

Faculté des sciences

Enseignement du théorème des 5 couleurs via la classe inversée à support vidéos en secondaire supérieur

Auteur-es : Lecocq Robin

Promoteur-rices : Lambrechts Pascal, Uyttendaele Nathan

Lecteur-rices : Tollet Laetitia, Ninove Laure

Année académique 2020-2021

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN
FACULTÉ DES SCIENCES
ÉCOLE DE MATHÉMATIQUES

Enseignement du théorème des 5 couleurs via la classe inversée à support vidéos en secondaire supérieur

Robin Lecocq

Advisors: Pascal Lambrechts & Nathan Uyttendaele

Readers: Laetitia Tollet, Laure Ninove

**Master thesis
June 2021**

Introduction

Depuis 2014, je me passionne pour la création de vidéos sur Youtube. Même si j'ai commencé par raconter des histoires, j'ai vu, dans cet outil, de nouvelles perspectives pour l'enseignement et j'ai bientôt créé une deuxième chaîne consacrée à l'enseignement des mathématiques. Y voyant des possibilités qui permettraient d'améliorer l'enseignement tout en s'inscrivant dans mes passions, c'est naturellement que j'ai voulu faire ce mémoire sur l'utilisation de vidéos dans l'enseignement.

Ce n'est qu'en faisant les premières recherches sur les différentes utilisations des vidéos dans l'enseignement que je me suis rendu compte que les "*nouvelles perspectives*" que j'entrevois portaient déjà un nom. Il s'agissait de la classe inversée. Un résumé très grossier de ce concept est ce slogan "*Lectures at Home and Homework in Class*" (Les cours à la maisons et les devoirs en classe). Ainsi, le temps que le professeur passe aux côtés (et non en face) des étudiants est plus pertinent.

Le sujet des classes inversées (avec support de vidéos, ce qui est le plus courant) est un sujet on-ne-peut-plus d'actualité. S'il émerge autant ces dernières années, c'est grâce à la popularisation des technologies, la globalisation de l'information et, selon Marcel Lebrun [7], le besoin de former les étudiants à apprendre à surmonter des tâches que nous n'imaginerions pas aujourd'hui car, on le verra, c'est une méthode qui rend l'apprenant plus autonome.

En effet, nous verrons que la philosophie qui porte la classe inversée est loin d'être nouvelle. Nous verrons également que les nouvelles technologies de l'information et de la communication en enseignement (TICE) apportent une réelle valeur ajoutée, et il est donc nécessaire pour les étudiants et les écoles d'être suffisamment équipées, technologiquement parlant. Aujourd'hui, en Belgique, il y a beaucoup d'écoles qui peuvent se permettre de supposer que tous les étudiants ont accès aux ressources en ligne, modulo la possibilité pour les étudiants de recourir à une salle informatique mise à disposition par l'école. D'autre part, la position du professeur a changé avec la globalisation de l'information. Avant, le professeur était la source du savoir. Aujourd'hui, c'est un facilitateur. C'est donc à l'étudiant d'aller chercher et s'appropriier l'information en étant guidé par le professeur.

Maintenant que vous avez un aperçu rapide de ce qu'est la classe inversée et de quelques raisons de s'y intéresser, parlons de mathématiques. De prime abord, nous aurions trouvé plus pertinent, dans le cadre de ma formation de professeur de secondaire supérieur, de

tester la classe inversée en enseignant un sujet du programme de secondaire. Toutefois, ce travail étant un mémoire de fin de master en mathématiques, on a dû opter pour un sujet un peu plus avancé, mais toutefois intéressant et accessible pour les élèves de secondaire, et nous avons choisi de parler de théorie des graphes avec, pour fil conducteur, le théorème des 5 couleurs. Bien que j'avais, comme beaucoup d'entre nous, entendu parler du théorème des 4 couleurs, je n'avais aucune idée de la manière dont on pouvait prouver ce résultat.

Rappelons que ce travail a été réalisé durant l'année académique 2020-2021 marquée par la pandémie du coronavirus qui a rendu la situation inhabituelle et peu prévisible. Dans l'absolu, nous aurions aimé pouvoir établir une séquence d'enseignement en classe inversée et une séquence d'enseignement traditionnel du théorème des 5 couleurs dans deux classes parallèles qui ont le même professeur de mathématiques et dans une même école, ce dont nous discuterons dans la méthodologie d'expérience au chapitre 4. Nous espérons ainsi montrer l'efficacité de la classe inversée pour l'enseignement de la théorie des graphes en secondaire supérieur, ici en Belgique. De plus, comme nous en discuterons, c'est une méthode pour laquelle les résultats tant qualitatifs qu'expérimentaux sont similaires en très grande majorité : les étudiants développent de meilleures capacités qu'avec l'enseignement traditionnel. Cependant, nous verrons aussi qu'elle est fortement dépendante du professeur qui la met en oeuvre. Montrer que la classe inversée est efficace permettrait à la fois de valider son efficacité et de se convaincre qu'on en aurait fait une bonne utilisation. Toutefois, les mesures sanitaires n'ont pas rendu cette expérience possible, et nous proposerons donc toutes les informations, les cours, et la méthodologie pour qu'elle puisse être mise en oeuvre.

Dans cette optique, nous allons étudier plus en profondeur le principe de la classe inversée et terminerons sur des conseils de bonne pratique à appliquer lors de la création des cours en classe inversée. Ensuite, nous ferons de même avec l'utilisation de vidéos en enseignement et terminerons aussi sur des conseils de bonne pratique. Au chapitre 3, nous nous pencherons sur le théorème des 4-5-6 couleurs, et nous terminerons avec l'élaboration du protocole d'expérience. Nous aurons ainsi tous les outils théoriques et le protocole nécessaire à la mise en place de l'expérience. Vous trouverez enfin, en annexe, une proposition de cours sur le théorème des 5-6 couleurs en version traditionnelle et en version classe inversée, comprenant toutes les informations pratiques relatives à la création des vidéos, ainsi qu'une application détaillée du protocole statistique sur des données fictives.

Je vous souhaite de trouver autant d'intérêt et d'émerveillement que j'en ai moi-même eu en travaillant sur ces sujets passionnants.

Contents

Introduction	5
1 La classe inversée	8
1.1 Qu'est-ce que la classe inversée ?	9
1.2 Historique de la classe inversée	12
1.3 Tour d'horizon des recherches sur la classe inversée	14
1.4 Bonnes pratiques de la classe inversée	18
2 Utilisation de vidéos en classe inversée	21
2.1 Caractéristiques des vidéos en classe inversée	21
2.2 Utilisations possibles des vidéos (en mathématiques)	24
2.3 Bonnes pratiques d'utilisation des vidéos en pédagogie	26
3 La théorie des graphes et le théorème des 5 couleurs	30
3.1 L'utilisation de la classe inversée avec support vidéos en théorie des graphes	30
3.2 Preuve du théorème des 5 (-6) couleurs	31
4 Méthodologie	39
Conclusion	43
A Cours traditionnel	47
B Réalisation du cours en classe inversée	65
C Cours en classe inversée	71
D Scripts des vidéos	75
E Test proposé	91
F Analyse statistique sur données simulées	97

Chapter 1

La classe inversée

La classe inversée est une méthode pédagogique qui a trouvé son fondement dans des questions centrales de la pédagogie. Nous, professeurs, avons un certain temps à passer avec les élèves pour les aider à acquérir certaines compétences. Une des observations à la source de la classe inversée est la suivante. En enseignement traditionnel, lorsque le professeur transmet la matière, il y a, en comparaison avec d'autres formes d'enseignement, de faibles interactions entre les étudiants et lui et, pour un professeur expérimenté qui sait cibler les difficultés à l'avance, l'explication se déroule souvent de la même manière. Puis, les élèves se retrouvent chez eux, seuls, à faire leurs devoirs, et n'ont pas la possibilité de demander de l'aide au professeur. Pour certaines matières, la partie théorique ne nécessite pas plus que ça d'interactions avec le professeur et l'élève a plus besoin de l'encadrement du professeur pendant les exercices. Un des objectifs de la classe inversée est de rendre plus pertinent le temps passé avec les élèves.

Attention, nous ne sommes pas occupés à dire qu'on va remplacer le professeur par des vidéos. Nous sommes occupés à dire qu'on peut changer le rôle du professeur. Comme tous les outils pédagogiques, on ne prétend pas que la classe inversée doit toujours être appliquée.

Là où, historiquement, le professeur était la source du savoir, ce n'est plus le cas aujourd'hui. Il existe une pléthore d'explications sur internet, de cours en ligne, de supports vidéos ou encore de séquences animées géogebra qui renferment ce même savoir. C'est la globalisation de l'information [2]. Dans la classe inversée, le professeur passe du statut de *"sage on the stage"* (sage sur l'estrade) à celui de *"guide on the side"* (guide à côté).

De ce fait, la classe inversée s'inscrit dans le contexte des méthodes actives. L'étudiant devient un collaborateur dans l'élaboration de ses apprentissages, que ça soit par la recherche d'informations, la présentation d'une synthèse du contenu externalisé ou la coconstruction des savoirs en relation avec ses pairs, en classe.

Effectivement, la classe inversée ne se résume pas à remplacer le professeur par des vidéos ou du contenu à distance et ne se résume pas non plus à inverser les contenus "dans la

classe" et "hors de la classe". On peut autant la qualifier de méthode pédagogique que de philosophie de pédagogie qui s'articule avec les différents courants pédagogiques actuels. En classe inversée, pour la partie en classe, on peut travailler par groupes, préparer des projets, réaliser des expériences, faire usage d'interventions externes ou encore vivre un débat tandis que hors classe, on peut amener à rechercher dans des livres, utiliser des ressources du web, regarder une vidéo ou encore travailler sur un logiciel, tout en amenant les élèves à explorer un nouveau sujet, poser des arguments en vue d'un débat, répondre à un quizz ou faire une carte conceptuelle des schémas abordés.

La classe inversée est donc autant une méthode qu'une philosophie, qui s'inscrit dans le cadre des méthodes actives et qui vient profiter de l'ère technologique pour remettre en question l'usage du temps et la place du professeur dans l'enseignement.

Terminons cette introduction par une citation de Marcel Lebrun, ancien président de l'AIPU (association internationale de pédagogie universitaire), et conseiller pédagogique du LLL (Louvain Learning Lab) à l'UCLouvain [20].

"Je pense que le temps du magistral est révolu.[...] Ça (ndlr : la classe inversée) réunit les notions de compétences, de méthode active et de technologie."

La manière personnelle dont j'interprète cette première partie, c'est que bien qu'il soit reconnu que les pédagogies actives soient fort intéressantes, elles peuvent être difficiles à mettre en place ou deviennent peu pertinentes pour des concepts abstraits comme on en a beaucoup en mathématiques¹. La classe inversée étant à la fois une méthode et une philosophie, elle est extrêmement souvent applicable, même en mathématiques, ce qui explique peut-être pourquoi il y a eu autant d'essais et de recherches en sciences exactes et particulièrement en mathématiques sur la classe inversée, comme nous en reparlerons plus tard.

Bien que monsieur Lebrun soit catégorique, la question de l'efficacité de la classe inversée est encore ouverte, même si la méthode semble avoir le vent en poupe, au vu des résultats des méta-analyses [3, 23] que nous détaillerons plus tard dans ce chapitre.

1.1 Qu'est-ce que la classe inversée ?

On l'a dit, l'idée la plus simple de ce qu'est la classe inversée, c'est **"Les cours à la maison, les devoirs en classe"**. Cette version minimaliste de la classe inversée,

¹Durant mes années d'étude en pédagogie (régendat et certificat d'aptitudes pédagogiques), je n'ai eu de cesse de demander aux pédagogues s'ils avaient des idées pour appliquer des méthodes actives comme Decroly, Montessori, Freinet ou autre en mathématiques sur une notion abstraite. Mes interlocuteurs sont en général restés aussi dépourvus que moi. On se retrouve avec quelques méthodes à notre disposition qu'on utilise à répétition.

qu'on qualifie de **type 1** selon [22], consiste en l'externalisation des savoirs. Via un support (qui peut être numérique ou non, même s'il est souvent numérique), les élèves travaillent les savoirs à l'extérieur de la classe, laissant la place à d'autres activités d'accompagnement et de consolidation des apprentissages.

Par exemple, demander aux élèves de regarder une vidéo qui présente la notion de parité d'une fonction, et se retrouver en classe pour réaliser des exercices dessus est une forme de classe inversée de type 1.

Dans une classe inversée de **type 2**, on demande aux étudiants d'aller chercher des savoirs, de collecter des informations hors classe, d'aller sur le terrain, puis de venir le présenter en classe ou de préparer une activité pour leurs collègues.

Par exemple, fournir aux élèves des ressources vidéo présentant les propriétés des fonctions (extremum, croissance, parité, asymptote, ...) et leur demander de trouver, pour chaque propriété, un exemple de fonction qu'il connaît qui a cette propriété et leur demander de choisir une propriété et la présenter, ainsi que son exemple choisi, aux autres élèves en classe, est une forme de classe inversée de type 2.

Dans une classe inversée de **type 3**, on alterne les séquences en classe et hors classe et on combine les classes inversées de type 1 et de type 2. Dans ce processus, on peut alterner les phases de présence et de distance en adéquation avec les phases de l'enseignement stratégique de Tardif (1992)²

- Contextualiser : donner du sens aux futurs apprentissages en montrant l'utilité.
- Décontextualiser : voir les théories ou un modèle abstrait qui permet de généraliser et de transférer les connaissances.
- Recontextualiser : mobiliser les apprentissages en résolvant de nouveaux problèmes ou en travaillant dans d'autres contextes.

Par exemple, on donne aux étudiants des graphiques de fonctions bien choisis et on leur demande d'extraire des propriétés intuitives et de trouver, pour chaque propriété, un exemple de fonction qu'il connaît qui a cette propriété (Distance) puis de présenter une propriété de son choix aux autres élèves ainsi que la fonction qu'il a choisie. On ouvre une discussion dont le but est de désamorcer les difficultés de la définition formelle telle que l'existence d'un intervalle ouvert pour l'extremum local (Présence). Ensuite, les étudiants regardent des capsules vidéos pour formaliser ces propriétés (Distance) et on se retrouve en classe pour s'entraîner sur des exercices (Présence).

²Pour plus d'informations, voir Tardif J. 1992. *Pour un enseignement stratégique : l'apport de la psychologie cognitive*, Montréal : Éditions Logiques.

Dans cet exemple, on a bien commencé par une classe inversée de type 2 et terminé par une classe inversée de type 1. Il y a eu contextualisation lors de l'association des propriétés aux fonctions connues, décontextualisation lorsque la vidéo de théorie est venue fixer ce qui a émergé de la discussion et recontextualisation quand les étudiants ont dû manipuler ces propriétés dans les exercices.

Forces, limites et attentes

Comme tout dispositif pédagogique, il faut se poser les questions de son efficacité mais aussi sur les limites. Là où certaines sont indiscutables (comme l'accès à la technologie), d'autres relèvent d'impressions ou d'expériences en classe et doivent être vérifiées scientifiquement comme on en parlera après. On parlera donc autant de forces du dispositifs que d'attentes.

Commençons par reprendre une citation de Salman Khan, dans la présentation de la Khan Academy lors d'une conférence TED [19].

They (ndlr : ses cousins, pour qui il a commencé à enseigner par vidéos) told me that they preferred me on Youtube than in person.[...] Now they can pause and repeat their cousin without feeling like they're wasting my time. They can watch the videos at their own time, at their own pace.

Salman Khan nous rapporte le feedback de ses cousins et met en avant une force de l'utilisation des vidéos dans les classes inversées et une force de la classe inversée elle-même. D'abord, Salman Khan rapporte la liberté de l'environnement dans lequel ses cousins apprennent. Ils peuvent réécouter un passage qu'ils n'ont pas compris ou s'ils ont été déconcentrés et même revoir une matière qu'ils ont un peu oubliée, même des années après. Il insiste aussi dans cette phrase sur le fait que ça ne dérangera pas ses cousins de faire répéter Salman Khan. Ainsi, que l'élève soit timide ou non, plus effacé ou moins, il osera toujours "demander une explication". Il n'a pas besoin d'avouer ni de montrer ses difficultés, n'aura pas la sensation de déranger la classe et n'aura pas l'impression que tout le reste de la classe a compris lorsqu'il a une difficultés³. Bien sûr, il est possible que ces explications, répétées à l'identique, ne suffisent pas, et il est nécessaire de prévoir un moment en présentiel pour s'assurer que tout est compris et, au besoin, répondre aux questions qu'il reste.

Ensuite, Salman Khan met en avant une force centrale de la classe inversée. Puisque l'élève est en charge de son apprentissage, du moment où il regarde les vidéos et de la vitesse à laquelle avance la matière, il avancera à son rythme et au moment où il est dans de bonnes dispositions pour apprendre. De plus, si un élève est absent du cours, il aura moins de difficulté pour se remettre en ordre puisqu'il pourra au moins suivre le

³Ces difficultés sont des combats journaliers que tout professeur a déjà rencontrés dans une situation de classe.

contenu à distance au même titre que les autres élèves. Bien sûr, un revers de la médaille est à craindre puisque des élèves pourraient regarder le contenu en vitesse ou en faisant autre chose. Pour certains élèves, cette absence de professeur peut être perçue comme un manque de soutien et peut engendrer une baisse de motivation ou de régularité dans le travail. Pour cette raison, il est recommandé d'inverser d'abord une partie du cours pour habituer les élèves à cette nouvelle manière de travailler [7] et de veiller à ce que le travail soit fait via des outils informatiques, tout en préparant le prochain cours en fonction des résultats obtenus à distance [23].

Toutefois, un aspect important à prendre en compte est le changement du rôle de l'enseignant qui devient accompagnateur, ce qui provoque à la fois un renforcement des interactions, des contacts et favorise un accompagnement plus personnalisé [22]. Ce changement de rôle de l'enseignant permet aussi aux élèves de ressentir plus de bienveillance et d'empathie. Il en résulte ainsi un climat de confiance et un climat dans lequel l'erreur est plus tolérée, selon Ariane Dumont [7].

En revanche, la classe inversée n'est pas toujours facile à mettre en place. Préparer du matériel de qualité est chronophage [23]. Selon [6], ceci est fortement accentué par un manque de connaissances technologiques de celui-ci et à un manque de soutien administratif. Bien qu'il existe aussi la solution d'utiliser du matériel préexistant sur internet, on recommande aussi (selon Herreid et Schiller, 2013 et Jaster, 2013, cités dans [7, 23]) de créer du matériel sur mesure.

Une autre limite de ce dispositif, lorsqu'il est utilisé avec des vidéos ou avec internet, c'est que tous les élèves n'ont pas toujours accès à un ordinateur et à internet. En Belgique, et ça dépend encore de la région, de nombreuses écoles commencent à être équipées, mais même ainsi, c'est beaucoup plus contraignant pour l'élève qui doit se rendre à la salle informatique que pour les autres.

Enfin, une réserve récurrente au sujet de la classe inversée se base sur l'explosion de popularité depuis une dizaine d'année seulement, comme si on avait découvert quelque chose de révolutionnaire, alors qu'on enseigne depuis des milliers d'années. Profitons-en pour faire un point historique.

1.2 Historique de la classe inversée

Lors de ces 10 dernières années, la classe inversée a pris une ampleur phénoménale. Est-ce une vraie révolution ou un effet de mode dont la qualité n'est qu'apparente ? Les deux prochaines sections de ce travail ont pour but de répondre à cette question, en passant par une revue historique de la classe inversée et par un tour d'horizon d'études scientifiques qui ont été menées sur le sujet, particulièrement en mathématiques.

Celui qui est considéré comme le précurseur de la classe inversée, c'est Eric Mazur, professeur de physique à l'université de Harvard. En 1997, voici comment il faisait travailler ses étudiants. Entre deux cours, il leur demandait de lire son ouvrage de référence et ses notes de cours pour que les étudiants s'approprient la théorie. Une fois en classe, il répondait aux questions et travaillait sur des exercices plus avancés selon le principe qu'il appelle *peer instruction*. Il faisait travailler ses étudiants par groupes à hétérogénéité contrôlée, c'est-à-dire qu'il s'arrangeait pour que les groupes comprennent des étudiants qui avaient eu plus facile et des étudiants qui ont eu plus difficile.

On retrouve chez Eric Mazur les prémices de la classe inversée. Le savoir est externalisé. Le support utilisé ici consiste en des documents écrits.

Le nom "*Classe inversée*" (ou "*Flipped Classroom*" en anglais), est né avec Jonathan Bergman et Aaron Sams en 2007-2008. Ces deux professeurs de chimie dans l'équivalent américain de notre école secondaire ont trouvé que le temps passé à expliquer la matière était sans doute sous-exploité. Ils ont alors produit des capsules vidéos que les étudiants devaient regarder en autoapprentissage. Ainsi, ils ont pu consacrer le temps libéré en classe pour résoudre des problèmes de taxonomie plus élevée. Jonathan Bergman et Aaron Sams sont ainsi considérés comme des pères fondateurs de la classe inversée, après leurs publications à ce sujet. [6]

La classe inversée est née. Un de ceux qui a fortement contribué à sa contribution est Salman Khan. Il était à la base analyste dans une société lorsqu'en 2004, ses cousins avaient besoin d'aide en mathématique. Pour aider ses cousins, il a créé des vidéos d'explication qu'il a postées sur Youtube, en 2006. C'est alors qu'il a reçu d'excellents retours non seulement de ses cousins, mais également de beaucoup d'autres personnes sur la plateforme. Tellement qu'il a décidé de quitter son travail pour créer la KhanAcademy⁴, une plateforme à but non lucratif pour héberger de la théorie et des exercices, mais aussi se servir de la technologie pour permettre aux enseignants d'avoir un suivi entier et individuel de ses élèves [19].

Depuis, le concept a évolué pour donner lieu aux différents types de classe inversées comme nous l'avons présenté dans la partie précédente.

Est-ce que la classe inversée est si nouvelle que ça ? À vrai dire, non.

L'idée d'externaliser le savoir n'est pas nouvelle. Il n'a pas fallu attendre 1997 pour voir des professeurs demander à leurs élèves de lire un document. Toutefois, la classe inversée semble perdre beaucoup d'intérêt lorsqu'elle ne bénéficie pas d'outils technologiques, que ça soit par des vidéos, un forum, une discussion synchrone ou asynchrone, une plateforme (*Moodle*, *ICampus*, ...) [8]. De ce fait, la classe inversée est fortement dépendante de la technologie, ce qui explique pourquoi elle est généralement utilisée avec des supports

⁴Disponible en français et qui respecte le programme officiel belge ici : <https://fr.khanacademy.org/>

vidéos et pourquoi elle est apparue à la même époque où les étudiants ont eu accès en ligne aux vidéos via des sites comme Youtube (2005), Daylimotion (2005) ou encore Twitch (2011) pour ce qui est du streaming.

De plus, la classe inversée trouve ses racines dans des méthodes aussi anciennes que la maïeutique de Socrate, la disputation au Moyen-Âge et voit ses premières applications remonter aussi loin que le Pañcatantra [7].

1.3 Tour d'horizon des recherches sur la classe inversée

Pendant les premières années d'émergence de la classe inversée, il y a eu de nombreux essais en classes qui ont ramené énormément d'études empiriques. Une énorme majorité rapportait des bien-faits marqués et variés tant au niveau des compétences mathématiques, que de la motivation, l'autonomie et bien d'autres compétences transversales, tant en mathématiques et en sciences qu'ailleurs. Une vaste quantité de telles études empiriques sont présentées dans [7] (chapitre 3, section 2).

Ces résultats encourageants ont motivé de nombreuses études expérimentales dont nous allons à présent faire un tour d'horizon. Je vais présenter l'ensemble des études que j'ai rencontrées. Ne pouvant regarder l'entièreté des études existantes sur le sujet, je me suis arrêté lorsque j'ai été convaincu qu'une utilisation de la classe inversée pouvait apporter quelque chose aux élèves et que la théorie des graphes n'est pas un sujet pour lequel la classe inversée est défavorable. Il n'y a donc pas de choix dans les études présentées. Lors de la présentation des conclusions des études, j'ai essayé d'être le plus fidèle possible à la formulation des auteurs de celle-ci et de n'apporter aucune interprétation.

Études hors mathématiques

L'année passée (2019), une étude [15] a montré que la classe inversée s'est avérée être un outil plus efficace que l'enseignement traditionnel par rapport aux performances académiques, tant sur un plan qualitatif que quantitatif, en "travail social"⁵, à l'université.

Aussi l'année passée (2019), une étude [3] a fait une méta-analyse des études existantes sur l'apport de la classe inversée dans plein de disciplines. Voici ma traduction des résultats de l'étude.

