sous chargement externe et différents niveaux de précontrainte

3.3.1.2 Evolution de la seconde fréquence propre

Comme le suggère l'annexe 8.3.2, il est complexe d'obtenir des fréquences propres expérimentales au-delà de la première fréquence propre. La valeur de la fréquence expérimentale n'a pas pu être obtenue pour toutes les situations contrairement à la première fréquence propre.

Notons que cette comparaison entre le numérique et l'expérimental n'est pas présente dans la littérature scientifique.

La seconde fréquence propre est liée au second mode. Le second mode numérique est représenté sur la figure 77 en page 107.

Sous poids propre :

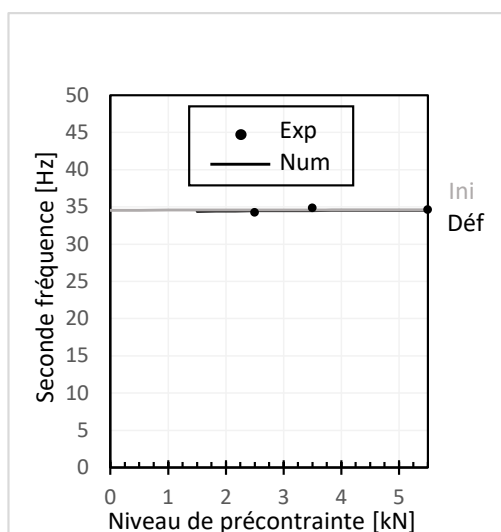


Figure 70 - Comparaison entre les résultats numériques (lumped) et les résultats expérimentaux de la seconde fréquence propre du « SIMPLEX – masses posées » sous poids propre

Observations	- Sous poids-propre, la seconde fréquence propre est constante : elle ne varie pas selon le niveau de précontrainte. Ce n'est pas intuitif car la rigidité augmente. - Les études en position initiale et déformée sont confondues.
Analyse	- La seconde fréquence propre n'est pas influencée par la rigidité géométrique. - La différence maximale relative entre les résultats numériques en position initiale et déformée vaut moins de 1%. - Sous poids propre, l'erreur maximale relative entre les résultats numériques et expérimentaux en position déformée vaut 1%. (Niveau de précontrainte de 3.5 [kN])
Conclusion	- Sous poids propre, la rigidité géométrique liée au niveau de précontrainte n'a pas d'influence sur la seconde fréquence.

Tableau 23 - Analyse des résultats de la seconde fréquence propre sous poids propre et différents niveaux de précontrainte

Sous chargement externe :

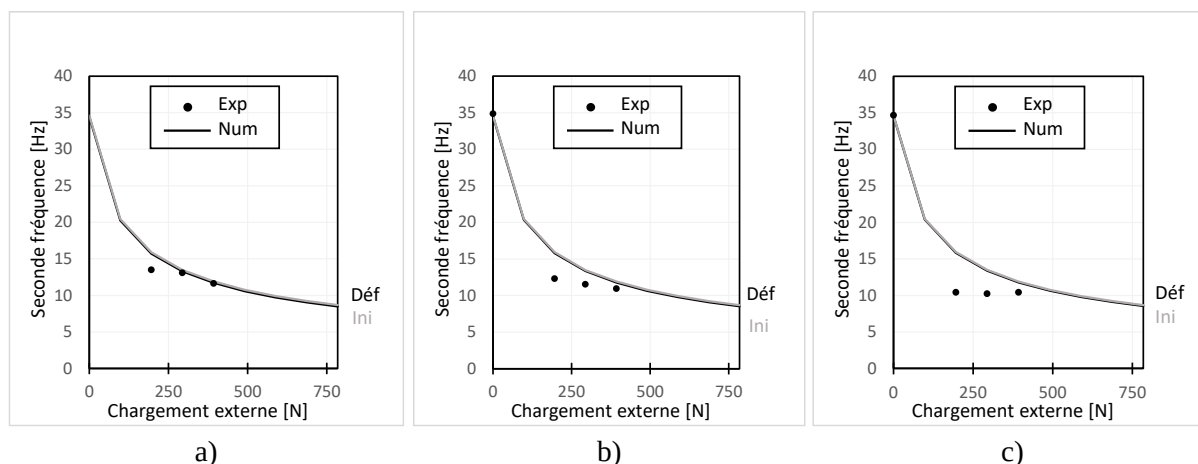


Figure 71 - Comparaison entre les résultats numériques (lumped) et expérimentaux sur le « SIMPLEX – masses posées » pour la seconde fréquence propre selon trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Observations	- Les études en position initiale et déformée sont confondues. - Les simulations numériques ont la même tendance que les résultats expérimentaux. - Les études numériques ne semblent pas être influencées par le niveau de précontrainte. - Sous chargement externe, plus le niveau de précontrainte augmente, plus les résultats expérimentaux se distancient des résultats numériques.
Analyse	- Le comportement de non-linéarité géométrique n'influence pas la dynamique du SIMPLEX car les courbes d'étude en position initiale et déformée sont confondues. - Sous chargement externe, l'erreur maximale relative entre les résultats numériques obtenus en position déformée et les données expérimentales vaut 34%. (Sous un chargement externe de 20 [kg] et un niveau de précontrainte de 5.5 [kN])
Conclusion	- Le comportement de non-linéarité géométrique n'influence pas la seconde fréquence. - La rigidité géométrique n'influence pas la seconde fréquence.

Tableau 24 - Analyse des résultats de la seconde fréquence propre sous chargement externe et différents niveaux de précontrainte

3.3.1.2.1 Influence du type de matrice de masse pour la seconde fréquence propre

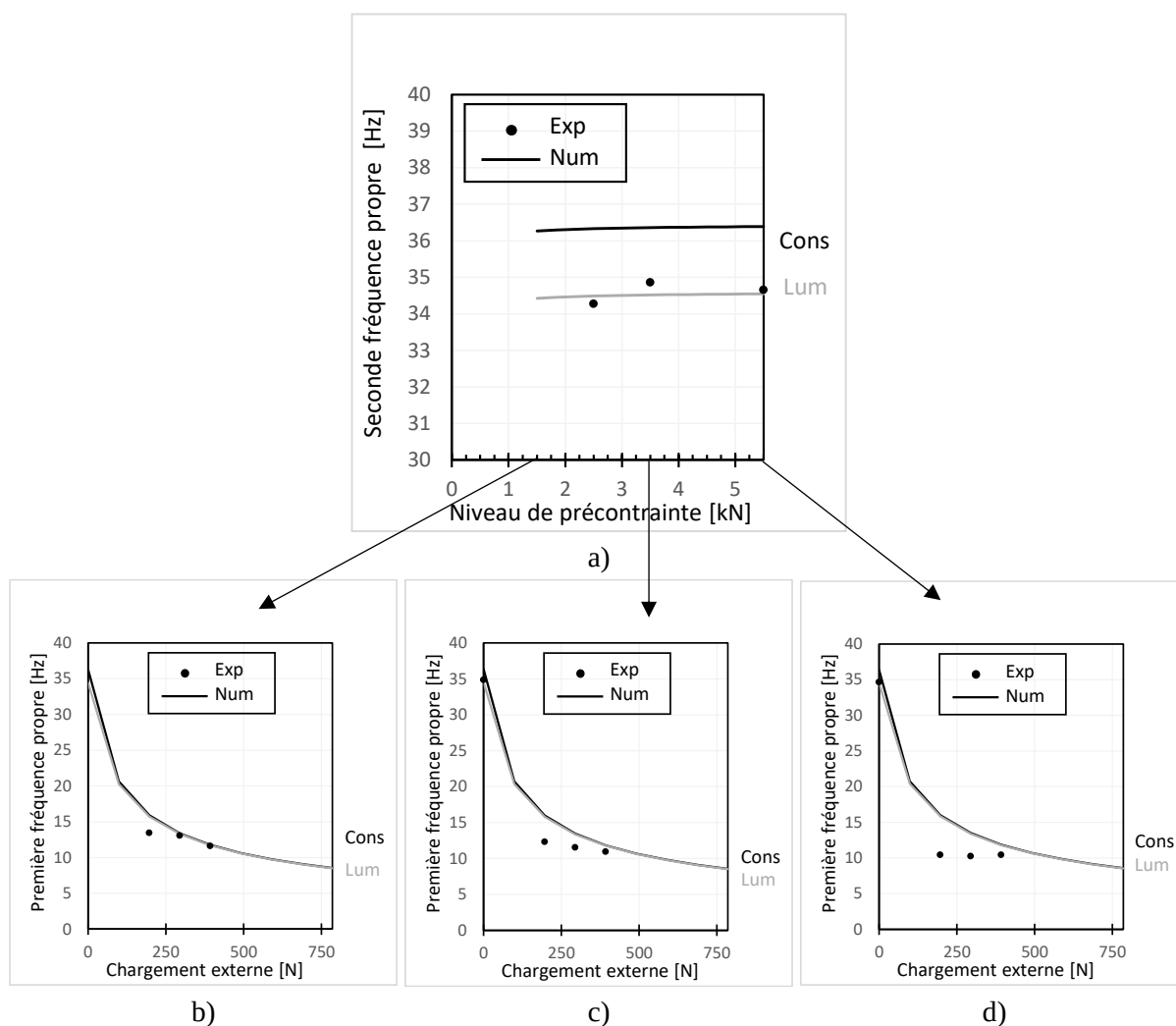


Figure 72 - Comparaison des résultats numériques en position déformée (2^{ème} fréq.) entre la matrice de masse « consistant » et la matrice « lumped » sous poids propre (a) et sous chargement externe (b, c, d) pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Observations	- Le modèle de matrice de masse « <i>lumped</i> » est plus proche des données expérimentales sous poids propre. - Sous chargement externe, les deux modèles numériques se confondent.
Analyse	- Cette observation concernant la matrice de masse est contraire à celle faite pour la première fréquence. Il faut cependant rester prudent face aux résultats de la seconde fréquence propre car les pics⁴¹ obtenus grâce au logiciel de post-traitement ARTeMIS sont beaucoup moins nets que pour la première fréquence. - Afin d'avoir un ordre de grandeur, sous poids propre, l'erreur maximale relative entre le modèle numérique en position déformée et les résultats expérimentaux vaut 5.6% pour la matrice de masse « <i>consistent</i> ». (1% pour la matrice de masse « <i>lumped</i> ») - Sous chargement externe, l'erreur maximale relative entre le modèle numérique en position déformée et les résultats expérimentaux vaut 34.7% pour la matrice de masse « <i>consistent</i> ». (34% pour la matrice de masse « <i>lumped</i> »)
Conclusion	- La matrice de masse « <i>lumped</i> » a une grosse influence sur les résultats sous poids propre et permet d'approcher au mieux les résultats expérimentaux. - Un protocole de test ayant pour objectif de faire apparaître spécifiquement la seconde fréquence propre serait utile afin d'affiner leurs valeurs.

Tableau 25 - Analyse de la comparaison des résultats obtenus grâce aux deux types de matrice de masse pour la seconde fréquence propre sous chargement externe et différents niveaux de précontrainte

Pour la première fréquence, la matrice de masse « *consistent* » approche le mieux les résultats expérimentaux. Pour la deuxième fréquence, le modèle « *lumped* » approche le mieux les résultats expérimentaux. L'influence des matrices de masse est fortement visible sous poids propre uniquement.

⁴¹ Ces pics représentent les fréquences propres.

3.3.1.3 Influence de la rigidité matérielle sur les fréquences

Comme écrit ci-dessus, il est possible que l'influence de la précontrainte ne soit pas constante pour toutes les fréquences propres. En d'autres termes, la rigidité totale n'est pas constituée de la même proportion de rigidité matérielle et géométrique pour toutes les fréquences propres.

Le rapport entre la fréquence liée uniquement à la rigidité matérielle et la fréquence liée à la rigidité tangente (= totale) a été étudié en position déformée afin de mettre en lumière ce phénomène.

Cette étude permet d'obtenir les graphiques suivants pour la première et la seconde fréquence propre :

Pour la première fréquence propre :

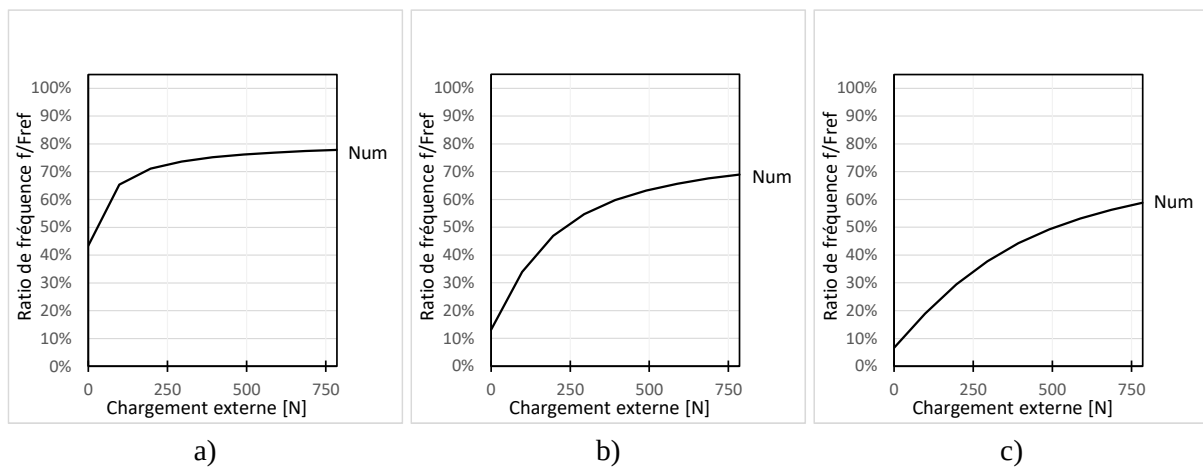


Figure 73 - Evolution numérique (lumped) en position déformée du rapport entre la fréquence liée à la rigidité matérielle et la fréquence propre totale (1^{ère} fré.) du « SIMPLEX – masses posées » pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Pour la seconde fréquence propre :

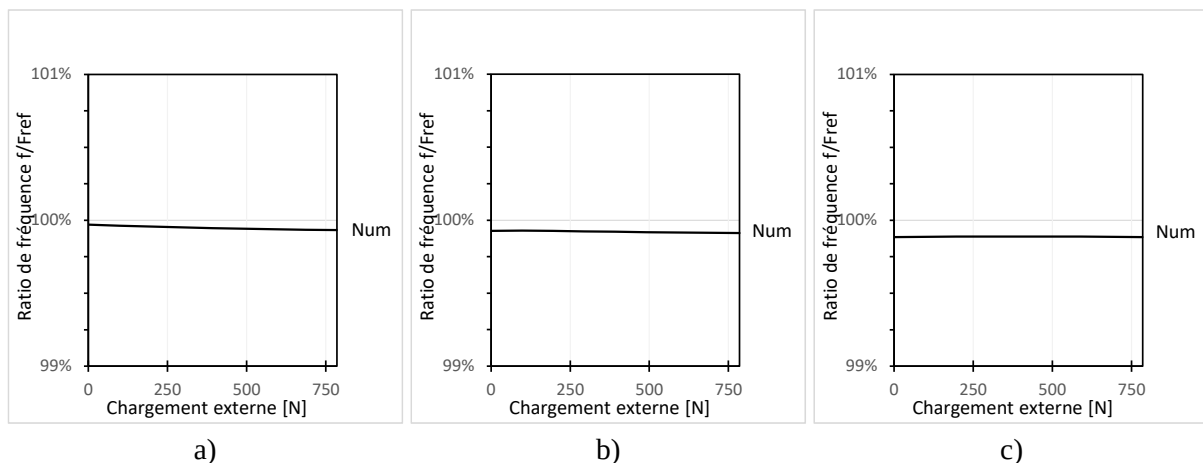


Figure 74 - Evolution numérique (lumped) en position déformée du rapport entre la fréquence liée à la rigidité matérielle et la fréquence propre totale (2^{ème} fré.) du « SIMPLEX – masses posées » pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

L'annexe 11 présente l'évolution du rapport pour les dix fréquences propres suivantes.

L'analyse des deux figures précédentes (Figure 73 et Figure 74) est effectuée dans le tableau ci-dessous.

Observations	- Le rapport entre la fréquence liée à la rigidité matérielle et la fréquence totale évolue fortement pour la première fréquence. - Ce même rapport est presque constant et presque égal à 100% pour les onze autres fréquences. (La rigidité matérielle permet à elle seule d'obtenir la fréquence totale à 0.01% près.)
Analyse	- La rigidité géométrique a très peu d'influence sur la rigidité tangente (=totale) des onze dernières fréquences contrairement à la première fréquence.
Conclusion	- Seule la première fréquence est influencée par le niveau de précontrainte. Le mode associé à la première fréquence est, comme cela sera démontré dans la sous-section 3.3.2.3, le mécanisme interne de la structure. Ces graphiques confirment les propos de MURAKAMI [34] selon lesquels : seules les fréquences dont les modes sont liées à des mécanismes sont fortement influencées par le niveau de précontrainte. L'influence du niveau de précontrainte⁴² sur la dynamique du SIMPLEX est donc très limitée.

Tableau 26 - Analyse numérique de l'influence de la rigidité matérielle sur la valeur des fréquences propres

3.3.1.4 L'évolution des fréquences propres suivantes

Seules les deux premières fréquences propres ont pu être comparées à des résultats expérimentaux.

Les évolutions numériques des dix autres fréquences propres selon le modèle de matrice de masse « *lumped* » sont disponibles dans l'annexe 3.

De cette étude numérique, un élément essentiel peut être retiré : les études numériques en position initiale et déformée sont confondues à partir de la seconde fréquence propre. Seul un léger décalage est visible pour la douzième et la treizième fréquence propre. Cette différence vaut au maximum 2%. Ce pourcentage maximal est cependant bien inférieur à celui observé pour la première fréquence propre : 66%.

Concernant la différence entre les résultats obtenus avec les deux types de matrice de masse en position déformée, la différence augmente légèrement plus la fréquence est élevée. Afin d'avoir un ordre de grandeur, la différence maximale pour la première fréquence vaut 7.6% sous poids propre et 0.4% sous 80 [kg] de chargement externe peu importe le niveau de précontrainte. Pour la douzième fréquence, la différence maximale relative vaut 10.9% sous poids propre et 7.7% sous 80 [kg] de chargement externe peu importe le niveau de précontrainte.

⁴² Notons, que cette dernière est insérée dans la structure afin de limiter les déformations statiques de la structure selon ce mécanisme.

3.3.1.5 Conclusion de l'étude des fréquences du SIMPLEX

Après l'analyse des résultats de l'étude numérique et expérimentale des deux premières fréquences du SIMPLEX, les conclusions suivantes sont obtenues.

Premièrement, le logiciel numérique permet d'approcher les résultats expérimentaux de la première fréquence avec une erreur relative de maximum 8.2% grâce à la matrice de masse « *consistent* » en position déformée. La seconde fréquence propre apparaît moins bien dans les résultats expérimentaux. Sous poids propre, l'erreur maximale relative entre les résultats numériques⁴³ et les résultats expérimentaux de la seconde fréquence n'est que d'un pourcent et atteint 34% sous chargement externe.

Ces résultats ne démontrent qu'aucune des deux matrices ne permet d'approcher au mieux les résultats pour les deux fréquences propres. Le modèle « *consistent* » donne de meilleurs résultats pour la première fréquence et l'inverse est observé pour la seconde fréquence. Les résultats numériques permettent cependant de valider le logiciel pour la première fréquence propre. D'amples tests expérimentaux devraient être effectués afin d'affiner les résultats expérimentaux actuels.

Deuxièmement, la première fréquence propre est influencée par le comportement de non-linéarité géométrique de la structure. Afin d'approcher les résultats expérimentaux, l'étude numérique doit être effectuée en position déformée. Cependant, le comportement de non-linéarité géométrique n'influence que la première fréquence propre. Les études numériques en position initiale et déformée donnent les mêmes résultats pour les onze fréquences propres suivantes.

Enfin, le niveau de précontrainte a un effet uniquement sur la première fréquence propre dont le mode associé est le mécanisme interne de la structure. Les onze fréquences propres suivantes ne sont pas influencées par le niveau de précontrainte car la fréquence totale est due à 99.9% à la rigidité matérielle. Cela confirme les propos de MURAKAMI [34] selon lesquels : seules les fréquences dont les modes sont liées à des mécanismes internes sont fortement influencées par le niveau de précontrainte.

⁴³ Matrice de masse « *lumped* » et en position déformée

3.3.2 Etude des modes propres

Comme expliqué dans l'annexe 7, le logiciel ARTeMIS permet d'analyser les fréquences composant un signal temporel et de calculer un mode expérimental pour chaque fréquence choisie.

Cette sous-section est composée de trois parties.

La première partie compare les modes numériques aux modes expérimentaux obtenus à l'aide du logiciel ARTeMIS pour les dix-sept situations testées (Cfr. Tableau 19 en page 91).

Les deux dernières parties analysent numériquement le premier mode. En premier lieu, l'évolution du premier mode est analysée selon les deux paramètres que sont le chargement externe et le niveau de précontrainte. Ensuite, le premier mode est comparé au mécanisme interne de la structure.

Notons que les modes représentent des déplacements relatifs tel que les vecteurs propres dans les problèmes aux valeurs propres. Ils sont donc adimensionnels.

Dans les sous-sections suivantes, les modes ne sont pas étudiés en trois dimensions afin de faciliter la visualisation et la compréhension.

Toutes les directions de déplacement nodal sont référencées selon le repère global présenté sur la figure 75. Les directions restreintes ont donc un déplacement nul.

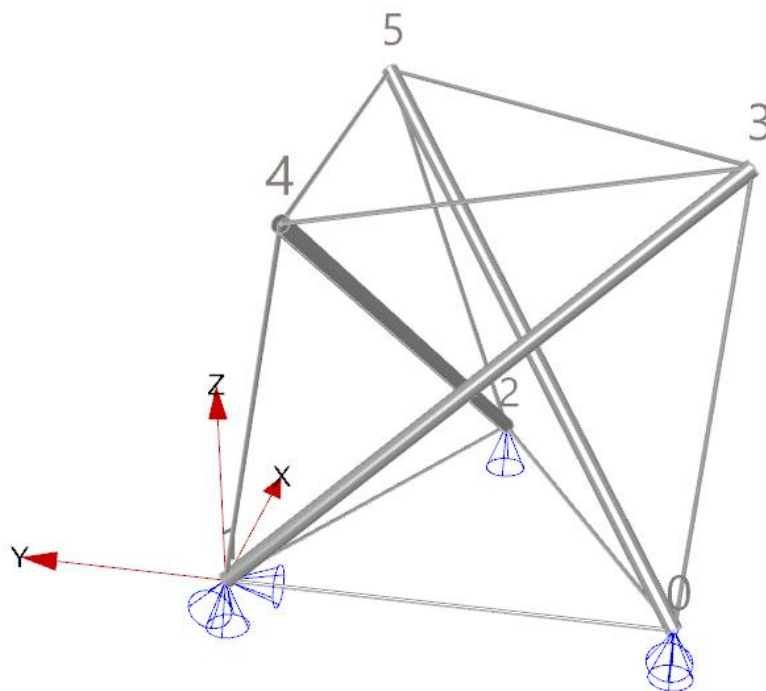


Figure 75 - Repère global des déplacements modaux

Afin de simplifier les comparaisons effectuées dans toutes les sections suivantes, les modes numériques ont été normalisés de telle manière que le déplacement maximal soit égal à l'unité. (ndlr : En nœud 3 – direction X)

Les modes numériques sont calculés grâce à la matrice de masse « *lumped* ». Ce choix a été fait car les deux modèles donnent des résultats identiques pour le premier mode normalisé au millième près en position déformée lorsque le chargement externe varie de 0 à 80 [kg] et pour un niveau de précontrainte allant de 1.5 à 5.5 [kN].

3.3.2.1 Comparaison du premier mode numérique et expérimental

Cette section a pour objectif de comparer les résultats numériques aux prises de mesures expérimentales concernant le premier mode.

Les accéléromètres étant fixés sur les trois nœuds supérieurs et deux des trois barres, aucune information concernant les accélérations aux nœuds inférieurs n'est mesurée. Aucun déplacement ne peut dès lors être obtenu concernant aux nœuds inférieurs.

Cela implique une comparaison limitée des modes : seuls les déplacements modaux des nœuds supérieurs sont comparés. (Nœuds 3, 4 et 5)

Afin d'effectuer la comparaison, un changement de repère des déplacements modaux expérimentaux a été effectué car les accéléromètres ne sont pas alignés selon le repère global mais selon l'axe des barres tel qu'expliqué dans la section 3.2.1 présentant le prototype.

De plus, le mode expérimental a été normalisé afin que dans la direction du déplacement modal numérique maximal (nœud 3 – direction X), les deux modes aient des déplacements égaux. Cela permet de les comparer avec plus d'aisance.

Numériquement, le premier et le second mode du SIMPLEX sont les suivants :

NB : La position grise est la position d'équilibre statique et en rouge le mode de vibration.

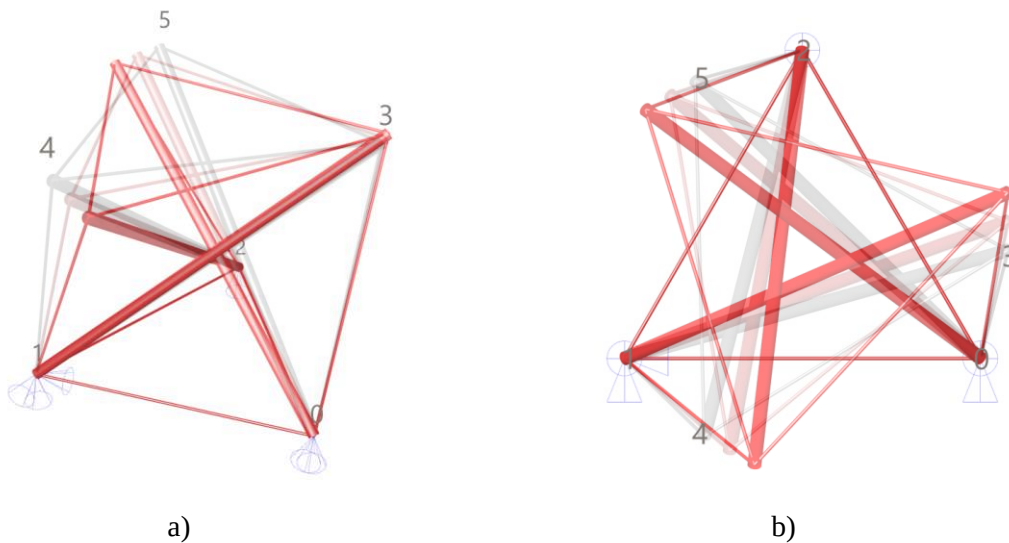


Figure 76 - Mode 1 numérique du « SIMPLEX – masses posées » selon deux vues: a) perspective & b) vue du dessus

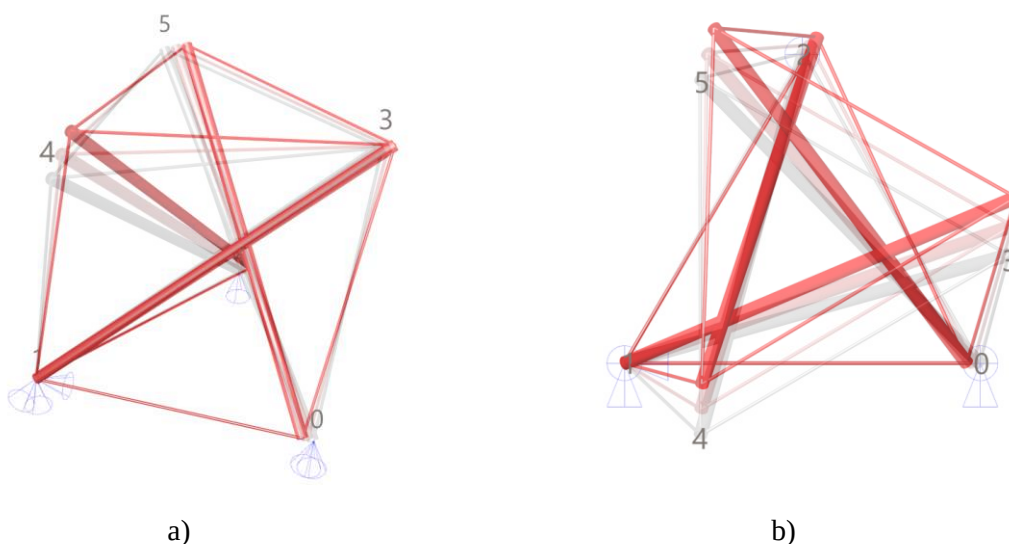


Figure 77 - Mode 2 numérique du « SIMPLEX – masses posées » selon deux vues: a) perspective & b) vue du dessus

Les dix modes suivants sont disponibles dans l'annexe 13.

Les graphiques de comparaison entre le premier mode numérique (matrice de masse « *lumped* ») et le premier mode expérimental sont obtenus ci-dessous pour les quatre situations extrêmes :

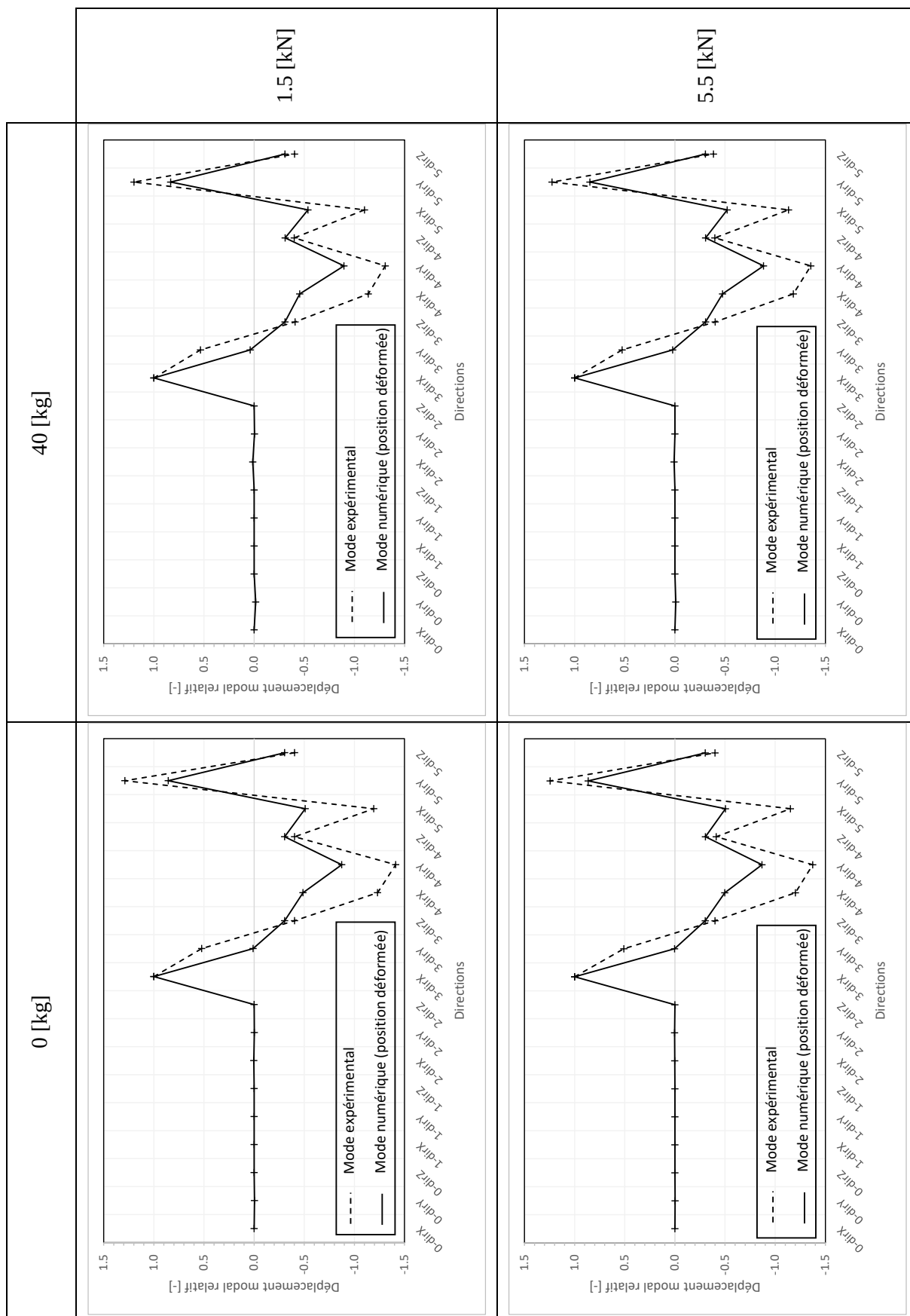


Tableau 27 – Comparatif du premier mode numérique (lumped) et expérimental du « SIMPLEX – masses posées » pour les quatre situations extrêmes

Les graphiques des treize autres situations sont disponibles dans l'annexe 14.

Observations	- Les deux modes numériques et expérimentaux ont la même tendance mais ne sont pour autant pas identiques. La vibration du premier mode a donc une forme similaire dans les deux cas. Cela a été vérifié en comparant la vibration du premier mode sur ARTeMIS⁴⁴ au premier mode numérique. - Certaines directions ont un déplacement relatif expérimental beaucoup plus prononcé que les données numériques. - Les modes n'ont pas l'air d'évoluer en fonction du niveau de précontrainte et du chargement externe. Cette analyse est menée à la section suivante.
Analyse	- Le choix de la matrice de masse exerce une influence négligeable sur le mode numérique obtenu. Pour les modes normalisés avec une valeur maximale égale à l'unité, les résultats sont identiques au millièème près. - Il est possible que la non-linéarité des déplacements du SIMPLEX de grande taille aient une influence sur la forme du mode expérimental calculé par ARTeMIS du fait des grands déplacements subit par la structure lors des excitations. Des tests supplémentaires devraient être effectués afin d'analyser l'influence de la non-linéarité.
Conclusion	- Le premier mode simulé est proche du mode expérimental. - Une analyse complémentaire doit être menée dans la section suivante afin de d'étudier l'influence exacte de la précontrainte et du chargement externe sur le mode numérique.

Tableau 28 – Comparaison du premier mode numérique (*lumped*) et expérimental du « SIMPLEX – masses posées » pour les quatre situations extrêmes

3.3.2.2 Evolution du premier mode numérique selon la précontrainte et le chargement externe

Cette section est subdivisée en deux sous-sections. Elle étudie l'évolution numérique du premier mode en fonction des deux paramètres d'étude. La première partie étudie l'influence du niveau de précontrainte sous un chargement externe constant. La seconde partie étudie l'influence du chargement externe sous un niveau de précontrainte constant.

Cette étude est menée seulement pour des cas extrêmes suivants :

- Pour le chargement extrême : sous poids propre et sous 80 [kg] (= 784.8 [N])
- Pour le niveau de précontrainte : 1.5 et 5.5 [kN]

Pour tous les cas, la matrice de masse « *lumped* » est utilisée.

⁴⁴ Le mode peut être affiché sur ARTeMIS mais les images ne sont pas téléchargeables.

3.3.2.2.1 Evolution du premier mode sous une variation du niveau de précontrainte

Sous un chargement externe constant et avec une étude numérique menée en position initiale, les modes sont identiques.

