UCLouvain

École polytechnique de Louvain

Optimisation d'une passerelle de tenségrité soumise à des charges aléatoires

Auteur : **Igor Bouckaert**
Promoteur : **Pierre Latteur**
Lecteurs : **João Almeida, Jonas Feron, Luca Sgambi**
Année académique 2018–2019
Master [120] : ingénieur civil des constructions

Optimisation d'une passerelle de tenségrité soumise à des charges aléatoires

Igor BOUCKAERT

“When I am working on a problem, I never think about beauty... but when I have finished, if the solution is not beautiful, I know it is wrong.”

R. BUCKMINSTER FULLER

REMERCIEMENTS

Il y a un peu moins d'un an, j'entendais parler de la tenségrité pour la première fois. J'ai d'abord été intrigué et fasciné par l'esthétique de ces structures, leur apparente simplicité et la difficulté que j'avais à comprendre par quel équilibre de forces elles pouvaient tenir debout.

Ce n'est que plus tard, lors de deux entretiens avec Pierre LATTEUR, que je découvrais que derrière cette passerelle aux traits futuristes se cachait également une recherche liée au développement d'un outil d'optimisation des structures qui dépasse largement le domaine de la tenségrité : la théorie des indicateurs morphologiques.

Je n'ai pas eu trop d'un an de travail pour me familiariser avec cette théorie et en comprendre les implications. Malgré cela, il y a certainement de nombreuses subtilités que je n'ai pas encore comprises, mais j'ai eu le temps de me rendre compte et de m'émerveiller du potentiel de cette théorie pourtant peu connue.

Je tiens à remercier en premier lieu Pierre LATTEUR qui, malgré son absence sur le sol belge, a été un promoteur extrêmement disponible. Ses conseils, remarques et commentaires m'ont permis d'avancer toujours plus dans mon travail, le remettre en question et l'améliorer quotidiennement. Je le remercie également pour le soutien qu'il a apporté à ma candidature au poste d'assistant, qui a été une grande source de motivation.

Je remercie également Jonas FERON pour le temps précieux qu'il m'a consacré. Les nombreuses (et parfois très longues) discussions que nous avons eues, qui dépassaient souvent le cadre du mémoire, m'ont toujours passionné et motivé dans mon travail. Ses conseils avisés, sa bonne humeur et sa passion pour le sujet m'ont permis d'aller beaucoup plus loin que je ne l'aurais espéré. Je lui souhaite le meilleur pour sa thèse, en espérant pouvoir continuer à travailler avec lui, que ce soit à l'UCLouvain ou ailleurs.

Le temps que Damien FRANÇOIS a passé à m'aider m'a permis un gain de temps phénoménal. Merci à lui de m'avoir aidé à accéder aux clusters du CÉCI, à y installer les librairies Python dont j'avais besoin et à y faire tourner la majeure partie de mes simulations.

Merci également à Alexis BASTIEN, Quentin GRAVY, Marc ELIAERS et Lindy BOUCHER pour le travail qu'ils ont fourni pour mener la recherche sur la tenségrité à l'état d'aboutissement où elle se trouve à ce jour.

Je remercie d'avance João ALMEIDA et Luca SGAMBI pour le temps qu'ils consacreront à la lecture de ce mémoire et leur présence le jour de ma défense.

Merci aux membres du board LSM Conseil, Maunoir, Olivier, Joachim, Mathilde, Sarah, Nelson et Alexandre pour leur patience à mon égard et l'intérêt qu'ils ont porté à mes recherches tout au long de l'année. Sans leur soutien, je n'aurais jamais pu concilier deux entreprises aussi chronophages que sont LSM Conseil et le mémoire

Merci à mes amis de toujours Héloïse, Isabelle et Servais et à mes cokotteurs d'avoir su ponctuer cette année, et en particulier ce dernier mois de travail intensif, de tant de moments de détente toujours aussi bienvenus que nécessaires. Merci en particulier à Charles VAN OOST de m'avoir fait profiter de ses talents en Photoshop.

Et enfin, *last but not least,* je tiens à remercier ma famille, Félicie, Nils et surtout mes parents, Charlotte MOSSERAY et Thierry BOUCKAERT, non seulement pour leur aide, leurs relectures, leur soutien durant ce mémoire, mais également pour ces cinq années universitaires qui se clôturent. Ce sont leurs encouragements, leur gentillesse et leur enthousiasme permanents qui m'ont permis d'arriver aussi loin.

TABLE DES MATIERES

TABLE DES SYMBOLES IV

INTRODUCTION 1

CHAPITRE I PRELIMINAIRES 5

1. LA TENSEGRITE 5
1.1. Historique 5
1.2. Définitions 7
1.3. Typologie des structures de tenségrité 8
1.3.1. Le simplex 8
1.3.2. Autres cellules élémentaires 9
2. THEORIE DES INDICATEURS MORPHOLOGIQUES 14
2.1. Introduction : structures linéaires 14
2.2. Indicateurs morphologiques pour les structures non-linéaires 15
2.2.1. Indicateur de déplacement 15
2.2.2. Indicateur de volume 16
2.2.3. Indicateur de précontrainte 17
2.3. Conclusions 18
3. NON-LINEARITE DES STRUCTURES DE TENSEGRITE 19
3.1. Introduction 19
3.2. Calcul au second ordre 20
3.3. Méthode linéaire d'éléments finis 21
3.3.1. Principe général 21
3.3.2. Matrice de raideur locale 21
3.3.3. Matrice de raideur globale 22
3.3.4. Conditions aux appuis 23
3.3.5. Post-traitement des résultats 23
3.3.6. Considérations sur la méthode linéaire 23
3.4. Méthode non-linéaire d'éléments finis 24
3.4.1. Principe 24
3.4.2. Matrice de raideur 24
3.4.3. Avancement dans la solution 25
3.4.4. Equation de contrainte $\Delta\lambda$ 26
3.4.5. Solveur non-linéaire 26
4. OPTIMISATION 29
4.1. Ajustement du niveau de précontrainte 29
4.1.1. Application de la précontrainte 29
4.1.2. Processus d'ajustement 30
4.2. Optimisation des sections 31
4.2.1. Influence de l'indicateur de flambement 31
4.2.2. Méthodes d'optimisation des sections 31
4.2.3. Processus d'optimisation 32
4.3. Optimisation de la structure 32
4.4. Optimisation complète 33

CHAPITRE II OPTIMISATION SOUS CHARGES ALEATOIRES 35

1. INTRODUCTION 35
1.1. Transmission des charges aux nœuds 35
PRINCIPE DE SUPERPOSITION 38

1.2. Le principe de superposition appliqué aux treillis ... *38*
1.3. Généralisation aux structures de tenségrité ... *40*
1.4. Conclusion ... *42*
2. MODIFICATION DE L'ALGORITHME D'AJUSTEMENT DE LA PRECONTRAINTE ... 43
2.1. Principe général ... *43*
2.2. Première boucle : principe de superposition ... *44*
2.3. Deuxième boucle : correction de l'erreur ... *47*
2.4. Algorithme complet et vérification ... *48*
3. MODIFICATION DE L'ALGORITHME D'OPTIMISATION DES SECTIONS ... 50
3.1. Principe général ... *50*
3.2. Première boucle : principe de superposition ... *50*
3.3. Seconde boucle : correction ... *52*
3.4. Algorithme final et vérification ... *52*
4. AUGMENTATION DE LA PUISSANCE DE CALCUL ... 54
5. CALCUL DES INDICATEURS MORPHOLOGIQUES ... 55
5.1. Indicateur de volume ... *55*
5.2. Indicateur de déplacement ... *55*

CHAPITRE III RESULTATS DE L'OPTIMISATION ... 59

1. DEFINITION DES STRUCTURES ... 59
1.1. Nombre de modules ... *59*
1.2. Conditions aux appuis ... *60*
1.3. Configurations ... *61*
2. OPTIMISATION DES STRUCTURES ... 63
2.1. Optimisation « group » ... *63*
2.1.1. Sans flambement : Psi=0 ... 63
2.1.2. Avec flambement : Psi=35 ... 66
2.1.3. Courbes d'efficience ... 69
2.2. Optimisation « full-stress » ... *72*
2.2.1. Sans flambement : Psi=0 ... 72
2.2.2. Avec flambement : Psi=35 ... 75
2.2.3. Courbes d'efficience ... 77
3. INFLUENCE DU POIDS PROPRE ... 79
3.1. Indicateur de poids propre ... *79*
3.2. Résultats en tenant compte du poids propre ... *80*
3.2.1. Sans flambement : Psi=0 ... 81
3.2.2. Avec flambement : Psi=35 ... 84
3.2.3. Courbes d'efficience ... 87

CHAPITRE IV CONSIDERATIONS SUR LES ETATS LIMITES ET NORMES DE SECURITE ... 91

1. INTRODUCTION ... 91
2. ETATS-LIMITES ... 92
2.1. Dimensionnement aux états-limites ultimes ... *92*
2.1.1. Combinaisons d'actions ... 92
2.1.2. Critères à l'ELU ... 93
2.2. Dimensionnement aux états-limites de service ... *94*
2.2.1. Combinaisons à l'ELS ... 94
2.2.2. Critères à l'ELS ... 94
2.3. Indicateurs morphologiques ... *95*

2.3.1. Indicateur de charges permanentes ... 95
2.3.2. Autres indicateurs ... 95
2.4. Conclusion ... 96
3. DIMENSIONNEMENT DES STRUCTURES DE TENSEGRITE AUX ETATS-LIMITES ... 97
3.1. Calcul du niveau de précontrainte ... 97
3.2. Correction de la flèche ... 97
3.3. Influence de l'indicateur de charge permanente ... 100
3.3.1. Définition des structures ... 100
3.3.2. Résultats ... 100
4. RESULTATS DE L'OPTIMISATION ... 102
4.1. Charges permanentes négligeables ... 102
4.1.1. Indicateurs morphologiques ... 102
4.1.2. Correction de la flèche ... 104
4.1.3. Courbes d'efficience ... 105
4.2. Charges permanentes non négligeables ... 106
4.2.1. Indicateurs morphologiques ... 106
4.2.2. Correction de la flèche ... 108
4.2.3. Courbes d'efficience ... 109
5. CONCLUSION ... 111

CHAPITRE V DIMENSIONNEMENT D'UNE PASSERELLE ... 113

1. DONNEES DU PROBLEME ... 113
2. DIMENSIONNEMENT ... 113
3. INFLUENCE DU NOMBRE DE SIMPLEX ... 115

TABLE DES ANNEXES ... XIX

TABLE DES FIGURES ... XX

BIBLIOGRAPHIE ... XXV

TABLE DES SYMBOLES

$\bar{d}_{loc}$	$[m]$	Vecteur de déplacement des nœuds d'un élément
$\bar{F}_{ext}$	$[N]$	Vecteur des forces externes appliquées sur un élément
$\bar{F}_{int}$	$[N]$	Vecteur des forces internes dans un élément
$\bar{K}_{0,loc}$	$[N/m]$	Matrice de raideur locale initiale d'un élément
$\bar{K}_0$	$[N/m]$	Matrice de raideur globale initiale
$\bar{K}_{k,loc}$	$[N/m]$	Matrice de raideur locale d'un élément à l'itération k
$\bar{K}_k$	$[N/m]$	Matrice de raideur globale à l'itération k
$\bar{T}_{i,j}$	$[-]$	Matrice de changement de base
Δ_i	$[N]$	Diminution d'effort normal dans un élément suite à l'application d'un cas de charge i
A^1	$[N]$	Cas de charge de base d'une structure
A_e	$[m^2]$	Aire de l'élément e
B_e	$[-]$	Nombre d'éléments de la structure
c_X	$[-]$	Cosinus directeur selon X
c_Y	$[-]$	Cosinus directeur selon Y
$\bar{c}$	$[-]$	Matrice des degrés de liberté bloqués par des conditions d'appui
d_X	$[m]$	Composante en X du déplacement d'un nœud
d_Y	$[m]$	Composante en Y du déplacement d'un nœud
$\bar{d}$	$[m]$	Vecteur de déplacement des nœuds de la structure
$\bar{D}$	$[m]$	Matrice des déplacements imposés aux appuis
f_e	$[Pa]$	Limite d'élasticité du matériau
f_k	$[Pa]$	Résistance mécanique du matériau
F_X	$[N]$	Composante en X de la force appliquée sur un nœud
F_Y	$[N]$	Composante en Y de la force appliquée sur un nœud
$\bar{g}$	$[m]$	Fonction de contraintes de la structure
I_s	$[-]$	Degré d'hyperstaticité de la structure

l_0	$[m]$	Longueur initiale d'un élément
L_0	$[m]$	Longueur initiale d'un élément
l_b	$[m]$	Longueur d'une barre dans un simplex régulier
l_c	$[m]$	Longueur d'un câble dans un simplex régulier
l_k	$[m]$	Longueur d'un élément après un calcul au k-ième ordre
$\mathrm{l_z}$	$[m]$	Longueur d'une zone d'influence
$N_{\sum F}^{n}$	$[N]$	Effort normal dans la structure hyperstatique
n_1^0	$[N]$	Effort normal dans la structure isostatique soumise à une charge unitaire
N_H	$[N]$	Composante horizontale de l'effort normal
N_i	$[N]$	Effort normal dans un élément suite à l'application d'un cas de charge i
N_{k}	$[N]$	Effort normal dans un élément après un calcul au k-ième ordre
$\mathrm{n_k}$	$[N]$	Effort normal dans la structure isostatique soumise à une charge unitaire après un calcul au k-ième ordre
N_{max}	$[N]$	Effort normal maximal rencontré dans un élément
$N_{nœuds}$	$[-]$	Nombre de nœuds de la structure
N_{pre}^{i}	$[N]$	Effort de précontrainte intériorisé à l'itération i
$\mathrm{N_{pre}}$	$[N]$	Effort normal dans l'élément après intériorisation de la précontrainte
N_V	$[N]$	Composante verticale de l'effort normal
$P_{corrigé}$	$[N]$	Niveau de précontrainte corrigé pour respecter le critère de flèche
P^i	$[N]$	Niveau de précontrainte à l'itération i
P_{min}	$[N]$	Niveau de précontrainte minimal pour qu'aucun câble ne se détende
$\bar{\mathrm{p}}$	$[-]$	Chargement incrémental
$\vec{P}$	$[N]$	Scénario de précontrainte
$\vec{p}$	$[-]$	État de précontrainte
$\mathrm{q_v}$	$[N/m]$	Charge linéique appliquée sur le tablier
R_{appuis}	$[-]$	Nombre de réactions d'appuis
$\bar{\mathrm{r}}$	$[N]$	Vecteur des réactions aux appuis

$V_{i,max}$	$[m^3]$	Volume maximal d'un élément
$\bar{v}$	$[m]$	Vélocité incrémentale
W_{ext}	$[Nm]$	Travail des forces externes sur la structure
α_0	$[°]$	Angle d'inclinaison initial d'un élément
α_k	$[°]$	Angle d'inclinaison d'un élément après un calcul au k-ième ordre
α_X	$[-]$	Inclinaison d'un élément par rapport au repère global
δ_k	$[m]$	Déplacement d'un nœud après un calcul au k-ième ordre
δ_{PP}	$[m]$	Déplacement d'un nœud sous l'effet du poids propre de la structure
ϕ_b	$[mm]$	Diamètre d'une barre
ϕ_{cb}	$[mm]$	Diamètre d'un câble de base
ϕ_{cl}	$[mm]$	Diamètre d'un câble longitudinal
A	$[m^2]$	Aire d'un élément
$\mathcal{C}$	$[-]$	Espace des cas de charge appliqués à la structure
E	$[Pa]$	Module d'élasticité du matériau
F	$[N]$	Charge externe totale appliquée sur la structure
G	$[N]$	Actions permanentes sur la structure
H	$[m]$	Hauteur d'une structure
I	$[m^4]$	Inertie d'un élément
L	$[m]$	Portée d'une structure
l	$[-]$	Longueur d'incrémentation
m	$[-]$	Rapport entre l'épaisseur et la hauteur d'une section
N	$[-]$	Nombres de modules d'une structure de tenségrité
n	$[-]$	Nombre de nœuds sur lesquels une charge peut être transmise
P	$[N]$	Niveau de précontrainte
PP	$[N]$	Action du poids propre sur la structure
PR	$[N]$	Action de la précontrainte sur la structure
q	$[-]$	Facteur de forme des sections

Q	$[N]$	Actions variables sur la structure
r	$[-]$	Rapport entre la longueur d'une barre et d'un câble dans un simplex régulier
U	$[Nm]$	Energie élastique interne de la structure
V	$[m^3]$	Volume total de matière de la structure
W	$[-]$	Indicateur de volume
X	$[m]$	Abscisse d'un nœud dans son repère local
Y	$[m]$	Ordonnée d'un nœud dans son repère local
α	$[°]$	Angle de rotation entre deux bases d'un simplex
Δ	$[-]$	Indicateur de déplacement
δ	$[m]$	Flèche maximale de la structure
ε	$[-]$	Allongement relatif d'un élément
λ	$[-]$	Paramètre d'incrémentation adimensionnel
μ	$[-]$	Conditions d'extrémité d'un élément
Π	$[Nm]$	Énergie potentielle totale de la structure
ρ	$[N/m^3]$	Poids volumique du matériau
σ	$[Pa]$	Contrainte de dimensionnement du matériau
Φ	$[-]$	Indicateur de poids propre
Ψ	$[-]$	Indicateur de flambement
ψ	$[-]$	Coefficient de pondération des actions variables à l'ELS

INTRODUCTION

L'évocation du mot « tenségrité » suscite la plupart du temps des regards interrogateurs. Les rares personnes qui en ont déjà entendu parler ont une idée très vague de ce dont il s'agit, et la majeure partie des gens entendent ce mot pour la première fois.

L'architecte américain Richard BUCKMINSTER FULLER [1] définit la tenségrité comme suit : « *Islands of compression in a sea of tension* ». En effet, les structures de tenségrité sont composées d'un réseau continu de câbles tendus, au sein duquel une série de bielles comprimées viennent assurer l'équilibre du système.

Malgré le fait que les premières structures de tenségrité soient apparues il y a une cinquantaine d'années déjà, ce concept structural reste obscur et n'a été réellement utilisé que dans un cadre plutôt artistique, pour l'apparente légèreté et les nombreuses questions que de telles structures soulèvent au premier regard. Il est très rare que la tenségrité serve de structure portante principale et la majorité des structures construites à ce jour relèvent plus de la curiosité artistique que de l'ouvrage de génie civil en tant que tel.

Le fait qu'aucun véritable ouvrage de génie civil n'ait été construit sur base de ce principe structural s'explique assez facilement par la grande déformabilité de telles structures et la nécessité de recourir à des calculs numériques complexes. De plus, il n'est pas rare que la « légèreté » des structures de tenségrité ne soit qu'apparente, car celles-ci nécessitent en réalité souvent une plus grande quantité de matière que d'autres principes structuraux plus classiques comme le treillis. Un intérêt majeur des ouvrages de tenségrité réside donc dans des considérations architecturales et esthétiques.

Ce travail de mémoire repose sur une série d'autres travaux de recherche effectués par différentes personnes au sein de l'UCLOUVAIN. Cette recherche a pour objectif de rendre réalisable, un jour, la construction d'ouvrages de tenségrité, et de développer des outils numériques facilitant l'analyse et le dimensionnement de telles structures. Plus concrètement, une série de travaux ont été effectués autour d'un design de passerelle piétonne composée de modules de tenségrité.

Cette passerelle a été conçue durant l'année académique 2013-2014 par **Alexis BASTIEN** et **Quentin GRAVY**. Ceux-ci se sont d'abord intéressés à plusieurs typologies de modules de tenségrité, et se sont ensuite penchés sur un module en particulier, séduits par sa simplicité et son esthétique : le simplex. En alignant bout-à-bout plusieurs de ces modules élémentaires, ils ont ainsi développé une structure qui, en son centre, permet le passage de piétons.

Lors de l'analyse structurale de cette passerelle, de nombreux problèmes intrinsèques à la tenségrité ont fait surface : ces structures sont instables au premier ordre et, par conséquent, un calcul linéaire classique ne s'y applique pas. Ils ont cependant développé une méthode linéaire d'éléments finis qui permet d'obtenir une première approximation du comportement réel des structures de tenségrité. Toutefois la fiabilité de cette méthode peut être sérieusement questionnée.

Les prémices de la méthode de calcul utilisée dans ce mémoire-ci ont été développés durant l'année académique 2014-2015 par **Marc ELIAERS**, qui a modélisé le comportement des structures de tenségrité par une méthode non-linéaire d'éléments finis implémentée sur MATLAB.

Cette méthode a été reprise et améliorée l'année suivante (année académique 2015-2016) par **Jonas FERON**, qui a développé un outil numérique complet en Python. En plus d'implémenter l'analyse non-linéaire appliquée aux structures de tenségrité, il a également intégré à l'outil une méthode d'optimisation de ces structures basée sur la théorie des indicateurs morphologiques, adaptée aux structures tridimensionnelles, non-linéaires et précontraintes. Au terme de son mémoire, il a finalement prouvé la faisabilité de la passerelle développée deux ans plus tôt pour des charges uniformément réparties le long de la passerelle.

Lors de l'année académique 2016-2017, Lindy BOUCHER a encore amélioré l'outil numérique en y intégrant le poids propre des structures, qui n'était pas pris en compte jusqu'alors. Il a ensuite exploré plusieurs variantes à la passerelle composée de simplex, en explorant d'autres modules de tenségrité élémentaires tels que le quadruplex, le pentaplex, le module de Fuller, etc. Au terme de son travail, il a comparé différentes typologies de passerelle et en a conclu que le design initial est indéniablement le plus efficace (bien que d'autres typologies soient également faisables et présentent d'autres avantages), car le volume de matière à mettre en œuvre dans le cas d'une passerelle de simplex est nettement inférieur aux autres typologies, composées de plus d'éléments.

Ce mémoire-ci est donc le cinquième de la série « tenségrité » à l'UCLOUVAIN et a pour objectif de généraliser le travail de Jonas FERON en vérifiant la faisabilité des structures de tenségrité soumises cette fois-ci à des charges aléatoires statiques (par exemple, des piétons répartis de manière aléatoire le long de la passerelle). La principale difficulté d'une telle analyse réside dans le nombre de cas de charge à prendre en compte, qui augmente exponentiellement avec le nombre de modules. Il sera dès lors nécessaire de faire un choix réfléchi des cas de charge qui seront analysés, ainsi que d'essayer d'améliorer les algorithmes d'optimisation développés jusqu'à présent afin de limiter le temps de calcul nécessaire.

Ce mémoire se structure en cinq chapitres distincts :

Le CHAPITRE I a pour objectif d'expliquer le concept de tenségrité et d'en établir un bref historique. Il synthétise également les particularités de ces structures ainsi que les problèmes rencontrés par le concepteur lors de leur dimensionnement. Il passera aussi en revue les travaux effectués lors des mémoires précédents et utiles à la bonne compréhension de celui-ci. L'objectif n'est pas d'entrer dans les détails, mais d'offrir au lecteur non-initié à la tenségrité les bases nécessaires à la compréhension du travail de recherche développé aux chapitres suivants.

Le CHAPITRE II entre dans les détails de l'analyse non-linéaire des structures de tenségrité et plus particulièrement la manière dont celles-ci sont optimisées lorsqu'elles sont soumises à des charges aléatoires. Les hypothèses posées ainsi que les détails des algorithmes d'optimisation de la précontrainte et des sections y seront présentés, pour terminer par l'optimisation globale des structures, basée sur la théorie des indicateurs morphologiques, appliquée à des cas de charges aléatoires.

Le CHAPITRE III présentera les résultats de l'optimisation des structures de tenségrité sous charges aléatoires et comparera ces résultats avec le travail préalable de Jonas FERON et Lindy BOUCHER sur les structures soumises à des charges uniformément réparties.

Le CHAPITRE IV pose les bases d'une analyse complète des structures de tenségrité, soumises en même temps à des charges permanentes uniformément réparties et à des charges aléatoires en se basant sur les directives fournies par les Eurocodes. C'est ce type d'analyse qui se rapproche le plus de la réalité pratique et qui permettra finalement de prouver la faisabilité, tant en termes de volume de matière à mettre en œuvre qu'en termes de limitation des déplacements de la structure, d'une passerelle de tenségrité composée de simplex.

Finalement, le CHAPITRE V donnera un exemple concret de dimensionnement d'une telle passerelle afin que celle-ci respecte les critères aux états-limites ultimes et aux états-limites de service.

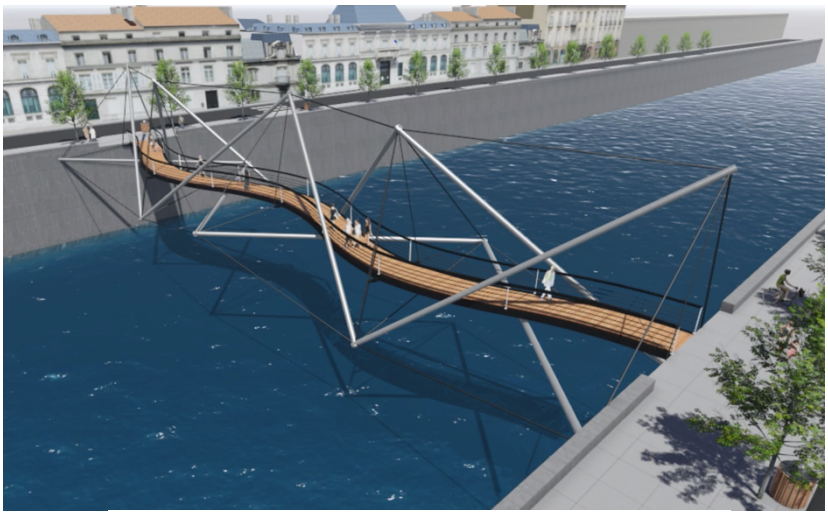


Figure I.1 - Passerelle de tenségrité composée de simplex [10, 11]

Chapitre I PRELIMINAIRES

Ce chapitre commence par exposer au lecteur le concept de tenségrité, son historique, ses domaines d'application et quelques ouvrages réalisés en tenségrité. Il s'attarde ensuite sur le simplex, qui est le module élémentaire composant la passerelle qui sera étudiée par la suite.

Il passe ensuite en revue les travaux qui précèdent ce mémoire-ci, en synthétisant la théorie des indicateurs morphologiques, largement développée par Pierre LATTEUR [2] et dont le domaine d'application a été élargi aux structures non-linéaires, tridimensionnelles et précontraintes par Jonas FERON [3]. Les résultats et conclusions des recherches de Lindy BOUCHER [4] y sont également résumés.

A la fin de ce chapitre, la non-linéarité des structures de tenségrité est développée plus en détail, en expliquant les sources de cette non-linéarité et la méthode de résolution qui y est associée. Ensuite, les méthodes d'optimisation utilisées dans les travaux précédents sont exposées : ajustement de la précontrainte, optimisation des sections et enfin optimisation de la structure à l'aide de la théorie des indicateurs morphologiques.

1. LA TENSEGRITE

1.1. HISTORIQUE

Étymologiquement, le mot « tenségrité » vient de l'anglais « tensegrity », qui est la contraction de « tensional integrity », exprimant le fait que l'intégrité du système est assurée par ses éléments en tension. Ce mot a été proposé par l'américain Richard BUCKMINSTER FULLER, un architecte actif dans les années 1950 et considéré comme l'un des pionniers de la tenségrité. Celui-ci s'intéressait particulièrement à la construction de dômes de tenségrité, qu'il ne dépasseront malheureusement jamais le stade de maquette [5].

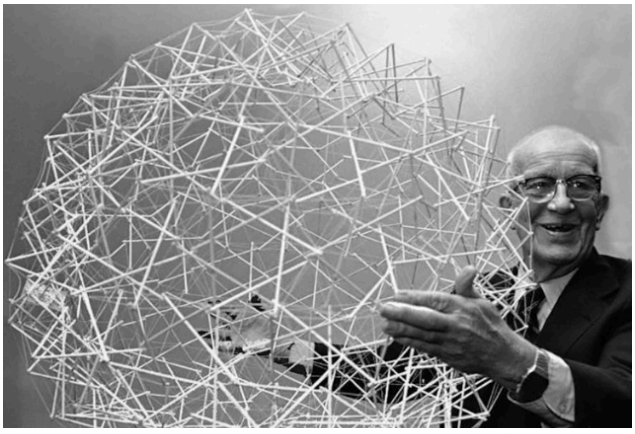
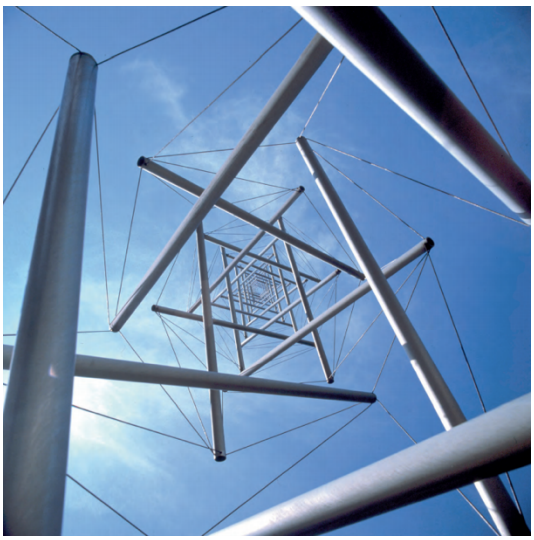


Figure I.1 - Richard BUCKMINSTER FULLER et une maquette de dôme en tenségrité [24]

Un autre précurseur dans le domaine de la tenségrité est l'artiste américain Kenneth SNELSON, un élève de Richard FULLER. Celui-ci a créé de nombreuses sculptures innovantes utilisant la tenségrité et affirme d'ailleurs que son professeur lui aurait subtilisé ses idées pour son propre compte [6].



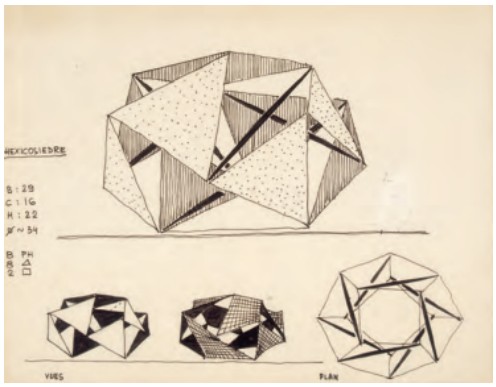
"Neddle Tower"



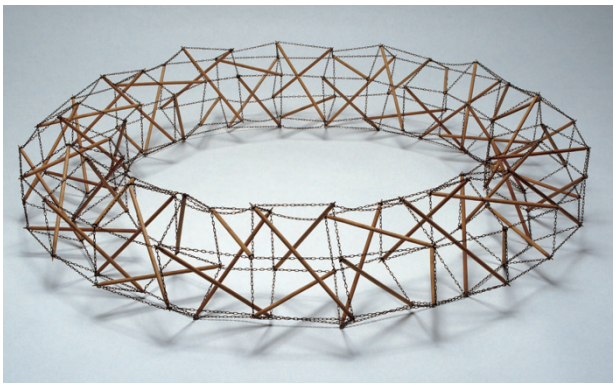
"Early X-Piece"

Figure I.2 - Réalisations de K. Snelson [6]

A la même période, l'architecte français d'origine hongroise David-Georges EMMERICH a développé des systèmes reposant sur le même principe structural, qu'il qualifie d'« autotendants » (le terme « tenségrité » sera par la suite préféré à « structures autotendantes » pour sa ressemblance avec l'anglais). Bien que son travail soit resté majoritairement théorique, il a développé de nombreux concepts qui sont une source d'inspiration pour beaucoup d'architectes [7].



Système autotendant par membrane



Tore hélicoïdal

Figure I.3 - Réalisations de David-Georges EMMERICH [25]

Par la suite, la tenségrité a été assez peu utilisée dans le domaine de la construction : on ne recense à ce jour que très peu d'ouvrages dont la structure principale est en tenségrité. On notera tout de même le pont « Kuripla » à Brisbane (Australie), une passerelle pour piétons et cyclistes construite sur ce principe [8].



Figure I.4 - Kuripla Bridge (Brisbane, Australie) [8]

1.2. DEFINITIONS

Une première description de la tenségrité est fournie par Richard FULLER lui-même :

« Islands of compression in a sea of tension [1] »

Aussi poétique soit-elle, cette description ne donne cependant pas de vraie définition des systèmes de tenségrité. Une formulation plus éclairante est fournie par René MOTRO:

« Les systèmes de tenségrité sont des systèmes réticulés spatiaux en état d'autocontrainte. Tous leurs éléments ont une fibre moyenne rectiligne et sont de taille équivalente. Les éléments tendus n'ont pas de rigidité en compression et constituent un réseau continu. Les éléments comprimés n'ont pas de rigidité en traction et constituent un ensemble discontinu. Chaque nœud reçoit un et un seul élément comprimé et au moins trois câbles [9] »

Cette définition est nettement plus précise et donne plusieurs indications concernant la nature d'un système de tenségrité :

- Il se trouve dans un état d'*autocontrainte*, c'est-à-dire que les efforts internes sont non-nuls même si le chargement externe est nul.
- Les éléments tendus sont de type câble et les éléments comprimés sont de type barre. Ces éléments sont connectés par des nœuds.

Notons que cette définition est assez restrictive et qu'il existe des systèmes de tenségrité pour lesquels deux barres se rejoignent en un même nœud ou pour lesquels certains nœuds reçoivent moins de 3 câbles. Certains de ces systèmes ont été analysés par Lindy BOUCHER [4] dans son mémoire.

Cependant, tous les systèmes de tenségrité analysés dans ce mémoire-ci correspondent à la définition fournie ci-dessus, on se contentera donc de celle-là, en y ajoutant toutefois deux hypothèses :

- Les nœuds de la structure sont rotulés, ce qui fait que les structures de tenségrité s'apparentent à un treillis 3D, pour lesquelles les éléments ne subissent que des efforts normaux (absence d'efforts tranchants et moments fléchissants)
- Le chargement externe s'applique uniquement sur les nœuds sous la forme de charges ponctuelles.

On ajoutera pour finir que les systèmes de tenségrité se trouvent toujours dans un état d'auto-équilibre stable. L'auto-équilibre signifie que l'équilibre des forces dans le système est assuré sans l'intervention d'une ou plusieurs réactions externes. Le fait que cet auto-équilibre soit stable signifie qu'une petite perturbation

(application d'une charge externe, par exemple) ne viendra pas perturber le système : celui-ci reviendra à son état initial après la perturbation.

1.3. TYPOLOGIE DES STRUCTURES DE TENSEGRITE

Toutes les structures de tenségrité sont composées d'au moins une « cellule élémentaire », ou d'un assemblage de plusieurs de ces cellules. Celles-ci se définissent comme étant des systèmes de tenségrité à partir desquels il est impossible de créer des systèmes de tenségrité plus simples en enlevant un ou plusieurs éléments.

Il existe donc une infinité de structures de tenségrité différentes qui peuvent soit être elles-mêmes des modules élémentaires, soit être décomposées en une série de modules élémentaires, qui sont chacun individuellement en état d'auto-équilibre.

Une famille de cellules élémentaires assez répandue a une base en forme de polygone régulier et est appelée « modules prismatiques ». C'est le cas du simplex, qui est la cellule élémentaire à partir de laquelle la passerelle piétonne est assemblée.

1.3.1. LE SIMPLEX

Le simplex est la cellule prismatique la plus simple qui existe : il est formé à partir d'une base triangulaire et se compose de 3 barres (représentées en rouge) et 9 câbles (six câbles composant les deux bases (représentés en bleu) et trois câbles reliant ces deux bases (représentés en vert)). L'angle de rotation entre les deux bases peut varier, comme le montre la Figure I.5).

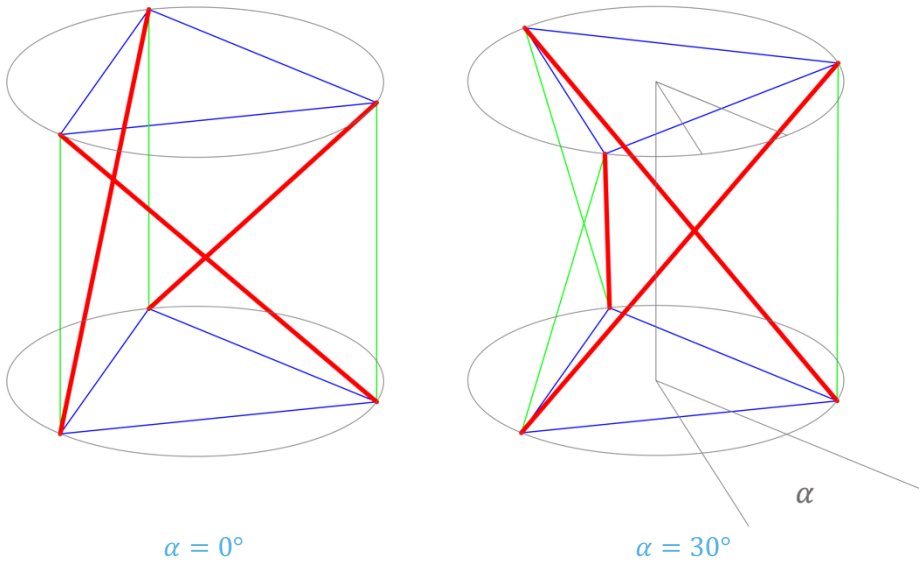
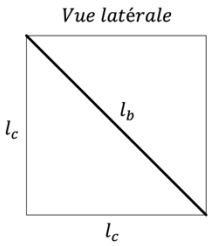


Figure I.5 - Simplex [Illustration de l'auteur adapté de [26]]

Afin d'expliquer le comportement de ce type de cellules, on prend l'exemple d'un simplex régulier, pour lequel les câbles de base et les câbles longitudinaux sont de la même longueur l_c, et les barres ont une longueur l_b. Il existe une relation géométrique entre le rapport de ces deux longueurs, noté r, et l'angle α, qui est l'angle de rotation relatif des deux bases [4].



$$r \equiv \frac{l_b}{l_c} = \sqrt{1 + \frac{2}{3} sin(\alpha + 60°)}$$

La Figure I.6 représente la relation entre le rapport l_b/l_c et l'angle de rotation relatif des deux bases.

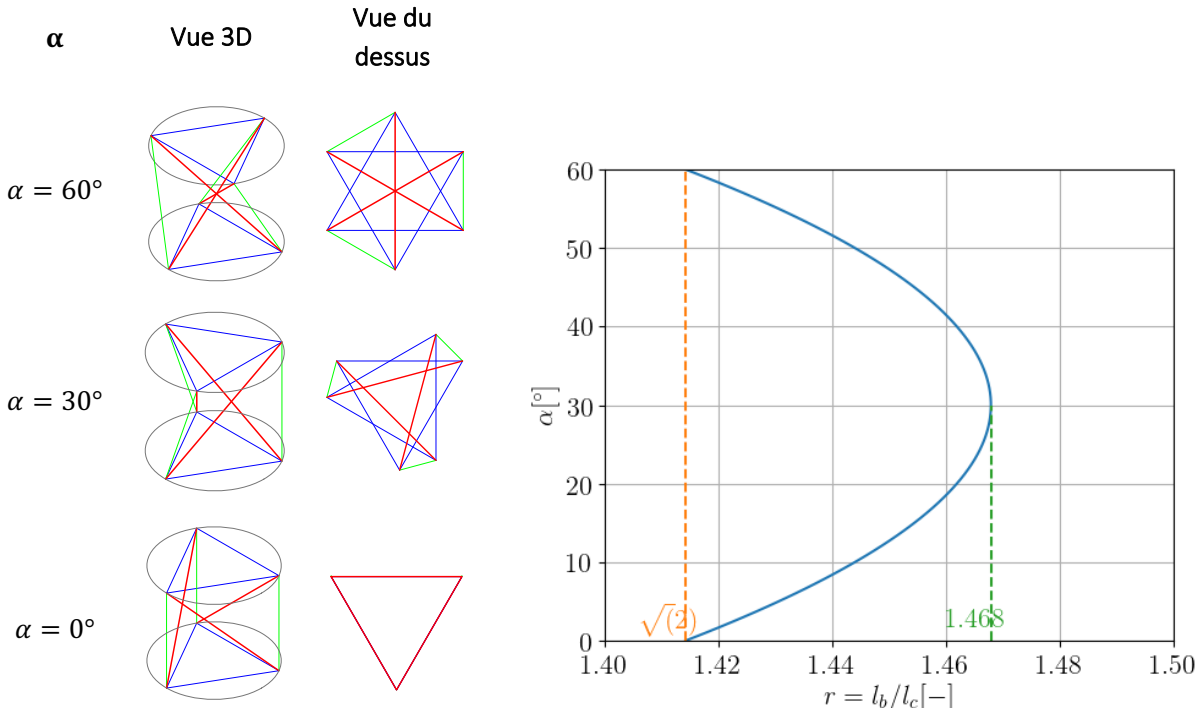


Figure I.6 - Variation de l'angle de rotation relatif des bases d'un simplex [Illustration de l'auteur, adapté de [4]]

On peut tirer plusieurs conclusions de cette relation :

- Si la longueur des câbles est trop grande ($r < \sqrt{2}$), les barres seront libres de déplacement, ce qui rend la géométrie impossible.
- Un rapport $r = \sqrt{2}$ correspond soit à $\alpha = 0°$, soit à $\alpha = 60°$. Dans cette dernière configuration, les trois barres se rejoignent en un même point.
- Un rapport $r = 1.468$ correspond à un angle de rotation $\alpha = 30°$. Cette géométrie n'imposant pas d'état d'autocontrainte, elle possède une rigidité nulle qui fait qu'à la moindre perturbation, elle se mettra en torsion pour atteindre un angle $\alpha = 30° \pm \epsilon$.
- Si la longueur initiale des câbles est trop courte, cela impose que ceux-ci s'allongent par traction et que les barres se raccourcissent par compression. Le système résultant tend vers un angle $\alpha = 30°$ et est en état d'autocontrainte, ce qui fait que, contrairement à la configuration précédente, le système possède une certaine rigidité et se trouve donc en état d'équilibre stable. Ce type de configuration correspond à la définition donnée par René Motro [9].

1.3.2. Autres cellules elementaires

Dans son mémoire, Lindy Boucher [4] explore la possibilité de construire une passerelle du même genre que celle développée antérieurement par Alexis Bastin et Quentin Gravy [10], mais en utilisant d'autres

modules élémentaires. En effet, le simplex n'est certainement pas le seul module élémentaire de tenségrité et la possibilité existe que d'autres typologies offrent de meilleures propriétés mécaniques. Cette section résume les recherches qu'il a effectuées lors de l'année 2016-2017.

1.3.2.1. Le Quadruplex

Le quadruplex est, comme le simplex, un module de tenségrité prismatique : il se compose de 4 barres, 4 câbles longitudinaux et 8 câbles de base et ses bases sont carrées. L'angle de rotation entre les deux bases ne vaut plus 30° comme c'était le cas pour les simplex, mais vaut dans ce cas 45°. Son avantage principal par rapport au simplex est qu'il est plus adapté au passage d'une passerelle en son sein, car il permet une plus grande hauteur de passage sans que les barres ne gênent les piétons.

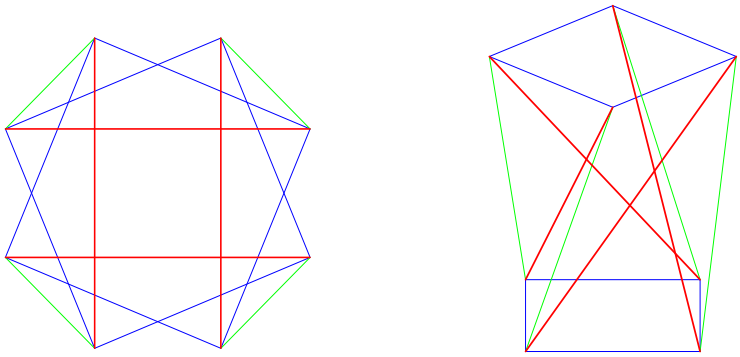


Figure I.7 - Quadruplex : vues transversale et générale [Illustration de l'auteur, adapté de [4]]

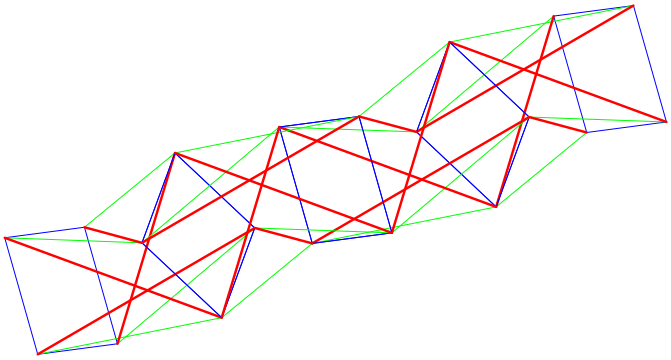


Figure I.8Passerelle de tenségrité composée de 4 quadruplex [Illustration de l'auteur, adapté de [4]]

1.3.2.2. Le Pentaplex

Le pentaplex est également un module élémentaire prismatique, composé cette fois-ci de 5 barres, 5 câbles longitudinaux et 10 câbles de base. Le tablier est également suspendu au nœud supérieur bien que, contrairement au quadruplex, la géométrie de la structure ne permette pas d'accrocher les câbles verticalement, ce qui aura pour conséquence d'incliner légèrement les charges externes.

L'angle nécessaire à un état d'auto-équilibre stable vaut 54°.

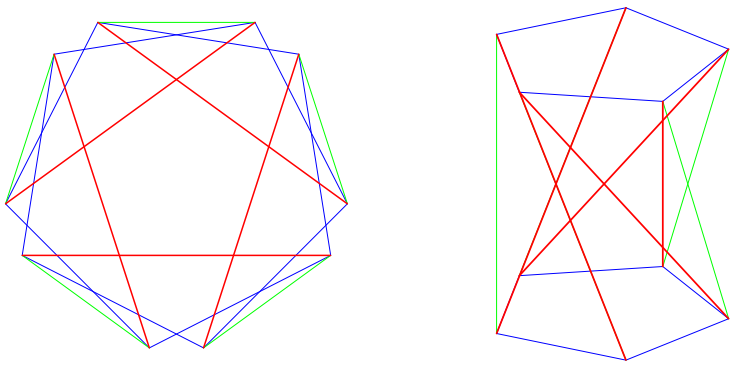


Figure I.10 – Pentaplex : vues transversale et générale [Illustration de l'auteur, adapté de [4]]

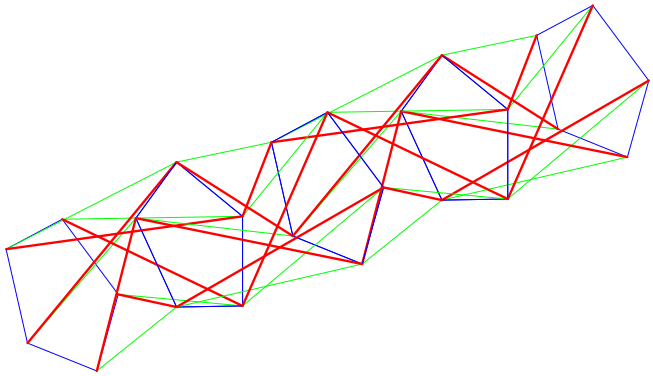


Figure I.9- Passerelle de tenségrité composée de 4 pentaplex [Illustration de l'auteur, adapté de [4]]

1.3.2.3. L'Hexaplex

L'hexaplex est le dernier module prismatique qui sera étudié. Il possède une base hexagonale et est composé de 6 barres, 12 câbles de base et 6 câbles longitudinaux. L'angle de rotation entre les deux bases est de 60°, ce qui a pour effet que les deux bases du module sont alignées entre elles. Une inclinaison adéquate de la structure permettra, à l'instar du quadruplex, la suspension du tablier par des câbles verticaux.

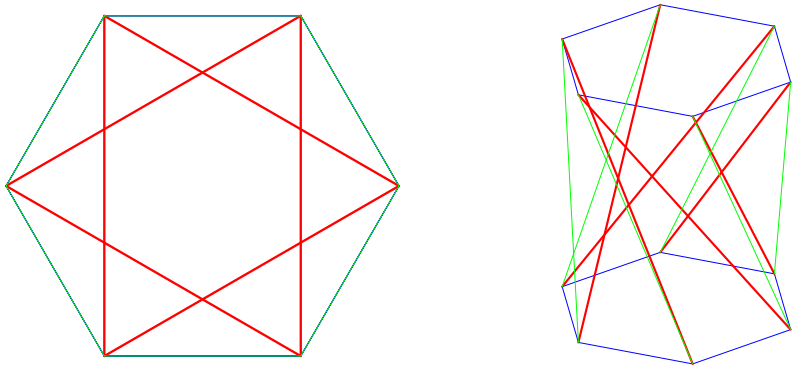


Figure I.11 – Hexaplex : vues transversale et générale [Illustration de l'auteur, adapté de [4]]

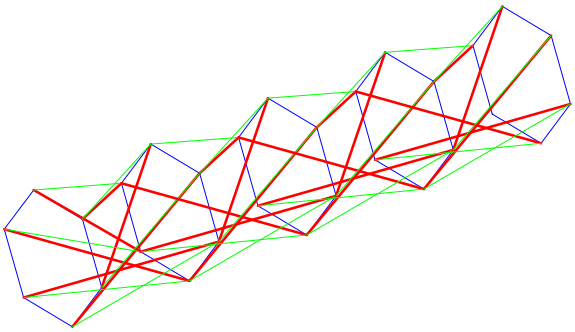


Figure I.12 – Passerelle de tenségrité composée de 4 hexaplex [Illustration de l'auteur, adapté de [4]]

1.3.2.4. Autres modules

De manière similaire, un certain nombre d'autres modules de tenségrité ont été étudiés :

Le premier est l'anneau de tenségrité à base pentagonale, un module composé de 5 barres latérales, 10 barres intermédiaires, 20 câbles longitudinaux et 10 câbles de base. On comprend assez vite qu'un tel module est nettement plus complexe et demande une quantité de volume considérable en comparaison des autres modules présentés. Les résultats de la recherche de Lindy BOUCHER confirment cette intuition et les passerelles composée d'anneaux de tenségrité sont rapidement écartées car trop lourdes et trop élancées.

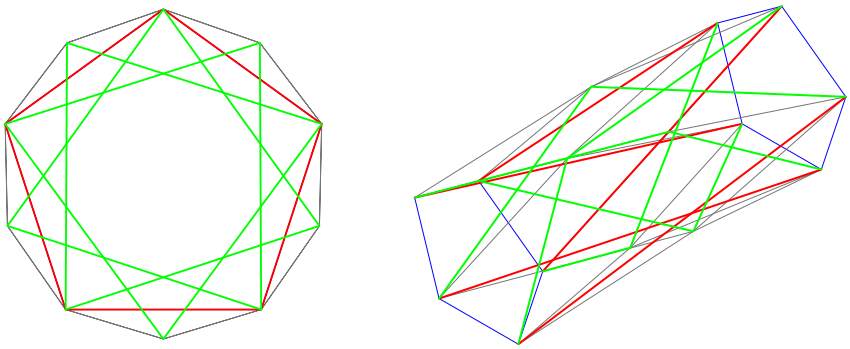


Figure I.14 – Anneau de tenségrité à base pentagonale : vues transversale et générale [Illustration de l'auteur, adapté de [4]]

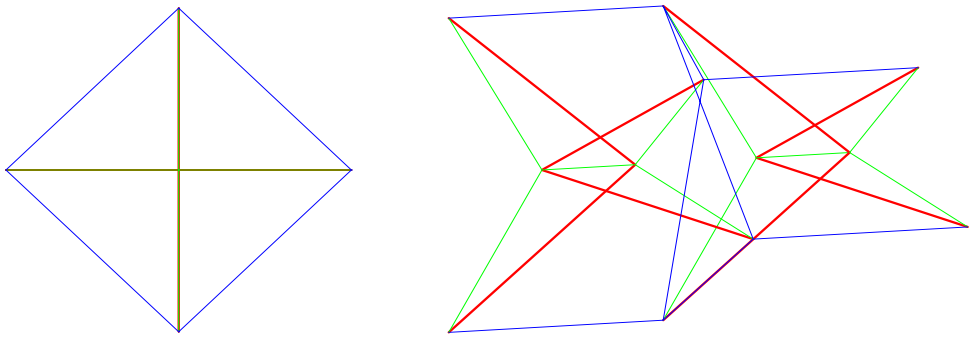


Figure I.13 – Structure composée de deux modules de Fuller successifs : vues transversale et générale [Illustration de l'auteur, adapté de [4]]

Le second est le module de Fuller, conçu par l'architecte du même nom, Richard FULLER. Mais lors de l'optimisation de telles structures, aucun des scénarios de précontrainte développés actuellement ne permet de trouver un état de précontrainte où tous les câbles restent tendus. L'étude de ce module a donc été abandonnée également.

1.3.2.5. Conclusions sur l'utilisation d'autres typologies

Au terme de l'étude réalisée par Lindy BOUCHER [4], il s'est avéré que seules les passerelles de tenségrité composées de modules prismatiques présentaient des résultats pertinents, chaque typologie présentant des avantages et des propriétés différentes.

Indéniablement, les structures les plus efficaces en termes de volume sont les structures composées de simplex. Ce sera donc cette typologie qui sera étudiée dans la suite de ce travail, tout en gardant à l'esprit que, dans certains cas, les passerelles composées d'autres modules élémentaires pourraient offrir une bonne alternative au simplex (cet aspect ne sera cependant pas développé plus en détail dans la suite de ce mémoire).

Parmi les propriétés intéressantes d'autres modules, on peut retenir les suivantes :

- Afin d'augmenter la **hauteur de passage** de la passerelle, on pourrait opter pour une structure peu élancée. En fonction de la sensibilité au flambement, les structures composées de quadruplex, de pentaplex ou d'hexaplex offrent des résultats intéressants.
- Si l'on cherche à diminuer la **quantité de précontrainte** à introduire dans la structure, il peut être intéressant de se tourner vers une structure composée de pentaplex ou de quadruplex, en fonction de la portée.
    - Si la **rigidité** de la structure est un facteur prépondérant dans le choix du concepteur, il se tournera vers une structure composée d'hexaplex, qui est la seule à offrir une plus grande rigidité que la structure composée de simplex. Il faudra cependant veiller à ce que le volume, qui augmente beaucoup avec la sensibilité au flambement, ne soit pas démesuré.

2.THEORIE DES INDICATEURS MORPHOLOGIQUES

Cette section est largement inspirée des travaux de Pierre LATTEUR [2] qui a développé la théorie des indicateurs morphologiques en l'appliquant d'abord aux structures avec un comportement linéaire, pour ensuite l'étendre aux structures non-linéaires avec la participation de Jonas FERON [3]. Cette section vise à expliquer cette théorie et son intérêt pour l'optimisation des structures de tenségrité.

2.1.INTRODUCTION : STRUCTURES LINEAIRES

La théorie des indicateurs morphologiques offre un outil d'optimisation extrêmement puissant qui permet d'obtenir, par le calcul d'une seule structure, des résultats généraux pouvant s'appliquer à une infinité de structures dont la portée, les matériaux, les charges appliquées… varient. Cette théorie a été initialement développée pour optimiser des structures au comportement linéaire, mais il sera exposé dans le paragraphe suivant qu'elle peut s'appliquer également aux structures non-linéaires.

Avant toute chose, il faut définir un certain nombre de paramètres qui apparaîtront souvent au long de ce travail :

- σ : la contrainte de dimensionnement du matériau utilisé, en Pa
- L : la portée de la passerelle, en m
- A : l'aire d'une section, en m^2
- H : la hauteur de la passerelle, en m
- I : l'inertie des sections, en m^4
- E : le module d'élasticité du matériau
- μ : un facteur exprimant les conditions d'extrémités d'un élément pour son dimensionnement au flambement. Dans ce cas-ci, ce facteur vaut 1 car on considère que tous les nœuds sont rotulés. Ce facteur n'a pas d'unités.
- ρ : le poids volumique du matériau, en N/m^3
- V : le volume total de la structure, en m^3
- F : la charge externe totale appliquée sur la structure, en N

Cette longue liste de paramètres est assez représentative du problème qui se pose : comment optimiser efficacement une structure lorsqu'elle est définie par un si grand nombre de paramètres différents ?

Le principe général de la théorie des indicateurs morphologiques repose sur une diminution du nombre de paramètres définissant la structure en les rassemblant dans des nombres adimensionnels appelés indicateurs morphologiques. On en distingue deux types :

Les indicateurs morphologiques primaires, qui expriment un paramètre de l'optimisation et qui auront une influence sur le résultat final de l'optimisation :

- L'élancement géométrique $\frac{L}{H}$ de la structure
- $\Psi \equiv \frac{\mu\sigma L}{\sqrt{qEF}}$, l'indicateur de flambement, qui exprime la sensibilité de la structure au flambement. Sa définition introduit le facteur de forme $q \equiv \frac{I}{A^2}$
- $\Phi \equiv \frac{\rho L}{\sigma}$: l'indicateur de poids propre.

Les indicateurs morphologiques secondaires, qui expriment une grandeur ou un phénomène physique et permettent de comparer l'efficacité de différentes structures. Ce sont ces indicateurs que l'on cherchera à optimiser, en faisant varier les indicateurs primaires de la structure :

- L'indicateur de volume $W \equiv \frac{\sigma V}{FL}$, valeur adimensionnelle du volume total V de la structure.

- L'indicateur de déplacement $\Delta \equiv \frac{E\delta}{\sigma L}$, valeur adimensionnelle de la flèche maximale δ de la structure.

Dans le cas des structures linéaires, il a été démontré que les deux indicateurs secondaires sont fonction des trois indicateurs primaires :

$$\begin{cases} W = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \Phi\right) \\ \Delta = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \Phi\right) \end{cases}$$

Cependant, cette propriété n'est plus vérifiée lorsqu'il s'agit de structures non-linéaires. La section suivante vise à étendre la théorie des indicateurs morphologiques au cas des structures non-linéaires.

2.2. Indicateurs morphologiques pour les structures non-linéaires

La méthode présentée dans cette section s'inspire des travaux de Pierre Latteur et Jonas Feron [11] et se penche sur les structures non-linéaires, non-précontraintes. Il sera montré plus loin que la théorie des indicateurs morphologiques reste valable pour des structures précontraintes.

La démarche générale est présentée de manière à faciliter la compréhension du lecteur, au détriment d'une démonstration plus formelle. On s'intéresse à la structure ci-dessous, calculée au k-ième ordre :

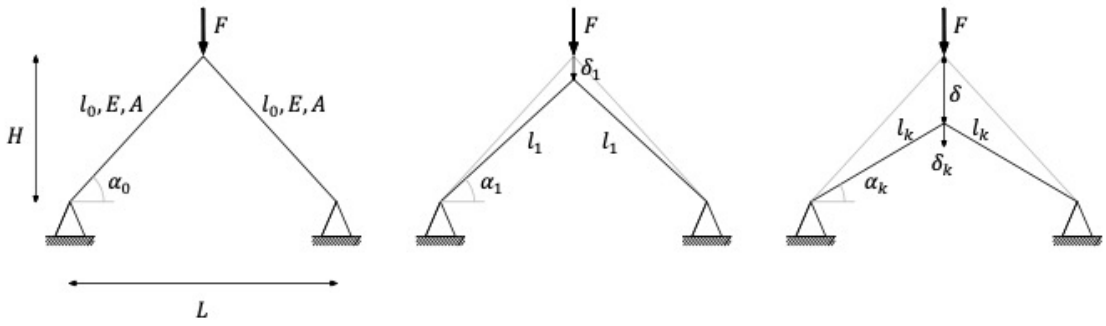


Figure I.15 – Schéma de la structure calculée au k-ième ordre [Illustration de l'auteur adapté de [3]]

2.2.1. Indicateur de deplacement

Dans le cas de la structure présentée ci-dessus, on peut considérer que le moment fléchissant sera négligeable et que l'entièreté des déformations proviendra des efforts normaux. Le *théorème de Pasternak* stipule que le théorème de la force unité reste valable lorsque la structure soumise à l'effort unitaire est rendue isostatique de n'importe quelle manière :

$$\delta = \int \frac{N^n_{\sum F} n^0_1}{EA} dl$$

Où $N^n_{\sum F}$ est l'effort normal dans la structure hyperstatique et n^1_0 est l'effort normal dans cette même structure rendue isostatique, à laquelle on applique un effort unitaire dans la direction du déplacement recherché.