⁵Puisque je ne connais pas l'équivalent exact français, je préfère vous renvoyer vers la dénomination utilisée par les auteurs : "Social work education".

L'étude a montré que l'utilisation de la classe inversée dans diverses disciplines est principalement préconisée pour promouvoir l'engagement des étudiants, la métacognition, l'attitude, la performance, la compréhension et la réussite, ainsi que d'autres choses.

On y retrouve les principaux objectifs de l'enseignement et, en particulier, de l'enseignement des mathématiques.

Études sur les mathématiques.

Il y a aussi eu beaucoup d'études en mathématiques, ce qui a permis à [23] de faire une méta-analyse. Ils ont pris toutes les études en mathématiques (tous niveaux, à échelle mondiale) qui ont mis en place une classe inversée de type 1. Les auteurs précisent qu'une grande partie de ces études sont de niveau bachelier universitaire et en Amérique. Ils ont pu montrer que la classe inversée améliorait significativement les performances des élèves, comparé à l'enseignement traditionnel. Ils ont retiré de ces études que les trois plus grands bénéfices pour les élèves étaient l'augmentation du temps alloué à la pratique en classe, l'intégration de nouvelles connaissances aux croyances existantes et le feedback en temps réel du professeur. Ils en ont déduit une série de principes à appliquer pour maximiser l'efficacité de la classe inversée que nous reprendrons à la section suivante.

Il a été montré [13] que, pour l'enseignement de l'algèbre en haute-école, l'attitude face aux mathématiques avait tendance à baisser dans l'enseignement traditionnel tandis que la classe inversée provoquait une hausse significative de la confiance en soi et de l'appréciation des mathématiques.

Dans cette dernière étude, ils ont fait eux aussi un tour d'horizon des études expérimentales en mathématiques (avant 2016). Je me permet de reprendre leur tableau et les références associées à la page suivante. Notons qu'ici aussi, une grande majorité des études a été réalisée dans le supérieur et pas au niveau secondaire.

Table 1. Summary of findings related to student performance in mathematics

Study	Math Topic	Performance Measure	Results
[11]	Statistics	Course Grade and Final Exam	There was an improvement of course grades of EG ($p < .001$). Their final exam scores were also better than CG ($p < .001$).
[12]	Calculus	Exam	Students from EG performed better in their exams in comparison to the non-flipped class.
[14]	Linear Algebra	Exam	EG outperformed CG in the two midterm exams but by the final exam, the two groups' performance was not significantly different.
[17]	Differential Equations	Homework, Criterion Referenced Test (CRT), Exam	There was no difference between EG and CG's pre and post CRT scores ($p > .05$). The composite homework and exam scores of the two groups also showed no difference.
[18]	Calculus and Finite Mathematics	Exam and course grade	There was no statistically significant difference found between the experimental and comparison group.
[20]	Statistics	Exam, Grade and Standard Test	EG outperformed students in CG in their course grade ($p < .01$), exam grades ($p < .05$), and standard test ($p < .05$).
[22]	Algebra	Final exam scores	EG performed better than the CG ($p < .05$).
[23]	Finite Mathematics	CRT	There was no statistically significant difference between EG and CG at pre-test nor at post-test.
[26]	Statistics	Project	EG performed better than CG but the magnitude of this difference is small.
[27]	Algebra	CRT	EG taught by an experienced teacher in inquiry-based learning performed better than CG as well as those in the EG but taught by an inexperienced teacher.
[28]	Algebra	Standard Algebra Test	The similar magnitudes of the pre- to posttest effect sizes for the EG and CG suggest that the degree of difference in instructional focus had less of an effect in student performance.

Note: Students in the experimental group (EG) are students in the flipped classroom model. CG refers to the comparison group.

Note : Les références de la première colonne sont à la fin de la bibliographie.

Quelques observations sur ces résultats. Les études qui ont observé une différence entre la classe inversée et la classe contrôle (11 et 20) l'ont également observée à l'examen. Il est normal que l'étude 17 n'ait pas observé de différence à l'examen puisqu'elle n'en avait déjà pas observée lors du post test. En revanche, l'étude 14 qui avait observé une différence dans les deux examens intermédiaires n'ont plus observé cette différence à l'examen à long terme. À cette liste, je voulais en rajouter une qui a observé une différence significative au post-test et à l'examen quatre semaines plus tard. Malheureusement, je n'ai eu accès qu'à un résumé de l'étude et non à l'étude complète. Toutefois, je la trouvais bien nuancée et intéressante [5].

L'étude 27 montre l'importance de l'expérience du professeur dans la classe inversée. Ce résultat fait suites aux constatations empiriques rapportées dans [7].

On voit que sur un même sujet, comme l'algèbre, les résultats varient. Là où l'étude 22 et la 27 avec le professeur expérimenté montrent un résultat significatif et un léger

résultat pour l'étude 28, l'étude 14 n'a observé aucune différence et la partie de l'étude 27 avec un professeur inexpérimenté s'est montré significativement moins efficace qu'avec un professeur expérimenté.

Les résultats de *finite math* dans le tableau ne montrent pas de différence. Mais attention, aucune de ces études n'a porté sur la théorie des graphes. On retrouve par exemple de l'analyse combinatoire ou de l'algorithmique. J'ai cherché d'autres études sur la théorie des graphes explicitement, je n'en ai trouvée aucune.

Une étude [16] a montré une efficacité de la classe inversée à West Point (académie militaire américaine) à court terme uniquement en mathématiques et aucun effet en économie. Toutefois, la classe inversée a agrandi l'écart de niveau entre les étudiants (favorisant les étudiants blancs, homme, et ceux déjà plus performants) et cet écart creusé a persisté sur le long terme. Les auteurs invitent donc à la prudence en utilisant la classe inversée.

En résumé, on a vu que malgré le caractère récent des classes inversées, il y a beaucoup d'études qui ont montré son efficacité, que ce soit en mathématiques ou dans d'autres disciplines et que ce soit au niveau secondaire ou en université, même si la plupart des études portaient sur le niveau universitaire. L'étude à West Point a montré une limite de la classe inversée dont nous avons parlé dans la section précédente, montrant que les étudiants plus aisés (par leurs facilités ou leurs origines sociales) étaient favorisés par la méthode.

On a aussi vu qu'il n'y a eu aucune étude qui se sont intéressées à la théorie des graphes (en fin 2020, au moment des recherches pour ce mémoire).

Enfin, même si, parfois, la classe inversée n'améliore pas les performances des étudiants, elle améliore leur attitude face aux mathématiques, leur motivation, leur autonomie et leur confiance en eux. Aucune étude n'a obtenu comme résultat que la classe inversée était moins bonne que la classe magistrale ni concernant les performances des étudiants ni concernant les attitudes, la confiance etc. Par conséquent, même si la classe inversée n'est pas toujours une solution miracle qui fait mieux apprendre les élèves, c'est une méthode tout à fait viable qui permet d'améliorer l'attitude des élèves face aux mathématiques et leur engagement.

Ceci en fait une méthode qui mérite d'être essayée et, éventuellement, à rajouter à notre éventail de méthodes pédagogiques. Concernant la théorie des graphes, comme nous n'avons pas trouvé d'étude sur le sujet et que nous avons des raisons de penser que la théorie des graphes se prête bien à la classe inversée (voir chapitre 3), cela nous paraît faire sens d'apporter une contribution à ce niveau.

1.4 Bonnes pratiques de la classe inversée

Terminons ce chapitre sur la classe inversée par répondre à une question plus pragmatique : *Comment bien mettre en place une classe inversée ?*. Maintenant qu'on sait ce qu'est la classe inversée, pourquoi elle est pertinente et reconnue, intéressons-nous aux conseils de bonne pratique pour la réalisation de notre séquence. Les conseils que j'ai recueillis proviennent de sources variées. Certains proviennent de pédagogues qui ont fortement étudié le sujet et d'autres sont des conclusions issues d'observations statistiques dans des études expérimentales. Il ne faut pas prendre ces conseils comme des garanties de qualités, mais comme des bonnes pratiques raisonnables dont l'efficacité n'a pas été prouvée. Dans cette optique, on peut ne pas appliquer certains conseils si, par exemple, il va à l'encontre de quelque chose qui nous caractérise en tant qu'enseignant. Néanmoins, on doit avoir en tête les raisons pour lesquelles ce conseil a été donné afin de donner la meilleure expérience de classe inversée possible à nos élèves.

Commencer à petite échelle. Indépendamment de son efficacité, la classe inversée est encore nouvelle et implique un changement dans la manière dont fonctionne le cours, dans le rôle des élèves, dans le rythme d'apprentissage, dans l'utilisation de nouveaux outils,... Nombre d'auteurs⁶ conseillent de commencer doucement lorsqu'on inverse la classe. Certains proposent de commencer par une vidéo ou une lecture en classe, d'autres recommandent d'inverser au plus une section du cours. Nous invitons donc à ne pas appliquer le protocole proposé dans ce travail comme première expérience de classe inversée, mais de s'assurer que les élèves aient eu un temps d'adaptation suffisant.

Expliciter les attentes envers les élèves et la nouvelle manière de travailler. Ceci permet aux élèves de rester accompagnés malgré la prise d'autonomie [21] et, dans ces informations, justifier l'utilisation de la classe inversée [23].

Savoir quand ne pas inverser. Une limite de la classe inversée est qu'il y aura moins d'interactions entre le professeur et les élèves lors des vidéos. Si l'étudiant est mal préparé au contenu hors classe, l'impossibilité pour lui de poser des questions peut poser problème, et il peut simplement ne pas comprendre la matière hors classe [23]. Si nous savons que c'est une matière complexe qui pose pas mal de difficultés d'année en année, il est conseillé de ne pas inverser la classe sur cette matière [28].

Planifier la séquence. L'articulation des séquences d'enseignement en classe et à distance donne tout son sens à la classe inversée. Il est conseillé d'accorder une importance particulière à la structure du cours et de veiller à ce que les activités prévues soient progressives, variées et complémentaires [22].

Utiliser des exercices en ligne ou des quizz. Cela permet aux élèves de s'entraîner et de se corriger par eux-mêmes comme le suggère [23]. Ils suggèrent également que ces

⁶La majorité de ceux cités dans la suite.

exercices ou quizz incluent une correction et un feedback automatique. On peut alors se servir de ces résultats pour planifier le prochain cours. Pour des quizz en ligne, on peut utiliser *Kahoot*⁷ ou *Edpuzzle*⁸. Pour les exercices, on peut utiliser *Khan Academy*⁹ ou *Géogebra*.

Commencer la séance en classe par un quizz. Il a été montré que commencer le cours par un quizz améliore la réussite des élèves de manière significative [23].

Ne pas répéter en classe ce qui a été fait dans les vidéos. Retravailler une activité réalisée au préalable, restructurer au cours, c'est vivement recommandé [7], mais pas répéter telle quelle une matière travaillée à distance [22].

Créer le besoin de savoir. Pour motiver les élèves à réaliser le contenu à distance et y donner du sens, il faut créer le besoin de savoir. C'est déjà valable dans l'enseignement traditionnel mais ça devient vital dans la classe inversée, car un élève qui n'a pas réalisé les activités à distance sera incapable de suivre les activités en classe. Une manière pour y parvenir efficacement (parmi d'autres) est l'utilisation de situations-problèmes [25].

Expliciter et modérer le temps en autonomie. Il est recommandé de ne pas excéder 20 minutes de travail en autonomie en supérieur. Je supposerai donc que 15-18 minutes devrait être approprié pour le secondaire. De plus, il est recommandé de rendre explicite ce temps auprès des élèves [21].

Ne pas surcharger la partie en classe. Ceci ne signifie pas qu'on doit voir moins de matière. Cela rejoint le fait de planifier des activités pertinentes et d'éviter les répétitions [7].

Laisser les élèves devenir actifs. Ceci signifie notamment de leur donner des occasions pour poser leurs questions dans le but de produire des interventions plus efficaces. Certains professeurs ont du mal de quitter la statut de sage qui gère la situation, et je pense que ça sera ma difficulté à surmonter. Une solution est de récolter plus d'informations pour mieux savoir ce qui se passe lors de la partie à distance. À cet effet, des outils technologiques comme *Edpuzzle*¹⁰ permettent de voir avec précision les réponses à des questions qu'on aura incluses dans la vidéo. On en reparlera dans le chapitre suivant. Ainsi, le professeur a un rendu complet du niveau de compréhension des élèves et peut effectuer de meilleures interventions et mieux pouvoir passer au statut d'accompagnateur tout en gardant le contrôle de la situation [7, 28].

Comprendre les étudiants. La classe inversée amène un changement dans le rythme d'apprentissage plus ou moins grand en fonction de la liberté d'action des élèves. Lorsque

⁷www.kahoot.com

⁸www.edpuzzle.com

⁹<https://fr.khanacademy.org/math/>

¹⁰<https://edpuzzle.com/>

les élèves avancent à leur rythme, il est courant de voir que les niveaux varient fort d'un chapitre à l'autre et pas toujours dans le même sens [19]. Ce contexte de grande différenciation rend d'autant plus important le besoin d'une compréhension raffinée des besoins des étudiants et nécessite donc une écoute active [7].

Utiliser le tutorat. Cette différenciation qui émerge et la prise d'autonomie des étudiants renforce l'efficacité et la pertinence du tutorat. Il est recommandé non seulement d'y recourir sans trop d'hésitation, mais également d'avoir à sa disposition un outil qui permette le suivi de l'apprentissage autonome individuel des élèves, permettant de coupler un élève qui a plus facile dans ce chapitre avec un élève qui a moins facile [19].

Adopter une posture d'accompagnateur. Que cela passe par des questions de relance ou par la communication non verbale. Il est par exemple recommandé de se mettre au même niveau que l'élève quand on discute avec lui et de regarder sa production écrite dans le même sens que lui [7].

Un professeur expérimenté et passionné. Nombre des conseils que nous avons rassemblés mettent l'accent sur la connaissance qu'a le professeur des difficultés que les élèves vont rencontrer, de sa planification et de la pertinence des activités qui composent sa leçon, de sa flexibilité en classe, de la mise en exergue du sens des apprentissages et bien d'autres compétences. Comme cela a été montré dans les études à la section précédente, l'expérience et la motivation du professeur joue un rôle déterminant dans l'efficacité de la classe inversée.

Organiser les ressources à distance. Il est recommandé de mettre en place une plateforme¹¹ pour y déposer les vidéos, les liens, et éventuellement créer un forum de discussion. Cette plateforme peut aussi servir de moyen de communication asynchrone à distance. Cette plateforme a pour but d'améliorer la communication, l'accessibilité aux ressources et contribue au repérage des difficultés rencontrées par les élèves pour préparer la séance en classe [22, 23].

¹¹Des exemples de telles plateformes sont *Smartschool*, *Moodle*, *Discord* ou *Google Classroom*. Ces dernière étant disponible dans leur version gratuite et Discord étant entièrement gratuit.

Chapter 2

Utilisation de vidéos en classe inversée

Dans notre classe inversée, nous voulons faire usage de vidéos. Ce chapitre a pour objectif de déterminer comment réaliser de bonnes vidéos, quelles en sont les avantages, comment les utiliser et quelles sont les caractéristiques que les vidéos doivent posséder pour maximiser l'apprentissage des apprenants. Nous étudierons l'apport des vidéos en enseignement, puis les différentes manières d'utiliser des vidéos en enseignement, et enfin nous ferons un recueil de conseils de bonnes pratiques sur la production même de vidéos de la même manière que nous en avons fait un recueil de bonnes pratiques sur la mise en place d'une classe inversée à la fin du chapitre précédent.

Ce chapitre n'a pas pour objectif d'expliquer comment réaliser une vidéo, ce qui comprend comment scripter¹, filmer, gérer le son, retoucher, monter, upload² ou diffuser la vidéo.

2.1 Caractéristiques des vidéos en classe inversée

Pertinence des vidéos en classe inversée

Selon la définition de classe inversée que nous avons adoptée, les vidéos ne sont qu'un moyen parmi d'autres d'externaliser le savoir. Ce n'est bien sûr pas la seule définition et il n'y a pas vraiment de consensus autour de l'utilisation de vidéos. J'ai choisi l'approche abstraite parce que la classe inversée est fortement liée aux technologies qui évoluent rapidement, et parce que c'est une définition répandue. Toutefois, d'autres références reconnues, comme *EDUCASE* [12], une des associations phares se concentrant sur l'utilisation des technologies dans l'enseignement supérieur, selon [23], définissent la classe inversée comme

¹scripter : définir le contenu de la vidéo avec précision, comprenant les plans, les effets sonores, le montage etc.

²upload : mise en ligne de la vidéo, comprenant son accessibilité, son titre, la miniature, description et le lien de la vidéo.

"A pedagogical model in which the typical lecture and homework elements of a course are reversed. Short video lectures are viewed by students at home before the class session, while in-class time is devoted to exercises, projects, or discussions."

Selon eux, l'usage de vidéos est inhérent à la définition de classe inversée. Les vidéos sont en effet le moyen technologique actuellement utilisé largement majoritairement en classe inversée. Cette affirmation nous est confirmée par le tour d'horizon des recherches sur la classe inversée du chapitre précédent.

3 I's Framework

Un cadre théorique des caractéristiques et apports des vidéos en enseignement qui est souvent cité est le *3 I's Framework* [4]. Ils ont classifié les apports des vidéos en enseignement selon trois catégories :

- **Image** : l'essence même de la vidéo. C'est une image mobile, une technologie nouvelle (surtout dans l'enseignement), etc. On se concentre sur ce que ça permet de faire.
- **Interaction** : l'interaction entre l'étudiant et le contenu. Il peut le lancer quand il veut, où il veut, faire pause, stop, revenir en arrière, il choisit le contexte dans lequel il regarde, ...
- **Integration** : la vidéo est en lien avec d'autres ressources, est sur un site, est en lien avec d'autres contenus (directement comme lorsqu'elle apparaît dans une présentation, ou indirectement comme étant suggérée dans une autre vidéo), etc.

Détaillons ces catégories.

Intérêts de l'image. On dit qu'une image vaut mieux qu'un long discours, mais une vidéo est encore plus efficace. Une image, même fixe, attire l'attention et il a été montré (les auteurs citent [11]) que les vidéos aident à mémoriser l'information, permettent de la retrouver plus facilement, facilitent la pensée et la résolution de problèmes. Ceci est en partie liée au fait que les vidéos exploitent l'intelligence visuelle (selon les types d'intelligence de Gardner), mais aussi que la vidéo, au travers du montage, affecte les émotions. On peut interloquer, étonner, surprendre et ainsi toucher émotionnellement l'étudiant grâce à un montage adéquat. Une bonne vidéo ne doit pas se résumer à la mise en ligne d'une version filmée de l'enseignant mais doit avoir été réfléchie, c'est-à-dire scriptée et montée.

Attention ! Ces avantages peuvent se tourner en pires défauts en cas de problèmes techniques. Un fond tremblant, une mauvaise incrustation, un sujet surexposé ou sous-exposé provoque une chute drastique de l'efficacité de l'image. Encore plus important, les problèmes liés au son (qualité sous-optimale, présence de bruit, écho, micro de mauvaise

qualité) sont encore plus à craindre. Ceci est d'autant plus vrai lorsqu'on ne fait pas de face caméra, en particulier lorsqu'on fait une démonstration visuelle d'une action (*montrer la préparation d'un plat en cuisine ou d'une découpe en menuiserie*), ce que nous avons moins en mathématiques.

Intérêts de l'interaction. Les auteurs décomposent les intérêts de l'intégration en

- **Accessibilité** : l'étudiant peut regarder la vidéo quand il veut, où il veut, ce qui lui permet d'organiser son travail, mais aussi de regarder à nouveau une vidéo qu'il a déjà regardée (beaucoup d'étudiants regardent à nouveau les vidéos clés en préparation d'examen ou de test et apprécient de pouvoir la regarder à nouveau lorsqu'ils bloquent sur un exercice [23]).
- **Choix** : l'étudiant peut décider de regarder une vidéo et le nombre de fois qu'il veut la regarder. De plus, il est seul à le décider, il n'a pas besoin de "déranger" le professeur pour demander une réexplication [19].
- **Contrôle** : l'étudiant peut décider de faire une pause (pour noter, pour réfléchir, pour aller aux toilettes, ...), de lire la vidéo, de l'arrêter, d'avancer dans la vidéo (passer un rappel ou une explication avancée quand il pense avoir compris) ou revenir en arrière (pour se souvenir d'une définition, d'un résultat, ou parce qu'il veut écouter une deuxième fois l'explication).

Par conséquent, l'apprenant peut adapter le rythme d'apprentissage au sien. Il y a moins de temps mort, de temps de travail inexploité et donc moins de place à l'ennui ou à la démotivation.

Intérêts de l'intégration. Comme des livres peuvent se citer entre eux, des vidéos peuvent contenir des liens de l'une vers l'autre. Qu'on ait anticipé une difficulté, qu'on redirige vers une anecdote ou une expérience réalisée par quelqu'un d'autre, une fiche Youtube³ apparaît, permettant à l'apprenant de choisir s'il désire voir ce contenu ou pas. Ces liens fonctionnent aussi sous la forme de playlist qui redirige automatiquement l'apprenant vers une autre vidéo présélectionnée à la fin de celle en cours. On peut également inclure des textes, des images, un lien vers des exercices, faire un lien avec le syllabus, ou inclure un quizz, ou on peut rajouter des liens externes vers un quizz (*Kahoot*⁴) lié à la matière ou même que la vidéo se mette d'elle-même sur pause pour laisser le quizz venir prendre la place avant que la vidéo ne reprenne quand l'étudiant a répondu (*Edpuzzle*⁵).

Dans l'autre sens, la vidéo peut être référencée (par d'autres vidéos, par le syllabus), postée à différents endroits, être reprise sur une plateforme de communication asynchrone, etc.

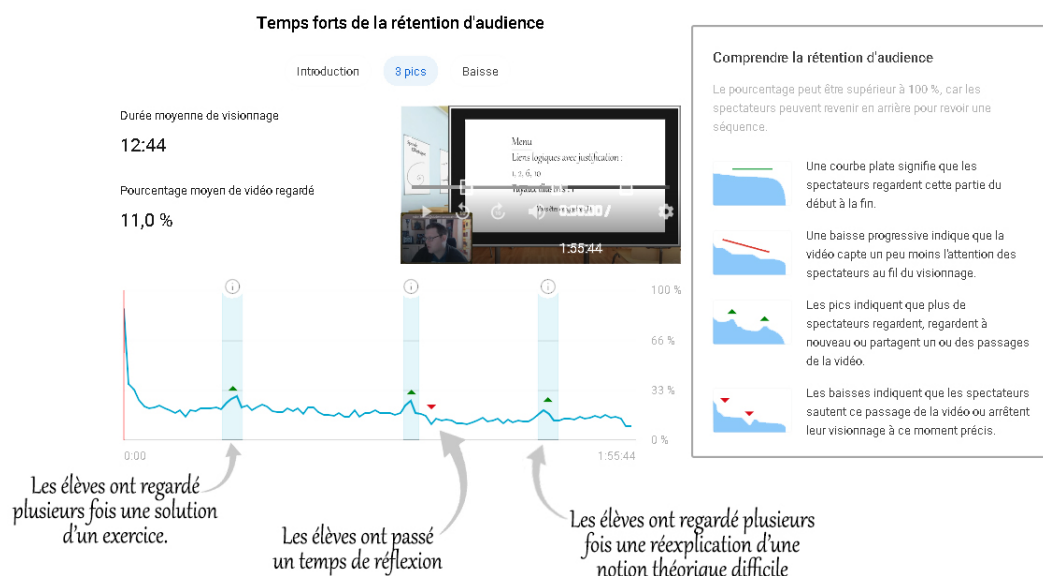
³www.youtube.com

⁴www.kahoot.com

⁵www.edpuzzle.com

Autrement formulé, la vidéo peut interagir avec l'apprenant pour lui fournir les ressources dont il a besoin, une autoévaluation, une question de réflexion, proposer une anecdote historique, etc.

Un autre intérêt de l'intégration est que la vidéo est une donnée informatique qui peut être traitée. On peut facilement savoir quels élèves ont regardé la vidéo, combien de fois, et les réponses aux quizz qu'ils ont données via *Edpuzzle*. *Edpuzzle* permet de traiter des vidéos disponibles sur Youtube et on peut donc se servir de Youtube Analytics pour savoir quels passages les élèves ont-ils en général regardé plusieurs fois, quels passages ils ont sauté, le nombre de vues, une idée de l'appréciation etc.