Sous un chargement externe constant et avec une étude numérique menée avec la matrice de masse « *lumped* » et en position déformée, les trois graphes suivants sont obtenus :

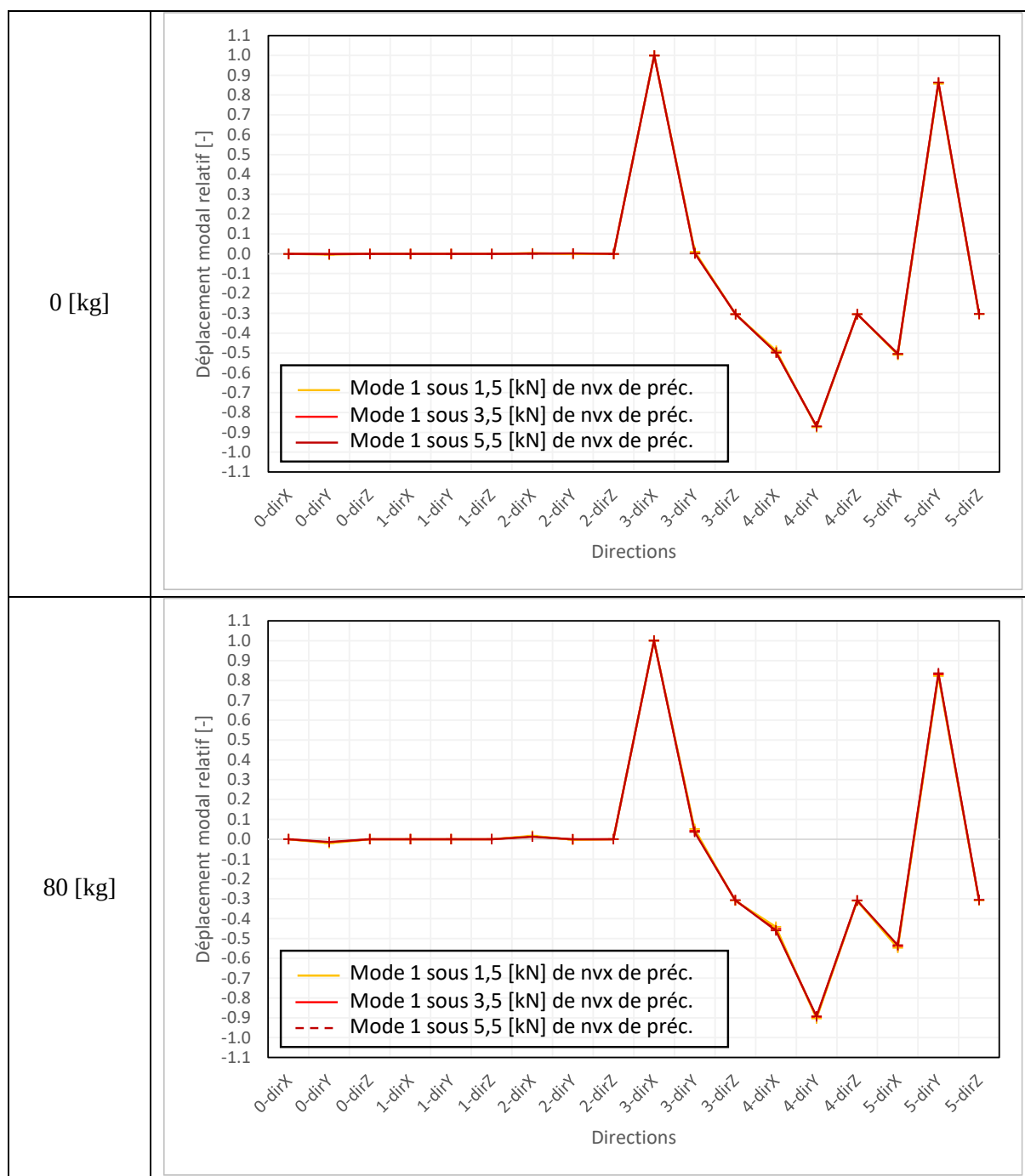


Tableau 29 – Etude numérique sur la forme du premier mode du « *SIMPLEX – masses posées* » étudiant l'influence de la précontrainte sous différents niveaux de chargement externe

Observations	- Les modes sont presque confondus.
Analyse	- L'influence du niveau de précontrainte est négligeable.
Conclusion	- Le niveau de précontrainte n'a pas d'influence sur la forme globale du premier mode.

Tableau 30 – Comparaison du premier mode numérique (lumped) du « SIMPLEX – masses posées » sous l'influence de la précontrainte

3.3.2.2.2 Evolution du premier mode sous une variation du chargement externe

Sous un niveau de précontrainte constant et avec une étude numérique menée en position initiale, les modes sont identiques.

Sous un niveau de précontrainte constant et avec une étude numérique menée avec la matrice de masse « *lumped* » et en position déformée, les trois graphes suivants sont obtenus :

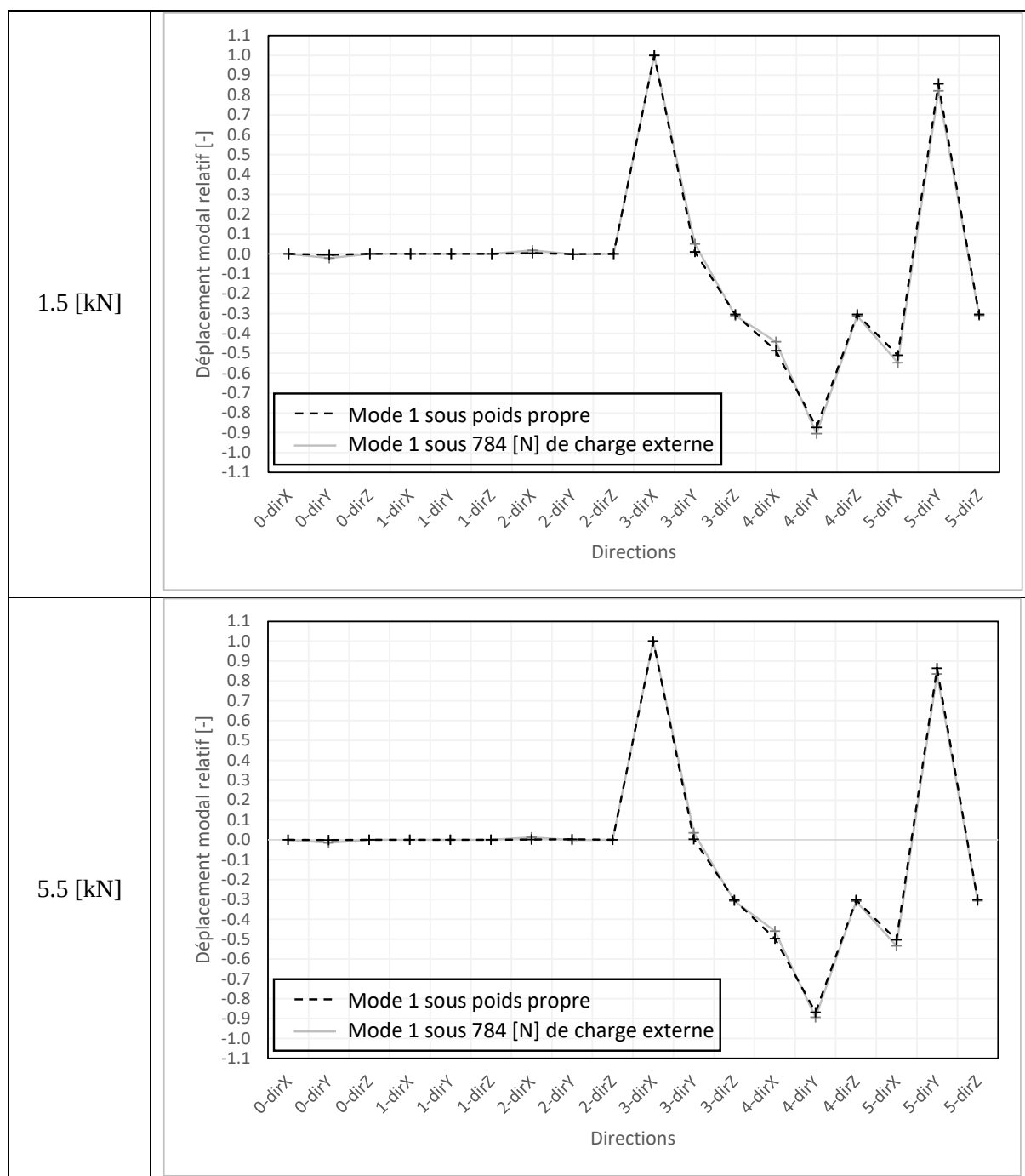


Tableau 31 – Etude numérique sur la forme du premier mode du « *SIMPLEX – masses posées* » étudiant l'influence du chargement externe sous différents niveaux de précontrainte

Observations	- Les modes sont presque confondus. Un décalage légèrement plus grand que sous l'influence de la précontrainte peut être observé.
Analyse	- L'influence du chargement externe est négligeable.
Conclusion	- Le chargement externe n'a pas d'influence sur la forme globale du premier mode.

Tableau 32 – Comparaison du premier mode numérique (*lumped*) du « SIMPLEX – masses posées » sous l'influence de la précontrainte

3.3.2.3 Comparaison numérique du premier mode et du mécanisme de la structure

Le SIMPLEX étudié est cinématiquement indéterminé car la structure possède un mécanisme interne. Ce mécanisme a un mouvement de torsion similaire au premier mode de vibration numérique.

Le mécanisme a la forme suivante :

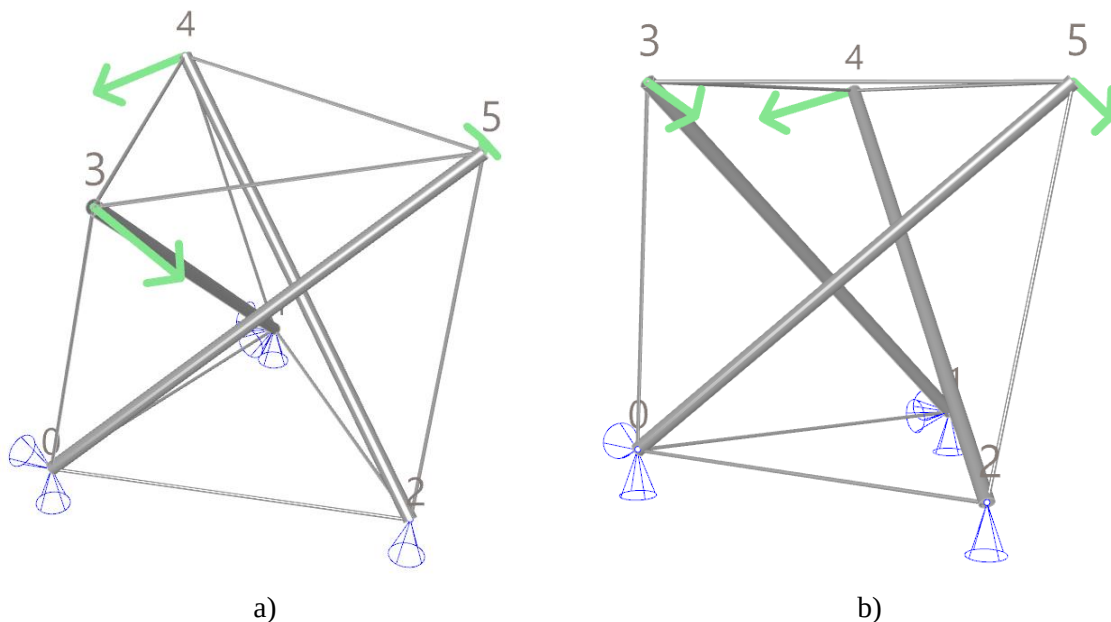


Figure 78 – Mécanisme du SIMPLEX : a) en perspective & b) vue latérale

Cette section a pour but de comparer le premier mode vibration et le mécanisme interne qui sont identiques sous poids propre selon la littérature scientifique. [35]

La comparaison effectuée ci-dessous inclut deux éléments supplémentaires. L'étude est effectuée avec un paramètre supplémentaire : le chargement externe. De plus, l'étude est menée en position initiale et déformée.

La comparaison est effectuée avec le modèle numérique utilisant la matrice de masse « *lumped* ». Les graphiques suivants sont obtenus à la suite de l'étude numérique :

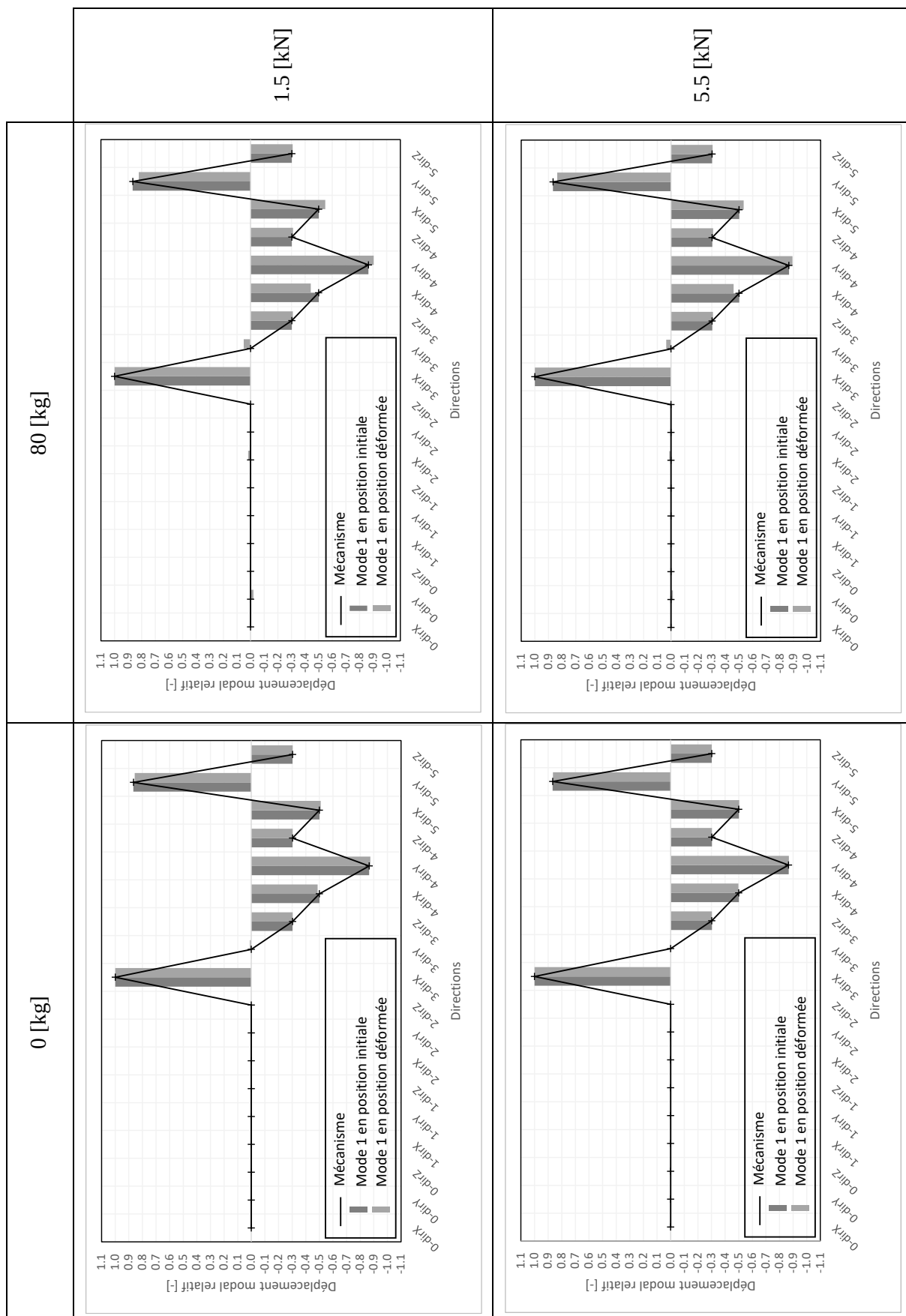


Tableau 33 – Comparaison du premier mode numérique (lumped) du « SIMPLEX – masses posées » et du mécanisme interne du SIMPLEX pour quatre situations extrêmes

Observations	- Lorsque la structure n'est soumise qu'à son poids propre et quel que soit le niveau de précontrainte, le mode propre calculé en position initiale est <u>identique</u> à celui calculé en position d'équilibre statique. Le mode est dans ces cas-là aussi identique au mécanisme interne. - Sous un chargement externe et quel que soit le niveau de précontrainte, le mode propre calculé en position déformée est légèrement différent du mode calculé en position initiale. L'allure reste identique. - Sous un chargement externe et quel que soit le niveau d'autocontrainte, le mode propre calculé en position initiale est identique au mécanisme de la structure.
Analyse	- La position initiale (position théorique avec un angle relatif de 30°) est très proche des positions d'équilibres statiques sous poids propre.
Conclusion	- Sous poids propre, le premier mode numérique en position initiale est égal au premier mode en position déformée. Ces derniers sont aussi identiques au mécanisme interne. - Sous chargement externe, le premier mode en position initiale est égal au mécanisme interne mais n'est plus égal au mode obtenu en position déformée. L'influence de la non-linéarité géométrique est cependant très limitée. - Le premier mode est le mécanisme de la structure.

Tableau 34 – Comparaison du premier mode numérique (lumped) du « SIMPLEX – masses posées » et du mécanisme interne du SIMPLEX

3.3.2.4 Conclusion de l'étude des modes du SIMPLEX

Après l'analyse des résultats de l'étude numérique et expérimentale du premier mode du SIMPLEX, les conclusions suivantes sont obtenues.

Premièrement, le premier mode numérique a la même allure que le mode expérimental. Ils ne sont cependant pas parfaitement identiques. Cela permet de valider en partie le logiciel numérique.

Deuxièmement, le premier mode en position déformée n'évolue pas sous l'influence du chargement externe et du niveau de précontrainte.

Troisièmement, le premier mode numérique obtenu en position déformée est identique au premier mode étudié en position initiale sous poids propre peu importe le niveau de précontrainte. Sous chargement externe, les modes obtenus en position initiale et en position déformée ont la même allure et sont presque identiques. La non-linéarité géométrique n'a donc que très peu d'influence sur le premier mode.

Enfin, le premier mode est lié au seul et unique mécanisme interne du SIMPLEX. Le mode numérique obtenu en position initiale est parfaitement identique au mécanisme peu importe le niveau de précontrainte et le chargement externe. Le premier mode numérique obtenu en position déformée est identique au mode obtenu en position initiale sous poids propre et dévie légèrement du mode simulé en position initiale sous chargement externe.

Conclusion et perspectives

En s'appuyant sur les recherches qui ont étudié le comportement statique des structures en tenségrité, le présent mémoire étudie, pour la première fois à l'UCLouvain, le comportement dynamique de ces structures. Plus précisément, ce dernier se concentre sur l'étude numérique et expérimentale de la dynamique d'un SIMPLEX de grande taille construit au laboratoire LEMSC (UCL/GCE).

A cette fin, le présent mémoire a un double objectif : le développement d'un outil numérique paramétrique et l'étude de l'influence de l'effet des grands déplacements sur la dynamique du SIMPLEX. Afin d'intégrer l'influence de la non-linéarité géométrique sur la dynamique du SIMPLEX, ce mémoire considère, en plus de la précontrainte et de manière inédite, le chargement externe comme paramètre d'étude.

Les expériences dynamiques menées ont pu mettre en lumière que le système de chargement utilisé auparavant pour l'étude statique avait sur le SIMPLEX un effet de pendule. Afin d'éliminer cet effet indésirable, le système de chargement a été modifié de telle sorte que les masses soient posées sur les nœuds supérieurs et non plus pendues à ces derniers.

Le développement de l'outil numérique paramétrique permet de calculer les fréquences et modes propres de toutes les structures en tenségrité ou de type treillis. Au-delà du calcul, le logiciel permet de visualiser les modes de la structure ainsi que les masses nodales considérées pour le calcul dynamique.

Seules les deux premières fréquences propres et le premier mode du SIMPLEX ont pu être comparés aux résultats expérimentaux car l'excitation du SIMPLEX n'a pas permis de mettre en avant les fréquences suivantes.

Les résultats numériques obtenus grâce à la matrice de masse « *consistent* » et en position déformée permettent d'approcher la première fréquence propre avec une erreur maximale relative de 8.2%. Concernant la seconde fréquence propre, le protocole de test n'a pas permis de la faire ressortir parfaitement mais elle est approchée au mieux grâce à la matrice de masse « *lumped* » avec une erreur maximale relative de 1% sous poids propre et 34% sous chargement externe.

Le premier mode numérique du SIMPLEX a quant à lui la même allure que le mode expérimental et n'est pas influencé par le niveau de précontrainte et le chargement externe. Ils ne sont cependant pas parfaitement identiques. L'étude numérique a pu démontrer que le premier mode de la structure est en fait l'unique mécanisme interne de la structure.

A propos de l'influence de la non-linéarité géométrique, celle-ci n'a de l'influence que sur la première fréquence propre qui suit l'évolution de la fréquence propre étudiée en position déformée. A partir de la deuxième fréquence propre, les fréquences obtenues en position initiale et en position déformée sont identiques. Concernant l'influence de la non-linéarité géométrique sur le premier mode, celle-ci est très limitée : le premier mode garde la même allure.

De plus, la rigidité géométrique liée à la précontrainte n'a de l'influence que sur la première fréquence propre car les onze fréquences propres suivantes sont obtenues à 0.1% près grâce à la rigidité matérielle.

En conclusion, ce mémoire pose les fondations de future recherche sur la dynamique des structures en tenségrité. Différentes pistes de travail existent.

Premièrement, une étude expérimentale ayant un protocole spécifique pourrait être menée afin d'affiner les résultats expérimentaux de la seconde fréquence propre et d'ainsi valider le logiciel numérique pour la seconde fréquence propre.

Deuxièmement, des tests expérimentaux sur une structure comportant plusieurs modules permettraient de valider le logiciel pour des structures plus complexes.

Enfin, afin de pouvoir effectuer tout le dimensionnement d'une passerelle en tensegrité, des développements supplémentaires doivent être apportés au logiciel. Ces développements seraient liés à la démarche de dimensionnement dynamique des passerelles piétonnes disponible dans le guide SETRA, référence dans le dimensionnement dynamique des passerelles piétonnes.

Annexes

1 Annexe 1 – Caractéristiques du SIMPLEX

Cette annexe présente les caractéristiques mécaniques du SIMPLEX de grande taille construit au laboratoire LEMSC de l'UCLouvain.

Ce module est construit en aluminium. Il comporte 9 câbles, 3 barres et 6 nœuds.

Les éléments de la structure sont désignés selon la nomenclature suivante :

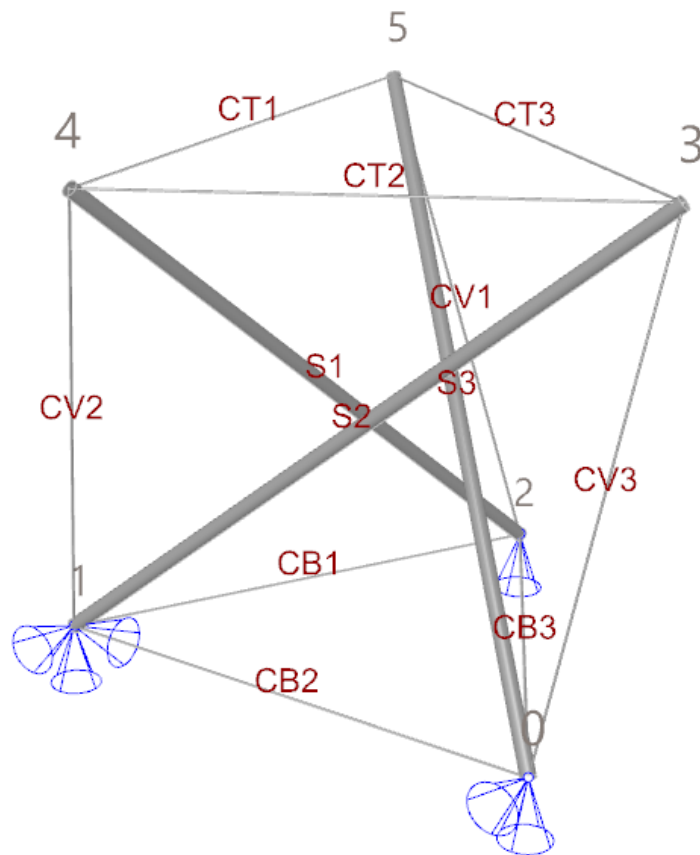


Figure 79 - Nomenclature des éléments constitutifs du SIMPLEX

Sur la figure 79, les conditions d'appui sont aussi indiquées. L'appui s'effectue entre le contact d'une sphère sous le disque métallique et d'une plaque métallique fixée au sol comme illustré sur la figure 80. Les directions sont bloquées grâce à des profilés métalliques en forme de « L ».



Figure 80 - Noeud 1

1.1 Caractéristiques mécaniques

Le SIMPLEX est constitué en grande partie de barres et de câbles. Ces éléments ont des sections ainsi qu'une résistance maximale dû au flambement pour les barres et à la résistance en traction pour les câbles.

En plus de cela, afin d'étudier numériquement la structure, il a fallu déterminer le module de Young équivalent des éléments car des éléments complémentaires jouent un rôle non négligeable.

Sur la partie de gauche de la figure 81, le lien entre le nœud et la barre est effectué grâce à de nombreux éléments. (du haut vers le bas : la barre, la rondelle en acier, le capteur de force, une rondelle en acier, un écrou et une tige filetée)

Sur la partie de droite de la figure 81, le lien entre le nœud et le câble est composée de⁴⁵ : une attache, un ensemble tige/tendeur, un manchon et le câble.

⁴⁵ De haut en bas



Figure 81 - Composition des assemblages nœuds

Les différentes caractéristiques mécaniques majeures sont synthétisées dans le tableau 35 et les longueurs sur la figure 82.

Élément	Matériau	Module de Young équivalent [GPa]	Résistance [kN]	Diamètre externe [mm]	Diamètre interne [mm]
Barres S1, S2, S3	Tube en aluminium de type EN-AW-6060-ET-T66	70.39	10.66	60	56
Câbles horizontaux CT1, CT2, CT3 CB1, CB2, CB3	Tige en aluminium de type EN-AW-6060-ER-T66	71.75	6	8	/
Câbles verticaux CV1, CV2, CV3	Tige en aluminium de type EN-AW-6060-ER-T66	72.19	6	8	/

Tableau 35 - Synthèse des caractéristiques mécaniques des éléments constituant le SIMPLEX [20]

Les longueurs des éléments sont présentées ci-dessous:



2 Annexe 2 – Vérification du comportement statique du SIMPLEX

Les prises de position des nœuds ont été effectuées à l'aide d'une station totale de type LEICA TCRP1203. Les coordonnées des nœuds ont permis pour les deux tests d'obtenir l'angle de rotation relatif.

Test statique	Chargement externe appliqué à chaque nœud supérieur [N]	Angle de rotation relatif à obtenir ⁴⁶ [°]	Angle de rotation relatif moyen mesuré [°]
1	0	30.7	30.7
2	308.52	32.8	32.8

Tableau 36 - Récapitulatif des prises de mesures statiques sous 1.5 [kN] de niveau de précontrainte

⁴⁶ Selon les tests effectués lors de l'année académique 2020-2021.

3 Annexe 3 – Deux modèles de matrice de masse

Cette annexe a pour objectif de présenter les deux types de matrices de masses utilisées dans ce mémoire. Les développements se basent sur les sources : [41] et [42].

La matrice de masse M peut être divisée en deux sous-matrices : l'une liée à la masse des nœuds et l'autre liée à la masse des éléments linéiques (c-à-d les barres et les câbles).

Ainsi, l'égalité suivante peut être écrite [35]:

$$M = M_{noeud} + M_{élément}$$

Équation 51

La masse nodale sera uniquement considérée au nœud. La matrice de masse nodale est donc diagonale et est de la forme suivante pour un élément positionné dans un repère⁴⁷ tri-dimensionnel :

$$M_{noeud} = \begin{bmatrix} M_{N1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & M_{N1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & M_{N1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & M_{N2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{N2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & M_{N2} \end{bmatrix}$$

Équation 52

Ou, M_{NX} représente la masse du nœud X.

L'élément qui différencie les deux modèles est la manière dont la masse des éléments linéiques est prise en compte.

Le modèle « *lumped* » considère que la masse d'un élément à une extrémité n'a pas d'influence sur les déplacements liés au nœud à l'autre extrémité de l'élément. Le modèle « *consistent* » considère l'inverse.

En considérant un élément linéique ayant une masse volumique ρ , une section A et une longueur L , les deux matrices de masse des éléments obtenues avec les deux modèles sont détaillées ci-dessous.

Il est à noter que la masse totale de chaque matrice pour les deux modèles présentés ci-dessous est identique.

⁴⁷ La matrice est construite de la manière suivante : [dx1, dy1, dz1, dx2, dy2, dz2]

3.1 Matrice de masse « *lumped* »

Le modèle « *lumped* » considère la moitié de la masse d'un élément à chaque nœud se trouvant à ses extrémités. Cette matrice de masse est elle aussi diagonale et a la forme suivante :

$$M_{\text{élément}} = \frac{\rho AL}{2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Équation 53

3.2 Matrice de masse « *consistent* »

Dans ce cas-ci, la matrice n'est plus diagonale. L'unité sur la diagonale secondaire de la matrice rend dépendants deux degrés de liberté. Ces deux degrés de liberté sont dirigés dans la même direction.

$$M_{\text{élément}} = \frac{\rho AL}{6} \cdot \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Équation 54

4 Annexe 4 – Version des logiciels utilisés

Les différents logiciels utilisés ont les versions suivantes :

1. Grasshopper : Rhino 7, version du 12 avril 2022
2. Visual Studio : version 2022 utilisant C# 7.3 avec comme cible de travail .NET 4.8. Visual studio inclus des packages NuGet téléchargés directement depuis l'application VS.

Voici les différents packages téléchargés et leurs versions :

- a. Grasshopper version 7.17.22102.5001
 - b. Log4net version 2.0.14
 - c. Newtonsoft.Json version 13.0.1
 - d. Microsoft.CSharp version 4.7.0
 - e. RhinoCommon version 7.17.22102.5001
 - f. System.Reactive.Windows.Forms version 5.0.0
3. Anaconda : version 3 utilisant python 3.8

5 Annexe 5 – Etapes d’installation du programme en mode « développeur »

Cette annexe a pour objectif de présenter les étapes et les points d’attention à avoir lorsque le logiciel est installé en mode « développeur » sur un ordinateur.

1. Au préalable, il faut télécharger : Rhino-Grasshopper, Visual Studio et Python.
2. Ouvrir le fichier « Muscle.csproj ». Ce fichier est le fichier mère de tous les composants développés.
3. Dans les propriétés générales du projet⁴⁸, il faut s’assurer que les chemins de sortie intermédiaires de base pointent vers les bons dossiers. Le chemin de sortie de base doit pointer vers le dossier \bin et le chemin de sortie intermédiaire de base doit pointer vers le dossier \obj.
4. Dans le code C#, s’assurer que les chemins vers des fichiers sont bien mis à jour : le nom de l’utilisateur doit être modifié.
5. Toujours dans les paramètres généraux du projet, l’événement « Post-Build » doit être modifié et contenir : « *Copy "\$(TargetPath)" "\$(TargetDir)\$(ProjectName).gha" Erase "\$(TargetPath)"* ». De plus, l’événement « Post-Build » doit être exécuté « *Quand le build réussit* ».
6. Désormais, les packages NuGet⁴⁹ peuvent être installés ou réinstallés. Ils sont téléchargeables directement depuis l’onglet « Outils » de l’application Visual Studio. Les packages à installer sont les suivants :
 - a. *Grasshopper*
 - b. *Log4net*
 - c. *Newtonsoft.Json*
 - d. *Microsoft.CSharp*
 - e. *RhinoCommon*
 - f. *System.Reactive.Windows.Forms*
7. Vérifier que les fichiers avec les extensions .dll et .xml des packages *Newtonsoft.Json* et *Log4Net* sont présents (ou à jour) dans le fichier \obj⁵⁰.

Pour être certain de cela, copiez-collez les fichiers sources téléchargés par Visual Studio directement depuis les dossiers utilisateurs⁵¹ (Endroit où Visual Studio place les fichiers des packages téléchargés.).

Notons que le fichier dépend du .NET ciblé. Il n’y a cependant pas de différence entre .NET45 et .NET48.
8. S’assurer que les extensions⁵² sont téléchargées. Il faut au minimum : « *RhinoCommon and Grasshopper template for Rhino 7* ».

⁴⁸ Les propriétés générales du projet peuvent être atteintes en cliquant droit sur le fichier général.

⁴⁹ Les packages NuGet peuvent être ajoutés via Outils > Gestionnaire des packages NuGet > Gérer les packages NuGet

⁵⁰ Ayant comme chemin : Muscles_ADE\Muscle\obj\Debug\net48

⁵¹ Ayant comme chemin : C:\Users\...nom_utilisateur...\nuget\packages\log4net\2.0.14\lib\net45

⁵² Accessible via Extension > gérer les extensions

9. Rhino peut être lancé
10. Dans la fenêtre de recherche, rechercher « *GrasshopperDeveloperSettings* » puis insérer le lien vers le dossier \obj du projet.
11. Relancer Rhino. La configuration est terminée. Le logiciel peut être utilisé en mode « développeur »

Notons que les GUID doivent être différents pour chaque composant. Le GUID représente l'identité des composants dans le logiciel. Lorsqu'un fichier Grasshopper est créé avec des composants ayant des GUID définis et que les GUID sont modifiés, le fichier Grasshopper ne reconnaît plus les composants car leurs identités sont modifiées. Il ne faut donc pas les modifier.

Aucune étape supplémentaire n'est nécessaire lorsque le code du logiciel est modifié. Cependant, il faut générer un GUID pour chaque fichier le nécessitant. Cela peut être fait directement sur internet.

6 Annexe 6 – Dispositif d’acquisition des données

Cette annexe présente le positionnement des accéléromètres fixés sur le SIMPLEX de grande taille et la manière dont les données ont été acquises.

6.1 L’accéléromètre

Les cinq accéléromètres fixés sur la structure proviennent de la société Micromega.



Figure 83 - Accéléromètre type positionné sur la structure

Modèle : IAC-U-03-2G-5m

Gamme : $\pm 2g$

Numéro	Numéro de série	Sensitivité Axe X [V/g]	Sensitivité Axe Y [V/g]	Sensitivité Axe Z [V/g]
1	030410032	0.600	0.598	0.601
2	030410033	0.614	0.597	0.606
3	030410034	0.611	0.593	0.599
4	030410035	0.607	0.604	0.586
5	030410036	0.598	0.602	0.598

Tableau 37 - Information sur les accéléromètres utilisés

Chaque accéléromètre est fixé sur un U métallique qui est collé ensuite sur la structure.

L’ajout des accéléromètres modifie le poids propre de la structure. Le poids propre du SIMPLEX incluant les accéléromètres est détaillé dans la section 3.2.2 de la partie 1.

6.2 Acquisition des données

Les accéléromètres sont câblés et ne sont pas les uniques capteurs présents sur la structure. Les capteurs permettant la prise de mesure étant toujours placés sur le SIMPLEX, la prise de mesure des accélérations et des efforts internes a été centralisée dans une application nommée Acqimem. Cette application permet d'enregistrer toutes les données et de les sauver dans un fichier de type tdms.

Ci-dessous se trouve un récapitulatif des informations utiles pour le calibrage du logiciel Acqimem ainsi que la gestion des flux de données.

NOM	Fonction	E _{ag}	Entrée box	Entrée NI	Num serie	Direction	Sensitivité [V/g]	Unités IN	Unités OUT	Surnom	Voie virtuelle
Accéléromètres	1	/	Acc1	0	30410032	X	0.600	V	g	1X	Acc-1X
		/		1		Y	0.598	V	g	1Y	Acc-1Y
		/		2		Z	0.601	V	g	1Z	Acc-1Z
	2	/	Acc2	3	30410033	X	0.614	V	g	2X	Acc-2X
		/		4		Y	0.597	V	g	2Y	Acc-2Y
		/		5		Z	0.606	V	g	2Z	Acc-2Z
	3	/	Acc3	6	30410034	X	0.611	V	g	3X	Acc-3X
		/		7		Y	0.593	V	g	3Y	Acc-3Y
		/		8		Z	0.599	V	g	3Z	Acc-3Z
	4	/	Acc4	9	30410035	X	0.607	V	g	4X	Acc-4X
		/		10		Y	0.604	V	g	4Y	Acc-4Y
		/		11		Z	0.586	V	g	4Z	Acc-4Z
Force - barres	5	/	Acc5	12	30410036	X	0.598	V	g	5X	Acc-5X
		/		13		Y	0.602	V	g	5Y	Acc-5Y
		/		14		Z	0.598	V	g	5Z	Acc-5Z
Allongement relatif - cables	05B	lin	1	F1	/	/	/	V	kN	Force1	Force1
	13B	lin	1	F2	/	/	/	V	kN	Force2	Force2
	24B	lin	1	F3	/	/	/	V	kN	Force3	Force3
	03C	lin	3.201455	A1	/	/	/	V	kN	A1	03C
	14C	lin	3.391348	A2	/	/	/	V	kN	A2	14C
	25C	lin	3.365242	A3	/	/	/	V	kN	A3	25C
	01C	lin	3.439274	A4	/	/	/	V	kN	A4	01C
	02C	lin	3.337332	A5	/	/	/	V	kN	A5	02C
	12C	lin	3.343235	A6	/	/	/	V	kN	A6	12C
	35C	lin	3.380258	A7	/	/	/	V	kN	A7	35C
	34C	lin	3.353006	A8	/	/	/	V	kN	A8	34C
	45C	lin	3.371812	A9	/	/	/	V	kN	A9	45C

Tableau 38 - Récapitulatif de la configuration de prise de mesure

7 Annexe 7 – Descriptif du logiciel ARTeMIS (Traitement des données expérimentales)

Le logiciel ARTeMIS [43] est un logiciel sous licence qui permet d'effectuer de l'analyse modale. Cette analyse peut être réalisée soit de manière opérationnelle soit de manière expérimentale.

