

Faculté des sciences

Fonctionnelles d'Ambrosio-Tortorelli :

Approximation via la convergence Γ de la
fonctionnelle de Mumford-Shah

Auteur : Corentin François

Promoteur : Heiner Olbermann

Lecteurs : Pascal Lambrechts, Jean Van Schaftingen

Année académique 2019-2020

Remerciements

Pour commencer ces remerciements, je tiens tout naturellement à remercier mon promoteur, Monsieur le Professeur Heiner Olbermann, pour sa constante présence à mes côtés tout au long de cette année de travail, pour sa disponibilité, pour son aide et ses nombreux conseils, pour m'avoir guidé du début jusqu'à la fin tout en me laissant une liberté et en m'accordant une confiance qui m'ont permis de travailler dans le meilleur des cadres. Je remercie également mes parents et mon frère, soutiens sans faille, qui ont su par leur affection et leurs petits soins faire de l'écriture de ce mémoire un moment presque heureux ; et qui, par-dessus tout, ont toujours eu la bonté et la générosité de faire semblant de comprendre et de s'intéresser à ce que je faisais. Finalement, une dernière pensée à tous ces amis, sans qui la vie serait quand même moins sympathique, et qui je l'espère resteront avec moi bien des années après la remise de ce mémoire.

Table des matières

Remerciements	i
Chapitre 1. Introduction	1
Chapitre 2. Rappels généraux : Analyse et théorie de la mesure	5
1. Rappels de théorie de la mesure	5
2. Rappels d'analyse	10
Chapitre 3. Mesure de Hausdorff	15
1. $\mathcal{H}^k$: définition et propriétés de base	15
2. Dimension de Hausdorff	19
3. Illustrations pratiques	20
4. Résultats supplémentaires	22
Chapitre 4. Espaces de Sobolev et Fonctions à variation bornée	25
1. Espaces de Sobolev	25
2. Espace BV - Définitions et propriétés fondamentales	27
3. Limites approximatives et notions connexes	30
4. Les espaces SBV et $GSBV$	34
Chapitre 5. Calcul variationnel et convergence Γ	37
1. Calcul variationnel - La méthode directe	37
2. Convergence Γ	39
Chapitre 6. Fonctionnelle de Mumford-Shah	45
1. Présentation du problème	45
2. Les fonctionnelles F_h et G_h	48
3. Équicoercivité et convergence Γ	57
4. Conclusion	78
Chapitre 7. Conclusion du mémoire	81
Bibliographie	83

Introduction

En 1989, les mathématiciens américains David Mumford et Jayant Shah proposèrent dans leur papier conjoint *Optimal Approximations by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems* [14] un nouveau modèle mathématique en théorie de la segmentation d'images. L'objectif général du problème est d'identifier sur une image les différentes composantes de celle-ci (objets, personnes,...) et d'établir précisément les lignes de transition sur l'image entre ces différents éléments, les "discontinuités", et d'ensuite lisser l'image non pas d'une manière globale, mais composante par composante (voir le chapitre 6 pour une présentation plus détaillée).



FIGURE 1. Segmentation d'image - Illustration [4]

L'approche proposée par D. Mumford et J. Shah dans leur article pour résoudre ce problème est de définir l'image lissée comme minimiseur d'une fonctionnelle, depuis lors appelée fonctionnelle de Mumford-Shah :

$$G(u) = \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + \beta(u - g)^2] dx + \alpha \mathcal{H}^{n-1}(S_u).$$

Dans l'article original, l'existence d'un tel minimiseur était seulement supposé. Avec le temps, plusieurs démonstrations ont été proposées, et nous étudierons en particulier celle proposée par L. Ambrosio et V.M. Tortorelli dans [8]. Contrairement à des travaux plus directs, établissant l'existence de minimiseurs sur des propriétés de coercivité et de semi-continuités de la fonctionnelle sur un ensemble de fonctions adéquat (voir [11] par exemple),

l'idée adoptée par leur article est de prouver l'existence d'un minimiseur en approximant le problème de minimisation de la fonctionnelle de Mumford-Shah par celui de fonctionnelles plus simples dans leurs formes, et donc dans leur traitement, que nous appellerons dans ce travail fonctionnelles d'Ambrosio-Tortorelli, définies pour tout $h \in \mathbb{N}$ par :

$$F_h(u, z) = \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla z|^2](1 - z^2)^{2h} + \frac{1}{4}(\alpha h^2)z^2 dx.$$

Le première question à se poser est évidemment ce que signifie "approximer un problème variationnel". En effet, ce qui importe n'est pas tant une convergence ponctuelle ou uniforme des fonctionnelles, mais bien la convergence des minimiseurs et des valeurs minimales. Tout ceci sera assuré par un type de convergence introduit par E. de Giorgi dans les années 80, tout spécialement conçue pour satisfaire ce genre de conditions, la convergence Γ . L'approche par convergence Γ adoptée par Ambrosio et Tortorelli a le mérite non seulement de prouver l'existence d'un minimiseur, mais également de fournir une méthode pratique pour l'approcher par des fonctions plus simples à calculer, comme nous en parlerons dans les chapitres 5 et 6.

Ce mémoire sera organisé de la manière suivante. Dans le chapitre 2, nous tâcherons de condenser tous les prérequis de ce mémoires, rappels se réduisant principalement à des résultats d'analyse et de théorie de la mesure plus ou moins connus. Dans les chapitres 3 et 4, nous présenterons les deux notions supposées nouvelles pour bien comprendre le problème de minimisation de la fonctionnelle de Mumford-Shah. Premièrement, dans le chapitre 3, nous présenterons les mesures de Hausdorff (le terme $\mathcal{H}^{N-1}$ de la fonctionnelle ci-dessus), et deuxièmement, dans le chapitre 4, nous présenterons les fonctions à variation bornée, les espaces de fonctions en découlant, et quelques résultats concernant les limites, la continuité et la dérivabilité approximatives (en particulier, le terme S_u), en faisant un détour par les fonctions de Sobolev. Le chapitre 5 sera quant à lui consacré à un rappel de la méthode directe en analyse variationnelle, et à la convergence Γ , outil principal dans la démonstration du chapitre suivant. Finalement, dans le chapitre 6, le chapitre central de ce mémoire, nous nous attaquerons à la résolution du problème de minimisation de la fonctionnelle de Mumford-Shah. Le chapitre 7 nous servira de conclusion.

Nous avons choisi comme ligne de conduite de concentrer massivement les démonstrations sur le chapitre 6, en tant que chapitre central, et sur les résultats principaux des autres chapitres considérés comme non connus par

l'auteur avant étude de ce mémoire et ne nécessitant pas trop de théorie extérieure à ce mémoire, de peur d'alourdir celui-ci. Les preuves des autres résultats importants seront à consulter dans les références indiquées en début de chapitre, ou plus spécifiquement avant ou après l'énoncé.

Rappels généraux : Analyse et théorie de la mesure

Ce premier chapitre a principalement pour but d'établir les bases nécessaires en théorie de la mesure et en analyse pour un bon déroulement de la suite de ce mémoire, et surtout de fixer les notations. La première partie est concentrée sur les définitions et propriétés des mesures et mesures extérieures. La deuxième se préoccupera des notions d'intégrales, fonctions L^p et des limites supérieures et inférieures. Ce chapitre est basé sur [7], à l'une ou l'autre exception près, qui seront alors mentionnées.

1. Rappels de théorie de la mesure

1.1. Mesures positives et mesures extérieures. Commençons par rappeler les notions fondamentales de mesures extérieures et de mesures :

DÉFINITION 2.1 (Mesure extérieure). *On appelle mesure extérieure sur un ensemble X une application $\mu : \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, +\infty]$ (où $\mathcal{P}(X)$ est l'ensemble des parties de X) qui vérifie :*

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- (σ -sous-additivité) pour tout $E \subset X$, pour toute suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ telle que $E \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n$,

$$\mu(E) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(E_n).$$

De plus, si X est muni d'une structure d'espace métrique (X, d) , on dit que μ est une mesure extérieure métrique si μ est une mesure extérieure sur X et μ satisfait :

- (additivité sur espace métrique) pour tout $E, F \subset X$ tels que $\text{dist}(E, F) = \inf\{d(x, y) : x \in E, y \in F\} > 0$, on a

$$\mu(E \cup F) = \mu(E) + \mu(F).$$

DÉFINITION 2.2 (Mesures (positives)). *Soit $(X, \mathcal{E})$ un espace mesurable. Une mesure (positive) μ sur $(X, \mathcal{E})$ est une application $\mu : \mathcal{E} \rightarrow [0, +\infty]$ qui satisfait :*

- $\mu(\emptyset) = 0$,

- (σ -additivité) pour toute suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E}$ d'ensembles deux à deux disjoints, on a

$$\mu \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n \right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(E_n).$$

On appellera espace mesuré tout triplet $(X, \mathcal{E}, \mu)$ tel que $(X, \mathcal{E})$ est un espace mesurable et μ est une mesure sur $(X, \mathcal{E})$. Si de plus $\mu(X) < \infty$, on dira que μ est σ -finie.

Introduisons au passage la notion de restriction d'une mesure à un sous-ensemble mesurable :

DÉFINITION 2.3. Soit $(X, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Pour tout $E \in \mathcal{E}$, on peut définir la restriction de la mesure μ à l'ensemble E notée $\mu \llcorner E$ par :

$$\mu \llcorner E(F) = \mu(E \cap F) \text{ pour tout } F \in \mathcal{E}.$$

Cette définition pourra être étendue aux mesures vectorielles, définies plus bas.

Le but est maintenant de voir comment, à partir d'un espace muni d'une mesure extérieure, on peut réussir à construire un espace mesuré et profiter de sa meilleure structure. Pour cela, introduisons :

DÉFINITION 2.4 (Ensembles mesurables pour une mesure extérieure). Soit X un ensemble non vide et μ une mesure extérieure. Un ensemble $E \subset X$ est dit μ -mesurable si pour tout $F \subset X$, on a

$$\mu(F) = \mu(F \cap E) + \mu(F \setminus E).$$

Remarquons que si $\mu(E) = 0$, alors E est μ -mesurable. On peut montrer que les ensembles μ -mesurables forment une σ -algèbre. La restriction de μ à cette σ -algèbre fournit donc une mesure sur X . Nous nous intéresserons plus particulièrement à une σ -algèbre particulière.

DÉFINITION 2.5. Soit X un ensemble non vide muni d'une topologie, alors, la tribu de Borel $\mathcal{B}(X)$ sur X associée à cette topologie est la plus petite σ -algèbre générée par tous les ensembles ouverts de X , ou, de manière équivalente, engendrée par tous les fermés de X . On appelle borélien tout ensemble de $\mathcal{B}(X)$. On dira d'une fonction $f : X \rightarrow Y$ qu'elle est borélienne si pour tout ensemble ouvert A de Y , $f^{-1}(A) \in \mathcal{B}(X)$.

Le Critère de Carathéodory ci-dessous nous affirme que, si la mesure extérieure est métrique, alors, tous les boréliens sont μ -mesurables, et il sera

donc possible de restreindre μ sur cette σ -algèbre. A priori celle-ci est plus petite que celle des ensembles mesurables, mais est plus facilement maniable (cf. [7], théorème 1.49).

THÉORÈME 2.6 (Critère de Carathéodory). *Soit (X, d) un espace métrique et μ une mesure extérieure métrique sur X . Alors, μ est σ -additive sur $\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)$ et donc $(\mathbb{R}^N, \mathcal{B}(\mathbb{R}^N), \mu|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)})$ est un espace mesuré sur $\mathbb{R}^N$, où $\mu|_{\mathcal{B}(\mathbb{R}^N)} : \mathcal{B}(\mathbb{R}^N) \rightarrow [0, +\infty] : B \mapsto \mu(B)$ est la restriction de μ à la tribu borélienne de $\mathbb{R}^N$.*

Une mesure extérieure μ sur un espace topologique X telle que tout borélien B est mesurable est appelée une mesure borélienne. On ajoutera au passage la notion de mesure de Radon :

DÉFINITION 2.7. *Toute application d'ensembles définie sur les ensembles boréliens relativement compacts de X (c'est-à-dire inclus dans un compact de X) telle que sa restriction à chaque compact $K \subset X$ est une mesure est appelée une mesure de Radon.*

Pour fixer les notations, considérons ces mesures bien connues :

EXEMPLE 2.8 (Mesure de comptage). Soit X un ensemble non vide et soit $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties de X . On définit la mesure de comptage $\#$ sur $(X, \mathcal{P}(X))$ par $\#(\emptyset) = 0$, $\#(E)$ égale le cardinal de E si E est fini, et $\#(E) = +\infty$ sinon.

EXEMPLE 2.9 (Mesure extérieure de Lebesgue). Soit dans $\mathbb{R}^N$ le cube de centre x de rayon r : $Q_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^N : \max_{1 \leq i \leq N} |x_i - y_i| < r\}$. On définit la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^N$ par

$$\mathcal{L}^N(E) = \inf \left\{ \sum_{h=0}^{+\infty} (2r_h)^N : E \subset \bigcup_{h=0}^{+\infty} Q_{r_h}(x_h) \right\}.$$

De manière générale, sur un espace mesuré $(X, \mathcal{E}, \mu)$, on appelle $\mathcal{E}_\mu = \{E \cup N : E \in \mathcal{E}, N \text{ } \mu\text{-négligeable}\}$ la μ -complétion de $\mathcal{E}$. La tribu de Lebesgue est par définition la $\mathcal{L}^N$ -complétion de la tribu borélienne dans $\mathbb{R}^N$.

DÉFINITION 2.10. *Soit $(X, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Un ensemble $E \subset X$ est dit μ -mesurable si $X \in \mathcal{E}_\mu$.*

On remarque que si μ est la restriction d'une mesure extérieure μ^* à l'ensemble $\mathcal{E}$ des sous-ensembles de X μ^* -mesurables, alors, les deux définitions de μ -mesurabilité pour un sous-ensemble sont équivalentes.

1.2. Mesures réelles et vectorielles. Nous présentons dans cette sous-section une autre extension au concept de mesure positive, en permettant de ne plus seulement devoir associer aux sous-ensembles mesurables une valeur entre 0 et $+\infty$.

DÉFINITION 2.11. *Soit $(X, \mathcal{E})$ un espace mesurable et $m \geq 1$. On appellera mesure vectorielle toute application $\mu : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{R}^N$ satisfaisant*

- $\mu(\emptyset) = 0$,
- *pour toute suite $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments deux-à-deux disjoints de $\mathcal{E}$, $\sum_{n=0}^{+\infty} \mu(E_n)$ converge absolument et $\mu(\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} \mu(E_n)$.*

Si $m = 1$, on pourra parler de mesure réelle à la place de mesure vectorielle de dimension $m = 1$.

On remarque qu'une mesure positive n'est pas nécessairement une mesure réelle, principalement à cause de la condition de convergence absolue. À partir de telles mesures, définissons :

DÉFINITION 2.12. *Soit μ une mesure vectorielle. On définit pour tout $E \in \mathcal{E}$ sa variation totale $|\mu|$ par*

$$|\mu|(E) = \sup \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} |\mu(E_n)| : (E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{E} \text{ deux-à-deux disjoints}, E = \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n \right\}.$$

Si $m = 1$, on définit également sa partie positive (resp. négative) définie par $\mu^+ = \frac{|\mu| + \mu}{2}$ (resp. $\mu^- = \frac{|\mu| - \mu}{2}$).

La proposition suivante caractérise un peu plus la notion de variation totale.

PROPOSITION 2.13. *Soit μ une mesure vectorielle sur un espace mesurable $(X, \mathcal{E})$. Alors, $|\mu|$ est une mesure positive et finie : $|\mu|(X) < \infty$.*

La preuve de la proposition (voir théorème 1.6 dans [7]) montre également, en remarquant que pour tout $E \in \mathcal{E}$, $0 \leq \mu^+(E) \leq |\mu|(E)$, $0 \leq \mu^-(E) \leq |\mu|(E)$, que μ^+ et μ^- sont des mesures positives finies. De là, chaque mesure réelle peut se décomposer sous la forme $\mu = \mu^+ - \mu^-$, dite décomposition de Jordan.

1.3. Absolue continuité et mesures mutuellement singulières.

Cette section a pour but de montrer deux relations simples que peuvent avoir deux mesures l'une par rapport à l'autre.

DÉFINITION 2.14 (Mesure absolument continue). Soient μ, ν deux mesures sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{E})$. La mesure ν est absolument continue par rapport à μ , ce que l'on notera $\nu \ll \mu$, si $\mu(A) = 0$ implique $\nu(A) = 0$ pour tout $A \in \mathcal{E}$.

DÉFINITION 2.15. Soient μ, ν deux mesures sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{E})$. On dit que μ et ν sont mutuellement singulières, noté $\mu \perp \nu$, s'il existe $E \in \mathcal{E}$ tel que $\mu(E) = 0$ et $\nu(X \setminus E) = 0$.

On peut étendre ces notions pour des mesures vectorielles :

DÉFINITION 2.16.

- Soient μ une mesure et ν une mesure vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{E})$. Alors, on dit que ν est absolument continue par rapport à μ si $|\nu| \ll \mu$ dans le sens de la définition précédente.
- Soient μ et ν deux mesure vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^N$ sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{E})$. Alors, on dit que ν et μ sont mutuellement singulières si $|\mu| \perp |\nu|$ dans le sens de la définition précédente.

Si le contexte est clair, on gardera les mêmes notations que dans le cas des mesures positives. Le théorème suivant nous permettra de décomposer une mesure par rapport à une autre.

THÉORÈME 2.17 (Radon-Nikodym). Soient, μ une mesure σ -finie et ν une mesure σ -finie (resp. vectorielle à valeur dans $\mathbb{R}^N$) sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{E})$. Alors, il existe une unique paire de mesures (resp. mesures vectorielles à valeurs dans $\mathbb{R}^N$) (ν_a, ν_s) telle que

$$\nu_a \ll \mu, \nu_s \perp \mu \text{ et } \nu = \nu_a + \nu_s.$$

De plus, il existe une unique fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ (resp. $f : X \rightarrow \mathbb{R}^N$) $\in L^1(X, \mu)$ telle que $\nu_a = f\mu$. Cette fonction f sera appelée la densité de ν par rapport à μ et sera notée ν/μ .

Le théorème suivant permet de caractériser un peu plus la décomposition de Radon-Nikodym :

THÉORÈME 2.18 (Théorème de dérivation de Besicovitch). Soit μ une mesure de Radon sur un ensemble ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et ν une mesure de Radon vectorielle dans $\mathbb{R}^m$. Alors, pour μ -presque tout x dans le support de μ , la limite

$$f(x) := \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\nu(B_r(x))}{\mu(B_r(x))}$$

existe dans $\mathbb{R}^m$ et de plus, la décomposition de Radon-Nikodym de ν est donnée par $\nu = f\mu + \nu^s$, où $\nu^s = \nu \llcorner E$, où E est l'ensemble μ -négligeable suivant :

$$E = (\Omega \setminus \text{supp}\mu) \cup \left\{ x \in \text{supp} : \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{|\nu|(B_r(x))}{\mu(B_r(x))} = \infty \right\}.$$

Ces deux théorèmes sont à consulter dans [7] théorèmes 1.28 et 2.22.

2. Rappels d'analyse

2.1. Intégration. Le but de cette section est simplement de fixer les conventions et énoncer les théorèmes de base concernant l'intégration par rapport à une mesure. Commençons par quelques définitions.

DÉFINITION 2.19 (Fonction caractéristique). *Soit $(X, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré. Pour tout $E \subset X$, on définit la fonction caractéristique de E comme la fonction*

$$\chi_E : X \rightarrow \{0, 1\} : x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{si } x \notin E, \\ 1 & \text{si } x \in E. \end{cases}$$

DÉFINITION 2.20 (Fonction simple). *Soit $(X, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré, une fonction $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction simple si l'image de f est finie, c'est-à-dire s'il existe $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $A_0, \dots, A_n \subset \mathbb{R}$ tels que*

$$f(x) = \sum_{i=0}^n a_i \chi_{A_i}(x).$$

DÉFINITION 2.21 (Fonction mesurable). *Soit $(X, \mathcal{E}, \mu)$ un espace mesuré et (Y, d) un espace métrique. Alors, une fonction $f : X \rightarrow Y$ est μ -mesurable si pour tout ouvert $A \subset Y$, $f^{-1}(A)$ est μ -mesurable.*

DÉFINITION 2.22 (Parties positive et négative d'une fonction). *Soit $f : X \rightarrow \mathbb{R}$. On pose $f^+ = \max\{f, 0\}$ et $f^- = \max\{-f, 0\}$. On remarque que $f = f^+ - f^-$.*

De là, on va successivement définir la notion d'intégrale sur ces fonctions de plus en plus complexes.

DÉFINITION 2.23 (Intégrale par rapport à une mesure μ).

- *L'intégrale par rapport à la mesure μ d'une fonction caractéristique χ_E , $E \subset X$ μ -mesurable, est définie par $\int_X \chi_E d\mu = \mu(E)$,*

- *L'intégrale par rapport à la mesure μ d'une fonction simple μ -mesurable $f = \sum_{i=0}^n a_i \chi_{A_i}$ est définie par*

$$\int_X f d\mu = \sum_{i=0}^n a_i \mu(A_i) = \sum_{z \in \text{Im}(f)} z \mu(f^{-1}(z)),$$

avec la convention que si $\mu(f^{-1}(0)) = +\infty$, on pose $0 \times \mu(f^{-1}(0)) = 0$.

- *L'intégrale par rapport à la mesure μ d'une fonction mesurable positive $f : X \rightarrow [0, +\infty]$ est définie par*

$$\int_X f d\mu = \sup \left\{ \int_X s d\mu : s \text{ simple, mesurable et } s \leq f \right\},$$

- *Si $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ est une fonction mesurable telle que $\int_X f^+ d\mu < +\infty$ ou $\int_X f^- d\mu < +\infty$, on dit que f est μ -intégrable et*

$$\int_X f d\mu = \int_X f^+ d\mu - \int_X f^- d\mu.$$

Généralisons le concept au cas où μ est une mesure vectorielle :

DÉFINITION 2.24. *Soit μ une mesure vectorielle sur l'espace mesurable $(X, \mathcal{E})$. On définit :*

- *pour μ réelle, $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$ une fonction $|\mu|$ -mesurable telle que $\int_X |f| d|\mu| < \infty$:*

$$\int_X f d\mu = \int_X f d\mu^+ - \int_X f d\mu^-,$$

- $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_m)$ vectorielle de dimension $m > 1$, $f : X \rightarrow \mathbb{R}^m$ une fonction telle que pour tout $i \in \{1, \dots, m\}$, $\int_X |f_i| d\mu_i < \infty$:

$$\int_X f \cdot d\mu = \sum_{i=1}^m \int_X f_i d\mu_i.$$

Pour toutes les définitions d'intégrale jusqu'à présent, on définit

$$\int_A f d\mu = \int_X f \chi_A d\mu,$$

pour tout $A \subset X$ et pour tout f tels que les deux côtés de l'égalité fassent sens.

On rappelle et pose brièvement les notations pour les fonctions L^p (voir [16] pour plus de détails) :

DÉFINITION 2.25 (Norme L^p). Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $1 \leq p \leq \infty$. On définit la semi-norme $L^p(\Omega)$ d'une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N \in L^p(\Omega)$ par

$$\begin{cases} \|f\|_{p,\Omega} = (\int_{\Omega} |f|^p)^{\frac{1}{p}}, & \text{si } p < \infty \\ \|f\|_{p,\Omega} = \inf \{ \lambda \geq 0 : \mathcal{L}^N(\{|f| > \lambda\}) = 0 \}, & \text{si } p = \infty. \end{cases}$$

Si l'ensemble Ω est évident, il ne sera pas nécessairement mentionné dans la notation de la norme. On prend la convention habituelle d'identifier deux fonctions si elles sont égales $\mathcal{L}^N$ -presque partout.

DÉFINITION 2.26 (Espace L^p). Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ appartient à l'espace $L^p(\Omega)$ pour $1 \leq p \leq \infty$ si $\|f\|_{p,\Omega} < \infty$.

On introduit une notion plus faible :

DÉFINITION 2.27 (Fonctions L^p_{loc}). Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert, $1 \leq p \leq \infty$. Une fonction $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ appartient à l'espace $L^p_{loc}(\Omega)$ si pour tout $V \Subset \Omega$, c'est-à-dire $V \subset \Omega$ ouvert à fermeture compacte dans Ω , la restriction $f|_V$ de f à V appartient à $L^p(V)$.

On rappelle que $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers f dans $L^p_{loc}(\Omega)$ si pour tout $V \Subset \Omega$, $\|f_n - f\|_{p,V} \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

2.2. Limites inférieures, supérieures et semi-continuité. Nous remplaçons rapidement les définitions et règles de calcul des limites supérieures et inférieures. Cette section est basée sur [9].

DÉFINITION 2.28 (lim inf, lim sup).

- Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \bar{\mathbb{R}}$. On définit les limites inférieure et supérieure pour une suite :

$$\liminf_{n \rightarrow +\infty} a_n = \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq n}} a_k, \quad \limsup_{n \rightarrow +\infty} a_n = \inf_{n \in \mathbb{N}} \sup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ k \geq n}} a_k.$$

- Soit (X, d) un espace métrique, et $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. On définit, pour $x \in X$, les limites inférieure et supérieure pour une fonction :

$$\liminf_{y \rightarrow x} f(y) = \inf \left\{ \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) : (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X \text{ et } y_n \rightarrow x \text{ dans } (X, d) \right\},$$

$$\limsup_{y \rightarrow x} f(y) = \sup \left\{ \limsup_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) : (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X \text{ et } y_n \rightarrow x \text{ dans } (X, d) \right\}.$$

On entend naturellement que $y_n \rightarrow x$ dans (X, d) si $d(y_n, x) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

On se souviendra de quelques propriétés élémentaires de ces limites inférieure et supérieure :

PROPOSITION 2.29.

- (1) $\liminf_{y \rightarrow x} f(y) \leq f(x)$ et $\limsup_{y \rightarrow x} f(y) \geq f(x)$,
- (2) $\liminf_{y \rightarrow x} (-f(y)) = -\limsup_{y \rightarrow x} f(y)$ et inversement,
- (3) $\liminf_{y \rightarrow x} (f(y) + g(y)) \geq \liminf_{y \rightarrow x} f(y) + \liminf_{y \rightarrow x} g(y)$,
- (4) $\limsup_{y \rightarrow x} (f(y) + g(y)) \leq \limsup_{y \rightarrow x} f(y) + \limsup_{y \rightarrow x} g(y)$.

DÉMONSTRATION. Pour le premier point, il suffit de prendre la suite constante $x_n = x$ comme suite test pour l'inf (resp. le sup). Les points suivants proviennent des propriétés élémentaires $\inf_{n \in \mathbb{N}} (-y_n) = -\sup_{n \in \mathbb{N}} y_n$, $\sup_{n \in \mathbb{N}} (f(y_n) + g(y_n)) \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} f(y_n) + \sup_{n \in \mathbb{N}} g(y_n)$, pour toute suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$, et les fomules inverses. $\square$

À partir de ces définitions, on introduit les notions de semi-continuité inférieure et supérieure pour une fonction.