Données

Youtube Analytics d'une séance d'exercices donnée à distance pendant le confinement covid-19 en mathématiques pour économistes en BAC1 à l'UCLouvain.

On a ainsi un retour extrêmement précis sur les besoins des élèves, leur niveau de compréhension, etc., ce qui nous permet de préparer une séance en classe sur base des besoins des élèves, ce qui augmente encore l'efficacité du temps de classe.

Attention, les différentes ressources et les différents liens doivent être complémentaires, pertinents et non contradictoires (par exemple dans les notations) [22]. Il faut également adapter les ressources à disposition des élèves en fonction de leur aisance avec ces technologies [23].

2.2 Utilisations possibles des vidéos (en mathématiques)

Il existe de très nombreuses applications des vidéos, que ça soit au niveau des étudiants (produire une vidéo sur un sujet, se filmer en vue d'une discussion réflexive, etc.) ou au niveau du professeur (utilisation d'images d'archives, interview, rôle play pour mener au

débat, faire une démonstration d'un procédé mécanique coûteux comme une opération en chirurgie, etc.). Même s'il est intéressant de les garder en tête, le choix est restreint en mathématiques. Il est assez peu probable que nous ayons besoin de montrer des images historiques, par exemple. Pour plus d'informations sur les utilisations centrées sur les étudiants et leur lien avec la taxonomie, voir [24] et pour plus d'informations sur les utilisations centrées sur l'enseignant et leurs avantages, voir [2].

De [2], nous retiendrons trois utilisations potentielles.

- **Talking Head** : l'enseignant parle directement à la caméra, ce qui permet à la personne qui regarde la vidéo de se sentir directement concerné.
- **Fly on the wall** : la caméra est fixée à un endroit lors d'un événement, ce qui permet d'y assister à nouveau dans le futur. C'est une solution de facilité qui permet de produire une vidéo non scriptée, donc moins engageante et qui suppose que le sujet ne bouge pas trop.
- **Animation**⁶ : il n'y a pas de caméra. La production est uniquement numérique (partage d'écran ou produit à partir de rien au montage).

[2] propose également une analyse spécifique pour l'animation.

Avantages de l'animation. Permet de visualiser des situations abstraites, permet d'expliquer des concepts ou procédures qui font intervenir un mouvement, même inaccessible (immatériel (*fonction*), dans l'univers ou dans le corps humain), permet de visualiser via un graphe.

Désavantages de l'animation. Demande un temps de travail considérable de production (plus encore que les autres types de vidéos). Animer quelque chose de non essentiel va attirer l'attention et peut se retourner contre nous.

Recommandations pour l'animation. Faire des animations réalistes (dans les tailles, formes, couleurs) pour être plus compréhensible. Viser la simplification de l'animation (par opposition à complexité). Rajouter un texte audio complémentaire (voir principes de Mayer à la section suivante).

La méthode *Talking Head* favorise le contact entre l'enseignant et l'apprenant, ce qui permet de garder l'étudiant engagé et améliore la communication, mais on y perd en visualisation et en clarté de l'information à l'écran, à l'opposé de l'*animation*. Il ne faut pas choisir entre l'un et l'autre, mais les alterner efficacement dans une même vidéo [22]. La méthode *Fly on the wall* est extrêmement simple à produire, mais ne respecte quasi aucune des bonnes pratiques que nous verrons à la section suivante. Elle

⁶Attention, le sens que donne [2] à "animation" n'est pas le même que le sens usuel d'"animation" dans le monde des vidéos. Pour eux, écrire sur une tablette et partager l'écran de la tablette rentre dans la catégorie "animation" car l'image est numérique uniquement, tout comme insérer un texte et des images au montage sur un fond fixe.

peut être utilisée si on veut permettre de revivre une séquence en classe et que c'est pertinent.

Synthèse

Utiliser des vidéos en classe inversée, c'est perdre d'un côté pour gagner d'un autre. On perd en interaction lors des explications, mais les élèves deviennent plus autonomes.

On perd un rythme fixe de cours et avec lui la régularité du travail et ce cadre habituel et rassurant au profit d'un rythme d'apprentissage adapté à chaque élève et à leur offrir un contrôle sur leurs apprentissages.

Du côté professeur, on y investit (*ce n'est pas une perte*) beaucoup de temps, mais on y gagne en informations recueillies et on touche des élèves différents de ceux qu'on touche avec une approche plus traditionnelle.

Les vidéos, tout comme probablement l'ensemble des moyens à disposition de la pédagogie, ne sont pas quelque chose de "mieux", mais sont un outil qu'il faut utiliser au bon moment. Cette synthèse rejoint et soutient fortement le conseil d'utilisation des classes inversées qui invitait à sélectionner quand inverser sa classe et à savoir quand ne pas l'inverser.

2.3 Bonnes pratiques d'utilisation des vidéos en pédagogie

Pour savoir comment bien utiliser des vidéos dans l'enseignement, rassemblons ici des conseils de bonne pratique que la littérature propose. Tout comme pour les bonnes pratiques que nous avons recueillies autour de la classe inversée, les conseils proviennent de sources variées telles des pédagogues ou des conclusions d'études. Ce sont des conseils de bonnes pratiques et non des règles d'or dont l'efficacité a été prouvée.

Principes de Mayer. Parmi eux, la théorie cognitive de l'apprentissage multimédia de Mayer et ses 12 principes reviennent régulièrement [18, 21, 23, 29]. Pour détailler ces principes, nous nous baserons sur la présentation qu'en a faite le projet *Didactique du numérique*, coordonné par le *Belgian Network for Open and Digital Learning* [10].

1. Principe de personnalisation. Adopter un style conversationnel dans la narration, c'est-à-dire s'adresser à la personne qui regarde la vidéo plutôt que de manière formelle ou impersonnelle, et avec une voix humaine et sympathique.

2. Principe de signalisation. Attirer l'attention sur l'important, l'essentiel et s'en servir pour dégager une structure. *Pointer du doigt, accentuer en parlant, souligner, mettre en gras, utiliser des flèches, indenter, numéroté,...*

3. Principe multimédia. Accompagner le texte d'images (si c'est pertinent seulement).

4. Principe de contiguïté spatiale. Le texte associé à une image doit être le plus près possible (*mettre le texte à côté de la portion d'image pertinente plutôt qu'en légende*). On évite ainsi la saturation des canaux visuels de l'apprenant.

5. Principe de modalité. Les explications ou commentaires sont plus efficaces à l'oral qu'à l'écrit. Ne laisser que les mots-clés à l'écrit.

6. Principe de contiguïté temporelle. Les mots et les images d'une animation doivent apparaître simultanément. Selon [18], le visuel peut précéder l'audio de peu. Ce schéma stimulerait la curiosité, l'apprentissage par découverte et la construction personnelle des connaissances.

7. Principe de redondance. Éviter de laisser à l'écrit un texte dit à l'oral. L'image et l'oral sont meilleurs sans texte à l'écrit (*y compris les sous-titres si non indispensables*).

8. Principe de cohérence. Éviter tout contenu non indispensable à la compréhension (*image superflue, musique de fond, son d'ambiance, bruitage, nom d'auteurs non nécessaires, source qu'on pourrait mettre autre part comme en description de la vidéo, ...*). Cependant, comme le souligne [18], ce principe s'oppose aux bénéfices apportés par la variété, c'est-à-dire la combinaison d'images mobiles, de ralenti, de temps réel, d'effets visuels ou sonores. De même, l'humour ou l'utilisation occasionnelle de musique (qui n'engage pas les émotions de l'apprenant) participe efficacement à cette variété et améliorent l'apprentissage de l'apprenant.

9. Principe de la voix. Ne jamais utiliser de voix synthétisée.

10. Principe de l'image. Lors d'une animation, le visage de la personne qui parle n'est pas nécessaire. En revanche, selon [22], que la personne qui parle soit l'image centrale pendant certains moments est bénéfique, idéalement en alternance avec des animations ou images où on ne le voit pas.

11. Principe de segmentation. Permettre à l'apprenant de contrôler le rythme de la vidéo (*revenir en arrière, faire pause, vidéo suivante ou précédente*) et préférer plusieurs vidéos courtes plutôt qu'une longue. [17] a montré que l'engagement des apprenants chutait après 6 minutes. Ceci et le principe de cohérence nous invite à rester brefs, mais inclusifs [22, 18].

12. Principe de pré-entraînement. On apprend mieux si on a déjà été introduit aux termes et aux caractéristiques des concepts principaux, surtout si ces concepts sont complexes et surtout si la vitesse de l'animation est soutenue.

Active viewing. Le deuxième conseil qui revient régulièrement est de pratiquer l'*Active viewing*. C'est-à-dire que le visionnage de la vidéo ne soit pas la seule tâche à réaliser. On peut demander aux étudiants d'en faire une synthèse, de préparer des arguments en vue d'un débat, de résoudre des exercices en ligne, de créer une carte conceptuelle, ou plus simplement intégrer un questionnaire sur la vidéo auquel ils devront répondre pour continuer [22, 2].

Un bon rythme et un bon débit de parole. Il est recommandé de parler de manière soutenue et d'adopter un rythme ni trop lent ni trop rapide. Au besoin, on peut s'aider du montage pour dynamiser la vidéo. L'engagement des apprenants augmente avec le rythme de la vidéo [18, 17].

Soigner l'esthétique. La vidéo doit être agréable à regarder, ce qui inclut une lumière correcte, des effets d'apparition de textes et d'images soignées et un écran clair et épuré [18].

Un juste équilibre entre informel et technique. Lors des séquences filmées ou enregistrées, on ne doit pas favoriser la technique au point de perdre du côté personnel et humain de la vidéo. Il vaut mieux être plus informel que techniquement parfait [22]. Cela fait un an que j'hésitais entre un enregistrement avec lumières parfaites et chemise sur fond vert ou un enregistrement assis face caméra dans mon décor, il semblerait que la deuxième option soit donc à privilégier.



À gauche, extrait d'une vidéo que j'avais produite sur les radians⁷ ;

À droite, extrait d'un cours en ligne pendant le confinement covid-19 en mathématiques pour économistes en BAC1 à l'UCLouvain.⁸

Toutefois, on voit dans l'image de droite que le fond n'est pas neutre et peut distraire l'étudiant. Je veillerai donc à cacher les éléments majeurs (les cadres et le marteau).

⁷Disponible sur Youtube : <https://www.youtube.com/watch?v=2-uyOoWrRs4>

⁸Disponible sur Youtube uniquement via ce lien : <https://www.youtube.com/watch?v=23Mp5ocimTI>

Écrire en parlant. Il est recommandé d'utiliser un style *Écrire en parlant* plutôt qu'un style *Écrire par ordinateur*. Autrement dit, on recommande d'écrire sur ordinateur (*avec un stylet, par exemple*) ou d'animer le texte pour qu'il apparaisse de gauche à droite, que ça soit avec un balaiement latéral ou une animation d'écriture (*ce qui demande beaucoup plus de travail*) et il faut éviter de faire un fondu⁹ ou une coupure¹⁰. En effet, le sens d'écriture inviterait à lire en même temps et favoriserait l'engagement de l'apprenant [23, 22].

Organiser les vidéos. Aussi bien entre elles (*les inclure dans une playlist, mettre des liens qui les relient, annoncer le sujet de la vidéo qui suit immédiatement, ...*) que son contenu (*prévoir la structure de la vidéo, synthétiser les informations, ...*) [4].

Analyser les données. Que ça soit pour une vidéo ou un quizz qu'on a utilisé, la plupart de ces outils¹¹ fournissent des données détaillées sur l'activité des étudiants. Ces données offrent un excellent (et souvent le seul) feedback sur l'apprentissage des élèves avant la séances en classe suivante. Elles nous permettent donc de savoir ce qui a mieux ou moins bien fonctionné et de mieux répondre aux besoins des apprenants [2]. Je suis personnellement étonné de n'avoir vu que [2] évoquer les données recueillies par l'outil informatique alors qu'analyser ces données est quelque chose de courant dans le milieu de la vidéo et du streaming (selon mon expérience) et que l'apport me semble évident : on prépare mieux une phase de restructuration en classe si on sait où les étudiants ont eu plus de difficultés.

⁹Fondu : animation d'image qui la fait apparaître progressivement en passant son opacité de 0% à 100% de manière "continue".

¹⁰Coupure : animation d'image qui la fait apparaître en passant son opacité de 0% à 100% sans passer par aucune valeur intermédiaire.

¹¹notamment Youtube Analytics, Edpuzzle et Kahoot

Chapter 3

La théorie des graphes et le théorème des 5 couleurs

3.1 L'utilisation de la classe inversée avec support vidéos en théorie des graphes

Nous avons choisi d'étudier l'efficacité de la classe inversée en théorie des graphes. En voici les raisons.

Tout d'abord, dans le cadre de ce mémoire de master en mathématiques à finalité didactique, il nous fallait à la fois un sujet de mathématiques avancées et un sujet accessible en secondaire, que ça soit en termes de prérequis et de complexité. La théorie des graphes est un sujet qui revient régulièrement comme activités, par exemple au printemps des sciences [27]. J'ai personnellement encadré deux activités en théorie des graphes, en 1re et 3e secondaire. De plus, la théorie des graphes permet de répondre à des questions concrètes autour de la vie de tous les jours comme le fonctionnement d'un GPS, des réseaux sociaux [27] ou composer un horaire optimal (voir cours).

Enfin, la théorie des graphes est un sujet qui permet de se lancer dans des questions de taxonomie élevée avec très peu de théorie. Par exemple, on peut montrer que dans un groupe de 6 personnes, soit il existe 3 d'entre elles qui se connaissent toutes deux à deux, soit il existe 3 d'entre elles qui sont toutes inconnues deux à deux [26]. Pour prouver ce résultat, on n'utilise que la définition même d'un graphe.

En plus d'être un sujet intéressant, avancé et accessible aux élèves de secondaire, nous pensons que la théorie des graphes est un bon sujet à inverser. C'est un thème où il y a beaucoup de définitions pour lesquelles nous ne sentons pas la nécessité que le professeur soit présent au moment de les apprendre. En revanche, les exercices et applications de la théorie des graphes font souvent intervenir des compétences taxonomiquement plus élevées, ce qui rend la présence du professeur plus pertinente. Pour certains problèmes, on peut même envisager que les élèves travaillent par groupes à sa résolution.

De plus, l'utilisation de vidéos nous semble particulièrement pertinente. La théorie des graphes est, par essence, très visuelle. Certaines définitions sont faciles à voir, mais difficiles à formuler (par exemple la notion de graphe planaire ou de cycle). Nous pensons aussi que le fait qu'un élève puisse regarder à nouveau le contenu des cours aura un impact plus important étant donné la complexité des problèmes et le fait qu'un élève puisse s'inspirer d'un raisonnement fait au cours pour résoudre d'autres problèmes.

Enfin, nous n'avons trouvé aucune étude sur l'efficacité de la classe inversée en théorie des graphes.

Nous émettons donc l'hypothèse que la classe inversée est **plus efficace** que la classe traditionnelle pour l'enseignement de la théorie des graphes, en secondaire.

3.2 Preuve du théorème des 5 (-6) couleurs

Le but de cette section est d'étudier de manière plus approfondie le problème du coloriage d'une carte avec n couleurs ($n \in \mathbb{N}_*$), de définir ce qu'on entend par "frontière" d'un pays, "pays" et "carte". On émettra aussi des hypothèses sur ces cartes. En considérant le graphe issu de cette carte, on héritera de certaines propriétés des graphes sur lesquelles se reposera le théorème lui-même. Enfin, on se penchera sur la preuve elle-même du théorème pour $n = 6$ et $n = 5$.

Pour cette section, je me suis inspiré des preuves présentées dans [14, 9]. On supposera les résultats élémentaires de la théorie des graphes acquis, telle que la somme des degrés est égal au double du nombre d'arêtes, le nombre d'Euler pour un graphe planaire et les propriétés des graphes (complet, dual, planaire, ...). Pour voir ces résultats, on peut se référer au cours qui sera proposé (voir Appendix A).

Intuitivement, le théorème des n couleurs ($n \in \mathbb{N}, n \geq 4$) dit qu'on peut colorer une carte avec n couleurs de sorte que deux pays voisins dont la frontière n'est pas un seul point soient colorés avec des couleurs différentes. On supposera les pays connexes. Il est donc possible que la France et la Corse soient colorés de deux couleurs différentes même s'ils font officiellement tous deux partie de la France. Sans cette hypothèse, il est facile de voir que le théorème est faux (par exemple pour $n = 4$).

Cartes admissibles

Par souci de simplicité dans la définition du graphe, nous n'allons pas considérer toutes les cartes. Par exemple, le Vatican a seulement une frontière avec l'Italie. Si on a réussi à colorer la carte sans le Vatican en n couleurs, alors il reste $n - 1$ couleurs qu'on pourrait attribuer au Vatican une fois l'Italie colorée. Ce n'est donc pas dans ces exemples qu'on comprendra mieux le théorème.

De même, on ne veut pas de frontière de longueur infinie ou qui remplisse un carré¹.
On imposera donc que la frontière soit une courbe de Jordan (fermée) et sans auto-intersection.

Définition 3.1 (Courbe de Jordan (fermée)). *Soit $C \subset \mathbb{R}^2$. C est appelée courbe de Jordan fermée s'il existe une application continue $c : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que*

- $\text{Im } c = C$;
- $c(0) = c(1)$;
- $c|_{[0,1[}$ est injective.

Dans ce travail, lorsque l'on parlera de courbe de Jordan, on entendra toujours courbe de Jordan fermée.

L'intérêt de demander qu'une frontière soit une courbe de Jordan est le théorème suivant, qu'on admettra.

Théorème 3.2 (Jordan Curve Theorem). *Soit C une courbe de Jordan. Alors $\mathbb{R}^2 \setminus C$ est une réunion disjointe de I (intérieur) et E (extérieur) qui vérifient :*

- I est borné et E n'est pas borné ;
- I et E sont connexes par arcs ;
- Tout arc joignant un point de I à un point de E intersecte C .

Définition 3.3 (carte et pays). *Étant donné un ensemble de frontières (dans le plan), un pays est une région connexe du plan dont le bord est une frontière. Ce plan est appelé carte.*

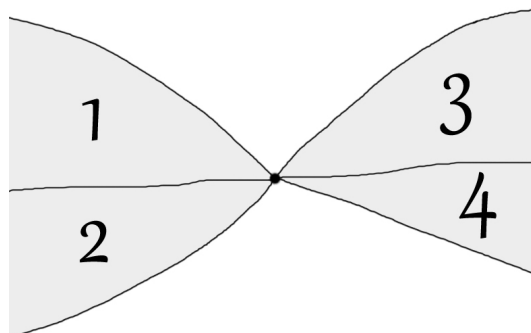
Nous pouvons à présent imposer des conditions sur les cartes que nous allons modéliser. On demande que, dans une carte,

1. il y ait un nombre fini de pays dont un seul est non borné² ;
2. la frontière d'un pays est une courbe de Jordan et son intérieur est ce pays ;
3. dans la frontière de chaque pays, il existe au moins deux points qui appartiennent à la frontière d'au moins 3 pays différents ;
4. Étant donnés deux points appartenant à la réunion des pays, il existe un chemin qui les relie dont chaque point est dans au plus deux fermetures de pays ;

¹Pour plus d'informations, voir *Courbe de Peano*.

²La face extérieure sera appelée pays même si, dans les cartes auxquelles on pense, il s'agit souvent de la mer.

Les conditions 1 et 2 sont là pour éviter des cas invraisemblables. La condition 3 exclut des cas comme le Vatican et va permettre de très subtilement simplifier la preuve du théorème des 5 couleurs. La condition 4 impose de travailler sur une carte connexe. Si on sait colorer deux cartes connexes, on sait colorer leur réunion disjointe. De plus, il est là pour éviter des cas comme le suivant.



Dans cette portion de carte, il n'y a que 4 pays qui ont tous un point de frontière commun. Dans un cas comme celui-ci, il suffirait de colorer la carte de gauche, comprenant 1 et 2, et de colorer la carte de droite, comprenant 3 et 4, pour colorer la carte complète.

Structure de graphe

Maintenant qu'on s'est mis d'accord sur les cartes admissibles, on peut y associer une structure de graphe. Étant donnée une carte, on appellera *sommet* un point de la carte appartenant à la frontière de trois pays différents, et on appellera *arête* la portion de frontière reliant deux sommets. On a ainsi défini un graphe correspondant à la carte.

On fera un amalgame entre une carte et le graphe issu de cette carte. Ainsi, on commettra l'abus de langage de dire que les faces du graphe sont des pays, que les arêtes font partie de la frontière de ce pays et on parlera de coloriage d'une carte pour parler du coloriage du graphe.

Nous pouvons d'ores et déjà tirer quelques propriétés de ce graphe.

Proposition 3.4. *Un graphe issu d'une carte*

1. *est planaire ;*
2. *a tous ses sommets de degré au moins 3 ;*
3. *est connexe ;*

Preuve. Le 1. vient directement de la définition du graphe, puisque la carte dont il est issu est représentée dans le plan et vérifie déjà que deux arêtes différentes ne peuvent s'intersecter qu'en un sommet. Le 2. est une conséquence directe de la condition 3. d'admissibilité des cartes et de la construction du graphe.

Prouvons le 3. Soient u, v deux sommets du graphe. Si u et v sont deux sommets appartenant à la frontière d'un même pays, on peut les relier en suivant les arêtes qui composent la frontière de ce pays (car la frontière est l'image continue de $[0, 1]$ par une application continue). Supposons à présent que u et v ne sont pas sur la frontière d'un même pays. Puisque u est sur la frontière de 3 pays, il existe un pays P_u qui admet u sur sa frontière. Choisissons un point p_0 dans P_u et, de manière analogue, un point p dans P_v , pays dont la frontière comprends v . Puisque u et v ne sont pas sur la frontière d'un pays commun, P_u et P_v sont distincts.

Par la condition 4., il existe un chemin $[p_0, p_1, \dots, p_n = p]$ tel que p_i et p_{i+1} soient dans des pays différents mais adjacents et tel que la restriction de ce chemin sur $[p_i, p_{i+1}]$ n'intersecte que la frontière commune au pays de p_i et à celui de p_{i+1} en au moins un point K_i (pour $i \in \{0, \dots, n-1\}$).

Par construction, pour chaque i , K_i appartient à une arête. On considère K'_i une des extrémités de cette arête (au choix). Puisque K_i et K_{i+1} sont sur la frontière d'un même pays (celui dans lequel est p_{i+1}), K'_i et K'_{i+1} sont également dans la frontière de ce même pays. On peut donc relier ces deux sommets par une successions d'arêtes et obtenir un chemin $[K'_i, K'_{i+1}]$ dans le graphe. De même, puisque u et K'_0 appartiennent à la frontière du pays de p_0 , il existe un chemin $[u, K'_0]$ composé d'arêtes les reliant. De même, il existe un chemin $[K'_{n-1}, v]$ composé d'arêtes. En concaténant les chemins, on obtient

$$[u, v] := [u, K'_0] \circ [K'_0, K'_1] \circ \dots \circ [K'_{n-1}, v] \quad \square$$

Le théorème des 6 couleurs

Un résultat bien connu en théorie des graphes est le théorème des 4 couleurs, car, à ce jour, aucune preuve n'a été trouvée sans faire intervenir l'informatique. L'objectif de cette section est de prouver ce théorème suivant pour le cas de $n = 6$.

Théorème 3.5 (Théorème des n couleurs). *Soit $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$. On peut colorer les pays de n'importe quelle carte de sorte que deux pays adjacents soient de couleurs différentes avec n couleurs.*

Lorsque le contexte ne laisse pas place à des ambiguïtés, on ne précisera pas le n .

Définition 3.6 (Pays adjacents). *Dans une carte, deux pays sont adjacents s'ils ont une frontière commune non réduite à un point.*

Si le théorème n'est pas vrai, alors il existe des contre-exemples. Chacun de ces contre-exemples a un nombre de pays. Par le principe du bon ordre, il y en a qui ont un nombre minimal de pays.

Définition 3.7 (Criminel minimum). *Pour $n \in \mathbb{N}_*$, une carte est un criminel minimum (du théorème des n couleurs) si c'est un contre-exemple au théorème des n couleurs avec un nombre minimal de pays.*

L'idée de la preuve est de montrer qu'un tel criminel minimum ne peut pas exister. La stratégie est donc d'accumuler assez d'informations sur les propriétés qu'un criminel minimum doit vérifier. Par exemple, le lemme suivant.

Lemme 3.8. *Soit $n \in \mathbb{N}_*$. Un criminel minimum au théorème des n couleurs a au moins n pays.*

Preuve. Sinon il y a moins de pays que de couleurs et on peut tous leur attribuer une couleur différente.