L'analyse modale opérationnelle [44] utilise les vibrations ambiantes tandis que l'analyse expérimentale nécessite une excitation artificielle.

Dans le cas de l'analyse expérimentale, l'excitation est aussi mesurée et enregistrée. L'excitation fait donc partie des données analysées.

Dans le cadre de ce mémoire, la structure a été excitée artificiellement et naturellement mais l'analyse effectuée a toujours été de type opérationnel. Cela est dû à l'impossibilité d'enregistrer l'excitation appliquée sur la structure.

Le logiciel ARTeMIS est facile à utiliser : les étapes sont clairement définies et pour chacune d'elles une fenêtre explicative peut être ouverte.

Afin de commencer à traiter les données, il faut tout d'abord réaliser la première tâche : la création de la géométrie. Cette géométrie permettra par la suite de visualiser le/les mode(s).

Ensuite, les données à analyser peuvent être téléchargées directement depuis un fichier source. Ces données peuvent être de trois types : un déplacement, une vitesse ou une accélération.

Après avoir téléchargé ces données, celles-ci doivent être liées à la géométrie de la structure. Cette étape détermine les données qui seront post-traitées par le logiciel. Pour le SIMPLEX, l'étape d'assignation a pour résultat la figure suivante :

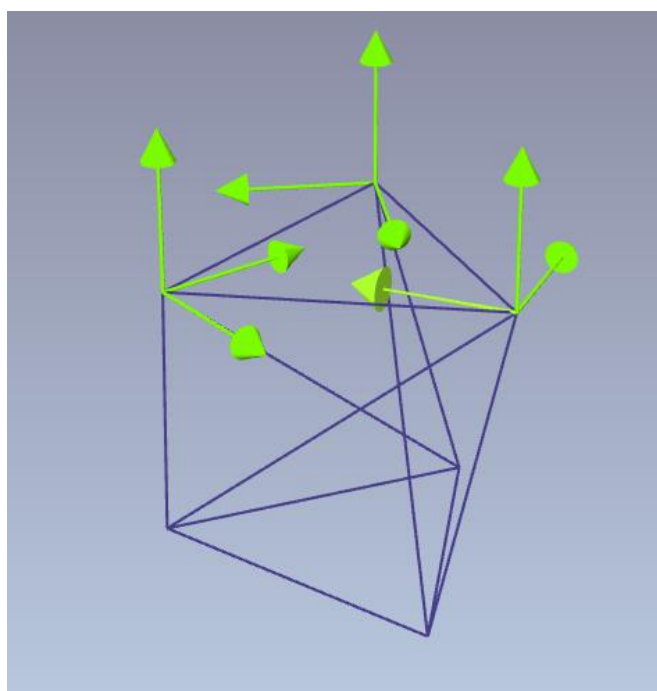


Figure 84 - Assignation des données à certains degrés de liberté

Enfin, l'analyse peut débuter. Celle-ci se déroule en deux étapes. La première étape a pour but de déterminer les paramètres du calcul tel que, par exemple, le domaine de fréquence souhaité.

L'étape suivante permet de choisir les fréquences propres (pics) sur le graphique des valeurs singulières de la densité spectrale. Ce graphique est obtenu par le biais de la méthode de calcul : EFDD (Enhanced Frequency Domain Decomposition⁵³). Cette méthode est expliquée dans la section ci-dessous.

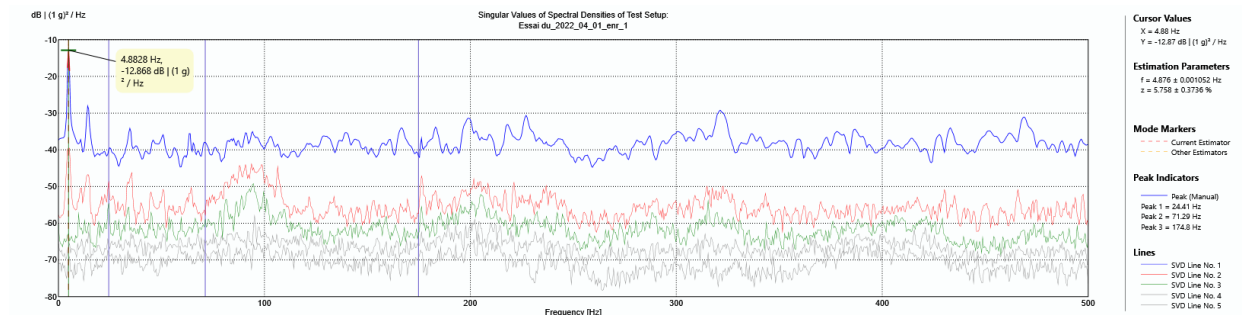


Figure 85 - Graphique type obtenu avec la méthode EFDD

Pour chaque pic choisi, le logiciel calcule un mode. Le vecteur du mode peut être obtenu et la vibration de la structure peut aussi être visualisée dans une fenêtre spécifique.

7.1 La Méthode EFDD

La méthode EFDD est une version améliorée de la méthode de décomposition du domaine de fréquence (FDD).

La méthode FDD est basique et facile à utiliser car elle traite les données du set d'accéléérations de manière indépendante contrairement à la méthode EFDD qui combine toutes les données entre elles. [45]

L'utilisation combinée de toutes les données rend cette méthode complexe.

Cependant, comme pour la méthode FDD, l'objectif final est de décomposer un signal temporel en un signal fréquentiel.

⁵³ Décomposition améliorée du domaine de fréquence

Pour effectuer le traitement de données selon la méthode FDD, la transformée de Fourier peut être utilisée :

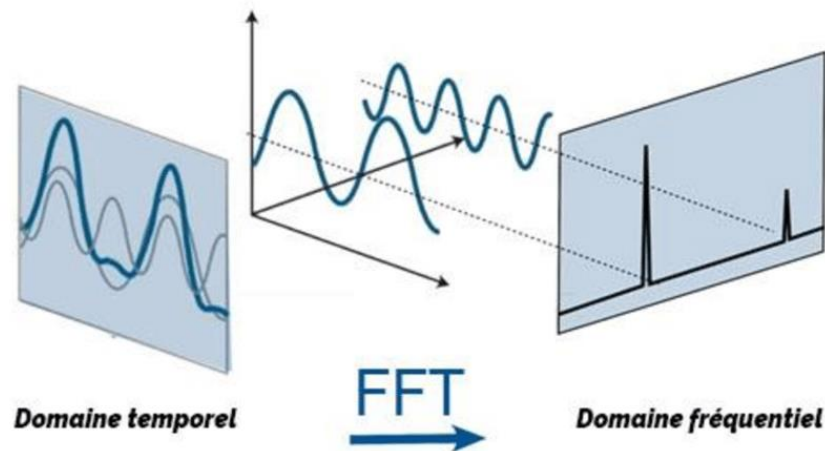


Figure 86 - Représentation du lien entre le domaine temporel et fréquentiel [46]

Sachant que la réponse totale d'un système à plusieurs degrés de liberté est la somme des réponses modales, le signal temporel est une addition de différentes fonctions périodiques ayant chacune leur propre fréquence de vibration.

Chaque pic sur la figure 85 est donc potentiellement une fréquence propre. Néanmoins, certaines fréquences propres sont aussi moins prononcées et n'apparaissent pas tel un pic.

8 Annexe 8 – Etude dynamique du « SIMPLEX – masses pendues »

8.1 Introduction

Cette annexe présente les résultats obtenus lors de la première étude dynamique sur le SIMPLEX.

Cette étude est menée en chargeant la structure sur les plateaux suspendus aux nœuds supérieurs tel que cela a été fait lors de l'étude statique du SIMPLEX – « SIMPLEX – masses pendues ». (Voir section 3 en partie 1 de ce mémoire)

Cette expérience a pour but d'atteindre deux objectifs.

Le premier objectif est de s'assurer que la tendance de l'évolution des fréquences propres expérimentales est proche des simulations obtenues à l'aide du logiciel développé durant le mémoire.

Le second objectif est de déterminer un protocole de test à la lumière des résultats obtenus.

8.2 Méthode

8.2.1 Description du prototype

Les tests ont été effectués sur la structures présentée dans le chapitre 3 de la première partie de ce mémoire. Son poids propre inclus les accéléromètres.

8.2.2 Description du protocole

Afin de répondre au premier objectif fixé et ainsi obtenir la tendance d'évolution des fréquences propres, quatre situations extrêmes sont choisies :

		Chargement externe	
		0 [N]	799 [N]
		0 [kg]	81.45 [kg]
Niveau de précontrainte [kN]	1.5	Situation 1	Situation 2
	5.5	Situation 3	Situation 4

Tableau 39 - Quatre situations extrêmes testées sur le « SIMPLEX »

Celles-ci sont définies de telle sorte que le processus de flambement des barres n'ait pas commencé⁵⁴ et que la limite de rupture⁵⁵ des matériaux ne soit pas atteinte.

Afin d'étudier l'influence de chaque protocole, chaque situation est testée selon quatre protocoles. Ceux-ci sont présentés ci-dessous :

- **Bruit blanc** : La structure est excitée indirectement par les vibrations provenant du local et d'une personne marchant proche de la structure. La structure agit comme un filtre.
- **Electro-aimant** : Une masse de 6.257 [kg] est suspendue au plateau accroché au nœud 3. La structure est alors en position déformée et atteint, en vibrant, sa position non-déformée lorsque la masse est lâchée.



Figure 87 – Dispositif de l'électro-aimant

- **Marteau** : Un coup horizontal de marteau est appliqué au nœud 3.
- **Coup léger** : Un coup horizontal est appliqué au nœud 3 grâce à la paume d'une main.

Dans la liste précédente, seul l'électro-aimant a une impulsion qui est connue et constante pour tous les tests.

⁵⁴ A partir d'un chargement de 799 [N] sous un niveau de précontrainte 1.5 [kN]

⁵⁵ Limite de tension dans les câbles verticaux atteinte à 799 [N] sous un niveau de précontrainte de 8.5 [kN]

8.3 Résultats

8.3.1 Tendances des mesures expérimentales

Les résultats expérimentaux obtenus sont synthétisés dans le tableau ci-dessous. Les fréquences indiquées dans le tableau représentent le premier pic net visible sur chaque graphique de résultat. Ces derniers sont disponibles dans la section 8.5 de cette annexe.

	Niveau de précontrainte [kN]	Charge externe [N]	F [Hz] (Premier pic)
Situation 1	1.5	0	2.92
Situation 2	1.5	799	4.29
Situation 3	5.5	0	4.88
Situation 4	5.5	799	4

Tableau 40 - Récapitulatif des résultats expérimentaux en chargeant la structure à l'aide des plateaux suspendus

8.3.1.1 Comparaison des données expérimentales avec le modèle numérique considérant le chargement externe aux nœuds supérieurs - modèle numérique « nodal »

Le modèle numérique considérant le chargement externe aux nœuds supérieurs (3, 4 & 5) du SIMPLEX est désigné : « modèle nodal ».

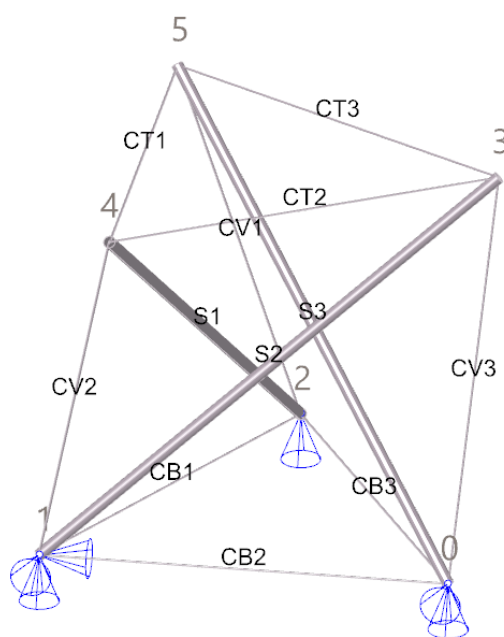


Figure 88 - Géométrie du modèle « nodal »

Les graphiques suivants sont obtenus :

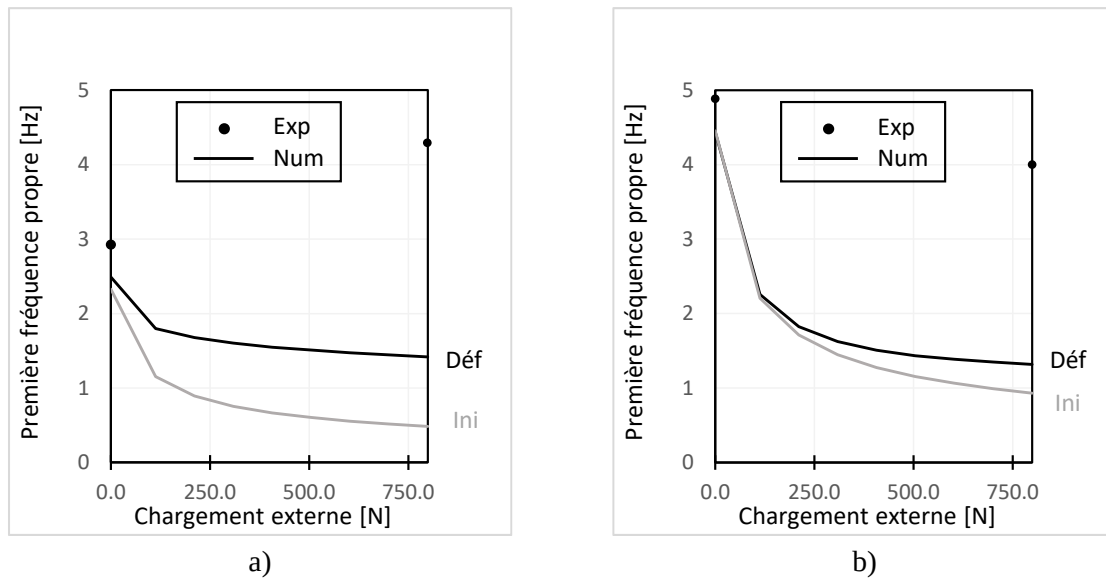


Figure 89 - Comparaison des résultats numériques du modèle « nodal » et expérimentaux sur le « SIMPLEX – masses pendues » pour deux niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN] & b) 5.5 [kN]

Sur les deux graphes de la figure 89, les simulations numériques en position initiale et en position déformée sont présentées.

Le modèle numérique considère les caractéristiques mécaniques et le poids propre incluant le poids des accéléromètres présentés respectivement dans l'annexe 1.1 et dans la section 3.2.2 de la partie 1 de ce mémoire.

La matrice de masse « *consistent* » est utilisée⁵⁶ dans pour les simulations.

CONCLUSION : Sous poids propre, le modèle numérique est proche des résultats expérimentaux. Sous chargement externe, le modèle numérique n'a pas la bonne tendance.

Le chargement externe ne semble pas bien modélisé. Afin de comprendre les résultats expérimentaux, un nouveau modèle numérique est créé.

8.3.1.2 Comparaison des données expérimentales avec le modèle numérique considérant le chargement externe aux nœuds des pendules – modèle numérique « pendule »

Le modèle numérique « pendule » considère le chargement externe tel que suspendu aux nœuds supérieurs à l'inverse du modèle « nodal » qui considère le chargement externe aux nœuds supérieurs du SIMPLEX.

⁵⁶ La matrice de masse « *lumped* » permet d'obtenir la même tendance que le modèle « *consistent* ».

8.3.1.2.1 Modèle numérique

Ce modèle considère le même poids propre que le modèle « nodal ». Deux hypothèses sont cependant faites :

1. Les éléments linéiques (3-6, 4-7 et 5-8) sont axialement infiniment rigides.
2. La position des nœuds 6, 7 et 8 représente le centre de gravité du chargement externe ajouté. Lorsque le chargement externe augmente, la longueur des pendules diminue.

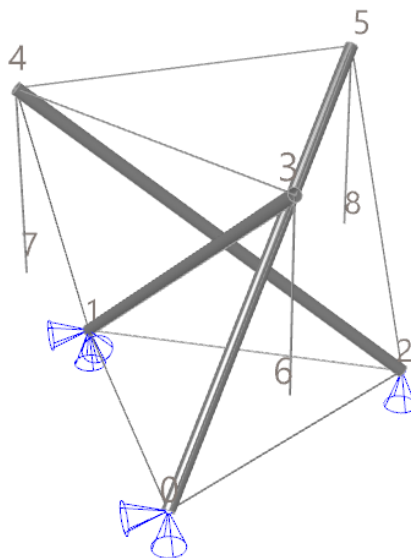


Figure 90 - Géométrie du modèle numérique « pendule »

NB : Le modèle numérique « pendule » considère le chargement externe aux nœuds 6, 7 et 8. contrairement au modèle « nodal » qui le considère aux nœuds supérieurs : 3, 4 et 5.

8.3.1.2.1 Evolution des six premières fréquences propres

Les six premières fréquences (et modes) de ces modèles numériques sont exclusivement liées à la vibration des pendules.

Elles ne varient ni en fonction de la précontrainte, ni en fonction du chargement externe, mais uniquement en fonction de la longueur du pendule.

La longueur du pendule est définie par la distance entre le nœud supérieur du SIMPLEX et le centre de gravité du chargement externe. Il y a donc une équivalence entre la longueur du pendule et le chargement externe.

La formule théorique de la fréquence d'un pendule est donnée par la relation :

$$F[\text{Hz}] = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Ou,

- $g : 9.81 [m/s^2]$
- L : la longueur du pendule

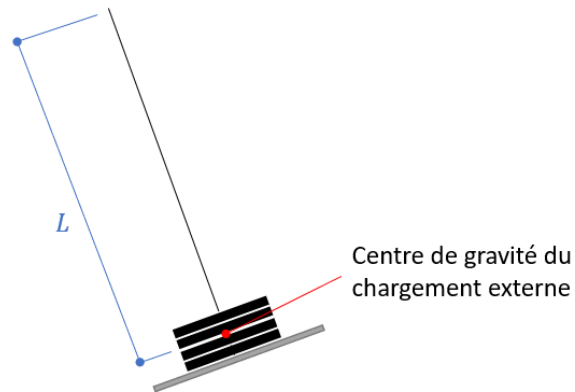


Figure 91 - Pendule

L'évolution moyenne des six premières fréquences est représentée sur le graphe ci-dessous.

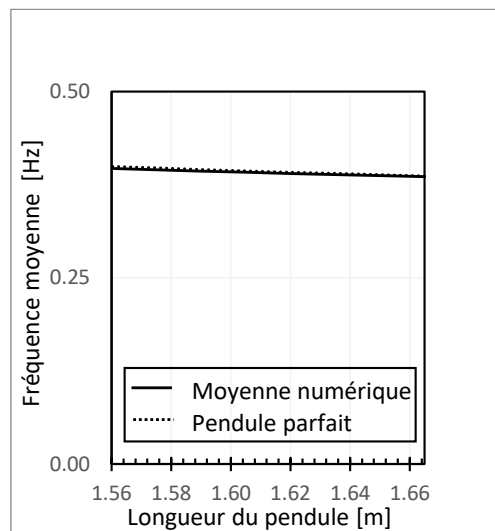


Figure 92 – Comparaison entre l'évolution moyenne des six premières fréquences du modèle « pendule » et la fréquence d'un pendule parfait

L'évolution moyenne suit parfaitement la loi théorique.

8.3.1.2.2 Comparaison des résultats

La septième fréquence propre du modèle « pendule » approche très fortement les résultats expérimentaux obtenus en suspendant le chargement externe aux nœuds supérieurs.

Cela est vérifié pour les deux types de modèles de matrice de masse. Ci-dessous les résultats sont obtenus avec la matrice « *consistent* » car ils permettent d'obtenir des résultats légèrement plus proches que le modèle « *lumped* ».

Notons que l'étude en position initiale ne permet pas d'obtenir la même tendance que les résultats expérimentaux et le modèle numérique dont la structure est étudiée en position déformée.

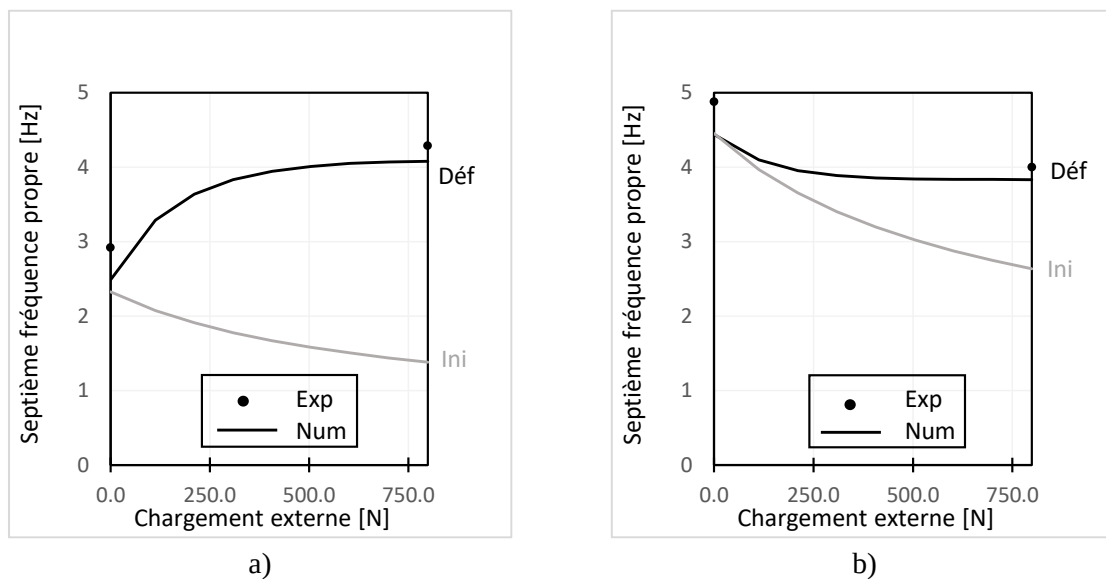


Figure 93 - Comparaison des résultats numériques du modèle « pendule » et expérimentaux sur le « SIMPLEX – masses pendues » pour deux niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN] & b) 5.5 [kN]

CONCLUSION : Ces résultats démontrent la forte influence du chargement externe positionné sur les plateaux suspendus.

8.3.2 Choix d'un protocole expérimental

Grâce aux résultats disponibles dans la section 8.5 de cette annexe, une analyse a permis de mettre en lumière certains éléments tels que la qualité des résultats, l'influence de chaque protocole sur les résultats, etc.

Ces éléments ont été utiles pour déterminer un protocole de mise en excitation de la structure.

Ces résultats sont au nombre de quatre et sont détaillés ci-dessous :

1. Les tests menés par excitation de la structure grâce au bruit blanc ne permettent pas d'avoir des pics nets lorsque la précontrainte et le chargement externe est faible. Ce test est écarté et n'a donc pas été utilisé pour les tests ultérieurs.
2. Sous un faible niveau de précontrainte, le test effectué avec l'électro-aimant ne permet pas d'obtenir un résultat proche des autres tests pour le premier pic. La structure est influencée par l'effet de pendule car l'électro-aimant est suspendu.

Dans le tableau suivant, une comparaison est effectuée pour le premier pic sous poids propre et 1.5 [kN] de niveau de précontrainte.

	Premier pic [Hz]
Bruit blanc	2.92
Electro-aimant	2.83
Marteau	2.92
Coup léger	2.92

Tableau 41 - Synthèse de la fréquence du premier pic en fonction du protocole pour un niveau de précontrainte de 1.5 [kN] et sous poids propre

L'électro-aimant n'a pas son premier pic positionné à la même fréquence que les trois autres protocoles.

Ce type de test nécessite de suspendre l'électro-aimant à un des pendules. Afin de ne pas avoir d'influence d'un des pendules sur la dynamique du système, ce test n'a pas été utilisé pour les tests ultérieurs.

3. Les deux autres tests, c'est-à-dire les tests menés grâce au marteau et le petit coup, permettent d'obtenir toujours le premier pic parfaitement. Une analyse plus poussée des graphes met en lumière la complexité de faire apparaître les fréquences propres au-delà de la première et la non-concordance dans la majorité des cas entre les pics et les fréquences propres simulées numériquement.

Les fréquences propres simulées dans la position déformée sont disponibles pour chaque situation dans la section 8.5 de cette annexe. Pour chaque situation, un tableau synthétise les pics expérimentaux les plus proches des fréquences simulées numériquement.

4. Deux accéléromètres supplémentaires sont positionnés sur deux des trois barres. L'analyse complémentaire a été menée afin de voir l'influence de leurs données sur les résultats. Ils permettent d'obtenir sensiblement les mêmes pics que les tests menés avec trois accéléromètres à l'exception d'un pic supplémentaire à 50 [Hz].

Ce pic se rapproche de la troisième fréquence propre. Ces accéléromètres ont été inclus dans les analyses ultérieures.

8.4 Conclusion

Au vu de l'influence non-souhaitée des pendules utilisés pour charger la structure, la mise en chargement de la structure a été modifiée afin de ne pas exercer cette influence pour les tests ultérieurs.

Concernant le protocole de test, le choix se porte sur l'utilisation d'un marteau permettant d'appliquer une impulsion horizontale nette sur le nœud 3. Ce choix est appuyé par deux arguments.

Tout d'abord, cette méthode permet d'obtenir les pics les plus nets.

Ensuite, contrairement à l'électro-aimant, les résultats liés à cette méthode ne sont pas influencés par les pendules.

8.5 Données expérimentales post-traitées avec ARTeMIS

Ces résultats ont été obtenus grâce aux données des trois accéléromètres positionnés sur les nœuds supérieurs du « SIMPLEX – masses pendues ».

NB : Pour chaque situation, un tableau récapitulatif est disponible en dessous des graphiques. Celui-ci contient : les fréquences numériques simulées et les pics expérimentaux les plus proches des fréquences numériques et ce pour chaque protocole.

Situation 1 : 0 [kg] & 1.5 [kN]

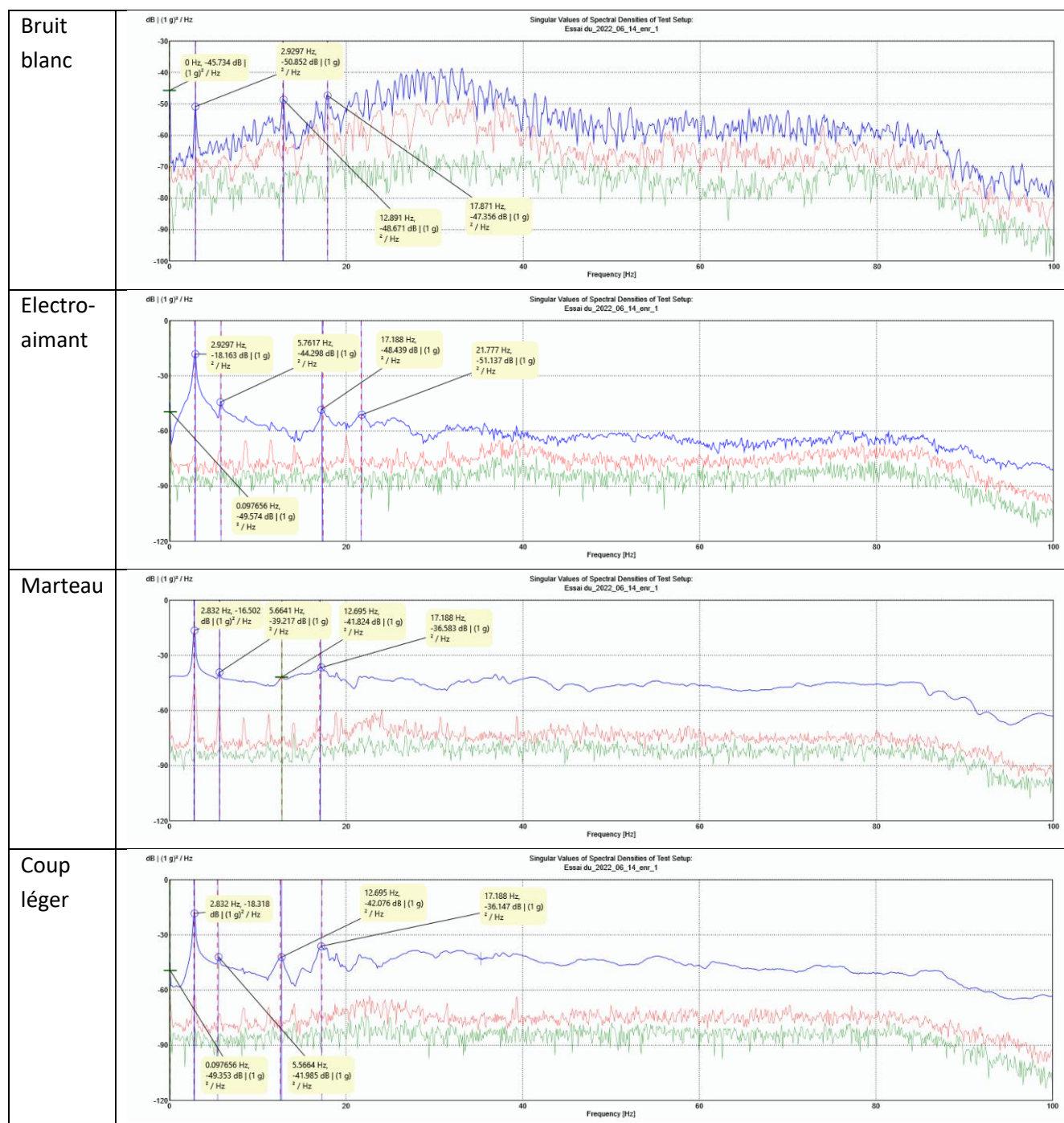


Tableau 42 - Résultats obtenus de la situation 1 pour les quatre protocoles – « SIMPLEX masses pendues »

Récapitulatif :

	F_7 [Hz]	F_8 [Hz]	F_9 [Hz]	F_{10} [Hz]	F_{11} [Hz]
Fréquences numériques du modèle pendule	2.43	38.27	47.13	64.13	105.56
Electro-aimant	2.92				
Marteau	2.83				
Coup léger	2.83				

Tableau 43 - Comparatif entre les pics et les fréquences propres simulées (situation 1)

Situation 2 : 80 [kg] & 1.5 [kN]

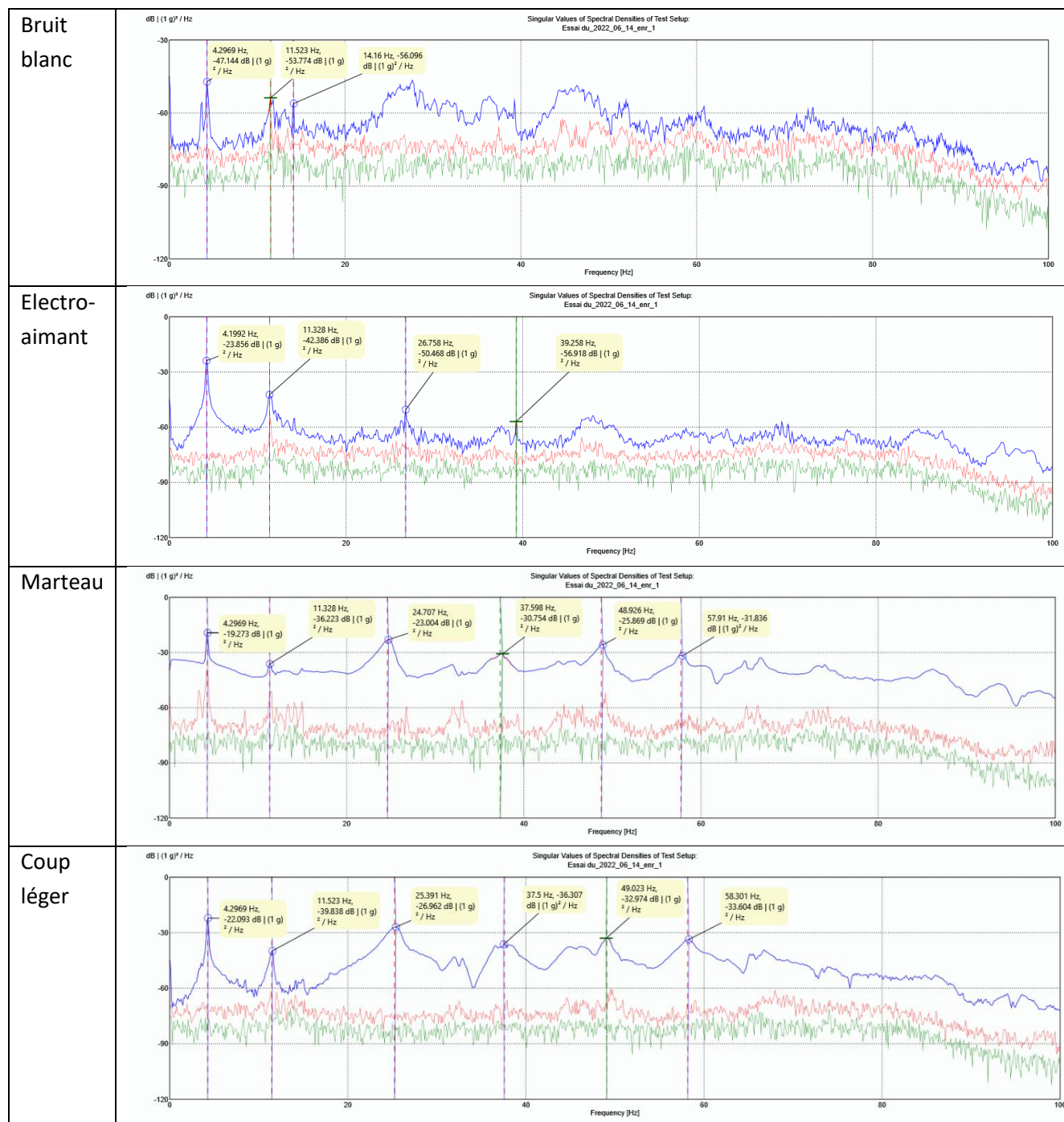


Tableau 44 - Résultats obtenus de la situation 2 pour les quatre protocoles – « SIMPLEX masses pendues »

Récapitulatif :

	F_7 [Hz]	F_8 [Hz]	F_9 [Hz]	F_{10} [Hz]	F_{11} [Hz]
Fréquences numériques du modèle pendule	4.05	16.17	16.51	44.88	60.52
Electro-aimant	4.19	11.32			
Marteau	4.29	11.32		48.93	57.91
Coup léger	4.29	11.52		49.02	58.30

Tableau 45 - Comparatif entre les pics et les fréquences propres simulées (situation 2)

Situation 3 : 0 [kg] & 5.5 [kN]