Dans le cas de la structure ci-dessus et pour l'itération k on aura, si l'on ne tient pas compte du flambement dans les éléments ($A = N_k/\sigma$) :

$$\delta_k = \frac{N_k n_k l_k}{EA} = 2\frac{\sigma}{E} n_k l_k$$

L'effort n_k engendré par un effort unitaire appliqué au nœud supérieur de la structure rendue isostatique (en rotulant le nœud supérieur) vaudra :

$$n_k = \frac{1}{2\sin\alpha} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} sin\,\alpha = \dfrac{H-\delta_k}{l_k} \\ l_k = \sqrt{(L/2)^2 + (H-\delta_k)^2} \end{cases}$$

On obtient finalement :

$$\delta_k = \frac{\sigma}{E}\frac{\frac{L^2}{4} - (H-\delta_k)^2}{H-\delta_k}$$

En mettant H en évidence :

$$\frac{\delta_k}{H} = \frac{\sigma}{E}\frac{\left(\frac{L}{2H}\right)^2 + \left(1-\frac{\delta_k}{H}\right)^2}{\left(1-\frac{\delta_k}{H}\right)}$$

Dans le cas d'une structure linéaire, l'hypothèse $H \gg \delta$ aurait été valable, on aurait donc pu faire apparaître l'indicateur de déplacement :

$$\frac{\delta}{H} = \frac{\sigma}{E}\left(\left(\frac{L}{2H}\right)^2 + 1\right) \Rightarrow \Delta = \frac{E\delta}{\sigma L} = \frac{L}{4H} + \frac{H}{L} = f\left(\frac{L}{H}\right)$$

Et, si on tient compte du flambement des éléments comprimés, il faut faire intervenir l'indicateur de flambement Ψ :

$$\Delta = \frac{E\delta}{\sigma L} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi\right)$$

Dans le cas non-linéaire, on ne peut plus négliger le terme δ/H car les déformations sont trop élevées. L'équation présentée plus haut se résout donc de manière implicite, ce qui donne :

$$\frac{\delta}{H} = f\left(\frac{L}{H}, \frac{\sigma}{E}\right) \quad \text{et} \quad \frac{L}{\delta} = f\left(\frac{L}{H}, \frac{E}{\sigma}\right)$$

En tenant compte du flambement, on obtient finalement

$$\frac{L}{\delta} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}\right)$$

Ce développement introduit donc un nouvel indicateur secondaire L/δ , baptisé indicateur de déplacement non-linéaire, qui sera préféré à son homologue linéaire pour des raisons de lisibilité. Celui-ci prend en compte la raideur de la structure par le biais d'un nouvel indicateur primaire, l'indicateur de raideur du matériau E/σ.

De manière à intégrer plus formellement le poids propre de la structure au sein des charges, on introduit également l'indicateur de poids propre. L'indicateur de déplacement non-linéaire devient alors une fonction de quatre paramètres :

$$\frac{L}{\delta} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi\right)$$

2.2.2. Indicateur de volume

Un raisonnement similaire est effectué pour calculer l'indicateur de volume de la structure non-linéaire. Ici aussi, le fait que les déformations de la structure soient trop grandes pour pouvoir négliger le terme δ/H aura pour conséquence que l'indicateur de volume non-linéaire dépendra d'un paramètre supplémentaire, l'indicateur de raideur E/σ :

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi\right)$$

2.2.3. INDICATEUR DE PRECONTRAINTE

Avant toute chose, il faut définir différents concepts liés à la précontrainte dans les structures de tenségrité :

- Ce qu'on appellera **état de précontrainte** représente de manière adimensionnelle la répartition des efforts de précontrainte introduits dans les câbles et dans les barres.
- Le **niveau de précontrainte**, noté P, est un scalaire qui exprime la quantité de précontrainte qui est introduite. Il s'exprime en Newtons.
- Enfin, un **scénario de précontrainte** est un état de précontrainte auquel on a donné une dimension : il est multiplié par un niveau de précontrainte. C'est ce scénario de précontrainte qui, sous la forme d'un vecteur, donne pour chaque élément l'effort de précontrainte qui y a été introduit.

Dans une structure de tenségrité donnée, le nombre de scénarios de précontrainte possibles est infini : tant la répartition des efforts que le niveau de précontrainte peuvent varier. Dans les travaux précédents, un scénario de précontrainte est ressorti comme étant relativement efficace tout en restant suffisamment simple à introduire dans l'outil numérique et dans la pratique. Celui-ci consiste à comprimer toutes les barres d'un même niveau de précontrainte P. L'état de précontrainte correspondant est donc un vecteur composé de 1 à tous les indices de barres et de 0 à tous les indices de câbles.

Pour cette raison, le scénario de précontrainte utilisé n'est pas forcément le scénario « optimal », car il n'y a que le niveau de précontrainte que soit réellement optimisé et pas l'état de précontrainte. Par la suite, on préférera donc le terme « ajustement de la précontrainte » plutôt qu'« optimisation ».

Dans le travail de Jonas FERON [3] et Lindy BOUCHER [4], ce niveau de précontrainte était augmenté progressivement comme une part $j(F/n)$ de la charge externe F appliquée à la structure. Ainsi, lors du dimensionnement de la précontrainte, chaque itération incrémente la valeur de j jusqu'à ce que tous les câbles restent tendus lorsque la charge externe totale est appliquée. La charge supplémentaire de précontrainte peut être considérée comme une charge externe, ce qui implique que la théorie des indicateurs non-linéaires reste valable.

Cet algorithme a été entièrement revu dans le cadre de l'analyse des charges aléatoires, mais l'approche expliquée plus haut permet d'introduire la notion de précontrainte dans la théorie des indicateurs morphologiques, qui restera valable par la suite.

Pour deux structures différentes possédant les mêmes nombres adimensionnels primaires $(\mathrm{L/H}, \Psi, \mathrm{E}/\sigma, \Phi)$, le travail de Jonas FERON [3] a montré que les indicateurs secondaires W et $\frac{L}{\delta}$ sont identiques aussi lorsque ces structures sont précontraintes, tant que le niveau de précontrainte est calculé par la même méthode.

Il introduit également un troisième indicateur morphologique secondaire, baptisé l'indicateur de précontrainte P/F , qui exprime le rapport entre la pré-compression introduite dans les barres de la structure (le niveau de précontrainte P) et la charge externe totale qui rend cette précompression nécessaire. Cet indicateur dépend des mêmes quatre indicateurs morphologiques primaires :

$$\frac{P}{F} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi\right)$$

2.3. CONCLUSIONS

En résumé, la théorie des indicateurs morphologiques, étendue aux structures tridimensionnelles, non-linéaires et précontraintes a été vérifiée par de nombreuses confirmations numériques lors des différents travaux précédant celui-ci, permet d'établir une série de critères qui aideront dans le choix d'une structure de tenségrité « optimale » :

$$\begin{cases} min(W) = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi, \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{F}}\right) \\ \frac{L}{\delta} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi, \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{F}}\right) \geq 500 \\ \frac{P}{F} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi\right) < 50 \end{cases}$$

Bien que moins efficace que dans le cas des structures linéaires, à cause de l'introduction d'un quatrième indicateur primaire E/σ et de l'indicateur de précontrainte, la théorie des indicateurs morphologiques reste un outil puissant permettant de tirer des conclusions sur un grand nombre de structures différentes en n'en étudiant qu'un échantillon.

Lors de sa thèse de doctorat, Pierre LATTEUR [2] introduit un quatrième indicateur secondaire baptisé l'indicateur d'efficacité matérielle, qui représente le pourcentage de poids propre par rapport à la charge externe F. Celui-ci s'applique particulièrement bien aux structures de tenségrité qui sont très volumineuses, et on visera en pratique à limiter le rapport entre le poids propre de la structure et la charge appliquée à une valeur inférieure à 3 :

$$\frac{\rho \mathrm{V}}{F} = \mathrm{f}\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi\right) < 3$$

On remarque que cet indicateur d'efficacité matérielle est proportionnel à l'indicateur de volume, par un facteur qui n'est autre que l'indicateur de poids propre :

$$\frac{\rho \mathrm{V}}{F} = \frac{\rho \mathrm{V}}{F} * \frac{\sigma L}{\sigma L} = \frac{\rho L}{\sigma} * \frac{\sigma V}{FL} = \Phi * W$$

3.NON-LINEARITE DES STRUCTURES DE TENSEGRITE

3.1.INTRODUCTION

Cette section synthétise la méthode de résolution non-linéaire des structures de tenségrité développée par Marc ELIAERS [12] durant l'année 2014-2015. Ce travail de synthèse ayant déjà été effectué par Jonas FERON [3] et Lindy BOUCHER [4], cette section s'en inspire fortement.

Le phénomène de non-linéarité peut provenir de deux origines différentes : la non-linéarité matérielle et la non-linéarité géométrique.

La non-linéarité matérielle concerne le comportement du matériau utilisé lorsqu'il est soumis à des contraintes qui dépassent sa limite d'élasticité. Dans le cas de l'acier, par exemple, les déformations engendrées par une contrainte trop élevée deviennent irréversibles et ne respectent plus la loi de Hooke $\sigma = E\varepsilon$.

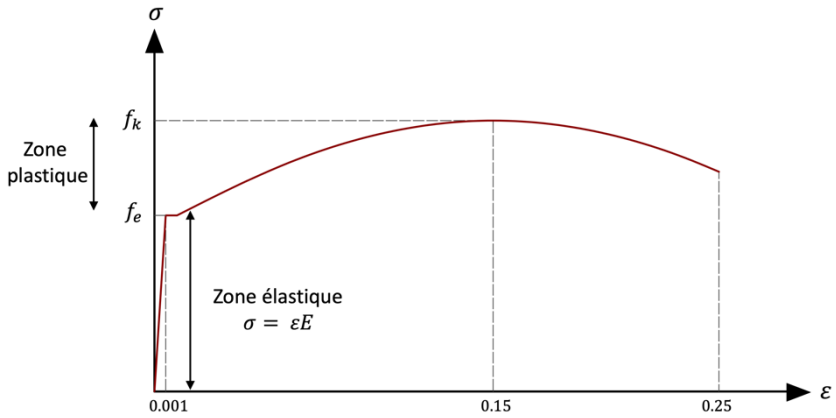


Figure I.16 - Non-linéarité matérielle : relation contrainte-déformation de l'acier [Illustration de l'auteur adapté de [13]]

La non-linéarité géométrique s'applique aux structures qui subissent de grandes déformations. Celles-ci auront une influence non-négligeable sur les résultats calculés sur la structure non-déformée (calcul au premier ordre). Il sera alors nécessaire d'ajuster ces résultats en effectuant un second calcul, cette fois-ci

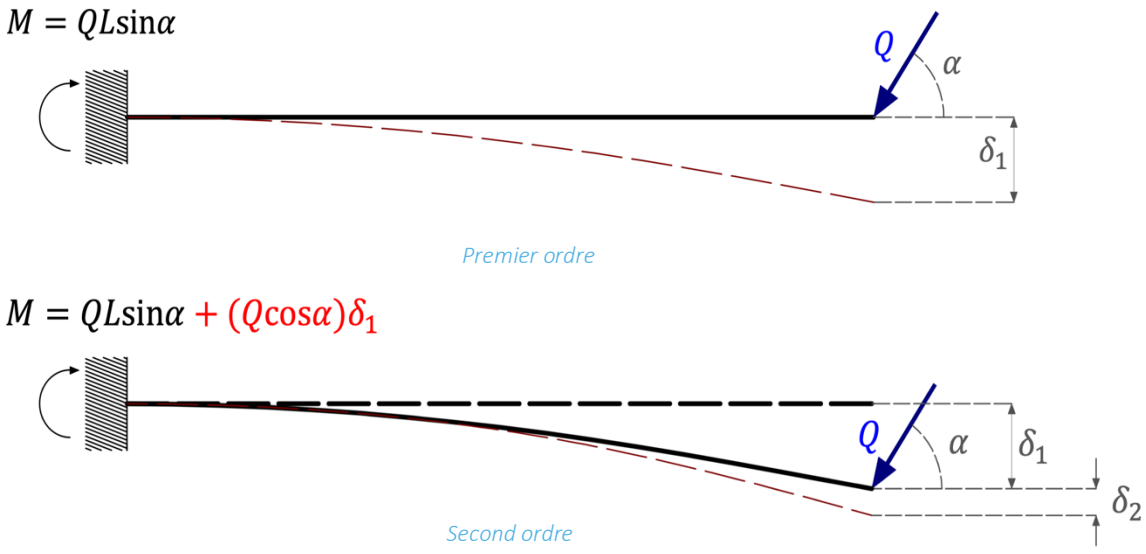


Figure I.17 - Schéma de calcul au second ordre [Illustration de l'auteur adapté de [13]]

sur la structure déformée (calcul au second ordre). Cette démarche devra être répétée n fois (calcul au n-ième ordre), jusqu'à ce que la déformation calculée à l'itération n soit négligeable par rapport à la déformation calculée à l'itération $n-1$. Cette démarche aura tendance à augmenter drastiquement la quantité de calculs à effectuer et un calcul au premier ordre sera toujours préférable lorsque c'est possible.

Par la suite, seule la non-linéarité géométrique des structures de tenségrité sera considérée, car les éléments sont systématiquement dimensionnés de manière à rester dans le domaine de validité de la loi de Hooke.

3.2. Calcul au second ordre

Lors de leur mémoire, Alexis Bastin et Quentin Gravy [10] étudient une passerelle composée de simplex dont ils ont imaginé le design. Cette géométrie permet le passage d'un tablier de passerelle en son centre et, afin d'éviter de faire naître des moments de flexion dans les barres, le tablier est suspendu aux nœuds supérieurs de la structure. Le comportement devient donc similaire à celui d'un treillis tridimensionnel.

Cependant, ils sont assez vite confrontés à une difficulté majeure, intrinsèque aux structures de tenségrité : ces structures ont un comportement non-linéaire qui rend impossible un calcul au premier ordre.

Par le biais d'une analogie avec deux barres rotulées soumises à une charge F, cette section explique en quoi consiste exactement cette non-linéarité.

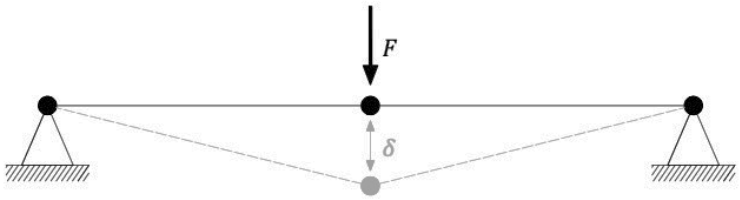


Figure I.18 – Analogie à la non-linéarité : effort externe et déplacement [Illustration de l'auteur adapté de [3]]

En effectuant un équilibre des forces dans la partie droite de la structure, on se rend rapidement compte, que si l'on ne tient pas compte des déplacements de la structure, qu'il est impossible d'obtenir un équilibre des efforts verticaux. En effet, rien n'empêche la barre de tourner indéfiniment autour de son appui, ce qui donnerait un déplacement δ infini (voir Figure I.19).



Figure I.19 – Equilibre des efforts verticaux au premier ordre : instabilité numérique [Illustration de l'auteur adapté de [3]]

Ce type d'instabilité est appelé *instabilité numérique* : une solution au problème existe, mais il est impossible de la trouver par une approche linéaire classique. Pour résoudre ce système, il est nécessaire d'effectuer un *calcul au second ordre* : considérer une structure déjà déformée rend possible l'équilibre des efforts verticaux dans le système. En effet, lorsque la structure est déformée, l'effort normal N dans la barre possède une composante verticale N_V qui peut équilibrer la charge externe $F/2$ (voir Figure I.20). Cette

solution a pour conséquence que le déplacement δ du nœud central n'est plus proportionnel à F, d'où l'appellation de la méthode « non-linéaire ».

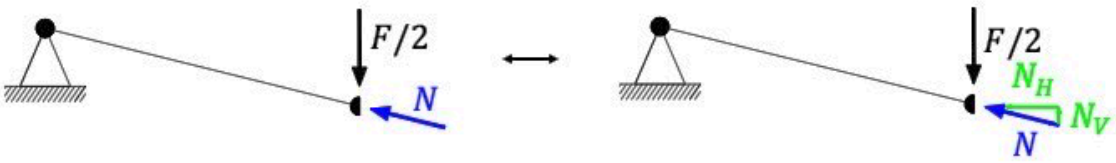


Figure I.20 – Equilibre des efforts verticaux sur la structure déformée : calcul au second ordre [Illustration de l'auteur adapté de [3]]

C'est cette méthode de résolution non-linéaire qui a fait l'objet du mémoire de Marc ELIAERS [12] et qui sera détaillée dans la suite de cette section.

3.3. METHODE LINEAIRE D'ELEMENTS FINIS

Cette section a pour but de fournir au lecteur les prérequis nécessaires à la compréhension de la méthode non-linéaire expliquée à la section suivante. Elle s'inspire largement des travaux réalisés par Pierre LATTEUR [14], Jean-François REMACLE [15], Marc ELIAERS [12] et Jonas FERON [3].

3.3.1. PRINCIPE GENERAL

Le principe général de la méthode d'éléments finis se base sur la résolution d'un système d'équations traduisant l'équilibre des forces en chaque nœud.

3.3.2. MATRICE DE RAIDEUR LOCALE

Pour commencer, chaque élément de la structure est étudié indépendamment. En chaque nœud, les forces externes appliquées au nœud doivent équilibrer les efforts internes :

$$\bar{F}_{ext} = \bar{F}_{int}$$

Sachant que les efforts internes sont des efforts normaux uniquement, par la loi de Hooke :

$$F_{int} = \frac{EA}{L_0}\Delta l$$

Pour un élément isolé dans son repère local, les seules variations de longueur sont axiales, soit $\Delta l = d_{2X} - d_{1X}$:

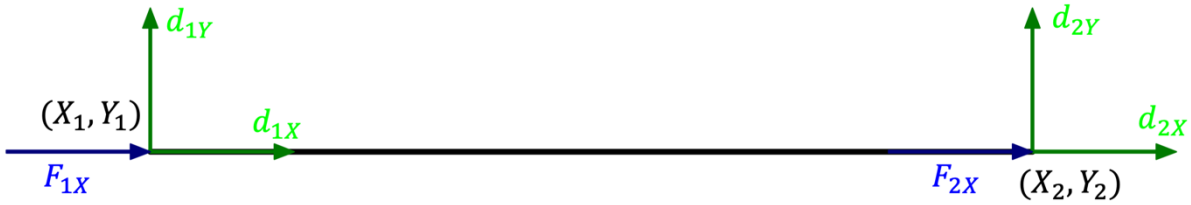


Figure I.21 - Elément isolé dans un repère local 2D [Illustration de l'auteur adapté de [4]]

Ainsi, le vecteur des forces internes $\bar{F}_{int}$ s'écrit :

$$\bar{F}_{int} = \frac{EA}{L_0}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{1X} \\ d_{1Y} \\ d_{2X} \\ d_{2Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{1X} \\ F_{1Y} \\ F_{2X} \\ F_{2Y} \end{bmatrix} = \bar{K}_{0,loc}\bar{d}_{loc} = \bar{F}_{ext}$$

Afin de passer à un repère global bidimensionnel (voir Figure I.22), pour un élément dont les extrémités sont les nœuds i et j, il faut introduire la matrice de changement de base $\bar{T}_{i,j}$, qui dépend de l'inclinaison α_X entre le repère local et le repère global de l'élément.

$$\bar{\mathrm{T}}_{i,j} = \begin{bmatrix} cos\,\alpha_X & sin\,\alpha_X & 0 & 0 \\ -sin\,\alpha_X & cos\,\alpha_X & 0 & 0 \\ 0 & 0 & cos\,\alpha_X & sin\,\alpha_X \\ 0 & 0 & -sin\,\alpha_X & cos\,\alpha_X \end{bmatrix}$$

Dans le repère global, l'équation d'équilibre prend la forme suivante :

$$\bar{\mathrm{T}}_{i,j}^{T} \bar{K}_{0,loc} \bar{\mathrm{T}}_{i,j} \bar{\mathrm{d}}_{\mathrm{loc}} = \bar{F}_{ext}$$

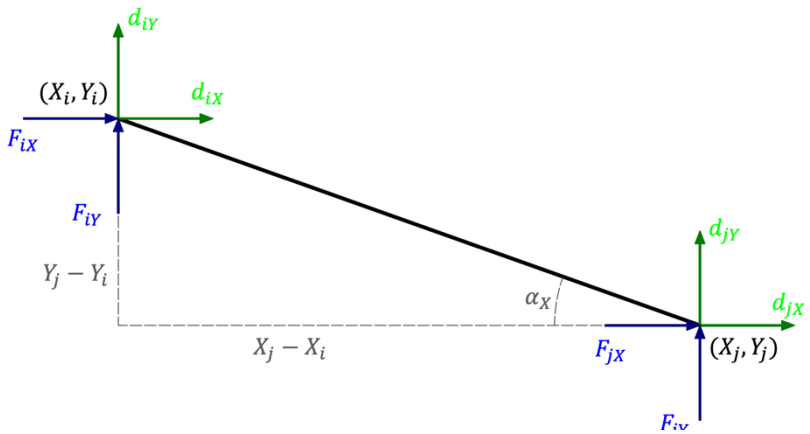


Figure I.22 - Elément isolé dans un repère global bidimensionnel [Illustration de l'auteur adapté de [4]]

N.B. : Le même raisonnement s'applique également dans le cas d'un repère tridimensionnel. Dans ce cas, les dimensions des matrices et vecteurs seront modifiées :

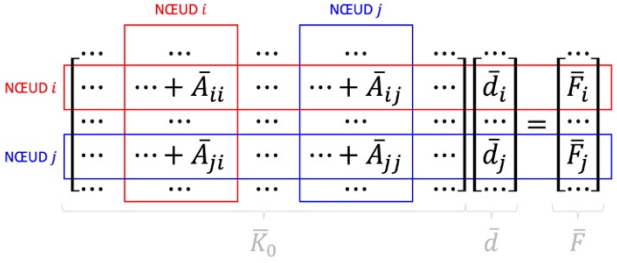
$$\bar{K}_{0,loc}, \bar{\mathrm{T}}_{i,j} \in \mathbb{R}^{6\times6} \qquad \text{et} \qquad \bar{d}_{loc}, \bar{F}_{ext} \in \mathbb{R}^{6\times1}$$

3.3.3. Matrice de raideur globale

La démarche exposée au point précédent, appliquée à chaque élément de la structure, permet finalement d'assembler la matrice de raideur globale. Afin de simplifier la notation, le système d'équations d'équilibre de l'élément dont les extrémités sont les nœuds i et j se réécrit de manière simplifiée :

$$\begin{bmatrix} \bar{A}_{ii} & \bar{A}_{ij} \\ \bar{A}_{ji} & \bar{A}_{jj} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d}_i \\ \bar{d}_j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_i \\ \bar{F}_j \end{bmatrix}$$

Chacun de ces éléments sera ensuite ajouté au système d'équations général de la structure :



La matrice de raideur globale de la structure étant construite, l'expression du système d'équations d'équilibre global s'écrit :

$$\bar{K}_0 \bar{d} = \bar{F}_{ext}$$

L'inconnue de ce système étant le vecteur $\bar{d}$.

NB : Dans un repère bidimensionnel, où N est le nombre de nœuds de la structure :

$$\bar{K}_0 \in \mathbb{R}^{2N \times 2N} \qquad \text{et} \qquad \bar{d}, \bar{F}_{ext} \in \mathbb{R}^{2N \times 1}$$

Lorsqu'il est généralisé au cas tridimensionnel, les dimensions du problème augmentent :

$$\bar{K}_0 \in \mathbb{R}^{3N \times 3N} \qquad \text{et} \qquad \bar{d}, \bar{F}_{ext} \in \mathbb{R}^{3N \times 1}$$

3.3.4. Conditions aux appuis

Les conditions aux appuis ont pour effet de bloquer un certain nombre de coordonnées du vecteur de déplacements $\bar{d}$ de la structure. Dans l'équation d'équilibre générale de la structure, ces conditions aux appuis se traduisent par des contraintes à appliquer au système d'équations.

Ce problème est en réalité un problème de minimisation sous contraintes, dont la résolution complète est développée à l'ANNEXE A.

Pour une structure soumise à M contraintes aux appuis, on impose :

$$\bar{c}\bar{d} = \bar{D}$$

Où :

- $\bar{c} \in \mathbb{R}^{M \times 3N}$ est la matrice des contraintes : dans chacune des lignes correspondant à une contrainte, la colonne du degré de liberté bloqué vaut 1.
- $\bar{D} \in \mathbb{R}^{M \times 1}$ est le vecteur de déplacements imposés, qui est le vecteur nul dans le cas d'appuis fixes.

Le problème final à résoudre devient alors un système d'équations à $3N + M$ inconnues qui s'écrit sous sa forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} \bar{K}_0 & \bar{c}^T \\ \bar{c} & \bar{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{d} \\ \bar{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{F}_{ext} \\ \bar{D} \end{bmatrix}$$

Où $\bar{r}$ représente la valeur des réactions aux appuis (voir ANNEXE A)

Finalement, la résolution de ce système s'obtient en inversant la matrice carrée de dimension $(3N + M)$, ce qui permet d'obtenir les déplacements et les réactions aux appuis :

$$\begin{bmatrix} \bar{d} \\ \bar{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_0 & \bar{c}^T \\ \bar{c} & \bar{0} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{F}_{ext} \\ \bar{D} \end{bmatrix}$$

3.3.5. Post-traitement des resultats

Les efforts internes dans les éléments de la structure s'obtiennent par post-traitement des résultats : en considérant à nouveau chaque barre individuellement, le vecteur des efforts internes dépend de la rigidité $\bar{K}_{0,loc}$ de la barre et du déplacement $\bar{d}_{loc}$ de ses extrémités, qui est à présent connu :

$$\bar{F}_{int} = \bar{K}_{0,loc} \bar{d}_{loc}$$

3.3.6. Considerations sur la methode lineaire

Lors de leur travail, Alexis Bastin et Quentin Gravy [10] ont utilisé la méthode linéaire pour résoudre des structures de tenségrité. Cependant, ils ont dû recourir à un artifice de calcul permettant de lever l'instabilité

numérique intrinsèque à ce genre de structures. Cet artifice consistait à ajouter des barres de faible dimension à la structure, mais celles-ci engendraient des erreurs non-négligeables dans les résultats. La méthode linéaire n'étant pas adaptée aux structures de tenségrité, une méthode non-linéaire a été développée par Marc ELIAERS [12]. Celle-ci fait l'objet de la section suivante.

3.4. METHODE NON-LINEAIRE D'ELEMENTS FINIS

Pour la résolution de structures de tenségrité, deux complications majeures incitent donc à effectuer un calcul non-linéaire. Premièrement à cause de leur faible rigidité, qui implique qu'elles subissent de grands déplacements. Ceci oblige à se diriger vers des calculs d'ordre supérieur (voir 3.1). En plus de cela, elles sont instables numériquement, ce qui rend simplement impossible un calcul au premier ordre (voir 3.2).

C'est pour ces raisons que Marc ELIAERS [12] a développé une méthode non-linéaire d'éléments finis, qui modélise de manière bien plus fidèle la réalité physique, avec pour conséquence négative que la quantité de calculs à effectuer augmente énormément.

3.4.1. PRINCIPE

Cette méthode repose sur le principe d'avancement dans la solution : la charge totale F_{ext} est divisée en incréments ΔF_k, appliqués successivement. A chaque pas incrémental, les efforts internes ΔN_k et les déplacements $\Delta \delta_k$ sont calculés par une méthode linéaire. Au pas suivant, l'incrément de charge ΔF_{k+1} est appliqué sur la structure dans laquelle on a intégré les efforts internes ΔN_k et les déplacements $\Delta \delta_k$. Le calcul s'arrête lorsque $\bar{F}_{k+1} = F_{ext}$. En d'autres mots, le problème est « linéarisé » à chaque pas incrémental, mais le résultat final est non-linéaire.

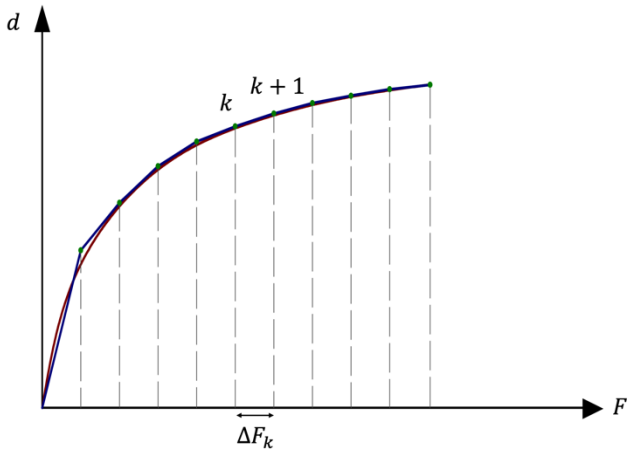


Figure I.23 - Avancement dans la solution : résolution par pas incrémentaux [Illustration de l'auteur, adapté de [12]]

$$\bar{F}_{k+1} = \bar{F}_k + \Delta \bar{F}_k \qquad \bar{N}_{k+1} = \bar{N}_k + \Delta \bar{N}_k \qquad \bar{\delta}_{k+1} = \bar{\delta}_k + \Delta \bar{\delta}_k$$

3.4.2. MATRICE DE RAIDEUR

Les expressions développées dans cette section ont été démontrées par Pierre LATTEUR [11] et sont développées en détail à l'ANNEXE B.

La raideur des structures non-linéaires n'étant pas constante, la matrice de raideur locale associée à un élément dont les extrémités sont les nœuds i et j est composée de deux termes. Le premier terme, « élastique », est similaire à celui de la méthode linéaire. Le second, « géométrique » tient compte des non-linéarités. En deux dimensions, la matrice de raideur s'écrit :

$$\bar{K}_{k,loc} = \frac{EA}{L_k}\begin{bmatrix} c_X^2 & c_X c_Y & -c_X^2 & -c_X c_Y \\ c_X c_Y & c_Y^2 & -c_X c_Y & -c_Y^2 \\ -c_X^2 & -c_X c_Y & c_X^2 & c_X c_Y \\ -c_X c_Y & -c_Y^2 & c_X c_Y & c_Y^2 \end{bmatrix} + \frac{N_k}{L_k}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{cases} c_X = cos\,\alpha_X = \dfrac{X_{j,k} - X_{i,k}}{L_k} \\ c_Y = sin\,\alpha_X = \dfrac{Y_{j,k} - Y_{i,k}}{L_k} \end{cases}$$

En trois dimensions, La partie non-linéaire de la matrice de raideur locale s'écrit :

$$\bar{K}_{k,loc,N-L} = \frac{N_k}{L_k}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Une fois la matrice de raideur locale construite, l'assemblage de la matrice de raideur globale de la structure et la prise en compte des conditions aux appuis se font de la même manière que la méthode linéaire exposée en 3.3 et fournit les résultats d'un pas incrémental.

3.4.3. Avancement dans la solution

La bonne compréhension du principe d'avancement dans la solution introduit à la section 3.4.1. nécessite la définition de différents paramètres.

En premier lieu, le paramètre d'incrémentation λ qui mesure l'avancement dans la solution par un scalaire compris entre 0 (situation initiale) et 1 (toute la charge extérieure est appliquée).

Ensuite, le chargement incrémental, qui est souvent choisi indépendemment de λ par facilité. Dans ce cas, le chargement incrémental appliqué à chaque itération vaut le chargement total :

$$\bar{p} = \frac{\partial \bar{F}_{ext}}{\partial \lambda} \quad \rightarrow \quad \bar{p} = \bar{F}_{ext}$$

Enfin, la vélocité incrémentale, qui s'obtient en résolvant à chaque pas un système linéaire :

$$\bar{v} = \bar{K}_k^{-1}\bar{p} = \bar{K}_k^{-1}\bar{F}_{ext}$$

Où $\bar{K}_k$, la matrice de raideur globale à l'incrément k, provient de l'assemblage des matrices de raideur locales de chaque élément. Dans ce cas, la vélocité incrémentale correspond aux déplacements de la structure de raideur $\bar{K}_k$ soumise à la charge $\bar{F}_{ext}$. Afin d'alléger l'écriture, les conditions d'appuis n'ont pas été prises en compte. Le système total sera présenté plus loin.

Afin que le principe d'avancement dans la solution puisse être appliqué, il est nécessaire de décomposer $\bar{F}_{ext}$ en incréments de charge $\Delta\bar{F}_k$. Pour ce faire, le paramètre d'avancement dans la solution $\Delta\lambda$ est défini, de sorte que l'incrément de charge devient :

$$\Delta\bar{F}_k = \bar{p}\,\Delta\lambda = \bar{F}_{ext}\,\Delta\lambda$$

Si ce paramètre est suffisamment petit, on peut trouver l'incrément de déplacement $\Delta\bar{d}_k$ et avec ce dernier, l'incrément d'efforts internes $\Delta\bar{N}_k$ par post-traitement des résultats (voir 3.3), qui peut également s'écrire en fonction de $\Delta\lambda$:

$$\Delta\bar{d}_k = \bar{v}\Delta\lambda \qquad \text{et} \qquad \Delta\bar{N}_k = \bar{N}\Delta\lambda$$

Où $\bar{N}$ représente les efforts internes dans la structure lors de l'application de $\bar{F}_{ext}$.

Cette démarche permet de définir une nouvelle situation initiale qui sera utilisée comme point de départ pour l'incrémentation suivante :

Incrément k	Incrément $k+1$
$\Delta\bar{F}_k = \bar{F}_{ext}\,\Delta\lambda$	$\bar{F}_{k+1} = \bar{F}_k + \Delta\bar{F}_k$
$\Delta\bar{d}_k = \bar{v}\Delta\lambda$	$\bar{d}_{k+1} = \bar{d}_k + \Delta\bar{d}_k$
$\Delta\bar{N}_k = \bar{N}\Delta\lambda$	$\bar{N}_{k+1} = \bar{N}_k + \Delta\bar{N}_k$

3.4.4. Equation de contrainte $\Delta\lambda$

Le choix du paramètre $\Delta\lambda$ s'avère essentiel pour l'efficacité de la résolution. Ce choix se fait par le biais d'une équation de contrainte, qui peut prendre plusieurs formes. Les trois principales sont la contrainte de chargement, la contrainte de déplacement et la contrainte *Arclength*. Dans le cas des structures de tenségrité, c'est la contrainte *Arclength* qui s'avère être la plus efficace. Les deux autres équations de contrainte ne seront donc pas développées.

Pour une longueur d'incrémentation l choisie arbitrairement (mais jugée suffisamment petite), la contrainte *Arclength* s'exprime par la formule :

$$\frac{1}{\sqrt{1+\|\bar{v}\|^2}}\left|\bar{v}^t\Delta\bar{d}_k + \Delta\lambda\right| = l$$

L'avantage de cette méthode est que l'incrément $\Delta\lambda$ s'adapte en fonction de la raideur de la structure. Ainsi, lorsque la raideur de la structure est faible, cette méthode impose $\left\|\Delta\bar{d}_k\right\| = l$ et évite de trop grands déplacements à chaque incrément. Inversement, lorsque la rigidité de la structure est élevée, elle impose $|\Delta\lambda| = l$. Ainsi, la méthode fonctionne quelle que soit la rigidité de la structure, ce qui n'est pas le cas des deux autres méthodes.

Finalement, l'avancement au point $k+1$ se trouve en résolvant le système d'équations suivant :

$$\begin{cases} \Delta\bar{d}_k = \bar{v}\Delta\lambda \\ \dfrac{1}{\sqrt{1+\|\bar{v}\|^2}}\left|\bar{v}^t\Delta\bar{d}_k + \Delta\lambda\right| = l \end{cases} \quad \Rightarrow \quad |\Delta\lambda| = \frac{l}{\sqrt{1+\|\bar{v}\|^2}}$$

La valeur de l peut être choisie de manière arbitraire et il est nécessaire de l'adapter en fonction de la structure étudiée. Dans le cas de la structure composée de simplex, il a été choisi de prendre $l = 0.01$ [3]. L'erreur commise par le solveur non-linéaire (voir *3.4.5.*) avec ce choix de longueur d'incrémentation reste faible et se trouve du côté de la sécurité car il a tendance à surestimer les efforts internes.

3.4.5. Solveur non-linéaire

Le schéma représenté à la Figure I.24 représente l'algorithme utilisé pour le solveur non linéaire :

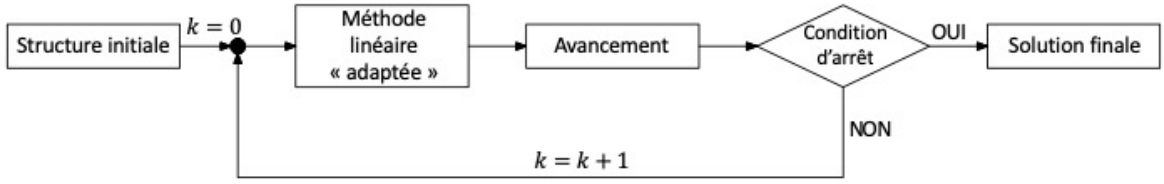


Figure I.24 - Algorithme de la méthode non-linéaire [Illustration de l'auteur, adapté de [4]]

3.4.5.1. Structure initiale

Lors de cette étape, les différents paramètres de la structure sont définis : géométrie, matériaux, sections, chargement et conditions d'appuis.

3.4.5.2. Méthode linéaire « adaptée »

La matrice de raideur $\bar{K}_k$ étant singulière lorsque la rigidité de la structure est nulle, il est nécessaire de perturber très légèrement le système. Dans le cas de structures de tenségrité composées de simplex, cela se traduit par l'introduction d'une perturbation de l'angle de rotation entre les deux bases du simplex, initialement à 30°. La méthode adaptée part d'une configuration perturbée avec $\alpha = 30{,}001°$.

Après avoir construit les matrices de raideur locales $\bar{K}_{k,loc}$ et globale $\bar{K}_k$ et imposé les conditions d'appuis, le système peut être résolu et fournit la vélocité incrémentale $\bar{v}$:

$$\begin{bmatrix} \bar{v} \\ \bar{r} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{K}_k & \bar{c}^t \\ \bar{c} & 0 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \bar{p} \\ \bar{D} \end{bmatrix}$$

Finalement, les efforts internes $\bar{N}$ sont obtenus par post-traitement des résultats.

3.4.5.3. Avancement

Le paramètre d'incrémentation de l'itération suivante s'obtient par la méthode *Arclength (*voir 3.4.4.) :

$$|\Delta\lambda| = \frac{l}{\sqrt{1 + \|\bar{v}\|^2}} \qquad \text{et} \qquad \lambda_{k+1} = \lambda_k + \Delta\lambda$$

Connaissant ce paramètre d'incrémentation, l'algorithme s'approche progressivement d'une estimation de la solution physique :

Charge appliquée	Déplacements	Efforts internes
$\Delta\bar{F}_k = \bar{p}\Delta\lambda$		
$\bar{F}_{k+1} = \bar{F}_k + \Delta\bar{F}_k$	$\Delta\bar{d}_k = \bar{v}\Delta\lambda$	$\Delta\bar{N}_k = \bar{N}\Delta\lambda$
⇳	$\bar{d}_{k+1} = \bar{d}_k + \Delta\bar{d}_k$	$\bar{N}_{k+1} = \bar{N}_k + \Delta\bar{N}_k$
$\bar{F}_{k+1} = \bar{p}\lambda_{k+1}$		

3.4.5.4. Condition d'arrêt

Les itérations s'arrêtent lorsque toute la charge externe $\bar{F}_{ext}$ est appliquée à la structure. En d'autres termes :

$$\lambda_{k+1} = 1$$

Dans le cas où λ_{k+1} serait supérieur à 1, la charge externe finale appliquée à la structure est plus grande que celle initialement prévue. Par souci de précision, une condition vérifiant que λ_{k+1} s'arrête exactement à 1 a été ajoutée.

Afin d'éviter des calculs interminables au cas où la solution ne convergeait pas, il est nécessaire d'imposer une limite au nombre d'itérations effectuées, afin d'éviter que le temps de calcul n'augmente de trop. Cette limite k_{max} a été fixée à :

$$k_{max} = \frac{10}{l}$$

Ce qui correspond à un maximum de 100 itérations pour la valeur de l choisie. Le solveur s'arrête si cette limite est dépassée, même si la solution finale n'est pas encore atteinte.

4.OPTIMISATION

Durant l'année académique 2015-2016, Jonas FERON [3] a démontré la faisabilité de passerelles de tenségrité soumises à des charges uniformes. Pour atteindre cet objectif, il a étendu la théorie des indicateurs morphologiques aux structures précontraintes, tridimensionnelles et non-linéaires (voir 2.2).

Lors de leur recherche sur l'optimisation des structures de tenségrité par une méthode linéaire, Alexis BASTIN et Quentin GRAVY [10] ont identifié trois manières possibles d'optimiser les structures de tenségrité :

1. Ajustement de la **précontrainte**
2. Optimisation des **sections**
3. Optimisation de la **structure**

Les deux premiers se font par le biais d'un algorithme développés par Jonas FERON [3] qui sera détaillé dans la suite de cette section. L'optimisation de la structure, quant à elle, se base sur la théorie des indicateurs morphologiques. L'utilisation simultanée de ces trois méthodes permet finalement de définir un algorithme général d'optimisation des structures de tenségrité. Celui-ci sera exposé à la fin de cette section.

4.1.AJUSTEMENT DU NIVEAU DE PRECONTRAINTE

4.1.1. APPLICATION DE LA PRECONTRAINTE

Lors du calcul numérique, l'application de la précontrainte se fait avant de charger la structure. L'ajustement de la précontrainte consiste à trouver le scénario pour lequel aucun câble ne se détend lors de l'application de la charge externe, tout en évitant d'engendrer des efforts de précontrainte démesurés qui mèneraient à une grande augmentation des sections. Le scénario optimal est donc celui pour lequel le câble le moins tendu est exactement à zéro.

Théoriquement, le nombre de scénarios de précontrainte possibles est infini : on peut choisir d'appliquer sur chaque câble et sur chaque barre un effort de précontrainte différent. Ceci rend l'optimisation effective de la précontrainte extrêmement complexe.

Dans la pratique, il a été choisi d'opter pour un scénario de précontrainte uniforme, c'est-à-dire que la même quantité de précontrainte est appliquée soit dans toutes les barres (barres précontraintes uniformément) soit dans tous les câbles (câbles précontraints uniformément). Lors de son travail, Jonas FERON [3] a éliminé le scénario de précontrainte des câbles prétendus uniformément, car celui-ci ne permettait pas de garder tous les câbles tendus lorsque la charge externe était appliquée.

Le scénario de précontrainte qui sera finalement appliqué à la structure est donc celui où toutes les barres sont précomprimées uniformément. Malgré le fait que ce choix n'est probablement pas le scénario de précontrainte optimal absolu, il constitue un bon point de départ pour l'optimisation.

L'introduction d'un niveau de précontrainte P se fait en quatre étapes, selon la méthode numérique suivante :

- Tous les nœuds sont initialement bloqués et la précontrainte est introduite en comprimant la barre (en l'allongeant, par exemple à l'aide d'un vérin ou d'un filetage).

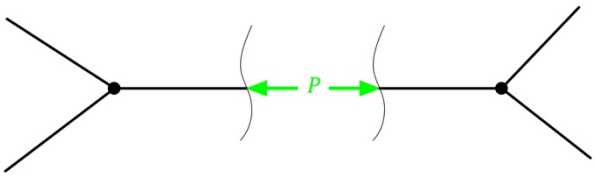


*Figure I.25 – Etape 1 : Application d'une précontrainte **P** dans une barre [Illustration de l'auteur adapté de [3]]*

- Cette précontrainte est ensuite extériorisée : on applique une force équivalente P aux deux extrémités de la barre, qui aura exactement le même effet sur la structure.

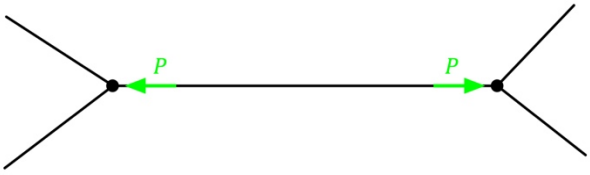


Figure I.26 – Etape 2 : Extériorisation de la précontrainte [Illustration de l'auteur adapté de [3]]

- Les nœuds sont relâchés, la précontrainte est considérée comme une charge externe appliquée aux nœuds et les efforts internes dans les éléments adjacents sont calculés.

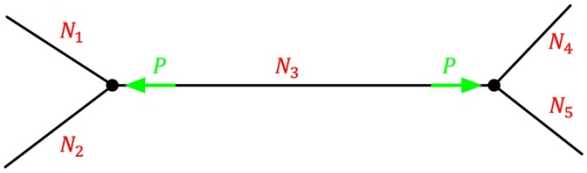


Figure I.27 - Etape 3 : Calcul des efforts internes [Illustration de l'auteur adapté de [3]]

- La précontrainte P est intériorisée à nouveau et additionnée aux efforts internes calculés plus haut.

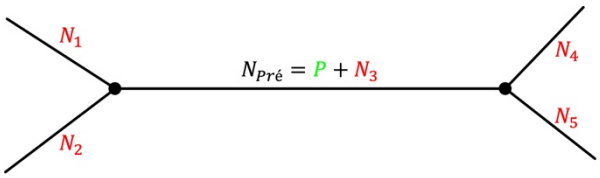


Figure I.28 - Etape 4 : Efforts internes résultants [Illustration de l'auteur adapté de [3]]

4.1.2. Processus d'ajustement

Le processus d'ajustement de la précontrainte utilisé pour l'analyse sous charges aléatoires n'étant plus le même que celui utilisé par Jonas Feron [3] et Lindy Boucher [4], cette section n'entre pas dans les détails de l'algorithme utilisé précédemment. Il est cependant jugé utile que le lecteur ait un bref aperçu du principe sur lequel repose l'ancien algorithme.

Lors de chaque itération, un incrément de précontrainte ΔP fixé à $F/10$ vient augmenter la précompression appliquée dans les barres de la structure. Ensuite, la charge externe est appliquée et les

efforts internes dans les éléments sont calculés. Tant que tous les câbles ne sont pas tendus lors de l'application de la charge externe, l'algorithme continue d'incrémenter la précontrainte dans chaque barre. Ainsi, à l'itération j, un précontrainte $P_j = jF/10$ est introduite.

Il y a deux conditions d'arrêt possibles à l'algorithme : soit tous les câbles sont tendus lors de l'application de la charge externe, soit la précontrainte introduite dans les barres a atteint une limite fixée de manière à empêcher une précontrainte trop importante, qui mènerait à des sections démesurées. Si cette limite, fixée à $P_j < 50F$, est atteinte, la structure est considérée comme impossible.

4.2. Optimisation des sections

L'optimisation des structures non-linéaires s'effectue toujours par un processus itératif, indépendamment du degré d'hyperstaticité. La modification des sections entraînera toujours une redistribution des efforts, que ce soit pour une structure isostatique ou hyperstatique [4].

4.2.1. Influence de l'indicateur de flambement

L'indicateur de flambement permet de dimensionner les éléments d'une structure en fonction de leur indicateur

$$\Psi_e = \frac{\mu\sigma l_e}{\sqrt{q_e E N_e}}$$

qui exprime leur sensibilité au flambement. Le facteur μ dépend des conditions aux extrémités de la barre.

Si l'élément est insensible au flambement (typiquement, des câbles), alors $\Psi_e = 0$ et l'aire de l'élément est dimensionnée uniquement par rapport à la contrainte admissible du matériau qui le compose :

$$A_e = \frac{N_e}{\sigma}$$

Si l'élément est très sensible au flambement, il est dimensionné selon la formule théorique d'Euler [14] :

$$A_e = \mu \frac{l_e}{\pi} \sqrt{\frac{N_e}{q_e E}}$$

Dans le cadre de ce mémoire, tous les nœuds de la structure étant considérés comme des rotules parfaites, la longueur de flambement est égale à la longueur de la barre, donc $\mu = 1$.

Finalement, la situation intermédiaire s'applique aux éléments plus ou moins sensibles et prend en compte l'indicateur de flambement développé par Pierre Latteur [2] :

$$A_e = \frac{N_e}{2\sigma}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}\Psi_e^2}\right)$$

Où $\Psi_e = \frac{\mu\sigma l_e}{\sqrt{q_e E N_e}}$.

4.2.2. Methodes d'optimisation des sections

Dans le cadre de ce mémoire, deux méthodes d'optimisation des sections seront étudiées :

La première, qui est la méthode d'optimisation **« group »**, consiste à séparer les éléments de la structure en trois groupes distincts (voir Figure I.29) : les barres (en rouge), les câbles de base (qui forment la base de chaque module, en bleu) et les câbles longitudinaux (qui lient les bases des modules entre elles, en vert. Chaque élément sera ensuite dimensionné à l'effort maximal rencontré dans l'un des éléments de son groupe.

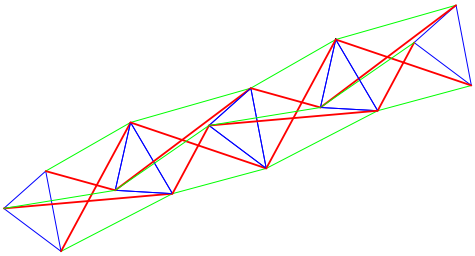


Figure I.29 - Passerelle de tenségrité composée de simplex [Illustration de l'auteur adapté de [4]]

La seconde méthode étudiée est nommée **« full-stress »**, et consiste simplement à dimensionner chaque élément individuellement à l'effort maximal qu'il rencontre. Cette méthode d'optimisation n'est pas très pertinente d'un point de vue pratique, car chaque élément mis en œuvre aura des dimensions différentes. Cependant, il s'agit théoriquement de la méthode d'optimisation des sections la plus efficace en termes de matière et il est intéressant de pouvoir comparer les résultats d'autres méthodes d'optimisation avec les résultats de celle-ci, afin de voir de combien ils s'en écartent.

4.2.3. Processus d'optimisation

L'optimisation commence par un choix arbitraire des sections. A chaque itération, l'algorithme calcule les efforts internes de la structure et dimensionne les éléments en fonction. La condition d'arrêt est que les sections calculées à l'itération précédente doivent être identiques aux nouvelles sections calculées.

Cette condition d'arrêt demandant un nombre important d'itérations, une certaine marge d'erreur est autorisée. Dans l'algorithme utilisé par Jonas Feron [3]et Lindy Boucher [4], cette marge d'erreur se traduisait par la condition suivante :

$$max|A_{e,i+1} - A_{e,i}| < \frac{A_{moy,i}}{150}$$

Où $A_{moy,i}$ est la moyenne des aires calculées à l'itération i. Cette condition a été modifiée pour l'algorithme d'optimisation utilisé dans ce mémoire, qui sera détaillé plus loin.

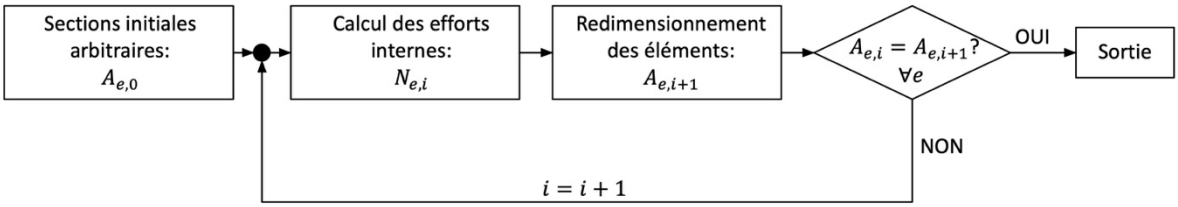


Figure I.30 - Algorithme d'optimisation des sections [Illustration de l'auteur adapté de [4]]

4.3. Optimisation de la structure

La théorie des indicateurs morphologiques ayant déjà été expliquée en détail (voir 2.2), cette section n'a pour objectif que de rappeler les quatre critères d'optimisation des structures de tenségrité optimale : minimiser le volume, avoir un déplacement acceptable de la structure et limiter la précontrainte et le poids propre. A la lumière des indicateurs morphologiques, ces quatre critères se réécrivent comme :

$$\begin{cases} min(W) = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi, \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{F}}\right) \\ \frac{L}{\delta} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi, \frac{\mathrm{P}}{\mathrm{F}}\right) \geq 500 \\ \frac{P}{F} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi\right) < 50 \\ \frac{\rho V}{F} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi\right) < 3 \end{cases}$$

4.4. Optimisation complete

La première étape de l'optimisation complète d'une structure de tenségrité consiste à fixer la valeur des indicateurs morphologiques primaires en fonction du matériau utilisé, de la charge externe totale et du facteur de forme q. Par facilité on utilise le même matériau pour tous les éléments de la structure.

Ensuite, la structure est calculée pour différentes valeurs d'élancement géométrique L/H. Pour chacune de ces valeurs, les aires et la précontrainte doivent être réoptimisées.

La Figure I.31 présente un schéma de l'algorithme complet d'optimisation d'une structure. Celui-ci permet de déterminer la valeur de $\mathrm{L/H}$ optimal permettant de minimiser le volume. Les structures pour lesquelles le critère de flèche, de poids propre ou de précontrainte ne sont pas respectés ne seront pas prises en compte dans le choix de la configuration optimale.

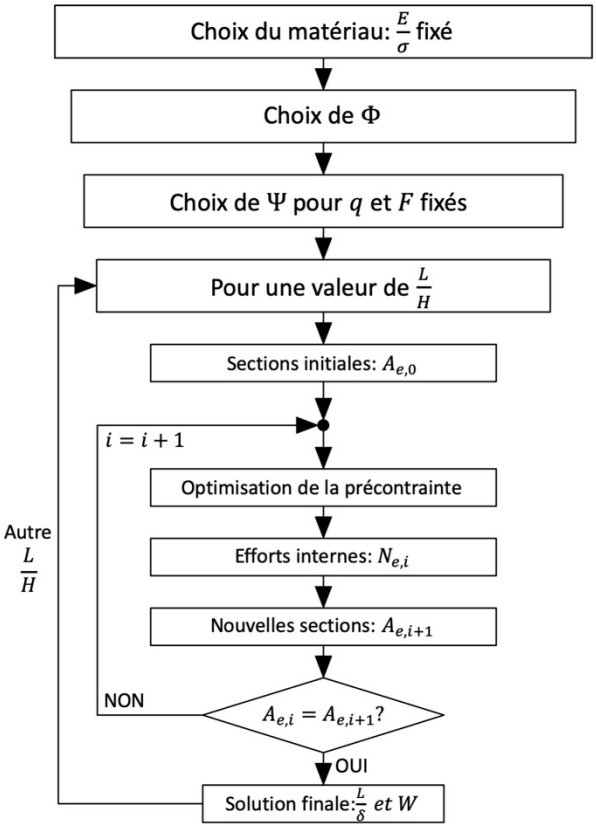


Figure I.31 - Algorithme d'optimisation d'une structure de tenségrité [Illustration de l'auteur] [4]

Chapitre II OPTIMISATION SOUS CHARGES ALEATOIRES

1. INTRODUCTION

Jusqu'à présent, toutes les analyses effectuées sur les structures de tenségrité se basaient sur une hypothèse assez restrictive : la passerelle était toujours considérée comme étant chargée uniformément sur toute sa longueur.

Cependant, cette hypothèse n'est valable que pour une partie des charges appliquées sur la structure : le poids du tablier ou le poids de la neige, par exemple, qui sont répartis de manière uniforme tout le long de la passerelle. On ne peut pas en dire autant des charges d'exploitation (piétons, véhicules…), pour lesquels la répartition sur la passerelle peut varier au fil du temps.

Le cas de charge « uniforme » qui a été considéré jusqu'à présent lorsque l'on dimensionnait une passerelle de tenségrité ne représente en fait qu'un seul cas de charge possible parmi un grand nombre. De plus, ce n'est pas forcément celui-là qui engendre les plus grands efforts dans certains éléments, ni celui qui a le plus tendance à détendre certains câbles.

Il faut donc déterminer pour chaque élément séparément quel cas de charge engendrera la plus grande contrainte et dimensionner ledit élément afin qu'il puisse résister à cet effort. Il faut également déterminer pour quel cas de charge les câbles ont le plus tendance à se détendre et adapter le niveau de précontrainte en fonction afin de s'assurer qu'il n'y ait en aucun cas un câble qui se détende.

Le résultat de ce travail serait donc une structure « enveloppe », pour laquelle aucun câble ne se détend quel que soit le cas de charge et dont tous les éléments ont des dimensions suffisantes pour résister aux efforts engendrés par tous les cas de charge possibles.

Les structures de tenségrité ayant un comportement non-linéaire, la puissance de traitement nécessaire pour ajuster le niveau de précontrainte et optimiser les sections dans le cadre d'une analyse sous charges uniformément réparties est déjà relativement conséquente. Si l'on devait vérifier tous les cas de charge possibles de cette manière, la puissance nécessaire deviendrait totalement déraisonnable. Ce temps de calcul peut cependant être réduit en adoptant trois stratégies :

1. En réduisant le nombre de cas de charge à vérifier.
2. En réduisant le temps de calcul nécessaire pour ajuster la précontrainte ou optimiser les sections.
3. En augmentant la puissance de traitement disponible.

Ce chapitre expose comment ces trois stratégies sont combinées afin d'obtenir un algorithme d'optimisation des structures soumises à des charges aléatoires qui requiert une puissance de calcul raisonnable, en posant certaines hypothèses liées au comportement non-linéaire des structures de tenségrité.

1.1. TRANSMISSION DES CHARGES AUX NŒUDS

Avant toute chose, il est nécessaire de bien comprendre comment les charges appliquées sur le tablier sont transmises à la structure portante. Dans la configuration qui a été imaginée, le tablier est suspendu aux nœuds supérieurs de la passerelle et toutes les charges appliquées dessus sont transmises à l'un de ces nœuds.

Dans un premier temps, l'hypothèse sera faite qu'il n'y a qu'une seule charge linéique q_v (en $[N/m]$) statique qui puisse se répartir aléatoirement sur tout le tablier (la combinaison de charges aléatoires et uniformément réparties sera étudiée au Chapitre IV).

Le tablier peut donc être découpé en différentes « zones d'influence » qui transmettront chacune des charges appliquées au nœud supérieur le plus proche. Ainsi, pour la passerelle montrée à la Figure II.1, le tablier est divisé en quatre zones qui transmettent chacune les charges à un nœud supérieur différent.

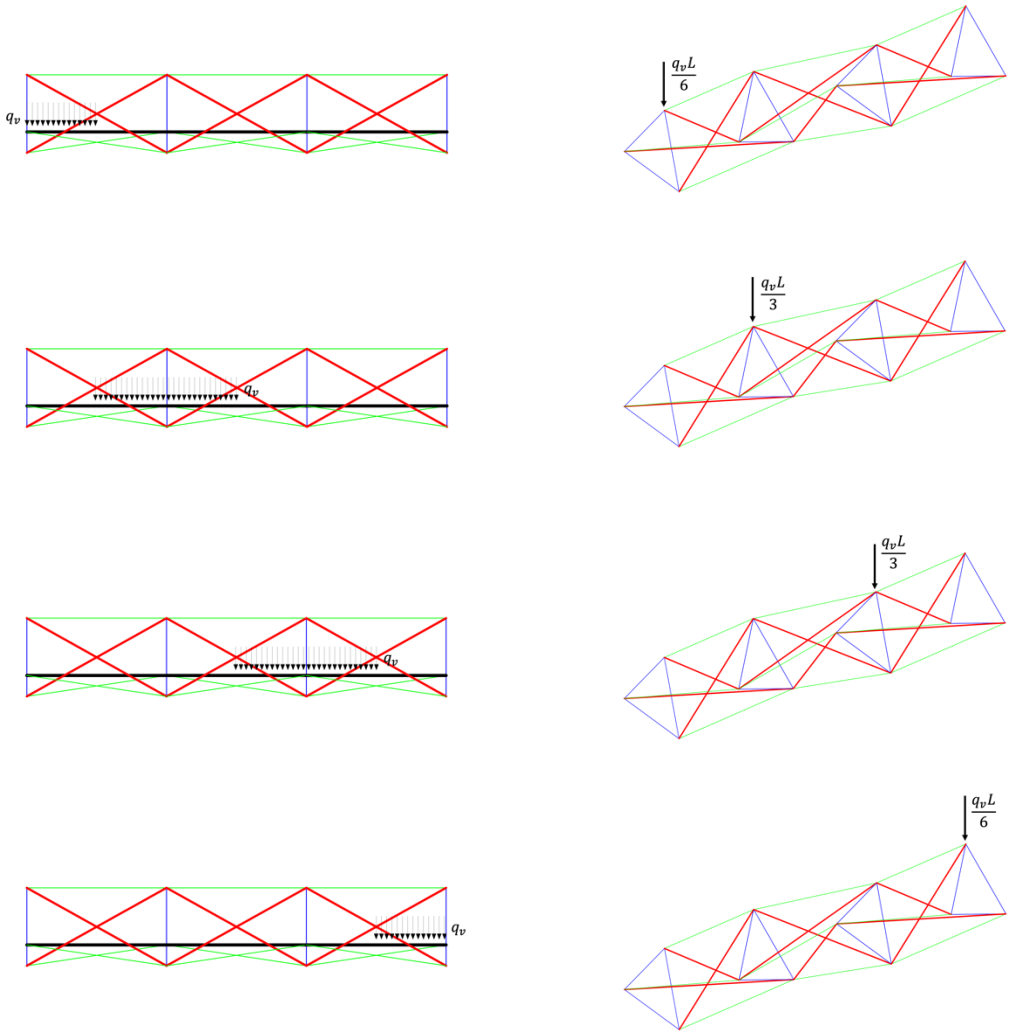


Figure II.1 - Transmission des charges aléatoires aux nœuds supérieurs de la passerelle [Illustration de l'auteur]

Si q_v est la plus grande charge répartie possible appliquée sur le tablier, alors la charge maximale transmise à un nœud supérieur vaudra

$$q_v l_z$$

Où l_z est la longueur de la zone d'influence correspondant à ce nœud. Pour une passerelle à N modules semblable à celle montrée à la Figure II.1, $l_z = L/N$ pour tous les nœuds sauf les deux nœuds d'extrémités, où $l_z = L/2N$.