DÉFINITION 2.30 (Semi-continuité). Soit (X, d) un espace métrique et $f : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$. On dit que f est (séquentiellement) semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) en $x \in X$ si pour toute suite $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $y_n \rightarrow x$ dans (X, d) , on a

$$f(x) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} f(y_n) \text{ (resp. } f(x) \geq \limsup_{n \rightarrow \infty} f(y_n)),$$

ou autrement dit, $f(x) = \liminf_{y \rightarrow x} f(y)$ (resp. $f(x) = \limsup_{y \rightarrow x} f(y)$). Une fonction est semi-continue inférieurement (resp. supérieurement) si elle l'est en tout point $x \in X$.

Si une notion de convergence dans X est introduite sans expliciter en particulier une distance, la définition ci-dessus restera d'application, en effectuant les modifications qui conviennent. Comme nous ne serons occupés que par des problèmes de minimisation, c'est surtout la semi-continuité inférieure qui nous intéressera. Voici quelques propriétés utiles.

PROPOSITION 2.31.

Soit $f, g : X \rightarrow \bar{\mathbb{R}}$.

- (1) si f, g sont semi-continues inférieurement, alors, $f + g$ l'est aussi,
- (2) soit $\{f_i\}_{i \in I}$ une famille de fonctions semi-continues inférieurement non nécessairement dénombrable (c'est-à-dire I ensemble d'indices non nécessairement dénombrable). Alors, la fonction $\sup_{i \in I} f_i(x)$ est semi-continue inférieurement.
- (3) f est continue en $x \in X$ si et seulement si elle est semi-continue inférieurement et supérieurement en x .

DÉMONSTRATION.

- (1) On a $\liminf_{y \rightarrow x} (f(y) + g(y)) \geq \liminf_{y \rightarrow x} f(y) + \liminf_{y \rightarrow x} g(y) \geq f(x) + g(x)$.
- (2) Soit $x \in X$ et $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ telle que $y_n \rightarrow x$. Alors, pour tout $i \in I$, on a

$$f_i(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} f_i(y_n) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sup_{i \in I} f_i(y_n),$$

où la dernière égalité provient du résultat évident

$$f \leq g \Rightarrow \liminf_{n \rightarrow +\infty} f(y_n) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} g(y_n)$$

pour tout $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$. En prenant le supremum sur I dans l'inégalité, on trouve $\sup_{i \in I} f_i(x) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \sup_{i \in I} f_i(y_n)$.

- (3) Soient $x \in X$, $\epsilon > 0$. Via la définition alternative (on peut montrer assez directement l'équivalence)

$$\liminf_{y \rightarrow x} f(y) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \inf_{d(x,y) < 1/k} f(y),$$

et l'équivalent pour la limite supérieure

$$\limsup_{y \rightarrow x} f(y) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \sup_{d(x,y) < 1/k} f(y),$$

on a qu'il existe $k_1, k_2 > 0$ tels que, pour tout $k \geq k_1$, $l \geq k_2$,

$$-\epsilon < f(x) - \left(\sup_{d(x,y) < 1/k} f(y) \right), \quad f(x) - \left(\inf_{d(x,y) < 1/l} f(y) \right) < \epsilon.$$

De là, pour tout $z \in X$, $d(x, z) < \min\{k_1, k_2\}$, on a

$$-\epsilon < f(x) - \left(\sup_{d(x,y) < 1/k} f(y) \right) \leq f(x) - f(z) \leq f(x) - \left(\inf_{d(x,y) < 1/l} f(y) \right) < \epsilon,$$

donc, en posant $\delta = \min\{k_1, k_2\}$, on a $|f(x) - f(z)| < \epsilon$ pour tout $z \in X$, $d(x, z) < \delta$. Donc, f est continue en x et

$$\lim_{z \rightarrow x} f(z) = f(x) = \liminf_{z \rightarrow x} f(z) = \limsup_{z \rightarrow x} f(z).$$

□

Mesure de Hausdorff

Le but de ce chapitre est de se doter d'un ensemble de mesures complémentaires à celle de Lebesgue, particulièrement utiles pour analyser plus finement la "taille" des sous-ensembles de $\mathbb{R}^N$ $\mathcal{L}^N$ -négligeables. Ainsi pourra-t-on à chacun de ces sous-ensembles E attribuer un nombre positif $\mathcal{H}_{\dim}(E)$, sa dimension de Hausdorff, et le mesurer " $\mathcal{H}_{\dim}(E)$ -dimensionnellement". Nous verrons que cette procédure est cohérente avec les mesures "naturelles" sur $\mathbb{R}^N$, via par exemple l'identification $\mathcal{H}^N = \mathcal{L}^N$ sur $\mathbb{R}^N$, ou via l'équivalence des mesures de Hausdorff $\mathcal{H}^k$, k naturel, avec les mesures de surface, longueur,... pour des surfaces, courbes suffisamment régulières. Ce chapitre se base principalement sur le chapitre 2 de [13]

1. $\mathcal{H}^k$: définition et propriétés de base

Commençons par définir plus exactement la mesure de Hausdorff.

DÉFINITION 3.1 (Mesure de Hausdorff). *Soit $k \in [0, +\infty)$, $E \in \mathbb{R}^N$. On pose*

$$\mathcal{H}_\delta^k(E) = \frac{\omega_k}{2^k} \inf \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} (\text{diam}(E_i))^k : E_i \subset \mathbb{R}^N, \text{diam}(E_i) \leq \delta, E \subset \bigcup_{i=0}^{+\infty} E_i, \right\},$$

où $\omega_k = \frac{\pi^{k/2}}{\Gamma(1+k/2)}$, $\text{diam}(A) = \sup\{|x - y| : x, y \in A\}$, pour tout $A \subset \mathbb{R}^N$, avec les conventions $\text{diam}(\emptyset) = 0$, et dans le cas $k = 0$, $\text{diam}(E_n) = 0 \Rightarrow (\text{diam}(E_n))^0 = 0$. La mesure de Hausdorff (de dimension k) d'un ensemble $E \subset \mathbb{R}^N$ est définie par :

$$\mathcal{H}^k(E) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^k(E).$$

On remarque que cette limite est bien définie car la fonction $\delta \mapsto \mathcal{H}_\delta^k(E)$ est monotone décroissante pour tout $E \subset \mathbb{R}^N$, augmenter la valeur de δ permettant de prendre en considération pour l'infimum des recouvrements supplémentaires. Cela montre en particulier que $\mathcal{H}^k(E)$ est défini pour tout $E \subset \mathbb{R}^N$, peu importe la structure de mesure que nous allons introduire ci-après. On remarquera également l'introduction d'un paramètre $\omega_k/2^k = \mathcal{L}^k(B^k(0, 1))$, ayant pour seul but de donner l'égalité $\mathcal{H}^N = \mathcal{L}^N$ sur $\mathbb{R}^N$ sans

introduction de paramètre supplémentaire dans l'égalité. Commençons par montrer que ce que nous avons annoncé jusqu'à présent comme étant une mesure en est bien une.

THÉORÈME 3.2. *Pour tout $k \in [0, +\infty)$, la mesure de Hausdorff $\mathcal{H}^k$ définit une mesure extérieure métrique sur $\mathbb{R}^N$ et sa restriction aux boréliens définit une mesure.*

DÉMONSTRATION. Commençons par remarquer que pour tout $\delta \in (0, +\infty]$, $\mathcal{H}_\delta^k$ définit une mesure extérieure sur $\mathbb{R}^N$. En effet, on obtient trivialement $\mathcal{H}_\delta^k(\emptyset) = 0$ en prenant $E_i = \emptyset$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Maintenant, soit $E \subset \mathbb{R}^N$, et soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $E \subset \bigcup_{n \in \mathbb{N}} E_n$. Soit $\epsilon > 0$. Par la définition d'infimum, on a que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un recouvrement $(F_i^n)_{i \in \mathbb{N}}$ de E_n tel que $\text{diam}(F_i^n) \leq \delta$ pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tel que

$$\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\omega_k}{2^k} (\text{diam}(F_i^n))^k \leq \mathcal{H}_\delta^k(E_n) + \epsilon/2^{k+1}.$$

Alors, en remarquant que

$$E \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{i=0}^{+\infty} F_i^n,$$

on conclut que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} \bigcup_{i=0}^{+\infty} F_i^n$ est un recouvrement de E tel que pour tout $(n, i) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}$, $\text{diam}(F_i^n) \leq \delta$, et donc,

$$\mathcal{H}_\delta^k(E) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\omega_k}{2^k} (\text{diam}(F_i^n))^k \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}_\delta^k(E_n) + \epsilon.$$

Comme ϵ est arbitraire, on conclut que

$$\mathcal{H}_\delta^k(E) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}_\delta^k(E_n).$$

Montrons maintenant que $\mathcal{H}^k$ est une mesure extérieure métrique. On a trivialement que

$$\mathcal{H}^k(\emptyset) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^k(\emptyset) = 0.$$

Soit maintenant $E \subset \mathbb{R}^N$ et $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telle que $E \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n$. Puisque $\mathcal{H}_\delta^k$ est une mesure extérieure pour tout $\delta > 0$, et que la fonction $\delta \mapsto \mathcal{H}_\delta^k(E)$ est décroissante pour tout $E \subset \mathbb{R}^N$, on a

$$\mathcal{H}_\delta^k(E) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}_\delta^k(E_n) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}^k(E_n).$$

En prenant la limite $\delta \rightarrow 0$, on obtient

$$\mathcal{H}^k(E) \leq \sum_{n=0}^{+\infty} \mathcal{H}^k(E_n).$$

Finalement, soit $E, F \subset \mathbb{R}^N$ tels que $d = \text{dist}(E, F) > 0$. Alors, pour tout $0 < \delta < d$, on a que si $(G_i)_{i \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ est un recouvrement de $E \cup F$ tel que $\text{diam}(G_i) \leq \delta$, alors, pour tout $i \in \mathbb{N}$, soit $G_i \cap E = \emptyset$, soit $G_i \cap F = \emptyset$ (car sinon, si $x \in G_i \cap E$, $y \in G_i \cap F$, alors $d \leq |x - y| \leq \text{diam}(G_i) \leq \delta$, ce qui entraîne une contradiction). De là, tout recouvrement $(G_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de $E \cup F$ peut se décomposer sous la forme

$$\bigcup_{i=0}^{+\infty} G_i = \left(\bigcup_{j=0}^{+\infty} G_j^E \right) \cup \left(\bigcup_{l=0}^{+\infty} G_l^F \right),$$

tel que pour tout $j \in J$,

- soit $G_j^E = \emptyset$, soit il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $G_j^E = G_i$
- $G_j^E \cap \left(\bigcup_{l=0}^{+\infty} G_l^F \right) = \emptyset$, $G_j^E \cap E \neq \emptyset$

et pour tout $l \in L$,

- soit $G_l^F = \emptyset$, soit il existe $i \in \mathbb{N}$ tel que $G_l^F = G_i$
- $G_l^F \cap \left(\bigcup_{j=0}^{+\infty} G_j^E \right) = \emptyset$, $G_l^F \cap F \neq \emptyset$

et tel que pour tout $i \in \mathbb{N}$, soit il existe $j \in \mathbb{N}$ tel que $G_i = G_j^E$, soit il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $G_i = G_l^F$. De là, pour tout $0 < \delta < d$,

$$\begin{aligned} & \mathcal{H}_\delta^k(E \cup F) \\ &= \inf \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{\omega_k}{2^k} (\text{diam}(G_i))^k : (E \cup F) \subset \bigcup_{i=0}^{+\infty} G_i, \text{diam}(G_i) \leq \delta \ \forall i \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\omega_k}{2^k} (\text{diam}(G_j^E))^k + \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\omega_k}{2^k} (\text{diam}(G_l^F))^k : \right. \\ & \quad \left. E \subset \bigcup_{j=0}^{+\infty} G_j^E, \text{diam}(G_j^E) \leq \delta \ \forall j \in \mathbb{N}, F \subset \bigcup_{l=0}^{+\infty} G_l^F, \text{diam}(G_l^F) \leq \delta \ \forall l \in \mathbb{N} \right\} \\ &\geq \inf \left\{ \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\omega_k}{2^k} (\text{diam}(G_j^E))^k : E \subset \bigcup_{j=0}^{+\infty} G_j^E, \text{diam}(G_j^E) \leq \delta \ \forall j \in \mathbb{N} \right\} \\ & \quad + \inf \left\{ \sum_{l=0}^{+\infty} \frac{\omega_k}{2^k} (\text{diam}(G_l^F))^k : F \subset \bigcup_{l=0}^{+\infty} G_l^F, \text{diam}(G_l^F) \leq \delta \ \forall l \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \mathcal{H}_\delta^k(E) + \mathcal{H}_\delta^k(F). \end{aligned}$$

L'autre sens de l'inégalité s'obtient par σ -sous-additivité de $\mathcal{H}_\delta^k$. On trouve donc $\mathcal{H}_\delta^k(E \cup F) = \mathcal{H}_\delta^k(E) + \mathcal{H}_\delta^k(F)$. En prenant la limite pour $\delta \rightarrow 0$, on trouve $\mathcal{H}^k(E \cup F) = \mathcal{H}^k(E) + \mathcal{H}^k(F)$. Donc, $\mathcal{H}^k$ est une mesure extérieure métrique sur $\mathbb{R}^N$. Le critère de Carathéodory 2.6 termine la preuve. $\square$

PROPOSITION 3.3.

- (1) $\mathcal{H}^0$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{R}^N$,
- (2) $\mathcal{H}^k(\lambda E) = \lambda^k \mathcal{H}^k(E)$ pour tout $\lambda > 0$, $E \subset \mathbb{R}^N$
- (3) $\mathcal{H}^k(L(E)) = \mathcal{H}^k(E)$ pour toute isométrie affine $L : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^N$,
 $A \subset \mathbb{R}^N$ (en particulier les translations)
- (4) $\mathcal{H}^k \equiv 0$ sur $\mathbb{R}^N$ si $k > N$,

DÉMONSTRATION. (1) En appliquant directement la formule, on trouve que pour tout $\delta > 0$, $E \subset \mathbb{R}^N$, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^0(E) &= \inf \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi^{0/2} (\text{diam}(E_n))^0}{\Gamma(0/2 + 1) 2^0} : E \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n, \text{diam}(E_n) \leq \delta \ \forall n \in \mathbb{N} \right\} \\ &= \inf \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} (\text{diam}(E_n))^0 : E \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n, \text{diam}(E_n) \leq \delta \ \forall n \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

Par définition, $\mathcal{H}_\delta^0(\emptyset) = \mathcal{H}^0(\emptyset) = 0$. Pour E ensemble fini de points, soit $d = \min\{|x - y| : x, y \in E\}$. Alors, pour tout $\delta < d$, $\mathcal{H}_\delta^0(E) = \#(E)$ et donc $\lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^0(E) = \#(E)$. Finalement, soit E un ensemble infini de points. Alors, soit $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset E$ une suite d'ensembles telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\#E_n = n$. Alors, par sous-additivité de $\mathcal{H}^0$, on a pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n = \#(E_n) = \mathcal{H}^0(E_n) \leq \mathcal{H}^0(E)$. En prenant la limite pour $n \rightarrow +\infty$, on trouve $\mathcal{H}^0(E) = +\infty = \#(E)$.

- (2) À chaque recouvrement $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de $E \subset \mathbb{R}^N$ correspond un recouvrement $(\lambda E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de λE . En remarquant que $\text{diam}(\lambda E_n) = \lambda \text{diam}(E_n)$, on conclut que

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_{\lambda\delta}^k(\lambda E) &= \inf \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\omega_k}{2^k} (\lambda \text{diam}(E_n))^k : \lambda E \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} (\lambda E_n), \text{diam}(\lambda E_n) \leq \lambda\delta \right\} \\ &= \lambda^k \inf \left\{ \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\omega_k}{2^k} (\text{diam}(E_n))^k : E \subset \bigcup_{n=0}^{+\infty} (E_n), \text{diam}(E_n) \leq \delta \right\} \\ &= \lambda^k \mathcal{H}_\delta^k(E). \end{aligned}$$

On conclut en prenant la limite $\delta \rightarrow 0$.

- (3) Se démontre de la même manière, en remarquant que $\bigcup_{n=0}^{+\infty} L(E_n)$ fournit un recouvrement de $L(E)$ pour tout recouvrement $\bigcup_{n=0}^{+\infty} E_n$ de $E \subset \mathbb{R}^N$, et en remarquant que $\text{diam}(L(A)) = \text{diam}(A)$ pour tout $A \subset \mathbb{R}^N$.
- (4) Soit $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$. Le cube unité $Q_1(0)$ dans $\mathbb{R}^N$ peut se décomposer en m^N cubes de longueur $1/m$ et de diamètre $\sqrt{N}/m$. De là,

$$\mathcal{H}^k(Q_1(0)) \leq \sum_{n=1}^{m^N} \frac{\omega_k}{2^k} \left(\frac{\sqrt{N}}{m} \right)^k = \frac{\omega_k N^{k/2}}{2^k} m^{N-k}.$$

Pour $k > N$, il suffit de prendre la limite $m \rightarrow +\infty$ pour trouver $\mathcal{H}^k(Q_1(0)) \leq 0$, donc $\mathcal{H}^k(Q_1(0)) = 0$. En remarquant que $\mathbb{R}^N = \bigcup_{n=0}^{+\infty} (Q_n(0))_{n \in \mathbb{N}}$, et que par 3), on a $\mathcal{H}^k(Q_n(0)) = n^k \mathcal{H}^k(Q_1(0)) = 0$, on a $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^N) \leq 0$, donc $\mathcal{H}^k(\mathbb{R}^N) = 0$. Par σ -sous-additivité, on a donc que pour tout $E \subset \mathbb{R}^N$, $\mathcal{H}^k(E) \leq \mathcal{H}^k(\mathbb{R}^N) = 0$.

□

2. Dimension de Hausdorff

Commençons cette section par la proposition justifiant l'introduction de la notion de dimension de Hausdorff.

PROPOSITION 3.4. *Soit $E \subset \mathbb{R}^N$ et $0 \leq s < t < +\infty$. Alors*

- *si $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, alors $\mathcal{H}^t(E) = 0$*
- *si $\mathcal{H}^t(E) > 0$, alors $\mathcal{H}^s(E) = +\infty$.*

DÉMONSTRATION.

- Soit $E \subset \mathbb{R}^N$ tel que $\mathcal{H}^s(E) < \infty$, et $\delta > 0$. Alors, il existe $(E_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ recouvrement de E tel que $\text{diam}(E_n) \leq \delta$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, vérifiant :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\omega_s}{2^s} (\text{diam}(E_n))^s \leq \mathcal{H}_\delta^s(E) + 1 \leq \mathcal{H}^s(E) + 1.$$

Alors,

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_\delta^t(E) &\leq \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\omega_t}{2^t} (\text{diam}(E_n))^t \\ &= \frac{\omega_t}{\omega_s} 2^{s-t} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\omega_s}{2^s} (\text{diam}(E_n))^s (\text{diam}(E_n))^{t-s} \\ &\leq \frac{\omega_t}{\omega_s} 2^{s-t} (\mathcal{H}^s(E) + 1) \delta^{t-s}. \end{aligned}$$

On conclut que $\mathcal{H}^t(E) = 0$ en faisant tendre $\delta \rightarrow 0$.

- Le deuxième point du lemme se déduit directement du premier. Supposons par contradiction que, pour un $E \subset \mathbb{R}^N$, on ait $\mathcal{H}^t(E) > 0$ et que $h^s(E) < \infty$. Alors, par le point précédent, on aurait que $\mathcal{H}^t(E) = 0$, contredisant les hypothèses.

□

DÉFINITION 3.5 (Dimension de Hausdorff). *Soit $A \subset \mathbb{R}^N$. On définit la dimension de Hausdorff de A par*

$$\mathcal{H}_{\dim}(A) \equiv \inf\{0 \leq s < +\infty : \mathcal{H}^s(A) = 0\}.$$

Par les deux propositions précédentes, on conclut que, pour tout $E \subset \mathbb{R}^N$, $\mathcal{H}_{\dim}(E) \leq N$ et que

$$\mathcal{H}^s(E) \begin{cases} = +\infty & \text{si } s < \mathcal{H}_{\dim}(E), \\ \in [0, +\infty] & \text{si } s = \mathcal{H}_{\dim}(E), \\ = 0 & \text{si } s > \mathcal{H}_{\dim}(E). \end{cases}$$

3. Illustrations pratiques

L'idée de cette section est de présenter quelques résultats pratiques pour estimer la dimension de Hausdorff d'un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$, et relier pour des cas classiques la mesure de Hausdorff à des quantités intuitives et déjà connues. Nous n'essayerons en aucun cas d'être complet, mais seulement de permettre au lecteur d'avoir quelques images en tête pour accompagner la suite de sa lecture de ce mémoire. Commençons par un résultat majeur : (voir [13] section 2.2 pour une preuve complète).

THÉORÈME 3.6. *Pour tout $E \subset \mathbb{R}^N$, $\mathcal{H}^N(E) = \mathcal{L}^N(E)$.*

Intuitivement, ce résultat nous assure que pour tout $E \subset \mathbb{R}^N$ tel que $\mathcal{L}^N(E) > 0$, alors, la dimension de Hausdorff de E est égale à N , et donc, pour tout $s < N$, $\mathcal{H}^s(E) = +\infty$, en particulier pour $s = N - 1$.

Les deux résultats suivants donnent quelques exemples du fait que les mesures de Hausdorff se comportent bien vis-à-vis des ensembles suffisamment réguliers (voir [13] section 3.3.4 et 3.4.4 pour un développement plus complet) :

PROPOSITION 3.7 (Longueur d'une courbe). *Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^N$ une application lipschitzienne et injective. Définissons, pour $-\infty < a, b < +\infty$ l'arc de courbe dans $\mathbb{R}^N$, $C := f([a, b])$. Alors,*

$$\mathcal{H}^1(C) = \int_a^b \left| \frac{df}{dx} \right| dt$$

PROPOSITION 3.8 (Surface d'un graphe). *Soit $g : \mathbb{R}^{N-1} \rightarrow \mathbb{R}$ une application lipschitzienne. Pour chaque ouvert $U \subset \mathbb{R}^{N-1}$, définissons le graphe de g sur U par $G := \{(x, g(x)) : x \in U\} \subset \mathbb{R}^N$. Alors,*

$$\mathcal{H}^{N-1}(G) = \int_U (1 + |\nabla g|^2)^{\frac{1}{2}} dx.$$

On en déduit rapidement qu'une courbe de $\mathbb{R}^N$ suffisamment régulière est de dimension de Hausdorff 1 et qu'une surface pouvant être paramétrisée de façon suffisamment régulière est de dimension $N - 1$. Il ne faut cependant pas généraliser trop vite. On peut montrer par exemple que la courbe de Peano, courbe dans le sens qu'elle est l'image d'une application définie sur un intervalle (voir [15]), est de dimension 2 car son image est le carré unité. De même, on peut construire des sous-ensembles de $\mathbb{R}^2$ pris comme limite d'une suite de courbes et de dimension de Hausdorff strictement plus grande que 1, mais strictement plus petite que 2 (voir [5] par exemple pour une illustration). Parmi celles-ci, on peut citer le flocon de Koch ou le triangle de Sierpinski, deux fractales assez connues, dont les dimensions de Hausdorff sont respectivement de $\log_3(4)$ et de $\log_2(3)$. A nouveau, cela implique que

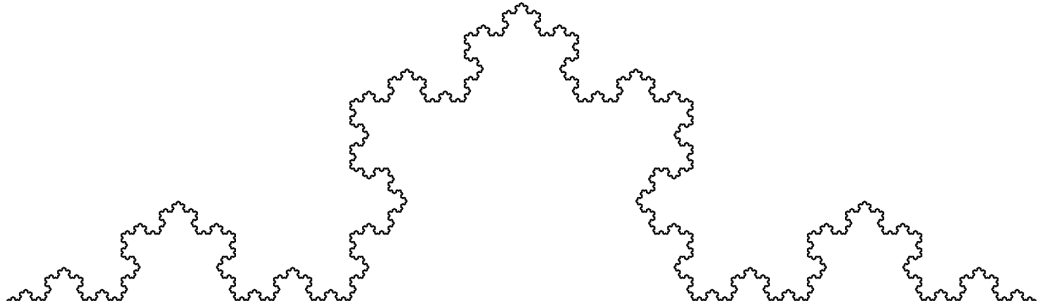


FIGURE 1. Flocon de Koch

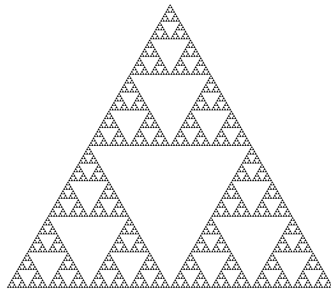


FIGURE 2. Triangle de Sierpinski

pour $N = 2$, si E est un de ces deux ensembles, $\mathcal{H}^{N-1}(E) = +\infty$.

4. Résultats supplémentaires

Nous allons exposer maintenant quelques résultats qui nous seront utiles pour la suite. Commençons par les liens entre les fonctions lipschitziennes et les mesures de Hausdorff.

DÉFINITION 3.9 (Fonction lipschitzienne). *Une fonction $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ est lipschitzienne s'il existe une constante $C > 0$ telle que pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$, $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$. On pose $Lip(f) = \sup \left\{ \frac{|f(x) - f(y)|}{|x - y|} : x, y \in \mathbb{R}^N \right\}$.*

On associe naturellement la notion proche de fonction localement lipschitzienne :

DÉFINITION 3.10. *Une fonction $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ est localement lipschitzienne si pour tout compact $K \subset \mathbb{R}^N$, la restriction de la fonction f à ce compact $f|_K$ est lipschitzienne.*

Maintenant, sans rentrer dans les détails, nous énonçons ci-dessous deux théorèmes liant les notions de fonctions lipschitz et de différentiabilité (se référer à [13] théorème 2 du chapitre 3, et au théorème 1 de la section 6.6.1) :

THÉORÈME 3.11 (Rademacher). *Soit $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$ une fonction localement lipschitzienne. Alors, f est différentiable $\mathcal{L}^N$ -presque partout.*

THÉORÈME 3.12. *Soit $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction C^1 $\tilde{f} : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ telle que*

$$\mathcal{L}^N(\{x \in \mathbb{R}^N : \tilde{f}(x) \neq f(x) \text{ ou } \nabla \tilde{f}(x) \neq \nabla f(x)\}) \leq \epsilon.$$

Établissons maintenant la terminologie suivante, qui nous sera utile dans la suite de ce mémoire (tirée de [7] définition 2.57) :

DÉFINITION 3.13. *Soit $E \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble $\mathcal{H}^k$ -mesurable, $k \in \mathbb{R}^+$. On dit que E est*

- *dénombrablement k -rectifiable s'il existe un nombre dénombrable de fonctions lipschitziennes $f_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^N$ telles que*

$$E \subset \bigcup_{i=0}^{+\infty} f_i(\mathbb{R}^k),$$

- *dénombrablement $\mathcal{H}^k$ -rectifiable s'il existe un nombre dénombrable de fonctions lipschitziennes $f_i : \mathbb{R}^k \rightarrow \mathbb{R}^N$ telles que*

$$\mathcal{H}^k \left(E \setminus \bigcup_{i=0}^{+\infty} f_i(\mathbb{R}^k) \right) = 0$$

- $\mathcal{H}^k$ -rectifiable si E est dénombrablement $\mathcal{H}^k$ -rectifiable et si $\mathcal{H}^k(E) < \infty$.