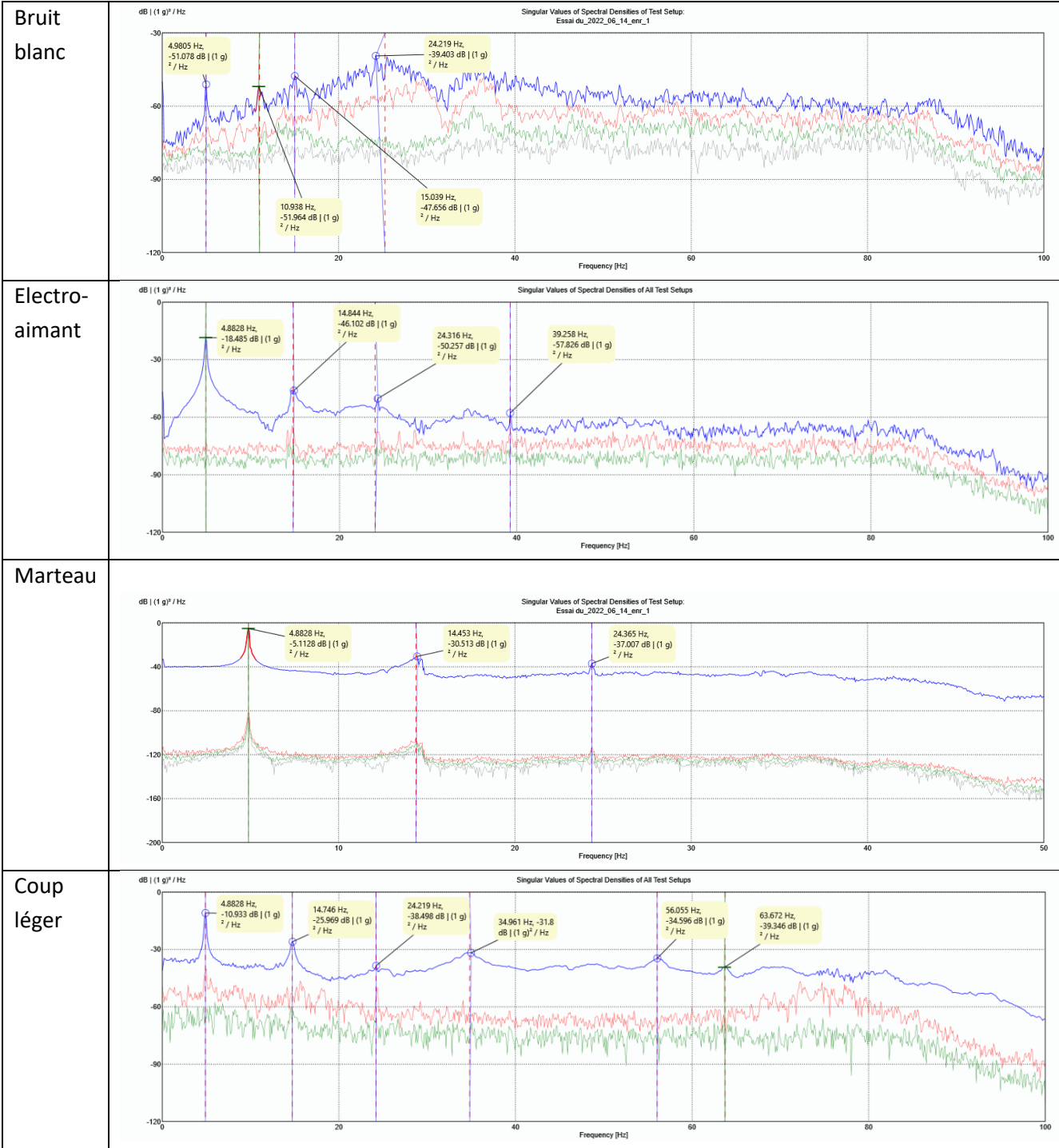


Tableau 46 - Résultats obtenus de la situation 3 pour les quatre protocoles– « SIMPLEX masses perdues »

Récapitulatif :

	F_7 [Hz]	F_8 [Hz]	F_9 [Hz]	F_{10} [Hz]	F_{11} [Hz]
Fréquences numériques du modèle pendule	4.34	38.39	47.22	64.26	105.71
Electro-aimant	4.88	39			
Marteau	4.88				
Coup léger	4.88	34.96		63.67	

Tableau 47 - Comparatif entre les pics et les fréquences propres simulées (situation 3)

Situation 4 : 80 [kg] & 5.5 [kN]

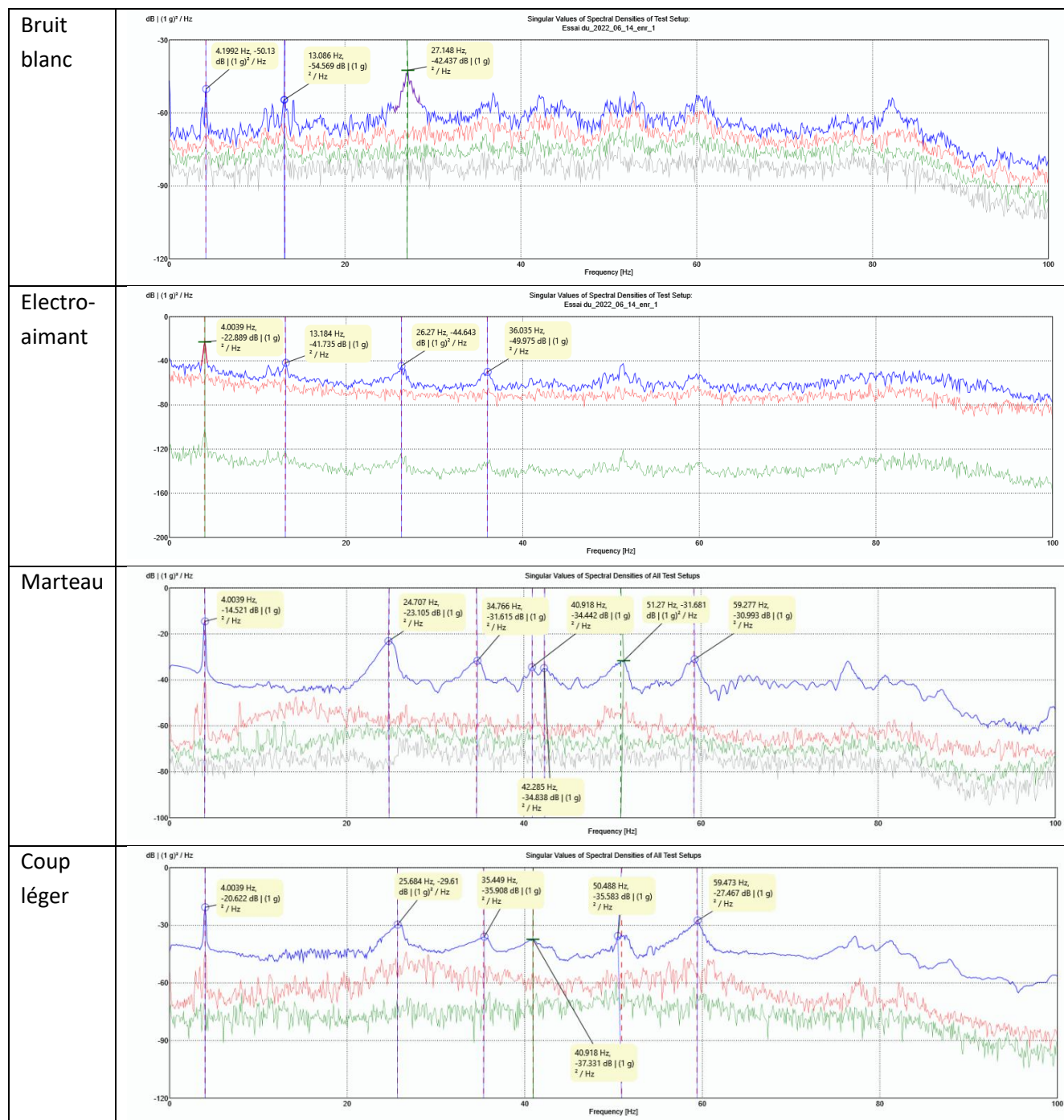


Tableau 48 - Résultats obtenus de la situation 4 pour les quatre protocoles- « SIMPLEX masses pendues »

Récapitulatif :

	F_7 [Hz]	F_8 [Hz]	F_9 [Hz]	F_{10} [Hz]	F_{11} [Hz]
Fréquences numériques du modèle pendule	3.80	16.40	16.75	44.84	60.45
Electro-aimant	4			42.28	
Marteau	4			40.9	59.27
Coup léger	4			40.9	59.47

Tableau 49 - Comparatif entre les pics et les fréquences propres simulées (situation 4)

9 Annexe 9 – Détermination du chargement maximal

Cette section a pour but de calculer la résistance de l'ensemble tige filetée/plateau qui permet de déposer le chargement externe sur les nœuds supérieurs.

Le dispositif étudié est le suivant :

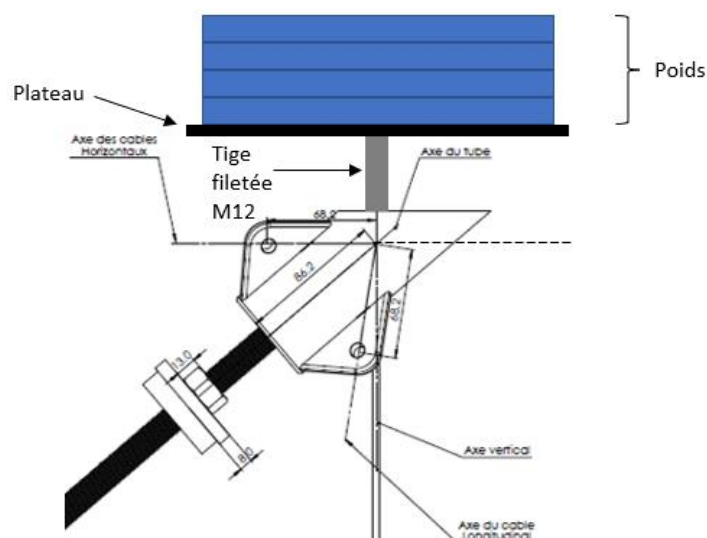


Figure 94 - Dispositif de chargement rigide

9.1 Données

- Tige filetée M12
 - Diamètre de la section pleine : 10 [mm]
 - acier 8.8
 - $\sigma_{yield} = 640 [MPa]$
 - $\sigma_{ultimate} = 800 [MPa]$
- Diamètre des poids : 200 [mm]
- Hauteur d'un poids : 30 [mm]

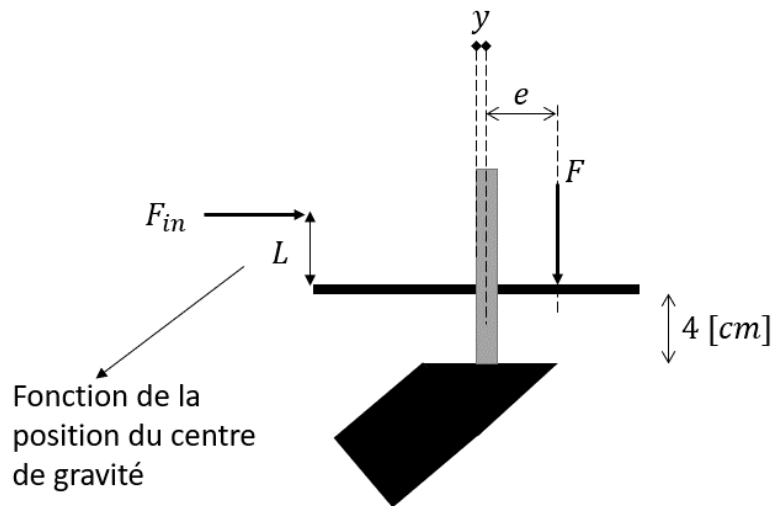


Figure 95 - Schéma du problème incluant les variables

9.2 Hypothèses

- L'excentricité maximale vaut 1/5 du diamètre des poids soit 40 [mm]. Cette hypothèse est extrême mais du côté de la sécurité.
- La force horizontale due à l'inertie F_{in} est égale à la force verticale F due au poids. En d'autres termes, cela correspond à une accélération horizontale de 1g. Cela peut être disproportionné mais cette hypothèse se situe du côté de la sécurité.

Lors des premiers tests effectués sur le « SIMPLEX pendule », les accélérations horizontales maximales subies étaient de l'ordre de 0.25 [g].

Cette force d'inertie s'applique au centre de gravité des poids.

9.3 Méthode de résolution

Afin de vérifier la résistance de la tige filetée, le critère de Von Mises est utilisé :

$$\sigma_{yield} \geq \sqrt{\sigma^2 + 3 \cdot \tau^2}$$

9.4 Résolution

En considérant un chargement de 40 [kg], la variable L vaut 6 [cm].

- Effort de compression :

$$\sigma_N = \frac{F}{A}$$

Ou,

- F est la force du au chargement externe [N]
- A est l'aire de la section pleine de la tige filetée [mm^2]

- Moment lié à l'excentricité du chargement :

$$\sigma_{M,v} = \frac{F \cdot e}{I} \cdot y$$

Ou,

- e est l'excentricité de 50 [mm]
- y est le rayon de la section pleine de la tige filetée : 5 [mm]
- I est l'inertie de la tige filetée

- Moment lié à la force d'inertie horizontale des masses :

$$\sigma_{M,h} = \frac{F_{in} \cdot (\alpha + 40)}{I} \cdot y$$

Ou,

- F_{in} est la force d'inertie
- L est la position du centre de gravité. Elle vaut 60 [mm] si un chargement de 40 [kg] est placé sur le dispositif.

- Effort tranchant :

$$\tau = \frac{4}{3} \cdot \frac{V}{A} = \frac{4}{3} \cdot \frac{F_{in}}{A}$$

En remplaçant dans l'équation de Von Misses :

OU

$\sigma_y \geq \sqrt{\left(\frac{F}{A} + \frac{F \cdot e}{I} \cdot y + \frac{F_{in} \cdot 100}{I} \cdot y\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{F_{in}}{A}\right)^2}$	$\sigma_y \geq \sqrt{\left(\frac{F}{A} - \frac{F \cdot e}{I} \cdot y - \frac{F_{in} \cdot 100}{I} \cdot y\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{F_{in}}{A}\right)^2}$
$\sigma_y \geq F \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{A} + \frac{e}{I} \cdot y + \frac{100}{I} \cdot y\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{A}\right)^2}$	$\sigma_y \geq F \cdot \sqrt{\left(\frac{1}{A} - \frac{e}{I} \cdot y - \frac{100}{I} \cdot y\right)^2 + 3 \cdot \left(\frac{4}{3} \cdot \frac{1}{A}\right)^2}$

$$A = 80.21 [mm^2]$$

$$I = \frac{\pi D^4}{64} = 512.02 [mm^2]$$

$$e = 40 [mm]$$

$$y = 5 [mm]$$

En remplaçant par les valeurs numériques,

$$\sigma_y \geq F \cdot 1.38$$

$$\sigma_y \geq F \cdot 1.355$$

$$\sigma_y \geq 541.51 [MPa]$$

$$\sigma_y \geq 531.7 [MPa]$$

CONCLUSION : La structure peut être chargée au maximum à 40 [kg] par nœuds supérieur pour les hypothèses définies ci-dessus.

10 Annexe 10 – Résultats expérimentaux du « SIMPLEX – masses posées »

Cette annexe contient tous les résultats expérimentaux obtenus sur le « SIMPLEX – masses posées » à la suite de sa mise en excitation à l'aide du marteau sur le nœud 3.

Tout d'abord, deux tableaux de synthèse présentent les résultats obtenus pour la première et la seconde fréquence propre.

Ensuite, la dernière section de cette annexe contient tous les graphes des valeurs singulières des densités spectrales de chaque situation de test. Ces graphes sont obtenus grâce au logiciel ARTeMIS.

10.1 Synthèse des résultats de la première fréquence propre

		Chargement externe				
		0 [N] 0 [kg]	10 [N] 98.1 [kg]	20 [N] 196.2 [kg]	30 [N] 294.3 [kg]	40 [N] 392.4 [kg]
Niveau de précontrainte [kN]	1.5	2.54	1.85	1.75	1.66	1.56
	2.5	3.03				
	3.5	3.52	2.05	1.76	1.56	1.47
	4.5	3.91				
	5.5	4.3	2.44	1.86	1.66	1.56

Tableau 50 – Synthèse des résultats de la première fréquence propre [Hz] obtenus sur le « SIMPLEX – masses posées »

10.2 Synthèse des résultats de la seconde fréquence propre

		Chargement externe				
		0 [N] 0 [kg]	10 [N] 98.1 [kg]	20 [N] 196.2 [kg]	30 [N] 294.3 [kg]	40 [N] 392.4 [kg]
Niveau de précontrainte [kN]	1.5			13.47	13.09	11.62
	2.5	34.28				
	3.5	34.86		12.31	11.52	10.94
	4.5					
	5.5	34.66		10.45	10.25	10.45

Tableau 51 - Synthèse des résultats de la seconde fréquence propre [Hz] obtenus sur le « SIMPLEX – masses posées »

Certaines cases sont vides car aucune valeur n'a pu être ressortie des résultats expérimentaux.

10.3 Graphiques des valeurs singulières des densités spectrales

0 [kg] & 1.5 [kN] :

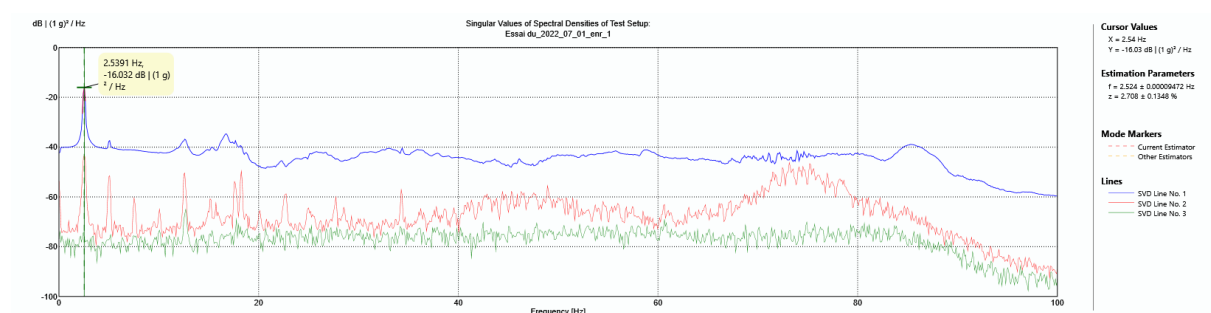


Figure 96 - Résultat sur le « SIMPLEX – masses posées » de la situation « 0 [kg] & 1.5 [kN] »

10 [kg] & 1.5 [kN] :

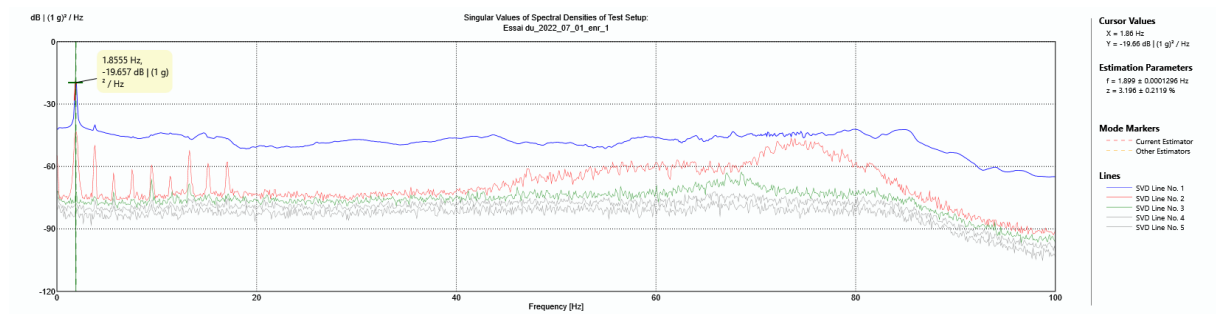


Figure 97 - Résultat sur le « SIMPLEX – masses posées » de la situation « 10 [kg] & 1.5 [kN] »

20 [kg] & 1.5 [kN] :

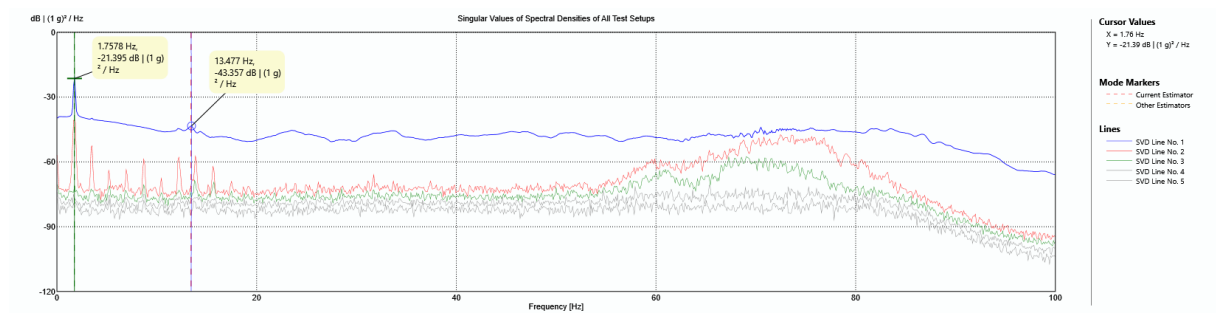


Figure 98 - Résultat sur le « SIMPLEX – masses posées » de la situation « 20 [kg] & 1.5 [kN] »

30 [kg] & 1.5 [kN] :

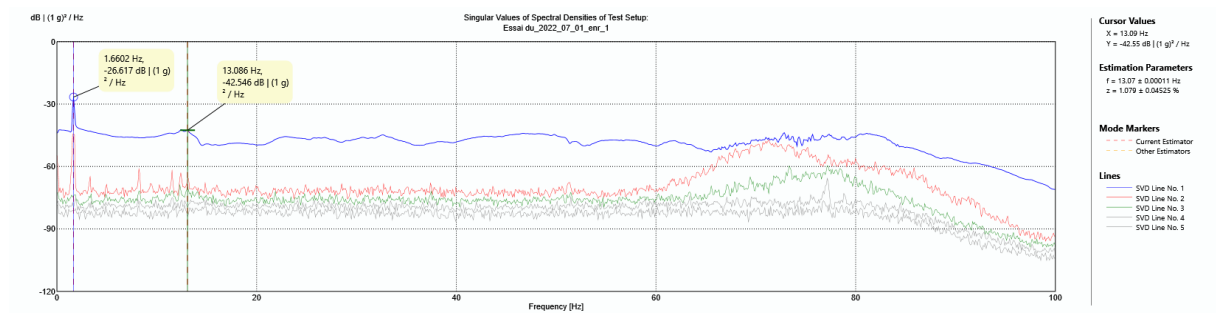


Figure 99 - Résultat sur le « SIMPLEX – masses posées » de la situation « 30 [kg] & 1.5 [kN] »

40 [kg] & 1.5 [kN] :

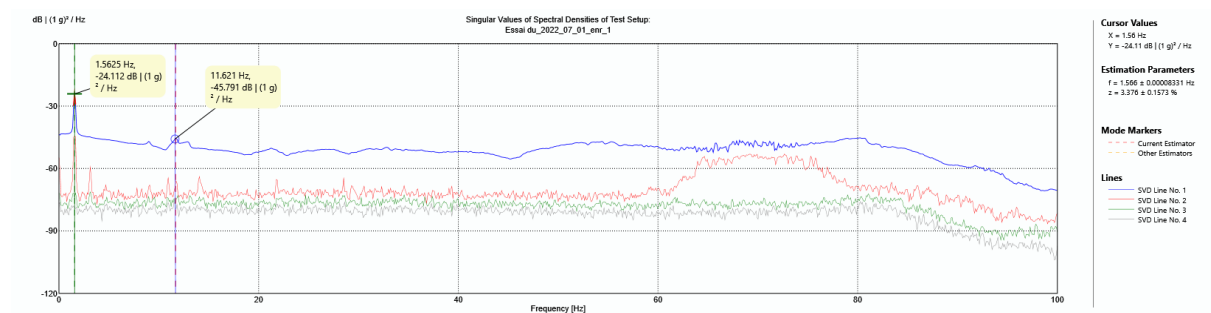


Figure 100 - Résultat sur le « SIMPLEX – masses posées » de la situation « 40 [kg] & 1.5 [kN] »

0 [kg] & 2.5 [kN] :

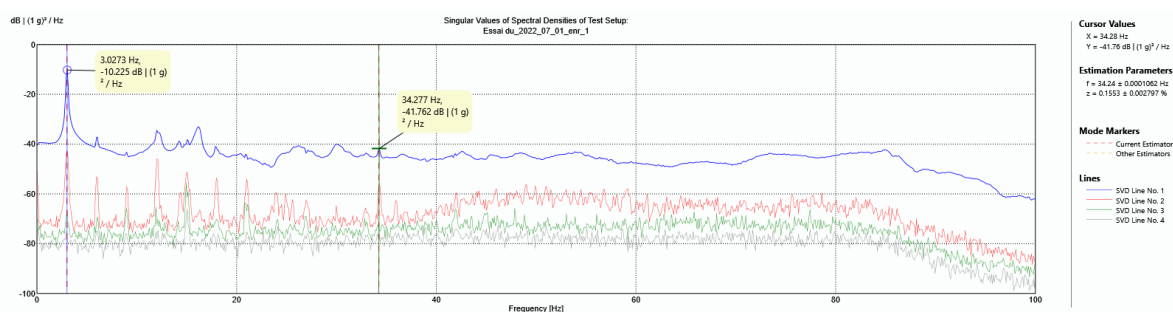


Figure 101 - Résultat sur le « SIMPLEX – masses posées » de la situation « 0 [kg] & 2.5 [kN] »

0 [kg] & 3.5 [kN] :

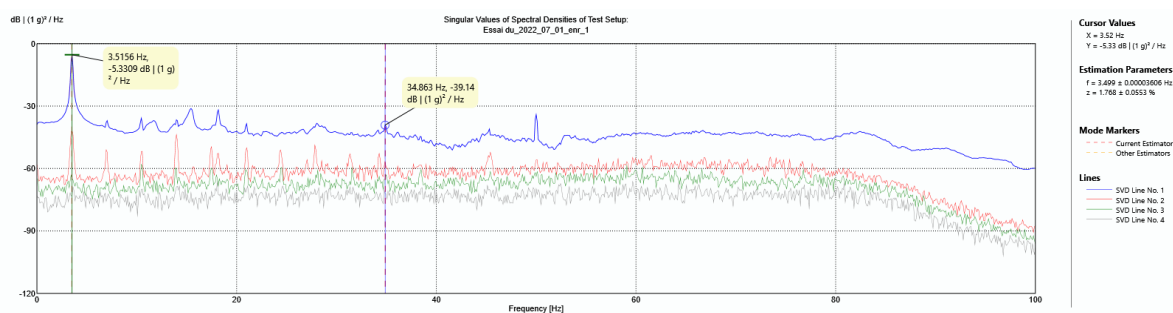


Figure 102 - Résultat sur le « SIMPLEX – masses posées » de la situation « 0 [kg] & 3.5 [kN] »

10 [kg] & 3.5 [kN] :

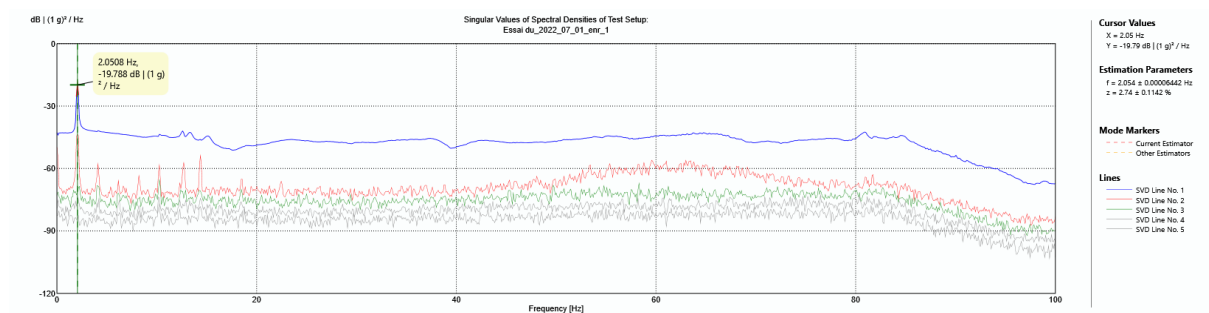


Figure 103 - Résultat sur le « SIMPLEX – masses posées » de la situation « 10 [kg] & 3.5 [kN] »

20 [kg] & 3.5 [kN] :

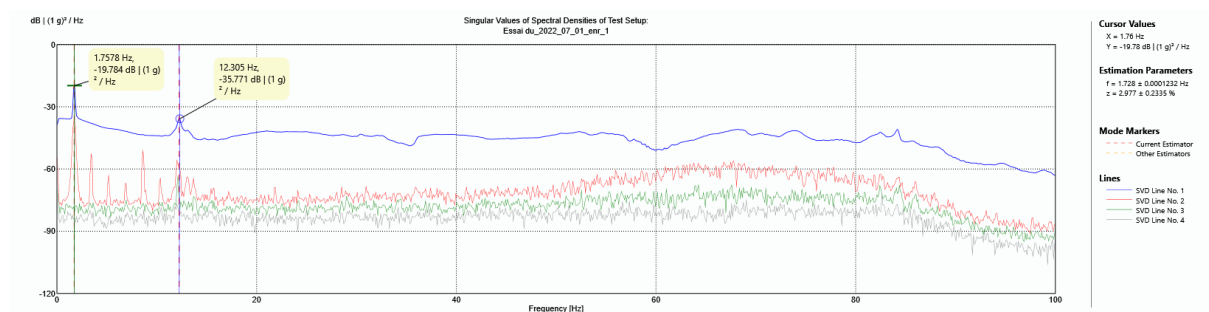


Figure 104 - Résultat sur le « SIMPLEX – masses posées » de la situation « 20 [kg] & 3.5 [kN] »

30 [kg] & 3.5 [kN] :

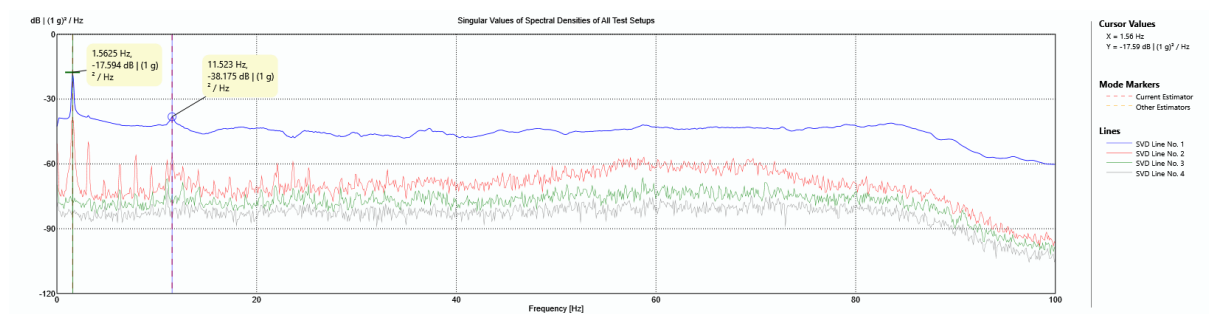


Figure 105 - Résultat sur le « SIMPLEX – masses posées » de la situation « 30 [kg] & 3.5 [kN] »

40 [kg] & 3.5 [kN] :

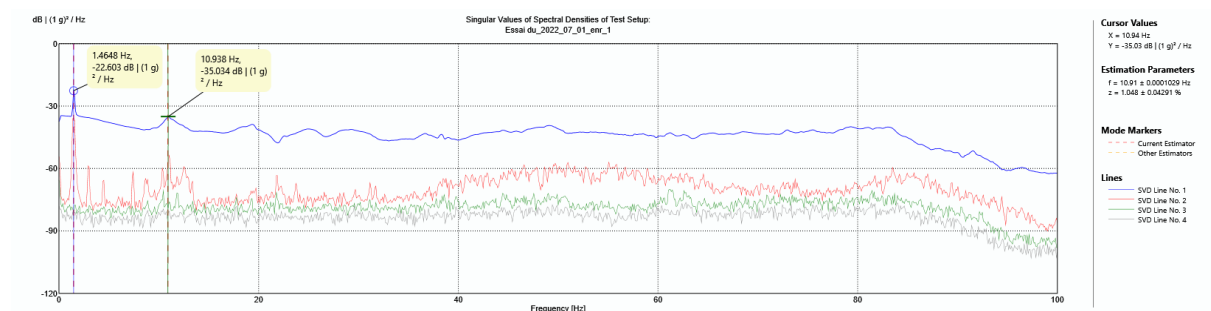


Figure 106 - Résultat sur le « SIMPLEX – masses posées » de la situation « 40 [kg] & 3.5 [kN] »

0 [kg] & 4.5 [kN] :

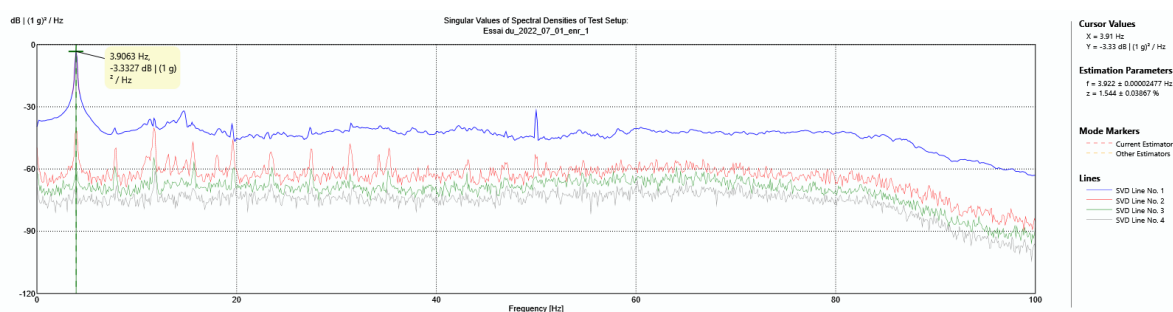


Figure 107 - Résultat sur le « SIMPLEX – masses posées » de la situation « 0 [kg] & 4.5 [kN] »

0 [kg] & 5.5 [kN] :

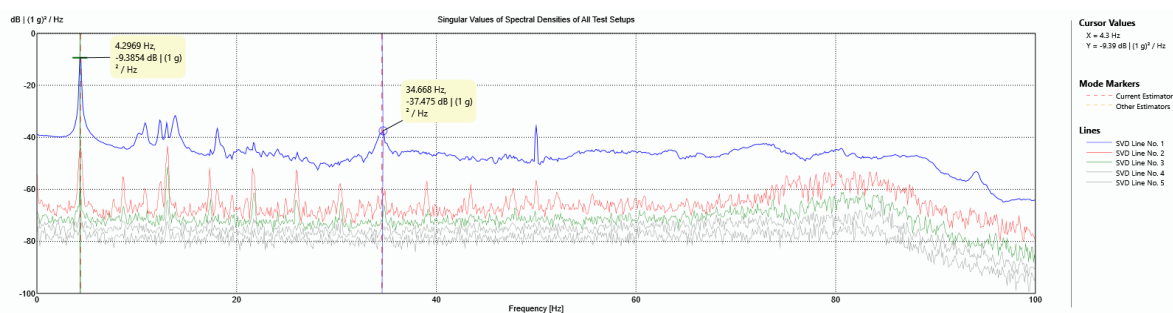


Figure 108 - Résultat sur le « SIMPLEX – masses posées » de la situation « 0 [kg] & 5.5 [kN] »

10 [kg] & 5.5 [kN] :

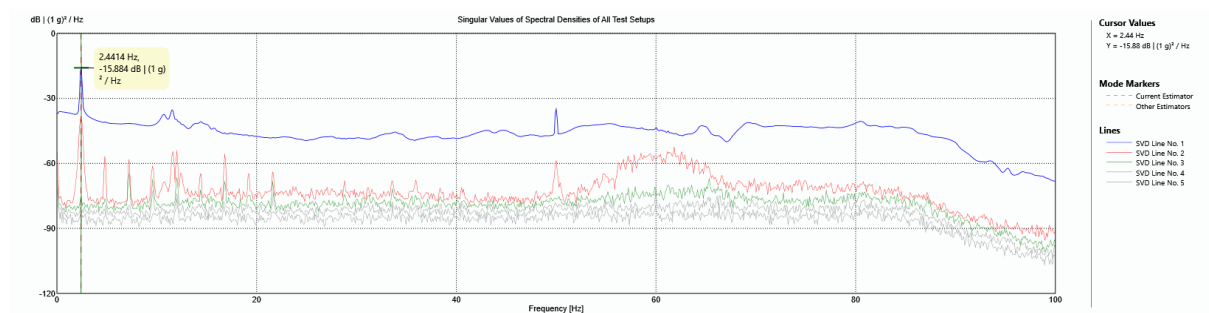


Figure 109 - Résultat sur le « SIMPLEX – masses posées » de la situation « 10 [kg] & 5.5 [kN] »

20 [kg] & 5.5 [kN] :

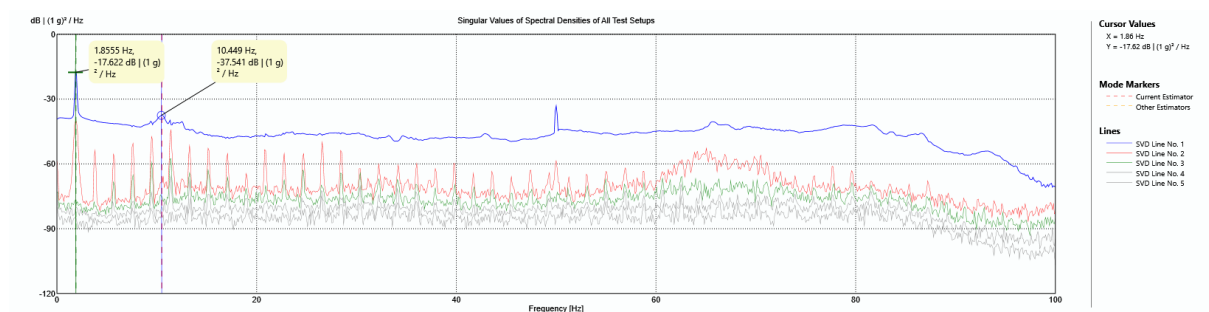


Figure 110 - Résultat sur le « SIMPLEX – masses posées » de la situation « 20 [kg] & 5.5 [kN] »

30 [kg] & 5.5 [kN] :



Figure 111 - Résultat sur le « SIMPLEX – masses posées » de la situation « 30 [kg] & 5.5 [kN] »

40 [kg] & 5.5 [kN] :

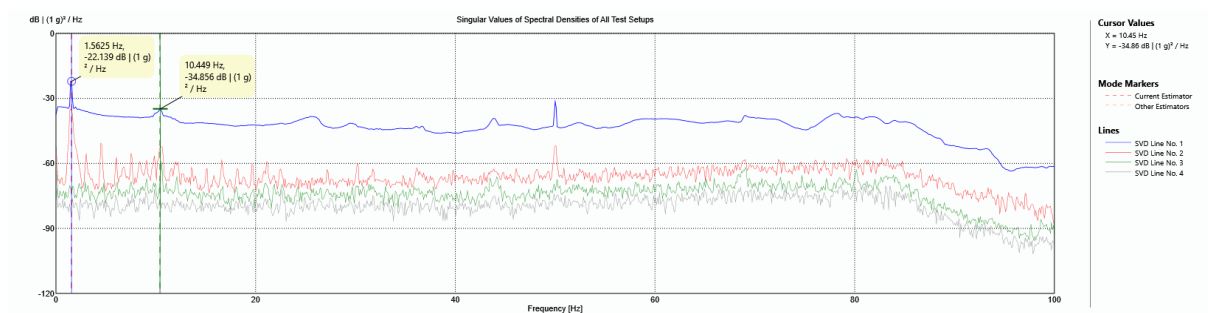


Figure 112 - Résultat sur le « SIMPLEX – masses posées » de la situation « 40 [kg] & 5.5 [kN] »

11 Annexe 11 – Rapport numérique en position déformée entre la fréquence propre liée uniquement à la rigidité matérielle et la fréquence propre liée à la rigidité totale sur le « SIMPLEX – masses posées »

NB : Selon la matrice de masse « *lumped* ».