Par la suite, on se référera aux cas de charge affichés à la Figure II.1 en parlant de « cas de charge de base ». Cette dénomination fait référence aux développements décrits à l'ANNEXE D.

En combinant ces cas de charge de base, on obtient tous les cas de charge qu'il faudrait vérifier afin de déterminer la structure « enveloppe ». Malheureusement, ce nombre augmente de manière exponentielle avec le nombre de modules : pour une passerelle à n modules, il y a $n + 1$ cas de charge de base et donc 2^{n+1} combinaisons possibles. Pour une passerelle à 3 ou 4 modules, cela multiplie déjà la puissance de

traitement nécessaire par 16 ou 32 par rapport à l'analyse sous cas de charge uniforme, ce qui devient vite irréalisable en pratique.

PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Bien qu'il soit a priori applicable uniquement aux structures ayant un comportement linéaire, le principe de superposition est un outil puissant qui permet de déterminer quels cas de charge devront être vérifiés afin de déterminer pour chaque élément son effort maximum.

Cette section commence par expliquer le principe de superposition appliqué aux structures linéaires (en prenant l'exemple d'un treillis classique) pour ensuite montrer comment celui-ci peut être étendu (avec une certaine prudence) aux structures non-linéaires et précontraintes.

1.2. LE PRINCIPE DE SUPERPOSITION APPLIQUE AUX TREILLIS

Cette section s'inspire largement des travaux réalisés par Pierre LATTEUR [2] lors de sa thèse, qui portait entre autres sur l'optimisation de treillis sur base d'indicateurs morphologiques.

Dans cet exemple, on s'intéresse à un treillis de type *Pratt* isostatique. De manière similaire aux structures de tenségrité présentées plus haut, les charges aléatoires sont appliquées sur le tablier et transmises sur les nœuds supérieurs.

On souhaite déterminer, pour une barre quelconque, les cas de charge qui engendreront l'effort maximal de compression et l'effort maximal de traction. En tenant compte uniquement des charges variables $q_v[kN/m]$, la charge maximale transmise à un nœud vaut $\mathrm{q_v L}/4$ (ou $\mathrm{q_v L}/8$ dans le cas d'un nœud d'extrémité). Lorsque le tablier est uniformément chargé, on obtient les charges montrées à la Figure II.2.

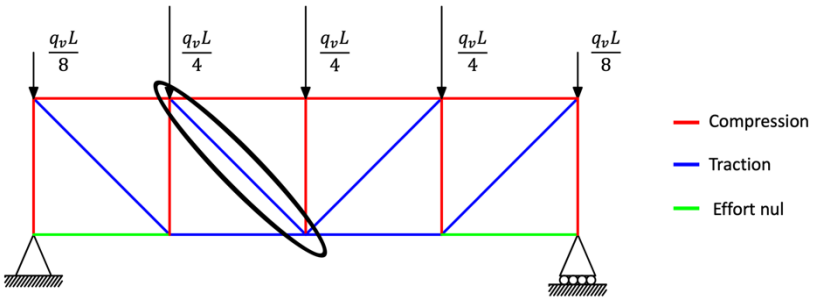


Figure II.2 - Treillis Pratt chargé uniformément [Illustration de l'auteur]

Si on souhaite par exemple déterminer le plus grand effort de traction possible dans la barre diagonale de la deuxième maille (entourée dans la figure ci-dessus), il faut déterminer quelles zones du tablier doivent être chargées pour augmenter l'effort de traction dans cette barre-là. Pour cela, on observe les efforts internes lorsque le treillis est soumis à une charge appliquée sur un seul nœud à la fois (voir Figure II.3).

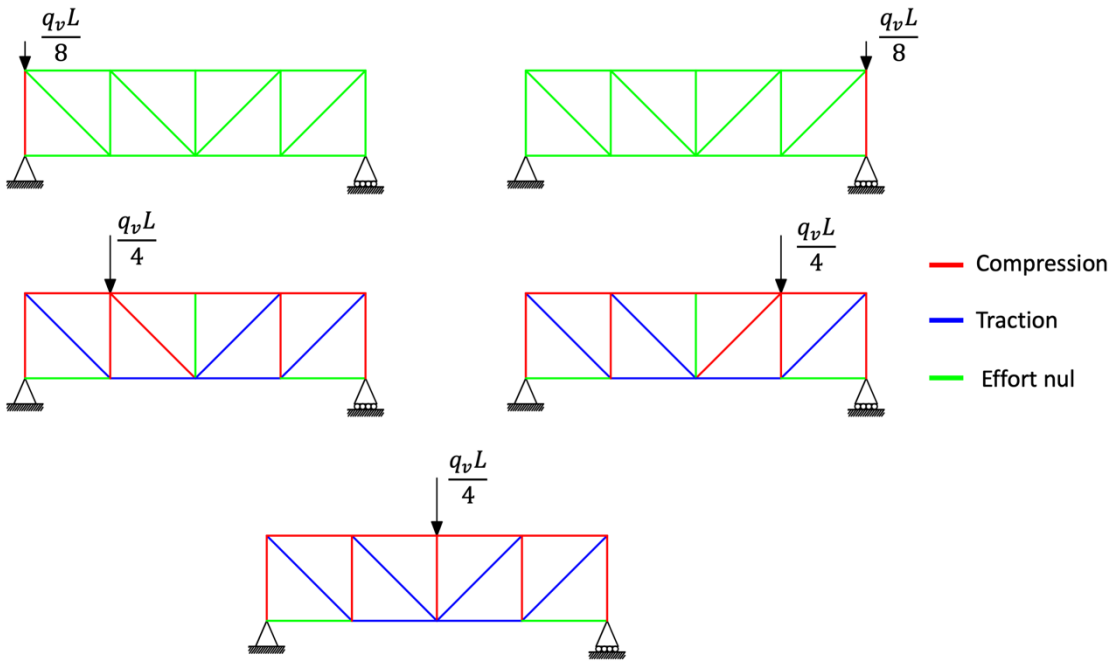


Figure II.3 - Treillis Pratt soumis à une charge ponctuelle appliquée en chacun de ses nœuds [Illustration de l'auteur]

On constate que les charges appliquées aux deux nœuds extérieurs n'ont pas d'effet sur l'effort dans la diagonale analysée, tandis qu'une charge appliquée au nœud 2 a tendance à la comprimer et des charges appliquées aux nœuds 3 et 4 ont tendance à la mettre en traction.

Le cas de charge déterminant pour le calcul de l'effort maximal de traction dans cette barre n'est donc pas le cas où la charge est répartie sur tout le tablier, car le chargement de certaines zones a un effet favorable et vient diminuer la traction dans la barre.

Ceci nous permet de déterminer, pour chacune des barres, les cas de charge les plus défavorables en traction et en compression.

Toutefois, ce raisonnement se base sur le principe de superposition, grâce auquel on peut décomposer un cas de charge quelconque en une série de cas de charge composés d'une seule force appliquée en un seul nœud (les cas de charge de base). L'effort interne dû au cas de charge en question vaut alors la somme des efforts internes dus à chacun des cas de charge de sa décomposition. Ainsi, pour la diagonale que nous avons analysée plus haut, les pires cas de charge en compression et en traction sont présentés à la Figure II.4.

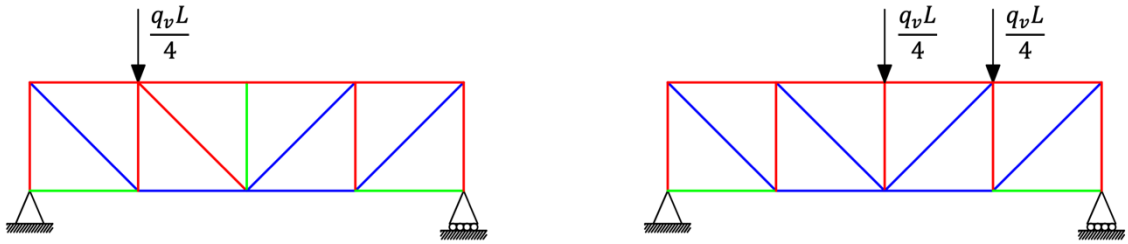


Figure II.4 - Pires cas de charge pour la compression (à gauche) et pour la traction (à droite) dans la diagonale analysée [Illustration de l'auteur]

Ce principe s'applique très bien aux structures linéaires et non-précontraintes, mais le cas des structures de tenségrité est un peu plus délicat. En effet, les efforts internes dans les éléments ne sont plus

proportionnels à la charge externe et la décomposition en une série de cas de charge de base ne donnera pas forcément les mêmes résultats que lorsqu'on calcule ce cas de charge en une seule fois. La section suivante montre qu'il peut tout de même être utilisé, bien qu'il faille s'en servir avec précaution.

1.3. GENERALISATION AUX STRUCTURES DE TENSEGRITE

Cette section n'a pas pour objectif de fournir une preuve formelle que le principe de superposition peut être utilisé pour les structures de tenségrité, mais vise à l'illustrer par un exemple. Ce raisonnement se base sur les réflexions expliquées dans l'ANNEXE D.

Dans cet exemple, on néglige le poids propre de la structure par souci de simplification. Par la suite il suffit de considérer le cas de charge « poids propre » comme un cas de charge de base supplémentaire et de traiter celui-ci exactement de la même manière que les autres.

Soit une structure de tenségrité (non-linéaire et précontrainte) composée de 4 simplex. On note $N(A)$ l'effort normal dans une barre quelconque engendré par le cas de charge A et $N(B)$ l'effort normal dans cette même barre engendré par le cas de charge B (voir Figure II.5).

Si cette structure avait eu un comportement parfaitement linéaire alors la relation

$$N(\alpha A + \beta B) = \alpha N(A) + \beta N(B)$$

serait vérifiée pour deux scalaires α et β quelconques et pour deux cas de charge A et B quelconques. Il en aurait été de même si la fonction N avait représenté le déplacement d'un nœud ou une réaction d'appui.

Dans la suite de cette section, on vérifie la validité de cette relation pour les deux cas de charge donnés à la Figure II.5, pour deux cas différents :

- la multiplication d'un cas de charge par un scalaire : est-ce que $N(\alpha A) = \alpha N(A)$?
- la somme de deux cas de charge : est-ce que $N(A + B) = N(A) + N(B)$?

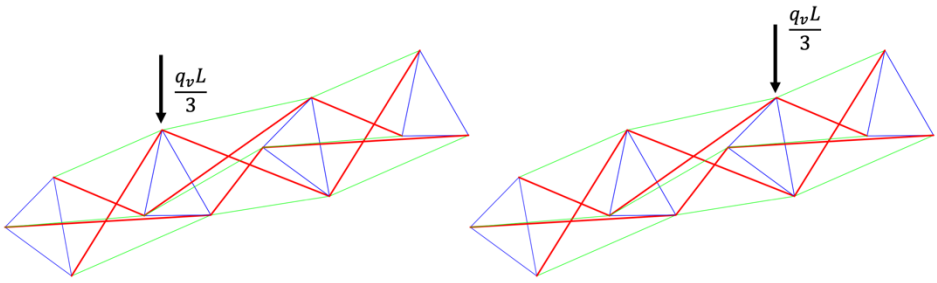


Figure II.5 - Cas de charge appliqués à la passerelle composée de 3 simplex [Illustration de l'auteur]

N.B. Les résultats présentés dans cette section sont représentatifs d'un nombre bien plus grand de vérifications de la validité du principe de superposition, sur plusieurs structures dont les paramètres varient. Le choix de ces cas de charge et de cette passerelle-ci en particulier a été fait car les résultats obtenus ont été jugés représentatifs des vérifications effectuées.

Lorsque l'on compare les efforts internes engendrés par les cas de charge A et B appliqués simultanément avec la somme des efforts internes engendrés par A et B appliqués séparément, on constate que l'erreur commise par le principe de superposition reste assez limitée (10% maximum, voir Figure II.6).

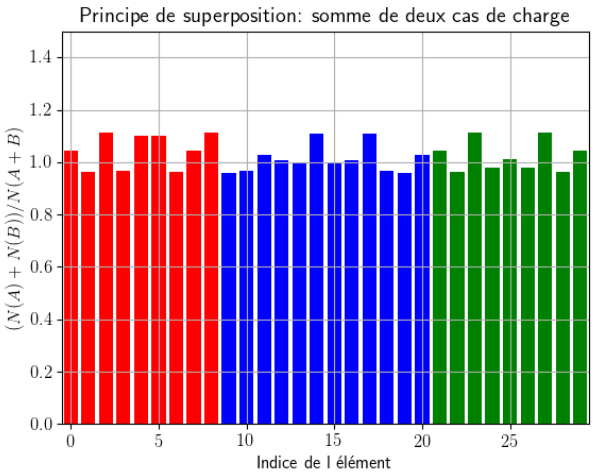


Figure II.6 - Principe de superposition : somme de deux cas de charge – Efforts internes [Illustration de l'auteur]

Cependant, lorsqu'on fait le même exercice en appliquant cette fois-ci deux fois le même cas de charge, on constate que l'erreur engendrée par le principe de superposition est plus importante pour certains éléments (erreur maximale de plus de 40%, voir Figure II.8).

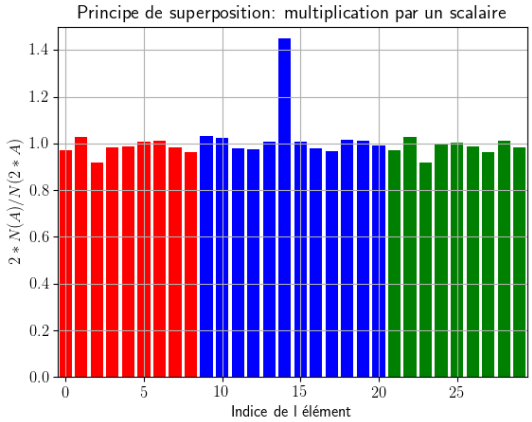


Figure II.8 - Principe de superposition : multiplication par un scalaire - Efforts internes [Illustration de l'auteur]

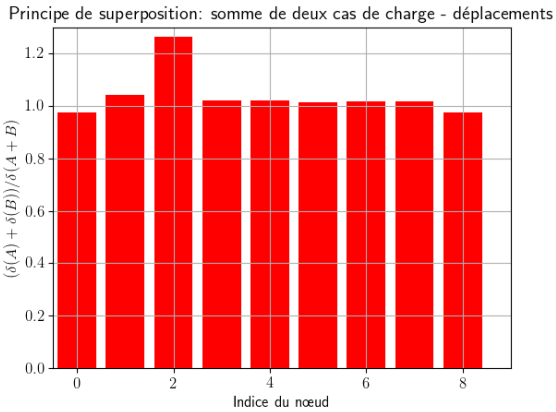


Figure II.7 - Principe de superposition : multiplication par un scalaire : Déplacements verticaux [Illustration de l'auteur]

Le même exercice peut être effectué pour les déplacements verticaux des différents nœuds de la structure. Dans ce cas-là, on constate que l'erreur commise par l'application du principe de superposition est très faible pour un même cas de charge appliqué deux fois (voir Figure II.7)

Lorsque l'on compare les déplacements verticaux aux nœuds sous l'application de A et B simultanément avec l'application de A et B séparément, l'erreur commise par le principe de superposition dépasse 20% pour le nœud n°2 (voir Figure II.9).

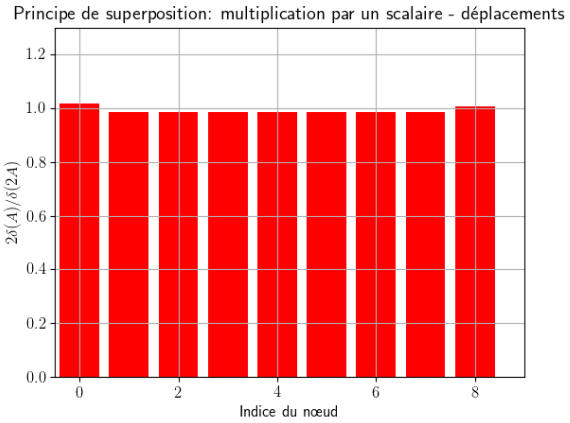


Figure II.9 - Principe de superposition : somme de deux cas de charge - Déplacements verticaux [Illustration de l'auteur]

N.B. : La numérotation des nœuds et des éléments est détaillée dans l'ANNEXE C.

1.4. Conclusion

L'exemple présenté dans cette section a permis de constater que l'erreur commise par l'application du principe de superposition est relativement conséquente. Il ne pourra donc pas être appliqué de la même manière que pour les structures linéaires.

Cependant, l'erreur commise lorsqu'il est appliqué pour deux cas de charge distincts (les cas A et B dans l'exemple précédent) est limitée à environ 10% et le principe de superposition a tout de même une double utilité :

- il permet, en combinant tous les cas de charge de base défavorables, de déterminer quel est le cas de charge le plus défavorable soit pour l'effort normal dans un élément, soit pour les déplacements d'un nœud. Il faut cependant recalculer ce cas de charge séparément par la suite pour corriger l'erreur commise par l'application du principe de superposition.
- il permet d'obtenir une première approximation de l'effort normal ou des déplacements engendrés, permettant ainsi un pré dimensionnement efficace qui permet de réduire le nombre d'itérations nécessaires à l'algorithme pour converger vers une solution.

L'utilisation du principe de superposition dans l'outil numérique est expliquée en détail à la section suivante.

2. MODIFICATION DE L'ALGORITHME D'AJUSTEMENT DE LA PRECONTRAINTE

2.1. PRINCIPE GENERAL

Pour rappel, une structure de tenségrité est précontrainte en suivant un **scénario de précontrainte**, qu'on notera $\vec{P}$. Ce scénario de précontrainte est représenté sous la forme d'un vecteur reprenant l'effort de précontrainte introduit dans chaque élément [11]:

$$\vec{P} = (P_1, P_2, \dots P_n)$$

Où P_i est l'effort de précontrainte introduit dans l'élément d'indice i et n est le nombre total d'éléments. Il se décompose en un scalaire, le **niveau de précontrainte** (noté P), multiplié par un vecteur sans dimensions, **l'état de précontrainte**, noté $\vec{p}$, qui représente la répartition des contraintes dans les éléments :

$$\vec{P} = P * \vec{p} = P * (p_1, p_2, \dots p_n)$$

Dans ce cas-ci, on choisit d'introduire la précontrainte de manière uniforme dans toutes les barres de la structure. On fixe donc l'état de précontrainte :

$$\vec{p} = \left(\underbrace{1,1,1,\dots}_{barres},\underbrace{0,0,0}_{câbles}\right)$$

L'algorithme d'ajustement de la précontrainte vise à trouver la valeur minimale de P par laquelle il faut multiplier $\vec{p}$ afin de s'assurer qu'aucun câble ne se détende sous aucun cas de charge. En d'autres termes, il s'agit du niveau de précontrainte pour lequel le câble qui se détend le plus atteint un effort exactement nul.

Afin de déterminer quel est le cas de charge qui détend le plus l'un des câbles, on fait usage du principe de superposition. L'algorithme est composé de deux boucles :

- La **première boucle** calcule une première approximation de P en ne calculant que les cas de charge de base et en les superposant. A la sortie de cette boucle, l'algorithme fournit les cas de charge qui ont le plus tendance à détendre les câbles.
- La **seconde boucle** part de l'approximation calculée à la sortie de la première et l'ajuste en ne vérifiant que les cas de charge les plus défavorables, sans utiliser le principe de superposition.

Un problème s'est assez vite présenté lors de l'application de cet algorithme : si on part d'un niveau de précontrainte nul ou très faible P_0 appliqué à la première itération, de grands déplacements sont engendrés car la rigidité de la structure est très faible. Ceci a pour effet d'augmenter considérablement les effets du second ordre. De ce fait, l'erreur commise par le principe de superposition devient trop grande et ne permet plus de fournir une approximation satisfaisante de P. Ceci est illustré plus en détail dans l'ANNEXE E.

Afin de pallier ce problème, il faut augmenter la rigidité de la structure afin d'en limiter les déplacements. Ceci peut se faire en donnant à la précontrainte P_0 une valeur excessivement élevée, fixée à :

$$P_0 = 50F$$

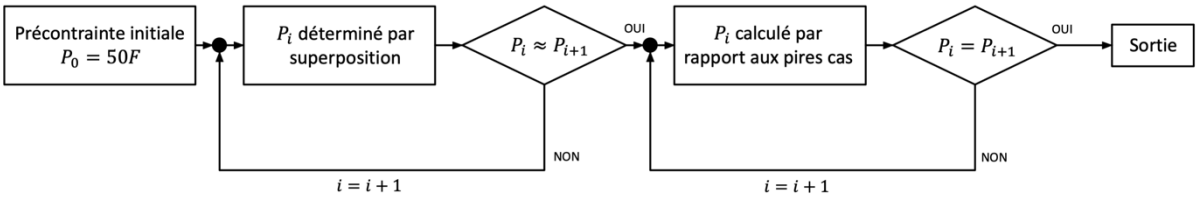


Figure II.10 - Nouvel algorihtme d'ajustement de la précontrainte [Illustration de l'auteur]

La Figure II.10 représente de manière simplifiée l'algorithme d'ajustement de la précontrainte, qui sera détaillé dans les sections suivantes.

2.2. Premiere boucle : principe de superposition

Dans un premier temps, l'objectif est de trouver une approximation du niveau de précontrainte minimal et de déterminer quel cas de charge a le plus tendance à détendre les câbles.

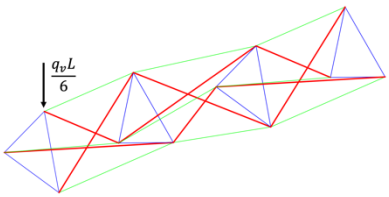
Pour cela, on observe les efforts internes engendrés dans les câbles par l'application des cas de charge de base sur la structure précontrainte initialement avec $P_0 = 50F$.

Chacun de ces cas de base a pour effet d'augmenter ou de diminuer l'effort dans les câbles par rapport à la situation initiale, où le seul effort dans les câbles était N_{pre}, l'effort normal dû à l'introduction de la précontrainte.

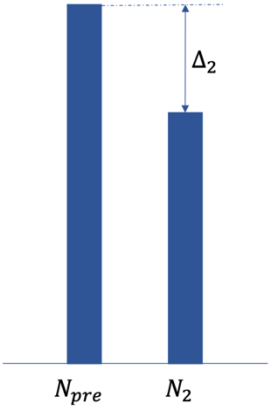
Pour un cas de charge i donné, la différence entre l'effort initial N_{pre} et l'effort final N_i (après application de la charge) est notée Δ_i.

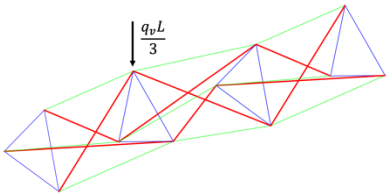
Ainsi, pour une passerelle composée de 3 simplex, il faut calculer quatre cas de charge de base différents. Ceci est illustré (pour un seul câble) par les schémas à la Figure II.11 : on voit que le troisième cas de charge (une charge ponctuelle appliquée sur le troisième nœud) a tendance à tendre le câble, il est donc considéré comme « favorable ». Le cas qui aura le plus tendance à détendre ce câble sera donc la superposition des cas « défavorables » 1, 2 et 4, qui ont tous les trois tendance à détendre le câble.



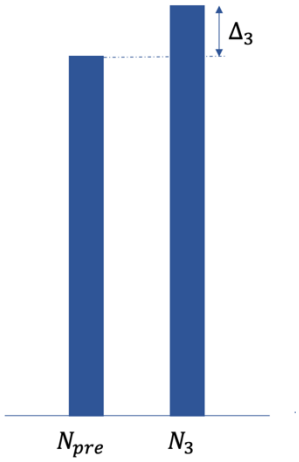


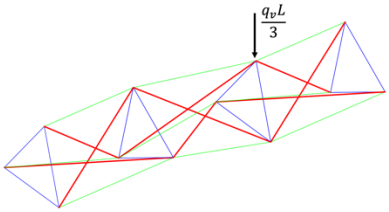
CAS DE BASE N°1





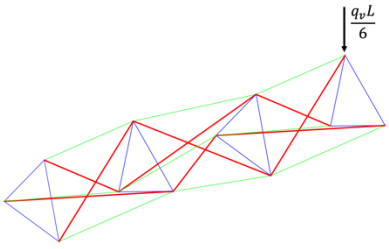
CAS DE BASE N°2





CAS DE BASE N°3





CAS DE BASE N°4

Figure II.11 - Application des cas de charge de base pour déterminer la diminution ou l'augmentation d'effort [Illustration de l'auteur]

Le calcul des Δ_i par cette méthode permet également d'obtenir une première approximation de la précontrainte nécessaire dans un câble afin que celui-ci ne se détende sous aucun cas de charge : comme on fait l'hypothèse que le principe de superposition est valable, on considère que, pour un câble donné, le cas de charge qui le détendra le plus est la superposition de tous les cas de charge de base qui ont tendance à le détendre. Dans le cas de l'exemple donné ci-dessus, il s'agit du cas où les nœuds 1,2 et 4 sont chargés.

Dans ce cas précis, la diminution d'effort dans le câble vaudra alors $\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_4$. Pour s'assurer que le câble reste tendu, l'effort minimal de précontrainte dans le câble doit compenser exactement cette diminution d'effort :

$$N_{pre} = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_4$$

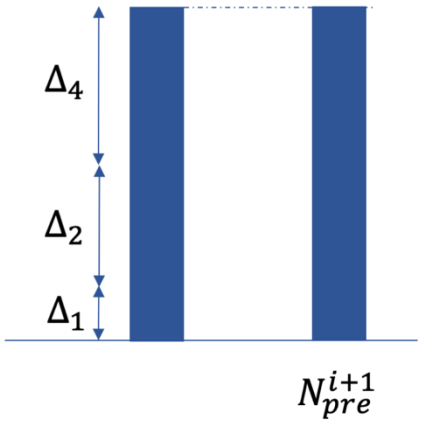


Figure II.12 – Précontrainte minimale nécessaire dans le câble à l'itération suivante [Illustration de l'auteur]

Si on procède par itérations, on peut déterminer à l'itération i la valeur de N_{pre}^{i+1} nécessaire pour qu'à l'itération suivante le câble ne se détende pas :

$$N_{pre}^{i+1} > \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_4 = \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_4}{N_{pre}^i} N_{pre}^i$$

Où $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_4$ sont les diminutions d'effort calculées à l'itération i.

Le niveau de précontrainte P étant proportionnel à l'effort normal de précontrainte N_{pre} dans le câble (voir ANNEXE F), ceci permet également de déterminer le niveau de précontrainte qu'il faut appliquer pour s'assurer que le câble ne se détende pas :

$$P^{i+1} > \frac{\Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_4}{N_{pre}^i} P^i$$

Cette démarche doit évidemment être appliquée à tous les câbles, afin de s'assurer qu'aucun d'eux ne se détende. La valeur finale de P à l'itération suivante sera donc la plus grande parmi celles calculées pour chaque câble. Ainsi, on s'assure que, pour chaque câble :

$$P^{i+1} > \frac{\sum_{defav} \Delta}{N_{pre}^i} P^i$$

Et pour le câble qui se détend le plus :

$$P^{i+1} = \frac{\sum_{defav} \Delta}{N_{pre}^{i}} P^{i}$$

Afin de pouvoir corriger l'erreur du principe de superposition dans la seconde boucle, il est également nécessaire d'enregistrer quelle combinaison de cas de charge de base est la plus défavorable pour le câble qui se détend le plus.

Cependant, pour s'assurer de ne pas souffrir d'erreurs d'imprécision et risquer de sélectionner le mauvais cas de charge, on prendra en réalité toutes les combinaisons pour lesquelles un des câbles se détend au moins à 90%, donc pour lequel :

$$\frac{\sum_{defav} \Delta}{N_{pre}} > 0.9$$

N.B.1 : Lorsque le poids propre est pris en compte, celui-ci est considéré comme un cas de charge de base supplémentaire, à la seule différence qu'il sera pris en compte même s'il est favorable (qu'il tend le câble), car c'est une charge permanente qui sera toujours appliquée. La condition à vérifier pour qu'aucun câble ne se détende devient donc :

$$P^{i+1} > \frac{\sum_{defav} \Delta + \Delta_{PP}}{N_{pre}^{i}} P^{i}$$

N.B.2. : Si le principe de superposition avait été parfaitement valable, il n'aurait pas été nécessaire de procéder par itérations, car la démarche exposée ci-dessus aurait immédiatement donné la valeur exacte de P telle que le câble le plus détendu soit exactement à zéro.

L'erreur commise par le principe de superposition oblige à procéder par itérations, afin de se rapprocher progressivement de la solution. La condition d'arrêt de cette boucle veut que le niveau de précontrainte calculé à l'itération précédente soit égal à celui calculé à l'itération actuelle, à 10% près :

$$0.9 < \frac{P^{i+1}}{P^{i}} < 1.1$$

Il a été jugé inutile de prendre une marge d'erreur plus précise à ce stade-ci car elle sera de toute façon corrigée dans la seconde boucle, qui est bien plus précise car elle ne fait pas usage du principe de superposition.

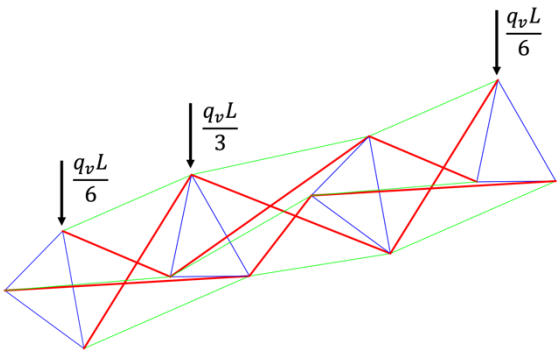


Figure II.13 - Cas de charge le plus défavorable déterminé à partir du principe de superposition [Illustration de l'auteur]

2.3. Deuxieme boucle : correction de l'erreur

L'erreur due au principe de superposition est trop grande pour fournir une valeur suffisamment précise du niveau de précontrainte optimal. La seconde boucle permet de corriger cette erreur et d'obtenir la valeur

finale du niveau de précontrainte. La première boucle a permis de trouver le cas de charge le plus défavorable. Dans le cas du câble utilisé en exemple, il s'agit du cas de charge affiché à la Figure II.13, où les nœuds 1,2 et 4 sont chargés.

A l'entrée de la seconde boucle, le niveau de précontrainte vaut l'approximation calculée à la sortie de la première boucle.

Ensuite, on calcule les efforts internes dans la structure soumise aux cas de charge les plus défavorables, déterminés dans la première boucle. Ceci permet de déterminer quel câble se détend le plus, et sous quel cas de charge. L'effort normal N dans ce câble sera assez proche de zéro, car la première boucle a déjà fourni une première approximation de la précontrainte optimale.

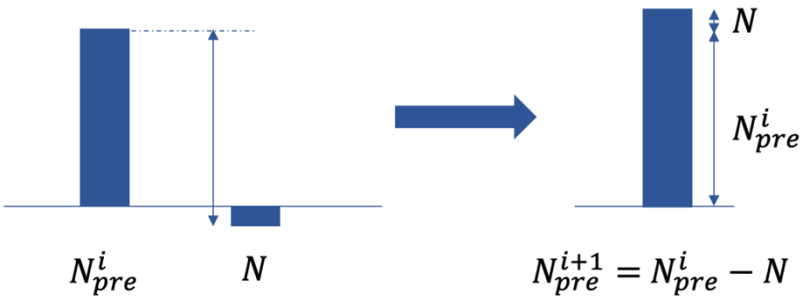


Figure II.14 - Ajustement de la précontrainte dans le câble qui se détend le plus [Illustration de l'auteur]

On ajuste alors la précontrainte de manière à ce que l'effort normal dans le câble le plus détendu soit égal à zéro à l'itération d'après, comme l'illustre la Figure II.14.

Pour le câble qui se détend le plus, il faut donc que

$$N_{pre}^{i+1} = N_{pre}^{i} - N$$

Pour ce faire, on ajuste la précontrainte extériorisée P à l'itération suivante :

$$P^{i+1} = \frac{N_{pre}^{i+1}}{N_{pre}^{i}} P^{i} = \frac{N_{pre}^{i} - N}{N_{pre}^{i}} P^{i}$$

La seconde boucle s'arrête lorsque l'effort normal N dans le câble qui se détend le plus est égal à zéro, en d'autres termes lorsque

$$P^{i+1} = P^{i}$$

En pratique, on accordera tout de même une petite marge d'erreur. Celle-ci a été fixée telle que la seconde boucle s'arrête lorsque

$$0.995 < \frac{P^{i+1}}{P^{i}} < 1.005$$

2.4. Algorithme complet et verification

Finalement, la combinaison des deux boucles donne l'algorithme final affiché à la Figure II.15.

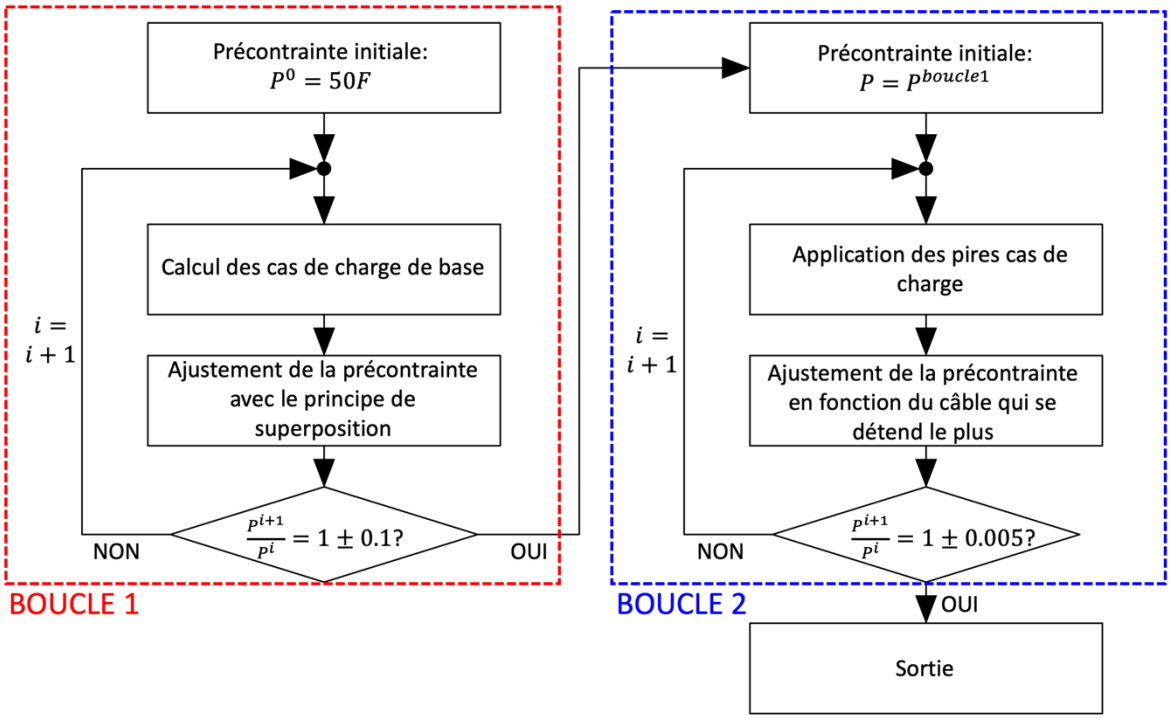


Figure II.15 - Algorithme complet d'ajustement de la précontrainte [Illustration de l'auteur]

Par sécurité, une vérification a été ajoutée à la fin de l'ajustement du niveau de précontrainte afin de vérifier que celui-ci soit suffisant, sans être trop élevé.

Cette sécurité calcule, sur la structure dont le niveau de précontrainte est celui déterminé par l'algorithme, les 2^{n+1} cas de charge possibles afin de vérifier qu'en aucun cas un câble ne se détende.

Afin de s'assurer que la précontrainte ne soit pas trop élevée, elle vérifie également qu'il y ait effectivement un cas de charge pour lequel l'effort normal dans l'un des câbles est nul.

3. MODIFICATION DE L'ALGORITHME D'OPTIMISATION DES SECTIONS

3.1. PRINCIPE GENERAL

L'objectif de cet algorithme est de trouver pour chaque élément la plus petite section nécessaire pour résister à l'effort engendré par l'un des cas de charge possibles. La méthode d'optimisation des sections peut varier entre la méthode **group** et la méthode **full-stress**, mais le principe reste le même.

Les barres sont dimensionnées en fonction de l'indicateur de flambement :

$$A_e = \frac{N_e}{2\sigma}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}\Psi_e^2}\right)$$

L'algorithme d'optimisation des sections fonctionne sur le même principe que l'algorithme d'ajustement de la précontrainte : on commence par déterminer une première approximation des sections basée sur le principe de superposition, qu'on ajuste ensuite en calculant uniquement les cas de charge les plus déterminants. Un schéma simplifié de cet algorithme est présenté à la Figure II.16.

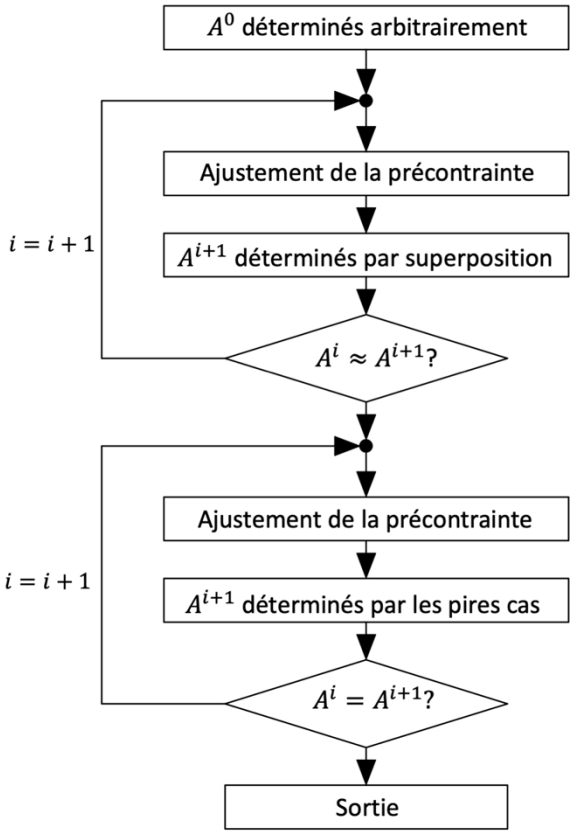


Figure II.16 - Algorithme d'optimisation des sections [Illustration de l'auteur]

3.2. PREMIERE BOUCLE : PRINCIPE DE SUPERPOSITION

Si on reprend le câble qui avait servi d'exemple dans la section précédente, on voit que le seul cas de charge qui a tendance à augmenter la traction dans le câble est le cas de charge n°3, tandis que tous les autres détendent le câble.

L'effort maximal (qu'on notera N_{max}) dans ce câble apparaît donc quand seul le nœud n°3 est chargé et vaut :

$$N_{max} = N_{pre} + \Delta_3$$

comme le montre la Figure II.17.

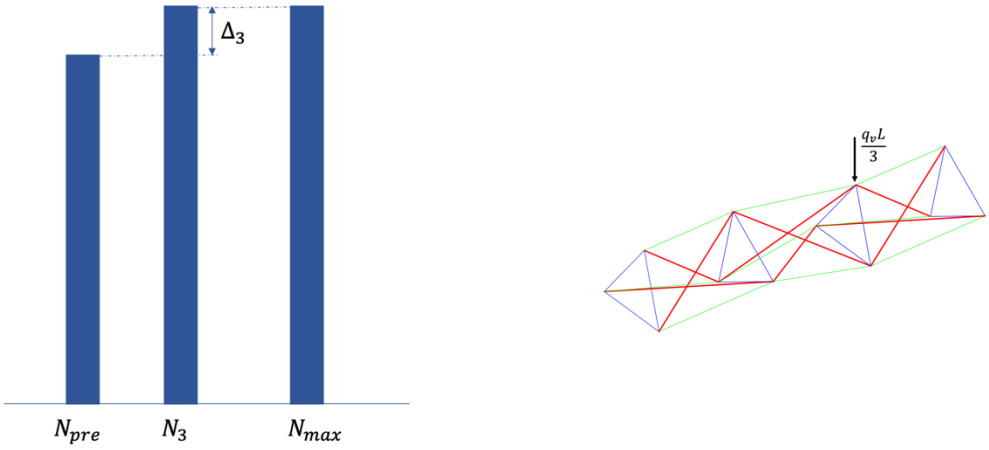


Figure II.17 - Cas de charge de base n°3, le seul à tendre le câble [Illustration de l'auteur]

Pour que le câble puisse résister à l'effort maximal, il faut que son aire soit égale à :

$$A = \frac{N_{max}}{\sigma}$$

Cette démarche est appliquée à tous les éléments de la structure. Pour un élément quelconque, l'effort maximal rencontré vaudra

$$N_{max} = N_{pre} + \sum_{defav} \Delta$$

Lorsque l'indicateur de flambement Ψ n'est pas nul, il faudra faire attention à dimensionner les barres en tenant compte du flambement, par la formule

$$A = \frac{N_{max}}{2\sigma}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}\Psi^2}\right)$$

On voit que si $\Psi = 0$, on retrouve la formule utilisée pour dimensionner les câbles.

Une fois que les aires sont déterminées pour tous les éléments, il reste à ajuster celles-ci selon la méthode d'optimisation souhaitée et à enregistrer quels cas de charge seront appliqués dans la seconde boucle d'optimisation :

- dans le cas **group**, la plus grande aire de chaque groupe est sélectionnée et appliquée à tous les éléments du groupe. On enregistre également par groupe quel est le cas de charge qui en a déterminé l'aire. Comme on a différencié trois groupes différents, il y aura un maximum de 3 cas de charge à vérifier dans la seconde boucle d'optimisation.
- dans le cas **full-stress,** il ne faut plus modifier les sections car celles-ci sont déjà correctement dimensionnées. Par contre, il faut enregistrer pour chaque élément quel cas de charge est le plus déterminant. Celui-ci pouvant être différent pour chaque élément, le nombre de cas à calculer dans la seconde boucle peut augmenter assez vite, ce qui rend la méthode **full-stress** moins efficace que la méthode **group** en termes de puissance de calcul.

N.B. : Il peut arriver que, pour certains éléments, tous les cas de charge de base aient tendance à diminuer l'effort rencontré dans l'élément. Dans ce cas, ce sera l'effort de précontrainte qui détermine l'aire nécessaire. En effet, si tous les cas de charge de base sont favorables alors $\sum_{defav} \Delta = 0$ et

$$N_{max} = N_{pre} + \sum_{defav} \Delta = \mathrm{N_{pre}}$$

C'est cette démarche qui est appliquée à chaque itération : en partant de la structure dont les aires sont fixées à A^i, on calcule les N_{max} de chaque élément afin de déterminer A^{i+1}.

De manière similaire à l'algorithme d'ajustement de la précontrainte, la condition d'arrêt de la boucle est assez laxiste, car il y aura de toute façon une erreur due au principe de superposition, qui sera corrigée dans la seconde boucle.

L'algorithme s'arrête lorsque :

$$0.9 < \frac{A^{i+1}}{A^i} < 1.1$$

est vérifié pour tous les éléments de la structure.

3.3. Seconde boucle : correction

La seconde boucle permet de corriger l'erreur due au principe de superposition, car elle applique directement les cas de charge les plus défavorables, sans superposer les cas de charge de base.

En partant des aires estimées à la sortie de la première boucle, l'algorithme calcule la structure soumise à chacun des cas de charge les plus défavorables déterminés dans la seconde boucle.

Ceci permet de déterminer pour chaque élément l'effort maximal N_{max} et de les dimensionner en fonction :

- $A = \frac{N_{max}}{2\sigma}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{\pi^2}\Psi^2}\right)$ pour les barres
- $A = \frac{N_{max}}{\sigma}$ pour les câbles

Dans le cas d'une optimisation **« group »**, les aires des éléments de chaque groupe sont remplacées par la plus grande aire d'un élément de ce groupe, comme c'était le cas dans la première boucle.

La condition d'arrêt est plus précise que dans la première boucle et est fixée à

$$0.995 < \frac{A^{i+1}}{A^i} < 1.005$$

N.B. : L'algorithme d'optimisation sous charges uniformes peut être modifié en utilisant uniquement les secondes boucles de l'algorithme d'ajustement de la précontrainte et d'optimisation des sections pour des charges aléatoires, en prenant par défaut le cas de charge uniforme comme étant le plus défavorable et en commençant à $P = 50F$. Cette méthode a permis de diviser le temps d'optimisation d'une structure soumise à des charges uniformes par un facteur de 4 (en moyenne) par rapport à l'algorithme précédent. Le détail de cet algorithme est fourni à l'ANNEXE G.

3.4. Algorithme final et verification

L'algorithme complet d'optimisation des sections est montré à la Figure II.18.

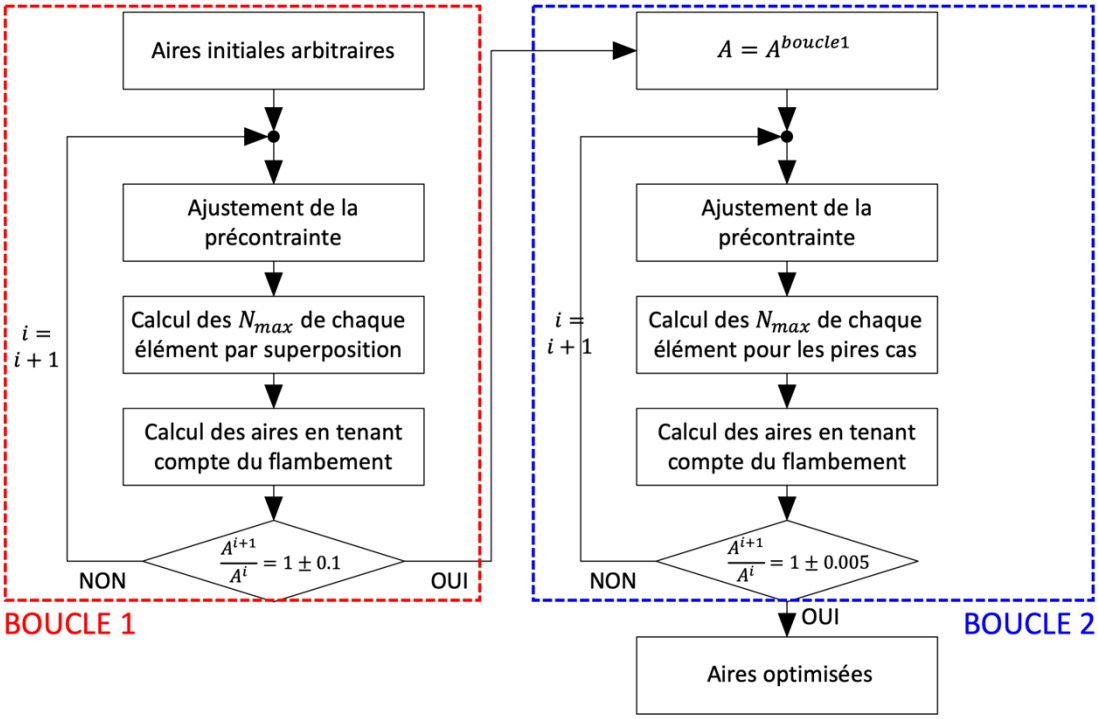


Figure II.18 - Algorithme d'optimisation des sections sous charges aléatoires [Illustration de l'auteur]

De manière similaire à la vérification de l'algorithme d'ajustement de la précontrainte, une vérification peut être effectuée une fois que les aires de la structure sont déterminées, en calculant les 2^{n+1} cas de charge possibles et en vérifiant que les sections sont dimensionnées correctement.

4.AUGMENTATION DE LA PUISSANCE DE CALCUL

Les sections précédentes ont montré comment deux des trois stratégies évoquées étaient adoptées afin de réduire la puissance et le temps de calcul nécessaire :

- réduction du nombre de cas de charge à analyser en appliquant le principe de superposition
- réduction du nombre d'itérations nécessaires pour converger vers le bon niveau de précontrainte en modifiant l'algorithme : le précédent incrémentait la précontrainte à chaque itération jusqu'à atteindre le niveau de précontrainte optimal, tandis que l'algorithme actuel calcule directement une première approximation de la précontrainte optimale en partant d'une structure très rigide ($P = 50F$) pour laquelle les effets du second ordre sont atténués.

Une dernière démarche a été faite afin de réduire encore le temps de calcul nécessaire : des modifications ont été apportées au code de calcul afin que celui-ci puisse être envoyé sur les clusters du *Consortium des Équipements de Calcul Intensif (CÉCI), financé par le Fonds de la Recherche Scientifique de Belgique (F.R.S.-FNRS) sous la convention n° 2.5020.11 et par la Région Wallone.* [16]

Ceci a pu se faire grâce à l'aide précieuse de Damien François et par l'écriture de quelques scripts en langage de commande *bash* permettant d'envoyer toutes les simulations nécessaires sur les clusters du CÉCI. Cette démarche a permis de gagner un temps de calcul considérable.

5. CALCUL DES INDICATEURS MORPHOLOGIQUES

Jusqu'à présent, les algorithmes présentés permettent d'optimiser une structure dont on connaît la géométrie. La théorie des indicateurs permet d'aller un pas plus loin, car elle aide à déterminer la géométrie qui optimise soit le volume, soit le déplacement.

Pour atteindre cet objectif, il est nécessaire de repréciser la définition de certains des indicateurs morphologiques définis précédemment, car l'introduction de cas de charge aléatoires rend certaines de ces définitions ambigües : comment détermine-t-on la charge externe totale F si celle-ci peut varier d'un cas de charge à l'autre ? Comment détermine-t-on l'indicateur de déplacement sachant que chaque cas de charge engendrera des déplacements différents ?

Cette section s'inspire largement de la thèse de Pierre LATTEUR [2].

5.1. INDICATEUR DE VOLUME

Dans la définition de l'indicateur de volume intervient le paramètre F qui est la charge totale appliquée sur la structure. Cette notion est univoque dans le cas d'une analyse sous charges uniformément réparties, mais devient ambiguë lorsqu'on considère des charges aléatoires. La charge totale appliquée sur la structure varie alors d'un cas à l'autre.

Comme l'a expliqué Pierre LATTEUR dans sa thèse [2], le volume maximal $V_{i,max}$ d'une barre i de la structure sera déterminé par un cas de charge composé de n_i efforts ponctuels F/n , où F est la charge totale dans le cas d'un chargement uniforme et n le nombre de nœuds sur lesquels les efforts peuvent s'appliquer (dans le cas des structures que nous analysons, les deux nœuds d'extrémité rencontrent en réalité une charge ponctuelle $F/2n$).

Le volume maximal dans chaque élément i reste donc une fonction des indicateurs morphologiques primaires :

$$V_{i,max} = \frac{(n_i F/n)L}{\sigma} f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}\right)$$

En sommant les volumes maximaux de chaque barre, on obtient une expression du volume maximal total de la structure dans le cas des charges aléatoires :

$$V = \sum_i V_{i,max} = \frac{FL}{\sigma} \sum_i (n_i/n)\, f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}\right)$$

On constate que l'indicateur de volume peut être retrouvé à partir de cette expression, et que celui-ci reste dépendant des mêmes paramètres que précédemment. Dans cette expression, la charge totale F considérée représente la charge maximale pouvant être appliquée sur la structure, donc la charge dans le cas uniforme.

$$W = \frac{\sigma V}{FL} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}\right)$$

5.2. INDICATEUR DE DEPLACEMENT

On rencontre le même genre d'ambiguïté pour le calcul de l'indicateur de déplacement L/δ, car il faut déterminer δ de manière univoque. Dans la suite de ce travail, le déplacement considéré sera toujours choisi comme le plus grand déplacement vertical d'un des nœuds de la structure sous n'importe quel cas de charge.

Ceci pose problème car il n'est pas évident de déterminer quel cas de charge donnera le plus grand déplacement vertical d'un des nœuds : les effets de la torsion globale des structures de tenségrité étant plus

importants que pour les treillis, le chargement de certaines zones aura tendance à déplacer certains nœuds vers le haut, tandis que d'autres zones chargées les déplaceront vers le bas.

Afin de déterminer le déplacement maximal de la structure, on fait à nouveau appel au principe de superposition. Dans un premier temps, les déplacements verticaux δ de chaque nœud sont calculés pour chaque cas de charge de base. En sommant les déplacements verticaux vers le bas pour chaque nœud, on trouve le nœud qui se déplace le plus vers le bas et le cas de charge qui engendre ce déplacement.

Pour le nœud qui se déplace le plus, une première estimation du déplacement maximal δ_{max} peut être trouvée en appliquant le principe de superposition :

$$\delta_{max} = \sum_{defav} \delta$$

Bien entendu, les déplacements dus au poids propre de la structure ne sont pas pris en compte, car ceux-ci sont permanents et n'influenceront donc pas le confort d'utilisation de la passerelle (cet aspect sera développé plus en détail au Chapitre IV). Lorsque la structure est calculée en tenant compte du poids propre, il faut soustraire les déplacements dus au poids propre des déplacements totaux :

$$\delta_{max} = \sum_{defav} (\delta - \delta_{PP})$$

Afin d'éviter les erreurs d'imprécision dues au principe de superposition, une dernière étape vérificatrice est introduite. Celle-ci calcule les déplacements sous le cas de charge le plus défavorable, qui est la combinaison des cas de charge de base qui ont déterminé δ_{max} lors de l'application du principe de superposition. La valeur finale du plus grand déplacement vertical est le déplacement sous ce cas de charge-là, en tenant compte des déplacements dus au poids propre :

$$\delta_{max} = \delta_{pire\ cas} - \delta_{PP}$$

L'indicateur de déplacement est ensuite calculé en fonction de ce déplacement maximal :

$$\frac{L}{\delta} = \frac{L}{\delta_{max}}$$

En calculant ce déplacement maximal δ_{max} pour une série de structures, on constate que les effets de la torsion sur la passerelle sont non-négligeables. En effet, à cause de l'angle de rotation entre les deux bases d'un simplex, deux nœuds supérieurs consécutifs sont légèrement décalés, l'un vers la droite et l'autre vers la gauche. Ceci a pour effet qu'un même nœud qui se déplace vers le bas pour une charge appliquée sur un nœud supérieur se déplace vers le haut pour une charge appliquée au nœud supérieur adjacent.

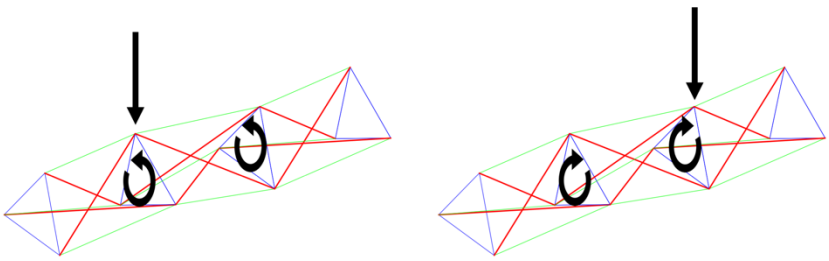


Figure II.19 - Effets de torsion sur la passerelle lorsque la structure n'est pas chargée uniformément [Illustration de l'auteur]

Cet effet est encore plus marquant lorsque le nombre de simplex composant la passerelle est augmenté. Par exemple, le cas de charge qui donnera le plus grand déplacement vertical pour une passerelle composée de 8 simplex est affiché à la Figure II.20.

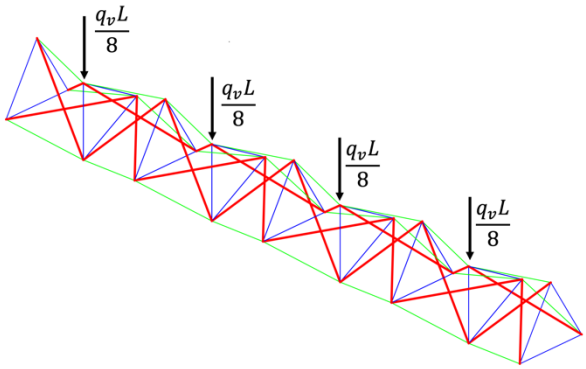


Figure II.20 - Cas de charge qui engendre le plus grand déplacement vertical pour une passerelle à 8 simplex [Illustration de l'auteur]

Chapitre III RESULTATS DE L'OPTIMISATION

Ce chapitre s'inspire largement des travaux réalisés par Jonas FERON [3] et Lindy BOUCHER [4] dans le cadre d'une optimisation des structures de tenségrité sous charges uniformes uniquement.

Il montre les résultats de l'optimisation de structures de tenségrité soumises à des charges aléatoires par la méthode exposée au chapitre précédent. En plus de cela, il vise également à fournir une confirmation numérique de la validité de la théorie des indicateurs morphologiques dans le cas des charges aléatoires, pour des structures tridimensionnelles, non-linéaires et précontraintes. Il montre également la différence, en termes de matière et de déplacements, entre l'optimisation sous charges uniformes et sous charges aléatoires.

Dans un premier temps, le poids propre ne sera pas pris en compte ($\Phi = 0$), afin de faire ressortir l'influence de l'indicateur de flambement, de l'élancement géométrique et de la méthode d'optimisation des sections (full-stress ou group). Dans un second temps, l'influence du poids propre sera étudiée.

1. DEFINITION DES STRUCTURES

1.1. NOMBRE DE MODULES

Ce chapitre se concentrera sur l'analyse d'une passerelle composée de 3, 4 ou 5 simplex car ces trois configurations sont ressorties comme étant les plus efficaces en termes de volume dans le cas d'une analyse sous charges uniformément réparties [17]. Ces trois passerelles sont montrées à la Figure III.1.

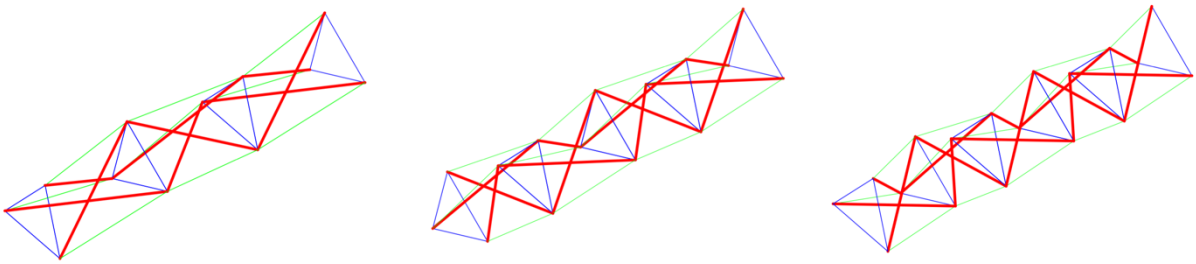


Figure III.1 - Passerelle à 3, 4 ou 5 simplex avec un élancement identique [Illustration de l'auteur]

Comme expliqué précédemment, la charge linéique $q_v[N/m]$ représente la charge linéique maximale pouvant s'appliquer sur le tablier. Cette charge est transmise aux nœuds supérieurs en fonction de la zone du tablier sur laquelle elle s'applique. La charge maximale transmise à un nœud vaut donc $\mathrm{q_v L/N}$ pour une passerelle à N modules ($\mathrm{q_v L/2N}$ pour un nœud d'extrémité). Ceci est illustré à la Figure III.2.