Finalement, nous introduisons ici une variante de la formule de la co-aire. Intuitivement, les formules de type co-aire sont un type de formules qu'on pourrait assimiler à un mélange entre le théorème de Fubini et celui de changement de variables en intégration. Grossièrement, dans un théorème type co-aire, l'idée est de redéfinir le domaine d'intégration comme l'union des intersections de ce domaine avec les ensembles de niveau d'une fonction, de mesurer ces ensembles des niveaux via la mesure de Hausdorff adéquate, et d'ensuite intégrer sur l'ensemble de ces ensembles de niveau. Se référer à la formule (2.74) page 102 de [7] pour plus de détails.

THÉORÈME 3.14. *Soient $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction lipschitzienne, $g : \mathbb{R}^N \rightarrow [0, +\infty]$ borélienne et E un sous-ensemble dénombrablement $\mathcal{H}^N$ -rectifiable de $\mathbb{R}^N$. Alors,*

$$\int_E g(x) |\nabla f(x)| dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{E \cap \{f=t\}} g(y) d\mathcal{H}^{N-1}(y) \right) dt.$$

Se référer à 3.13 pour la définition de sous-ensemble $\mathcal{H}^N$ rectifiable.

Espaces de Sobolev et Fonctions à variation bornée

Dans ce chapitre, nous introduisons les deux espaces de fonctions classiques les plus importants pour la suite de ce travail. Nous commencerons par un bref rappel sur les fonctions de Sobolev, dont nous aurons besoin des propriétés tout au long du chapitre 6. Ensuite, nous consacrerons le reste de ce chapitre de manière plus détaillée aux fonctions à variations bornées.

1. Espaces de Sobolev

Commençons par quelques rappels sur les espaces de Sobolev $W^{1,p}$. Contrairement aux fonctions à variation bornée, nous supposerons que le lecteur est déjà familier avec cet espace. Pour cette raison, nous resterons assez sommaires dans l'analyse. Cette section se base sur des références diverses, mais principalement sur [12], [13] et sur [16]. La définition de cet espace se base sur celle-ci :

DÉFINITION 4.1 (Dérivée faible). *Soit Ω un ouvert de $\mathbb{R}^N$, $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $i \in \{1, \dots, N\}$. On dit que u admet une $i^{\text{ème}}$ dérivée faible s'il existe une fonction $g_i \in L^1_{loc}(\Omega)$ telle que*

$$\int_{\Omega} u \frac{\partial \phi}{\partial x_i} dx = - \int_{\Omega} g_i \phi dx, \quad \forall \phi \in C_c^\infty(\Omega),$$

où $C_c^\infty(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions infiniment dérivables, à support compact dans Ω . Pour un tel g_i , on notera $\nabla_i u \stackrel{\text{déf}}{=} g_i$.

DÉFINITION 4.2 (Espaces de Sobolev $W^{1,p}(\Omega)$). *Pour $1 \leq p \leq +\infty$, on dit que $u \in W^{1,p}(\Omega)$ si $u \in L^p(\Omega)$ et si pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$, u admet une $i^{\text{ème}}$ dérivée faible et $\nabla_i u \in L^p(\Omega)$. On pose alors $\nabla u = (\nabla_1 u, \dots, \nabla_N u)$.*

Nous avons les propriétés suivantes pour la somme et le produit de fonctions de Sobolev : (voir [13] section 4.2.2, théorème 4.4)

PROPOSITION 4.3 (Dérivée d'un produit). *Soient $f, g \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Alors, $fg \in W^{1,p}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ et*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} fg = \frac{\partial f}{\partial x_i} g + f \frac{\partial g}{\partial x_i} \quad \mathcal{L}^N - \text{presque partout}$$

pour tout $i \in 1, \dots, N$.

PROPOSITION 4.4 (Dérivée d'une composée). *Soient $f \in W^{1,p}(\Omega)$, $F \in C^1(\mathbb{R})$, $F' \in L^\infty(\Omega)$, $F(0) = 0$, alors, $F \circ f \in W^{1,p}(\Omega)$ et*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} F \circ f = F'(f) \frac{\partial f}{\partial x_i} \quad \mathcal{L}^N\text{-presque partout,}$$

pour tout $i \in \{1, \dots, N\}$. On peut laisser tomber l'hypothèse $F(0) = 0$ si $\mathcal{L}^N(\Omega) < +\infty$.

Nous aurons besoin de la notion de convergence suivante sur cet espace (voir définition 2.9 dans [7]) :

PROPOSITION 4.5 (Convergence faible). *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert, $\partial\Omega$ Lipschitzien, $1 \leq p \leq \infty$, $u \in W^{1,p}(\Omega)$ et $(u_h) \subset W^{1,p}(\Omega)$. Alors, u_h converge faiblement vers u dans $W^{1,p}(\Omega)$ si et seulement si ∇u_h converge faiblement vers ∇u dans $L^p(\Omega)$ et u_h converge fortement vers u dans L^p .*

Rappelons la notion d'espace dual. Le théorème qui suivra permettra, grâce à cette notion, de garantir une certaine compacité sur $W^{1,p}$, pour $1 < p < +\infty$, voir [16] théorème 5.1.4.

DÉFINITION 4.6. *Soit $X = (X, \|\cdot\|)$ un espace métrique. L'espace dual X^* de X est l'espace des fonctionnelles linéaires continues sur X . Cet espace est équipé de la norme duale : pour tout $f \in X^*$*

$$\|f\|_{X^*} = \sup_{\substack{u \in X \\ \|u\| \leq 1}} |f(u)|.$$

THÉORÈME 4.7 (Banach-Alaoglu). *Soit X un espace normé séparable. Alors, toute suite bornée dans X^* contient une sous-suite faiblement convergente.*

Nous utiliserons ce théorème en remarquant que $W^{1,2}$ est séparable et est réflexif, ce qui entraîne que toute suite bornée dans $W^{1,2}$ admet une sous-suite faiblement convergente vers un élément de $W^{1,2}$.

Rappelons maintenant la définition de fonction hölderienne :

DÉFINITION 4.8. *Soit $f : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, $\alpha \in (0, 1]$. On définit*

$$\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} |f(x)| + \sup_{\substack{x, y \in \Omega \\ x \neq y}} \frac{|f(x) - f(y)|}{\|x - y\|^\alpha}.$$

Une fonction f est hölderienne d'exposant α si et seulement si $\|f\|_{C^{0,\alpha}(\Omega)} < +\infty$.

Le théorème suivant est un célèbre théorème de plongement de Sobolev. Il nous assure que sous certaines conditions, une fonction dans $W^{1,p}$ est à un ensemble négligeable près, égal à une fonction Hölder continue, basée sur la section 4.5.3 de [12].

THÉORÈME 4.9 (Inégalité de Morrey). *Soient N, p tels que $N < p < +\infty$. Si $f \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, alors, il existe une fonction f^* telle que $f = f^*$ $\mathcal{L}^N$ -presque partout sur Ω et f^* est Hölder continue d'exposant $\alpha = 1 - \frac{N}{p}$. De plus, il existe une constante $C > 0$, dépendant seulement de N, p telle que :*

$$\|f^*\|_{C^{0,1-N/p}(\mathbb{R}^N)} \leq C \|f\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}.$$

Le résultat est aussi valable si l'on remplace $\mathbb{R}^N$ par $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, ouvert borné à frontière Lipschitz.

Finalement, la proposition suivante, conséquence du théorème d'Arzelà-Ascoli, nous sera également utile dans la suite, basé sur [16] théorème 4.4.1 :

PROPOSITION 4.10. *Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $f_n : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$, une suite de fonctions uniformément bornées (c'est-à-dire : $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|f_n\|_{L^\infty(\mathbb{R}^N)} < \infty$) et telle qu'il existe une constante $C > 0$ indépendante de n telle que, pour un certain $\alpha \in (0, 1]$, pour tout $x, y \in \mathbb{R}^N$*

$$|f(x) - f(y)| \leq C \|x - y\|^\alpha,$$

alors, il existe une sous-suite de (f_n) convergeant uniformément vers une fonction $f \in C^0(\mathbb{R}^N)$.

2. Espace BV - Définitions et propriétés fondamentales

Nous allons maintenant étudier l'espace des fonctions à variation bornée. Intuitivement, cet espace est une sorte de généralisation des espaces de Sobolev, dans le sens qu'à la place de demander l'existence d'une fonction dérivée faible, nous demanderons l'existence d'une mesure dérivée faible. Ceci nous permettra de travailler avec des fonctions discontinues sur des ensembles dont nous pourrions contrôler la taille et la "forme", rejoignant l'objectif de la fonctionnelle de Mumford-Shah. Cette section et celles qui suivront sont, sauf indications contraires, basées sur [7]. Dans tout le reste du chapitre, Ω désignera un ouvert quelconque de $\mathbb{R}^N$. Introduisons la notion ayant donné son nom à l'espace de fonction de ce chapitre.

DÉFINITION 4.11 (Variation d'une fonction). Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. La variation $V(u, \Omega)$ de u dans Ω est donnée par

$$V(u, \Omega) = \sup \left\{ \int_{\Omega} u \operatorname{div} \phi \, dx : \phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N), \|\phi\|_{\infty} \leq 1 \right\},$$

où $C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ est l'ensemble des fonctions $\phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ continûment dérivables à support compact.

Les fonctions à variation bornée sont très naturellement les fonctions dont la variation est bornée, comme définit ci-dessous (remarquez le durcissement sur la condition d'intégrabilité) :

DÉFINITION 4.12 (Fonction à variation bornée). On dit que $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une fonction à variation bornée, noté $u \in BV(\Omega)$ si $u \in L^1(\Omega)$ et si $Var(u, \Omega) < \infty$.

Bien que définition initiale, on connaît principalement ces fonctions grâce à la propriété que voici :

PROPOSITION 4.13. Soit $u \in L^1(\Omega)$. Alors, $u \in BV(\Omega)$ si et seulement s'il existe une mesure de Radon vectorielle finie Du vérifiant pour tout $\phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$,

$$\int_{\Omega} u \operatorname{div} \phi \, dx = - \int_{\Omega} \phi \cdot dDu.$$

On appellera Du la mesure dérivée de u . De plus, pour tout $u \in BV(\Omega)$, $V(u, \Omega) = |Du|(\Omega)$ et $u \mapsto |Du|(\Omega)$ est semi-continue inférieurement par rapport à la topologie de $L^1_{loc}(\Omega)$.

La démonstration se base sur les deux résultats suivants (voir 1.47 et 1.54 dans [7]) :

THÉORÈME 4.14 (Riesz). Soit X un espace métrique localement compact et séparable. Soit $L : C_0(X) \rightarrow \mathbb{R}$, où $C_0(X)$ est la complétion de l'ensemble des fonctions continues à support compact $C_c^0(X)$ par rapport à la norme infinie, satisfaisant $L(u + v) = L(u) + L(v)$ pour tout $u, v \in C_0(X)$ et

$$\|L\| = \sup\{L(u) : u \in C_0(X) \text{ et } \|u\|_X \leq 1\} < \infty.$$

Alors, il existe une unique mesure de Radon finie μ sur X à valeurs dans $\mathbb{R}$ telle que

$$L(u) = \int_X u \, d\mu.$$

PROPOSITION 4.15. *Soit X un espace métrique localement compact et séparable et μ une mesure de Radon vectorielle à valeurs dans $\mathbb{R}^M$ sur X . Alors, pour tout ouvert $A \subset X$, on a*

$$|\mu(A)| = \sup \left\{ \int_X u \cdot d\mu : u \in C_c^0(A, \mathbb{R}^M), \|u\|_\infty \leq 1 \right\}.$$

DÉMONSTRATION PROPOSITION 4.13.

- " $\Rightarrow$ " : Par la définition de la variation, on trouve immédiatement que pour tout $\phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$, puisque $\|\phi/\|\phi\|_\infty\|_\infty \leq 1$,

$$\left| \int_\Omega u \operatorname{div} \phi dx \right| \leq V(u, \Omega) \|\phi\|_\infty.$$

Ensuite, par densité de $C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ dans $C_c^0(\Omega, \mathbb{R}^N)$, on peut trouver une fonctionnelle linéaire continue L sur $C_c^0(\Omega, \mathbb{R}^N)$ coïncidant avec

$$\phi \mapsto \int_\Omega u \operatorname{div} \phi dx$$

sur $C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$ (voir [16] proposition 3.2.3), et vérifiant grâce à l'inégalité ci-dessus $\|L\| \leq V(u, \Omega)$. De là, par le théorème de Riesz, il existe une mesure de Radon vectorielle finie μ telle que $\|L\| = |\mu|(\Omega)$ et telle que pour tout $\phi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$, $L(\phi) = \int_\Omega \phi \cdot d\mu$, autrement dit pour tout $\phi \in C_0(\Omega, \mathbb{R}^N)$,

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \phi dx = \int_\Omega \phi \cdot d\mu.$$

On conclut en prenant $Du = -\mu$. Remarquons qu'on a alors

$$|Du(\Omega)| = |\mu(\Omega)| = \|L\| \leq V(u, \Omega).$$

- " $\Leftarrow$ " : Par définition, on a pour tout $u \in BV(\Omega)$, pour tout $\phi \in C_c^1(\Omega, \mathbb{R}^N)$,

$$\int_\Omega u \operatorname{div} \phi dx = - \int_\Omega \phi \cdot dDu.$$

De là puisque par définition de la variation, on demande $\|\phi\|_\infty \leq 1$, on obtient par la proposition 4.15 que $V(u, \Omega) \leq |Du(\Omega)| < +\infty$.

□

La proposition suivante en est une conséquence directe :

PROPOSITION 4.16. *Si $u \in C^1(\Omega)$, $V(u, \Omega) = \int_\Omega |\nabla u| dx$. De même si $u \in W^{1,1}(\Omega)$.*

Nous introduisons la notion de convergence suivante sur BV :

DÉFINITION 4.17 (Convergence faible-*). *Soient $u \in BV(\Omega)$, $(u_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset BV(\Omega)$. On dit que (u_h) converge faiblement-* vers u dans $BV(\Omega)$ si (u_h) converge vers u dans $L^1(\Omega)$ et si Du_h converge faiblement-* vers Du dans Ω , c'est-à-dire si, pour tout $\phi \in C_0(\Omega)$, $\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} \phi dDu_h = \int_{\Omega} \phi dDu$.*

3. Limites approximatives et notions connexes

La définition de fonction à variation bornée ne nous donne pas beaucoup de renseignements sur l'allure globale de ces fonctions. La question posée dans ce chapitre est : "Quelles informations sur la fonction de base pouvons nous tirer de l'existence d'une mesure dérivée?". Cette existence n'implique a priori aucunement leur continuité ou leur dérivabilité (au sens classique). Nous cherchons donc à définir des notions plus faibles, dotées de davantage de souplesse pour coller à l'environnement de théorie de la mesure dans lequel nous travaillons, et que satisfont les fonctions dans BV . Cette section est grandement inspirée de la section 3.6 de [7]. Nous avons fait le choix de ne pas présenter de démonstrations, celles-ci étant très techniques et la théorie sous-jacentes étant considérable.

On rappelle la notation suivante :

$$\int_{\Omega} f dx = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} f dx.$$

La première étape est l'introduction de la notion de limite approximative

DÉFINITION 4.18 (Limite approximative). *Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. On dit que u a une limite approximative en $x \in \Omega$ s'il existe $z \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x)} |u(y) - z| dy = 0$.*

On peut décomposer la notion en limites approximatives supérieure et inférieure comme ceci :

$$\begin{aligned} \text{ap lim sup}_{x \rightarrow a} u(x) &= \inf \left\{ t \in \mathbb{R} : \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^N(\{x : u(x) > t\} \cap B_r(a))}{\mathcal{L}^N(B_r(a))} = 0 \right\}, \\ \text{ap lim inf}_{x \rightarrow a} u(x) &= \sup \left\{ t \in \mathbb{R} : \lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^N(\{x : f(x) < t\} \cap B_r(a))}{\mathcal{L}^N(B_r(a))} = 0 \right\}. \end{aligned}$$

On montre que la limite approximative existe si les limites approximatives supérieure et inférieure coïncident. En analogie avec la définition de continuité, on définit la continuité approximative :

DÉFINITION 4.19 (Continuité approximative et ensemble S_u). *Une fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ est dite approximativement continue en $x \in \Omega$ si la limite*

approximative en x existe et, si on note cette limite z , si $u(x) = z$. On dit également que x est un point de Lebesgue de u . On pose

$$S_u = \{x \in \Omega : u \text{ n'admet pas de limite approximative en } x\}$$

appelé l'ensemble de discontinuité approximative.

PROPOSITION 4.20. Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. L'ensemble S_u est $\mathcal{L}^N$ -négligeable et, si on pose $\tilde{u} : \Omega \setminus S_u$ la fonction qui associe à tout $x \in \Omega$ la limite approximative de u en x , on a $\tilde{u} = u$ $\mathcal{L}^N$ -pp sur $\Omega \setminus S_u$.

Parmi les points de discontinuité approximative, on peut isoler les points dits de saut approximatif entre deux valeurs a et b . Posons avant cela les notations. Nous écrirons $B_r^N(x)$ la boule ouverte de centre x et de rayon r en dimension N , ce N pouvant être omis dans le cas où la dimension est claire. Maintenant, définissons pour tous $\nu \in \mathbb{S}^{N-1}$, $x \in \mathbb{R}^N$, $r > 0$ et $a, b \in \mathbb{R}$:

$$B_r^+(x, \nu) = \{y \in B_r(x) : (y-x) \cdot \nu > 0\}, \quad B_r^-(x, \nu) = \{y \in B_r(x) : (y-x) \cdot \nu < 0\},$$

$$u_{a,b,\nu} : \mathbb{R}^N \rightarrow \{a, b\} : y \mapsto \begin{cases} a & \text{si } y \cdot \nu > 0, \\ b & \text{si } y \cdot \nu < 0 \end{cases}$$

les deux demi-boules ouvertes de $B_r(x)$ séparées par le plan orthogonal à ν translaté de sorte à faire coïncider l'origine et x , ainsi que la fonction constante sur chacun des deux demi-espaces séparés par le plan orthogonal à ν . De là,

DÉFINITION 4.21 (Point de saut approximatif et J_u). Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et $x \in \Omega$. On dit que x est un point de saut approximatif de u s'il existe $a, b \in \mathbb{R}$, $\nu \in \mathbb{S}^{N-1}$ tels que $a \neq b$ et

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r^+(x, \nu)} |u(y) - a| dy = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r^-(x, \nu)} |u(y) - b| dy = 0.$$

Le triplet (a, b, ν) est déterminé de manière unique sous la relation d'équivalence $(a, b, \nu) \sim (b, a, -\nu)$ et sera noté $(u^+(x), u^-(x), \nu_u(x))$. L'ensemble des $x \in \Omega$ tel que x est un point de saut approximatif sera noté J_u .

PROPOSITION 4.22. Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. Alors, J_u est un sous-ensemble borélien de S_u , et il existe une fonction borélienne

$$(u^+(x), u^-(x), \nu_u(x)) : J_u \rightarrow \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{S}^{N-1}$$

qui pour tout $x \in J_u$ nous donne un triplet satisfaisant la définition de point de saut approximatif en ce point x .

Le théorème suivant donne une première description géométrique des fonctions BV en allant un peu plus loin dans la caractérisation de S_u et J_u pour ces fonctions, ainsi que du comportement de Du sur ces ensembles (voir [7] théorème 3.78) :

THÉORÈME 4.23 (Federer-Vol’pert). *Pour tout $u \in BV(\Omega)$, l’ensemble de discontinuité approximative S_u est dénombrablement $\mathcal{H}^{N-1}$ -rectifiable, $\mathcal{H}^{N-1}(S_u \setminus J_u) = 0$ et de plus, $Du \llcorner J_u = (u^+ - u^-)\nu_u \mathcal{H}^{N-1} \llcorner J_u$.*

Pour finir cette section, nous concluons avec la notion de dérivée approximative que voici :

DÉFINITION 4.24 (Différentiabilité approximative). *Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$ et soit $x \in \Omega \setminus S_u$. On dit que u est approximativement différentiable en x s’il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^N$ tel que*

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B_r(x)} \frac{|u(y) - \tilde{u}(x) - v \cdot (y - x)|}{|x - y|} dy = 0.$$

On remarque que si v existe, il est unique. On appelle ce vecteur v la différentielle approximative de u en x , qu’un notera $\nabla u(x)$. L’ensemble des points approximativement différentiable sera noté D_u .

PROPOSITION 4.25. *Soit $u \in L^1_{loc}(\Omega)$. L’ensemble $D_u \subset \Omega \setminus S_u$ est un ensemble borélien et l’application $\nabla u : D_u \rightarrow \mathbb{R}^N$ est une application borélienne.*

La proposition suivante nous sera bien utile et nous vient de [1], et des références associées :

PROPOSITION 4.26. *Soient, $f, g : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions approximativement différentiables en $x \in \Omega$. Alors, $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ sont approximativement différentiables en x et, sous la conditions que $\nabla g(x) \neq 0$, f/g également. De plus, si $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est une application dérivable (au sens classique) en $\tilde{f}(x)$, alors, $F \circ f$ est approximativement dérivable en x et*

$$\nabla(F \circ f)(x) = \nabla F(\tilde{f}(x)) \nabla f(x).$$

Le théorème suivant est central. Non seulement il garantit l’existence d’une fonction dérivée (dans le sens de la dérivée approximative) pour les fonctions BV , mais nous donne une caractérisation de cette fonction dérivée (voir théorème 3.83 dans [7]) :

THÉORÈME 4.27 (Calderón-Zygmund). *Toute fonction $u \in BV(\Omega)$ est approximativement différentiable en $\mathcal{L}^N$ -presque tout point de Ω . De plus, la différentielle approximative ∇u est la densité de la partie absolument continue de Du par rapport à $\mathcal{L}^N$, donnée par la décomposition de Radon-Nikodym.*

Une conséquence directe de ce théorème est que, pour une fonction $u \in W^{1,1}$, la fonction dérivée faible et différentielle approximative sont égales $\mathcal{L}^N$ -presque partout sur Ω . On a également une notion de localité bien utile (voir proposition 3.73 de [7]) :

PROPOSITION 4.28. *Soit $u, v \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, $\nabla u = \nabla v$ pour tout $x \in D_u \cap D_v$ de densité 1 de l'ensemble $\{u = v\}$, en particulier pour $\mathcal{L}^N$ -presque tout $x \in \{u = v\} \cap D_u \cap D_v$.*

On remarque ainsi que pour toute fonction $u \in L^1_{loc}(\Omega)$, $\nabla u(x) = 0$ $\mathcal{L}^N$ -presque partout sur $\{y \in \Omega : u(y) = c\}$ pour toute constante $c \in \mathbb{R}$.

Maintenant que les outils principaux ont été présentés, nous entamons une analyse plus poussée des fonctions à variation bornée, en suivant la section 3.9 de [7]. Comme évoqué dans le théorème précédent, la mesure dérivée Du d'une fonction $u \in BV(\Omega)$ peut se décomposer via le théorème de Radon-Nikodym en une mesure absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue $\mathcal{L}^N$, que nous noterons $D^a u$, et par une mesure $D^s u$, telles que $D^s u$ et $\mathcal{L}^N$ soient mutuellement singulières. On décompose encore un peu plus cette mesure dérivée via les définitions suivantes :

DÉFINITION 4.29. *Soit $u \in BV(\Omega)$. On appelle les mesures*

$$D^j u = D^s \llcorner J_u, \quad D^c u = D^s u \llcorner (\Omega \setminus S_u)$$

respectivement la partie de saut de la mesure dérivée et la partie de Cantor de la dérivée.

Nous aurons juste besoin du lemme suivant pour conclure (3.76 dans [7]) :

LEMME 4.30. *Soit $u \in BV(\Omega)$. Alors, pour tout borélien $B \subset \Omega$, on a les deux implications suivantes :*

$$\begin{aligned} \mathcal{H}^{N-1}(B) = 0 &\Rightarrow |Du|(B) = 0, \text{ et} \\ \mathcal{H}^{N-1}(B) < \infty, \quad B \cap S_u = \emptyset &\Rightarrow |Du|(B) = 0. \end{aligned}$$

Ce lemme nous permet de conclure que, puisque $\mathcal{H}^{N-1}(S_u \setminus J_u) = 0$, la mesure dérivée Du s'annule sur $S_u \setminus J_u$ et nous conduit au théorème de structure suivant, synthèse des résultats précédents :

THÉORÈME 4.31 (Structure de la dérivée d'une fonction dans BV). *Soit $u \in BV(\Omega)$, et Du sa mesure dérivée. Alors, $Du = D^a u + D^j u + D^c u$, avec pour tout borélien $B \subset \Omega$*

$$\begin{aligned} \bullet \quad D^a u(B) &= (\nabla u \mathcal{L}^N)(B) = \int_B \nabla u dx \\ \bullet \quad D^j u(B) &= ((u^+ - u^-) \nu_u \mathcal{H}^{N-1} \llcorner J_u)(B) \\ &= \int_{B \cap J_u} (u^+(x) - u^-(x)) \nu_u(x) d\mathcal{H}^{N-1}(x). \end{aligned}$$

4. Les espaces SBV et $GSBV$

À partir de la décomposition présentée à la fin de la section précédente, nous introduisons deux sous-espaces vectoriels de BV qui formeront le véritable cadre dans lequel évoluera la fonctionnelle de Mumford-Shah, respectivement SBV et $GSBV$. Cette section provient de [7] chapitre 4 et de [8].

DÉFINITION 4.32 (Fonctions spéciales à variation bornée, SBV). *Soit $u \in BV(\Omega)$. On dit que u est une fonction spéciale à variation bornée, noté $u \in SBV(\Omega)$, si la partie de Cantor de la mesure dérivée est nulle. Autrement dit :*

$$Du = D^a u + D^j u = \nabla u \mathcal{L}^N + (u^+ - u^-) \nu_u \mathcal{H}^{N-1} \llcorner J_u.$$

On remarque que $W^{1,1}(\Omega)$ est contenu dans $SBV(\Omega)$ et que, via le théorème de Vol'pert,

$$u \in W^{1,1}(\Omega) \Leftrightarrow \mathcal{H}^{N-1}(S_u) = 0, \quad \forall u \in SBV(\Omega).$$

La proposition suivante donne une condition suffisante pour appartenir à SBV (voir proposition 4.4 dans [7]) :

PROPOSITION 4.33. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert et borné, $K \subset \mathbb{R}^N$ fermé et supposons que $\mathcal{H}^{N-1}(K \cap \Omega) < \infty$. Alors, toute fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ qui appartient à $L^\infty(\Omega \setminus K) \cap W^{1,1}(\Omega \setminus K)$ appartient aussi à $SBV(\Omega)$ et satisfait $\mathcal{H}^{N-1}(S_u \setminus K) = 0$.*

Finalement, nous introduisons une généralisation des fonctions SBV , l'espace des fonctions $GSBV$:

DÉFINITION 4.34 (Fonctions $GSBV$). *La fonction $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ appartient à $GSBV(\Omega)$ si*

- *u est une fonction borélienne,*
- *pour tout $N \in \mathbb{N}$, la fonction $(N \wedge u \vee -N) : \Omega \rightarrow [-N, N]$ appartient à $SBV(\Omega)$.*

L'intérêt de ces fonctions est qu'il sera souvent possible de restreindre les démonstrations à des fonctions bornées, le cas général étant obtenu via $N \rightarrow \infty$ grâce à la bonne structure de $GSBV$. On posera en particulier pour $u \in GSBV(\Omega)$,

$$S_u = \bigcup_{N \in \mathbb{N}} S_{N \wedge u \vee -N}.$$

Calcul variationnel et convergence Γ

Maintenant que le cadre est établi pour la fonctionnelle de Mumford-Shah, nous en arrivons à présenter notre outil principal pour aborder l'approximation de celle-ci par les fonctionnelles d'Ambrosio-Tortorelli : la convergence Γ . Nous commencerons d'abord par un rappel de la méthode directe en calcul des variations, qui nous servira de modèle pour l'établissement de cette convergence.

