Annexe C

Équations de Saint-Venant

Cette annexe vise à présenter les développements détaillés qui permettent d'obtenir les équations bidimensionnelles de Saint-Venant en intégrant sur la profondeur les équations tridimensionnelles de Navier-Stokes. Elle est fortement inspirée de [3]. On exprimera alors les composantes de vitesses moyennées sur la profondeur par la composante longitudinale U et transversale V définies comme suit :

$$U = \frac{1}{h}\int_{z_b}^{z_w} \bar{u} dz \qquad V = \frac{1}{h}\int_{z_b}^{z_w} \bar{v} dz \tag{C.0.1}$$

où $h = z_w - z_b$

C.1 Développement

Rappelons tout d'abord les équations de Navier-Stokes.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \overline{u}}{\partial x} + \dfrac{\partial \overline{v}}{\partial y} + \dfrac{\partial \overline{w}}{\partial z} = 0 \\ \dfrac{D\overline{u}}{Dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial x} + \nu\nabla^2\overline{u} - \left(\dfrac{\partial\left(\overline{u'u'}\right)}{\partial x} + \dfrac{\partial\left(\overline{u'v'}\right)}{\partial y} + \dfrac{\partial\left(\overline{u'w'}\right)}{\partial z}\right) \\ \dfrac{D\overline{v}}{Dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial y} + \nu\nabla^2\overline{v} - \left(\dfrac{\partial\left(\overline{u'v'}\right)}{\partial x} + \dfrac{\partial\left(\overline{v'v'}\right)}{\partial y} + \dfrac{\partial\left(\overline{v'w'}\right)}{\partial z}\right) \\ \dfrac{D\overline{w}}{Dt} = -\dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \overline{p}}{\partial z} - g + \nu\nabla^2\overline{w} - \left(\dfrac{\partial\left(\overline{u'w'}\right)}{\partial x} + \dfrac{\partial\left(\overline{v'w'}\right)}{\partial y} + \dfrac{\partial\left(\overline{w'w'}\right)}{\partial z}\right) \end{cases} \tag{C.1.1}$$

Où les contraintes turbulentes sont définies comme suit :

$$\sigma_{ij}^{turbulent} = -\rho \begin{pmatrix} \overline{u'^2} & \overline{u'v'} & \overline{u'w'} \\ \overline{v'u'} & \overline{v'^2} & \overline{v'w'} \\ \overline{w'u'} & \overline{w'v'} & \overline{w'^2} \end{pmatrix} \tag{C.1.2}$$

C.1.1 Conditions limites

Tout d'abord, il est important de développer les différentes conditions limites ce qui permet d'obtenir des relations utiles à la démonstration des équations.

La première condition limite est la condition limite de surface libre. Elle est définie en supposant qu'une particule présente à la surface pour un temps donné, restera à la surface. Définissons d'abord la surface libre

$$S(x, y, z, t) = z_w(x, y, t) - z = 0 \tag{C.1.3}$$

Cette définition exprime simplement le fait que la coordonnée z prend la valeur z_w à la surface libre. Pour exprimer la condition limite, il suffit alors d'égaler la dérivée matérielle de cette expression à zéro.

$$\frac{DS}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t}(z_w - z) + \overline{u_w}\frac{\partial}{\partial x}(z_w - z) + \overline{v_w}\frac{\partial}{\partial y}(z_w - z) + \overline{w_w}\frac{\partial}{\partial z}(z_w - z) = 0 \tag{C.1.4}$$

où l'indice w indique une variable à la surface libre. On obtient alors l'expression de la condition limite de surface libre :

$$\frac{\partial z_w}{\partial t} + \overline{u_w}\frac{\partial z_w}{\partial x} + \overline{v_w}\frac{\partial z_w}{\partial y} - \overline{w_w} = 0 \tag{C.1.5}$$

La deuxième condition limite est la condition limite du lit et est obtenue de manière similaire. Au vu de l'hypothèse prise concernant le fond z_b, sa dérivée temporelle est nulle et on obtient :

$$\overline{u_b}\frac{\partial z_b}{\partial x} + \overline{v_b}\frac{\partial z_b}{\partial y} - \overline{w_b} = 0 \tag{C.1.6}$$