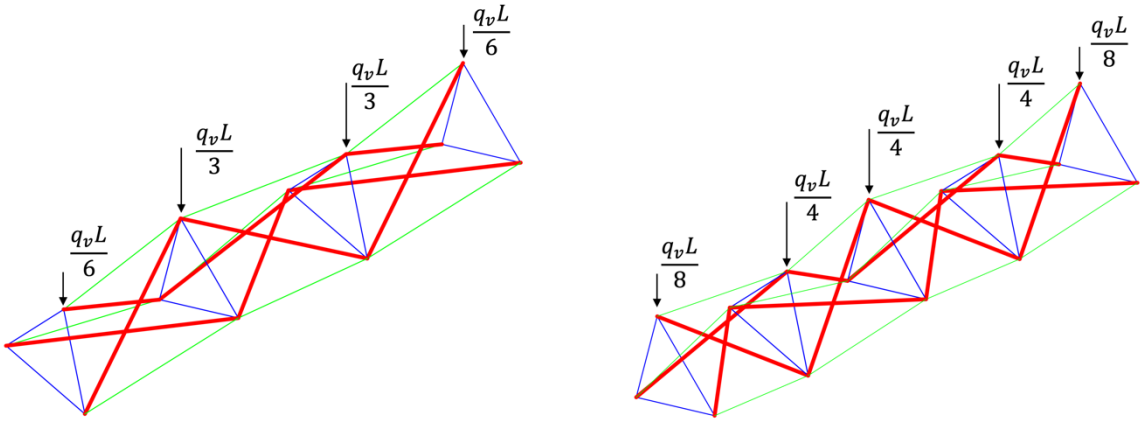


Figure III.2 - Chargement uniforme de la passerelle à 3 ou 4 simplex [Illustration de l'auteur]

1.2. CONDITIONS AUX APPUIS

Le degré d'hyperstaticité global I_s d'une structure tridimensionnelle de type treillis 3D (pour laquelle aucune flexion n'est rencontrée dans aucun de ses éléments) est calculé par la formule [14] :

$$I_s = B_e + R_{appuis} - 3N_{nœuds}$$

Où :

- B_e est le nombre d'éléments de la structure et vaut $9N + 3$ pour une passerelle composée de N simplex
- R_{appuis} est le nombre de réactions d'appui
- $N_{nœuds}$ est le nombre de nœuds de la structure et vaut $3(N + 1)$ pour une passerelle composée de N simplex

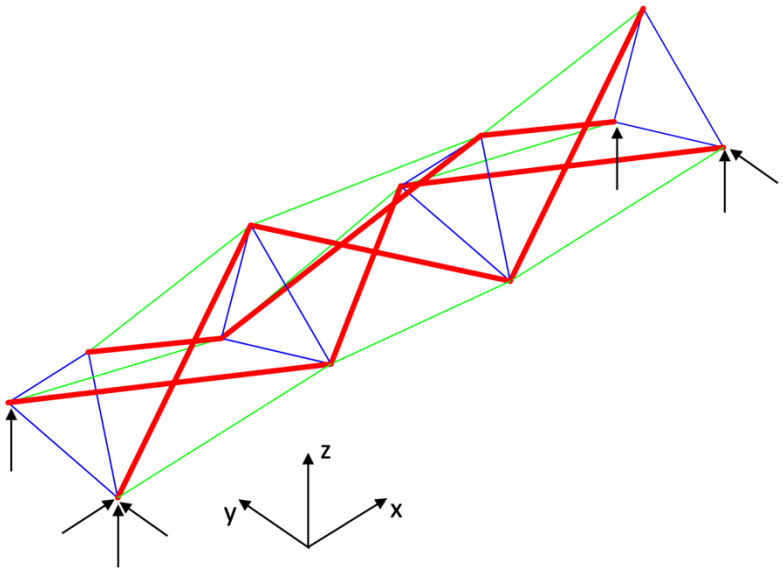


Figure III.3 - Conditions aux appuis pour une passerelle hyperstatique [Illustration de l'auteur, adapté de [3]]

Dans les travaux précédents, il est ressorti que les déplacements verticaux de la structure sont trop élevés lorsque ses appuis sont tels qu'elle est isostatique. Par conséquent, les structures qui seront étudiées dans la suite de ce chapitre auront un degré d'hyperstaticité égal à 1:

$$I_s = 1 = 9N + 1 + R_{appuis} - 3 * 3(N + 1) \Rightarrow R_{appuis} = 7$$

Ce chapitre se concentrera uniquement sur ces structures hyperstatiques, dont les conditions d'appuis sont celles illustrées à la Figure III.3.

1.3. CONFIGURATIONS

Afin de vérifier la validité de la théorie des indicateurs morphologiques et l'influence de chaque paramètre sur l'optimisation, on étudiera plusieurs configurations de passerelle, en faisant varier différents paramètres :

- L'influence de la **portée** L sera observée en étudiant les résultats de structures pour lesquelles $L = 30m$ ou $L = 50m$.
- L'influence du **Module de Young** $\boldsymbol{E}$ sera observée en faisant varier celui-ci entre $150MPa$ et $210MPa$
- L'influence de l'**inertie des sections** sera observée en faisant varier le paramètre m, qui représente le rapport entre l'épaisseur et le diamètre des barres. $m = 0.1$ correspond à une section dont le diamètre vaut 10 fois l'épaisseur, tandis que $m = 0.5$ correspond à des sections pleines.
- L'influence de la **charge externe** sera observée également : dans le cas où le flambement est négligé, on prendra deux valeurs de F choisies arbitrairement : $F = 300kN$ et $F = 1500kN$. Si le flambement n'est plus négligé, la valeur de F sera déterminée en fonction de l'indicateur de flambement : $F = (\mu\sigma L)^2/qE\Psi^2$

Afin d'évaluer l'influence de ces différents paramètres, on étudiera six structures aux configurations différentes. Ces configurations sont reprises à la Table 1. On notera qu'entre la première et la dernière configuration, tous les paramètres ont changé.

Configuration	Portée	Module de Young	Géométrie des sections	Charge (pour $\Psi = 0$)
	$L[m]$	$E[GPa]$	$m[-]$	$F[kN]$
1	30	210	0.5	300
2	50	210	0.5	300
3	30	150	0.5	300
4	30	210	0.1	300
5	30	210	0.5	1500
6	50	150	0.1	1500

Table 1 - Configurations étudiées dans la suite de ce chapitre

Les autres paramètres sont déterminés en fonction des indicateurs morphologiques primaires :

- La **hauteur** H dépend de l'élancement géométrique et de la portée : $H = L/(L/H)$
- La **charge externe totale** F, comme précisé précédemment, dépend de l'indicateur de flambement : $F = (\mu\sigma L)^2/qE\Psi^2$, sauf dans le cas où $\Psi = 0$

- La **contrainte admissible σ** dépend du module de Young et de l'indicateur de raideur : $\sigma = E/(E/\sigma)$. On impose cet indicateur égal à celui correspondant à un acier S235 :

$$\frac{E}{\sigma} = \frac{210 \times 10^9}{235 \times 10^6} \approx 900$$

Enfin, l'aire des sections est définie en fonction de la méthode d'optimisation choisie, pour rappel :

- **Group :** tous les éléments d'un même groupe (câbles de base, câbles longitudinaux ou barres) ont la même section, qui correspond au dimensionnement pour l'élément le plus sollicité de ce groupe.
- **Full-stress :** toutes les sections sont déterminées individuellement en fonction de l'effort maximal rencontré pour un des cas de charge possibles.

Dans les graphes qui suivent, les différentes configurations sont représentées par la légende indiquée à la Figure III.4, où N est le nombre de simplex qui composent la structure.



Figure III.4 - Légende utilisée dans les différents graphes [Illustration de l'auteur]

2.Optimisation des structures

Dans un premier temps, on s'intéresse uniquement à l'influence de l'élancement L/H, en fixant les autres indicateurs primaires. Ceci permet également d'évaluer l'influence du nombre de modules et de la méthode d'optimisation des sections.

Ensuite, les courbes d'efficience sont établies. Celles-ci permettent de déterminer, en fonction de l'indicateur de flambement Ψ, quelle valeur de L/H offre les meilleurs résultats en termes de volume ou de déplacement.

Enfin, la fin de cette section observe l'influence du poids propre sur les indicateurs morphologiques.

2.1.Optimisation « group »

2.1.1. Sans flambement : Psi=0

2.1.1.1. Indicateurs morphologiques

La Figure III.5 et la Figure III.6 illustrent la variation de volume et de déplacements de la structure en fonction de son élancement.

La première constatation est que toutes les configurations étudiées ont exactement les mêmes indicateurs de volume et de déplacement malgré le fait que leurs paramètres varient. En effet, pour un même nombre de simplex, les six courbes se superposent parfaitement.

Ceci permet de confirmer numériquement la validité de la théorie des indicateurs morphologiques pour des structures tridimensionnelles et précontraintes dimensionnées pour résister à des cas de charge aléatoires.

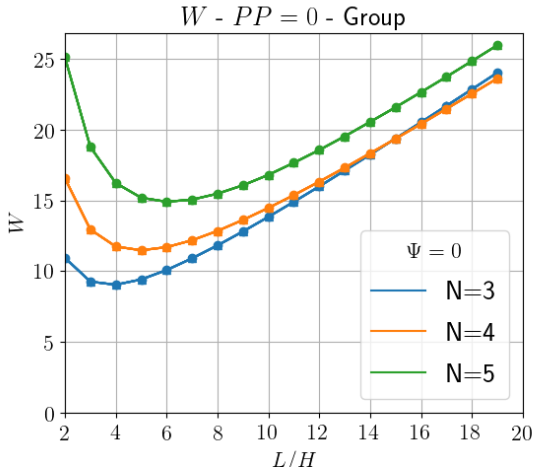


Figure III.5 - Indicateur de volume lorsque le flambement est négligé [Illustration de l'auteur]

Si le flambement est négligé, la structure qui donne les meilleurs résultats en termes de volume est la suivante :

$N = 3$	$\frac{L}{H} = 4$	$W = 9.04$	$\frac{L}{\delta} = 180.9$	$\frac{P}{F} = 1.28$

La structure qui donne les meilleurs résultats en termes de déplacements, par contre, est la suivante :

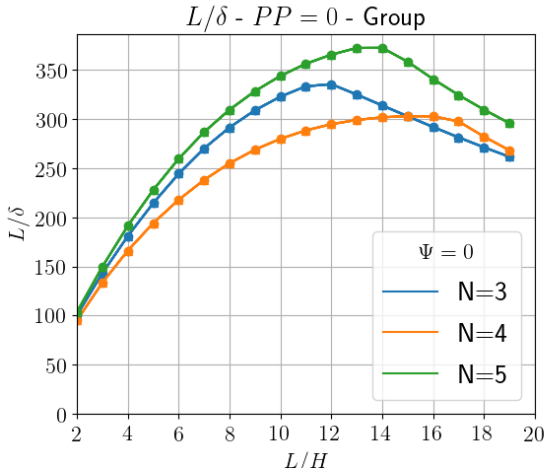


Figure III.6 - Indicateur de déplacement lorsque le flambement est négligé [Illustration de l'auteur]

$N = 5$	$\frac{L}{H} = 14$	$W = 20.54$	$\frac{L}{\delta} = 372.4$	$\frac{P}{F} = 4.49$

On constate que, à part pour des élancements élevés ($L/H \geq 15$), c'est toujours la structure composée de 3 simplex qui donne l'indicateur de volume le plus faible.

Pour les déplacements, c'est toujours la structure composée de 5 simplex qui donne les meilleurs résultats. On remarquera cependant que le critère de flèche

$$\frac{L}{\delta} > 500$$

n'est jamais atteint, même pour les structures les plus efficaces en termes de déplacements.

2.1.1.2. Comparaison avec le cas uniforme

Il est également intéressant de se pencher sur la différence, en termes de volume et de déplacements, entre les indicateurs morphologiques obtenus en calculant la structure soumise à des charges uniformes et ceux de la structure calculée sous charges aléatoires.

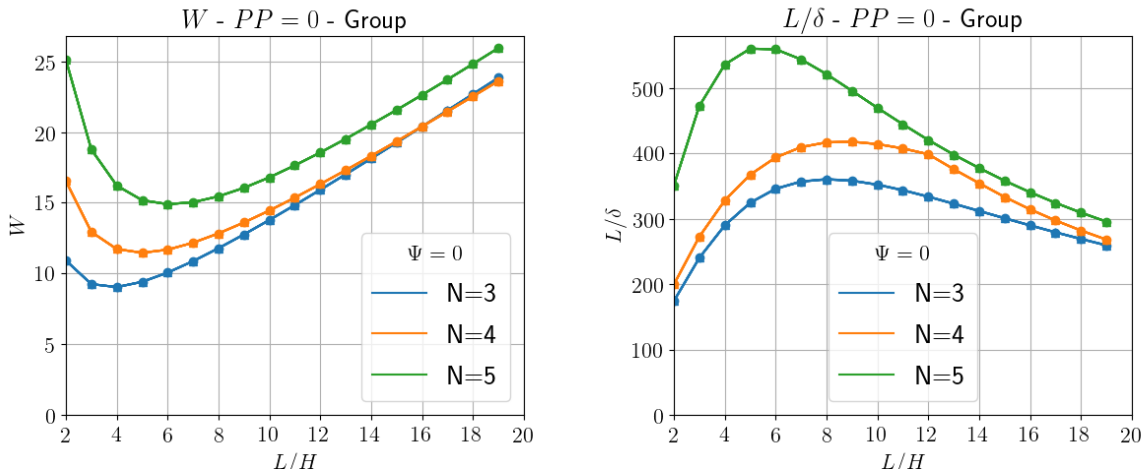


Figure III.7 - Indicateurs de volume et de déplacement pour le cas de charge uniforme [Illustration de l'auteur]

UCLouvain ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN

On constate directement que le volume de matière n'a pratiquement pas changé. Cela veut dire que le cas de charge uniforme est le cas de charge déterminant pour dimensionner les éléments de la structure. La Figure III.8 le confirme numériquement : le rapport entre l'indicateur de volume calculé pour des charges aléatoires et pour des charges uniformes est toujours inférieur à 1.01.

Par contre, le déplacement maximal varie fortement. Le cas de charge uniforme n'est donc pas le plus déterminant. En réalité, les effets de la torsion de la structure sont tels que c'est un cas de charge où un nœud sur deux est chargé qui engendrera les plus grands déplacements.

La Figure III.9 indique le rapport entre l'indicateur de déplacement calculé sous charges aléatoires et sous charges uniformes. Dans le pire des cas, pour une passerelle à 5 modules avec un élancement faible, le déplacement maximal est plus de 3 fois supérieur à celui calculé dans le cas uniforme.

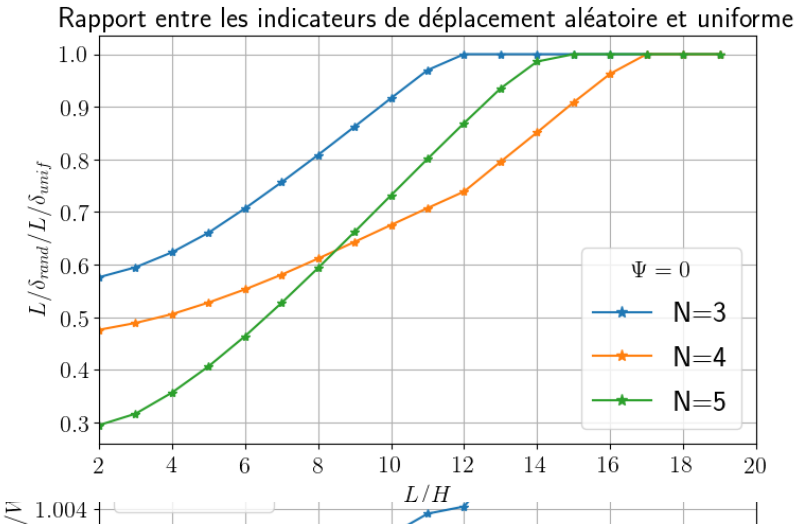


Figure III.9 - Rapport entre l'indicateur de déplacement sous charges aléatoires et uniformes [Illustration de l'auteur]

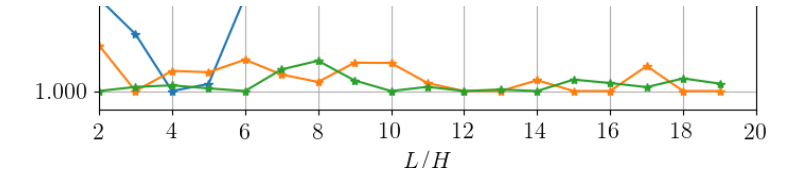


Figure III.8 - Rapport entre l'indicateur de volume sous charges variables et uniformes [Illustration de l'auteur]

Ce rapport se rapproche de plus en plus de 1 lorsque l'élancement augmente. Pour un élancement $L/H = 12$, le déplacement maximal d'une passerelle composée de 3 modules est celui engendré par un chargement uniforme. Il faut attendre $L/H = 15$ pour les passerelles composées de 5 modules et $L/H = 17$ pour celles à 4 modules. Ce résultat signifie que les structures plus élancées sont moins sensibles à la torsion.

La Figure III.10 affiche le rapport entre le niveau de précontrainte calculé sous charges aléatoires et sous charges uniformes. A l'instar de l'indicateur de volume, le niveau de précontrainte nécessaire pour qu'aucun câble ne se détende sous charges aléatoires semble être très proche de celui nécessaire pour un chargement uniforme.

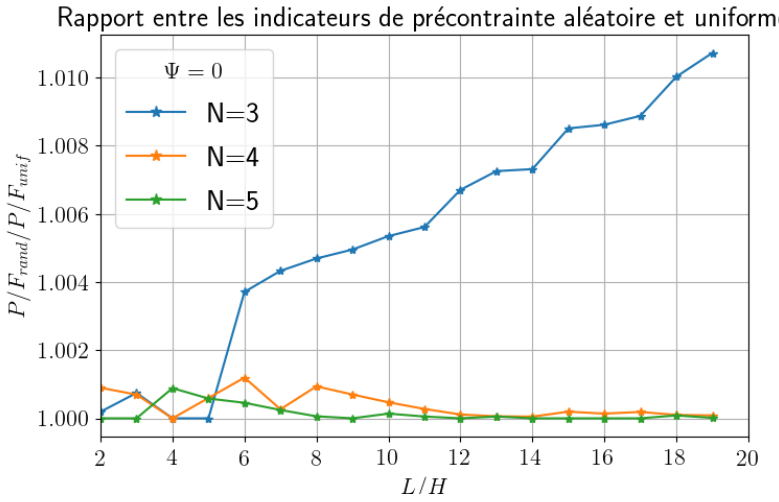


Figure III.10 - Rapport entre l'indicateur de précontrainte calculé sous charges aléatoires et uniformes [Illustration de l'auteur]

2.1.2. Avec flambement : Psi=35

La prise en compte du flambement a pour effet d'augmenter les sections nécessaires pour que les barres puissent non seulement résister à l'effort normal qu'elles rencontrent, mais pour s'assurer également qu'elles ne flambent pas. Ceci aura une influence non-négligeable sur le volume total de matière.

Dans cette section, on étudie le cas où $\Psi = 35$

2.1.2.1. Indicateurs morphologiques

La Figure III.11 montre que, même lorsqu'on prend en compte le flambement, l'indicateur de volume est identique pour des structures dont l'élancement, l'indicateur de précontrainte et l'indicateur de raideur sont les mêmes : les courbes de toutes les configurations étudiées se superposent pour un même nombre de simplex.

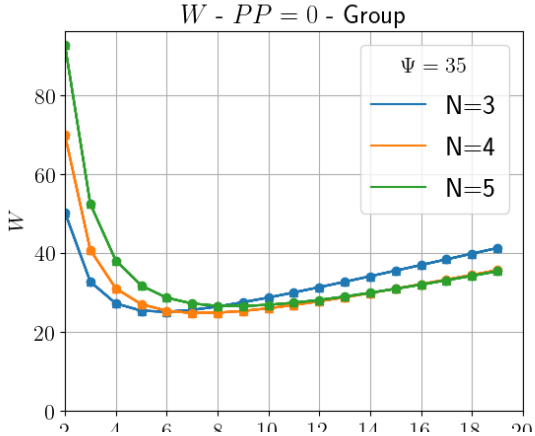


Figure III.11 - Indicateur de volume pour Psi=35 [Illustration de l'auteur]

On constate également que le volume nécessaire pour des élancements très faibles devient très grand. Ceci est dû au fait que la précontrainte est augmentée de manière excessive afin d'éviter qu'un câble ne se détende. Pour des cas extrêmes comme celui-là, l'algorithme d'optimisation ne parvient pas toujours à converger vers une solution.

L'indicateur de flambement influence aussi la structure optimale, pour laquelle le volume est minimisé. Le nombre de simplex de cette structure est passé de 3 à 4 et son élancement est passé de 4 à 7. La structure optimale est maintenant beaucoup plus élancée, se déforme un peu moins mais consomme plus de matière et est presque 4 fois plus précontrainte :

$N = 4$	$\frac{L}{H} = 7$	$W = 24.8$	$\frac{L}{\delta} = 257.2$	$\frac{P}{F} = 4.32$

La Figure III.12 montre que la valeur de l'indicateur de flambement a également une influence sur les déplacements, qui sont légèrement plus faibles que lorsque $\Psi = 0$. Ceci est probablement dû au fait que la précontrainte nécessaire pour qu'aucun câble ne se détende est plus élevée, ce qui rend la structure plus rigide.

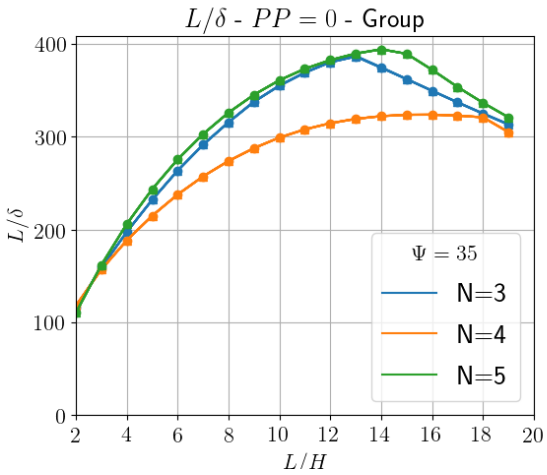


Figure III.12 - Indicateur de déplacement pour Psi = 35 [Illustration de l'auteur]

La structure optimale en termes de déplacements à également été modifiée : bien que le nombre de simplex et l'élancement soient restés les mêmes, elle est plus volumineuse, plus précontrainte et subit moins de déplacements.

$N = 5$	$\frac{L}{H} = 14$	$W = 29.94$	$\frac{L}{\delta} = 394.4$	$\frac{P}{F} = 6.13$

2.1.2.2. Comparaison avec le cas uniforme

Comme c'était le cas lorsque le flambement était négligé, le cas uniforme semble à nouveau être le cas de charge déterminant pour l'indicateur de volume. L'indicateur de déplacement, par contre, est bien plus élevé que pour les cas de charge aléatoires, ce qui signifie que c'est à nouveau quand la structure n'est pas chargée sur toute sa longueur qu'elle rencontrera les plus grands déplacements.

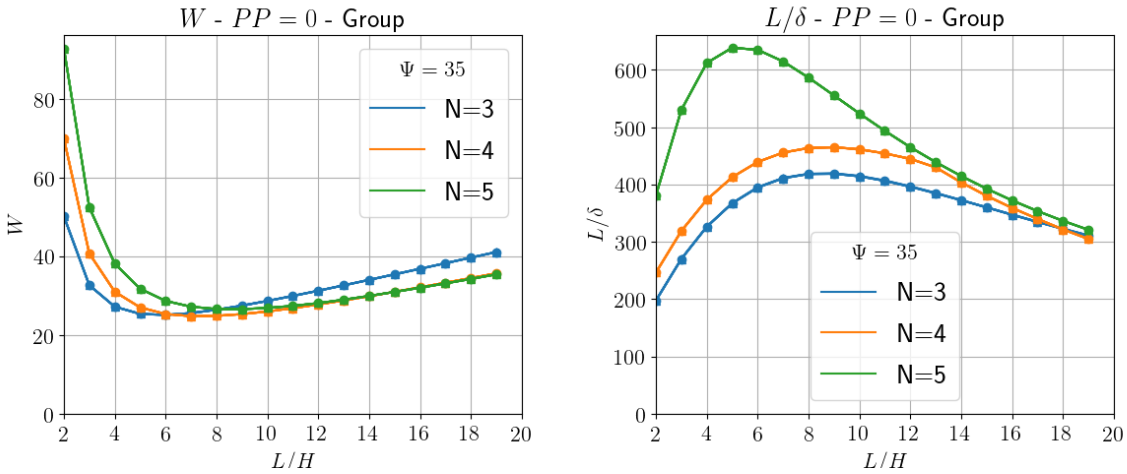


Figure III.13 - Indicateurs de volume et de déplacement pour le cas uniforme avec Psi = 35 [Illustration de l'auteur]

La Figure III.14 montre qu'en effet, la différence de volume est négligeable : elle n'est supérieure à 1%..

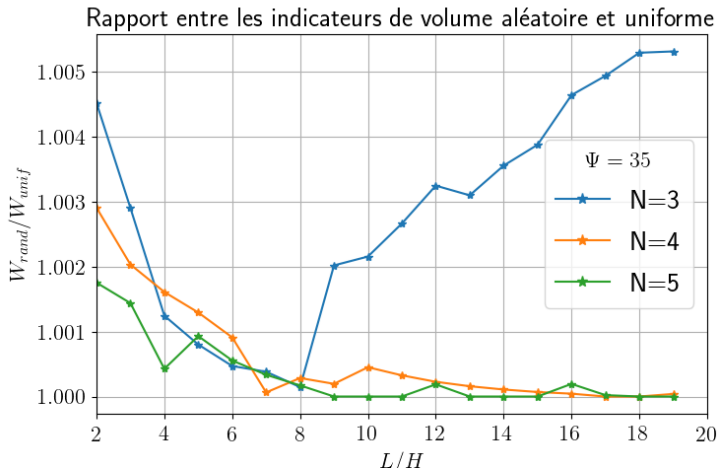


Figure III.14 - Rapport entre l'indicateur de volume du cas aléatoire et uniforme pour Psi = 35 [Illustration de l'auteur]

La Figure III.15 montre que plus l'élancement est faible, plus le déplacement calculé sous charges uniformes s'éloigne du déplacement maximal réel (en tenant compte de tous les cas de charge possibles).

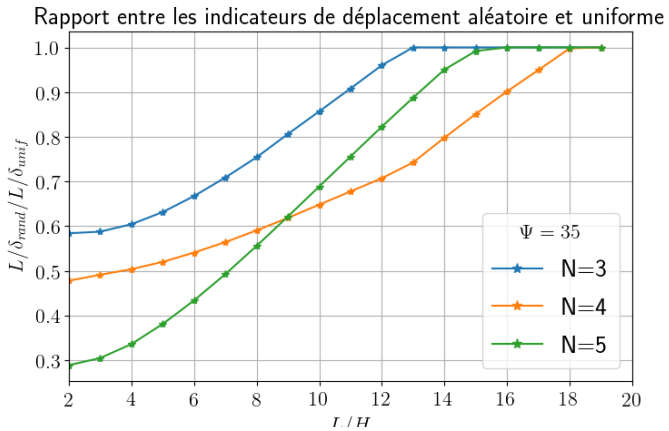


Figure III.15 - Rapport entre l'indicateur de déplacement du cas aléatoire et uniforme pour Psi=35 [Illustration de l'auteur]

Le déplacement sous cas de charge uniforme devient le déplacement maximal uniquement pour des structures fort élancées : $L/H = 13$ pour 3 simplex, $L/H = 16$ pour 5 simplex et $L/H = 18$ pour 4 simplex.

2.1.3. Courbes d'efficience

Les courbes d'efficience permettent de déterminer, en fonction de la valeur de l'indicateur de flambement Ψ, quelle valeur de L/H optimise un indicateur morphologique donné.

Dans cette section, on s'intéresse d'abord à la minimisation de l'indicateur de volume, qui sera noté W_{min}. L'élancement, l'indicateur de déplacement et l'indicateur de précontrainte correspondants sont alors notés $(L/H)_{opt}$, $(L/\delta)_{opt}$ et $(P/F)_{opt}$. Les courbes d'efficience qui minimisent l'indicateur de volume sont affichées à la Figure III.16. On voit que pour des indicateurs de flambement faibles, c'est la passerelle à trois simplex qui donne les meilleurs résultats, tandis que c'est celle à quatre simplex qui est la moins volumineuse pour des indicateurs de flambement plus élevés.

Au plus l'indicateur de flambement augmente, au plus un nombre plus élevé de simplex devient favorable. Cela peut s'expliquer par le fait qu'un petit nombre de simplex donne des barres plus longues qui seront donc plus sensibles au flambement. L'indicateur de déplacement est nettement supérieur pour des structures à cinq simplex, mais ce sont aussi les plus volumineuses.

Le critère de flèche, par contre, est loin d'être respecté : l'indicateur de déplacement n'atteint pas 300 pour les structures à 3 ou 4 simplex et n'est respecté par aucune des structures qui minimisent l'indicateur de volume. La passerelle à 5 simplex semble de loin être celle qui se déforme le moins.

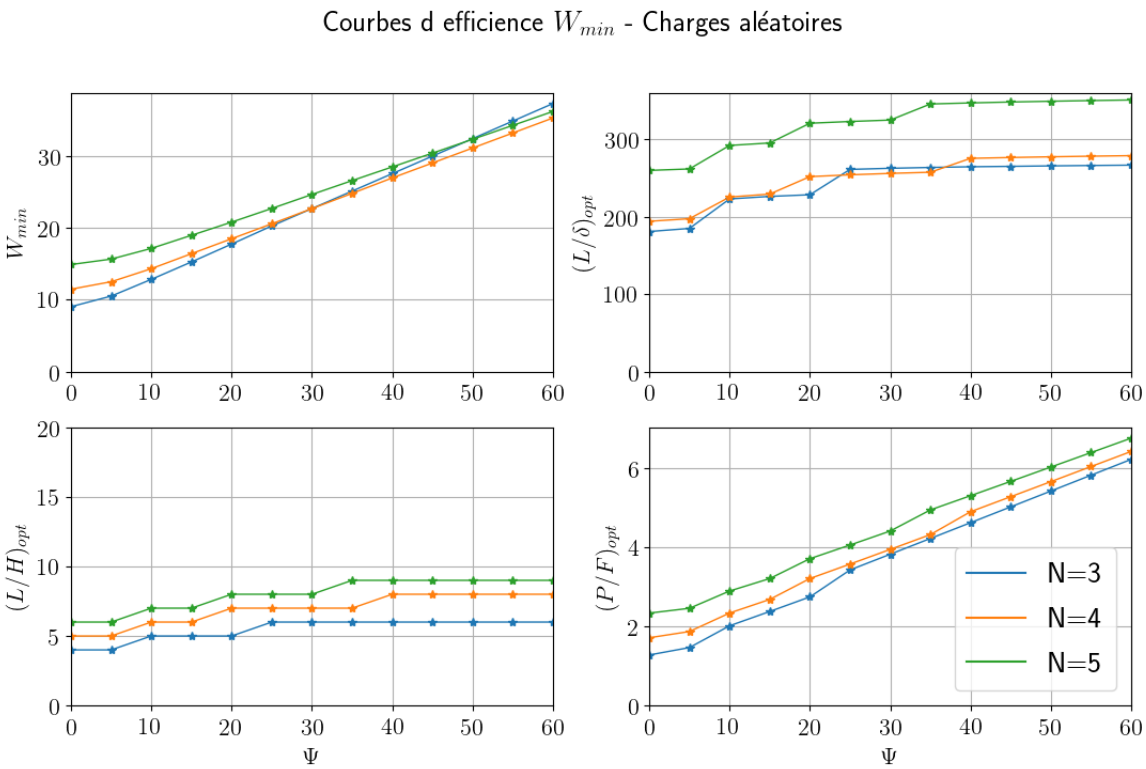


Figure III.16 - Courbes d'efficience de l'indicateur de volume pour des charges aléatoires [Illustration de l'auteur]

Lorsque l'on compare ces courbes d'efficience avec celles du cas uniforme (affichées à la Figure III.17) on voit encore une fois que des charges qui peuvent se répartir aléatoirement sur la structure sont bien plus défavorables que les charges uniformes en ce qui concerne les déplacements. On ne s'inquiètera cependant pas outre mesure de ce critère de flèche non-respecté pour l'instant, car celui-ci sera traité en détails dans le Chapitre IV. Les autres indicateurs morphologiques restent quasiment inchangés et l'élancement optimal pour des charges aléatoires reste le même que pour des charges uniformes.

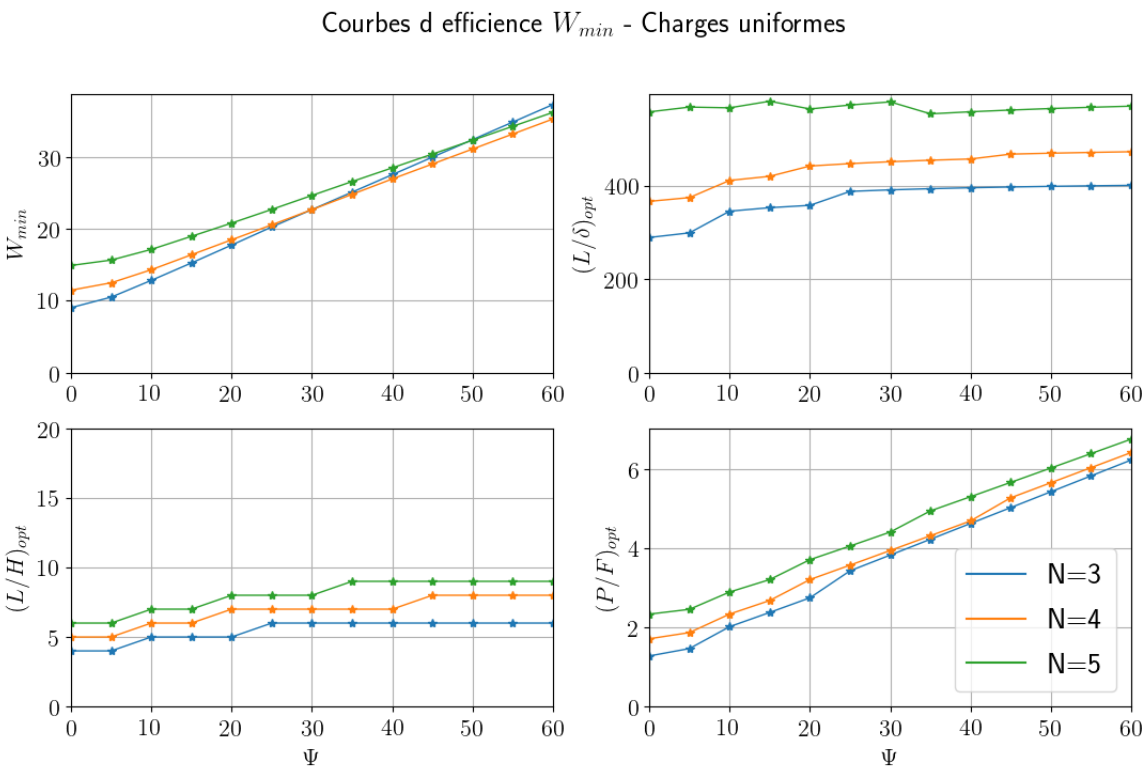


Figure III.17 - Courbes d'efficience de l'indicateur de volume pour des charges uniformes [Illustration de l'auteur]

On peut également construire ces courbes d'efficience afin de maximiser l'indicateur de déplacement. Celles-ci sont affichées à la Figure III.18 pour des charges aléatoires et à la Figure III.19 pour des charges uniformes.

Contrairement à l'indicateur de volume, la valeur de l'élancement optimal pour les charges aléatoires n'est plus du tout la même que pour les charges uniformes : celui-ci est beaucoup plus élevé, ce qui indique que, sous charges aléatoires, les structures plus élancées ont un meilleur comportement en termes de déplacements.

Le fait que cet élancement optimal ne soit pas le même a une incidence sur les autres indicateurs : l'indicateur de volume et l'indicateur de précontrainte optimaux sont cette fois-ci plus élevés pour le cas aléatoire par rapport au cas uniforme.

La structure qui maximise l'indicateur de déplacement semble toujours être celle composée de 5 simplex, bien que les résultats de celle à trois simplex s'en rapprochent fortement pour des valeurs de Ψ élevées.

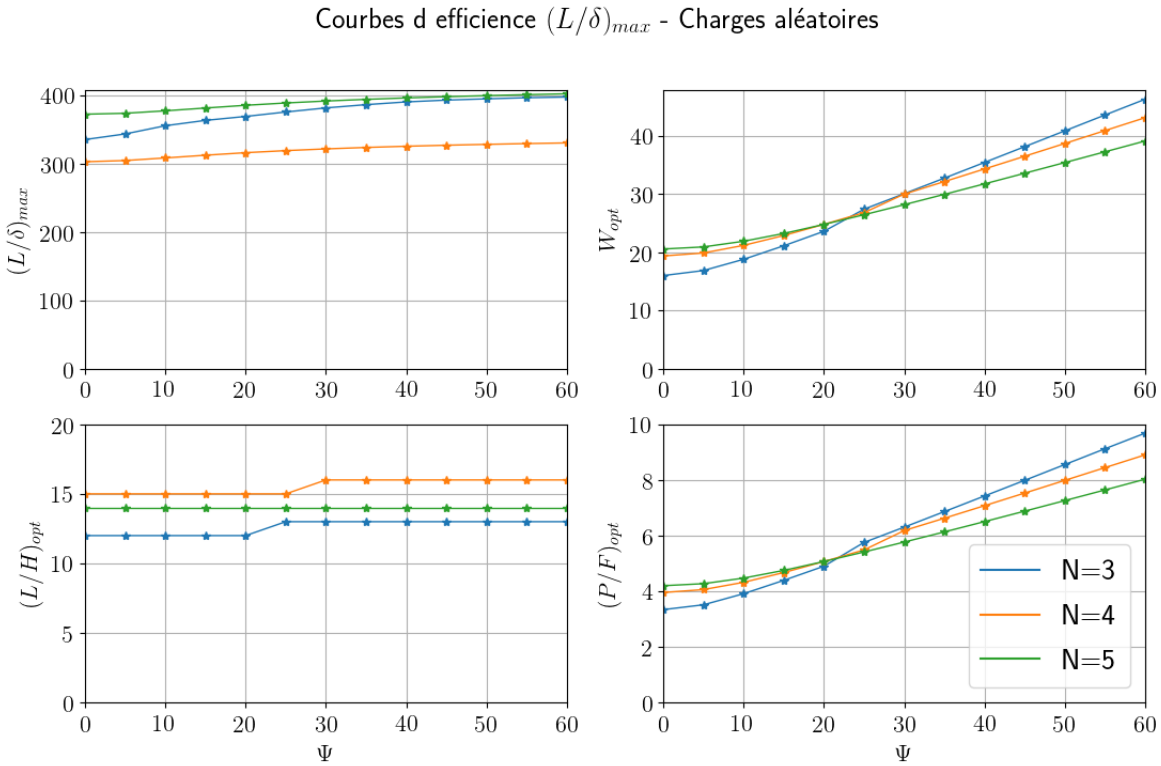


Figure III.18 - Courbes d'efficience de l'indicateur de déplacement pour des charges aléatoires [Illustration de l'auteur]

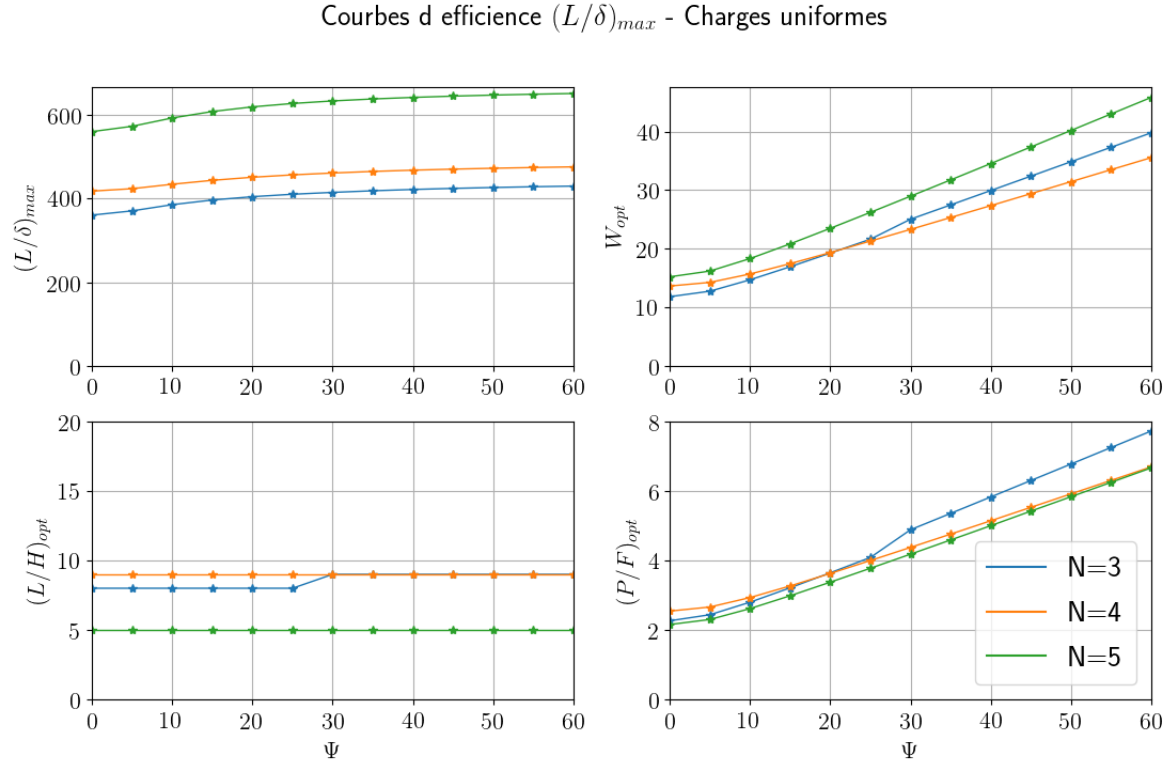


Figure III.19 - Courbes d'efficience de l'indicateur de déplacement pour des charges uniformes [Illustration de l'auteur]

2.2. Optimisation « full-stress »

La méthode d'optimisation des sections en « full-stress » optimise les dimensions données aux éléments de manière plus précise que la méthode « group », car elle dimensionne chaque élément exactement à l'effort maximal qu'il rencontre. Cela signifie qu'aucune barre ni aucun câble ne sont surdimensionnés, contrairement à la méthode d'optimisation « group ».

Cependant, cette optimisation plus précise a également un coût : elle demande un temps de calcul nettement supérieur, car le nombre de cas de charge à vérifier dans la seconde boucle d'optimisation des sections est beaucoup plus élevé, comme cela a été discuté au chapitre précédent.

2.2.1. Sans flambement : Psi=0

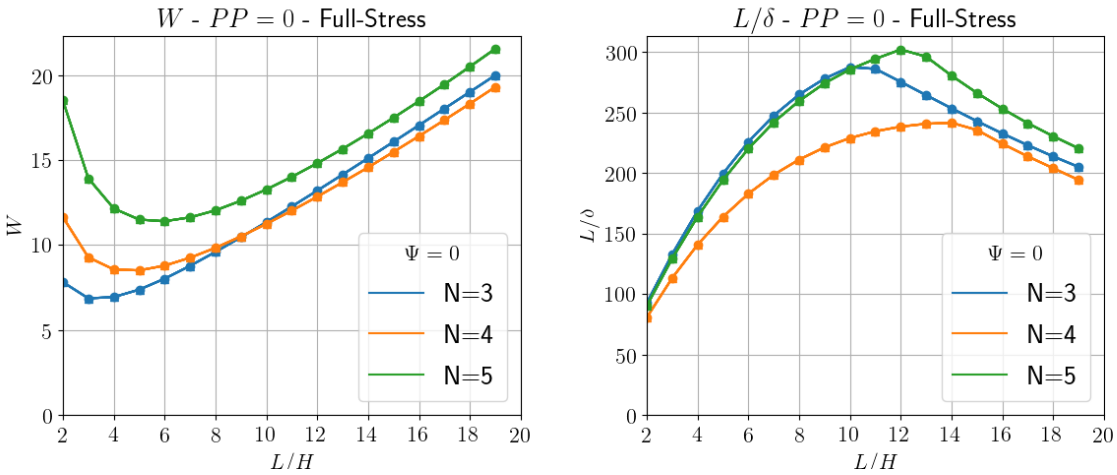


Figure III.20 - Indicateurs de volume et de déplacement pour la méthode d'optimisation full-stress, charges aléatoires [Illustration de l'auteur]

La structure qui donne le plus petit indicateur de volume a les caractéristiques suivantes :

$N = 3$	$\frac{L}{H} = 3$	$W = 6.86$	$\frac{L}{\delta} = 133$	$\frac{P}{F} = 1.09$

Et celle pour laquelle l'indicateur de déplacement est maximisé :

$N = 5$	$\frac{L}{H} = 12$	$W = 14.8$	$\frac{L}{\delta} = 301$	$\frac{P}{F} = 3.53$

Les graphes affichés ci-dessus montrent que la théorie des indicateurs morphologiques reste valable pour d'autres méthodes d'optimisation des sections. Tant que la même méthode est appliquée à toutes les structures calculées, celles-ci auront les mêmes indicateurs morphologiques secondaires si leurs indicateurs primaires sont les mêmes.

On voit que l'indicateur de volume est effectivement plus faible que dans le cas de la méthode d'optimisation « group ». Si on s'intéresse au rapport entre les indicateurs morphologiques en « full-stress » et en « group », on voit que celui-ci est dépendant de l'élancement L/H de la structure (voir Figure III.24).

On pourrait s'attendre à ce que, cette fois-ci, la différence entre l'indicateur de volume pour le cas de charge uniforme et celui calculé sous charges aléatoires soit plus grande que pour la méthode d'optimisation

« group ». La Figure III.21 montre que c'est effectivement le cas, mais que cette différence reste tout de même relativement faible : les structures calculées en « full-stress » pour des charges aléatoires sont un peu plus volumineuses, mais cette augmentation ne dépasse pas 4% par rapport au cas de charge uniforme.

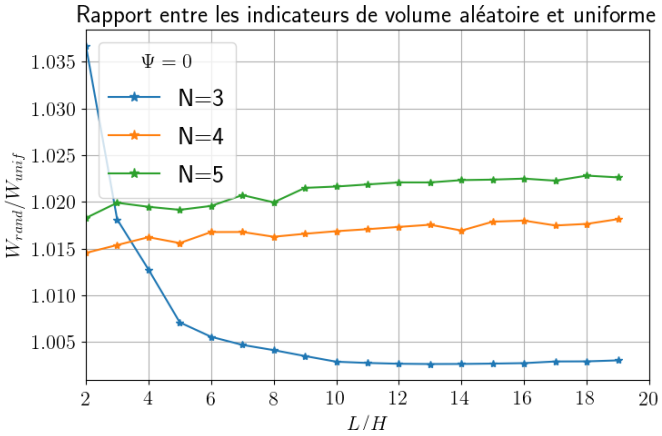


Figure III.21 - Rapport entre l'indicateur de volume calculé pour les cas aléatoire et uniforme [Illustration de l'auteur]

La Figure III.22, qui affiche le rapport entre l'indicateur de déplacement sous charges aléatoires et uniformes, est assez similaire à celle pour l'optimisation « group » : l'indicateur de déplacement est identique pour des élancements très élevés, mais diminue assez fort pour des élancements plus faibles.

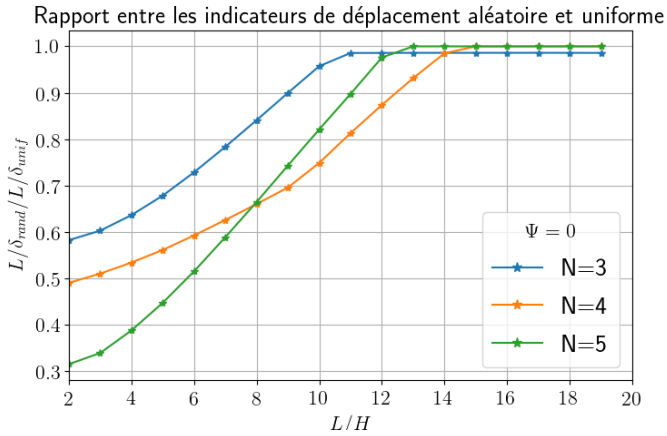


Figure III.22 - Rapport entre l'indicateur de déplacement calculé pour les cas aléatoire et uniforme [Illustration de l'auteur]

La Figure III.24 montre que le gain de matière de la méthode « full-stress » par rapport à la méthode « group » diminue lorsque l'élancement de la structure augmente. Celui-ci reste cependant supérieur à 20% pour tous les élancements calculés.

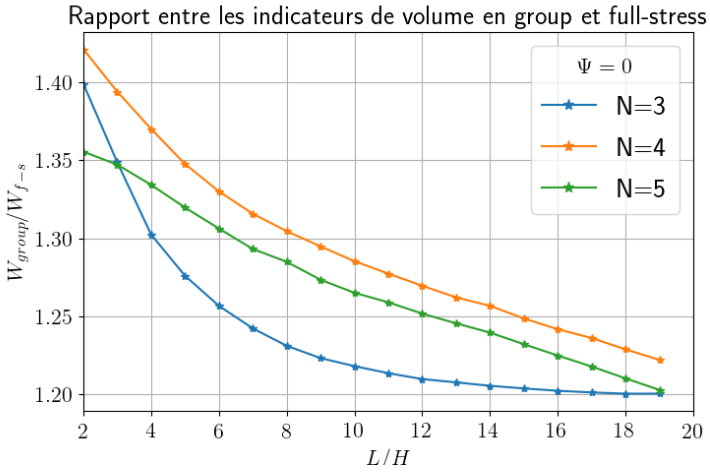


Figure III.24 - Rapport entre l'indicateur de volume pour la méthode group et full-stress [Illustration de l'auteur]

En contrepartie du fait que la méthode d'optimisation « full-stress » soit bénéfique d'un point de vue volume, les structures optimisées de cette manière subissent de plus grands déplacements. La Figure III.23 montre le rapport entre les indicateurs de déplacement calculés avec la méthode « group » et « full-stress ». Ce rapport augmente également lorsqu'on augmente l'élancement de la structure. Ceci semble indiquer que la méthode « full-stress » est surtout avantageuse pour des structures de faible élancement : l'économie de matière est plus importante et les déplacements augmentent moins que pour des structures plus élancées.

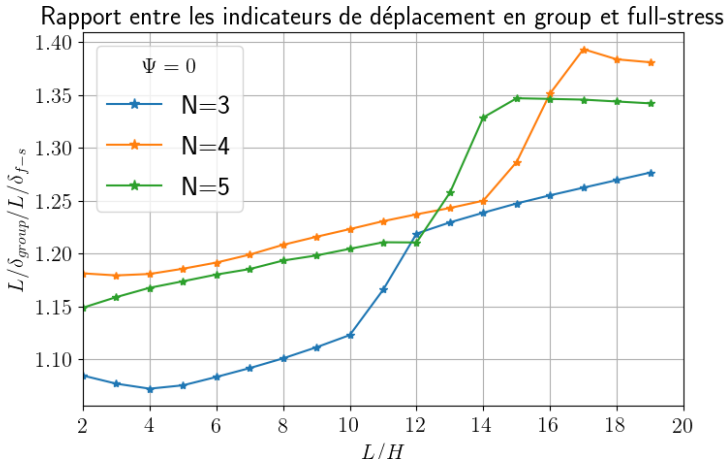


Figure III.23 - Rapport entre l'indicateur de déplacement pour la méthode group et full-stress [Illustration de l'auteur]

Enfin, la Figure III.25 affiche le rapport entre le niveau de précontrainte calculé avec la méthode d'optimisation « group » et « full-stress ». Pour la majorité des structures, ce niveau de précontrainte est plus faible en « full-stress » qu'en « group », mais on constate tout de même que c'est l'inverse pour un élancement inférieur à 8 pour les structures à 3 simplex.

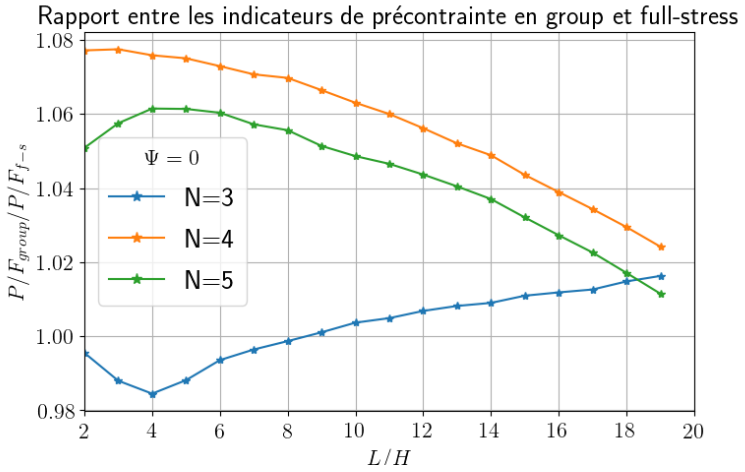


Figure III.25 - Rapport entre l'indicateur de précontrainte pour la méthode group et full-stress [Illustration de l'auteur]

2.2.2. Avec flambement : Psi=35

La Figure III.26 affiche les indicateurs de volume et de déplacement obtenus avec la méthode d'optimisation « full-stress » en tenant compte du flambement. L'exemple est le même que celui qui avait été choisi pour la méthode « group », avec un indicateur de flambement $\Psi = 35$.

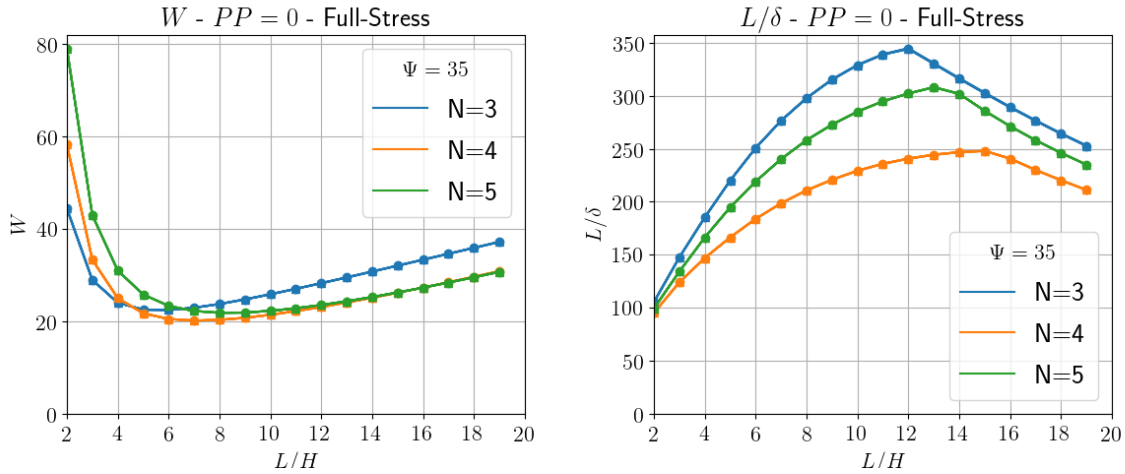


Figure III.26 - Indicateurs de volume et de déplacement pour Psi=35 avec la méthode full-stress [Illustration de l'auteur]

La structure optimale en termes de volume possède les caractéristiques suivantes :

$N = 4$	$\frac{L}{H} = 7$	$W = 20.1$	$\frac{L}{\delta} = 198$	$\frac{P}{F} = 4.18$

La structure optimale en termes de déplacements possède les caractéristiques suivantes :

$N = 3$	$\frac{L}{H} = 12$	$W = 28.2$	$\frac{L}{\delta} = 344$	$\frac{P}{F} = 7.14$

On remarque que, contrairement à tous les cas parcourus jusqu'à présent, c'est une structure à 3 simplex et non à 5 simplex qui subit les plus petits déplacements.

L'indicateur de volume est plus faible que pour la méthode « group », comme on pouvait s'y attendre. Ceci est illustré à la Figure III.27, qui affiche le rapport entre l'indicateur de volume calculé avec les méthodes

« group » et « full-stress ». On constate que l'économie de matière est cependant moins importante que lorsque le flambement était négligé : on gagne au plus 25% de matière en préférant la méthode d'optimisation « full-stress », au lieu de l'économie de 40% lorsque le flambement était négligé.

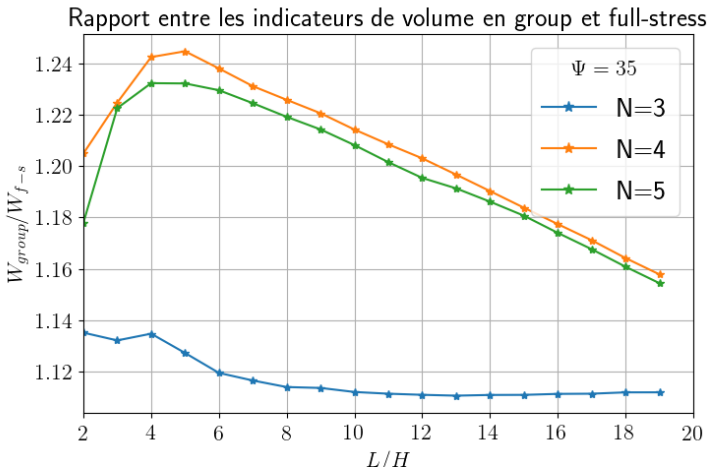


Figure III.27 - Rapport entre les indicateurs de volume calculés avec la méthode "group" et "full-stress" pour Psi=35 [Illustration de l'auteur]

L'indicateur de déplacement de la méthode « full-stress » est à nouveau un peu plus faible qu'avec la méthode « group ». Ce résultat est affiché à la Figure III.28.

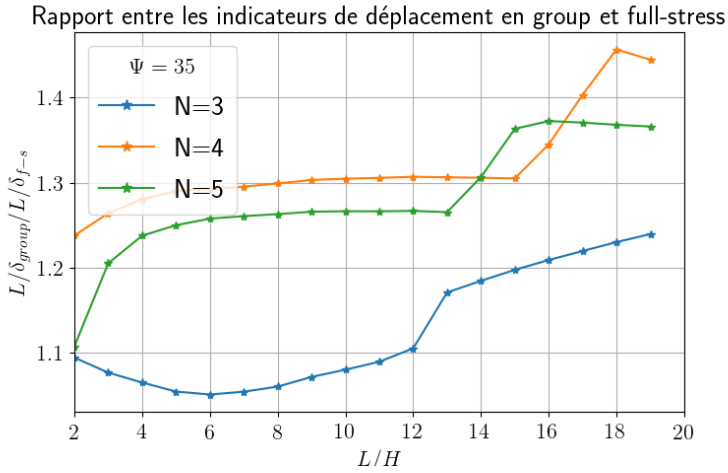


Figure III.28 - Rapport entre les indicateurs de déplacement calculés avec la méthode "group" et "full-stress" [Illustration de l'auteur]

En comparant ces résultats avec les indicateurs de volume et de déplacement calculés avec la méthode « full-stress » pour des charges uniformes, on se rend compte que l'augmentation de volume pour résister aux cas de charge aléatoires est plus ou moins identique et se rapproche des 2%, sauf pour des élancements faibles ou le volume peut augmenter de presque 8%. Ceci est illustré à la Figure III.30.