Attelons-nous à présent à la preuve du théorème des 6 couleurs.

Proposition 3.9. *Dans tout criminel minimum, il existe un pays qui a au plus 5 voisins.*

Preuve. Par l'absurde, supposons que tous les pays du criminel minimum aient au moins 6 voisins. C'est-à-dire que toute face du graphe ait 6 faces distinctes adjacentes. On appellera a le nombre d'arêtes, f le nombre de faces, s le nombre de sommets et S l'ensemble des sommets du criminel minimum. Pour un sommet v , on note $\deg(v)$ son degré.

1. Nous savons que $2a = \sum_{v \in S} \deg(v)$. Par la Proposition 3.4, p.33, on a

$$2a = \sum_{v \in S} \deg(v) \geq 3s,$$

c'est-à-dire

$$s \leq \frac{2}{3}a.$$

2. Si on note $\text{adj}(F)$ le nombre de faces adjacentes à une face F et si $\mathcal{F}$ est l'ensemble des faces, on sait que $2a = \sum_{F \in \mathcal{F}} \text{adj}(F)$ car c'est l'égalité $2a = \sum_{v \in S} \deg(v)$ dans le dual. On a alors

$$2a = \sum_{F \in \mathcal{F}} \text{adj}(F) \geq \sum_{F \in \mathcal{F}} 6 = 6f,$$

c'est-à-dire

$$f \leq \frac{1}{3}a.$$

Par 1. et 2., on a $f + s - a \leq \left(\frac{1}{3} + \frac{2}{3} - 1\right) \cdot a = 0$, ce qui est impossible puisqu'on sait que $s - a + f = 2$. $\square$

On a à présent tous les résultats nécessaires pour prouver le théorème des 6 couleurs.

Preuve. Par la dernière proposition, il existe un pays P avec au plus 5 voisins. Soit P' un de ses voisins. On considère la nouvelle carte obtenue en supprimant la frontière commune à P et à P' .

Puisque dans cette nouvelle carte, il y a moins de pays que dans le criminel minimum, on peut la colorer avec 6 couleurs de façon à ce que jamais deux pays adjacents soient de la même couleur.

On attribue aux pays du criminel minimum les mêmes couleurs que celles de la carte obtenue par suppression de la frontière commune. Pour ce qui est de P et P' , on attribue à P' la couleur de la fusion. Puisque P a ses au plus 5 voisins colorés, il reste une sixième couleur à attribuer à P , ce qui contredit que ce soit un criminel minimum. Le théorème n'admet donc pas de criminel minimum et donc pas de contre-exemple. $\square$

Remarque. Cette stratégie de supprimer la frontière sera réutilisée. On parlera de fusionner P et P' en enlevant leur frontière commune.

Le théorème des 5 couleurs

L'idée fondamentale de la preuve du théorème des 5 couleurs est la même que pour les 6 couleurs, mais en montrant que lorsqu'un pays a assez de voisins, il y en a deux d'entre eux qui ne sont pas voisins l'un de l'autre, ainsi, on les colore de la même couleur et on n'a pas besoin de la 6ème couleur. Pour montrer ce résultat, il faut d'abord montrer que le pays qui a 5 voisins ou moins n'en a pas trop peu non plus.

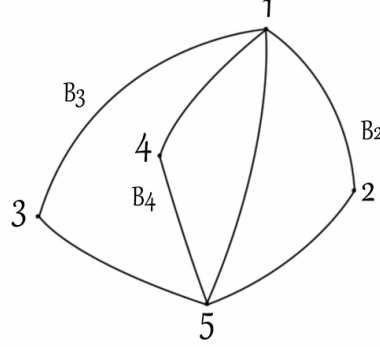
Lemme 3.10. *Dans un criminel minimum (du théorème des 5 couleurs), tous les pays ont au moins 5 voisins.*

Preuve. Supposons par l'absurde qu'il existe un pays P qui ait strictement moins de 5 voisins. Soit P' un de ses voisins. Si on fusionne P et P' en enlevant leur frontière commune, on obtient une carte avec un pays de moins que le criminel minimum, donc il admet un coloriage à 5 couleurs. On remet ensuite la frontière et P' hérite de la couleur de l'ancienne fusion, et tous les autres pays que P et P' héritent de la même couleur. Puisque P a au plus 4 voisins, il reste une 5ème couleur à lui attribuer. $\square$

Dire que tous les voisins d'un pays sont voisins entre eux, c'est dire que le sous-graphe du dual formé par les sommets P et ses voisins forme un sous-graphe complet. Puisqu'on sait que P a 5 voisins, la clé de la preuve réside dans la non existence d'un graphe complet d'ordre 5 planaire.

Théorème 3.11. *Le graphe complet d'ordre 5 n'est pas planaire.*

Preuve. Numérotons les sommets de 1 à 5. De toutes les arêtes du graphe, il y en a 7 qui sont adjacentes au sommet 1 ou au sommet 5. Il y en a 3 de la forme $[1, i]$, 3 de la forme $[i, 5]$ et $[1, 5]$ (pour $i = 2, 3, 4$). On appelle $B_i := [1, i] \cup [i, 5]$.



On admettra qu'il y a un des $i \in \{2, 3, 4\}$ tel que $K := B_i \cup [1, 5]$, qui est une courbe de Jordan, soit telle qu'un des deux autres arcs soit dans son intérieur et l'autre soit dans l'extérieur. Ce résultat repose sur des faits élémentaires sur les courbes de Jordan et regarder les possibilités³. Supposons que c'est B_3 (comme sur le dessin). Puisqu'un des deux sommets restants, mettons 4, est à l'intérieur de K et l'autre, 2, est à l'extérieur, l'arête $[2, 4]$ doit couper K , et ne le coupera pas en 1, en 3 ni en 5, puisque c'est une arête du graphe. $\square$

Proposition 3.12. *Dans un criminel minimum du théorème des 5 couleurs, chaque pays a au moins deux voisins qui ne sont pas eux-mêmes voisins.*

Preuve. Soit P un pays. Par le lemme, P a au moins 5 voisins. Considérons le dual du sous-graphe formé par P et 5 de ses voisins. Ce graphe est le dual d'un graphe planaire et est planaire. Puisqu'il n'existe pas de graphe complet planaire à 5 sommets, il y a forcément au moins une paire de sommets de ce graphe dual qui ne sont pas adjacents, c'est-à-dire une paire de pays voisins de P ou P du criminel minimum qui ne sont pas voisins. Puisqu'on sait que P est adjacent à ses voisins, les deux pays de la paire font partie des voisins de P . $\square$

Nous sommes maintenant en mesure de prouver le théorème des 5 couleurs.

³Une preuve des résultats élémentaires est disponible dans [14] et l'argument principal est le Théorème 2.2.10, page 55, qui assure que dans une configuration telle que les trois arcs B_1, B_2, B_3 , un des trois est "entre" les deux autres.

Preuve. On sait qu'il existe un pays P avec 5 voisins ou moins. Par le lemme, il a exactement 5 voisins. Par la proposition, il existe P' et P'' , voisins de P mais non voisins entre eux. On fusionne P , P' et P'' en supprimant la frontière commune à P, P' et celle commune à P', P'' . La carte ainsi obtenue ayant moins de pays que le criminel minimum, elle peut être colorée à 5 couleurs de façons à ce que jamais deux pays adjacents soient de la même couleur.

On attribue au criminel minimum les mêmes couleurs que celles attribuées dans la carte fusionnée. Pour P, P' et P'' , on attribue à P' et à P'' la couleur de la fusion de P, P', P'' dans la carte fusionnée. Parmi les voisins de P , on a utilisé 4 couleurs. Il en reste donc une 5ème pour P , ce qui contredit que ce soit un criminel minimum. Le théorème n'admet donc pas de criminel minimum et donc pas de contre-exemple. $\square$

Chapter 4

Méthodologie

Dans ce chapitre, on présente le protocole à suivre pour mener l'expérience. Ce protocole a été conçu pour une situation semblable à ce mémoire. Même s'il serait intéressant d'avoir plein d'élèves de milieux différents issus de diverses écoles qu'on pourrait randomiser ; dans le cadre d'un mémoire, on peut espérer avoir deux classes dans une école, pour un total d'environ 50 élèves. On supposera ici que les deux classes ont en général le même professeur le reste de l'année et suivent le même programme. Un quelconque niveau, le choix d'options (et en particulier le nombre d'heures par semaine de math), l'indice socio-économique de l'école, et d'autres critères semblables conditionneront les résultats obtenus, mais on pourra supposer que ces facteurs sont homogènes entre les deux groupes obtenus après randomisation.

De manière générale, le protocole présenté ici est un protocole "idéal" à adapter en fonction de la situation, en gardant l'objectif statistique en tête.

Cet objectif est que l'éventuelle différence dans le test final puisse être attribuée au style d'enseignement adopté.

L'étude sera une expérience contrôlée, randomisée, à groupes parallèles. Un des deux groupes recevra le cours suivant le style traditionnel¹ tandis que l'autre groupe recevra le cours en classe inversée. Vous trouverez une préparation de cours en annexes (cours traditionnel en Appendix A et cours en classe inversée en Appendix C). Ces cours donnent une direction générale, mais il est fortement recommandé que les cours soient préparés par le professeur qui les donnera. À l'issue de ces cours, les élèves passeront un test (le test proposé est disponible en annexe avec sa correction et la répartition des points (Appendix E).

Avec un total de 50 élèves, donc 50 unités statistiques, il est généralement admis que la séparation aléatoire en deux groupes de 25 donnera deux classes semblables. Un prétest n'est donc pas nécessaire, grâce au processus de randomisation. Toutefois, ceci n'est pas valable si l'étude englobe trop peu d'élèves.

¹Note : n'importe quel autre style d'enseignement que la classe inversée fait l'affaire, en adaptant l'interprétation finale.

On suggère d'expliquer aux élèves qu'ils vont participer à une étude pour améliorer l'enseignement et on leur demande de travailler comme ils le font d'habitude. On peut aussi leur expliquer qu'il n'y a pas un groupe qui recevra un meilleur cours que l'autre. Si on le savait, on ne mènerait pas une étude.

Primary outcome : On veut principalement déterminer si la classe inversée a un effet sur l'apprentissage par rapport à l'enseignement traditionnel, lorsqu'on regarde les résultats obtenus par les élèves dans l'ensemble des compétences.

Secondary outcome : On veut ensuite déterminer si la classe inversée a un effet, par rapport à l'enseignement traditionnel, sur les savoirs, les savoir-faire et les tâches de transfert.

1. Randomisation

Une fois qu'on a sélectionné quels élèves seront inclus dans l'étude, on va les randomiser en deux groupes. Comme la théorie des graphes est un sujet qui revient souvent dans les activités (comme dans un *cours d'activités mathématiques*², au *printemps des sciences* [1], ...), on va demander (éventuellement de manière informelle à main levée) si des élèves ont déjà entendu parler de théorie des graphes. Si au moins 4 sur les 50 (supposé) d'entre eux répondent par l'affirmative, on stratifiera la randomisation sur base de ce critère. Sinon, on stratifiera par genre.

S'il y a trop d'élèves qui répondent par l'affirmative (au moins 40%), on peut envisager de faire un test de théorie des graphes et d'utiliser la réussite de ce test comme critère de stratification.

En fonction de la situation, on peut concevoir d'autres critères de stratification. Par exemple, si les deux classes disponibles sont une classe de technique de transition en 5e à 4h de math par semaine et une classe de 6e générale en math à 6h de math par semaine, on peut stratifier par classe.

L'important est que les deux groupes obtenus soient homogènes. Le groupe qui recevra cours via la classe inversée et le groupe qui recevra cours via l'enseignement traditionnel seront tirés aléatoirement.

²Auxquelles j'ai pu participer en 2015 à l'athénée royal de Pont-à-Celles

2. Protocole statistique

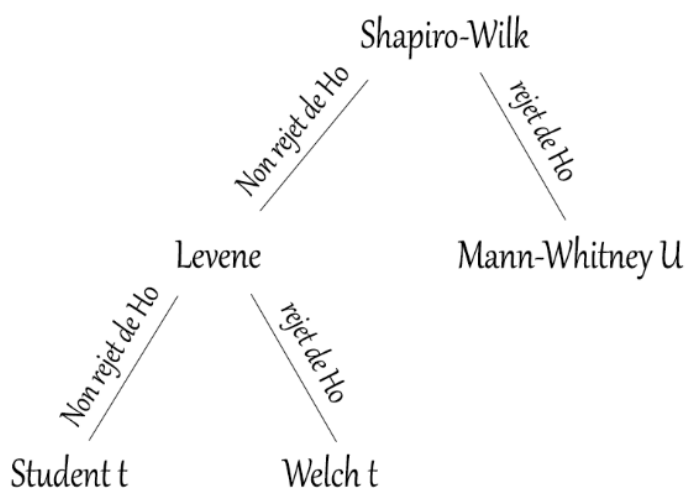
Que ce soit pour le primary outcome ou le secondary outcome, nous allons tenter d'expliquer la cote obtenue à l'interrogation (*variable dépendante*) via le mode d'enseignement (*variable indépendante*). Pour le primary outcome, la cote d'un élève est la cote obtenue à l'interrogation. Pour les secondary outcome, la cote est la somme des points obtenus par l'élève sur les questions de ce niveau de compétence, à savoir :

Savoir : Question 1;

Savoir-faire : Questions 2-5 ;

Transfert : Question 6.

Dans les deux cas, on effectuera les tests suivants, à commencer par le test de Shapiro-Wilk en interne de chaque groupe.



Puisqu'il n'y a aucun élève en commun dans les deux groupes, on fait bien un test à échantillons indépendants, donc on se dirige vers un *t-test* de Student. Pour tous les tests, on prendra un seuil de décision $\alpha = 0,05$.

Test t de Student : L'hypothèse nulle est

$$H_0 : \text{Les moyennes des deux groupes sont égales}$$

Si on obtient une p-valeur inférieure à 0,05, on rejette l'hypothèse nulle et on conclut à une différence significative entre les moyennes, le non rejet signifiant que s'il y a une différence, on a échoué à la mettre en évidence.

Pour pouvoir réaliser ce test, les données doivent suivre une loi normale. On procède donc d'abord au test de normalité de Shapiro-Wilk pour chaque groupe.

Test de Shapiro-Wilk : L'hypothèse nulle est

H_0 : Les données sont générées depuis une loi normale

Si on obtient une p-valeur inférieure à 0,05, on sera en mesure de rejeter que les données proviennent d'une loi normale. Elles ne vérifieraient pas les hypothèses du test t et on s'orientera vers un test non paramétrique de Mann-Whitney U (même hypothèse nulle et conclusion que le test de Student). Sinon, on procède au test d'homogénéité de Levene pour vérifier si on peut considérer que les variances sont les mêmes.

Test de Levene : L'hypothèse nulle est

H_0 : Les variances des deux groupes sont égales.

Si on obtient une p-valeur inférieure à 0,05, il y a une preuve significative que les variances sont différentes et on appliquera alors la correction de Welch (même hypothèse nulle et conclusion que le test de Student). Sinon, on n'a pas observé de différence significative entre les variances et on procède au test de Student.

Étant donné le contexte sanitaire qui nous empêche de mener à bien l'expérience, nous avons généré des réponses au test et avons appliqué cette méthodologie sur ces données. Cette analyse est disponible à l'Appendix [F](#).

Conclusion

Bien sûr, mes promoteurs et moi-même sommes attristés de n'avoir pu mener l'expérience à terme et avoir une réponse à apporter à la question de l'efficacité de la classe inversée à support vidéos en secondaire supérieur sur la théorie des graphes. Nous espérons pouvoir mener l'expérience l'année prochaine, hors du cadre de ce mémoire.

En effet, je me suis lancé dans l'étude de la classe inversée parce que je voyais, dans l'utilisation de vidéos via internet, un nouvel outil à mettre au service de l'apprentissage. Je n'y voyais pas un outil comme les autres, mais un outil avec un grand potentiel.

Je n'avais aucune raison de penser ça. Pour le même prix, j'aurais pu me tromper totalement. La première partie de ce travail m'a permis de dépasser mes préconceptions sur la classe inversée, de lire plusieurs témoignages sur la classe inversée, plusieurs manières de l'organiser, et une liste de conseils pour la mettre en place. De plus, j'ai pu avoir une première réponse sur l'efficacité, passant d'une impression que ça doit fonctionner, à la lecture d'une multitude d'études, montrant une efficacité qui dépend du sujet et du professeur.

Concernant les vidéos, j'ai eu une évolution analogue, rationalisant les idées que j'avais autour des vidéos que je réalisais.

Là où ce mémoire m'a déjà été utile, c'était lors des stages. Cette année, j'ai dû donner des cours à distance, en asynchrone au vu de la situation sanitaire. Puisque le cadre s'y prêtait, que je donnais statistiques et qu'on a vu que la classe inversée donnait de bons résultats pour un cours de statistiques, j'ai organisé mon cours dans l'esprit de la classe inversée. Ce n'était ni totalement un cours traditionnel ni totalement un cours en classe inversée. Certaines parties étaient en traditionnel et certaines parties étaient inversées.

Les élèves n'ont vu qu'une légère différence avec l'organisation des autres cours. Une partie de leurs professeurs donnait cours à distance et une partie donnait des travaux à réaliser. Leur proposer de regarder des vidéos de temps en temps, puis de réaliser un travail sur base de ces vidéos n'était pas bien différent du reste. De ce fait, la classe inversée a vraiment bien fonctionné du côté des élèves, sans avoir eu besoin d'inverser petit à petit.

La surprise était du côté professeur. J'étais déjà conscient de la durée que prenait une préparation de stage et la production d'une vidéo, mais à celà il faut rajouter le suivi au jour le jour. Publication de vidéos, messages contenant les consignes et questions sur le forums ne sont que quelques exemples principaux du travail de communication

nécessaire au bon fonctionnement de la classe inversée. Cela a aussi mis en évidence que les élèves devaient regarder un fil d'actualité ou suivre des notifications pour pouvoir suivre ce qu'il fallait faire.

Le plus contraignant n'était pourtant pas là, mais dans la rigidité du cours. Chaque cours devait permettre de restructurer la matière et introduire la matière suivante. Il permettait d'ouvrir des questions auxquelles la vidéo va répondre ou demandait d'avoir vu une vidéo pour préparer des exercices. Contrairement aux cours traditionnels, j'ai senti que l'organisation du cours était figée dans le marbre. Si on prenait 20 minutes de retard, on n'arriverait pas où il fallait pour que la vidéo soit pertinente. Or, en enseignement, c'est inévitable d'aller de temps en temps moins vite que ce qui était prévu. Heureusement pour moi, j'avais deux demi groupes en alternance, et j'ai pu me rattraper en leur demandant de regarder des vidéos initialement prévues pour l'autre groupe. Toutefois, ça reste un facteur qui m'a convaincu qu'il est beaucoup plus difficile d'inverser une classe où les interactions avec le professeur sont nombreuses (comme les secondaires) que d'inverser une classe où il y a peu d'interactions (comme à l'université).

Enfin, la dernière surprise était au niveau de la logistique. Gérer les annonces, les fichiers images/vidéos, les liens des vidéos, les envois aux élèves, les questions qu'ils posent en ligne, etc. Je pense que mes habitudes ancrées pour les vidéos et l'utilisation d'un site pour centraliser et trier les informations¹ m'a permis de m'en sortir.

Cette petite expérience de terrain qui a fait écho à ce travail m'a convaincu que la classe inversée méritait d'être testée, mais peut-être pas trop souvent. Elle apporte une dynamique de classe différente et intéressante. On voit mieux les erreurs des élèves quand on les aide à avancer plutôt que quand on leur explique quoi faire. Toutefois, même si les résultats de l'interrogation étaient plus que brillants, seule une expérience scientifique permettra de répondre à la question.

La classe inversée a l'air fort prometteuse, mais j'ai bien peur que son explosion de popularité ne s'arrête quelques années. Il va sans dire que nous vivons une période difficile, et les élèves sont fortement impactés. Comme dit plus haut, de nombreux professeurs ont mis en place, suite à la crise, des cours dans une forme proche de la classe inversée. Ces cours, même lorsqu'ils sont réalisés avec tout l'engagement et le professionnalisme qu'on peut espérer, n'ont pas été préparés aussi minutieusement qu'on l'aurait voulu. Les professeurs ont dû produire beaucoup de nouvelles séquences de cours à distance, et n'ont pas toujours eu le temps de se renseigner sur les meilleures manières de le faire, ou même de se familiariser avec la technologie nécessaire. Par conséquent, les élèves ont eu beaucoup de cours difficiles et qui ressemblent à s'y méprendre avec la classe inversée. Je me pose alors la question de l'impact de la crise du Covid-19 sur la classe inversée. Est-ce qu'un cours dont on a prouvé l'efficacité avant la crise sera toujours efficace l'année prochaine ? L'année d'après ?

¹www.trello.com

Personnellement, mon ressenti me dit qu'il vaut mieux éviter de venir proposer aux élèves, en sortie de crise, une nouvelle méthode d'enseignement ressemblant fort aux cours à distance. Je profiterai donc de la période pour préparer les classes inversées que je mettrai en place dans le futur.

Au final, la classe inversée est un outil que j'inclurai désormais dans ma boîte à outils de professeur, aux côtés de bien d'autres car, on le sait, le maître mot est "*diversifier*".

Appendix A

Cours traditionnel

Note : le cours traditionnel a été écrit pour que les pages à fond blanc (feuilles élèves) soient lues en vis à vis des pages à fond gris (commentaires didactiques).

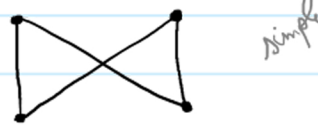
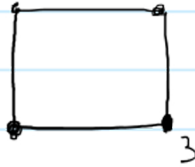
Théorie des graphes

Section 1: graphes

Définition Un **graphe** est un ensemble de points, appelés **sommets**, et de paires de points, appelés **arêtes**. On note S l'ensemble des sommets et A l'ensemble des arêtes.

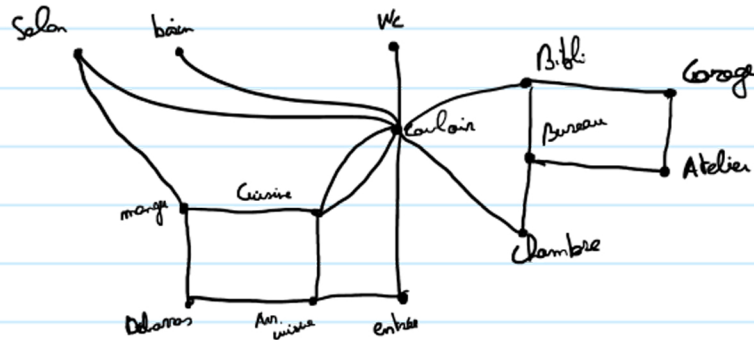
Exemples: 1)

simple



3) On représente la maison de l'enquête de Sherlock Holmes en prenant un point de la pièce comme sommet et on relie les sommets représentant des pièces séparées par une porte.

pas simple



Définition: Un graphe est **simple** s'il y a au plus une arête qui relie 2 sommets et si aucune arête ne relie un point à lui-même.

Contre-exemples 1)



2)



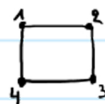
Définition: Soient deux graphes G_1 et G_2 dont l'ensemble des sommets est resp. S_1 et S_2 .

Une fonction $f: S_1 \rightarrow S_2$ est un **isomorphisme de graphes** si:

- 1) Si deux sommets $s, t \in S_1$ sont reliés, alors leurs images $f(s), f(t)$ le sont aussi.
- 2) Si deux sommets $s, t \in S_1$ ne sont pas reliés, alors leurs images $f(s), f(t)$ ne le sont pas non plus.
- 3) Chaque sommet de S_1 est appliqué sur un sommet différent de S_2 et $\#S_1 = \#S_2$.

Dans ce cas, les graphes G_1 et G_2 sont dits **isomorphes**.

Exemple: G_1 :



$f: \{1, 2, 3, 4\} \rightarrow \{A, B, C, D\}$ est un isomorphisme.

- $1 \mapsto A$
- $2 \mapsto B$
- $3 \mapsto C$
- $4 \mapsto D$

1 et 2 sont reliés $\Rightarrow f(1)=A$ et $f(2)=B$ sont reliés

1 et 3 ne sont pas reliés $\Rightarrow f(1)=A$ et $f(3)=C$ ne sont pas reliés.

etc.

On commence le cours en présentant le théorème des 4 couleurs (sans dire le nom et sans graphe)

Peu utile en pratique mais intéressant.

Comment prouver ce genre de résultats?

On va s'en servir comme objectif pour découvrir quelques notions de théorie des graphes.