1. Calcul variationnel - La méthode directe

Le but de cette section n'est pas de rentrer dans les détails et subtilités des bases du calcul des variations. Nous allons principalement présenter le vocabulaire et les propriétés importantes pour la suite du travail. Cette section est basée sur [9] et [10].

Dans cette section, nous chercherons des conditions suffisantes pour assurer l'existence de minimiseurs à des fonctionnelles de type "intégrales" :

$$F(u) = \int_{\Omega} f(x, u(x), \nabla u(x)) dx,$$

où Ω est un sous-ensemble de $\mathbb{R}^N$ déterminé et u appartient à un ensemble de fonctions U pertinent. Nous nous baserons sur une méthode dite "méthode directe". L'idée est de commencer par considérer une suite minimisante, c'est-à-dire une suite de fonctions telles que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} F(u_h) = \inf_{u \in U} F(u).$$

Par définition de l'infimum, une telle suite existe toujours. La première question à régler est de savoir s'il est possible de trouver une fonction limite à une telle suite. L'idée, à la place de se concentrer sur une suite particulière, est de demander une condition globale sur la fonctionnelle F , de manière à garantir l'existence d'une sous-suite convergente indépendamment de la suite de départ. Cela nous amène au premier concept de cette section :

DÉFINITION 5.1. *Soit U un espace métrique, et considérons la fonctionnelle $F : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dira que la fonctionnelle F est coercive si pour*

toute suite $(u_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset U$ telle que $\sup_h F(u_h) < +\infty$, il existe une sous-suite $(u_{h_k})_{k \in \mathbb{N}}$ convergente.

Nous avons donc un candidat minimiseur, que nous appellerons $\bar{u}$. La seconde étape est de montrer qu'une telle fonction limite est effectivement une solution au problème. L'inégalité suivante est évidente :

$$F(\bar{u}) \geq \inf_{u \in U} F(u).$$

Il reste à montrer l'inégalité inverse :

$$F(\bar{u}) \leq \lim_{k \rightarrow +\infty} F(u_{h_k}) = \inf_{u \in U} F(u).$$

A nouveau, même si théoriquement, le résultat est plus fort, il est parfois plus intéressant d'exiger cette inégalité par une condition sur F plutôt que sur $(u_{h_k})_{k \in \mathbb{N}}$ ou sur u . Ce qui nous amène à :

DÉFINITION 5.2. *Soit U un espace métrique, et considérons la fonctionnelle $F : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dira que la fonctionnelle F est semi-continue inférieurement si pour tout $u \in U$ et pour toute suite $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ telle que $u_h \rightarrow u$ dans U quand $h \rightarrow +\infty$, on a*

$$F(u) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} F(u_h).$$

Ainsi, si l'on arrive à montrer la coercivité et la semi-continuité inférieure d'une fonctionnelle, on a automatiquement l'existence d'un minimiseur via le raisonnement précédent. Synthétisons :

THÉORÈME 5.3. *Soit U un espace métrique, et considérons la fonctionnelle $F : U \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Si F est coercive et semi-continue inférieurement, alors, F admet un minimiseur.*

On remarquera que la première condition est plus facile à obtenir s'il existe un grand nombre de suites-convergentes dans U , tandis que la deuxième l'est plutôt quand justement, il y en a peu. Comme cela sera illustré dans le chapitre consacré à la fonctionnelle de Mumford-Shah, une partie du problème de minimisation repose grandement sur le choix de l'espace métrique sur lequel la fonctionnelle est définie.

Nous exposons ici un résultat de semi-continuité de fonctionnelles dont nous auront besoin pour la suite du travail ¹ :

1. Voir [10] corollaire 3.24.

PROPOSITION 5.4. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert à bord Lipschitz, $p > 1$, $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n \times N} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ positive, continue et convexe en la troisième variable et soit $I(u) = \int_{\Omega} f(x, u, \nabla u) dx$. Alors, pour tout $u \in W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$, pour toute suite $(u_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$ convergeant faiblement vers u dans $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^n)$,*

$$\liminf_{h \rightarrow +\infty} I(u_h) \geq I(u).$$

Ceci s'applique en particulier à la fonctionnelle définie sur $W^{1,2}(\Omega)$:

$$J(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

2. Convergence Γ

Comme souvent en analyse, il est souvent fructueux de considérer un objet mathématique non seulement par lui-même, mais également comme limite d'objets plus faciles à analyser, plus connus ou bénéficiant de meilleures propriétés. Cette tournure d'esprit peut être appliquée à des problèmes variationnels. Considérons par exemple la fonctionnelle de Mumford-Shah, qui sera introduite plus en détails dans le chapitre suivant :

$$G(u) = \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + \beta(u - g)^2] dx + \alpha \mathcal{H}^{n-1}(S_u).$$

Contrairement aux fonctionnelles intégrales classiques, on se retrouve ici à devoir considérer un terme de type "non intégral" : $\mathcal{H}^{n-1}(S_u)$, ce qui, d'un point de vue théorique, peut nous empêcher d'utiliser la théorie classique, tandis qu'un d'un point de vue pratique pourrait compliquer une analyse numérique du problème, par exemple. La convergence Γ est donc introduite ici pour permettre d'approximer des fonctionnelles plus délicates par des fonctionnelles plus simples à traiter (dans notre exemple, on approximera la fonctionnelle G par des fonctionnelles intégrales $(G_h)_{h \in \mathbb{N}}$), et cela dans un sens compatible avec l'analyse variationnelle. Plus précisément, dans un cadre de recherche de minimiseurs, on voudra garantir une certaine cohérence entre le problème de base et ceux dérivant des approximées. Ainsi, on voudra que l'existence de minimiseurs u_h à G_h pour tout $h \in \mathbb{N}$ garantisse dans un certain sens l'existence de minimiseur à G , tout en établissant une convergence de ces minimiseurs et des valeurs minimales des G_h vers ceux de G . Pour atteindre cet objectif, nous nous baserons sur la méthode directe de la section précédente. Nous présenterons d'abord le raisonnement général, puis énoncerons les propriétés dont nous aurons besoin pour la suite du travail.

Supposons que nous voulions montrer une telle convergence pour une famille de fonctionnelles $(F_h)_{h \in \mathbb{N}}$, $F_h : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ vers une fonctionnelle $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, où (X, d) est un espace métrique. Commençons par considérer une suite minimisante $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ pour la famille F_h , c'est-à-dire une suite dans X vérifiant :

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} [F_h(u_h) - \inf_{v \in X} F_h(v)] = 0.$$

Une telle suite existe toujours par définition de l'infimum et par un argument diagonal. On remarque que cela implique directement

$$\liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(u_h) = \liminf_{h \rightarrow +\infty} \inf_{v \in X} F_h(v).$$

A nouveau, la première question à se poser est s'il est possible d'extraire une sous-suite convergente dans X . Nous introduisons pour cela la notion suivante :

DÉFINITION 5.5. *Soit $X = (X, d)$ un espace métrique, et $(F_h)_{h \in \mathbb{N}}$ une famille de fonctionnelles de X dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dira que la famille des F_h est équicoercive si pour toute suite $(u_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset X$ telle que*

$$\sup_{h \in \mathbb{N}} F_h(u_h) < +\infty,$$

(u_h) admet une sous-suite convergente.

Si la famille F_h est effectivement équicoercive, nous avons donc une fonction limite $\bar{u}$. Nous voulons maintenant relier $F(\bar{u})$ avec les valeurs des minima de F et des F_h . Premièrement, on peut chercher à borner supérieurement les minima des F_h par celui de F . On voudrait une chaîne d'inégalités :

$$\limsup_{h \rightarrow +\infty} \left[\inf_{v \in X} F_h(v) \right] \leq \inf_{v \in X} F(v) \leq F(\bar{u}).$$

On remarque que la deuxième est directe. Nous considérerons une formulation plus forte de la première via le raisonnement suivant :

Commençons par remarquer que cette première inégalité implique que pour tout $u \in X$,

$$\limsup_{h \rightarrow +\infty} \left[\inf_{v \in X} F_h(v) \right] \leq F(u).$$

Nous allons maintenant "localiser" l'inégalité en demandant la condition plus forte que pour tout $u \in X$, pour tout $\delta > 0$,

$$\limsup_{h \rightarrow +\infty} \left[\inf_{\substack{v \in X \\ d(u, v) < \delta}} F_h(v) \right] \leq F(u).$$

Cette condition implique bien la précédente par le caractère arbitraire de δ . Finalement, toujours en jouant avec le caractère arbitraire de δ , on peut reformuler cette dernière inégalité par la suivante : pour tout $u \in X$, il existe une suite $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ convergeant dans X vers u telle que

$$\limsup_{j \rightarrow +\infty} F_j(v_j) \leq F(u).$$

C'est cette dernière forme que nous retiendrons. Remarquez qu'elle implique toutes les précédentes. Nous voulons maintenant la borne inférieure suivante (motivée par la définition de la suite (u_h)) :

$$F(\bar{u}) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(u_h).$$

Comme à nouveau, il est plus facile, bien que plus exigeant, de demander une condition globale sur F plutôt que de travailler avec les spécificités d'une suite (u_h) particulière, nous demanderons la condition suivante : pour tout $u \in X$, pour toute suite (v_j) convergeant vers u dans X , on a

$$F(u) \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} F_j(v_j).$$

Nous avons déterminé les deux inégalités définissant la convergence Γ . Nous pouvons synthétiser :

DÉFINITION 5.6 (Convergence Γ). *Soit X un espace métrique, $(F_h)_{h \in \mathbb{N}}$ une famille de fonctionnelles de X dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ et la fonctionnelle $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. On dira que la suite des F_h Γ -converge vers F si pour tout $u \in X$, on a*

- (inégalité $\liminf$) pour toute suite $(v_j)_{j \in \mathbb{N}}$ convergeant vers u dans X , on a

$$F(u) \leq \liminf_{j \rightarrow +\infty} F_j(v_j),$$

- (inégalité $\limsup$) il existe une suite $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ convergeant vers u dans X telle que

$$F(u) \geq \limsup_{h \rightarrow +\infty} F_h(w_h).$$

Supposons donc maintenant que la famille F_h de tout à l'heure soit équi-coercive et Γ -converge vers F , et supposons que la suite $(\inf_{v \in X} F_h(v))_{h \in \mathbb{N}}$ est bornée. Alors, la suite $(F_h(u_h))$, avec (u_h) comme définie précédemment, sera bornée et, à sous-suite près, la suite (u_h) convergera vers une fonction

$\bar{u}$. De là,

$$\begin{aligned}
\limsup_{h \rightarrow +\infty} \left[\inf_{v \in X} F_h(v) \right] &\leq \inf_{v \in X} F(v) && \text{(implication de l'inégalité lim sup)} \\
&\leq F(\bar{u}) \\
&\leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(u_h) && \text{(inégalité lim inf)} \\
&= \liminf_{h \rightarrow +\infty} \left[\inf_{u \in X} F_h(u) \right] && \text{(définition de } (u_h)) \\
&\leq \limsup_{h \rightarrow +\infty} \left[\inf_{v \in X} F_h(v) \right] && \text{(définition des lim inf et lim sup).}
\end{aligned}$$

Nous concluons alors que chaque inégalité est en fait une vraie égalité, ce qui implique :

- (1) Le problème de minimisation de F admet une solution,
- (2) Toute sous-suite convergente d'une suite minimisante (u_h) pour la famille F_h converge vers un minimum de F ,
- (3) La valeur minimale de F est limite de la suite $(\inf_{v \in X} F_h(v))_{h \in \mathbb{N}}$.

Nous pouvons synthétiser tout cela par le théorème suivant :

THÉOREME 5.7. *Soient X un espace métrique et $(F_h)_{h \in \mathbb{N}}$ une famille de fonctionnelles définies de X dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Supposons que la famille des F_h soit équicoercive et Γ -converge vers une fonctionnelle $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors, les points (1), (2) et (3) ci-dessus sont vérifiés.*

Au passage, remarquons que le raisonnement fait jusqu'ici peut tout à fait s'appliquer en ne supposant pas que les F_h et F soient définis sur le même espace métrique. En prenant quelques précautions, on remarque qu'on peut se ramener au cas précédent en choisissant pour définition de X un espace suffisamment grand pour contenir les espaces initiaux de chacune des fonctionnelles, et en définissant, pour tout $u \notin X_{F_h}$, $F_h(u) = +\infty$, et de même pour F .

Pour finir, nous allons énoncer quelques propriétés remarquables de la convergence Γ .

PROPOSITION 5.8 (Unicité de la limite). *La limite Γ d'une famille de fonctionnelles F_h , si elle existe, est unique.*

DÉMONSTRATION. Supposons que la famille F_h Γ -converge vers une fonctionnelle F . Alors, pour tout $u \in X$, il existe via l'inégalité lim sup une suite

(u_h) grâce à laquelle on a :

$$\begin{aligned}
F(u) &\leq \inf_{\substack{(v_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset X \\ v_j \rightarrow u}} \liminf_{j \rightarrow +\infty} F_j(v_j) && (\text{inégalité } \liminf) \\
&\leq \inf_{\substack{(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset X \\ v_j \rightarrow u}} \limsup_{j \rightarrow +\infty} F_j(v_j) && (\text{définition } \liminf \text{ et } \limsup) \\
&\leq \limsup_{h \rightarrow +\infty} F_h(u_h) \\
&\leq F(u) && (\text{inégalité } \limsup).
\end{aligned}$$

On conclut que si les F_h Γ -converge vers F , alors, pour tout $u \in X$,

$$F(u) = \inf_{\substack{(v_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset X \\ v_j \rightarrow u}} \liminf_{j \rightarrow +\infty} F_j(v_j) = \inf_{\substack{(u_j)_{j \in \mathbb{N}} \subset X \\ v_j \rightarrow u}} \limsup_{j \rightarrow +\infty} F_j(v_j).$$

Les deux quantités de droite étant toujours définies et, par l'argument que nous venons de faire, toujours égales, on voit que la fonctionnelle limite F est définie ponctuellement et univoquement par ces quantités. $\square$

PROPOSITION 5.9 (Stabilité sous perturbation continue). *Soit X un espace métrique, $(F_h)_h$ une famille de fonctionnelles de X dans $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ Γ -convergeant vers une fonctionnelle $F : X \rightarrow \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$. Alors, pour toute fonctionnelle continue $G : X \rightarrow \overline{\mathbb{R}}$, on a que la famille $(F_h + G)_h$ Γ -converge vers $F + G$.*

DÉMONSTRATION. Pour l'inégalité $\liminf$, on a directement que pour tout $u \in X$, pour toute suite $(u_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset X$ telle que $u_h \rightarrow u$ dans X , on a par l'inégalité $\liminf$ appliquée à (F_h) et F :

$$F(u) + G(u) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(u_h) + \lim_{h \rightarrow +\infty} G(u_h) \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} (F_h + G)(u_h).$$

De même pour l'inégalité $\limsup$. $\square$

Fonctionnelle de Mumford-Shah

1. Présentation du problème

Nous sommes enfin prêts pour étudier les fonctionnelles d'Ambrosio-Tortorelli et leur convergence Γ vers celle de Mumford-Shah. Pour cela l'ensemble de ce chapitre sera inspiré de l'article original (voir [8]). Commençons par un peu de mise en contexte. Considérons la fonctionnelle suivante définie par :

$$\mathcal{G}(u, K) = \int_{\Omega \setminus K} [|\nabla u|^2 + \beta(u - g)^2] dx + \alpha \mathcal{H}^{N-1}(K),$$

- avec Ω ouvert borné de $\mathbb{R}^N$, $\partial\Omega$ Lipschitz¹,
- avec $K \subset \Omega$ sous-ensemble fermé de Ω ,
- avec $u \in W^{1,2}(\Omega \setminus K)$,
- avec $\alpha, \beta > 0$ deux paramètres fixés, $g \in L^\infty(\Omega)$ donnée.

Pour $N = 2$, cette fonctionnelle a été proposée en 1989 par David Mumford et Jayant Shah en théorie de la segmentation d'images. Le but de ce modèle est de recréer à partir d'une image de base (input) une nouvelle version (output) subdivisée en sous-régions, correspondant par exemples aux différents objets constituant l'image initiale, de manière à minimiser le nombre et la taille des discontinuités (lignes de saut entre les différentes sous-régions), tout en garantissant un maximum de régularité et de ressemblance avec l'image initiale sur chaque sous-région. Plus précisément, considérons une image représentée par la fonction g dans notre modèle² et supposons que le couple (u^*, K^*) est un minimiseur de la fonctionnelle $\mathcal{G}$ ci-dessus. Ici, u^* représentera l'image "segmentée", avec pour ensemble de discontinuités K^* . Le premier terme de $\mathcal{G}$ tend à maximiser la régularité de u^* sur chaque sous-région $(\Omega \setminus K)$ et

1. En fait, le problème a été résolu également sans la condition $\partial\Omega$ Lipschitz. Cependant, dans de nombreux cas, cette condition supplémentaire nous sera utile voire essentielle pour l'approche que nous avons choisie.

2. Le modèle a été conçu pour des photos en noir et blanc. On peut associer à chaque point de la photo un nombre entre 0 et 1, 0 correspondant au blanc, 1 au noir, et tout nombre intermédiaire à une nuance de gris évoluant du blanc au noir en suivant la progression de 0 vers 1.

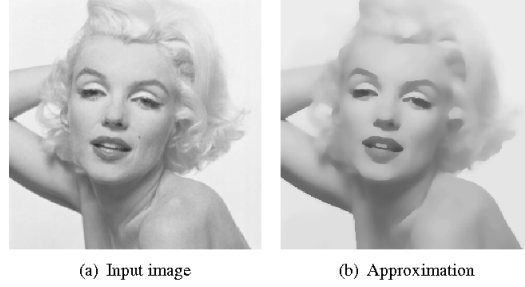


Figure 1. Approximation of a natural image using the proposed

FIGURE 1. Exemple de segmentation d'image [3]

donc également à augmenter le nombre de celles-ci (et donc de coupures) de manière à éliminer les sauts brutaux entre les différents objets constituant l'image initiale. Le deuxième terme sert quant à lui à garantir que sur chaque sous-région, l'image segmentée soit proche de celle non segmentée. Finalement le troisième terme tend à simplifier et à ne garder que les coupures nécessaires (passage d'un objet à l'autre), tout en mettant de côté ou lissant les lignes de saut dans l'image de base dus à des phénomènes externes aux objets constitutifs de celle-ci (bruit, éclairage, ...). Les paramètres α et β sont des variables d'ajustement, permettant de donner plus ou moins de force à chacune des ces trois contraintes.

Le premier pas pour prouver l'existence d'un minimiseur à la fonctionnelle $\mathcal{G}$ est de considérer une version a priori plus faible du problème. En effet, plutôt que de considérer une fonctionnelle dépendant de deux variables u et K indépendantes, l'idée est de relier ces deux variables via la théorie des fonctions à variations bornées, et plus précisément à l'ensemble SBV . Puisque la variable K représente les discontinuités de l'image, l'idée est de ne plus considérer des fonctions $u \in W^{1,2}(\Omega \setminus K)$, mais des fonctions $u \in SBV(\Omega)$ telles que leurs dérivée approximatives ∇u jouent le rôle des dérivées faibles et telles que leurs ensembles de discontinuité approximative S_u jouent le rôle de K . Considérons dès lors la fonctionnelle suivante sur $SBV(\Omega)$, dite fonctionnelle de Mumford-Shah :

$$\begin{aligned}
 G(u) &= \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + \beta(u - g)^2] dx + \alpha \mathcal{H}^{n-1}(S_u) \\
 &:= F(u) + \int_{\Omega} \beta(u - g)^2 dx \in [0, +\infty].
 \end{aligned}$$

Via le théorème 4.33, on a immédiatement que tout minimiseur (u, K) de la fonctionnelle $\mathcal{G}$ fournit une fonction $u \in SBV(\Omega)$ dans le domaine de G . De

là,

$$\inf_{u \in W^{1,2}(\Omega \setminus K)} \mathcal{G}(u) \geq \inf_{SBV(\Omega)} G(u).$$

Une inégalité inverse, à quelques subtilités près, nous est donné par E. De Giorgi, M. Carriero et A. Leaci. Nous mettons ici une version condensée des résultats obtenus par ceux-ci (voir le lemme 5.2 et la conclusion juste après, dans [11]) :

THÉOREME 6.1. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, ouvert borné. Soit w un minimiseur de la fonctionnelle G . Alors, si on pose pour tout $x \in \Omega \setminus S_w$, $\tilde{w} = \text{ap} \lim_{y \rightarrow x} w(y)$, le couple $(\tilde{w}, \overline{S_w})$ vérifie $\tilde{w} \in C^1(\Omega \setminus \overline{S_w})$, $\mathcal{H}^{N-1}((\overline{S_w} \cap \Omega) \setminus S_w) = 0$, la paire $(\tilde{w}, \overline{S_u})$ est un minimiseur de $\mathcal{G}$ ³, $G(w) = \mathcal{G}(\tilde{w}, \overline{S_w})$ et $\mathcal{H}^{N-1}((K \setminus \overline{S_u}) \cap \Omega) = 0$.*

Autrement dit, les deux formulations du problème de minimisation sont équivalentes. C'est pourquoi, dans ce chapitre, nous nous efforcerons de minimiser la fonctionnelle G plutôt que $\mathcal{G}$. De plus, nous verrons que le résultat peut même être étendu en travaillant sur $GSBV(\Omega)$ plutôt que sur $SBV(\Omega)$.

Plusieurs approches sont possibles, dont une manière plus directe que celle que nous allons choisir, en utilisant par exemple des résultats de semi-continuité et coercivité de la fonctionnelle G . Cependant, l'approche proposée ici, c'est-à-dire celle proposée par Ambrosio et Tortorelli, a le mérite d'offrir un point de vue différent, exhibant en particulier le phénomène de convergence de fonctionnelles définies par une intégrale vers une fonctionnelle dépendant de la mesure de Hausdorff. Cette approche offre également de nouvelles possibilités pour résoudre numériquement le problème en substituant le problème de minimisation de G à un problème de minimisation de fonctionnelles plus simples, qui admettent également des solutions comme nous le montrerons dans la suite, ou plus généralement à obtenir une version approchée plus simple à obtenir que la "vraie" solution. La stratégie utilisée dans l'article original pour montrer l'existence d'un minimiseur à la fonctionnelle G est d'approximer au sens de la Γ -convergence celle-ci par la famille de fonctionnelles suivantes, définies pour $h \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par :

$$\begin{aligned} G_h(u, z) &= \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla z|^2](1 - z^2)^{2h} + \frac{1}{4}(\alpha h^2)z^2 dx + \beta \int_{\Omega} |u - g|^2 dx \\ &:= F_h(u, z) + \beta \int_{\Omega} |u - g|^2 dx, \end{aligned}$$

3. Dans l'article, la fonctionnelle $\mathcal{G}$ est définie sur $C^1(\Omega \setminus K)$.

Remarquer l'introduction d'une nouvelle variable z , que nous supposons à image dans $[0, 1]$ $\mathcal{L}^N$ -presque partout. Comme montré plus tard dans ce chapitre, cette variable sert à empêcher une "explosion de G_h " due à l'apparition de S_u quand $h \rightarrow +\infty$, et, dès lors impliquera l'apparition du terme $\mathcal{H}^{N-1}(S_u)$ dans G en tant que fonctionnelle limite.

Nous commencerons par montrer dans la section 2 l'existence de solutions pour le problème de minimisation des fonctionnelles G_h . Dans la section 3, nous montrerons successivement l'équicoercivité des fonctionnelles G_h , ainsi que les inégalités $\liminf$ et $\limsup$ nécessaires pour montrer la Γ -convergence des fonctionnelles F_h vers la fonctionnelle F^4 . Finalement, nous conclurons dans la section 4 et terminerons par quelques commentaires.

2. Les fonctionnelles F_h et G_h

Le but de cette section est d'étudier les fonctionnelles F_h définies formellement pour $h \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ par

$$F_h(u, z) = \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla z|^2](1 - z^2)^{2h} + \frac{1}{4}(\alpha h^2)z^2 dx,$$

en rappelant l'hypothèse $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert et borné, $\partial\Omega$ Lipschitz, $z : \Omega \rightarrow [0, 1]$ $\mathcal{L}^N$ -presque partout. Pour simplifier les calculs, on supposera $\alpha = 1$ dans la suite. On peut vérifier que cela se fait sans perte de généralité. Le domaine $(u, z) \in W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$ pour les fonctionnelles F_h , qui pourrait sembler suffisant pour notre problème, n'est malheureusement pas parfaitement adapté. En effet, le facteur $(1 - z^2)^{2h}$ empêche ces fonctionnelles d'être coercives, entraînant un manque de compacité et en résulte une impossibilité d'utiliser la méthode directe pour conclure à l'existence de minimiseurs. Par exemple, si l'on considère une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ quelconque dans $W^{1,2}(\Omega)$, la suite $(u_n, 1)_{n \in \mathbb{N}} \in W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$ et vérifiera $\sup_{n \in \mathbb{N}} \{F(u_n, 1)\} < +\infty$, mais ne garantira aucunement la convergence de $(u_n, 1)_{n \in \mathbb{N}}$ dans $W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$. Déterminer un domaine adéquat sur F fait donc également partie du problème. Introduisons pour cela les fonctions

$$\phi(t) = \int_0^t (1 - s^2)^h ds \text{ et } \psi(s, t) = s(1 - t^2)^{h+1}.$$

On remarque que pour des fonctions $w = (u, z)$ dans $W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$,

$$\int_{\Omega} |\nabla(\phi \circ z)|^2 dx = \int_{\Omega} (1 - z^2)^{2h} |\nabla z|^2 dx \leq F_h(w) \text{ et}$$

4. On verra que le terme $\int_{\Omega} |u - g|^2 dx$ ne posera pas beaucoup de souci supplémentaire

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla(\psi(u, z))|^2 dx &= \int_{\Omega} |(1 - z^2)^{h+1} \nabla u - 2(h+1)uz(1 - z^2)^h \nabla z|^2 dx \\
&= \int_{\Omega} (1 - z^2)^{2h} |(1 - z^2) \nabla u - 2(h+1)uz \nabla z|^2 dx \\
&\leq \int_{\Omega} (1 - z^2)^{2h} (|\nabla u|^2 - 4(1 - z^2)(h+1)uz \nabla u \cdot \nabla z + 4(h+1)^2 \|u\|_{\infty}^2 |\nabla z|^2) dx \\
&\leq \int_{\Omega} (1 - z^2)^{2h} (|\nabla u|^2 + 4(h+1) \|u\|_{\infty} |\nabla u \cdot \nabla z| + 4(h+1)^2 \|u\|_{\infty}^2 |\nabla z|^2) dx \\
&\leq C(h, \|u\|_{\infty}) \int_{\Omega} (|\nabla u|^2 + |\nabla z|^2) (1 - z^2)^{2h} dx \\
&\leq C(h, \|u\|_{\infty}) F_h(w)
\end{aligned}$$

si on suppose en plus $u \in L^{\infty}(\Omega)$. Finalement, en utilisant la formule $2ab \leq a^2 + b^2$, on trouve sous les mêmes conditions :

$$\int_{\Omega} |\nabla(\psi(u, z))| dx \leq C(\Omega, \|u\|_{\infty}) F_h(w).$$

Ces trois inégalités vont motiver le choix du domaine pour u, z . Posons

DÉFINITION 6.2 ($\mathcal{D}_{h,n}$). *L'ensemble $\mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$ est l'ensemble des fonctions $w = (u, z)$ telles que*

- $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, z : \Omega \rightarrow [0, 1]$ sont des fonctions boréliennes,
- $\phi \circ z \in W^{1,2}(\Omega)$,
- $\psi(N \wedge u \vee -N, z) \in W^{1,2}(\Omega)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$.