Fréquence 3 :

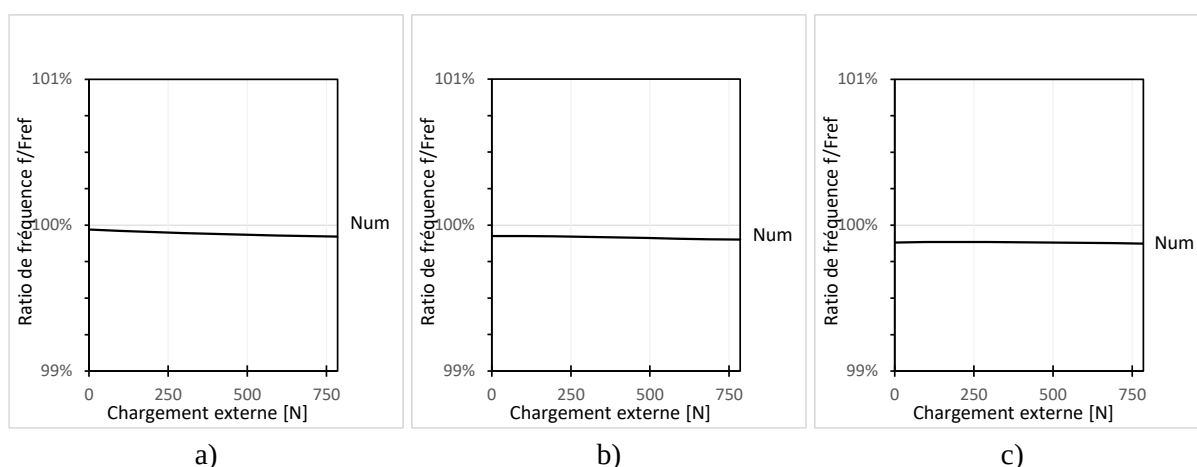


Figure 113 - Evolution numérique en position déformée du rapport entre la fréquence liée à la rigidité matérielle et la fréquence propre totale (3^{ème} fréq.) du « SIMPLEX – masses posées » pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Fréquence 4 :

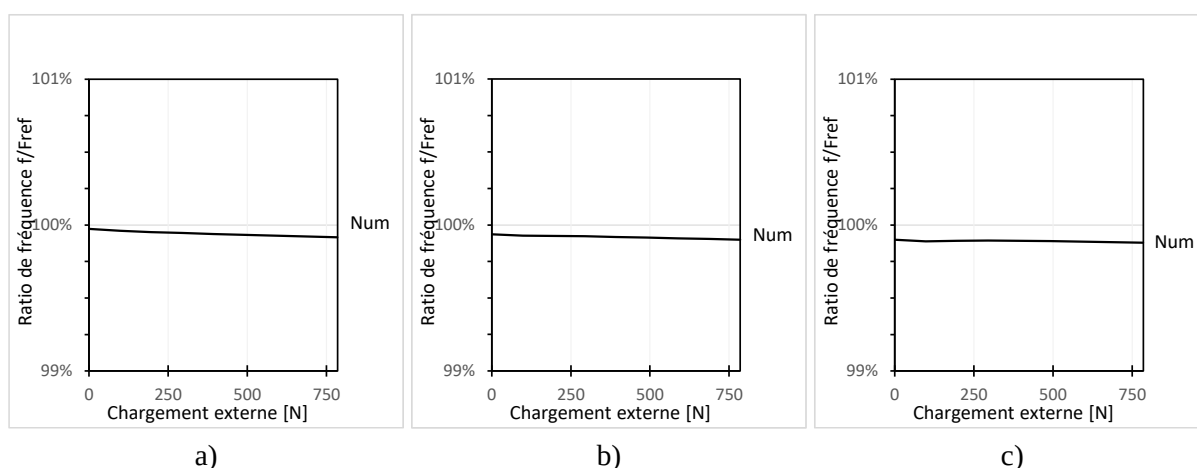


Figure 114 - Evolution numérique en position déformée du rapport entre la fréquence liée à la rigidité matérielle et la fréquence propre totale (4^{ème} fréq.) du « SIMPLEX – masses posées » pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Fréquence 5 :

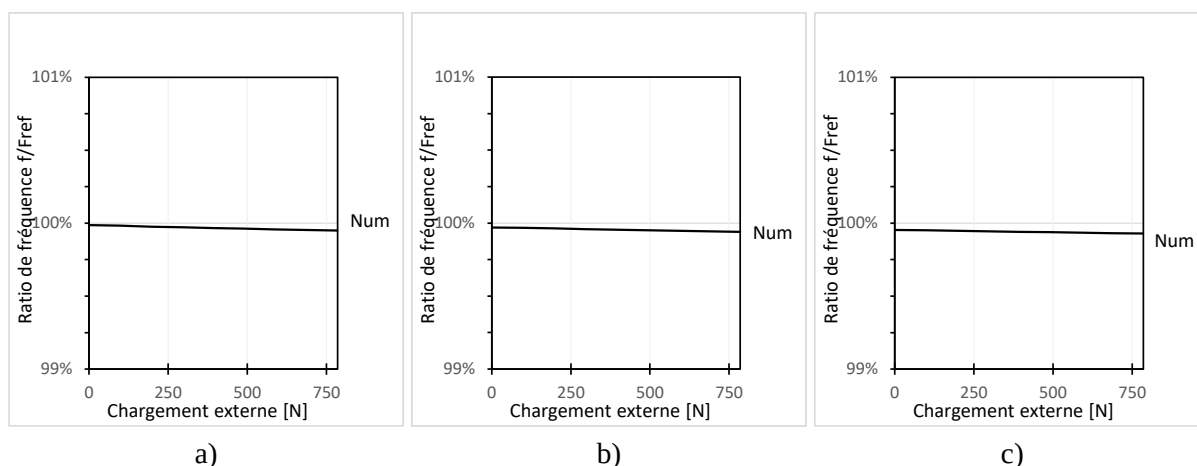


Figure 115 - Evolution numérique en position déformée du rapport entre la fréquence liée à la rigidité matérielle et la fréquence propre totale (5^{ème} fréq.) du « SIMPLEX – masses posées » pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Fréquence 6 :

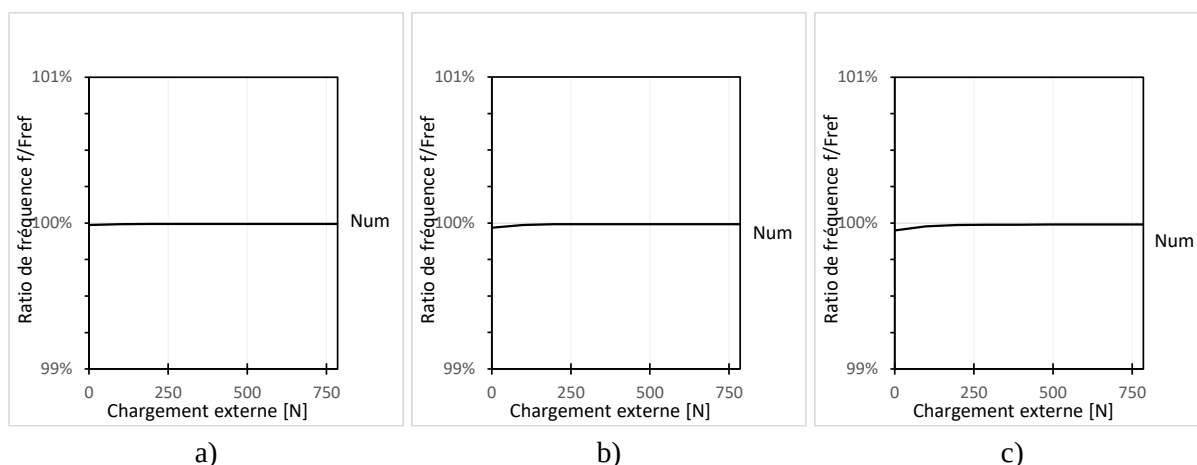


Figure 116 - Evolution numérique en position déformée du rapport entre la fréquence liée à la rigidité matérielle et la fréquence propre totale (6^{ème} fréq.) du « SIMPLEX – masses posées » pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Fréquence 7 :

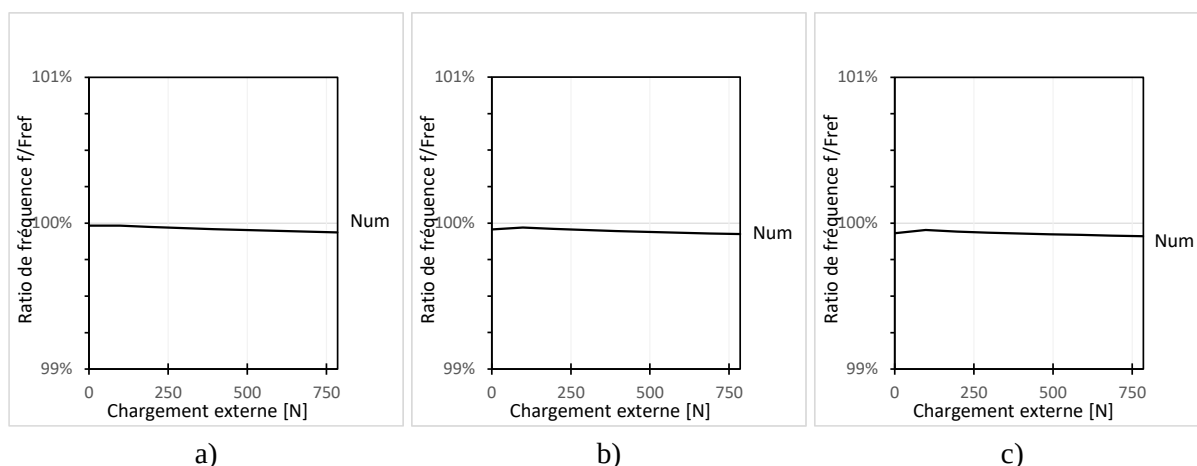


Figure 117 - Evolution numérique en position déformée du rapport entre la fréquence liée à la rigidité matérielle et la fréquence propre totale (7^{ème} fréq.) du « SIMPLEX – masses posées » pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Fréquence 8 :

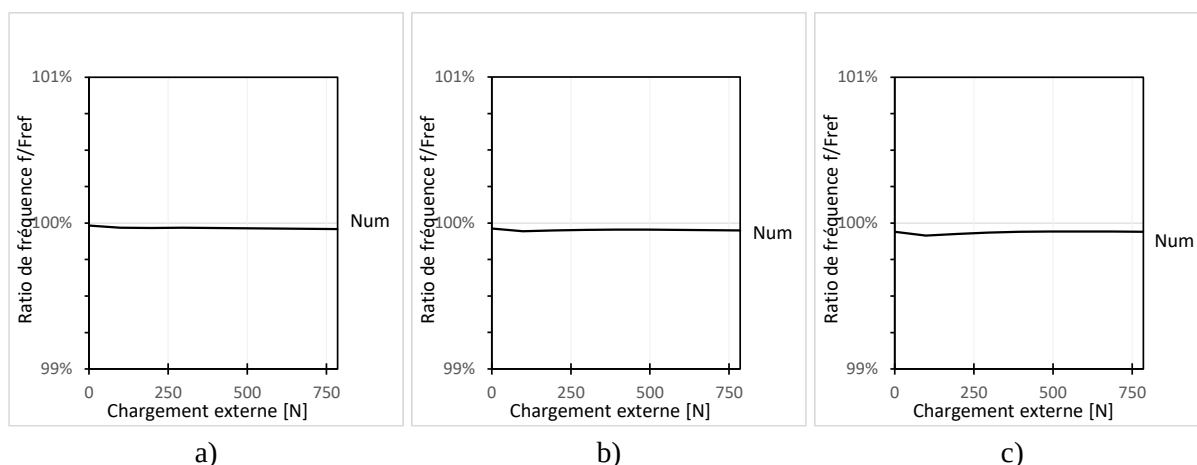


Figure 118 - Evolution numérique en position déformée du rapport entre la fréquence liée à la rigidité matérielle et la fréquence propre totale (8^{ème} fréq.) du « SIMPLEX – masses posées » pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Fréquence 9 :

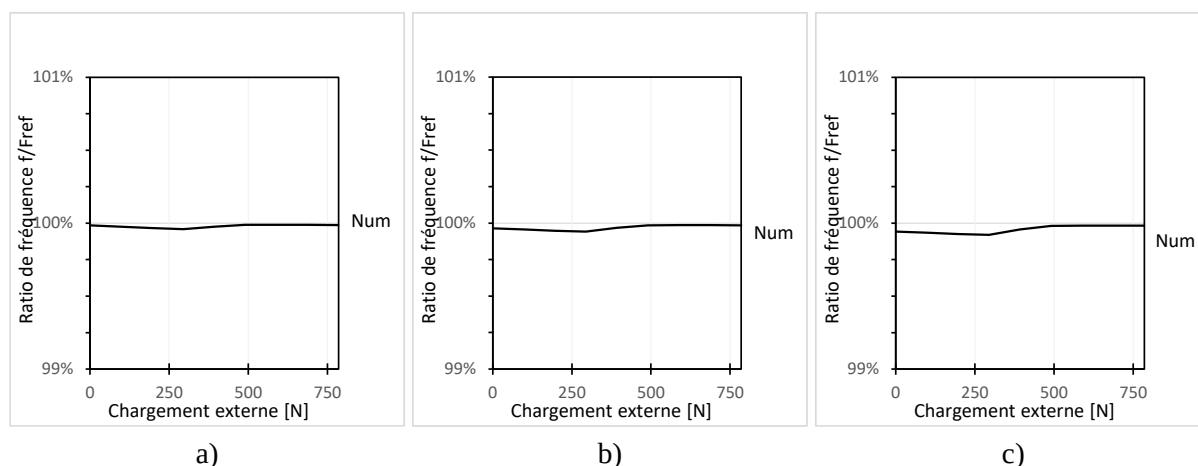


Figure 119 - Evolution numérique en position déformée du rapport entre la fréquence liée à la rigidité matérielle et la fréquence propre totale (9^{ème} fréq.) du « SIMPLEX – masses posées » pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Fréquence 10 :

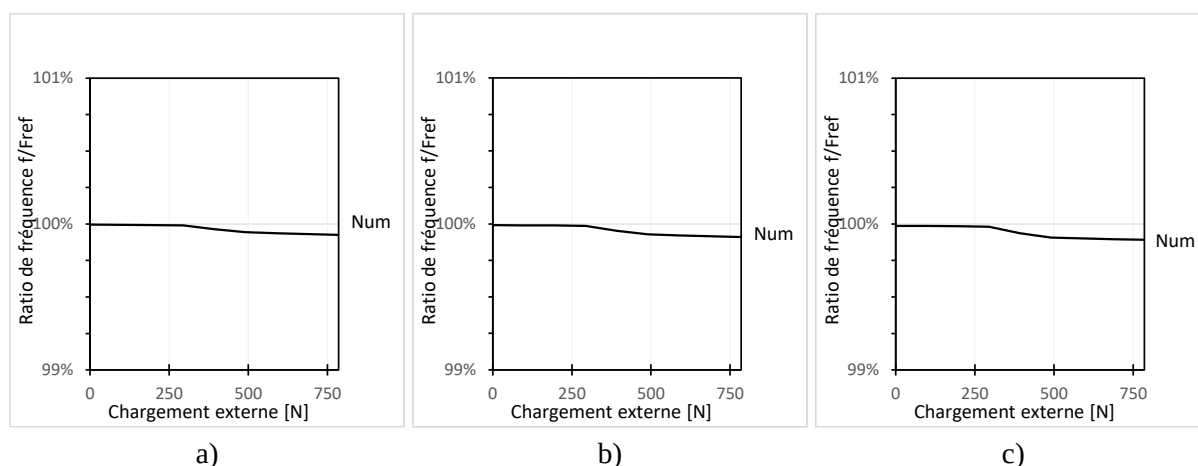


Figure 120 - Evolution numérique en position déformée du rapport entre la fréquence liée à la rigidité matérielle et la fréquence propre totale (10^{ème} fréq.) du « SIMPLEX – masses posées » pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Fréquence 11 :

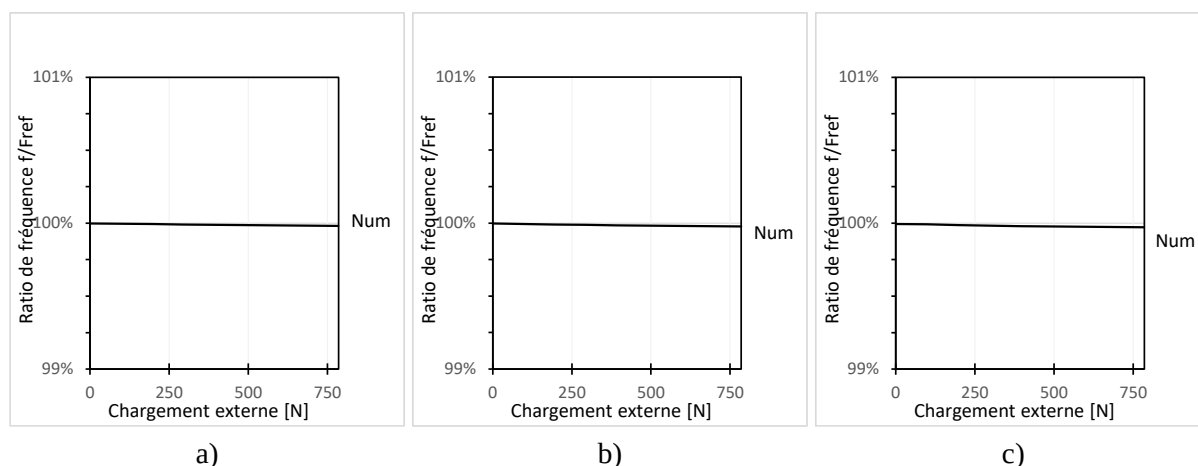


Figure 121 - Evolution numérique en position déformée du rapport entre la fréquence liée à la rigidité matérielle et la fréquence propre totale (11^{ème} fréq.) du « SIMPLEX – masses posées » pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Fréquence 12 :

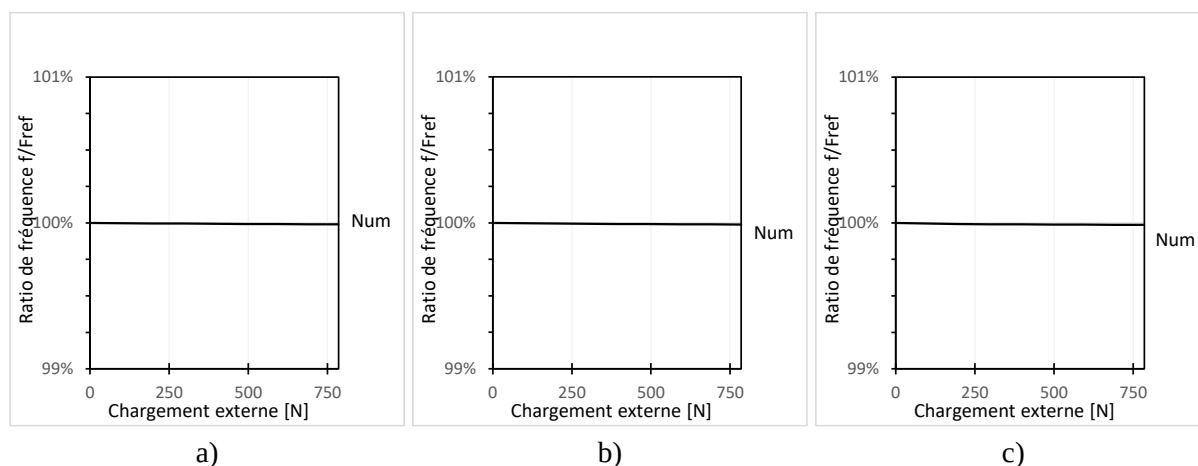


Figure 122 - Evolution numérique en position déformée du rapport entre la fréquence liée à la rigidité matérielle et la fréquence propre totale (12^{ème} fréq.) du « SIMPLEX – masses posées » pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

12 Annexe 12 – Evolution numérique des fréquences propres du « SIMPLEX – masses posées »

NB : Selon la matrice de masse « *lumped* ».

Fréquence 3 :

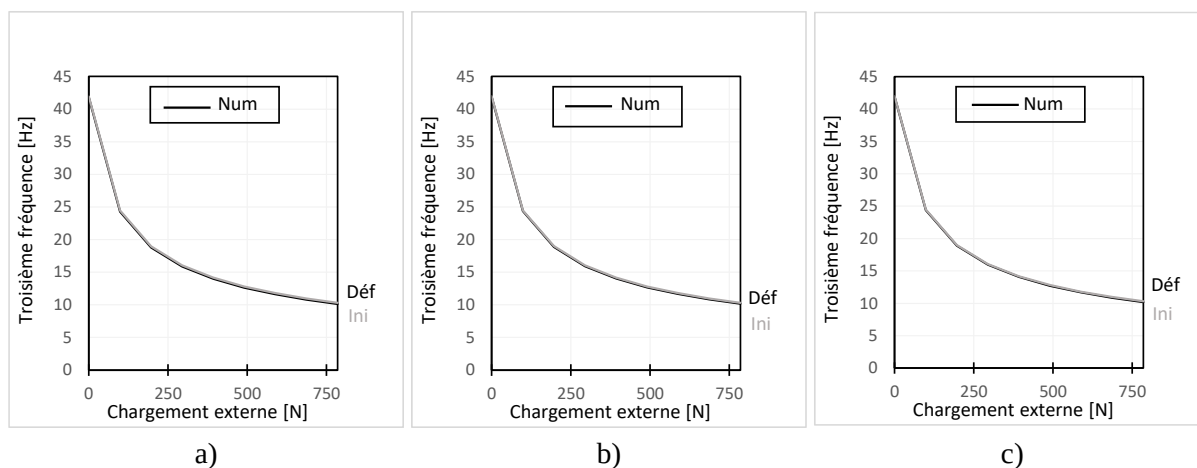


Figure 123 - Evolution numérique (*lumped*) de la troisième fréquence en position initiale et déformée pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Fréquence 4 :

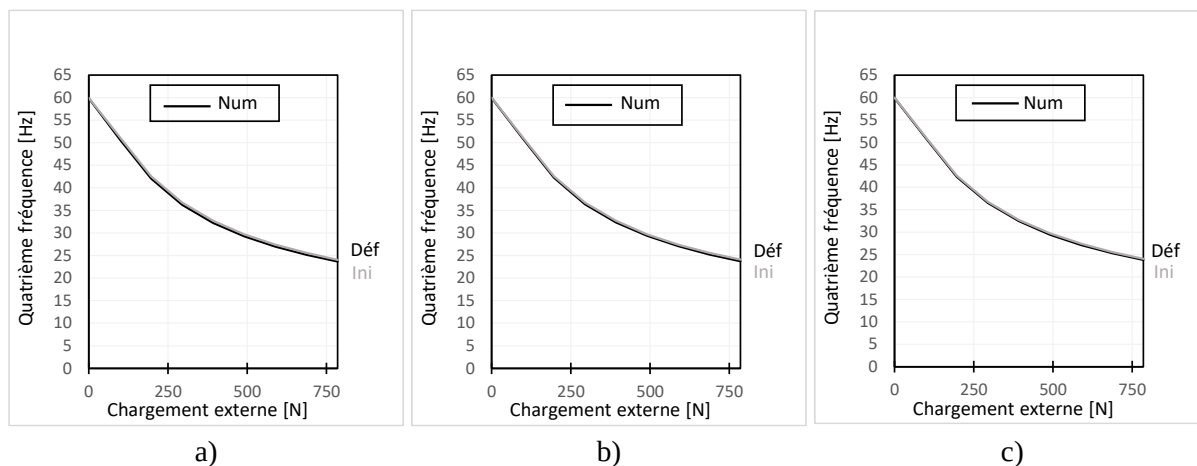


Figure 124 - Evolution numérique (*lumped*) de la quatrième fréquence en position initiale et déformée pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Fréquence 5 :

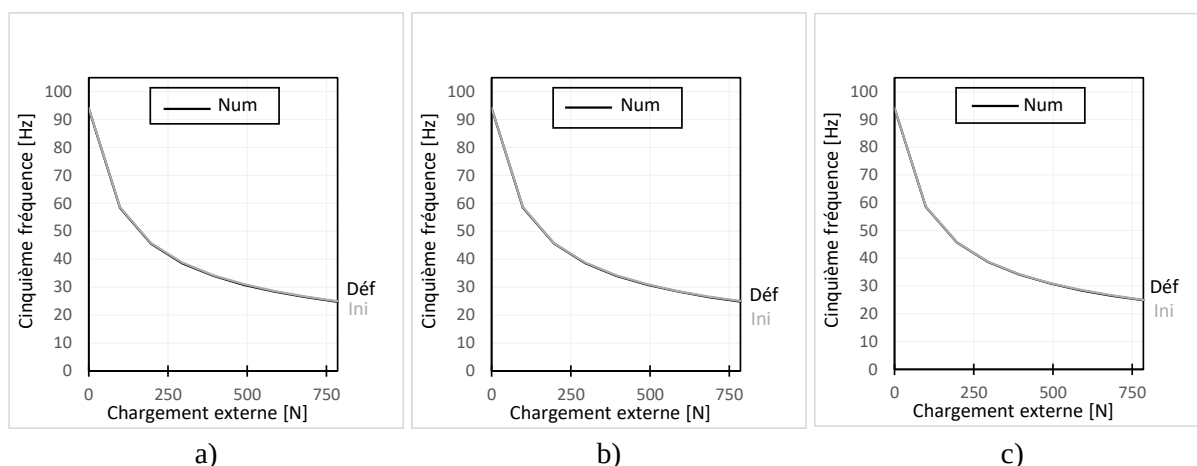


Figure 125 - Evolution numérique (lumped) de la cinquième fréquence en position initiale et déformée pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Fréquence 6 :

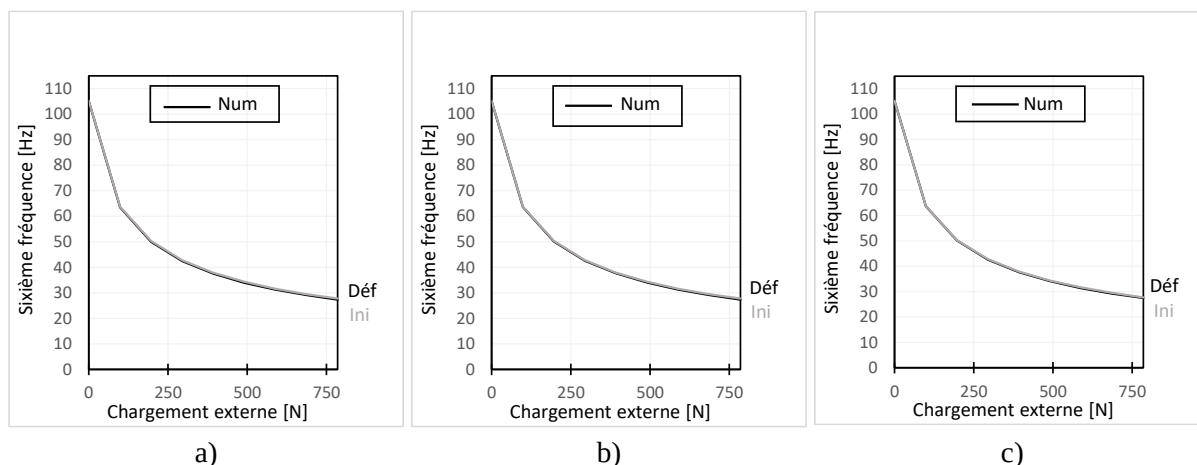


Figure 126 – Evolution numérique (lumped) de la sixième fréquence en position initiale et déformée pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Fréquence 7 :

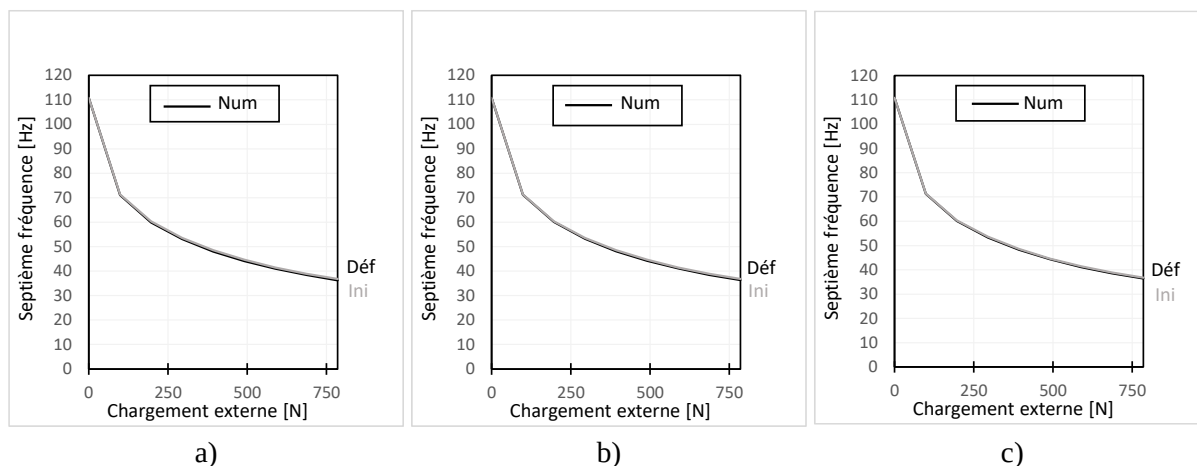


Figure 127 - Evolution numérique (lumped) de la septième fréquence en position initiale et déformée pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Fréquence 8 :

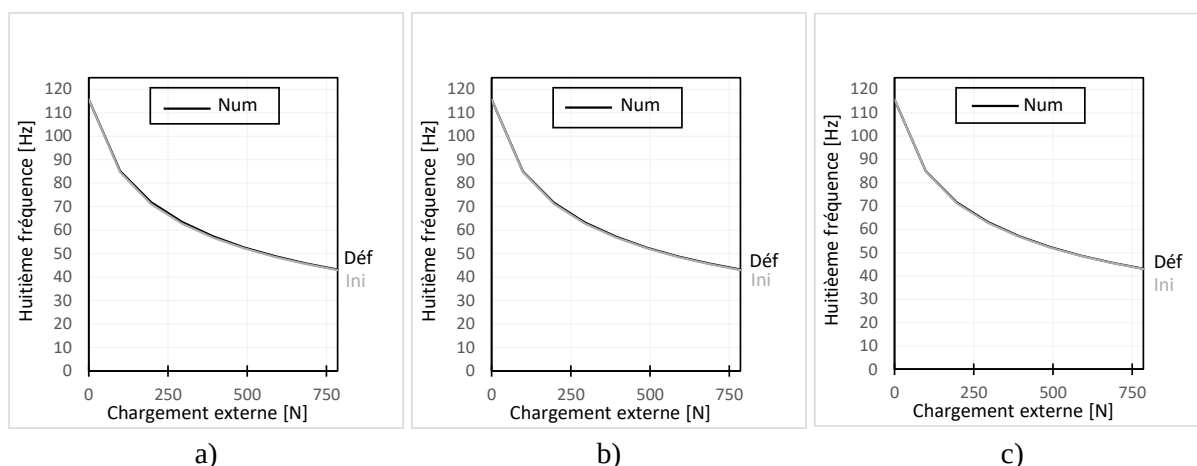


Figure 128 - Evolution numérique (lumped) de la huitième fréquence en position initiale et déformée pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Fréquence 9 :