ça sera l'occasion de s'entraîner sur des raisonnements dans un contexte math sans fct, nombres, vecteurs, ...

pos de notes

Chaque élève sur son plan de la maison, on fait le tour de magie (Activité 1).

Les élèves réfléchissent et proposent le "truc" du tour de magie (si ça rate, on introduit le 2-coloriage puis graphe)

si non, on transfère la maison en graphe puis voc. de base, puis 2-coloriage, puis on explique le "truc" puis on continue.

On suppose ici le cas minimal où aucune pièce n'est amarrée par les élèves

On remarque que le couloir et la cuisine sont reliés deux fois. C'est possible dans un graphe mais nous, on va se limiter à des graphes simples, c'est-à-dire soit on est relié soit on ne l'est pas. Et on ne se relie pas soi-même.

On mentionne l'existence de graphes orientés : par exemple les routes (un GPS ne fonctionne que avec un graphe)

On reprend les exemples du début pour voir s'ils sont simples ou non, orientés, à l'oral.

← On s'a fait de "connect" deux sommets sont reliés.

ou ou c'est possible

→ Est-ce que les deux premiers exemples de graphes ($\square$ et DS) sont vraiment différents?

↳ C'est toujours 1 relié à 2 relié à 3 relié à 4 relié à 1 (Donc on a juste "renomé" 1 en A, 2 en B, 3 en C, 4 en D)

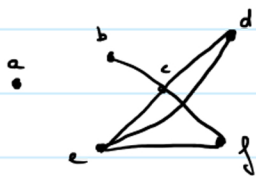
→ isomorphisme (iso = nég, morph = change) → on a toujours pour se reconnaître

On aura tendance à dire " G_1 et G_2 sont le même graphe" de manière abusive.

Exercice : $\square \neq \nabla$ (impossible, degré ou longueur degré)

Définition : Le **degré** d'un sommet est le nombre de sommets auxquels il est relié.

Exemple



$$\begin{aligned} \deg(a) &= 0 & \deg(b) &= 1 & \deg(c) &= 4 & \deg(d) &= 2 \\ \deg(e) &= 2 & \deg(f) &= 2 \end{aligned}$$

Proposition Dans un graphe simple à a arêtes, on a

$$\sum_{s \in S} \deg(s) = 2a$$

Preuve : Le degré d'un sommet, c'est aussi le nombre d'arêtes qui l'ont pour extrémité.

En comptant tous les degrés, on compte 2 fois chaque arête, puisqu'elle a 2 extrémités. $\square$

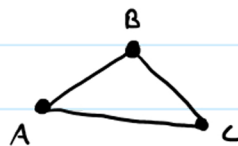
Section 2: graphes bipartis

Définition Un graphe est **biparti** si je peux colorier ses sommets avec 2 couleurs de sorte que 2 sommets reliés soient toujours de couleurs différentes. On dit aussi que le graphe admet un **2-colorage de sommets**.

Exemple :



Contre-exemple :



Quelles que soient les couleurs de A et de B, différentes, laquelle attribuer à C? Le graphe n'est pas biparti.

Définition Dans un graphe, un **chemin** est une succession de sommets $s_1, s_2, \dots, s_n$ tel que s_i, s_{i+1} sont reliés par une arête. La **longueur** d'un chemin est le nombre d'arêtes empruntées, c'est-à-dire le nombre de sommets - 1.

Un **cycle** est un chemin commençant et terminant au même sommet.

Définition Un graphe est **connexe** si toute paire de points peut être reliée par un chemin. Un graphe est un **arbre** s'il est connexe et sans cycle.

Exemple



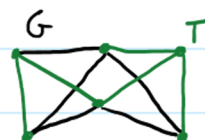
Contre-exemple



Définition Soit G un graphe. T est un **arbre sous-tendant** de G si :

1) T est un arbre

2) Les sommets de T sont les sommets de G et les arêtes de T sont des arêtes de G



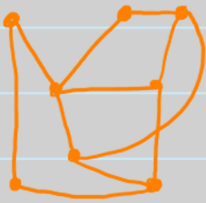
On remarque que le couloir est central dans la maison. Pourquoi? Parce qu'il a plus de ports.
Sur le graphe, ça se traduit en un sommet qui est relié à plus d'autres sommets.

Demandez si, dans un graphe simple, il y a un lien entre les degrés et le nombre d'arêtes ^{à trouver}.

→ dégagez l'argument de preuve. Note: degré: rien à voir avec les angles!

Q: et ça passe simple?

On explique le "truc" du tour de magie en colorant les salles en 2 couleurs.
→ 2-colorage de sommets.



bricole? On va vérifier si il l'est ou pas!

Ce qui est clair, c'est que si on a un cycle de sommets
 $A, B, C, \dots, A$ de longueur impaire, c'est mot.

→ def cycle et sommet.

→ def arbre → $\exists$ arbre sous-tendant.

Q: Est-ce unique?

Q: Est-ce que tout graphe admet un arbre sous-tendant?

→ Exercice

Proposition Si un graphe G est connexe, alors il admet un graphe sous-tendant.

Preuve: 1) Soit le graphe est déjà un arbre $\rightarrow$ fini.

2) Soit il contient un cycle. On peut retirer n'importe quelle arête de ce cycle et obtenir un nouveau graphe.

De plus, tous les sommets du graphe sont toujours dans ce nouveau graphe connexe.

On recommence 1) et 2). Le processus s'arrête puisqu'on a une arête de moins à chaque étape et que le nombre d'arêtes est un nombre naturel. $\square$

Théorème (caractérisation des graphes bipartis)

Soit G un graphe. G est biparti $\Leftrightarrow$ tous les cycles dans G sont de longueur paire.

Preuve: $\Rightarrow$ Par l'absurde, supposons qu'on ait un cycle $s_0, s_1, \dots, s_m, s_0$ de longueur impaire. Puisque le cycle est de longueur paire et que les couleurs doivent alterner, s_m est de la même couleur que s_0 , or ils sont reliés. Impossible.

$\Leftarrow$ Par la proposition précédente, il existe un arbre sous-tendant, T .

Choisissons un sommet, s , et attribuons lui la couleur 1. On colore les sommets à distance paire de s dans T avec la couleur 1. On attribue aux autres la couleur 2. Puisque T est sous-tendant, tous les sommets de G sont colorés. Il reste à montrer qu'il est impossible que 2 sommets de G de même couleur soient reliés dans G .

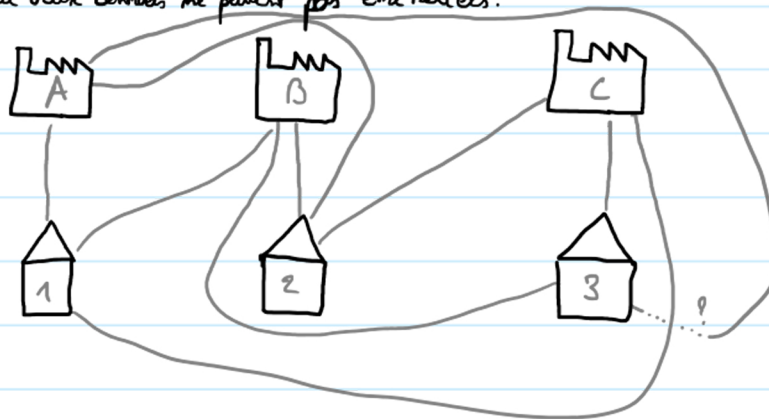
Par l'absurde, supposons qu'ils le soient. Il existe une arête a qui les relie (dans T puisque leur distance à s est de même parité).

Dans T , il existe un unique chemin les reliant. Ce chemin est de longueur paire puisqu'ils sont de la même couleur.

$\cup \{a\}$ est donc un cycle de longueur impaire, ce qui est absurde. $\square$

Section 3: graphes planaires et caractéristique d'Euler

Enigme des 3 maisons: il faut relier les 3 maisons aux 3 centrales sans que les conduites ne se croisent. Deux maisons ou deux centrales ne peuvent pas être reliées.



Rappel de "biparti $\Rightarrow$ cycles pairs"

Demande l'avis sur $\Leftarrow$ + essayer de justifier
($\approx$ exercice mais plus guidé)

Exos série 1

Activité 2: On donne l'énigme des 3 maisons et on demande de trouver comment raccorder les maisons aux centrales. Soit la classe arrive à penser que c'est impossible ($\rightarrow$ et-ce qu'on n'est pas assez bon ou vraiment impossible?)
: Comment le prouver?

En fct du niveau de la classe,
demander des arguments de preuve.

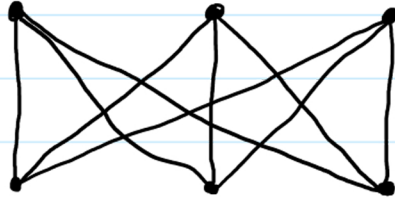
Soit la classe est mitigée ($\rightarrow$ on va étudier la question avec de nouveaux outils)
Soit la classe est convaincue que c'est possible ($\rightarrow$ laisser chercher)
En "il y a trop d'articles" et attendre.

Définition Un graphe est **planaire** s'il existe un graphe isomorphe dans lequel les arêtes ne s'intersectent qu'à leurs extrémités.

Exemple  est planaire car  est isomorphe à .

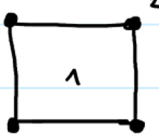
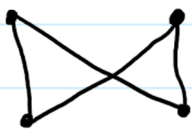
Définition Un graphe biparti simple est **complet** si rajouter une arête le rend non simple ou non biparti. Il est noté $K_{a,b}$ pour a sommets de couleur 1 et b sommets de couleur 2.

Exemple $K_{3,3}$



L'énigme peut être formulée : $K_{3,3}$ est-il planaire ?

Définition Soit G un graphe planaire. Une **face** de G est une portion du plan délimitée par les arêtes de G dans une représentation de G dans laquelle les arêtes ne s'intersectent qu'en leurs extrémités.

Exemple  a 4 sommets, 4 arêtes, 2 faces, donc  aussi.

$$4 - 4 + 2 = 2$$

Définition Soit G un graphe planaire. La **caractéristique d'Euler** de G , notée $\chi(G)$, est $\chi(G) = s - a + f$

où s est le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et f le nombre de faces.

Théorème Soit G un graphe planaire. Alors $\chi(G) = 2$.

Exemple :

Revenons à l'énigme. Prouvons que $K_{3,3}$ n'est pas planaire.

On a $s = 6$, $a = 9$.

Une face ne peut pas être bordée par 1 arête  car une maison ne peut pas être reliée à une maison par une arête.

Une face ne peut pas être bordée par 2 arêtes dans le problème 

Une face ne peut pas être bordée par 3 arêtes  car le graphe est biparti, donc pas de cycle impair.

On introduit la notion de planaire sur base de la question ainsi:

"G est planaire s'il est représenté dans le plan sans que 2 arêtes ne s'intersectent"

P:  planaire? (Oui) P:  planaire? Oui car même que ? Non car intersection?
  $\rightarrow$  planaire

← Explication orale suffisante

Par suite maintenant mais on aura besoin de "complet" plus tard.

→ P: on va avoir besoin d'un résultat extrêmement surprenant et connu.

Activité: Chaque élève trace un graphe planaire à max 10 sommets

On fait compter le nombre de sommets, arêtes,
on se met d'accord sur ce qu'on appelle face

et on compte $f + s - a$. Toute la classe obtient 2.

On annonce le résultat, qu'on ne prouve pas.

← L'élève dessine le graphe qu'il a fait ici:

On revient à l'énigme. Que sait-on? $s = 6$
 $a = 9$
 $f = ?$

→ mais il y a un lien entre le nombre d'arêtes et de faces.

Chaque face est bordée par au moins 4 arêtes et chaque arête borde exactement 2 faces.

Chaque face "comprend" 4 demi-arêtes, donc le nombre d'arêtes doit être au moins $\frac{4}{2}$ fois le nombre de faces.

$$\frac{4}{2} f \leq a$$

$$\Leftrightarrow f \leq \frac{1}{2} a = \frac{9}{2}$$

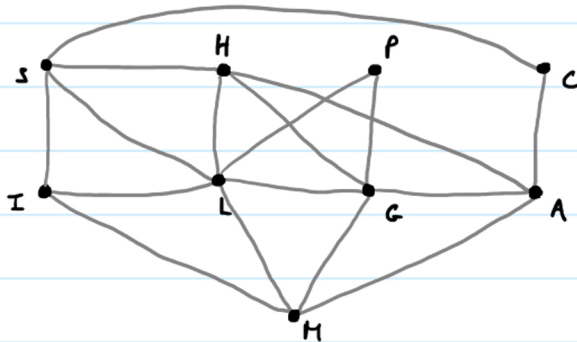
Si $k_{3,3}$ est planaire, alors

$$2 = \chi(k_{3,3}) = s - a + f \leq 6 - 9 + \frac{9}{2} = 1,5, \text{ impossible} \quad \square$$

Séance 4: k-coloriage et nombre chromatique

Activité 3: organisation des examens.

Tracons un graphe dont les sommets sont les profs et on les relie s'ils ne peuvent pas avoir leur examen en même temps.



Si on colore les sommets de sorte que des sommets voisins soient de couleur différente, la solution est le nombre minimal de couleurs et chaque couleur montre quels profs doivent avoir leur examen en même temps.

1) Il est impossible d'avoir besoin de moins de 3 couleurs car H, L, G sont reliés 2 à 2 (par exemple)

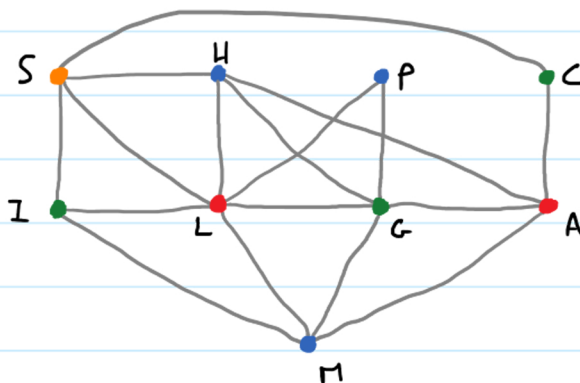
2) Il est impossible d'avoir besoin de 3 couleurs. En effet, H, L, G doivent être tous de couleur différente (mettons H en b (bleu), L en r (rouge) et G en v (vert)). Alors

M est voisin de L et G, donc bleu

I est voisin de L et M, donc vert

S est voisin de H (bleu), L (rouge) et I (vert), donc on a besoin d'une 4^e couleur.

3) Il est possible de colorier le graphe de 4 couleurs.



Activité? Les élèves reçoivent une feuille à part avec les incompatibilités entre les profs.

Recherche libre : combien de demi-journées min ?

↳ Les Es vont souvent penser à faire un graphe et à relier quand c'est compatible.
en cours sur les graphes

↳ Certains Es vont faire de la recherche à la main... → inviter à justifier (possible de faire moins?)

La solution demande de laisser Samuel tout seul, ce qui n'est pas intuitif
 → dur de justifier cette nécessité.

La correction doit : - montrer qu'il faut prendre le graphe des incompatibilités
 - montrer qu'il faut "classer" les sommets en 4 groupes (cf biparti → k-coloriage)
 - montrer que la solution (4) est atteignable et minimale (→ des nombres chromatiques)

Professeur	A	C	G	H	I	L	S	P	M
Antoine		X	X	X	V	V	V	V	X
Carine	X		V	V	V	V	X	V	V
Gérard	X	V		X	V	X	V	X	X
Hector	X	V	X		V	X	X	V	V
Isabelle	V	V	V	V		X	X	V	X
Lisa	V	V	X	X	X		X	X	X
Samuel	V	X	V	X	X	X		V	V
Philippe	V	V	X	V	V	X	V		V
Mathieu	X	V	X	V	X	X	V	V	

Définition Un graphe est k -colorable, s'il admet un coloriage de ses sommets à k couleurs de sorte que des sommets adjacents soient de couleurs différentes.

Définition Le nombre chromatique d'un graphe est le plus petit nombre k tel que le graphe est k -colorable.

Section 5: le théorème des 4 couleurs

Étant donnée une carte, on considère le graphe pour lequel les sommets sont les points appartenant à la frontière d'au moins 3 pays, et les arêtes sont les portions de frontière reliant 2 sommets. Les faces correspondent aux pays.

On s'intéressera donc à un graphe qui :

- 1) Est planaire ;
- 2) a tous ses sommets de degré au moins 3 ;
- 3) est connexe ;

qu'on appellera **graphe issu d'une carte**.

Définition : Soit un graphe G planaire. Le **dual** de G , G' , est obtenu par construction suivante :

- 1) Dans l'intérieur de chaque face de G , on prend un point : c'est un sommet de G' .
- 2) Chaque arête de G délimite 2 faces de G , c'est 2 sommets de G' . On trace l'arête dans G' qui relie ces sommets.

Proposition : On peut colorier les faces d'un graphe G avec k couleurs de sorte que 2 faces adjacentes soient de couleurs différentes si son dual admet un k -coloriage de ses sommets.

Intuitivement : On peut colorier les pays de n'importe quelle carte de sorte que deux pays adjacents soient de couleurs différentes, avec m couleurs, pour $m \geq 4$.

Théorème des m couleurs Toute carte issue d'un graphe admet un m -coloriage des faces, pour $m \geq 4$.

Preuve du théorème des 6 couleurs

Si le théorème n'est pas vrai, alors il existe des contre-exemples, c'est-à-dire des graphes issus de cartes, qui ne sont pas 6-coloriables. On les appellera des **criminels** (au théorème des 6 couleurs).

Parmi ces criminels, il y en a (au moins un) avec un nombre minimal de faces. On les appellera des **criminels minimums**.

La stratégie de la preuve est de montrer qu'il ne peut pas y en avoir.

Remarque : un criminel minimum (au théorème des m couleurs) a plus de m pays.

On demande aux élèves quel graphe ils veulent prendre pour le problème.

Il est possible qu'ils prennent comme sommets les pays et les relient s'ils sont voisins!

Dans ce cas, on continue avec ça et on s'adapte.

← pas de cas comme Monaco, le Vatican, etc, ce qui est de toute façon écarté à colorier.

← Donc on parle d'un continent.

Si on veut colorier chaque continent, on veut colorier la carte.

On considère que chaque océan/lac/mer (concrète) est un pays.

← Comment reformuler le problème?

Il est probable que le nombre chromatique ressorte, mais on parle là d'un coloriage de sommets là où, ici, on parle d'un coloriage des faces → graphe dual.

← On présente le raisonnement étape par étape

← Demander la preuve à la classe

Proposition: Dans tout criminel minimum, il existe un pays qui a au plus 5 voisins.

Preuve: On note s le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes, f le nombre de faces.
 S l'ensemble des sommets, F l'ensemble des faces.

Par l'absurde, supposons que tous les pays aient au moins 6 voisins.

1) On a $2a \stackrel{\text{vu en exercices}}{=} \sum_{v \in S} \deg(v) \stackrel{\text{condition 2) de graphe issu d'une carte}}{\geq} 3s \quad \Leftrightarrow \quad s \leq \frac{2}{3}a$

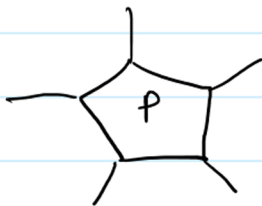
2) Si on note $\text{adj}(F)$ le nombre de pays adjacents à la face F , on a

$$2a = \sum_{F \in \mathcal{F}} \text{adj}(F) \stackrel{\text{supposition par l'absurde}}{\geq} \sum_{F \in \mathcal{F}} 6 = 6f \quad \Leftrightarrow \quad f \leq \frac{1}{3}a$$

3) Le graphe est planaire, donc $2 = s - a + f \leq a(\frac{2}{3} - 1 + \frac{1}{3}) = 0$ impossible $\square$

Preuve du théorème des 6 couleurs:

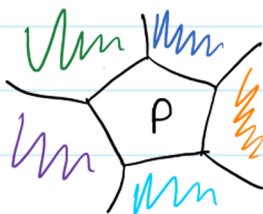
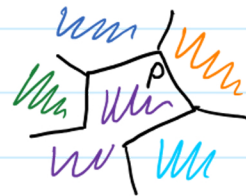
Soit un criminel minimum. Par la proposition précédente, il existe un pays P qui a au plus 5 voisins.



On considère une autre carte, identique en tout point, sauf que P est fusionné avec un de ses voisins.

Cette nouvelle carte a un pays de moins que le criminel minimum.

Elle n'est donc pas un contre-exemple et peut être coloriée!



On colore les pays du criminel minimum de la même manière, sauf P , l'autre pays avec qui P a été fusionné héritant de la couleur de la fusion.

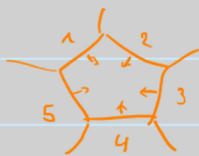
Il reste au moins une couleur pour P ! Le criminel minimum est donc coloriable! $\square$

Preuve majoritairement magistrale. On peut essayer de faire trouver le lien entre s et a et celui entre f et a , mais on insiste sur les justifications.

S'assurer que les élèves soient familiers avec les preuves par l'abonde

On justifie les égalités avant de les écrire

Explication: "On peut voir que chaque arête a 2 bords: un par face qu'elle délimite. Si on compte 2 fois les arêtes, donc une fois chaque bord, on a compté tous les voisins de chaque face



(Optimel: si les élèves ont vu le dual: c'est $2a = \sum \deg$ dans le dual)

Preuve du Théorème des 5 couleurs :

Si P n'a au plus 4 voisins, la preuve fonctionne toujours. Supposons donc qu'il en ait 5.

Il suffit de montrer que deux des pays voisins de P peuvent être de la même couleur. On gagne ainsi une couleur. Pour ça, il faut qu'ils ne soient pas eux-mêmes voisins.

(*) Supposons qu'il existe deux des voisins de P , A et B , qui ne sont pas voisins entre eux.

1) On fusionne P , A et B .

2) On peut colorier la carte obtenue

3) On colore le minimal avec les mêmes couleurs. A et B reçoivent tous les deux la couleur de la fusion

4) Il n'y a que, au plus, 4 couleurs utilisées pour les voisins de P , donc il reste une couleur pour P .

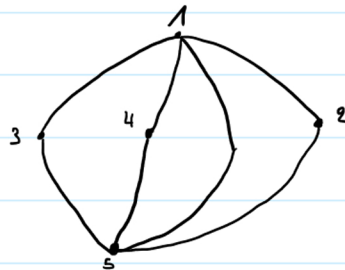
□
(modèle 30)

Justification de (*) : Regardons le dual du graphe. Si toute paire de voisins de P étaient voisins entre eux, alors les 5 sommets correspondants, dans le dual, seraient tous connectés deux à deux.

Le graphe contiendrait un graphe à 5 sommets, complet, et planaire. Or...

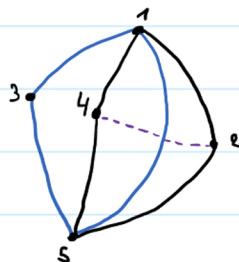
Proposition : Le graphe complet à 5 sommets, K_5 , n'est pas planaire.

Idee de la preuve : Numérotions ces sommets de 1 à 5. Parmi toutes les arêtes, on retire notamment les suivantes :



Parmi les 4 arêtes représentées qui relient 1 à 5, on admettra qu'on peut toujours en trouver 2 qui enferment un sommet dans la boucle fermée en laissant le dernier dehors.

Exemple Dans notre cas la boucle bleue laisse le sommet 4 dehors et le sommet 2 dehors.



Or, l'arête qui joint le sommet à l'intérieur et celui à l'extérieur devra forcément couper la boucle.

□

➤ Faire tout le raisonnement avant de rédiger !

On demande comment on fait pour avoir besoin d'un couleur de moins

Si ça ne suffit pas, on demande si tous les voisins de P doivent toujours

être de 5 couleurs $\neq$ (si c'était le cas, le thm serait faux!)

On détaille plus ou moins en fonction du résultat de la première preuve.

On peut ne pas faire la "preuve".

Bibliographie du cours.

Launay M. (2015). *Une enquête de Sherlock Holmes - Micmaths*.

https://www.youtube.com/watch?v=_dIhSQgq_vQ

Wikipedia. (2021). *Énigme des trois maisons*.

https://fr.wikipedia.org/wiki/%C3%89nigme_des_trois_maisons

Daubechies I., Hughes S. (2009). *Math Alive - Graph theory part 2*.

http://web.math.princeton.edu/math_alive/5/Notes2.pdf

Levin O. (2021). *Graph Theory (Exercises)*.

<https://math.libretexts.org/@go/page/15344>

Appendix B

Réalisation du cours en classe inversée

Durant ce mémoire, j'ai réalisé mon premier cours en classe inversée. En voici tous les détails, comprenant le temps, la procédure, les programmes utilisés, etc.