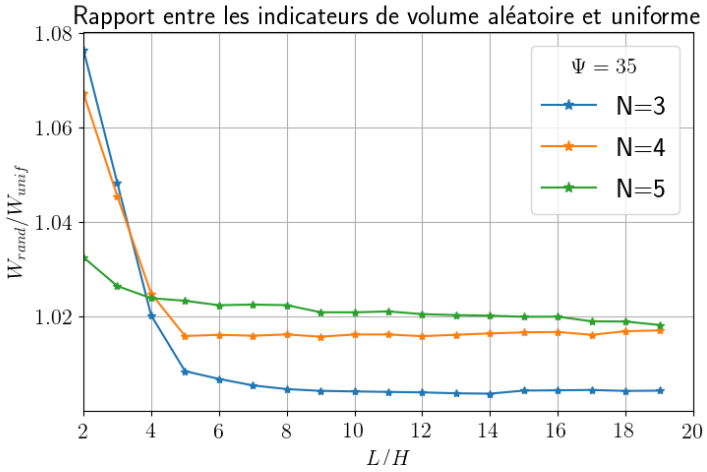


Figure III.30 - Rapport entre les indicateurs de volume calculés pour des charges aléatoires et uniformes [Illustration de l'auteur]

L'indicateur de déplacement sous charges uniformes est nettement plus élevé que pour des charges aléatoires. Ce n'est à nouveau que pour des élancements élevés que le cas uniforme devient celui qui engendre les plus grands déplacements, comme l'illustre la Figure III.29.

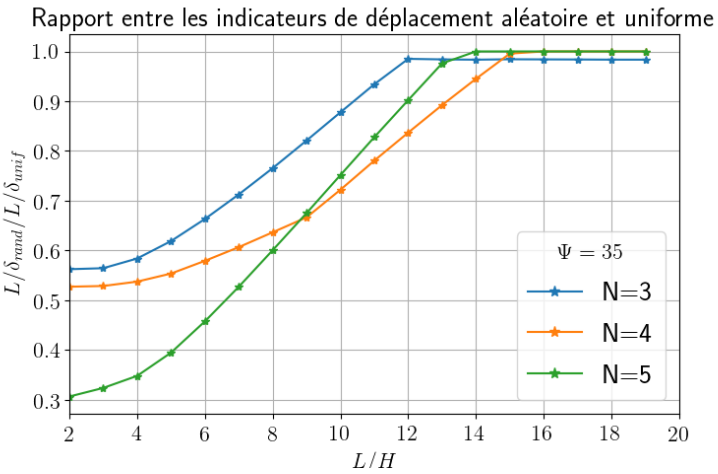


Figure III.29 - Rapport entre les indicateurs de déplacement pour des charges aléatoires et uniformes [Illustration de l'auteur]

2.2.3. Courbes d'efficience

Les courbes d'efficience ci-dessous affichent les résultats de la méthode « group » et de la méthode « full-stress » simultanément pour les cas de charge aléatoires, afin de mieux se rendre compte de la différence entre les résultats de la méthode d'optimisation.

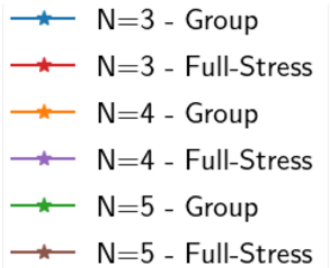


Figure III.31 - Légende des courbes d'efficience pour les méthodes d'optimisation "group" et "full-stress" [Illustration de l'auteur]

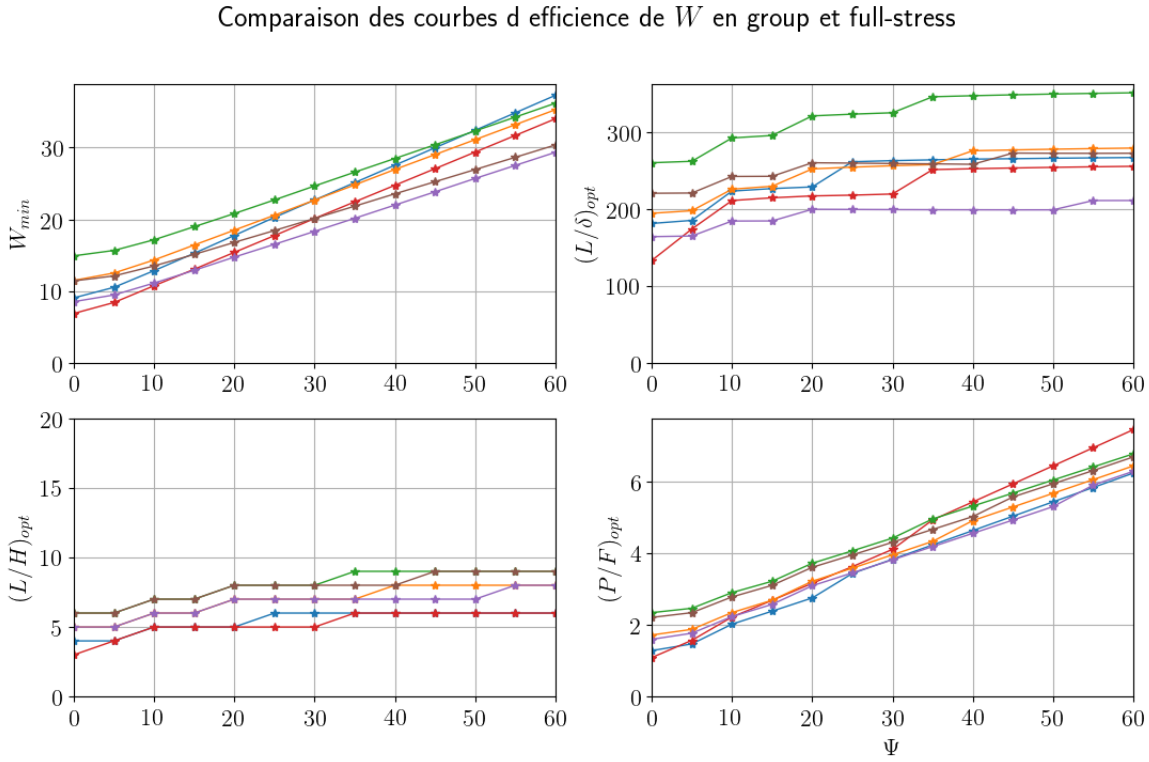


Figure III.33 - Courbes d'efficience de l'indicateur de volume pour les méthodes d'optimisation "group" et "full-stress" [Illustration de l'auteur]

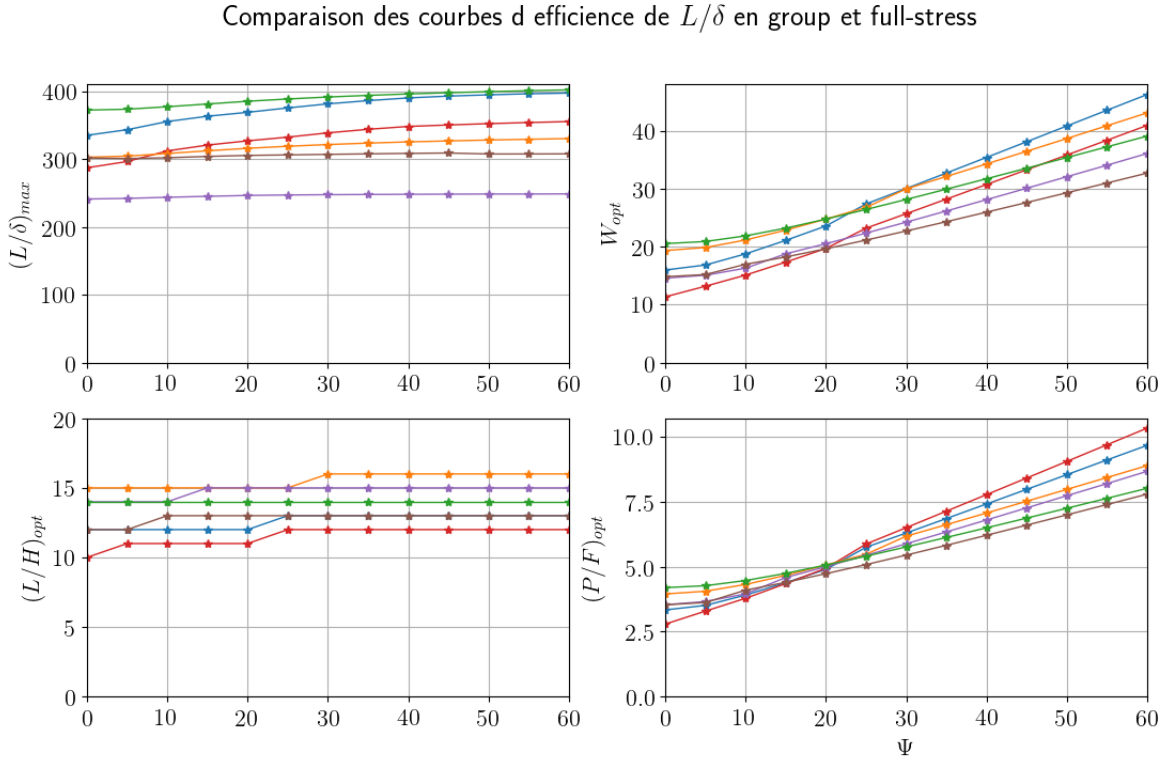


Figure III.32 - Courbes d'efficience de l'indicateur de déplacement pour les méthodes d'optimisation "group" et "full-stress" [Illustration de l'auteur]

3. INFLUENCE DU POIDS PROPRE

3.1. INDICATEUR DE POIDS PROPRE

Etant donné que le poids propre peut devenir assez conséquent pour les structures de tenségrité, il est indispensable de prendre celui-ci en compte dans le dimensionnement et l'optimisation de celles-ci.

Pour cela, Lindy BOUCHER [4] a introduit un nouvel indicateur morphologique, l'indicateur de poids propre, noté Φ :

$$\Phi = \frac{\rho L}{\sigma}$$

Où ρ représente le poids volumique du matériau utilisé, σ sa limite élastique et L la portée de la structure.

Cet indicateur exprime en réalité la relation linéaire qui existe entre l'indicateur de volume et l'indicateur d'efficacité matérielle (qui, pour rappel, exprime l'importance des charges de poids propre par rapport aux charges externes). En effet :

$$\frac{\rho V}{F} = \frac{\rho V}{F} * \frac{\sigma L}{\sigma L} = \frac{\rho L}{\sigma} * \frac{\sigma V}{FL} = \Phi * W$$

On vérifie tout d'abord la validité de la théorie des indicateurs morphologiques pour des structures dont le poids propre n'est pas nul en dimensionnant deux structures par la méthode d'optimisation « group », pour lesquelles tous les indicateurs morphologiques sont identiques. Les deux configurations étudiées sont reprises à la Table 2.

	$E[Gpa]$	$\sigma[MPa]$	$L[m]$	$\rho[kN/m^3]$	$m[-]$
Configuration 1	13.4	15	20	9.83	0.5
Configuration 2	210	235	40	77	0.1

Table 2 - Configurations étudiées pour vérifier la validité de la théorie des indicateurs morphologiques

Bien que ces deux structures soient différentes en tous points, on constate que leurs indicateurs morphologiques sont les mêmes :

- $\frac{E}{\sigma} = \frac{13.4\times10^9}{15\times10^6} = 893 = \frac{210\times10^9}{235\times10^6}$
- Ψ est fixé à 35
- $\Phi = \frac{9830\times20}{15\times10^6} = 131\times10^4 = \frac{77000\times40}{235\times10^6}$

La Figure III.34 tend à confirmer que la théorie des indicateurs morphologiques est toujours valable lorsqu'on tient compte du poids propre, à condition d'introduire le nouvel indicateur primaire Φ, qui dépend du poids volumique et de la limite élastique du matériau et de la portée de la structure.

On constate également que, comme montré précédemment, les indicateurs de volume et d'efficacité matérielle sont proportionnels et que le rapport entre les deux vaut Φ.

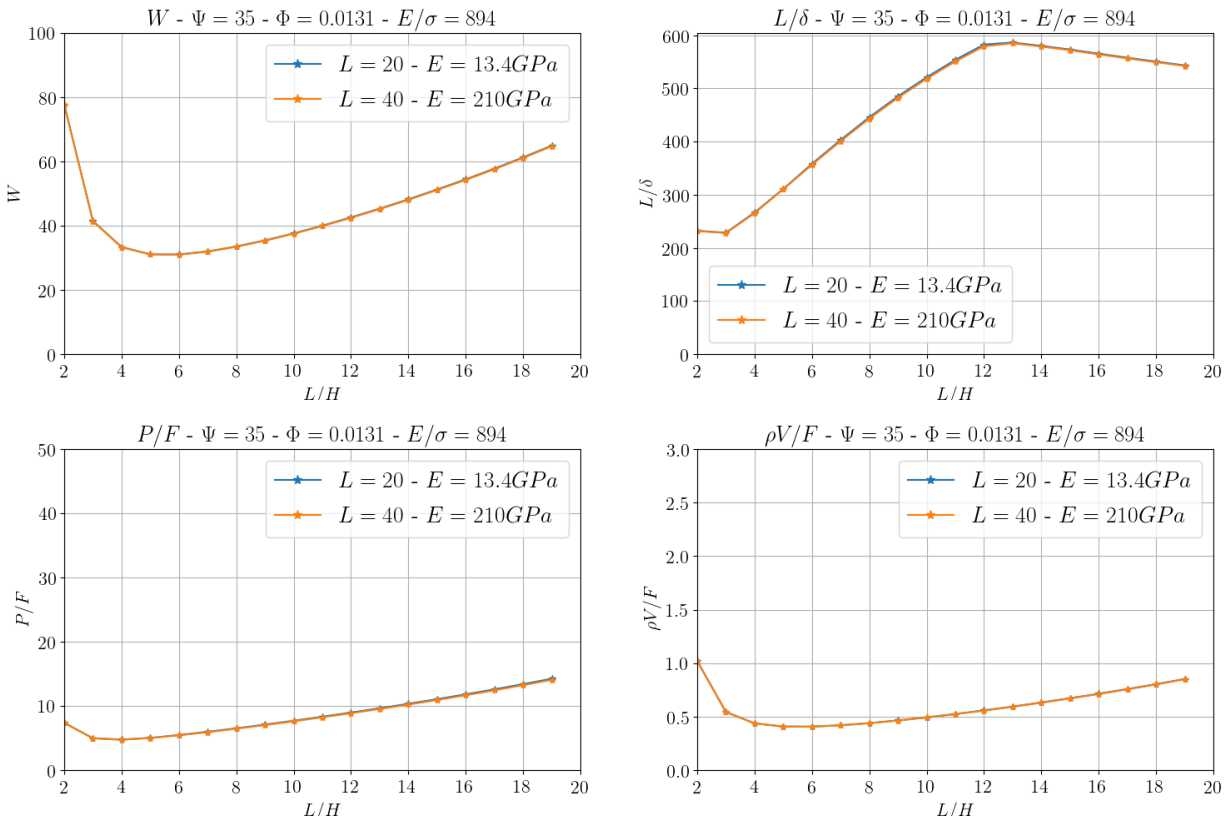


Figure III.34 - Confirmation numérique de l'indicateur de poids propre Phi [Illustration de l'auteur]

3.2. Resultats en tenant compte du poids propre

Comme on se concentre principalement sur l'influence du poids propre dans cette section, les structures analysées ont la même configuration, à un paramètre près : la portée. On analyse également l'influence du nombre de simplex qui composent la structure.

Afin d'obtenir un indicateur de flambement Ψ identique pour chaque structure, il faudra adapter la charge appliquée en fonction de la portée et de l'indicateur de flambement qu'on souhaite obtenir :

$$F = \frac{(\sigma L)^2}{qE\Psi^2}$$

Les paramètres des structures analysées sont affichés à la Table 3 et correspondent à une structure construite entièrement en acier S235.

$E[Gpa]$	$\sigma[MPa]$	$\rho[kN/m^3]$	$m[-]$
210	235	77	0.1

Table 3 - Paramètres communs à toutes les structures analysées

Afin d'étudier l'influence de l'indicateur de poids propre, on fera varier la portée de la structure, comme affiché à la Table 4.

	$L[m]$	$\Phi[-]$
Configuration 1	10	33×10^{-4}
Configuration 2	20	66×10^{-4}
Configuration 3	30	99×10^{-4}
Configuration 4	40	132×10^{-4}
Configuration 5	60	198×10^{-4}
Configuration 6	80	231×10^{-4}
Configuration 7	100	264×10^{-4}

Table 4 - Portée et indicateur de poids propre des différentes configurations

Pour ne pas perdre trop de temps dans les calculs et les simulations, une condition d'arrêt a été ajoutée à l'algorithme d'optimisation, qui s'arrête dès que l'une des deux conditions suivantes n'est plus remplie :

$$\frac{\rho V}{F} < 3$$

$$\frac{P}{F} < 50$$

Dans le chapitre précédent, il avait été décidé que les structures pour lesquelles l'une de ces deux conditions n'est pas vérifiée n'ont pas un grand intérêt, car elles sont soit trop lourdes, soit trop précontraintes. Par conséquent, les structures pour lesquelles l'algorithme s'est arrêté ne seront pas affichées sur les graphes qui suivent : on ne s'intéressera qu'aux structures respectant les conditions fixées au préalable.

La méthode d'optimisation « full-stress » étant beaucoup plus gourmande en calculs que la méthode « group », on ne se concentre que sur cette dernière. La section précédente a déjà permis de donner une première idée de l'économie de matière que permettait l'utilisation de la méthode « full-stress » mais, à ce jour, la méthode « group » reste la plus réalisable en pratique.

3.2.1. Sans flambement : Psi=0

3.2.1.1. Indicateurs morphologiques

La Figure III.35 affiche l'indicateur de volume pour une passerelle à 3, 4 ou 5 simplex dimensionnée sans tenir compte du flambement. On peut directement faire plusieurs constatations :

On voit que, comme dans le cas où le poids propre était négligé, c'est toujours la passerelle à 3 simplex qui donne les meilleurs résultats en termes de volume. La plus efficace pour une portée de 20m a les caractéristiques suivantes :

$N = 3$	$\frac{L}{H} = 4$	$W = 9.44$	$\frac{L}{\delta} = 188$	$\frac{\rho V}{F} = 0.062$	$\frac{P}{F} = 1.34$

A mesure que le nombre de simplex augmente, l'indicateur d'efficacité matérielle $\rho V/F$ augmente également. Celui-ci augmente également pour de plus grandes portées. Cela signifie que les structures de grande portée utilisent moins efficacement la matière que celles de plus faible portée.

Cela se remarque également au fait que, pour une passerelle à 5 simplex de 100m de portée, l'algorithme s'est arrêté pour des élancements $L/H = 2,17,18,19$ tandis qu'il ne s'est arrêté que pour $L/H = 19$ dans les cas des structures à 3 ou 4 simplex.

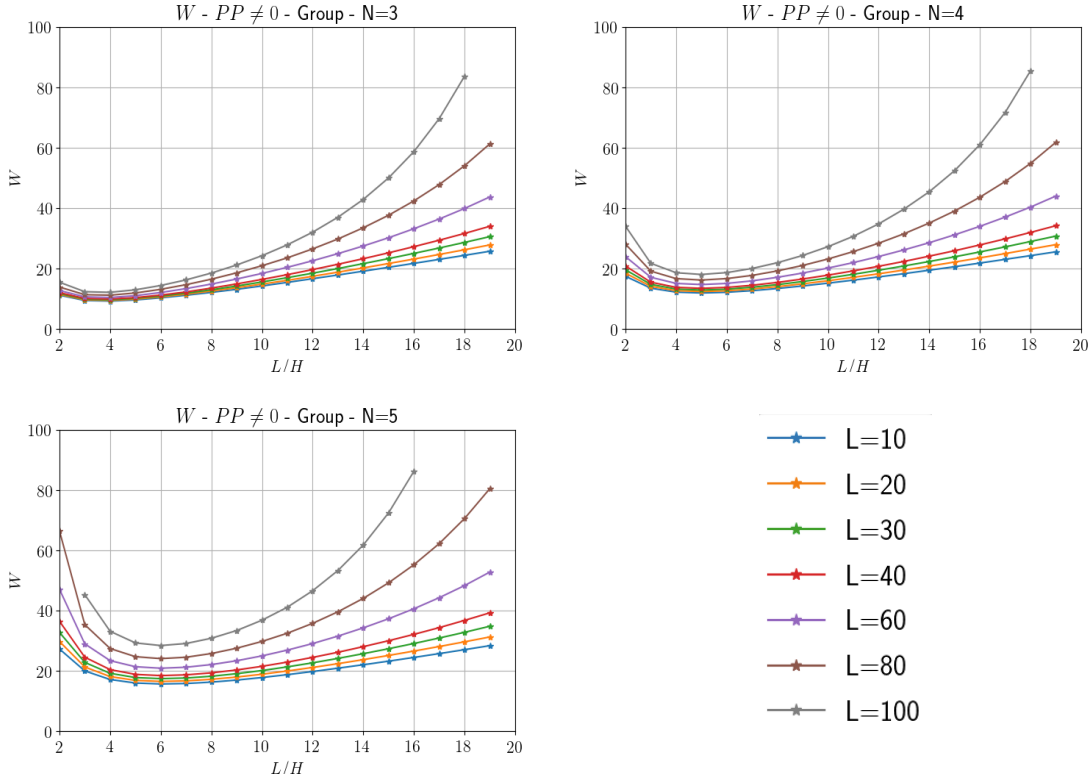


Figure III.35 - Indicateur de volume pour N=3, 4 et 5 pour des portées différentes [Illustration de l'auteur]

En comparaison avec le cas où le poids propre était négligé, la Figure III.37 montre que ce sont toujours les structures à 5 simplex qui donnent les déplacements les plus faibles.

Il semblerait également que la prise en compte du poids propre ait un effet favorable sur les déplacements : ceux-ci sont plus faibles que lorsque le poids propre était négligé. Cela peut simplement s'expliquer par le fait que la précontrainte est calculée en tenant compte du poids propre et des charges externes tandis que les déplacements sont calculés en ne prenant que les charges externes en compte. Pour une même valeur de F , on calcule donc une plus grande valeur de P sans forcément augmenter δ.

La portée semble également avoir un effet favorable sur l'indicateur de déplacements, à nouveau, cela pourrait s'expliquer par le fait qu'une plus grande précontrainte est nécessaire pour une plus grande portée et que par conséquent les déplacements sont diminués.

La structure la plus efficace en termes de déplacements pour une portée de 20m a les caractéristiques suivantes :

$N = 5$	$\frac{L}{H} = 16$	$W = 23.52$	$\frac{L}{\delta} = 352$	$\frac{\rho V}{F} = 0.15$	$\frac{P}{F} = 4.84$

Cette structure est beaucoup plus élancée et l'indicateur de volume vaut plus du double de la valeur de l'indicateur de volume optimal.

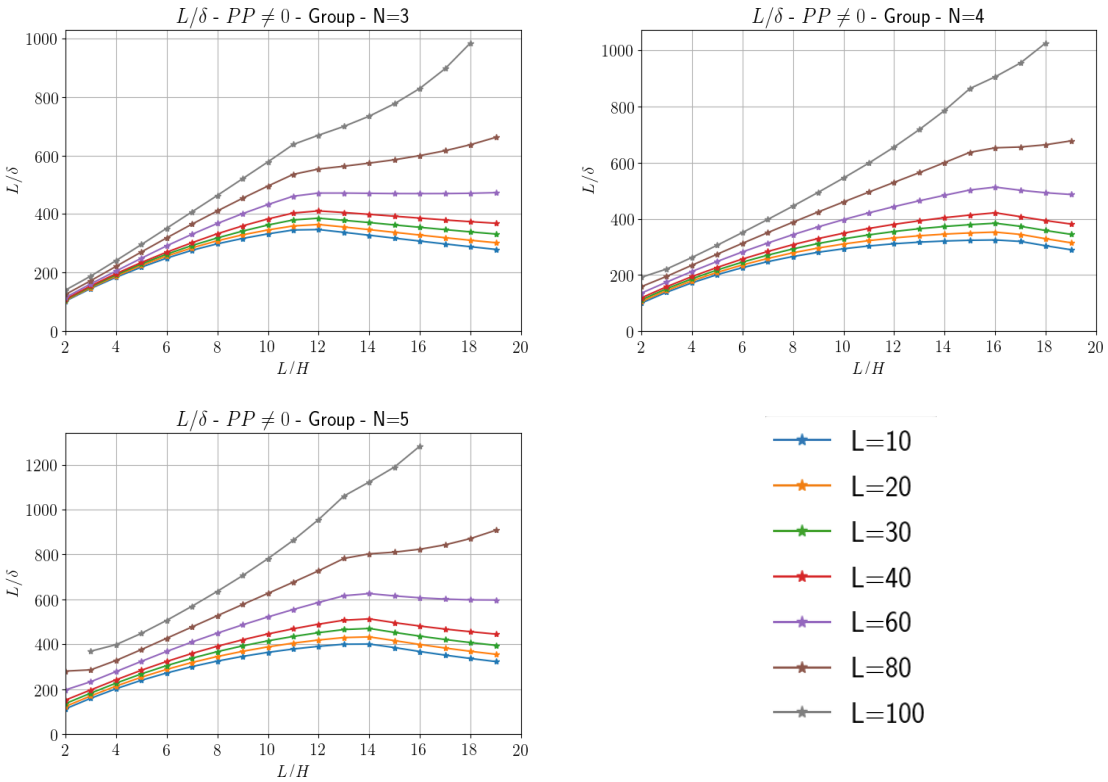


Figure III.37 - Indicateur de déplacement pour N=3,4,5 pour différentes portées [Illustration de l'auteur]

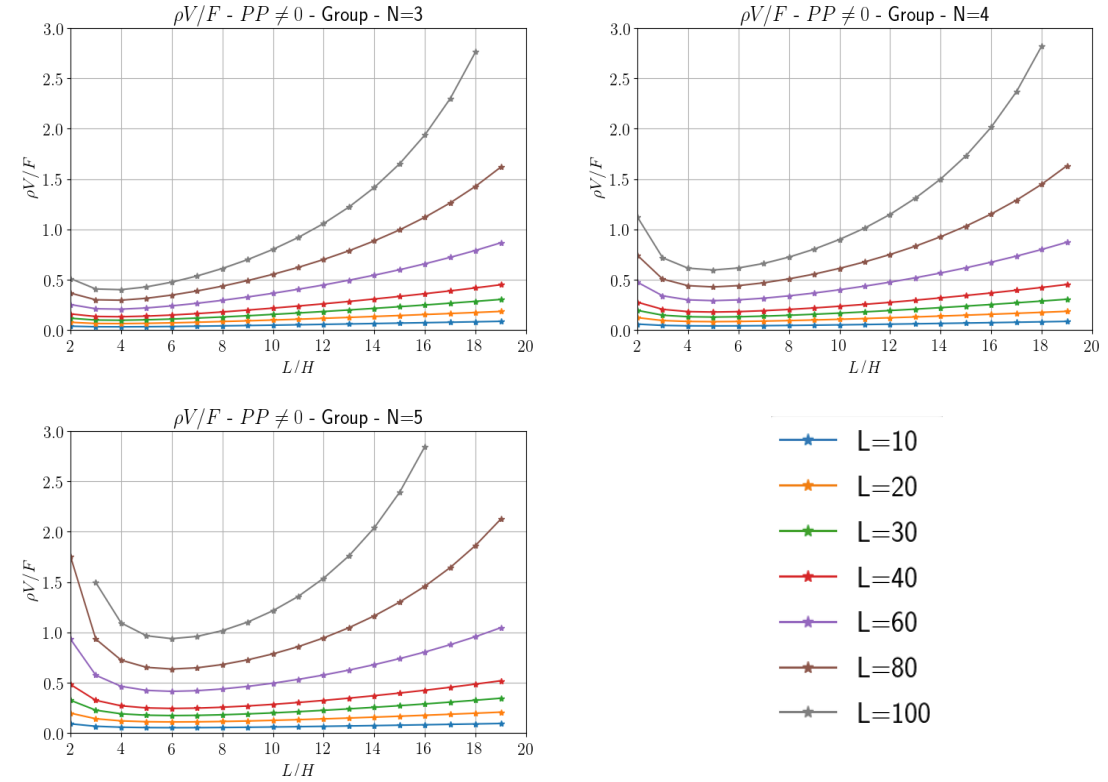


Figure III.36 - Indicateur d'efficacité matérielle pour N=3,4,5 pour différentes portées [Illustration de l'auteur]

La Figure III.36 confirme ce qui avait déjà été constaté à la Figure III.35 affichant l'indicateur de volume : on voit que plus la portée augmente, plus le poids propre devient important par rapport à la charge externe.

On voit également que les quelques structures pour lesquelles l'algorithme s'est arrêté semblent effectivement se rapprocher de la limite $\rho V / F < 3$. Ceci suggère que le critère de poids propre est plus déterminant que le critère de précontrainte $P/F < 50$.

Ceci est confirmé par les graphes affichés à la Figure III.38 : on voit en effet que la limite de précontrainte est loin d'être dépassée et que la valeur qui s'en rapproche le plus vaut à peine 30% de la valeur limite.

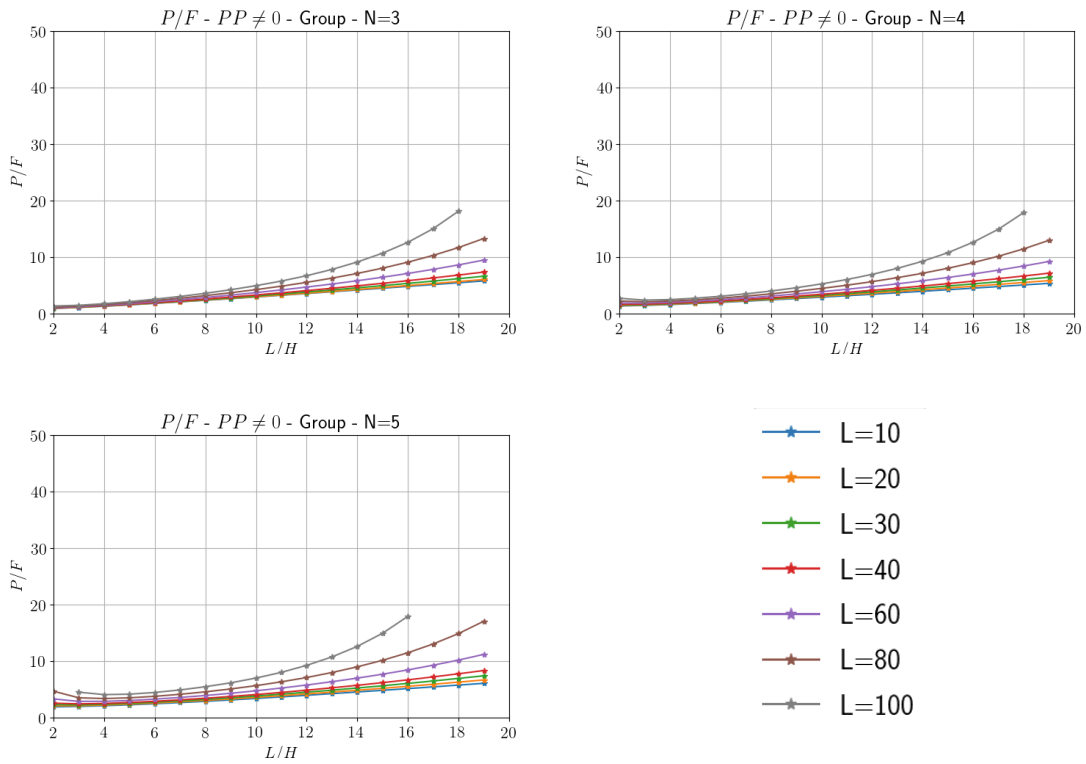


Figure III.38 - Indicateur de précontrainte pour N=3,4,5 pour différentes portées [Illustration de l'auteur]

3.2.2. Avec flambement : Psi=35

Lorsque le flambement n'est plus négligé, cela résulte en une augmentation non négligeable du volume de matière. Pour illustrer cela, les figures qui suivent affichent les résultats pour $\Psi = 35$.

On constate à la Figure III.40 que pour les structures de plus grande portée, l'algorithme s'est arrêté beaucoup plus souvent que lorsque le flambement était négligé. Ainsi, pour une portée de 100m composée de 5 simplex, plus de la moitié des structures analysées ont été éliminées d'emblée.

Pour une structure de 20m de portée, la structure la plus efficace en termes de volume a les caractéristiques suivantes :

$N = 3$	$\frac{L}{H} = 6$	$W = 27.31$	$\frac{L}{\delta} = 294$	$\frac{\rho V}{F} = 0.18$	$\frac{P}{F} = 4.63$

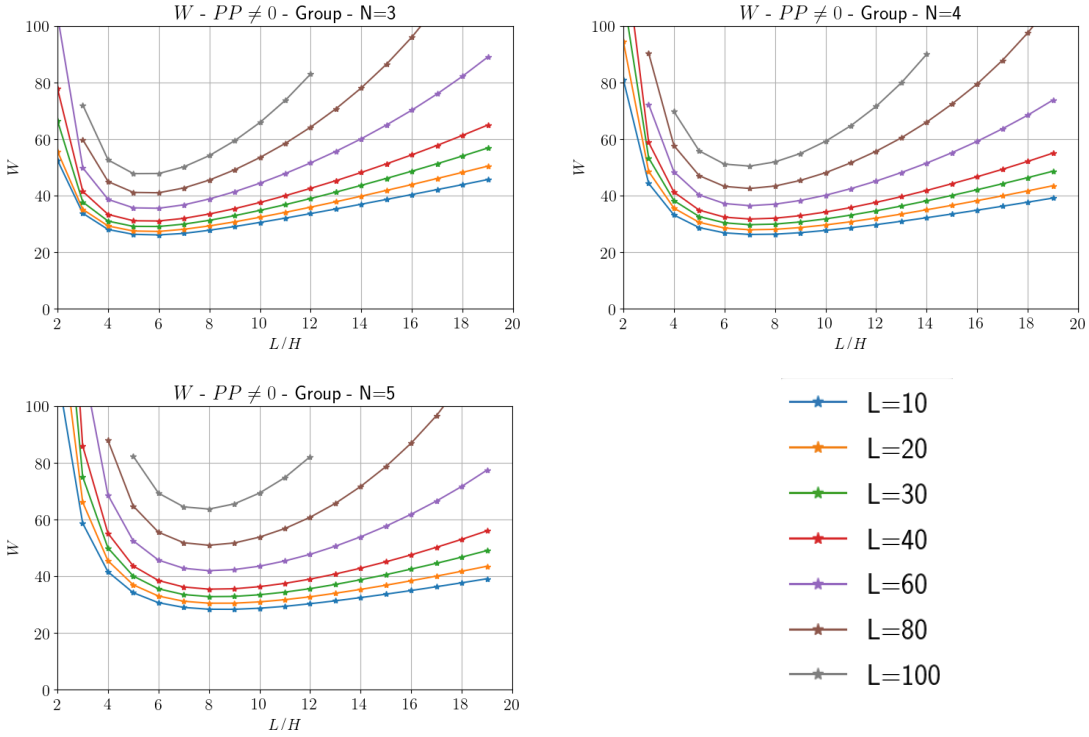


Figure III.40 - Indicateur de volume pour N=3,4,5 et Psi=35 pour différentes portées [Illustration de l'auteur]

L'indicateur de déplacement, affiché à la Figure III.39 semble augmenter avec l'indicateur de flambement. Cela pourrait à nouveau s'expliquer par le fait que les structures plus lourdes doivent être plus précontraintes pour une même charge externe, ce qui aurait tendance à réduire les déplacements.

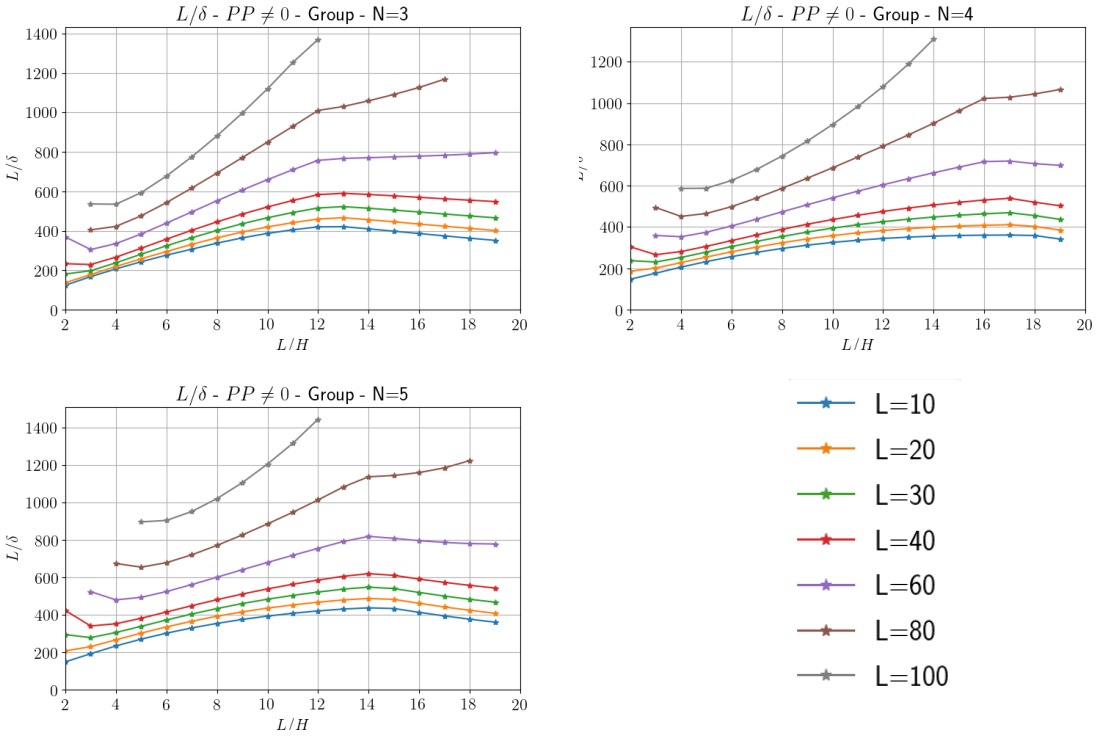


Figure III.39 - Indicateur de déplacement pour N=3,4,5 et Psi=35 pour différentes portées [Illustration de l'auteur]

Les structures les plus efficace en termes de déplacements sont à nouveau les structures à 5 simplex. Pour une portée de 20m, elle a les caractéristiques suivantes :

$N = 5$	$\frac{L}{H} = 14$	$W = 35.33$	$\frac{L}{\delta} = 488$	$\frac{\rho V}{F} = 0.23$	$\frac{P}{F} = 4.63$

On constate à la Figure III.41 que plus la portée augmente, plus l'indicateur d'efficacité matérielle est sensible à la variation d'élancement géométrique L/H. Pour une portée de 10m, celui-ci ne varie pratiquement plus lorsque l'élancement a dépassé une valeur de 4.

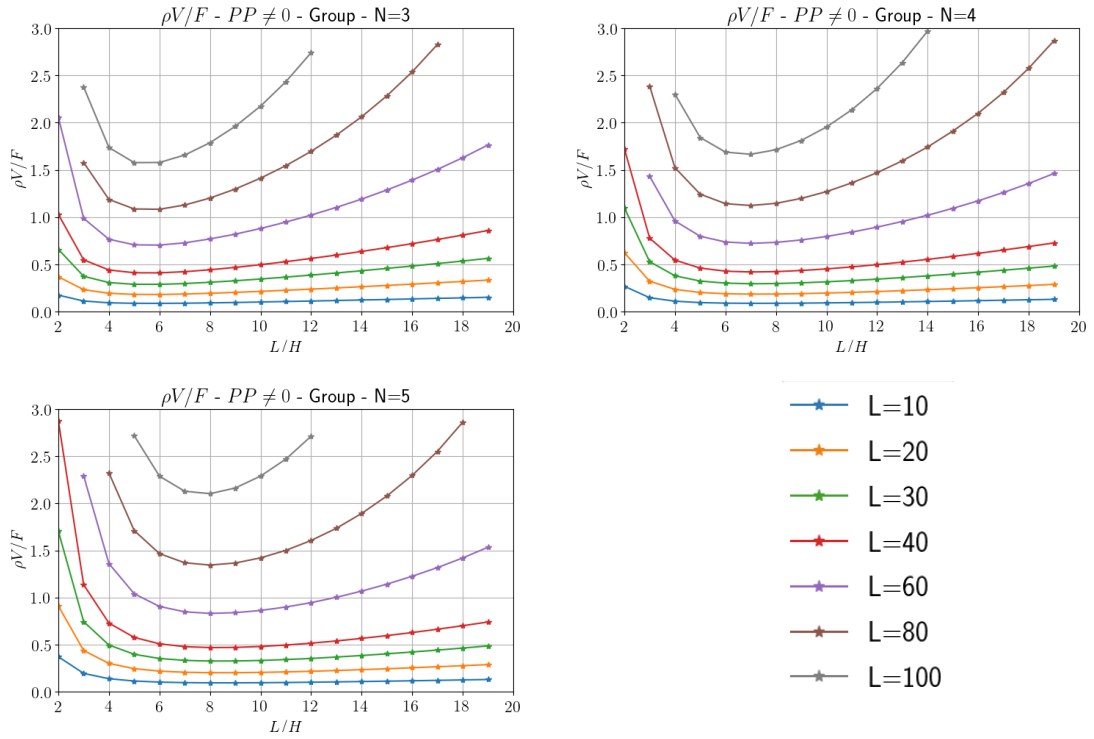


Figure III.41 - Indicateur d'efficacité matérielle pour N=3,4,5 et Psi=35 pour différentes portées [Illustration de l'auteur]

La Figure III.42 montre que c'est à nouveau le critère posé sur l'indicateur d'efficacité matérielle qui est déterminant pour les structures qui ont été éliminées d'emblée. L'indicateur de précontrainte ne dépasse toujours pas la moitié de sa valeur limite, pour aucune des structures.

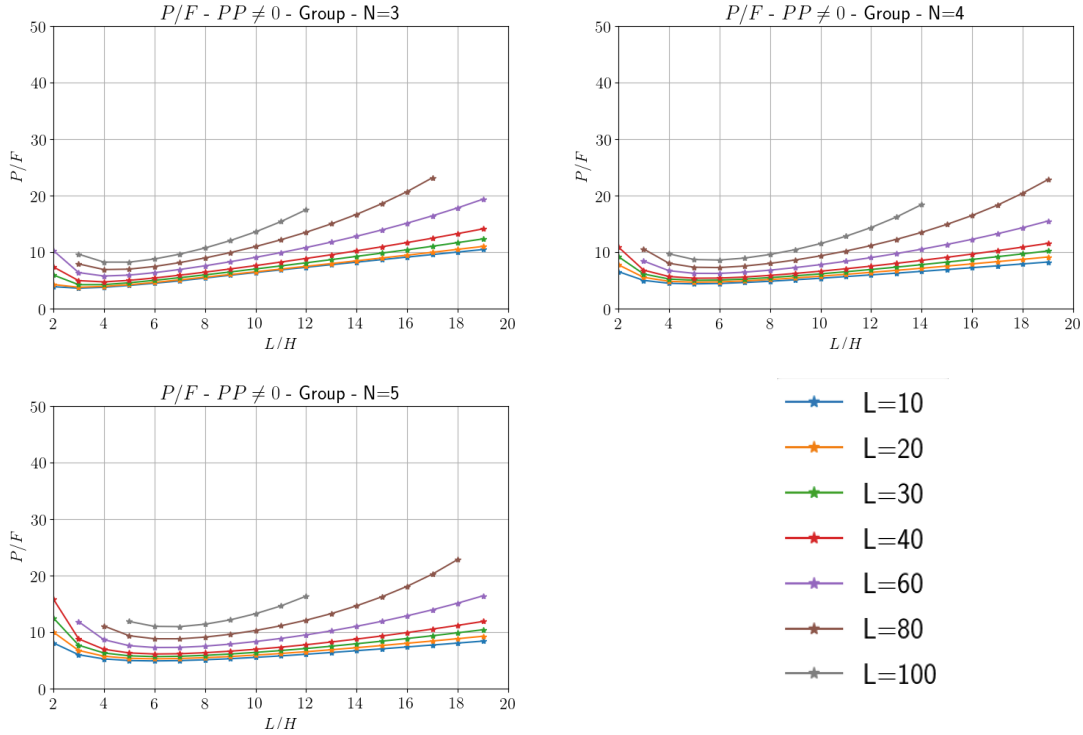


Figure III.42 - Indicateur de précontrainte pour N=3,4,5 et Psi=35 pour différentes portées [Illustration de l'auteur]

3.2.3. Courbes d'efficience

Les courbes d'efficience pour une passerelle à 3, 4 ou 5 simplex sont affichées à la Figure III.44, la Figure III.43 et la Figure III.45. Ces courbes permettent de déterminer, en fonction de la portée et de l'indicateur de flambement, quel élancement et quel nombre de simplex minimisent l'indicateur de volume.

On remarque que pour un nombre de simplex qui augmente, l'élancement optimal $(\mathrm{L/H})_{\mathrm{opt}}$ augmente également : les structures composées de plus de simplex sont donc plus élancées. Cet élancement optimal semble également diminuer lorsque la portée augmente : les structures de plus grande portée seront proportionnellement plus trapues que pour de petites portées.

Ces courbes d'efficience confirment encore une fois que le critère posé sur l'indicateur d'efficacité est plus contraignant que le critère posé sur l'indicateur de précontrainte qui n'atteint jamais 40% de sa valeur limite. On voit également que les structures de grande portée sont extrêmement lourdes. Pour de grandes valeurs de Ψ et pour une portée de 100m, l'algorithme n'a trouvé aucune valeur de L/H qui permette de respecter le critère d'efficacité matérielle. Ces structures sont donc irréalisables en pratique car beaucoup trop lourdes.

Dans la suite de ce travail, on choisit de se concentrer sur des portées plus réalistes, en limitant celles-ci à 40m au maximum. En effet, les résultats obtenus dans cette section tendent à supposer que des passerelles de tenségrité composées de simplex de grande portée ne sont pas très réalistes, mais que celles-ci sont plus adaptées à des portées plus faibles.

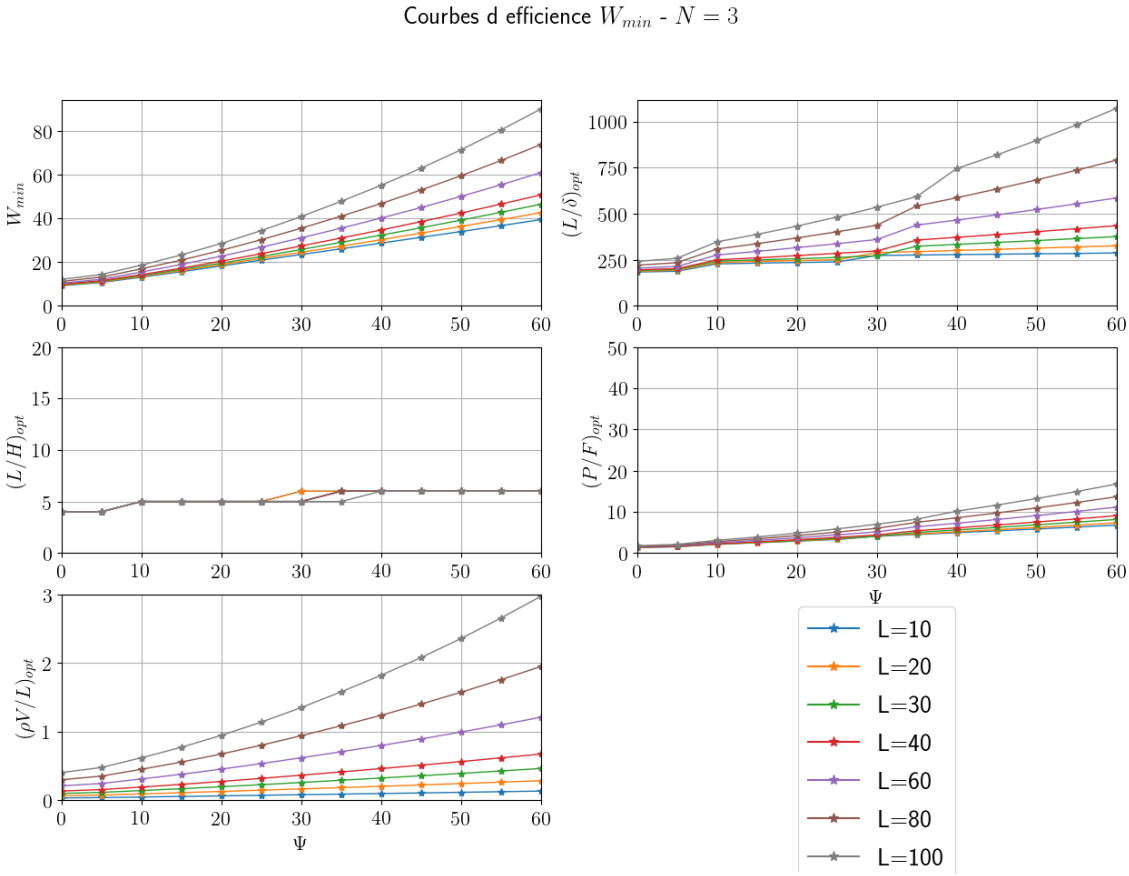


Figure III.44 - Courbe d'efficience pour N=3 [Illustration de l'auteur]

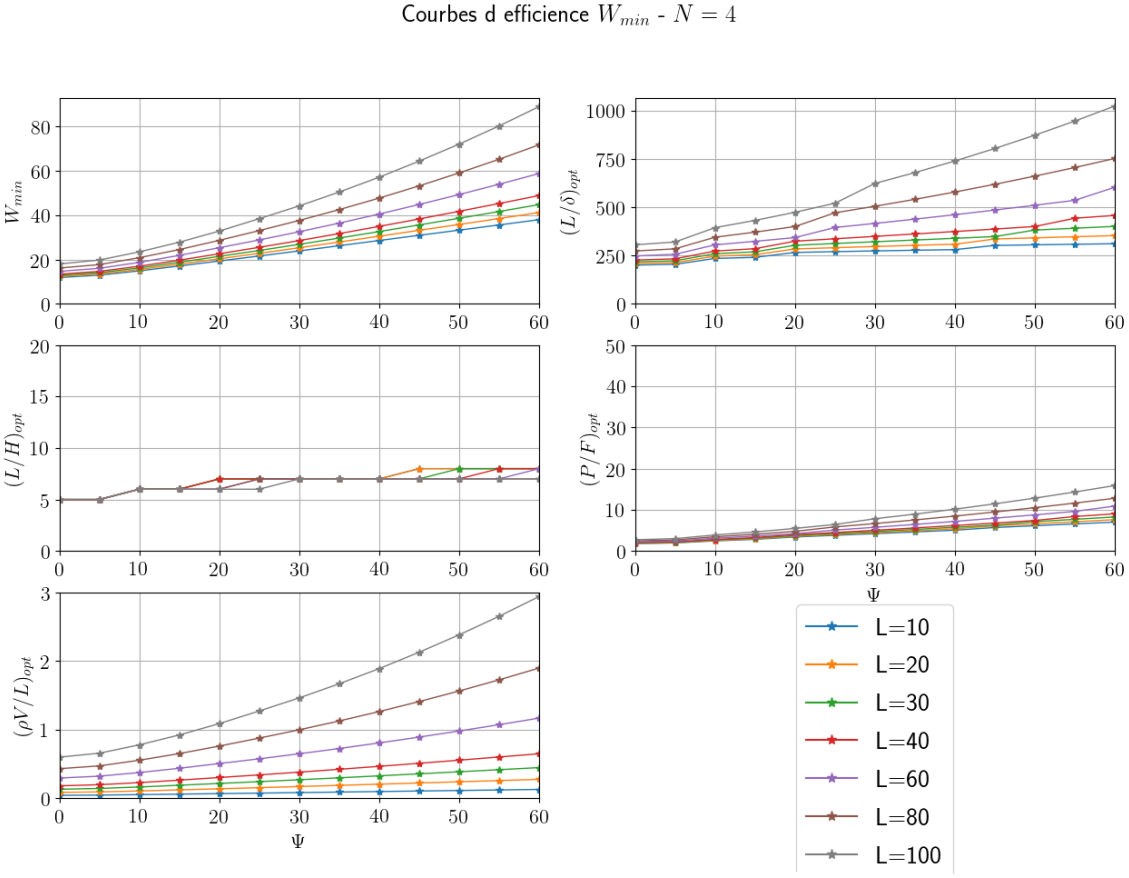


Figure III.43 - Courbe d'efficience pour N=4 [Illustration de l'auteur]

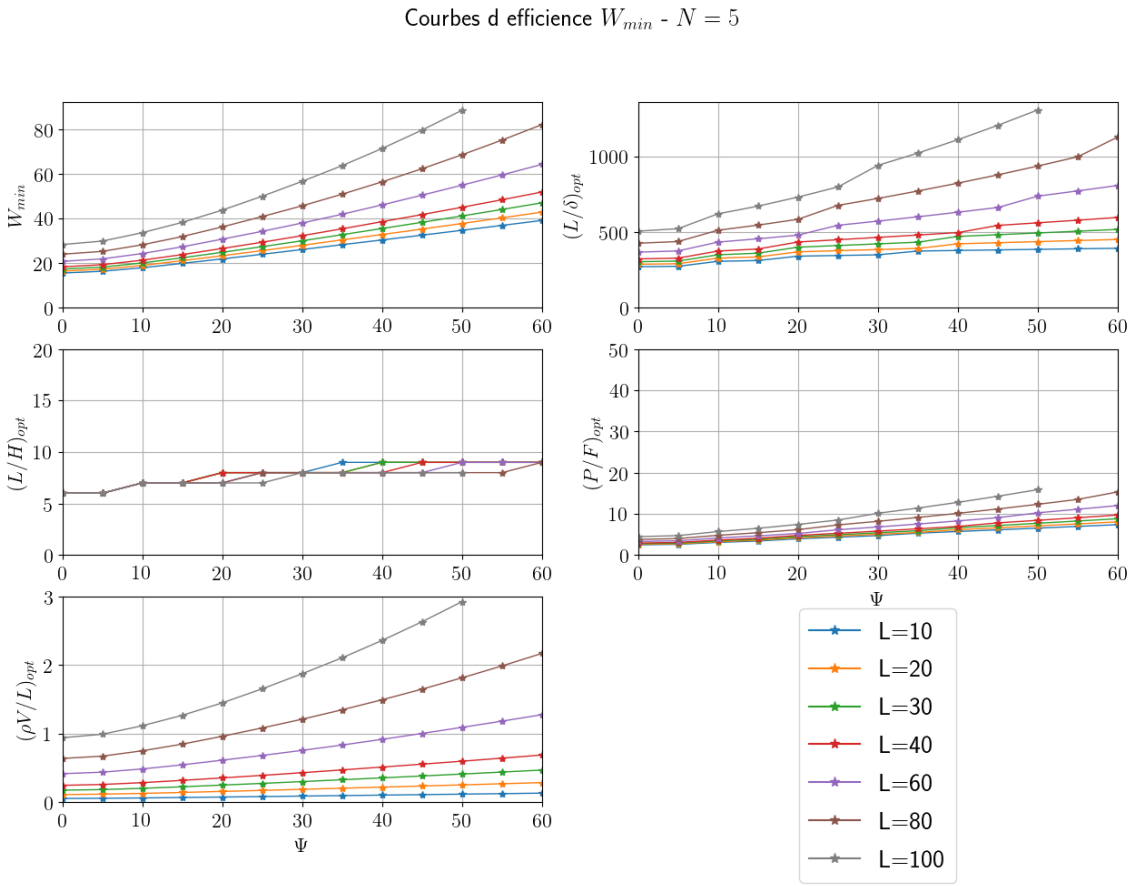


Figure III.45 - Courbe d'efficience pour N=5 [Illustration de l'auteur]

La Table 5 classe les différentes structures (en fonction du nombre de simplex) de la plus efficace à la moins efficace pour plusieurs valeurs de Ψ et pour une portée de 30m. Cette table, combinée aux courbes d'efficience affichées plus haut, peut servir pour le prédimensionnement d'une passerelle, afin de choisir l'élancement et le nombre de simplex idéal en fonction de Ψ.

Les cases affichées les plus à droite sont celles représentant la structure la plus efficace en termes de volume. Elles sont affichées en rouge si le critère posé sur l'indicateur de déplacement $L/\delta > 500$ n'est pas respecté.

Ψ	1			2			3		
	W_{min}	$\left(\frac{L}{H}\right)_{opt}$	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{H}\right)_{opt}$	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$	W_{min}	$\left(\frac{L}{H}\right)_{opt}$	$\left(\frac{L}{\delta}\right)_{opt}$
0	9.66	4	192	12.9	5	218	17.4	6	304
	N=3			N=4			N=5		
10	13.9	5	242	16.2	6	259	20.1	7	351
	N=3			N=4			N=5		
20	19.5	5	255	21.4	7	303	24.9	8	401
	N=3			N=4			N=5		
30	25.8	5	272	26.8	7	321	30.1	8	422

	N=3			N=4			N=5		
40	32.3	6	333	32.6	7	340	35.6	9	421
	N=3			N=4			N=5		
50	38.6	8	382	39.2	6	354	41.2	9	494
	N=4			N=3			N=5		
60	44.8	8	401	46.4	6	376	47.1	9	517
	N=4			N=3			N=5		

Table 5 - Table de prédimensionnement pour une passerelle de 30m de portée

On constate que plus l'indicateur de flambement augmente, plus le nombre optimal de modules augmente : pour $\Psi = 50$ et $\Psi = 60$, la structure à 4 simplex est moins volumineuse que la structure à 3 simplex.

Il est également important de noter que, à part pour une seule configuration ($\Psi = 60$, $N = 5$), le critère de flèche n'est jamais respecté. En effet, il a été illustré dans ce chapitre que le calcul de la flèche sous charges variables donnait des déplacements beaucoup plus élevés que lorsque la charge était uniformément répartie. Il est donc nécessaire de trouver un moyen de limiter cette flèche.

Une possibilité serait d'opter pour des structures à plus de simplex ou plus volumineuses que les structures optimales affichées ci-dessus. Une autre option serait d'augmenter le niveau de précontrainte, ce qui résulterait en une structure plus rigide. Le critère de flèche est alors celui qui détermine le niveau de précontrainte et non plus le critère de non-détente des câbles.

Ce problème sera traité plus en détails dans le chapitre suivant.

Chapitre IV CONSIDERATIONS SUR LES ETATS LIMITES ET NORMES DE SECURITE

1.INTRODUCTION

Jusqu'à présent, l'objectif de ce travail a été d'optimiser les structures de tenségrité afin de déterminer le volume minimal de matière à mettre en œuvre, avec le plus petit niveau de précontrainte possible. Cependant, la réalité du terrain ne permet pas de se contenter de ces optimisations « théoriques » pour pouvoir construire une passerelle qui pourra être utilisée en toute sécurité.

Dans la pratique, il faudra tenir compte de nombreuses incertitudes tantôt liées au caractéristiques mécaniques du matériau, tantôt au chargement extérieur. Le concepteur d'un tel ouvrage ne peut en effet pas se permettre que la structure soit menée à la ruine dès que les charges appliquées sont un peu plus élevées que prévu, ou que la structure subit une légère perte de précontrainte.

C'est dans ce contexte que les Eurocodes, développés par le Comité Européen de Normalisation, viennent en aide à l'ingénieur qui doit concevoir une structure qui puisse être exploitée en toute sécurité et confort. Ceux-ci établissent une série de règles permettant de concevoir des ouvrages conformes aux exigences de résistance mécanique (sécurité à la ruine), de confort d'utilisation, de sécurité en cas d'incendie ou de durabilité [18].

A l'heure actuelle, on distingue 10 Eurocodes (abrégés EC), portant chacun sur un sujet différent lié à la conception des ouvrages de génie civil [19] :

- **EC0 :** Bases de calcul des structures
- **EC1 :** Actions sur les structures
- **EC2 :** Calcul des structures en béton
- **EC3 :** Calcul des structures en acier
- **EC4 :** Calcul de structures mixtes acier-béton
- **EC5 :** Conception et calcul des structures en bois
- **EC6 :** Calcul des ouvrages en maçonnerie
- **EC7 :** Calcul géotechnique
- **EC8 :** Calcul des structures pour leur résistance aux séismes
- **EC9 :** Calcul des structures en aluminium

Ce chapitre vise à appliquer les directives de ces Eurocodes (en particulier les **EC1** et **EC3**) au dimensionnement de structures de tenségrité et d'évaluer l'influence que cela aura sur les différents indicateurs morphologiques.