Il nous faut une notion de convergence sur cet espace. On notera $\mathfrak{B}(\Omega)$ l'espace des fonctions $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ boréliennes sur Ω . On munit cet espace de la convergence en mesure, dont nous rappelons la définition :

DÉFINITION 6.3. *Soit $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}, u \in \mathfrak{B}(\Omega)$. On dira alternativement que (u_h) converge en mesure vers u ou que $u_h \rightarrow u$ dans $\mathfrak{B}(\Omega)$ pour $h \rightarrow +\infty$ si pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \mathcal{L}^N(\{x \in \Omega : |u_h(x) - u(x)| > \epsilon\}) = 0$$

Nous allons équiper l'espace $\mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$ de cette convergence en mesure. L'objectif de cette section est de prouver que sur ce domaine, les fonctionnelles G_h sont coercives, semi-continues inférieurement et admettent donc par la méthode directe un minimum pour tout $h \in \mathbb{N}$. Premièrement, montrons que les fonctionnelles F_h (et donc également les fonctionnelles G_h) sont toujours bien définies sur ce domaine. Remarquons tout d'abord que, par les règles de différentiation du produit et de la composée pour les fonctions $W^{1,p}$

et par définition de $\mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$, on a l'inclusion

$$\begin{aligned} W^{1,2}(\Omega) \times \{z \in W^{1,2}(\Omega) : 0 \leq z \leq 1 \text{ } \mathcal{L}^N - \text{presque partout}\} &\subset \mathcal{D}_{h,n}(\Omega) \\ &\subset \mathfrak{B}(\Omega) \times \{z \in \mathfrak{B}(\Omega) : 0 \leq z \leq 1 \text{ } \mathcal{L}^N - \text{presque partout}\}. \end{aligned}$$

Nous considérons donc un ensemble de fonctions plus grands que le domaine de fonction initial. Dans celui-ci, posons $w = (u, z) \in \mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$. On remarque que la fonction $\phi \in C^1([0, 1])$ et est strictement croissante, donc inversible sur l'intervalle $[0, 1]$. De plus, on calcule formellement que

$$(\phi^{-1})'(y) = \frac{1}{\phi'(\phi^{-1}(y))} = \frac{1}{(1 - (\phi^{-1}(y))^2)^h} < +\infty$$

pour tout $0 \leq \phi^{-1}(y) < 1$. Donc, on conclut immédiatement de ces considérations que $\phi^{-1} \in C^1([0, \phi(1)))$, et par la proposition 4.26, on déduit, puisque $z = \phi^{-1} \circ (\phi \circ z)$ et par définition de $\mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$, que z est approximativement différentiable $\mathcal{L}^N$ -presque partout sur $\{x \in \Omega : z(x) < 1\}$. De là, toujours par la proposition 4.26, on déduit que $N \wedge u \vee -N$ est approximativement différentiable $\mathcal{L}^N$ -presque partout sur $\{x \in \Omega : z(x) < 1\}$ puisque $N \wedge u \vee -N = \psi(N \wedge u \vee -N, z)/(1 - z^2)^{h+1}$. Finalement, par la proposition 4.28, on déduit que u est approximativement différentiable $\mathcal{L}^N$ -presque partout sur $\{x \in \Omega : z(x) < 1\}$. Ainsi, les fonctionnelles F_h sont bien définies sur $\mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$, à condition de considérer les gradients comme les dérivées approximatives de u et z , coïncidant avec leurs dérivées faibles si $u, z \in W^{1,2}(\Omega)$ par le théorème de Calderón-Zygmund 4.27, et à condition d'imposer $|\nabla w|^2(1 - z^2)^{2h} = 0$ sur l'ensemble $\{x \in \Omega : z(x) = 1\}$. Finalement, les deux inégalités précédant la définition de $\mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$ restent valables dans $\mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$, à condition de considérer à nouveau les dérivées comme dérivées approximatives. Dans la suite de ce chapitre, nous serons souvent amenés à nous ramener au cas $N = 1$. La proposition suivante servira à décrire $\mathcal{D}_{h,1}$ dans ce cas.

PROPOSITION 6.4. *Soit $w = (u, z) \in \mathfrak{B}(\Omega) \times \mathfrak{B}(\Omega)$. Alors, pour tout $h \in \mathbb{N}$, $w \in \mathcal{D}_{h,1}$, $F_h(w) < \infty$ si et seulement si z est continue, $w \in W_{loc}^{1,2}(\{z < 1\})$ et*

$$\int_{\Omega} |\nabla w|^2 (1 - z^2)^{2h} dt < +\infty.$$

Avant de prouver cette proposition, nous aurons besoin du lemme bien connu suivant (voir [8] lemme 2.4) :

LEMME 6.5. *Soit $v : \Omega \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et bornée, et soit $a \in \mathbb{R}$. Alors, $v \in W^{1,1}(\Omega \setminus \{v = a\})$ implique $v \in W^{1,1}(\Omega)$.*

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 6.4.

- $\Rightarrow$: Puisque $\phi \circ z \in W^{1,2}(\Omega)$, on a par l'inégalité de Morrey 4.9 que, quitte à modifier $\phi \circ z$ sur un ensemble négligeable, on a $\phi \circ z$ continue. Puisque, comme expliqué précédemment, ϕ est inversible sur $[0, 1]$, à inverse continue sur $[0, \phi(1)]$, on a directement que $z = \phi^{-1} \circ (\phi \circ z)$ est continue. Ensuite, soit $A \subseteq \{z \in \Omega : z(x) < 1\}$. Alors, il existe $\gamma \in (0, 1)$ tel que $z(x) \leq \gamma$ sur A . De là, puisque $\phi^{-1} \in C^1([0, \phi(\gamma)])$ et puisque à nouveau,

$$z = \phi^{-1} \circ (\phi \circ z) \text{ et } (N \wedge u \vee -N) = \frac{\psi(N \wedge u \vee -N, z)}{(1 - z^2)^{h+1}},$$

on a par les règles de dérivation des produit et composée de fonctions de Sobolev que z et $N \wedge u \vee -N$ sont dans $W^{1,2}(A)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. On conclut alors que u admet une dérivée faible sur A , et par la condition $F_h(w) < +\infty$, on trouve $u \in W^{1,2}(A)$. Le dernier point est trivial.

- $\Leftarrow$: Le fait que $F_h(w) < +\infty$ est une conséquence immédiate du fait que $\int_{\Omega} |\nabla w|^2 (1 - z^2)^{2h} dt < +\infty$ et que $0 \leq z \leq 1$ sur Ω borné. Il nous reste à montrer que $w \in \mathcal{D}_{h,1}$. Puisque z et ϕ sont continues et que Ω est borné, $\phi \circ z \in L^2(\Omega)$. Puisque $z \in W_{loc}^{1,2}(\{z < 1\})$, $\phi \circ z$ admet une dérivée faible sur $\{z < 1\}$, et par la condition :

$$\int_{\{z < 1\}} |\nabla(\phi \circ z)|^2 dy = \int_{\{z < 1\}} |\nabla z|^2 (1 - z^2)^{2h} dy \leq \int_{\Omega} |\nabla w|^2 (1 - z^2)^{2h} dt < +\infty,$$

on conclut que $\phi \circ z \in W^{1,2}(\{z < 1\})$, et par le lemme 6.5, on trouve que $\phi \circ z \in W^{1,1}(\Omega)$, et même dans $W^{1,2}(\Omega)$ puisque $\int_{\Omega} |\nabla w|^2 (1 - z^2)^{2h} dt < +\infty$. Finalement, en se souvenant que sur $\{z < 1\}$, $(N \wedge u \vee -N), z \in W_{loc}^{1,2}(\Omega) \cap L^{\infty}(\Omega)$, et donc que $\psi(N \wedge u \vee -N, z)$ admet une dérivée faible sur $\{z < 1\}$. On obtient directement sur celle-ci l'inégalité suivante :

$$\begin{aligned} |\nabla \psi(N \wedge u \vee -N, z)|^2 &= |(1 - z^2)^{h+1} \nabla(N \wedge u \vee -N) + (N \wedge u \vee -N)(h+1)(1 - z^2)^h (-2z) \nabla z|^2 \\ &\leq C(N, h) |\nabla w|^2 (1 - z^2)^{2h}. \end{aligned}$$

On conclut que $\psi(N \wedge u \vee -N, z) \in W^{1,2}(\Omega \setminus \{z = 1\})$, puisque $\int_{\Omega} |\nabla w|^2 (1 - z^2)^{2h} dt < +\infty$, et donc dans $W^{1,2}(\Omega)$ en étendant la fonction par 0 sur $\{z = 1\}$.

□

La description de $\mathcal{D}_{h,1}$ étant finie, nous nous attaquons maintenant à la première partie du problème : prouver que les fonctionnelles G_h sont coercives.

THÉOREME 6.6. *Soient $\beta, \gamma, C > 0$, $g \in \mathfrak{B}(\Omega)$ et soit*

$$\mathcal{K} = \left\{ w \in \mathcal{D}_{h,n}(\Omega) : F_h(w) + \beta \int_{\Omega} |u - g|^{\gamma} dx \leq C \right\}.$$

Alors, pour toute suite $(w_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}$, il existe une sous-suite $(w_{k_p})_{p \in \mathbb{N}}$ de (w_k) et $w \in \mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$ tels que (z_{k_p}) converge $\mathcal{L}^N$ -presque partout vers z sur Ω , (u_{k_p}) converge $\mathcal{L}^N$ -presque partout vers u sur $\{x \in \Omega : z(x) < 1\}$. De plus, on peut supposer que $u(x) = g(x)$ sur l'ensemble $\{x \in \Omega : z(x) = 1\}$.

DÉMONSTRATION. Avant de définir $\mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$, on avait montré l'inégalité

$$\int_{\Omega} |\nabla(\phi \circ z)|^2 dx \leq F_h(w).$$

De là, et en utilisant que $(\phi \circ z_k)$ est uniformément bornée puisque pour tout $k \in \mathbb{N}$, $0 \leq z_k \leq 1$, on trouve que la famille

$$\mathcal{P} = \{\phi \circ z : w = (u, z) \in \mathcal{K}\}$$

est bornée dans $W^{1,2}(\Omega)$. Par le même raisonnement appliqué à $\psi(N \wedge u \vee -N, z)$, on trouve que la famille

$$\mathcal{G}_N = \{\psi(N \wedge u \vee -N, z) : w = (u, z) \in \mathcal{K}\}$$

est bornée dans $W^{1,2}(\Omega)$ pour tout $N \in \mathbb{N}$. Alors, pour toute suite $(w_k) \subset \mathcal{K}$, on peut trouver par le théorème 4.7, quitte à passer à une sous-suite, qu'il existe une fonction borélienne $z : \Omega \rightarrow [0, 1]$ telle que

$$\phi \circ z_k \rightarrow \phi \circ z \in W^{1,2}(\Omega),$$

et donc $\mathcal{L}^N$ -presque partout dans Ω quitte à repasser par une sous-suite. De même, pour tout $N \in \mathbb{N}$, il existe une fonction $v_N \in \mathfrak{B}(\Omega)$ telle que

$$\psi(N \wedge u_k \vee -N, z_k) = (N \wedge u_k \vee -N)(1 - z_k^2)^{h+1} \rightarrow v_N \in W^{1,2}(\Omega)$$

$\mathcal{L}^N$ -presque partout sur Ω . Puisque $\phi \in C^1([0, 1])$, inversible et $\phi^{-1} \in C^0([0, \phi(1)])$, on déduit directement que $z_k \rightarrow z$ $\mathcal{L}^N$ -presque partout sur Ω , et de là, il existe pour tout $N \in \mathbb{N}$ une fonction u_N à image dans $[-N, N]$ telle que $N \wedge u_k \vee -N \rightarrow u_N$ $\mathcal{L}^N$ -presque partout sur $\{y \in \Omega : z(y) < 1\}$. On pose sur $\{x \in \Omega : z(x) < 1\}$ $u = \lim_{N \rightarrow +\infty} u_N$, $u(x) \in [-\infty, +\infty]$. La limite est bien définie. En effet, prenons $x \in \{y \in \Omega : z(y) < 1\}$ quelconque, tel que les limites $u_N(x)$ existe pour tout N (ceci est vrai pour $\mathcal{L}^N$ -presque tout x dans $\{x \in \Omega : z(x) < 1\}$). Alors, soit il existe $N^* \in \mathbb{N}$ tel que

$u_{N^*}(x) \in (-N^*, N^*)$, et alors, par construction des u_N , $u_N(x) = u_{N^*}(x)$ pour tout $N \geq N^*$, donc la limite existe, soit $u_N(x) = N$ (resp. $-N$) pour tout $N \in \mathbb{N}$, et alors, la limite existe dans $\overline{\mathbb{R}}$ et vaut $+\infty$ (resp. $-\infty$). On pose, sur l'ensemble $\{x \in \Omega : z(x) = 1\}$, $u(x) = g(x)$. Nous allons montrer que cette fonction appartient à $\mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$. Comme limites ponctuelles des fonctions boréliennes, les fonctions u, z sont boréliennes sur $\overline{\mathbb{R}}$, et donc sur $\mathbb{R}$ à condition de montrer que $u(x) < +\infty$ $\mathcal{L}^N$ -presque partout sur Ω . Pour cela, soit

$$g^* : \Omega \times \overline{\mathbb{R}} : (x, t) \mapsto \begin{cases} \beta |t - g(x)|^\gamma & \text{si } t \in \mathbb{R}, \\ +\infty, & \text{si } t = \pm\infty. \end{cases}$$

La fonction g^* est semi-continue inférieurement en t , ce qui nous donne par le lemme de Fatou :

$$\int_{\{z < 1\}} g(x, u) dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\{z < 1\}} g(x, u_k) dx \leq C < +\infty.$$

On conclut que $u < +\infty$ $\mathcal{L}^N$ -presque partout sur Ω . Les conditions sur $\phi \circ z$, $\psi(u, z)$ sont vérifiées immédiatement par construction de z et u , en remarquant seulement que

$$\psi(N \wedge u \vee -N, z) = \lim_{k \rightarrow +\infty} \psi(N \wedge u_k \vee -N, z_k),$$

donc, $w = (u, z) \in \mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$. □

Maintenant que la coercivité a été montrée, il ne reste qu'à montrer la semi-continuité inférieure des fonctionnelles G_h pour prouver l'existence de minimiseurs. Pour cela, comme déjà annoncé précédemment, la technique sera de se réduire en dimension $N = 1$. Nous aurons besoin des notations et propositions suivantes :

DÉFINITION 6.7. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert et borné, et $\nu \in \mathbb{S}^{N-1}$ une direction fixée. On pose les notations suivantes :*

- $\pi_\nu = \{x \in \mathbb{R}^N : x \cdot \nu = 0\}$, le plan vectoriel perpendiculaire à ν ,
- pour tout $x \in \pi_\nu$, $\Omega_x = \{t \in \mathbb{R} : x + t\nu \in \Omega\}$ la tranche de Ω 1-dimensionnelle issue de la droite passant par x et de direction ν ,
- $\Omega_\nu = \{x \in \pi_\nu : \Omega_x \neq \emptyset\}$ la projection de Ω sur π_ν ,
- pour tout $x \in \Omega_\nu$, $u_x : \Omega_x \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto u(x + t\nu)$, $u_x \in \mathfrak{B}(\Omega_x)$ la restriction de u sur la tranche Ω_x .

La bonne structure de $\mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$ est préservée en passant aux tranches, comme le montre la proposition suivante :

PROPOSITION 6.8. *Soit $w \in \mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$ et soit $\nu \in \mathbb{S}^{N-1}$. Alors, en utilisant les notations de 6.7, on a pour $\mathcal{H}^{N-1}$ -presque tout $x \in \Omega_\nu$:*

- $w_x = (u_x, z_x) \in \mathcal{D}_{h,1}(\Omega_x)$,
- $\nabla u_x(t) = \nabla u(x + t\nu) \cdot \nu$
- $\nabla z_x(t) = \nabla z(x + t\nu) \cdot \nu$ $\mathcal{L}^1$ -presque partout sur $\Omega_x \setminus \{t : z(x + t\nu) = 1\}$.

Voici le théorème de continuité inférieure dont nous avons besoin :

THÉORÈME 6.9. *Soient $(w_k)_{k \in \mathbb{N}} = (u_k, z_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$ et $w = (u, z) \in \mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$ tels que*

$$\begin{cases} u_k \rightarrow u & \mathcal{L}^N - \text{presque partout sur } \{x \in \Omega : z(x) < 1\}, \\ z_k \rightarrow z & \mathcal{L}^N - \text{presque partout sur } \Omega. \end{cases}$$

Alors, $F_h(w) \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} F_h(w_k)$. De plus, si $u(x) = g(x)$ sur $\{x \in \Omega : z(x) < 1\}$, alors,

$$F_h(w) + \beta \int_{\Omega} |u - g|^\gamma dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \left[F_h(w_k) + \beta \int_{\Omega} |u_k - g|^\gamma dx \right].$$

DÉMONSTRATION. Pour la démonstration, on pourra supposer sans perte de généralité que la suite $(F_h(w_k))_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée. Réécrivons les fonctionnelles F_h comme ceci :

$$F_h(w) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 (1 - z^2)^{2h} dx + \int_{\Omega} |\nabla(\phi \circ z)|^2 dx + \frac{1}{4}(\alpha^2 h^2) \int_{\Omega} z^2 dx.$$

Pour démontrer la première partie du théorème, il suffit de montrer la semi-continuité inférieure des trois termes du membre de droite. Commençons par le deuxième terme. Via l'inégalité déjà montrée précédemment sur $\mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$, on a

$$\int_{\Omega} |\nabla(\phi \circ z)|^2 dx \leq F_h(w),$$

et donc, on trouve que la suite $(\phi \circ z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ est bornée dans $W^{1,2}$. De là, par le théorème 4.7 et le commentaire qui suit, on peut extraire une sous-suite de $(\phi \circ z_k)_k$ convergeant faiblement dans $W^{1,2}$ vers une fonction $\phi \circ z$. La suite est immédiate si l'on considère que la fonctionnelle $u \mapsto \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dy$ est faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement dans $W^{1,2}$ (voir proposition 5.4) , c'est-à-dire que pour toute suite $(f_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergeant faiblement dans $W^{1,2}(\Omega)$ vers une fonction f , on a l'inégalité :

$$\int_{\Omega} |\nabla f|^2 dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla f_k|^2.$$

La semi-continuité inférieure du troisième terme est obtenue par le lemme de Fatou. Il ne reste plus qu'à observer le premier terme. Commençons par le cas $N = 1$. Dans ce cas, puisque la famille des $(\phi \circ z_k)$ est uniformément bornée dans $W^{1,2}(\Omega)$, par le théorème de Morrey 4.9, elle l'est également dans $C^{0,1/2}$. De là, par la proposition 4.10, la suite $(\phi \circ z_k)$ converge uniformément vers une fonction continue $\phi \circ z$. On a directement alors que (z_k) converge uniformément vers z . Soit $A \Subset \Omega$. Par convergence uniforme des z_k , on a que pour k suffisamment grand, $A \Subset \{x \in \Omega : z(x) < 1\}$, et donc $u_k \in W^{1,2}(A)$ pour k suffisamment grand. De là, par un raisonnement similaire à celui fait pour z_k , les fonctions u_k convergent faiblement dans $W^{1,2}(\Omega)$, donc, via la proposition 4.5, fortement dans $L^2(\Omega)$, donc, puisque Ω est borné, dans $L^1(\Omega)$. Par la proposition 5.4, on a alors :

$$\begin{aligned} \int_A |\nabla u|^2 (1 - z^2)^{2h} dx &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_A |\nabla u_k|^2 (1 - z_k^2)^{2h} dx \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_\Omega |\nabla u_k|^2 (1 - z_k^2)^{2h}. \end{aligned}$$

On termine en prenant la limite $A \uparrow \{x \in \Omega : z(x) < 1\}$ via le théorème de convergence monotone. Occupons-nous maintenant du cas $N \geq 2$. Considérons A un ouvert quelconque de Ω et fixons $\nu \in \mathbb{S}^{N-1}$. Par la proposition 6.8, on a que pour $\mathcal{H}^{N-1}$ -presque tout $x \in A_\nu$, $((u_k)_x, (z_k)_x)_k \subset \mathcal{D}_{h,1}(A_x)$, et de là, par ce que nous venons de montrer en dimension 1, on a

$$(6.1) \quad \int_{A_x} |\nabla u_x|^2 (1 - z_x^2)^{2h} dt \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{A_x} |\nabla (u_k)_x|^2 (1 - (z_k)_x^2)^{2h} dt.$$

En intégrant sur A_ν , on obtient

$$\begin{aligned} \int_{A_\nu} \int_{A_x} |\nabla u_x|^2 (1 - z_x^2)^{2h} dt dx &= \int_{A_\nu} \int_{A_x} |\nabla u(x + t\nu) \cdot \nu|^2 (1 - z_x^2)^{2h} dt dx \\ &= \int_A |\nabla u \cdot \nu|^2 (1 - z^2)^{2h} dx \\ &\leq \int_{A_\nu} \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{A_x} |\nabla (u_k)_x|^2 (1 - (z_k)_x^2)^{2h} dt dx \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{A_\nu} \int_{A_x} |\nabla u_k(x + t\nu) \cdot \nu|^2 (1 - (z_k)_x^2)^{2h} dt dx \\ &= \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_A |\nabla u_k \cdot \nu|^2 (1 - z_k^2)^{2h} dx \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_A |\nabla u_k|^2 (1 - z_k^2)^{2h} dx, \end{aligned}$$

où la première égalité vient de la proposition 6.8, la deuxième égalité de Fubini et de la définition de $(z_k)_x$, la première inégalité de l'inégalité (6.1),

la deuxième du lemme de Fatou, la troisième égalité de Fubini et finalement, la dernière inégalité de Cauchy-Schwarz avec $|\nu| = 1$. On retiendra :

$$\int_A |\nabla u \cdot \nu|^2 (1 - z^2)^{2h} dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_A |\nabla u_k|^2 (1 - z_k^2)^{2h} dx.$$

Maintenant, il suffit de remarquer que

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 (1 - z^2)^{2h} dx = \sup_{\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}} \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{A_i} |\nabla u \cdot \nu_i|^2 (1 - z^2)^{2h} dx,$$

où le suprémum est pris sur l'ensemble des collections $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ d'ouvert deux-à-deux disjoints de Ω et où pour tout $i \in \mathbb{N}$, $\nu_i \in \mathbb{S}^{N-1}$ et dépend de A_i . Cela se prouve en jouant avec la définition de fonction mesurable et d'intégrale. Puisque pour tout $M \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^M \int_{A_i} |\nabla u \cdot \nu_i|^2 (1 - z^2)^{2h} dx &\leq \sum_{i=0}^M \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{A_i} |\nabla u_k|^2 (1 - z_k^2)^{2h} dx \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\bigcup_{i=0}^M A_i} |\nabla u_k|^2 (1 - z_k^2)^{2h} dx \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 (1 - z_k^2)^{2h} dx, \end{aligned}$$

on trouve

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 (1 - z^2)^{2h} dx &= \sup_{\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}} \sum_{i=0}^{+\infty} \int_{A_i} |\nabla u \cdot \nu_i|^2 (1 - z^2)^{2h} dx \\ &\leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} |\nabla u_k|^2 (1 - z_k^2)^{2h} dx, \end{aligned}$$

ce qui conclut la première partie de la preuve. La preuve de

$$F_h(w) + \beta \int_{\Omega} |u - g|^\gamma dx \leq \liminf_{k \rightarrow +\infty} \left[F_h(w_k) + \beta \int_{\Omega} |u_k - g|^\gamma dx \right]$$

se déduit directement de la partie précédente de la démonstration, du lemme de Fatou pour le terme $\int_{\Omega} |u - g|^\gamma dx$ et de la suradditivité de la $\liminf$. L'hypothèse $u = g$ sur $\{x \in \Omega : z(x) = 1\}$ apparaît car la convergence ponctuelle des u_k vers u n'est garantie que sur $\{x \in \Omega : z(x) < 1\}$. $\square$

Nous venons donc de montrer la semi-continuité inférieure des fonctionnelles G_h , ce qui, couplé avec la coercivité de ces mêmes fonctionnelles nous donne l'existence de minimiseurs pour tout $h \in \mathbb{N}$, via la méthode directe.

3. Équicoercivité et convergence Γ

En se basant sur le chapitre précédent, l'approximation du problème de minimisation de la fonctionnelle G par ceux de minimisation des G_h se fait en deux étapes. Premièrement, nous prouverons l'équicoercivité des fonctionnelles G_h , pour garantir une convergence de leurs minimiseurs, et nous établirons ensuite la convergence Γ des F_h vers F , en montrant successivement l'inégalité $\liminf$ et $\limsup$. Nous aurons alors tous les outils nécessaires pour s'occuper de la fonctionnelle G dans la fin du chapitre.

3.1. Équicoercivité. Commençons donc par l'équicoercivité des fonctionnelles G_h . Nous aurons besoin du lemme suivant :

LEMME 6.10. *Soit $z : \Omega \rightarrow [0, 1]$ une fonction telle que $\phi \circ z \in W^{1,2}(\Omega)$. Alors,*

- (1) $z_\gamma = z \wedge \gamma \in W^{1,2}(\Omega)$ pour tout $\gamma < 1$,
- (2) $c = (1 - z^2)^{h+1} \in W^{1,2}$,
- (3) $\lim_{\gamma \uparrow 1} F_h(u, z_\gamma) = F_h(u, z)$ pour tout $u \in W^{1,2}(\Omega)$.

DÉMONSTRATION.