L'hypothèse de pression hydrostatique implique que pour l'équation de conservation de quantité de mouvement (C.1.1.d), l'accélération verticale et les contraintes de cisaillement (moléculaires et turbulentes) sont négligeables par rapport aux autres termes.[1] On obtient alors, après intégration, l'expression de la pression qui dépend uniquement de la profondeur z :

$$\bar{p} = \rho g (z_w - z) + p_a \tag{C.1.7}$$

où la pression p_a à la surface libre est fixée à zéro.
Ces 2 conditions limites et cette expression de pression hydrostatique permettent de simplifier les développements qui suivent.

C.1.2 Équation de continuité

On procède alors à l'intégration de l'équation de continuité des équations de Navier-Stokes (C.1.1a) :

$$\int_{z_b}^{z_w} \left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} \right) dz = 0 \tag{C.1.8}$$

On utilise ensuite la formule de Leibniz[2] pour développer chacun des 3 termes :

$$\begin{aligned}
\int_{z_b}^{z_w} \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} dz &= \frac{\partial}{\partial x}\int_{z_b}^{z_w} \bar{u} dz - \overline{u_w}\frac{\partial z_w}{\partial x} + \overline{u_b}\frac{\partial z_b}{\partial x} \\
\int_{z_b}^{z_w} \frac{\partial \bar{v}}{\partial y} dz &= \frac{\partial}{\partial y}\int_{z_b}^{z_w} \bar{v} dz - \overline{v_w}\frac{\partial z_w}{\partial y} + \overline{v_b}\frac{\partial z_b}{\partial y} \\
\int_{z_b}^{z_w} \frac{\partial \bar{w}}{\partial z} dz &= \overline{w_w} - \overline{w_b}
\end{aligned} \tag{C.1.9}$$

En regroupant les termes pour mettre en évidence les conditions limites (C.1.5) et (C.1.6), on obtient :

$$\frac{\partial}{\partial x}(Uh) + \frac{\partial}{\partial y}(Vh) - \underbrace{\left(\overline{u_w}\frac{\partial z_w}{\partial x} + \overline{v_w}\frac{\partial z_w}{\partial y} - \overline{w_w} \right)}_{= \frac{\partial z_w}{\partial t} \text{ par } (C.1.5)} + \underbrace{\left(\overline{u_b}\frac{\partial z_b}{\partial x} + \overline{v_b}\frac{\partial z_b}{\partial y} - \overline{w_b} \right)}_{=0 \text{ par} (C.1.6)} = 0 \tag{C.1.10}$$

En introduisant $z_w = z_b + h$ et en réutilisant l'hypothèse de fond fixe, l'équation de continuité est alors obtenue :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial (Uh)}{\partial x} + \frac{\partial (Vh)}{\partial y} = 0 \tag{C.1.11}$$

1. On remarque bien qu'après avoir négligé ces termes, on obtient l'expression de la pression qui est bien hydrostatique
2. $\frac{\partial}{\partial t}\int_{a(y,t)}^{b(y,t)} f(x,y,t)dx = \int_{a(y,t)}^{b(y,t)} \frac{\partial f}{\partial t} dx - f(a,y,t)\frac{\partial a}{\partial t} + f(b,y,t)\frac{\partial b}{\partial t}$

C.1.3 Équations de conservation de quantité de mouvement

Le développement complet de l'intégration des équations de conservation de quantité de mouvement de Navier-Stokes sera uniquement démontré pour la direction x. Le développement selon y est en effet le même et n'a donc ne sera pas présenté.