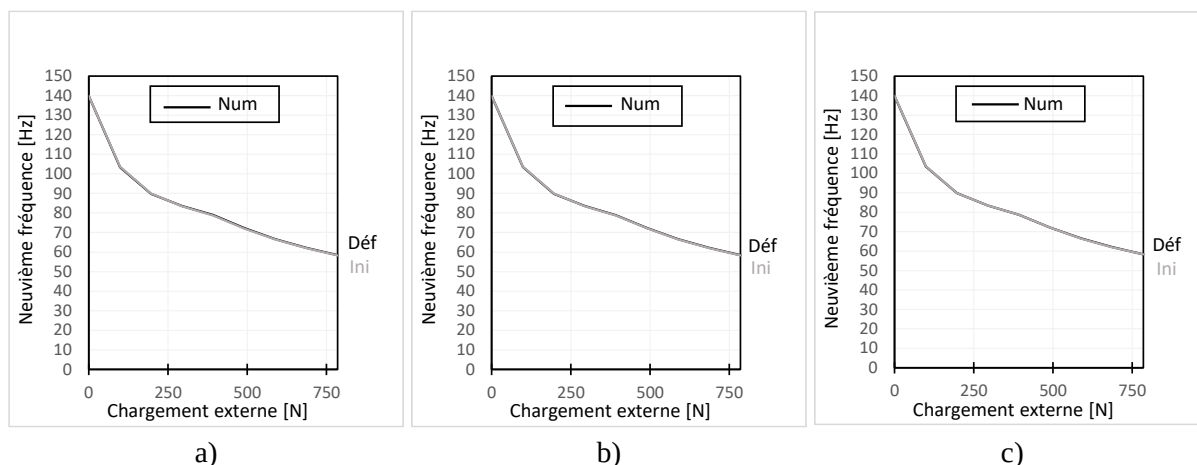


Figure 129 - Evolution numérique (lumped) de la neuvième fréquence en position initiale et déformée pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Fréquence 10 :

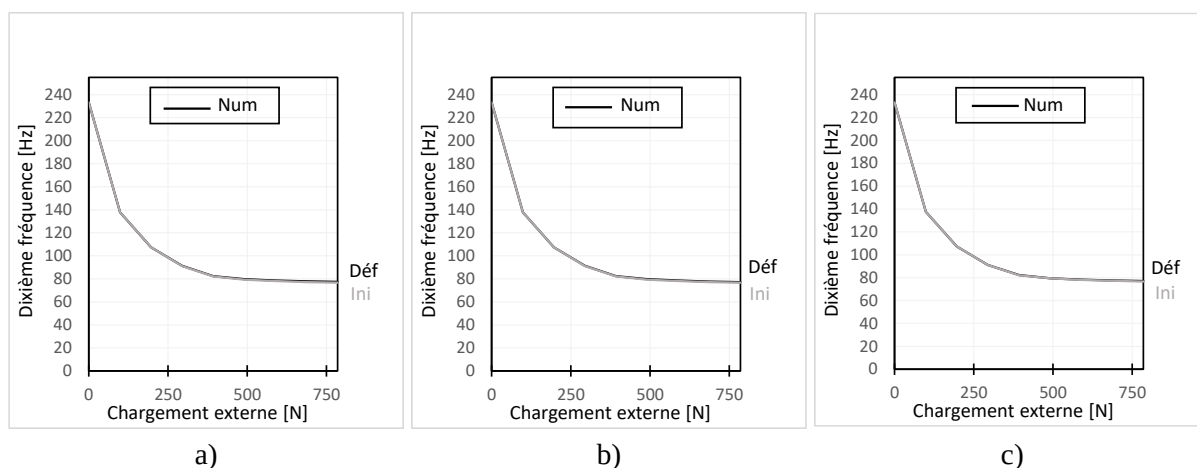


Figure 130 - Evolution numérique (lumped) de la dixième fréquence en position initiale et déformée pour trois niveaux de précontrainte : a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Fréquence 11 :

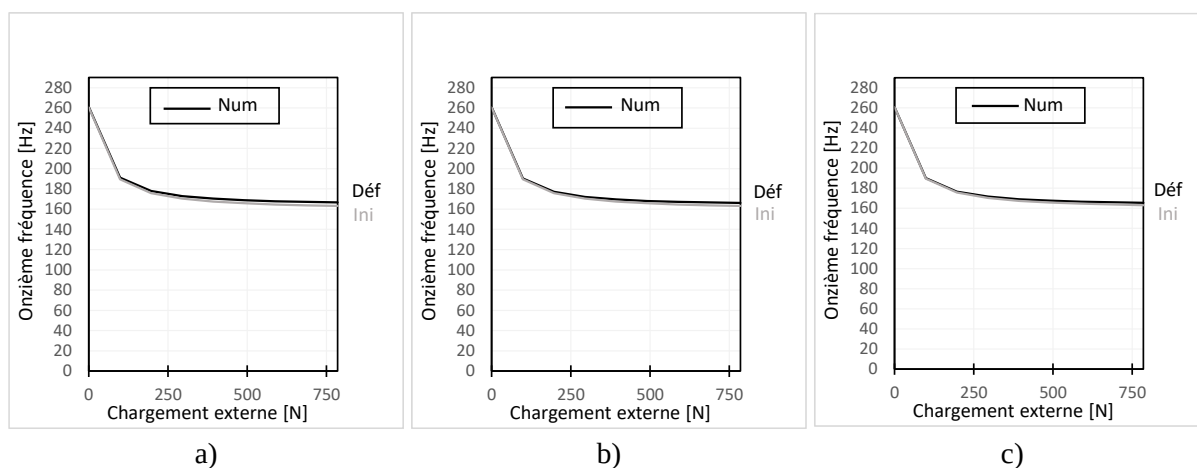


Figure 131 - Evolution numérique (lumped) de la onzième fréquence en position initiale et déformée pour trois niveaux de précontrainte :a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

Fréquence 12 :

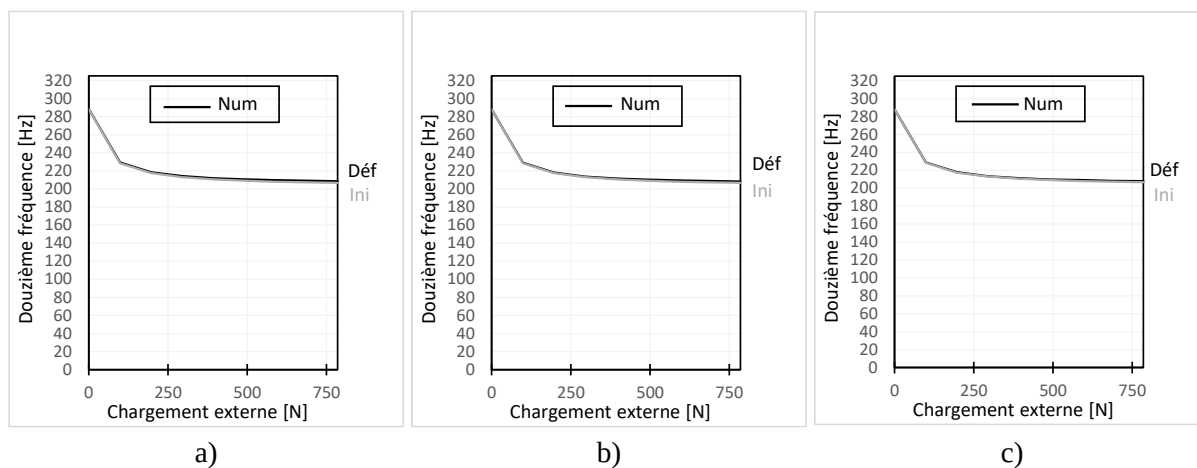


Figure 132 - Evolution numérique (lumped) de la douzième fréquence en position initiale et déformée pour trois niveaux de précontrainte :a) 1.5 [kN], b) 3.5 [kN] & c) 5.5 [kN]

13 Annexe 13 – Modes propres du « SIMPLEX – masses posées »

NB : Selon la matrice de masse « *lumped* ».

Mode 3 :

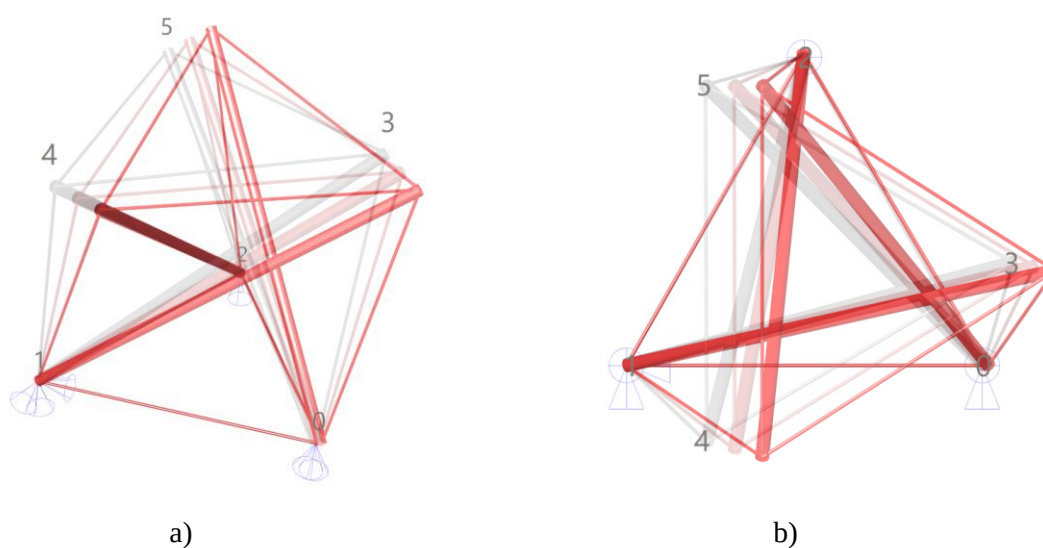


Figure 133 - Mode 3 numérique du « SIMPLEX – masses posées » selon deux vues: a) perspective & b) vue du dessus

Mode 4 :

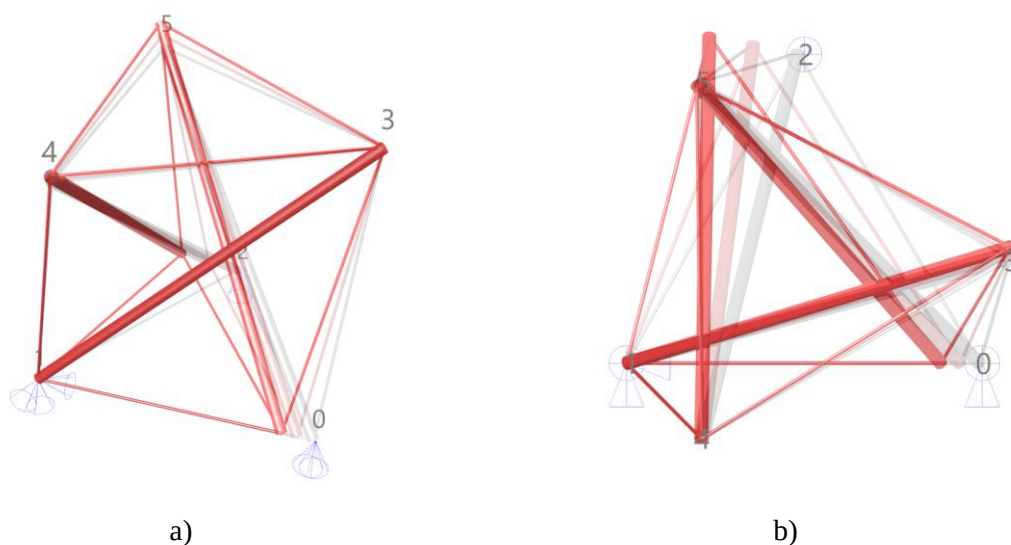


Figure 134 - Mode 4 numérique du « SIMPLEX – masses posées » selon deux vues: a) perspective & b) vue du dessus

Mode 5 :

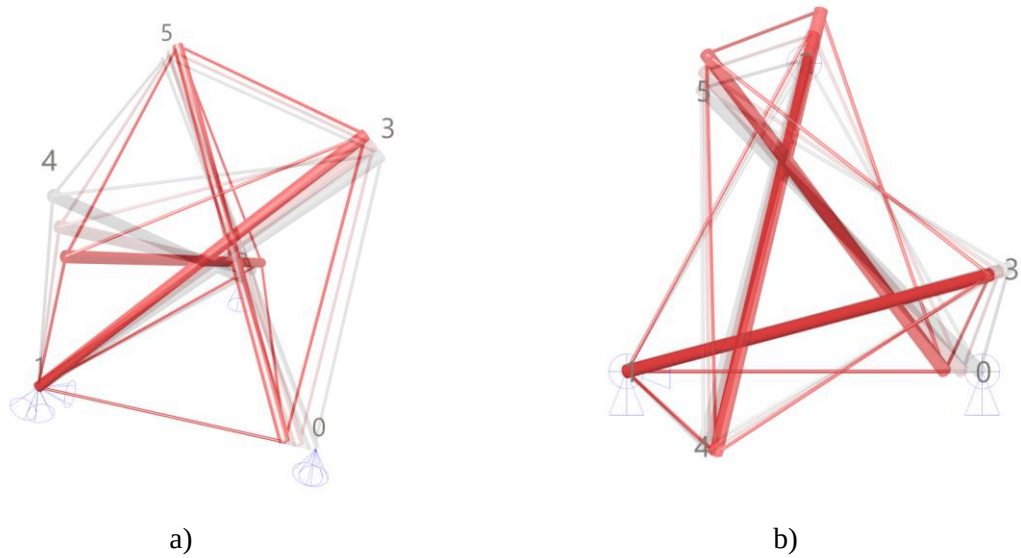


Figure 135 - Mode 5 numérique du « SIMPLEX – masses posées » selon deux vues: a) perspective & b) vue du dessus

Mode 6 :

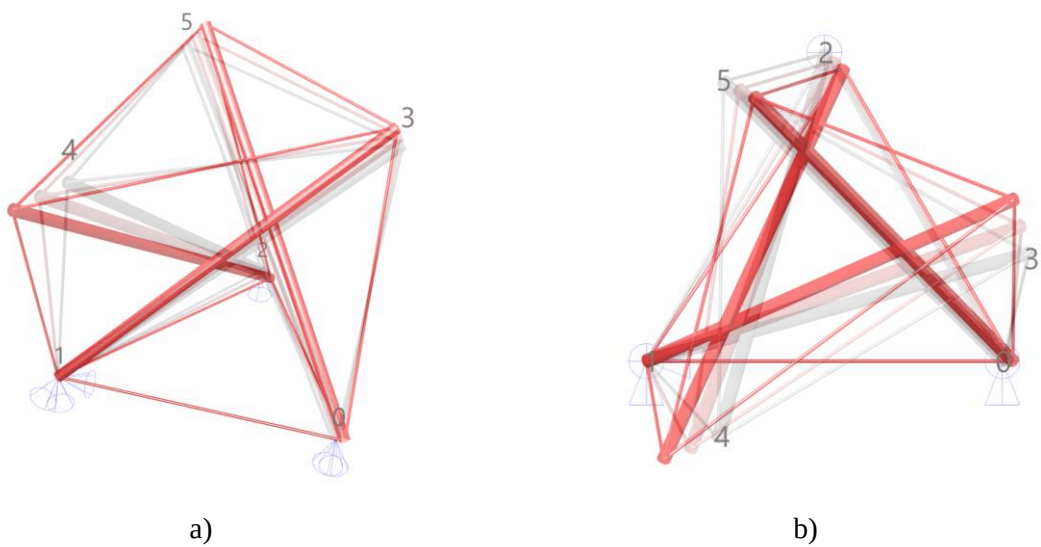


Figure 136 - Mode 6 numérique du « SIMPLEX – masses posées » selon deux vues: a) perspective & b) vue du dessus

Mode 7 :

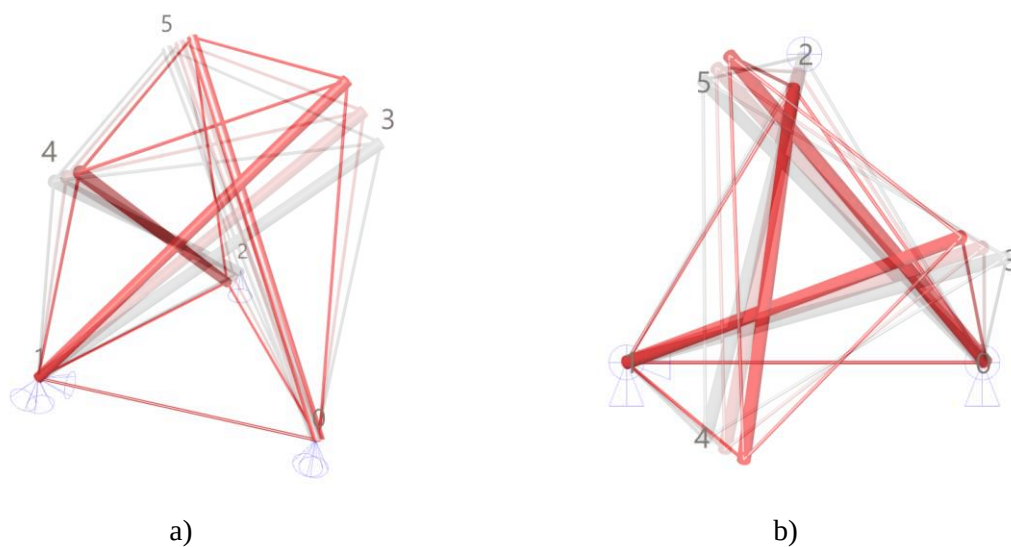


Figure 137 - Mode 7 numérique du « SIMPLEX – masses posées » selon deux vues: a) perspective & b) vue du dessus

Mode 8 :

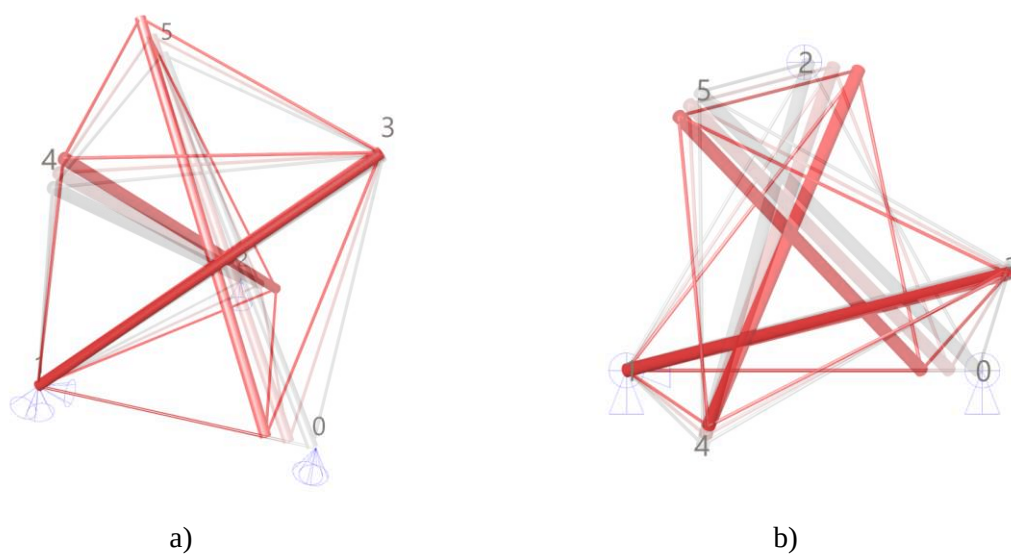


Figure 138 - Mode 8 numérique du « SIMPLEX – masses posées » selon deux vues: a) perspective & b) vue du dessus

Mode 9 :

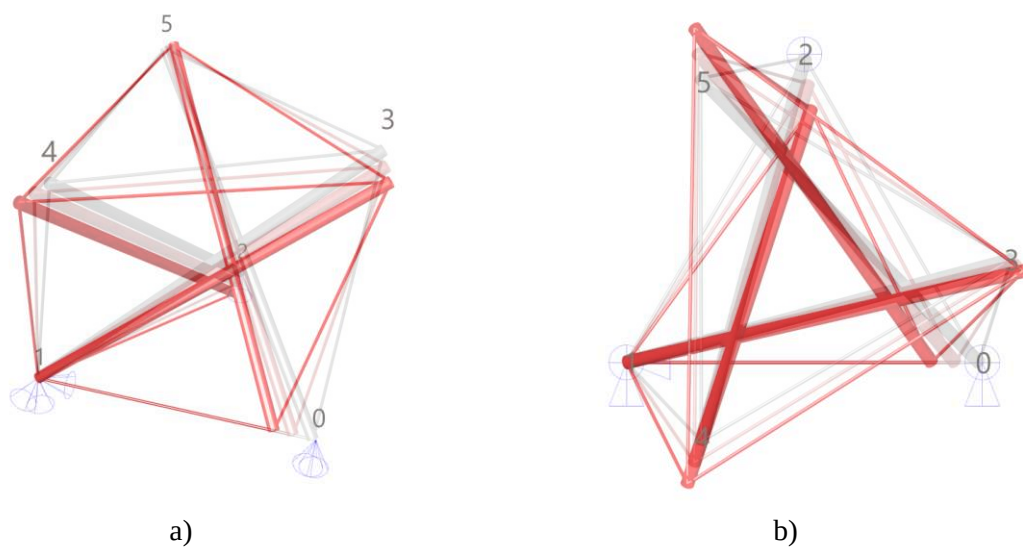


Figure 139 - Mode 9 numérique du « SIMPLEX – masses posées » selon deux vues: a) perspective & b) vue du dessus

Mode 10 :

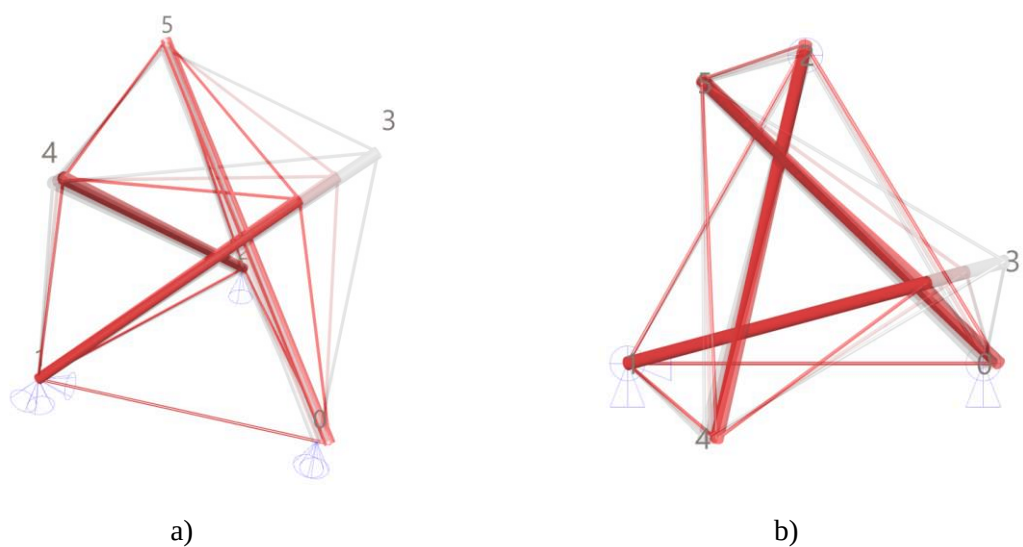


Figure 140 - Mode 10 numérique du « SIMPLEX – masses posées » selon deux vues: a) perspective & b) vue du dessus

Mode 11 :

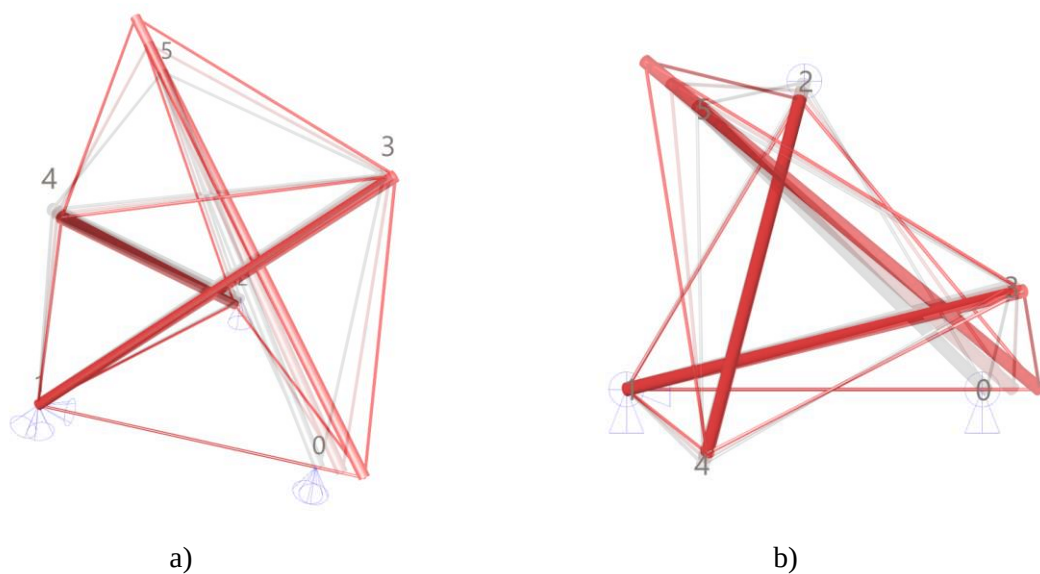


Figure 141 – Mode 11 numérique du « SIMPLEX – masses posées » selon deux vues: a) perspective & b) vue du dessus

Mode 12 :

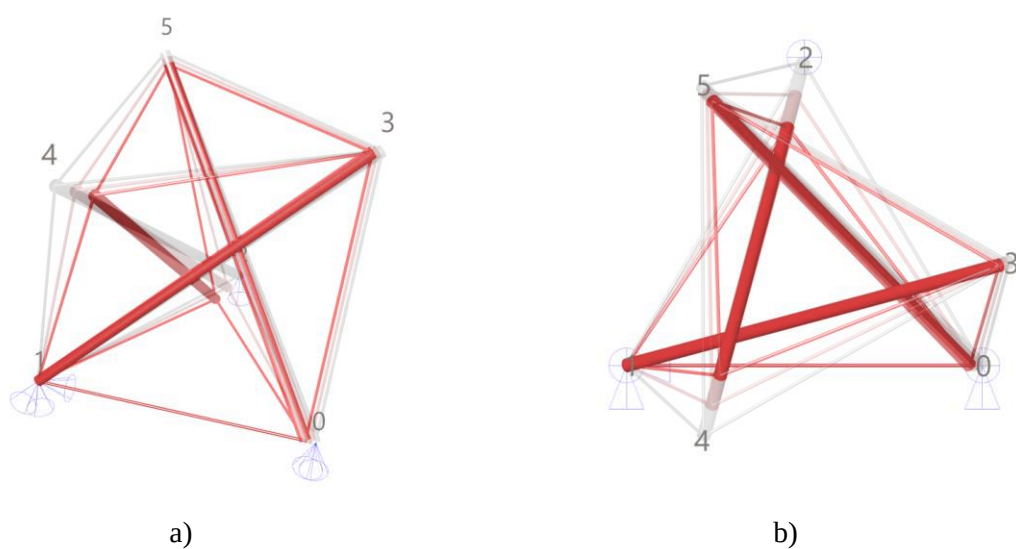


Figure 142 - Mode 12 numérique du « SIMPLEX – masses posées » selon deux vues: a) perspective & b) vue du dessus

14 Annexe 14 – Comparaison entre le premier mode numérique et l'expérimental – « SIMPLEX – masses posées »

NB. Selon la matrice de masse « *lumped* ».

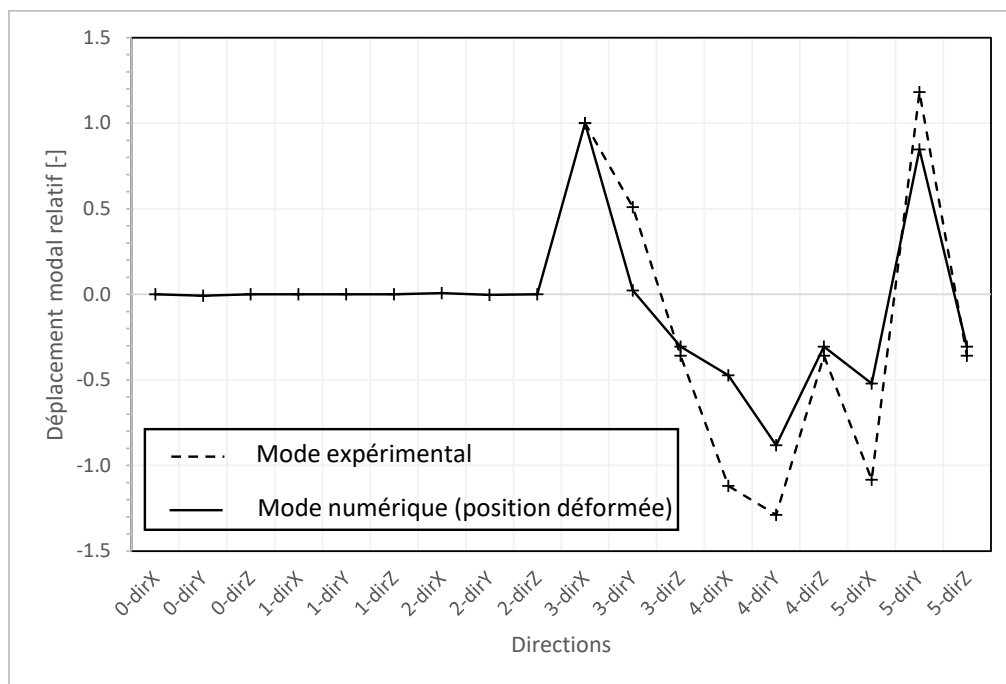


Figure 143 - Comparaison entre le premier mode numérique « *lumped* » et l'expérimental sur le « SIMPLEX – masses posées » (Situation 10 [kg] & 1.5 [kN])

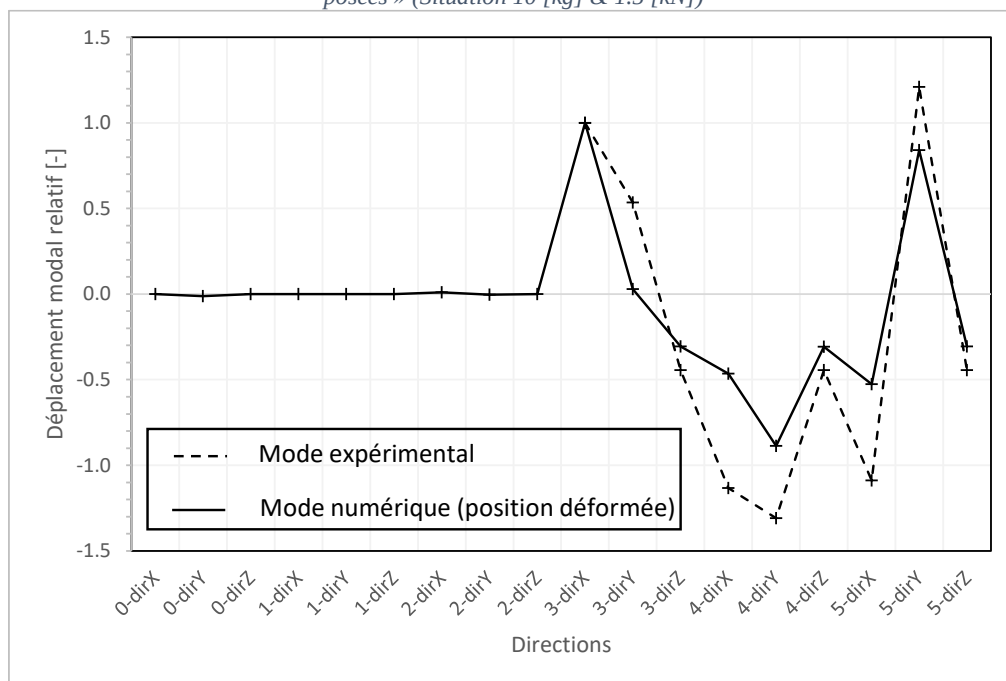


Figure 144 - Comparaison entre le premier mode numérique « *lumped* » et l'expérimental sur le « SIMPLEX – masses posées » (Situation 20 [kg] & 1.5 [kN])

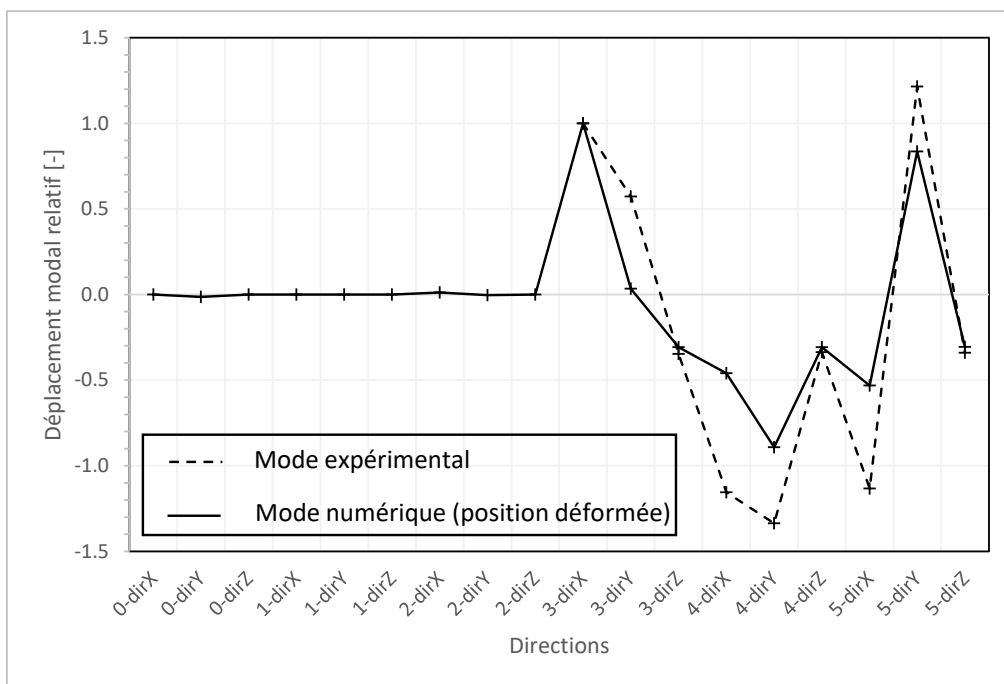


Figure 145 - Comparaison entre le premier mode numérique « lumped » et l'expérimental sur le « SIMPLEX – masses posées » (Situation 30 [kg] & 1.5 [kN])

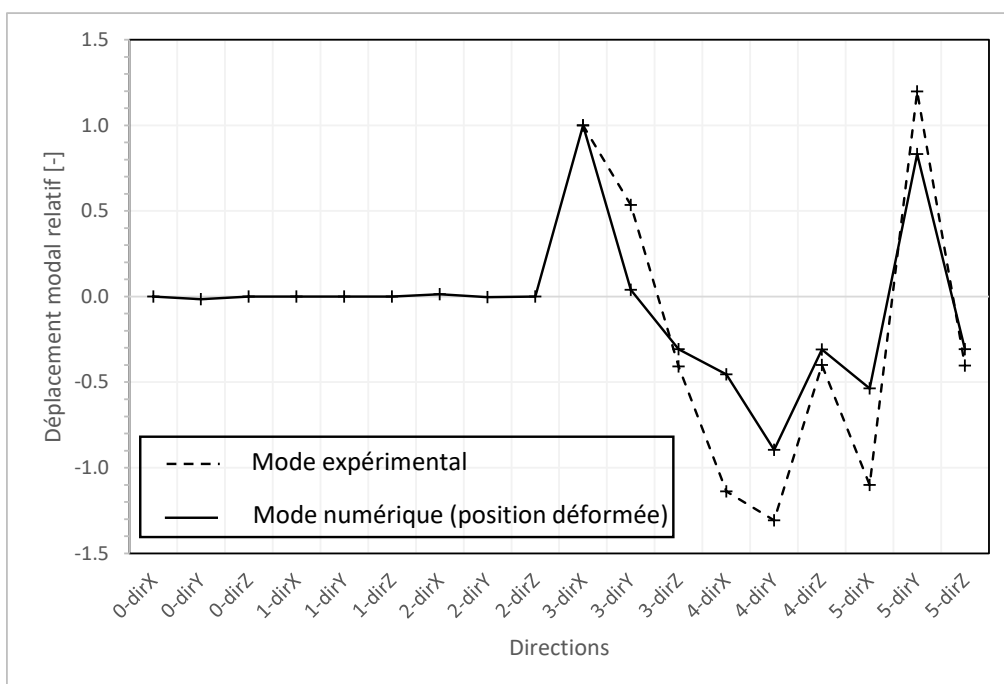


Figure 146 - Comparaison entre le premier mode numérique « lumped » et l'expérimental sur le « SIMPLEX – masses posées » (Situation 40 [kg] & 1.5 [kN])