Il s'agit donc d'un pas de plus vers la possibilité de construire une passerelle de tenségrité, car cela permet d'obtenir les dimensions qu'il faut lui donner afin de s'assurer que celle-ci puisse non seulement résister aux charges appliquées, mais également qu'elle ne risque pas la ruine si ces charges sont un peu plus élevées que prévu.

Il faut cependant garder en tête que, bien que ces calculs se rapprochent de plus en plus d'un dimensionnement concret et pratique, ces résultats ne peuvent pas être utilisés tant qu'ils ne sont pas validés par une étude expérimentale. Beaucoup d'inconnues concernant les structures de tenségrité ne pourront en effet être levées qu'en en analysant expérimentalement leur comportement réel et en comparant celui-ci aux résultats obtenus par les modélisations théoriques développées jusqu'ici.

2. ETATS-LIMITES

Cette section se base sur les travaux réalisés par Jérôme QUIRANT lors de sa thèse de doctorat portant sur les grilles de tenségrité [20]. Bon nombre de ses réflexions concernant les états-limites des grilles tenségrité sont applicables également aux structures analysées ici.

L'**EC3**, qui concerne les constructions métalliques, distingue deux états-limites dont il faut tenir compte afin de s'assurer que la passerelle réponde à toutes les exigences : les **états-limites de service** (abrégés **ELS**) et les **états-limites ultimes** (abrégés **ELU**).

Les **ELS** concernent des critères liés à une utilisation normale de la structure, afin de s'assurer que les charges qui sont appliquées dessus n'entravent pas l'utilisation de l'ouvrage. Cela concerne donc des critères visuels, de confort d'utilisation ou encore de durabilité. Le non-respect de ces critères, bien que problématique, n'entraînera pas la destruction de l'ouvrage et ne mettra pas en danger ses utilisateurs.

Les **ELU** concernent des critères liés à la sécurité de la structure vis-à-vis de la ruine, locale (ruine d'une partie de l'ouvrage) ou globale (ruine de l'ouvrage entier). Il s'agit principalement de critères de résistance mécanique des éléments, résistance au flambement, rupture d'appuis, etc. Contrairement aux critères liés aux **ELS**, le non-respect des critères **ELU** peut mener à la ruine du bâtiment ou d'une partie du bâtiment et la sécurité de ses utilisateurs est compromise.

Pour chacun de ces états-limites, il faut déterminer la ou les combinaisons d'actions qui s'appliquent sur la structure, ainsi que les critères qu'on cherche à vérifier.

Dans cette section, on se concentrera sur les quatre critères suivants, auxquels la passerelle devra répondre :

- Résistance en traction des câbles
- Résistance au flambement des barres
- Non-détente des câbles
- Critère de flèche : $\delta < L/500$

Différents types d'actions peuvent également s'appliquer sur la structure. Dans la suite de cette section, on en distinguera quatre :

- G : les actions permanentes appliquées sur la structure, le poids du tablier par exemple. Par la suite, on considèrera que celles-ci s'appliquent donc uniformément le long du tablier et qu'elles sont transmises aux nœuds supérieurs comme exposé aux chapitres précédents.
- PP : le poids propre de la structure, qui sera incorporé dans G par la suite par souci de simplification
- Q : les charges d'exploitation, le poids des piétons dans le cas de la passerelle piétonne. Celles-ci peuvent donc se répartir de manière aléatoire sur le tablier, et sont également transmises aux nœuds supérieurs en fonction de la zone sur laquelle elles s'appliquent.
- PR : les charges dues à la précontrainte

Pour chacun des états-limites, il faut déterminer comment ces différents types d'actions sont pondérés afin de s'assurer que la structure respecte tous les critères définis dans toutes les situations, avec une marge de sécurité adaptée au critère qu'on cherche à respecter.

2.1. DIMENSIONNEMENT AUX ETATS-LIMITES ULTIMES

2.1.1. COMBINAISONS D'ACTIONS

Pour des structures métalliques non-précontraintes (pour lesquelles $PR = 0$), l'**EC1** préconise l'utilisation des facteurs de sécurité suivants pour la combinaison de charges à l'ELU [21]:

$$1{,}35G + 1{,}5Q$$

Où G comprend également le poids propre PP.

Cependant, l'EC3 ne fournit pas d'indications concernant les coefficients de pondération appliqués à l'action de la précontrainte PR. Cela est probablement dû au fait que, contrairement aux structures en béton précontraint pour lesquelles la documentation est beaucoup plus riche, les structures métalliques précontraintes sont moins répandues et donc moins documentées.

Il faut cependant pouvoir tenir compte de deux phénomènes liés à la précontrainte : la perte et le surplus de précontrainte.

En effet, il est difficile de déterminer avec exactitude la précontrainte introduite dans un élément, ce qui pourrait résulter en un excès ou un déficit de précontrainte par rapport à la valeur exacte visée. En plus de cela on peut imaginer que, en fonction du système de précompression des barres et des assemblages, le système puisse perdre un peu de précontrainte par rapport à la valeur initialement introduite, par glissement des assemblages, imperfections géométriques ou relaxation de l'acier, par exemple. `

Bien que l'EC3 ne propose pas de pondération de la précontrainte, il autorise la prise en compte de cas qu'il ne prévoit pas sous couvert de vérifications expérimentales très précises. Les valeurs proposées plus bas nécessiteront donc d'être validées expérimentalement de manière plus rigoureuse.

Jérôme QUIRANT [20] propose une pondération tenant compte des excès ou pertes de précontrainte, basée sur les valeurs proposées par l'EC2 pour les structures en béton précontraint et sur les valeurs utilisées par des bureaux d'études expérimentés dans ce domaine.

Pour la vérification de critères pour lesquels la précontrainte est favorable, on tient compte des possibles pertes de précontrainte en utilisant la combinaison d'actions :

$$1.35G + 1.5Q + 0.8PR$$

Pour la vérification de critères pour lesquels la précontrainte est défavorable, on tient compte du possible surplus de précontrainte en utilisant la combinaison d'actions :

$$1.35G + 1.5Q + 1.2PR$$

2.1.2. CRITERES A L'ELU

Les critères qui doivent être vérifiés sous les combinaisons de charge à l'ELU sont ceux liés à la ruine de la structure.

Tout d'abord, on s'assure que la limite élastique des câbles n'est jamais dépassée et que toutes les barres soient dimensionnées au flambement sous la combinaison de charges la plus défavorable. La précontrainte étant une action défavorable pour l'effort normal dans les éléments, on choisit le coefficient 1.2 pour pondérer PR lorsque l'on dimensionne les éléments.

Ensuite, on vérifie qu'aucun des câbles ne se détende : dans ce cas-ci, la précontrainte est favorable car elle vise justement à empêcher les câbles de se détendre. On utilisera donc le coefficient 0.8 pour pondérer PR.

On pourrait argumenter sur le fait que le critère de non-détente des câbles soit considéré comme un critère qui devrait plutôt être vérifié à l'ELS.

En effet, l'ELU exprime une charge « accidentelle » et ne correspond donc pas à une situation normale d'utilisation de la passerelle. Le câble se détendrait donc seulement sur une durée de temps limitée (lors de l'application d'une charge « exceptionnelle ») avant de revenir à son état initial, tendu.

Cependant, l'outil numérique actuel ne prévoir pas le calcul du comportement de la passerelle lorsqu'un câble se détend, même temporairement. Il se pourrait que les efforts se répartissent de telle manière que l'un des câbles restants ne dépasse pas sa limite élastique, ou que l'une des barres ne dépasse pas sa limite de flambement.

Cette situation serait évidemment regrettable car elle pourrait mener, au mieux, à des modifications irréversibles dans la géométrie de la structure (plastification d'un câble, par exemple) qui modifieraient de manière permanente la répartition de la précontrainte et des efforts dans la structure, et au pire à la rupture d'un des éléments, qui mènerait à la ruine de la structure.

Par souci de sécurité et par manque d'expertise concernant les cas accidentels où certains câbles sont détendus, le critère de non-détente des câbles est donc considéré comme un critère ELU. Une meilleure analyse du comportement de la structure lorsque certains câbles se détendent pourrait faire basculer ce critère à l'ELS.

2.2. Dimensionnement aux etats-limites de service

2.2.1. Combinaisons a l'ELS

Aux états-limites de service, si on considère une seule action variable (les actions dues au vent ou à la neige sont négligées) sur une structure non-précontrainte on distingue d'habitude trois combinaisons de charge [21]:

- Combinaison rare : $G + Q$
- Combinaison fréquente : $G + \psi_1 Q$
- Combinaison quasi-permanente : $G + \psi_2 Q$

Où ψ_1, ψ_2 sont des coefficients partiels liés au type de charge variable. Ces coefficients sont inférieurs à 1, ce qui fait que la combinaison dite « rare » est celle qui donne la plus grande charge totale appliquée sur la structure. Par souci de simplification, on ne tiendra compte que de cette combinaison-là par la suite.

Il faut également tenir compte de l'action de la précontrainte dans cette combinaison de charge. Dans le cas de la combinaison « rare », tous les coefficients de pondération étant égaux à un, il semble assez logique de prendre également un coefficient de 1 pour les actions de précontrainte. On voit que c'est également la valeur préconisée par l'EC2 pour des structures en béton précontraint [21].

Aux ELS, on ne tiendra donc compte que d'une combinaison de charge, pour laquelle tous les coefficients de sécurité valent 1 :

$$G + Q + PR$$

2.2.2. Criteres a l'ELS

Parmi les quatre critères à vérifier cités plus haut, trois doivent être vérifiés à l'ELU. Il en reste donc un dernier : le critère de flèche.

Une flèche trop élevée peut être gênante pour plusieurs raisons :

- Premièrement, pour le de confort d'utilisation : une passerelle qui se déforme trop lorsqu'un piéton passe dessus peut lui procurer un sentiment d'insécurité qui le découragera de l'emprunter. Cette raison, qui concerne les actions des piétons, concerne donc la flèche due aux actions variables uniquement.
- En plus de cela, on peut également considérer des raisons d'esthétique : une trop grande flèche rendra la structure un peu plus affaissée, ce qui n'est pas souhaitable visuellement. Cette raison ne concerne pas uniquement les actions variables mais également actions charges permanentes et les actions du poids propre.

Les déformations dues aux charges aléatoires étant cependant beaucoup plus élevées que celles dues aux charges uniformément réparties, on négligera ce dernier critère pour se concentrer sur le premier.

Le principe de superposition n'étant pas totalement applicable aux structures de tenségrité, on ne pourra cependant pas se contenter de calculer la déformée de la structure soumise uniquement aux charges aléatoires pour vérifier que le critère de flèche est respecté. Ce calcul devra se faire en deux temps :

1. Calcul de la structure déformée sous l'action des charges permanentes, du poids propre et de la précontrainte : $G + PP + PR$
2. Calcul du déplacement vertical maximal d'un nœud sous l'action des charges variables et permanentes : $G + PP + PR + Q$.

Le déplacement maximal, pour lequel il faut que le critère de flèche soit respecté, vaut :

$$\delta_{max} = max(\delta_{G+PP+PR+Q} - \delta_{G+PP+PR})$$

Dans la suite de cette section, on impose un critère de flèche tel que :

$$\delta_{max} < \frac{L}{500}$$

On retrouve le critère posé précédemment sur l'indicateur de déplacement : $L/\delta_{max} > 500$

2.3. Indicateurs morphologiques

2.3.1. Indicateur de charges permanentes

Dans le contexte des états-limites, on analyse les structures de tenségrité soumises simultanément à des charges aléatoires (Q) et à des charges permanentes (G). Or le dimensionnement de ces structures s'est jusqu'à présent toujours fait soit sous charges aléatoires soit sous charges uniformes uniquement.

Le chapitre précédent a montré que, dans certains cas, les indicateurs morphologiques calculées pour un dimensionnement sous charges aléatoires étaient très différents des indicateurs morphologiques « uniformes » (en particulier l'indicateur de déplacement, ou l'indicateur de volume dans le cas d'une optimisation full-stress).

Afin de tenir compte de cette différence, on introduit un nouvel indicateur primaire G/Q, qu'on appellera **indicateur de charge permanente** et qui exprime le rapport entre les charges permanentes et les charges variables.

Cet indicateur permet, tant lors du dimensionnement que lors du calcul des déplacements, de déterminer quelle proportion de la charge externe totale F il faut considérer comme charge uniformément répartie et quelle proportion doit être considérée comme charge variable.

Il est important de noter que ce rapport G/Q n'est pas le même si on effectue une analyse à l'ELU ou à l'ELS, car les pondérations sont différentes. Par la suite, l'indicateur G/Q représentera le rapport entre les charges permanentes et variables à l'ELU. Il est ensuite assez aisé de déterminer ce rapport à l'ELS :

$$\left(\frac{G}{Q}\right)_{ELS} = \frac{1.5}{1.35}\left(\frac{G}{Q}\right)_{ELU}$$

2.3.2. Autres indicateurs

Comme on considère à présent plusieurs combinaisons d'actions possibles en fonction du critère que l'on souhaite vérifier, certains indicateurs doivent être redéfinis en fonction du critère qui les concerne :

- A partir de la combinaison d'actions à l'ELU $1.35G + 1.5Q$, on calcule la charge totale appliquée à l'ELU notée F_{ELU}. Comme ce sont des critères ELU qui déterminent le volume et la précontrainte, il semble

logique de prendre $F = F_{ELU}$ pour le calcul des indicateurs qui y sont liés. On recense dans cette catégorie l'indicateur de flambement Ψ, l'indicateur de volume W, l'indicateur d'efficacité matérielle $\rho V/\mathrm{F}$ et l'indicateur de précontrainte P/F.

- On calcule les déplacements à partir de la combinaison d'actions à l'ELS : $G + Q$. On utilisera ces déplacements-là pour déterminer l'indicateur de déplacement L/δ.
- Les autres indicateurs ($L/H, \mathrm{E}/\sigma, \Phi$) étant dépendants uniquement de paramètres géométriques ou liés au matériau, ils restent inchangés.

2.4. Conclusion

Dans la suite de ce chapitre, on fournira les résultats d'un dimensionnement d'une passerelle de tenségrité aux états-limites, afin de respecter les critères suivants :

ELU – Précontrainte défavorable $\mathbf{1.35}\boldsymbol{G} + \mathbf{1.5}\boldsymbol{Q} + \mathbf{1.2}\boldsymbol{PR}$ Résistance des câbles Flambement des barres
ELU – Précontrainte favorable $\mathbf{1.35}\boldsymbol{G} + \mathbf{1.5}\boldsymbol{Q} + \mathbf{0.8}\boldsymbol{PR}$ Non-détente des câbles
ELS $\boldsymbol{G} + \boldsymbol{Q} + \boldsymbol{PR}$ Critère de flèche sous charges variables

3. DIMENSIONNEMENT DES STRUCTURES DE TENSEGRITE AUX ETATS-LIMITES

3.1. CALCUL DU NIVEAU DE PRECONTRAINTE

Dans la section précédente, lorsque le niveau de précontrainte devait être ajusté pour qu'aucun câble ne se détende, sa valeur était univoque, car le même niveau était considéré pour vérifier qu'aucun câble ne se détende et pour dimensionner les éléments.

Il n'en va pas de même pour les analyses aux états-limites : on calcule le niveau de précontrainte en tenant compte des pertes pour vérifier qu'aucun câble ne se détende (coefficient de pondération 0.8) et on dimensionne les éléments en tenant compte d'un surplus de précontrainte (coefficient de pondération 1.2).

Ceci a pour effet de modifier légèrement l'algorithme d'optimisation d'une passerelle de tenségrité, car il faut tenir compte de ces coefficients de pondération. On procède donc comme suit :

Premièrement, l'algorithme d'ajustement de la précontrainte est utilisé pour déterminer le niveau de précontrainte minimal P_{min} à appliquer.

A partir de ce niveau minimal, on détermine le niveau de précontrainte P qu'on visera à introduire dans les barres pour tenir compte d'éventuelles pertes de précontrainte :

$$P_{min} = 0.8P \Rightarrow P = \frac{P_{min}}{0.8}$$

Ensuite, les éléments sont dimensionnés en considérant le niveau de précontrainte visé pondéré pour tenir compte d'éventuels surplus de précontrainte, qui sera noté P_{max} :

$$P_{max} = 1.2P = 1.2\frac{P_{min}}{0.8} = 1.5P_{min}$$

Lors du calcul de l'indicateur de précontrainte, le choix le plus logique pour déterminer la valeur du niveau de précontrainte à prendre en compte semble être le niveau de précontrainte visé P. L'indicateur de précontrainte P/F ne se réfère donc plus au niveau de précontrainte minimum pour qu'aucun câble ne se détende mais bien au niveau de précontrainte visé, en tenant compte de possibles pertes.

La Figure IV.1 représente de manière simplifiée (sans afficher les deux boucles d'optimisation des sections) l'algorithme utilisé pour dimensionner une structure de tenségrité aux états-limites.

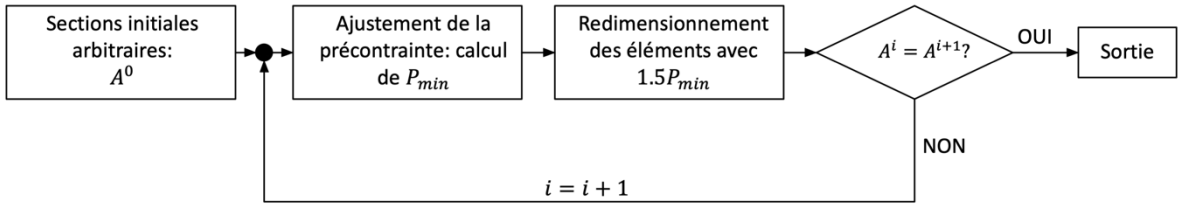


Figure IV.1 - Calcul d'une structure de tenségrité aux états-limites [Illustration de l'auteur]

3.2. CORRECTION DE LA FLECHE

Afin de s'assurer que le critère de flèche $L/\delta > 500$ soit toujours vérifié, il peut parfois être nécessaire d'augmenter la précontrainte dans la structure à un niveau plus élevé que celui nécessaire pour qu'aucun câble ne se détende. Dans ce cas, c'est un critère ELS qui est déterminant pour le niveau de précontrainte visé, et il faut également redimensionner les sections.

Afin de déterminer l'augmentation de précontrainte nécessaire, on fait l'hypothèse que les déplacements de la structure sont proportionnels au niveau de précontrainte introduit. Si cette hypothèse est correcte et si l'objectif est d'atteindre $(L/\delta)_{\text{corrigé}} = 500$, il suffit d'ajuster le niveau de précontrainte comme suit :

$$\frac{(L/\delta)_{corrigé}}{(L/\delta)} = \frac{P_{corrigé}}{P} \Rightarrow P_{corrigé} = \frac{500\delta}{L} P$$

Où P est le niveau de précontrainte visé pour qu'aucun câble ne se détende et $P_{corrigé}$ le niveau de précontrainte qu'il faut viser pour obtenir $L/\delta = 500$.

Cependant, les déplacements et le niveau de précontrainte ne sont en réalité pas exactement proportionnels du fait de la non-linéarité des structures de tenségrité. Il faudra donc procéder par itérations, comme indiqué à la Figure IV.2.

Lorsque le critère de flèche est déterminant, une condition a été ajoutée afin d'éviter que le niveau de précontrainte corrigé ne soit inutilement trop élevé. On introduit donc une borne supérieure et inférieure pour le critère de flèche, en imposant que l'indicateur de déplacement de la structure corrigée vaille la valeur-cible à 1% près :

$$495 < \left(\frac{L}{\delta}\right)_{\text{corrigé}} < 505$$

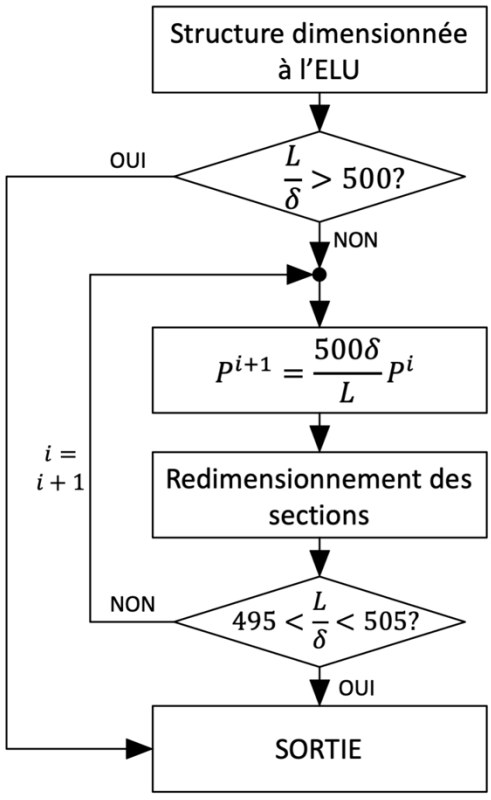


Figure IV.2 - Algorithme d'ajustement de la flèche pour respecter le critère de flèche [Illustration de l'auteur]

Dans certains cas, le critère de flèche peut avoir une grande influence sur le dimensionnement de la structure. Par exemple, dans le cas de l'analyse effectuée au chapitre précédent, pour une passerelle à 3 simplex dont on néglige le poids propre et pour laquelle $E/\sigma = 900$ et $\Psi = 35$, le critère de flèche est

toujours plus déterminant que le critère de non-détente des câbles, car l'indicateur de déplacement est toujours inférieur à 500 avec le niveau de précontrainte minimal (voir Figure IV.3).

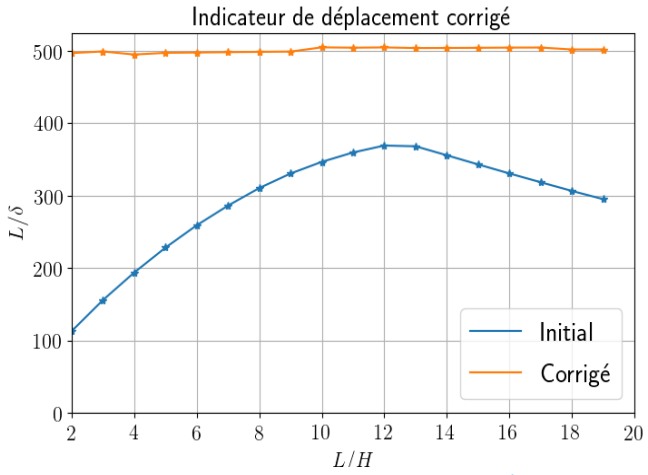


Figure IV.3 - Indicateur de déplacement d'une passerelle à 3 simplex, E/sigma = 900 et Psi=35 [Illustration de l'auteur]

Afin d'atteindre un indicateur de déplacement égal à 500, la précontrainte doit être augmentée (voir Figure IV.4) et cette modification de précontrainte a une influence sur l'indicateur de volume (voir Figure IV.5).

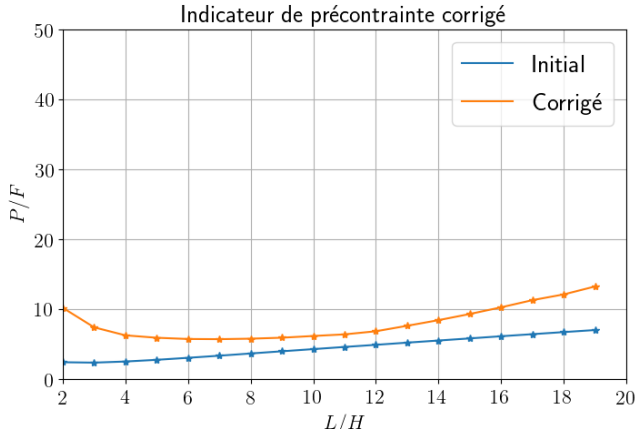


Figure IV.4 - Modification de l'indicateur de précontrainte pour respecter le critère de flèche [Illustration de l'auteur]

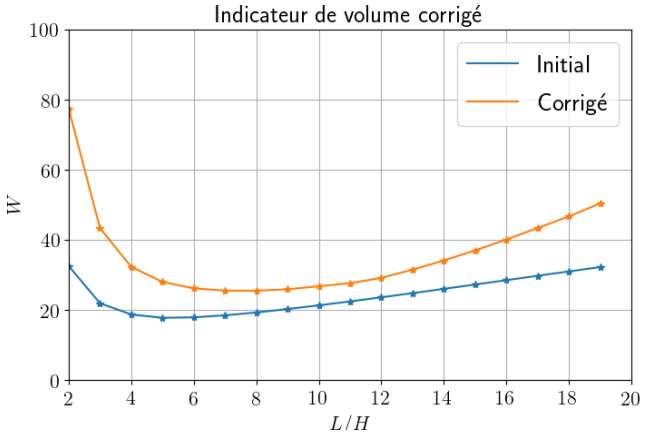


Figure IV.5 - Modification de l'indicateur de volume pour respecter le critère de flèche [Illustration de l'auteur]

3.3. Influence de l'indicateur de charge permanente

3.3.1. Definition des structures

Tout d'abord, on souhaite vérifier que la théorie des indicateurs morphologiques reste valable lorsqu'on introduit l'indicateur de charge variable, en prenant les deux structures comparées au chapitre précédent pour vérifier la validité de l'indicateur de poids propre.

On considère deux structures différant sur tous leurs paramètres (affichés à la Table 6), mais dont les indicateurs morphologiques (affichés à Table 7) sont les mêmes :

	$E[Gpa]$	$\sigma[MPa]$	$L[m]$	$\rho[kN/m^3]$	$m[-]$
Configuration 1	13.4	15	20	9.83	0.5
Configuration 2	210	235	40	77	0.1

Table 6 - Paramètres des deux structures analysées

	$E/\sigma[-]$	$\Psi[-]$	$G/Q[-]$	$\Phi[-]$
Configurations 1 & 2	893	35	0.2	0.0131

Table 7 - Indicateurs morphologiques primaires des deux structures [Illustration de l'auteur]

3.3.2. Resultats

Les résultats de ce calcul sont montrés à la Figure IV.6. On voit qu'effectivement, pour deux structures dont tous les paramètres diffèrent mais pour lesquelles tous les indicateurs morphologiques primaires sont les mêmes, on obtient les mêmes indicateurs morphologiques secondaires.

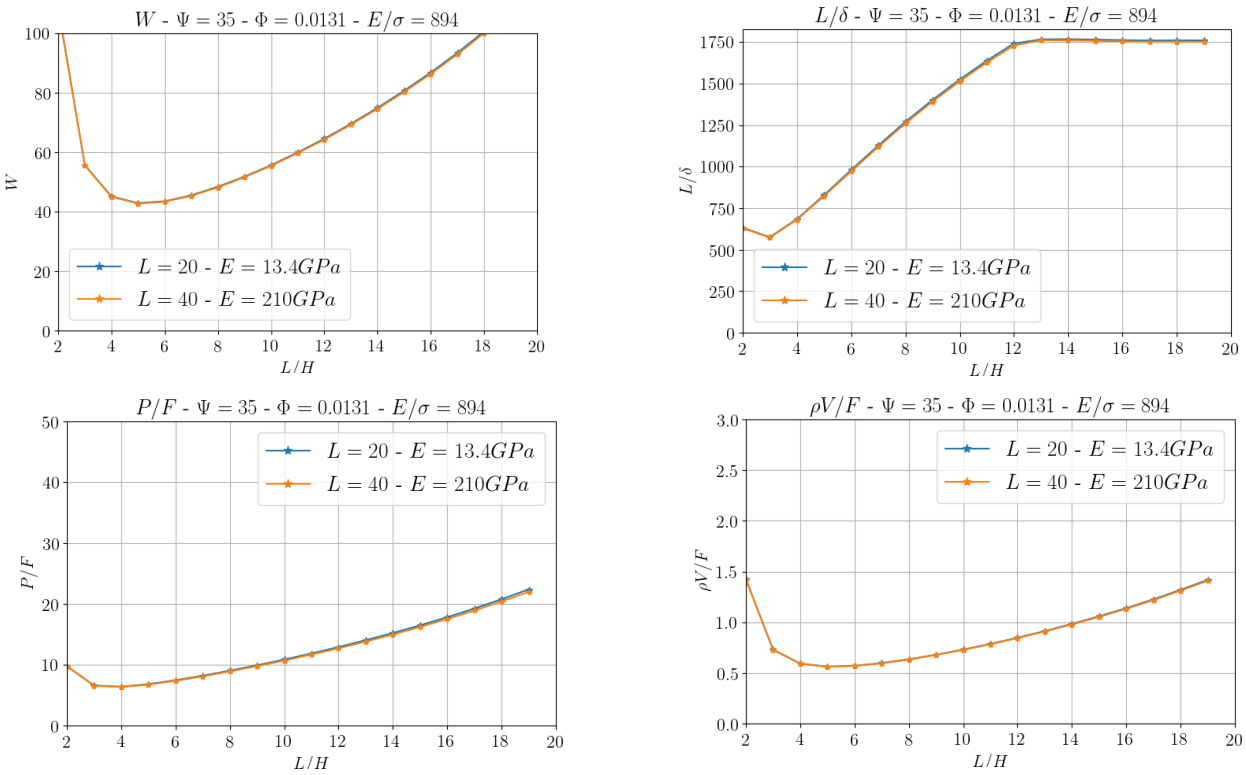


Figure IV.6 - Indicateurs de volume, déplacement, précontrainte et poids propre pour deux structures aux indicateurs primaires identiques [Illustration de l'auteur]

Ceci pourrait s'appliquer, par exemple, au dimensionnement d'une passerelle piétonne en bois de faible portée et d'un pont routier de plus grande portée : bien que les charges permanentes et les charges d'exploitation ne soient pas les mêmes, le rapport entre elles pourrait être le même pour les deux structures, ce qui donnerait des indicateurs de volume, de déplacement, et de poids propre identiques.

4. RESULTATS DE L'OPTIMISATION

4.1. CHARGES PERMANENTES NEGLIGEABLES

Dans un premier temps, on fera l'hypothèse que les actions permanentes G sont négligeables par rapport aux actions variables :

$$G/Q \approx 0$$

Ceci permet de faire ressortir l'influence de la prise en compte des pertes et du surplus de précontrainte lorsqu'on analyse la structure à l'ELU par rapport aux structures « optimales » analysées au chapitre précédent. L'influence de l'indicateur G/Q sera étudiée dans la section suivante.

Pour cela, on s'intéresse à deux passerelles de tenségrité composées de 3, 4 ou 5 simplex ayant deux portées différentes. Leurs caractéristiques sont reprises à la Table 8.

	$L[m]$	$E[GPa]$	$m[-]$	$\Psi[-]$	$\sigma[Mpa]$	$\rho[kN/m^3]$
Configuration 1	10	210	0.1	35	235	77
Configuration 2	30	210	0 .1	35	235	77

Table 8 - Configuration des deux structures étudiées

N.B. Dans la suite de cette section on se référera à la structure calculée aux états limites comme décrit dans ce chapitre en l'appelant « **structure ELU** ». La structure calculée sans tenir compte d'aucun coefficient de sécurité, comme elle a été calculée dans le chapitre précédent, sera appelée « **structure optimale** ».

4.1.1. INDICATEURS MORPHOLOGIQUES

La Figure IV.7 affiche les indicateurs de volume pour les deux configurations étudiées : on voit que l'indicateur de volume a tout de même fort augmenté par rapport à la structure optimale calculée au chapitre précédent. Ce résultat était attendu, car les coefficients de sécurité posés sur le niveau de précontrainte ont pour effet d'augmenter l'effort normal dans les éléments, ce qui fait que le volume de matière nécessaire est également plus élevé.

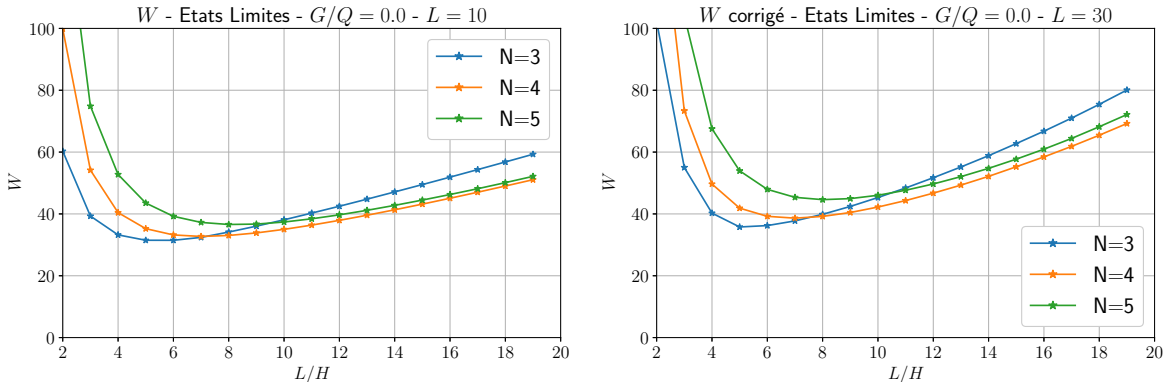


Figure IV.7 - Indicateur de volume pour L=10 et L=30, charges permanentes négligeables [Illustration de l'auteur]

La Figure IV.8 montre l'augmentation de l'indicateur de volume de la structure ELU par rapport à la structure optimale calculée au chapitre précédent. On voit que les critères de sécurité posés sur le dimensionnement des sections et sur le niveau de précontrainte ont pour effet d'augmenter le volume total de matière de 20 à 40% environ. Cette augmentation est plus marquée pour les structures de plus grande portée.

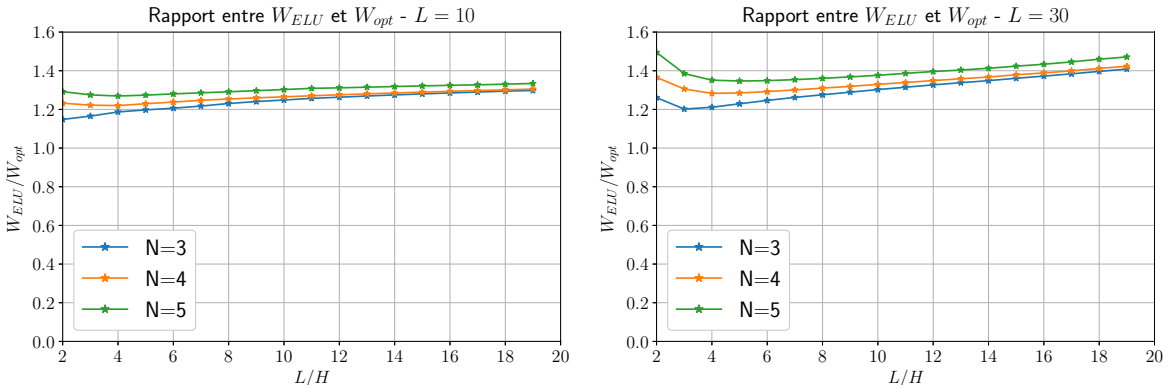


Figure IV.8 - Rapport entre les indicateurs de volume de la structure ELU et de la structure optimale [Illustration de l'auteur]

Il en sera de même pour l'indicateur d'efficacité matérielle $\rho V/L$, car celui-ci est proportionnel à l'indicateur de volume W par le facteur Φ, qui est le même pour les structures ELU et pour les structures optimales.

La Figure IV.10 montre les indicateurs de déplacement de la structure ELU, c'est-à-dire avec le niveau de précontrainte visé, qui est obtenu en divisant le niveau de précontrainte minimal par un coefficient 0.8. La ligne rouge représente la valeur minimale à atteindre pour respecter le critère de flèche : on voit que ce critère est souvent respecté à part pour de faibles élancements, et que la flèche est moins importante pour de plus grandes portées.

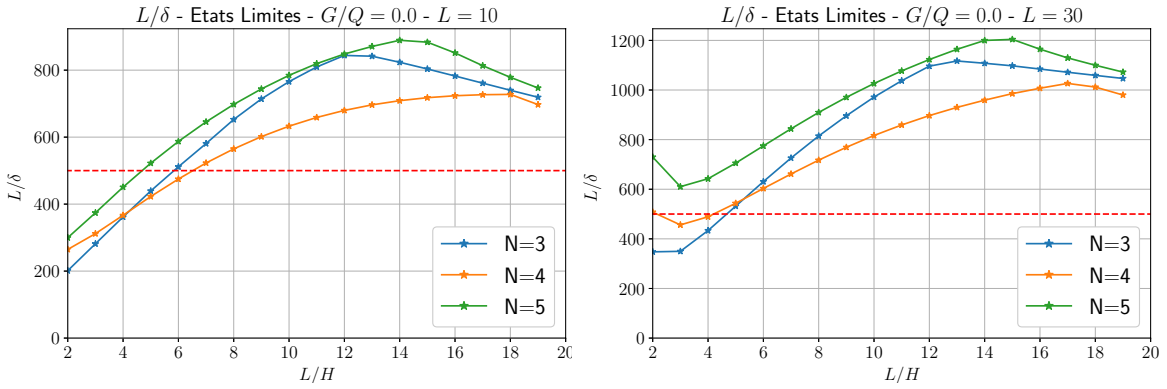


Figure IV.10 - Indicateur de déplacement de la structure calculée ELU pour L=10 et L=30 [Illustration de l'auteur]

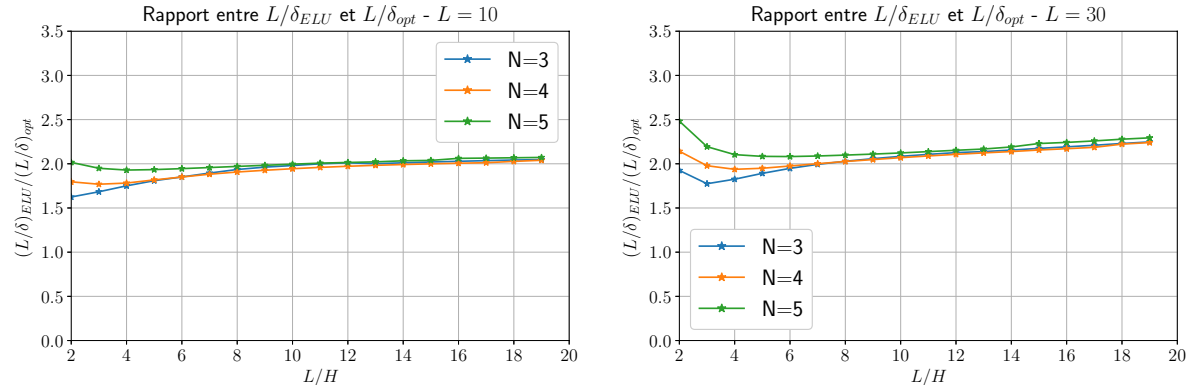


Figure IV.9 - Rapport entre les indicateurs de déplacement de la structure ELU et la structure optimale [Illustration de l'auteur]

Etant donné que le niveau de précontrainte introduit est plus grand que le niveau minimal nécessaire, ceci a un effet favorable sur la flèche, comme le montre la Figure IV.9. En plus de cela, le dimensionnement à l'ELU a pour effet d'augmenter le poids total de la structure, qui nécessite donc une précontrainte plus

élevée. Au total, on voit que l'indicateur de déplacement est presque doublé par rapport aux structures optimales du chapitre précédent.

Ceci mène à une réflexion intéressante : lors de l'optimisation des structures de tenségrité sans tenir compte des états-limites, il était ressorti que le volume de matière nécessaire à mettre en œuvre était raisonnable, mais que la flèche devenait trop élevée lorsqu'on considérait des charges aléatoires. Ceci portait à croire que le critère de flèche serait le critère déterminant dans le dimensionnement de la structure.

Cependant, les résultats obtenus lors du dimensionnement aux états-limites montrent que ce sont plus souvent des critères ELU qui déterminent les dimensions finales de la structure, tandis que le critère ELS est presque tout le temps respecté, à l'exception de structures peu élancées. Cette constatation va donc dans le sens opposé à ce que les analyses effectuées jusqu'ici auraient pu porter à croire.

Enfin, la Figure IV.11 montre que l'indicateur de précontrainte a également augmenté de 20% à 40% environ par rapport à la structure optimale.

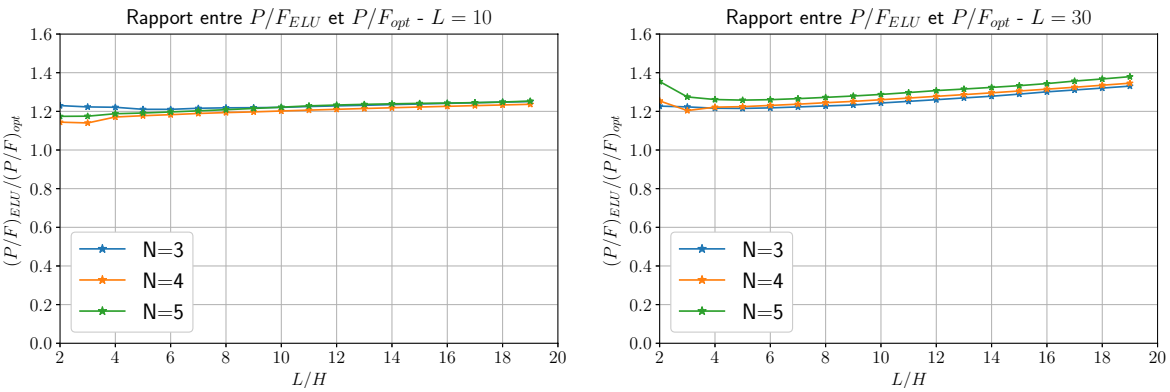


Figure IV.11 - Rapport entre les indicateurs de précontrainte de la structure calculée à l'ELU et la structure optimale [Illustration de l'auteur]

4.1.2. CORRECTION DE LA FLECHE

Malgré le fait que l'indicateur de déplacement ait fort augmenté pour les structures ELU par rapport aux structures optimales, certaines d'entre elles ne respectent toujours pas le critère de flèche.

La Figure IV.12 affiche l'indicateur de déplacement corrigé pour respecter le critère de flèche. On voit que celui-ci n'a pas dû être corrigé pour beaucoup de structures : ce n'était nécessaire que pour celles dont $L/H \leq 6$ pour la structure de 10m de portée et $L/H \leq 4$ pour la structure de 30m de portée.

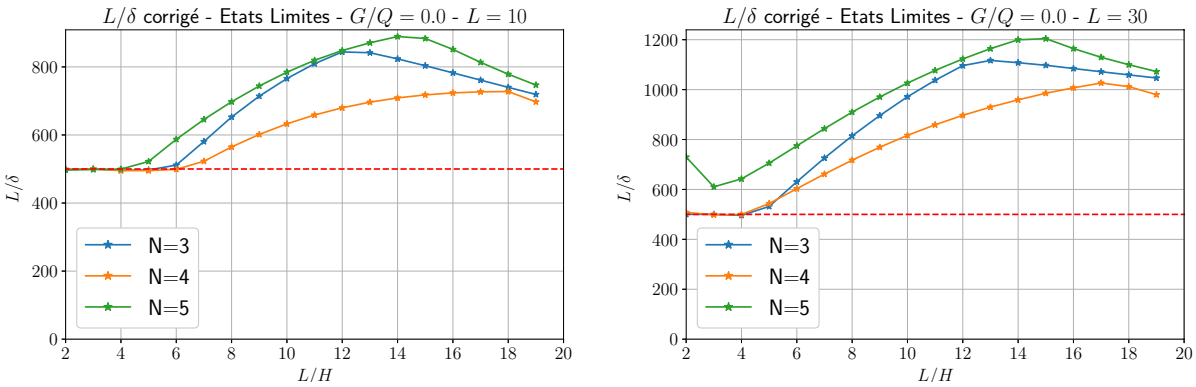


Figure IV.12 - Indicateurs de déplacement de la structure ELU corrigée pour respecter le critère de flèche [Illustration de l'auteur]

Cette correction a une incidence sur l'indicateur de volume, car le niveau de précontrainte a été augmenté et donc les efforts internes dans les éléments sont augmentés également. La Figure IV.13 montre le rapport entre l'indicateur de volume corrigé et l'indicateur de volume non-corrigé.

Les parties du graphe où ce rapport est égal à l'unité indiquent que le critère de flèche n'est plus le critère déterminant pour dimensionner la structure, car il n'a pas été nécessaire de modifier le volume de matière par rapport à la valeur calculée initialement. On voit à nouveau que c'est uniquement pour de petits élancements que le critère de flèche est déterminant.

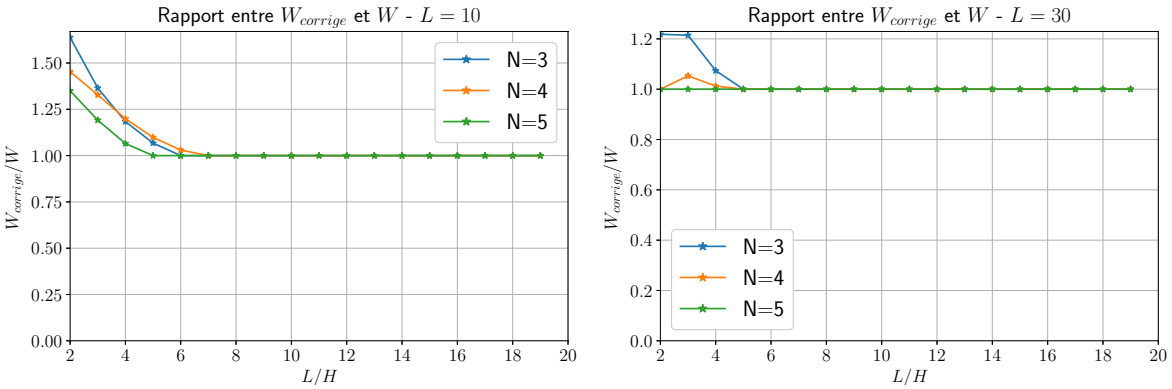


Figure IV.13 - Rapport entre les indicateurs de volume corrigé et non-corrigé [Illustration de l'auteur]

4.1.3. Courbes d'efficience

La Figure IV.14 et la Figure IV.15 affichent les courbes d'efficience qui minimisent l'indicateur de volume tout en respectant le critère de flèche pour L=10m et L=30m. On voit que celui-ci est plus déterminant pour des structures de faible portée et pour de faibles indicateurs de flambement. Les structures composées de 5 simplex sont les plus volumineuses mais ne nécessitent jamais de correction pour respecter le critère de flèche.

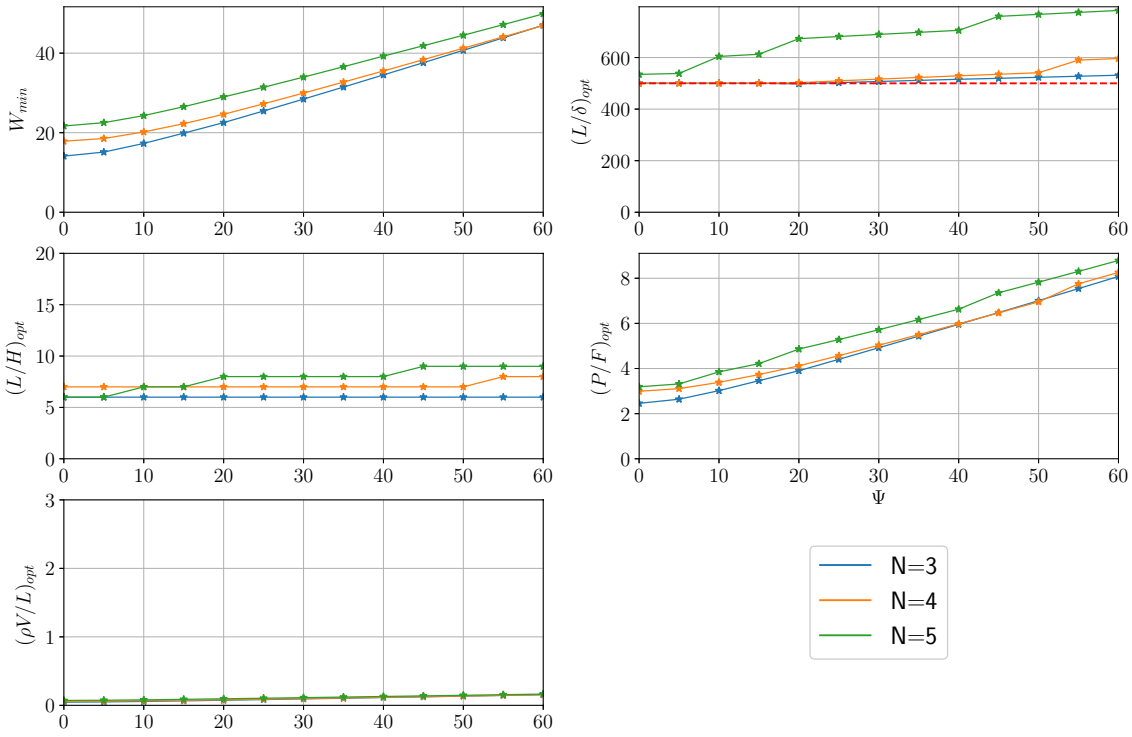


Figure IV.14 - Courbe d'efficience de l'indicateur de volume pour L=10m, avec correction de la flèche [Illustration de l'auteur]

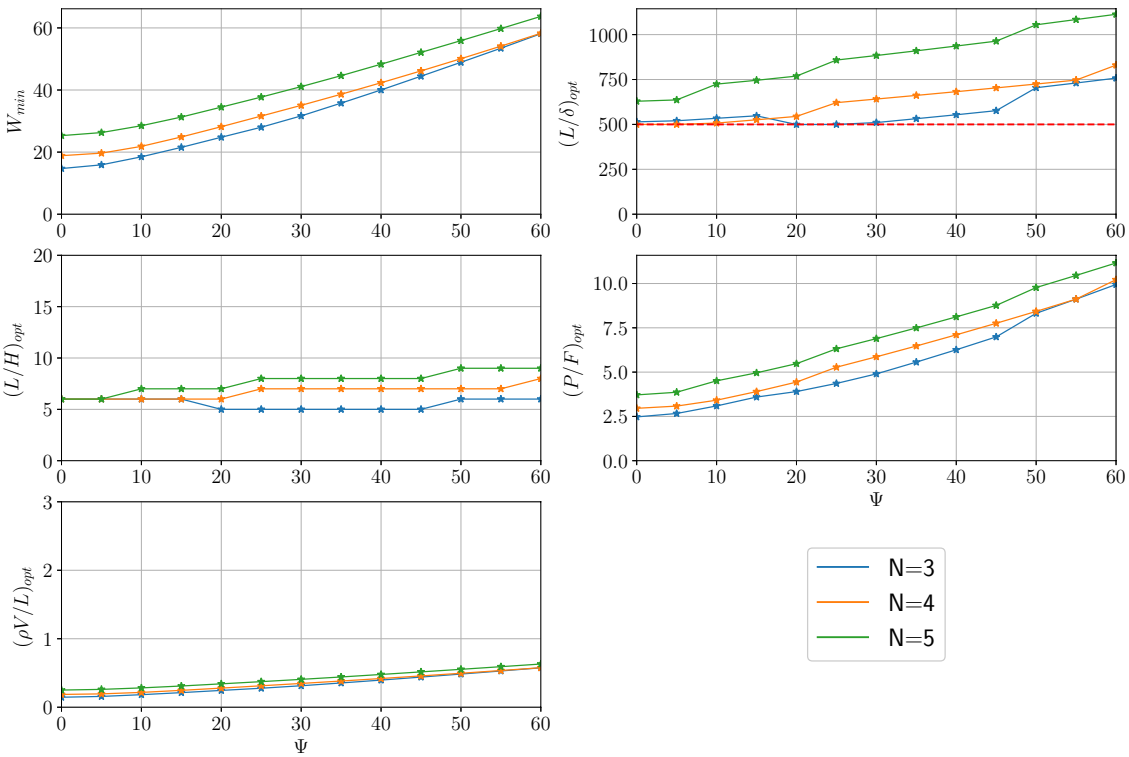


Figure IV.15 - Courbes d'efficience de l'indicateur de volume pour L=30m avec correction de la flèche [Illustration de l'auteur]

4.2. CHARGES PERMANENTES NON NEGLIGEABLES

Le Chapitre III a montré que les indicateurs de volume, de précontrainte et de poids propre ne changeaient pratiquement pas lorsqu'on considérait des charges aléatoires plutôt que des charges uniformément réparties. Ce n'est que sur l'indicateur de déplacement que les charges aléatoires ont un impact négatif, car elles ont pour effet d'augmenter la flèche maximale de la structure.

Dans cette section, on choisit une valeur de l'indicateur G/Q égale à 0.2, c'est-à-dire que les charges variables qui peuvent s'appliquer sur la structure sont 5 fois plus grandes que les charges permanentes (qui sont uniformément réparties).

4.2.1. INDICATEURS MORPHOLOGIQUES

D'après ce qui a été montré au chapitre précédent, l'indicateur de volume devrait rester pratiquement inchangé par rapport au cas où les charges permanentes étaient négligées ($G/Q = 0$).

Ceci est vérifié à la Figure IV.17, qui affiche les indicateurs de volume pour la même structure que précédemment, en considérant cette fois un indicateur de charge permanente égal à 0.2.

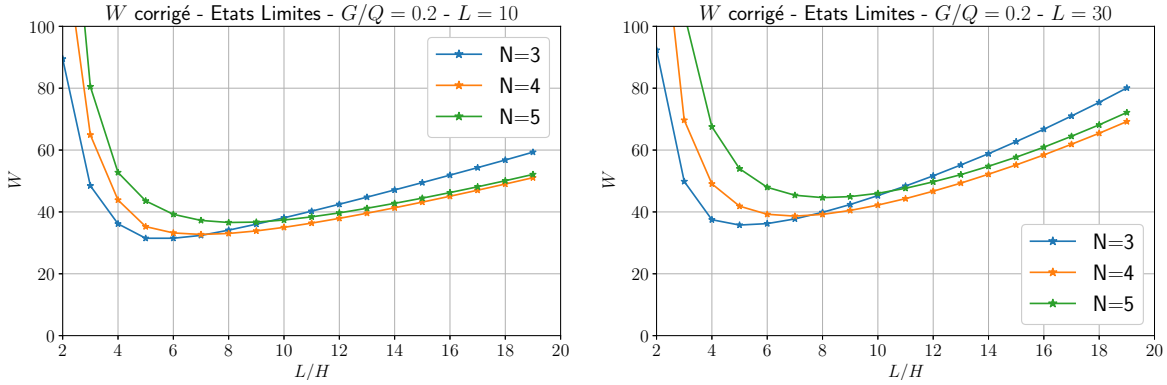


Figure IV.17 - Indicateurs de volume de la structure ELU pour L=10m et L=30m, avec G/Q=0.2 [Illustration de l'auteur]

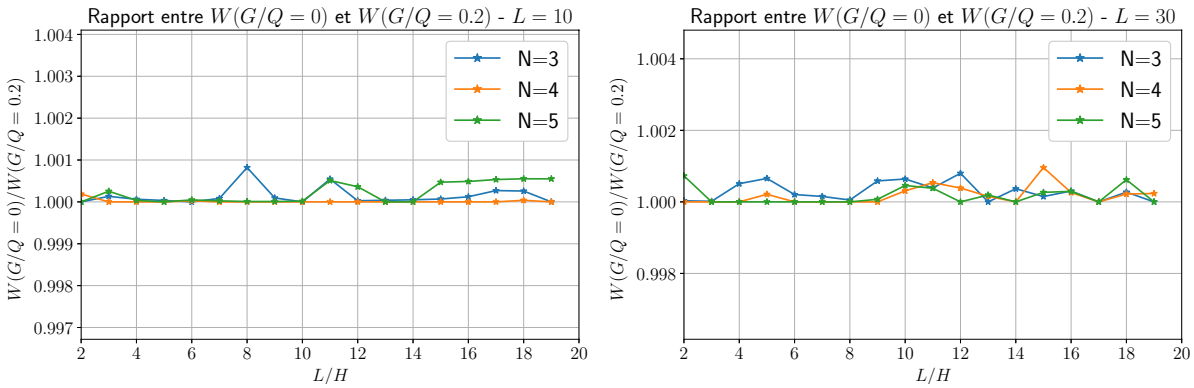


Figure IV.16 - Rapport entre l'indicateur de volume pour G/Q=0 et G/Q=0.2 [Illustration de l'auteur]

La Figure IV.16 est assez explicite sur le fait que l'indicateur de charge permanente n'a pratiquement pas d'impact sur l'indicateur de volume : le rapport entre celui calculé précédemment et celui calculé avec $G/Q = 0.2$ est très proche de l'unité.

Ce n'est pas le cas pour l'indicateur de déplacement, comme le montre la Figure IV.18 : pour une charge externe totale appliquée identique, on voit que l'augmentation de l'indicateur de charges permanentes a un effet favorable sur les déplacements.

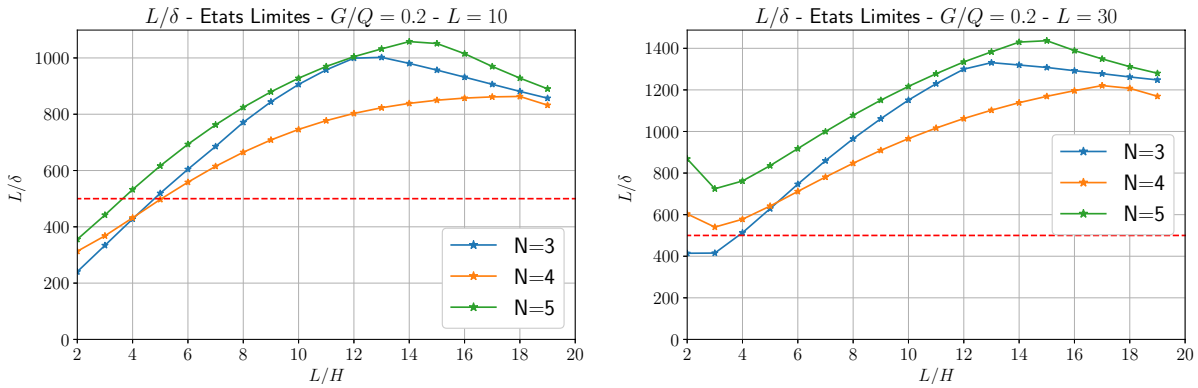


Figure IV.18 - Indicateur de déplacement pour L=10m et L=30m [Illustration de l'auteur]

Ceci semble assez logique, car le calcul de la flèche maximale ne prend pas en compte les déplacements dus aux actions permanentes. La charge externe totale est donc effectivement la même, mais la charge qui a une influence sur le calcul des déplacements a diminué.

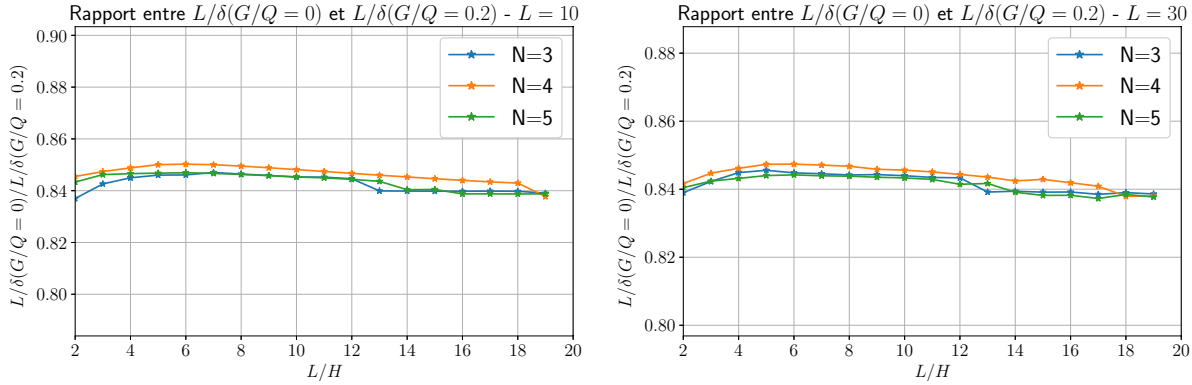


Figure IV.19 - Rapport entre l'indicateur de déplacement pour G/Q=0 et G/Q=0.2

Ceci est confirmé à la Figure IV.19, qui indique le rapport entre l'indicateur de déplacement calculé pour un indicateur de charges permanentes nul et égal à 0.2. En plus d'être effectivement plus élevé pour un rapport G/Q plus élevé, ce rapport semble être quasiment constant pour toutes les valeurs de L/H, à 1% près.

4.2.2. Correction de la flèche

Comme l'indique la Figure IV.18, il y a très peu de structures pour lesquelles le critère de flèche n'est pas respecté. Il faut cependant augmenter le niveau de précontrainte introduit dans certains cas, pour des élancements très faibles.