L'intégration selon la hauteur de l'équation de conservation de quantité de mouvement selon x (C.1.1.b) donne[3] :

$$\overbrace{\int_{z_b}^{z_w}\left(\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y}+\frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z}\right)dz}^{\text{Terme 1}} = \overbrace{-\frac{1}{\rho}\int_{z_b}^{z_w}\frac{\partial \bar{p}}{\partial x}dz}^{\text{Terme 2}} - \overbrace{\int_{z_b}^{z_w}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\overline{u'u'}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\overline{u'v'}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\overline{u'w'}\right)\right)dz}^{\text{Terme 3}} \tag{C.1.12}$$

Terme 1 : terme d'accélération et termes de convections

Comme pour l'équation de continuité, le théorème de Leibniz sera fort utile dans les développements afin de permuter les opérateurs d'intégrations et de dérivations.
Pour exprimer le terme d'accélération, on utilise de nouveau le fait que le fond z_b est fixe dans le temps ainsi que la définition (C.0.1) de la vitesse moyennée U.

$$\int_{z_b}^{z_w}\frac{\partial \bar{u}}{\partial t}dz = \frac{\partial}{\partial t}\int_{z_b}^{z_w}\bar{u}dz - \overline{u_w}\frac{\partial z_w}{\partial t}+\overline{u_b}\frac{\partial z_b}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(Uh)-\overline{u_w}\frac{\partial z_w}{\partial t} \tag{C.1.13}$$

Le premier terme de convection donne quant à lui :

$$\int_{z_b}^{z_w}\frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x}dz = \frac{\partial}{\partial x}\int_{z_b}^{z_w}\bar{u}^2dz - \overline{u_w}^2\frac{\partial z_w}{\partial x}+\overline{u_b}^2\frac{\partial z_b}{\partial x} \tag{C.1.14}$$

En insérant l'identité $\bar{u} = U + (\bar{u} - U)$,l'intégration de $\bar{u}^2$ peut s'écrire :

$$\begin{aligned}\int_{z_b}^{z_w}\bar{u}^2dz &= \int_{z_b}^{z_w}(U+(\bar{u}-U))^2dz \\ &= \int_{z_b}^{z_w}U^2dz + 2\int_{z_b}^{z_w}U(\bar{u}-U)dz + \int_{z_b}^{z_w}(\bar{u}-U)^2dz\end{aligned} \tag{C.1.15}$$

En exprimant la vitesse comme $\overline{u} = U + E$ où E est "l'erreur" par rapport à la moyenne, on peut alors réécrire (C.1.15) :

$$\int_{z_b}^{z_w}\bar{u}^2dz = \int_{z_b}^{z_w}U^2dz + 2U\underbrace{\int_{z_b}^{z_w}Edz}_{\triangleq 0} + \underbrace{\int_{z_b}^{z_w}(\bar{u}-U)^2dz}_{\text{terme de dispersion}} \tag{C.1.16}$$

L'intégrale de l'erreur E est par définition nulle.
En introduisant la définition du coefficient de Boussinesq et l'hypothèse négligeant la non-uniformité de la distribution de vitesse,c'est à dire que $\beta = 1$, on peut écrire :

$$\int_{z_b}^{z_w}\bar{u}^2dz = \beta\, U^2\, h = \int_{z_b}^{z_w}U^2dz \tag{C.1.17}$$

Cette hypothèse implique que le terme dit de dispersion est nul.
En utilisant le même développement pour le deuxième terme de convection, on peut enfin écrire les 3

3. On rappelle l'hypothèse faite sur le terme de contraintes visqueuses négligeables dans les équations de Navier-Stokes

termes de convections :

$$\begin{aligned}
\int_{z_b}^{z_w} \frac{\partial(\bar{u}\bar{u})}{\partial x} dz &= \frac{\partial\left(U^2 h\right)}{\partial x} - \overline{u_w}^2 \frac{\partial z_w}{\partial x} + \overline{u_b}^2 \frac{\partial z_b}{\partial x} \\
\int_{z_b}^{z_w} \frac{\partial(\bar{u}\bar{v})}{\partial y} dz &= \frac{\partial(UVh)}{\partial y} - \bar{u}_w \bar{v}_w \frac{\partial z_w}{\partial y} + \bar{u}_b \bar{v}_b \frac{\partial z_b}{\partial y} \\
\int_{z_b}^{z_w} \frac{\partial(\bar{u}\bar{w})}{\partial z} dz &= \bar{u}_w \bar{w}_w - \bar{u}_b \bar{w}_b
\end{aligned} \tag{C.1.18}$$