- (1) Puisque $\phi^{-1} \in C^1([0, \phi(1)))$, que $\gamma < 1$ et que ϕ^{-1} est croissante sur $[0, \phi(1))$, la fonction $z_\gamma = \phi^{-1}((\phi \circ z) \wedge \phi(\gamma))$ appartient à $W^{1,2}(\Omega)$.
- (2) On a premièrement $0 < (1 - z^2)^{h+1} \leq 1$ sur Ω borné, donc $(1 - z^2)^{h+1} \in L^2(\Omega)$. Par le même raisonnement effectué précédemment dans ce chapitre, on déduit que z est approximativement différentiable $\mathcal{L}^N$ -presque partout. Puisque, pour $0 \leq \gamma < 1$, $c_\gamma = (1 - z_\gamma^2)^{h+1} \leq 1 \in L^2(\Omega)$ et que, pour certaines constantes $C, \tilde{C}$ dépendant uniquement de h , par 4.28,

$$|\nabla c_\gamma| \leq C(1 - z_\gamma^2)^h |\nabla z_\gamma| \leq C(1 - z^2)^h |\nabla z| \leq \tilde{C} |\nabla(\phi \circ z)| \in L^2(\Omega),$$

on conclut que l'ensemble des c_γ , $\gamma \in [0, 1)$, est borné dans $W^{1,2}(\Omega)$. Alors, on peut extraire via le théorème 4.7 une suite $(c_{\gamma_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui converge faiblement vers une fonction $c^* \in W^{1,2}(\Omega)$ dans $W^{1,2}(\Omega)$ (donc, dans $L^1(\Omega)$, donc à sous-suite près $\mathcal{L}^N$ -presque partout). Puisque les fonctions c_γ convergent ponctuellement vers c quand $\gamma \rightarrow 1$, on conclut que $c^* = c$ $\mathcal{L}^N$ -presque partout, donc, $c \in W^{1,2}(\Omega)$.

- (3) Conséquence directe du théorème de convergence dominée.

□

Nous sommes maintenant prêt à montrer l'équicoercivité des fonctionnelles

$$F_h(u, z) + \beta \int_{\Omega} |u - g|^{\gamma} dx.$$

THÉORÈME 6.11. *Soit $(w_h)_{h \in \mathbb{N}} = (u_h, z_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$ une suite telle que*

$$F_h(w_h) + \beta \int_{\Omega} |u_h - g|^{\gamma} dx \leq C < +\infty$$

pour $\beta, \gamma, C >$ et $g \in \mathfrak{B}(\Omega)$. Alors, il existe une sous-suite u_{h_k} et $u \in \mathfrak{B}(\Omega)$ telle que $(u_{h_k}, z_{h_k}) \rightarrow (u, 0)$ dans $\mathfrak{B}(\Omega) \times \mathfrak{B}(\Omega)$.

DÉMONSTRATION. Par l'inégalité

$$F_h(w_h) + \beta \int_{\Omega} |u_h - g|^{\gamma} dx \geq \frac{1}{4} h^2 \int_{\Omega} z_h^2 dx,$$

on obtient directement qu'il faut que z_h converge fortement dans $L^2(\Omega)$ vers 0 pour compenser le facteur h^2 . Considérons $c_h = (1 - z_h^2)^{h+1}$, $\psi_{h,N} = (N \wedge u_h \vee -N)(1 - z_h^2)^{h+1}$. Par définition de $\mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$ et par le lemme précédent, on a que pour tout $h \in \mathbb{N}$, c_h et $\phi_{h,N}$ sont dans $W^{1,2}(\Omega)$ et alors,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla c_h| dx &= 2(h+1) \int_{\Omega} z_h (1 - z_h^2)^h |\nabla z_h| dx \\ &\leq \int_{\Omega} |\nabla z_h|^2 (1 - z_h^2)^{2h} dx + \frac{4(h+1)^2}{h^2} \frac{1}{4} h^2 \int_{\Omega} z_h^2 dx \\ &\leq 16 F_h(w_h), \end{aligned}$$

en utilisant $ab \leq a^2 + \frac{b^2}{4}$ et le fait que $(h+1)^2/h^2 \leq 4$ pour $h \geq 1$, et de plus, comme vu au début de la section précédente,

$$\int_{\Omega} |\nabla \psi_{h,N}| dx \leq C(\Omega, N) F_h(w_h).$$

De là, les fonctions c_h et $\psi_{h,N}$ sont bornées dans $W^{1,1}(\Omega)$ et donc, quitte à ne considérer que des sous-suites, on peut supposer sans perte de généralité que z_h converge $\mathcal{L}^N$ -presque partout vers 0 sur Ω , c_h converge $\mathcal{L}^N$ -presque partout vers une fonction $c \in BV(\Omega)$ sur Ω et pour tout $N \in \mathbb{N}$ les fonctions $\psi_{h,N}$ converge $\mathcal{L}^N$ -presque partout vers des fonctions $\psi_N : \Omega \rightarrow [-N, N]$ sur Ω . Puisque par Fatou,

$$\int_{\Omega} \liminf_{h \rightarrow +\infty} h^2 z_h^2 dx \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{\Omega} h^2 z_h^2 dx < +\infty,$$

on a $\liminf_{h \rightarrow +\infty} z_h^2 < +\infty$ $\mathcal{L}^N$ -presque partout sur Ω . De là, en utilisant qu'en conséquence pour h assez grand, $z_h^2 \leq C/h^2$, on trouve $1 \geq \liminf_{h \rightarrow +\infty} c_h \geq 1$ $\mathcal{L}^N$ -presque partout sur Ω (voir la preuve du lemme

6.15 pour un raisonnement plus détaillé), et donc, $c = 1$ $\mathcal{L}^N$ -presque partout sur Ω . Dès lors, $N \wedge u \vee -N = \psi_{h,N}/c_h$ converge $\mathcal{L}^N$ -presque partout vers une fonction ψ_N sur Ω , et on définit la fonction u par $u(x) = \lim_{N \rightarrow +\infty} (N \wedge u \vee -N)(x) \in [-\infty, +\infty]$, possiblement à définir arbitrairement sur un ensemble de mesure de Lebesgue nulle. On prouve $u(x) \in \mathbb{R}$ $\mathcal{L}^N$ -presque partout sur Ω via l'argument présenté dans la preuve du théorème 6.6, donc $u \in \mathfrak{B}(\Omega)$. $\square$

3.2. Semi-continuité inférieure. Commençons par poser les notations de cette section., et l'objectif de cette section est de montrer que pour tout $u \in \mathfrak{B}(\Omega)$, pour toute suite $(u_h, z_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$ qui converge vers $(u, 0)$ dans $\mathfrak{B}(\Omega) \times \mathfrak{B}(\Omega)$, on a pour F_h, F comme définies précédemment

$$\liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(u_h, z_h) \geq F(u).$$

Il sera utile de mettre en évidence la dépendance par rapport au domaine Ω de l'assertion précédente. Posons alors pour tout $w \in \mathfrak{B}(\Omega)$:

$$F_-(w, \Omega) = \inf \{ \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(w_h, \Omega) : (w_h) \subset \mathcal{D}_{h,n}(\Omega), w_h \rightarrow w \text{ dans } \mathfrak{B}(\Omega) \times \mathfrak{B}(\Omega) \},$$

où pour tout $h \in \mathbb{N}$, w_h est déterminé par deux fonctions $w_h = (u_h, z_h)$ comme nous en avons pris l'habitude dans la définition de $\mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$, et où on rappelle que pour tout $(u, z) \in \mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$,

$$F_h((u, z), \Omega) = \int_{\Omega} [|\nabla u|^2 + |\nabla z|^2](1 - z^2)^{2h} + \frac{1}{4}(\alpha^2 h^2) z^2 dx.$$

De même, on peut réécrire la fonctionnelle limite avec une convention similaire :

$$F(u, \Omega) = \begin{cases} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \alpha \mathcal{H}^{N-1}(S_u) & \text{si } u \in GSBV(\Omega) \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Avec cette notation, on peut réécrire l'objectif de cette section comme ceci :

PROPOSITION 6.12. *Pour tout ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ et tout $u \in \mathfrak{B}(\Omega)$, on a*

$$F_-((u, 0), \Omega) \geq F(u, \Omega).$$

Quelques avantages de travailler avec cette dépendance en Ω proviennent des remarques suivantes :

LEMME 6.13.

- (1) *Pour tous $A, B \subset \mathbb{R}^N$ ouverts, $A \subset B$, $F_-(w, A) \leq F_-(w, B)$ pour tout $w = (u, 0)$, $u \in \mathfrak{B}(B)$,*

- (2) F_- est superadditif dans la variable de domaine Ω , c'est-à-dire pour tous $A, B \subset \mathbb{R}^N$ ouverts, $A \cap B = \emptyset$, pour tout $w = (u, 0)$, $u \in \mathfrak{B}(A \cup B)$,

$$F_-(w, A) + F_-(w, B) \leq F_-(w, A \cup B),$$

- (3) pour tout $u \in \mathfrak{B}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert, on a

$$F(u, \Omega) = \sup\{F(u, A) : A \Subset \Omega\},$$

DÉMONSTRATION.

- (1) On a par définition de F_- que pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite $(w_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_{h,n}(B)$, $w_h \rightarrow (u, 0)$ dans $\mathfrak{B}(B) \times \mathfrak{B}(B)$ telle que $F_-(w, B) \geq \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(w_h, B) - \epsilon$. Par définition de F_h et de F_- , on a alors

$$F_-(w, B) \geq \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(w_h, B) - \epsilon \geq \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(w_h, A) - \epsilon \geq F_-(w, A) - \epsilon.$$

On conclut en prenant la limite $\epsilon \rightarrow 0$.

- (2) Soient $A, B \subset \mathbb{R}^N$ ouverts, $A \cap B = \emptyset$, et $w = (u, 0)$, $u \in \mathfrak{B}(A \cup B)$. Par le même raisonnement qu'au point précédent, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une suite $(w_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_{h,n}(A \cup B)$, $w_h \rightarrow w$ dans $\mathfrak{B}(A \cup B) \times \mathfrak{B}(A \cup B)$ telle que

$$\begin{aligned} F_-(w, A \cup B) &\geq \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(w_h, A \cup B) - \epsilon \\ &= \liminf_{h \rightarrow +\infty} (F_h(w_h, A) + F_h(w_h, B)) - \epsilon \\ &\geq \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(w_h, A) + \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(w_h, B) - \epsilon \\ &\geq F_-(w, A) + F_-(w, B) - \epsilon, \end{aligned}$$

où le passage de la première à la deuxième ligne est obtenu simplement par définition de F_h . On conclut en prenant la limite $\epsilon \rightarrow 0$.

- (3) Supposons $u \in GSBV(\Omega)$. Alors, pour tout $A \Subset \Omega$, $u|_A \in GSBV(A)$ et, puisque (par la proposition 4.28 et par le caractère local de S_u) $\nabla u|_A = \nabla u$ sur A et $S_{u|_A} = S_u \cap A$, on a par l'expression de F , $F(u, \Omega) \geq \sup\{F(u, A) : A \Subset \Omega\}$. En posant $A_\epsilon = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, \partial\Omega) > \epsilon\} \cap B_{1/\epsilon}(0)$, alors, par le théorème de convergence monotone et puisque $\{A_\epsilon\}_\epsilon$ est une suite croissante d'ensembles et que $\{S_u \cap A_\epsilon\}_\epsilon \rightarrow S_u$ quand $\epsilon \rightarrow 0$, on obtient $F(u, \Omega) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} F(u, A_\epsilon) \leq \sup\{F(u, A) : A \Subset \Omega\}$.

□

Les points (1) et (3) du lemme précédent montrent qu'il n'y a aucune perte de généralité à supposer que Ω est borné dans la proposition 6.12. En effet, si celle-ci est vraie pour tout ouvert $A \subset \mathbb{R}^N$ borné, alors pour un ouvert $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ quelconque, $u \in \mathfrak{B}(\Omega)$:

$$\begin{aligned} F(u, \Omega) &= \sup\{F(u, A) : A \Subset \Omega\} \leq \sup\{F_-((u, 0), A) : A \Subset \Omega\} \\ &\leq \sup\{F_-((u, 0), \Omega) : A \Subset \Omega\} = F_-((u, 0), \Omega). \end{aligned}$$

Le lemme suivant est le pendant du précédent pour la variable u :

LEMME 6.14.

(1) Pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $u \in \mathfrak{B}(\Omega)$,

$$F(u, \Omega) = \lim_{N \rightarrow +\infty} F(N \wedge u \vee -N, \Omega)$$

(2) Pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $u \in \mathfrak{B}(\Omega)$ et pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$F_-((u, 0), \Omega) \geq F_-((N \wedge u \vee -N, 0), \Omega)$$

DÉMONSTRATION. (1) Si $u \notin GSBV(\Omega)$, $F(u, \Omega) = +\infty$, et par définition de $GSBV(\Omega)$, il existe un $N^* \in \mathbb{N}$ tel que $N^* \wedge u \vee -N^* \notin SBV(\Omega)$. Alors, pour tout $N \geq N^*$, $N \wedge u \vee -N \notin GSBV(\Omega)$, donc $F(N \wedge u \vee -N, \Omega) = +\infty$. Si $u \in GSBV(\Omega)$, alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$, $N \wedge u \vee -N \in GSBV(\Omega)$, et puisque $\{S_{N \wedge u \vee -N}\}_{N=0}^{+\infty}$ est une suite croissante d'ensembles convergeant vers S_u par définition, et puisque, par la proposition 4.28

$$\int_{\Omega} |\nabla(N \wedge u \vee -N)|^2 dx = \int_{\{y \in \Omega : -N \leq u(y) \leq N\}} |\nabla u|^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$$

quand $N \rightarrow +\infty$ par le théorème de convergence monotone, on conclut que $\lim_{N \rightarrow +\infty} F(N \wedge u \vee -N, \Omega) = F(u, \Omega)$.

(2) Suit directement du fait que pour $\mathcal{L}^N$ -presque tout $x \in \Omega$

$$\nabla(N \wedge u \vee -N)(x) = \begin{cases} \nabla u(x) & \text{si } -N \leq u(x) \leq N, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et du fait que l'intégrand de F_h est positif pour tout $h \in \mathbb{N}$.

□

Ainsi, nous pouvons supposer sans perte de généralité que u est borné dans la proposition 6.12. En effet, si on suppose l'énoncé vrai pour les fonctions u bornées, alors :

$$F(u, \Omega) = \lim_{N \rightarrow +\infty} F(N \wedge u \vee -N, \Omega) \leq \liminf_{N \rightarrow +\infty} F_-((N \wedge u \vee -N, 0), \Omega) \leq F_-((u, 0), \Omega).$$

Finalement, grâce aux deux lemmes précédents, nous supposerons toujours tacitement dans la suite que nous travaillerons avec u et Ω borné dans l'énoncé de la proposition 6.12. Maintenant que ces constatations ont été faites, nous énonçons les idées générales de la preuve de la proposition 6.12. Le but est de se ramener à travailler en une dimension $N = 1$, et une fois cela fait, montrer comment on peut généraliser le résultat obtenu au cas général. Pour marquer distinctement la différence entre les moments où l'on travaillera en dimension $n = 1$ et ceux en $n > 1$, nous appellerons $\mathfrak{F}_h$ les fonctionnelles F_h pour $N = 1$, et $\mathfrak{F}_-$ leur limite inférieure, suivant la notation introduite précédemment et $\mathfrak{F}$ la fonctionnelle F dans le cas $N = 1$. On rappelle aussi que, par la proposition 6.4, on a

$$w = (u, z) \in \mathcal{D}_{h,1}, \quad \mathfrak{F}_h(w) < +\infty \Rightarrow z \text{ continue, } u, z \in W_{loc}^{1,2}(\Omega \setminus \{z = 1\}).$$

Le lemme que voici est le résultat central de cette section, dans le sens où, à quelques modification près apportées par le lemme 6.22, il démontre le théorème 6.12 dans le cas unidimensionnel et réduit la preuve de 6.12 à montrer qu'on peut se ramener au cas $N = 1$.

LEMME 6.15. *Soit $w = (u, 0) : B_R^1(x) \rightarrow \mathbb{R}$ pour un certain $x \in \mathbb{R}$ et un certain $R > 0$. Alors,*

$$\mathfrak{F}_-(w, B_r(x)) \geq \int_{B_r(x)} |\nabla u|^2 dt$$

pour tout $r \in (0, R)$ tel que $u \in W^{1,2}(B_r(x))$. En revanche, si $u \notin W^{1,2}(B_r(x))$ pour tout $r \in (0, R)$, alors

$$\mathfrak{F}_-(w, B_r(x)) \geq 1 \text{ pour tout } r \in (0, R).$$

En particulier, si I est un intervalle ouvert borné et $\mathfrak{F}_-(w, I) < \infty$, alors il existe un sous-ensemble $J \subset I$ dont la cardinalité est plus petite que $\mathfrak{F}_-(w, I)$ tel que $u \in W^{1,2}(I \setminus J)$. Alors, $u \in SBV(I)$ et

$$\int_I |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^0(S_u \cap I) \leq \mathfrak{F}_-(w, I).$$

Nous aurons tout d'abord besoin du lemme suivant :

LEMME 6.16. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}$ ouvert et borné, et soit $\tau \in W^{1,1}(\Omega, \mathbb{R})$. Alors, pour toute fonction $\theta \in \mathfrak{B}(\Omega)$, $\theta \geq 0$, nous avons la formule de la co-aire suivante*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{x \in \tau^{-1}(t)} \theta(x) dt = \int_{\Omega} \theta(x) |\nabla \tau(x)| dx.$$

DÉMONSTRATION. On admettra le résultat suivant :

Soit $f : A \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction dans $W^{1,p}$, $1 \leq p < \infty$. Alors, pour tout $\epsilon > 0$, il existe une fonction $\bar{f} : A \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 telle que $\mathcal{L}^N(\{x \in A : \bar{f}(x) \neq f(x) \text{ ou } D\bar{f}(x) \neq Df(x)\}) \leq \epsilon$ (voir corollaire 2 de la section 6.6.3 dans [13]). De là, on peut à tout $\epsilon > 0$ associer un ensemble $A_\epsilon \subset \Omega$, qu'on peut supposer fermé (cf preuve du théorème cité) et donc compact dans Ω , tel que τ est la restriction d'une fonction $\tau_\epsilon \in C^1(A, \mathbb{R})$ sur A_ϵ . On peut donc construire une suite qu'on peut sans perte de généralité supposer croissante d'ensembles A_{ϵ_k} telle que

$$\mathcal{L}^N \left(\Omega \setminus \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_{\epsilon_k} \right) = 0$$

et tel que τ est la restriction d'une fonction lipschitzienne (car C^1 sur compact) τ_{ϵ_k} sur A_{ϵ_k} pour tout $k \in \mathbb{N}$. De là, par la formule de la co-aire 3.14, on a

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\{\tau=t\} \cap A_{\epsilon_k}} \theta(x) d\mathcal{H}^0(x) dt &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{\{\tau_{\epsilon_k}=t\} \cap A_{\epsilon_k}} \theta(x) d\mathcal{H}^0(x) dt \\ &= \int_{A_{\epsilon_k}} \theta(x) |\nabla \tau_{\epsilon_k}| dx = \int_{A_{\epsilon_k}} \theta(x) |\nabla \tau| dx. \end{aligned}$$

On conclut en prenant la limite $k \rightarrow +\infty$ via le théorème de convergence monotone, en se souvenant de $\mathcal{L}^N(\Omega \setminus \bigcup_{k=0}^{+\infty} A_{\epsilon_k}) = 0$ et du fait que la suite $(A_{\epsilon_k})_{k \in \mathbb{N}}$ est une suite croissante. $\square$

Nous aurons besoin également de la notion de limite de Hausdorff (équivalente dans notre cas aux limites de Kuratowski)⁵ :

DÉFINITION 6.17. Soient A, B deux ensembles compacts de $\mathbb{R}^N$. On définit la distance de Hausdorff entre A et B par :

$$d_H(A, B) = \max\{\sup\{\text{dist}(x, A) : x \in B\}, \sup\{\text{dist}(x, B) : x \in A\}\}.$$

Intuitivement, la distance de Hausdorff représente la plus grande ("la pire") distance qu'il faudrait parcourir pour aller d'un point d'un des deux ensembles jusqu'au point le plus proche de l'autre ensemble.

PROPOSITION 6.18. Soit $\mathcal{K}_N$ l'ensemble des ensembles compacts de $\mathbb{R}^N$. Alors, $(\mathcal{K}_N, d_H)$ est un espace métrique. On dira qu'une suite d'ensembles compacts $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}_N$ converge au sens de la limite de Hausdorff (ou également dans $\mathcal{K}_N$) vers un ensemble compact $A \in \mathcal{K}_N$ si $d_H(A_n, A) \rightarrow 0$ quand $n \rightarrow +\infty$.

5. Ces commentaires proviennent de [2].

PROPOSITION 6.19. *Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}_N$ une suite convergente dans $\mathcal{K}_N$ vers un ensemble $A \in \mathcal{K}_N$. Alors, A est l'ensemble de toutes les limites x de suites convergentes $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $x_n \in A_n$.*

PROPOSITION 6.20. *Toute suite bornée d'ensembles $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}_N$ admet une sous-suite convergente dans $\mathcal{K}_N$.*

PROPOSITION 6.21. *Soit $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{K}_N$ une suite convergente dans $\mathcal{K}_N$ vers un ensemble $A \in \mathcal{K}_N$, telle qu'il existe un entier M tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, A_n a au plus M composantes connexes. Alors, A a au plus M composantes connexes.*

DÉMONSTRATION DU LEMME 6.15. On peut supposer sans perte de généralité que $\mathfrak{F}_-(w, B_r(x)) < +\infty$. Considérons d'abord le cas $u \in W^{1,2}(B_r(x))$. Par définition de $\mathfrak{F}_-$, on peut construire une suite $(w_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_{h,n}(B_r(x))$, $w_h \rightarrow w$ dans $\mathfrak{B}(B_r(x)) \times \mathfrak{B}(B_r(x))$ quand $h \rightarrow \infty$ telle que $\lim_{h \rightarrow +\infty} \mathfrak{F}_h(w_h, B_r(x))$ existe et vaille $\mathfrak{F}_-(w, B_r(x))$. Puisque alors, il existe $M > 0$ tel que pour tout $h \in \mathbb{N}$,

$$0 \leq \int_{B_r(x)} |\nabla u_h|^2 (1 - z_h^2)^{2h} dy \leq \mathfrak{F}_h(w_h, B_r(x)) \leq M,$$

quitte à passer à une sous-suite, on peut supposer que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} \int_{B_r(x)} |\nabla u_h|^2 (1 - z_h^2)^{2h} dy$$

existe. Finalement, puisque $w_h \rightarrow w$ en mesure, à nouveau, quitte à se restreindre à une sous-suite, on peut supposer que $w_h \rightarrow w = (u, 0)$ $\mathcal{L}^1$ -presque partout sur $B_r(x)$. En se rappelant que

$$\mathfrak{F}_h(w_h, B_r(x)) = \int_{B_r(x)} \left[|\nabla u_h|^2 (1 - z_h^2)^{2h} + |\nabla z_h|^2 (1 - z_h^2)^{2h} + \frac{1}{4} h^2 z_h^2 \right] dy,$$

on démontrera la première partie de la thèse en prouvant

$$\liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{B_r(x)} [|\nabla u_h|^2 (1 - z_h^2)^{2h}] dy \geq \int_{B_r(x)} |\nabla u|^2 dy.$$

Pour montrer cela, on va montrer que pour tout $0 < \delta < 1$, il existe un ensemble ouvert $J \subset B_r(x)$ tel que $\mathcal{L}^1(J) = 2r = \mathcal{L}^1(B_r(x))$ et tel que pour tout ensemble compact $K \subset J$,

$$K \subset \{y \in B_r(x) : c_h(y) = (1 - z_h^2(y))^{h+1} \geq \delta\} \text{ pour } h \text{ suffisamment grand.}$$

Fixons $\sigma \in (\delta, 1)$, et posons la notation $A_h^t := \{y \in B_r(x) : c_h \geq t\}$. On a :

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_{B_r(x)} |\nabla c_h| dy &= \frac{1}{4} \int_{B_r(x)} |(h+1)(1-z_h^2)^h (-2)z_h \nabla z_h| dy \\ &\leq \int_{B_r(x)} |\nabla z_h|^2 (1-z_h^2)^{2h} + \frac{1}{4} (h+1)^2 z_h^2 dy \quad \text{par Hölder} \\ &\leq M < +\infty \quad \text{par hypothèse.} \end{aligned}$$

On en conclut que $c_h \in W^{1,1}(B_r(x))$, et donc, par le lemme 6.16, on obtient en prenant $\theta \equiv 1$

$$\begin{aligned} M &\geq \frac{1}{4} \int_{B_r(x)} |\nabla c_h| dy = \frac{1}{4} \int_0^1 \mathcal{H}^0(\{y : c_h(y) = t\}) dt \\ &\geq \frac{1}{4} \int_\delta^\sigma \mathcal{H}^0(\{y : c_h(y) = t\}) dt. \end{aligned}$$

En prenant pour tout h $\delta_h \in (\delta, \sigma)$ tel que pour tout $t \in (\delta, \sigma)$, $\mathcal{H}^0(\{y : c_h(y) = t\}) \geq \mathcal{H}^0(\{y : c_h(y) = \delta_h\})$, on déduit que, puisque $c_h \in W^{1,1}(B_r(x))$ et donc c_h est continue, $A_h^{\delta_h}$ a au plus $\frac{4M}{\sigma-\delta} + 1$ composantes connexes. Renommons $A_h^{\delta_h} := A_h$. Alors, il existe un nombre $k \in \mathbb{N}$ dépendant seulement de M et de $\sigma - \delta$ tel que pour tout h ,

$$A_h = \bigcup_{i=1}^k I_h^i,$$

où pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, I_h^i est soit un intervalle fermé soit l'ensemble vide $\emptyset$, et tel que pour tous $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i < j$, $\max\{x : x \in I_h^i\} < \max\{x : x \in I_h^j\}$. Pour tout $i \in \{1, \dots, k\}$, puisque chaque $I_h^i \subset B_r(x)$, on a par 6.20 qu'il existe une sous-suite $(I_h^i)_{h \in \mathbb{N}}$ qui converge au sens de la limite de Hausdorff vers un intervalle I_∞^i (car pour tout h , I_h^i est un intervalle, donc n'a qu'une composante connexe, via 6.21) compact de $B_r(x)$. Finalement, par 6.19, on a pour tous $i, j \in \{1, \dots, k\}$, $i < j$, $\max\{x : x \in I_\infty^i\} \leq \max\{x : x \in I_\infty^j\}$. Posons $J = \bigcup_{i=1}^k (I_\infty^i)^0$, l'union de l'intérieur des intervalles I_∞^i . On a pour tout h :

$$B_r(x) \setminus A_h \subset \{y \in B_r(x) : c_h(y) < \delta_h\} \subset \{y \in B_r(x) : c_h(y) \leq \sigma\}.$$

De là, on obtient directement que :

$$B_r(x) \setminus J \subset \bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{h \geq m} \{y \in B_r(x) : c_h(y) \leq \sigma\},$$

à un ensemble d'au plus k points près. Puisque les c_h convergent presque partout vers 1, on a alors

$$\mathcal{L}^1(B_r(x) \setminus J) \leq \mathcal{L}^1 \left(\bigcup_{m \in \mathbb{N}} \bigcap_{h \geq m} \{y \in B_r(x) : c_h(y) \leq \sigma\} \right) = 0,$$

ce qui implique $\mathcal{L}^1(J) = 2r = \mathcal{L}^1(B_r(x))$, comme souhaité. Finalement, on remarque que pour tout ouvert $K \Subset B_r(x)$,

$$\begin{aligned} \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{B_r(x)} [|\nabla u_h|^2 (1 - z_h^2)^{2h}] dy &\geq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_K [|\nabla u_h|^2 (1 - z_h^2)^{2h}] dy \\ &\geq \delta^2 \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_K |\nabla u_h|^2 dy \\ &\geq \delta^2 \int_K |\nabla u|^2 dy \end{aligned}$$

La dernière inégalité provient du fait que la fonctionnelle $u \mapsto \int_K |\nabla u|^2 dy$ est faiblement séquentiellement semi-continue inférieurement dans $W^{1,2}$. On conclut en prenant les limites $K \uparrow J$ (convergence monotone) et $\delta \rightarrow 1$.