Avant de s'y lancer, rappelons que je suis versé dans la production de vidéo, retouche de son, upload de vidéos, utilisation de tous les programmes, etc. On peut donc espérer que ce retour soit représentatif de quelqu'un qui commence en classe inversée mais qui ait une maîtrise profonde de l'informatique, de la gestion de projets et de production de vidéos.

La première partie, commune pour la classe traditionnelle et la classe inversée a été de se renseigner sur la matière, chercher des activités intéressantes et construire le fil rouge du cours. *Estimation du temps : 3 – 4 jours.*

J'ai ensuite rédigé mon cours traditionnel. Pour ce faire, j'utilise une tablette graphique (*Wacom ONE M*¹) et un programme gratuit de prise de note sur pc (*OneNote for Windows*²). Une idée vague du temps consacré à chaque partie est suffisante, d'autant que je n'ai pas de contrainte de temps. Lorsque le cours est écrit, je pense à l'organisation heure par heure, toujours approximative. Elle servira de guide, mais on sait bien que le temps réel varie toujours *Estimation du temps : 1 – 2 jours.*

Pour la classe inversée, j'avais d'abord besoin d'avoir une idée extrêmement précise de ce qui serait fait en cours. Ici, puisque j'ai fait le cours en version traditionnelle, je n'ai pas eu à prendre ce temps. Ensuite, j'ai établi une structure détaillée des contenus des cours. Après avoir décidé quelles parties seraient inversées et lesquelles ne le seront pas, j'ai écrit de manière synthétique ce qui serait fait à chaque cours, le contenu et le découpage de chaque vidéos (voir Appendix C). *Estimation du temps : 5 heures*

Note : lors des stages que j'ai dus effectuer en cette période de covid, j'ai dû organiser des cours pour lesquels une demi classe était présente, l'autre était à distance en asynchrone, alternant de jour en jour. J'en ai profité pour mettre à profit les connaissances développées dans ce mémoire en m'inspirant des classes inversées pour les cours

¹[Lien vers le Wacom One M utilisé](#)

²[Lien pour l'installation de OneNote for Windows](#)

à distance. Bien que ce n'était pas à proprement parler une classe inversée, j'ai mieux compris certaines difficultés liées à l'inversion. Par exemple, une différence fondamentale et très contraignante est ce besoin de structure. Un cours en classe inversée est quasiment "figé". Le contenu d'un cours commence après la vidéo précédente, et on doit faire ce qui était prévu pour arriver où il faut pour le début de la vidéo suivante. Cette rigidité rend plus importante et plus complexe la préparation, et ne laisse que peu de place à l'imprévu. Je me suis rendu compte que non seulement le travail en amont est beaucoup plus important en classe inversée qu'en traditionnelle, mais le travail entre chaque cours est plus important aussi, que ça soit dans la planification, la communication avec les étudiants, l'analyse du travail des élèves ou la préparation du quizz interactif pour le cours suivant. De plus, ce travail impose un créneau horaire (il faut le faire entre un cours et le suivant), ce qui est contraignant aussi pour la vie à côté du travail.

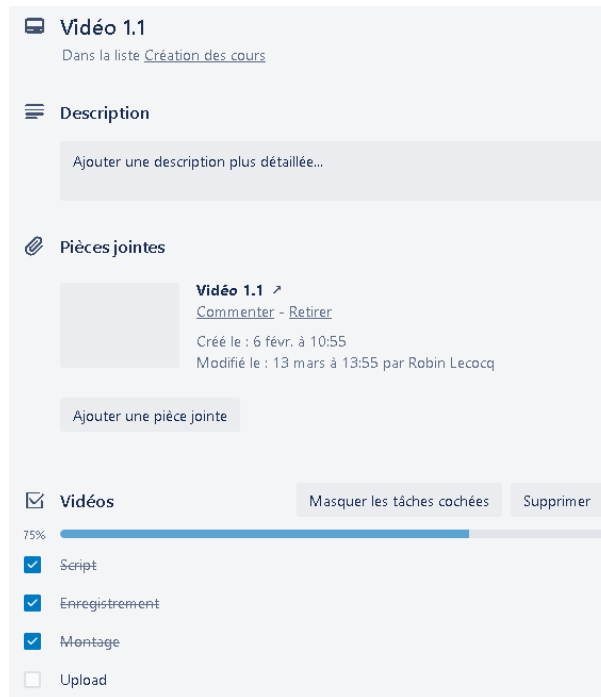
Avant de passer à la suite, précisons que la production du matériel pour les classes inversées demande une organisation plus importante que pour un cours traditionnel. J'utilise donc *Trello*³ pour noter ce qu'il reste à faire, avoir un suivi facile, lier les documents sur lesquels j'écris aux post-its et avoir une checklist pour voir facilement où j'en suis dans la production de chaque contenu.

Voici un état du tableau où on voit différentes cartes et leur avancement.

³<https://trello.com/>



Voici la carte d'une des vidéos, dans laquelle on verra, en description, le lien vers la vidéo quand elle sera upload et où on voit le script cliquable de la vidéo et la checklist d'avancement en bas.



Pour clore la partie organisation, j'utilise un disque dur externe HDD volumineux (1 To) pour le stockage des vidéos, des images génériques, son générique, bruitages, etc. J'ai également un dossier sur disque dur interne (j'aimerais un SSD mais je ne l'ai pas encore) par vidéo pour l'accès aux données directement liées à une vidéo (miniature, enregistrements, correction d'erreurs, images spécifiques, etc.)

Passons à la planification des vidéos Appendix D. Personnellement, je n'arrive pas à avoir un rendu naturel quand je fais un script précis d'une vidéo. J'opte donc pour une écriture détaillée du contenu des vidéos, mais je ne chercherai pas à enregistrer ce contenu au mot près. Dans cette partie, je prévois déjà la réalisation de la vidéo (quand ce n'est pas évident pour moi), les blagues, les transitions, l'introduction, les exemples, etc. Notons que cette partie demande plus d'idées et de créativité, et il m'arrive souvent d'attendre quelques jours pour trouver l'inspiration. Le temps indiqué est le temps de travail effectif. J'ai pris une semaine pour écrire les 8 vidéos. *Estimation du temps : 3 heures par vidéo.*

Lorsque les vidéos sont écrites, on planifie l'enregistrement. Il y aura besoin d'images (un graphe, la maison de Sherlock Holmes, les définitions écrites sur Latex). *Estimation du temps : 1jour*

On passe alors à l'enregistrement. C'est la partie chronofage. L'enregistrement proprement dit d'une vidéo d'à peu près 6 minutes prend 30 – 40 minutes. Avant d'enregistrer, il y a une préparation (aller s'apprêter, gérer l'arrière plan pour qu'il soit neutre, tester le micro et un enregistrement voir si tout est bon). On en a pour environ 45 minutes de préparation.

Ce qui prend du temps, ce n'est pas tout ça. Pour pouvoir enregistrer, il faut avoir le silence (pas d'orage, pas de travaux chez les voisins, pas de télévision active dans la maison, d'ouvrier qui travaille). Il faut que la lumière soit bonne (pas question d'enregistrer en soirée et on évite d'avoir une première vidéo tournée un jour de plein soleil et une autre tournée un jour de pluie). Il faut être en forme (pas de maladie, de bouton de fièvre sur le visage, pas être dans les jours qui suivent un rappel de vaccin, pas trop fatigué) et il faut être présentable (avec les mêmes vêtements de fois en fois sans qu'ils soient à laver, pas de mèche rebelle, pas de barbe de 3 jours), ce qui implique généralement une toilette avant. Beaucoup des raisons que j'ai citées peuvent paraître futiles. Pourtant ce sont des raisons qui m'ont forcé à reporter un enregistrement. Au final, un enregistrement en pleine journée, sans quelqu'un à la maison, en bonnes conditions, ça prend du temps. Enfin, il faut "*être dedans*". Si on n'est pas motivé pour le faire, ça se verra. Mises bout à bout, j'ai pris 1 mois et demi pour enregistrer les 8 vidéos, mais, d'expérience, c'est un temps raisonnable. *Estimation effective du temps : 40 minutes par vidéo. Estimation totale du temps : 1-2 mois.*

Matériel utilisé :

- *OBS Studio*⁴ : C'est un programme gratuit qui permet de monter plusieurs sources sur un écran en scènes et d'alterner les scènes en un clic. C'est ainsi que je peux mettre ma webcam retouchée avec un cadre autour sur une image de fond, puis changer de scène et arriver sur une portion bien choisie de mon écran. Vidéos enregistrées en 1920 x 1080, au moins 30 FPS (j'en avais 60), son stéréo 48 kHz.

- *Handbrake*⁵ : C'est un programme gratuit de compression de vidéos. Pour un contenu comme un cours ou une vidéo Youtube, on ne verra pas vraiment la différence. Il permet de passer de vidéos de plusieurs *Go* à quelques *Mo*, ce qui rend aussi l'upload beaucoup plus court. Toutes les vidéos rendues sont compressées au format .mp4, via H.264, 30 FPS.

- *Micro Samson C01U*⁶ : N'importe quel micro semi professionnel fera l'affaire (Blue Yeti, Samson ou Auna, par exemple). L'utilisation d'un micro de cette qualité est indispensable. Micro utilisé sans amplificateur, dans une pièce qui minimise la réverbération, à environ 20cm de la bouche, qui n'est pas dirigée directement vers le micro.

- *Filtre anti pop*⁷ : N'importe lequel fait l'affaire. Sans lui, les lettres comme B ou P provoquent un déplacement d'air qui frappe la membrane du micro, provoquant un bruit sourd.

⁴<https://obsproject.com/fr/download>

⁵<https://handbrake.fr/downloads.php>

⁶Lien vers le SAMSON C01U utilisé

⁷Lien vers le filtre anti pop utilisé

- *Webcam C920 1080p*⁸ : N'importe quelle webcam HD ou caméra fait l'affaire, mais une webcam a la facilité d'être directement intégrée à l'ordinateur et exploitable par OBS Studio.

- *WACOM ONE M* : Tablette graphique pour les explications en direct.

- *Microsoft Whiteboard*⁹ : Logiciel gratuit pour pouvoir écrire sur fond blanc.

Vient ensuite l'étape du montage vidéo. La seule partie contraignante est le temps de rendu où l'ordinateur est inutilisable pour toute autre activité. Si on travaille la plupart du temps sur ordinateur, comme c'est mon cas, on peut prévoir de le faire tourner la nuit. Sauf qu'il faut compter une nuit par vidéo, plus une nuit à chaque fois qu'on fait une retouche ou une correction sur une vidéo. *Estimation de temps effective : 3h par vidéo + 3h de rendu. Estimation de temps totale : 1 semaine.*

Matériel utilisé

- *Sony Vegas Pro* : Logiciel professionnel (*payant*) de montage. Les vidéos sont réalisées en 1920 x 1080, 30 FPS.

- *Audacity*¹⁰ : Logiciel gratuit de retouche de son, avec extension Spitfish-deesser¹¹ pour les effets de sifflement. Le son retouché et les corrections sont en .mp3 (stéréo). Les retouches appliquées sont *Suppression du bruit*, *Spitfish de-esser*, *Bass boost*, *Compression*, *Aigu boost*, *Normalisation*, *Amplification*.

- *Handbrake* : Même utilisation qu'après l'enregistrement.

- *Photoshop* : Logiciel professionnel (*payant*) de retouche d'images. Utilisé pour le traitement d'images pour la vidéo et (optionnel) pour les miniatures. Les images sont en PNG, 1920 x 1080, avec une résolution de 300 pixels/centimètre.

Une fois les vidéos produites, elles sont uploadées sur *Youtube*¹² en non répertoriées et dans une playlist adaptée (non répertoriée aussi), puis ajoutée au compte *Edpuzzle*¹³ pour y rajouter les interactions et le suivi avec les élèves. Un lien vers la vidéo leur est transmis. Lorsque le lien est trop long, il est raccourci via *Cuttly*¹⁴.

Au total, on arrive vers 2 – 3 mois de préparation pour une séquence d'une dizaine d'heures de cours. On peut gagner du temps en étant moins exigeant sur l'enregistrement et arriver vers un peu moins d'un mois, suivant la qualité désirée et les contraintes de temps.

⁸[Lien vers la webcam utilisée](#)

⁹[Lien pour l'installation de Microsoft Whiteboard](#)

¹⁰<https://www.audacityteam.org/download/>

¹¹[Lien vers le plugin Spitfish](#)

¹²www.youtube.com

¹³<https://edpuzzle.com/>

¹⁴<https://cutt.ly/fr>

Appendix C

Cours en classe inversée

Lien vers les vidéos.

Vidéo 1.1 - fondamentaux sur les graphes :	https://youtu.be/iSsAoG780jw
Vidéo 1.2 - isomorphisme de graphes :	https://youtu.be/HnxaBCxezDM
Vidéo 1.3 - connexité et arbres :	https://youtu.be/vfDH9pQB4JE
Vidéo 2.1 - graphes planaires :	https://youtu.be/2bPU83oDvng
Vidéo 3.1 - Nombre chromatique :	https://youtu.be/VEf_AcqYfQE
Vidéo 3.2 - Graphe issu d'une carte :	https://youtu.be/R2gSpkp1Ztc
Vidéo 3.3 - Graphe dual :	https://youtu.be/HVwRBK7AL-0
Vidéo 4.1 - K_5 n'est pas planaire :	https://youtu.be/QjBxnZ-U1Qs

Playlist - Théorème des 4 couleurs : [Lien vers la playlist](#)

Vidéos avec questions incrustées sur *Edpuzzle* : <https://edpuzzle.com/open/bakukju>

Attention, les séances avec les élèves et en particulier les séances de restructuration, quizz, etc. doivent être personnalisés suite aux résultats obtenus en ligne. Le reste est identique à la classe traditionnelle.

En classe (cours 1)

Présentation du théorème des 4 couleurs (identique au traditionnel)

Activité 1 : Sherlock Holmes

On en construit le graphe (on dit ce qu'est un graphe) (~~pas définir simple~~)

On explique que deux graphes sont "identiques" s'ils sont connectés de la même manière (carré et l'autre) (~~sans définir isomorphisme~~)

On répond au problème (on dit ce que c'est biparti)

À distance

Vidéo 1.1 : "Fondamentaux sur les graphes"

Rappel en une phrase de *Graphe*

graphe simple

degré d'un sommet

chemin / cycle

Transition "quand est-ce que deux graphes sont les mêmes ?"

Vidéo 1.2 : "Isomorphisme de Graphe"

Lien vidéo précédente et transition

intuition d'isomorphisme de graphes

Définition + exemples

Transition "Dans la vidéo suivante, on va revenir sur la notion de biparti et trouver un moyen plus simple pour savoir si un graphe est biparti ou non"

Vidéo 1.3 : "Graphes bipartis, chemins et connexité"

Lien vidéo précédente. Difficile de dire si un graphe est biparti.

Présentation du résultat (sans le dire)

connexité

arbre

arbre sous-tendant

caractérisation de biparti

En classe (cours 2)

Note : la question de la fin de la vidéo 3, ouverte, DOIT être exploitée ici. L'introduction suivante est là en cas de problème.

On donne un graphe en exemple (voir à côté de définition d'arbre sous-tendant) et on demande s'il existe un arbre sous-tendant, et si oui, de le faire. → Existe toujours ? (Si on pense non : recherche de contre-exemple pendant que les autres réfléchissent à comment en être sûr)

Ensuite, on fait la preuve

Puis on fait la preuve de la caractérisation de biparti

Activité 2 : Enigme des 3 maisons

Note : c'est important de donner le temps que les élèves réfléchissent sur l'énigme. Si on manque de temps, on laissera une preuve pour plus tard ou on en donnera les éléments principaux et on y reviendra plus tard.

On ne donne pas la réponse finale de l'énigme.

[Insérer ici 1 ou 2 séance(s) d'exercices en fonction de si on veut consacrer 8 ou 10 heures.]

Vidéo 2.1 :

On rappelle brièvement l'énigme.

Définition de graphe planaire et de faces (introduite comme reformulation du problème)

Transition : on va continuer à reformuler avec la notion de graphe biparti simple complet.

Vidéo 2.2 :

Lien avec la vidéo précédente, on a commencé à reformuler. On va en profiter pour introduire un mot de vocabulaire dont on aura besoin pour la suite.

(retour sur l'énigme) Définition de graphe biparti simple complet ($\Leftrightarrow$ toute paire de sommets de couleur différente est déjà reliée)

Note : Ces deux vidéos seront fusionnées en une si on ne dépasse pas (trop) 5-6mins après fusion.

En classe (cours 3)

On insiste que la notion de face n'a de sens que pour un graphe planaire. On demande à tout le monde de tracer un graphe planaire sur sa feuille, compter le nombre de sommets, arêtes, faces.

En demandant quels élèves n'obtiennent pas $s - a + f = 2$, on trouve une grande partie de ceux qui ont mal compris ces notions.

Définition et théorème de la caractéristique d'Euler.

On peut se servir de cet outil pour montrer que $K_{3,3}$ est pas planaire $\rightarrow$ Preuve.

Activité 3 : horaire d'examens. Attention à gérer le temps pour en arriver à

- 1) Remarquer que prendre les compatibilités comme arêtes n'est pas la bonne idée
- 2) Remarquer que prendre les incompatibilités comme arêtes est plus intéressant
- 3) Reformuler la solution : après un k -coloriage, les profs de même couleur peuvent avoir leur examen en même temps ; le nombre minimal de couleurs est la solution (def nombre chromatique)

Vidéo 3.1

Synthèse de la fin de l'activité (les 3 points)

Preuve que la solution est 4 (pas moins de 3, pas 3, et montrer que 4 fonctionne même si ça aura sûrement été fait en classe : la vidéo est immuable)

Transition : on a tout ce qu'il faut pour s'attaquer au théorème des n couleurs

[Insérer ici 1 séance d'exercices]

Vidéo 3.2

Lien avec la précédente : on fait le lien entre graphe planaire, nombre chromatique et théorème des n couleurs

Introduction du graphe issu d'une carte et on montre que les conditions demandées ne posent pas de problème.

Transition : Nombre chromatique = coloriage des sommets, ici : coloriage des faces.

Vidéo 3.3

Lien avec la précédente, on a un graphe mnt pour le théorème.

Mais si quelqu'un avait dit "on s'intéresse aux pays, donc je prends les pays en sommets et je les relie s'ils sont adjacents", on aurait eu quelque chose de différent mais fort semblable
→ Graphe dual.

En classe (cours 4)

Pendant le check Kahoot, on revient sur la notion de faces.

Objectif du cours : prouver le théorème des 6 couleurs.

On présente la stratégie de preuve (criminels et criminels minimums)

On présente la preuve qu'il existe un pays avec max 5 voisins

On présente la preuve du théorème des 6 couleurs.

Pour passer à 5, il suffit de montrer que parmi les 5 voisins, il y en a deux qui ne sont pas eux-mêmes voisins, du coup on peut les colorier de la même couleur, et ça passe à 5 couleurs.

Vidéo 4.1

Notre but c'est de montrer que 2 pays parmi les voisins ne sont pas eux-mêmes voisins.

ça repose sur le résultat K5 pas planaire (intuition de la preuve)

En classe (cours 5)

Lien avec le but du cours précédent et de la vidéo : on a besoin d'avoir assez de voisins, sinon on n'est pas sûr d'avoir assez de pays pour utiliser le résultat de K5

Preuve que tous les pays ont au moins 5 voisins.

Preuve qu'il existe 2 pays voisins tq non voisins entre eux.

On conclut avec le même raisonnement que pour 6 couleurs.

[Insérer ici 1 ou 2 séance(s) d'exercices en fonction de si on veut consacrer 8 ou 10 heures.
]

Appendix D

Scripts des vidéos

Vidéo 1.1 : Fondamentaux sur les graphes

Rappel en une phrase de *Graphe*

graphe simple

degré d'un sommet

chemin / cycle

Transition "quand est-ce que deux graphes sont les mêmes ?"

Bonjour à tous !

Au dernier cours, on a dit ce qu'était un graphe, tu t'en souviens ?

{Question : Exemples de graphes (un avec une arête à 3 extrémités, un avec sommets et arêtes, un avec un morceau coloré)}

Un graphe, c'était simplement des sommets, et des arêtes qui relient deux sommets.

[À partir de la maison de l'énigme de Sherlock Holmes, on avait par exemple décidé de prendre un sommet par pièce et de les relier s'il y avait une porte, et on avait obtenu ce graphe.

On peut remarquer que la cuisine et le couloir sont reliés deux fois. Dans d'autres cas, comme pour le théorème des 4 couleurs, on est juste intéressés à dire si les pays sont voisins ou non, donc on reliera jamais deux fois les mêmes sommets. On dit qu'un graphe est simple si, pour chaque paire de sommets, ils sont soit reliés soit pas, mais pas par plusieurs arêtes.]

Un graphe est simple s'il y a au plus une arête qui relie deux sommets et si aucune arête ne relie un point à lui-même.

[Donc ça (boucle), ce n'est pas un graphe simple.



{Question : graphe non simple, dessin d'un verre }

Dans la suite, on ne parlera que de graphes simples.

Une autre notion élémentaire qu'on voit bien sur le graphe de la maison, c'est l'importance du couloir. Il est connecté à plein de pièces, donc il est important. Le nombre d'arêtes qui ont ce sommet pour extrémité, ça s'appelle le degré du sommet.

{Question : Dans un graphe simple, le nombre d'arêtes qui ont ce sommet pour extrémité est le nombre de voisins ? V/F}

C'est bien la même chose, puisque les arêtes doivent avoir une autre extrémité, puisqu'un sommet n'est pas relié à lui-même, et ces extrémités sont bien différentes puisqu'il ne peut pas y avoir deux arêtes différentes entre deux mêmes sommets. Donc
Le degré d'un sommet est le nombre de sommets auxquels il est relié.

{Question : degré du couloir}

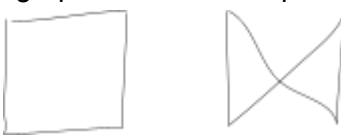
Une dernière notion pour cette vidéo, c'est celle de chemins. C'est notamment vital dans la recherche de chemin le plus court. Un GPS n'utilise que ça. Eh ben... un chemin, c'est bien ce que vous pensez... Vous partez d'un sommet de départ, et vous vous baladez en suivant les arêtes.

Dans un graphe, un chemin est une succession de sommets $s_0, s_1, \dots, s_n$ tel que deux sommets successifs soient reliés par une arête. La longueur du chemin est le nombre d'arêtes empruntées, c'est-à-dire le nombre de sommets moins 1. Un cycle est un chemin commençant et terminant au même sommet.



{Question : Donnez l'affirmation vraie la plus précise : Longueur 4, longueur 6, chemin, cycle}
]

Voilà, on a vu les notions fondamentales sur les graphes. On va maintenant se demander quand deux graphes sont identiques. Par exemple, [ces deux graphes-ci sont-ils vraiment

différents ? 

À de suite !

Vidéo 1.2 : Isomorphisme de Graphe

Lien vidéo précédente et transition
intuition d'isomorphisme de graphes

Définition + exemples

Transition "Dans la vidéo suivante, on va revenir sur la notion de biparti et trouver un moyen plus simple pour savoir si un graphe est biparti ou non"

Bonjour à tous ! Dans la vidéo précédente, on a vu les notions fondamentales d'un graphe. On a notamment dit qu'un graphe simple, c'était juste des sommets et quand on en prend 2 différents, on peut soit les relier par une arête, soit pas.

[(Géogebra) Mais alors, si j'ai ce graphe là, puis que je fais ça (passer de carré à l'autre). Il y a une intersection qui apparaît ici au milieu, mais c'est pas un sommet pour autant. Est-ce que vous avez vraiment envie de dire que ce graphe est différent ?]

En théorie des graphes, on s'intéresse seulement à la manière dont les sommets sont connectés entre eux. pas à la longueur des arêtes ni la manière dont on les a dessinées. On peut y prêter un peu plus attention en fonction du contexte. Par exemple, pour le GPS, on va attribuer une notion de longueur aux arêtes qui représente la longueur de la route. Dans la suite, on va aussi prêter attention à la représentation des arêtes, voir si on peut les tracer sans qu'elle se croisent si c'est possible. Mais de base, on considère que deux graphes sont identiques s'ils sont connectés de la même manière.

[Par exemple, ces graphes-ci sont identiques parce que si on renomme les sommets 1, 2, 3,4 en A, B, C, D, eh bien on a toujours que A et B sont connectés, B et C sont connectés, C et D sont connectés et D et A aussi, et on n'a pas rajouté d'arêtes. A et C n'étaient pas connectés avant, et ils ne le sont toujours pas après.