Terme 2 : terme de pression

Le théorème de Leibniz est de nouveau utilisé pour développer ce terme-ci :

$$\frac{1}{\rho} \int_{z_b}^{z_w} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} dz = \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_w} \bar{p} dz - \frac{\overline{p_w}}{\rho} \frac{\partial z_w}{\partial x} + \frac{\overline{p_b}}{\rho} \frac{\partial z_b}{\partial x} \tag{C.1.19}$$

En utilisant l'expression de la pression hydrostatique (C.1.7), l'expression devient :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho} \int_{z_b}^{z_w} \frac{\partial \bar{p}}{\partial x} dz &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_w} \rho g \left(z_w - z\right) dz - \frac{\rho g \left(z_w - z_w\right)}{\rho} \frac{\partial z_w}{\partial x} + \frac{\rho g \left(z_w - z_b\right)}{\rho} \frac{\partial z_b}{\partial x} \\
&= g \frac{\partial}{\partial x} \left(z_w \left(z_w - z_b\right) - \frac{1}{2} \left(z_w^2 - z_b^2\right) \right) + gh \frac{\partial z_b}{\partial x} \\
&= g \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{h^2}{2} \right) + gh \frac{\partial z_b}{\partial x}
\end{aligned} \tag{C.1.20}$$

Terme 3 : termes de contraintes de cisaillement turbulentes

De nouveau, en utilisant le théorème de Leibniz, le dernier terme peut s'écrire de la façon suivante :

$$\begin{aligned}
\int_{z_b}^{z_w} \left(\frac{\partial \left(\overline{u'u'}\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\overline{u'v'}\right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\overline{u'w'}\right)}{\partial z} \right) dz = \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_w} \overline{u'u'} dz - \left(\overline{u'u'}\right)_w \frac{\partial z_w}{\partial x} + \left(\overline{u'u'}\right)_b \frac{\partial z_b}{\partial x} \\
+ \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_w} \overline{u'v'} dz - \left(\overline{u'v'}\right)_w \frac{\partial z_w}{\partial y} + \left(\overline{u'v'}\right)_b \frac{\partial z_b}{\partial y} \\
+ \left(\overline{u'w'}\right)_w - \left(\overline{u'w'}\right)_b
\end{aligned} \tag{C.1.21}$$

On peut légitimement considérer les contraintes de cisaillement à la surface comme négligeable, donc $\left(\overline{u'u'}\right)_w = \left(\overline{u'v'}\right)_w = \left(\overline{u'w'}\right)_w = 0$. Pour ce qui est des contraintes de cisaillement le long du lit, les contraintes le long du plan vertical $\left(\overline{u'u'}\right)_b$ et $\left(\overline{u'v'}\right)_b$ sont supposées négligeables devant le terme de contrainte horizontale $\left(\overline{u'w'}\right)_b$. On peut alors simplifier fortement l'expression pour obtenir :

$$\begin{aligned}
\int_{z_b}^{z_w} \left(\frac{\partial \left(\overline{u'u'}\right)}{\partial x} + \frac{\partial \left(\overline{u'v'}\right)}{\partial y} + \frac{\partial \left(\overline{u'w'}\right)}{\partial z} \right) dz &= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_w} \overline{u'u'} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_w} \overline{u'v'} dz - \left(\overline{u'w'}\right)_b \\
&= \frac{\partial}{\partial x} \int_{z_b}^{z_w} \overline{u'u'} dz + \frac{\partial}{\partial y} \int_{z_b}^{z_w} \overline{u'v'} dz + \frac{\tau_b}{\rho}
\end{aligned} \tag{C.1.22}$$

En se rappelant la définition des contraintes turbulentes (C.1.2), on a transformé le dernier terme pour faire apparaître τ_b.