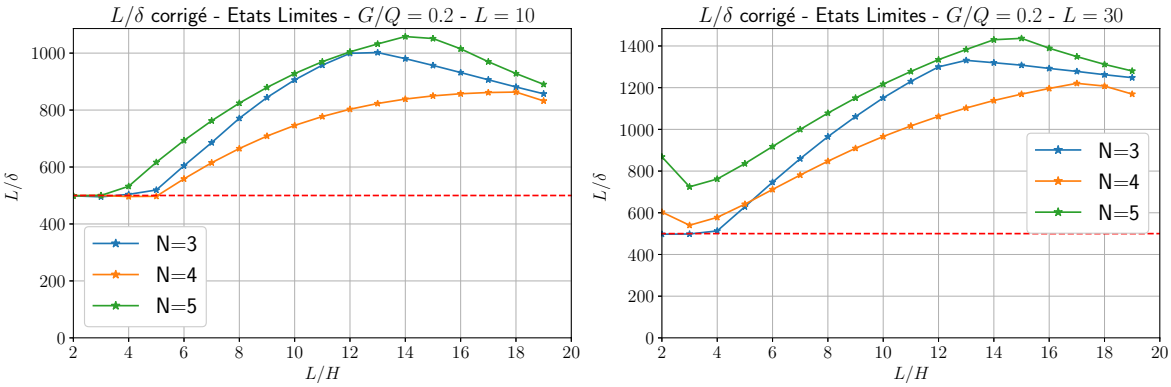


Figure IV.21 - Indicateur de déplacement corrigé pour respecter le critère de flèche [Illustration de l'auteur]

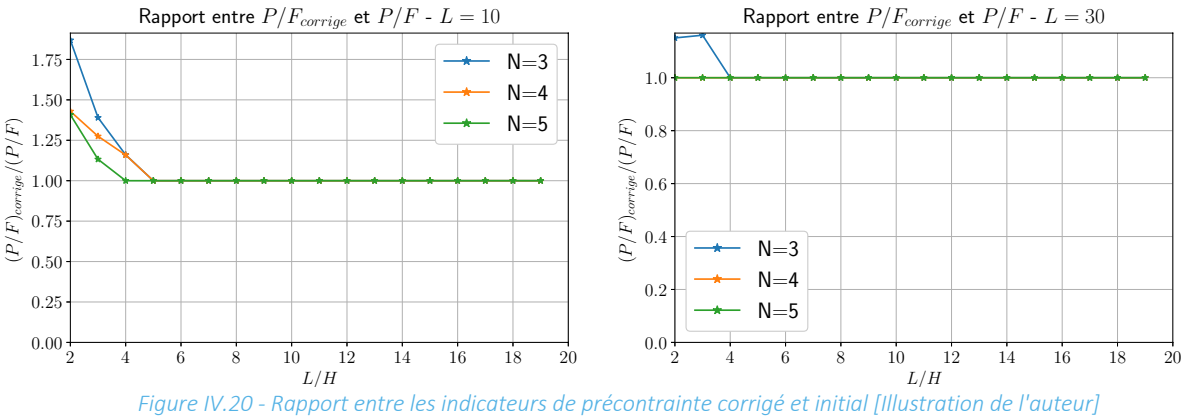


Figure IV.20 - Rapport entre les indicateurs de précontrainte corrigé et initial [Illustration de l'auteur]

La Figure IV.20 montre que le niveau de précontrainte ne doit pratiquement jamais être augmenté pour respecter le critère de flèche, à part pour certaines structures dont l'élancement est inférieur à 5. Ceci a également un impact sur le volume total de matière utilisé, comme l'indique la Figure IV.22

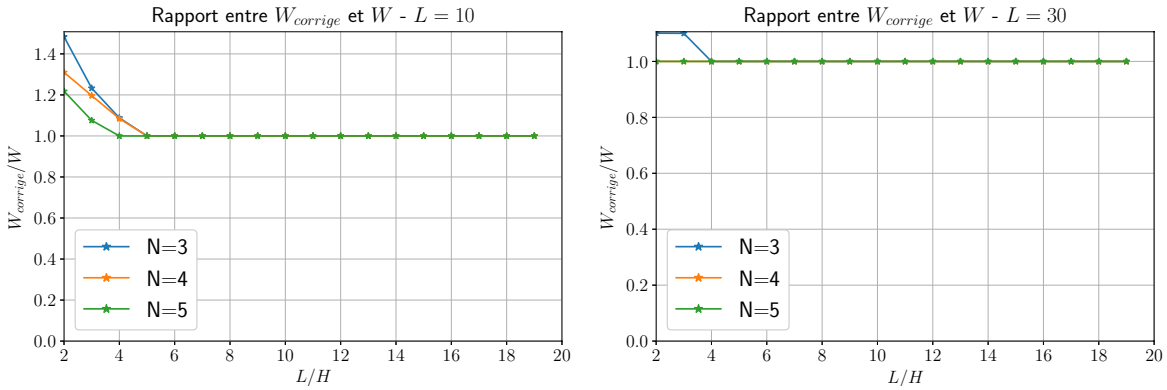


Figure IV.22 - Rapport entre l'indicateur de volume corrigé et l'indicateur de volume initial [Illustration de l'auteur]

4.2.3. Courbes d'efficience

La Figure IV.23 affiche les courbes d'efficience de l'indicateur de volume pour une structure de 10m de portée, en tenant compte de la correction nécessaire pour respecter le critère de flèche.

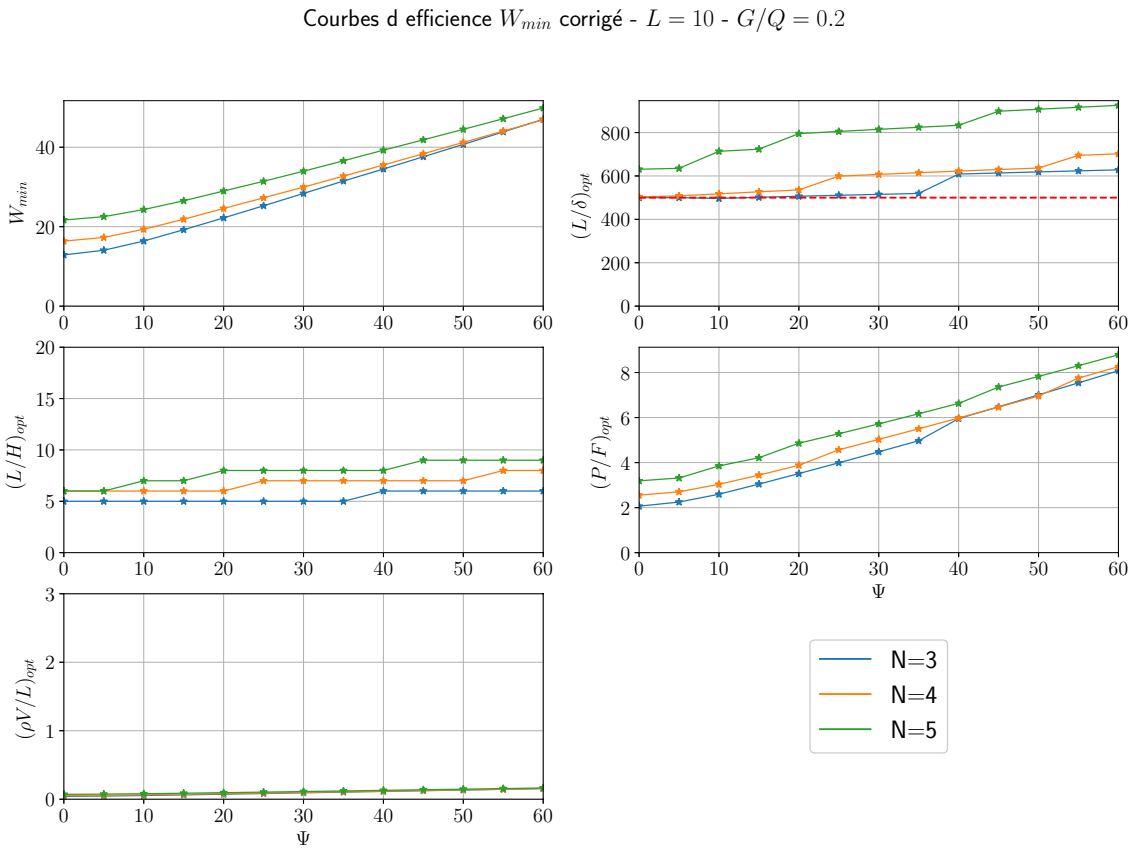


Figure IV.23 - Courbes d'efficience de l'indicateur de volume pour une portée de 10m [Illustration de l'auteur]

La Figure IV.24 affiche les courbes d'efficience de l'indicateur de volume pour une passerelle de 30m de portée. On constate que, à part pour des indicateurs de flambement très faibles, le critère de flèche est tout le temps respecté pour l'indicateur de volume optimal.

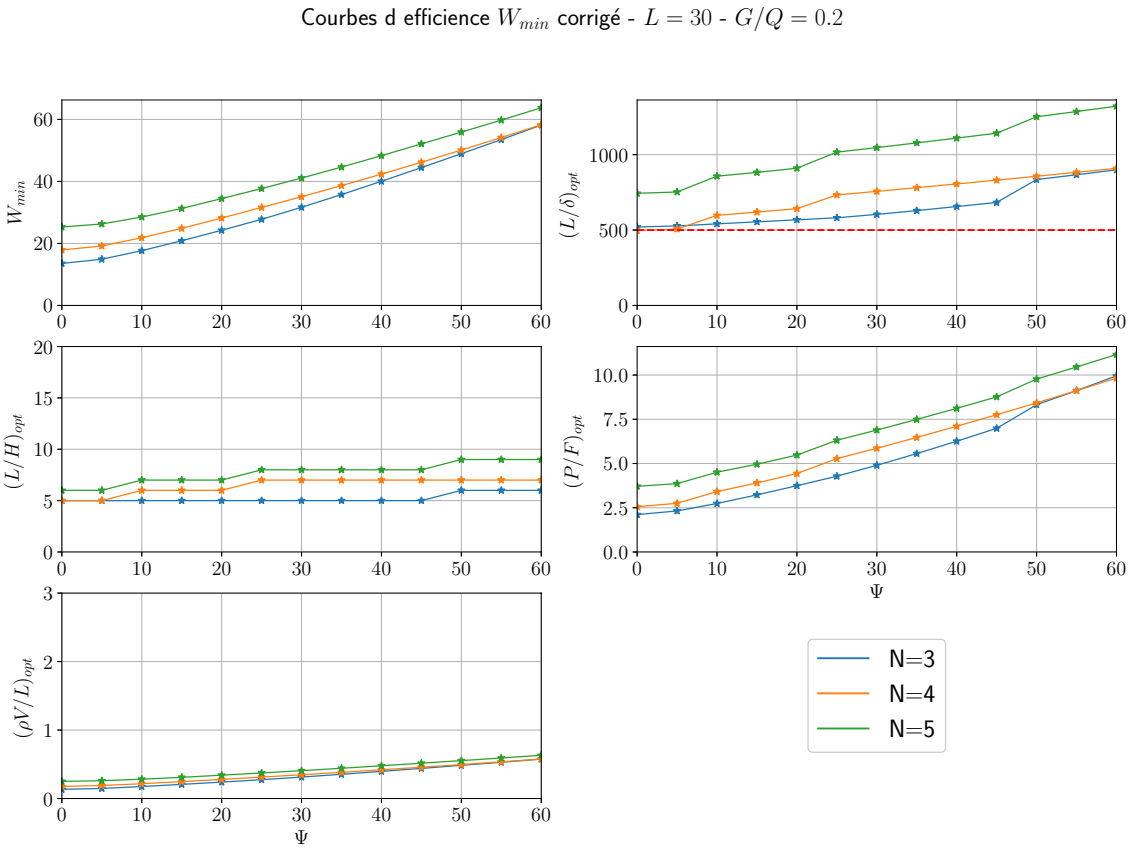


Figure IV.24 - Courbes d'efficience de l'indicateur de volume pour une portée de 30m [Illustration de l'auteur]

5. CONCLUSION

Lorsque les structures de tenségrité sont dimensionnées à l'ELU, un certain nombre de facteurs de sécurité sont ajoutés pour pondérer les actions sur la structure. Ceci a entre autres pour effet d'augmenter le niveau de précontrainte introduit, car il faut tenir compte d'éventuelles pertes de précontrainte.

Il faut également tenir compte d'un éventuel surplus de précontrainte, ce qui fait que les indicateurs de volume et d'efficacité matérielle augmentent, car l'effort normal dans les éléments est augmenté.

Dans le cadre d'un dimensionnement aux états-limites, on introduit également un nouveau nombre adimensionnel, baptisé indicateur de charge permanente, permettant de tenir compte du fait que certaines charges sont permanentes et réparties uniformément sur la structure tandis que d'autres sont des charges variables, qui peuvent se répartir aléatoirement le long du tablier et dont la distribution varie dans le temps.

L'introduction de ce nouvel indicateur et l'augmentation du niveau de précontrainte ont un effet favorable sur les déplacements. Premièrement parce que les déplacements dus aux charges permanentes ne sont plus pris en compte et deuxièmement car l'augmentation du niveau de précontrainte rend la structure plus rigide que précédemment.

Finalement, cette analyse a permis de voir que, contrairement à ce qu'on aurait pu penser pour des structures qui se déforment autant, les critères de dimensionnement aux états-limites ultimes sont presque tout le temps dimensionnants par rapport aux critères aux états-limites de service.

Cependant, ces résultats sont à prendre avec des pincettes, pour plusieurs raisons :

- L'analyse aux états-limites de service n'a pour l'instant tenu compte que du critère de flèche, il est probable que d'autres critères entrent en jeu et puissent être dimensionnants.
- Le critère de non-détente des câbles a pour l'instant été considéré comme un critère à l'ELU. Une analyse numérique et expérimentale plus approfondie du comportement des structures de tenségrité lorsque certains câbles sont détendus pourrait faire pencher la balance pour considérer ce critère à l'ELS plutôt qu'à l'ELU.
- Les coefficients introduits pour tenir compte de la perte ou du surplus de précontrainte doivent être confirmés par une analyse expérimentale, car ils dépendent certainement des assemblages et de la méthode d'introduction de la précontrainte.

Chapitre V DIMENSIONNEMENT D'UNE PASSERELLE

Dans ce chapitre, qui s'inspire de l'exemple de dimensionnement effectué par Lindy BOUCHER [4] pour des passerelles composées de modules prismatiques, on étudie un exemple pratique de dimensionnement d'une passerelle de tenségrité afin d'illustrer les résultats obtenus dans les sections précédentes et l'aide que peut apporter la théorie des indicateurs morphologiques dans un problème concret.

On s'intéressera au dimensionnement d'une passerelle de tenségrité de 30m de portée composée de simplex, dont le nombre de modules doit encore être défini.

1.DONNEES DU PROBLEME

Soit une passerelle de tenségrité composée de N simplex qu'on souhaite dimensionner à l'ELU en tenant compte de pertes et surplus de précontrainte et en respectant, à l'ELS, le critère de flèche de l'Eurocode :

$$\delta < \frac{L}{500}$$

Les données du problème sont les suivantes :

- La structure est hyperstatique
- La passerelle doit franchir une portée de 30m
- Les éléments sont répartis en trois catégories :
    - Les barres sont de forme circulaire creuse avec un diamètre ϕ_b et leur épaisseur vaut un dixième du diamètre : $m = 0.1$ et $q = I/A^2 = 0.363$
    - Les câbles de base sont de forme circulaire pleine avec un diamètre ϕ_{cb}
    - Les câbles longitudinaux sont de forme circulaire pleine avec un diamètre ϕ_{cl}
    - On souhaite dimensionner les sections avec la méthode « group »
- Tous les éléments sont composés du même matériau (de l'acier S235) qui possède les propriétés suivantes :
    - Poids volumique : $\rho = 77kN/m^3$
    - Contrainte admissible : $\sigma = 235MPa$
    - Module d'élasticité : $E = 210GPa$
    - L'indicateur de raideur vaut alors $E/\sigma \approx 900$
- Deux types d'actions s'appliquent sur la structure, en plus de son poids propre :
    - Le poids du tablier : $q_{perm} = 2kN/m$
    - Les charges d'exploitation : $q_v = 10kN/m$

2.DIMENSIONNEMENT

La charge externe totale, calculée à l'ELU vaut :

$$q_{ELU} = 1.35q_{perm} + 1.5q_v = 2.7 + 15 = 17.7[kN/m]$$

Ceci permet de déterminer l'indicateur de charge permanente :

$$\frac{G}{Q} = \frac{2.7}{15} = 0.18$$

La charge externe totale, calculée à l'ELS, revient à :

$$q_{ELU} = q_{perm} + q_v = 12[kN/m]$$

Celle-ci sera utilisée à la fin de cet exercice pour calculer la flèche maximale.

Sachant que l'indicateur de volume ne change quasiment pas avec l'indicateur de charge permanente, on utilisera les courbes d'efficience déterminées pour $G/Q = 0.2$. Il faudra cependant recalculer la flèche maximale pour s'assurer que le critère de flèche est respecté.

Pour une portée de 30m, on obtient une charge externe totale égale à

$$F = 531[kN]$$

On détermine les indicateurs de flambement et de poids propre :

$$\Psi = \frac{\sigma L}{\sqrt{qEF}} = 35.04$$

$$\Phi = \frac{\rho L}{\sigma} = 98.3 \times 10^{-4}$$

En utilisant les courbes d'efficience d'une passerelle de 30m de portée (voir Figure V.1), on trouve les élancements optimaux en fonction du nombre de simple :

- 3 simplex : $(L/H)_{opt} = 5$
- 4 simplex : $(L/H)_{opt} = 7$
- 5 simplex : $(L/H)_{opt} = 8$

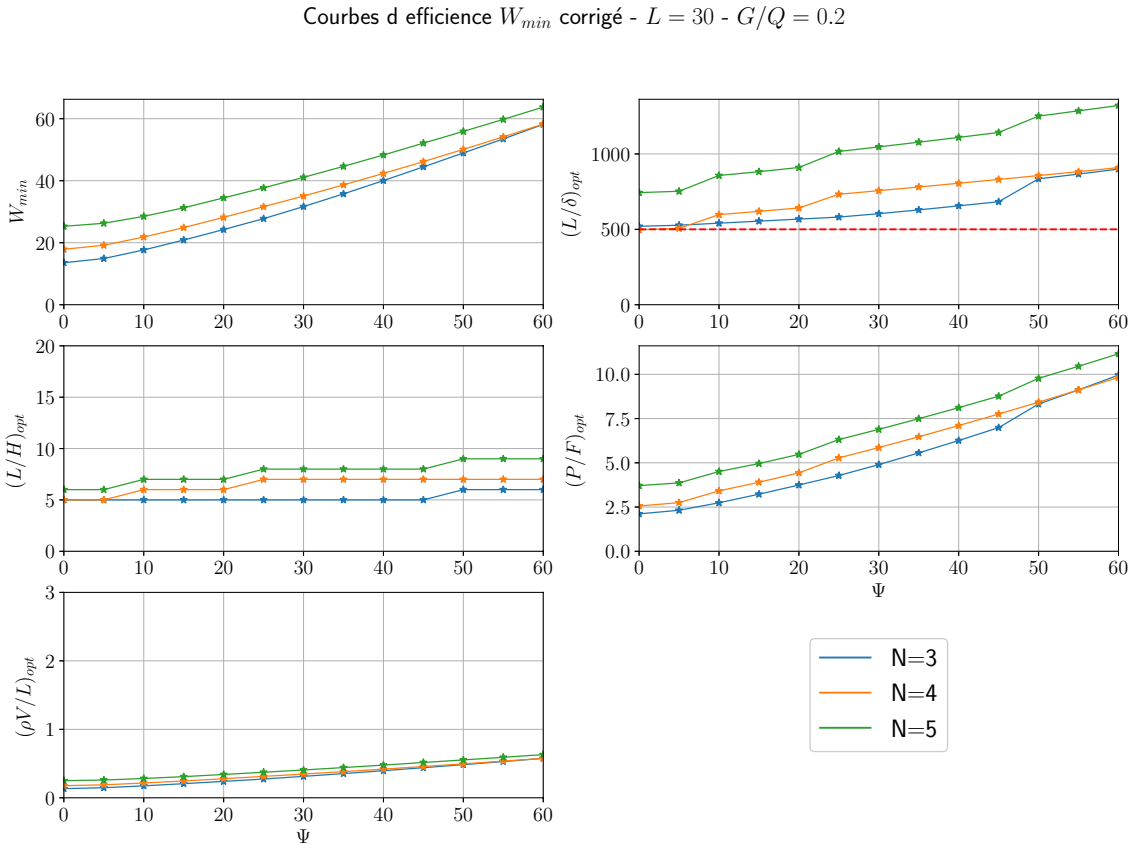


Figure V.1 - Courbes d'efficience de l'indicateur de volume pour L=30m [Illustration de l'auteur]

La passerelle composée de 3 simplex étant la plus optimale des trois, on se concentre sur celle-ci dans la suite des développements. Un élancement $(L/H)_{opt} = 5$ donne un indicateur de volume minimal $W_{min} = 35.7$ et un indicateur de précontrainte égal à $(P/F)_{opt} = 5.56$.

Ceci permet de déterminer le niveau de précontrainte qu'il faut introduire dans les barres pour s'assurer qu'aucun câble ne se détende malgré une perte de précontrainte pouvant aller jusqu'à 20% :

$$P/F = 5.56 \Rightarrow P = 2952[kN]$$

Et le volume total de matière vaudra :

$$V = \frac{WFL}{\sigma} = 2.42[m^3]$$

Le poids propre de la passerelle s'élève à :

$$\rho V = 2.42 * 77 \ = \ 186[kN]$$

Le pourcentage de poids propre par rapport aux charges extérieures vaut :

$$\frac{\rho V}{F} = \frac{186}{531} = 35.0\%$$

L'indicateur de déplacement de la structure, calculé à l'ELS, vaut 619, ce qui revient à un déplacement maximal qui vaut :

$$\delta = \frac{30}{619} = 48.5[mm]$$

Ce déplacement maximal se produit au nœud n°6 (voir ANNEXE C) pour le cas de charge affiché à la Figure V.2.

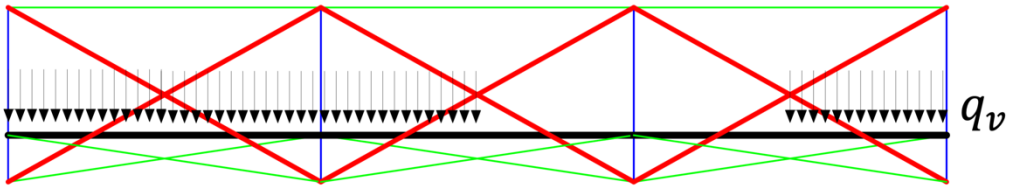


Figure V.2 - Cas de charge produisant le plus grand déplacement pour une structure à 3 simplex [Illustration de l'auteur]

En dimensionnant la structure, on obtient également les dimensions qu'il faut donner aux éléments :

- Barres : $\phi_b = 244mm$ avec une épaisseur de $24mm$
- Câbles de base : $\phi_{cb} = 59mm$
- Câbles longitudinaux : $\phi_{cl} = 71mm$

3. Influence du nombre de simplex

La Table 9 indique que la passerelle à 3 simplex est la plus optimale : c'est cette passerelle-là qui est la moins précontrainte et la moins volumineuse. Ses déplacements sont un peu plus élevés que pour les deux autres passerelles, mais le critère de flèche imposé est tout de même respecté.

En plus de cela, son élancement plus faible permet une plus grande hauteur de passage pour les piétons qui empruntent la passerelle.

	$H[m]$	$V[m^3]$	$\rho V[kN]$	$P[kN]$	$\delta[mm]$	$\rho V/F[\%]$
3 simplex	6	2.42	186	2952	48.5	35%
4 simplex	4.3	2.61	201	3436	39.0	38%
5 simplex	3.8	3.02	234	3977	28.3	44%

Table 9 - Caractéristiques des passerelles de tenségrité en fonction du nombre de simplex

UCLouvain ÉCOLE POLYTECHNIQUE DE LOUVAIN

CONCLUSION ET PERSPECTIVES

Ce mémoire confirme la faisabilité des structures de tenségrité pour des ouvrages de génie civil en adaptant l'outil numérique à des cas de charge aléatoires. Il fait suite à de nombreuses années de recherche autour de la tenségrité et constitue un pas de plus vers la construction d'une passerelle en tenségrité.

Après qu'Alexis BASTIEN et Quentin GRAVY aient mis au point une première méthode linéaire simplifiée, Marc ELIAERS a développé les bases d'un calcul non-linéaire plus précis. Jonas FERON a repris cette méthode l'année suivante, et y a lié un outil d'optimisation puissant : la théorie des indicateurs morphologiques. Enfin, Lindy BOUCHER a exploré la possibilité de construire une passerelle composée d'autres modules que le simplex, tout en intégrant la prise en compte du poids propre dans l'outil numérique.

La théorie des indicateurs morphologiques permet de réduire drastiquement le nombre de paramètres à considérer lors de l'optimisation des structures : le volume total de matière, le niveau de précontrainte, les déplacements et le poids propre ne dépendent plus que de cinq nombres adimensionnels, au plus.

Ceci permet d'établir une série de conditions qu'on cherchera à respecter lors de l'optimisation des structures, en n'utilisant plus que ces nombres adimensionnels. Ceci implique que les résultats obtenus sont valables pour deux structures dont tous les paramètres diffèrent, tant que leurs indicateurs morphologiques primaires sont identiques :

$$\begin{cases} min(W) = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi, \frac{P}{F}\right) \\ \frac{L}{\delta} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi, \frac{P}{F}\right) > 500 \\ \frac{P}{F} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi\right) < 50 \\ \frac{\rho V}{F} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi\right) < 3 \end{cases}$$

Lorsque les structures de tenségrité sont soumises à des charges statiques qui peuvent se répartir de manière aléatoire sur le tablier, le nombre de cas de charge à vérifier devient vite démesuré, ce qui rend le dimensionnement de la passerelle plus difficile. Le **Chapitre II** a exposé comment l'optimisation des structures était tout de même rendue possible en combinant trois stratégies :

1. En réduisant le nombre de cas de charge à vérifier.
2. En accélérant le processus d'ajustement de la précontrainte.
3. En augmentant la puissance de traitement disponible.

Pour appliquer la première stratégie, on fait appel au principe de superposition. Celui-ci permet de trouver une première approximation de l'effort maximal rencontré dans les éléments et les cas de charge qui les engendrent. Cependant, une correction de l'erreur due au principe de superposition est nécessaire pour obtenir des résultats suffisamment précis.

La deuxième stratégie est appliquée en changeant l'algorithme d'ajustement de la précontrainte : alors que l'ancien algorithme partait d'une précontrainte nulle et l'incrémentait petit à petit jusqu'à atteindre le niveau de précontrainte nécessaire, le nouvel algorithme part d'une structure très précontrainte. Celle-ci est donc très rigide, ce qui permet d'atténuer les effets du second ordre. Le comportement de la structure se rapproche alors d'un comportement linéaire et permet de déduire directement une valeur approximative de la précontrainte nécessaire, qui est ensuite ajustée en quelques itérations.

Enfin, l'outil de calcul numérique a été adapté afin de pouvoir être envoyé sur les clusters du CÉCI, permettant ainsi de lancer un grand nombre de calculs simultanément sur plusieurs processeurs différents.

Cette stratégie pourrait cependant être encore largement optimisée, en adaptant le code de calcul plus en profondeur et en utilisant MPI.

La modification de ces algorithmes offre de nombreuses perspectives : comme il est possible d'obtenir une première approximation des efforts internes et du niveau de précontrainte nécessaire en utilisant le principe de superposition et en partant d'une structure très rigide, on peut obtenir de manière beaucoup plus rapide qu'avant des valeurs approximatives pour dimensionner la structure.

Ce résultat pourrait être utilisé pour effectuer des premiers prédimensionnements rapides de structures de tenségrité et pourrait également permettre d'adapter l'outil numérique à un outil de calcul paramétrique, qui nécessite que les calculs soient effectués très rapidement.

La méthode utilisée dans ce mémoire pour ajuster le niveau de précontrainte pourrait également être élargie et permettre de trouver un scénario de précontrainte « optimal », qui n'est pas forcément celui utilisé à présent (précompression uniforme des barres). En n'imposant plus uniquement que le câble qui se détend le plus ait un effort normal nul pour le cas de charge qui le détend le plus, une idée serait d'imposer que tous les câbles atteignent un effort normal nul pour au moins un des cas de charge possibles.

Le Chapitre III a présenté les résultats de l'optimisation des structures de tenségrité soumises à des charges aléatoires. Cela a permis de montrer que, dans le cas d'une méthode d'optimisation « group », qui semble être la méthode d'optimisation la plus pertinente à ce jour, le cas de charge uniforme est le cas dimensionnant, tant pour le niveau de précontrainte que pour les sections.

Il a également permis de voir que la passerelle analysée est sujette à de grandes déformations dues à la torsion. En effet, les charges appliquées sur le tablier sont transmises aux nœuds supérieurs de la structure. La géométrie du simplex est telle que deux nœuds supérieurs adjacents sont légèrement décalés l'un par rapport à l'autre. Ceci a pour effet que les déplacements verticaux dus à une charge transmise en un nœud sont contrecarrés par une charge qui serait transmise au nœud supérieur adjacent, car ces deux charges font entrer la passerelle en torsion dans des directions opposées. Le cas de charge qui engendre les plus grands déplacements n'est donc pas le cas où tout le tablier est chargé uniformément mais bien celui où des charges ne sont transmises qu'à un nœud supérieur sur deux.

Finalement, le Chapitre IV a posé les bases d'un dimensionnement complet des structures de tenségrité, en tenant compte des directives de sécurité préconisées par les Eurocodes. Le risque d'une perte ou d'un surplus de précontrainte a également été intégré à l'outil numérique.

Cette analyse a fait ressortir que, contrairement à ce qu'on aurait pu penser, ce n'est pas souvent le critère de flèche qui est dimensionnant pour les structures de tenségrité : afin de tenir compte des pertes, la précontrainte introduite doit être plus élevée que le niveau minimum calculé pour qu'aucun câble ne se détende. Cela rend la passerelle plus rigide et limite ainsi les déplacements. En plus de cela, l'introduction de l'indicateur de charge permanente G/Q permet de tenir compte uniquement des déplacements dus aux charges variables, qui sont les seuls qui affecteront réellement le confort d'utilisation de la passerelle.

Ce chapitre a permis de constater que, dans le cas des structures de tenségrité optimisées avec la méthode « group », l'indicateur de charge permanente n'avait pratiquement pas d'impact sur l'indicateur de volume ou l'indicateur de précontrainte. Il n'y a dans ce cas qu'une seule des 4 conditions présentées plus haut qui change :

$$\frac{L}{\delta} = f\left(\frac{L}{H}, \Psi, \frac{E}{\sigma}, \Phi, \frac{P}{F}, \frac{G}{Q}\right) > 500$$

Évidemment, beaucoup de défis restent encore à relever avant de pouvoir se lancer dans la construction d'une vraie passerelle piétonne en tenségrité.

Afin de valider les résultats obtenus avec l'outil numérique durant ces cinq dernières années, une étape primordiale qu'il reste à franchir est d'entrer dans le concret, en construisant des modèles réduits de la passerelle en laboratoire.

Ceci permettra non seulement de vérifier que les calculs effectués par l'outil numérique se rapprochent suffisamment de la réalité, mais également de confirmer ou d'infirmer les valeurs des coefficients de sécurité choisis pour exprimer la perte ou le surplus de précontrainte. L'Eurocode demande en effet de vérifier par une étude expérimentale approfondie tous les cas qu'il ne couvre pas et pour lequel il a fallu définir soi-même la méthode de calcul.

Une autre piste de recherche pour les années à venir serait de s'intéresser au comportement dynamique de ces passerelles. Jusqu'à présent, toutes les charges appliquées sur la structure ont été considérées comme des charges statiques, qu'elles soient aléatoires ou uniformément réparties sur le tablier. Une étude dynamique approfondie est nécessaire afin de s'assurer que le passage des piétons ne fasse pas entrer la passerelle en résonance, ce qui serait nuisible pour le confort d'utilisation, voire pour la résistance mécanique des éléments.

Il existe également de nombreuses pistes d'amélioration de l'outil numérique. Celui-ci pourrait intégrer des typologies autres que le simplex, éventuellement assemblées pour former autre chose qu'une passerelle piétonne (un dôme, par exemple). La méthode de résolution non-linéaire et la théorie des indicateurs morphologiques développés pour les structures de tenségrité pourrait également s'appliquer à d'autres familles de structures.

Il serait intéressant de développer une méthode qui permette de trouver le scénario de précontrainte optimal, afin de voir dans quelle mesure le scénario de précompression uniforme des barres s'en éloigne. Enfin, une analyse plus poussée du comportement de la passerelle lorsqu'un ou plusieurs câbles sont détendus permettrait d'évaluer si le critère de non-détente des câbles doit être considéré comme un critère de dimensionnement aux états-limites de service ou aux états-limites ultimes.

Pour conclure ce mémoire, j'aimerais faire part de mon souhait que la tenségrité gagne en notoriété dans les années à venir. Je suis convaincu que ce principe à la fois élégant et novateur réserve encore de nombreuses découvertes et possède de nombreux domaines d'application qui n'ont pas encore été explorés. Quoiqu'il en soit, je suis ravi d'avoir pu apporter ma pierre, si petite soit-elle, à l'édifice et d'avoir pu faire avancer la recherche liée à la tenségrité jusqu'à son état actuel.

ANNEXE A MINIMISATION D'ENERGIE

L'état d'équilibre d'une structure correspond à la déformation pour laquelle l'énergie potentielle totale est minimisée. En observant plus en détail le problème exposé au Chapitre I3.3.3. , on a [15]:

- $U = \frac{1}{2}\bar{d}^T \bar{K}_0 \bar{d}$, l'énergie élastique interne de la structure
- $W_{ext} = \bar{d}^T \bar{F}_{ext}$, le travail exercé par les forces externes
- $\Pi = U - W_{ext} = \frac{1}{2}\bar{d}^T \bar{K}_0 \bar{d} - \bar{d}^T \bar{F}_{ext}$, l'énergie potentielle totale.

Afin de minimiser cette énergie potentielle, on cherche le vecteur $\bar{d}$ tel que :

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \bar{d}} = 0 \Leftrightarrow \bar{K}_0 \bar{d} = \bar{F}_{ext}$$

Lorsque les contraintes aux appuis sont ajoutées au problème, on cherche toujours à minimiser l'énergie potentielle du système avec cette fois-ci une contrainte supplémentaire :

$$\min_{\bar{d}}(\Pi) = \frac{1}{2}\bar{d}^T \bar{K}_0 \bar{d} - \bar{d}^T \bar{F}_{ext} \qquad avec \qquad \bar{c}\bar{d} = \bar{D}$$

Le Lagrangien s'exprime alors en réécrivant la fonction des contraintes $\bar{g} = \bar{c}\bar{d} - \bar{D} = 0$:

$$\mathrm{L}(\bar{d}, \bar{r}) = \Pi(\bar{d}) + \bar{g}^T(\bar{d})\bar{r} \qquad \Leftrightarrow \qquad \mathrm{L}(\bar{d}, \bar{r}) = \frac{1}{2}\bar{d}^T \bar{K}_0 \bar{d} - \bar{d}^T \bar{F}_{ext} + \left(\bar{c}\bar{d} - \bar{D}\right)^T \bar{r}$$

Finalement, le problème de minimisation sous contrainte peut s'écrire : $\nabla \mathrm{L}(\bar{d}, \bar{r}) = 0$, donc :

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \bar{d}} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \bar{K}_0 \bar{d} - \bar{F}_{ext} + \bar{c}^T \bar{r} = 0 \\ \dfrac{\partial L}{\partial \bar{r}} = 0 \qquad \Leftrightarrow \qquad \bar{\mathrm{c}}\bar{\mathrm{d}} - \bar{\mathrm{D}} = 0 \end{cases}$$

ANNEXE B MATRICE DE RAIDEUR NON-LINEAIRE

Les déformations des structures de tenségrité ne sont pas parfaitement proportionnelles à la charge appliquée dessus. On dit alors que celles-ci ont un comportement non-linéaire, comme cela a été expliqué au Chapitre I. Leur raideur, qui exprime la relation entre la charge appliquée et les déformations, n'est donc pas constante comme c'est le cas pour les structures linéaires (treillis, par exemple).

Il faut tenir compte de cette non-linéarité dans l'expression de la matrice de raideur. Cette section expose la démonstration de la matrice de raideur adaptée aux structures non-linéaires par Pierre LATTEUR [11] et s'inspire largement de son travail.

Pour commencer, une hypothèse importante est posée concernant le comportement des matériaux : les déformations des éléments sont suffisamment faibles pour que les matériaux restent dans un domaine de comportement élastique. Concrètement, on suppose que

$$\frac{L_{def} - L_0}{L_0} \leq 0.01$$

Où L_0 est la longueur initiale de l'élément et L_{def} sa longueur déformée. Pour l'acier, cela signifie que la contrainte ne dépasse pas $2100MPa$.

On considère ensuite un élément isolé d'extrémités i et j dans un repère global 2D. Afin de faciliter la compréhension, l'origine du repère sera fixée au nœud i. Celui-ci est donc dessiné à la même position dans la configuration initiale et la configuration déformée.

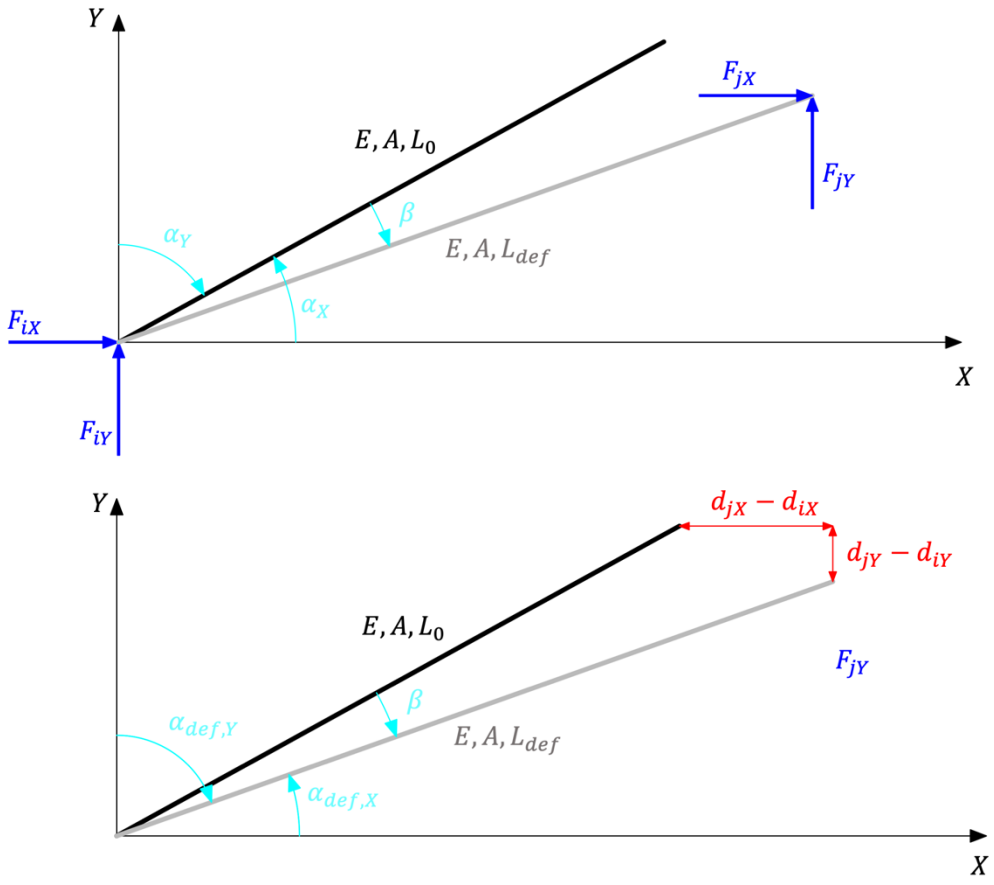


Figure V.3 - Elément isolé et sa déformée dans un repère global 2D [Illustration de l'auteur inspiré de [4]]

On peut écrire les longueurs initiale et déformée de l'élément :

$$\begin{cases} L_0 = \sqrt{(X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2} \\ L_{def} = \sqrt{\left((X_j - X_i) + (d_{jX} - d_{iX})\right)^2 + \left((Y_j - Y_i) + (d_{jY} - d_{iY})\right)^2} \end{cases}$$

En développant l'expression de L_{def} on obtient :

$$L_{def}^2 = (X_j - X_i)^2 + (Y_j - Y_i)^2 + \left[2(X_j - X_i)(d_{jX} - d_{iX}) + (d_{jX} - d_{iX})^2\right] + \left[2(Y_j - Y_i)(d_{jY} - d_{iY}) + (d_{jY} - d_{iY})^2\right]$$

Ou encore, en y intégrant L_0 :

$$L_{def}^2 = L_0^2 + \left[2(X_j - X_i)(d_{jX} - d_{iX}) + (d_{jX} - d_{iX})^2\right] + \left[2(Y_j - Y_i)(d_{jY} - d_{iY}) + (d_{jY} - d_{iY})^2\right] \quad \textit{(1)}$$

Si on fait l'hypothèse que $L_{def}/L_0 \leq 1.01$ on a :

$$L_{def}^2 - L_0^2 = 2L_0(L_{def} - L_0)\frac{L_{def} + L_0}{2L_0} \cong 2L_0(L_{def} - L_0) \quad \textit{(2)}$$

Si on combine les équations ***(1)*** et ***(2)***, on élimine $L_{def}^2 - L_0^2$:

$$L_{def} - L_0 = \frac{X_j - X_i}{L_0}(d_{jX} - d_{iX}) + \frac{(d_{jX} - d_{iX})^2}{2L_0} + \frac{Y_j - Y_i}{L_0}(d_{jY} - d_{iY}) + \frac{(d_{jY} - d_{iY})^2}{2L_0}$$

Ou encore

$$L_{def} - L_0 = \mathrm{c_X}(d_{jX} - d_{iX}) + \frac{(d_{jX} - d_{iX})^2}{2L_0} + \mathrm{c_Y}(d_{jY} - d_{iY}) + \frac{(d_{jY} - d_{iY})^2}{2L_0} \quad \textit{(3)}$$

Avec :

$$\begin{cases} c_X = cos\,\alpha_X = \dfrac{X_j - X_i}{L_0} \\ c_Y = cos\,\alpha_Y = \dfrac{Y_j - Y_i}{L_0} \end{cases}$$

Comme le matériau est supposé avoir un comportement linéaire, on peut calculer l'effort normal N dans l'élément grâce à la loi de Hooke :

$$\sigma = \varepsilon E$$

Où σ est la contrainte dans l'élément et $\varepsilon = (L_{def} - L_0)/L_0$ son allongement relatif. L'effort normal N vaut :

$$N = \sigma A = \varepsilon E A = EA\frac{L_{def} - L_0}{L_0}$$

Et en y injectant l'équation ***(3)*** :

$$N = \frac{EA}{L_0}\left[\mathrm{c_X}(d_{jX} - d_{iX}) + \frac{(d_{jX} - d_{iX})^2}{2L_0} + \mathrm{c_Y}(d_{jY} - d_{iY}) + \frac{(d_{jY} - d_{iY})^2}{2L_0}\right] \quad \textit{(4)}$$

Ensuite, si l'élément est sujet à un effort normal N, on souhaite vérifier l'équilibre des nœuds i et j qui sont soumis respectivement aux forces externes F_i et F_j qui se décomposent en coordonnées (F_{iX}, F_{iY}) et (F_{jX}, F_{jY}) dans le repère 2D global.

Ainsi, l'équilibre du nœud i s'écrit :

$$\begin{cases} F_{iX} = -N\cos\alpha_{def,X} = -N\left(\dfrac{(X_i - X_j) + (d_{jX} - d_{iY})}{L_{def}}\right) \\ F_{iY} = -N\cos\alpha_{def,Y} = -N\left(\dfrac{(Y_i - Y_j) + (d_{jY} - d_{iY})}{L_{def}}\right) \end{cases} \quad (5)$$

Et l'équilibre du nœud j s'écrit :

$$\begin{cases} F_{jX} = N\cos\alpha_{def,X} = N\left(\dfrac{(X_i - X_j) + (d_{jX} - d_{iY})}{L_{def}}\right) \\ F_{jY} = N\cos\alpha_{def,Y} = N\left(\dfrac{(Y_i - Y_j) + (d_{jY} - d_{iY})}{L_{def}}\right) \end{cases} \quad (6)$$

En considérant $L_0/L_{def} \cong 1$ tel que :

$$\begin{cases} \dfrac{X_j - X_i}{L_{def}} = \dfrac{X_j - X_i}{L_0} = \cos\alpha_X = c_X \\ \dfrac{Y_j - Y_i}{L_{def}} = \dfrac{Y_j - Y_i}{L_0} = \cos\alpha_Y = c_Y \end{cases}$$

On peut ensuite écrire ***(5)*** et ***(6)*** sous forme matricielle pour obtenir le système d'équations d'équilibre de l'élément :

$$\begin{bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \end{bmatrix} = N\begin{bmatrix} -c_X \\ -c_Y \\ c_X \\ c_Y \end{bmatrix} + \frac{N}{L_0}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{iX} \\ d_{iY} \\ d_{jX} \\ d_{jY} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Dans le premier terme à droite de cette expression, on peut remplacer la valeur de l'effort normal par l'expression développée à l'équation ***(4)***. L'expression du premier terme de cette matrice devient alors :

$$-Nc_X = \frac{EA}{L_0}\left[-c_X(d_{jX} - d_{iX}) - c_Y(d_{jY} - d_{iY}) - \frac{(d_{jX} - d_{iX})^2}{2L_0} - \frac{(d_{jY} - d_{iY})^2}{2L_0}\right]c_X \quad (8)$$

Et en développant l'équation ***(8)*** :

$$-Nc_X = \frac{EA}{L_0}\left[-c_X^2(d_{jX} - d_{iX}) - c_Y c_X(d_{jY} - d_{iY}) - \frac{c_X}{2L_0}\left((d_{jX} - d_{iX})^2 + (d_{jY} - d_{iY})^2\right)\right] \quad (9)$$

En supposant des déformations modérées, on ne peut peut-être pas se permettre de négliger les termes $|\Delta d_X|/L_0 < 1$ et $|\Delta d_Y|/L_0 < 1$ avec $\Delta d_X = (d_{jX} - d_{iX})$ et $\Delta d_Y = (d_{jY} - d_{iY})$. Cependant, ce terme étant tout de même petit, on peut se permettre de négliger $|\Delta d_X|^2 \ll 1$ et $|\Delta d_Y|^2 \ll 1$. Ainsi, on peut simplifier l'équation ***(9)*** en négligeant le troisième terme à droite :

$$c_X\frac{(\Delta d_X^2 + \Delta d_Y^2)}{2L_0} \cong 0$$

Ce qui simplifie l'équation ***(9)*** :

$$-Nc_X = \frac{EA}{L_0}\left[-c_X^2(d_{jX} - d_{iX}) - c_X c_Y(d_{jY} - d_{iY})\right]$$

En répétant cette opération pour les autres termes de la matrice, on obtient la matrice simplifiée :

$$N\begin{bmatrix} -c_X \\ -c_Y \\ c_X \\ c_Y \end{bmatrix} = \frac{EA}{L_0}\begin{bmatrix} c_X^2 & c_X c_Y & -c_X^2 & c_X c_Y \\ c_X c_Y & c_Y^2 & -c_X c_Y & -c_Y^2 \\ -c_X^2 & -c_X c_Y & c_X^2 & c_X c_Y \\ -c_X c_Y & -c_Y^2 & c_X c_Y & c_Y^2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d_{iX} \\ d_{iY} \\ d_{jX} \\ d_{jY} \end{bmatrix}$$

Ceci permet de déduire le système d'équations d'équilibre de l'élément :

$$\underbrace{\begin{bmatrix} F_{iX} \\ F_{iY} \\ F_{jX} \\ F_{jY} \end{bmatrix}}_{\bar{F}_{ext}} = \underbrace{\left\{\frac{EA}{L_0}\begin{bmatrix} c_X^2 & c_X c_Y & -c_X^2 & c_X c_Y \\ c_X c_Y & c_Y^2 & -c_X c_Y & -c_Y^2 \\ -c_X^2 & -c_X c_Y & c_X^2 & c_X c_Y \\ -c_X c_Y & -c_Y^2 & c_X c_Y & c_Y^2 \end{bmatrix} + \frac{N}{L_0}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}}_{\bar{K}_{loc}} \underbrace{\begin{bmatrix} d_{iX} \\ d_{iY} \\ d_{jX} \\ d_{jY} \end{bmatrix}}_{\bar{d}_{loc}}$$

Ou, sous forme vectorielle :

$$\bar{F}_{ext} = \bar{K}_{loc}\bar{d}_{loc}$$

Avec

- $\bar{F}_{ext}$ le vecteur des forces externes appliquées aux nœuds, de dimension 6×1 en trois dimensions.
- $\bar{K}_{loc}$ la matrice de raideur locale de l'élément, de dimension 6×6 en trois dimensions.
- $\bar{d}_{loc}$ le vecteur des déplacements des nœuds de l'élément, de dimension 6×1 en trois dimensions.

La matrice de raideur locale de l'élément est maintenant composée de deux termes : un terme « élastique » et un terme « géométrique ». Le terme géométrique dépend de l'effort interne et donc des déplacements aux nœuds. Le lecteur attentif remarquera que si ces déplacements sont suffisamment petits que pour négliger ce terme « géométrique », on retrouve simplement l'expression de la matrice de raideur linéaire.

Comme la méthode non-linéaire repose sur un principe d'avancement dans la solution, il faudra recalculer la matrice de raideur à chaque itération k :

$$\bar{K}_{k,loc} = \frac{EA}{L_k}\begin{bmatrix} c_X^2 & c_X c_Y & -c_X^2 & c_X c_Y \\ c_X c_Y & c_Y^2 & -c_X c_Y & -c_Y^2 \\ -c_X^2 & -c_X c_Y & c_X^2 & c_X c_Y \\ -c_X c_Y & -c_Y^2 & c_X c_Y & c_Y^2 \end{bmatrix} + \frac{N_k}{L_k}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Avec :

$$\begin{cases} c_X = cos\,\alpha_X = \dfrac{X_{j,k} - X_{i,k}}{L_0} \\ c_Y = cos\,\alpha_Y = \dfrac{Y_{j,k} - Y_{i,k}}{L_0} \end{cases}$$

ANNEXE C NUMEROTATION DES NŒUDS ET DES ELEMENTS

Cette annexe montre la manière dont les nœuds et les éléments d'une passerelle composée de 3 simplex sont numérotés. La numérotation se fait de la même manière pour les passerelles à 4 ou 5 simplex.

C.1. NUMEROTATION DES NŒUDS

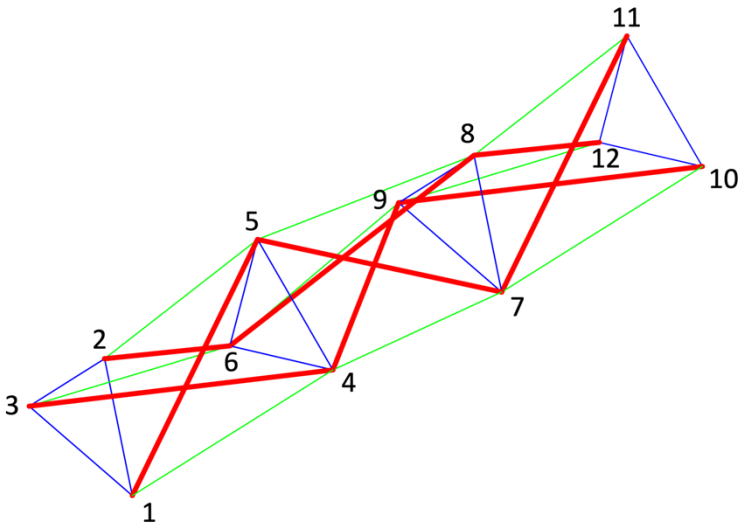


Figure V.4 - Numérotation des nœuds pour une structure à trois simplex [Illustration de l'auteur]

C.2. NUMEROTATION DES ELEMENTS

C.2.1 BARRES

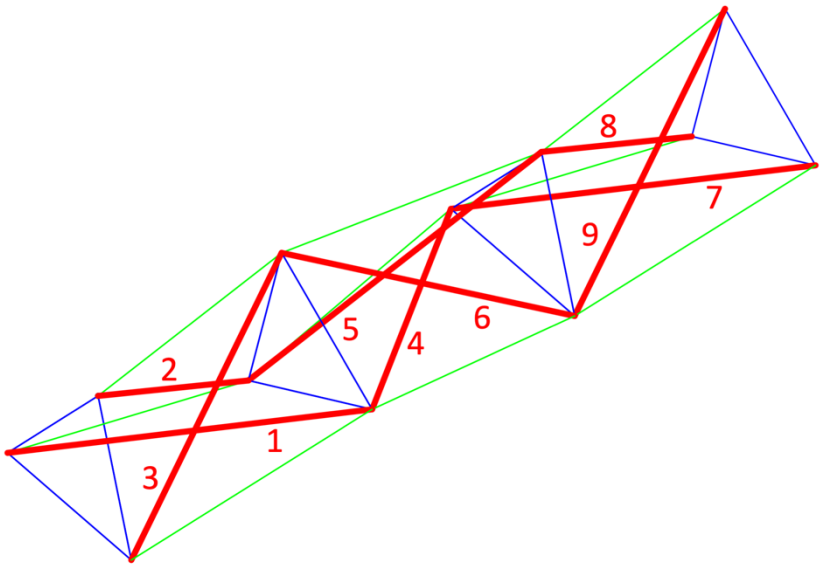


Figure V.5 - Numérotation des barres [Illustration de l'auteur]

C.2.2 CABLES DE BASE

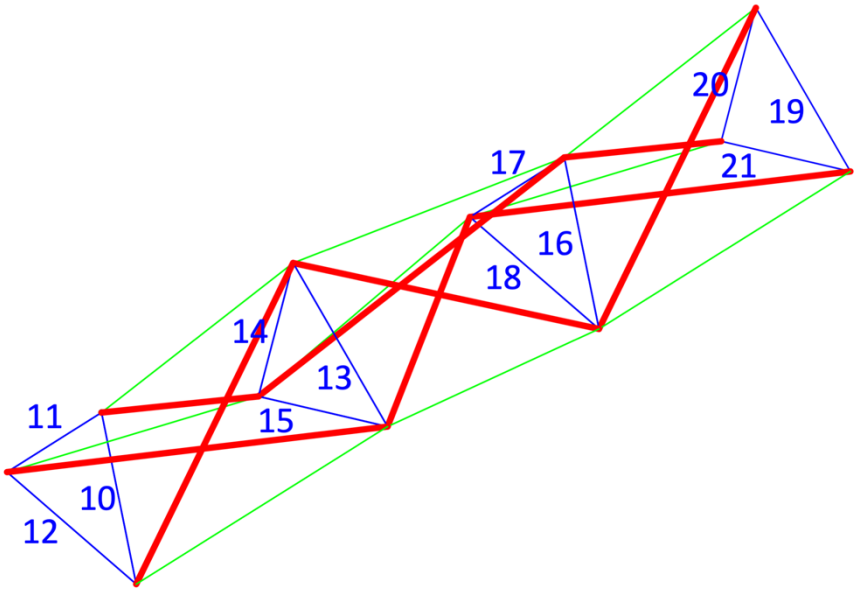


Figure V.6 - Numérotation des câbles de base [Illustration de l'auteur]

C.2.3 CABLES LONGITUDINAUX

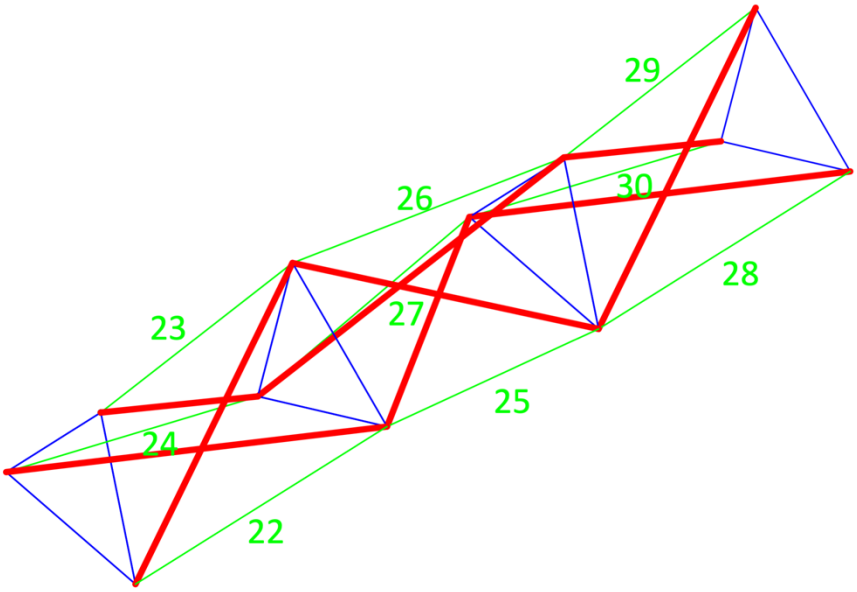


Figure V.7 - Numérotation des câbles longitudinaux [Illustration de l'auteur]

ANNEXE D ANALOGIE AVEC LA THEORIE DES GROUPES

Cette section n'a pas de réelle utilité dans le cadre de ce mémoire. Il s'agit d'une tentative de lier deux domaines à priori très éloignés : d'une part, la théorie des groupes [22], une discipline mathématique assez abstraite et d'autre part l'analyse des structures, une discipline d'ingénieur beaucoup plus concrète. Ces considérations ayant été la base de réflexion des développements fournis au Chapitre II, il a été jugé utile de les intégrer en annexe, bien que leur absence n'entraverait en rien la compréhension de ce mémoire.

Le principe est le suivant : pour n'importe quelle structure (une structure de tenségrité, par exemple), on s'intéresse à l'ensemble des cas de charge qui peuvent s'appliquer sur la structure. Par la suite, cet ensemble sera noté $\mathcal{C}$.

Sur cet ensemble, on définit ensuite l'opérateur $+$ de la manière suivante : si $A, B \in \mathcal{C}$, alors $A + B \in \mathcal{C}$ correspond à l'application simultanée des cas de charge A et B sur la structure. Cet opérateur permet de définir une structure de groupe pour l'ensemble $\mathcal{C}$:

- Loi de composition interne : $\forall A, B \in \mathcal{C},\ A + B \in \mathcal{C}$: une application de plusieurs cas de charge simultanément est également un cas de charge
- Associativité : $(A + B) + C = A + (B + C)$, les cas de charge étant appliqués simultanément, les parenthèses ne changent pas le résultat
- Élément neutre : le cas de charge nul, noté 0, pour lequel aucune force n'est appliquée à la structure, est tel que $\forall A \in \mathcal{C}, A + 0 = A = 0 + A$
- Symétrique : le symétrique d'un cas de charge correspond simplement au cas de charge opposé, qui aura pour effet d'équilibrer les forces sans que cela n'impacte la structure. Ce symétrique est noté $-A$ et est tel que $\forall A \in \mathcal{C}, \exists -A \in \mathcal{C} : -A + A = 0 = A + (-A)$

En plus de cela, le fait que les deux cas de charge soient appliqués simultanément lorsqu'on applique l'opérateur $+$ a pour conséquence que cette opération est commutative : $\forall A, B \in \mathcal{C}, A + B = B + A$. L'ensemble des cas de charge appliqués à une structure peut donc être considéré comme un groupe abélien.

On peut aller plus loin dans cette réflexion, en considérant le corps commutatif $\mathbb{R}$, qui est l'ensemble des réels, et montrer que le groupe abélien $(\mathcal{C}, +, 0)$ est en réalité un $\mathbb{R}$-espace vectoriel lorsqu'il est muni de la loi de composition externe que nous noterons $(*)$. Concrètement, cette loi de composition externe consiste simplement à multiplier un cas de charge du groupe $\mathcal{C}$ par un scalaire du groupe $\mathbb{R}$. Par exemple pour $A \in \mathcal{C}$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, l'opération $\lambda * A$ exprime que chaque force qui compose le cas de charge A est multipliée par un facteur λ.