Examinons maintenant le deuxième cas : supposons que pour tout $r \in (0, R)$, $u \notin W^{1,2}(B_r(x))$. Fixons un tel r . A nouveau, comme pour la première partie de la preuve, on peut construire une suite $(w_h)_{h \in \mathbb{N}}$ telle que la limite $\lim_{h \rightarrow +\infty} \mathfrak{F}_h(w_h, B_r(x))$ existe et vaille $\mathfrak{F}_-(w, B - r(x)) < +\infty$. On va montrer l'inégalité

$$\liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{B_r(x)} h z_h (1 - z_h^2)^h |\nabla z_h| dy \geq 1.$$

Il suffira d'appliquer Hölder pour terminer cette partie de la preuve. Choisissons $\sigma < r$. Il existe une suite $\{y_h\}_{h \in \mathbb{N}} \subset B_\sigma(x)$ telle que $\lim_{h \rightarrow +\infty} (1 - z_h^2(y_h))^{2h} = 0$. En effet, dans le cas contraire, on aurait

$$\limsup_{h \rightarrow +\infty} \inf_{y \in B_\sigma(x)} (1 - z_h^2(y))^{2h} > 0,$$

et alors, on aurait pour tout $h \in \mathbb{N}$: $u_h = \psi(u_h, z_h) / (1 - z_h^2)^{2h} \in W^{1,2}(B_\sigma(x))$ et

$$\int_{B_\sigma(x)} |\nabla u_h|^2 dy \leq C \int_{B_\sigma(x)} |\nabla u_h|^2 (1 - z_h^2)^{2h} dy < +\infty,$$

ce qui impliquerait la contradiction $u \in W^{1,2}(B_r(x))$. De là, par le lemme de Fatou, on obtient :

$$\int_{B_r(x)} \liminf_{h \rightarrow +\infty} h^2 z_h^2 dy \leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{B_r(x)} h^2 z_h^2 dy < +\infty.$$

On en déduit que $\liminf_{h \rightarrow +\infty} h^2 z_h^2(y) < +\infty$ $\mathcal{L}^1$ -presque partout sur $B_r(x)$. Alors, quitte à passer par une sous-suite, on en déduit qu'on peut trouver

$x' \in B_r(x)$ tel que $x' < x - \sigma$ et tel que $h^2 z_h^2(x') \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow +\infty$. Par le même raisonnement, on peut trouver, à nouveau quitte à passer par une sous-suite, $x'' \in B_r(x)$ tel que $x'' > x + \sigma$ et tel que $h^2 z_h^2(x'') \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow +\infty$. En particulier, en remarquant que pour h suffisamment grand, il existe une constante $C > 0$ telle que $z_h^2(x') \leq C/h^2$, on a alors, quitte à passer à une sous-suite,

$$\begin{aligned} 1 &\geq \lim_{h \rightarrow +\infty} (1 - z_h^2(x'))^{2h} \geq \lim_{h \rightarrow +\infty} \left(1 - \frac{C}{h^2}\right)^{2h} \\ &= \exp \left(\lim_{h \rightarrow +\infty} 2h \ln \left(1 - \frac{C}{h^2}\right) \right) \\ &= \exp \left(\lim_{h \rightarrow +\infty} \frac{-4Ch}{h^2 - C} \right) \\ &= 1 \end{aligned}$$

Le raisonnement étant similaire pour x'' , on conclut que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} (1 - z_h^2(x'))^{2h} = \lim_{h \rightarrow +\infty} (1 - z_h^2(x''))^{2h} = 1.$$

Finalement, puisque, par le lemme 6.10, les fonctions $c_h = (1 - z_h^2)^{h+1} \in W^{1,2}(B_r(x))$, on a

$$\begin{aligned} \lim_{h \rightarrow +\infty} \mathfrak{F}_h(w_h, B_r(x)) &\geq \limsup_{h \rightarrow +\infty} \int_{B_r(x)} \left[|\nabla z_h|^2 (1 - z_h^2)^{2h} + \frac{1}{4} h^2 z_h^2 \right] dy \\ &\geq \limsup_{h \rightarrow +\infty} \int_{B_r(x)} [h z_h |\nabla z_h| (1 - z_h^2)^h] dy \\ &\geq \limsup_{h \rightarrow +\infty} \left\{ \left| \int_{x'}^{y_h} [h z_h \nabla z_h (1 - z_h^2)^h] dy \right| + \left| \int_{y_h}^{x''} [h z_h \nabla z_h (1 - z_h^2)^h] dy \right| \right\} \\ &\geq \limsup_{h \rightarrow +\infty} \left\{ \left| \int_{z_h(x')}^{z_h(y_h)} h s (1 - s^2)^h ds \right| + \left| \int_{z_h(y_h)}^{z_h(x'')} h s (1 - s^2)^h ds \right| \right\} \\ &\geq \frac{1}{2} \limsup_{h \rightarrow +\infty} \frac{h}{h+1} [(1 - z_h^2(x'))^{h+1} - (1 - z_h^2(y_h))^{h+1} + (1 - z_h^2(x''))^{h+1} \\ &\quad - (1 - z_h^2(y_h))^{h+1}] \\ &= 1 \end{aligned}$$

où la première inégalité provient de la définition de $\mathfrak{F}_h$, la deuxième de la formule $2ab \leq a^2 + b^2$ ou plutôt de sa variante $ab \leq a^2 + \frac{1}{4}b^2$ et la dernière égalité des choix de x', x'' et (y_h) faits précédemment. Nous avons prouvé la deuxième partie du lemme. Finalement, pour la dernière partie, soit $u \in W^{1,2}(I)$, et la preuve est directement terminée par le premier point de ce lemme, soit $u \notin W^{1,2}(I)$. Dans ce deuxième cas, l'existence de l'ensemble

J annoncé est immédiate, car supposons qu'il n'existe pas d'ensemble fini $J \subset I$ tel que $u \notin W^{1,2}(I \setminus J)$. Alors, soit u admet une dérivée faible qui n'est pas dans $L^2(I)$, ce qui impliquerait une contradiction avec le premier point du lemme, soit il existe un ensemble comprenant un nombre au moins dénombrable de points tel que $u \notin W^{1,2}$ dans un voisinage de ces points. On peut donc trouver un nombre au moins dénombrable de boules disjointes $B_{\epsilon_i}(x_i) \subset I$ telles que $u|_{B_{\epsilon_i}(x_i)} \notin W^{1,2}(B_{\epsilon_i}(x_i))$. Alors, par superadditivité de $\mathfrak{F}_-$ et par le deuxième point de ce lemme, on aurait la contradiction :

$$+\infty > \mathfrak{F}_-(w, I) \geq \sum_{i=0}^{+\infty} \mathfrak{F}_-(w, B_{\epsilon_i}(x_i)) = +\infty.$$

Ceci assure l'existence de J , et par le même raisonnement que celui ci-dessus, on conclut que $\#(J) \leq \mathfrak{F}_-(w, I)$, et alors, puisque $u \in W^{1,2}(I \setminus J)$, $\mathcal{H}^0(J) < +\infty$, on conclut que $u \in SBV(I)$. Finalement, on obtient l'inégalité

$$\int_I |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^0(S_u \cap I) \leq \mathfrak{F}_-(w, I)$$

en découpant I en $2\#(J) + 1$ boules, où les $\#(J) + 1$ premières sont chacune respectivement dans une composante connexe de $I \setminus J$ et où les $\#(J)$ autres comprennent chacune respectivement un point de J . On termine en utilisant les deux grandes inégalités de ce lemme et en faisant tendre les $\#(J) + 1$ premières boules vers $I \setminus J$. $\square$

Nous aurons encore besoin du lemme suivant pour étendre le résultat du lemme 6.15 à des ensembles ouverts de dimension 1 plus complexes que de simples intervalles.

LEMME 6.22. *Si, pour tout $w \in \mathfrak{B}(\Omega)$, $\mathfrak{F}_-(w, I) \geq \mathfrak{F}(w, I)$ pour tout intervalle ouvert borné I , alors, la même inégalité est valable pour tout $w \in \mathfrak{B}(\Omega)$ et pour tout I ensemble ouvert borné de $\mathbb{R}^N$.*

DÉMONSTRATION. Soit I un sous-ensemble ouvert et borné de $\mathbb{R}$, et, puisque tout ouvert de $\mathbb{R}$ est une union au plus dénombrable d'ouverts deux à deux disjoints, soient $\{I_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ l'ensemble de ses composantes connexes (quitte

à poser $I_k = \emptyset$ pour k suffisamment grand). De là, pour tout $p \in \mathbb{N}$ fixé,

$$\begin{aligned} \mathfrak{F}_-(w, I) &\geq \mathfrak{F}_-\left(w, \bigcup_{k=0}^p I_k\right) && \text{puisque } \mathfrak{F}_- \text{ est croissante dans la variable } \Omega \\ &\geq \sum_{k=0}^p \mathfrak{F}_-(w, I_k) && \text{par superadditivité de } \mathfrak{F}_-, \\ &\geq \sum_{k=0}^p \mathfrak{F}(w, I_k) && \text{par hypothèse,} \\ &= \mathfrak{F}\left(w, \bigcup_{k=0}^p I_k\right) && \text{obtenu directement par l'expression de } \mathfrak{F}. \end{aligned}$$

Par le point (3) du lemme 6.13, on conclut en prenant la limite pour $p \rightarrow +\infty$ que $\mathfrak{F}_-(w, I) \geq \mathfrak{F}(w, I)$. $\square$

On rappelle le théorème 6.12, que nous sommes presque prêts à démontrer :

PROPOSITION 6.23. *Pour tout $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ ouvert, et tout $u \in \mathfrak{B}(\Omega)$, on a*

$$F_-((u, 0), \Omega) \geq F(u, \Omega).$$

Nous aurons au préalable seulement besoin du théorème suivant (voir [8] théorème 2.3) :

THÉORÈME 6.24. *Soit $u \in L^\infty(\Omega)$ une fonction telle que $u_x \in SBV(\Omega_x)$ pour $\mathcal{H}^{N-1}$ -presque tout $x \in \Omega_\nu$ et telle que*

$$\int_{\Omega_\nu} \left[\int_{\Omega_x} |\nabla u_x| dt + \mathcal{H}^0(S_{u_x}) \right] d\mathcal{H}^{N-1}(x) < +\infty$$

pour tout choix de $\nu \in \mathbb{S}^{N-1}$. Alors, il $u \in SBV(\Omega)$ et $\mathcal{H}^{N-1}(S_u) < +\infty$. Dans l'autre sens, soit $u \in SBV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ tel que $\mathcal{H}^{N-1}(S_u) < +\infty$. Alors, pour tout choix de $\nu \in \mathbb{S}^{N-1}$, $u_x \in SBV(\Omega_x)$ pour $\mathcal{H}^{N-1}$ -presque tout $x \in \Omega_\nu$ et

$$\int_{\Omega_\nu} \left[\int_{\Omega_x} |\nabla u_x| dt + \mathcal{H}^0(S_{u_x}) \right] d\mathcal{H}^{N-1}(x) < +\infty.$$

De plus, $\nabla u(x + t\nu) \cdot \nu = \nabla u_x(t)$ pour $\mathcal{L}^1$ -presque tout $t \in \Omega_x$, pour $\mathcal{H}^{N-1}$ -presque tout $x \in \Omega_\nu$ et il existe une fonction borélienne $\nu_u : S_u \rightarrow \mathbb{S}^{N-1}$ dépendant seulement de S_u telle que

$$\int_{S_u} |\nu_u \cdot \nu| d\mathcal{H}^{N-1} = \int_{\Omega_\nu} \mathcal{H}^0(S_{u_x}) d\mathcal{H}^{N-1}(x).$$

DÉMONSTRATION DE LA PROPOSITION 6.23. Supposons sans perte de généralité, comme expliqué au début de cette section, que Ω est un ouvert borné et $w = (u, 0)$, avec u également borné, et supposons de même sans perte de généralité que $F_-(w, \Omega) < +\infty$. A partir de là, en prenant comme dans 6.7 $\nu \in \mathbb{S}^{N-1}$, $A \subset \Omega$ ouvert et $(w_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$ telle que $\lim_{h \rightarrow +\infty} F_h(w_h, A) = F_-(w, A)$, on a

$$\begin{aligned} \int_{A_\nu} \liminf_{h \rightarrow +\infty} \mathfrak{F}_h((w_h)_x, A_x) d\mathcal{H}^{N-1}(x) &\leq \liminf_{h \rightarrow +\infty} \int_{A_\nu} \int_{A_x} [\dots] dt d\mathcal{H}^{N-1}(x) \\ &= \liminf_{h \rightarrow +\infty} F_h(w_h, A) \leq F_-(w, A) \\ &\leq F_-(w, \Omega) < +\infty, \end{aligned}$$

où l'égalité provient du théorème de Fubini. Puisque pour $\mathcal{H}^{N-1}$ -presque tout $x \in \Omega_\nu$, $(w_h)_x \rightarrow w_x$ en mesure, on a par définition de $\mathfrak{F}_-$:

$$\int_{A_\nu} \mathfrak{F}_-(w_x, A_x) d\mathcal{H}^{N-1}(x) \leq \int_{A_\nu} \liminf_{h \rightarrow +\infty} \mathfrak{F}_h((w_h)_x, A_x) d\mathcal{H}^{N-1}(x),$$

et donc, par la suite d'inégalité ci-dessus avec $A = \Omega$, on conclut que $\mathfrak{F}_-(w_x, \Omega_x) < +\infty$ pour $\mathcal{H}^{N-1}$ -presque tout $x \in \Omega_\nu$. De là, par le lemme 6.15 étendu par le lemme 6.22, on trouve que $u_x \in SBV(\Omega_x) \cap L^\infty(\Omega_x)$ pour $\mathcal{H}^{N-1}$ -presque tout $x \in \Omega_\nu$ et

$$\int_{A_x} |\nabla u_x|^2 dt + \mathcal{H}^0(S_{u_x} \cap A_x) \stackrel{\text{def}}{=} \mathfrak{F}(w_x, A_x) \leq \mathfrak{F}_-(w_x, A_x).$$

En intégrant maintenant sur A_ν et en utilisant Fubini et le théorème 6.24, on obtient :

$$\begin{aligned} \int_A |\nabla u \cdot \nu|^2 dx + \int_{S_u \cap A} |\nu_u \cdot \nu| d\mathcal{H}^{N-1} &= \int_{A_\nu} \int_{A_x} |\nabla u_x|^2 dt + \mathcal{H}^0(S_{u_x} \cap A_x) d\mathcal{H}^{N-1}(x) \\ &\leq F_-(w, A), \end{aligned}$$

où la dernière inégalité provient des inégalités montrées plus haut dans la démonstration. En prenant $A = \Omega$ dans l'inégalité ci-dessus, et en utilisant l'inégalité de Hölder pour passer de $|\nabla u_x|^2$ à $|\nabla u|$, on a par le théorème 6.24 que $u \in SBV(\Omega)$ puisque ν est arbitraire. On vient donc de démontrer que si $F_-((u, 0), \Omega) < +\infty$, alors $u \in SBV(\Omega)$. Démontrons maintenant l'inégalité en tant que tel. On montre comme dans la démonstration du théorème 6.9 que

$$F(u, \Omega) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{+\infty} \int_{A_i} |\nabla u \cdot \nu_i|^2 dx + \int_{S_u \cap A_i} |\nu_u \cdot \nu_i| d\mathcal{H}^{N-1} \right\},$$

où $\{A_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ est n'importe quelle suite d'ouverts disjoints de A et $\nu_i \in \mathbb{S}^{N-1}$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. Puisque pour tout $i \in \mathbb{N}$,

$$\int_{A_i} |\nabla u \cdot \nu_i|^2 dx + \int_{S_u \cap A_i} |\nu_u \cdot \nu_i| d\mathcal{H}^{N-1} \leq F_-(w, A_i),$$

on termine la preuve par :

$$F(u, \Omega) \leq \sum_{i=0}^{+\infty} F_-(w, A_i) \leq F_-(w, \Omega),$$

via la superadditivité et la monotonie de F_- . $\square$

3.3. Semi-continuité supérieure. Dans cette section, nous nous attaquons à la deuxième partie de la preuve de la Γ -convergence des fonctionnelles F_h vers F , c'est-à-dire l'inégalité $\limsup$. L'objectif est donc de construire pour tout $u \in \mathfrak{B}(\Omega)$ une suite $(w_h) = (u_h, z_h)$ dans $\mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$ qui converge vers $(u, 0)$ dans $\mathfrak{B}(\Omega) \times \mathfrak{B}(\Omega)$, et telle que

$$\limsup_{h \rightarrow +\infty} F_h(w_h) \leq F(u).$$

Comme dans la section précédente, on posera sans perte de généralité $\alpha = 1$. La première étape est de démontrer la proposition suivante :

PROPOSITION 6.25. *Supposons que Ω est un ouvert borné et que $u \in SBV(\Omega) \cap L^\infty$. Alors, il existe une suite $(w_h)_{h \in \mathbb{N}} = (u_h, z_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$ convergeant dans $\mathfrak{B}(\Omega) \times \mathfrak{B}(\Omega)$ vers $(u, 0)$ telle que*

$$\limsup_{h \rightarrow +\infty} F_h(w_h) \leq \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^N(\{x \in \Omega : \text{dist}(x, S_u) < r\})}{2r}.$$

De plus, on peut construire la suite (w_h) de telle sorte que pour tout $h \in \mathbb{N}$, $u_h, z_h \in W^{1,2}(\Omega)$.

DÉMONSTRATION. Posons la notation, pour $A \subset \Omega$, $\delta > 0$:

$$A_\delta = \{x \in \Omega : \text{dist}(x, A) < \delta\}.$$

Pour que la proposition ne soit pas triviale, on suppose sans perte de généralité que $|\nabla u| \in L^2(\Omega)$, et que $L = \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^N(\{x \in \Omega : \text{dist}(x, S_u) < r\})}{2r} < +\infty$. Si $u \in W^{1,2}(\Omega)$, il suffit de prendre simplement $u_h = u$, $z_h = 0$ pour tout $h \in \mathbb{N}$, puisque alors, pour tout $h \in \mathbb{N}$, $F_h(u_h, 0) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$. Supposons donc maintenant que $u \notin W^{1,2}(\Omega)$. Alors, il faut nécessairement que les coefficients $(1 - z_h^2)^{2h}$ tendent vers 0 quand on se rapproche de S_u . Nous allons

par conséquent nous restreindre aux fonctions w_h de la forme :

$$u_h = u \text{ sur } \Omega \setminus S_u \text{ et } z_h \begin{cases} = 1 & \text{sur } (S_u)_{b_h}, \\ = \eta_h & \text{sur } \Omega \setminus (S_u)_{b_h+a_h}, \\ \in [\eta_h, 1] & \text{sur } (S_u)_{b_h+a_h} \setminus (S_u)_{b_h}, \end{cases}$$

où a_h, b_h et η_h sont strictement positifs pour tout $h \in \mathbb{N}$ et tels que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} a_h = \lim_{h \rightarrow +\infty} b_h = \lim_{h \rightarrow +\infty} \eta_h = 0.$$

Le reste de la démonstration consistera principalement à trouver des conditions suffisantes sur les suite $(a_h), (b_h)$ et (η_h) pour satisfaire l'inégalité du théorème. Notre approche sera de "fixer" b_h et η_h et de trouver à quoi devra alors ressembler a_h pour garantir $(w_h) \subset \mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$ et (w_h) vérifie l'inégalité de la proposition. Posons donc b_h de telle manière que $\lim_{h \rightarrow +\infty} h^2 b_h = 0$, ce qui nous donne alors, via l'hypothèse $L < +\infty$:

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} h^2 \mathcal{L}^N((S_u)_{b_h}) = \lim_{h \rightarrow +\infty} 2(h^2 b_h) \frac{\mathcal{L}^N((S_u)_{b_h})}{2b_h} = 2L \lim_{h \rightarrow +\infty} h^2 b_h = 0,$$

et posons

$$\eta_h = \frac{1}{h} \sqrt{\int_0^1 (1-s^2)^h ds}.$$

Maintenant, définissons plus formellement les fonctions u_h . Considérons pour $h \in \mathbb{N}$ des fonctions $\psi_h \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ telles que

$$\psi_h \begin{cases} = 1 & \text{sur } (S_u)_{b_h/2}, \\ = 0 & \text{sur } \Omega \setminus (S_u)_{b_h}, \\ \in [0, 1] & \text{sur } (S_u)_{b_h} \setminus (S_u)_{b_h/2}. \end{cases}$$

On pose alors $u_h = (1 - \psi_h)u$ pour tout $h \in \mathbb{N}$. Puisque, par hypothèse, $u \in SBV(\Omega)$ et $\int_\Omega |\nabla u|^2 dx < +\infty$, on a $u_h \in W^{1,2}(\Omega)$ pour tout $h \in \mathbb{N}$, et (u_h) converge vers $u \in \mathfrak{B}(\Omega)$ puisque $u \in L^\infty(\Omega)$ et $\lim_{h \rightarrow +\infty} h^2 \mathcal{L}^N((S_u)_{b_h}) = 0$. Consacrons-nous maintenant à a_h . Commençons par regarder comment se comporte $F_h(w_h)$ pour notre choix de w_h , en tenant compte des différentes

valeurs prises par z_h suivant le sous-ensemble de Ω :

$$\begin{aligned} F_h(w_h) &= \int_{\Omega} |\nabla u_h|^2 (1 - z_h^2)^{2h} + |\nabla z_h|^2 (1 - z_h^2)^{2h} + \frac{1}{4} h^2 z_h^2 dx \\ &= \int_{\Omega \setminus (S_u)_{b_h+a_h}} |\nabla u|^2 (1 - \eta_h^2)^{2h} dx + 0 + \frac{1}{4} h^2 \eta_h^2 \mathcal{L}^N(\Omega \setminus (S_u)_{b_h+a_h}) \\ &\quad + \int_{(S_u)_{b_h+a_h} \setminus (S_u)_{b_h}} |\nabla u|^2 (1 - z_h^2)^{2h} dx + A_h(z_h) \\ &\quad + 0 + 0 + \frac{1}{4} h^2 \mathcal{L}^N((S_u)_{b_h}), \end{aligned}$$

où $A_h(z) := \int_{(S_u)_{b_h+a_h} \setminus (S_u)_{b_h}} [|\nabla z|^2 (1 - z^2)^{2h} + \frac{1}{4} h^2 z^2] dx$. Remarquons que le premier terme de la deuxième égalité tend vers $\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx$ quand $h \rightarrow +\infty$. En effet, en observant que $(1 - 1/h^2)^{2h} \leq (1 - \eta_h^2)^{2h} \leq 1$ pour tout h , on a que $\lim_{h \rightarrow +\infty} (1 - \eta_h^2)^{2h} = 1$, et puisque $\lim_{h \rightarrow +\infty} h^2 \mathcal{L}^N((S_u)_{b_h}) = 0$, que $\overline{S_u}$ est négligeable. De là, on conclut par le théorème de convergence dominée. Par un raisonnement similaire, on démontre que le quatrième terme converge vers 0 quand $h \rightarrow +\infty$. Il ne reste plus qu'à démontrer que la somme du reste des termes tend vers une quantité plus petite ou égale à L quand $h \rightarrow +\infty$. On remarque que le troisième terme tend vers 0 quand $h \rightarrow +\infty$ par le théorème de convergence dominée puisque, par définition de η_h ,

$$0 \leq \frac{1}{4} h^2 \eta_h^2 \mathcal{L}^N(\Omega \setminus (S_u)_{b_h+a_h}) \leq \frac{1}{4} \mathcal{L}^N(\Omega) \int_0^1 (1-s^2)^h ds \rightarrow 0, \text{ quand } h \rightarrow +\infty.$$

De plus, puisque qu'on a $\lim_{h \rightarrow +\infty} h^2 \mathcal{L}^N((S_u)_{b_h}) = 0$, le dernier terme converge également vers 0. Il ne reste plus qu'à évaluer $A_h(z_h)$. Pour cela, nous allons nous restreindre aux fonctions z_h de la forme $z_h = \tilde{z}_h \circ \tau$, avec $\tilde{z}_h$ localement lipschitzienne (on vérifiera par la suite que cette condition est respectée) et $\tau(x) := \text{dist}(x, S_u)$. On rappelle que la fonction τ est lipschitzienne, donc, par le théorème de Rademacher 3.11 différentiable $\mathcal{L}^N$ -presque partout, et satisfait $|\nabla \tau(x)| = 1$ $\mathcal{L}^N$ -presque partout sur $\Omega \setminus S_u$. De là, par la formule de la coaire 3.14, on obtient

$$\begin{aligned} A_h(z_h) &= \int_{(S_u)_{b_h+a_h} \setminus (S_u)_{b_h}} \left[|\nabla z_h|^2 (1 - z_h^2)^{2h} + \frac{1}{4} h^2 z_h^2 \right] dx \\ &= \int_{b_h}^{b_h+a_h} \int_{\{\tau(y)=t\}} \left[|\nabla z_h(y)|^2 (1 - z_h^2(y))^{2h} + \frac{1}{4} h^2 z_h^2(y) \right] d\mathcal{H}^{N-1}(y) dt \\ &= \int_{b_h}^{b_h+a_h} \int_{\{\tau(y)=t\}} \left[|\nabla z_h(y)|^2 (1 - \tilde{z}_h^2(t))^{2h} + \frac{1}{4} h^2 \tilde{z}_h^2(t) \right] d\mathcal{H}^{N-1}(y) dt \end{aligned}$$

En utilisant le théorème 3.12, on obtient facilement que la formule de la dérivée de la composée de fonctions s'appliquent aux fonctions localement

lipschitziennes $\mathcal{L}^N$ -presque partout, ce qui donne $|\nabla z(x)| = |\nabla \tilde{z}(\tau(x))|$ $\mathcal{L}^N$ -presque partout sur Ω . Donc, finalement :

$$A_h(z_h) = \int_{b_h}^{b_h+a_h} \left[|\nabla \tilde{z}_h(t)|^2 (1 - \tilde{z}_h^2(t))^{2h} + \frac{1}{4} h^2 \tilde{z}_h^2(t) \right] \mathcal{H}^{N-1}(\{y \in \Omega : \tau(y) = t\}) dt.$$