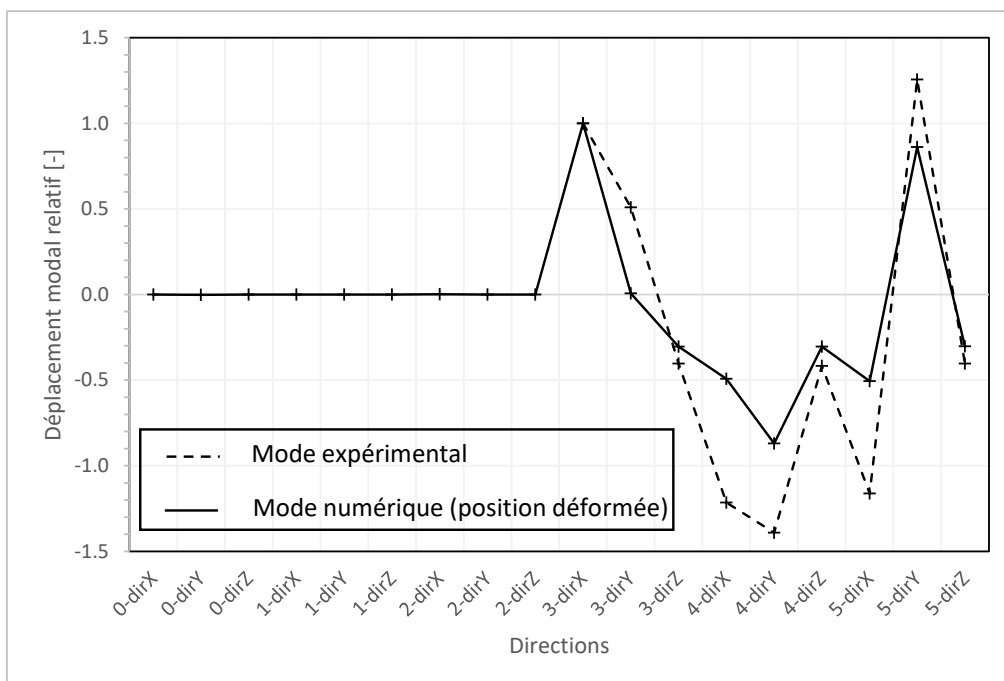


Figure 147 - Comparaison entre le premier mode numérique « lumped » et l'expérimental sur le « SIMPLEX – masses posées » (Situation 0 [kg] & 2.5 [kN])

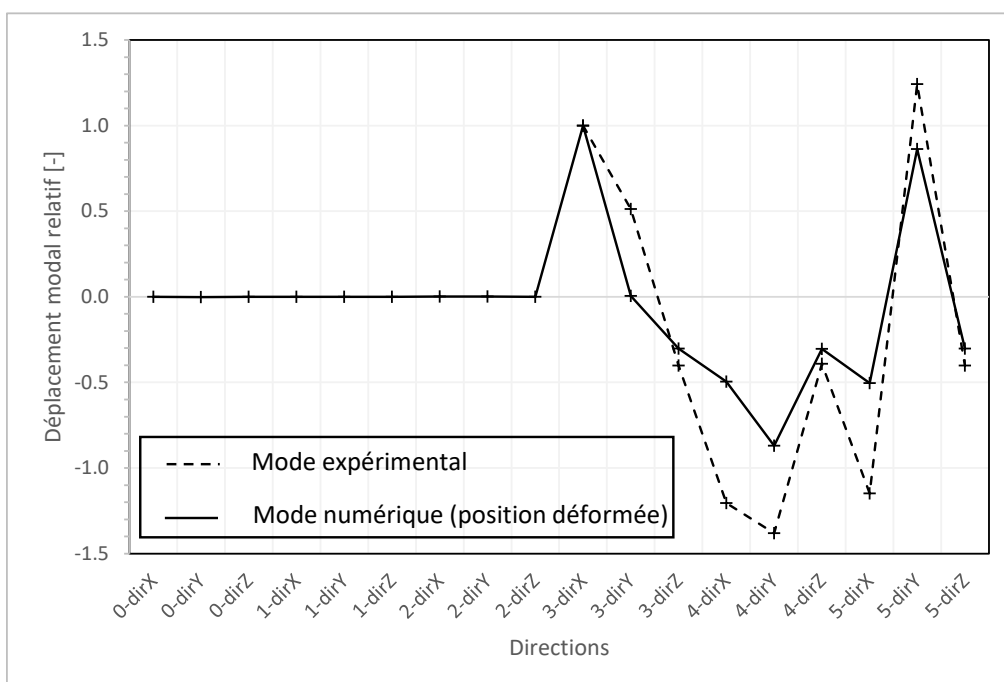


Figure 148 - Comparaison entre le premier mode numérique « lumped » et l'expérimental sur le « SIMPLEX – masses posées » (Situation 0 [kg] & 3.5 [kN])

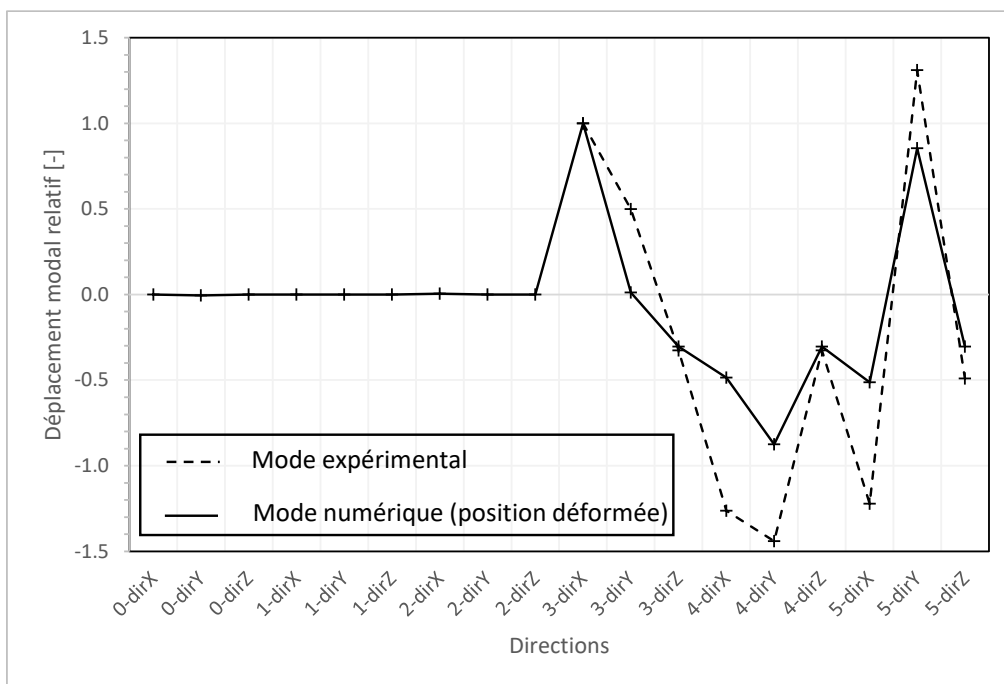


Figure 149 - Comparaison entre le premier mode numérique « lumped » et l'expérimental sur le « SIMPLEX – masses posées » (Situation 10 [kg] & 3.5 [kN])

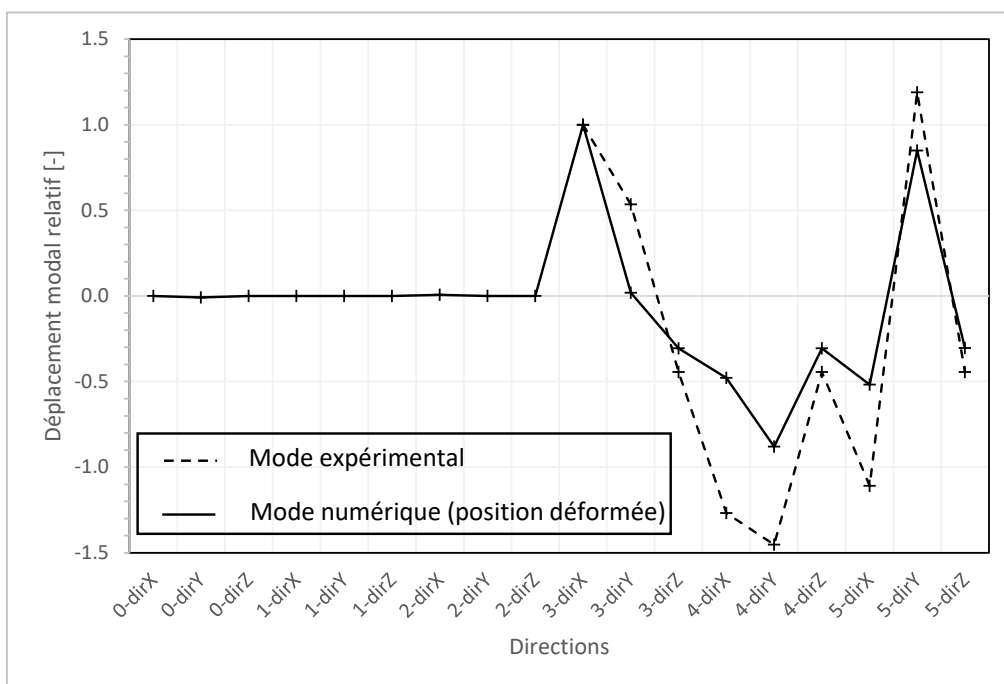


Figure 150 - Comparaison entre le premier mode numérique « lumped » et l'expérimental sur le « SIMPLEX – masses posées » (Situation 20 [kg] & 3.5 [kN])

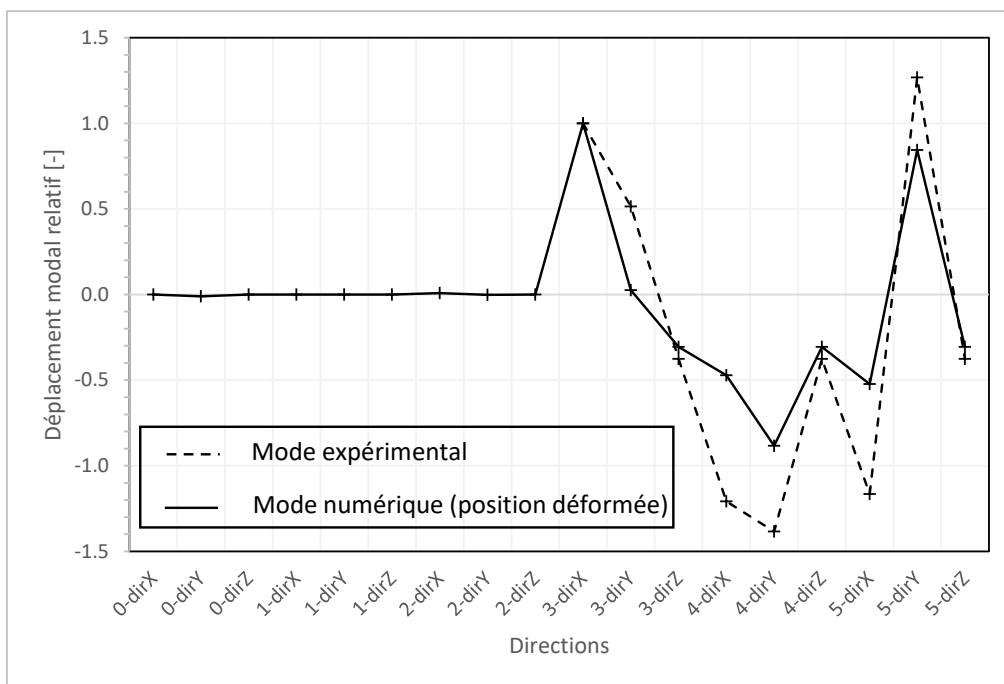


Figure 151 - Comparaison entre le premier mode numérique « lumped » et l'expérimental sur le « SIMPLEX – masses posées » (Situation 30 [kg] & 3.5 [kN])

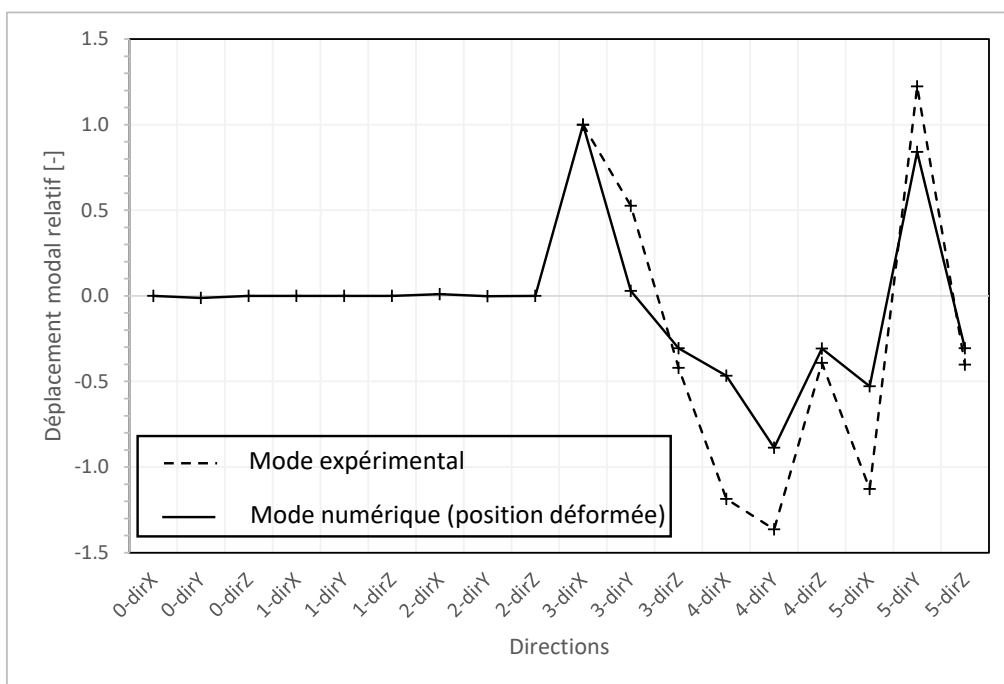


Figure 152 - Comparaison entre le premier mode numérique « lumped » et l'expérimental sur le « SIMPLEX – masses posées » (Situation 40 [kg] & 3.5 [kN])

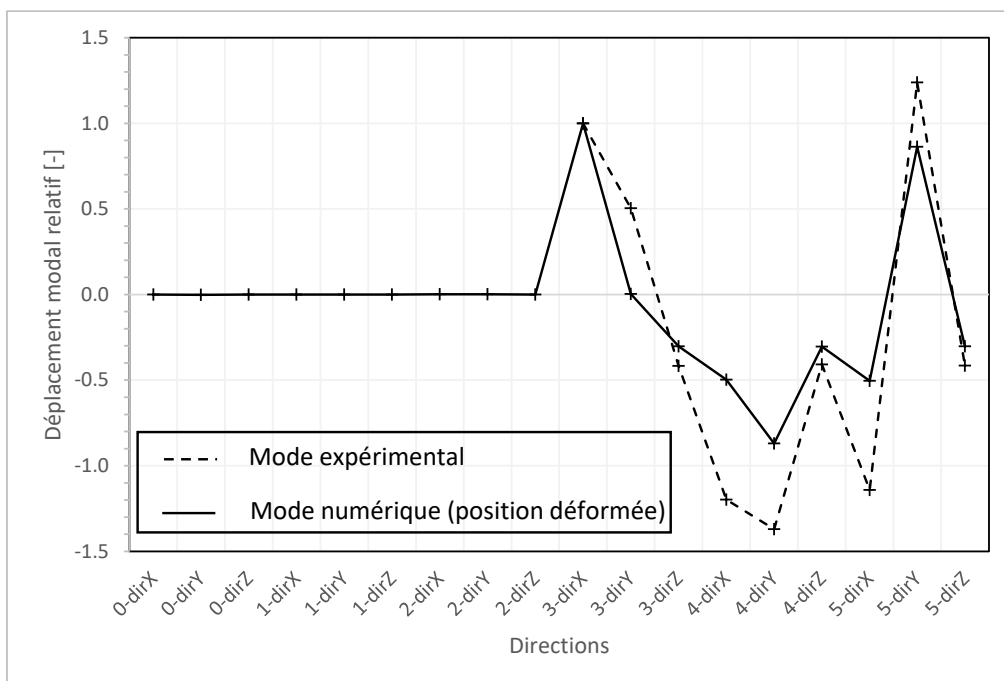


Figure 153 - Comparaison entre le premier mode numérique « lumped » et l'expérimental sur le « SIMPLEX – masses posées » (Situation 0 [kg] & 4.5 [kN])

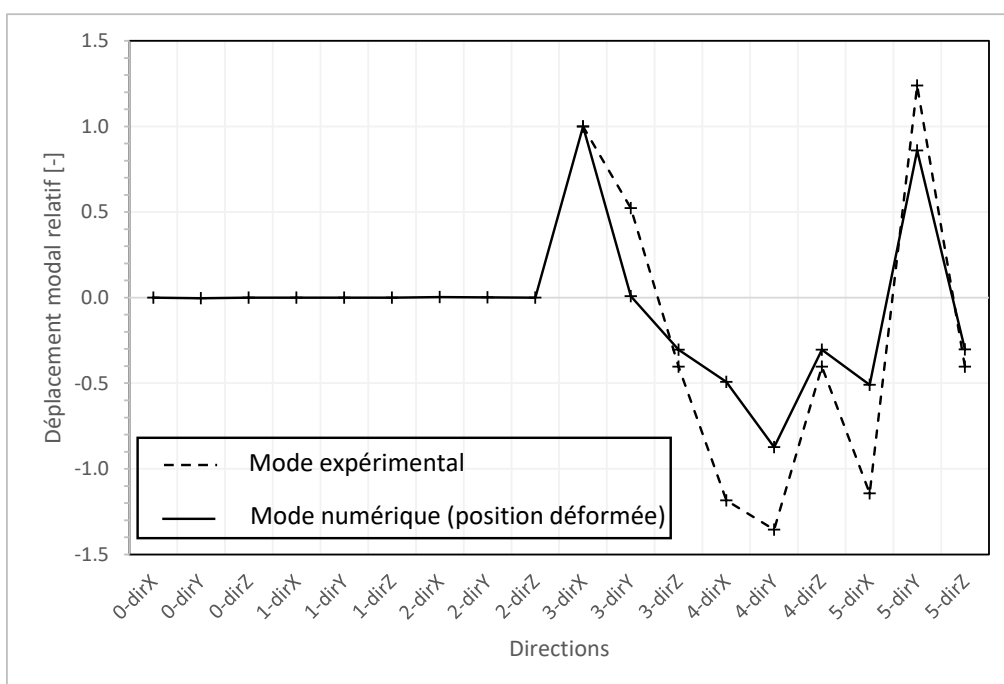


Figure 154 - Comparaison entre le premier mode numérique « lumped » et l'expérimental sur le « SIMPLEX – masses posées » (Situation 10 [kg] & 5.5 [kN])

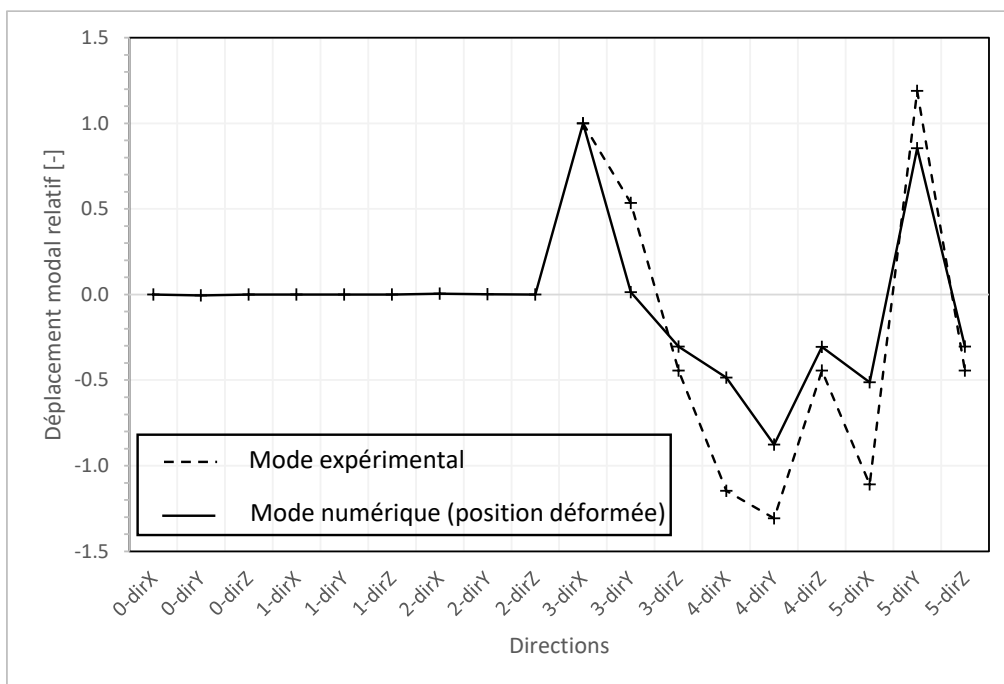


Figure 155 - Comparaison entre le premier mode numérique « lumped » et l'expérimental sur le « SIMPLEX – masses posées » (Situation 20 [kg] & 5.5 [kN])

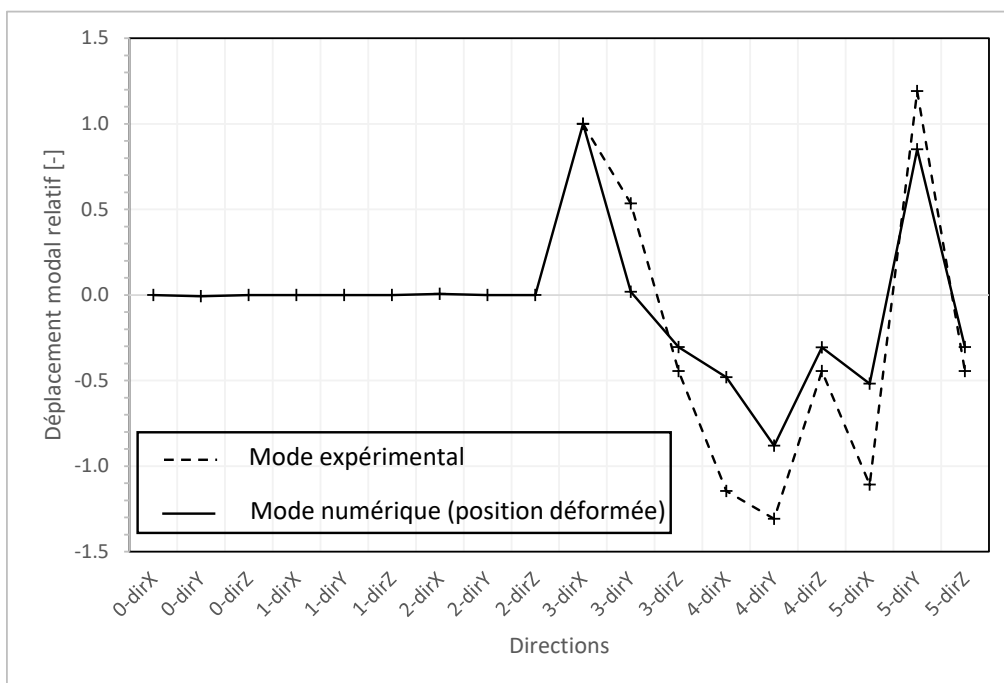


Figure 156 - Comparaison entre le premier mode numérique « lumped » et l'expérimental sur le « SIMPLEX – masses posées » (Situation 30 [kg] & 5.5 [kN])

Liste des figures

FIGURE 1 – STRUCTURE EN TENSÉGRITÉ – JARDIN BELGE DE L’EXPO 2019 À PÉKIN [3]	1
FIGURE 2 – DÉFORMATION D’UNE SLACKLINE [5]	1
FIGURE 3 – « SNAKE FOOTBRIDGE » [6].....	2
FIGURE 4 – EXPOSITION DE KARL IOGANSON [2]	8
FIGURE 5 – « NEEDLE TOWER » DE K. SNELSON [10]	9
FIGURE 6 – PONT SUR LA MANCHE EN STRUCTURE EN TENSEGRITE [12]	9
FIGURE 7 – « LA BIOSPHERE » DE BUCKMINSTER FULLER, PAVILLON DES ETATS-UNIS A L’EXPOSITION UNIVERSELLE DE 1967 [13]	10
FIGURE 8 – MODULES ELEMENTAIRES PRISMATIQUES [14]	11
FIGURE 9 – COMBINAISON UNIDIMENSIONNELLE DES CELLULES ELEMENTAIRES [15].....	11
FIGURE 10 – « SNAKE FOOTBRIDGE » [6]	12
FIGURE 11 – SIMPLEX EXPERIMENTAL AU LABORATOIRE LEMSC [19]	15
FIGURE 12 – NOMENCLATURE DES ELEMENTS CONSTITUTIFS DU SIMPLEX.....	15
FIGURE 13 – VUE EN PERSPECTIVE DU SIMPLEX AVEC LES COORDONNEES DES NŒUDS EN POSITION INITIALE	17
FIGURE 14 – ANGLE RELATIF EN POSITION INITIALE (VUE DU DESSUS)	17
FIGURE 15 - POSITIONNEMENT DES ACCELEROMETRES	19
FIGURE 16 – PLANS PARALLÈLES FORMÉS PAR LES NŒUDS SUPÉRIEURS ET INFÉRIEURS	22
FIGURE 17 – MODE DE PRECONTRAINTES DU SIMPLEX [20]	23
FIGURE 18 – SYSTÈME DE CHARGEMENT DU « SIMPLEX – MASSES PENDUES » [19]	24
FIGURE 19 – ANNEAU DE SUSPENSION ET PLATEAU DE LEVAGE [ADAPTE DE [19]]	25
FIGURE 20 – SLACKLINE EN POSITION INITIALE DÉJÀ PRÉCONTRAINTES.....	28
FIGURE 21 – EQUILIBRE DES FORCES EN POSITION DÉFORMÉE	28
FIGURE 22 – PRINCIPE DE NON-LINÉARITÉ GÉOMÉTRIQUE.....	29
FIGURE 23 – INFLUENCE DE LA PRÉCONTRAINTES SUR LA DÉFORMATION DE LA STRUCTURE	30
FIGURE 24 – ELEMENT « E » DANS LE REPERE LOCAL.....	31
FIGURE 25 – ÉLÉMENT « E » DANS LE REPÈRE GLOBAL	32
FIGURE 26 – EVOLUTION DE LA GEOMETRIE DU « SIMPLEX – MASSES PENDUES » SOUS POIDS PROPRE EN FONCTION DU NIVEAU DE PRECONTRAINTES [ADAPTE DE [20]].....	33
FIGURE 27 – EVOLUTION DE LA GEOMETRIE DU « SIMPLEX – MASSES PENDUES » SOUS UN NIVEAU DE PRECONTRAINTES DE 1.5[kN] [ADAPTE DE [20]]	34
FIGURE 28 – EVOLUTION DE LA GÉOMÉTRIE DU « SIMPLEX – MASSES PENDUES » SOUS UN NIVEAU DE PRÉCONTRAINTES DE 8.5 [kN] [ADAPTÉ DE [20]]	35
FIGURE 29 – EVOLUTION DES EFFORTS INTERNES SOUS UN NIVEAU DE PRÉCONTRAINTES DE 1.5 [kN] [ADAPTE DE [20]].....	36
FIGURE 30 – EVOLUTION DES EFFORTS INTERNES SOUS UN NIVEAU DE PRÉCONTRAINTES DE 8.5 [kN] [ADAPTE DE [20]].....	37
FIGURE 31 – EQUILIBRE D’UN ÉLÉMENT « MASSE » [FIGURE DE L’AUTEUR INSPIRÉE DE [26]].....	40
FIGURE 32 – COMPOSANTES D’UN SYSTÈME À UN DEGRÉ DE LIBERTÉ [ADAPTÉ DE [27]].....	41
FIGURE 33 – REPOSE LINEAIRE ET NON-LINEAIRE [27]	42
FIGURE 34 – INFLUENCE DE L’AMORTISSEMENT SUR LA FRÉQUENCE PROPRE [ADAPTÉ DE [27]]	44
FIGURE 35 – INFLUENCE DE L’AMORTISSEMENT SUR LA RÉPONSE [ADAPTÉ DE [27]].....	45

FIGURE 36 – FACTEUR D’AMPLIFICATION [ADAPTE DE [27]].....	48
FIGURE 37 – LIMITATION DU DEPLACEMENT TOTAL SOUS RESONANCE DU A L’AMORTISSEMENT [ADAPTE DE [27]].....	50
FIGURE 38 – PROTOTYPE POUR L’ÉTUDE STATIQUE ET DYNAMIQUE EFFECTUÉE PAR MOTRO [29]	59
FIGURE 39 – SIMPLEX EXPÉRIMENTAL DE L’ÉTUDE DE L. MAŁYSZKO AND A. RUTKIEWICZ [35]	61
FIGURE 40 – RÉSULTAT DE L’ÉTUDE MENÉE PAR L. MAŁYSZKO AND A. RUTKIEWICZ [35]	61
FIGURE 41 – STRUCTURE DU CODE.....	64
FIGURE 42 – A) FENETRE GRASSHOPPER ET SON CANVAS & B) FENETRE GRAPHIQUE DE RHINOCEROS 3D	65
FIGURE 43 – EXEMPLE DE VISUEL : PREMIER MODE NUMÉRIQUE DU SIMPLEX	65
FIGURE 44 – COMPOSANTS INITIALEMENT PRESENTS	66
FIGURE 45 – COMPOSANT PERMETTANT L’ASSEMBLAGE DE LA STRUCTURE	66
FIGURE 46 – COMPOSANT « DYNAMIC RELAXATION » PERMETTANT LE CALCUL DE LA STRUCTURE DEFORMEE SOUS SON POIDS PROPRE.....	67
FIGURE 47 – ASSEMBLAGE DE DEUX COMPOSANTS « DYNAMIC RELAXATION » AFIN D’OBTENIR LA POSITION DEFORMEE SOUS POIDS PROPRE PUIS SOUS PRECONTRAINTE.....	68
FIGURE 48 – EXEMPLE D’AFFICHAGE DES MODES.....	70
FIGURE 49 - EXEMPLE D’AFFICHAGE DES MASSES NODALES.....	71
FIGURE 50 – UTILISATION TYPE DES COMPOSANTS CRÉÉS POUR LE CALCUL DYNAMIQUE.....	72
FIGURE 51 – EXEMPLE DE CANEVAS POUR LA GÉNÉRATION DES MASSE NODALES CONSIDÉRÉES DANS LE CALCUL DYNAMIQUE	73
FIGURE 52 – EXEMPLE DE CANEVAS POUR LA RÉOLUTION DU CALCUL DYNAMIQUE	73
FIGURE 53 – EXEMPLE DE CANEVAS POUR L’OBTENTION DES RÉSULTATS APRÈS LE CALCUL DYNAMIQUE	74
FIGURE 54 – EXEMPLE DE CANEVAS POUR L’AFFICHAGE DES MODES APRÈS LE CALCUL DYNAMIQUE	75
FIGURE 55 – EXEMPLE DE CANEVAS PERMETTANT D’AFFICHER UNE STRUCTURE	75
FIGURE 56 - SYNTHÈSE DES DIFFÉRENTS TYPES DE COMPOSANTS DÉVELOPPÉS POUR LE CALCUL DYNAMIQUE	76
FIGURE 57 - COMPOSANT « DYNAMICS SOLVER LUMPED »	77
FIGURE 58 - COMPOSANT « DYNAMICS SOLVER CONSISTENT »	78
FIGURE 59 - COMPOSANT « SELF MASS »	79
FIGURE 60 - COMPOSANT « POINT MASS »	80
FIGURE 61 - COMPOSANT « DISASSEMBLE DYNAMICS »	80
FIGURE 62 - COMPOSANT « POINT MASS PROPERTIES ».....	81
FIGURE 63 - COMPOSANT « DYNAMIC MASSES DISPLAY »	81
FIGURE 64 - COMPOSANT « DYNAMICS DISPLAY ».....	82
FIGURE 65 - POSITIONNEMENT DES ACCELEROMETRES	88
FIGURE 66 - SYSTÈME DE CHARGEMENT: A) « SIMPLEX – MASSES PENDUES » ET B) « SIMPLEX – MASSSES POSÉES »	89
FIGURE 67 - COMPARAISON ENTRE LES RÉSULTATS NUMÉRIQUES (LUMPED) ET LES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX DE LA PREMIÈRE FRÉQUENCE PROPRE DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » SOUS POIDS PROPRE.....	94
FIGURE 68 - COMPARAISON ENTRE LES RÉSULTATS NUMÉRIQUES (LUMPED) ET EXPÉRIMENTAUX SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » POUR LA PREMIÈRE FRÉQUENCE PROPRE SELON TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINTES : A) 1.5 [kN], B) 3.5 [kN] & C) 5.5 [kN]	95

FIGURE 69 - COMPARAISON DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES EN POSITION DÉFORMÉE (1 ^{ÈRE} FRÉQ.) ENTRE LA MATRICE DE MASSE « CONSISTENT » ET LA MATRICE « LUMPED » SOUS POIDS PROPRE (A) ET SOUS CHARGEMENT EXTERNE (B, C, D) POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINT :	96
FIGURE 70 - COMPARAISON ENTRE LES RÉSULTATS NUMÉRIQUES (LUMPED) ET LES RÉSULTATS EXPÉRIMENTAUX DE LA SECONDE FRÉQUENCE PROPRE DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » SOUS POIDS PROPRE.....	98
FIGURE 71 - COMPARAISON ENTRE LES RÉSULTATS NUMÉRIQUES (LUMPED) ET EXPÉRIMENTAUX SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » POUR LA SECONDE FRÉQUENCE PROPRE SELON TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINT : A) 1.5 [kN], B) 3.5 [kN] & C) 5.5 [kN]	99
FIGURE 72 - COMPARAISON DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES EN POSITION DÉFORMÉE (2 ^{ÈME} FRÉQ.) ENTRE LA MATRICE DE MASSE « CONSISTENT » ET LA MATRICE « LUMPED » SOUS POIDS PROPRE (A) ET SOUS CHARGEMENT EXTERNE (B, C, D) POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINT :	100
FIGURE 73 - EVOLUTION NUMÉRIQUE (LUMPED) EN POSITION DÉFORMÉE DU RAPPORT ENTRE LA FRÉQUENCE LIÉE À LA RIGIDITÉ MATÉRIELLE ET LA FRÉQUENCE PROPRE TOTALE (1 ^{ÈRE} FRÉQ.) DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINT :	102
FIGURE 74 - EVOLUTION NUMÉRIQUE (LUMPED) EN POSITION DÉFORMÉE DU RAPPORT ENTRE LA FRÉQUENCE LIÉE À LA RIGIDITÉ MATÉRIELLE ET LA FRÉQUENCE PROPRE TOTALE (2 ^{ÈME} FRÉQ.) DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINT :	102
FIGURE 75 - REPÈRE GLOBAL DES DÉPLACEMENTS MODAUX	105
FIGURE 76 - MODE 1 NUMÉRIQUE DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » SELON DEUX VUES: A) PERSPECTIVE & B) VUE DU DESSUS.....	107
FIGURE 77 - MODE 2 NUMÉRIQUE DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » SELON DEUX VUES: A) PERSPECTIVE & B) VUE DU DESSUS.....	107
FIGURE 78 – MECANISME DU SIMPLEX : A) EN PERSPECTIVE & B) VUE LATÉRALE.....	113
FIGURE 79 - NOMENCLATURE DES ELEMENTS CONSTITUTIFS DU SIMPLEX.....	125
FIGURE 80 - NOEUD 1	126
FIGURE 81 - COMPOSITION DES ASSEMBLAGES NODAUX	127
FIGURE 82 - LONGUEURS DES ELEMENTS [ADAPTE DE [20]]	128
FIGURE 83 - ACCÉLÉROMÈTRE TYPE POSITIONNÉ SUR LA STRUCTURE	137
FIGURE 84 - ASSIGNATION DES DONNÉES À CERTAINS DEGRÉS DE LIBERTÉ.....	141
FIGURE 85 - GRAPHIQUE TYPE OBTENU AVEC LA MÉTHODE EFDD.....	142
FIGURE 86 - REPRÉSENTATION DU LIEN ENTRE LE DOMAINE TEMPOREL ET FRÉQUENTIEL [46].....	143
FIGURE 87 – DISPOSITIF DE L'ÉLECTRO-AIMANT	146
FIGURE 88 - GÉOMÉTRIE DU MODÈLE « NODAL »	147
FIGURE 89 - COMPARAISON DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES DU MODÈLE « NODAL » ET EXPÉRIMENTAUX SUR LE « SIMPLEX – MASSES PENDUES» POUR DEUX NIVEAUX DE PRÉCONTRAINT : A) 1.5 [kN] & B) 5.5 [kN]	148
FIGURE 90 - GÉOMÉTRIE DU MODÈLE NUMÉRIQUE « PENDULE ».....	149
FIGURE 91 - PENDULE.....	150
FIGURE 92 – COMPARAISON ENTRE L'ÉVOLUTION MOYENNE DES SIX PREMIÈRES FRÉQUENCES DU MODÈLE « PENDULE » ET LA FRÉQUENCE D'UN PENDULE PARFAIT.....	150
FIGURE 93 - COMPARAISON DES RÉSULTATS NUMÉRIQUES DU MODÈLE « PENDULE » ET EXPÉRIMENTAUX SUR LE « SIMPLEX – MASSES PENDUES » POUR DEUX NIVEAUX DE PRÉCONTRAINT : A) 1.5 [kN] & B) 5.5 [kN].....	151
FIGURE 94 - DISPOSITIF DE CHARGEMENT RIGIDE.....	163
FIGURE 95 - SCHÉMA DU PROBLÈME INCLUANT LES VARIABLES	164