Tout ceci permet à présent de donner à $\mathcal{C}$ une structure d'espace vectoriel, car il en possède toutes les propriétés :

- Distributivité à gauche : $\forall A, B \in \mathcal{C}, \forall \alpha \in \mathbb{R} : \alpha * (A + B) = \alpha * A + \alpha * B$
- Distributivité à droite : $\forall A \in \mathcal{C}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : \alpha\beta * A = \alpha * (\beta * A)$
- Existence d'un neutre multiplicatif : $\forall A \in \mathcal{C}, \exists 1 \in \mathbb{R} : 1 * A = A$

Pour une structure quelconque, l'ensemble des cas de charge qui peuvent s'appliquer dessus constitue donc un espace vectoriel. Celui-ci est de dimension infinie, car les charges peuvent s'appliquer sur une infinité de points de la structure, ce qui engendre une infinité de cas de charge linéairement indépendants.

Cependant, dans le cadre de ce mémoire, toutes les structures considérées étaient constituées de barres rotulées et les charges ne s'appliquaient qu'aux nœuds. Cette simplification engendre un espace $\mathcal{C}$ de dimension finie $3N$, où N est le nombre de nœuds de la structure (si on considère la possibilité d'appliquer des moments aux nœuds, on obtient un espace de dimension $6N$). Si on ne considère que des charges

verticales, cette dimension se réduit à N. Dans la suite de cette section, l'attention sera portée sur ces espaces de dimension finie N.

L'objectif est à présent de définir une base de cet espace vectoriel. Ceci semble assez simple intuitivement, si on définit les N cas de charge A_j^1 comme une force verticale unitaire appliquée au nœud j. Il est assez évident de voir que cette famille de cas de charge est linéairement indépendante et génératrice :

$$\forall A \in \mathcal{C}, \exists \alpha_1, \dots \alpha_N \in R : \mathrm{A} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j A_j^1$$

Enfin, on définit le produit scalaire entre deux vecteurs de $\mathcal{C}$ comme suit, pour $\mathrm{A} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j A_j^1$ et $\mathrm{B} = \sum_{j=1}^{N} \beta_j A_j^1$:

$$\langle \bullet, \bullet \rangle : \mathcal{C} \times \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R} : (A, B) \longrightarrow \sum_{j=1}^{N} \alpha_j \beta_j$$

Ceci permet d'introduire la notion d'orthogonalité entre deux cas de charge, et de voir que, trivialement, deux cas de charge représentant une force unitaire appliquée en deux nœuds différents sont orthogonaux :

$$\left\langle A_j^1, A_i^1 \right\rangle = 0$$

Sur cette structure, on définit ensuite trois types d'applications, permettant d'exprimer la réponse de la structure en termes d'appuis, d'efforts internes et de déplacements. Ces applications sont les suivantes :

$$r_k : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R} : A \longrightarrow r_k^A \qquad N_i : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R} : A \longrightarrow N_i^A \qquad \delta_j : \mathcal{C} \longrightarrow \mathbb{R} : A \longrightarrow \delta_j^A$$

Où les indices k, i et j portent respectivement sur les réactions d'appui, les éléments et les nœuds de la structure. Les valeurs r_k^A, N_i^A, δ_j^A représentent respectivement la réaction d'appui k, l'effort normal dans l'élément i et le déplacement vertical du nœud j sous l'effet du cas de charge A. Par la suite, par souci de généralisation, on notera f une quelconque application parmi celles présentées plus haut.

Dans le cadre des structures au comportement linéaire, on observera que ces applications sont elles-mêmes des applications linéaires, c'est-à-dire :

$$\forall A, B \in \mathcal{C}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} : f(\alpha * A + \beta * B) = \alpha f(A) + \beta f(B)$$

Cette propriété de linéarité des applications f définies plus haut exprime en réalité la validité du principe de superposition. Celle-ci n'est pas vérifiée pour les structures de tenségrité, bien que ce mémoire ait montré que le principe de superposition peut s'appliquer dans une certaine mesure.

Maintenant, on associe à chacune de ces applications f une relation d'équivalence sur deux éléments de $\mathcal{C}$ notée $\mathcal{R}_f$ et qui se définit comme suit, pour $A, B \in \mathcal{C}$:

$$A \mathcal{R}_f B \iff f(A) \text{ et } f(B) \text{ sont de même signe}$$

Il est assez aisé de vérifier qu'il s'agit bien d'une relation d'équivalence, $\forall A, B, C \in \mathcal{C}$:

- **Réflexivité** : $A \mathcal{R}_f A$
- **Symétrie :** $A \mathcal{R}_f B \iff B \mathcal{R}_f A$
- **Transitivité :** Si $A \mathcal{R}_f B$ et $B \mathcal{R}_f C$ alors $A \mathcal{R}_f C$

Enfin, cette relation d'équivalence permet de définir l'application quotient, qui renvoie chaque cas de charge sur sa classe d'équivalence :

$$\pi_f : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{C}/\mathcal{R}_f : A \longrightarrow \bar{A}$$

Le résultat de l'application f étant soit positif, soit négatif (si on néglige le cas de charge nul), l'espace quotient $\mathcal{C}/\mathcal{R}_f$ sera de dimension 2, et chaque cas de charge sera renvoyé sur sa classe d'équivalence. Prenons maintenant pour exemple que l'application f soit l'application N_i, qui renvoie chaque cas de charge sur la valeur de l'effort normal qu'il engendrera dans l'élément i.

Si on souhaite définir quel cas de charge est le plus défavorable en termes d'effort normal, il faut alors observer les classes d'équivalence des éléments A_j^1 de la base de $\mathcal{C}$. Si on souhaite analyser l'effort maximal de compression dans cet élément, on observe alors la classe d'équivalence des éléments pour lesquels $N_i(A_j^1) < 0$. Si on définit pour chaque élément de la base un scalaire « maximum » m_j qui représente la force maximale qu'on peut appliquer sur le nœud j et un scalaire « minimum » n_j qui représente la force minimale qu'on peut appliquer sur le même nœud (ce scalaire peut être négatif si cette force minimale est dirigée vers le haut), on peut finalement définir le cas de charge le plus défavorable pour la compression dans l'élément i , qui vaudra

$$\sum_{N_i(A_j^1)<0} m_j A_j^1 + \sum_{N_i(A_k^1)>0} n_k A_k^1$$

Avec le deuxième terme qui sera souvent nul (si on ne considère que des charges dirigées vers le bas). Inversement, si on souhaite déterminer le cas de charge qui engendre la plus grande traction dans l'élément, il faudra prendre :

$$\sum_{N_i(A_j^1)>0} m_j A_j^1 + \sum_{N_i(A_k^1)<0} n_k A_k^1$$

Ainsi, les éléments de la base de $\mathcal{C}$ qui se retrouvent dans une même classe d'équivalence indiqueront quelle combinaison de cas de charge de la base il faut prendre pour mesurer l'effet maximum d'une certaine application, que ce soit pour connaître une réaction aux appuis, un effort interne ou un déplacement.

Cette réflexion n'offre pas spécialement de nouvelles perspectives en termes de méthodes de calcul, mais permet de faire des analogies entre des principes courants dans l'analyse des structures tels que le principe de superposition ou la théorie des lignes d'influence, et la théorie mathématique abstraite de la théorie des groupes. Cette théorie allant beaucoup plus loin que les quelques éléments exposés ici, peut-être qu'une recherche plus approfondie permettrait d'établir des liens plus intéressants entre les deux.

ANNEXE E INFLUENCE DE LA PRECONTRAINTE ET DE LA CHARGE APPLIQUEE SUR LA LINEARITE DE LA STRUCTURE

Cette annexe vise à exposer plus en détail l'effet qu'auront la charge appliquée et la précontrainte sur la rigidité de la structure et sur son comportement non-linéaire. En effet, on peut faire l'hypothèse que dans des domaines de charge ou de précontrainte élevées, les structures de tenségrité auront un comportement qui se rapproche fortement d'un comportement linéaire. Cet effet sera appelé pseudo-linéarité.

E.1. INFLUENCE DE LA CHARGE EXTERNE

La première constatation appuyant cette pseudo-linéarité est le fait que les efforts internes dans les éléments de la structure ont un comportement « de plus en plus linéaire » au fur et à mesure que la charge externe appliquée augmente. En effet, pour une charge externe très faible, la pente de la courbe effort interne – charge varie fort et se stabilise au fur et à mesure que la charge augmente.

On peut illustrer cette augmentation de linéarité en analysant le comportement d'une passerelle de tenségrité donnée soumise à différentes valeurs de charge externe F. (Dans cet exemple, on considère le cas où la charge est uniformément répartie le long du tablier, sur une passerelle de 40 m de portée composée de 4 simplex et pour laquelle $L/H = 4$). Cette structure est dimensionnée et précontrainte de manière à ce que ses éléments puissent reprendre les efforts internes engendrés par une charge donnée F_{max}, et la précontrainte est définie de manière à ce que le premier câble se détende sous cette même charge.

On définit un incrément de charge $\Delta F = F_{max}/\alpha$ avec, dans cet exemple, $\alpha = 100$. A chaque itération, on calcule les déplacements et les efforts internes engendrés par $F_i = F_{i-1} + \Delta F$. Ceci permet de déterminer pour chaque élément une relation *charge – effort interne* et pour chaque nœud une relation *charge – déplacement vertical*. Quelques exemples de ces graphes sont montrés à la Figure V.10, la Figure V.9 et la Figure V.8.

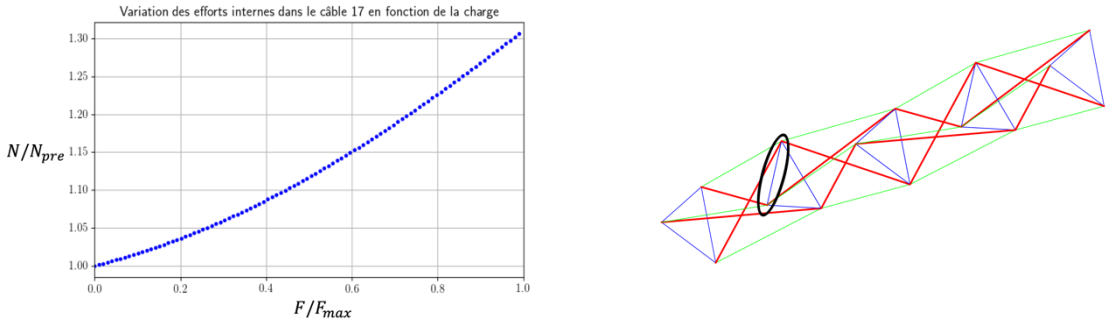


Figure V.10 - Effort interne dans le câble de base 17 en fonction de la charge [Illustration de l'auteur]

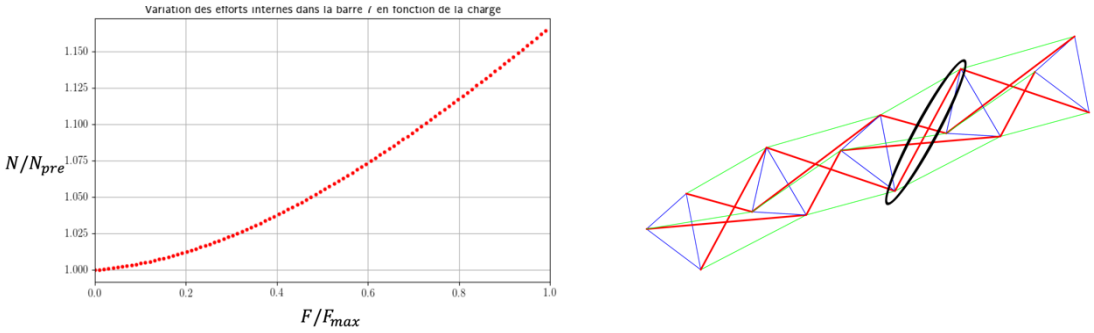


Figure V.9 - Effort interne dans la barre 7 en fonction de la charge [Illustration de l'auteur]

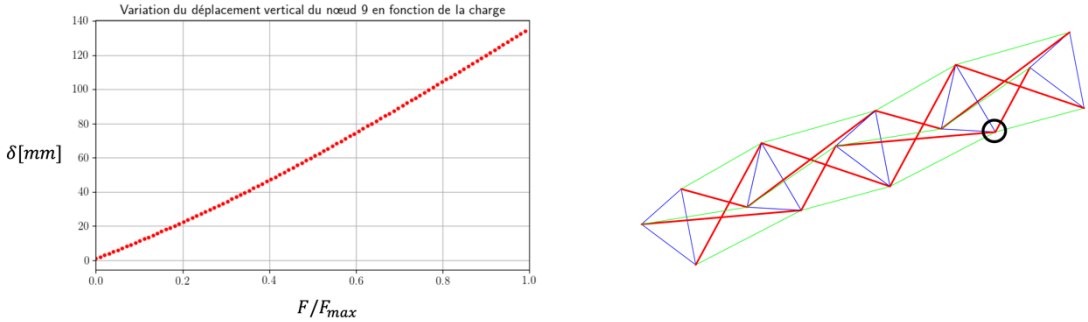


Figure V.8 - Déplacement vertical du nœud 9 en fonction de la charge [Illustration de l'auteur]

Ces quelques exemples expriment assez bien le fait que les structures deviennent « de plus en plus linéaires » quand la charge externe augmente. On voit en effet que la courbure du graphe diminue lorsque F augmente. On constate également que la non-linéarité est plus marquée dans le cas des efforts internes que dans le cas des déplacements verticaux.

Il est possible de définir une méthode plus rigoureuse qui permet de formaliser cette intuition. En introduisant quelques notions liées aux régressions linéaires [23], en particulier le *coefficient de corrélation*.

Pour rappel, une régression linéaire permet d'approximer la relation entre deux paramètres par une droite à partir d'un nuage de points donnés. Ainsi, pour deux paramètres (x, y) et un nuage de points (x_i, y_i) avec $i \in [1, n]$, la formule de régression linéaire est la suivante :

$$y \approx \alpha x + \beta$$

Avec :

$$\alpha = \frac{n\sum(x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{n\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2} \qquad \text{et} \qquad \beta = \frac{\sum y_i - \alpha \sum x_i}{n}$$

Le coefficient de corrélation r est une manière d'exprimer la justesse avec laquelle la droite trouvée par régression linéaire approxime le nuage de points donné sur base de l'écart entre la droite calculée et les différents points et peut donc permettre d'exprimer la « linéarité » de la relation entre les deux paramètres. Il se calcule comme suit :

$$r = \frac{n\sum(x_i y_i) - \sum x_i \sum y_i}{\sqrt{\left[n\sum {x_i}^2 - (\sum x_i)^2\right]\left[n\sum {y_i}^2 - (\sum y_i)^2\right]}}$$

On voit que plus la relation entre x et y est linéaire, plus le numérateur et le dénominateur de l'équation ci-dessus se rapprocheront (car l'écart entre la droite et les points diminue). Pour un coefficient de corrélation égal à 1, on peut donc faire l'hypothèse que les paramètres x et y sont parfaitement proportionnels.

Dans la structure analysée plus haut dans cette section, on cherche à observer l'évolution de la linéarité entre x, qui représente la charge externe, et y, qui représente soit un déplacement, soit un effort interne. Pour cela, on définit un intervalle $[0, 30\Delta F]$ et on effectue une régression linéaire pour tous les points compris dans cet intervalle. Ensuite, on effectue une nouvelle régression linéaire en décalant cet intervalle d'une distance f. On effectue cette opération en décalant systématiquement cet intervalle jusqu'à arriver à l'intervalle $[\Delta F + f, F_{max}] = [70\Delta F, F_{max}]$.

En observant le coefficient de corrélation pour chacune des régressions effectuées, on peut observer que celui-ci tend systématiquement vers 1 (voir Figure V.11). Ceci exprime bien le fait que les structures de tenségrité ont un comportement « plus linéaire » dans des domaines de charge plus élevés.

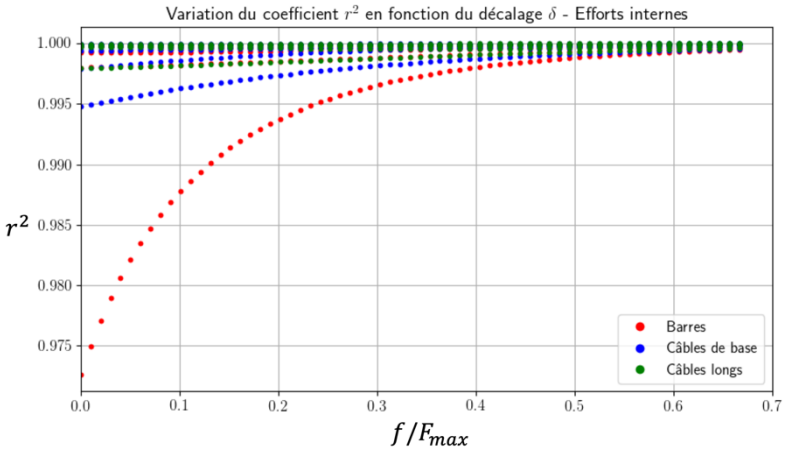


Figure V.11 - Variation du coefficient de corrélation entre efforts internes et charge totale [Illustration de l'auteur]

De plus, on constate que la relation non-linéaire entre efforts internes et charge externe n'est vraiment marquée que pour un petit nombre d'éléments, la plupart montrant une proportionnalité assez marquée ($r^2 \approx 1$) même dans des domaines de F plus faibles.

N.B.1 : L'intervalle $[0, 30\Delta F]$ et le coefficient $\alpha = 100$ ont été choisis arbitrairement car ils permettent de bien exprimer les propos exposés dans cette section, mais le coefficient de corrélation tendra toujours vers 1 quel que soit l'intervalle sur lequel la régression linéaire est effectuée, tant que celui-ci est suffisamment grand pour être représentatif.

N.B.2 : La figure Figure V.11 montre l'évolution de r^2 plutôt que l'évolution de r, simplement afin de permettre au lecteur de distinguer clairement les différents graphes, et afin d'éviter que certains ne tendent vers -1 plutôt que vers 1.

E.2. INFLUENCE DU NIVEAU DE PRECONTRAINTE

Le niveau de précontrainte appliqué à la structure aura une grande influence sur le comportement pseudo-linéaire des structures de tenségrité. En effet, la précontrainte ayant tendance à augmenter la rigidité de la structure, l'influence des ordres supérieurs sera réduite, car les déplacements des nœuds le seront également.

La Figure V.12 et la Figure V.13 expriment le fait que, pour deux structures totalement identiques pour lesquelles seul le niveau de précontrainte varie, la proportionnalité entre la charge et les efforts internes sera plus ou moins marquée. Dans cet exemple-ci, on détermine la précontrainte introduite dans la première structure de manière à ce que le premier câble se détende sous la charge F_{max} et la deuxième structure de manière à ce que le premier câble se détende sous $3F_{max}$. Pour la seconde structure, le coefficient de corrélation est beaucoup plus proche de 1 que pour la première.

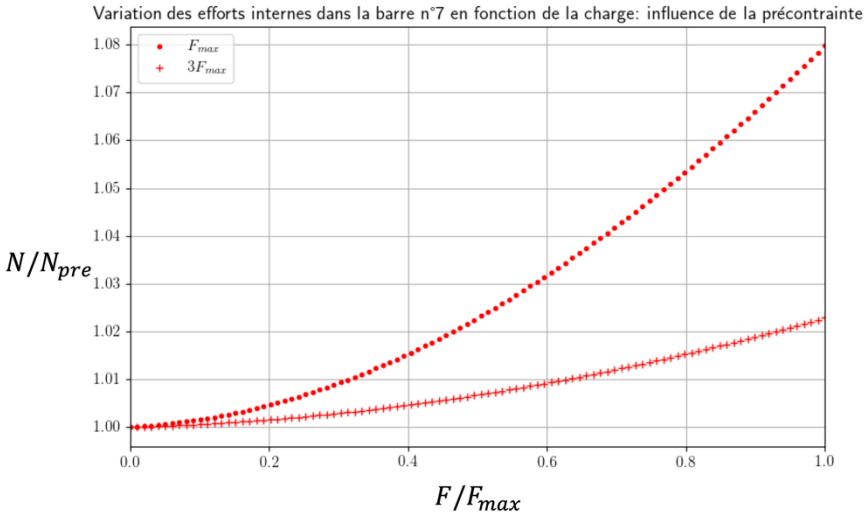


Figure V.13 - Variation des efforts internes en fonction de la charge: influence de la précontrainte [Illustration de l'auteur]

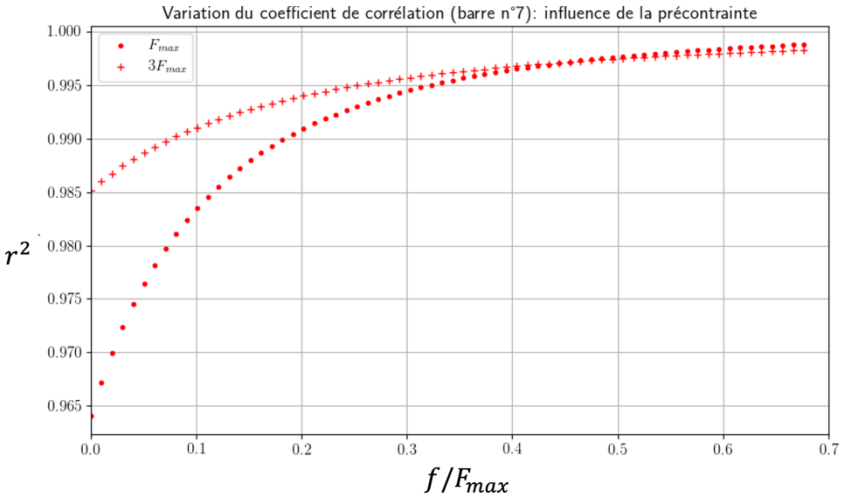


Figure V.12 - variation du coefficient de corrélation en fonction de la charge [Illustration de l'auteur]

ANNEXE F LINEARITE DE LA PRECONTRAINTE EXTERIORISEE ET INTERIORISEE

Dans l'algorithme d'ajustement de la précontrainte, l'hypothèse est faite que la précontrainte extériorisée P et la précontrainte intériorisée N_{pre}sont proportionnelles, afin de pouvoir déterminer de combien il faut réduire ou augmenter P de manière à trouver le niveau de précontrainte optimal.

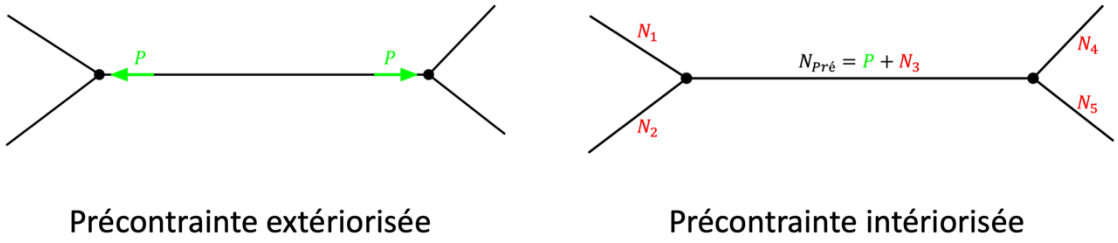


Figure V.14 - Précontrainte extériorisée et intériorisée [Illustration de l'auteur]

Cette annexe illustre la validité de cette hypothèse, en calculant pour une structure donnée l'effort de précontrainte interne dans chaque élément en fonction de la précontrainte extériorisée. Ce résultat est montré à la Figure V.15.

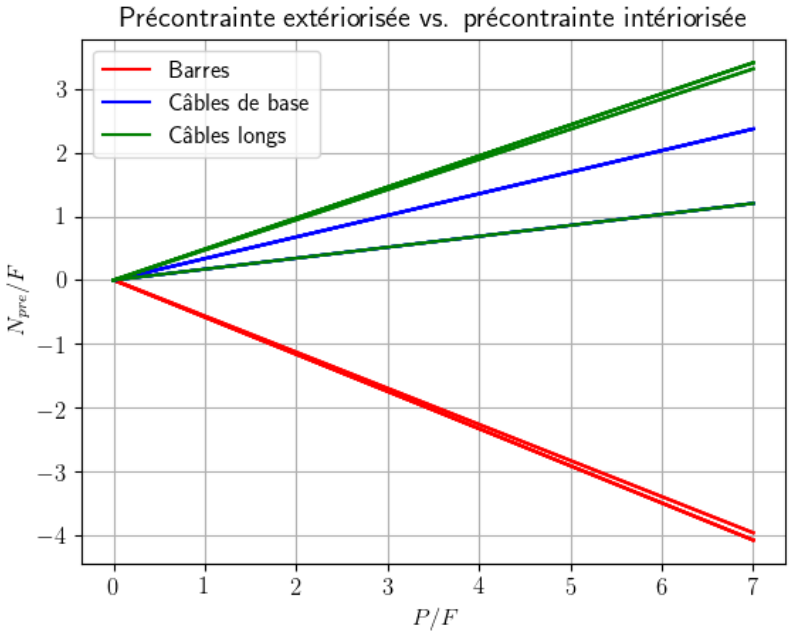


Figure V.15 - Relation entre la précontrainte appliquée P et les efforts internes de précontrainte [Illustration de l'auteur]

La figure montre qu'on a bien une relation linéaire entre la précontrainte extériorisée P et le résultat de cette précontrainte N_{pre} pour tous les éléments de la passerelle de tenségrité.

ANNEXE G ALGORITHME D'OPTIMISATION SOUS CHARGES UNIFORMES

G.1. AJUSTEMENT DE LA PRECONTRAINTE

Cet algorithme s'appuie principalement sur deux hypothèses posées précédemment : d'une part la diminution de non-linéarité lorsque la précontrainte est élevée et d'autre part la proportionnalité entre la précontrainte uniforme P appliquée dans les barres et les efforts internes de précontrainte résultants N_{pre} dans les éléments.

Les structures très précontraintes ayant un comportement plus linéaire, la première itération commence avec un niveau de précontrainte très élevé, afin d'atténuer les effets du second ordre. Il a été choisi de fixer celui-ci à la limite acceptable définie au premier chapitre :

$$\mathrm{P}^0 = 50F$$

La Figure V.16 affiche l'algorithme d'ajustement de la précontrainte dans le cas où les charges appliquées sont réparties uniformément sur le tablier.

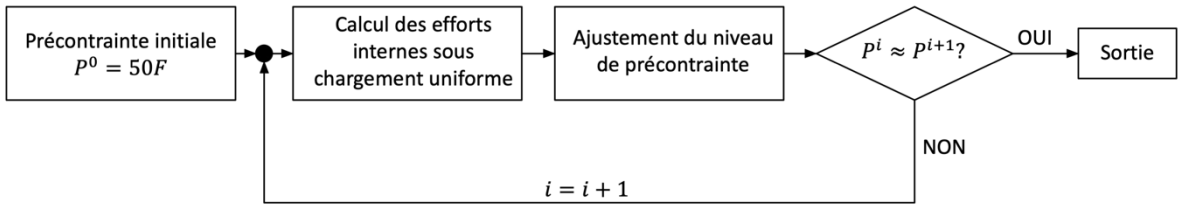


Figure V.16 - Algorithme d'ajustement de la précontrainte sous charges uniformes uniquement [Illustration de l'auteur]

L'objectif de l'ajustement de la précontrainte est de s'assurer qu'aucun câble ne se détende lorsqu'on applique le cas de charge uniforme à la structure. Cette situation fait immédiatement penser à la seconde boucle de l'algorithme d'ajustement de la précontrainte, où il est aussi question de trouver le niveau de précontrainte minimum pour un cas de charge donné.

Seulement, dans le cas des charges aléatoires, il s'agissait du cas de charge le plus défavorable, déterminé dans la première boucle. Ici, cette boucle n'est plus nécessaire car le cas de charge est connu à l'avance car il n'y en a qu'un à prendre en compte.

En partant du niveau de précontrainte très élevé, on commence par calculer pour tous les câbles l'effort résultant après l'application du cas de charge uniforme à l'itération i, qu'on notera N^i. Afin de s'assurer qu'aucun des câbles ne se détende il faut que, pour tous les câbles :

$$N^i > 0$$

Afin de minimiser le niveau de précontrainte, il faut que la condition ci-dessus soit respectée et qu'en plus, pour le câble qui se détend le plus :

$$N^i = 0 \qquad (1)$$

Si l'effort de traction dans le câble diminue d'une quantité Δ^i à l'itération i lorsqu'on applique le cas de charge uniforme et que l'effort initial de précontrainte à cette itération était $N^i{}_{pre}$, on a la relation :

$$N^i_{pre} - \Delta^i = N^i \qquad (2)$$

On peut ainsi déterminer la valeur qu'il faudrait avoir pour l'effort de précontrainte à l'itération suivante afin que ***(1)*** soit respecté:

$$N_{pre}^{i+1} = \Delta^i$$

Sachant que le niveau de précontrainte est proportionnel à l'effort interne de précontrainte, on a :

$$N_{pre} \sim P \Rightarrow \frac{N_{pre}^{i+1}}{N_{pre}^{i}} = \frac{P^{i+1}}{P^i} \Rightarrow P^{i+1} = \frac{N_{pre}^{i+1}}{N_{pre}^{i}} P^i = \frac{\Delta^i}{N_{pre}^{i}} P^i \qquad (3)$$

En procédant ainsi pour tous les câbles, on trouve finalement le plus grand niveau de précontrainte nécessaire, qui correspond au niveau de précontrainte minimale pour qu'aucun câble ne se détende.

Ce calcul est schématisé à la Figure V.17

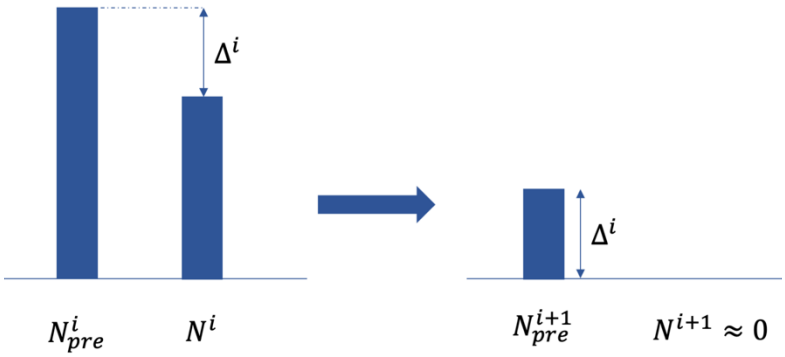


Figure V.17 - Ajustement de la précontrainte à l'itération i [Illustration de l'auteur]

Finalement, les itérations s'arrêtent lorsque la précontrainte de l'itération précédente est suffisamment proche de celle calculée à l'itération suivante, c'est à dire :

$$P^i \approx P^{i+1}$$

Ce qui équivaut à dire que, pour le câble le plus tendu :

$$\frac{\Delta^i}{N_{pre}^{i}} \approx 1 \Rightarrow \Delta^i \approx N_{pre}^{i} \Rightarrow \mathrm{N}^{\mathrm{i}} \approx 0$$

En pratique, on autorisera une petite marge d'erreur. L'algorithme s'arrête lorsque :

$$0.995 < \frac{P^{i+1}}{P^i} < 1.005$$

N.B. Lorsqu'on ne néglige pas le poids propre, il faut bien sûr prendre celui-ci en compte dans le calcul : au lieu de partir de l'effort normal N_{pre}^{i} et de calculer l'effort normal résultant de l'application du cas de charge uniforme, on partira cette fois des efforts normaux calculés pour la structure précontrainte soumise uniquement à son poids propre. Le reste de la procédure est le même qu'expliqué plus haut.

G.2. OPTIMISATION DES SECTIONS

L'algorithme d'optimisation des sections pour le cas de charge uniforme n'a presque pas été modifié par rapport à l'algorithme exposé au Chapitre I4.2, à un détail près :

- La condition d'arrêt des itérations impose maintenant que, pour tous les éléments de la structure, le rapport entre l'aire calculée à la dernière itération et celle calculée à l'avant-dernière itération soit égal à 1, avec une marge d'erreur autorisée :

$$0.995 < \frac{A_{e,i}}{A_{e,i-1}} < 1.005$$

La structure de l'algorithme d'optimisation est identique à celui utilisé précédemment, à la seule différence que la méthode d'ajustement de la précontrainte n'est plus la même.

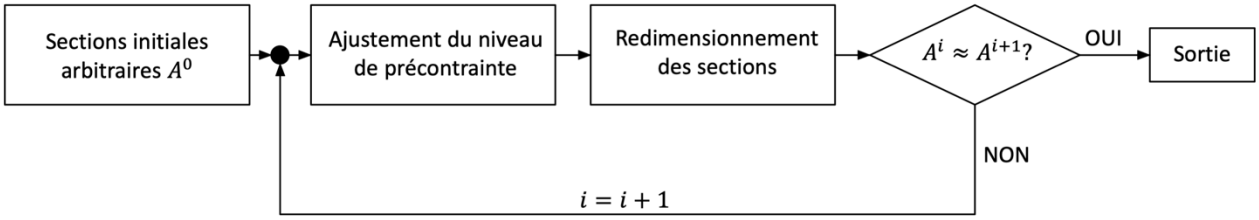


Figure V.18 - Algorithme d'optimisation des sections pour le cas de charge uniforme [Illustration de l'auteur]

TABLE DES ANNEXES

ANNEXE A MINIMISATION D'ENERGIE I

ANNEXE B MATRICE DE RAIDEUR NON-LINEAIRE II

ANNEXE C NUMEROTATION DES NŒUDS ET DES ELEMENTS VI

C.1. NUMEROTATION DES NŒUDS VI
C.2. NUMEROTATION DES ELEMENTS VI

ANNEXE D ANALOGIE AVEC LA THEORIE DES GROUPES VIII

ANNEXE E INFLUENCE DE LA PRECONTRAINTE ET DE LA CHARGE APPLIQUEE SUR LA LINEARITE DE LA STRUCTURE XI

E.1. INFLUENCE DE LA CHARGE EXTERNE XI
E.2. INFLUENCE DU NIVEAU DE PRECONTRAINTE XIV

ANNEXE F LINEARITE DE LA PRECONTRAINTE EXTERIORISEE ET INTERIORISEE XV

ANNEXE G ALGORITHME D'OPTIMISATION SOUS CHARGES UNIFORMES XVI

G.1. AJUSTEMENT DE LA PRECONTRAINTE XVI
G.2. OPTIMISATION DES SECTIONS XVII

TABLE DES FIGURES

FIGURE I.1 - PASSERELLE DE TENSEGRITE COMPOSEE DE SIMPLEX [10, 11] 3
FIGURE I.1 - RICHARD BUCKMINSTER FULLER ET UNE MAQUETTE DE DOME EN TENSEGRITE [24] 5
FIGURE I.2 - REALISATIONS DE K. SNELSON [6] 6
FIGURE I.3 - REALISATIONS DE DAVID-GEORGES EMMERICH [25] 6
FIGURE I.4 - KURIPLA BRIDGE (BRISBANE, AUSTRALIE) [8] 7
FIGURE I.5 - SIMPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR ADAPTE DE [26]] 8
FIGURE I.6 - VARIATION DE L'ANGLE DE ROTATION RELATIF DES BASES D'UN SIMPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR, ADAPTE DE [4]] 9
FIGURE I.7 - QUADRUPLEX : VUES TRANSVERSALE ET GENERALE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR, ADAPTE DE [4]] 10
FIGURE I.8PASSERELLE DE TENSEGRITE COMPOSEE DE 4 QUADRUPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR, ADAPTE DE [4]] 10
FIGURE I.9- PASSERELLE DE TENSEGRITE COMPOSEE DE 4 PENTAPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR, ADAPTE DE [4]] 11
FIGURE I.10 – PENTAPLEX : VUES TRANSVERSALE ET GENERALE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR, ADAPTE DE [4]] 11
FIGURE I.11 – HEXAPLEX : VUES TRANSVERSALE ET GENERALE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR, ADAPTE DE [4]] 11
FIGURE I.12 – PASSERELLE DE TENSEGRITE COMPOSEE DE 4 HEXAPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR, ADAPTE DE [4]] 12
FIGURE I.13 – STRUCTURE COMPOSEE DE DEUX MODULES DE FULLER SUCCESSIFS : VUES TRANSVERSALE ET GENERALE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR, ADAPTE DE [4]] 12
FIGURE I.14 – ANNEAU DE TENSEGRITE A BASE PENTAGONALE : VUES TRANSVERSALE ET GENERALE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR, ADAPTE DE [4]] 12
FIGURE I.15 – SCHEMA DE LA STRUCTURE CALCULEE AU K-IEME ORDRE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR ADAPTE DE [3]] 15
FIGURE I.16 - NON-LINEARITE MATERIELLE : RELATION CONTRAINTE-DEFORMATION DE L'ACIER [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR ADAPTE DE [13]] 19
FIGURE I.17 - SCHEMA DE CALCUL AU SECOND ORDRE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR ADAPTE DE [13]] 19
FIGURE I.18 – ANALOGIE A LA NON-LINEARITE : EFFORT EXTERNE ET DEPLACEMENT [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR ADAPTE DE [3]] 20
FIGURE I.19 – EQUILIBRE DES EFFORTS VERTICAUX AU PREMIER ORDRE : INSTABILITE NUMERIQUE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR ADAPTE DE [3]] 20
FIGURE I.20 – EQUILIBRE DES EFFORTS VERTICAUX SUR LA STRUCTURE DEFORMEE : CALCUL AU SECOND ORDRE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR ADAPTE DE [3]] 21
FIGURE I.21 - ELEMENT ISOLE DANS UN REPERE LOCAL 2D [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR ADAPTE DE [4]] 21
FIGURE I.22 - ELEMENT ISOLE DANS UN REPERE GLOBAL BIDIMENSIONNEL [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR ADAPTE DE [4]] 22
FIGURE I.23 - AVANCEMENT DANS LA SOLUTION : RESOLUTION PAR PAS INCREMENTAUX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR, ADAPTE DE [12]] 24
FIGURE I.24 - ALGORITHME DE LA METHODE NON-LINEAIRE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR, ADAPTE DE [4]] 27
FIGURE I.25 – ETAPE 1 : APPLICATION D'UNE PRECONTRAINTE **P** DANS UNE BARRE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR ADAPTE DE [3]] 30
FIGURE I.26 – ETAPE 2 : EXTERIORISATION DE LA PRECONTRAINTE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR ADAPTE DE [3]] 30
FIGURE I.27 - ETAPE 3 : CALCUL DES EFFORTS INTERNES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR ADAPTE DE [3]] 30
FIGURE I.28 - ETAPE 4 : EFFORTS INTERNES RESULTANTS [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR ADAPTE DE [3]] 30
FIGURE I.29 - PASSERELLE DE TENSEGRITE COMPOSEE DE SIMPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR ADAPTE DE [4]] 32
FIGURE I.30 - ALGORITHME D'OPTIMISATION DES SECTIONS [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR ADAPTE DE [4]] 32
FIGURE I.31 - ALGORITHME D'OPTIMISATION D'UNE STRUCTURE DE TENSEGRITE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] [4] 33
FIGURE II.1 - TRANSMISSION DES CHARGES ALEATOIRES AUX NŒUDS SUPERIEURS DE LA PASSERELLE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 36
FIGURE II.2 - TREILLIS PRATT CHARGE UNIFORMEMENT [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 38

FIGURE II.3 - TREILLIS PRATT SOUMIS A UNE CHARGE PONCTUELLE APPLIQUEE EN CHACUN DE SES NŒUDS [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 39
FIGURE II.4 - PIRES CAS DE CHARGE POUR LA COMPRESSION (A GAUCHE) ET POUR LA TRACTION (A DROITE) DANS LA DIAGONALE ANALYSEE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 39
FIGURE II.5 - CAS DE CHARGE APPLIQUES A LA PASSERELLE COMPOSEE DE 3 SIMPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 40
FIGURE II.6 - PRINCIPE DE SUPERPOSITION : SOMME DE DEUX CAS DE CHARGE – EFFORTS INTERNES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 41
FIGURE II.7 - PRINCIPE DE SUPERPOSITION : MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE : DEPLACEMENTS VERTICAUX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 41
FIGURE II.8 - PRINCIPE DE SUPERPOSITION : MULTIPLICATION PAR UN SCALAIRE - EFFORTS INTERNES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 41
FIGURE II.9 - PRINCIPE DE SUPERPOSITION : SOMME DE DEUX CAS DE CHARGE - DEPLACEMENTS VERTICAUX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 42
FIGURE II.10 - NOUVEL ALGORIHTME D'AJUSTEMENT DE LA PRECONTRAINTE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 43
FIGURE II.11 - APPLICATION DES CAS DE CHARGE DE BASE POUR DETERMINER LA DIMINUTION OU L'AUGMENTATION D'EFFORT [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 45
FIGURE II.12 – PRECONTRAINTE MINIMALE NECESSAIRE DANS LE CABLE A L'ITERATION SUIVANTE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 46
FIGURE II.13 - CAS DE CHARGE LE PLUS DEFAVORABLE DETERMINE A PARTIR DU PRINCIPE DE SUPERPOSITION [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 47
FIGURE II.14 - AJUSTEMENT DE LA PRECONTRAINTE DANS LE CABLE QUI SE DETEND LE PLUS [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] ... 48
FIGURE II.15 - ALGORITHME COMPLET D'AJUSTEMENT DE LA PRECONTRAINTE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 49
FIGURE II.16 - ALGORITHME D'OPTIMISATION DES SECTIONS [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 50
FIGURE II.17 - CAS DE CHARGE DE BASE N°3, LE SEUL A TENDRE LE CABLE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 51
FIGURE II.18 - ALGORITHME D'OPTIMISATION DES SECTIONS SOUS CHARGES ALEATOIRES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 53
FIGURE II.19 - EFFETS DE TORSION SUR LA PASSERELLE LORSQUE LA STRUCTURE N'EST PAS CHARGEE UNIFORMEMENT [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 56
FIGURE II.20 - CAS DE CHARGE QUI ENGENDRE LE PLUS GRAND DEPLACEMENT VERTICAL POUR UNE PASSERELLE A 8 SIMPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 57
FIGURE III.1 - PASSERELLE A 3, 4 OU 5 SIMPLEX AVEC UN ELANCEMENT IDENTIQUE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 59
FIGURE III.2 - CHARGEMENT UNIFORME DE LA PASSERELLE A 3 OU 4 SIMPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 60
FIGURE III.3 - CONDITIONS AUX APPUIS POUR UNE PASSERELLE HYPERSTATIQUE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR, ADAPTE DE [3]] 60
FIGURE III.4 - LEGENDE UTILISEE DANS LES DIFFERENTS GRAPHES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 62
FIGURE III.5 - INDICATEUR DE VOLUME LORSQUE LE FLAMBEMENT EST NEGLIGE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 63
FIGURE III.6 - INDICATEUR DE DEPLACEMENT LORSQUE LE FLAMBEMENT EST NEGLIGE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 64
FIGURE III.7 - INDICATEURS DE VOLUME ET DE DEPLACEMENT POUR LE CAS DE CHARGE UNIFORME [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 64
FIGURE III.8 - RAPPORT ENTRE L'INDICATEUR DE VOLUME SOUS CHARGES VARIABLES ET UNIFORMES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 65
FIGURE III.9 - RAPPORT ENTRE L'INDICATEUR DE DEPLACEMENT SOUS CHARGES ALEATOIRES ET UNIFORMES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 65
FIGURE III.10 - RAPPORT ENTRE L'INDICATEUR DE PRECONTRAINTE CALCULE SOUS CHARGES ALEATOIRES ET UNIFORMES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 66
FIGURE III.11 - INDICATEUR DE VOLUME POUR PSI=35 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 66
FIGURE III.12 - INDICATEUR DE DEPLACEMENT POUR PSI = 35 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 67

FIGURE III.13 - INDICATEURS DE VOLUME ET DE DEPLACEMENT POUR LE CAS UNIFORME AVEC PSI = 35 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 68
FIGURE III.14 - RAPPORT ENTRE L'INDICATEUR DE VOLUME DU CAS ALEATOIRE ET UNIFORME POUR PSI = 35 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 68
FIGURE III.15 - RAPPORT ENTRE L'INDICATEUR DE DEPLACEMENT DU CAS ALEATOIRE ET UNIFORME POUR PSI=35 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 68
FIGURE III.16 - COURBES D'EFFICIENCE DE L'INDICATEUR DE VOLUME POUR DES CHARGES ALEATOIRES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 69
FIGURE III.17 - COURBES D'EFFICIENCE DE L'INDICATEUR DE VOLUME POUR DES CHARGES UNIFORMES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 70
FIGURE III.18 - COURBES D'EFFICIENCE DE L'INDICATEUR DE DEPLACEMENT POUR DES CHARGES ALEATOIRES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 71
FIGURE III.19 - COURBES D'EFFICIENCE DE L'INDICATEUR DE DEPLACEMENT POUR DES CHARGES UNIFORMES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 71
FIGURE III.20 - INDICATEURS DE VOLUME ET DE DEPLACEMENT POUR LA METHODE D'OPTIMISATION FULL-STRESS, CHARGES ALEATOIRES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 72
FIGURE III.21 - RAPPORT ENTRE L'INDICATEUR DE VOLUME CALCULE POUR LES CAS ALEATOIRE ET UNIFORME [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 73
FIGURE III.22 - RAPPORT ENTRE L'INDICATEUR DE DEPLACEMENT CALCULE POUR LES CAS ALEATOIRE ET UNIFORME [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 73
FIGURE III.23 - RAPPORT ENTRE L'INDICATEUR DE DEPLACEMENT POUR LA METHODE GROUP ET FULL-STRESS [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 74
FIGURE III.24 - RAPPORT ENTRE L'INDICATEUR DE VOLUME POUR LA METHODE GROUP ET FULL-STRESS [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 74
FIGURE III.25 - RAPPORT ENTRE L'INDICATEUR DE PRECONTRAINTE POUR LA METHODE GROUP ET FULL-STRESS [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 75
FIGURE III.26 - INDICATEURS DE VOLUME ET DE DEPLACEMENT POUR PSI=35 AVEC LA METHODE FULL-STRESS [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 75
FIGURE III.27 - RAPPORT ENTRE LES INDICATEURS DE VOLUME CALCULES AVEC LA METHODE "GROUP" ET "FULL-STRESS" POUR PSI=35 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 76
FIGURE III.28 - RAPPORT ENTRE LES INDICATEURS DE DEPLACEMENT CALCULES AVEC LA METHODE "GROUP" ET "FULL-STRESS" [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 76
FIGURE III.29 - RAPPORT ENTRE LES INDICATEURS DE DEPLACEMENT POUR DES CHARGES ALEATOIRES ET UNIFORMES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 77
FIGURE III.30 - RAPPORT ENTRE LES INDICATEURS DE VOLUME CALCULES POUR DES CHARGES ALEATOIRES ET UNIFORMES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 77
FIGURE III.31 - LEGENDE DES COURBES D'EFFICIENCE POUR LES METHODES D'OPTIMISATION "GROUP" ET "FULL-STRESS" [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 77
FIGURE III.32 - COURBES D'EFFICIENCE DE L'INDICATEUR DE DEPLACEMENT POUR LES METHODES D'OPTIMISATION "GROUP" ET "FULL-STRESS" [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 78
FIGURE III.33 - COURBES D'EFFICIENCE DE L'INDICATEUR DE VOLUME POUR LES METHODES D'OPTIMISATION "GROUP" ET "FULL-STRESS" [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 78
FIGURE III.34 - CONFIRMATION NUMERIQUE DE L'INDICATEUR DE POIDS PROPRE PHI [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 80
FIGURE III.35 - INDICATEUR DE VOLUME POUR N=3, 4 ET 5 POUR DES PORTEES DIFFERENTES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 82
FIGURE III.36 - INDICATEUR D'EFFICACITE MATERIELLE POUR N=3,4,5 POUR DIFFERENTES PORTEES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 83
FIGURE III.37 - INDICATEUR DE DEPLACEMENT POUR N=3,4,5 POUR DIFFERENTES PORTEES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] .. 83

FIGURE III.38 - INDICATEUR DE PRECONTRAINTE POUR N=3,4,5 POUR DIFFERENTES PORTEES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 84
FIGURE III.39 - INDICATEUR DE DEPLACEMENT POUR N=3,4,5 ET PSI=35 POUR DIFFERENTES PORTEES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 85
FIGURE III.40 - INDICATEUR DE VOLUME POUR N=3,4,5 ET PSI=35 POUR DIFFERENTES PORTEES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 85
FIGURE III.41 - INDICATEUR D'EFFICACITE MATERIELLE POUR N=3,4,5 ET PSI=35 POUR DIFFERENTES PORTEES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 86
FIGURE III.42 - INDICATEUR DE PRECONTRAINTE POUR N=3,4,5 ET PSI=35 POUR DIFFERENTES PORTEES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 87
FIGURE III.43 - COURBE D'EFFICIENCE POUR N=4 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 88
FIGURE III.44 - COURBE D'EFFICIENCE POUR N=3 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 88
FIGURE III.45 - COURBE D'EFFICIENCE POUR N=5 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 89
FIGURE IV.1 - CALCUL D'UNE STRUCTURE DE TENSEGRITE AUX ETATS-LIMITES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 97
FIGURE IV.2 - ALGORITHME D'AJUSTEMENT DE LA FLECHE POUR RESPECTER LE CRITERE DE FLECHE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 98
FIGURE IV.3 - INDICATEUR DE DEPLACEMENT D'UNE PASSERELLE A 3 SIMPLEX, E/SIGMA = 900 ET PSI=35 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 99
FIGURE IV.4 - MODIFICATION DE L'INDICATEUR DE PRECONTRAINTE POUR RESPECTER LE CRITERE DE FLECHE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 99
FIGURE IV.5 - MODIFICATION DE L'INDICATEUR DE VOLUME POUR RESPECTER LE CRITERE DE FLECHE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 99
FIGURE IV.6 - INDICATEURS DE VOLUME, DEPLACEMENT, PRECONTRAINTE ET POIDS PROPRE POUR DEUX STRUCTURES AUX INDICATEURS PRIMAIRES IDENTIQUES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 100
FIGURE IV.7 - INDICATEUR DE VOLUME POUR L=10 ET L=30, CHARGES PERMANENTES NEGLIGEABLES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 102
FIGURE IV.8 - RAPPORT ENTRE LES INDICATEURS DE VOLUME DE LA STRUCTURE ELU ET DE LA STRUCTURE OPTIMALE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 103
FIGURE IV.9 - RAPPORT ENTRE LES INDICATEURS DE DEPLACEMENT DE LA STRUCTURE ELU ET LA STRUCTURE OPTIMALE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 103
FIGURE IV.10 - INDICATEUR DE DEPLACEMENT DE LA STRUCTURE CALCULEE ELU POUR L=10 ET L=30 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 103
FIGURE IV.11 - RAPPORT ENTRE LES INDICATEURS DE PRECONTRAINTE DE LA STRUCTURE CALCULEE A L'ELU ET LA STRUCTURE OPTIMALE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 104
FIGURE IV.12 - INDICATEURS DE DEPLACEMENT DE LA STRUCTURE ELU CORRIGEE POUR RESPECTER LE CRITERE DE FLECHE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 104
FIGURE IV.13 - RAPPORT ENTRE LES INDICATEURS DE VOLUME CORRIGE ET NON-CORRIGE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] .. 105
FIGURE IV.14 - COURBE D'EFFICIENCE DE L'INDICATEUR DE VOLUME POUR L=10M, AVEC CORRECTION DE LA FLECHE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 105
FIGURE IV.15 - COURBES D'EFFICIENCE DE L'INDICATEUR DE VOLUME POUR L=30M AVEC CORRECTION DE LA FLECHE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 106
FIGURE IV.16 - RAPPORT ENTRE L'INDICATEUR DE VOLUME POUR G/Q=0 ET G/Q=0.2 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 107
FIGURE IV.17 - INDICATEURS DE VOLUME DE LA STRUCTURE ELU POUR L=10M ET L=30M, AVEC G/Q=0.2 [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 107
FIGURE IV.18 - INDICATEUR DE DEPLACEMENT POUR L=10M ET L=30M [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 107
FIGURE IV.19 - RAPPORT ENTRE L'INDICATEUR DE DEPLACEMENT POUR G/Q=0 ET G/Q=0.2 108
FIGURE IV.20 - RAPPORT ENTRE LES INDICATEURS DE PRECONTRAINTE CORRIGE ET INITIAL [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] .. 108

FIGURE IV.21 - INDICATEUR DE DEPLACEMENT CORRIGE POUR RESPECTER LE CRITERE DE FLECHE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 108
FIGURE IV.22 - RAPPORT ENTRE L'INDICATEUR DE VOLUME CORRIGE ET L'INDICATEUR DE VOLUME INITIAL [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 109
FIGURE IV.23 - COURBES D'EFFICIENCE DE L'INDICATEUR DE VOLUME POUR UNE PORTEE DE 10M [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 109
FIGURE IV.24 - COURBES D'EFFICIENCE DE L'INDICATEUR DE VOLUME POUR UNE PORTEE DE 30M [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 110
FIGURE V.1 - COURBES D'EFFICIENCE DE L'INDICATEUR DE VOLUME POUR L=30M [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 114
FIGURE V.2 - CAS DE CHARGE PRODUISANT LE PLUS GRAND DEPLACEMENT POUR UNE STRUCTURE A 3 SIMPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] 115
FIGURE V.3 - ELEMENT ISOLE ET SA DEFORMEE DANS UN REPERE GLOBAL 2D [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR INSPIRE DE [4]] ... II
FIGURE V.4 - NUMEROTATION DES NŒUDS POUR UNE STRUCTURE A TROIS SIMPLEX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] VI
FIGURE V.5 - NUMEROTATION DES BARRES [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] VI
FIGURE V.6 - NUMEROTATION DES CABLES DE BASE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] VII
FIGURE V.7 - NUMEROTATION DES CABLES LONGITUDINAUX [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] VII
FIGURE V.8 - DEPLACEMENT VERTICAL DU NŒUD 9 EN FONCTION DE LA CHARGE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] XII
FIGURE V.9 - EFFORT INTERNE DANS LA BARRE 7 EN FONCTION DE LA CHARGE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] XII
FIGURE V.10 - EFFORT INTERNE DANS LE CABLE DE BASE 17 EN FONCTION DE LA CHARGE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] XII
FIGURE V.11 - VARIATION DU COEFFICIENT DE CORRELATION ENTRE EFFORTS INTERNES ET CHARGE TOTALE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] XIII
FIGURE V.12 - VARIATION DU COEFFICIENT DE CORRELATION EN FONCTION DE LA CHARGE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] ... XIV
FIGURE V.13 - VARIATION DES EFFORTS INTERNES EN FONCTION DE LA CHARGE: INFLUENCE DE LA PRECONTRAINTE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] XIV
FIGURE V.14 - PRECONTRAINTE EXTERIORISEE ET INTERIORISEE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] XV
FIGURE V.15 - RELATION ENTRE LA PRECONTRAINTE APPLIQUEE P ET LES EFFORTS INTERNES DE PRECONTRAINTE [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] XV
FIGURE V.16 - ALGORITHME D'AJUSTEMENT DE LA PRECONTRAINTE SOUS CHARGES UNIFORMES UNIQUEMENT [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] XVI
FIGURE V.17 - AJUSTEMENT DE LA PRECONTRAINTE A L'ITERATION I [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] XVII
FIGURE V.18 - ALGORITHME D'OPTIMISATION DES SECTIONS POUR LE CAS DE CHARGE UNIFORME [ILLUSTRATION DE L'AUTEUR] XVIII

BIBLIOGRAPHIE

[1] R. Buckminster Fuller, Synergetics: Explorations in the Geometry of Thinking, New York: Macmillan Publishing, 1979.

[2] P. Latteur, «Optimisation et prédimensionnement des treillis, arcs, poutres et câbles sur base d'indicateurs morphologiques,» VUB, Bruxelles, 2000.

[3] J. Feron, «Optimisation des structures de tenségrité sur base d'indicateurs morphologiques,» UCLouvain, Louvain-la-Neuve, 2016.

[4] L. Boucher, «Optimisation des structures de tenségrité composées de modules prismatiques,» UCLouvain, Louvain-la-Neuve, 2017.

[5] R. Buckminster Fuller, «Tensegrity,» *Portfolio and Art News Annual,* vol. 4, 1961.

[6] E. Heartney et K. Snelson, «Kenneth Snelson: Art and Ideas,» 2013. [En ligne]. Available: http://kennethsnelson.net/KennethSnelson_Art_And_Ideas.pdf. [Accès le 13 May 27].

[7] C. Flon, «David-Georges EMMERICH (1925-1996),» Universalis, 2019. [En ligne]. Available: https://www.universalis.fr/encyclopedie/david-georges-emmerich/. [Accès le 2019 May 2019].

[8] ARUP, «The world's first tensegrity bridge,» ARUP, [En ligne]. Available: https://www.arup.com/projects/kurilpa-bridge. [Accès le 27 May 2019].

[9] R. Motro, Tenségrité, Paris: Hermès Lavoisier, 2005.

[10] Q. Gravy et A. Bastin, «Etude d'une passerelle de tenségrité composée de simplex,» UCLouvain, Louvain-la-Neuve, 2014.

[11] P. Latteur, J. Feron et V. Denoel, «A design tool for lattice and tensegrity structures based on a stiffness and volume optimization algorithm using morphological indicators,» Louvain-la-Neuve, 2017.

[12] M. Eliaers, «Calcul non-linéaire des structures de tenségrité,» UCLouvain, Louvain-la-Neuve, 2015.

[13] P. Latteur, *Support de cours LAUCE1181 - Mécanique des structures,* Louvain-la-Neuve: UCLouvain, 2016.

[14] P. Latteur, Calculer une structure : de la théorie à l'exemple, Louvain-la-Neuve: Bruylant-Academia, 2016.

[15] J.-F. Remacle, «LAUCE2125 - Finite Elements for Structures,» [En ligne]. Available: http://perso.uclouvain.be/jean-francois.remacle/LAUCE2125/lectures.html. [Accès le 15 Octobre 2015].

[16] CECI - Consortium des Équipements de Calcul Intens, «CECI FAQ page,» 2019. [En ligne]. Available: http://www.ceci-hpc.be/faq.html. [Accès le 19 05 2019].

[17] J. Feron, L. Boucher et P. Latteur, «Optimization of footbridges composed of prismatic tensegrity modules,» Louvain-la-Neuve, 2019.

[18] E. Commission, «The EN Eurocodes,» [En ligne]. Available: https://eurocodes.jrc.ec.europa.eu. [Accès le 8 June 2019].

[19] Afnor, « Eurocodes structuraux: publication des Eurocodes et annexes nationales,» AFNOR, 05 2016. [En ligne]. Available: https://normalisation.afnor.org/wp-content/uploads/2016/05/liste-eurocodes.pdf. [Accès le 2019 05 26].

[20] J. Quirant, «SYSTEMES DE TENSEGRITE ET AUTOCONTRAINTE:QUALIFICATION, SENSIBILITE ET INCIDENCE SUR LE COMPORTEMENT,» Université Montpellier II - Sciences et Techniques du Languedoc, Montpellier, 2000.

[21] J.-F. Cap, *Slides du cours "LAUCE 2032: Structures en Béton Précontraint",* Louvain-la-Neuve: UCLouvain, 2019.

[22] T. Van Der Linden, Support du cours LMAT1231 - Algèbre Multilinéaire et Théorie des Groupes, Louvain-la-Neuve: UCLouvain, 2018.

[23] J. Hester, «Linear Regression and Excel,» 28 05 2002. [En ligne]. Available: http://science.clemson.edu/physics/labs/tutorials/excel/regression.html. [Accès le 25 04 2019].

[24] M. Pereira, «Tensegrity Structures: What they are and what they can be,» ArchDaily, 03 June 2018. [En ligne]. Available: https://www.archdaily.com/893555/tensegrity-structures-what-they-are-and-what-they-can-be. [Accès le 27 May 2019].

[25] M.-A. Brayer, «David-Georges EMMERICH,» [En ligne]. Available: http://www.editions-hyx.com/sites/default/files/public/media/david_george_emmerich_2.pdf. [Accès le 27 May 2019].

[26] V. Jauregui, Tensegrity Structures and their applications to architecture, Cantabrie: Ediciones de la Universidad di Cantabria, 2010.

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
École polytechnique de Louvain
Rue Archimède, 1 bte L6.11.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | **www.uclouvain.be/epl**