Cette fonction a transformé le graphe de gauche, mais on ne l'a pas changé. On appelle ça un isomorphisme. Iso ça veut dire "même", "identique" et "morph" c'est "transformer". Donc on a changé pour finalement revenir au même.

Soient deux graphes G_1 et G_2 dont les ensembles de sommets sont resp. S_1 et S_2 , une fonction $f : S_1 \rightarrow S_2$ est un isomorphisme de graphes si on a les 3 conditions suivantes :

- 1) (f a renommé les sommets de S_1 en S_2 , c'est-à-dire) Chaque somme de S_1 est envoyé sur un sommet différent de S_2 et $\#S_1 = \#S_2$.
- 2) si deux sommets s,t dans S_1 sont reliés, alors leurs images $f(s), f(t)$ le sont aussi
- 3) si deux sommets s,t dans S_1 ne sont pas reliés, alors leurs images $f(s), f(t)$ ne le sont pas non plus.

Exemple : carré et l'autre

{Question :  $\neq$  }

S'il existe un isomorphisme entre deux graphes, on dira que les graphes sont isomorphes. On fera même parfois l'abus de dire que ce sont les mêmes graphes.

Voilà pour l'isomorphisme de graphes ! Dans la dernière vidéo d'aujourd'hui, on va reparler des graphes bipartis et on va trouver une manière plus simple pour décider si un graphe



comme ça
sommets.

est biparti ou non. Ou même avec beauuuucoup plus de

À de suite !

Vidéo 1.3 : Graphes bipartis, chemins et connexité

Lien vidéo précédente. Difficile de dire si un graphe est biparti.

Présentation du résultat (sans le dire)

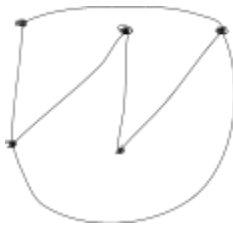
connexité

arbre

arbre sous-tendant

caractérisation de biparti

Bonjour à tous ! Dernière vidéo pour aujourd'hui ! On a maintenant couvert les fondamentaux des graphes et on va doucement les manipuler aujourd'hui. Notre chemin vers le théorème des 4 couleurs commence par étudier les coloriations à 2 couleurs, qu'on a appelés "bipartis".

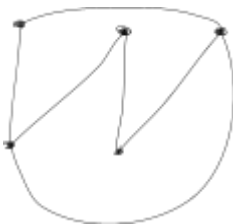


{Question : biparti ?}

Dans des petits cas, on peut encore savoir facilement si c'est biparti ou non. Un coloriage



intuitif peut fonctionner. Mais parfois ça devient plus difficile, comme ça , alors que c'est un graphe tout rikiki avec 8 pauvres sommets. Par contre, sur ce graphe-là



, c'était assez facile de voir que si on se balade le long d'un cycle, on n'a pas le choix de la couleur (le faire). Donc forcément si le cycle est de longueur impair, c'est mort, on peut pas être biparti.

On a donc biparti $\Rightarrow$ cycles de longueur paire

Eh bien... dans l'autre sens, c'est vrai aussi. Si TOUS les cycles sont de longueur paire, on est d'office biparti, mais c'est un peu moins évident. Pour s'en convaincre, on va avoir besoin d'arbres. (Non pas ceux là..) Commençons par la notion de connexité.



c'est un ou deux graphes ? On a envie de dire deux pcq il y a deux morceaux. Mais si on voit ça comme un graphe à 7 sommets, on peut très bien rajouter une arête qui va d'un sommet du carré à un sommet du triangle. Eh bien, un morceau, c'est une partie du graphe, on dit "sous-graphe" connexe.

Un graphe est connexe si toute paire de point peut être reliée par un chemin

Ceci nous permet de définir ce qu'est un arbre.

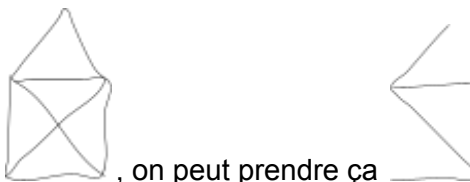
Un graphe est un arbre s'il est connexe et sans cycle

Exemple



{Question : est un arbre ?}

La notion dont on a besoin pour prouver qu'un graphe est biparti ssi tous les cycles sont pairs, c'est la notion d'arbre sous-tendant. C'est un arbre composé par tous les sommets du graphe et un sous-ensemble de ses arêtes.



Par exemple, si on regarde ce graphe , on peut prendre ça

Soit G un graphe. T est un arbre sous-tendant de G si

- 1) T est un arbre
- 2) Les sommets de T sont (tous) les sommets de G et les arêtes de T sont des arêtes de G .

{Question : selon vous, est-ce qu'il existe toujours un arbre sous-tendant ?}

On discute de cette question au prochain cours, lorsque nos chemins se croiseront ! D'ici là, restez connexe, surtout, portez-vous bien, et à bientôt !

Vidéo 2.1 : Graphes planaires

On rappelle brièvement l'énigme.

Définition de graphe planaire et de faces (introduite comme reformulation du problème)

Transition : on va continuer à reformuler avec la notion de graphe biparti simple complet.

Bonjour à tous ! Au dernier cours, on s'était penché sur l'énigme des 3 maisons. On avait 3 maisons et 3 usines, et on voulait relier chacune des maisons directement à une usine de manière à ce que chaque maison soit reliée à chaque usine, et que deux raccordements ne se croisent pas. On avait aussi exclu la possibilité de relier les maisons entre elles et les usines entre elles.

On peut essayer de le tracer et on risque d'échouer. Est-ce que c'est parce que c'est pas possible ? Ou est-ce qu'on n'a juste pas été assez bon pour le faire correctement ? Si on prend le problème à 2 maisons et à 2 usines, et qu'on les relie par des lignes droites, ça ne marche pas. C'est pourtant possible en faisant par exemple ceci.

Qu'en est-il pour les 3 maisons ?

La question de pouvoir dessiner, ou non, un graphe dans le plan sans que les arêtes ne se croisent n'est pas une question facile du tout. On dit que le graphe est planaire s'il est isomorphe à un graphe dans lequel les arêtes ne s'intersectent qu'à leurs extrémités.

{Question :  planaire ?}

[Ce graphe est bien planaire puisque on peut le représenter ainsi  .]

L'énigme des 3 maisons revient à demander si le graphe est planaire ou pas. Et il ne l'est pas. La seule manière d'être sûr qu'on ne puisse pas le dessiner, c'est de prouver que c'est impossible. La stratégie est d'étudier les graphes planaires un peu, découvrir LA propriété fondamentale, et de s'en servir pour prouver qu'il ne peut pas la respecter.

Profitons-en pour introduire un mot de vocabulaire dont on aura besoin plus tard. C'est un graphe biparti et il est simple.

{Question ouverte : Justifiez pourquoi il est biparti et pourquoi il est simple}

De plus, on a déjà le nombre maximal d'arêtes. Deux sommets de couleurs différentes sont déjà toujours reliés. Autrement dit, le graphe simple biparti est complet si rajouter une arête

le rend non simple ou non biparti. On va l'appeler K , pour "Komplet" et 3,3 pour 3 sommets de la première couleur et 3 sommets de la deuxième couleur".

Depuis le début, on parle de sommets et d'arêtes. La notion de face avait assez peu de



sens. Par exemple, dans , qui sont le même graphe, on voit 2 faces à gauche, une face à droite ? C'est bizarre. Comme on peut "bouger les arêtes" dans un graphe, compter le nombre de faces ainsi n'a pas vraiment de sens. En revanche, quand le graphe est planaire, le nombre de faces ne changera pas ! On va donc dire que Dans un graphe G planaire, une face de G est une portion du plan délimitée par les arêtes de G dans une représentation de G dans laquelle les arêtes ne s'intersectent qu'en leurs extrémités.

Dans notre graphe, on a donc 1 face ici, et on compte la face extérieure, ça fait 2 faces.



Pour le savoir, il fallait regarder une représentation planaire du graphe, comme par exemple



et là on compte 3 faces.

Voilà pour les graphes planaires ! On se retrouve en classe pour découvrir la propriété fondamentale des graphes planaires et grâce à elle, on pourra résoudre l'énigme ! Voilà pour le plan. Va falloir y faire face ! À bientôt !

Vidéo 3.1 : Nombre chromatique

Synthèse de la fin de l'activité (les 3 points)

Preuve que la solution est 4 (pas moins de 3, pas 3, et montrer que 4 fonctionne même si ça aura sûrement été fait en classe : la vidéo est immuable)

Transition : on a tout ce qu'il faut pour s'attaquer au théorème des n couleurs

Bonjour à tous ! Dans cette vidéo, on va détailler la solution au problème des horaires. On était donc parti d'un tableau reprenant les possibilités et incompatibilités, pour deux professeurs, d'avoir leur examen au même moment, et on cherchait le nombre minimal de plages d'examen nécessaire.

La première observation importante est que le graphe des compatibilités, même s'il était intuitif, ne révélait pas d'information intéressante. Savoir que deux professeurs peuvent avoir leur examen ensemble ne nous dit pas que c'est une bonne idée de les mettre ensemble dans la solution optimale. En revanche, ce qui est gravé dans le marbre dans toutes les solutions, ce sont les incompatibilités.

Dans le graphe des incompatibilités, on peut déjà dire que si deux professeurs ne sont pas reliés, ils pourraient avoir leur examen en même temps. Des professeurs reliés appartiennent nécessairement à une plage horaire d'examen différente.

Ceci peut vous faire penser aux graphes bipartis. On va attribuer une plage horaire, ou une couleur, à chaque professeur, de sorte que jamais deux professeurs de la même plage horaire, ou de la même couleur, ne soient reliés.

{Question : sachant qu'on recherche le nombre minimal de plages horaire, la solution au problème est :

- Le plus grand sous-graphe dont tous les sommets sont connectés les uns aux autres, donc de couleur différente.
- Le nombre minimal de couleur nécessaire pour colorier les sommets du graphe sans que deux sommets voisins ne soient de la même couleur
- Le plus grand degré parmi tous les degrés des sommets }

{Question : Comment savoir quels professeurs doivent passer leur examen en même temps ?

- Ce sont tous les professeurs qui sont coloriés de la même couleur dans un coloriage avec un nombre minimal de couleur.
- C'est le plus grand ensemble de professeurs tel qu'aucune paire d'entre eux ne soient reliés. Et on recommence avec les professeurs restants pour les autres plages horaires.
- Ce sont tous les professeurs tels que tout paire d'entre eux sont reliés. Et on recommence pour les autres plages horaire. }

La solution de notre problème est donc le nombre minimal de couleurs avec lequel on peut colorier le graphe de sorte qu'aucune paire de professeurs de même couleur ne soient reliés. C'est ce qu'on appelle le nombre chromatique.

Un k-coloriage des sommets d'un graphe est une attribution d'une couleurs parmi k disponibles à chaque sommet telle que deux sommets de même couleurs ne sont pas reliés. Le nombre chromatique est le plus petit k tel que le graphe admette un k-coloriage des sommets.

{Question ouverte : quel est le nombre chromatique d'un graphe étoilé à 10 sommets ?



C'est-à-dire un sommet central relié aux 9 sommets extérieurs ? Est-ce que le nombre chromatique et le plus haut degré d'un sommet du graphe sont liés ?}

En cherchant un peu, on peut trouver un 4-coloriages, comme celui-ci. Mais n'est-ce réellement pas faisable avec moins de 4 ?

Puisqu'on a un triangle ici, c'est clair qu'avec 1 ou 2 couleurs, ce n'est pas possible. Ils sont tous reliés 2 à 2, donc le nombre chromatique doit être au moins 3.

Il reste à prouver que ce n'est pas possible avec 3 couleurs.

[explication]

Voilà pour une vidéo haut en couleurs ! Dans la vidéo suivante, on va faire le lien entre graphe planaire, nombre chromatique et le théorème des 4 couleurs, et on va doucement s'attaquer au théorème. À de suite !

Vidéo 3.2 : Graphes issus d'une carte

Lien avec la précédente : on fait le lien entre graphe planaire, nombre chromatique et théorème des n couleurs

Introduction du graphe issu d'une carte et on montre que les conditions demandées ne posent pas de problème.

Transition : Nombre chromatique = coloriage des sommets, ici : coloriage des faces.

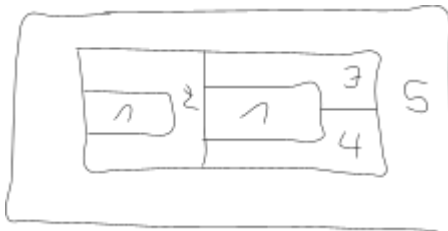
Bonjour à tous ! Dans les dernières vidéos, on a vu ce qu'étaient un graphe planaire et le nombre chromatique dans le coloriage des sommets. Évidemment, si je vous ai introduit ces notions, c'est pour pouvoir se lancer sur le théorème des 4 couleurs. Mais comme on l'a dit, le théorème des 4 couleurs n'a pu être démontré que par ordinateur, et après beaucoup de travail. En revanche, nous, on sait prouver le théorème des 6 couleurs et des 5 couleurs. ça veut dire que si on a une carte, on va prouver dans un premier temps qu'on sait colorier les pays avec 6 couleurs, puis 5, de manière à ce que deux pays voisins soient de couleurs différentes.

Alors petites précisions. On ne va s'intéresser qu'aux cartes pour lesquelles les pays sont en un morceau. Donc la France, la corse et la réunion, ça sera considéré comme 3 pays.

{Question : Pourquoi demander que les pays soient en un morceau ?

- C'est plus difficile à prouver sinon
- Le théorème devient faux sinon
- C'est plus utile dans les applications concrètes
- Le théorème reste vrai de toute façon si les pays sont en plusieurs morceaux }

Si on s'autorise des pays en au moins 2 morceaux, alors on a ça



dans lequel tous les pays touchent tous les autres, donc ils doivent avoir des couleurs différentes, et le théorème serait donc faux.

On ne va pas s'intéresser non plus aux pays enclavés comme Monaco ou le Vatican,



comme ceci .

{Question : Pourquoi ne pas s'intéresser aux pays enclavés ?

- C'est plus difficile à prouver sinon
- Le théorème devient faux sinon

- C'est plus utile dans les applications concrètes
- Le théorème reste vrai de toute façon si on considère des pays enclavés }

Ils ne vont en effet jamais être un contre-exemple, puisque le pays qui l'entoure a une couleur, il reste bien assez de couleurs pour colorier celui à l'intérieur qui n'en touche de toute façon pas d'autre.

On est donc dans la situation où on a une carte devant soi comme ça (simili carte europe). Et il nous faut un graphe. Je vous propose de voir la carte comme un graphe, c'est-à-dire que les arêtes sont déjà tracées, ce sont les frontières des pays. Et comme sommets, on prendra les points qui sont dans la frontière d'au moins 3 pays comme Belgique-Allemagne-France ou comme la Belgique, la France et l'océan. On ignore juste les pays enclavés, et on obtient un graphe. Il est clair que ce graphe, il est planaire puisque quand deux arêtes se coupaient en un point, on en a fait un sommet ;

Tous ses sommets sont au moins de degré 3, par construction. On a dit que les sommets étaient sur la frontière d'au moins 3 pays, donc il y a au moins 3 arêtes qui en partent.

Et il est connexe. Si on avait une carte bizarroïde en deux morceaux, contentez-vous de colorier indépendamment chaque morceau et vous auriez fini.

Eh bien ça, c'est ce qu'on va appeler un graphe issu d'une carte, et on doit montrer qu'il est 6 coloriable, puis on affinera un peu le raisonnement et on montrera qu'il est 5 coloriable. Mais... C'est un coloriage des sommets qu'il nous faut ! Pas des faces ! On en parle de suite.

Vidéo 3.3 : Graphe dual

Lien avec la précédente, on a un graphe mnt pour le théorème.

Mais si quelqu'un avait dit "on s'intéresse aux pays, donc je prends les pays en sommets et je les relie s'ils sont adjacents", on aurait eu quelque chose de différent mais fort semblable → Graphe dual.

Bonjour à tous ! Dans la vidéo précédente, on a pris une carte et on a considéré que les portions de frontière étaient les arêtes, et on a choisi les sommets de manière adéquate, puis on se retrouve à devoir colorier les faces, qui sont les pays, alors qu'on avait parlé d'un coloriage de sommets juste avant.

Bon, intuitivement on peut se dire que ça ne change pas grand chose qu'on colorie les sommets reliés ou les faces adjacentes, mais la ressemblance va plus loin. On aurait pu, à partir d'une carte, dire qu'on prend comme sommets les pays et qu'on les relie s'ils sont adjacents. On obtient un graphe différent mais toutefois fort lié au précédent.

Eh bien il y a un mot en math pour ça, on appelle ça un graphe dual. Détaillons ça.

On part d'un graphe planaire. On va créer un nouveau graphe en prenant comme sommets un point de chaque face du premier graphe, y compris la face extérieure, et on les relie si les faces étaient adjacentes.

Les faces du premier sont devenues les sommets du deuxième et des faces adjacentes sont devenues des sommets reliés par une arête. Donc, forcément, un coloriage des faces du premier revient à un coloriage des sommets du deuxième.

Pour être tout à fait précis, dans notre théorème des n couleurs, on recherche donc le nombre chromatique du dual. Mais on continuera à travailler sur le coloriage des faces, ce qui me semble plus intuitif. Toutefois, vous verrez que cette notion de dual va nous être utile à un moment.

C'est tout pour aujourd'hui ! C'était l'heure du dual ! Au prochain cours, on se lance dans la preuve du théorème ! Portez-vous bien !

Vidéo 4 : K5 n'est pas planaire

Vidéo 4.1

Notre but c'est de montrer que 2 pays parmi les voisins ne sont pas eux-mêmes voisins. ça repose sur le résultat K5 pas planaire (intuition de la preuve)

Bonjour à tous ! Au dernier cours, on a pu prouver qu'il y avait un pays qui n'avait que 5 voisins et, grâce à ça, on a pu attribuer des couleurs à ces 5 voisins, et déduit qu'avec notre 6e couleur disponible, on pouvait colorier ce pays central.

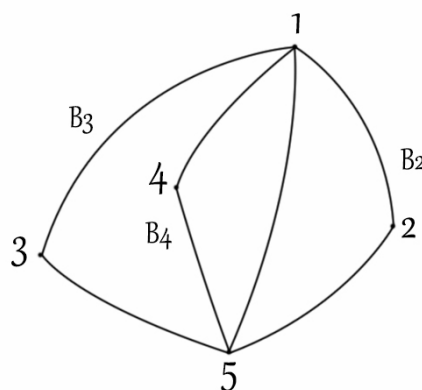
La stratégie pour passer à 5 couleurs, c'est de montrer que parmi les 5 voisins, il y en a toujours au moins 2 qui ne se touchent pas, et qu'on peut donc colorier de la même couleur, économisant ainsi une couleur.

Autrement formulé, si on regarde le dual du graphe, donc les sommets sont donc le pays central et les 5 voisins, il existe forcément 2 sommets non reliés. Autrement dit, le graphe n'est pas complet.

Bon, on sait déjà que c'est le dual d'un graphe planaire, donc il est planaire. Il suffit donc de montrer que le graphe complet à 6 sommets n'est pas planaire. Et en fait on va faire un peu mieux que ça. On va montrer que le graphe complet à 5 sommets, K5, n'est pas planaire. Mais forcément le graphe complet à 6 sommets, K6, comprend K5, donc il peut pas être planaire non plus, et de même pour tous les graphes complets avec plus de 5 sommets !

Voilà ce qu'il nous reste à prouver : K5 n'est pas planaire. Ne vous inquiétez pas, on reviendra en classe sur le reste du raisonnement. Je vous donne ici une idée de la preuve.

Dans K5, dont les sommets sont 1,2,3,4,5, on peut déjà faire ces quelques arêtes.



Alors on ne sait pas si elles sont dessinées comme je l'ai fait, si ça ne marche pas, c'est peut-être que j'aurais pas dû les dessiner comme ça. Mais ce que je prétends, et qui est loin d'être évident à prouver, c'est qu'il y a une boucle qui entoure une des autres arêtes et laisse l'autre dehors, toujours. Ici, la boucle 1-3-5-1 emprisonne le chemin 1-4-5 dedans et laisse le chemin 1-2-5 dehors. Si on admet ça, qu'il y a toujours une boucle qui emprisonne un des autres chemins et laisse l'autre dehors, alors c'est fini, parce qu'on ne pourra jamais

relier 2 et 4 sans couper cette boucle. Or le graphe est complet, donc 2 et 4 sont forcément reliés, cette arête coupe forcément cette boucle, donc coupe une des 3 arêtes qui la composent.

Donc voilà, modulo le résultat que j'ai dit qu'on ne prouvait pas, on a la preuve que K_5 n'est pas planaire et, avec ça, le dernier argument pour pouvoir achever le théorème des 5-couleurs. Rendez-vous en classe pour la fin ! Salut :)

Appendix E

Test proposé

Interrogation - Théorie des graphes

Question 1

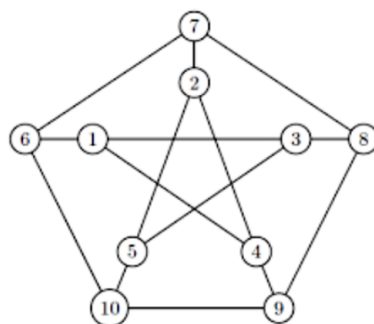
(/4)

- i. Définissez "arbre" et "arbre sous-tendant" dans un graphe simple.
- ii. Prouvez que dans tout graphe simple connexe, il existe un arbre sous-tendant.

Question 2

(/3)

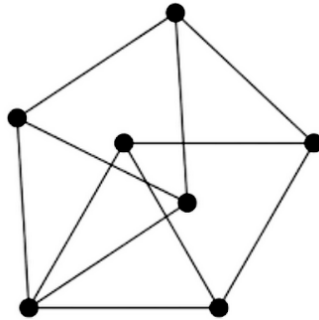
- i. Le graphe suivant est-il biparti ? Justifiez.
- ii. Quel est son nombre chromatique ? Justifiez.



Question 3

(/4)

Quel est le nombre chromatique du graphe suivant ? Justifiez.

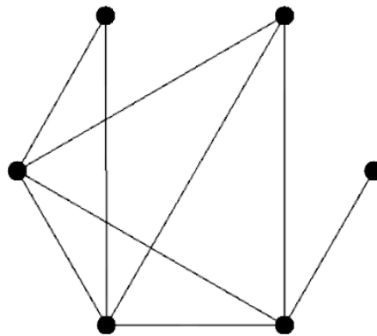


Question 4

(/2)

Le graphe suivant est-il planaire ?

Si oui, donnez en une représentation planaire. Si l'isomorphisme de graphes est évident (déplacement de sommets), vous pouvez ne pas le donner. Si non, justifiez qu'il ne peut pas être planaire.



Question 5 Vrai ou Faux ? *Si c'est vrai, prouvez-le. Si c'est faux, donnez un contre-exemple.*

(/3)

- i. Un graphe dont le degré maximal est au moins 7 n'est pas biparti.
- ii. Il existe un graphe simple avec 8 sommets de même degré et 26 arêtes.
- iii. Un graphe planaire ne peut pas avoir 5 faces, 9 sommets et 13 arêtes.

Question 6

(/4)

Est-il possible que dans un groupe de 13 personnes, chacun ait exactement 2 amis présents ? Est-ce possible que chacun ait exactement 3 amis présents ? On demande de proposer une structure de graphe pour résoudre le problème.

Solutions

Question 1

/0.5 : Définition correcte d'arbre

/0.5 : Définition correcte d'arbre sous-tendant

/0.5 : Sortie de boucle (si le graphe est un arbre, fini)

/1 : Retrait d'une arête

/1 : Conservation des propriétés voulues dans la boucle

/0.5 : Justification que le processus s'arrête

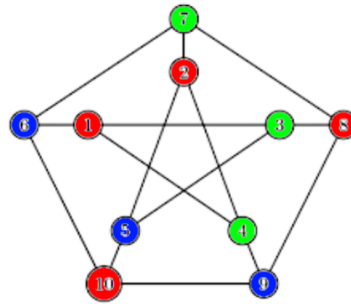
Question 2

/1 : Justification correcte du fait que le graphe ne soit pas biparti

/1.5 : Coloriage admissible des sommets à 3 couleurs

/0.5 : Raisonnement correct

- i. Le cycle 1-3-5-10-6-1 est de longueur impaire, donc le graphe n'est pas biparti
- ii. Voici un 3-coloriage des sommets. Le nombre chromatique est donc au plus 3. Il ne peut pas être 2 car admettre un 2-coloriage des sommets est équivalent au fait d'être biparti. Donc le nombre chromatique est 3.