FIGURE 96 - RÉSULTAT SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » DE LA SITUATION « 0 [KG] & 1.5 [kN] »	168
FIGURE 97 - RÉSULTAT SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » DE LA SITUATION « 10 [KG] & 1.5 [kN] »	169
FIGURE 98 - RÉSULTAT SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » DE LA SITUATION « 20 [KG] & 1.5 [kN] »	169
FIGURE 99 - RÉSULTAT SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » DE LA SITUATION « 30 [KG] & 1.5 [kN] »	169
FIGURE 100 - RÉSULTAT SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » DE LA SITUATION « 40 [KG] & 1.5 [kN] »	170
FIGURE 101 - RÉSULTAT SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » DE LA SITUATION « 0 [KG] & 2.5 [kN] »	170
FIGURE 102 - RÉSULTAT SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » DE LA SITUATION « 0 [KG] & 3.5 [kN] »	170
FIGURE 103 - RÉSULTAT SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » DE LA SITUATION « 10 [KG] & 3.5 [kN] »	171
FIGURE 104 - RÉSULTAT SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » DE LA SITUATION « 20 [KG] & 3.5 [kN] »	171
FIGURE 105 - RÉSULTAT SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » DE LA SITUATION « 30 [KG] & 3.5 [kN] »	171
FIGURE 106 - RÉSULTAT SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » DE LA SITUATION « 40 [KG] & 3.5 [kN] »	172
FIGURE 107 - RÉSULTAT SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » DE LA SITUATION « 0 [KG] & 4.5 [kN] »	172
FIGURE 108 - RÉSULTAT SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » DE LA SITUATION « 0 [KG] & 5.5 [kN] »	172
FIGURE 109 - RÉSULTAT SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » DE LA SITUATION « 10 [KG] & 5.5 [kN] »	173
FIGURE 110 - RÉSULTAT SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » DE LA SITUATION « 20 [KG] & 5.5 [kN] »	173
FIGURE 111 - RÉSULTAT SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » DE LA SITUATION « 30 [KG] & 5.5 [kN] »	173
FIGURE 112 - RÉSULTAT SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » DE LA SITUATION « 40 [KG] & 5.5 [kN] »	174
FIGURE 113 - ÉVOLUTION NUMÉRIQUE EN POSITION DÉFORMÉE DU RAPPORT ENTRE LA FRÉQUENCE LIÉE À LA RIGIDITÉ MATÉRIELLE ET LA FRÉQUENCE PROPRE TOTALE (3 ^{ÈME} FRÉQ.) DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINTE :	175
FIGURE 114 - ÉVOLUTION NUMÉRIQUE EN POSITION DÉFORMÉE DU RAPPORT ENTRE LA FRÉQUENCE LIÉE À LA RIGIDITÉ MATÉRIELLE ET LA FRÉQUENCE PROPRE TOTALE (4 ^{ÈME} FRÉQ.) DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINTE :	175
FIGURE 115 - ÉVOLUTION NUMÉRIQUE EN POSITION DÉFORMÉE DU RAPPORT ENTRE LA FRÉQUENCE LIÉE À LA RIGIDITÉ MATÉRIELLE ET LA FRÉQUENCE PROPRE TOTALE (5 ^{ÈME} FRÉQ.) DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINTE :	176
FIGURE 116 - ÉVOLUTION NUMÉRIQUE EN POSITION DÉFORMÉE DU RAPPORT ENTRE LA FRÉQUENCE LIÉE À LA RIGIDITÉ MATÉRIELLE ET LA FRÉQUENCE PROPRE TOTALE (6 ^{ÈME} FRÉQ.) DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINTE :	176

FIGURE 117 - EVOLUTION NUMÉRIQUE EN POSITION DÉFORMÉE DU RAPPORT ENTRE LA FRÉQUENCE LIÉE À LA RIGIDITÉ MATÉRIELLE ET LA FRÉQUENCE PROPRE TOTALE (7 ^{ÈME} FRÉQ.) DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINTES :	177
FIGURE 118 - EVOLUTION NUMÉRIQUE EN POSITION DÉFORMÉE DU RAPPORT ENTRE LA FRÉQUENCE LIÉE À LA RIGIDITÉ MATÉRIELLE ET LA FRÉQUENCE PROPRE TOTALE (8 ^{ÈME} FRÉQ.) DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINTES :	177
FIGURE 119 - EVOLUTION NUMÉRIQUE EN POSITION DÉFORMÉE DU RAPPORT ENTRE LA FRÉQUENCE LIÉE À LA RIGIDITÉ MATÉRIELLE ET LA FRÉQUENCE PROPRE TOTALE (9 ^{ÈME} FRÉQ.) DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINTES :	178
FIGURE 120 - EVOLUTION NUMÉRIQUE EN POSITION DÉFORMÉE DU RAPPORT ENTRE LA FRÉQUENCE LIÉE À LA RIGIDITÉ MATÉRIELLE ET LA FRÉQUENCE PROPRE TOTALE (10 ^{ÈME} FRÉQ.) DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINTES :	178
FIGURE 121 - EVOLUTION NUMÉRIQUE EN POSITION DÉFORMÉE DU RAPPORT ENTRE LA FRÉQUENCE LIÉE À LA RIGIDITÉ MATÉRIELLE ET LA FRÉQUENCE PROPRE TOTALE (11 ^{ÈME} FRÉQ.) DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINTES :	179
FIGURE 122 - EVOLUTION NUMÉRIQUE EN POSITION DÉFORMÉE DU RAPPORT ENTRE LA FRÉQUENCE LIÉE À LA RIGIDITÉ MATÉRIELLE ET LA FRÉQUENCE PROPRE TOTALE (12 ^{ÈME} FRÉQ.) DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINTES :	179
FIGURE 123 - EVOLUTION NUMÉRIQUE (LUMPED) DE LA TROISIÈME FRÉQUENCE EN POSITION INITIALE ET DÉFORMÉE POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINTES : A) 1.5 [kN], B) 3.5 [kN] & C) 5.5 [kN]	181
FIGURE 124 - EVOLUTION NUMÉRIQUE (LUMPED) DE LA QUATRIÈME FRÉQUENCE EN POSITION INITIALE ET DÉFORMÉE POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINTES : A) 1.5 [kN], B) 3.5 [kN] & C) 5.5 [kN]	181
FIGURE 125 - EVOLUTION NUMÉRIQUE (LUMPED) DE LA CINQUIÈME FRÉQUENCE EN POSITION INITIALE ET DÉFORMÉE POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINTES : A) 1.5 [kN], B) 3.5 [kN] & C) 5.5 [kN]	182
FIGURE 126 – EVOLUTION NUMÉRIQUE (LUMPED) DE LA SIXIÈME FRÉQUENCE EN POSITION INITIALE ET DÉFORMÉE POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINTES : A) 1.5 [kN], B) 3.5 [kN] & C) 5.5 [kN]	182
FIGURE 127 - EVOLUTION NUMÉRIQUE (LUMPED) DE LA SEPTIÈME FRÉQUENCE EN POSITION INITIALE ET DÉFORMÉE POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINTES : A) 1.5 [kN], B) 3.5 [kN] & C) 5.5 [kN]	182
FIGURE 128 - EVOLUTION NUMÉRIQUE (LUMPED) DE LA HUITIÈME FRÉQUENCE EN POSITION INITIALE ET DÉFORMÉE POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINTES : A) 1.5 [kN], B) 3.5 [kN] & C) 5.5 [kN]	183
FIGURE 129 - EVOLUTION NUMÉRIQUE (LUMPED) DE LA NEUVIÈME FRÉQUENCE EN POSITION INITIALE ET DÉFORMÉE POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINTES : A) 1.5 [kN], B) 3.5 [kN] & C) 5.5 [kN]	183
FIGURE 130 - EVOLUTION NUMÉRIQUE (LUMPED) DE LA DIXIÈME FRÉQUENCE EN POSITION INITIALE ET DÉFORMÉE POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINTES : A) 1.5 [kN], B) 3.5 [kN] & C) 5.5 [kN]	183
FIGURE 131 - EVOLUTION NUMÉRIQUE (LUMPED) DE LA ONZIÈME FRÉQUENCE EN POSITION INITIALE ET DÉFORMÉE POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINTES : A) 1.5 [kN], B) 3.5 [kN] & C) 5.5 [kN]	184
FIGURE 132 - EVOLUTION NUMÉRIQUE (LUMPED) DE LA DOUZIÈME FRÉQUENCE EN POSITION INITIALE ET DÉFORMÉE POUR TROIS NIVEAUX DE PRÉCONTRAINTES : A) 1.5 [kN], B) 3.5 [kN] & C) 5.5 [kN]	184

FIGURE 133 - MODE 3 NUMÉRIQUE DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » SELON DEUX VUES: A) PERSPECTIVE & B) VUE DU DESSUS.....	185
FIGURE 134 - MODE 4 NUMÉRIQUE DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » SELON DEUX VUES: A) PERSPECTIVE & B) VUE DU DESSUS.....	185
FIGURE 135 - MODE 5 NUMÉRIQUE DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » SELON DEUX VUES: A) PERSPECTIVE & B) VUE DU DESSUS.....	186
FIGURE 136 - MODE 6 NUMÉRIQUE DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » SELON DEUX VUES: A) PERSPECTIVE & B) VUE DU DESSUS.....	186
FIGURE 137 - MODE 7 NUMÉRIQUE DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » SELON DEUX VUES: A) PERSPECTIVE & B) VUE DU DESSUS.....	187
FIGURE 138 - MODE 8 NUMÉRIQUE DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » SELON DEUX VUES: A) PERSPECTIVE & B) VUE DU DESSUS.....	187
FIGURE 139 - MODE 9 NUMÉRIQUE DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » SELON DEUX VUES: A) PERSPECTIVE & B) VUE DU DESSUS.....	188
FIGURE 140 - MODE 10 NUMÉRIQUE DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » SELON DEUX VUES: A) PERSPECTIVE & B) VUE DU DESSUS.....	188
FIGURE 141 – MODE 11 NUMÉRIQUE DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » SELON DEUX VUES: A) PERSPECTIVE & B) VUE DU DESSUS.....	189
FIGURE 142 - MODE 12 NUMÉRIQUE DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » SELON DEUX VUES: A) PERSPECTIVE & B) VUE DU DESSUS.....	189
FIGURE 143 - COMPARAISON ENTRE LE PREMIER MODE NUMÉRIQUE « LUMPED » ET L'EXPÉRIMENTAL SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » (SITUATION 10 [KG] & 1.5 [kN]).....	191
FIGURE 144 - COMPARAISON ENTRE LE PREMIER MODE NUMÉRIQUE « LUMPED » ET L'EXPÉRIMENTAL SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » (SITUATION 20 [KG] & 1.5 [kN]).....	191
FIGURE 145 - COMPARAISON ENTRE LE PREMIER MODE NUMÉRIQUE « LUMPED » ET L'EXPÉRIMENTAL SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » (SITUATION 30 [KG] & 1.5 [kN]).....	192
FIGURE 146 - COMPARAISON ENTRE LE PREMIER MODE NUMÉRIQUE « LUMPED » ET L'EXPÉRIMENTAL SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » (SITUATION 40 [KG] & 1.5 [kN]).....	192
FIGURE 147 - COMPARAISON ENTRE LE PREMIER MODE NUMÉRIQUE « LUMPED » ET L'EXPÉRIMENTAL SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » (SITUATION 0 [KG] & 2.5 [kN]).....	193
FIGURE 148 - COMPARAISON ENTRE LE PREMIER MODE NUMÉRIQUE « LUMPED » ET L'EXPÉRIMENTAL SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » (SITUATION 0 [KG] & 3.5 [kN]).....	193
FIGURE 149 - COMPARAISON ENTRE LE PREMIER MODE NUMÉRIQUE « LUMPED » ET L'EXPÉRIMENTAL SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » (SITUATION 10 [KG] & 3.5 [kN]).....	194
FIGURE 150 - COMPARAISON ENTRE LE PREMIER MODE NUMÉRIQUE « LUMPED » ET L'EXPÉRIMENTAL SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » (SITUATION 20 [KG] & 3.5 [kN]).....	194
FIGURE 151 - COMPARAISON ENTRE LE PREMIER MODE NUMÉRIQUE « LUMPED » ET L'EXPÉRIMENTAL SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » (SITUATION 30 [KG] & 3.5 [kN]).....	195
FIGURE 152 - COMPARAISON ENTRE LE PREMIER MODE NUMÉRIQUE « LUMPED » ET L'EXPÉRIMENTAL SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » (SITUATION 40 [KG] & 3.5 [kN]).....	195
FIGURE 153 - COMPARAISON ENTRE LE PREMIER MODE NUMÉRIQUE « LUMPED » ET L'EXPÉRIMENTAL SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » (SITUATION 0 [KG] & 4.5 [kN]).....	196
FIGURE 154 - COMPARAISON ENTRE LE PREMIER MODE NUMÉRIQUE « LUMPED » ET L'EXPÉRIMENTAL SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » (SITUATION 10 [KG] & 5.5 [kN]).....	196
FIGURE 155 - COMPARAISON ENTRE LE PREMIER MODE NUMÉRIQUE « LUMPED » ET L'EXPÉRIMENTAL SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » (SITUATION 20 [KG] & 5.5 [kN]).....	197

FIGURE 156 - COMPARAISON ENTRE LE PREMIER MODE NUMÉRIQUE « LUMPED » ET L'EXPÉRIMENTAL SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSÉES » (SITUATION 30 [KG] & 5.5 [kN]).....	197
---	-----

Liste des tableaux

TABLEAU 1 – COORDONNEES NODALES EN POSITION INITIALE	16
TABLEAU 2 – REPARTITION NODALE DU POIDS PROPRE DU « SIMPLEX – MASSES PENDUES » - ÉTUDE STATIQUE	18
TABLEAU 3 – POIDS PROPRE DES NŒUDS DU « SIMPLEX – MASSES PENDUES » - ÉTUDE STATIQUE...	18
TABLEAU 4 – POIDS PROPRE DES ELEMENTS LINEIQUES COMPOSANT LE « SIMPLEX – MASSES PENDUES » - ÉTUDE STATIQUE	19
TABLEAU 5 – RÉPARTITION NODALE DU POIDS PROPRE DU « SIMPLEX – MASSES PENDUES » - ÉTUDE DYNAMIQUE	20
TABLEAU 6 – POIDS PROPRE DES NŒUDS DU « SIMPLEX – MASSES PENDUES » - ÉTUDE DYNAMIQUE	20
TABLEAU 7 – POIDS PROPRE DES ÉLÉMENTS LINÉIQUES COMPOSANT LE « SIMPLEX – MASSES PENDUES » - ÉTUDE DYNAMIQUE	20
TABLEAU 8 - DESCRIPTIF DU COMPOSANT « DYNAMICS SOLVER LUMPED »	77
TABLEAU 9 - DESCRIPTIF DU COMPOSANT « DYNAMICS SOLVER CONSISTENT »	78
TABLEAU 10 - DESCRIPTIF DU COMPOSANT « SELF MASS »	79
TABLEAU 11 - DESCRIPTIF DU COMPOSANT « POINT MASS »	80
TABLEAU 12 - DESCRIPTIF DU COMPOSANT « DISASSEMBLE DYNAMICS »	80
TABLEAU 13 - DESCRIPTIF DU COMPOSANT « POINT MASS PROPERTIES »	81
TABLEAU 14 - DESCRIPTIF DU COMPOSANT « DYNAMICS MASSES DISPLAY »	81
TABLEAU 15 - DESCRIPTIF DU COMPOSANT « DYNAMICS DISPLAY »	82
TABLEAU 16 - REPARTITION NODALE DU POIDS PROPRE DU « SIMPLEX – MASSES POSEES » INCLUANT LES MASSES DES ACCELEROMETRES	90
TABLEAU 17 - POIDS PROPRE DES NŒUDS DU « SIMPLEX – MASSES POSEES » INCLUANT LES MASSES DES ACCELEROMETRES	90
TABLEAU 18 - POIDS PROPRE DES ELEMENTS LINEIQUES COMPOSANT LE « SIMPLEX – MASSES POSEES »	90
TABLEAU 19 - SITUATIONS TESTEES SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSEES »	91
TABLEAU 20 - ANALYSE DES RESULTATS DE LA PREMIERE FREQUENCE PROPRE SOUS POIDS PROPRE ET DIFFERENTS NIVEAUX DE PRECONTRAINTE	94
TABLEAU 21 - ANALYSE DES RESULTATS DE LA PREMIERE FREQUENCE PROPRE SOUS CHARGEMENT EXTERNE ET DIFFERENTS NIVEAUX DE PRECONTRAINTE	95
TABLEAU 22 - ANALYSE DE LA COMPARAISON DES RESULTATS OBTENUS GRACE AUX DEUX TYPES DE MATRICE DE MASSE POUR LA PREMIERE FREQUENCE PROPRE SOUS CHARGEMENT EXTERNE ET DIFFERENTS NIVEAUX DE PRECONTRAINTE	97
TABLEAU 23 - ANALYSE DES RESULTATS DE LA SECONDE FREQUENCE PROPRE SOUS POIDS PROPRE ET DIFFERENTS NIVEAUX DE PRECONTRAINTE	98
TABLEAU 24 - ANALYSE DES RESULTATS DE LA SECONDE FREQUENCE PROPRE SOUS CHARGEMENT EXTERNE ET DIFFERENTS NIVEAUX DE PRECONTRAINTE	99
TABLEAU 25 - ANALYSE DE LA COMPARAISON DES RESULTATS OBTENUS GRACE AUX DEUX TYPES DE MATRICE DE MASSE POUR LA SECONDE FREQUENCE PROPRE SOUS CHARGEMENT EXTERNE ET DIFFERENTS NIVEAUX DE PRECONTRAINTE	101
TABLEAU 26 - ANALYSE NUMERIQUE DE L'INFLUENCE DE LA RIGIDITE MATERIELLE SUR LA VALEUR DES FREQUENCES PROPRES	103

TABLEAU 27 – COMPARATIF DU PREMIER MODE NUMÉRIQUE (LUMPED) ET EXPÉRIMENTAL DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » POUR LES QUATRE SITUATIONS EXTRÊMES	108
TABLEAU 28 – COMPARAISON DU PREMIER MODE NUMÉRIQUE (LUMPED) ET EXPÉRIMENTAL DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES » POUR LES QUATRE SITUATIONS EXTRÊMES	109
TABLEAU 29 – ETUDE NUMÉRIQUE SUR LA FORME DU PREMIER MODE DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES »	110
TABLEAU 30 – COMPARAISON DU PREMIER MODE NUMERIQUE (LUMPED) DU « SIMPLEX – MASSES POSEES » SOUS L'INFLUENCE DE LA PRECONTRAINTES	111
TABLEAU 31 – ETUDE NUMÉRIQUE SUR LA FORME DU PREMIER MODE DU « SIMPLEX – MASSES POSÉES »	112
TABLEAU 32 – COMPARAISON DU PREMIER MODE NUMERIQUE (LUMPED) DU « SIMPLEX – MASSES POSEES » SOUS L'INFLUENCE DE LA PRECONTRAINTES	113
TABLEAU 33 – COMPARAISON DU PREMIER MODE NUMERIQUE (LUMPED) DU « SIMPLEX – MASSES POSEES » ET DU MECANISME INTERNE DU SIMPLEX POUR QUATRE SITUATIONS EXTREMES ...	114
TABLEAU 34 – COMPARAISON DU PREMIER MODE NUMERIQUE (LUMPED) DU « SIMPLEX – MASSES POSEES » ET DU MECANISME INTERNE DU SIMPLEX.....	115
TABLEAU 35 - SYNTHÈSE DES CARACTERISTIQUES MECANQUES DES ELEMENTS CONSTITUANTS LE SIMPLEX [20].....	127
TABLEAU 36 - RECAPITULATIF DES PRISES DE MESURES STATIQUES SOUS 1.5 [kN] DE NIVEAU DE PRECONTRAINTES	129
TABLEAU 37 - INFORMATION SUR LES ACCELEROMETRES UTILISES	137
TABLEAU 38 - RECAPITULATIF DE LA CONFIGURATION DE PRISE DE MESURE.....	139
TABLEAU 39 - QUATRE SITUATIONS EXTRÊMES TESTÉES SUR LE « SIMPLEX ».....	145
TABLEAU 40 - RECAPITULATIF DES RESULTATS EXPERIMENTAUX EN CHARGEANT LA STRUCTURE A L'AIDE DES PLATEAUX SUSPENDUS	147
TABLEAU 41 - SYNTHÈSE DE LA FREQUENCE DU PREMIER PIC EN FONCTION DU PROTOCOLE.....	152
TABLEAU 42 - RESULTATS OBTENUS DE LA SITUATION 1 POUR LES QUATRE PROTOCOLES – « SIMPLEX MASSES PENDUES »	155
TABLEAU 43 - COMPARATIF ENTRE LES PICS ET LES FREQUENCES PROPRES SIMULEES (SITUATION 1)	156
TABLEAU 44 - RÉSULTATS OBTENUS DE LA SITUATION 2 POUR LES QUATRE PROTOCOLES – « SIMPLEX MASSES PENDUES »	157
TABLEAU 45 - COMPARATIF ENTRE LES PICS ET LES FREQUENCES PROPRES SIMULEES (SITUATION 2)	158
TABLEAU 46 - RESULTATS OBTENUS DE LA SITUATION 3 POUR LES QUATRE PROTOCOLES– « SIMPLEX MASSES PENDUES »	159
TABLEAU 47 - COMPARATIF ENTRE LES PICS ET LES FREQUENCES PROPRES SIMULEES (SITUATION 3)	160
TABLEAU 48 - RESULTATS OBTENUS DE LA SITUATION 4 POUR LES QUATRE PROTOCOLES– « SIMPLEX MASSES PENDUES »	161
TABLEAU 49 - COMPARATIF ENTRE LES PICS ET LES FREQUENCES PROPRES SIMULEES (SITUATION 4)	162
TABLEAU 50 – SYNTHÈSE DES RESULTATS DE LA PREMIERE FREQUENCE PROPRE [Hz] OBTENUS SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSEES »	167
TABLEAU 51 - SYNTHÈSE DES RESULTATS DE LA SECONDE FREQUENCE PROPRE [Hz] OBTENUS SUR LE « SIMPLEX – MASSES POSEES »	168

Liste des équations

ÉQUATION 1.....	22
ÉQUATION 2.....	22
ÉQUATION 3.....	24
ÉQUATION 4.....	24
ÉQUATION 5.....	28
ÉQUATION 6.....	30
ÉQUATION 7.....	31
ÉQUATION 8.....	31
ÉQUATION 9.....	31
ÉQUATION 10.....	31
ÉQUATION 11.....	32
ÉQUATION 12.....	40
ÉQUATION 13.....	40
ÉQUATION 14.....	40
ÉQUATION 15.....	41
ÉQUATION 16.....	42
ÉQUATION 17.....	43
ÉQUATION 18.....	43
ÉQUATION 19.....	43
ÉQUATION 20.....	43
ÉQUATION 21.....	43
ÉQUATION 22.....	44
ÉQUATION 23.....	44
ÉQUATION 24.....	45
ÉQUATION 25.....	45
ÉQUATION 26.....	47
ÉQUATION 27.....	47
ÉQUATION 28.....	47
ÉQUATION 29.....	48
ÉQUATION 30.....	48
ÉQUATION 31.....	50
ÉQUATION 32.....	51
ÉQUATION 33.....	51
ÉQUATION 34.....	51
ÉQUATION 35.....	51
ÉQUATION 36.....	51
ÉQUATION 37.....	52
ÉQUATION 38.....	52
ÉQUATION 39.....	52
ÉQUATION 40.....	52
ÉQUATION 41.....	52
ÉQUATION 42.....	53
ÉQUATION 43.....	53

ÉQUATION 44.....	53
ÉQUATION 45.....	53
ÉQUATION 46.....	53
ÉQUATION 47.....	54
ÉQUATION 48.....	54
ÉQUATION 49.....	54
ÉQUATION 50.....	55
ÉQUATION 51.....	131
ÉQUATION 52.....	131
ÉQUATION 53.....	132
ÉQUATION 54.....	132

Bibliographie

- [1] D. Chay, «La tenségrité : cet art de l'ingénierie méconnu.», 3 Septembre 2020. [En ligne]. Available: <https://en-bref.media/2020/09/03/la-tensegrite-cet-art-meconnu/>. [Accès le 14 Aout 2022].
- [2] Wikipedia, «Tenségrité (architecture)», 2022. [En ligne]. Available: [https://fr.wikipedia.org/wiki/Tens%C3%A9grit%C3%A9_\(architecture\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Tens%C3%A9grit%C3%A9_(architecture)).
- [3] BELEXPO, «La tenségrité : savoir-faire belge», BELEXPO, 29 Mai 2019. [En ligne]. Available: <https://belexpo.be/fr/nouvelles/la-tensegrite-savoir-faire-belge>. [Accès le 15 Aout 2022].
- [4] Y. LI, X.-Q. FENG, Y.-P. CAO et H. GAO, «Constructing tensegrity structures from one-bar elementary cells», *Proceedings of the royal society*, 2009.
- [5] Wikipedia, «Slackline», 6 Juillet 2022. [En ligne]. Available: <https://fr.wikipedia.org/wiki/Slackline>. [Accès le 5 Aout 2022].
- [6] P. LATTEUR, «UCL IMMC GCE», 2022. [En ligne]. Available: <https://uclouvain.be/en/research-institutes/immc/gce/tensegrity-structures.html>. [Accès le 25 Avril 2022].
- [7] R. L. SWANSON, «Biotensegrity: A Unifying Theory of Biological Architecture With Applications to Osteopathic Practice, Education, and Research—A Review and Analysis», *Journal of Osteopathic Medicine*, 14 avril 2022. [En ligne]. Available: <https://www.degruyter.com/document/doi/10.7556/jaoa.2013.113.1.34/html>. [Accès le 2022].
- [8] R. MOTRO, «Système de tenségrité», 2000.
- [9] Wikipedia, «Richard Buckminster Fuller», 2022. [En ligne]. Available: https://fr.wikipedia.org/wiki/Richard_Buckminster_Fuller. [Accès le 24 Avril 2022].
- [10] FLICKR, «FLICKR», 26 avril 2016. [En ligne]. Available: <https://www.flickr.com/photos/7973320@N07/27850325976/in/photolist-Jr3cC5-51ktVx-qhXwVD-V8cFRA-JhoyYR-rvkBSU-7SMt5c-23Z9jCX-PZyGWn-rYHKeR-CVnL2Q-b3qXRz-p3TLBn-UBdDq1-5DU2gF-HbfnKM-aknw9A-xW5u-26Ajch7-wVsthL-PEayS-XyVytS-27YURa1-nhCw3X-9UWaN7-Sp6Dt3-UrykJa>. [Accès le 02 Juin 2022].
- [11] Fonds régional d'art contemporain Centre-Val de Loire, «FRAC Centre-Val de Loire», 2022. [En ligne]. Available: <https://www.frac-centre.fr/collection-art-architecture/rub/rubauteurs-58.html?authID=66>. [Accès le 27 Avril 2022].
- [12] Fonds régional d'art contemporain Centre-Val de Loire, «FRAC Centre-Val de Loire», 2022. [En ligne]. Available: <https://www.frac-centre.fr/collection-art-architecture/emmerich-david-georges/pont-sur-manche-64.html?authID=66&ensembleID=16>. [Accès le 22 Avril 2022].

- [13] Stringfixer, «Expo 67,» 30 Septembre 2009. [En ligne]. Available: https://stringfixer.com/fr/Expo_%2767. [Accès le 24 Avril 2022].
- [14] J. FERON, L. BOUCHER, V. DENOEL et P. LATTEUR, «Optimisation of footbridges composed of prismatic tensegrity modules,» *ASCE*.
- [15] A. FLAMANT, «Tenségrité : design, calcul et optimisation sur base d'une approche paramétrique,» 2020.
- [16] J. FERON, «Optimisation des structures de tensegrité sur base d'indicateurs morphologiques,» 2016.
- [17] L. BOUCHER, «Optimisation des structures de tensegrité composées de modules prismatiques,» 2017.
- [18] I. BOUCKAERT, «Analyse du comportement d'une passerelle de tensegrité sous charges aléatoires,» 2019.
- [19] R. ANTOINE et N. DANZIN, «Structure en tensegrité : analyse critique des résultats numériques sur un simplex instrumenté de grande taille,» 2021.
- [20] J. FERON, L. RHODE-BARBARIGOS et P. LATTEUR, Experimental testing of a tensegrity simplex: self-stress implementation and static loading, 2022.
- [21] P. LATTEUR, «Mécanique des structures,» UCL, 2022.
- [22] R. MAQUOI, «MECANIQUE DES STRUCTURES : notes de cours,» ULG, 2008.
- [23] N. BEL HADJ et I. SMITH, «Dynamic behavior and vibration control of a tensegrity structure,» *International Journal of Solids and Structures*, 2010.
- [24] K. KEBICHE, M. KAZI-AOUAL et R. MOTRO, «Geometrical non-linear analysis of tensegrity systems,» *Engineering Structures*, 1999.
- [25] V. DENOEL, «Analyse dynamique des structures du génie civil,» ULG, 2010.
- [26] J. SARAIVA ESTEVES PACHECO DE ALMEIDA, «Dynamics of structure,» UCL, 2022.
- [27] A. K. CHOPRA, Dynamics of structures : theory and applications to earthquake engineering.
- [28] V. G. JAUREGUI, «Tensegrity, the Queen of Structures ?,» *Internatuinal Journal of Space Structures*, vol. 27(4), 2012.
- [29] R. MOTRO, S. NAJARI et P. JOUANNA, «Static and Dynamic Analysis of Tensegrity,» *ASCE International Symposium on Shells and Spatial Structures*, 1986.
- [30] S. D. GUEST, «The stiffness of tensegrity structures,» *IMA journal of Applied Mathematics*, vol. 76(1), pp. 57-66, 2011.

- [31] N. BEL HADJ ALI, L. RHODE-BARBARIGOS, A. A. PASCUAL ALBI et I. F. SMITH, «Design optimization and dynamic analysis of a tensegrity-based footbridge,» 2010.
- [32] H. FURUYA, «Concept of deployable tensegrity structures in space application,» International Journal of Space Structures, 1992.
- [33] B. MOUSSA, N. BEN KHALA et J. PONS, «Evolution of natural frequencies in tensegrity systems: a case study,» International Journal of Space Structures, 2001.
- [34] H. MURAKAMI, «Static and dynamic analyses of tensegrity structures. Part II. Quasi-static analysis,» International Journal of Solids and Structures, 2001.
- [35] L. MALYSZKO et A. RUTKIEWICZ, «Response of a Tensegrity Simplex in Experimental Tests of a Modal Hammer at Different Self-Stress Levels,» Applied sciences, 2020.
- [36] Robert McNeel & Associates, «Rhinceros : concevoir, modeliser, présenter, analyser, réaliser ...,» 1993-2022. [En ligne]. Available: <https://www.rhino3d.com/features/#overview>. [Accès le 05 Juin 2022].
- [37] Wikipedia, «Rhinceros 3D,» 22 Avril 2022. [En ligne]. Available: https://fr.wikipedia.org/wiki/Rhinceros_3D. [Accès le 05 Juin 2022].
- [38] J. FERON, «Software presentation to BESIX - Extract,» 2022.
- [39] Wikipedia, «C#,» 30 Mars 2022. [En ligne]. Available: https://fr.wikipedia.org/wiki/C_sharp. [Accès le 05 Juin 2022].
- [40] JSON, «Introducing JSON,» [En ligne]. Available: <https://www.json.org/json-en.html>. [Accès le 05 Juin 2022].
- [41] S. R. SINGIRESU , «The Finite Element Method in Engineering (Sixth Edition),» 2018.
- [42] D. L. LOGAN, «The Finite Element Method in Engineering (Sixth Edition),» University of Wisconsin–Platteville, 2007.
- [43] SVibS, «SOLVING VIBRATION ISSUES OF ALL KIND OF STRUCTURES,» 2022. [En ligne]. Available: <https://svibs.com/>. [Accès le 12 juillet 2022].
- [44] A. SABAMEHR, «Sensequake - Experimental Modal Analysis VS. Operational Modal Analysis,» Sensequake, 2021. [En ligne]. Available: <https://www.sensequake.com/blog-ema-vs-oma>. [Accès le 12 juillet 2022].
- [45] N.-J. JACOBSEN, P. ANDERSEN et R. BRINCKER, «Using Enhanced Frequency Domain Decomposition as a Robust Technique to harmonic excitation in operational modal analysis,» ISMA2006, 2006.
- [46] J. J. D. Silva, «ResearchGate,» septembre 2019. [En ligne]. Available: https://www.researchgate.net/figure/1-Representation-dun-signal-dans-le-domaine-temporel-et-dans-le-domaine-frequeentiel_fig16_339713391. [Accès le 12 juillet 2022].

- [47] K. SNELSON, «Tenségrité (architecture),» 2022. [En ligne]. Available: [https://fr.wikipedia.org/wiki/Tens%C3%A9grit%C3%A9_\(architecture\)](https://fr.wikipedia.org/wiki/Tens%C3%A9grit%C3%A9_(architecture)).
- [48] Wikipedia, «Loi de Hooke,» 2022. [En ligne]. Available: https://fr.wikipedia.org/wiki/Loi_de_Hooke. [Accès le 2 Juin 2022].
- [49] J. SARAIVA ESTEVES PACHECO DE ALMEIDA, «Stabilité des Constructions,» UCL, 2022.
- [50] J. FERON, «Documents de travail du doctorat de J. FERON».
- [51] 3. export, «tensegrity anti-gravity structure Modelados 3D para Imprimir in Ingeniería 3DExport,» 3D export, [En ligne]. Available: https://netrinoimages.s3.eu-west-2.amazonaws.com/2015/02/11/384902/334386/tensegrity_antigravity_structure_3d_model_c4d_max_obj_fbx_ma_lwo_3ds_3dm_stl_3506404_o.jpg. [Accès le 1 Aout 2022].

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
École polytechnique de Louvain

Rue Archimède, 1 bte L6.11.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/epl