Insertion des 3 termes

On peut enfin développer l'expression (C.1.12) en y insérant les expressions (C.1.13), (C.1.18),(C.1.20) et (C.1.22). En réarrangeant l'équation, on peut faire apparaître les 2 conditions limites qui permettent de simplifier fortement l'expression :

$$\frac{\partial(Uh)}{\partial t}+\frac{\partial(U^2h)}{\partial x}+\frac{\partial(UVh)}{\partial y}-\overline{u_w}\underbrace{\left(\frac{\partial z_w}{\partial t}+\overline{u_w}\frac{\partial z_w}{\partial x}+\overline{v_w}\frac{\partial z_w}{\partial y}-\overline{w_w}\right)}_{=0 \text{ par (C.1.5)}}+\overline{u_b}\underbrace{\left(\overline{u_b}\frac{\partial z_b}{\partial x}+\overline{v_b}\frac{\partial z_b}{\partial y}-\overline{w_b}\right)}_{=0 \text{ par (C.1.6)}}$$
$$=-g\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{h^2}{2}\right)-gh\frac{\partial z_b}{\partial x}-\frac{\partial}{\partial x}\int_{z_b}^{z_w}\overline{u'u'}dz-\frac{\partial}{\partial y}\int_{z_b}^{z_w}\overline{u'v'}dz-\frac{\tau_b}{\rho} \tag{C.1.23}$$

La contrainte de cisaillement le long du lit τ_b peut aussi s'exprimer en fonction de la pente d'énergie $S_{f,x}$:

$$\frac{\tau_b}{\rho}=ghS_{fx} \tag{C.1.24}$$

Ensuite, la pente de fond dans la direction longitudinale x peut être définie par :

$$S_{0x}=-\frac{\partial z_b}{\partial x} \tag{C.1.25}$$

Et enfin, on définit les contraintes de cisaillement moyennées sur la hauteur τ_{xx} et τ_{xy} :

$$\frac{\tau_{xx}}{\rho}=-\frac{1}{h}\int_{z_b}^{z_w}\overline{u'u'}dz \qquad \frac{\tau_{xy}}{\rho}=-\frac{1}{h}\int_{z_b}^{z_w}\overline{u'v'}dz \tag{C.1.26}$$

En insérant les 3 expressions (C.1.24), (C.1.25) et (C.1.26) dans (C.1.23), on obtient alors :

$$\frac{\partial(Uh)}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}\left(U^2h+\frac{gh^2}{2}\right)+\frac{\partial(UVh)}{\partial y}=gh\left(S_{0x}-S_{fx}\right)+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tau_{xx}h}{\rho}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau_{xy}h}{\rho}\right) \tag{C.1.27}$$

Finalement, la forme *non conservative* des équations de Saint-Venant sont obtenues en mettant en évidence l'équation de continuité (C.1.11) multipliée par U puis en divisant le tout par la hauteur d'eau h.

$$\frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=g\left(S_{0x}-S_{fx}\right)-g\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tau_{xx}h}{\rho}\right)+\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau_{xy}h}{\rho}\right) \tag{C.1.28}$$

C.1.4 Synthèse

Le développement pour obtenir l'équation de conservation de quantité de mouvement selon y étant identique, on peut alors résumer les équations de Saint-Venant sous forme non conservative comme suit :

$$\begin{cases}\frac{\partial h}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(Uh)+\frac{\partial}{\partial y}(Vh)=0\\ \frac{\partial U}{\partial t}+U\frac{\partial U}{\partial x}+V\frac{\partial U}{\partial y}=g\left(S_{0x}-S_{fx}\right)-g\frac{\partial h}{\partial x}+\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\tau_{xx}}{\rho}\right)+\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\tau_{xy}}{\rho}\right)\\ \frac{\partial V}{\partial t}+U\frac{\partial V}{\partial x}+V\frac{\partial V}{\partial y}=g\left(S_{0y}-S_{fy}\right)-g\frac{\partial h}{\partial y}+\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial x}\left(h\frac{\tau_{yx}}{\rho}\right)+\frac{1}{h}\frac{\partial}{\partial y}\left(h\frac{\tau_{yy}}{\rho}\right)\end{cases} \tag{C.1.29}$$

où la première équation est l'équation de continuité et les deux autres sont les équations de conservation de quantité de mouvement selon les axes x et y.