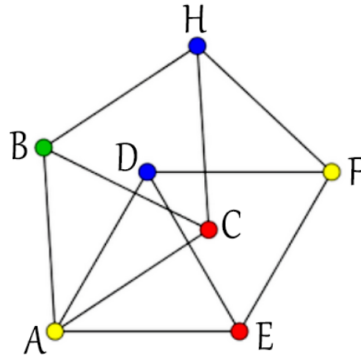
Question 3

/1 : Le graphe est 4-coloriable

/1 : Nombre chromatique correct

/2 : Raisonnement correct

Voici un 4-coloriage des sommets du graphe. Donc son nombre chromatique est inférieur ou égal à 4.



Montrons à présent que le graphe n'admet pas de 3-coloriage des sommets. Quel que soit le coloriage, le sommet A est coloré avec une couleur, appelons-la couleur 1. Comme B et C sont adjacents à A et eux-mêmes adjacents, ils doivent être colorés en des couleurs différentes. Appelons-les couleur 2 et couleur 3. Puisque H est adjacent à B et à C , il doit être coloré avec la couleur 1.

De manière analogue, D et E doivent être colorés en couleur 2 et 3. Puisque F est adjacent à H , D , E qui sont colorés chacun dans une des 3 couleurs différentes, le graphe ne peut pas admettre de 3-coloriage de sommets.

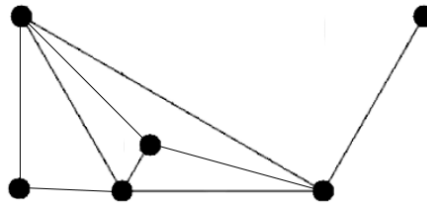
Par conséquent, le nombre chromatique est 4.

Question 4

/0.5 : *Le graphe est planaire*

/1.5 : *Représentation planaire du graphe correcte*

Le graphe est planaire. Voici un graphe isomorphe dont les arêtes ne s'intersectent qu'aux extrémités. L'isomorphisme est évident : seuls les deux sommets initialement représentés en haut ont été déplacés.



Question 5

Pour chaque sous-question :

/0.5 : *Vrai ou faux correct*

/0.5 : *Justification correcte*

- i. Faux. Un graphe étoilé est biparti. Par exemple : un sommet de degré ≥ 7 dont chaque sommet adjacent est de degré 1.

- ii. Faux. Soit d le degré de chaque sommet. Puisque la somme des degrés est égal au double du nombre d'arêtes, on doit avoir

$$8d = 2 \cdot 26 = 52.$$

Or 52 n'est pas divisible par 8.

- iii. Vrai. Puisque le graphe est planaire, sa caractéristique d'Euler est 2. Or avec 9 sommets, 13 arêtes et 5 faces, on a $9 - 13 + 5 = 1 \neq 2$.

Question 6

(Une autre preuve correcte reçoit une note de 2/2)

/1 : Structure de graphe qui permet de formuler le problème et de le résoudre

/0.5 : Possible pour 2 amis

/1 : Preuve correcte pour 2 amis

/0.5 : Impossible pour 3 amis

/1 : Preuve correcte pour 3 amis

On considère le graphe où les sommets sont les personnes du groupe et deux sommets sont reliés par une arête si ces personnes sont amies.

2 amis : C'est possible. En effet, on peut placer les sommets "en rond" (chaque personne étant ami avec le suivant, et le dernier étant ami avec le premier).

3 amis : C'est impossible. En effet, on doit avoir que la somme des degrés est le double du nombre d'arêtes et, en particulier, est pair. Or chaque degré est 3 et il y a 13 sommets, donc la somme de degré est $3 \cdot 13$ qui n'est pas pair.

Appendix F

Analyse statistique sur données simulées

Nous proposons ici l'application de la méthodologie sur des données simulées. Ces données ont été générées suivant le site www.random.org. Pour chaque groupe et chaque question, nous avons choisi arbitrairement une moyenne et un écart-type (avec répétitions autorisées) et avons généré 25 résultats pour le groupe 1 et 24 résultats pour le groupe 2, avec trois chiffres significatifs. Nous avons ensuite arrondi les nombres pour représenter des points traditionnels (à l'unité ou à la demi unité). Nous avons ainsi obtenu les résultats suivants.

Série 1	/4	/3	/4	/2	/3	/4
Traditionnel	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
Élève 1	0	2	4	1.5	0.5	4.5
Élève 2	0	3	1.5	1.5	1.5	2.5
Élève 3	1.5	2.5	2.5	1	1	0
Élève 4	3	2	4	2	1	3
Élève 5	0	3	4	1	0	0
Élève 6	3	3	4	2	1	0
Élève 7	1.5	0.5	3	1	2	0.5
Élève 8	2.5	3	3	1	2	0.5
Élève 9	0	0	0	0.5	1	2.5
Élève 10	0.5	2	2.5	1	3	0
Élève 11	1.5	2	3.5	1.5	2.5	0.5
Élève 12	0	3	4	1	2.5	0
Élève 13	0	3	3	1	1	0
Élève 14	1	3	3	1.5	2	2.5
Élève 15	3.5	3	3	2	0.5	0
Élève 16	0	1.5	3	1.5	1.5	0
Élève 17	1.5	0	3	1.5	0	0
Élève 18	4	3	0.5	1.5	2	3
Élève 19	2.5	2	3	1	2	0
Élève 20	2.5	2.5	2.5	1	1	1
Élève 21	1.5	2.5	2	1	0	1.5
Élève 22	2.5	2	2	1	0	1.5
Élève 23	1	2	1	2	1.5	1.5
Élève 24	1	1.5	2.5	2	1	1
Élève 25	1.5	0.5	1	1.5	0.5	2

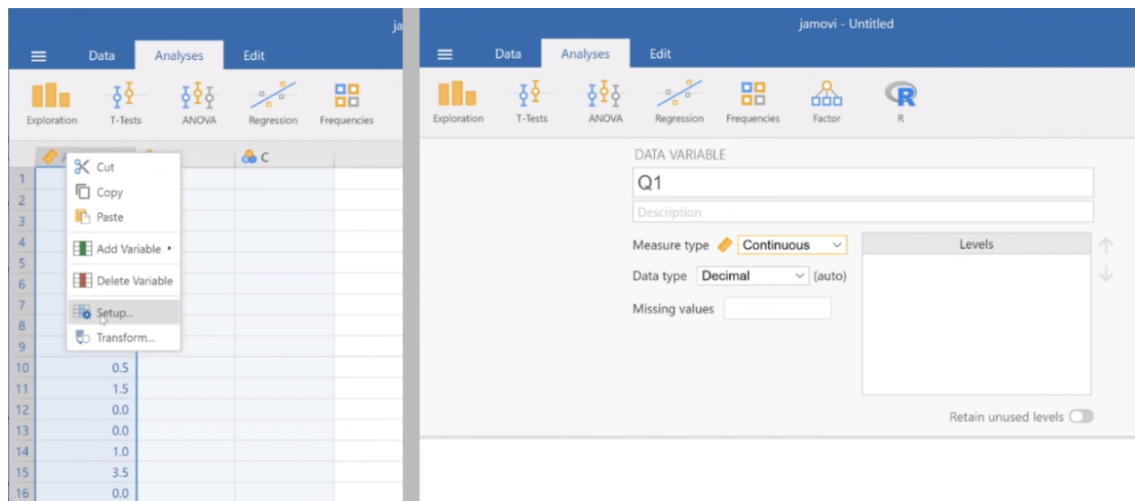
Série 2 :	/4	/3	/4	/2	/3	/4
Inversée	Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
Élève 1	4	1.5	1	1	1.5	0.5
Élève 2	0	1.5	2.5	2	1	1
Élève 3	1.5	2.5	0	1.5	2	2
Élève 4	0	2.5	2	1	3	0
Élève 5	2	2	3	1.5	2	0
Élève 6	1	3	2.5	1.5	0	1.5
Élève 7	2	1.5	3	1.5	1.5	0
Élève 8	0	3	2.5	1	0	4
Élève 9	0.5	1.5	2.5	1.5	3	2.5
Élève 10	1.5	1.5	2	2	3	1.5
Élève 11	0.5	2	1	1.5	2	0
Élève 12	4	1.5	3	1	2	1.5
Élève 13	3	1.5	2.5	2	3	3.5
Élève 14	0	3	3.5	1	1	0
Élève 15	1.5	2.5	3.5	1.5	1.5	2
Élève 16	3	2	3.5	1.5	1	2
Élève 17	0	2.5	3.5	1.5	1	2
Élève 18	0	1.5	2	1.5	2	1.5
Élève 19	2	2	0.5	1.5	1.5	2
Élève 20	0	1.5	4	1	3	1
Élève 21	3	1.5	3	2	1.5	0
Élève 22	0	1.5	2	1	2.5	1.5
Élève 23	3	2.5	2.5	1.5	0	0
Élève 24	1.5	1.5	4	1	0	0

Pour cette analyse, nous utiliserons le programme *Jamovi* ¹.

Comme expliqué dans la méthodologie, elle est identique pour déterminer si la classe inversée a eu un impact significativement différent de l'enseignement traditionnel dans sa globalité ou par niveau de compétence. Dans cet exemple, nous tenterons de voir si la classe inversée a eu un impact significatif par rapport à l'enseignement traditionnel sur les questions de théorie (Question 1).

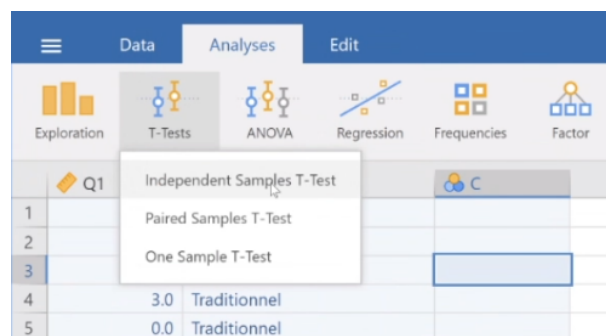
La première étape est d'introduire les données dans Jamovi. Pour ce faire, on copie les points obtenus à la première question dans une première colonne. D'un clic droit sur l'entête de la colonne, dans Setup, on peut entrer les caractéristiques de la variable. Notons qu'il faut entrer "*Continuous*" dans le type de mesure pour indiquer que la variable est quantitative (et non continue !).

¹Disponible gratuitement sur www.jamovi.org

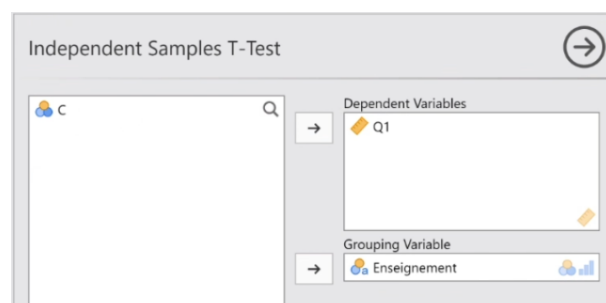


Dans la deuxième colonne, qu'on nommera "*Enseignement*", de type *Nominal*, on indiquera "*Traditionnel*" si le résultat correspondant de la première colonne ait été copié depuis la série 1 ou "*Inversée*" si ce résultat a été copié depuis la série 2.

Pour se lancer dans l'analyse, on se rend dans *T-Tests*. Puisqu'on suppose ici que les 49 individus de l'expérience sont des élèves tous différents, on sélectionne *Independent Samples T-Test*.



On sélectionne, comme variable dépendante, *Q1*, et comme *Grouping variable* (variable indépendante), *Enseignement*.



Avant d'interpréter la p-valeur proposée, il faut vérifier les hypothèses du test. On coche la case *Normality test* (en dessous de *Assumption Checks*). On obtient le résultat suivant.

Assumptions

Normality Test (Shapiro-Wilk)		
	W	p
Q1	0.8943	< .001

Note. A low p-value suggests a violation of the assumption of normality

Comme indiqué dans la partie méthodologie, l'hypothèse nulle du test est que les données proviennent d'une loi normale. Dans ce cas-ci, au seuil de $\alpha = 5\%$, on rejette l'hypothèse nulle, ce qui signifie qu'il y a des preuves que les données ne proviennent pas d'une loi normale.

Dans cette situation, on ne peut appliquer le test de Student. On procède donc au test non paramétrique de Mann-Whitney U en cochant la case correspondante (sous *Tests*) et en décochant *Student's*. On obtient alors les résultats suivants.

Independent Samples T-Test

Independent Samples T-Test			
		Statistic	p
Q1	Mann-Whitney U	296.5	0.951

On peut alors interpréter la p-valeur. Puisque celle-ci est supérieure au seuil de 5%, on ne rejette pas l'hypothèse nulle d'égalité des moyennes. Si la classe inversée avait un impact sur la moyenne des résultats des élèves à la question 1, on a échoué à la mettre en évidence.

Continuons notre analyse fictive des données en supposant que, lors du test de Shapiro-Wilk, on n'ait pas rejeté l'hypothèse nulle. Dans ce cas, on procède au test de Levene en cochant *Homogeneity test*.

Independent Samples T-Test ➔

☒ **Student's**

☐ Bayes factor

Prior

☐ Welch's

☐ Mann-Whitney U

Hypothesis

☒ Group 1 ≠ Group 2

☐ Group 1 > Group 2

☐ Group 1 < Group 2

Missing values

☒ Exclude cases analysis by analysis

☐ Exclude cases listwise

☐ Mean difference

☐ Confidence interval %

☐ Effect size

☐ Confidence interval %

☐ Descriptives

☐ Descriptives plots

Assumption Checks

☒ Homogeneity test

☒ Normality test

☐ Q-Q plot

On obtient alors les résultats suivants.

Homogeneity of Variances Test (Levene's)

	F	df	df2	p
Q1	0.5158	1	47	0.476

Note. A low p-value suggests a violation of the assumption of equal variances

L'hypothèse nulle étant l'égalité des variances, on n'a pu montrer qu'elles étaient significativement différentes puisque la p-valeur est supérieure à 5%. On va donc supposer l'égalité des variances et on peut interpréter le test de Student, en cochant la case correspondante, sous *Tests*.

Independent Samples T-Test

Independent Samples T-Test				
		Statistic	df	p
Q1	Student's t	0.06318	47.00	0.950

Ici aussi, avec une p-valeur supérieure à 5%, si la classe inversée a un impact sur la moyenne des élèves à la question 1, on a échoué à la mettre en évidence.

Enfin, si on suppose maintenant que la p-valeur obtenue au test de Levene nous amène à rejeter l'hypothèse nulle d'égalité des variances, on appliquerait alors la correction de Welch en cochant la case correspondante, sous *Tests*, et on obtiendrait les résultats suivants, qu'on interprète de la même manière.

Independent Samples T-Test

Independent Samples T-Test				
		Statistic	df	p
Q1	Welch's t	0.06305	46.08	0.950

Bibliography

- [1] Akraki I., Decaestecker A. (2021). *Printemps des sciences - Les graphes et les réseaux sociaux*.
<https://sciences.brussels/printemps/projet-expo/les-graphes-et-les-reseaux-sociaux>
- [2] Allam C., Bijnens M., Vanbuel M., Verstegen S. et Young C. (2006). *Handbook on Digital Video and Audio in Education, Creating and using audio and video material for educational purposes, The Videoaktiv Project*.
https://mooczi.files.wordpress.com/2013/11/videoaktiv_handbook_fin.pdf
- [3] Al-Samarraie H., Alzahrani A. et Shamsuddin A. (2019). *A flipped classroom model in higher education: a review of the evidence across disciplines*.
<https://link.springer.com/article/10.1007/s11423-019-09718-8>
- [4] Asensio M. et Young C. (2002). *Looking through Three 'I's: the Pedagogic Use of Streaming Video*.
<http://www.networkedlearningconference.org.uk/past/nlc2002/proceedings/papers/47.htm>
- [5] Auteur inconnu (2014). *The Effect of a Randomised Flipped Classroom Intervention on Mathematics Performance*.
http://rstudio-pubs-static.s3.amazonaws.com/11308_80d54fc6095a46c98ef351b32d5fe409.html
- [6] Bergman J. et Sams A. (2012). *Flip Your Classroom : Reach Every Student in Every Class Every Day*, International Society for Technology in Education.
- [7] Berthiaume D. et Dumont A. (2016). *La pédagogie inversée*, De Boeck Supérieur, Louvain-la-Neuve.
- [8] Collectif Hy-SUP. *Effets sur l'apprentissage (des dispositifs hybrides)*.
<http://prac-hysup.univ-lyon1.fr/webapp/website/website.html?id=1578544&pageId=1745>
- [9] Daubechies I. et Hughes S. (2008). *Graph Theory, part 2*.
http://web.math.princeton.edu/math_alive/5/Notes2.pdf
- [10] Digital Didactics. (?).
<http://www.digitaledidactiek.be/modules/2-ontwerp/overzicht/?lang=fr>

- [11] Duchastel P.C. et Waller R. (1979). *Pictorial illustration in instructional texts*, *Educational Technology*.
https://www.researchgate.net/publication/234643932_Pictorial_Illustration_in_Instructional_Texts
- [12] EDUCAUSE. (2012). *7 Things You Should Know About Flipped Classrooms*.
<https://library.educause.edu/resources/2012/2/7-things-you-should-know-about-flipped-classrooms>
- [13] Esperanza P., Fabian, K. et Toto, C. (2016). *Flipped Classroom Model: Effects on Performance, Attitudes and Perceptions in High School Algebra*.
<https://core.ac.uk/download/pdf/188610835.pdf>
- [14] Fritsch R. et Fritsch G. (1994). *The Four-Color Theorem*. Springer-Verlag, New York.
- [15] Fueyo Diaz R., Gascon S., Masluk B., Oliván-Blázquez B. et al. (2019). *The use of flipped classroom as an active learning approach improves academic performance in social work : A randomized trial in a university*.
<https://journals.plos.org/plosone/article?id=10.1371/journal.pone.0214623>
- [16] Greenberg K., Moore O., Setren E. et Yankovich M. (2019). *Effects of the Flipped Classroom : Evidence from a Randomized Trial*.
<https://seii.mit.edu/wp-content/uploads/2019/08/SEII-Discussion-Paper-2019.07-Setren.pdf>
- [17] Guo, P. J., Kim, J. et Rubin, R. (2014). *How video production affects student engagement: An empirical study of MOOC videos*.
https://www.researchgate.net/publication/262393281_How_video_production_affects_student_engagement_An_empirical_study_of_MOOC_videos
- [18] Iliopoulou A., Kazanidis I. et Moussiades L. (2017). *A framework for the development of educational video: An empirical approach*.
https://www.researchgate.net/publication/320838384_A_framework_for_the_development_of_educational_video_An_empirical_approach
- [19] Khan S. (2011). *Sal Khan let's use video to reinvent education*.
https://www.ted.com/talks/sal_khan_let_s_use_video_to_reinvent_education
- [20] Lebrun M. (2012). *Causerie avec Marcel Lebrun : Flippons nos cours - AIUP2012*.
<https://www.youtube.com/watch?v=kYbxdfGxRi4>
- [21] Lebrun M. (2018). *Classes inversées, les effets : I. Les « résultats » des élèves et des étudiants*. <http://lebrunremy.be/WordPress>

- [22] Lebrun M. et Lecoq J. (2016). *La classe à l'envers pour apprendre à l'endroit - guide pratique pour débiter en classe inversée*
<https://uclouvain.be/fr/etudier/l111/cahier-classe-inversee.html>
- [23] Lo C.K., Hew K.F. et Chen G. (2017). *Toward a set of design principles for mathematicsflippedclassrooms: A synthesis of research in mathematics education*.
<https://luis-miguel-villar-angulo.es/wp-content/uploads/2018/01/Lo-Hew-y-Chen-2017.pdf>
- [24] Mathelart C., Motte Z. et Pascal V.G. (2019). *Des exemples d'usages pédagogiques de la vidéo au croisement des modèles de Laduron/Rappe et ICAP*.
<https://view.genial.ly/5da6eb39705f3e7979d2f919>
- [25] Miller A. (2012). *5 Best Practices for the Flipped Classroom*.
<https://www.edutopia.org/blog/flipped-classroom-best-practices-andrew-miller>
- [26] Ossona de Mendez P. (2017). *Du Théorème de Ramsey à la Conjecture d'Erdős-Hajnal*.
<https://images.math.cnrs.fr/Du-Theoreme-de-Ramsey-a-la-Conjecture-d-Erd%C5%91s-Hajnal-1.html>
- [27] Printemps des sciences. (2012). *Les graphes et les réseaux sociaux*.
<https://sciences.brussels/printemps/projet-expo/les-graphes-et-les-reseaux-sociaux/>
- [28] Stauffer B. (2018). *How to Flip a Classroom in CTE: 6 Best Practices*.
<https://www.aeseducation.com/blog/how-to-flip-a-classroom-in-cte-6-best-practices>
- [29] The university of Queensland. (?). *Video for teaching and learning*
<http://www.uq.edu.au/teach/video-teach-learn/ped-benefits.html>
La page est désormais introuvable depuis environ le 23 novembre 2020.

Références des études citées dans [13] lors de l'analyse des recherches existantes en mathématiques.

11. Cilli-Turner, E.: Measuring Learning Outcomes and Attitudes in a Flipped Introductory Statistics Course. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*. 25, 833–846 (2015)
12. McGivney-Burelle, J., Xue, F.: Flipping Calculus. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*. 23, 477–486 (2013)
13. Muir, T., Geiger, V.: The affordances of using a flipped classroom approach in the teaching of mathematics: a case study of a grade 10 mathematics class. *Mathematics Education Research Journal*. 149–171 (2015)
14. Love, B., Hodge, A., Grandgenett, N., Swift, A.W.: Student learning and perceptions in a flipped linear algebra course. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 45, 317–324 (2013)
15. McCallum, S., Schultz, J., Sellke, K., Spartz, J.: An Examination of the flipped classroom approach on college student academic involvement. *International Journal of Teaching and Learning in Higher Education*. 27, 42–55 (2015)
16. Weng, P.: Developmental Math, Flipped and Self-Paced. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*. 25, 768–781 (2015)
17. Lape, N.K., Levy, R., Yong, D.H., Haushalter, K.A., Eddy, R., Hankel, N.: Probing the inverted classroom: A controlled study of teaching and learning outcomes in undergraduate engineering and mathematics. 121st ASEE Annual Conference and Exposition. (2014)
18. Zack, L., Fuselier, J., Graham-Squire, A., Lamb, R., O'Hara, K.: Flipping Freshman Mathematics. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*. 25, 803–813 (2015)
19. Murphy, J., Chang, J.-M., Suaray, K.: Student performance and attitudes in a collaborative and flipped linear algebra course. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*. 47, 653–673 (2016)
20. Wilson, S.G.: The Flipped Class: A Method to Address the Challenges of an Undergraduate Statistics Course. *Teaching of Psychology*. 40, 193–199 (2013)
21. Young, A.: Flipping the Calculus Classroom: A Cost-Effective Approach. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*. 25, 713–723 (2015)
22. Van Sickle, J.: Adventures in Flipping College Algebra. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*. 25, 600–613 (2015)
23. Guerrero, S., Beal, M., Lamb, C., Sonderegger, D., Baumgartel, D.: Flipping Undergraduate Finite Mathematics: Findings and Implications. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*. 25, 814–832 (2015)
24. Strayer, J.F.: How learning in an inverted classroom influences cooperation, innovation and task orientation. *Learning Environments Research*. 15, 171–193 (2012)
25. Chen, Y., Wang, Y., Kinshuk, Chen, N.S.: Is FLIP enough? or should we use the FLIPPED model instead? *Computers & Education*. 79, 16–27 (2014)
26. Touchton, M.: Flipping the Classroom and Student Performance in Advanced Statistics: Evidence from a Quasi-Experiment. *Journal of Political Science Education*. 11, 28–44 (2015)
27. Overmyer, J.: Research on Flipping College Algebra: Lessons Learned and Practical Advice for Flipping Multiple Sections. *Problems, Resources, and Issues in Mathematics Undergraduate Studies*. 25, 792–802 (2015)
28. Kirvan, R., Rakes, C.R., Zamora, R.: Flipping an Algebra Classroom: Analyzing, Modeling, and Solving Systems of Linear Equations. *Computers in the Schools*. 32, 201–223 (2015)

UNIVERSITÉ CATHOLIQUE DE LOUVAIN

Faculté des sciences

Place des sciences, 2 bte L6.06.01, 1348 Louvain-la-Neuve, Belgique | www.uclouvain.be/sc