Maintenant, en vue de déterminer un choix optimal pour le couple $(\tilde{z}_h, a_h)$ et satisfaire $\limsup_{h \rightarrow +\infty} A_h(z_h) \leq L$, l'idée serait de le choisir de manière à ce qu'il soit solution, en posant $\mathcal{H}(t) = \mathcal{H}^{N-1}(\{y \in \Omega : \tau(y) = t\})$, du problème :

$$\min \left\{ \int_{b_h}^{b_h+a_h} \left[|\nabla \theta(t)|^2 (1 - \theta^2(t))^{2h} + \frac{1}{4} h^2 \theta^2(t) \right] \mathcal{H}(t) dt : a_h > 0, \theta(b_h) = 1, \theta(b_h + a_h) = \eta_h \right\}.$$

La résolution d'un tel problème est grandement compliquée par la présence du facteur $\mathcal{H}(t)$. En effet, sans celui-ci, nous nous retrouverions dans un problème fort semblable à celui étudié dans [6]. L'idée proposée dans cet article est d'utiliser pour minimiser des intégrales de type

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 + f^2(u) dx$$

l'inégalité $a^2 + b^2 \geq 2ab$, et de remarquer que l'égalité tient uniquement dans le cas $a = b$. Comme l'intégrand de l'intégrale à minimiser dans notre cas est effectivement de la forme $f(w, \nabla w)^2 + g(w)^2$, tentons de suivre cette approche, et grâce à l'intégration par partie, de nous en sortir malgré le terme $\mathcal{H}(t)$. Définissons $\theta_h : [0, a_h) \rightarrow \mathbb{R}$ comme la solution de l'équation différentielle suivante⁶ :

$$\nabla \theta = \frac{h\theta}{2(1-\theta^2)^h}, \quad \theta(0) = \eta_h.$$

Puisque la fonction $t \mapsto \frac{ht}{2(1-t^2)^h}$ est localement lipschitzienne sur $[\eta_h, 1)$, l'EDO admet bien une unique solution maximale sur un intervalle I contenant 0. Remarquons qu'on a posé de cette manière $a_h > 0$ comme la borne maximale supérieure au domaine d'existence de la fonction θ_h . On a alors :

$$\begin{aligned} 0 < a_h &= \int_0^{a_h} dt = \int_0^{a_h} \frac{2(1-\theta_h^2(t))^h}{h\theta_h(t)} \nabla \theta_h(t) dt = 2 \int_{\eta_h}^1 \frac{(1-s^2)^h}{hs} ds \\ &\leq \frac{2}{h\eta_h} \int_0^1 (1-s^2)^h ds = 2 \sqrt{\int_0^1 (1-s^2)^h ds} \rightarrow 0, \text{ quand } h \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

où on a utilisé que $\theta(0) = \eta_h$, $\theta(a_h) = 1$ (puisque la dérivée doit exploser en ce point-là, par définition de a_h), et la définition de η_h . On remarque bien

6. Correspondant à la condition $a = b$.

qu'avec cette définition, $a_h \rightarrow 0$ quand $h \rightarrow +\infty$, comme demandé. Posons maintenant

$$\tilde{z}_h : [b_h, b_h + a_h] \rightarrow \mathbb{R} : t \mapsto \theta_h(b_h + a_h - t).$$

On remarque qu'avec cette définition, $\tilde{z}$ est bien une fonction localement lipschitzienne. Finalement, définissons pour tout $t > 0$:

$$\mathcal{A}(t) = \mathcal{L}^N(\{x \in \Omega : \text{dist}(x, S_u) < t\}).$$

Montrons que les fonctions $\tilde{z}_h$ sont bien celles que nous voulions construire. Puisque $\theta_h(a_h) = 1$, la fonction $\tilde{z}_h$ est une fonction strictement croissante sur l'intervalle $[b_h, b_h + a_h]$ et prend ses valeurs dans $[\eta_h, 1]$. On peut montrer que la fonction $\mathcal{A}(t) \in W_{loc}^{1,1}((0, +\infty))$ et que $\nabla \mathcal{A}(t) = \mathcal{H}(t)$ $\mathcal{L}^N$ -presque partout sur Ω (voir [8] page 1008). Par la définition de $\tilde{z}_h$, on a

$$\nabla \tilde{z}_h(t) = -\frac{h\tilde{z}_h(t)}{2(1 - \tilde{z}_h^2(t))^h}$$

et de là, directement :

$$\begin{aligned} A_h(z_h) &= \int_{b_h}^{b_h+a_h} \left[|\nabla \tilde{z}_h(t)|^2 (1 - \tilde{z}_h^2)^{2h} + \frac{1}{4} h^2 \tilde{z}_h^2(t) \right] \mathcal{H}(t) dt \\ &= \frac{h^2}{2} \int_{b_h}^{b_h+a_h} \tilde{z}_h^2 \mathcal{H}(t) dt. \end{aligned}$$

Intégrons par partie :

$$\begin{aligned} A_h(z_h) &= \frac{h^2}{2} \left[\tilde{z}_h^2(b_h + a_h) \mathcal{A}(b_h + a_h) - \tilde{z}_h^2(b_h) \mathcal{A}(b_h) - \int_{b_h}^{b_h+a_h} 2\tilde{z}_h \nabla \tilde{z}_h \mathcal{A}(t) dt \right] \\ &= \frac{1}{2} (h^2 \eta_h^2) \mathcal{A}(b_h + a_h) - \frac{1}{2} h^2 \mathcal{A}(b_h) - h^2 \int_{b_h}^{b_h+a_h} 2\tilde{z}_h \nabla \tilde{z}_h \mathcal{A}(t) dt \\ &= -h^2 \int_{b_h}^{b_h+a_h} \tilde{z}_h \nabla \tilde{z}_h \mathcal{A}(t) dt + o(h), \quad h \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

où la deuxième inégalité provient du fait que, par définition de η_h ,

$$h^2 \eta_h^2 = \int_0^1 (1 - s^2)^h ds \rightarrow 0, \quad \text{quand } h \rightarrow +\infty,$$

et par le fait qu'on avait construit b_h de telle sorte que

$$\lim_{h \rightarrow +\infty} h^2 \mathcal{A}(b_h) = \lim_{h \rightarrow +\infty} h^2 \mathcal{L}^N((S_u)_{b_h}) = 0.$$

Maintenant, en utilisant l'hypothèse que

$$L = \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^N(\{x \in \Omega : \text{dist}(x, S_u) < r\})}{2r} = \frac{\mathcal{A}(r)}{2r} < +\infty,$$

on a l'existence d'une suite $(\omega_h)_{h \in \mathbb{N}}$ vérifiant pour tout $h \in \mathbb{N}$, $\mathcal{A}(t) \leq 2t(L + \omega_h)$ pour tout $t \in [0, b_h + a_h]$, et de là,

$$A_h(z_h) \leq -2(L + \omega_h)h^2 \int_{b_h}^{b_h+a_h} \tilde{z}_h \nabla \tilde{z}_h t dt + o(h), \quad h \rightarrow +\infty.$$

Procédons à une nouvelle intégration par partie :

$$\begin{aligned} A_h(z_h) &\leq -(L + \omega_h)h^2 \left[\tilde{z}_h^2(b_h + a_h)(b_h + a_h) - \tilde{z}_h^2(b_h)b_h - \int_{b_h}^{b_h+a_h} \tilde{z}_h^2 dt \right] + o(h), \quad h \rightarrow +\infty \\ &= (L + \omega_h) \left[h^2 b_h - h^2 \eta_h^2(b_h + a_h) + h^2 \int_{b_h}^{b_h+a_h} \tilde{z}_h^2 dt \right] + o(h), \quad h \rightarrow +\infty \\ &= (L + \omega_h)h^2 \int_{b_h}^{b_h+a_h} \tilde{z}_h^2 dt + o(h), \quad h \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

où on a utilisé dans la dernière égalité l'hypothèse $\lim_{h \rightarrow +\infty} h^2 b_h = 0$. Pour finir, en reprenant l'égalité définissant $\tilde{z}_h$:

$$\nabla \tilde{z}_h(t) = -\frac{h \tilde{z}_h(t)}{2(1 - \tilde{z}_h^2(t))^h} \Leftrightarrow \tilde{z}_h(t) = -\frac{2}{h}(1 - \tilde{z}_h^2(t))^h \nabla \tilde{z}_h(t),$$

on obtient

$$\begin{aligned} A_h(z_h) &\leq (L + \omega_h)h^2 \int_{b_h}^{b_h+a_h} \tilde{z}_h \cdot \tilde{z}_h dt + o(h), \quad h \rightarrow +\infty \\ &= (L + \omega_h)h \int_{b_h}^{b_h+a_h} \left[-2\tilde{z}_h(1 - \tilde{z}_h^2)^h \nabla \tilde{z}_h \right] dt + o(h), \quad h \rightarrow +\infty \\ &= (L + \omega_h) \frac{h}{h+1} \left[(1 - \tilde{z}_h^2(b_h + a_h))^{h+1} - (1 - \tilde{z}_h^2(b_h))^{h+1} \right] + o(h), \quad h \rightarrow +\infty \\ &= (L + \omega_h) \frac{h}{h+1} ((1 - \eta_h^2)^{h+1} - 0) + o(h), \quad h \rightarrow +\infty \\ &\rightarrow L, \quad \text{quand } h \rightarrow +\infty. \end{aligned}$$

Nous avons donc réussi à construire des fonctions (u_h, z_h) qui, si on arrive à montrer qu'elles appartiennent à $\mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$, satisfont la proposition. Pour cela, commençons à prouver que $\phi \circ z_h \in W^{1,2}(\Omega)$ pour tout $h \in \mathbb{N}$. Par construction de $\tilde{z}_h$ (en tant que solution d'équation différentielle), on a $\tilde{z}_h \in C^1((b_h, b_h + a_h])$. De là, puisque les fonctions z_h sont continues, on remarque facilement qu'elles sont dans $W_{loc}^{1,2}(\Omega \setminus \{x \in \Omega : \text{dist}(x, S_u) = b_h\})$, et donc, par la proposition 4.4, il en est de même pour $\phi \circ z_h$. Puisque pour tout $h \in \mathbb{N}$, $F_h(u_h, z_h) < +\infty$, on déduit directement que $\psi \circ z_h \in W^{1,2}(\Omega \setminus \{x \in \Omega : \text{dist}(x, S_u) = b_h\})$, et par le lemme 6.5, on a alors $\phi \circ z_h \in W^{1,2}(\Omega)$. La condition sur u_h est directement satisfaite de par le fait que, par construction, pour tout $h \in \mathbb{N}$, $u_h \in W^{1,2}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Donc, $(u_h, z_h) \in \mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$ pour tout $h \in \mathbb{N}$. Finalement, le dernier point de la preuve est une conséquence

du troisième point du lemme 6.10. Il suffit de remplacer z_h par $z_h \wedge \gamma_h$, pour une suite $(\gamma_h)_{h \in \mathbb{N}}$ telle que $\lim_{h \rightarrow +\infty} \gamma_h = 1$, et la suite se démontre par un argument diagonal. $\square$

Pour passer de la proposition que nous venons de montrer au résultat de type $\limsup$ escompté, il reste deux choses à faire : passer de la quantité $\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^N(\{x \in \Omega : \text{dist}(x, S_u) < r\})}{2r}$ à $\mathcal{H}^{N-1}(S_u)$ ⁷, et passer de $SBV(\Omega) \cap L^\infty$ à $GSBV(\Omega)$. Posons cependant auparavant les notation et définition suivantes (motivées par le remarque ci-dessus) :

$$\mathcal{M}^*(S_u) = \limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^N(\{x \in \Omega : \text{dist}(x, S_u) < r\})}{2r}.$$

DÉFINITION 6.26. On définit l'ensemble de fonctions $\mathcal{F}(\Omega)$ comme l'ensemble des fonctions u dans $GSBV(\Omega)$ telles que soit $F(u) = +\infty$, soit il existe une suite $(u_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset SBV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ convergeant vers u dans $\mathfrak{B}(\Omega)$ telle que

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} F(u_k) = F(u) \text{ et } \lim_{k \rightarrow +\infty} [\mathcal{M}^*(S_{u_k}) - \mathcal{H}^{N-1}(S_{u_k})] = 0.$$

La prochaine proposition tente une première extension de la proposition précédente.

PROPOSITION 6.27. Pour toute fonction $u \in \mathcal{F}(\Omega)$, il est possible de trouver une suite de fonctions $(u_h, z_h)_{h \in \mathbb{N}} \subset W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$ telle que $(w_h) = (u_h, z_h) \subset \mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$, $(w_h) \rightarrow (u, 0)$ dans $\mathfrak{B}(\Omega) \times \mathfrak{B}(\Omega)$ et

$$\limsup_{h \rightarrow +\infty} F_h(w_h) \leq F(u).$$

DÉMONSTRATION. Le cas $F(u) = +\infty$ est trivial. Dans le deuxième cas, considérons une suite $(u_h)_{h \in \mathbb{N}}$ telle que donnée dans la définition de $\mathcal{F}(\Omega)$. Pour tout $h \in \mathbb{N}$, on peut trouver via la proposition précédente une suite $(w_k^h)_{k \in \mathbb{N}}$ dans $W^{1,2}(\Omega) \times W^{1,2}(\Omega)$ convergeant dans $\mathfrak{B}(\Omega) \times \mathfrak{B}(\Omega)$ vers (u_h, z_h) et satisfaisant

$$\limsup_{k \rightarrow +\infty} F_k(w_k^h) \leq \int_{\Omega} |\nabla u_h| dx + \mathcal{M}^*(S_{u_h}) = F(u_h) + [\mathcal{M}^*(S_{u_h}) - \mathcal{H}^{N-1}(S_{u_h})].$$

On conclut avec un argument diagonal en construisant à partir de ces suites (w_k^h) une suite $(w_{k(h)}^h)_{h \in \mathbb{N}}$. Le membre de droite convergera alors vers $F(u)$ par définition de $\mathcal{F}(\Omega)$. $\square$

7. La première quantité est communément appelée dans la littérature "Minkowski $(N - 1)$ -dimensional upper content". Elle coïncide avec la deuxième sous des hypothèses de régularité de l'ensemble mesuré. Cependant, les deux quantités pouvant différer dans les autres cas, nous sommes obligés de considérer un cas et puis l'autre.

Après cette dernière proposition, la dernière étape est de passer de $\mathcal{F}(\Omega)$ à $GSBV(\Omega)$. Ceci n'est pas possible pour un ouvert Ω quelconque. Nous présentons maintenant une condition suffisante sur Ω .

DÉFINITION 6.28. *Soit Ω un ouvert borné de $\mathbb{R}^N$. On dira que Ω satisfait à la propriété de réflexivité $\mathcal{R}$ s'il existe un ouvert U satisfaisant $\partial\Omega \subset U$ et une application injective $\phi : U \cap \Omega \rightarrow U \setminus \overline{\Omega}$ Lipschitz, à inverse Lipschitz, et telle que pour tout $x \in \partial\Omega$, $\lim_{y \rightarrow x} \phi(y) = x$.*

La proposition suivante donne l'extension souhaitée, et nous en avons fini avec l'inégalité $\limsup$ (voir proposition 5.3 dans [8]) :

PROPOSITION 6.29.

(1) *Soit $u \in SBV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ un minimiseur de la fonctionnelle*

$$\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx + \mathcal{H}^{N-1}(S_u) + \beta \int_{\Omega} |u - g|^2 dx$$

pour une certaine fonction $g \in L^\infty$ donnée. Alors, pour tout ensemble compact $K \subset \overline{S_u} \cap \Omega$,

$$\lim_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{L}^N(\{x \in \Omega : \text{dist}(x, K) < r\})}{2r} = \mathcal{H}^{N-1}(K).$$

(2) *Si Ω satisfait la condition de réflexivité $\mathcal{R}$, alors, $\mathcal{F}(\Omega) = GSBV(\Omega)$.*

4. Conclusion

La proposition suivante synthétise tous les résultats obtenus jusqu'à présent et nous permet de conclure :

THÉORÈME 6.30. *Soit $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un ensemble ouvert, à bord Lipschitz et satisfaisant la propriété de réflexivité $\mathcal{R}$. Soient les fonctionnelles $\overline{F}_h : \mathfrak{B}(\Omega) \times \mathfrak{B}(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ définies par*

$$\overline{F}_h(u, z) = \begin{cases} F_h(u, z) & \text{si } (u, z) \in \mathcal{D}_{h,n}(\Omega), \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

Alors, les fonctionnelles $\overline{F}_h$ Γ -convergent vers la fonctionnelle $\overline{F}$ définie par

$$\overline{F}(u, z) = \begin{cases} F(u) & \text{si } u \in GSBV(\Omega), z = 0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases}$$

De plus, pour tout choix de $\beta, \gamma > 0$, $g \in L^\infty(\Omega)$, pour tout $h \in \mathbb{N}$, les problèmes de minimisation suivants :

$$\min \left\{ F_h(uz) + \beta \int_{\Omega} |u - g|^\gamma dx : (u, z) \in \mathcal{D}_{h,n}(\Omega) \right\}$$

admettent une solution $\bar{w}_h = (\bar{u}_h, \bar{z})_h \in \mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$, la suite $\{\bar{u}_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ est compacte dans $\mathfrak{B}(\Omega)$ et nous avons l'implication, $(\bar{u}_{h_k}, \bar{z}_{h_k})_{k \in \mathbb{N}}$ sous-suite de $(\bar{u}_h, \bar{z}_h)_{h \in \mathbb{N}}$, $\bar{u}_{h_k} \rightarrow \bar{u}$ implique $\bar{u}$ est une solution au problème de minimisation

$$\min \left\{ F(u) + \beta \int_{\Omega} |u - g|^{\gamma} : u \in GSBV(\Omega) \right\}.$$

DÉMONSTRATION. Commençons par montrer la convergence Γ . Pour l'inégalité $\liminf$, considérons $(u, z) \in \mathfrak{B}(\Omega) \times \mathfrak{B}(\Omega)$ et $(u_k, z_k)_{k \in \mathbb{N}}$ convergant en mesure vers (u, z) . On peut supposer sans perte de généralité que pour tout $h \in \mathbb{N}$, $(u_h, z_h) \in \mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$ (car sinon, il n'est pas pris en compte par la $\liminf$, ou alors, celle-ci est égale à $+\infty$, ce qui nous amène à un cas trivial). On peut également supposer $z = 0$ (car sinon, on a directement par définition des F_h et de $\bar{F} : +\infty = +\infty$). De là, l'inégalité $\liminf$ est prouvée par la proposition 6.23. Pour l'inégalité $\limsup$, on peut supposer sans perte de généralité $u \in GSBV(\Omega)$, $z = 0$. On conclut directement via 6.27 étendu par 6.29. La convergence Γ est prouvée. L'existence de solutions aux problèmes

$$\min \left\{ F_h(uz) + \beta \int_{\Omega} |u - g|^{\gamma} dx : (u, z) \in \mathcal{D}_{h,n}(\Omega) \right\}$$

se déduit de la compacité (théorème 6.6, avec $C = \beta \|g\|_{L^{\infty}}^{\gamma} \mathcal{L}^N(\Omega)$) et de la semi-continuité inférieure (6.9) des fonctionnelles, et de l'analyse pour la méthode directe du chapitre précédent. Pour finir, la compacité des solutions $\{\bar{u}_h\}_{h \in \mathbb{N}}$ est obtenue par l'équicoercivité des fonctionnelles F_h via 6.11, et prenant à nouveau pour C la valeur $\beta \|g\|_{L^{\infty}}^{\gamma} \mathcal{L}^N(\Omega)$. Finalement, puisque le terme $\beta \int_{\Omega} |u - g|^{\gamma} dx$ est continu en u (convergence dominée), on a par 5.9 la convergence Γ des fonctionnelles $\bar{F}_h + \beta \int_{\Omega} |u - g|^{\gamma} dx$ vers $\bar{F} + \beta \int_{\Omega} |u - g|^{\gamma} dx$, et on termine la preuve par le théorème 5.7. $\square$

Conclusion du mémoire

Nous voilà donc à la clôture de ce mémoire. Dedans, nous y avons défini premièrement la fonctionnelle de Mumford-Shah, et ensuite les fonctionnelles d'Ambrosio-Tortorelli.

Nous avons montré que ces premières admettaient des minimiseurs, à condition d'étendre leur domaine à un ensemble de fonctions plus larges que $W^{1,2}$, $\mathcal{D}_{h,n}(\Omega)$, à cause d'un problème de coercivité de celles-ci sur ce premier domaine. Nous avons dû adapter la définition de ces fonctionnelles en conséquence et sur base de la notion de dérivabilité approximative, mais une fois ceci fait, un argument basé sur la méthode direct présentée au chapitre 5 nous a permis de conclure.

Nous avons ensuite prouvé successivement l'équicoercivité de ces fonctionnelles et leur convergence Γ vers la fonctionnelle de Mumford-Shah. Pour la convergence Γ , la démonstration s'est faite en deux temps. Nous avons d'abord montré l'inégalité $\liminf$ en la montrant premièrement en une dimension, puis en étendant le résultat en dimension quelconque via un raisonnement de "découpage en tranches". Pour l'inégalité $\limsup$, nous avons utilisé une méthode constructive. Nous avons d'abord montré le résultat en remplaçant le terme en $\mathcal{H}^{N-1}(S_u)$ par le "contenu supérieur de dimension $N - 1$ de Minkowski", et en se restreignant aux fonctions dans $SBV(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$. Nous avons pris pour estimées de la fonction u des fonctions u_h égales à u là où celle-ci avait un comportement $W^{1,2}$, et en annulant les estimées de manière à avoir une transition lisse dans un voisinage de l'ensemble de discontinuité approximative. Le partie principale de cette preuve a été de montrer comment choisir adéquatement la forme de ce voisinage, et la vitesse de convergence de celui-ci vers S_u . Nous nous sommes ensuite débarrassés des hypothèses supplémentaires sous la condition d'exiger une condition de régularité de plus au domaine Ω .

Finalement, par la théorie de la convergence Γ , nous en avons déduit toutes les conséquences liées : convergence en mesure, à sous-suite près, des minimiseurs des fonctionnelles d'Ambrosio-Tortorelli vers certains minimiseurs de ceux de Mumford-Shah et convergence des valeurs minimales

associées. Nous remarquerons en particulier le phénomène surprenant de convergence de fonctionnelles intégrales vers une fonctionnelle dépendant d'un terme non intégral (nommément le terme $\mathcal{H}^{N-1}(S_u)$).

L'analyse n'est naturellement jamais finie. Comme laissé entendre dans la théorie de la convergence Γ , cette méthode ne permet pas d'identifier, a priori, l'entière des minimiseurs de la fonctionnelle de Mumford-Shah. Nous ne pouvons pas garantir d'unicité de ces minimiseurs, ni deviner leur nombre. Si une approche pratique venait à suivre, comment déterminer adéquatement quelle approximation serait la meilleure (si tant est qu'un critère ait été posé pour clarifier le sens de meilleure approximation). On peut aussi se demander comment judicieusement choisir les valeurs des paramètres dans la fonctionnelle, et comment choisir quelle pénalité on veut favoriser ou défavoriser, et quelle est la dépendance de nos solutions à ces paramètres.

Pour finir, on peut se demander plus largement quel est l'apport de cette démonstration au domaine. Au début, lors de l'élaboration de ce mémoire, sous la proposition de mon promoteur, l'idée était de voir si cette démonstration pouvait être recyclée, sous réserve de quelques changements naturellement, à un problème de minimisation d'une fonctionnelle de Mumford-Shah quelque peu modifié. L'idée était d'y introduire une composante plus géométrique, pour décrire des surfaces caractérisées par des arêtes, des crêtes, en analogie avec les discontinuités des images étudiées par la fonctionnelle de Mumford-Shah. Nous n'avons malheureusement pas eu le temps de se lancer dans une telle question, mais cela reste une piste de travail pour l'avenir.

Bibliographie

- [1] *Approximate Differentiability*, available at https://encyclopediaofmath.org/wiki/Approximate_differentiability. [En ligne ; page consultée le 22 août 2020]. ↑32
- [2] *Hausdorff limits*, available at <https://ms.mcmaster.ca/~speisseg/blog/?p=1458>. [En ligne ; page consultée le 22 août 2020]. ↑63
- [3] *Illustration Mumford-Shah*, available at <https://www.semanticscholar.org/paper/An-algorithm-for-minimizing-the-Mumford-Shah-Pock-Cremers/6d2867d1f424425b3bee7df4a2094da75fd0b4c7/figure/0>. [En ligne ; page consultée le 23 juillet 2020]. ↑46
- [4] *Illustration Segmentation d'image*, available at <https://github.com/tum-vision/fastms>. [En ligne ; page consultée le 17 août 2020]. ↑1
- [5] *Liste des fractales par dimension de Hausdorff*, available at https://fr.wikipedia.org/wiki/Liste_de_fractales_par_dimension_de_Hausdorff. [En ligne ; page consultée le 21 août 2020]. ↑21
- [6] G. Alberti, *Variational models for phase transitions, an approach via Γ -convergence: in Calculus of variations and partial differential equations*, L. Ambrosio - N Dancer, Springer, 2000. ↑74
- [7] Ambrosio L., Fusco N., and Pallara D., *Functions of Bounded Variation and Free Discontinuity Problems*, Oxford Mathematical Monographs, Oxford Science Publications, 2000. ↑5, 7, 8, 10, 22, 23, 26, 27, 28, 30, 32, 33, 34
- [8] L. Ambrosio and V. M. Tortorelli, *Approximation of Functionals depending on Jumps by Elliptic Functionals via Γ -Convergence*, Communications on Pure and Applied Mathematics, vol. XLIII, John Wiley and Sons, Inc., 1990. ↑1, 34, 45, 50, 69, 75, 78
- [9] A. Braides, *Gamma-convergence for beginners*, Oxford lecture series in mathematics and its applications, vol. 22, 2002. ↑12, 37
- [10] B. Dacorogna, *Direct methods in the calculus of variations: Second Edition*, Applied mathematical sciences, vol. 78, Springer, 1989. ↑37, 38
- [11] E. De Giorgi, M. Carriero, and A. Leaci, *Existence theorem for a minimum problem with free discontinuity set*, Archive for rational mechanics and analysis, vol. 108, 1989. ↑1, 47
- [12] Evans L.C., *Partial Differential Equations*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, 1998. ↑25, 27
- [13] Evans L.C. and Gariepy R. F., *Measure Theory and Fine Properties of Functions*, Studies in advanced mathematics, CRC Press, 1992. ↑15, 20, 22, 25, 63
- [14] D. Mumford and J. Shah, *Optimal Approximations by Piecewise Smooth Functions and Associated Variational Problems*, Vol. XLII, Communications on pure and applied mathematics, 1989. ↑1

- [15] G. Peano, *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, Mathematische Annalen, vol. 36, 1890. ↑21
- [16] M. Willem, *Functional Analysis: Fundamentals and applications*, Cornerstones, Birkhäuser, 2013. ↑11, 25, 26, 27, 29