C.1.5 Équations de Saint-Venant sous forme conservative

Développer les équations de Saint-Venant sous forme conservative, c'est à dire en termes de variables globales, est utile pour la suite. En effet, la forme conservative est mieux adaptée pour les schémas numériques vu que les dérivées sont groupées où c'est possible, c'est à dire qu'on a dQ à la place de $V\,dA+A\,dV$. Définissons alors deux nouvelles variables q_x et $q_y[m^2/s]$, respectivement le débit par unité de largeur dans la direction longitudinale et dans la direction tansversale.

$$q_x=Uh \qquad q_y=Vh \tag{C.1.30}$$

On choisit ainsi des variables dites conservatives qui représentent des quantités conservées dans le système contrairement aux vitesses qui ne le sont pas.

L'équation de continuité (C.1.29a) devient :

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} = 0 \tag{C.1.31}$$

Pour ce qui est des équations de conservation de quantité de mouvement, on repart des équations (C.1.29b) et (C.1.29c) multipliées par h. On y additionne ensuite l'équation de continuité multipliée par U pour (C.1.29b) et multiplié par V pour (C.1.29c).

$$\begin{aligned}
U\frac{\partial h}{\partial t} + U\frac{\partial (Uh)}{\partial x} + U\frac{\partial (Vh)}{\partial y} + h\frac{\partial U}{\partial t} + Uh\frac{\partial U}{\partial x} + Vh\frac{\partial U}{\partial y} &= gh\left(S_{0x} - S_{fx}\right) - gh\frac{\partial h}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tau_{xx}h}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau_{xy}h}{\rho}\right) \\
V\frac{\partial h}{\partial t} + V\frac{\partial (Uh)}{\partial x} + V\frac{\partial (Vh)}{\partial y} + h\frac{\partial V}{\partial t} + Uh\frac{\partial V}{\partial x} + Vh\frac{\partial V}{\partial y} &= gh\left(S_{0y} - S_{fy}\right) - gh\frac{\partial h}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tau_{yx}h}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau_{yy}h}{\rho}\right)
\end{aligned} \tag{C.1.32}$$

En y intégrant les expressions (C.1.30) tout en réarangeant les termes, on obtient :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial q_x}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q_x^2}{h} + \frac{gh^2}{2}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q_x q_y}{h}\right) &= gh\left(S_{0x} - S_{fx}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tau_{xx}h}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau_{xy}h}{\rho}\right) \\
\frac{\partial q_y}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{q_x q_y}{h}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{q_y^2}{h} + \frac{gh^2}{2}\right) &= gh\left(S_{0y} - S_{fy}\right) + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tau_{yx}h}{\rho}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau_{yy}h}{\rho}\right)
\end{aligned} \tag{C.1.33}$$

Les équations conservatives de Saint-Venant peuvent aussi s'écrire sous la forme vectorielle suivante :

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial y} = \mathbf{S} \tag{C.1.34}$$

où les différentes matrices sont définies par :

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} h \\ q_x \\ q_y \end{pmatrix} \quad \mathbf{F}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} q_x \\ \frac{q_x^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \\ \frac{q_x q_y}{h} \end{pmatrix} \mathbf{G}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} q_y \\ \frac{q_x q_y}{h} \\ \frac{q_y^2}{h} + \frac{gh^2}{2} \end{pmatrix} \quad \mathbf{S}(\mathbf{U}) = \begin{pmatrix} 0 \\ gh\left(S_{0x} - S_{fx}\right) + T_{xx} + T_{xy} \\ gh\left(S_{0y} - S_{fy}\right) + T_{yx} + T_{yy} \end{pmatrix} \tag{C.1.35}$$

Avec les termes de turbulence regroupés dans la matrice de turbulence :

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} T_{xx} & T_{xy} \\ T_{yx} & T_{yy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tau_{xx}h}{\rho}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau_{xy}h}{\rho}\right) \\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\tau_{xy}h}{\rho}\right) & \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\tau_{yy}h}{\rho}\right) \end{pmatrix} \tag{C.1.36}$$